

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SIDNEY TIAGO DA SILVA

**Equilíbrio MHD estacionário para plasmas
com rotação azimutal em um sistema de
coordenadas cilíndricas**

**Curitiba
2016**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SIDNEY TIAGO DA SILVA

**Equilíbrio MHD estacionário para plasmas
com rotação azimutal em um sistema de
coordenadas cilíndricas**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física sob orientação do *Prof. Dr.* Ricardo L. Viana.

**Curitiba
2016**

S586e

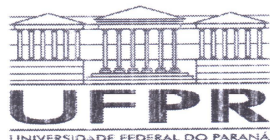
Silva, Sidney Tiago da
Equilíbrio MHD estacionário para plasmas com rotação azimutal em um sistema de coordenadas cilíndricas / Sidney Tiago da Silva. – Curitiba, 2016. 82 f ; il. color : 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Orientador: Ricardo Luiz Viana .
Bibliografia: p. 79-82.

1. Magnetoidrodinâmica. 2. Física dos plasmas. 3. Plasma (Gases ionizados). I. Universidade Federal do Paraná. II.Viana, Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 530.44



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **SIDNEY TIAGO DA SILVA** intitulada: **Descrição de Equilíbrio MHD Estacionário para o Plasma com Rotação Azimutal em um Sistema de Coordenadas Cilíndricas**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 17 de Fevereiro de 2017.

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

SÉRGIO ROBERTO LOPES

Avaliador Interno (UFPR)

IBERÉ LUIZ CALDAS

Avaliador Externo (USP)



**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM FÍSICA**

No dia dezessete de Fevereiro de dois mil e dezessete às 10:00 horas, na sala PE04, Departamento de Física - Bloco II - Centro Politécnico, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **SIDNEY TIAGO DA SILVA** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada **Descrição de Equilíbrio MHD Estacionário para o Plasma com Rotação Azimutal em um Sistema de Coordenadas Cilíndricas**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: RICARDO LUIZ VIANA (UFPR), SÉRGIO ROBERTO LOPES (UFPR), IBERÊ LUIZ CALDAS (USP). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, RICARDO LUIZ VIANA, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 17 de Fevereiro de 2017.

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

SÉRGIO ROBERTO LOPES

Avaliador Interno (UFPR)

IBERÊ LUIZ CALDAS

Avaliador Externo (USP)

Agradecimentos

À minha mãe e meu pai, por todo o apoio.

À minha esposa, Jacqueline, pela paciência, apoio, companheirismo e incentivo.

Ao professor Dr. Ricardo Luiz Viana, pela orientação, dedicação e paciência.

Ao grupo de pesquisa de física de plasma da Universidade Federal do Paraná, pelo auxílio.

A todos os amigos e colegas da pós-graduação.

Aos demais familiares e amigos, que mesmo não participando diretamente deste trabalho fazem tudo valer a pena.

*"Saber como pensar torna a
pessoa muito mais capaz do que
aquele que apenas sabe o que
deve pensar"*

Neil deGrasse Tyson

Resumo

Foi derivada uma equação de equilíbrio estacionário MHD de plasmas em rotação na direção azimutal, no caso de um sistema de coordenadas cilíndricas, descrevendo o plasma como um fluido de condutividade infinita, considerando a entropia como uma quantidade de superfície. Para a resolução dessa equação diferencial, foram propostos perfis tanto para a pressão como para o fluxo de corrente. Primeiramente revisamos a solução obtida por Maschke e Perrin, onde consideraram perfis lineares tanto para a pressão como para o fluxo de corrente. Em seguida apresentamos duas novas soluções, uma quadrática para o fluxo de corrente e a pressão, outra linear para a pressão e quadrática para o fluxo de corrente. A partir dessas soluções, plotamos vários gráficos, onde analisamos o efeito da rotação nas componentes do campo magnético e na densidade de corrente, como também o efeito da rotação na pressão e no fluxo magnético.

Abstract

An equation for MHD stationary equilibrium of rotating plasmas in the azimuthal direction is derived in the case of an cylindrical coordinate system with a plasma describing the plasma as an infinite-conductivity fluid, considered the entropy is a surface quantity. For the resolution of this differential equation it was necessary to propose profiles for both pressure and current flow. Firstly we did a review of the solution obtained by Maschke and Perrin, where they considered linear profiles for both pressure and current flow. Next we present two new solutions, one quadratic for current flow and pressure, one linear for pressure and quadratic for current flow. From these solutions, We plot several graphs, where we analyze the effect of rotation on the components of the magnetic field and current density, as well as the effect of the rotation on the pressure and the magnetic flux.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Plasmas e confinamento magnético	2
1.1.1	Critério para um plasma	3
2	Magnetohidrodinâmica	10
2.1	Equações da Hidrodinâmica	10
2.2	Equações de fluido	10
2.2.1	Derivada convectiva	11
2.2.2	Equação da continuidade	12
2.2.3	Equação da continuidade de carga	14
2.2.4	Equação de Euler	15
2.3	Equações do eletromagnetismo	18
2.3.1	Equação de Maxwell no vácuo	18
2.3.2	Abstenção da corrente de deslocamento	21
2.3.3	Lei de Ohm generalizada	22
2.3.4	Teorema de Alfvén	23
2.3.5	Força de Lorentz	24
2.4	Equações da MHD ideal	25
3	Equilíbrio MHD em sistemas com simetria axial	27
3.1	Superfícies Magnéticas	28
3.2	Função de fluxo poloidal	29
3.2.1	Relação de Ψ com o fluxo magnético poloidal	31
3.3	Operador Shafranov	32
3.4	Função de corrente poloidal	33
3.5	Equação de Grad-Shafranov	35
4	Equilíbrio MHD para plasmas em rotação toroidal	37
4.1	Entropia como quantidade de superfície	37
4.2	Solução para perfis lineares de $G(\Psi)$ e $I^2(\Psi)$	46
4.2.1	Deslocamento do eixo magnético devido à rotação	51

5	Soluções da equação de Maschke-Perrin para um toroide compacto	58
5.1	Equação de equilíbrio em coordenadas cilíndricas	59
5.1.1	Pressão quadrática em função de Ψ	59
5.2	Pressão linear em função de Ψ	68
6	Conclusões	76
	Referências Bibliográficas.....	79

Lista de Figuras

1.1	Blindagem de Debye.	3
1.2	Comparação entre spheromak e FRC ²	5
1.3	Movimento das partículas carregadas em um campo magnético uniforme ¹	6
2.1	Derivada convectiva.	11
2.2	Elemento de volume Euleriano, suas condições de contorno fixadas no espaço.	12
2.3	Elemento de superfície Euleriano, mostrando que o vetor de velocidade \mathbf{v} e o vetor de elemento de área dA	13
2.4	Elemento de superfície com vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$	14
2.5	Referenciais inerciais.	22
2.6	Evolução de um volume elementar de um fluido delimitada pela superfície A_1 , que ao longo tempo Δt flui com velocidade \mathbf{v} na posição A_2	23
3.1	Pressão do plasma contrabalanceada pela força magnética. . .	28
3.2	Linhas do campo magnético e correntes perpendiculares ao ∇p	29
3.3	Sistema de coordenadas cilíndricas	29
3.4	O fluxo magnético poloidal Ψ_p entre as duas superfícies magnéticas Ψ_1 e Ψ_2 é dada por $\Psi_p = 2\pi(\Psi_2 - \Psi_1)$	31
4.1	Superfícies magnéticas em função da velocidade para $\epsilon_a = 0, P = 1, \mu_0 = 1$ e $r_0 = 1$	50
4.2	Superfícies magnéticas e linhas de pressão corrigida para $\Omega = 1$	50
4.3	Deslocamento do eixo magnético para $a = 1/4$ e $\gamma = 5/3$	53
4.4	Perfil de $G(\Psi)$ normalizado em relação ao máximo na região equatorial para $P = 1$	54
4.5	Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial $[B_0 = -B_z(0, 0)]$ para $\epsilon_a = 0, \mu_0 = 1, P = 1, \eta = 5/2$ e $R_0 = 1$.	55

4.6	Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial $[B_0 = B_\phi(0, 0)]$ para $\mu_0 = 1, M = 1, I_0 = 1$ e $R_0 = 1$	56
4.7	Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial $[J_0 = J_z(0, 0)]$ para $\epsilon_a = 0, \mu_0 = 1, P = 1, \eta = 5/2$ e $R_0 = 1$	57
4.8	Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial $[J_0 = J_\phi(0, 0)]$ para $\epsilon_a = 0, \mu_0 = 1, P = 1, \eta = 5/2$ e $R_0 = 1$	57
5.1	Cilindro, onde $0 \leq Z \leq Z_0$ e $0 \leq R \leq R_0$	60
5.2	P em função de Ω para diferentes valores de M e $\eta = 5/2$	61
5.3	$\Psi(z, r)$ normalizado na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0, \Omega = 1$ e $\Omega = 2$, respectivamente.	62
5.4	Pressão normalizada na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0, \Omega = 1$ e $\Omega = 2$	63
5.5	Deslocamento do eixo magnético em função da rotação para $M=-1, M=0$ e $M=1$	63
5.6	Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial $[B_0 = -B(0, 0)]$ para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	64
5.7	Perfil da componente B_ϕ normalizado em relação ao máximo na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	65
5.8	Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial $[J_0 = J(0, 0)]$ para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	66
5.9	Perfil da densidade de corrente J_ϕ na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	66
5.10	A região transversal da superfície do fluxo magnético em função da velocidade angular para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	67
5.11	Região transversal das superfícies magnéticas e superfícies isobáricas para $\Omega = 1$	67
5.12	P em função de Ω , variando M e $\eta = 5/2$	70
5.13	$\Psi(z, r)$ normalizado na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0, \Omega = 1$ e $\Omega = 2$, respectivamente.	70
5.14	Pressão normalizada na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0, \Omega = 1$ e $\Omega = 2$	71
5.15	Deslocamento do eixo magnético em função da rotação para $M=-1, M=0$ e $M=1$	71
5.16	Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial $[B_0 = -B(0, 0)]$ para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	72
5.17	Perfil da componente B_ϕ normalizado na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	72

5.18	Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial [$J_0 = J(0, 0)$] para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	73
5.19	Perfil da densidade de corrente J_ϕ o na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	74
5.20	A região transversal da superfície do fluxo magnético em função da velocidade angular para $M = 1$ e $\eta = 5/2$	74
5.21	Região transversal das superfícies magnéticas e superfícies isobáricas para $\Omega = 1$ e $M=1$	75

Capítulo 1

Introdução

Sem a energia do nosso Sol, a Terra seria um planeta deserto e frio. A reação de fusão de núcleo de hidrogênio em hélio produz uma enorme quantidade de energia e um fluxo constante de calor (mais de meio por cento da massa do núcleo de hidrogênio é convertida em energia e radiação) e é então difundida para o espaço[1].

O ciclo de próton-próton é baseado numa interação muito fraca, resultado de sua pequena seção de choque transversal, o que torna impossível de ser realizada aqui na Terra. No Sol só é possível graças às extremas condições de pressão e temperatura do seu núcleo (pressão acima de 150 bilhões de bar e 15 milhões de graus celsius[1]), essas condições são alcançadas como resultado de sua enorme força gravitacional. Para podermos alcançar a fusão nuclear aqui na Terra, temos que ter uma alta probabilidade de reação. Isso é obtido com a utilização de isótopos de hidrogênio. O modelo mais simples é a reação entre deutério e trítio (DT), que pode ser realizada em torno de 150 milhões de graus celsius . Embora muito mais alta que o Sol, tal temperatura é alcançado atualmente por dispositivo que usa confinamento magnético para o confinamento do plasma, mas com densidade e pressão muito menores do que as do Sol.

Com essa temperatura tão elevada, o gás de hidrogênio (combustível utilizado na fusão), é transformado em uma mistura de elétrons e íons, chamada de plasma. O plasma pode ser compreendido como sendo um gás ionizado [2], que exhibe comportamento coletivo, devido às forças coulombianas, mas exibindo uma quase neutralidade como um todo. Com isso, nem todo gás ionizado pode ser considerado plasma, sendo preciso estabelecer alguns critérios para tal.

O plasma é de longe o estado mais comum da matéria do universo, todas as estrelas são feitas de plasma, e mesmo o espaço entre as estrelas é preenchido por ele, embora muito esparsa. O plasma é um dos quatro estados

fundamentais da matéria, juntamente com os estados sólido, líquido e gasoso.

1.1 Plasmas e confinamento magnético

As forças intermoleculares é o que define o estado físico da matéria, quando há fornecimento de energia térmica suficiente, há transformação de um estado para outro. Por exemplo, fornecemos energia térmica para uma substância que encontra inicialmente no estado sólido, até sua temperatura de fusão, haverá uma transição de fase para o estado líquido, da mesma forma, fornecendo energia térmica suficiente para quebrar as ligações intermoleculares do estado líquido ocorrerá uma transição de fase para o estado gasoso, se continuarmos a fornecer energia e se essa for suficiente para dissociar as moléculas do gás em elétrons e íons, permanecendo dessa forma, poderemos ter a formação de um plasma.

Nem todo o gás ionizado pode ser considerado plasma, a definição mais aceita diz: "plasma é um gás quase neutro de partículas carregadas e neutras que exibem comportamento coletivo". Além disso, todo o gás possui algum grau de ionização, de acordo com a equação de Saha[2]:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_i} e^{-\frac{U_i}{k_B T}} \quad (1.1)$$

Onde n_i é a densidade dos átomos ionizados em um gás, n_n a densidade de átomos neutros, T é a temperatura do gás em Kelvin, U_i é a energia de ionização do gás e $k_B = 1,346 \times 10^{-23} J/K$ é a constante de Boltzmann.

Por definição: A energia de ionização é a energia necessária para retirar o elétron mais externo de um átomo do gás para que se torne um elétron livre e o átomo um íon.

Ele ocorre da seguinte maneira[3]: há uma distribuição de energia térmica dos átomos no gás, portanto, uma distribuição de velocidades. Para que um átomo fique ionizado é necessário que este sofra uma colisão de energia suficientemente alta para que um elétron seja arrancado de sua camada mais externa. Isso ocorrerá se alguns átomos forem acelerados a uma energia superior a energia cinética média da distribuição, ou seja, se alguns átomos tiverem uma velocidade superior à velocidade média da distribuição, são os átomos da "cauda" da distribuição. O número de átomos rápidos pode ser visto como o número de átomos que ficaram ionizados. De acordo com a equação de Saha, o número de átomo ionizado decai com $e^{-\frac{U_i}{k_B T}}$, isto é, uma vez que um átomo sofra uma colisão de alta energia e fique ionizado, este colidirá rapidamente com algum elétron livre e se recombinará, tornando neutro novamente. Então o número de átomos ionizados permanece baixo

até que a temperatura seja tão alta que $k_b T$ tenha um valor próximo de U_i . Aumentando ainda mais a temperatura a densidade de átomos ionizados torna-se maior que a densidade de átomos neutros e o gás estará totalmente ionizado.

1.1.1 Critério para um plasma

Para entendermos a definição de plasma é necessário compreendermos o comportamento coletivo e a quase neutralidade.

Devido ao plasma ser formado basicamente de partículas carregadas (elétrons e íons), o movimento dessas partículas em uma determinada região produz campos eletromagnéticos que afetam outras regiões do plasma, como as forças coulombianas são interações de longo alcance, uma porção do plasma é influenciada por outra região mesmo que estejam separadas por uma grande distância. Diferentemente do que ocorre nos gases neutros, cuja interação só ocorre durante a colisão, o plasma possui um comportamento coletivo.

A quase neutralidade do plasma é devido a sua habilidade de blindar campos elétricos em seu interior, conhecida como blindagem de Debye[2]. Quando colocamos cargas elétricas no interior do plasma, conectados a uma bateria, por exemplo, como mostra a figura 1.1, rapidamente os elétrons livres do plasma serão atraídos pelo terminal positivo da bateria e os íons serão atraídos pelo negativo, formando uma nuvem de blindagem eletrônica.

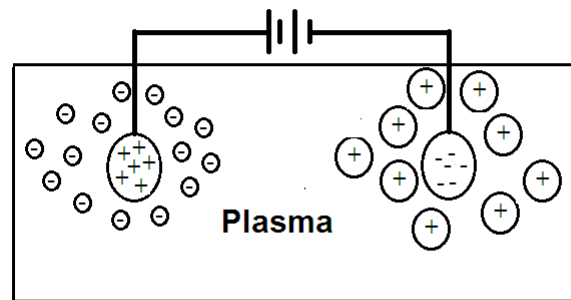


Figura 1.1: Blindagem de Debye.

Como no plasma, as partículas possuem alta energia térmica, essa blindagem

dagem não é perfeita, e algumas partículas próximas das extremidades da nuvem de blindagem conseguem vencer a barreira de potencial elétrico devido ao seu movimento térmico. Portanto na extremidade da nuvem a energia potencial elétrica é aproximadamente igual à energia térmica das partículas. O raio da nuvem de blindagem é dado pelo comprimento de Debye[1]

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

onde n_e e T_e são respectivamente a densidade e a temperatura dos elétrons do plasma, k_B é a constante de Boltzmann e ϵ_0 a constante dielétrica na vácuo. A temperatura e a densidade dos elétrons, são usadas na definição acima, devido aos elétrons terem maior velocidade que os íons.

A quase neutralidade do plasma é devido ao fato que a blindagem de Debye ocorre em uma região muito pequena comparada a dimensão do plasma. Disto resulta que, em regiões fora da nuvem de blindagem, as partículas continuam se recombinando devido às colisões provocados pelo movimento térmico e o plasma é dito quase neutro. Assim o plasma fica livre de grandes potenciais e campos elétricos na maior parte da sua extensão, havendo um desbalanço de cargas apenas nas pequenas regiões contidas dentro das nuvens de blindagens.

A quase neutralidade permite dizer que a densidade de elétrons é aproximadamente igual à densidade de íons, $n_i \approx n_e \approx n$, mas que, em contrapartida os efeitos eletromagnéticos não estão ausentes no plasma.

Então podemos concluir que para um gás ionizado seja quase neutro e, portanto, ser considerado um plasma de acordo com (1.2), é necessário que seja denso o suficiente para que λ_D seja pequeno o bastante em comparação a dimensão característica L do plasma.

Para a formação de plasmas nos reatores, o gás de hidrogênio necessita alcançar uma temperatura muito elevada. Uma vez alcançando essa temperatura, a pressão cinética gerada no interior do plasma tende a fazê-lo expandir. Contudo, o plasma não deve entrar em contato com as paredes do reator, pois os íons iriam se recombinar com os átomos da superfície, tornando-se neutros e conseqüentemente resfriando o material e danificando a máquina.

Para impedir essa expansão e confiná-lo, é necessário buscar uma forma de contrabalancear essa pressão. Como o plasma é formado por partículas carregadas (elétrons e íons), podemos confiná-lo com um campo magnético intenso. Este tipo de confinamento, chamado de “confinamento magnético”, consiste em aplicar um campo magnético orientado convenientemente a fim de contrabalancear a expansão do plasma. Um dos modelos de reatores que utilizam esse tipo de confinamento são os toroides compactos[4, 5].

Utilizando campos magnéticos fechados para o confinamento do plasma, mas diferentemente dos tokamak, não possuem bobinas que produzem campo toroidal, resultando em uma configuração compacta e altamente modular, diminuindo seu custo e manutenção. As principais configurações incluídas dentro desse quadro são: spheromak e a configuração de campo reverso (FRC). Podemos comparar a topologia magnética entre eles, como mostrado na fig 1.2 ².

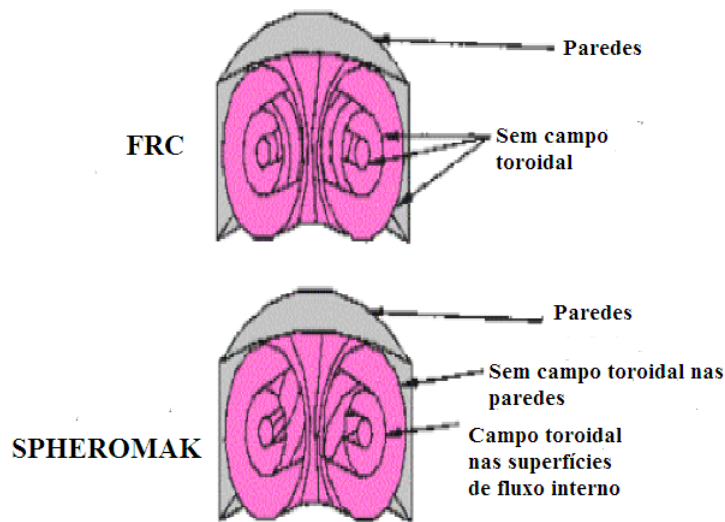


Figura 1.2: Comparação entre spheromak e FRC².

Uma parâmetro importante no confinamento magnético do plasma é o beta do plasma β que é a razão entre a pressão cinética e a pressão magnética.

$$\beta = \frac{nk_bT}{B^2/2\mu_0}, \quad (1.3)$$

onde B é o campo magnético e μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo. Esse parâmetro está relacionado diretamente ao custo para manter o plasma confinado dentro dos reatores de fusão.

O spheromak é uma configuração de confinamento toroidal com baixo beta onde as correntes fluem no plasma produzindo praticamente todo o campo magnético. Eles possuem um campo magnético toroidal finito que se anula na superfície do plasma, conseqüentemente não há nenhuma bobina externa que produza o plasma. FRC são configurações de confinamento toroidal de alto beta, ao qual, não possuem campo magnético toroidal e também

²Fonte <http://www.frascati.enea.it>

não possuem bobina externa que geram o plasma a partir do combustível termonuclear.

A principal diferença do spheromak e FRC, são que o primeiro possui um campo toroidal sem ter bobinas de campo toroidal, o segundo não tem bobinas de campo toroidal, mas também não tem campo toroidal fig 1.2.

No confinamento magnético, partículas carregadas sofrem influência de campos magnéticos, onde contornam as linhas de campo de acordo com a força de Lorentz[6]. Num campo uniforme, elas percorrem helicoidalmente essas linhas (figura 1.3) e esse movimento pode ser dividido em movimento circular com o raio de giro $r_L = v_{\perp}/\omega$ (raio de Larmor) e o movimento linear do seu centro do giro (centro guia), onde v_{\perp} é a componente perpendicular da velocidade da partícula que se move na direção da linha de campo e $\omega = qB/m$ é a frequência angular do ciclotron (frequência de giro), onde q é a carga da partícula, m a massa e B a intensidade do campo magnético¹.

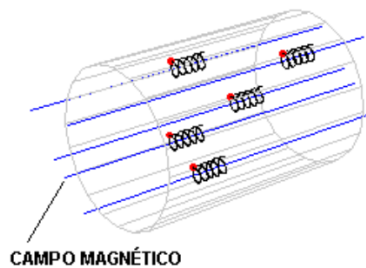


Figura 1.3: Movimento das partículas carregadas em um campo magnético uniforme¹

Para o confinamento magnético do plasma nos reatores de fusão nuclear é necessário produzir campos magnéticos fechados, que são formado basicamente pela superposição de campos toroidais e poloidais criando linhas magnéticas fechadas. Essas linhas de campo magnético resultante são então helicoidal e jazem em torno das superfícies toroidais internas umas às outras formando superfícies magnéticas.

O aquecimento nos reatores de fusão nuclear é feito principalmente por

¹Fonte http://www.plasma.inpe.br/LAP_Portal/LAP_Sitio/Texto/Confinamento_de_Plasma.htm/02/12/2016

aquecimento ôhmico P_{oh} [1], a partir da corrente induzida dentro do plasma.

$$P_{oh} = R_p I_p^2,$$

onde (R_p é a resistência elétrica e I_p^2 a corrente de plasma).

Poderíamos concluir que aumentando essa corrente, haveria um crescimento da temperatura até atingirmos 150 milhões de graus celsius, mas infelizmente, limitações físicas tornam-se importante nesse estágio. A máxima corrente de plasma não é limitada pelas restrições tecnológicas, mas é pela própria instabilidade que destrói o confinamento, além disso, quanto mais o plasma é aquecido, mais baixa é o número de colisões entre as partículas, e assim, menor a resistência elétrica, e conseqüentemente, menor aquecimento ôhmico é produzido pela corrente do plasma, que diminui proporcionalmente com $T^{-3/2}$, onde T é a temperatura do plasma[7].

Para auxiliar no aquecimento ôhmico e atingir a temperatura de fusão, métodos adicionais são necessários, um desses métodos é feito basicamente pela injeção de partículas neutras dentro do plasma, transferindo sua energia e conseqüentemente aumentando sua temperatura. Essas partículas precisam serem neutras para que não sofreram influência dos campos eletromagnéticos. Elas atravessam o campo magnético, não sendo afetadas e então são ionizadas pela colisão com as partículas carregadas, transferindo sua energia para o plasma e tendo como consequência, a transferência de momento linear, resultando em uma rotação toroidal.

Uma boa descrição para o balanço de forças em plasmas toroidais é dado pela teoria de equilíbrio MHD (magnetohidrodinâmica) que é a descrição hidrodinâmica juntamente com as equações de Maxwell, que trata o plasma como sendo um gás ideal com condutividade infinita. Isso é uma aproximação válida em plasmas de fusão, uma vez que a condutividade elétrica cresce com a temperatura do elétron T_e ($\sigma \propto T_e^{3/2}$), e com o tempo de escala muito curto em relação ao típico tempo de distribuição da corrente. Nessa aproximação tratamos o plasma como um fluido sem viscosidade.

A condição de equilíbrio MHD considera o plasma como sendo um fluido com condutividade infinita e adiabático, onde todas as suas quantidades físicas não tem dependência explícita com o tempo, compreendendo o equilíbrio estático, onde a velocidade do plasma é nula e o equilíbrio estacionário, onde a velocidade é constante.

Um bom exemplo de equilíbrio MHD estacionário é a rotação azimutal em plasmas axissimétricos(apresenta simetria em relação a um eixo)[8]. Isso acontece, por exemplo, quando há injeção de partículas neutras dentro dos reatores de fusão, ocorrendo à transferência de momento linear para o plasma, resultando numa rotação na direção toroidal.

Nosso interesse na rotação toroidal está relacionada com várias questões

importantes, tais como as estabilidades. Por exemplo, na configuração de campo reverso (FRC), a rotação azimutal é responsável por um tipo de instabilidade que pode destruir o confinamento do plasma. Outra consequência importante tem sido a influência que rotação exerce na estrutura do confinamento magnético.[8].

Como no equilíbrio MHD não há resistividade, o teorema de Alfvén[9] diz que: as linhas do campo magnético giram rigidamente com o plasma. Havendo axissimetria, as linhas de campo se encontram nas superfícies de fluxo magnético em uma topologia de torus e são caracterizadas pelas quantidades de superfícies.

O conjunto de equações MHD ideais permite derivar uma equação diferencial parcial para fluxo magnético[10, 11]. Maschke e Perrin[12] derivaram essa equação de equilíbrio MHD ideal para o fluxo magnético em plasmas rotacionais com simetria azimutal, supondo a temperatura ou a entropia como quantidades de superfície em um sistema de coordenadas cilíndricas. Em ambos os casos obtiveram uma solução analítica, assumindo perfis lineares para a pressão modificada e o fluxo de corrente.

Utilizando as mesmas quantidades de superfícies de Maschke e Perrin, Viana[13, 14] obteve uma equação de equilíbrio MHD estacionário para plasmas rotacionais, considerando um sistema de coordenadas ortogonais curvilíneas e assumindo a existência de uma coordenada ignorável em relação a quantidade de superfície.

No caso da temperatura como quantidade de superfície, Clemente e Farengo[15] encontraram uma solução semi-analítica para a equação de Maschke e Perrin, assumindo perfis quadráticos para a pressão modificada e o fluxo de corrente. Viana, Clemente e Lopes[16] obtiveram uma solução analítica aproximada para equação de equilíbrio MHD estacionário em coordenadas esféricas, assumindo perfil linear em função do fluxo magnético para a pressão modificada e quadrática para o fluxo de corrente quadrática.

O caso da entropia como quantidade de superfície, tem sido pouco explorado [13], uma vez que, não há muitas soluções, resumindo basicamente à solução encontrada por Maschke e Perrin. Objetivo desse trabalho é propor duas novas soluções para a equação de equilíbrio MHD estacionário com um perfil quadrático para o fluxo de corrente e um perfil linear e quadrático para a pressão modificada, ambos em sistema cilíndrico e assumindo a entropia como quantidade de superfície. Nessas soluções consideramos o plasma rotacionando num cilindro perfeitamente condutor onde fluxo magnético é nulo na superfície do cilindro.

Esse trabalho encontra-se dividido em 6 capítulos:

No capítulo 2, apresentamos as equações que descrevem a magnetohidrodinâmica ideal.

A seguir, no capítulo 3 derivamos a equação MHD para um equilíbrio estático considerando uma geometria cilíndrica com simetria azimutal. Devido a essa simetria[17] todas as grandezas físicas dependem somente de duas coordenadas. Esse tipo de confinamento dá origem a um fenômeno conhecido como deslocamento de Shafranov. Esse fenômeno provoca o deslocamento das superfícies magnéticas do plasma, fazendo com que elas não tenham mais o formato simétrico.

Essa equação foi obtida simultaneamente pelo americano H.Grad e o soviético V. Shafranov, que mais tarde foi nomeada de equação de Grad-Shafranov[18, 19].

No capítulo 4 descrevemos a equação de equilíbrio MHD estacionário a partir das equações de equilíbrio MHD ideal, considerando agora que o plasma possui uma velocidade diferente de zero. A equação de equilíbrio estacionário é deduzida para o caso em que a entropia é constante para cada superfície magnética, a partir dessa equação, obtemos uma solução exata para perfis lineares da corrente e pressão modificada.

No capítulo 5, apresentamos duas novas soluções encontradas para a equação de equilíbrio MHD estacionário. Com as novas soluções, são deduzidas várias propriedades físicas para o confinamento magnético do plasma.

As conclusões desse trabalho e as considerações finais encontram-se no capítulo 6.

Capítulo 2

Magnetohidrodinâmica

2.1 Equações da Hidrodinâmica

A magnetohidrodinâmica (MHD)[20, 21] é o estudo da dinâmica de fluidos condutores sob a ação de campos magnéticos, em particular em plasmas. Ela é obtida pela combinação das equações da mecânica de fluidos, equações de Maxwell e algumas relações termodinâmicas. O objetivo deste capítulo é mostrar a dedução de tais equações.

Primeiramente serão apresentadas as equações da mecânica de fluidos, algumas relações termodinâmicas e as equações de Maxwell e, por fim, a união de tais equações resultando na MHD ideal.

2.2 Equações de fluido

Consideramos o plasma como uma mistura de dois fluidos, um eletrônico e outro iônico. Utilizando os índices i para íons com carga $+Ze$ (onde Z é o número atômico), e para o elétron livre (com carga $-e$) e s para qualquer espécie, definimos as seguintes quantidades, n o número de densidade, m a massa e \mathbf{v} a velocidade, onde essas quantidades dependem da posição \mathbf{r} e o tempo t .

Densidade de massa ρ :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_s m_s n_s = m_i n_i + m_e n_e, \quad (2.1)$$

Densidade de carga ρ_c :

$$\rho_c(\mathbf{r}, t) = \sum_s n_s q_s = e(n_i - n_e). \quad (2.2)$$

Densidade de corrente J :

$$J(\mathbf{r}, t) = \sum_s \eta_s q_s \mathbf{v}_s = e(n_i \mathbf{v}_i - \eta_e \mathbf{v}_e), \quad (2.3)$$

onde q_s é carga elétrica e e é a carga do elétron.

2.2.1 Derivada convectiva

Seja $f(\mathbf{r}, t)$ uma grandeza física qualquer (como pressão, entropia, etc) num ponto $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ e num instante de tempo t . Sendo $f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt)$ o valor da mesma grandeza f na posição $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ e no tempo $t + dt$ como mostrado na figura 2.1. A variação total é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt) - f(\mathbf{r}, t) \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt \end{aligned}$$

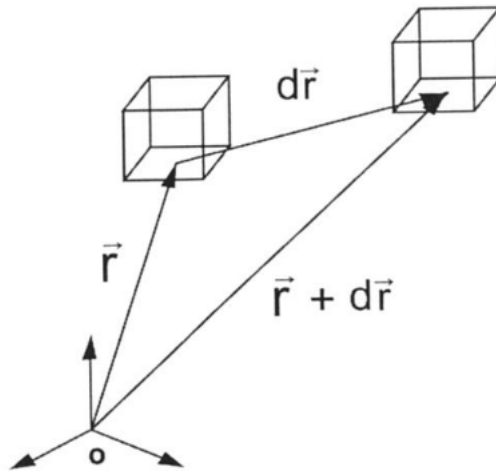


Figura 2.1: Derivada convectiva.

Tomando a derivada temporal

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{df}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ é a velocidade do elemento de volume ao se deslocar de $d\mathbf{r}$. Portanto, o operador que relaciona a variação total de uma quantidade escalar por unidade de tempo é

$$\frac{d}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.5)$$

que é chamado de derivada convectiva[22]

2.2.2 Equação da continuidade

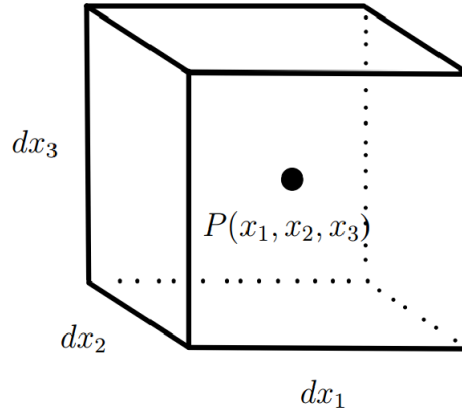


Figura 2.2: Elemento de volume Euleriano, suas condições de contorno fixadas no espaço.

Considere um fluxo de massa entrando e saindo de um volume infinitesimal. Partindo do ponto de vista Euleriano: o elemento de volume é fixado no espaço em relação ao referencial do laboratório[20, 23], o elemento de volume $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ é mostrado na figura 2.2.

$P(x_1, x_2, x_3)$ é o centro do elemento de volume. Os lados do volume são fixados no espaço. O fluido pode entrar ou sair do elemento de volume através dos seus lados.

Definindo a média da densidade de massa (aproximadamente uniforme) ao longo de dV como sendo $\rho(x_1, x_2, x_3)$ (massa/volume) em $P(x_1, x_2, x_3)$. A massa total contida dentro de dV é

$$M = \int \rho dV = \int \rho dx_1 dx_2 dx_3. \quad (2.6)$$

Assumindo que não há fontes e nem sumidouros de massa dentro de dV , então dM/dt é a taxa que a massa entra ou sai através da superfície dA .

Um elemento de superfície dA é mostrado na figura 2.3, onde $d\mathbf{A}$ corresponde à área de superfície e $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor normal a superfície. O fluxo de massa que atravessa a superfície é $\rho\mathbf{v}$, onde \mathbf{v} é a velocidade do fluido. A massa por unidade de tempo que atravessa dA é $\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \rho\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA$, e a taxa total do fluxo de massa saindo do volume dV é dado por

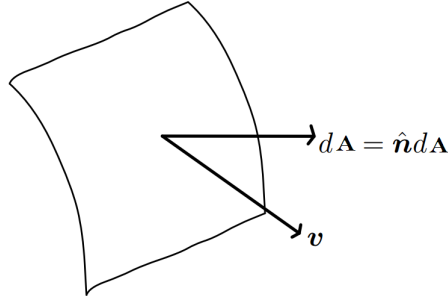


Figura 2.3: Elemento de superfície Euleriano, mostrando que o vetor de velocidade \mathbf{v} e o vetor de elemento de área dA

$$\sum_{\text{faces}} \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \Rightarrow \oint_s \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_s \rho\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA, \quad (2.7)$$

onde a integral é sobre a superfície fechada de dV . Uma vez que isso deve ser igual a $-dM/dt$, temos:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_s \rho\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA, \quad (2.8)$$

Para uma superfície fixa, podemos tomar a derivada total dentro do volume integrante como uma derivada parcial

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_s \rho\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA. \quad (2.9)$$

Aplicando o teorema de Gauss[24] no lado direito da equação

$$\oint_s \rho\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA = \int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{v})dV, \quad (2.10)$$

e reordenando os termos da integral, obtemos

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) só é satisfeita se os termos dentro do colchete forem nulos.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é chamada de equação da continuidade de massa que expressa a conservação de massa no referencial Euleriano.

2.2.3 Equação da continuidade de carga

Se a densidade de carga $\rho_c(\mathbf{r}, t)$ está movendo com velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, então sua densidade de corrente \mathbf{J} é definida por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho_c(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.13)$$

Note que se ρ_c é positivo, então \mathbf{J} tem a mesma direção de \mathbf{v} , mas se ρ_c for negativo, então \mathbf{J} tem direção oposta a \mathbf{v} .

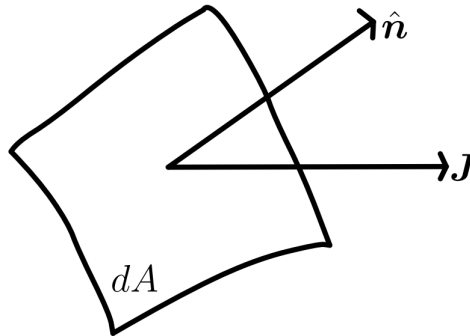


Figura 2.4: Elemento de superfície com vetor normal \hat{n}

dA é um elemento infinitesimal de uma superfície retangular com um vetor normal \hat{n} , como na figura 2.4.

Supondo que a densidade de corrente \mathbf{J} atravessa essa superfície dA , então a quantidade $\mathbf{J} \cdot \hat{n}dA$ é a taxa que o fluxo de carga atravessa dA tanto na direção positiva como na direção negativa.

O fluxo líquido de carga por unidade de área por unidade de tempo, Φ_c , que atravessa um elemento de superfície orientada arbitrariamente $\hat{n}dA$ é dado por

$$\Phi_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{n}dA. \quad (2.14)$$

A corrente total que atravessa a superfície retangular S é dada pela integral

$$I(t) = \int \int_s \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (2.15)$$

Para uma superfície fechada S , a conservação de carga requer que

$$\oint \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = -\frac{d}{dt} \int \int_V \rho_c(\mathbf{r}, t) d^3r. \quad (2.16)$$

fixando a superfície S no espaço, a regra de Leibniz resulta

$$\oint \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = - \int \int_V \int \frac{\partial \rho_c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d^3r. \quad (2.17)$$

Aplicando o teorema do divergente na equação (2.17):

$$\int \int_V \int \left(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) d^3r = 0. \quad (2.18)$$

A equação (2.18) é satisfeita se

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

Podemos notar que tanto a densidade de corrente como a densidade de carga dependem da posição e do tempo.

2.2.4 Equação de Euler

Em dinâmica dos fluidos, as equações de Euler são as que descrevem o movimento de um fluido compressível não viscoso, embora as equações pareçam ser muito complexas, elas são simplificações das equações de Navier-Stokes de dinâmica de fluidos.

Por conveniência escrevemos as três dimensões espaciais na forma (x_1, x_2, x_3) e a dimensão temporal por t . Em geral, as equações de Euler têm uma dependência temporal para equação da continuidade e três dependências temporais para as equações de conservação do momento.

Expressando o momento total por Γ na direção x_i em um elemento de volume dV como

$$\Gamma_i = \int \rho v_i dV, \quad (2.20)$$

sendo $i = 1, 2, 3, \dots$

A variação do momento pode então ser escrito

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV. \quad (2.21)$$

Desprezando a viscosidade do fluido e assumindo que não há forças externas sendo aplicadas (como gravidade e pressão). Então, a única maneira de ocorrer mudança do momento é pelo fluxo de momento através da superfície A .

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} = \int (\rho v_i) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int (\rho v_i) v_j dA_j \quad (2.22)$$

onde expressamos os produtos internos utilizando a convenção somatório de Einstein.

Transformando a integral de superfície para integral de volume utilizando o teorema de Green[24]

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} = - \int \nabla_j (\rho v_i v_j) dV. \quad (2.23)$$

Comparando (2.23) com (2.21), vemos que

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV = - \int \nabla_j (\rho v_i v_j) dV. \quad (2.24)$$

Chegamos na seguinte relação

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \nabla_j (\rho v_i v_j). \quad (2.25)$$

Essa equação nos diz que cada componente de densidade de momento ρv (para cada i separadamente) obedece à lei de conservação local.

O operador ∇_j está atuando nas duas velocidade (v_i e v_j), apenas um dos quais é submetido somatório do produto sobre j .

Consideramos a pressão que atua sobre as partículas no volume de controle, especificamente.

$$f_i = \int p dA, \quad (2.26)$$

onde f_i é a força aplicada sobre o fluido, usando novamente o teorema de Green:

$$f_i = - \int \nabla_i p dV, \quad (2.27)$$

Agora vamos considerar um campo gravitacional uniforme que contribui com uma força igual a

$$f_i = \int \rho g_i dV, \quad (2.28)$$

Essas forças contribuem para a mudança do momento, pela segunda lei do movimento

$$\frac{d\Gamma'_i}{dt} = f_i, \quad (2.29)$$

é importante lembrar que as três leis de movimento aplicam-se às partículas e não ao próprio volume de controle, A variação do momento no volume de controle contém as contribuições newtonianas (equações 2.28 e 2.27), mais as contribuições de fluxo (Equação 2.25).

Combinado as contribuições, a equação de movimento para o fluido pode ser escrito:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla_j(\rho v_i v_j) = -\nabla_i p + f_i, \quad (2.30)$$

onde f_i é um força externa por unidade de volume.

Expressando a equação (2.30) em notação vetorial

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla_i p + \mathbf{f}_{ext}, \quad (2.31)$$

onde \otimes é o produto tensorial e \mathbf{f}_{ext} é uma força externa aplicada sobre o sistema.

Expandindo o lado esquerdo da equação (3.30)

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \nabla_j(\rho v_j) + \rho v_j \nabla_j(\rho v_i) = -\nabla_i p + f_i, \quad (2.32)$$

o primeiro e o terceiro termo da equação (2.32) se anulam por causa da conservação de massa (equação 2.12), tornando-se

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \nabla_j(\rho v_i) = -\nabla_i p + f_i, \quad (2.33)$$

ou na forma vetorial

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla_i p + \mathbf{f}_{ext}. \quad (2.34)$$

Utilizando a derivada convectiva (2.5) na equação (2.34), podemos reescrever numa forma mais compacta

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_i p + \mathbf{f}_{ext}. \quad (2.35)$$

No caso MHD a força externa é de natureza eletromagnética (forças de Lorentz) ou gravitacional, considerando que a força gravitacional é muito

pequena em relação à força eletromagnética, podemos considerar apenas a força de Lorentz[25]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.36)$$

A força eletromagnética total por unidade de volume que atua em um elétron com carga $-e$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}_e = -n_e e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}), \quad (2.37)$$

e para os íons com carga e :

$$\mathbf{f}_i = n_i e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}), \quad (2.38)$$

onde n_e e n_i são a densidade dos elétrons e íons respectivamente.

A força eletromagnética total por unidade de volume é a soma das equações (2.38) e (2.37)

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_e = e(n_i - n_e)\mathbf{E} + (en_i\mathbf{v}_i - en_e\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}, \quad (2.39)$$

considerando a quase neutralidade do plasma ($n_e \approx n_i = n$), a equação 2.39 torna-se:

$$\mathbf{f} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}, \quad (2.40)$$

podemos notar que o termo $en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ é justamente a densidade de corrente \mathbf{J} , com isso

$$\mathbf{f} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.41) na equação (2.34), obtemos a equação de movimento ou equação de Euler

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla_i p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.42)$$

2.3 Equações do eletromagnetismo

2.3.1 Equação de Maxwell no vácuo

Considerando que o plasma é um gás muito rarefeito, podemos desprezar sua magnetização e assumir que é um meio não magnético. Portanto, utilizamos as equações de Maxwell[25] no vácuo para sua descrição. São elas:

- Lei de Gauss elétrica

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}, \quad (2.43)$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico e ρ_c é a densidade de carga elétrica e $\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} F/m$ é a permissividade elétrica no vácuo. Para um sistema de cargas puntiformes e_a , nas posições \mathbf{r}_a sobre uma superfície S,

$$\rho_c = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (2.44)$$

Integrando num volume V e utilizando o teorema do divergente em seguida,

$$\begin{aligned} \int_v \nabla \cdot \mathbf{E} dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_c dV = \sum_a e_a \int dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_a e_a, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ é o fluxo de campo elétrico e $\sum_a e_a$, é a carga líquida envolvida pela superfície S. Portanto, de acordo com (2.45) a lei de Gauss elétrica nos diz que o fluxo do campo elétrico em uma dada superfície é proporcional à quantidade de cargas elétricas presentes na superfície. Como não há a presença de cargas líquidas devido à quase neutralidade do plasma ($n_e \approx n_i$), a lei de Gauss elétrica pode ser desprezada no conjunto das equações MHD.

- Lei de Gauss Magnética

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.46)$$

\mathbf{B} é o campo magnético. Integrando num volume V e utilizando o teorema de Gauss:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (2.47)$$

o fluxo do campo magnético é nulo sobre uma superfície fechada. Portanto, o campo magnético é solenoidal e como não há ainda evidência de "cargas magnéticas isoladas", as linhas de campo magnético nunca começam ou terminam e sim circulam.

- Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.48)$$

Integrando numa superfície aberta S, limitada pela curva C e usando o teorema de Stokes[24]

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A},$$

como S é fixa,

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.49)$$

onde $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ é a circulação do campo elétrico e $\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ é o fluxo do campo magnético através da superfície S. A equação (2.49) é a forma integral da lei de Faraday. De acordo com (2.48) a variação do fluxo magnético dá origem a uma força eletromotriz, tal que, se opõe à variação do fluxo magnético.

- Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.50)$$

onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ é a permeabilidade magnética no vácuo, \mathbf{J} é a densidade superficial de corrente elétrica e $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ é a corrente de deslocamento. Integrando na superfície S e utilizando o teorema de Stokes

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{B}) d\mathbf{A} = \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_s \mathbf{J} d\mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \int_s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{A},$$

Para um sistema de cargas pontuais

$$\mathbf{J} = \sum_a e_a \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (2.51)$$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_s \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.52)$$

$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ é a circulação do campo magnético, \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico e $\mathbf{J}_t = \int_s \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A}$ é a corrente elétrica líquida através da superfície S. Deste modo, campos magnéticos podem ser gerados através de correntes elétricas e pela variação de um campo elétrico.

2.3.2 Abstenção da corrente de deslocamento

O termo temporal $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$, onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, que aparece na lei de Ampère-Maxwell é conhecido como sendo a corrente de deslocamento, e pode ser desprezado quando comparado com a corrente de densidade elétrica \mathbf{J} . Substituindo a lei de Faraday na lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (2.53)$$

conduz-nos a equação de onda para o campo elétrico.

As ondas planas para o campo elétrico é dada por

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.54)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda ω , é a frequência da onda e \mathbf{r} é a direção de propagação.

Como a derivada temporal é igual

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega,$$

e a derivada espacial é igual

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k},$$

usando esses resultados podemos estimar a magnitude dos termos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \sim k^2 |E|, \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \sim \frac{\omega^2}{c^2} |E|, \quad (2.56)$$

então,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \ll \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (2.57)$$

se ω é pequeno, então a corrente de deslocamento pode ser desprezada.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.58)$$

2.3.3 Lei de Ohm generalizada

A lei de Ohm é uma relação constitutiva entre a densidade de corrente \mathbf{J} e o campo elétrico \mathbf{E} para condutores lineares. Se o condutor é anisotrópico a condutividade elétrica do material será não uniforme, de modo que, a melhor maneira de descrevermos a condutividade do material será através do tensor de condutividade elétrica $\bar{\bar{\sigma}}$, a lei de Ohm nesse caso é dada por:

$$\mathbf{J} = \bar{\bar{\sigma}}\mathbf{E} \quad (2.59)$$

E se o material for isotrópico a condutividade elétrica é uma constante, teremos

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (2.60)$$

Em um fluido condutor em movimento a lei de Ohm vale para o campo elétrico no referencial de Lorentz do fluido K' [26](o referencial no qual o fluido está em repouso relativo) conforme a figura 2.5.

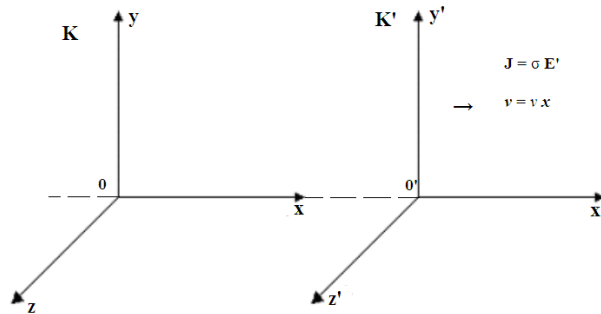


Figura 2.5: Referenciais inerciais.

Para um "boost" ao longo da direção x com velocidade v as equações de transformação dos campos eletromagnéticos são obtidas da Teoria da Relatividade Especial[26] como (no caso de baixas velocidades $v \ll c$)

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}' + \mathbf{B}' \times \mathbf{v}), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}' + \mathbf{E}' \times \mathbf{v}), \quad (2.62)$$

as transformações inversas são obtidas trocando v por $-v$.

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}), \quad (2.63)$$

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B} - \mathbf{E} \times \mathbf{v}), \quad (2.64)$$

logo a lei de Ohm, para um referencial do laboratório K (onde o fluido está em movimento relativo) é igual

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (2.65)$$

que é a lei Ohm generalizada.

Assumindo que o plasma tem condutividade infinita ($\sigma \rightarrow \infty$), podemos rescrever a lei de Ohm como sendo

$$\mathbf{E}' + \mathbf{B}' \times \mathbf{v} = 0, \quad (2.66)$$

onde $\mathbf{J} \neq 0$.

2.3.4 Teorema de Alfvén

Considere uma área de fluxo A_1 no tempo t , que é impulsionado pela velocidade do fluido \mathbf{v} no tempo Δt para a posição A_2 , onde $\hat{\mathbf{n}}_1$ e $\hat{\mathbf{n}}_2$ são os vetores normais às superfícies como mostrada na figura 2.6[9, 27].

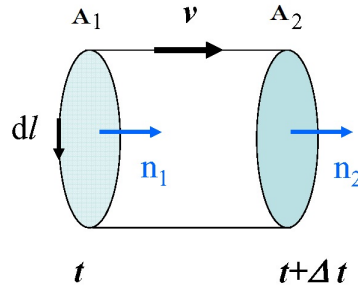


Figura 2.6: Evolução de um volume elementar de um fluido delimitada pela superfície A_1 , que ao longo tempo Δt flui com velocidade \mathbf{v} na posição A_2 .

Sendo o fluxo magnético definido pela integral

$$\Phi = \int_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (2.67)$$

a variação do fluxo magnético no interior do cilindro pode ser representado como

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\int_{A_2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dA - \int_{A_1} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dA \right] \quad (2.68)$$

Expandindo $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ em termos da série de Taylor

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \Delta t + \dots, \quad (2.69)$$

de modo que $t \rightarrow 0$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int_{A_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dA + \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{A_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dA - \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dA \right] \right\} \quad (2.70)$$

onde agora todas as grandezas vetoriais são calculadas no tempo t e na posição \mathbf{r} .

Note que sendo C_1 o contorno que define a área A_1 , pela lei de Faraday

$$\int_{A_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dA = \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.71)$$

Além disso, como o divergente do campo magnético é nulo, o fluxo total em uma superfície fechada deve ser nulo. Isso nos permite escrever a diferença de fluxo nas superfícies abertas como o fluxo no cilindro formado por elas figura 2.6.

$$\int_{A_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dA - \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dA = \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{l}] \quad (2.72)$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{v} \times d\mathbf{l}], \\ &= \oint_{C_1} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Para um fluido com condutividade infinita ($\sigma \rightarrow \infty$) da equação (2.73), temos que o integrando é zero

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (2.74)$$

Isso mostra que o fluxo de linhas de campo magnético em uma área qualquer do fluido se mantém constante ao longo do tempo, enquanto ela evolui espacialmente. Ou seja, as linhas de campos estão fixas ao fluido, e o fluido é livre para se mover apenas perpendicularmente à linha de campo magnético.

2.3.5 Força de Lorentz

A força eletromagnética sobre uma partícula de carga e é dita força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.75)$$

de forma que a equação do movimento para uma carga de massa m é:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.76)$$

onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é o momento linear da carga. Expressando os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} em termos dos potenciais escalar e vetor, $\mathbf{E} = \nabla\Psi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$; $\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A})$. Podemos generalizar a força de Lorentz para uma distribuição de correntes caracterizada pela densidade superficial \mathbf{J} . Considerando um sistema de cargas pontuais (distribuição singular de correntes) temos que:

$$\mathbf{J} = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (2.77)$$

Para uma distribuição contínua de corrente a força de Lorentz é

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.78)$$

onde $d\mathbf{F}$ é a força sobre um elemento de carga dq . Dividindo pelo volume do mesmo, com $dq = \rho_c dV$,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = \frac{dq}{dV}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

portanto a força de Lorentz por unidade de volume é igual:

$$\mathbf{f} = \rho_c(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.79)$$

Supondo que todas as cargas tenham a mesma velocidade $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}$, temos de (2.84):

$$\mathbf{J} = \mathbf{v} \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \rho_c \mathbf{v}. \quad (2.80)$$

A qual vale também para uma distribuição contínua de carga,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho_c \mathbf{E} + \rho_c \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{f} &= \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

e força de Lorentz sobre toda a distribuição é

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dV = \int dV (\rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (2.82)$$

2.4 Equações da MHD ideal

Juntando todas as equações obtidas acima, podemos agora escrever o conjunto das equações da MHD ideal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.83)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla_i p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.84)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.85)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} = 0, \quad (2.87)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.88)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.89)$$

onde ρ é a densidade, \mathbf{J} a densidade de corrente elétrica, \mathbf{v} é a velocidade do fluido, p pressão, S entropia, \mathbf{B} campo magnético e \mathbf{E} campo elétrico. Não consideramos a lei de Gauss elétrica, pois não há cargas elétricas líquidas no plasma.

Capítulo 3

Equilíbrio MHD em sistemas com simetria axial

Considerando o plasma um fluido de condutividade infinita e que não há troca de calor nos seus processos dinâmicos, ou seja, um gás adiabático, podemos estudá-lo na condição de equilíbrio MHD[20, 21, 28].

Na MHD um estado de equilíbrio é caracterizado quando as quantidades físicas não têm dependência explícita com o tempo ($\partial/\partial t = 0$), reduzindo os conjuntos das equações MHD (2.83)-(2.89), tornando

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot (p\rho^{-\gamma+1}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.6)$$

Esse tipo de equilíbrio é compatível com fluxos onde a velocidade é constante.

Primeiramente consideramos o caso mais simples, onde a velocidade do plasma é nula, o que chamamos de equilíbrio MHD estático[29], cuja equações são

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot (p\rho^{-\gamma+1}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.11)$$

Adicionamos a lei de Gauss magnética por completeza do conjunto de equações que descrevem a magnetohidrodinâmica. A equação (3.12) tem uma interpretação bastante simples, como mostrada na figura 3.1: a pressão cinética do plasma, que tende a fazê-lo expandir é contrabalanceada pela força magnética, ou seja, \mathbf{J} e \mathbf{B} são quantidades isobáricas.

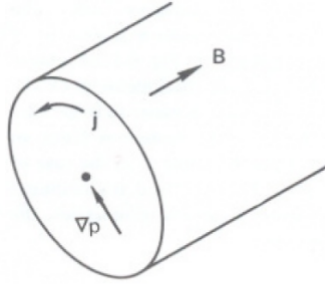


Figura 3.1: Pressão do plasma contrabalanceada pela força magnética.

3.1 Superfícies Magnéticas

As equações que governam o equilíbrio estático de um plasma perfeitamente condutor são

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde p é a pressão, \mathbf{B} o campo magnético e \mathbf{J} a densidade de corrente. Tomando o produto escalar da condição de equilíbrio (3.12) com \mathbf{B} e \mathbf{J} respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0, \\ \mathbf{J} \cdot \nabla p &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Isto é, não há linhas de campo magnético ao longo do gradiente de pressão, pois o vetor \mathbf{B} é perpendicular. Sabemos que as linhas de campo magnético têm formato helicoidal sobre as superfícies toroidais, o gradiente de p é normal a essas superfícies como mostrado na figura 3.2. Portanto as linhas de

campo magnético jazem sobre superfícies isobáricas e a pressão é dita uma grandeza de superfície, pois tem um valor constante para cada superfície magnética. O mesmo ocorre com as linhas de corrente, portanto, também são perpendiculares ao vetor ∇p , elas também se encontram sobre superfícies magnéticas e formam superfícies de correntes com a pressão constante.

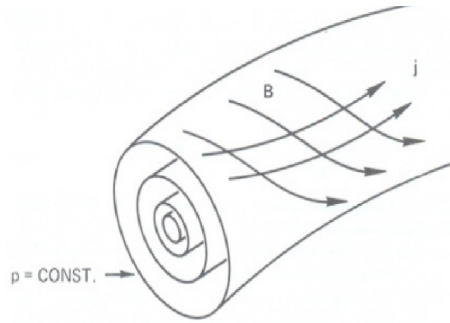


Figura 3.2: Linhas do campo magnético e correntes perpendiculares ao ∇p .

3.2 Função de fluxo poloidal

Decompondo o campo magnético do plasma em suas componentes poloidal e toroidal[30]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_P + \mathbf{B}_t = \mathbf{B}_P + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (3.14)$$

e utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) onde Z é medido sobre o eixo maior do toroide, ϕ é o ângulo toroidal e R é a distância radial medido a partir do eixo Z como mostrada na figura 3.3

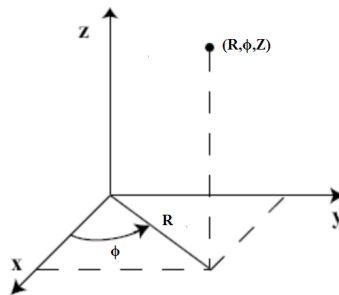


Figura 3.3: Sistema de coordenadas cilíndricas

A lei de Gauss nesse sistema de coordenada pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RB_R) + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0, \quad (3.15)$$

onde a derivada em relação à ϕ é nula devido à simetria do sistema[31]. Com isso, definimos a função de fluxo poloidal $\Psi(R, Z)$ das seguintes relações:

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad (3.16)$$

$$B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad (3.17)$$

onde a condição (3.11) é satisfeita

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R \partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R \partial Z} = 0.$$

Escrevendo o campo magnético em termos de potencial vetor

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

e utilizando a simetria axial, ou seja $\partial/\partial\phi = 0$, obtemos

$$B_R = -\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} \quad (3.18)$$

$$B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R} \quad (3.19)$$

$$B_\phi = \frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R} \quad (3.20)$$

comparando (3.18)-(3.19) com (3.16)-(3.17), podemos escrever a função poloidal da seguinte forma

$$\Psi(R, Z) = RA_\phi(R, Z), \quad (3.21)$$

Note que $\partial\Psi/\partial\phi = 0$, ou seja, Ψ é uma função apenas de R e Z . Consequentemente reescrevemos o campo magnético poloidal como função de Ψ

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_p &= B_R \hat{\mathbf{e}}_R + B_Z \hat{\mathbf{e}}_Z, \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \hat{\mathbf{e}}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \hat{\mathbf{e}}_Z, \\ &= -\frac{1}{R} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo na equação (3.14), chegamos à seguinte representação para o campo magnético no caso de simetria axial em coordenada cilíndrica

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{R} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (3.23)$$

3.2.1 Relação de Ψ com o fluxo magnético poloidal

Note que Ψ é definido por $\Psi = RA_\phi$ que é uma componente do potencial vetor \mathbf{A} , porém, não tem um significado físico em primeira vista. Temos que encontrar um significado físico para Ψ , isto é, encontrar um simples expressão algébrica relacionando Ψ com alguma quantidade que possa ser medida em experimento[32].

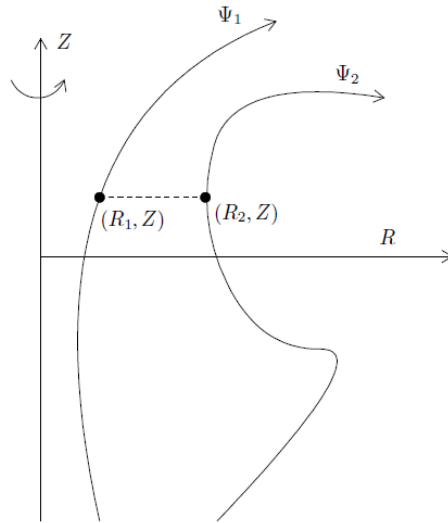


Figura 3.4: O fluxo magnético poloidal Ψ_p entre as duas superfícies magnéticas Ψ_1 e Ψ_2 é dada por $\Psi_p = 2\pi(\Psi_2 - \Psi_1)$.

Na figura 3.4 (retirada de [32]), há duas superfícies magnéticas definidas respectivamente por Ψ_1 e Ψ_2 . Usando o teorema de Gauss no volume toroidal entre as duas superfícies, sabemos que o fluxo poloidal através de qualquer fita toroidal entre duas superfícies magnéticas são iguais. Para calcular esse fluxo poloidal é simples, selecionamos um plano perpendicular ao eixo Z , nesse caso apenas B_z contribui para o fluxo magnético poloidal, que é escrito (a direção positiva do plano é escolhido na direção de $\hat{\mathbf{z}}$)

$$\begin{aligned}\Psi_p &= \int_{R_1}^{R_2} B_z(R, Z) 2\pi dR, \\ &= 2\pi[\Psi_2 - \Psi_1].\end{aligned}\tag{3.24}$$

A equação (3.24) produz um significado físico simples, isto é, a diferença de $2\pi\Psi$ entre duas superfícies magnéticas é igual ao fluxo magnético poloidal

dentro dessas duas superfícies magnéticas. Note que consideramos o caso com simetria axial, o significado físico também pode ser definido que a diferença de Ψ entre duas superfícies magnéticas é igual ao fluxo magnético poloidal por radiano.

Devido a essa relação com o fluxo poloidal, Ψ é sempre chamado de "função de fluxo magnético poloidal", Note-se que é a diferença de Ψ entre dois locais que determina a grandeza física Ψ_p .

3.3 Operador Shafranov

Substituindo a função do campo magnético (3.23) na lei de Ampère

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \left[-\frac{1}{R} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right], \\ &= \nabla \times \left[-\frac{1}{R} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] + \nabla \times B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$ e a simetria axial para o primeiro termo do lado direito de (3.25), temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \left[-\frac{1}{R} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] &= \hat{\mathbf{e}}_\phi \left[\frac{1}{R} \nabla^2 \Psi - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right], \\ &= \left[\frac{1}{R} \nabla^2 \Psi \hat{\mathbf{e}}_\phi - \frac{1}{R^2} \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ &= \nabla \left(\frac{1}{R} \nabla \Psi \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Agora trabalhando com o segundo termo do lado direito de (3.25)

$$\nabla \times B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{R} \nabla (R B_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi.\quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) com (3.26) em (3.25), obtemos

$$\mu_0 \mathbf{J} = \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \nabla \Psi \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{R} \nabla (R B_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi.\quad (3.28)$$

A equação (3.28) sugere que a densidade de corrente também é composta por uma parte poloidal e toroidal semelhante ao campo magnético

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_p + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi,\quad (3.29)$$

Comparando (3.29) com (3.28), obtemos os seguintes componentes da densidade de corrente

$$\mu_0 \mathbf{J}_p = \frac{1}{R} \nabla (R B_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi,\quad (3.30)$$

$$\mu_0 J_\phi = \nabla \left(\frac{1}{R} \nabla \Psi \right),\quad (3.31)$$

onde definimos o chamado operador de Shafranov

$$\Delta^* \Psi = R \nabla \left(\frac{1}{R} \nabla \Psi \right) = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) em (3.31), chegamos à seguinte equação para a componente $\hat{\phi}$ da densidade de corrente

$$\mu_0 J_\phi = \frac{1}{R} \Delta^* \Psi. \quad (3.33)$$

3.4 Função de corrente poloidal

Vimos anteriormente que a condição de equilíbrio (3.7), implica que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (3.34)$$

ou seja, as linhas de campo magnético jazem sobre as superfícies de pressão constante, da (3.22) nos mostra que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla p = 0$ devido à simetria axial, usando (3.22) para o campo poloidal concluímos que

$$\nabla \Psi \times \nabla p = 0, \quad (3.35)$$

que pode ser interpretado da seguinte forma: as superfícies isobáricas também são superfície de fluxo, de modo que Ψ e uma função de p , e ambas são quantidades de superfície, consequentemente

$$\nabla p = \frac{dp}{d\Psi} \nabla \Psi. \quad (3.36)$$

Sabemos ainda do equilíbrio MHD

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0, \quad (3.37)$$

tal que a corrente também jazem sobre as superfícies isobáricas. Substituindo (3.30) em (3.37), a densidade de corrente poloidal satisfaz $\mathbf{J}_p \cdot \nabla p = 0$. Como sabemos que ∇I é paralelo ao $\nabla \Psi$, onde I é a corrente poloidal, temos a seguinte relação

$$\nabla I \times \nabla \Psi = 0. \quad (3.38)$$

Sabendo que a corrente em coordenadas cilíndricas[33] é dado por:

$$I = -\frac{B_\phi R}{\mu_0}. \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) na equação (3.38)

$$\nabla\left(-\frac{B_\phi R}{\mu_0}\right) \times \nabla\Psi = 0. \quad (3.40)$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, deduzimos que $-B_\phi R/\mu_0$ é uma função da pressão p e, portanto, também é uma quantidade de superfície, que denominaremos "função da corrente poloidal"

$$I(R, Z) = -\frac{RB_\phi(R, Z)}{\mu_0}. \quad (3.41)$$

Como a densidade da função poloidal depende de R e Z a relação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J}_p &= \mu_0 (J_R \hat{\mathbf{e}}_R + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi), \\ &= \frac{1}{R} \nabla(RB_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{-RB_\phi}{\mu_0} \right) \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{-RB_\phi}{\mu_0} \right) \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde podemos definir as componentes de \mathbf{J} em função de I

$$J_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial Z}, \quad (3.43)$$

$$J_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial R}. \quad (3.44)$$

Assim, escrevemos a densidade de corrente da forma

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{R} \nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (3.45)$$

Vemos que Ψ está para \mathbf{B} como \mathbf{I} está para \mathbf{J} . De fato, calculando o fluxo de corrente poloidal através de uma superfície S_P usada em (3.24)

$$I_p(p) = \int_{S_P} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_p, \quad (3.46)$$

temos que:

$$I_p = 2\pi [I(R, Z=0) - I_{eixo}], \quad (3.47)$$

onde $I_{eixo} = I(R=R_0, Z=0)$ e o valor de I no eixo magnético. Finalmente como I é uma quantidade de superfície, então $I(p)$ também é

$$\nabla I \times \nabla \Psi = 0, \quad (3.48)$$

$$\nabla I \times \nabla p = 0, \quad (3.49)$$

e com isso, podemos escrever

$$\nabla I = \frac{dI}{d\Psi} \nabla \Psi. \quad (3.50)$$

3.5 Equação de Grad-Shafranov

Substituindo (3.23) e (3.45) na condição de equilíbrio MHD (3.7)

$$\begin{aligned}
\nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \\
&= \left(-\frac{1}{R} \nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) \times \left(-\frac{1}{R} \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right), \\
&= \underbrace{\frac{1}{R^2} (\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{=0} - \frac{B_\phi}{R} \underbrace{(\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{=-\nabla I} \\
&\quad - \frac{J_\phi}{R} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_\phi \times (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{=\nabla \Psi} - \underbrace{J_\phi B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{=0}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Substituindo (3.36) e (3.50) em (3.51), chegamos a uma relação que só envolve o gradiente da função do fluxo

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \Psi} - \frac{B_\phi}{R} \frac{\partial I}{\partial \Psi} + \frac{J_\phi}{R} \right] \nabla \Psi = 0, \tag{3.52}$$

de modo que o termo do colchete deve ser nulo para não haver solução trivial.

$$\frac{\partial p}{\partial \Psi} - \frac{B_\phi}{R} \frac{\partial I}{\partial \Psi} + \frac{J_\phi}{R} = 0. \tag{3.53}$$

substituindo (3.39) e (3.33) em favor de B_ϕ e J_ϕ respectivamente em (3.53), obtemos a famosa equação de Grad-Shafranov

$$\Delta^* \Psi = \mu_0 R J_\phi = -\mu_0 R^2 \frac{\partial p}{\partial \Psi} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial I^2}{\partial \Psi}, \tag{3.54}$$

ou inserindo o operador de Shafranov (3.32)

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{\partial p}{\partial \Psi} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial I^2}{\partial \Psi}. \tag{3.55}$$

A equação (3.55) foi obtida independentemente por Lüst e Schlüter na Alemanha (1957)[34], Shafranov na União Soviética (1958)[18] e H.Grad e H.Rubin nos USA[19].

Podemos também observar a seguinte relação entre o operador de Shafranov e o laplaceano de coordenadas cilíndricas (no caso de simetria azimutal)

$$\Delta^* \Psi = \nabla^2 \Psi + \frac{2}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \tag{3.56}$$

mostrando que assim como o laplaciano, o operador de Shafranov também é linear e do tipo elíptico. No entanto, a equação (3.55) não pode ser resolvida,

uma vez que o fluxo poloidal é o mesmo tempo uma variável dependente e independente. Logo, para podermos ter uma equação diferencial que possa ser resolvida, devemos especificar a priori os termos de p e $(I^2)'$ como função de Ψ , isso é feito supondo perfis para a pressão e a corrente quadrática em termos de Ψ .

Capítulo 4

Equilíbrio MHD para plasmas em rotação toroidal

No capítulo anterior, deduzimos um conjunto de equações de equilíbrio MHD para o caso estático ($\mathbf{v} = 0$), onde utilizando a pressão como uma quantidade de superfície (3.13), conduziu-se a equação de Grad-Shafranov.

Quando consideramos o estado estacionário ($\mathbf{v} \neq 0$), temos que levar em consideração a densidade do plasma

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = -\rho \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (4.1)$$

consequentemente não é mais possível utilizar a pressão como uma quantidade de superfície, ou seja, as superfícies isobáricas não estão mais ao longo das superfícies magnéticas, como acontece no caso estático (3.34).

Uma vez, que não é possível utilizar a pressão como uma quantidade de superfície, utiliza-se outra variável termodinâmica. Das opções, a entropia e a temperatura tem sido proposto por Maschke e Perrin[12]

Nesse capítulo deduziremos uma nova equação de equilíbrio MHD, onde propomos a entropia como uma quantidade de superfície, utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas e considerando que só há rotação na direção azimutal.

4.1 Entropia como quantidade de superfície

Para o caso em que consideramos a entropia como quantidade de superfície[13], a energia interna u e a entropia S satisfazem a equação de Gibbs[35]

$$du = TdS - pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (4.2)$$

e a entalpia específica h satisfaz a equação termodinâmica

$$dp = \rho(dh - TdS). \quad (4.3)$$

Como já visto anteriormente, podemos considerar o comportamento do plasma como sendo de um gás ideal

$$p = \bar{R}T\rho, \quad (\bar{R} : \text{constante}) \quad (4.4)$$

como os processos termodinâmicos que envolvem a rotação do plasma são adiabáticos, então a equação calórica de estado é dada por

$$p = A(S)\rho^\gamma, \quad (4.5)$$

onde p é a pressão, $\gamma = 5/3$ é a razão dos calores específicos à pressão e volume constantes e $A(S)$ é uma função dependente apenas da entropia e consequentemente constante.

Substituindo (4.5) em (4.2), obtemos

$$du = TdS - A(S)\rho^\gamma d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (4.6)$$

como o processo é adiabático, então

$$du = A(S)\frac{\rho^\gamma}{\rho^2}d\rho.$$

Integrando os dois lados da equação acima, podemos escrever a equação da energia interna da forma

$$u = A(S)\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}. \quad (4.7)$$

Para ($dS = 0$), a derivada da equação (4.3) pode ser reescrita

$$dp = \rho dh, \quad (4.8)$$

substituindo (4.5) em (4.8)

$$A(S)\rho^{\gamma-2}d\rho = \frac{dh}{\gamma},$$

e integrando novamente os dois lados da equação, obtemos a equação da entalpia específica

$$\frac{h}{\gamma} = \frac{A(S)\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}. \quad (4.9)$$

Deste modo a temperatura do plasma T é dada por

$$T = \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{dA}{dS}, \quad (p : \text{constante}) \quad (4.10)$$

e a velocidade adiabática do som no plasma

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma A(S) \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}},$$

$$c_s = \sqrt{\gamma \bar{R} T}. \quad (4.11)$$

Sendo a entropia constante, temos que, para qualquer função que dependa de S também é constante

$$\frac{dA(S)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (4.12)$$

A derivada convectiva de $A(S)$ é igual

$$\frac{dA(S)}{dt} = \frac{\partial A(S)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla A) = 0, \quad (4.13)$$

onde a parte da derivada parcial se anula no equilíbrio

$$\mathbf{v} \cdot \nabla A = 0, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{v} \left(\frac{dA}{dS} \right) \nabla S = 0. \quad (4.15)$$

Assim chegamos à seguinte relação para a entropia

$$\mathbf{v} \cdot \nabla S = 0, \quad (4.16)$$

como a entropia é um quantidade de superfície, então

$$\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0.$$

Eliminando o campo elétrico com a utilização da lei generalizada de Ohm (3.6) e substituindo na lei de Faraday (3.4) e utilizando o campo magnético em função de fluxo poloidal (3.23), obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v_\phi}{R} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v_\phi}{R} \right) = 0, \quad (4.17)$$

onde assumimos que a velocidade do plasma é somente azimutal, ou seja, ($v_z = v_R = 0$ e $v_\phi \neq 0$). Essa equação nos mostra que (v_ϕ/R) é função apenas de Ψ , ou seja, também é uma quantidade de superfície.

Agora podemos definir uma nova variável, a frequência de rotação do plasma, que depende somente do fluxo poloidal

$$\omega(\Psi) = \left(\frac{v_\phi}{R} \right). \quad (4.18)$$

Considerando a equação de equilíbrio MHD que agora envolve a velocidade, de (3.2), temos que

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p. \quad (4.19)$$

Trabalhando com o lado esquerdo da equação (4.19) e utilizando (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \rho \left[R\omega \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \left(\hat{\mathbf{e}}_R \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] R\omega \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ &= \rho\omega \frac{\partial}{\partial \phi} \omega R \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ &= -\rho\omega^2 R \nabla R, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \phi} R \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\frac{1}{2} \nabla R^2$.

Sabendo que o produto vetorial ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$) em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \underbrace{\frac{1}{R^2} (\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{=0} - \frac{B_\phi}{R} \underbrace{(\nabla I \times \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{=-\nabla I} \\ &\quad - \frac{J_\phi}{R} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_\phi \times (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{=\nabla \Psi} - \underbrace{J_\phi B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{=0} \\ &= \frac{B_\phi}{R} \nabla I - \frac{J_\phi}{R} \nabla \Psi. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substituindo (3.39), (3.33) e (3.50) na equação (4.21), podemos reescrever o produto ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$) como sendo

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \frac{\partial I}{\partial \Psi} \frac{\nabla \Psi}{R^2} I - \nabla \Psi \frac{\Delta^* \Psi}{R^2 \mu_0}. \quad (4.22)$$

Com (4.22) e (4.20) em (4.19), obtemos a equação para o fluxo magnético poloidal

$$\nabla \Psi \left(\mu_0^2 I \frac{\partial I}{\partial \Psi} + \Delta^* \Psi \right) = \mu_0 \rho R^3 \omega^2 R \nabla R - \mu_0 R^2 \nabla p, \quad (4.23)$$

onde $\Delta^*\Psi$ é operador Shafranov.

Utilizando a equação da termodinâmica (4.3), e sabendo que a entropia é uma função que depende somente de Ψ ($S = S(\Psi)$), ou seja, uma quantidade de superfície

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial \Psi} \nabla \Psi. \quad (4.24)$$

Podemos escrever o gradiente de pressão como sendo

$$\nabla p = \rho \nabla h - \rho T \frac{\partial S}{\partial \Psi} \nabla \Psi. \quad (4.25)$$

Com (4.25) em (4.23), temos

$$\begin{aligned} \nabla \Psi \left(\mu_0 I \frac{\partial I}{\partial \Psi} + \Delta^* \Psi \right) &= \mu_0 \rho R^3 \omega^2 R \nabla R - \mu_0 R^2 \rho \nabla h - \\ &\quad \mu_0 \rho R^2 T \frac{\partial S}{\partial \Psi} \nabla \Psi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Trabalhando agora com o termo ∇R da equação (4.26)

$$\nabla R = \frac{\omega^2 \nabla R}{\omega^2} - \frac{\omega R \nabla \omega}{\omega^2} + \frac{R \omega \nabla \omega}{\omega^2}, \quad (4.27)$$

e como sabemos que $\omega(\Psi)$ também é uma quantidade de superfície

$$\nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} \nabla \Psi = \omega' \nabla \Psi, \quad (4.28)$$

podemos escrever o gradiente de R da forma

$$\nabla R = -\frac{R \omega' \omega \nabla \Psi}{\omega^2} + \frac{\omega^2 \nabla R + \omega R \nabla \omega}{\omega^2}. \quad (4.29)$$

Substituindo (4.29) em (4.26), obtemos a equação de equilíbrio MHD

$$\begin{aligned} \left(\mu_0 I \frac{\partial I}{\partial \Psi} + \Delta^* \Psi - \mu_0 \rho R^2 T \frac{\partial S}{\partial \Psi} + \mu_0 \rho R^4 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} \right) \nabla \Psi \\ = -\mu_0 \rho R^2 \nabla h + \mu_0 \rho R^3 (\omega^2 \nabla R + \omega R \nabla \omega). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Rearranjando os termos do lado direito da equação acima

$$\mu_0 \rho R^2 \nabla h + \rho R^3 (\omega^2 \nabla R + \omega R \nabla \omega) = \mu_0 \rho R^2 \nabla \left(h - \frac{R^2 \omega^2}{2} \right),$$

e substituindo na equação (4.30), reescrevemos a equação de equilíbrio

$$\left(\frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \Delta^* \Psi - \mu_0 \rho R^2 T \frac{\partial S}{\partial \Psi} + \mu_0 \rho R^4 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} \right) \nabla \Psi = -\mu_0 \rho R^2 \nabla \left(h - \frac{R^2 \omega^2}{2} \right), \quad (4.31)$$

onde agora definimos uma nova função

$$\Theta(\Psi) = \left(h - \frac{R^2 \omega^2}{2} \right). \quad (4.32)$$

O termo $R^2 \omega^2 / 2$ da função $\Theta(\Psi)$ é conhecido como correção centrífuga da entalpia, resultado da rotação do plasma, e como ω é uma função que depende de Ψ , $\Theta(\Psi)$ também depende de Ψ e conseqüentemente também é uma quantidade de superfície.

$$\nabla \Theta(\Psi) = \nabla \Psi \frac{\partial \Theta}{\partial \Psi}. \quad (4.33)$$

A partir disto, podemos reescrever a equação (4.31) numa forma mais simples

$$\left(\frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \Delta^* \Psi - \mu_0 \rho R^2 T \frac{\partial S}{\partial \Psi} + \mu_0 \rho R^4 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} \right) \nabla \Psi = -\mu_0 \rho R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \quad (4.34)$$

Portanto para quaisquer valor de $\nabla \Psi \neq 0$, vale a seguinte igualdade

$$\Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 \rho R^2 \left(R^2 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} + \mu_0 \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} - T \frac{\partial S}{\partial \Psi} \right) = 0. \quad (4.35)$$

Algo importante para se notar é, que se $\omega = 0$ e equação (4.35) se reduz a equação de Grad-Shafranov (3.54).

De acordo com (4.10),

$$T \frac{\partial S}{\partial \Psi} = \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{dA}{d\Psi}, \quad (4.36)$$

e de acordo com (4.9),

$$h = \gamma A(S) \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}. \quad (4.37)$$

Substituindo esses resultados em (4.32), podemos escrever a densidade como uma função da quantidade de superfície

$$\rho = \left[\frac{(\gamma-1)}{A\gamma} \left(\Theta + \frac{R^2 \Omega^2}{2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (4.38)$$

Utilizando (4.36) e (4.38) em (4.35), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 R^2 \left[\frac{(\gamma - 1)}{A\gamma} \left(\theta + \frac{R^2 \omega^2}{2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} R^2 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} + \mu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \\ - \mu_0 \frac{dA(S)}{d\Psi A\gamma} \left(\Theta + \frac{R^2 \omega^2}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Podemos observar que a equação acima possui quatro funções independentes (I, ω, Θ e A), para podermos determinar sua solução, temos que especificar as funções e as condições de contorno.

Definindo:

$$\eta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad (4.40)$$

e substituindo na equação (4.39) e com um pouco de álgebra, chegamos

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \omega^2}{2\Theta} \right)^{\eta-1} \left[\left(\frac{\Theta}{A\eta} \right)^{\eta-1} \frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \right. \\ \left. + \left(\frac{\Theta}{A\eta} \right)^{\eta-1} R^2 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} - \left(\frac{\Theta}{A\eta} \right)^{\eta-1} \left(\frac{\Theta}{\gamma A} \right) \frac{\partial A}{\partial \Psi} \left(1 + \frac{R^2 \omega^2}{2\Theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Rearranjando o termo da equação acima

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta}{A\eta} \right)^{\eta-1} R^2 \omega \frac{\partial \omega}{\partial \Psi} &= R^2 \left[\left(\frac{\Theta}{\eta} \right)^\eta \right]' \frac{A^{1-\eta} \omega \omega'}{\Theta'} \left(\frac{\Theta}{A\eta} \right)^{\eta-1} \frac{\partial \Theta}{\partial \Psi} \\ &\quad - \left(\frac{\Theta}{A\eta} \right)^{\eta-1} \left(\frac{\Theta}{\gamma A} \right) \frac{\partial A}{\partial \Psi} \left(1 + \frac{R^2 \omega^2}{2\Theta} \right), \\ &= \frac{d}{d\Psi} \left[\left(\frac{\Theta}{\eta} \right)^{1-\eta} \right] + \left(\frac{\Theta}{\eta} \right)^\eta \frac{(1-\eta)A}{A^\eta} \frac{R^2 \omega^2}{2\Theta}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

e utilizando em (4.41), temos

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \omega^2}{2\Theta} \right)^{\eta-1} \left\{ \left[\left(\frac{\Theta}{\eta} \right)^\eta A^{1-\eta} \right]' \right. \\ \left. + R^2 \left\{ \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{\Theta}{\eta} \right) \right\} \frac{A^{1-\eta} \omega \omega'}{\Theta'} + \left(\frac{\Theta}{\eta} \right)^\eta \frac{(1-\eta)A'}{A^\eta} \frac{\omega'}{2\Theta} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Derivando do termo $A^{1-\eta}$ em relação à Ψ , obtemos

$$\frac{d}{d\Psi} A^{1-\eta} = \frac{(1-\eta)}{A^\eta} A'. \quad (4.44)$$

Com (4.44), podemos reescrever a equação (4.43)

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \omega^2}{2\Theta}\right)^{\eta-1} \left\{ \left[\left(\frac{\Theta}{\eta}\right)^\eta A^{1-\eta} \right]' \right. \\ \left. + R^2 \left\{ \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{\Theta}{\eta}\right) \right\} \frac{\omega \omega' A^{1-\eta}}{\Theta'} + \left(\frac{\Theta}{\eta}\right)^\eta (A^{1-\eta})' \frac{\omega^2}{2\Theta} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para simplificar a quantidade de funções arbitrárias da equação (4.45), Maschke e Perrin consideraram um caso particular, onde as quantidades de superfícies $\Theta(\Psi)$ e $\omega(\Psi)$ satisfazem a seguinte igualdade:

$$\frac{\omega^2}{\Theta} = \frac{\Omega^2}{R_0^2}, \quad (4.46)$$

onde Ω é uma constante e R_0 é o comprimento característico do sistema.

Substituindo (4.46) em (4.45), obtemos

$$\Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \Omega^2}{2R_0^2}\right)^{\eta-1} \left\{ \left[\left(\frac{\Theta}{\eta}\right)^\eta A^{1-\eta} \right]' \left(1 + \frac{R^2 \Omega^2}{2R_0^2}\right) \right\} = 0. \quad (4.47)$$

Agora podemos definir uma nova quantidade de superfície

$$G(\Psi) = \left(\frac{\Theta}{\eta}\right)^\eta A^{1-\eta}, \quad (4.48)$$

substituindo em (4.47), chegamos numa nova equação com apenas duas quantidades de superfícies $I(\Psi)$ e $G(\Psi)$

$$\Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{dI^2}{d\Psi} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \Omega^2}{2R_0^2}\right)^\eta \frac{dG(\Psi)}{d\Psi} = 0. \quad (4.49)$$

Se fizermos o limite de $\omega \rightarrow 0$ a expressão para Θ e G se reduz a $\Theta(\Psi) \rightarrow h$ e $G(\Psi) \rightarrow p$, com isso podemos interpretar que a função $G(\Psi)$ é a pressão do plasma corrigida pela rotação.

A equação (4.49) é uma forma mais conveniente, pois o número de funções de superfície a serem determinadas foram reduzidas para duas, agora

para obtermos a solução, só precisamos especificar "a priori" apenas os perfis de $G(\Psi)$ e $I^2(\Psi)$.

A escolha de $\omega^2/\Theta = \Omega^2/R_0^2$, também impõem um limite para a velocidade de rotação, ou seja, nos limita a valores positivos Θ , implicando uma restrição para o número de Mach \mathcal{M} , definido por:

$$\mathcal{M} = \frac{|R\omega|}{C_s}, \quad (4.50)$$

onde $C_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=cte}^{1/2}$. A definição do número de Mach é a relação entre a velocidade do plasma e a velocidade adiabática do som. De fato se $\Theta > 0$, consequentemente $h > R^2\omega^2/2$, ou seja, a entalpia é maior que a energia cinética, e $h = C_s^2/(\gamma - 1)$ da equação (4.5) e (4.9), obtemos

$$\mathcal{M} < \frac{2}{\gamma - 1}, \quad (4.51)$$

como $\gamma = 5/3$, então $\mathcal{M} < \sqrt{3} \approx 1.73$.

A segunda consequência de $\omega^2/\Theta = \Omega^2/R_0^2$ é

$$\frac{R^2\Omega^2}{R_0^2} = \frac{R^2\omega^2/h}{1 - \frac{R^2\omega^2}{2h}}, \quad (4.52)$$

como

$$\begin{aligned} R^2\omega^2 &= \mathcal{M}^2 C_s^2 \\ &= \mathcal{M}^2 h(\gamma - 1) \end{aligned} \quad (4.53)$$

substituindo (4.53) em (4.52)

$$\frac{R^2\Omega^2}{R_0^2} = \frac{(\gamma - 1)\mathcal{M}}{1 - \frac{(\gamma - 1)\mathcal{M}}{2}}. \quad (4.54)$$

Isso vem do fato que \mathcal{M} torna-se uma função apenas de R . Se fizermos $R = R_0$, obtemos uma expressão para a constante Ω em função de \mathcal{M}_0 que é o número de Mach quando $R = R_0$.

$$\Omega^2 = \frac{2\mathcal{M}_0^2}{\frac{2}{\gamma - 1} - \mathcal{M}_0^2}. \quad (4.55)$$

Substituindo (4.38) em (4.5), chegamos à expressão para a pressão cinética do plasma

$$\begin{aligned} p &= A \left[\frac{\Theta + R^2\Omega^2/2}{A\Theta} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \\ &= G(\Psi) \left(1 + \frac{R^2\Omega^2}{2R_0} \right)^\eta. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Podemos notar que a pressão $G(\Psi)$ está relacionada com a pressão cinética do plasma por um termo de correção multiplicativo, que é consequência direta da rotação, no limite em que $\Omega = 0$ a pressão $G(\Psi)$ torna-se a própria pressão do plasma.

4.2 Solução para perfis lineares de $G(\Psi)$ e $I^2(\Psi)$.

Para iniciar o estudo das soluções da equação (4.49), começaremos com os perfis lineares propostos por Maschke e Perrin

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \frac{P}{\mu_0 R_0^4} (\Psi - \Psi_0), \\ I^2(\Psi) &= I_0^2 + \frac{2M}{\mu_0^2 R_0^2} (\Psi - \Psi_0). \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde Ψ_0 , P , I_0 e M são constantes.

P é sempre positivo, se M for positivo o plasma tem característica paramagnética, se M for negativo tem característica diamagnética, se M for nulo corresponde ao campo de vácuo.

Substituindo (4.57) na equação (4.49), obtemos uma equação que depende agora somente do fluxo magnético

$$\Delta^* \Psi + \mu_0^2 \frac{M}{R_0^2} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \Omega^2}{2R_0^2} \right)^\eta \frac{P}{R_0^4} = 0. \quad (4.58)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis $z = Z/R_0$ e $r = R/R_0$ e substituindo em (4.58), temos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \mu_0^2 M + \mu_0 P r^2 \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^\eta = 0, \quad (4.59)$$

Para a resolução da equação (4.59), escolhemos a solução para Ψ da seguinte forma

$$\Psi(r, z) = H(r, z) + G(r). \quad (4.60)$$

Utilizando (4.60) em (4.59), nos conduz a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(z, r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial H(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 H(z, r)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 G(r)}{\partial r^2} \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial G(r)}{\partial r} + \mu_0^2 M + \mu_0 P r^2 \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^\eta = 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Como $G(r)$ só depende de r , podemos separar a equação (4.61) em um sistema de duas equações diferenciais, uma dependente de z e r e outra só dependente de r , com isso

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H(r, z)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial H(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 H(r, z)}{\partial z^2} + \mu_0^2 M &= 0, \\ \frac{\partial^2 G(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial G(r)}{\partial r} + \mu_0 P r^2 \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2}\right)^\eta &= 0.\end{aligned}\quad (4.62)$$

Para a equação diferencial de $G(r)$, encontramos a solução particular

$$G(r) = \frac{P}{(\eta + 1)(\eta + 2)\Omega^4} \left[1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2 r^2}{2} - \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2}\right)^{(\eta+2)} \right]. \quad (4.63)$$

Para obter a solução para $H(r, z)$, partimos do seguinte polinômio

$$H(r, z) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 z^2 + a_4 r^2 z^2, \quad (4.64)$$

onde a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 são constantes a serem determinadas.

Substituindo (4.64) na equação (4.62), encontramos os valores para as constantes a_3 e a_4 , igual a:

$$\begin{aligned}a_3 &= -\mu_0^2 \frac{M}{2R_0^2}, \\ a_4 &= -4a_2.\end{aligned}\quad (4.65)$$

Substituindo (4.65) em (4.64)

$$H(r, z) = a_0 + a_1 r^2 - \mu_0^2 \frac{M}{2R_0^2} z^2 + a_2 r^2 (r^2 - 4z^2). \quad (4.66)$$

Podemos reescrever, por conveniência, as constantes que ainda não foram determinadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}a_0 &= \Psi_0, \\ a_1 &= CP\mu_0^2, \\ a_2 &= -\frac{(\epsilon_a - 1)P\mu_0^2}{16}\end{aligned}\quad (4.67)$$

Utilizando (4.67) em (4.66), chegamos finalmente na solução para $H(r, z)$

$$H(r, z) = \Psi_0 + CP\mu_0^2 r^2 - \mu_0^2 \frac{M}{2R_0^2} z^2 + -\frac{(\epsilon_a - 1)P\mu_0^2}{16} r^2 (r^2 - 4z^2). \quad (4.68)$$

A constante ϵ_a está relacionada diretamente com o formato da linha de campo que limita do plasma, onde para $\epsilon_a = -1$, temos uma elipse degenerada, $\epsilon_a = 0$, a forma circular e $\epsilon_a = 1$, não há superfícies fechadas.

Um ponto importante é que reduziremos nossa discussão para o caso onde o campo magnético toroidal incidente no plasma é igual ao campo magnético no vácuo, isto é $M = 0$. Isso é uma boa aproximação considerando o plasma como sendo um gás muito rarefeito.

Nesse caso podemos reescrever a solução da equação (4.59), como sendo

$$\Psi(r, z) = \Psi_0 + P \left\{ C \mu_0^2 r^2 + \frac{(\epsilon_a - 1) \mu_0^2}{4} r^2 \left(z^2 - \frac{r^2}{4} \right) + \frac{\mu_0}{(\eta + 1)(\eta + 2) \Omega^4} \left[1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2 r^2}{2} - \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^{\eta + 2} \right] \right\}. \quad (4.69)$$

Essa solução analítica foi encontrada por *Maschke e Perrin*[12] em 1979 para o caso de perfis lineares tanto para a pressão G como para o quadrado da corrente e considerando o plasma sem magnetização.

O coeficiente C da solução (4.69) é ainda arbitrário, determinamos ele de diferentes maneiras. Na presente seção, determinaremos C exigindo que Ψ tenha um máximo em $z = 0$ e $r = r_0$, nesse ponto, podemos escolher como sendo o eixo magnético, ou seja, r_0 é a posição do eixo magnético na coordenada radial.

Com isso, impomos na solução (4.69), as condições

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0. \end{cases} \quad (4.70)$$

Substituindo (4.69) em (4.70), encontramos para C

$$C = (\epsilon_a - 1) \frac{r_0^2}{8} - \frac{1}{2(\eta + 1)\Omega^2 \mu_0} \left[1 - \left(1 + \frac{\Omega^2 r_0^2}{2} \right)^{(\eta + 1)} \right], \quad (4.71)$$

se supormos que o eixo magnético se localiza em $r_0 = 1$, então

$$C = (\epsilon_a - 1) \frac{1}{8} - \frac{1}{2(\eta + 1)\Omega^2 \mu_0} \left[1 - \left(1 + \frac{\Omega^2}{2} \right)^{(\eta + 1)} \right]. \quad (4.72)$$

A solução geral pode ser reescrita substituindo o valor da constante C na solução (4.69) e definindo um nova função

$$\xi(r) = 1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2}, \quad (4.73)$$

com isso, a solução assume a forma:

$$\begin{aligned} \Psi(r, z) - \Psi_0 = P \left\{ \mu_0^2 r^2 \left[(\epsilon_a - 1) \frac{r_0^2}{8} - \frac{1}{2(\eta + 1)\Omega^2} \frac{1}{\mu_0} (1 - \xi(r_0)^{\eta+1}) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\epsilon_a - 1)\mu_0^2 r^2}{4} \left(z^2 - \frac{r^2}{4} \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{(\eta + 1)(\eta + 2)\Omega^4} \left[1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2 r^2}{2} - (1 + \xi(r)^{(\eta+2)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para analisar o efeito da rotação do plasma nas superfícies magnéticas, primeiramente obtém-se o limite da solução (4.74) para o caso estático, ou seja, ($\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Omega \rightarrow 0$) e compararmos com o caso rotacional.

Usando a expansão polinomial

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^{(\eta+2)} &\simeq 1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{(\eta + 2)(\eta + 1)}{4} \frac{\Omega^4 r^4}{4}, \\ \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^{(\eta+1)} &\simeq 1 + (\eta + 1) \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{\eta(\eta + 1)}{4} \frac{\Omega^4 r^4}{4}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

e substituindo em (4.74), encontramos a solução para o limite estático

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \Psi(r, z) - \Psi_0 = P \left[\mu_0^2 r^2 \left((\epsilon_a - 1) \frac{r_0}{8} + \frac{r_0^2}{4\mu_0} \right) \right. \\ \left. + \mu_0^2 (\epsilon_a - 1) \frac{r^2}{4} \left(z^2 - \frac{r^2}{4} \right) - \frac{\mu_0 r^4}{8} \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Plotando o gráfico das superfícies magnéticas para o caso estático e o caso rotacional, mostrado na figura 4.1, observa-se um deslocamento para fora das linhas de campo das superfícies magnéticas, esse deslocamento é ocasionado pela atuação da própria força centrífuga no plasma, resultado da sua rotação. Como supomos que o plasma tem condutividade infinita, as linhas de campo estão fixas no fluido e conseqüentemente se deslocam juntamente com ele, o que é previsto pelo teorema de Alfvén.

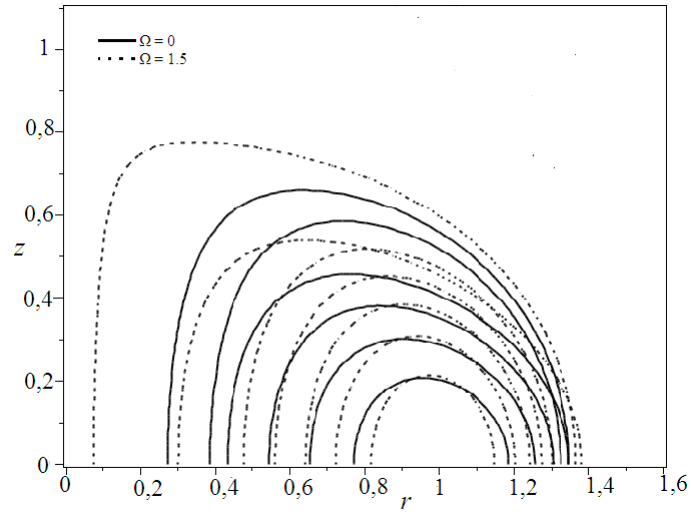


Figura 4.1: Superfícies magnéticas em função da velocidade para $\epsilon_a = 0$, $P = 1$, $\mu_0 = 1$ e $r_0 = 1$.

A figura 4.2 mostra que as linhas isobáricas não estão mais ao longo das superfícies magnéticas, ou seja, as linhas de pressão e do campo magnético não coincidem mais, como previsto pela equação (4.56).

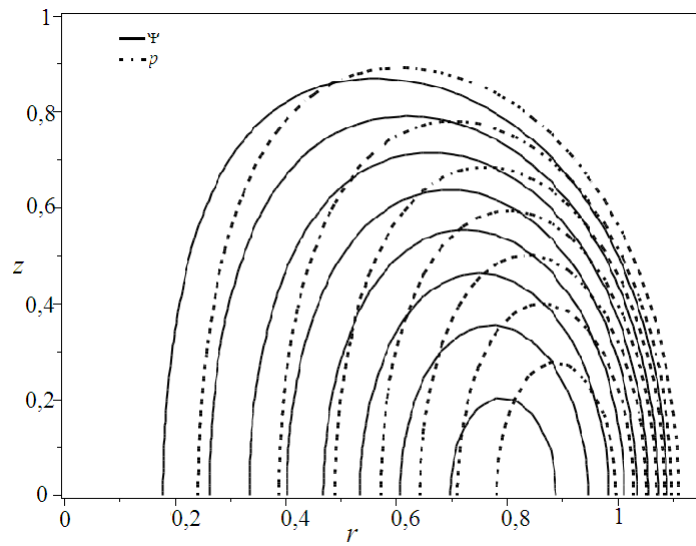


Figura 4.2: Superfícies magnéticas e linhas de pressão corrigida para $\Omega = 1$

4.2.1 Deslocamento do eixo magnético devido à rotação

Para calcularmos a mudança do eixo magnético em função de \mathcal{M}_0 , mantemos o contorno do plasma fixo entre os pontos $(z = 0, r = r_0 - a)$ e $(z = 0, r = r_0 + a)$, onde a é o inverso da razão de aspecto. Isso nos conduz a uma nova determinação da constante C da solução (4.69), em que fixando a constante Ψ_p como sendo o contorno do plasma.

A constantes C e Ψ_p são determinada pela seguinte relação

$$\begin{cases} \Psi(z = 0, r = r_0 + a) = \Psi_p, \\ \Psi(z = 0, r = r_0 - a) = \Psi_p. \end{cases} \quad (4.77)$$

Substituindo (4.77) em (4.69) e definindo $r_0 = 1$, essa relação torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_p - \Psi_0}{P} = & \left\{ C\mu_0^2(1 \pm a) + \frac{(\epsilon_a - 1)\mu_0^2}{4}(1 \pm a) \left(z^2 - \frac{(1 \pm a)}{4} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\mu_0}{(\eta + 1)(\eta + 2)\Omega^4} \left[1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2(1 \pm a)}{2} - \left(1 + \frac{\Omega^2(1 \pm a)}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

para encontrarmos o valor de C , usamos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \Psi(0, r_0 + a) = \Psi(0, r_0 - a), \\ C\mu_0^2(1 - a) + \frac{(\epsilon_a - 1)\mu_0^2}{4}(1 - a) \left(z^2 - \frac{(1 - a)}{4} \right) \\ + \frac{\mu_0}{(\eta + 1)(\eta + 2)\Omega^4} \left[1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2(1 - a)}{2} - \left(1 + \frac{\Omega^2(1 - a)}{2} \right) \right] \\ = C\mu_0^2(1 + a) + \frac{(\epsilon_a - 1)\mu_0^2}{4}(1 + a) \left(z^2 - \frac{(1 + a)}{4} \right) \\ + \frac{\mu_0}{(\eta + 1)(\eta + 2)\Omega^4} \left[1 + (\eta + 2) \frac{\Omega^2(1 + a)}{2} - \left(1 + \frac{\Omega^2(1 + a)}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.79)$$

isolando a constante C , obtemos:

$$C = \left(\frac{\epsilon_a - 1}{8} \right) (1 + a^2) - \frac{1}{\mu_0 2(\eta + 1)\Omega^2} + \frac{\xi(1 + a)^{\eta+2} - \xi(1 - a)^{\eta+2}}{4\mu_0 a(\eta + 1)(\eta + 2)\Omega^2},$$

vemos que o valor da constante C depende de a .

Uma observação importante é que: uma das duas condições para determinar o valor da fronteira do plasma é quando a, Ω, ϵ_a e η são dados.

A posição do eixo magnético é determinada pela condição

$$\left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{(z=0, r=r_a)} = 0 \right. \quad (4.80)$$

onde r_a é a nova posição do eixo magnético devido a rotação.

Note que como há um deslocamento no caso rotativo, ou seja, $r_a/r_0 \neq 1$, podemos determinar a nova posição do eixo magnético usando a solução (4.69) com a nova expressão de C na condição (4.81)

$$\begin{aligned} & \frac{a\Omega^4}{2}(\epsilon_a - 1)(a_1 - r_a^2)(\eta + 1)(\eta + 2) \\ & + \left[\xi(1 + a)^{\eta+2} - \xi(1 - a)^{\eta+2} \right] - 2a\Omega^2(\eta + 2)\xi(r_a)^{\eta+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde definimos $a_1 = 1 + a^2$.

Se a, Ω, ϵ_a e η forem dados, essa equação determina r_a como função de Ω . Conhecendo r_a , determinamos o deslocamento relativo do eixo magnético, que é dado por $(r_a - 1)/a$. A figura 4.3 mostra a variação de $(r_a - 1)/a$ quando Ω aumenta de 0 a 1, isto é, \mathcal{M}_0 aumenta de 0 a 1, para $a = 1/4, \epsilon_a = 0, r_a = 1$ e $\gamma = 5/3$, onde observamos o deslocamento para fora da posição do eixo magnético em função da rotação.

Um ponto importante na figura 4.3, é que o deslocamento relativo não se inicia propriamente do zero, ou seja, há um pequeno deslocamento do eixo magnético mesmo sem rotação, isto é consequência direta das condições de contorno escolhido.

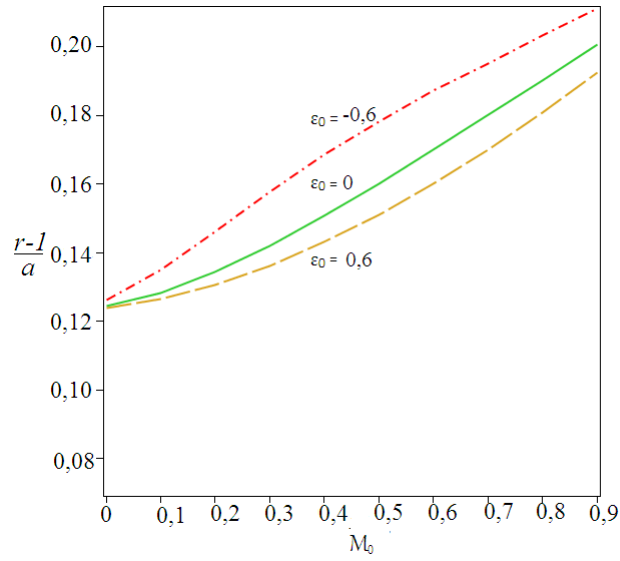


Figura 4.3: Deslocamento do eixo magnético para $a = 1/4$ e $\gamma = 5/3$.

A partir da solução de $\Psi(r, z)$, podemos plotar o perfil radial da pressão corrigida pela rotação no plano equatorial ($z=0$) para diferentes valores de Ω , como mostrada na figura 4.4. O perfil possui um máximo em $r = r_a$, ao qual corresponde a posição do eixo magnético, vemos que a velocidade angular muda essa posição para fora devido ao próprio deslocamento centrífugo das superfícies magnéticas.

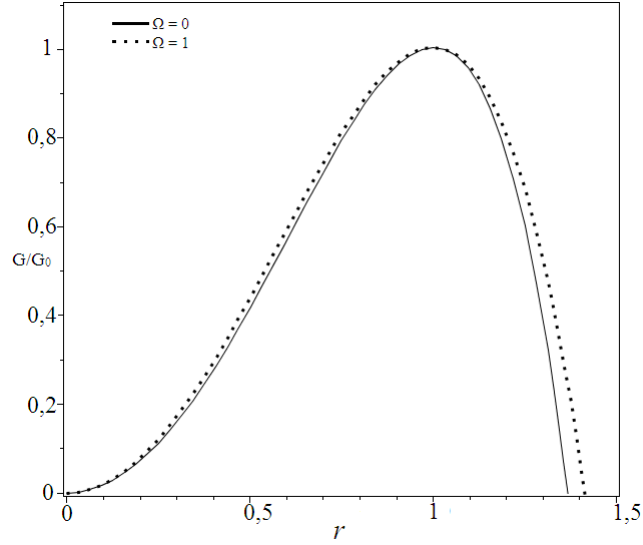


Figura 4.4: Perfil de $G(\Psi)$ normalizado em relação ao máximo na região equatorial para $P = 1$.

A partir da solução (4.69), determinamos as componentes do campo magnético e da densidade de corrente, partindo das seguintes relações

$$\begin{aligned}
 B_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\
 B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \\
 B_\phi &= -\frac{\mu_0 I}{r}, \\
 \mu_0 J_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial z}, \\
 \mu_0 J_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r}, \\
 \mu_0 J_\phi &= \Delta^* \Psi.
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

No plano equatorial ($z=0$), as componentes dos campo magnético são mostrado abaixo.

$$\begin{aligned}
 B_r &= 0, \\
 B_z &= \frac{P}{R_0} \left\{ 2C\mu_0^2 - \frac{(\epsilon_a - 1)}{4} \mu_0^2 r^2 + \frac{\mu_0}{(\eta + 1)\Omega^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^{\eta+1} \right] \right\}, \\
 B_\phi &= \frac{\mu_0}{r R_0} \left[I_0^2 + \frac{2M(\Psi - \Psi_0)}{\mu_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

A figura 4.5 mostra um crescimento na intensidade da componente \hat{z} do campo magnético conforme aumentamos o valor de Ω , já a posição do eixo de inversão do campo não há nenhuma alteração. Na figura 4.6, vemos que com o efeito centrífugo, há deslocamento para fora das linhas de campo da componente $\hat{\phi}$.

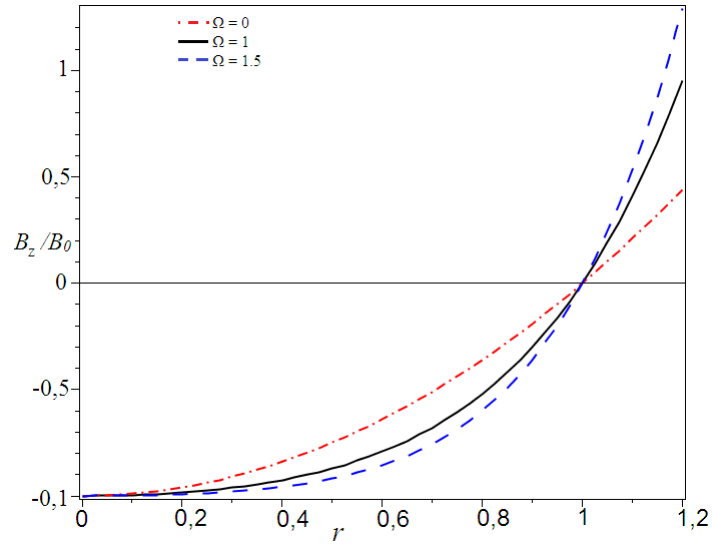


Figura 4.5: Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial [$B_0 = -B_z(0, 0)$] para $\epsilon_a = 0$, $\mu_0 = 1$, $P = 1$, $\eta = 5/2$ e $R_0 = 1$.

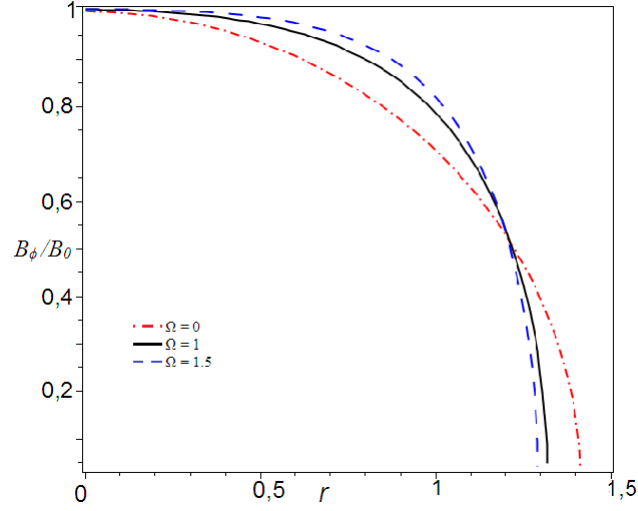


Figura 4.6: Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial $[B_0 = B_\phi(0, 0)]$ para $\mu_0 = 1$, $M = 1$, $I_0 = 1$ e $R_0 = 1$.

No plano equatorial ($z = 0$), as componentes da densidade de correntes, são

$$\begin{aligned}
 J_r &= 0, \\
 J_\phi &= -\frac{M}{R_0^2 \mu_0} - \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) \frac{P r^2}{R_0^2 \mu_0}, \\
 J_z &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2M}{R_0^2} \Psi\right)^{-1/2} \frac{P}{R_0} \left\{ 2C \mu_0^2 - \frac{(\epsilon_a - 1)}{4} \mu_0^2 r^2 + \frac{\mu_0}{(\eta + 1) \Omega^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2}\right)^{\eta+1} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Na figura 4.7, observamos o deslocamento para fora da componente \hat{z} da densidade de corrente em função de Ω . Na figura 4.8, notamos que conforme aumentamos a rotação do plasma há um aumento significativo no módulo da intensidade de J_ϕ .

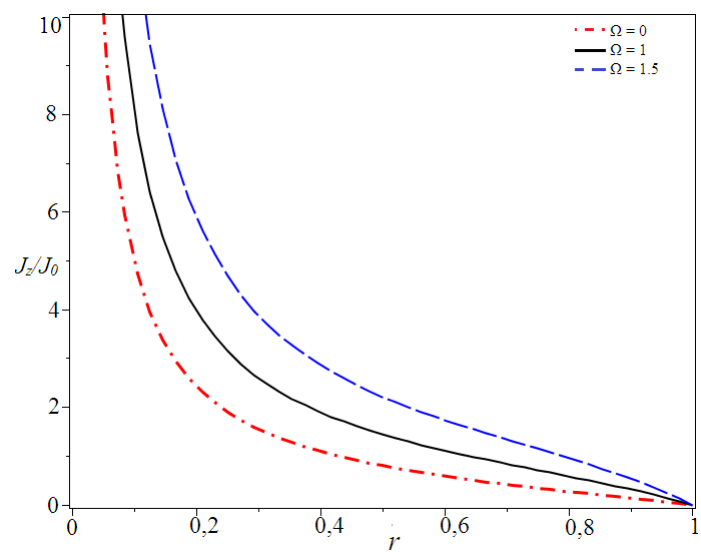


Figura 4.7: Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial [$J_0 = J_z(0, 0)$] para $\epsilon_a = 0, \mu_0 = 1, P = 1, \eta = 5/2$ e $R_0 = 1$.

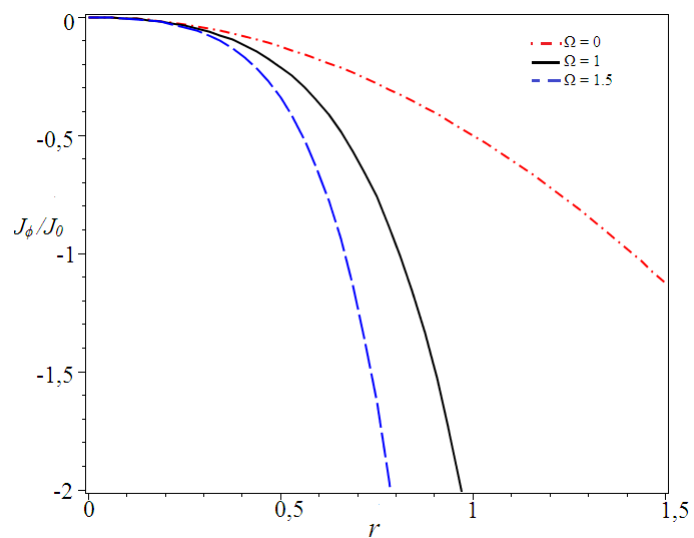


Figura 4.8: Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial [$J_0 = J_\phi(0, 0)$] para $\epsilon_a = 0, \mu_0 = 1, P = 1, \eta = 5/2$ e $R_0 = 1$.

Capítulo 5

Soluções da equação de Maschke-Perrin para um toroide compacto

No capítulo anterior, estendemos a equação de Grad-Shafranov[18, 19] para um plasma com simetria axial cilíndrica rotacionando em torno de um eixo de simetria. Ao adicionarmos a velocidade ($\mathbf{v} = cte$) nas equações de equilíbrio MHD e utilizando uma nova quantidade de superfície, obtivemos a equação de equilíbrio de Maschke-Perrin[12], onde na sua resolução, usamos perfis lineares tanto para a pressão corrigida como para a corrente, resultando numa solução exata para o fluxo magnético. Na obtenção dessa solução, não foi considerado as condições de contorno, ou seja, o fluxo magnético poderia ser diferente de zero nas fronteiras do plasma, o que não torna muito fisicamente aceitável.

Nesse capítulo apresentamos duas novas soluções, para dois perfis diferentes para a pressão corrigida e corrente quadrática, onde restringimos à análise para o caso de um torus compacto rotacional contido dentro de um cilindro perfeitamente condutor e assumindo que o fluxo magnético é nulo na superfície($\Psi = 0$). Para ambos os perfis, as soluções encontradas são soluções semi analíticas, onde derivamos várias propriedades físicas para o confinamento magnético do plasma. Com essas duas novas soluções foi produzido um artigo, ao qual foi publicado na revista Physics of Plasma[36].

5.1 Equação de equilíbrio em coordenadas cilíndricas

Em um sistema de coordenada cilíndrica com o eixo simétrico na direção de \hat{z} e assumindo a entropia do plasma como uma quantidade de superfície, temos a equação de Maschke-Perrin

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial I^2}{\partial \Psi} + \mu_0 R^2 \left(1 + \frac{R^2 \Omega^2}{2R_0^2} \right)^\eta \frac{dG(\Psi)}{d\Psi} = 0 \quad (5.1)$$

onde

$$G(\Psi) = p \left(1 + \frac{R^2 \Omega^2}{R_0^2} \right)^{-\eta}, \quad (5.2)$$

e $\Psi, \Omega, P, p, \mu_0$ e I são o fluxo poloidal, a frequência angular, uma constante arbitrária, a pressão do plasma corrigido, a constante de permeabilidade magnética no vácuo e a corrente poloidal.

5.1.1 Pressão quadrática em função de Ψ

Partindo da equação (5.1) e supondo os perfis quadráticos abaixo

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \frac{P}{2\mu_0 R_0^4} \Psi^2, \\ I^2(\Psi) &= \frac{M}{\mu_0^2 R_0^2} \Psi^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde P e M são constantes. P é sempre positivo, já M está relacionado diretamente a magnetização do plasma, onde $M = -1$ temos plasmas diamagnético que tem o efeito de diminuir a intensidade de um campo magnético externo aplicado ao plasma, $M = 1$ temos plasmas paramagnético que tende aumentar a intensidade de um campo magnético externo aplicado a ele e $M = 0$ que considera a magnetização interna do plasma desprezível. Substituindo os perfis (5.2) na equação (5.1), temos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{R_0^2}{Z_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + M\Psi + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right)^\eta \Psi = 0, \quad (5.4)$$

onde definimos as variáveis adimensionais $r = R/R_0$ e $z = Z/Z_0$, ao qual, Z_0 e R_0 é comprimento e o raio característico do cilindro.

Consideramos a seguinte condição de contorno: um cilindro perfeitamente

condutor, como mostrado na figura 5.1, de raio $r = 1$ e comprimento característico $Z_0 = 1$, onde o fluxo poloidal é nulo na superfície, ou seja, $\Psi(1, 0) = \Psi(0, 1) = 0$.

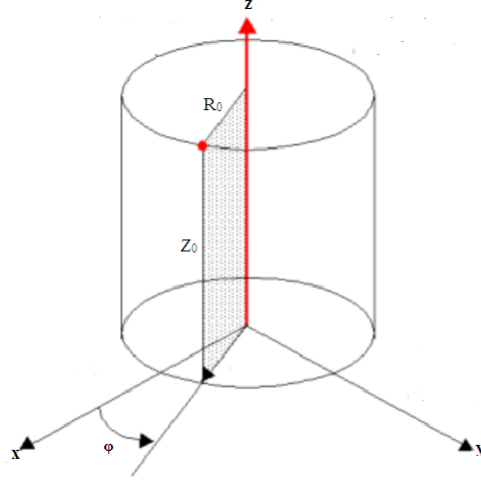


Figura 5.1: Cilindro, onde $0 \leq Z \leq Z_0$ e $0 \leq R \leq R_0$.

Para a resolução da equação (5.3), utiliza-se o método de separação de variáveis.

$$\Psi(r, z) = R(r)Z(z). \quad (5.5)$$

Substituindo (5.4) em (5.3), obtém-se a equação diferencial

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{Z(z)} \frac{R_0^2}{Z_0^2} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + M + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2}\right)^\eta = 0. \quad (5.6)$$

Pode-se observar que há duas equações diferenciais independentes, uma que é só função de r e outra de, z . A equação (5.5) então pode ser separada em um sistema de duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[M - \lambda^2 + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2}\right)^\eta \right] R(r) &= 0, \\ \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \lambda^2 Z(z) &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde λ^2 é uma constante de separação.

A autofunção de $Z(z)$ tem a seguinte solução exata:

$$Z(z) = A_1 \sin(\lambda z) + A_2 \cos(\lambda z), \quad (5.8)$$

onde A_1 e A_2 são constantes de normalização.

Para essa autofunção obedecer às condições de contorno ($Z(0) = 0$ e $Z(1) = 0$), as constantes precisam assumir os seguintes autovalores

$$\begin{aligned} A_2 &= 0, \\ \lambda^2 &= n^2 \pi^2. \end{aligned}$$

Substituindo esses autovalores na solução, temos

$$Z(z) = A_1 \sin(n\pi z), \quad (\lambda = n^2 \pi^2), \quad (5.9)$$

onde n é um número inteiro e positivo.

Fisicamente as múltiplas soluções correspondem possivelmente à existência de vários eixos magnéticos. Por simplicidade vamos assumir a existência de um único eixo magnético, ou seja, $n = 1$.

Com esse autovalor a autofunção radial assume a forma

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[M - \pi^2 + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right)^\eta \right] R(r) = 0. \quad (5.10)$$

A equação (5.9) não possui solução exata, tendo apenas solução numérica.

Fixando M e η e utilizando o método de diferença finita[37, 38], supomos diferentes valores de P para diferente Ω até que a solução obtida respeite a condição de contorno, ou seja, $R(1) = 0$. Note que o parâmetro P assume a forma de autovalor da equação radial. Os valores de P em função da velocidade angular Ω para vários valores de M são mostrados na figura 5.2.

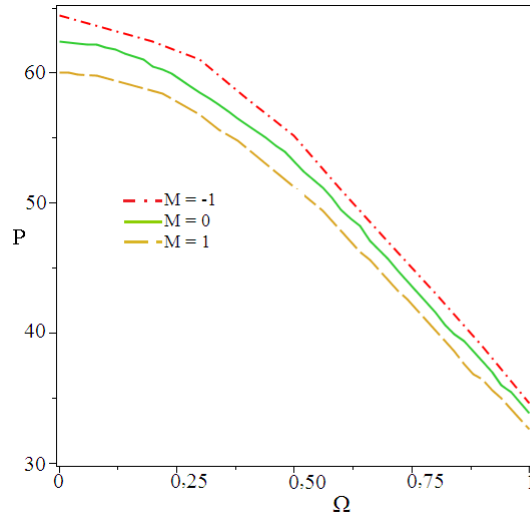


Figura 5.2: P em função de Ω para diferentes valores de M e $\eta = 5/2$

Com a solução (analítica em z e numérica em r), chegamos a solução geral para $\Psi(r, z)$, que nos permite obter o perfil radial do fluxo magnético e a pressão corrigida G e na região equatorial ($z = 1/2$), como mostrado na figura 5.3 e figura 5.4, para diferentes valores de Ω .

Os perfis de G e Ψ se anulam em $r = 0$ e $r = 1$ e têm um máximo ($r = r_a$) que correspondem à posição do eixo magnético. Com o crescimento da velocidade angular, observamos uma mudança da posição do máximo para fora, que corresponde ao deslocamento geral das superfícies magnéticas.

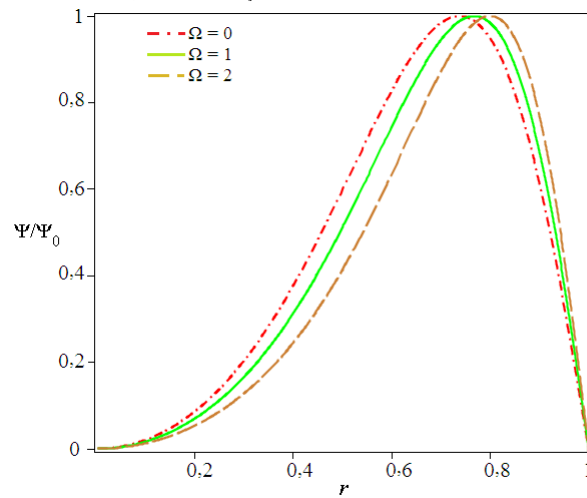


Figura 5.3: $\Psi(z, r)$ normalizado na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0$, $\Omega = 1$ e $\Omega = 2$, respectivamente.

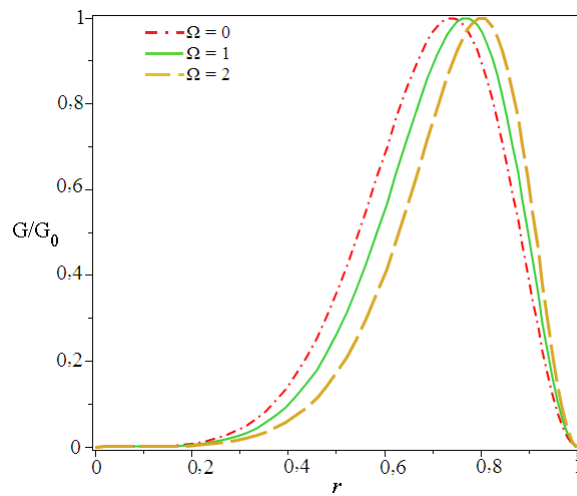


Figura 5.4: Pressão normalizada na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0$, $\Omega = 1$ e $\Omega = 2$

Na figura 5.5, plotamos o deslocamento do eixo magnético em função da velocidade angular, para diferentes valores de M , indicando de fato a mudança da posição do eixo magnético com o crescimento de Ω .

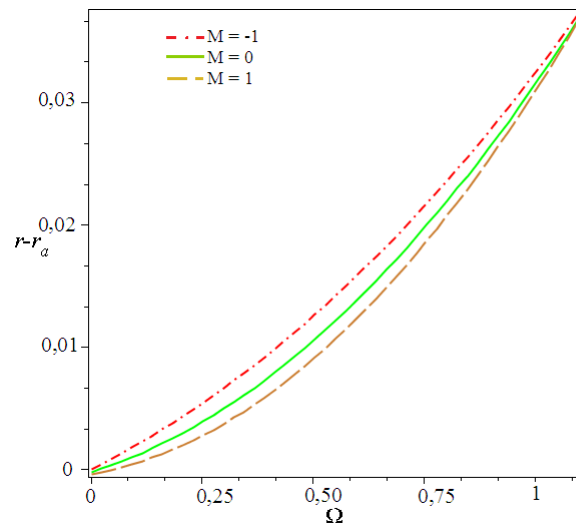


Figura 5.5: Deslocamento do eixo magnético em função da rotação para $M = -1$, $M = 0$ e $M = 1$.

Embora nossa descrição teórica só permita valores para o número de Mach menor que $\sqrt{3}$, notamos o mesmo comportamento para valores maiores de

Ω , mas sempre considerando o regime não relativístico. Vemos que há uma pequena diferença no deslocamento do eixo para o plasma paramagnético $M = 1$, diamagnético $M = -1$ e $M = 0$, que diminui conforme aumentamos o valor de Ω .

As componentes do campo magnético na região equatorial são dadas por (4.83) em função do fluxo

$$\begin{aligned} B_r &= 0, \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \\ B_\phi &= -\frac{\mu_0 I}{r} = \pm \frac{M}{R_0} \Psi(r, z). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Os perfis radiais para valores normalizados de B_z e B_ϕ na região equatorial ($z = 1/2$) são mostrados na figura 5.6 e figura 5.7 para diferentes valores da velocidade angular.

A figura 5.6 mostra que em ambos os casos, estático e rotacional, há uma inversão de campo que é deslocado para fora devido à própria rotação do plasma. A intensidade do campo também é afetada, conforme aumentamos a velocidade a sua intensidade também aumenta.

Na figura 5.7, o deslocamento para fora do máximo da componente azimutal do campo magnético, mostrado no gráfico, é devido ao próprio deslocamento centrífugo das superfícies magnéticas.

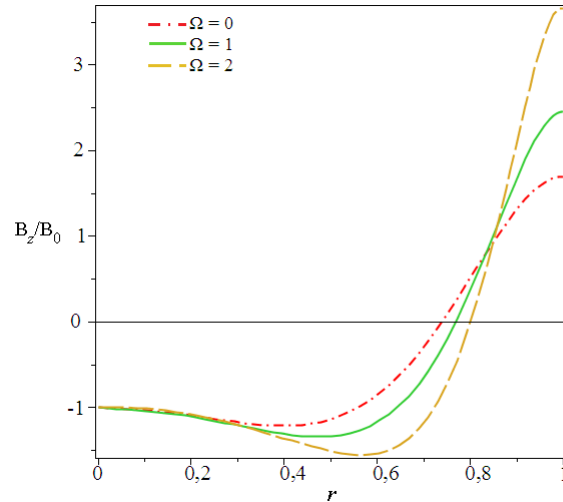


Figura 5.6: Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial [$B_0 = -B(0, 0)$] para $M = 1$ e $\eta = 5/2$

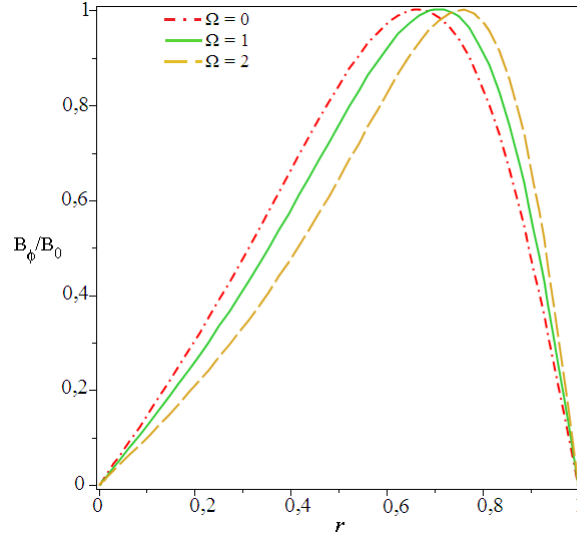


Figura 5.7: Perfil da componente B_ϕ normalizado em relação ao máximo na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$

As componentes da densidade de corrente no plano equatorial ($z = 1/2$) são dadas pela equações

$$\begin{aligned}
 \mu_0 J_r &= 0, \\
 \mu_0 J_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r}, \\
 \mu_0 J_\phi &= \Delta^* \Psi.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Os valores normalizados da densidade de corrente vertical no plano equatorial são retratados, como função da coordenada radial, na figura 5.9, mostrando uma corrente reversa semelhante ao campo magnético e apresentando o mesmo comportamento sob a rotação. O perfil correspondente a componente azimutal (figura 5.8) mostra uma pequena inversão da corrente, mas com um deslocamento similar.

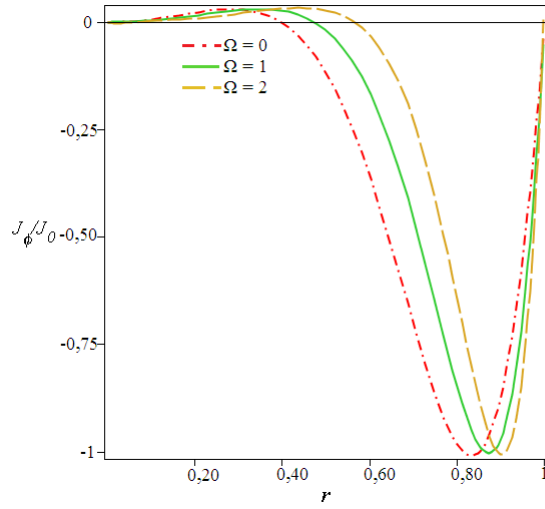


Figura 5.8: Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial [$J_0 = J(0, 0)$] para $M = 1$ e $\eta = 5/2$.

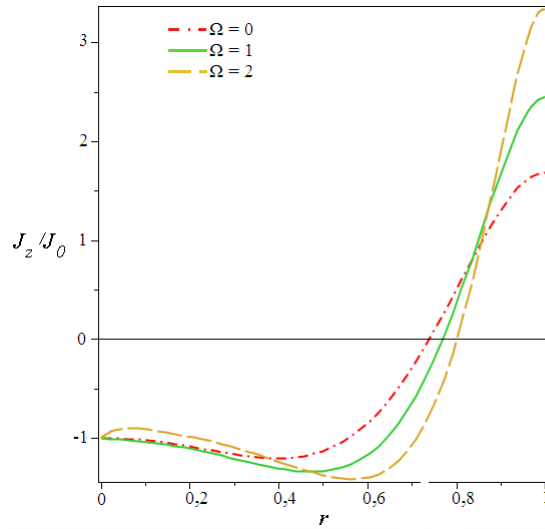


Figura 5.9: Perfil da densidade de corrente J_ϕ na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$.

As seções transversais das superfícies do fluxo magnético, contidas dentro das paredes do cilindro, são retratadas na figura 5.10, para o caso estático em com rotação.

Além do deslocamento das superfícies magnética como já esperado (resultado da força centrífuga), elas assumem um formato diferente da superfícies

encontrada para o caso linear de Maschke-Perrin, consequência da própria condição de contorno, ou seja, há um acúmulo de superfícies magnéticas entre o eixo magnético e a parede do cilindro, tomando um formato de D.

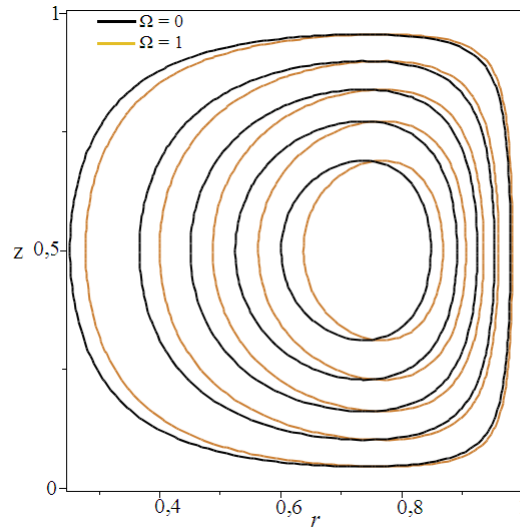


Figura 5.10: A região transversal da superfície do fluxo magnético em função da velocidade angular para $M = 1$ e $\eta = 5/2$.

Podemos novamente observar na figura 6.11 que as linhas isobáricas não jazem mais nas superfícies magnéticas.

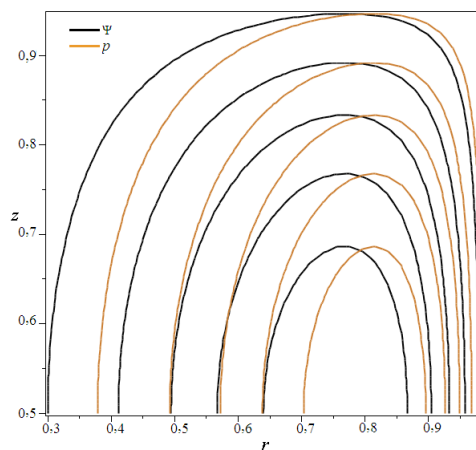


Figura 5.11: Região transversal das superfícies magnéticas e superfícies isobáricas para $\Omega = 1$.

5.2 Pressão linear em função de Ψ

Consideramos agora o perfil linear para a pressão corrigida e o perfil quadrático para o quadrado da corrente.

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \frac{P}{2\mu_0 R_0^2} \Psi, \\ I^2(\Psi) &= \frac{M}{\mu_0 R_0^4} \Psi^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Com o a equação (5.1) e definindo novamente as variáveis adimensionais, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(r, z)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z)}{\partial r} + \frac{R_0^2}{Z^2} \frac{\partial^2 \Psi(r, z)}{\partial z^2} \\ + M\Psi(r, z) + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right)^\eta \Psi(r, z) = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Escolhemos a solução para $\Psi(r, z)$ da seguinte forma

$$\Psi(r, z) = h(r, z) + g(r), \quad (5.15)$$

e substituindo em (5.13), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h(r, z)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial h(r, z)}{\partial r} + \frac{R_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 h(r, z)}{\partial z^2} + Mh(r, z) + \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} + Mg(r) + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right)^\eta g(r) = 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde separamos em um sistema de duas equações diferenciais, podendo ser resolvidas independentemente uma da outra

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h(r, z)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial h(r, z)}{\partial r} + \frac{R_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 h(r, z)}{\partial z^2} + Mh(r, z) &= 0, \\ \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} + Mg(r) + Pr^2 \left(1 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right)^\eta g(r) &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para a equação de $h(r, z)$ utilizamos novamente a separação de variáveis $h(r, z) = R(r)Z(z)$, resultando em um sistema de duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{2} MR(r) &= 0, \\ \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{R_0^2} MZ(z) &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Definindo novamente um cilindro de condutividade infinita como mostrado na figura (5.1) e usando as mesmas condições de contorno, obtemos a solução para $Z(z)$ da seguinte forma

$$Z(z) = A_2 \sin(n\pi z), \quad (n = 1, 2, 3...), \quad (5.19)$$

onde A_2 é uma constante de normalização e $\frac{1}{2}M = \alpha^2 = \frac{R_0^2 n^2 \pi^2}{Z_0^2}$.

A solução da equação diferencial radial é uma função de Bessel de primeira ordem[39]

$$R(r)_n = r J_1(\alpha_{1n} r), \quad (n = 1, 2, 3...), \quad (5.20)$$

Para a função de $R(r)$ ser fisicamente aceitável, é necessário que ela se anule em $r = 0$ e $r = 1$, como a função de Bessel para $r = 0$ é nula naturalmente, só temos que garantir que $J_1(\alpha_{1n}) = 0$.

Usando as condições de Dirichlet[40]

$$J_1(k_{1n} r) = 0 \quad (k_{1n} = \frac{\alpha_{1n}}{r}), \quad (5.21)$$

para $n = 0, 1, \dots$, onde n é a ordem da raiz da função de Bessel (J). Assumindo novamente a existência de um único eixo magnético ($n = 1$), encontramos para o valor de α ($\alpha_{11} = 3.832$).

Com isso, reescrevemos (5.19)

$$R(r) = r J_1(3.832r), \quad (5.22)$$

Com as soluções independentes (5.18) e (5.21), encontramos a solução exata para $h(r, z)$

$$h(r, z) = r J_1(3.832r) \sin(\pi z). \quad (5.23)$$

Como a função de $g(r)$ não possui solução exata, a resolução numérica é semelhante ao da equação (5.9). Variando o autovalor de P com M e Ω fixados até que a solução se anule em $g(r = 1) = 0$. Esses valores de P são mostrados no gráfico (figura 5.12).

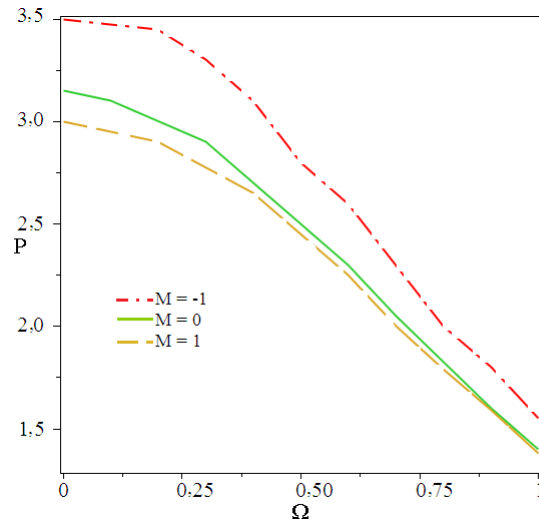


Figura 5.12: P em função de Ω , variando M e $\eta = 5/2$.

É visto que P tem a mesma característica que a da equação (5.9) para plasma diamagnético, paramagnético e no vácuo.

Com as soluções de $h(r, z)$ e $g(r)$, obtemos a solução geral para $\Psi(r, z)$. Com essa solução podemos plotar os perfis de Ψ e de G , na região equatorial ($z = 1/2$), para vários valores de Ω como mostrado na figura 5.13 e figura 5.14, respectivamente

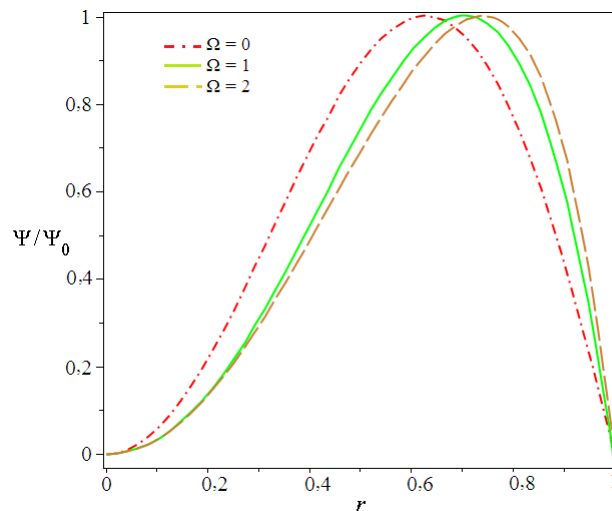


Figura 5.13: $\Psi(z, r)$ normalizado na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0$, $\Omega = 1$ e $\Omega = 2$, respectivamente.

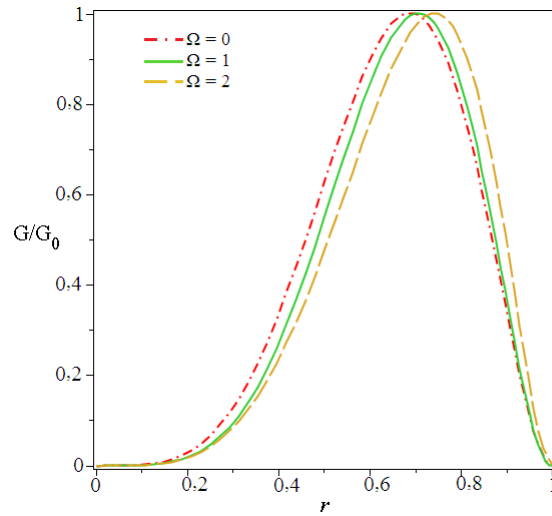


Figura 5.14: Pressão normalizada na região equatorial para $M = 0$ e $\eta = 5/2$, onde $\Omega = 0$, $\Omega = 1$ e $\Omega = 2$

A figura 5.15 mostra o deslocamento do eixo magnético, em função da velocidade, para diferentes valores de M .

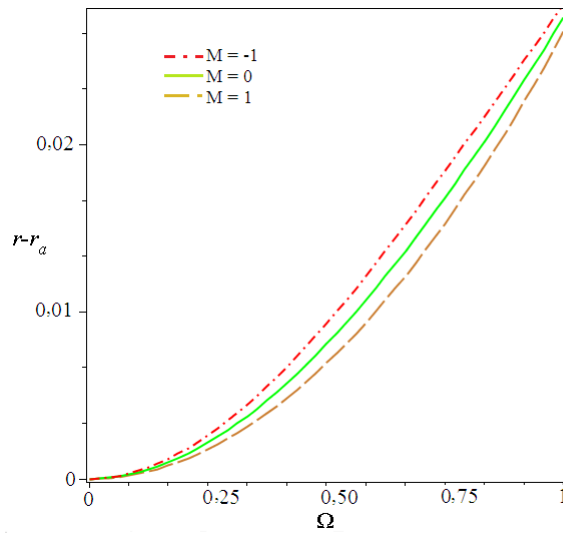


Figura 5.15: Deslocamento do eixo magnético em função da rotação para $M = -1, M = 0$ e $M = 1$.

Os perfis radiais normalizados das componentes do campo magnéticos dada por (5.10), são mostrados na figura (5.16) e (5.17), como função de Ω .

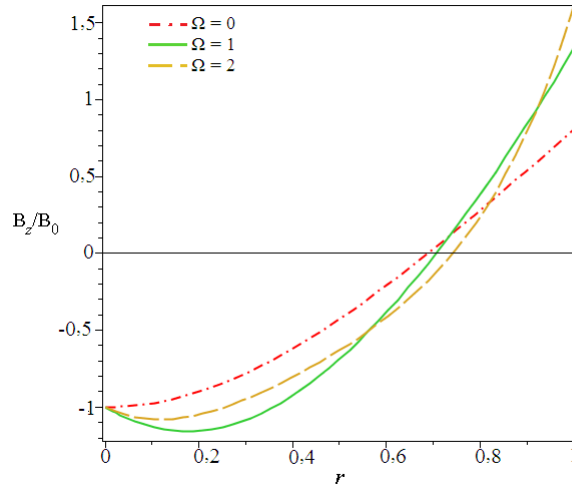


Figura 5.16: Perfil do campo magnético normalizado na região equatorial $[B_0 = -B(0,0)]$ para $M = 1$ e $\eta = 5/2$

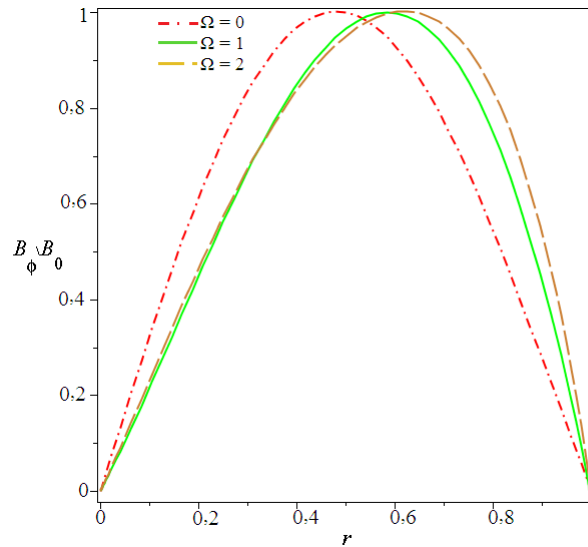


Figura 5.17: Perfil da componente B_ϕ normalizado na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$

Novamente observamos o aumento do deslocamento do eixo de inversão do campo B_z e o efeito da rotação na sua intensidade. Na componente B_ϕ também há o deslocamento do eixo de máximo do campo magnético em função da sua velocidade.

Plotando os perfis radiais das densidades de correntes como mostrado na figura (5.18) e (5.19), observamos para J_z o mesmo comportamento da componente vertical do campo magnético.

Na componente $\hat{\phi}$ da densidade de corrente, notamos um comportamento diferente. Enquanto que no caso estático não há uma corrente reversa, quando adicionamos a rotação ($\Omega = 1$), ela novamente é observada. Corrente reversa tem sido descrita em muitas configurações estáticas [41][42], no nosso caso tem aparecido devido à rotação toroidal, no entanto, só para os perfis quadráticos para a corrente. No perfil utilizado por Maschke-Perrin não é observado tal comportamento.

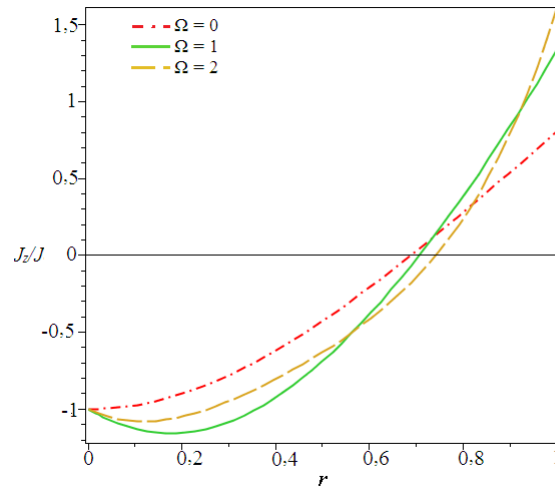


Figura 5.18: Perfil da densidade de corrente normalizado na região equatorial [$J_0 = J(0, 0)$] para $M = 1$ e $\eta = 5/2$.

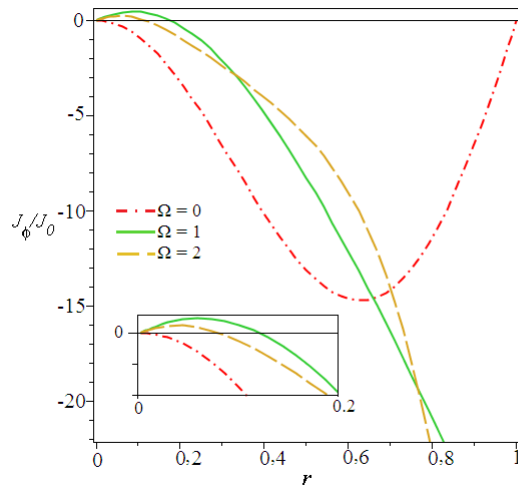


Figura 5.19: Perfil da densidade de corrente J_ϕ o na região equatorial para $M = 1$ e $\eta = 5/2$.

As superfícies de fluxos magnético são mostradas na figura 5.19 e retratam o deslocamento das linhas de campo e sua maior concentração na região entre o eixo magnético e a superfície do cilindro, tomando um formato de D, resultado da condição de contorno na superfície ($\Psi = 0$), na figura 5.21, são mostrados as superfícies isobáricas e as superfícies magnéticas.

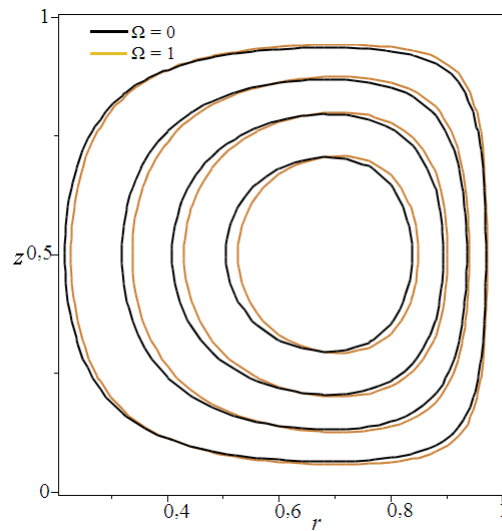


Figura 5.20: A região transversal da superfície do fluxo magnético em função da velocidade angular para $M = 1$ e $\eta = 5/2$.

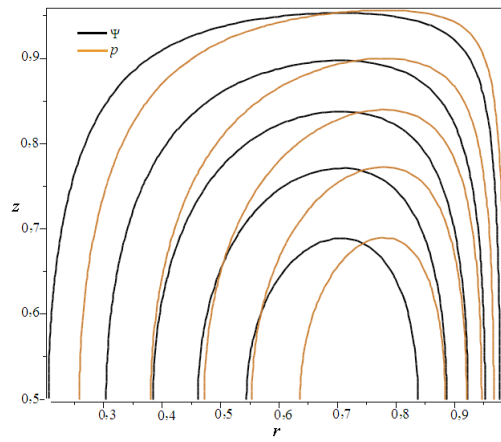


Figura 5.21: Região transversal das superfícies magnéticas e superfícies isobáricas para $\Omega = 1$ e $M=1$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, através das equações de equilíbrio MHD ideal para um plasma com geometria cilíndrica e com rotação azimutal, foi derivada uma equação diferencial para o fluxo magnético poloidal, considerando a entropia como quantidade de superfície. Para a resolução da equação diferencial, foram propostos perfis tanto para a pressão como para a corrente quadrática, ambas como função do fluxo magnético.

Os primeiros perfis estudados foram os perfis lineares para a pressão modificada e para a corrente quadrática, propostos por Maschke e Perrin, que nos conduziu a uma solução exata para o fluxo magnético.

Com a solução exata, permitiu-se observar várias propriedades físicas do confinamento magnético. Uma dessas propriedades físicas foi o deslocamento para fora do eixo magnético, localizado na região equatorial, com o crescimento da rotação. Outro efeito causado pela rotação do plasma foi o deslocamento das superfícies magnéticas, sendo esse deslocamento maior na região do eixo magnético que nas extremidades. As superfícies magnéticas não coincidem com as superfícies de pressão constante, ou seja, as superfícies isobáricas não podem ser consideradas mais como superfícies magnéticas para o caso rotacional, sendo necessário escolher uma nova quantidade de superfície magnética, ao qual, foi escolhida a entropia, embora a pressão corrigida pela rotação continua sendo uma quantidade de superfície.

Em relação à pressão, foi observado o mesmo deslocamento que ocorreu nas superfícies magnéticas. Esses deslocamentos são ocasionados pela atuação da própria força centrífuga no plasma, resultado da sua rotação. Como supomos que o plasma tem condutividade infinita, as linhas de campo estão fixas no plasma e conseqüentemente se deslocam juntamente com ele, como previsto pelo teorema de Alfvén.

Na componente vertical do campo magnético (B_z), notou-se o aparecimento do eixo de reversão e o aumento da sua intensidade conforme o cres-

cimento da rotação. Já em B_ϕ , observou-se um deslocamento para fora e um crescimento em módulo da sua intensidade. Na componente azimutal da densidade de corrente, notou-se um aumento muito mais significativo na sua intensidade do que foi observado na componente azimutal do campo magnético e não houve nenhuma mudança de sinal da sua intensidade, tanto no caso estático como no rotacional. Em J_z , observou-se um deslocamento para fora devido à rotação do plasma.

Como tema principal da nossa dissertação, foram propostas duas novas soluções para a equação de Maschke e Perrin, restringindo nossa análise para o caso de um torus compacto rotacional contido dentro de um cilindro perfeitamente condutor e considerando o fluxo magnético nulo na sua superfície.

As soluções encontradas corresponderam a dois perfis diferentes para a pressão modificada, um linear e outro quadrático e nos dois casos quadráticos para o fluxo de corrente. A solução obtida foi uma solução semi-analítica em ambos os casos, através dessa solução foram analisadas várias propriedades do confinamento magnético.

Para os novos perfis, notou-se um deslocamento muito mais significativo para a pressão e o fluxo magnético do que visto nos perfis propostos por Maschke e Perrin. Em relação ao eixo magnético observou-se um crescimento não linear em função da velocidade angular do plasma.

As superfícies magnéticas tiveram um deslocamento para fora devido à rotação do plasma, mas diferentemente do que ocorreu nos perfis de Maschke e Perrin, as superfícies assumiram um formato de D, concentrando-se entre o eixo magnético e a superfície do cilindro condutor, sendo esse formato o resultado da escolha das condições de contorno. Esse fenômeno ocorreu em ambos os casos para a pressão modificada.

Na componente vertical do campo magnético também foi observado um eixo de reversão, mas diferentemente do que ocorreu nos perfis propostos por Maschke e Perrin, esse eixo foi deslocado conforme o crescimento da velocidade angular do plasma. Em relação a sua intensidade, observou-se um aumento em função da rotação. Esse efeito ocorreu tanto no perfil linear e quanto no perfil quadrático para a pressão modificada.

A componente azimutal do campo magnético, sendo em ambos os casos um perfil linear e quadrático, tiveram seu máximo deslocado para fora conforme o aumento da velocidade angular.

Na componente vertical da densidade de corrente, observou-se o mesmo comportamento visto no campo magnético, isso ocorreu tanto para o perfil de pressão linear quanto para o perfil de pressão quadrática.

A diferença entre o perfil linear e quadrático para a pressão modificada, surgiu na componente azimutal da densidade de corrente. No caso quadrático, foi observada uma corrente reversa que se desloca conforme aumentamos

a rotação. No caso linear, quando não há velocidade, não há o surgimento dessa corrente reversa, aparecendo somente no caso rotacional, além disso, só no caso estático a densidade de corrente é nula na condição de contorno (superfície do cilindro condutor), divergindo para o caso rotacional.

Essa corrente reversa foi observada devido à rotação do plasma, mas só aparecendo para perfis quadráticos da corrente, não sendo observada nos perfis lineares propostos por Maschke e Perrin. Esses resultados são muito importantes, por que mostram como a rotação de plasmas afetam o confinamento magnético.

Para trabalhos futuros pretendemos estudar outros perfis para a pressão corrigida e a corrente quadrática na equação de Maschke e Perrin, buscando novas soluções tanto analíticas como numéricas.

Referências Bibliográficas

- [1] J.Ongena , R.Koch, R.Wolf e H.Zolm. *Magnetic-Confinement fusion*. Nature physics, New York, 2016.
- [2] Francis F.Chen. *Plasma physics and controlled fusion*. Plenum Press, New York, 1984.
- [3] J. B. Russel. *Química geral*. Makron Books, São Paulo, 2 ed edition, 2004.
- [4] R.Milroy e M.J.Schaffer S.Woodruff , Michael R.Brown , E.B.Hooper. *Why Compact tori for Fusion?* Journal Of Fusion Energy, 2010.
- [5] Aramaki e Emilia Akemi. *Estudo experimental em configuração a campo reverso no TCA*. USP, São Paulo, 1992.
- [6] K. Wiesenmam. *A Short Introduction to Plasma Physics*. AEPT,Universitat Bochum, Germany, 2014.
- [7] R. Fitzpatrick. *Plasma Physics*. The University of Texas at Austin, Texas, 2014.
- [8] M.G.Bell. *Measurements of plasma rotation in tokamak LT-3*, volume 19. Nuclear Fusion, 1979.
- [9] J.P.Freedberg. *Ideal Magnetohydrodynamics*. Plenum Press, New York, 1987.
- [10] H.P. Zehrfeld e B.J. Green. *Effect of inertia on losses from a plasma in toroidal equilibrium*. Nuclear Fusion, 1969.
- [11] A.I. Morosov , L.S. e Solov'ev. *Effect of inertia on losses from a plasma in toroidal equilibrium*, volume Ed.: M. A. Leontovich, volume 8, Chap. 2. in Reviews of Plasma Physics, (Consultants Bureau, New York), 1980.

- [12] E.K.Masch e H.Perrin. *Exact Solutions Of the Stationary MHD Equations For a Rotating Toroidal Plasma*, volume 22. Plasma Physics, Institute of Physics and Pergamon Press Ltd, 1980.
- [13] R. L. Viana. *Adiabatic plasma rotations in orthogonal coordinate systems*, volume volume 31, Pages.58-64. Braz.J. Phys, São Paulo, 2000.
- [14] R. L. Viana. *MHD Equilibrium Equation with Azimuthal Rotation in a Curvilinear Coordinate System*, volume volume.37,No.10. International Journal of Theoretical Physic, 1998.
- [15] R.A.Clemente e R.Farengo. *A class of Rotating Compact Tori Equilibria*, volume 27,776. Physics of Fluids, 1984.
- [16] R L Viana , R A Clemente e S R Lopes. *Spherically symmetric stationary MHD equilibria with azimuthal rotation*, volume volume 39,Pages 197-203. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1997.
- [17] M.Y. Kucinski e I.L Caldas. *MHD equilibria in symmetric systems*. arXiv:1103.5063,IFUSP/P-817, 1990.
- [18] V.D.Shafranov. *Plasma equilibrium in a magnetic field*, volume 2. in Reviews of Plasma Physics, New York, 1958.
- [19] H.Grad e H.Rubin. *Hydromagnetic equilibria and force-free fields*, volume 31, Pages 386. IAEA, Geneva, 1958.
- [20] Dalton D. Schnack. *Lectures in Magnetohydrodynamics*, volume 780 of Lectures Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin,Heidelberg, 6 ed edition, 2009.
- [21] J.P.Goedbloed , R.Keppens e S.Poedts. *Advanced magnetohydrodynamics with applications to laboratory and astrophysical plasma*. Cambridge University Press, 2010.
- [22] A.T Fox , R.W e McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*. Wiley and Sons, New York, 4th edition, 1992.
- [23] S. T. Melo e F. M. Neto. *Mecânica dos fluidos e equações diferenciais*. Instituto de Matemática pura e aplicada, Rio de Janeiro, 6 ed edition.
- [24] Irene Strauch. *Análise Vetorial em dez aulas*. UFRGS, 2008.
- [25] Kleber Daum Machado. *Teoria do eletromagnetismo*. UEPG, Ponta Grossa, 2000.

- [26] D.J.Griffiths. *Introduction to Eletrodynamics*. Prentice-Hall, 1999.
- [27] H.Alfvén. *Cosmical electrodynamics*. (Clarendon Press), Oxford, 1950.
- [28] T.Neukirch. *Introduction to the Theory of MHD Equilibria*. (CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015.
- [29] K.Nishikawa e M. Wakatani. *Plasma Physics Basica Theory with Fusion Applications*, volume 18. Springer Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2000.
- [30] R. L. Viana. *Elemento de Magnetohidrodinâmica*. Departamento de Física, UFPR, Curitiba-Paraná, 2015.
- [31] L.S Solov'ev. *Symmetric magnetohydrodynamic flow and helical waves in a circular plasma cylinder*, volume 3. in Reviews of Plasma Physics, Ed. M.A. Leontovich(Consultants Bureau,New York), 1967.
- [32] Youjun Hu. *Notes on tokamak equilibrium*. Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences.
- [33] Mutsuko , Y.Kucinski e Iberê L. Caldas. *MHD equilibrium equation in symmetric systems*. arXiv preprint arXiv:1103.5063, São Paulo, 2011.
- [34] R.Lüst e A.Schlüter. *Axialsymmetrisch magnetohydrodynamisch Gleichgewichtskonfigurationen*. Zeitschrift für Naturforschung **12A**850, 1957.
- [35] D. Chandler. *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press, New York, 1987.
- [36] S.T. da Silva e R.L.Viana. *Stationary MHD equilibria describing azimuthal rotations in symmetric plasmas*. Physics of Plasma, volume 23 (2016)122503.
- [37] R. L.Burden e J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Richard Stratton, Boston,USA, ninth edition, 2011.
- [38] W. H.Press , S. A.Teukolsky , W. T.Vetterling e B. P.Flannery. *Numerical Recipes in C*. Press Syndicate of the University of Cambridge, New York, second edition, 1992.
- [39] M.Abramovitz e I.Stegun. *in Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1970 p.362.
- [40] Eugene Butkov. *Mathematical Physics*. LTC, New York, second edition, 1973.

- [41] Caroline G. L. Martins , M. Roberto , I. L. Caldas e F. L. Braga. *Analytical solutions for Tokamak equilibria with reversed toroidal current*. Phys.Plasma, volume 18. 082508(2011).
- [42] D.Ciro e I.L.Caldas. *Magnetic topology and current channels in plasmas with toroidal current density inversions*. Phys.Plasmas, volume 20. 102512(2013).