

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Stela Angelozi Leite

**MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS PARA A EQUAÇÃO DA
ONDA COM COEFICIENTES VARIÁVEIS.**

Curitiba, 28 de Novembro de 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Stela Angelozi Leite

**MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRAIS PARA A EQUAÇÃO DA
ONDA COM COEFICIENTES VARIÁVEIS**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira.

Curitiba, 28 de Novembro 2016.

L533m

Leite, Stela Angelozi

Método de elementos espectrais para a equação da onda com coeficientes variáveis / Stela Angelozi Leite. – Curitiba, 2016.

85 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Saulo Pomponet Oliveira.

1. Matemática aplicada. 2. Método de elementos espectrais. 3. Equação da onda acústica. I. Universidade Federal do Paraná. II. Oliveira, Saulo Pomponet. III. Título.

CDD: 515.25



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

ATA Nº 012

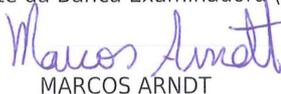
ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TESE PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia vinte e oito de Novembro de dois mil e dezesseis às 14:00 horas, na sala Auditório do CESEC, Centro Politécnico da UFPR - Edifício da Administração - 3º Andar Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 100 - Jardim das Américas, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição da doutoranda **STELA ANGELOZI LEITE** para a Defesa Pública de sua Tese intitulada: "**Método de elementos espectrais para a equação de onda com coeficientes variáveis**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: SAULO POMPONET OLIVEIRA (UFPR), ABIMAEL FERNANDO DOURADO LOULA (LNCC), MARCOS ARNDT (UFPR), PEDRO DANIZETE DAMAZIO (UFPR), YUAN JINYUN (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra a discente, para que a mesma expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. A aluna respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e a doutoranda deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação da aluna. A doutoranda foi convidada a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, SAULO POMPONET OLIVEIRA, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 28 de Novembro de 2016.


SAULO POMPONET OLIVEIRA

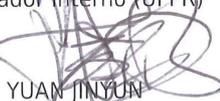
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


MARCOS ARNDT

Avaliador Externo (UFPR)


PEDRO DANIZETE DAMAZIO

Avaliador Interno (UFPR)


YUAN JINYUN

Avaliador Interno (UFPR)


ABIMAEL FERNANDO DOURADO LOULA

Avaliador Externo (LNCC)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **STELA ANGELOZI LEITE**, intitulada: "**Método de elementos espectrais para a equação de onda com coeficientes variáveis**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 28 de Novembro de 2016.

SAULO POMPONET OLIVEIRA
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

MARCOS ARNDT
Avaliador Externo (UFPR)

PEDRO DANIZETE DAMAZIO
Avaliador Interno (UFPR)

YUAN JINYUN
Avaliador Interno (UFPR)

ABIMAEEL FERNANDO DOURADO LOULA
Avaliador Externo (LNCC)

Aos meus pais e irmãos.

Agradecimentos

Ao meu pai Joaquim Batista Leite e à minha mãe Silvia Angelozi Leite por todo o apoio, amor e carinho que a mim dedicaram não somente durante o doutorado mas em todos os dias da minha vida.

Aos meus irmãos Eliaquim Batista Leite e Débora Angelozi Leite Rossi por serem tudo que eu precisei para superar os momentos de solidão e angústia.

Ao meu amado Geovani N. Grapiglia por ser minha fortaleza, meu companheiro e amigo inseparável, por trazer paz para minha vida, por me incentivar quando eu esmoreci e por tantas outras coisas que não há palavras o suficiente para descrever.

Ao meu orientador, Professor Saulo Pomponet Oliveira, pelos ensinamentos, paciência e pela motivação.

Aos meus caros Camila Isoton, Marcos Teixeira Alves, Fernando Ávila e Pamela Portela pela companhia, amizade, por abrirem meus olhos e por todo o suporte.

À Mara C. Moro Daldin por promover com louvor o reencontro com a pessoa que eu era.

Aos professores Pedro D. Damazio, Yuan Jin Yun, Abimael F. D. Loula, e Marcos Arndt por participarem da banca examinadora e pelas valiosas sugestões dadas para a versão final da tese.

Aos professores do PPGM, por colaborarem para a minha formação acadêmica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

*“A verdadeira viagem de descobrimento
não consiste em procurar novas paisagens,
mas em ter novos olhos.”*

Marcel Proust

Resumo

Esta tese refere-se à aproximação numérica da equação da onda acústica bidimensional com coeficientes variáveis, que modela a propagação de ondas compressãois em meios heterogêneos. Duas condições de fronteira diferentes são consideradas, a saber, a condição de Dirichlet e a condição de Engquist-Majda. Em ambos os casos, a discretização no espaço é feita usando-se o método de elementos espectrais baseado na regra de quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre, enquanto a discretização no tempo é feita usando-se um dos métodos explícitos da classe de esquemas de diferenças finitas de Newmark. Uma análise hp do erro de discretização é apresentada, fornecendo limitantes superiores para o erro em termos do tamanho dos elementos da malha, do grau das funções de base polinomiais e do passo no tempo. Esses limitantes generalizam vários resultados conhecidos na literatura no contexto da equação da onda com coeficientes constantes. Experimentos numéricos são reportados, confirmando os resultados teóricos obtidos.

Palavras-chave: *Método de Elementos Espectrais, Equação da Onda Acústica, Meios heterogêneos.*

Abstract

This thesis concerns the numerical approximation of the two dimensional acoustic wave equation with non-constant coefficients, which models the propagation of P-waves in heterogeneous media. Two different boundary conditions are considered, namely the Dirichlet condition and the Engquist-Majda condition. In both cases, the discretization in space is performed using the spectral element method based on Gauss-Lobatto-Legendre quadrature formula, while the discretization in time is performed using an explicit method from the Newmark family of finite difference schemes. A rigorous hp analysis of the discretization error is presented, providing upper bounds for the error in terms of the element mesh size, the degree the polynomial basis functions, and the time step. These bounds generalize several known results in the literature in the context of the wave equation with constant coefficients. Numerical experiments are reported, confirming the theoretical results obtained.

Keywords: *Spectral Element Method, Acoustic Wave Equation, Heterogeneous media*

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	14
2.1	Espaços de funções	14
2.1.1	Espaços de Sobolev	14
2.1.2	Espaços de funções com dependência temporal	19
2.1.3	Espaços de Sobolev fracionários	19
2.2	Formulação variacional abstrata	25
2.2.1	Problemas elípticos	25
2.2.2	Problemas hiperbólicos de segunda ordem	26
2.2.3	Equação da onda com coeficientes constantes	30
2.3	Método de Galerkin	30
2.3.1	Discretização de problemas elípticos	30
2.3.2	Semi-discretização de problemas hiperbólicos de segunda ordem	34
2.3.3	Discretização total de problemas hiperbólicos de segunda ordem	35
2.4	Método de elementos finitos	40
2.4.1	Métodos de elementos espectrais	43
2.4.2	Espaços de Sobolev particionados	49
2.4.3	Operadores de interpolação e de projeção	49
3	Problema com Fronteira de Dirichlet	51
3.1	Análise de Convergência	52
3.2	Erro Ótimo	59
4	Problema com Fronteira de Engquist-Majda	62
5	Resultados Numéricos	70
5.1	Equação da onda com coeficientes constantes	70
5.2	Equação da onda com coeficientes variáveis	72
5.3	Equação da onda com condições de Engquist-Majda	77
	Conclusões	79

Capítulo 1

Introdução

Diferentes problemas em física e engenharia são descritos por equações diferenciais parciais sob um domínio Ω e determinadas exigências na fronteira deste domínio. A solução de tais problemas poderá ser obtida analiticamente (por exemplo, via séries de Fourier) de acordo com a geometria do domínio (retângulos, semiplanos ou círculos).

É necessário recorrer a métodos numéricos para procurar soluções aproximadas quando não é possível encontrá-las analiticamente, tipicamente no caso de equações diferenciais parciais não-lineares, quando ocorrem coeficientes variáveis na equação, e também quando trabalha-se em domínios complexos.

No caso dos problemas em domínios não usuais destaca-se o Método de Elementos Finitos (MEF) pelas suas vantagens computacionais. O desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF) teve suas origens no final do século *XVIII*, quando Gauss propôs a utilização de funções de aproximação para a solução de problemas aplicados. Durante mais de um século, diversos matemáticos desenvolveram teorias e técnicas analíticas para a solução de problemas, entretanto, pouco se evoluiu devido à dificuldade e à limitação existente no processamento de equações algébricas. O desenvolvimento prático desta análise ocorreu somente muito mais tarde em consequência dos avanços tecnológicos, por volta de 1950, com o advento da computação. Isto permitiu a elaboração e a resolução de sistemas de equações complexas. Em 1956, Turner, Clough, Martin e Topp, trabalhando em um projeto de aeronaves para a Boeing, propuseram um método de análise estrutural, similar ao MEF [50]. Mais tarde, em 1960, Clough utilizou pela primeira vez o nome de Método dos Elementos Finitos [14]. A partir de então, seu desenvolvimento foi exponencial, sendo aplicado em diversas áreas da engenharia, medicina e áreas afins.

Esse método, assim como a maioria dos métodos numéricos para aproximação de soluções, faz uso de construção de malhas relativas à geometria do domínio do problema. É natural supor que um refinamento da malha escolhida influencie na qualidade da aproximação da solução. No entanto inúmeros trabalhos, dentre eles citamos [3, 5, 40, 47, 48], indicaram que aumentar progressivamente o grau dos polinômios mantendo uma malha fixa de elementos finitos é mais vantajoso do que o refinamento uniforme ou quase uni-

forme da malha. Para distinguir entre a redução de erros de discretização por refinamento da malha e a abordagem alternativa, que foi baseada no aumento do grau das funções de base polinomiais, os rótulos *versão h* e *versão p* foram estabelecidos pelo seguinte motivo: normalmente o símbolo h é usado para representar o tamanho dos elementos finitos. A convergência ocorre quando o tamanho do maior elemento (h_{max}) é progressivamente reduzido (daí o nome versão h). O grau polinomial de elementos é geralmente representado pelo símbolo p . A convergência ocorre quando o menor grau polinomial (p_{min}) é progressivamente aumentou (daí o nome versão p). As versões h e p são apenas aplicações especiais do método dos elementos finitos, o qual, pelo menos em princípio, permite alterar a malha de elementos finitos concomitantemente com o aumento do grau polinomial dos elementos. Essa abordagem é geralmente chamado de versão hp .

Uma das versões hp do Método de Elementos Finitos é o Método de Elementos Espectrais, que reúne duas qualidades importantes: a convergência exponencial dos métodos espectrais e a maleabilidade em relação à geometria dos elementos herdada dos Métodos de Elementos Finitos. Tais vantagens têm feito com que ele seja usado nas mais diversas áreas do conhecimento. A princípio foi empregado em problemas da dinâmica dos fluidos computacional ([10, 25, 39]), e posteriormente para modelar a propagação de ondas elásticas em sismologia ([29, 30, 41]).

Esse método vem ganhando crescente atenção em problemas hiperbólicos de segunda ordem, como a propagação de ondas [7, 12, 16, 17, 33, 36, 49, 51, 53, 54]. Uma variante particular desse método, que utiliza os pontos de integração de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL), conduz a métodos iterativos explícitos no tempo que não dependem da solução de sistemas lineares, embora estes métodos estejam sujeitos a uma condição de estabilidade que restringe a proporção entre o tamanho do elemento da malha e o incremento temporal, que é mais severa para equações parabólicas e um pouco menos para equações hiperbólicas.

Neste trabalho consideramos a equação da onda acústica bidimensional com coeficientes não constantes. Seja Ω um domínio retangular e $f(\mathbf{x}, t)$ uma função dada. Será denotado por $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um elemento arbitrário de Ω e por t um elemento arbitrário do intervalo $(0, T) \subset \mathbb{R}$, sendo T uma constante positiva. Tem-se a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(A(\mathbf{x}) \nabla u) = f(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

sendo $A = (a_{ij})$ uma função matricial de ordem 2×2 simétrica e positiva-definida com coeficientes não constantes e limitados. Esta equação é sujeita às condições iniciais

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}); \quad \text{em } \Omega. \quad (1.2)$$

Serão estudados dois problemas que diferem apenas pela sua condição de fronteira. O primeiro problema é formado pelas equações (1.1), (1.2) e pela condição de fronteira de

Dirichlet

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \partial\Omega \times (0, T). \quad (1.3)$$

O segundo problema é formado também pelas equações (1.1) e (1.2), porém com a condição de fronteira de Engquist e Majda, [23],

$$-A(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.4)$$

em que \mathbf{n} representa o vetor unitário normal exterior. Essa condição de contorno é do tipo não-reflexiva, isto é, seu objetivo é fazer com que ondas que se deslocam do interior da região Ω para as bordas não retornem quando passarem pela fronteira. O estudo desse tipo de fronteira tem sido amplamente estudado por conta da sua aplicação em estudos de terremotos, tsunamis, localização de petróleo, entre outros, [11, 30, 42], já que nesses casos considera-se um domínio infinito (que, por motivos computacionais, se faz necessária uma fronteira artificial).

Para verificar se um método numérico realmente fornece uma boa aproximação da solução do problema desejado é preciso uma análise cuidadosa de erro. Claramente a importância dessa análise em problemas aplicados faz com que o assunto erros de aproximação seja largamente estudado. Tipicamente uma análise de erro consiste em limitar a norma (L^2 e H^1) da diferença entre a solução exata e a solução aproximada por termos convenientes. No caso da versão hp , esses termos dependerão de alguma forma dos parâmetros h e p .

No entanto, apesar da importância do problema (1.1)-(1.3) e do problema (1.1)-(1.2),(1.4), não existe na literatura uma análise de erro geral do método de elementos espectrais para estes problemas. Os trabalhos conhecidos tratam apenas da análise do erro para casos particulares dos que exibiremos neste texto.

Sobre os casos particulares do primeiro problema, Maday e Rønquist [35] fizeram uma análise p considerando coeficientes não constantes, além de admitir elementos distorcidos. Porém, este trabalho considera apenas a versão estacionária da equação da onda (ou seja, a equação de difusão). Por outro lado, Duruffe, Grob e Joly [22] novamente consideram elementos distorcidos e estudam a equação da onda, porém com coeficientes constantes. Paralelamente, Zampieri e Paravino [55] e Rong e Xu [44] fizeram uma análise hp da mesma equação. A diferença essencial entre [22] e [44, 55] é que o primeiro trabalho realiza a análise no domínio da transformada de Laplace (utilizando a transformada inversa para demonstrar a validade do resultado no domínio do tempo), enquanto os outros dois conduzem o estudo no domínio do tempo, seguindo os passos descritos em [43]. Recentemente, Bradji e Fuhrmann [7] obtiveram estimativas de erro para a derivada temporal da solução.

Já para o problema (1.1)-(1.2) com condição de contorno (1.4) de Engquist e Majda [23], cita-se Dupont [20], que realiza apenas a análise h deste problema, considerando coeficientes constantes. O esquema de discretização no tempo é estável independentemente da escolha do incremento temporal Δt e escolhido de modo a minimizar o erro de truncamento. Além disso, a condição de fronteira geral é analisada. Posteriormente, Dupont e colaboradores [15] estenderam a análise para um problema com coeficientes variáveis discretizados pelo método de elementos finitos mistos com a base de Raviart-Thomas-Nedelec.

A análise geral de erro ótimo desenvolvida neste texto se deu do seguinte modo: Inicialmente, consideramos o problema (1.1) com condição de contorno nula (1.3). Com a finalidade de obter uma estimativa de erro ótima tanto para o parâmetro h quanto para o parâmetro p , uma solução aproximada foi obtida aplicando o método de elementos espectrais com regra de quadratura de Gauss-Lobato-Legendre para discretizar os termos da equação que dependem do espaço. Para discretizar os termos que dependem do tempo foi usado o esquema de diferenças finitas Leapfrog. O desafio nesse caso foi adequar os resultados já existentes sobre a análise hp para o caso da equação com coeficientes não constantes, pois este coeficiente interage com os outros termos pelo produto, o que causa uma situação delicada por conta dos espaços de Sobolev adotados. Depois disso, os resultados adaptados foram usados para obter a estimativa de erro já descrita. Essa estimativa foi validada numericamente usando um algoritmo desenvolvido na linguagem Fortran, considerando problemas-teste em que a solução exata é conhecida. Além disso, foram reproduzidos os testes feitos em [44, 55].

Já para o problema com condição de contorno de Engquist e Majda, além da adequação dos resultados para o coeficiente não constante, foi necessária uma adequação para esse termo de fronteira. Novamente nosso interesse foi obter uma estimativa hp ótima para essa equação que, depois de discretizada espacialmente pelo método de elementos espectrais com regra de quadratura GLL e pelo esquema de diferenças finitas Leapfrog no domínio do tempo, apresenta os termos provenientes da fronteira em questão. Tais termos pertencem a um espaço de Sobolev fracionário, e esse fato exigiu atenção redobrada, novamente pelo produto que surge com outros termos de espaços de Sobolev diferentes. A estimativa obtida para esse último caso foi corroborada por experimentos numéricos que comparam uma solução exata dada com a solução aproximada obtida pelo método.

Em linhas gerais, o trabalho foi dividido em quatro capítulos. O primeiro trata de assuntos preliminares e de conhecimento geral que foram usados ao longo do estudo dos problemas (1.1)-(1.3) e (1.1)-(1.2),(1.4). O segundo capítulo tratará da análise hp da equação (1.1) com condições iniciais (1.2) e de fronteira nula (1.3); o terceiro tratará da análise hp do problema (1.1) com condições iniciais (1.2) e de contorno (1.4) de Engquist e Majda [23]. Finalmente o quarto capítulo exporá os testes numéricos realizados.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo é dedicado aos fundamentos teóricos que serviram para o desenvolvimento desta tese. Os espaços de funções usados, suas propriedades e resultados convenientes relacionados [24, 34, 37, 43] foram agrupados na seção 2.1. A segunda seção revisa a formulação variacional clássica de problemas elípticos e hiperbólicos de segunda ordem, seguindo [24, 43]. Em seguida, considera-se a discretização destes problemas pelo método de Galerkin [28, 13, 43]. O Método de Elementos Finitos será descrito na seção 2.4, assim como o Método de Elementos Espectrais [32, 39, 45] e uma síntese dos operadores de projeção e de interpolação usados neste trabalho.

Daqui em diante, as derivadas temporais serão denotadas por

$$\dot{u}, \ddot{u}, u^{(3)}, u^{(4)}, \dots,$$

enquanto as derivadas parciais no espaço serão denotadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots$$

Além disso, dado o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotaremos a derivada espacial de ordem α por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{com } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (2.1)$$

2.1 Espaços de funções

2.1.1 Espaços de Sobolev

Nesta seção vamos introduzir os espaços utilizados na formulação variacional do problema (1.1)-(1.3). Seja Ω um conjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n com fronteira suave. Definimos por $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais em Ω , infinitamente continuamente dife-

renciáveis. Dada uma função u definida em Ω , denomina-se suporte de u ao fecho em Ω do conjunto dos pontos de Ω onde a função u é diferente de zero. Por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ estamos denotando o subespaço do espaço $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com suporte compacto contido em Ω .

Definição 2.1 (Convergência em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$). *Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ pertencente ao espaço $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

1. *As funções (φ_ν) da sequência possuem suportes contidos num compacto $K \subset \Omega$;*
2. *A sequência (φ_ν) e a sequência de todas as suas derivadas convergem uniformemente para zero em K , ou seja, $(D^\alpha \varphi_\nu) \rightarrow 0$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência acima é denominado espaço das funções teste, representado por $\mathcal{D}(\Omega)$. Com a noção acima podemos então definir o espaço das distribuições.

Definição 2.2. *Denomina-se distribuição sobre Ω à toda forma linear T , contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, uma distribuição é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições:*

1. *$T(\alpha\theta + \beta\varphi) = \alpha T(\theta) + \beta T(\varphi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\theta, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;*
2. *T é contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, se (φ_ν) converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $T(\varphi_\nu)$ converge para zero em \mathbb{R} .*

O espaço das distribuições com a noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, [19].

Pode-se mostrar que as funções localmente integráveis, ou seja, as funções $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definem univocamente uma distribuição dada por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\Omega.$$

Como podemos identificar de forma única a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, quando não houver ambiguidade escreve-se u em lugar de T_u e assim temos a dualidade definida por

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\Omega, \quad \forall u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2)$$

A derivada de ordem α de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é definida no sentido das distribuições do seguinte modo:

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.3)$$

Segue de (2.3) que toda distribuição é infinitamente derivável, pois $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Definimos o espaço $L^2(\Omega)$ das funções Lebesgue mensuráveis por

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 \, d\Omega < \infty \right\}, \quad (2.4)$$

cujos produto interno e norma são definidos por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\Omega \quad \text{e} \quad \|u\|_0^2 = (u, u). \quad (2.5)$$

Observação 2.3. *Nesta tese entenderemos o produto interno definido em (2.5) como o produto interno contínuo ou simplesmente produto interno. Posteriormente, outros produtos internos serão definidos, os quais serão devidamente identificados de acordo com seu uso.*

Definimos o espaço $H^m(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, por

$$H^m(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega); 1 \leq |\alpha| \leq m\} \quad (2.6)$$

O produto interno em $H^m(\Omega)$ é dado por

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha|=0}^m \int_{\Omega} D^\alpha u(\mathbf{x})D^\alpha v(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega). \quad (2.7)$$

O espaço de Sobolev $H^m(\Omega)$ com o produto interno definido em (2.7) é um espaço de Hilbert, para $m = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$. Em particular, quando $m = 0$, temos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ e para $m = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); i = 1, \dots, n \right\}, \quad (2.8)$$

cujos produto interno e norma são dados por

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\Omega \quad \text{e} \quad \|u\|_1^2 = (u, u)_1. \quad (2.9)$$

Para lidar com restrições de funções de $H^1(\Omega)$ à fronteira de Ω , utilizamos o seguinte teorema [24]:

Teorema 2.4 (do Traço). *Existe um operador linear $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ tal que $\gamma_0 u = u$ para toda $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e γ_0 é contínua, ou seja,*

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u\|_1.$$

O operador γ_0 é denominado traço sobre Γ . Desta forma, para toda função $u \in H^1(\Omega)$, o traço de u é definido por densidade como $\gamma_0 u = u|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$. Vale também o seguinte resultado:

Teorema 2.5. ([8, Teor. 1.6.6]) *Se Ω tem fronteira Γ Lipschitz contínua, então existe*

$C > 0$ tal que

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Um subespaço importante do espaço $H^1(\Omega)$ é o espaço $H_0^1(\Omega)$, definido pelas funções $u \in H^1(\Omega)$ que se anulam (no sentido de traços) na fronteira Γ de Ω , ou seja,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\}.$$

Algumas propriedades importantes usadas no texto são dadas abaixo, cujas demonstrações podem ser encontradas em [24].

1. **Dual ([37], subseção 2.23).** Denota-se por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual do espaço $H_0^1(\Omega)$, ou seja, $H^{-1}(\Omega)$ é o espaço dos operadores lineares e contínuos definidos em $H_0^1(\Omega)$. Quando se diz que uma distribuição T pertence a $H^{-1}(\Omega)$, significa dizer que T , definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $H^{-1}(\Omega)$, isto é, existem funções $g_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq 1$, tais que

$$(T, u) = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} g_\alpha(x) D^\alpha u(x) dx$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

2. **Densidade.** O espaço das funções teste $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ na norma do $H^1(\Omega)$, ou seja, para qualquer função $u \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência de funções $\{u_\nu\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergente para $u \in H^1(\Omega)$.

Observação 2.6. Identificando o espaço $L^2(\Omega)$ com seu dual $(L^2(\Omega))'$ e das duas propriedades anteriores, podemos concluir as seguintes inclusões:

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \simeq (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

3. **Equivalência de normas.** No espaço $H_0^1(\Omega)$, a semi-norma $|u|_1 = \|\nabla u\|_0$ define uma norma equivalente à norma usual $\|u\|_1$ do espaço $H^1(\Omega)$, ou seja, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \|u\|_1 \leq |u|_1 \leq C_2 \|u\|_1, \quad (2.10)$$

A primeira desigualdade é conhecida como desigualdade de Poincaré-Friedrichs e a segunda é uma consequência imediata da definição da norma $\|u\|_1$.

4. **Densidade em $H^m(\Omega)$.** O espaço das funções contínuas de ordem k , $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ são

densos em $H^m(\Omega)$, $m = 0, 1, \dots$, onde $k \geq m$. Esta importante propriedade, implica que qualquer função do $H^m(\Omega)$ e suas derivadas podem ser aproximadas por funções do espaço das funções contínuas $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$. Neste caso, as derivadas são no sentido clássico.

5. **Desigualdade de Cauchy.** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \left(\text{em geral, dado } \epsilon > 0, ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \right).$$

6. **Desigualdade de Young.** Sejam $1 < p, q < \infty$ com $1/p + 1/q = 1$. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

e em geral, dado $\epsilon > 0$, temos $ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q$, sendo $C(\epsilon)$ uma constante que depende de ϵ .

7. **Desigualdade de Hölder.** Suponha $1 < p, q < \infty$ com $1/p + 1/q = 1$ (por convenção, quando $p = 1$ toma-se $q = \infty$). Então se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})| d\Omega \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

8. **Desigualdade de Minkowski.** Suponha $1 \leq p \leq \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$. Então

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

9. **Fórmulas de Green.** Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Então:

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n}(s) d\sigma,$$

$$(ii) \int_{\Omega} \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n}(s) u(s) d\sigma,$$

$$(iii) \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (u(s) \nabla v \cdot \mathbf{n}(s) - v(s) \nabla u \cdot \mathbf{n}(s)) d\sigma,$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Lema 2.7 (Desigualdade de Jensen, [24]). Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então

$$f \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u d\Omega \right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) d\Omega.$$

2.1.2 Espaços de funções com dependência temporal

Seguindo [43, Sec. 7.2], vamos introduzir espaços de funções $v : t \rightarrow v(t)$ sobre $(0, T)$ a valores em um espaço de Banach X de norma $\|\cdot\|_X$.

Para cada inteiro $m \geq 0$, designa-se por $\mathcal{C}^m(0, T; X)$, com $0 < T < +\infty$, o espaço das funções m vezes continuamente diferenciáveis sobre $[0, T]$ a valores em X ; este é um espaço de Banach com a norma

$$\|v\|_{\mathcal{C}^m(0, T; X)} = \max_{0 \leq l \leq m} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|v^{(l)}(t)\|_X \right). \quad (2.11)$$

Por outro lado, para todo $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < +\infty$, o espaço $L^p(0, T; X)$ é definido como o espaço das funções $v : t \rightarrow v(t)$ fortemente mensuráveis em sobre $(0, T)$ pela medida dt , isto é, as funções escalares $t \mapsto \|v(t)\|_X$ são mensuráveis para a medida dt . $L^p(0, T; X)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|v\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

O espaço $L^\infty(0, T; X)$ é formado por todas as funções fortemente mensuráveis $f : (0, T) \rightarrow X$ tais que

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \|f(t)\| < \infty,$$

onde \sup denota o supremo essencial.

2.1.3 Espaços de Sobolev fracionários

Seguindo [37, Sec. 2.6], vamos definir os espaços $H^s(\Omega)$, quando s é um real positivo e Ω um aberto do \mathbb{R}^n , partindo de uma caracterização particular dos espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$, com m inteiro positivo. Nesta seção \hat{u} estará representando a transformada de Fourier de u e \tilde{u} a transformada de Fourier inversa.

Seja $J_m(\mathbf{x}) = (1 + |\mathbf{x}|^2)^{m/2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Denota-se por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$p_m(u) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} J_m(\mathbf{x})^2 |D^\alpha u(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Analogamente às definições 2.1-2.2, temos as seguintes definições de convergência e de distribuições em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.8. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $p_m(\varphi_\nu) \rightarrow 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 2.9. Denomina-se distribuição temperada toda forma linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, se (φ_ν) converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $T(\varphi_\nu)$ converge para zero em \mathbb{R} .

O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.10 ([37], Prop. 2.6.1). O espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$ em (2.6) pode ser equivalentemente definido como

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) ; J_m(\mathbf{x})\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, a aplicação $u \longmapsto |||u|||_m$ de $H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$|||u|||_m = \|J_m(\mathbf{x})\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (2.12)$$

é uma norma equivalente à norma induzida por (2.7) com $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Vamos considerar agora $J_s(\mathbf{x}) := (1 + |\mathbf{x}|^2)^{s/2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sendo s um número real não negativo. Define-se

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) ; J_s(\mathbf{x})\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

com o produto escalar definido por

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} J_s(\mathbf{x})^2 \hat{u}(\mathbf{x}) \hat{v}(\mathbf{x}) d\Omega,$$

cujas norma por ele induzida é:

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} J_s(\mathbf{x})^2 |\hat{u}(\mathbf{x})|^2 d\Omega = \|J_s(\mathbf{x})\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Proposição 2.11 ([37], Prop. 2.6.2). $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $H^s(\mathbb{R}^n)$, sendo aí denso.

Corolário 2.12. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$.

Seja $s \geq 0$ e $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ o dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Segue da Proposição 2.11 que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Associamos ao espaço $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ a seguinte norma:

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup\{|\langle f, u \rangle| : u \in H^s(\mathbb{R}^n), \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 1\}.$$

Proposição 2.13 ([37], Prop. 2.6.3). São verdadeiras as seguintes afirmações:

a) $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J_s(\mathbf{x})^{-1}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad \forall f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n);$

b) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \|J_s(\mathbf{x})^{-1}\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n).$

Proposição 2.14 ([37], Prop. 2.6.4). *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \geq 0$, então*

a) $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n);$

b) *A aplicação linear $u \mapsto \varphi u$ de $H^s(\mathbb{R}^n) \mapsto H^s(\mathbb{R}^n)$ é contínua e verifica:*

$$\|\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

sendo que $2r - 2s > n$, $C^2 = (2\pi)^{-n} C_0 2^{2s+1}$ e

$$C_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^{r-s}} d\Omega.$$

Proposição 2.15. *Suponha $s > n/2$. $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra, ou seja, existe $C_s > 0$ tal que*

$$\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.13)$$

Demonstração. A prova será dividida em três passos:

(a) Se $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{1/2} (1 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2)^{-1/2} (1 + |\boldsymbol{\eta}|^2)^{-1/2}$, então

$$(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \widehat{(uv)}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) v(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} :$$

$$\begin{aligned} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \widehat{(uv)}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \frac{(1 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2} (1 + |\boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2}}{(1 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2} (1 + |\boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2}} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) (1 + |\boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2} \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

(b) A função $K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ satisfaz as seguintes desigualdades:

1) $K(\xi, \eta) \leq \frac{2^s}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}}$ se $|\xi - \eta| \geq \frac{|\xi|}{2}$. De fato,

$$\begin{aligned}
4|\xi - \eta|^2 &\geq |\xi|^2 \\
4(1 + |\xi - \eta|^2) &\geq 1 + |\xi|^2 \\
2^s(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} &\geq (1 + |\xi|^2)^{s/2} \\
\frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2}} &\leq 2^s \\
\frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2}(1 + |\eta|^2)^{s/2}} &\leq \frac{2^s}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}}.
\end{aligned}$$

2) $K(\xi, \eta) \leq \frac{2^s}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2}}$ se $|\xi - \eta| \leq |\xi| \leq |\xi|/2$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|}{2} &\geq |\xi - \eta| \\
\frac{|\xi|}{2} &\geq |\xi| - |\eta| \\
\frac{|\xi|}{2} &\leq |\eta| \\
|\xi|^2 &\leq 4|\eta|^2 \\
1 + |\xi|^2 &\leq 4(1 + |\eta|^2) \\
(1 + |\xi|^2)^{s/2} &\leq 2^s(1 + |\eta|^2)^{s/2} \\
\frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{(1 + |\eta|^2)^{s/2}(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2}} &\leq \frac{2^s}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2}}
\end{aligned}$$

(c) Seja

$$C(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} K(\xi, \eta) d\eta.$$

Pelo que foi provado em (b), temos que

$$C(\xi) \leq \begin{cases} 2^s \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2)^{-s/2} d\eta & \text{se } |\xi - \eta| \geq |\xi|/2 \\ 2^s \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-s/2} d\eta & \text{se } |\xi - \eta| \leq |\xi|/2 \end{cases}$$

logo, $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, já que $(1 + |\eta|^2)^{-s/2}$ e $(1 + |\xi - \eta|^2)^{-s/2}$ são integráveis. Temos em particular que $d\mu = \frac{K(\xi, \eta)}{C(\xi)} d\eta$ é uma medida unitária. Por outro lado, pela

propriedade de convolução,

$$\begin{aligned}
(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \widehat{(uv)}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) \, d\boldsymbol{\eta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) (1 + |\boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2} \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \, d\boldsymbol{\eta} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) J_s(\boldsymbol{\eta}) \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \, d\boldsymbol{\eta}.
\end{aligned}$$

Tomando o módulo e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}
(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\widehat{u} * \widehat{v}|^2 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) J_s(\boldsymbol{\eta}) \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \, d\boldsymbol{\eta} \right|^2 \\
\frac{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\widehat{u} * \widehat{v}|^2}{C^2(\boldsymbol{\xi})} &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu})) \widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu})) J_s(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu})) \widehat{v}(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu})) \, d\boldsymbol{\mu} \right|^2.
\end{aligned}$$

Como a função $\varphi(x) = |x|^2$ é convexa e $d\boldsymbol{\mu}$ é uma medida unitária, segue da desigualdade de Jensen, e integrando os dois lados em relação a $\boldsymbol{\xi}$, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\widehat{u} * \widehat{v}|^2}{C^2(\boldsymbol{\xi})} \, d\boldsymbol{\xi} &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu}))^2 |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu}))|^2 J_s(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu}))^2 |\widehat{v}(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu}))|^2 \, d\boldsymbol{\mu} \, d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|^2 J_s(\boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \frac{K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{C(\boldsymbol{\xi})} \, d\boldsymbol{\eta} \, d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{C_1} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\widehat{u} * \widehat{v}|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|^2 J_s(\boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \, d\boldsymbol{\eta} \, d\boldsymbol{\xi},$$

sendo que as constantes C_1 e C_2 dependem de $K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ e $C(\boldsymbol{\xi})$. Introduzindo $C_s = C_1 C_2$ e aplicando o teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned}
\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq C_s \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|^2 J_s(\boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \, d\boldsymbol{\eta} \\
&\leq C_s \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + |\boldsymbol{\zeta}|^2)^s |\widehat{u}(\boldsymbol{\zeta})|^2 J_s(\boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \, d\boldsymbol{\zeta} \, d\boldsymbol{\eta} \\
&= C_s \int_{\mathbb{R}^n} J_s(\boldsymbol{\eta})^2 |\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \, d\boldsymbol{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\zeta}|^2)^s |\widehat{u}(\boldsymbol{\zeta})|^2 \, d\boldsymbol{\zeta} \\
&= C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

□

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Definimos o espaço

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_{\Omega} : v \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

munido da norma

$$\|u\|_s = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : v|_{\Omega} = u\}. \tag{2.14}$$

Proposição 2.16. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$.

Proposição 2.17 ([37], Prop. 2.6.6). *Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira de classe \mathcal{C}^m . Então*

$$H^m(\Omega) = \{u = v|_{\Omega} : v \in H^m(\mathbb{R}^n)\}$$

e a norma $\|u\|_s$ é equivalente à norma induzida por (2.7) quando $s = m$.

Teorema 2.18 ([24] da Extensão). *Suponha Ω um aberto e limitado de classe \mathcal{C}^1 , e $\tilde{\Omega}$ é aberto tal que $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$. Se $s \geq 1$, então existe um operador linear*

$$E : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

tal que:

1. $(Eu)(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ qtp em Ω ;
2. $\text{supp}(Eu) \subset \tilde{\Omega}$;
3. O operador de extensão E é contínuo, ou seja, existe $C = (s, \Omega, \tilde{\Omega}) > 0$ tal que

$$\|Ew\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|w\|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.15)$$

Corolário 2.19. *Seja $s > n/2$. Nas condições do Teorema 2.18, $H^s(\Omega)$ é uma álgebra.*

Demonstração. Temos da definição (2.14) e do Teorema 2.15 que

$$\|uv\|_s \leq \|E(u)E(v)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_s \|Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|Ev\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Segue de (2.15) que $\exists \tilde{C}_s > 0$ tal que $\|uv\|_s \leq \tilde{C}_s \|u\|_s \|v\|_s$. □

Observação 2.20. *Seguindo os mesmos argumentos do Corolário anterior, pode-se mostrar que, para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $s \geq |\alpha|$, existe $C > 0$ tal que $\|D^\alpha u\|_s \leq C \|u\|_{s-|\alpha|}$ (vide [1, Cor. 1.9.6]).*

Temos as seguintes generalizações do teorema do traço (Teorema 2.4):

Teorema 2.21. ([27, Teor. 1.5.2.3]) *Seja Ω um domínio poligonal com fronteira Γ . O operador traço possui uma extensão contínua de $H^1(\Omega)$ para $H^{1/2}(\Gamma)$, ou seja, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|u\|_1.$$

Teorema 2.22. ([1, Teor. 9.2.1]) *Seja $1/2 < s < 3/2$ e Ω um domínio com fronteira Lipschitz contínua Γ . O operador traço possui uma extensão contínua de $H^s(\Omega)$ para $H^{s-1/2}(\Gamma)$, ou seja, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)} \leq C \|u\|_s.$$

2.2 Formulação variacional abstrata

Para uma melhor compreensão dos conceitos usados, introduziremos algumas definições e teoremas fundamentais para obter a existência e unicidade de solução para uma ampla classe de problemas variacionais. Para isto, consideremos os espaços de Hilbert V e H com produto interno e norma representados, respectivamente, por (\cdot, \cdot) , $\|\cdot\|$ e $(\cdot, \cdot)_H$, $\|\cdot\|_H$.

2.2.1 Problemas elípticos

Definição 2.23. *A forma $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é bilinear se é linear em cada uma das componentes.*

Definição 2.24. *A forma $a(\cdot, \cdot)$ é contínua em V , se existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Definição 2.25. *A forma $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva em V , se existe uma constante $C_2 > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq C_2 \|v\|^2, \quad v \in V.$$

Definição 2.26. *A forma $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica em V se*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V.$$

Definição 2.27. *Um funcional linear $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo se existe uma constante C_3 tal que*

$$|F(v)| \leq C_3 \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Diz-se que F é um elemento do dual de V , representado por V' .

Teorema 2.28 (Lema de Lax-Milgram, [24]). *Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva e F uma forma linear e contínua em V . O problema variacional abstrato*

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \tag{2.16}$$

possui uma única solução $u \in V$. Além disso, a aplicação $F \mapsto u$ é contínua de V' em V .

2.2.2 Problemas hiperbólicos de segunda ordem

Sejam V e H dois espaços de Hilbert reais tais que $V \subset H$ com injeção compacta e V denso em H . Denotaremos por $(\cdot, \cdot)_H$ o produto escalar em H e por $\|\cdot\|_H$ a norma correspondente.

Relembrando os espaços definidos na Seção 2.1.2, considere o seguinte problema abstrato: dados $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ e $f \in L^2(0, T; H)$, encontrar $u \in \mathcal{C}^0(0, T; V) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H)$ verificando

$$\begin{cases} (\ddot{u}(t), v)_H + a(u(t), v) = (f(t), v)_H & \forall v \in V \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Como no Teorema 2.28, daqui em diante assumimos que a forma $a(\cdot, \cdot)$ é bilinear, contínua e coerciva.

Aplicando o teorema espectral ao operador T definido por $a(Tu, v) = (u, v)$, obtemos:

Teorema 2.29 ([43], Teor. 6.2-1). *Existe uma seqüência de autovalores $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ e um sistema $(z_j)_{j \geq 1}$ ortonormal total em H de autofunções associadas tais que*

$$a(z_j, v) = \lambda_j (z_j, v)_H \quad \forall v \in V.$$

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}(V; H)$ o operador definido por

$$\Lambda v = \sum_{j \geq 1} \omega_j (v, z_j)_H z_j, \quad \omega_j = \sqrt{\lambda_j}. \quad (2.18)$$

Note que, para todo $v \in V$,

$$a(v, v) = a\left(v, \sum_{j \geq 1} (v, z_j)_H z_j\right) = \sum_{j \geq 1} (v, z_j)_H a(v, z_j) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j (v, z_j)_H^2, \quad (2.19)$$

ou seja, $a(v, v) = \|\Lambda v\|_H^2$. Além disso, definimos a função matricial de rotação

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e consideramos para todo $t \geq 0$ o operador $G(t) \in \mathcal{L}(H \times H; H \times H)$ definido por

$$G(t)v = \sum_{j \geq 1} Q(\omega_j t) \begin{pmatrix} (v_1, z_j)_H \\ (v_2, z_j)_H \end{pmatrix} z_j, \quad \forall v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H \times H. \quad (2.20)$$

Teorema 2.30. *Se o problema (2.17) tem uma solução u , então ela é única e satisfaz*

$$\begin{pmatrix} \Lambda u(t) \\ \ddot{u}(t) \end{pmatrix} = G(t) \begin{pmatrix} \Lambda u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \int_0^t G(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.21)$$

Demonstração. Seja u uma solução de (2.17) e $\{\lambda_j, z_j\}_{j \geq 1}$ dados pelo Teorema 2.29. Como $u(t) \in V$ para todo $t \in [0, T]$ e $\{z_j\}_{j \geq 1}$ é um sistema ortonormal total, tem-se

$$u(t) = \sum_{j \geq 1} \alpha_j(t) z_j, \quad \alpha_j(t) = (u(t), z_j)_H. \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.17) e observando que $a(u(t), z_j) = \lambda_j(u(t), z_j)$, segue que $\alpha_j(t)$ é solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_j(t) + \lambda_j \alpha_j(t) = (f(t), z_j)_H, \\ \alpha_j(0) = (u_0, z_j)_H, \\ \dot{\alpha}_j(0) = (u_1, z_j)_H. \end{cases} \quad (2.23)$$

A solução de (2.23) é dada por

$$\alpha_j(t) = (u_0, z_j)_H \cos(\omega_j t) + \frac{(u_1, z_j)_H}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin(\omega_j(t-s)) (f(s), z_j)_H ds, \quad (2.24)$$

da qual obtemos

$$\begin{pmatrix} \omega_j \alpha_j(t) \\ \dot{\alpha}_j(t) \end{pmatrix} = Q(\omega_j t) \begin{pmatrix} \omega_j (u_0, z_j)_H \\ (u_1, z_j)_H \end{pmatrix} + \int_0^t Q(\omega_j(t-s)) \begin{pmatrix} 0 \\ (f(s), z_j)_H \end{pmatrix} ds, \quad (2.25)$$

que resulta em (2.21). A unicidade de u segue da unicidade da solução de (2.24). \square

Teorema 2.31. *Existe uma solução para o problema (2.17).*

Demonstração. Seja $V_m \subset V$ o espaço gerado pelos autofunções z_1, \dots, z_m . Temos que

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) z_j \in V_m,$$

com $\alpha_j(t)$ dado por (2.24), é a solução do problema de valor inicial

$$(\ddot{u}_m(t), v)_H + a(u_m(t), v) = (f(t), v)_H, \quad \forall v \in V_m, \quad (2.26)$$

$$u_m(0) = u_{0,m} = \sum_{j=1}^m (u_0, z_j)_H z_j, \quad \dot{u}_m(0) = u_{1,m} = \sum_{j=1}^m (u_1, z_j)_H z_j. \quad (2.27)$$

Temos que (u_m) é uma sequência de Cauchy nos espaços $\mathcal{C}^0(0, T; V)$ e $\mathcal{C}^1(0, T; H)$. De

fato, dados dois inteiros m e p tais que $p > m \geq 1$, seja

$$e_m^p(t) = a(u_p(t) - u_m(t), u_p(t) - u_m(t)) + |\dot{u}_p(t) - \dot{u}_m(t)|^2 = \sum_{j=m+1}^p \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 + |\dot{\alpha}_j(t)|^2.$$

Como a matriz $Q(\omega_j t)$ é ortogonal, deduzimos de (2.25) que

$$(\lambda_j |\alpha_j(t)|^2 + |\dot{\alpha}_j(t)|^2)^{1/2} \leq (\lambda_j (u_0, z_j)_H^2 + (u_1, z_j)_H^2)^{1/2} + \int_0^t |(f(s), z_j)_H| ds,$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 + |\dot{\alpha}_j(t)|^2 &\leq 2 \left[\lambda_j (u_0, z_j)_H^2 + (u_1, z_j)_H^2 + \left(\int_0^t |(f(s), z_j)_H| ds \right)^2 \right] \\ &\leq 2 \left[\lambda_j (u_0, z_j)_H^2 + (u_1, z_j)_H^2 + T \int_0^T (f(s), z_j)_H^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Encontra-se assim

$$0 \leq e(t) \leq 2 \sum_{j=m+1}^p \left[\lambda_j (u_0, z_j)_H^2 + (u_1, z_j)_H^2 + T \int_0^T (f(s), z_j)_H^2 ds \right].$$

Como $u_1 \in H$, a série com termo geral $(u_1, z_j)_H$ é absolutamente convergente. Além disso, como $u_0 \in V$, segue de (2.19) que $a(u_0, u_0) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j (v, z_j)_H^2$, logo a série com termo geral $\lambda_j (u_0, z_j)_H^2$ é convergente. Analogamente, a série associada ao termo envolvendo $f \in L^2(0, T; H)$ também é convergente. Portanto, tem-se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} 2 \sum_{j=m+1}^p \left[\lambda_j (u_0, z_j)_H^2 + (u_1, z_j)_H^2 + T \int_0^T (f(s), z_j)_H^2 ds \right] = 0.$$

Por outro lado, segue da coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ que $e(t)$ é um limitante superior para $\|u_p - u_m\|_{C^0(0, T; V)}$ e $\|u_p - u_m\|_{C^1(0, T; H)}$, o que garante a sequência (u_m) é de Cauchy nos espaços $C^0(0, T; V)$ e $C^1(0, T; H)$. Como estes dois espaços são completos,

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em } C^0(0, T; V) \cap C^1(0, T; H) \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Resta verificar que u é a solução do problema (2.17). Seja $\psi \in \mathcal{D}([0, T])$ e seja n um inteiro ≥ 1 ; deduz-se de (2.26) que, para todo $m \geq n$, tem-se

$$\int_0^T (u_m(t), v)_H \ddot{\psi}(t) dt + \int_0^T a(u_m(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v)_H \psi(t) dt \quad \forall v \in V_n,$$

e passando ao limite, graças a (2.28)

$$\int_0^T (u(t), v)_H \ddot{\psi}(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v)_H \psi(t) dt \quad \forall v \in V_n.$$

Como $\bigcup_{n \geq 1} V_n$ é denso em V , a relação precedente vale para todo $v \in V$ de forma que u satisfaz (2.17). Além disso, deduz-se de (2.28) que

$$u_m(0) \rightarrow u(0) \quad \text{em } V, \quad \dot{u}_m(0) \rightarrow \dot{u}(0) \quad \text{em } H.$$

Por outro lado, segue de (2.27) que

$$u_m(0) = u_{0,m} \rightarrow u_0 \quad \text{em } V, \quad \dot{u}_m(0) = u_{1,m} \rightarrow u_1 \quad \text{em } H,$$

o que verifica as condições de contorno em (2.17), completando a prova. \square

Note que de (2.22) e (2.24) temos uma fórmula para a solução de (2.17):

$$u(t) = \sum_{j \geq 1} \left[(u_0, z_j)_H \cos(\omega_j t) + \frac{(u_1, z_j)_H}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \sin(\omega_j(t-s))(f(s), z_j)_H ds \right] z_j.$$

O próximo resultado estabelece a continuidade da solução u com respeito aos dados iniciais u_0 , u_1 e f .

Teorema 2.32. *A solução u do problema (2.17) satisfaz a desigualdade*

$$[a(u(t), u(t)) + \|\dot{u}(t)\|_H^2]^{1/2} \leq [a(u_0, u_0) + \|u_1\|_H^2]^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_H ds. \quad (2.29)$$

Ainda mais, se $f = 0$, tem-se a seguinte propriedade conservativa:

$$a(u(t), u(t)) + \|\dot{u}(t)\|_H^2 = a(u_0, u_0) + \|u_1\|_H^2. \quad (2.30)$$

Demonstração. Deduz-se de (2.20), da ortogonalidade da matriz $Q(\omega_j t)$ e das autofunções $(z_j)_{j \geq 1}$ que $\|G(t)\mathbf{v}\|_{H \times H} = \|\mathbf{v}\|_{H \times H}$ para todo $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H \times H$. Resulta então do Teorema 2.30 que

$$[|\Lambda u(t)|^2 + \|\dot{u}(t)\|_H^2]^{1/2} \leq [|\Lambda u_0|_H^2 + \|u_1\|_H^2]^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_H ds,$$

e a desigualdade (2.29) segue de (2.19). Analogamente, se $f = 0$, deduz-se de (2.21) que

$$[|\Lambda u(t)|^2 + \|\dot{u}(t)\|_H^2]^{1/2} = [|\Lambda u_0|_H^2 + \|u_1\|_H^2]^{1/2} = [a(u_0, u_0) + \|u_1\|_H^2]^{1/2}.$$

\square

2.2.3 Equação da onda com coeficientes constantes

Como exemplo da teoria apresentada na seção anterior, vamos considerar o problema (1.1)-(1.3) com coeficientes constantes. Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n de fronteira $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 por partes. Vamos considerar os espaços de Hilbert $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, ambos com o produto interno definido em (2.5).

Dado $T > 0$, considere o seguinte problema: dadas as funções $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ e $f \in L^2(0, T; H)$, encontrar $u \in \mathcal{C}^0(0, T; V) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H)$ solução das equações

$$\begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = f & \text{em } \Omega \times (0, T) & \text{(equação da onda)} \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) & \text{(condição de contorno)} \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1 & \text{em } \Omega & \text{(condições iniciais).} \end{cases} \quad (2.31)$$

Para obter a formulação variacional do problema (2.31) multiplica-se por uma função teste $v \in H_0^1(\Omega)$ e integra-se sobre Ω :

$$\int_{\Omega} \ddot{u}(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\Omega.$$

Segue das fórmulas de Green que

$$\int_{\Omega} \ddot{u}(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\Omega,$$

deste modo que obtemos a formulação variacional na forma (2.17) com a forma bilinear definida por

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \, d\Omega,$$

Segue dos Teoremas 2.30-2.31 que o problema (2.31) tem solução única. Além disso, temos do Teorema 2.32 a seguinte estimativa básica de energia (quando $f = 0$):

$$\|\dot{u}(t)\|_0^2 + \|\nabla u(t)\|_0^2 = \|\nabla u_0\|_0^2 + \|u_1\|_0^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

2.3 Método de Galerkin

2.3.1 Discretização de problemas elípticos

Considere o problema variacional abstrato (2.16), em que o espaço V , a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$, e o funcional linear f satisfazem as suposições do Teorema 2.28. O método de Galerkin para aproximar a solução de tal problema consiste em definir problemas projetados em subespaços de dimensão finita do espaço V . Mais especificamente, com qualquer sub-

espaço de dimensão finita V_h de V , associamos o problema discreto: Encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.32)$$

Como o problema (2.32) também satisfaz as condições do Teorema 2.28, segue que tal problema possui uma única solução u_h .

Observação 2.33. *No caso da forma bilinear ser simétrica, a solução também é caracterizada pela propriedade*

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h), \quad (2.33)$$

onde o funcional J é dado por $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$. Esta definição alternativa da solução discreta é conhecida como o método de Ritz.

Seja $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ uma base do espaço V_h e $u_h = \sum_{k=1}^M u_k \varphi_k$ a representação da solução do problema (2.32) nesta base. Os coeficientes u_1, \dots, u_M são soluções do sistema linear

$$\sum_{k=1}^M a(\varphi_k, \varphi_l) u_k = F(\varphi_l), \quad 1 \leq l \leq M, \quad (2.34)$$

ou na forma vetorial, $K\mathbf{u} = \mathbf{F}$. A matriz K , conhecida como matriz de rigidez, é positiva definida (logo inversível), pois a forma bilinear é coerciva.

Vamos finalizar esta seção com alguns resultados clássicos da aproximação de problemas elípticos pelo método de Galerkin:

Teorema 2.34 (Lema de Céa, [13]). *Existe uma constante C independente do subespaço V_h tal que*

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (2.35)$$

Consequentemente, uma condição suficiente para a convergência é que exista uma família (V_h) de subespaços do espaço V tal que, para cada $u \in V$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| = 0. \quad (2.36)$$

Demonstração. Seja $v_h \in V_h$ arbitrário, Subtraindo (2.32) de (2.16) com $v = v_h$, obtemos

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

o que caracteriza u_h como uma projeção de u em V_h em termos da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$.

Usando esta relação e mais a coercividade e continuidade de $a(\cdot, \cdot)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
C_2 \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) \\
&\leq C_1 \|u - u_h\| \|u - v_h\|,
\end{aligned}$$

e o resultado segue com $C = C_1/C_2$. \square

Teorema 2.35 (Lema de Aubin-Nitsche, [2, 13]). *Seja H um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|_H$ e produto interno $(\cdot, \cdot)_H$, tal que V é denso em H e $V \hookrightarrow H$. As soluções de (2.16) e (2.32) satisfazem*

$$\|u - u_h\|_H \leq C \|u - u_h\| \left(\sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi_g - \varphi_h\| \right\} \right), \quad (2.37)$$

onde, para qualquer $g \in H$, $\varphi_g \in V$ é a única solução do problema variacional

$$a(v, \varphi_g) = (g, v)_H \quad \forall v \in V. \quad (2.38)$$

Demonstração. Para estimar $\|u - u_h\|_H$, usaremos a caracterização

$$\|u - u_h\|_H = \sup_{g \in H} \frac{|(g, u - u_h)_H|}{\|g\|_H}. \quad (2.39)$$

De modo análogo ao Teorema 2.28, pode-se mostrar que o problema (2.38) tem solução única para todo $g \in H$. Como $u - u_h \in V$, temos em particular

$$a(u - u_h, \varphi_g) = (g, u - u_h).$$

Por outro lado, podemos proceder como no Lema 2.35 e subtrair (2.32) de (2.16), obtendo

$$a(u - u_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

de modo que

$$(g, u - u_h)_H = a(u - u_h, \varphi_g - \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

e portanto,

$$|(g, u - u_h)_H| \leq C \|u - u_h\| \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi_g - \varphi_h\|. \quad (2.40)$$

A desigualdade (2.37) é portanto consequência da caracterização (2.39) e da desigualdade (2.40). \square

Lema 2.36 (Primeiro Lema de Strang, [13]). *Nas condições do Lema de Lax-Milgram, e se $a_h(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear contínua e uniformemente elíptica em V e F_h é um funcional linear contínuo, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|u - u_h\| \leq C \left[\inf_{w_h \in V_h} \left(\|u - w_h\| + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(w_h, v_h) - a_h(w_h, v_h)|}{\|w_h\|} \right) + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|F(v_h) - F_h(v_h)|}{\|v_h\|} \right]. \quad (2.41)$$

Demonstração. Dado $u_h \in V_h$ arbitrário, temos que

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|u_h - w_h\|. \quad (2.42)$$

Pela elipticidade de $a_h(\cdot, \cdot)$ existe C tal que

$$\begin{aligned} C \|u_h - w_h\|^2 &\leq a_h(u_h - w_h, u_h - w_h) \\ &= F_h(u_h - w_h) - a_h(w_h, u_h - w_h) - a(w_h, u_h - w_h) \\ &\quad + a_h(w_h, u_h - w_h) + F(u_h - w_h) - F(u_h - w_h), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} C \|u_h - w_h\|^2 &\leq |F(u_h - w_h) - F_h(u_h - w_h)| + |a(u_h - w_h, u_h - w_h)| \\ &\quad + |a(w_h, u_h - w_h) - a_h(w_h, u_h - w_h)|. \end{aligned}$$

Pela continuidade de $a(\cdot, \cdot)$, existe também uma constante C_1 tal que

$$\begin{aligned} \|u_h - w_h\| &\leq \frac{1}{C} \left[\frac{|F(u_h - w_h) - F_h(u_h - w_h)|}{\|u_h - w_h\|} + C_1 \|u_h - w_h\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{|a(w_h, u_h - w_h) - a_h(w_h, u_h - w_h)|}{\|u_h - w_h\|} \right]. \end{aligned}$$

Por (2.42) obtém-se

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq \left(1 + \frac{C_1}{C}\right) \|u - w_h\| + \frac{1}{C} \left[\frac{|F(u_h - w_h) - F_h(u_h - w_h)|}{\|u_h - w_h\|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|a(w_h, u_h - w_h) - a_h(w_h, u_h - w_h)|}{\|u_h - w_h\|} \right] \\ &\leq \left(1 + \frac{C_1}{C}\right) \|u - w_h\| + \frac{1}{C} \left[\sup_{v_h \in V_h} \frac{|F(v_h) - F_h(v_h)|}{\|v_h\|} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(w_h, v_h) - a_h(w_h, v_h)|}{\|v_h\|} \right]. \end{aligned}$$

□

2.3.2 Semi-discretização de problemas hiperbólicos de segunda ordem

O objetivo desta seção é mostrar como aplicar o Método de Galerkin a EDPs que possuem derivada segunda no tempo. O nome *semi-discretização* ou *discretização espacial* se deve a esse fato, já que a derivada no tempo não sofre ação do Método de Galerkin.

Considere o problema (2.17). Introduzimos um subespaço V_h do espaço V de dimensão finita M e formulamos o seguinte problema *semi-discreto* associado: encontrar $u_h \in \mathcal{C}^1(0, T; V_h)$ tal que para $t \in (0, T)$,

$$\begin{cases} (\ddot{u}_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) & \forall v_h \in V_h, t > 0 \\ (u_h(0), v_h) = (u_0, v_h) & \forall v_h \in V_h, \\ (\dot{u}_h(0), v_h) = (u_1, v_h) & \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.43)$$

Como no Teorema 2.29, temos que existe uma sequência de autovalores $0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots \leq \lambda_{M,h}$, e um conjunto de autofunções $(u_{j,h})$ de V_h ortonormais em H satisfazendo

$$a(u_{i,h}, v_h) = \lambda_{i,h}(u_{i,h}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.44)$$

Procedendo como nos Teoremas 2.30-2.31, conclui-se que o problema (2.43) admite uma única solução u_h dada por

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^M \left\{ (u_{0,h}, u_{i,h}) \cos(\omega_{i,h}t) + \frac{1}{\omega_{i,h}} (u_{1,h}, u_{i,h}) \sin(\omega_{i,h}t) + \frac{1}{\omega_{i,h}} \int_0^t \sin(\omega_{i,h}(t-s))(f(s), u_{i,h}) ds \right\} u_{i,h}, \quad \omega_{i,h} = \sqrt{\lambda_{i,h}}. \quad (2.45)$$

Procedendo como em (2.34), seja $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ uma base do espaço V_h e

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^M u_j(t) \varphi_j$$

a representação da solução de (2.43) nesta base. Temos que $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_M]$ é a solução do sistema de EDOs

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1, \end{cases} \quad (2.46)$$

sendo os vetores \mathbf{u}_0 e \mathbf{u}_1 definidos por $u_{0,i} = (u_0, \varphi_i)$ e $u_{1,i} = (u_1, \varphi_i)$ ($1 \leq i \leq M$), e as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} , respectivamente a matriz de massa e a matriz de rigidez, definidas por $M_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)$ e $K_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ ($1 \leq i, j \leq M$).

Estudemos agora o erro $u_h(t) - u(t)$. Para isso, assumiremos que $\{\varphi_j\}$ é ortonormal em relação ao produto interno $a(\varphi_j, \varphi_i)$ e introduzimos o operador de projeção elíptico

$\tilde{\Pi}_h \in \mathcal{L}(V; V_h)$ definido por

$$a(v - \tilde{\Pi}_h v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.47)$$

Teorema 2.37 ([43], Teor. 8.4-2). *Se $u \in \mathcal{C}^2(0, T; V)$, existe $C > 0$ independente de h tal que*

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\| + \|\dot{u}_h(t) - \dot{u}(t)\|_H &\leq C \left[\|u_h(0) - \tilde{\Pi}_h u_0\| + \|\dot{u}_h(0) - \tilde{\Pi}_h u_1\|_H \right. \\ &\quad \left. + \|(I - \tilde{\Pi}_h)u(t)\| + \|(I - \tilde{\Pi}_h)\dot{u}(t)\|_H + \int_0^t \|(I - \tilde{\Pi}_h)\ddot{u}(s)\|_H ds \right]. \end{aligned}$$

Corolário 2.38. *Se $u \in \mathcal{C}^2(0, T; V)$, e sob as hipóteses suplementares (2.35) e*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(0) - u_0\| = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\dot{u}_h(0) - u_1\|_H = 0, \quad (2.48)$$

tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\|u_h(t) - u(t)\| + \|\dot{u}_h(t) - \dot{u}(t)\|_H] = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.49)$$

2.3.3 Discretização total de problemas hiperbólicos de segunda ordem

Seguindo a abordagem em [43], vamos estudar um método clássico de “leapfrog” para a solução do sistema (2.43). Consideremos inicialmente o seguinte problema de Cauchy formado por uma única equação diferencial,

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \varphi(t, y(t), \dot{y}(t)), & 0 < t \leq T, \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.50)$$

onde φ é uma função contínua de $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R} e $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Para resolver numericamente o problema (2.50), consideremos a seguinte partição uniforme do intervalo $[0, T]$ com passo de tempo $\Delta t = T/N$:

$$t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Da continuidade da função φ , temos que a solução y de (2.50) satisfaz

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t \dot{y}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{y}(t_{n+1}) + O(\Delta t^3) \\ &= y(t_n) + \Delta t \dot{y}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \varphi(t_n, y(t_n), \dot{y}(t_n)) + O(\Delta t^3) \\ \dot{y}(t_{n+1}) &= \dot{y}(t_n) + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{y}(t_{n+1}) + \ddot{y}(t_n)] + O(\Delta t^2) \\ &= \dot{y}(t_n) + \frac{\Delta t}{2} [\varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}), \dot{y}(t_{n+1})) + \varphi(t_n, y(t_n), \dot{y}(t_n))] + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Calculamos para cada $n = 1, \dots, N$ uma aproximação (y^n, z^n) dos pares $(y(t_n), \dot{y}(t_n))$ desprezando os termos de ordem $O(\Delta t^2)$ e $O(\Delta t^3)$ acima:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \Delta t z^n + \frac{\Delta t^2}{2} \varphi^n, \\ z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{2} (\varphi^{n+1} + \varphi^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad \varphi^n = \varphi(t_n, y^n, z^n). \end{cases} \quad (2.51)$$

Observação 2.39. O método de “leapfrog” é um caso particular da família de métodos de Newmark,

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t z_n + \Delta t^2 (\beta \varphi_{n+1} + (\frac{1}{2} - \beta) \varphi_n), \\ z_{n+1} = z_n + \Delta t (\gamma \varphi_{n+1} + (1 - \gamma) \varphi_n), \end{cases}$$

com $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 1/2$. Note que o método de “leapfrog” é obtido com $\beta = 0$ e $\gamma = 1/2$.

Por construção, o método (2.51) é consistente com erro de truncamento de ordem $O(\Delta t)$. Entretanto, assumindo-se a regularidade adicional $y \in \mathcal{C}^4([0, T])$, pode-se mostrar [43, p. 199] que a ordem do erro de truncamento passa a ser $O(\Delta t^2)$.

Quando a função φ não depende de \dot{y} , pode-se eliminar z^n das equações (2.51). De fato, calculando y^{n+1} e y^n com a primeira equação de (2.51), vem

$$y^{n+1} - y^n = y^n - y^{n-1} + \Delta t (z^n - z^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} (\varphi^n - \varphi^{n-1}). \quad (2.52)$$

Calculando z^n com a segunda equação de (2.51) e substituindo em (2.52), obtemos

$$y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1} = \frac{\Delta t^2}{2} (\varphi^n + \varphi^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} (\varphi^n - \varphi^{n-1}) = \Delta t^2 \varphi^n. \quad (2.53)$$

Vamos estudar a estabilidade do método na forma (2.51). No caso particular em que $\varphi(t, y(t), \dot{y}(t)) = -\omega^2 y(t)$, o par $(y(t), \dot{y}(t))$ satisfaz a propriedade conservativa

$$|\omega y(t)|^2 + |\dot{y}(t)|^2 = |\omega y(0)|^2 + |\dot{y}(0)|^2 \quad \forall t \in [0, T],$$

em particular existe $M > 0$ tal que $|\omega y(t_n)|^2 + |\dot{y}(t_n)|^2 \leq M$ para todo n . O critério de estabilidade que adotamos é que a aproximação (y^n, z^n) satisfaça uma propriedade

similar:

$$\exists M > 0; \|\mathbf{Y}^n\| = \left\| \begin{pmatrix} \omega y^n \\ z^n \end{pmatrix} \right\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Substituindo $\varphi = -\omega^2 y$ em (2.51), obtemos $\mathbf{Y}^{n+1} = B(\omega\Delta t)\mathbf{Y}^n$, com

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 1 - \theta^2/2 & \theta \\ \theta^3/4 - \theta & 1 - \theta^2/2 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{Y}^n = B(\omega\Delta t)^n \mathbf{Y}^0$, a estabilidade depende da limitação da norma 2 da matriz $B(\omega\Delta t)^n$. Para tanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.40 ([43], Teor. 8.5-1). *Se $\theta^2 \leq 4(1-\epsilon)$, $0 < \epsilon < 1$, então existe $C = C(\epsilon) > 0$ (que tende a infinito quando ϵ tende a zero) tal que $\|B^n(\theta)\| \leq C$.*

Aplicamos agora o método leapfrog (2.51) à solução numérica do sistema (2.43). Suponha que a função f em (2.17) pertence ao espaço $\mathcal{C}^0(0, T; H)$. Denotando por u_h^n e z_h^n as aproximações de $u_h(t_n)$ e $\dot{u}_h(t_n)$, respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} (u_h^{n+1} - u_h^n - \Delta t z_h^n, v_h) + \frac{\Delta t^2}{2} a(u_h^n, v_h) = \frac{\Delta t^2}{2} (f(t_n), v_h), \\ (z_h^{n+1} - z_h^n, v_h) + \frac{\Delta t}{2} a(u_h^{n+1} + u_h^n, v_h) = \frac{\Delta t}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n), v_h), \\ (u_h^0, v_h) = (u_0, v_h) \\ (z_h^0, v_h) = (u_1, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.54)$$

Nota-se que eliminando z_h^n em (2.54), obtem-se

$$\begin{aligned} (u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}, v_h) + \Delta t^2 a(u_h^n, v_h) &= \Delta t^2 (f(t_n), v_h) \quad (n > 1), \\ (u_h^1 - u_0 - \Delta t u_1, v_h) + \frac{\Delta t^2}{2} a(u_h^0, v_h) &= \frac{\Delta t^2}{2} (f(t_0), v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

Vamos examinar o comportamento do erro $u_h^n - u(t_n)$ em H . Definimos

$$\begin{cases} e_h^n = u_h^n - \tilde{\Pi}_h u(t_n), \\ g_h^n = z_h^n - \tilde{\Pi}_h \dot{u}(t_n), \end{cases} \quad (2.55)$$

lembrando que $\tilde{\Pi}_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$ é o operador de projeção elíptico (2.47). Segue de (2.17) e (2.54) que

$$\begin{cases} (e_h^{n+1} - e_h^n - \Delta t g_h^n, v_h) + \frac{\Delta t^2}{2} a(e_h^n, v_h) = \Delta t^2 (\eta_h^n, v_h), \\ (g_h^{n+1} - g_h^n, v_h) + \frac{\Delta t}{2} a(e_h^{n+1} + e_h^n, v_h) = \Delta t (\zeta_h^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (2.56)$$

para $0 \leq n \leq N - 1$, sendo as seqüências auxiliares $(\eta_h^n, \zeta_h^n) \in V_h \times V_h$ dadas por

$$(\eta_h^n, v_h) = \frac{1}{2} (\ddot{u}(t_n), v_h) - \frac{1}{\Delta t^2} \left(\tilde{\Pi}_h (u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t \dot{u}(t_n)), v_h \right), \quad (2.57)$$

$$(\zeta_h^n, v_h) = \frac{1}{2} (\ddot{u}(t_{n+1}) + \ddot{u}(t_n), v_h) - \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{\Pi}_h (\dot{u}(t_{n+1}) - \dot{u}(t_n)), v_h \right), \quad (2.58)$$

para todo $v_h \in V_h$. Estas seqüências podem ser vistas como erros de consistência do método, e são limitadas de acordo com o seguinte resultado:

Lema 2.41. *Se $u \in \mathcal{C}^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}^4(0, T; H)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\eta_h^n\|_H \leq C \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(3)}(s)\|_H ds + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(I - \tilde{\Pi}_h)\ddot{u}(s)\|_H ds \right], \quad (2.59)$$

$$\|\zeta_h^n\|_H \leq C \left[\Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(4)}(s)\|_H ds + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(I - \tilde{\Pi}_h)\dot{u}(s)\|_H ds \right]. \quad (2.60)$$

Demonstração. Seja $U_n = u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t \dot{u}(t_n)$. Como $u \in \mathcal{C}^2(0, T; V)$, podemos subtrair e somar $(U_n, v_h)/\Delta t^2 \in V$ em (2.57):

$$(\eta_h^n, v_h) = \left(\frac{1}{2} \ddot{u}(t_n) - \frac{U_n}{\Delta t^2}, v_h \right) + \frac{1}{\Delta t^2} \left((I - \tilde{\Pi}_h) U_n, v_h \right).$$

Tomando $v_h = \eta_h^n$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|\eta_h^n\|_H \leq \left\| \frac{1}{2} \ddot{u}(t_n) - \frac{U_n}{\Delta t^2} \right\|_H + \frac{1}{\Delta t^2} \|(I - \tilde{\Pi}_h) U_n\|_H. \quad (2.61)$$

Por outro lado, temos da fórmula de Taylor de grau 2 com resto na forma integral que

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t \dot{u}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{(3)}(s) \frac{(t_{n+1} - s)^2}{2} ds,$$

de modo que

$$\frac{1}{2} \ddot{u}(t_n) - \frac{U_n}{\Delta t^2} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - s)^2}{2\Delta t^2} u^{(3)}(s) ds.$$

Usando a desigualdade de Jensen, segue que

$$\left\| \frac{1}{2} \ddot{u}(t_n) - \frac{U_n}{\Delta t^2} \right\|_H \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - s)^2}{2\Delta t^2} \|u^{(3)}(s)\|_H ds. \quad (2.62)$$

Analogamente, pela fórmula de Taylor de grau 1 e a desigualdade de Jensen,

$$\|(I - \tilde{\Pi}_h) U_n\|_H \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) \|(I - \tilde{\Pi}_h)\dot{u}(s)\|_H ds. \quad (2.63)$$

A desigualdade (2.59) segue de (2.61)-(2.63), majorando-se $t_{n+1} - s$ por Δt .

Passemos à estimativa (2.59). Subtraindo e somando $(V_n, v_h)/\Delta t$ de (2.58), com $V_n = \dot{u}(t_{n+1}) - \dot{u}(t_n)$, e seguindo os mesmos passos que em (2.61), obtém-se

$$\|\zeta_h^n\|_H \leq \left\| \frac{1}{2}(\ddot{u}(t_{n+1}) + \ddot{u}(t_n)) - \frac{V_n}{\Delta t} \right\|_H + \frac{1}{\Delta t} \left\| (I - \tilde{\Pi}_h)V_n \right\|_H. \quad (2.64)$$

Utilizemos a fórmula de Taylor para \dot{u} e \ddot{u} :

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \dot{u}(t_n) + \Delta t \ddot{u}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} u^{(3)}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{(4)}(s) \frac{(t_{n+1} - s)^2}{2} ds, \quad (2.65)$$

$$\ddot{u}(t_{n+1}) = \ddot{u}(t_n) + \Delta t u^{(3)}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{(4)}(s)(t_{n+1} - s) ds. \quad (2.66)$$

Isolando $u^{(3)}(t_n)$ de (2.66) e substituindo em (2.65), segue que

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \dot{u}(t_n) + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}(t_n) + \ddot{u}(t_{n+1})) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{(4)}(s) \left(\frac{(t_{n+1} - s)^2 - \Delta t(t_{n+1} - s)}{2} \right) ds. \quad (2.67)$$

Notando que $(t_{n+1} - s) - \Delta t = t_n - s$, (2.67) se reduz a

$$\frac{1}{2}(\ddot{u}(t_{n+1}) + \ddot{u}(t_n)) - \frac{V_n}{\Delta t} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - s)(s - t_n)}{2\Delta t} u^{(4)}(s) ds.$$

Pela desigualdade de Jensen e majorando $(t_{n+1} - s)(s - t_n)$ por Δt^2 :

$$\left\| \frac{1}{2}(\ddot{u}(t_{n+1}) + \ddot{u}(t_n)) - \frac{V_n}{\Delta t} \right\|_H \leq \frac{\Delta t}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(4)}(s)\|_H ds, \quad (2.68)$$

enquanto a segunda parcela de (2.64) é limitada com o auxílio do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\left\| (I - \tilde{\Pi}_h)V_n \right\|_H \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| (I - \tilde{\Pi}_h)\ddot{u}(s) \right\|_H ds, \quad (2.69)$$

que estabelecem a estimativa (2.59). \square

Teorema 2.42 ([43], Teor. 8.6-1). *Se os autovalores $\lambda_{I,h}$ de (2.44) satisfazem*

$$\Delta t^2 \lambda_{I,h} \leq 4(1 - \epsilon), \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (2.70)$$

então existe uma constante $C(\epsilon) > 0$ independente de h e Δt tal que

$$\|e_h^n\|_H \leq C \left[\|e_h^0\|_H + \|g_h^0\|_H + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t \|\eta_h^k\|_H + \|\zeta_h^k\|_H) \right]. \quad (2.71)$$

Como consequência do Lema 2.41 e do Teorema 2.42, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.43. *Nas condições do Teorema 2.42, e se $u \in \mathcal{C}^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}^4(0, T; H)$ e*

$f \in \mathcal{C}^0(0, T; H)$, então existe $C = C(\epsilon)$ independente de h , Δt e u tal que

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u(t_n)\|_H &\leq C \left(\|u_0 - \tilde{\Pi}_h u_0\|_H + \|u_1 - \tilde{\Pi}_h u_1\|_H + \|(I - \tilde{\Pi}_h)u(t_n)\|_H \right) \\ &+ C \int_0^{t_n} \left[\|(I - \tilde{\Pi}_h)\dot{u}(s)\|_H + \Delta t^2 (\|u^{(3)}(s)\|_H + \|u^{(4)}(s)\|_H) \right] ds. \end{aligned} \quad (2.72)$$

2.4 Método de elementos finitos

O método dos elementos finitos, na sua forma mais simples, é um processo específico para construir os subespaços V_h , que serão chamados espaços de elementos finitos, usados no método de Galerkin. Vamos seguir a descrição clássica apresentada em [13], que caracteriza estes espaços inicialmente por três aspectos:

1. Uma triangulação \mathcal{T}_h é estabelecida sobre o conjunto $\bar{\Omega}$, isto é, este conjunto é subdividido num número finito de subconjuntos, K_1, \dots, K_{N_e} , de tal forma que as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$(T1) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = \bigcup_{e=1}^{N_e} K_e;$$

(T2) O conjunto K_e é fechado e o interior \mathring{K}_e é não vazio ($1 \leq e \leq N_e$);

(T3) Para $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$ distintos tem-se $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$;

(T4) A fronteira ∂K_e é Lipschitz-contínua ($1 \leq e \leq N_e$).

(T5) Qualquer face de um elemento finito K_i ou é uma face de outro elemento finito K_j , em cujo caso os elementos finitos K_i e K_j são ditos adjacentes, ou uma porção da fronteira Γ do conjunto Ω .

2. O espaço $P_e = \{v_h|_{K_e} : v_h \in V_h\}$ é formado por funções simples (usualmente, polinômios) para $1 \leq e \leq N_e$.
3. Existe uma base do espaço V_h cujas funções possuem suporte restrito a um pequeno número de elementos $K_e \in \mathcal{T}_h$ adjacentes.

Um elemento finito em \mathbb{R}^n é uma tripla (K, P_K, Σ_K) tal que

- (i) K é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n com interior não vazio e fronteira Lipschitz contínua.
- (ii) P_K é um espaço de funções definidas sobre o conjunto K ;
- (iii) $\Sigma_K = \{\phi_1, \dots, \phi_{N_K}\}$, sendo ϕ_i , $1 \leq i \leq N_K$ funcionais lineares definidos sobre o espaço P_K . O conjunto Σ_K é unissolvente em P_K , ou seja, dados quaisquer escalares

α_i , $1 \leq i \leq N_K$, existe uma única função $p \in P_K$ que satisfaz:

$$\phi_i(p) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N_K.$$

Consequentemente, existem funções $p_i \in P_K$, $1 \leq i \leq N_K$, que satisfazem

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq N_K.$$

Logo temos

$$p = \sum_{i=1}^{N_K} \phi_i(p) p_i \quad \forall p \in P_K.$$

As formas lineares ϕ_i , $1 \leq i \leq N_K$, chamam-se graus de liberdade do elemento finito e as funções p_i , $1 \leq i \leq N_K$, chamam-se as funções de base do elemento finito.

Observação 2.44. *Dizer que um conjunto Σ_K é unissolvente em P_K é equivalente a dizer que as N_K formas lineares ϕ_i formam uma base no espaço dual de P_K . Como consequência, podemos ver as bases $(\phi_i)_{i=1}^{N_K}$ e $(p_i)_{i=1}^{N_K}$ como sendo bases duais, no sentido algébrico.*

Neste trabalho vamos nos restringir aos elementos finitos de Lagrange, ou seja, elementos finitos cujos graus de liberdade são definidos por

$$\phi_i(p) = p(\mathbf{x}_{i,K}), \quad (2.73)$$

sendo $\mathbf{x}_{i,K} \in K$ fixos, $i = 1, \dots, N_K$. Os pontos $\mathbf{x}_{i,K}$ chamam-se os vértices do elemento finito (ou vértices locais) e constituem um conjunto denotado por \mathcal{N}_K .

Definição 2.45. *Dizemos que dois elementos finitos $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ e (K, P_K, Σ_K) com graus de liberdade da forma (2.73), são afim-equivalentes se existe uma aplicação afim invertível*

$$F_K : \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow F_K(\boldsymbol{\zeta}) = B\boldsymbol{\zeta} + b \in \mathbb{R}^n,$$

tal que valem as seguintes relações:

$$K = F_K(\widehat{K}), \quad \mathbf{x}_{i,K} = F_K(\boldsymbol{\zeta}_i), \quad 1 \leq i \leq N_K, \quad P_K = \{p : K \longrightarrow \mathbb{R}; p = \widehat{p} \circ F_K^{-1}, \widehat{p} \in \widehat{P}\}.$$

Iremos usar as correspondências

$$\boldsymbol{\zeta} \in \widehat{K} \longrightarrow \mathbf{x} = F_K(\boldsymbol{\zeta}) \in K \quad (2.74)$$

$$\widehat{p} \in \widehat{P} \longrightarrow p = \widehat{p} \circ F_K^{-1} \in P_K \quad (2.75)$$

entre os pontos $\zeta \in \widehat{K}$ e $\mathbf{x} \in K$, e as funções $\widehat{p} \in \widehat{P}$ e $p \in P_K$ correspondendo aos dois elementos finitos afim-equivalentes. Segue de (2.74) e (2.75) que

$$\widehat{p}(\zeta) = p(x) \quad \text{para todo } \zeta \in \widehat{K}, \widehat{p} \in \widehat{P}.$$

Uma família de elementos finitos chama-se uma família afim se todos seus elementos finitos são afim-equivalentes a um único elemento finito $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$, que é chamado elemento finito de referência da família. No caso de uma família afim de elementos finitos retangulares, uma escolha usual para o conjunto \widehat{K} é o hipercubo $[-1, 1]^n$.

O próximo passo é fornecer uma descrição precisa da construção de um espaço de elementos finitos. Vamos nos restringir a triangulações \mathcal{T}_h formadas por famílias afins de elementos finitos de Lagrange (K, P_K, Σ_K) nos quais K são intervalos ou retângulos.

Vamos definir o seguinte espaço de funções polinomiais por partes:

$$P(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) ; v|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.76)$$

Definimos também o conjunto

$$\mathcal{N}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}_K,$$

onde, para cada elemento finito $K \in \mathcal{T}_h$, \mathcal{N}_K denota o conjunto de vértices. Para cada $\mathbf{x}_i \in \mathcal{N}_h$, que denominamos vértice global, escrevemos K_λ , $\lambda \in \Lambda(\mathbf{x}_i)$, para denotar todos os elementos finitos que possuem \mathbf{x}_i como um vértice. Definimos o espaço de elementos finitos X_h como sendo o seguinte subespaço de $P(\Omega, \mathcal{T}_h)$:

$$X_h = \{v = (v_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in P(\Omega, \mathcal{T}_h) ; \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{N}_h, \forall \lambda, \mu \in \Lambda(\mathbf{x}_i), v_{K_\lambda}(\mathbf{x}_i) = v_{K_\mu}(\mathbf{x}_i)\}.$$

Portanto, uma função no espaço X_h é unicamente determinada pelo conjunto

$$\Sigma_h = \{v(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i \in \mathcal{N}_h\},$$

que é chamado o conjunto de graus de liberdade do espaço X_h .

Se $\mathcal{N}_h = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$, então as funções de base φ_j , $1 \leq j \leq M$, do espaço X_h são definidas por

$$\varphi_j \in X_h \quad \text{e} \quad \varphi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.77)$$

As funções de base do espaço X_h são obtidas das funções de base dos elementos finitos do seguinte modo: para cada $\lambda \in \Lambda(\mathbf{x}_j)$, seja p_λ a função de base do elemento finito K_λ

tal que $p_\lambda(\mathbf{x}_j) = 1$ e $p_\lambda(\mathbf{x}_{i,\lambda}) = 0$ nos demais vértices locais $\mathbf{x}_{i,\lambda}$ de K_λ . Temos que

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_\lambda(\mathbf{x}) = \widehat{p}_\lambda \circ F_{K_\lambda}^{-1}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in K_\lambda, \lambda \in \Lambda(\mathbf{x}_j), \\ 0, & \mathbf{x} \in K_\lambda, \lambda \notin \Lambda(\mathbf{x}_j), \end{cases} \quad (2.78)$$

O teorema a seguir estabelece condições para inclusão do espaço de elementos finitos X_h no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.46 ([13], Teor. 2.1.1). *Se $P_K \subset H^1(K)$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$ e $X_h \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, então valem as inclusões*

$$\begin{aligned} X_h &\subset H^1(\Omega), \\ X_{oh} &= \{v_h \in X_h : v_h = 0 \text{ sobre } \Gamma\} \subset H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Nas condições do Teorema 2.46, podemos usar o espaço de elementos finitos $V_h = X_{oh}$ em problemas de Dirichlet e $V_h = X_h$ em problemas de Neumann.

2.4.1 Métodos de elementos espectrais

Nesta seção vamos especificar os elementos finitos empregados neste trabalho. Seja $\Omega = [a, b]$, e considere, por simplicidade, a seguinte triangulação uniforme do domínio Ω :

$$\mathcal{T}_h = \bigcup_{e=1}^{N_e} [a_e, a_e + h], \quad a_e = a + (e-1)h, \quad h = \frac{b-a}{N_e}. \quad (2.79)$$

Note que a transformação afim de $K_e = [a_e, a_e + h]$ para $\widehat{K} = [-1, 1]$ é dada por $F_e(\zeta) = a_e + h(\zeta + 1)/2$. Assim como nos métodos de elementos finitos tradicionais, adotamos

$$\widehat{P} = \mathbb{P}_N([-1, 1]), \quad (2.80)$$

ou seja, o espaço das restrições a $[-1, 1]$ de polinômios de grau $\leq N$. Usualmente, os graus de liberdade são definidos por vértices igualmente espaçados:

$$\widehat{\Sigma} = \left\{ \widehat{\phi}_i(\widehat{v}) = \widehat{v} \left(\frac{i}{N} \right), \quad 0 \leq i \leq N \right\}.$$

Nos *métodos de elementos espectrais*, por sua vez, os graus de liberdade são da forma

$$\widehat{\Sigma} = \left\{ \widehat{\phi}_i(\widehat{v}) = \widehat{v}(\zeta_i), \quad 0 \leq i \leq N \right\}, \quad (2.81)$$

em que $\zeta_0, \dots, \zeta_N \in \widehat{K}$ são pontos de colocação associados a polinômios ortogonais. A

base dual a $\{\hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_N\}$ em \hat{P} é dada pelos polinômios de Lagrange:

$$\hat{w}_i(\zeta) = l_i^N(\zeta) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j}. \quad (2.82)$$

Os pontos de colocação utilizados neste trabalho serão os pontos de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL), descritos a seguir.

Definição 2.47. *A família de polinômios de Legendre é a família $(L_n)_{n \geq 0}$ de polinômios em uma variável que são ortogonais entre si de acordo com o produto interno*

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u(\zeta)v(\zeta) d\zeta$$

e tais que para qualquer inteiro $n \geq 0$, o polinômio L_n tem grau n e satisfaz: $L_n(1) = 1$.

O resultado a seguir associa os polinômios de Legendre a autofunções de um operador diferencial (esta é a origem da palavra *espectral* que designa os métodos espectrais):

Teorema 2.48 ([6], Teor. 3.1). *Para qualquer inteiro $n \geq 0$, o polinômio L_n satisfaz a equação diferencial:*

$$\frac{d}{d\zeta}((1 - \zeta^2)L_n') + n(n + 1)L_n = 0, \quad (2.83)$$

ou seja, L_n é uma autofunção do operador diferencial $A\varphi = -((1 - \zeta^2)\varphi)'$.

A próxima fórmula permite calcular os polinômios de Legendre por indução:

Teorema 2.49 ([6], Teor. 3.4). *A família de polinômios de Legendre é dada por*

$$\begin{aligned} L_0(\zeta) &= 1 \quad e \quad L_1(\zeta) = \zeta, \\ (n + 1)L_{n+1}(\zeta) &= (2n + 1)\zeta L_n(\zeta) - nL_{n-1}(\zeta), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Teorema 2.50. *Seja $N \geq 1$. Existem um único conjunto de pontos $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}\} \subset] - 1, 1[$ e um único conjunto de números reais $\{\rho_0, \dots, \rho_N\}$ tais que*

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta = \Phi(-1)\rho_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \Phi(\zeta_j)\rho_j + \Phi(1)\rho_N \quad \forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}([-1, 1]). \quad (2.84)$$

Os pontos $\zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}$ são as raízes do polinômio L_N' .

Demonstração. Sejam $\zeta_0 = -1$ e $\zeta_N = 1$. Escolhendo $\Phi(\zeta) = l_j^N(\zeta)$, $0 \leq j \leq N$, sendo l_j^N os polinômios de Lagrange definidos em (2.82), obtemos

$$\rho_j = \int_{-1}^1 l_j^N(\zeta) d\zeta, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2.85)$$

Como $\{l_0^N, \dots, l_N^N\}$ forma uma base para $\mathbb{P}_N([-1, 1])$, temos que (2.84) vale para qualquer $\Phi \in \mathbb{P}_N([-1, 1])$. Dado $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}([-1, 1])$, existem $p, q \in \mathbb{P}_{N-2}([-1, 1])$ tais que

$$\Phi(\zeta) = p(\zeta)w(\zeta) + q(\zeta), \quad w(\zeta) = (\zeta - \zeta_0) \dots (\zeta - \zeta_N) \in \mathbb{P}_{N+1}([-1, 1]). \quad (2.86)$$

Como $w(\zeta_j) = 0$ para $0 \leq j \leq N$ e $q \in \mathbb{P}_{N-2}([-1, 1]) \subset \mathbb{P}_N([-1, 1])$, segue que

$$\sum_{j=0}^N \Phi(\zeta_j)\omega_j = \sum_{j=0}^N q(\zeta_j)\omega_j = \int_{-1}^1 q(\zeta) d\zeta.$$

Assim,

$$\sum_{j=0}^N \Phi(\zeta_j)\omega_j = \int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta \quad \text{se} \quad \int_{-1}^1 p(\zeta)w(\zeta) d\zeta = 0,$$

ou seja, basta encontrar $\zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}$ tais que

$$\int_{-1}^1 p(\zeta)w(\zeta) d\zeta = \int_{-1}^1 p(\zeta)\tilde{w}(\zeta)(1 - \zeta^2) d\zeta = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_{N-2}([-1, 1]),$$

sendo que $\tilde{w}(\zeta) = (\zeta - \zeta_1) \dots (\zeta - \zeta_{N-1}) \in \mathbb{P}_{N-1}([-1, 1])$. Por outro lado, temos de (2.83) que, para quaisquer inteiros $n, k \geq 0$ com $k \geq n$,

$$(L'_n, L'_k)_w = \int_{-1}^1 L'_n(\zeta)L'_k(\zeta)(1 - \zeta^2) d\zeta = n(n+1) \int_{-1}^1 L_n(\zeta)L_k(\zeta) d\zeta = 0.$$

Como $(\cdot, \cdot)_w$ define um produto interno e $\mathcal{B} = \{L'_1, \dots, L'_{N-1}\}$ são ortogonais com respeito a $(\cdot, \cdot)_w$, temos que \mathcal{B} é uma base para $\mathbb{P}_{N-2}([-1, 1])$. Assim, podemos escrever $p(\zeta) = \alpha_1 L'_1(\zeta) + \dots + \alpha_{N-1} L'_{N-1}(\zeta)$ e segue que

$$\int_{-1}^1 p(\zeta)L'_N(\zeta)(1 - \zeta^2) d\zeta = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \int_{-1}^1 L'_i(\zeta)L'_N(\zeta)(1 - \zeta^2) d\zeta = 0. \quad (2.87)$$

Tomando os pontos ζ_i como as raízes de $L'_N(\zeta)$, obtemos $\tilde{w}(\zeta) = \beta L'_N(\zeta)$ para alguma constante β , e o resultado segue de (2.87). \square

Pode-se mostrar [6, p. 249-250] que os pontos ζ_j , $1 \leq j \leq N-1$, são os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \gamma_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{N-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{n(n+2)}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}}, \quad 1 \leq n \leq N-2,$$

enquanto os pesos ρ_j , $0 \leq j \leq N$, são dados por

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\zeta_j)}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Uma característica fundamental dos pontos GLL ζ_j , $0 \leq j \leq N$ é que $\zeta_0 = -1$ e $\zeta_N = 1$, ou seja, os extremos do elemento de referência são vértices deste elemento. Segue que, para $2 \leq e \leq N_e$, $F_{e-1}(1) = F_e(-1)$, garantindo a continuidade entre os elementos adjacentes K_{e-1} e K_e . Os vértices globais são dados por

$$x_{(e-1)N+j+1} = F_e(\zeta_j), \quad 1 \leq e \leq N_e, \quad 0 \leq j \leq N,$$

observando que não há ambiguidade entre $x_{(e-1)N+N+1}$ e x_{eN+0+1} . Note que o número total de vértices é $N_v = N_e N + 1$. As funções de base globais são dadas por (2.78), sendo que $\Lambda(x_{(e-1)N+j+1}) = \{e-1, e\}$ se $j = 0$ e $2 \leq e \leq N_e$, e $\Lambda(x_{(e-1)N+j+1}) = \{e\}$ caso contrário.

Os vértices x_1, \dots, x_{N_v} definem a seguinte versão composta da quadratura (2.84):

$$\sum_{GLL} f = \sum_{l=1}^{N_v} \tilde{\rho}_l f(x_l) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=0}^N \tilde{\rho}_{(e-1)j+N+1} f(x_{(e-1)N+j+1}), \quad \tilde{\rho}_{(e-1)j+N+1} = \frac{h}{2} \rho_j. \quad (2.88)$$

O método de elementos espectrais apresentado acima é facilmente estendido para um domínio retangular $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ dividido em elementos retangulares. De fato, definindo $N_e = N_e^x N_e^y$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h &= \bigcup_{e=1}^{N_e} K_e, \quad K_e = K_{(e_y-1)N_e^x+e_x} = [a_{e_x}, a_{e_x} + h_x] \times [c_{e_y}, c_{e_y} + h_y], \\ a_e &= a + (e-1)h_x \quad (1 \leq e_x \leq N_e^x), \quad c_e = c + (e-1)h_y \quad (1 \leq e_y \leq N_e^y) \end{aligned}$$

com $h_x = (b-a)/N_e^x$ e $h_y = (d-c)/N_e^y$. A transformação afim de K_e para $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ é dada por $F_e(\zeta) = F_e(\zeta_x, \zeta_y) = [a_e, c_e] + [h_x \zeta_x + 1, h_y \zeta_y + 1]/2$.

Adotamos $\hat{P} = \mathbb{P}_N([-1, 1]) \times \mathbb{P}_N([-1, 1])$, e os graus de liberdade são da forma

$$\hat{\Sigma} = \left\{ \hat{\phi}_{(j-1)N+i}(\hat{v}) = \hat{v}(\zeta_i, \zeta_j), \quad 0 \leq i, j \leq N \right\}, \quad (2.89)$$

sendo $\zeta_0, \dots, \zeta_N \in \hat{K}$ os pontos GLL utilizados no caso unidimensional. Para definir os vértices globais, vamos introduzir os seguintes índices:

$$\begin{cases} i_x = i_x(e_x, j_x) = (e_x - 1)N + j_x + 1, & 1 \leq e_x \leq N_e^x, \quad 0 \leq j_x \leq N, \\ i_y = i_y(e_y, j_y) = (e_y - 1)N + j_y + 1, & 1 \leq e_y \leq N_e^y, \quad 0 \leq j_y \leq N, \end{cases}$$

a partir dos quais definimos

$$\mathbf{x}_{(i_y-1)N_v^x+i_x} = F_{(e_y-1)N_e^x+e_x}(\zeta_{j_x}, \zeta_{j_y}),$$

sendo que $N_v^x = N_e^x N + 1$ e $N_v^y = N_e^y N + 1$. O número total de vértices globais é $N_v = N_v^x N_v^y$. Finalmente, a regra de quadratura composta bidimensional é dada por

$$\sum_{GLL} f = \sum_{e_x=1}^{N_e^x} \sum_{e_y=1}^{N_e^y} \sum_{j_x=0}^N \sum_{j_y=0}^N \tilde{\rho}_{ix} \tilde{\rho}_{iy} f(\mathbf{x}_{(i_y-1)N_v^x+i_x}). \quad (2.90)$$

A quadratura GLL permite definir o seguinte “produto interno discreto” em $P(\Omega, \mathcal{T}_h)$:

$$(u, v)_h = \sum_{GLL} uv. \quad (2.91)$$

Teorema 2.51. *O produto $(\cdot, \cdot)_h$ em (2.91) é equivalente ao produto interno (\cdot, \cdot) definido em (2.5) no sentido que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, \varphi)_h \leq C (\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in P(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (2.92)$$

Observação 2.52. *Note em particular que as desigualdades (2.92) são válidas se $\varphi \in V_h$ ou se $\varphi = D^\alpha \psi$ com $\psi \in V_h$.*

Demonstração. A prova a seguir, para o caso unidimensional, segue a mesma ideia em [9, Lema 3.2]. Dada $\varphi \in V_h$ e $K_e \in \mathcal{T}_h$, podemos escrever $\varphi|_{K_e} \in \mathbb{P}_N(K_e)$ na forma $\varphi|_{K_e}(x) = \alpha_e(x - \bar{a}_e)^N + p(x)$, sendo $\bar{a}_e = a_e + h/2$ e $p \in \mathbb{P}_{N-1}(K_e)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{K_e} \varphi^2(x) dx &= \alpha_e^2 \int_{K_e} (x - \bar{a}_e)^{2N} dx + \int_{K_e} 2\alpha_e(x - \bar{a}_e)^N p(x) dx + \int_{K_e} p^2(x) dx \\ &= \frac{h}{2} \left[\int_{-1}^1 \alpha_e^2 \zeta^{2N} d\zeta + \int_{-1}^1 2\alpha_e \zeta^N \hat{p}(\zeta) d\zeta + \int_{-1}^1 \hat{p}^2(\zeta) d\zeta \right], \quad \hat{p} = p \circ F_e. \end{aligned}$$

Note que o último e o penúltimo termo da expressão acima têm graus $2N - 1$ e $2N - 2$ respectivamente, assim segue do Teorema 2.50 que

$$\begin{aligned} \int_{K_e} \varphi^2(x) dx &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \alpha_e^2 \zeta^{2N} d\zeta + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N [2\alpha_e \zeta_j^N \hat{p}(\zeta_j) + \hat{p}^2(\zeta_j)] \rho_j \\ &= \frac{h\alpha_e^2}{2} \left[\int_{-1}^1 \zeta^{2N} d\zeta - \sum_{j=0}^N \zeta_j^{2N} \rho_j \right] + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N [\alpha_e \zeta_j^N + \hat{p}(\zeta_j)]^2 \rho_j. \end{aligned}$$

Transformando de volta para K_e e somando as integrais para $e = 1, \dots, N_e$, obtemos

$$(\varphi, \varphi) = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{h\alpha_e^2}{2} \widehat{E}[\zeta^{2N}] + (\varphi, \varphi)_h, \quad (2.93)$$

em que $\widehat{E}[\cdot]$ representa o erro de quadratura em \widehat{K} , que satisfaz (vide [18, p. 104])

$$\widehat{E}[\widehat{f}] = -\frac{(N+1)N^3 2^{2N+1} [(N-1)!]^4}{(2N+1)[(2N)!]^3} \widehat{f}^{(2N)}(\xi) \quad (\xi \in]-1, 1[).$$

Como $\widehat{f}^{(2N)}(\xi) = (2N)! > 0$ se $\widehat{f}(\zeta) = \zeta^{2N}$, obtemos $(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, \varphi)_h$. Por outro lado, vamos escrever o N -ésimo polinômio de Legendre na forma $L_N = C\zeta^N - p^*$, com $p^* \in \mathbb{P}_{N-1}([-1, 1])$. Temos que

$$\int_{K_e} \varphi^2(x) dx = \frac{h}{2} \int_{\Omega} (\alpha_e \zeta^N + \widehat{p}(\zeta))^2 d\zeta = \frac{\alpha_e^2 h}{2C^2} \left\| Cx^N - \frac{C}{\alpha_e} \widehat{p} \right\|_{L^2([-1, 1])}^2.$$

Além disso, como $(L_N, q) = (C\zeta^N - p^*, q) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_{N-1}([-1, 1])$, segue que

$$\|C\zeta^N - p^*\|_{L^2([-1, 1])}^2 = \min_{q \in \mathbb{P}_{N-1}} \|Cx^N - q\|_{L^2([-1, 1])}^2 \leq \left\| Cx^N - \frac{C}{\alpha_e} \widehat{p} \right\|_{L^2([-1, 1])}^2,$$

logo

$$\int_{K_e} \varphi^2(x) dx \geq \frac{\alpha_e^2 h}{2C^2} \|L_N\|_{L^2([-1, 1])}^2 = \frac{\alpha_e^2 h}{2} b_N, \quad b_N = \frac{2^{2N+1} (N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^2},$$

visto que $C = (2N)! / ((N!)^2 2^N)$ e $\|L_N\|_{L^2([-1, 1])}^2 = 2/(2N+1)$ [6, eqs. (3.10)-(3.11)]. Finalmente, $\widehat{E}[\zeta^{2N}] = -b_N(N+1)/N$, logo segue de (2.93) que

$$(\varphi, \varphi)_h = (\varphi, \varphi) + \frac{N+1}{N} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\alpha_e^2 h}{2} b_N \leq (\varphi, \varphi) + \frac{N+1}{N} (\varphi, \varphi) \leq 3(\varphi, \varphi),$$

portanto $(\varphi, \varphi) \leq (\varphi, \varphi)_h \leq C(\varphi, \varphi)$ com $C = 3$. \square

O método de elementos espectrais com pontos de colocação GLL normalmente utiliza a quadratura (2.88) nos cálculos. Como os pontos de colocação coincidem com os pontos de quadratura, temos a seguinte propriedade de ortogonalidade com respeito a $(\cdot, \cdot)_h$:

$$(w_i, w_j)_h = 0, \quad i \neq j.$$

Esta propriedade garante que a matriz de massa do sistema discretizado (2.46) é diagonal, conduzindo naturalmente a métodos explícitos no tempo.

2.4.2 Espaços de Sobolev particionados

Vamos introduzir os espaços de Sobolev particionados (*broken Sobolev spaces*) associados a uma triangulação \mathcal{T}_h , seguindo a notação empregada em [38]:

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) ; v|_K \in H^s(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.94)$$

Note que o espaço $P(\Omega, \mathcal{T}_h)$ definido em (2.76) satisfaz $P(\Omega, \mathcal{T}_h) \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ para qualquer $s \geq 0$. Estes espaços são utilizados na análise de métodos de Galerkin descontínuos, mas também no estudo de elementos espectrais [35]. Dado $s > 0$, associamos ao espaço $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ a norma

$$\|v\|_{s, \mathcal{T}_h} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^s(K)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.95)$$

Observação 2.53. A expressão $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^s(K)}$ utilizada em [35] não se reduz à norma $\|v\|_s$ quando $v \in H^s(\Omega)$.

2.4.3 Operadores de interpolação e de projeção

Vamos definir diversos operadores que serão usados nas estimativas de erros. Daqui em diante, $V_h = V_{h,N}$ denota um espaço de elementos espectrais de grau N com pontos de colocação GLL.

Definimos o operador de interpolação, $\mathcal{I} : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$, como sendo

$$\mathcal{I}v(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M v(\mathbf{x}_j)w_j(\mathbf{x}), \quad (2.96)$$

em que w_j são as funções de base definidas em (2.77).

O operador $\mathcal{I}v$ é equivalentemente caracterizado pelas condições

$$\mathcal{I}v \in V_h \quad \text{e} \quad \mathcal{I}v(\mathbf{x}_j) = v(\mathbf{x}_j), \quad 1 \leq j \leq M.$$

Se $\Omega \in \mathbb{R}^2$ e é um domínio poligonal com uma triangulação regular [13] em triângulos ou retângulos, então vale a seguinte estimativa do erro de interpolação local:

Lema 2.54 ([4], Lema 4.5). *Dado um elemento K de uma triangulação regular \mathcal{T}_h e $v \in H^s(K)$ com $s \geq 0$. Existe $v_K \in P_K$ e uma constante $C > 0$ independente de h e N tal que*

$$\|v - v_K\|_{H^k(K)} \leq Ch^{\min(N+1, s) - k} N^{k-s} \|v\|_{H^s(K)}, \quad 0 \leq k \leq s. \quad (2.97)$$

Além disso, se $s > 3/2$, podemos tomar v_K como o interpolante de v em P_K .

Corolário 2.55. *Seja $v \in H^s(\Omega)$ com $s > 3/2$. Existe uma constante $C > 0$ independente de h e N tal que*

$$\|v - \mathcal{I}v\|_k \leq Ch^{\min(N+1,s)-k} N^{k-s} \|v\|_s, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (2.98)$$

Em (2.47) havíamos introduzido o operador elíptico $\tilde{\Pi}_h$ definido por

$$a(\tilde{\Pi}_h v, v_h) = a(v, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.99)$$

Dada uma aproximação $a_h(\cdot, \cdot)$ da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$, vamos considerar também o seguinte operador Π_h associado a $a_h(\cdot, \cdot)$:

$$a_h(\Pi_h v, v_h) = a(v, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.100)$$

Observação 2.56. *Usaremos nos operadores o sub-índice $N - 1$ para denotar o operador referente ao espaço de elementos espectrais de grau $N - 1$ (por exemplo, \mathcal{I}_{N-1} denota o operador de interpolação de grau $N - 1$).*

Capítulo 3

Problema com Fronteira de Dirichlet

Vamos estudar a discretização do problema (1.1)-(1.3) no espaço pelo método de elementos espectrais, descrito na seção 2.4.1, e com a discretização temporal descrita na seção 2.3.3.

Seja $\Omega = I_1 \times I_2$, em que I_1 e I_2 são dois intervalos abertos da reta.

Assim como no caso de coeficientes constantes, apresentado na Seção 2.2.3, vamos considerar $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$. Assumiremos inicialmente que $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ para que a existência e unicidade da solução seja garantida, além disso tomaremos $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$. A forma fraca do problema (1.1)-(1.3) será: Encontrar $u : (0, T) \rightarrow V$ tal que para todo $t \in (0, T)$ tem-se

$$\begin{cases} (\ddot{u}(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) & \forall v \in V \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1, \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo $a(\cdot, \cdot)$ a forma bilinear definida por

$$a(\varphi, \psi) = (A\nabla\varphi, \nabla\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega), \quad (3.2)$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz de ordem 2×2 simétrica e positiva-definida com coeficientes não constantes e limitados [35], isto é, existem dois números reais p_1 e p_2 tais que

$$\begin{aligned} A\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} &\geq p_1(V_1^2 + V_2^2) \quad \forall \mathbf{V} = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2, \\ |a_{ij}| &\leq p_2, \quad \forall i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assumimos também que os coeficientes a_{ij} são separáveis no sentido que existe um inteiro $n_A \geq 0$ tal que

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_A} a_{ij}^k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_A} \alpha_k a_{ij}^{k,1}(x_1) a_{ij}^{k,2}(x_2). \quad (3.4)$$

O problema semi-discreto associado à formulação (3.1) é : para todo $t \in [0, T]$, encontrar $u_h \in V_h$, tal que:

$$\begin{cases} (\ddot{u}_h(t), v_h)_h + a(u_h(t), v_h)_h = (f(t), v_h)_h & \forall v_h \in V_h, t > 0; \\ (u_h(0), v_h)_h = (u_0, v_h)_h & \forall v_h \in V_h; \\ (\dot{u}_h(0), v_h)_h = (u_1, v_h)_h & \forall v_h \in V_h; \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo que $a_h(\varphi, \psi) = (A\nabla\varphi, \nabla\psi)_h$, e $(\cdot, \cdot)_h$ é o produto interno discreto definido em (2.91) com base na quadratura GLL. Conforme descrito na Seção 2.3.2, este problema corresponde ao sistema de EDOs

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

sendo que agora $M_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)_h$ e $K_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i)_h$. Note que a matriz \mathbf{M} é diagonal devido à escolha da regra de quadratura GLL. Utilizando a discretização temporal pelo método de leapfrog, descrita na Seção 2.3.3, obtém-se

$$\begin{aligned} (u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}, v_h)_h + \Delta t^2 a_h(u_h^n, v_h) &= \Delta t^2 (f(t_n), v_h)_h \quad (n > 1), \\ (u_h^1 - u_0 - \Delta t u_1, v_h)_h + \frac{\Delta t^2}{2} a_h(u_h^0, v_h) &= \frac{\Delta t^2}{2} (f(t_0), v_h)_h, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

que resulta no método iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{n+1} = 2\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1} + \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}^n - \mathbf{K}\mathbf{U}^n), & n > 1 \\ \mathbf{U}^1 = \mathbf{u}_0 + \Delta t \mathbf{u}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}^0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0), \end{cases} \quad (3.7)$$

observando-se que \mathbf{M}^{-1} é facilmente obtida pelo fato que \mathbf{M} é diagonal.

3.1 Análise de Convergência

Os próximos resultados servirão como ferramentas para a demonstração do resultado principal deste capítulo, o Teorema 3.7, o qual estabelece uma estimativa de erro para a solução aproximada do problema (3.1). O primeiro resultado a seguir é uma versão hp e bidimensional do Lema 2.6 em [35]:

Teorema 3.1. *Sejam $s > 3/2$ e $N \geq 2$. Se $u \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, então*

$$\frac{(u, w_h) - (u, w_h)_h}{\|w_h\|_0} \leq Ch^{\min(N,s)} (N-1)^{-s} \|u\|_{s, \mathcal{T}_h} \quad \forall w_h \in P(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (3.8)$$

Demonstração. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, denotemos por $(\cdot, \cdot)_K$ e $(\cdot, \cdot)_{h,K}$ as restrições das formas

bilineares (\cdot, \cdot) e $(\cdot, \cdot)_h$ ao elemento K (analogamente para $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_s$). Vamos somar e subtrair os seguintes termos envolvendo o operador de interpolação de grau $N - 1$ em K (que vamos denotar por \mathcal{I}_{N-1}^K):

$$\begin{aligned} (u, w_h)_K - (u, w_h)_{h,K} &= \underbrace{[(u, w_h)_K - (\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_K]}_{\text{(I)}} + \underbrace{[(\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_K - (\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_{h,K}]}_{\text{(II)}} \\ &\quad + \underbrace{[(\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_{h,K} - (u, w_h)_{h,K}]}_{\text{(III)}}. \end{aligned}$$

Pela exatidão da regra de quadratura GLL, o termo (II) se anula. Podemos majorar o termo (I) usando a desigualdade de Hölder e o Lema 2.54¹ com $k = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} (u, w_h)_K - (\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_K &\leq \|u - \mathcal{I}_{N-1}^K u\|_K \|w_h\|_K \\ &\leq Ch^{\min(N,s)}(N-1)^{-s} \|u\|_{s,K} \|w_h\|_K. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para majorar o termo (III), note primeiro que pela definição do produto interno discreto $(\cdot, \cdot)_h$ e pelo fato que $\mathcal{I}_N^K u$ coincide com u nos pontos de quadratura GLL, segue que

$$(\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_{h,K} - (u, w_h)_{h,K} = (\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_{h,K} - (\mathcal{I}_N^K u, w_h)_{h,K} = (\mathcal{I}_{N-1}^K u - \mathcal{I}_N^K u, w_h)_{h,K}.$$

Como $\mathcal{I}_{N-1}^K u - \mathcal{I}_N^K u \in P(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $w_h \in P(\Omega, \mathcal{T}_h)$, podemos utilizar o Teorema 2.51:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_{h,K} - (u, w_h)_{h,K} &\leq (\mathcal{I}_{N-1}^K u - \mathcal{I}_N^K u, \mathcal{I}_{N-1}^K u - \mathcal{I}_N^K u)_{h,K}^{1/2} (w_h, w_h)_{h,K}^{1/2} \\ &\leq C \|\mathcal{I}_{N-1}^K u - \mathcal{I}_N^K u\|_K \|w_h\|_K \\ &\leq C [\|\mathcal{I}_{N-1}^K u - u\|_K + \|u - \mathcal{I}_N^K u\|_K] \|w_h\|_K. \end{aligned}$$

Segue novamente do Lema 2.54 com $k = 0$ que

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{N-1}^K u, w_h)_{h,K} - (u, w_h)_{h,K} &\leq C [h^{\min(N,s)}(N-1)^{-s} + h^{\min(N+1,s)}N^{-s}] \|u\|_{s,K} \|w_h\|_K \\ &\leq C(1+h) h^{\min(N,s)}(N-1)^{-s} \|u\|_{s,K} \|w_h\|_K, \end{aligned}$$

sendo que o termo $1 + h$ pode ser limitado em termos da medida do domínio. Assim,

$$(u, w_h) - (u, w_h)_h = Ch^{\min(N,s)}(N-1)^{-s} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s,K} \|w_h\|_K,$$

e o resultado segue da desigualdade de Hölder em \mathbb{R}^{N_v} . \square

Lembrando que utilizamos elementos retangulares e espaços de elementos espectrais

¹Neste caso, devemos tomar uma triangulação regular auxiliar $\tilde{\mathcal{T}}_h$ associada ao espaço de elementos espectrais de grau $N - 1$, formada pelos mesmos elementos de \mathcal{T}_h .

formados pelo produto de espaços unidimensionais, necessitaremos de uma versão hp unidimensional do Lema 2.6 e da segunda parte do Lema 2.3 em [35], cuja prova segue os mesmos argumentos do teorema acima:

Teorema 3.2. *Seja \mathcal{T}_h^I uma triangulação regular de um intervalo aberto I e*

$$P_k(I, \mathcal{T}_h^I) = \{v \in P(I, \mathcal{T}_h^I) ; v|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^I\}.$$

Se $u \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h^I)$ com $s > 3/2$ e $N \geq 2$, então

$$\begin{aligned} (u, w_h) - (u, w_h)_h &\leq Ch^{\min(N,s)}(N-1)^{-s} \|u\|_{s, \mathcal{T}_h^I} \|w_h\|_0 && \forall w_h \in P_N(I, \mathcal{T}_h^I), \\ (u, w_h) - (u, w_h)_h &\leq Ch^{\min(N+1,s)}N^{-s} \|u\|_{s, \mathcal{T}_h^I} \|w_h\|_1 && \forall w_h \in P_{N-1}(I, \mathcal{T}_h^I). \end{aligned}$$

Considere os operadores de projeção elíptica (2.99) e (2.100), considerando a forma bilinear (3.2) e sua aproximação pela quadratura (2.90). Temos a seguinte estimativa para o erro de projeção elíptica:

Teorema 3.3. *Se $a_{ij} \in H^\mu(\Omega)$ com $\mu > 3/2$ para todo $i, j = 1, 2$ e $v \in H^s(\Omega)$ com $s > 5/2$, então para qualquer $N \geq 2$ e $h > 0$,*

$$\|v - \Pi_h v\|_1 \leq Ch^{\min(N, \tilde{s})}(N-1)^{-\tilde{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|v\|_{\tilde{s}}, \quad (3.10)$$

com $\tilde{s} = \min(\mu, s-1)$ e $\|A\|_\mu = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k=1}^{n_A} \|a_{ij}^k\|_\mu$.

Demonstração. Esta prova é semelhante ao Lema 1 em [56]. Dado $v_h \in V_h$ arbitrário,

$$\|v - \Pi_h v\|_1 \leq \|v - v_h\|_1 + \|v_h - \Pi_h v\|_1. \quad (3.11)$$

Seja $w_h = \Pi_h v - v_h$. Como o operador $a_h(\cdot, \cdot)$ é elíptico, podemos escrever

$$C_2 \|v_h - \Pi_h v\|_1^2 = C_2 \|w_h\|_1^2 \leq a_h(w_h, w_h) = a_h(\Pi_h v, w_h) - a_h(v_h, w_h).$$

Vamos subtrair e somar $a(v_h, w_h)$ e usar (2.100), obtendo

$$\begin{aligned} C_2 \|\Pi_h v - v_h\|_1^2 &\leq a(v, w_h) - a(v_h, w_h) + a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) \\ &= a(v - v_h, w_h) + a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) \\ &\leq C_1 \|v - v_h\|_1 \|w_h\|_1 + a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, por (3.11) e (3.12), lembrando que $\Pi_h v - v_h = w_h$, segue que a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\|v - \Pi_h v\|_1 \leq C \left[\|v - v_h\|_1 + \frac{a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_1} \right]. \quad (3.13)$$

Vamos escolher $v_h = \mathcal{I}v$. Segue do Teorema 2.55 (com $k = 1$) que

$$\|v - v_h\|_1 = \|v - \mathcal{I}v\|_1 \leq Ch^{\min(N+1,s)-1} N^{1-s} \|v\|_s. \quad (3.14)$$

Para limitar o termo restante, note que

$$\begin{aligned} a(v_h, w_h) - a_h(v, w_h) &= (A\nabla v_h, \nabla w_h) - (A\nabla v, \nabla w_h)_h \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_{11}v_{h,x} + a_{12}v_{h,y} \\ a_{21}v_{h,x} + a_{22}v_{h,y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{h,x} \\ w_{h,y} \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} a_{11}v_{h,x} + a_{12}v_{h,y} \\ a_{21}v_{h,x} + a_{22}v_{h,y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{h,x} \\ w_{h,y} \end{bmatrix} \right)_h, \end{aligned}$$

em que os subscritos x e y denotam derivadas parciais nas direções x_1 e x_2 , respectivamente. Por simplicidade, faremos os cálculos apenas para os termos envolvendo o coeficiente $a_{11}^1(\mathbf{x}) = a_{11}^{11}(x_1)a_{11}^{12}(x_2)$ e usar as notações (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_h$ e $\|\cdot\|$ também no caso unidimensional.

Sejam $v_h(\mathbf{x}) = v_h^1(x_1)v_h^2(x_2)$ e $w_h(\mathbf{x}) = w_h^1(x_1)w_h^2(x_2)$. Temos que

$$\begin{aligned} (a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x}) - (a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x})_h &= (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1)(a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) - (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, v_{h,x}^1)_h (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2)_h \\ &= (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1)(a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) - (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, v_{h,x}^1)_h (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) \\ &\quad + (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1)_h (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) - (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, v_{h,x}^1)_h (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2)_h \\ &= [(a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1) - (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, v_{h,x}^1)_h] (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) \\ &\quad + (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1)_h [(a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) - (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2)_h] \\ &= [(a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1) - (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, v_{h,x}^1)_h] (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) \\ &\quad + [(a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1)_h - (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1)] [(a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) - (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2)_h] \\ &\quad + (a_{11}^{11} v_{h,x}^1, w_{h,x}^1) [(a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2) - (a_{11}^{12} v_h^2, w_h^2)_h]. \end{aligned}$$

Sejam $\mathcal{T}_h^{I_1}$ e $\mathcal{T}_h^{I_2}$ as triangulações unidimensionais associadas aos intervalos abertos I_1 e I_2 (note que $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^{I_1} \times \mathcal{T}_h^{I_2}$) e seja $\tilde{s} = \min(\mu, s - 1)$. Como $a_{11}^1 v_{h,x} \in H^{\tilde{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h)$, segue do Teorema 3.2 que

$$\begin{aligned} (a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x}) - (a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x})_h &\leq C[h^{\min(N+1,\tilde{s})} N^{-\tilde{s}} \|a_{11}^{11} v_{h,x}^1\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h^{I_1}} \|w_{h,x}^1\|_0 \|a_{11}^{12} v_h^2\|_0 \|w_h^2\|_0 \\ &\quad + h^{\min(N+1,\tilde{s})} N^{-\tilde{s}} h^{\min(N,\tilde{s})} (N-1)^{-\tilde{s}} \|a_{11}^{11} v_{h,x}^1\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h^{I_1}} \|w_{h,x}^1\|_0 \|a_{11}^{12} v_h^2\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h^{I_2}} \|w_h^2\|_0 \\ &\quad + h^{\min(N,\tilde{s})} (N-1)^{-\tilde{s}} \|a_{11}^{12} v_h^2\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h^{I_2}} \|w_h^2\|_0 \|a_{11}^{11} v_{h,x}^1\|_0 \|w_{h,x}^1\|_0]. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\|w_{h,x}^1\|_0 \|w_h^2\|_0 &= \left(\int_{I_1} w_{h,x}^1(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{I_2} w_h^2(x)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\Omega} [w_{h,x}^1(x_1)w_h^2(x_2)]^2 d\Omega \right)^{1/2} = \|w_{h,x}\|_0.\end{aligned}$$

Analogamente², obtem-se

$$\|f^1\|_{s_1, \mathcal{T}_h^{I_1}} \|f^2\|_{s_2, \mathcal{T}_h^{I_2}} \leq C \|f\|_{\max(s_1, s_2), \mathcal{T}_h}, \quad f(\mathbf{x}) = f^1(x_1)f^2(x_2),$$

de modo que

$$(a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x}) - (a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x})_h \leq Ch^{\min(N, \tilde{s})} (N-1)^{-\tilde{s}} \|a_{11}^1 v_{h,x}\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} \|w_{h,x}\|_0$$

Por outro lado, pela limitação do coeficiente a_{11}^1 e pelo fato que $a_{11}^1 v_x \in H^{\tilde{s}}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\|a_{11}^1 v_{h,x}\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} &\leq \|a_{11}^1 (v - v_h)_x\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} + \|a_{11}^1 v_x\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} \\ &\leq C \|(v - v_h)_x\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} + \|a_{11}^1 v_x\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} \\ &\leq C \|v - v_h\|_{\tilde{s}+1, \mathcal{T}_h} + \|a_{11}^1 v_x\|_{\tilde{s}} \\ &\leq C \|v - v_h\|_{s, \mathcal{T}_h} + \|a_{11}^1 v_x\|_{\tilde{s}}\end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.19 e pelo Lema 2.54 com $k = s$,

$$\|a_{11}^1 v_{h,x}\|_{\tilde{s}, \mathcal{T}_h} \leq C (\|v\|_s + \|a_{11}^1\|_{\tilde{s}} \|v_x\|_{\tilde{s}}) \leq C (\|v\|_s + \|a_{11}^1\|_{\mu} \|v\|_s),$$

de maneira que, observando também que $\|w_{h,x}\|_0 \leq \|w_h\|_1$,

$$(a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x}) - (a_{11}^1 v_{h,x}, w_{h,x})_h \leq Ch^{\min(N, \tilde{s})} (N-1)^{-\tilde{s}} (\|v\|_s + \|a_{11}^1\|_{\mu} \|v\|_s) \|w_h\|_1.$$

Procedendo do mesmo modo com os demais termos de $a(v_h, w_h) - a_h(v, w_h)$, obtém-se

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{a(v, w_h) - a_h(v, w_h)}{\|w_h\|_1} \leq Ch^{\min(N, \tilde{s})} (N-1)^{-\tilde{s}} (1 + \|A\|_{\mu}) \|v\|_s. \quad (3.15)$$

De (3.14), (3.15) e do fato que $\tilde{s} \leq s-1$, a desigualdade (3.13) torna-se

$$\begin{aligned}\|v - \Pi_h v\|_1 &\leq C \left(h^{\min(N, s-1)} N^{1-s} \|v\|_s + h^{\min(N, \tilde{s})} (N-1)^{-\tilde{s}} (1 + \|A\|_{\mu}) \|v\|_s \right) \\ &\leq Ch^{\min(N, \tilde{s})} (N^{-\tilde{s}} + (N-1)^{-\tilde{s}}) (1 + \|A\|_{\mu}) \|v\|_s,\end{aligned}$$

da qual a estimativa (3.10) segue. □

²Convém considerar $\|\cdot\|_s$ na forma dada por [1, eq. (5.1.3)].

Corolário 3.4. *Nas condições do Teorema 3.3, vale a seguinte estimativa na norma L^2 :*

$$\|v - \Pi_h v\|_0 \leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|v\|_{\bar{s}}. \quad (3.16)$$

Demonstração. De fato, pelo Lema de Aubin-Nitsche (Teorema 2.35) existe uma constante M tal que

$$\|v - \Pi_h v\|_0 \leq M \|v - \Pi_h v\|_1 \left(\sup_{g \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\|g\|_0} \inf_{\varphi_k \in V_h} \|\varphi_g - \varphi_k\|_1 \right\} \right) \quad (3.17)$$

onde φ_g é a única solução do problema variacional: *Encontrar $\varphi_g \in V$ tal que $a(v, \varphi_g) = (g, v)$ para toda $v \in V$.* Lembrando que Ω é um domínio retangular e os coeficientes $a_{ij} \in H^\mu(\Omega)$ com $\mu > 3/2$, temos que [32, pp. 50–53]

$$\varphi_g \in H^2(\Omega) \text{ e } \|\varphi_g\|_2 \leq C [\|L\varphi_g\|_0 + \|\varphi_g\|_0], \quad Lu = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right). \quad (3.18)$$

Como $\mathcal{I}_N \varphi_g \in V_h$ e usando a desigualdade (2.98), segue que

$$\begin{aligned} \inf_{\varphi_k \in V_h} \|\varphi_g - \varphi_k\|_1 &\leq \|\varphi_g - \mathcal{I}_N \varphi_g\|_1 \\ &\leq Ch^{\min(N+1, 2)-1} N^{1-2} \|\varphi_g\|_2 \\ &= ChN^{-1} \|\varphi_g\|_2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Além disso, pela coercividade e continuidade da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ temos que existe uma constante C_2 tal que

$$\begin{aligned} C_2 \|\varphi_g\|_0^2 &\leq a(\varphi_g, \varphi_g) \\ &= (g, \varphi_g) \\ &\leq \|g\|_0 \|\varphi_g\|_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Logo, pelas desigualdades (3.18) e (3.20), teremos

$$\|\varphi_g\|_2 \leq (\|g\|_0 + \|\varphi_g\|_0) \leq C \|g\|_0. \quad (3.21)$$

Substituindo as desigualdades (3.19) e (3.21) em (3.17) e usando o Teorema 3.3, obtemos

$$\|v - \Pi_h v\|_0 \leq ChN^{-1} \|v - \Pi_h v\|_1 \leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} \frac{N-1}{N} (N-1)^{-\bar{s}-1} (1 + \|A\|_\mu) \|v\|_{\bar{s}},$$

o que resulta em (3.16). \square

A partir de agora a análise será voltada para o problema discreto (3.5). O esquema

de Leapfrog (2.54) para esse problema pode ser escrito de modo análogo a (2.54):

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} (u_h^{n+1} - u_h^n - \Delta t z_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(u_h^n, v_h) = \frac{1}{2} (f(t_n), v_h)_h \\ \frac{1}{\Delta t} (z_h^{n+1} - z_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(u_h^{n+1} + u_h^n, v_h) = \frac{1}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n), v_h)_h \\ (u_h^0, v_h)_h = (u_0, v_h)_h, \\ (z_h^0, v_h)_h = (u_1, v_h)_h \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (3.22)$$

Como em (2.56), definimos $e_h^n = u_h^n - \Pi_h u(t_n)$ e $g_h^n = z_h^n - \Pi_h \dot{u}(t_n)$. Combinando-se as equações (3.22) e (3.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} (e_h^{n+1} - e_h^n - \Delta t g_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(e_h^n, v_h) &= (\eta_h^n, v_h), \quad v_h \in V_h, \\ \frac{1}{\Delta t} (g_h^{n+1} - g_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(e_h^{n+1} + e_h^n, v_h) &= (\zeta_h^n, v_h), \quad v_h \in V_h, \end{aligned}$$

sendo η_h^n e ζ_h^n os erros de consistência definidos por

$$\begin{aligned} (\eta_h^n, v_h) &= \frac{1}{2} ((f(t_n), v_h)_h - (f(t_n), v_h)), \\ &+ \frac{1}{2} (\ddot{u}(t_{n+1}), v_h) - \frac{1}{\Delta t^2} (\Pi_h [u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t \dot{u}(t_n)], v_h)_h \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (\zeta_h^n, v_h) &= \frac{1}{2} ((f(t_n), v_h)_h - (f(t_n), v_h)) + \frac{1}{2} ((f(t_{n+1}), v_h)_h - (f(t_{n+1}), v_h)) \\ &+ \frac{1}{2} (\ddot{u}(t_{n+1}) + \ddot{u}(t_n), v_h) - \frac{1}{\Delta t} (\Pi_h [\dot{u}(t_{n+1}) - \dot{u}(t_n)], v_h)_h. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comparados com (2.57)-(2.58) nota-se que (3.23)-(3.24) possuem parcelas dependentes da fonte f e a presença de termos da forma $(\Pi_h w, v_h)_h$ em vez de $(\tilde{\Pi}_h w, v_h)$.

Teorema 3.5. *Seja η_h^n definido por (3.23). Se $u \in \mathcal{C}^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}^4(0, T; H)$ e $f \in \mathcal{C}^0(0, T; H^s(\Omega, \mathcal{T}_h))$ com $r > 3/2$, então*

$$\begin{aligned} \|\eta_h^n\|_0 &\leq C \left[h^{\min(N, r)} (N-1)^{-r} \|f(t_n)\|_r + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(3)}(s)\|_0 ds \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(I - \Pi_h) \ddot{u}(s)\|_0 ds \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \|\zeta_h^n\|_0 &\leq C \left[h^{\min(N, r)} (N-1)^{-r} (\|f(t_n)\|_r + \|f(t_{n+1})\|_r) + \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(4)}(s)\|_0 ds \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(I - \Pi_h) \ddot{u}(s)\|_0 ds \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Demonstração. Segue da prova do Lema 2.41 e da equivalência (2.92) que as duas últimas parcelas de (3.23) resultam nas parcelas correspondentes em (3.25). Por outro lado, pelo

Teorema 3.1,

$$(f(t_n), v_h)_h - (f(t_n), v_h) \leq Ch^{\min(N,r)}(N-1)^{-r} \|f(t_n)\|_r \|v_h\|_0, \quad (3.27)$$

resultando na majoração da parcela restante de (3.25). A prova de (3.26) segue o mesmo argumento. \square

Teorema 3.6. *O método de leapfrog (3.22) é estável, no sentido que existe uma constante $\nu > 0$ tal que, se o incremento temporal satisfaz*

$$\Delta t \leq \nu h N^{-2}, \quad (3.28)$$

então vale a desigualdade (2.71):

$$\|e_h^n\|_H \leq C \left[\|e_h^0\|_H + \|g_h^0\|_H + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t \|\eta_h^k\|_H + \|\zeta_h^k\|_H) \right]. \quad (3.29)$$

Demonstração. Como \mathbf{M} e \mathbf{K} são simétricas e positivas definidas, a matriz $(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{K})$ possui uma sequência de M autovalores λ_j positivos e uma sequência de M autovetores ω_j linearmente independentes tais que, [52],

$$\mathbf{K}\omega_j = \lambda_j \mathbf{M}\omega_j, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.30)$$

Além disso, o maior autovalor $\lambda_{max} = \max\{\lambda_j, 1 \leq j \leq M\}$ do problema de autovalor generalizado (3.30) é limitado por

$$\lambda_{max} \leq \tilde{C} \frac{N^4}{h^2}, \quad (3.31)$$

sendo que $\tilde{C} > 0$ não depende de M e N , e h é o menor comprimento obtido dos lados dos elementos $\bar{\Omega}_k$, [56]. Segue de (3.28) e (3.31) que

$$\Delta t^2 \lambda_j \leq \nu^2 \frac{h^2}{N^4} \tilde{C} \frac{N^4}{h^2},$$

e (3.29) é obtida como no Teorema 2.42 com $\nu^2 = 4(1 - \epsilon)/\tilde{C}$, sendo ϵ dada em (2.70). \square

3.2 Erro Ótimo

Teorema 3.7. *Sejam $u \in \mathcal{C}^2(0, T; H^s(\Omega)) \cap \mathcal{C}^4(0, T; L^2(\Omega))$ com $s > 5/2$, $a_{ij} \in H^\mu(\Omega)$ com $\mu > 3/2$, $f \in \mathcal{C}^0(0, T; H^r(\Omega, \mathcal{T}_h))$ com $r > 3/2$, e $\tilde{s} = \min(\mu, s - 1)$. Se vale a condição de estabilidade (3.28), então a seguinte estimativa de erro é válida para todo*

$n > 0$:

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u_h^n\|_0 &\leq C \frac{h^{\min(N, \bar{s})+1}}{(N-1)^{\bar{s}+1}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \left(\|u_0\|_{\bar{s}} + \|u_1\|_{\bar{s}} + \|u(t_n)\|_{\bar{s}} + \|u\|_{C^2(0, T; H^{\bar{s}}(\Omega))}\right) \\ &\quad + C \Delta t^2 \|u\|_{C^4(0, T; L^2(\Omega))} + \frac{h^{\min(N, r)}}{(N-1)^r} \|f\|_{C^0(0, T; H^r(\Omega, \mathcal{T}_h))}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Demonstração: De fato, denotando $u(t_n) = u^n$

$$\begin{aligned} \|u^n - u_h^n\|_0 &\leq \|u^n - \Pi_h u^n\|_0 + \|\Pi_h u^n - u_h^n\|_0 \\ &= \|u^n - \Pi_h u^n\|_0 + \|e_h^n\|_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pelo Teorema 3.6 segue que

$$\|u^n - u_h^n\|_0 \leq \underbrace{\|u^n - \Pi_h u^n\|_0}_{(1)} + \underbrace{\|e_h^0\|_0}_{(2)} + \underbrace{\|g_h^0\|_0}_{(3)} + \underbrace{\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} (\Delta t \|\eta_h^m\|_0 + \|\zeta_h^m\|_0)}_{(4)}.$$

Agora iremos limitar cada um dos termos de (1)-(4). Para majorar o termo (1) basta usar o Corolário 3.4:

$$\|u^n - \Pi_h u^n\|_0 \leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u^n\|_{\bar{s}}. \quad (3.34)$$

Para (2), temos de (3.22) que $u_h^0 = \mathcal{I}u^0$, logo, pelo Corolário 2.55 com $k = 0$ e pelo Corolário 3.4,

$$\begin{aligned} \|e_h^0\|_0 &\leq \|\Pi_h u_0 - u_0\|_0 + \|u_0 - \mathcal{I}u_0\|_0 \\ &\leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u_0\|_{\bar{s}} + Ch^{\min(N+1, s)} N^{-s} \|u_0\|_s \\ &\leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u_0\|_{\bar{s}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Analogamente, temos que o termo (3) pode ser majorado na forma

$$\begin{aligned} \|g_h^0\|_0 &\leq \|\Pi_h u_1 - u_1\|_0 + \|u_1 - \mathcal{I}u_1\|_0 \\ &\leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u_1\|_{\bar{s}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pelo Teorema 3.5,

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|\eta_h^m\|_0 &\leq C \Delta t \left[h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|f(t_m)\|_r + \Delta t \int_0^{t_n} \|u^{(3)}(s)\|_0 ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t_n} \|(I - \Pi_h) \ddot{u}(s)\|_0 ds \right] \\
&\leq C \Delta t \left[h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_r + \Delta t \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(3)}(t)\|_0 \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq T} \|(I - \Pi_h) \ddot{u}(t)\|_0 \right].
\end{aligned}$$

Utilizando em seguida o Corolário 2.55, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|\eta_h^m\|_0 &\leq C \left[\Delta t h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_r + \Delta t^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(3)}(t)\|_0 \right. \\
&\quad \left. + \Delta t h^{\min(N,\tilde{s})+1} (N-1)^{-\tilde{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|\ddot{u}(t)\|_{\tilde{s}} \right]. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

De maneira similar, verifica-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|\zeta_h^m\|_0 &\leq C \left[h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_r + \Delta t^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(4)}(t)\|_0 \right. \\
&\quad \left. + h^{\min(N,\tilde{s})+1} (N-1)^{-\tilde{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|\ddot{u}(t)\|_{\tilde{s}} \right]. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Segue de (3.37)-(3.38), observando a definição (2.11), que o termo (4) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|\eta_h^m\|_0 + \|\zeta_h^m\|_0 &\leq C \left[h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \|f\|_{C^0(0,T;H^r(\Omega,\mathcal{T}_h))} + \Delta t^2 \|u\|_{C^4(0,T;L^2(\Omega))} \right. \\
&\quad \left. + h^{\min(N,\tilde{s})+1} (N-1)^{-\tilde{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u\|_{C^2(0,T;H^{\tilde{s}}(\Omega))} \right]. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

A desigualdade (3.32) fica provada unindo os resultados (3.34)-(3.36) e (3.39), como queríamos. \blacksquare

Observação 3.8. *O resultado acima pode ser adaptado para $\|u(t_n) - u_h^n\|_1$ procedendo como em (3.33) e em seguida utilizando uma desigualdade inversa para estimar $\|e_h^n\|_1$ em termos de $\|e_h^n\|_0$, de modo que os passos de (3.35) a (3.39) são reaproveitados.*

Capítulo 4

Problema com Fronteira de Engquist-Majda

Neste capítulo consideramos a equação da onda acústica bidimensional com coeficientes não constantes e com a condição de fronteira de Engquist e Majda [23]. Esse problema é descrito pelas equações (1.1), (1.2) e (1.4). Novamente vamos considerar $\Omega = I_1 \times I_2$, $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$.

Com o intuito de estabelecer a forma fraca das equações (1.1)-(1.2) com a condição de contorno (1.4) definimos o produto interno contínuo na fronteira

$$\langle u, v \rangle = \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma. \quad (4.1)$$

Também é necessário definir, assim como em (2.91), um produto interno discreto na fronteira de Ω , a saber

$$\langle u, v \rangle_h = \sum_{GLL|_{\partial\Omega}} uv. \quad (4.2)$$

Observação 4.1. *A propriedade de equivalência (2.92) pode ser estendida para os produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$.*

Procedendo como na Seção 2.2.2, obtemos a seguinte formulação variacional: Encontrar $u : (0, T) \rightarrow V$ tal que para todo $t \in (0, T)$ tem-se

$$\begin{cases} (\ddot{u}(t), v) + a(u(t), v) + \langle \dot{u}(t), v \rangle = (f(t), v) & \forall v \in V \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1, \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno definido em (4.1) e $a(\varphi, \psi) = (A\nabla\varphi, \nabla\psi)$ como em (3.2), sendo que valem as condições (3.3)-(3.4). Seguindo os mesmos passos da Seção 3, obtemos a discretização completa do problema 4.3, a saber

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} (u_h^{n+1} - u_h^n - \Delta t z_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(u_h^n, v_h) + \frac{1}{2} \langle z_h^n, v_h \rangle_h = \frac{1}{2} (f^n, v_h)_h \\ \frac{1}{\Delta t} (z_h^{n+1} - z_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(u_h^{n+1} + u_h^n, v_h) + \frac{1}{2} \langle z_h^{n+1} + z_h^n, v_h \rangle_h = \frac{1}{2} (f^{n+1} + f^n, v_h)_h \\ (u_h^0, v_h)_h = (u_0, v_h)_h, \\ (z_h^0, v_h)_h = (u_1, v_h)_h \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (4.4)$$

em que f^n denota $f(t_n)$. Sejam $u^n = u(t_n)$, $e_h^n = u_h^n - \Pi_h u^n$ e $g_h^n = z_h^n - \Pi_h \dot{u}^n$. Subtraindo de ambos os lados da primeira equação de (4.4) o termo

$$\frac{1}{\Delta t^2} (\Pi_h (u^{n+1} - u^n - \Delta t \dot{u}^n), v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(\Pi_h u^n, v_h) + \frac{1}{2} \langle \Pi_h \dot{u}^n, v_h \rangle_h,$$

obté-m-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (e_h^{n+1} - e_h^n - \Delta t g_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(e_h^n, v_h) + \frac{1}{2} \langle g_h^n, v_h \rangle_h \\ = & -\frac{1}{\Delta t^2} (\Pi_h (u^{n+1} - u^n - \Delta t \dot{u}^n), v_h)_h - \frac{1}{2} a_h(\Pi_h u^n, v_h) - \frac{1}{2} \langle \Pi_h \dot{u}^n, v_h \rangle_h + \frac{1}{2} (f^n, v_h)_h. \end{aligned}$$

Segue de (4.3) e da definição do operador elíptico (2.100) que

$$a_h(\Pi_h u^n, v_h) = a(u^n, v_h) = (f^n, v_h) - (\ddot{u}^n, v_h) - \langle \dot{u}^n, v_h \rangle$$

Portanto, a primeira equação de (4.4) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (e_h^{n+1} - e_h^n - \Delta t g_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(e_h^n, v_h) + \frac{1}{2} \langle g_h^n, v_h \rangle_h = (\sigma_h^n, v_h), \\ & (\sigma_h^n, v_h) = -\frac{1}{\Delta t^2} \overbrace{(\Pi_h [u^{n+1} - u^n - \Delta t \dot{u}^n], v_h)_h}^{(1a)} + \frac{1}{2} \overbrace{(\ddot{u}^n, v_h)}^{(2a)} \\ & \quad + \frac{1}{2} \overbrace{[\langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \Pi_h \dot{u}^n, v_h \rangle_h]}^{(a)} + \frac{1}{2} \overbrace{[(f^n, v_h)_h - (f^n, v_h)]}^{(3a)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Analogamente, subtraindo de ambos os lados da segunda equação de (4.4) o termo

$$\frac{1}{\Delta t} (\Pi_h (\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n), v_h)_h + \frac{1}{2} a_h(\Pi_h (u^{n+1} + u^n), v_h) + \frac{1}{2} \langle \Pi_h (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t}(g_h^{n+1} - g_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2}a_h(e_h^{n+1} + e_h^n, v_h) + \frac{1}{2}\langle g_h^{n+1} + g_h^n, v_h \rangle_h \\
= & -\frac{1}{\Delta t}(\Pi_h[\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n], v_h)_h - \frac{1}{2}a_h(\Pi_h[u^{n+1} + u^n], v_h) - \frac{1}{2}\langle \Pi_h[\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n], v_h \rangle_h \\
& + \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n, v_h)_h,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

que junto com

$$\begin{aligned}
a_h(\Pi_h[u^{n+1} + u^n], v_h) &= a(u^{n+1} + u^n, v_h) \\
&= (f^{n+1} + f^n, v_h) - (\ddot{u}^{n+1} + \ddot{u}^n, v_h) - \langle \dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n, v_h \rangle,
\end{aligned}$$

resulta na seguinte expressão para a segunda equação de (4.4):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t}(g_h^{n+1} - g_h^n, v_h)_h + \frac{1}{2}a_h(e_h^{n+1} + e_h^n, v_h) + \frac{1}{2}\langle g_h^{n+1} + g_h^n, v_h \rangle = (\rho_h^n, v_h), \\
(\rho_h^n, v_h) &= -\frac{1}{\Delta t} \overbrace{(\Pi_h[\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n], v_h)_h}^{(1b)} + \frac{1}{2} \overbrace{(\ddot{u}^{n+1} + \ddot{u}^n, v_h)}^{(2b)} \\
& + \frac{1}{2} \overbrace{[\langle \dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \Pi_h(\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h]}^{(b)} + \frac{1}{2} \overbrace{[(f^{n+1} + f^n, v_h)_h - (f^{n+1} + f^n, v_h)]}^{(3b)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Teorema 4.2. *Seja $u \in \mathcal{C}^2(0, T; H^s(\Omega)) \cap \mathcal{C}^4(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\gamma_0 u(t) \in H^s(\partial\Omega)$, com $s > 3$. Sejam $a_{ij} \in H^\mu(\Omega)$ com $\mu > 2$, $f \in \mathcal{C}^0(0, T; H^r(\Omega, \mathcal{T}_h))$ com $r > 3/2$, e $\tilde{s} = \min(\mu, s - 1)$. Se vale a condição de estabilidade (3.28), então a seguinte estimativa de erro é válida para todo $n > 0$:*

$$\begin{aligned}
\|u(t_n) - u_h^n\|_0 &\leq C \frac{h^{\min(N, \tilde{s})+1}}{(N-1)^{\tilde{s}+1}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \left(\|u_0\|_{\tilde{s}} + \|u_1\|_{\tilde{s}} + \|u(t_n)\|_{\tilde{s}} + \|u\|_{\mathcal{C}^2(0, T; H^{\tilde{s}}(\Omega))}\right) \\
&+ C \Delta t^2 \|u\|_{\mathcal{C}^4(0, T; L^2(\Omega))} + \frac{h^{\min(N, r)}}{(N-1)^r} \|f\|_{\mathcal{C}^0(0, T; H^r(\Omega, \mathcal{T}_h))} \\
&+ C \frac{h^{\min(N, \tilde{s})-1}}{(N-1)^{\tilde{s}-2}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\|\dot{u}(t)\|_{s, \partial\Omega} + \|\dot{u}(t)\|_{\tilde{s}}\right] \\
&+ C \frac{h^{\min(N, \tilde{s})-1}}{(N-1)^{\tilde{s}-2}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \Delta t \left[\|\ddot{u}(t)\|_{s, \partial\Omega} + \|\ddot{u}(t)\|_{\tilde{s}}\right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Demonstração. Assim como em (3.33), vamos decompor o erro na seguinte forma:

$$\|u^n - u_h^n\|_0 \leq \underbrace{\|u^n - \Pi_h u^n\|_0}_{(1)} + \underbrace{\|e_h^n\|_0}_{(2)}. \tag{4.9}$$

O termo (1) já foi trabalhado em (3.34), ou seja

$$\|u^n - \Pi_h u^n\|_0 \leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u^n\|_{\bar{s}}. \quad (4.10)$$

Como no Teorema 3.6, segue que

$$\|e_h^n\|_0 \leq \|e_h^0\|_0 + \|g_h^0\|_0 + \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} (\Delta t \|\sigma_h^m\|_0 + \|\rho_h^m\|_0), \quad \forall n \geq 1. \quad (4.11)$$

Em (3.35)-(3.36) conseguimos

$$\|e_h^0\|_0 \leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u_0\|_{\bar{s}}, \quad (4.12)$$

$$\|g_h^0\|_0 \leq Ch^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u_1\|_{\bar{s}}, \quad (4.13)$$

restando encontrar uma limitação para as normas $\|\sigma_h^n\|_0$ e $\|\rho_h^n\|_0$. Começando com $\|\sigma_h^n\|_0$, note de (3.23) e (4.5) que $(1a) + (2a) + (3a) = (\eta_h^n, v_h)$, de modo que

$$(\sigma_h^n, v_h) = (\eta_h^n, v_h) + \frac{1}{2} \overbrace{[\langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \Pi_h \dot{u}^n, v_h \rangle]_h}^{(a)}. \quad (4.14)$$

Somando e subtraindo o termo $\langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h$ em (a), obtemos

$$\langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h + \langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h - \langle \Pi_h \dot{u}^n, v_h \rangle_h = \underbrace{\langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h}_{(i)_a} + \underbrace{\langle (I - \Pi_h) \dot{u}^n, v_h \rangle_h}_{(ii)_a}.$$

Note que o termo $(i)_a$ pode ser limitado usando os teoremas 3.2 e 2.4:

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h &\leq Ch^{\min(N, s)} (N-1)^{-s} \|\dot{u}^n\|_{s, \partial\Omega} \|v_h\|_{0, \partial\Omega} \\ &\leq Ch^{\min(N, s)} (N-1)^{-s} \|\dot{u}^n\|_{s, \partial\Omega} \|v_h\|_1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Além disso, para $u \in V_h \cap H^s(\Omega)$, temos a seguinte desigualdade inversa [26]:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{-s} N^{2s} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.16)$$

Aplicando esta desigualdade ao termo $\|v_h\|_1$, obtém-se a seguinte estimativa para $(i)_a$:

$$\langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h \leq Ch^{\min(N, s)-1} (N-1)^{2-s} \|\dot{u}^n\|_{s, \partial\Omega} \|v_h\|_0. \quad (4.17)$$

Pelos teoremas 2.4, 2.51 e 3.3 e pela desigualdade (4.16) teremos para o termo $(ii)_a$ o seguinte:

$$\begin{aligned}
\langle (I - \Pi_h)\dot{u}^n, v_h \rangle_h &= \langle (\mathcal{I} - \Pi_h)\dot{u}^n, v_h \rangle_h \\
&\leq \langle (\mathcal{I} - \Pi_h)\dot{u}^n, (\mathcal{I} - \Pi_h)\dot{u}^n \rangle_h^{1/2} \langle v_h, v_h \rangle_h^{1/2} \\
&\leq C \|(\mathcal{I} - \Pi_h)\dot{u}^n\|_{L^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C \left(\|(\mathcal{I} - I)\dot{u}^n\|_{L^2(\Gamma)} + \|(I - \Pi_h)\dot{u}^n\|_{L^2(\Gamma)} \right) \|v_h\|_1 \\
&\leq C (\|(\mathcal{I} - I)\dot{u}^n\|_1 + \|(I - \Pi_h)\dot{u}^n\|_1) \|v_h\|_1 \\
&\leq Ch^{-1}N^2 (\|(\mathcal{I} - I)\dot{u}^n\|_1 + \|(I - \Pi_h)\dot{u}^n\|_1) \|v_h\|_0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

O termo que depende de $(\mathcal{I} - I)\dot{u}^n$ pode ser majorado pelo Corolário 2.55, enquanto o Teorema 3.3 será usado para limitar o termo que possui $(I - \Pi_h)\dot{u}^n$. Assim, para $(ii)_a$ obtém-se

$$\langle (I - \Pi_h)\dot{u}^n, v_h \rangle_h \leq Ch^{\min(N, \bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu \right) \|\dot{u}^n\|_{\bar{s}} \|v_h\|_0 \tag{4.19}$$

Devido ao Teorema 3.5 e às desigualdades (4.17) e (4.19), segue de (4.14) que

$$\begin{aligned}
\|\sigma_h^n\|_0 &\leq C \left\{ h^{\min(N, r)} (N-1)^{-r} \|f(t_n)\|_r + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(3)}(s)\|_0 ds \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(I - \Pi_h)\ddot{u}(s)\|_0 ds \\
&\quad \left. + h^{\min(N, \bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu \right) (\|\dot{u}^n\|_{s, \partial\Omega} + \|\dot{u}^n\|_{\bar{s}}) \right\}.
\end{aligned}$$

Efetuando a soma em n , tomando o supremo em t e aplicando o Corolário 2.55 à terceira parcela, obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|\sigma_h^m\|_0 &\leq C \Delta t \left\{ h^{\min(N, r)} (N-1)^{-r} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_r + \Delta t \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(3)}(t)\|_0 ds \right. \\
&\quad + h^{\min(N, \bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|\ddot{u}(t)\|_0 \\
&\quad \left. + h^{\min(N, \bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu \right) \sup_{0 \leq t \leq T} (\|\dot{u}(t)\|_{s, \partial\Omega} + \|\dot{u}(t)\|_{\bar{s}}) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Consideremos agora o termo $\|\rho_h^n\|_0$. Temos de (3.24) e (4.7) que $(1b) + (2b) + (3b) =$

(ζ_h^n, v_h) , de modo que

$$(\rho_h^n, v_h) = (\zeta_h^n, v_h) + \frac{1}{2} \overbrace{[\langle \dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \Pi_h(\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h]}^{(b)}. \quad (4.21)$$

Somando e subtraindo o termo $\langle (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h$ em (b), obtemos

$$\underbrace{\langle (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle - \langle (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h}_{(i)_b} + \underbrace{\langle (I - \Pi_h)(\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h}_{(ii)_b}. \quad (4.22)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que

$$\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds, \quad (4.23)$$

logo

$$\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n = 2\dot{u}^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds,$$

e $(i)_b$ em (4.22) fica igual a

$$2 \left(\langle \dot{u}^n, v_h \rangle - \langle \dot{u}^n, v_h \rangle_h \right) + \left(\left\langle \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds, v_h \right\rangle - \left\langle \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds, v_h \right\rangle_h \right), \quad (4.24)$$

de modo que o primeiro termo desta soma é igual a $(i)_a$, que é majorado conforme (4.17).

Já o segundo termo merece um pouco mais de atenção. De fato,

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds, v_h \right\rangle - \left\langle \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds, v_h \right\rangle_h &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle \ddot{u}(s), v_h \rangle - \langle \ddot{u}(s), v_h \rangle_h ds \\ &\stackrel{\text{Teo.3.2}}{\leq} C \int_{t_n}^{t_{n+1}} h^{\min(N,s)} (N-1)^{-s} \|\ddot{u}(s)\|_{s,\partial\Omega} \|v_h\|_{0,\partial\Omega} ds \\ &\leq Ch^{\min(N,s)} (N-1)^{-s} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\ddot{u}(s)\|_{s,\partial\Omega} ds \|v_h\|_1 \\ &\leq Ch^{\min(N,\bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\ddot{u}(s)\|_{s,\partial\Omega} ds \|v_h\|_0. \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos a seguinte estimativa para $(i)_b$:

$$\begin{aligned} &\langle (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle - \langle (\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h \\ &\leq Ch^{\min(N,\bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left[\|\dot{u}^n\|_{s,\partial\Omega} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\ddot{u}(s)\|_{s,\partial\Omega} ds \right] \|v_h\|_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Resta agora limitar o termo $(ii)_b$. Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\langle (I - \Pi_h)(\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h = 2 \langle (I - \Pi_h)\dot{u}^n, v_h \rangle_h + \left\langle (I - \Pi_h) \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds \right], v_h \right\rangle_h.$$

A primeira parcela corresponde ao termo $(ii)_a$, limitado conforme (4.19). Além disso, pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \left\langle (I - \Pi_h) \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(s) ds \right], v_h \right\rangle_h &= \left\langle \int_{t_n}^{t_{n+1}} (I - \Pi_h)\ddot{u}(s) ds, v_h \right\rangle_h \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle (I - \Pi_h)\ddot{u}(s), v_h \rangle_h ds, \end{aligned} \quad (4.26)$$

sendo que, analogamente a (4.18),

$$\langle (I - \Pi_h)\ddot{u}(s), v_h \rangle_h \leq Ch^{-1}N^2 (\|(\mathcal{I} - I)\ddot{u}(s)\|_1 + \|(I - \Pi_h)\ddot{u}(s)\|_1) \|v_h\|_0.$$

Novamente, $(\mathcal{I} - I)$ pode ser majorado usando o Corolário 2.55, enquanto o Teorema 3.3 será usado para limitar $(I - \Pi_h)$. Assim, para $(ii)_b$ obtém-se

$$\begin{aligned} &\langle (I - \Pi_h)(\dot{u}^{n+1} + \dot{u}^n), v_h \rangle_h \\ &\leq Ch^{\min(N, \bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \left[\|\dot{u}^n\|_{\bar{s}} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\ddot{u}(s)\|_{\bar{s}} ds \right] \|v_h\|_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, pelas desigualdades (3.26), (4.25) e (4.27), a igualdade (4.21) permite escrever

$$\begin{aligned} \|\rho_h^n\|_0 &\leq C \left\{ h^{\min(N, r)} (N-1)^{-r} (\|f(t_n)\|_r + \|f(t_{n+1})\|_r) + \Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{(4)}(s)\|_0 ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(I - \Pi_h)\ddot{u}(s)\|_0 ds \right. \\ &\quad \left. + h^{\min(N, \bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \left[\|\dot{u}^n\|_{s, \partial\Omega} + \|\dot{u}^n\|_{\bar{s}} \right] \right. \\ &\quad \left. + h^{\min(N, \bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\ddot{u}(s)\|_{s, \partial\Omega} + \|\ddot{u}(s)\|_{\bar{s}} ds \right] \right\}. \end{aligned}$$

Procedendo como em (4.20), tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \|\rho_h^m\|_0 &\leq C \left\{ h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_r + \Delta t^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(4)}(t)\|_0 \right. \\
&\quad + h^{\min(N,\bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|\ddot{u}(t)\|_0 \\
&\quad + h^{\min(N,\bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\|\dot{u}(t)\|_{s,\partial\Omega} + \|\dot{u}(t)\|_{\bar{s}} \right] \\
&\quad \left. + h^{\min(N,\bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \Delta t \left[\|\ddot{u}(t)\|_{s,\partial\Omega} + \|\ddot{u}(t)\|_{\bar{s}} \right] \right\}. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Segue de (4.20) e (4.28), em analogia com (3.39), que

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \Delta t \|\eta_h^m\|_0 + \|\zeta_h^m\|_0 &\leq C \left\{ h^{\min(N,r)} (N-1)^{-r} \|f\|_{C^0(0,T;H^r(\Omega,\mathcal{T}_h))} + \Delta t^2 \|u\|_{C^4(0,T;L^2(\Omega))} \right. \\
&\quad + h^{\min(N,\bar{s})+1} (N-1)^{-\bar{s}-1} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \|u\|_{C^2(0,T;H^{\bar{s}}(\Omega))} \\
&\quad + h^{\min(N,\bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\|\dot{u}(t)\|_{s,\partial\Omega} + \|\dot{u}(t)\|_{\bar{s}} \right] \\
&\quad \left. + h^{\min(N,\bar{s})-1} (N-1)^{2-\bar{s}} \left(1 + \|A\|_\mu\right) \sup_{0 \leq t \leq T} \Delta t \left[\|\ddot{u}(t)\|_{s,\partial\Omega} + \|\ddot{u}(t)\|_{\bar{s}} \right] \right\}. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Juntando (4.10)-(4.13) e (4.29), obtemos a desigualdade desejada. \square

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Este capítulo trata da validação numérica das estimativas de erros obtidas para os problemas (1.1)-(1.3) e (1.1)-(1.2),(1.4). Além de validar as estimativas, os experimentos numéricos aqui apresentados servirão para ilustrar a aplicabilidade do método de elementos espectrais a estes problemas.

Em todos os experimentos, foram utilizadas malhas quadradas com o mesmo número de elementos em cada direção, e meios isotrópicos (ou seja $A(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\mathbf{I}$). Os erros nas normas L^2 e H^1 são aproximados pela quadratura gaussiana com 64×64 pontos de integração em cada elemento. Em todos os experimentos, o erro foi avaliado em $T = 1$.

Vários dos exemplos a seguir utilizaram condições de Dirichlet não-homogêneas, mas por meio de uma substituição simples (veja [44], eq. (2.6)) pode-se formular um problema associado com condições de Dirichlet não-homogêneas, para o qual valem as estimativas obtidas neste trabalho.

5.1 Equação da onda com coeficientes constantes

Nesta seção reproduzimos os resultados obtidos por Rong e Xu [44] para o problema (2.31) da equação da onda com coeficientes constantes. Para tanto, escolhemos a fonte $f(\mathbf{x}, t) = 2\pi^2 \cos[\pi(t - x_1)] \sin[\pi(t - x_2)]$ em (1.1) de modo que a solução exata é

$$u(\mathbf{x}, t) = \sin(\pi(x_1 - t)) \cos(\pi(x_2 - t)). \quad (5.1)$$

Na Figura 5.1, utiliza-se apenas $N_e = 1$ elemento na triangulação, e o grau polinomial

N varia de 3 até 13, como em [44, Fig. 1]. Cabe observar que Rong e Xu aproximam o erro na norma L^2 pela quadratura GLL com $N + 1 \times N + 1$ pontos de integração (ou seja, a mesma quadratura usada no cálculo das matrizes de massa e rigidez). Apesar desta diferença na forma de calcular os erros, os resultados da Figura 5.1(a) e da Figura 1 em [44] são similares.

Note que o erro da discretização temporal gera uma “barreira” (uma cota inferior) o decaimento do erro em N , e que esta cota diminui quando passamos de $\Delta t = 10^{-2}$ para $\Delta t = 10^{-3}$; esta cota inferior não é mais observada ao passarmos de $\Delta t = 10^{-3}$ para $\Delta t = 10^{-5}$.

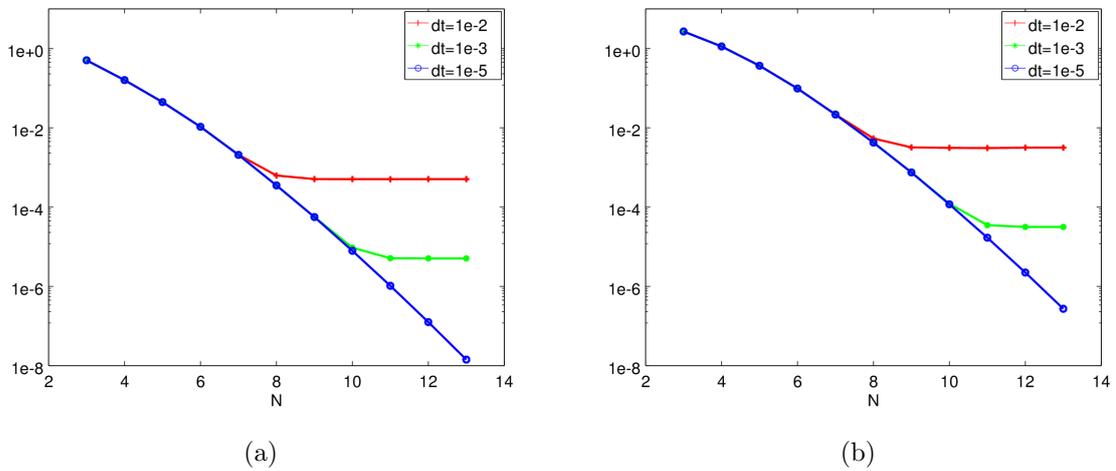


Figura 5.1: Problema de Rong-Xu: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do grau N .

Já na Figura 5.2, observa-se o decaimento do erro à medida que aumenta o número de elementos em cada direção, para um incremento temporal $\Delta t = 10^{-5}$ e grau polinomial $N = 2, 4, 6$. A taxa de convergência numérica foi aproximadamente $O(h^{N+1})$ na norma L^2 , conforme previsto pela teoria e também observado em [44, 55]. Além disso, a convergência observada na norma H^1 foi $O(h^N)$. Assim como na Figura 5.1, o decaimento dos erros é limitado por uma cota interior aparentemente causada pela discretização temporal.

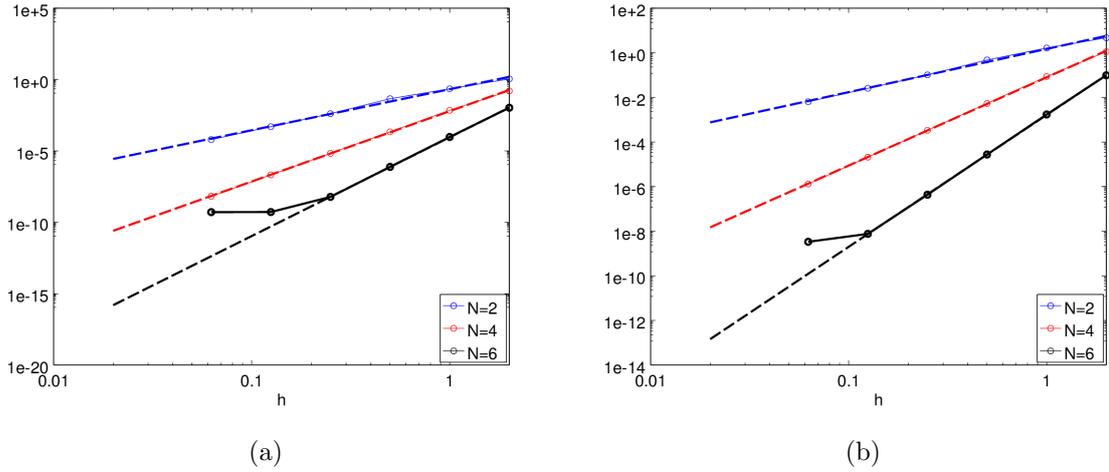


Figura 5.2: Problema de Rong-Xu: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do tamanho do elemento h . Em todos os casos, $\Delta t = 10^{-5}$. As linhas tracejadas têm inclinações 2.8753 ($N = 2$), 4.934 ($N = 4$) e 6.9222 ($N = 6$) na Fig. 5.2(a), e 1.9388 ($N = 2$), 3.9608 ($N = 4$) e 5.9194 ($N = 6$) na Fig. 5.2(b).

5.2 Equação da onda com coeficientes variáveis

Em seguida, vamos permitir que o coeficiente A dependa de \mathbf{x} . No primeiro experimento, vamos tomar

$$A(\mathbf{x}) = \cos(x_1 - x_2)\mathbf{I}, \quad (5.2)$$

e escolher a fonte $f(\mathbf{x}, t) = \cos(t - x_1 - x_2)[2 \cos(x_1 - x_2) - 1]$ de modo que a solução seja

$$u(\mathbf{x}, t) = \cos(t - x_1 - x_2). \quad (5.3)$$

As figuras 5.3 e 5.4 correspondem às figuras 5.1 e 5.2 do exemplo anterior. Os resultados foram semelhantes a esse exemplo e novamente a taxa de convergência numérica se aproxima de $O(h^{N+1})$ em L^2 e $O(h^N)$ em H^1 à medida que o grau N aumenta.

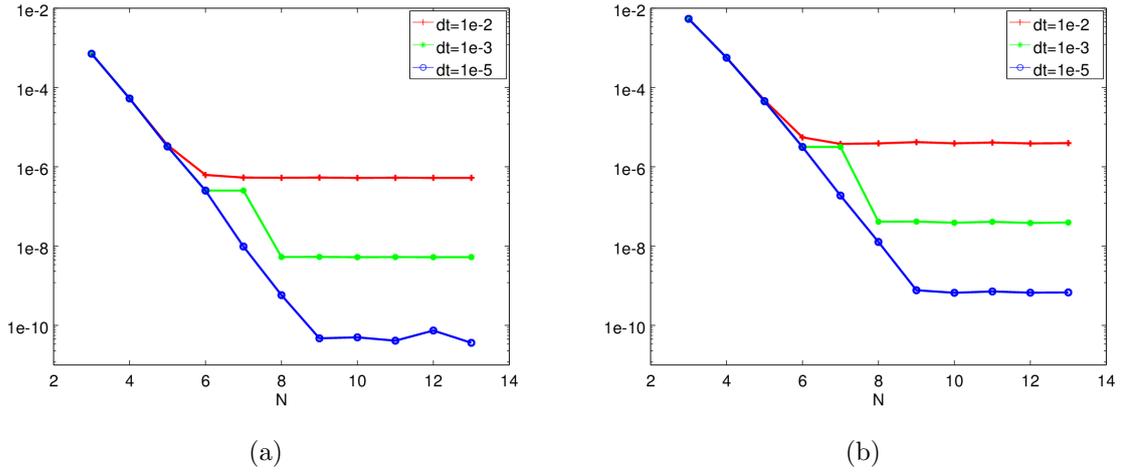


Figura 5.3: Problema com coeficiente suave (5.2): erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do grau N .

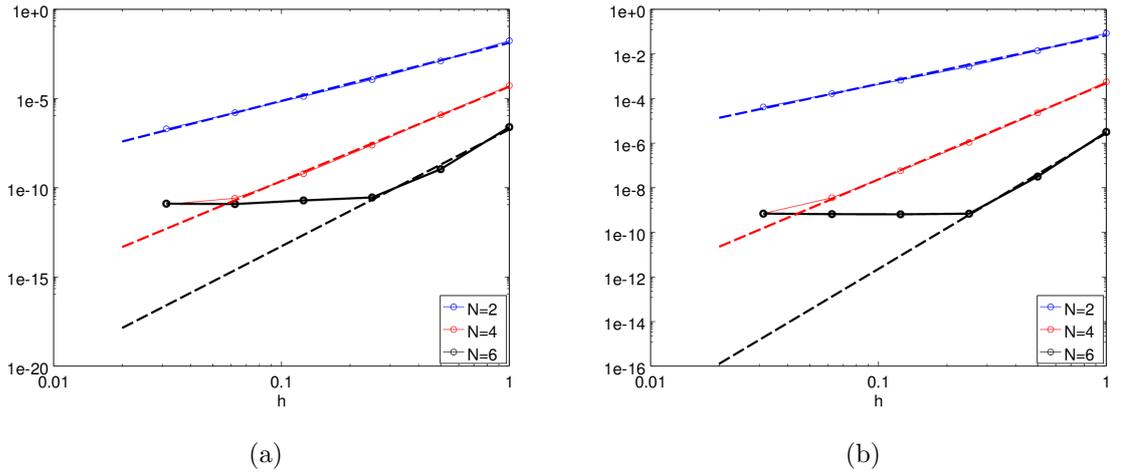


Figura 5.4: Problema com coeficiente suave (5.2): erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do tamanho do elemento h . Em todos os casos, $\Delta t = 10^{-5}$. As linhas tracejadas têm inclinações 3.2562 ($N = 2$), 5.2896 ($N = 4$) e 6.5511 ($N = 6$) na Fig. 5.4(a), e 2.1769 ($N = 2$), 4.3173 ($N = 4$) e 6.085 ($N = 6$) na Fig. 5.4(b).

No próximo experimento, vamos considerar um coeficiente descontínuo:

$$A(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_1 \mathbf{I}, & x_2 \leq -x_1 / \tan(\theta), \\ A_2 \mathbf{I}, & x_2 > -x_1 / \tan(\theta). \end{cases} \quad (5.4)$$

Para este exemplo, vamos considerar a solução exata do tipo onda plana:

$$u(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{A_1+A_2}{2A_1} \cos(\kappa x - \omega t) + \frac{A_1-A_2}{2A_1} \cos(\kappa x + \omega t), & x_2 \leq -x_1/\tan(\theta), \\ \cos(\kappa x - \omega t), & x_2 > -x_1/\tan(\theta). \end{cases} \quad (5.5)$$

com termo fonte $f(\mathbf{x}, t) = 0$.

Novamente as figuras 5.5 e 5.6 e 5.7 e 5.8, com $\theta = 30^\circ$ e $\theta = 0^\circ$ respectivamente, correspondem às figuras 5.1 e 5.2. A falta de regularidade do coeficiente $A(\mathbf{x})$ em (5.4) fez com as taxas de convergência caíssem para $O(h)$ em L^2 e $O(h^{1/2})$ em H^1 para todos os graus polinomiais, embora ainda se observe que o erro decai com o grau polinomial N .

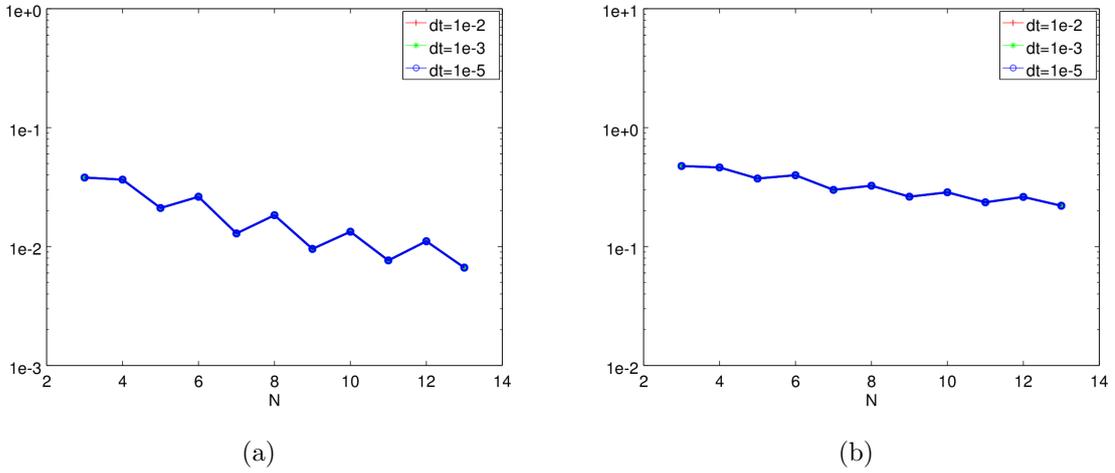


Figura 5.5: Problema com coeficiente descontínuo (5.4) com $\theta = 30^\circ$: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do grau N .

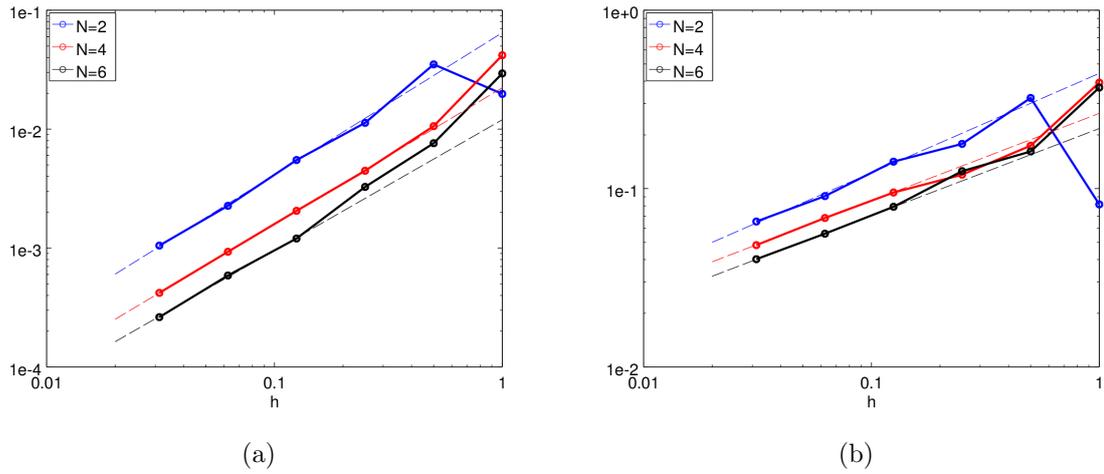


Figura 5.6: Problema com coeficiente descontínuo (5.4) com $\theta = 30^\circ$: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do tamanho do elemento h . Em todos os casos, $\Delta t = 10^{-5}$. As linhas tracejadas têm inclinações 1.2792 ($N = 2$), 1.2533 ($N = 4$) e 1.3037 ($N = 6$) na Fig. 5.6(a), e 0.56956 ($N = 2$), 0.53876 ($N = 4$) e 0.55598 ($N = 6$) na Fig. 5.6(b).

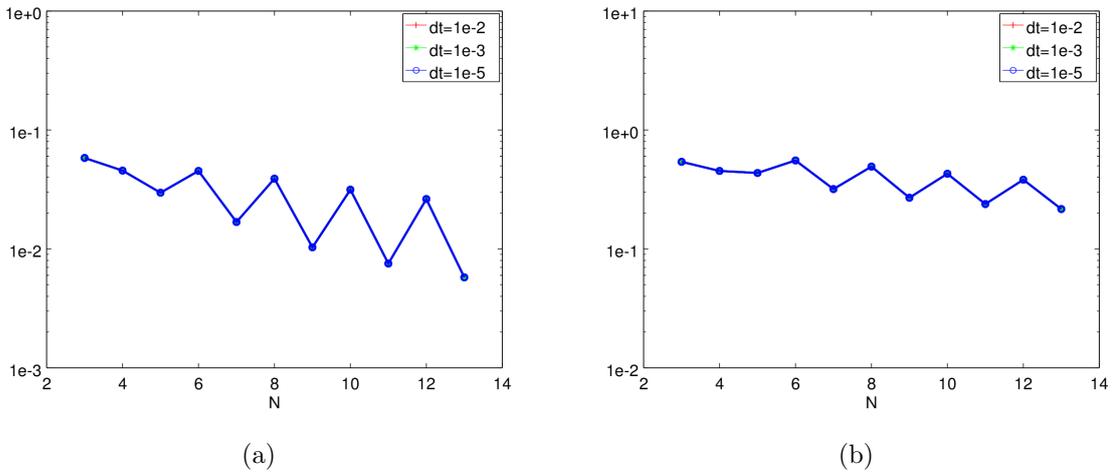
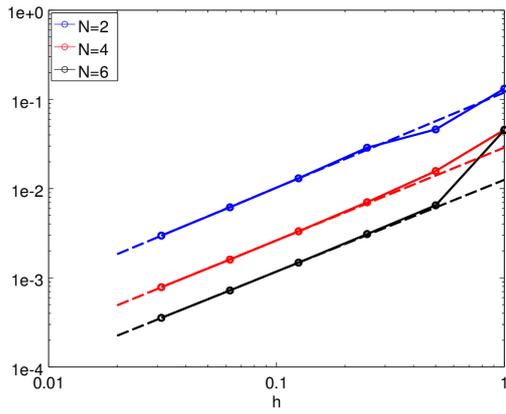
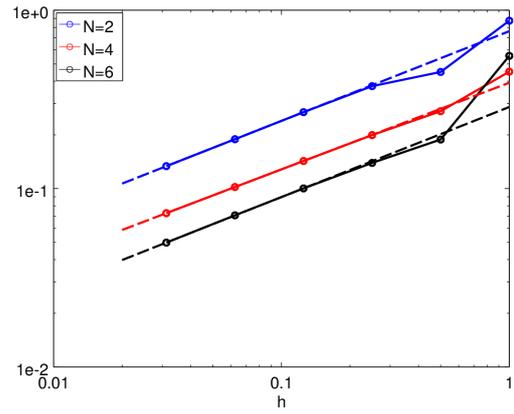


Figura 5.7: Problema com coeficiente descontínuo (5.4) com $\theta = 0^\circ$: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do grau N .



(a)



(b)

Figura 5.8: Problema com coeficiente descontínuo (5.4) com $\theta = 0^\circ$: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do tamanho do elemento h . Em todos os casos, $\Delta t = 10^{-5}$. As linhas tracejadas têm inclinações 1.0667 ($N = 2$), 1.0406 ($N = 4$) e 1.0283 ($N = 6$) na Fig. 5.6(a), e 0.50272 ($N = 2$), 0.48567 ($N = 4$) e 0.50483 ($N = 6$) na Fig. 5.6(b).

5.3 Equação da onda com condições de Engquist-Majda

Neste último exemplo, vamos considerar a equação da onda com coeficientes variáveis da forma

$$A(\mathbf{x}) = \left((1 - x_1^2)(1 - x_2^2) + \frac{1}{7} \right) \mathbf{I} \quad (5.6)$$

e condições de Engquist-Majda (1.4). A solução exata escolhida é

$$u(\mathbf{x}, t) = (x_1 x_2)^7 e^{-t}, \quad (5.7)$$

com termo fonte

$$f(\mathbf{x}, t) = (x_1 x_2)^5 e^{-t} [56(x^4 y^2 + x^2 y^4) - 113x^2 y^2 + 48(x^2 + y^2) - 42(x^4 + y^4)].$$

As figuras 5.9 e 5.10 correspondem às figuras 5.1 e 5.2. A ordem de convergência para o caso $N = 2$, $N = 4$ e $N = 6$ foi a mesma que nos experimentos com condições de Dirichlet. No entanto, a taxa de convergência numérica está melhor que a taxa de convergência teórica descrita no Capítulo 4. Isto indica que a teoria pode ser melhorada, ou que o exemplo utilizado exibiu superconvergência. Em ambas as situações, testes em mais exemplos se fazem necessários.

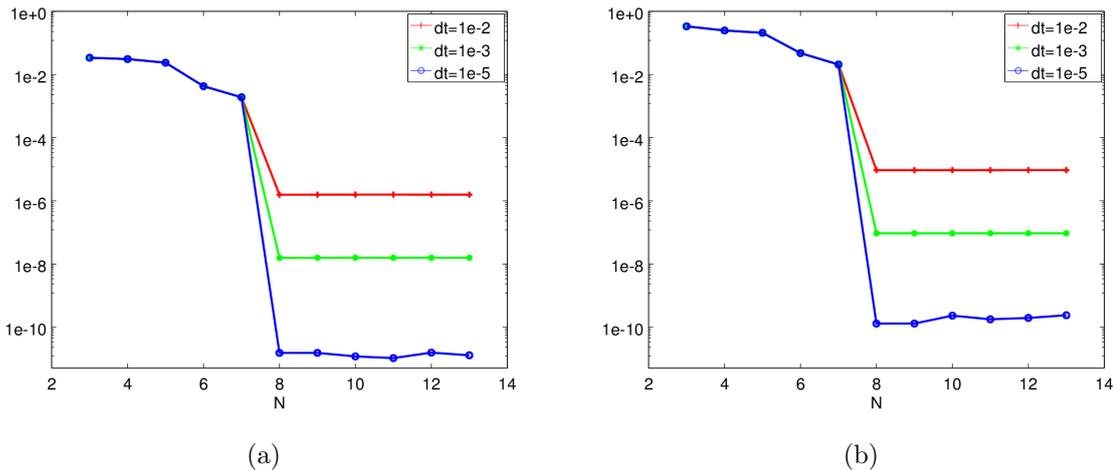


Figura 5.9: Problema com condições de Engquist-Majda: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do grau N .

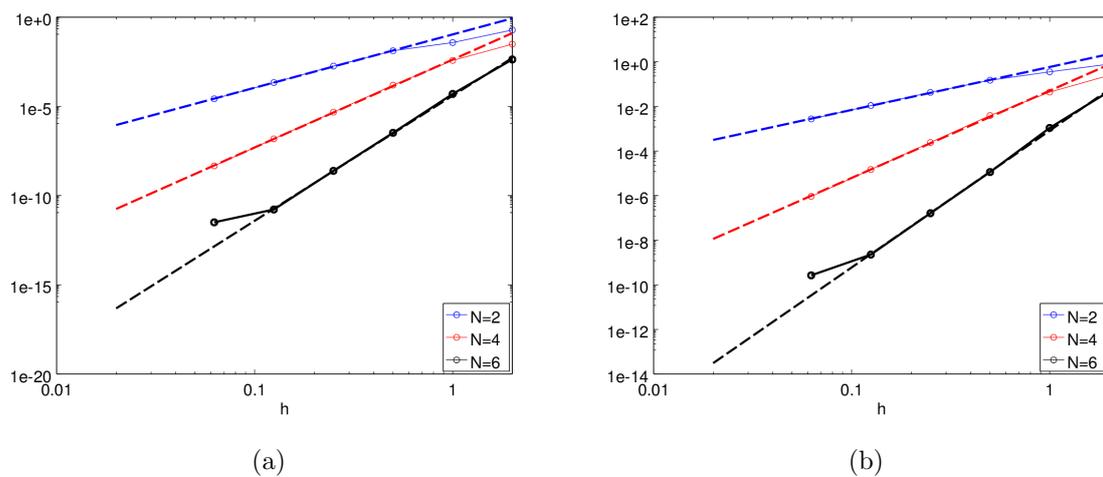


Figura 5.10: Problema com condições de Engquist-Majda: erro na norma L^2 (a) e H^1 (b) em função do tamanho do elemento h . Em todos os casos, $\Delta t = 10^{-5}$. As linhas tracejadas têm inclinações 2.9895 ($N = 2$), 4.9278 ($N = 4$) e 7.0178 ($N = 6$) na Fig. 5.10(a), e 1.9254 ($N = 2$), 3.9119 ($N = 4$) e 6.135 ($N = 6$) na Fig. 5.10(b).

Conclusões

Neste trabalho foi feita uma análise geral da equação da onda acústica bidimensional com coeficientes variáveis, primeiro com condições de Dirichlet e depois com condições do tipo Engquist-Majda.

A solução aproximada foi discretizada no espaço por uma das versões hp do Método de Elementos Finitos, o Método de Elementos Espectrais (SEM), que utiliza os pontos de integração de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) e conduz a métodos iterativos explícitos no tempo. A discretização no tempo foi feita usando o esquema de diferenças finitas leapfrog que garante consistência de segunda ordem e é condicionalmente estável.

No problema com fronteira de Dirichlet foi obtida a estimativa de erro ótima no tempo e no espaço com a seguinte ordem de convergência

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_0 \leq O\left(h^{\min(N, \tilde{s})+1}(N-1)^{-\tilde{s}-1} + (\Delta t)^2\right), \quad \tilde{s} = \min(\mu, s-1),$$

em que μ, s representam a regularidade do coeficiente A e da solução u respectivamente. Para o problema com fronteira de Engquist e Majda, a taxa de convergência foi abaixo da esperada com respeito a h e a N , em função dos últimos termos da desigualdade (4.8).

Foram elaborados algoritmos baseados nos métodos usados que corroboraram as estimativas de erro estabelecidas. Esses algoritmos foram aplicados a exemplos diferentes e obtiveram, no caso da fronteira de Dirichlet, a convergência esperada pela teoria. Para a fronteira de Engquist e Majda, foi obtida uma ordem de convergência superior à prevista pelos resultados teóricos apresentados. Neste caso, outros testes serão necessários.

Uma das principais dificuldades superadas foi a adequação de resultados estabelecidos para EDP's com coeficientes constantes para coeficientes variáveis. Basicamente, resulta desta tese a generalização de uma classe de resultados sobre estimativas de erro para a equação da onda acústica bidimensional. A motivação para esse assunto surgiu da carência de trabalhos mais abrangentes na esfera das estimativas de erro. Os trabalhos conhecidos

tratam apenas da análise do erro para casos particulares dos que foram estabelecidos e provados nesta tese. A Tabela 5.1 permite uma melhor compreensão sobre qual foi a contribuição deste trabalho .

A partir das conclusões e resultados oriundos desta tese, pode-se especular sobre uma continuidade para esta pesquisa. Uma possibilidade é analisar outros tipos de condições de contorno não-reflexivas de ordem superior, como a adotada por Sheen em [46] que considerou a equação homogênea da onda acústica com coeficientes constantes.

Outra alternativa são as chamadas Camadas Perfeitamente Casadas, ou PML (Perfect Match Layer), que são baseadas numa camada absorvente artificial envolvendo a região de simulação, [21, 31]. Um outro caminho a trilhar seria analisar os problemas abordados nesta tese adotando malhas não-retangulares. Maday e Ronquist em [35] e Durufle, Grob e Joly, em [22] usam esse tipo de malha, e esses são trabalhos que poderiam ser usados como direcionamento inicial.

Análise	Coeficientes Constantes	Coeficientes Variáveis
h	Durufle et al [22], Dupont [20]	Cowsar et al [15]
p		Maday e Ronquist [35]
$h - p$	Rong e Xu [44], Zampieri e Pavarino [56]	Capítulo 3, Capítulo 4

Tabela 5.1: Fronteira de Dirichlet e de Enguist e Majda

Referências Bibliográficas

- [1] AGRANOVICH, M. S. *Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in smooth and Lipschitz domains*. Cham: Springer, 2015.
- [2] AUBIN, J. P. Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods. *Ann. Scuola Norm-Sci.*, v. 21, n. 4, p. 599–637, 1967.
- [3] BABUŠKA, I. The p and hp versions of the finite element method: The state of the art. In: DWOYER, D. L.; HUSSAINI, M. Y.; VOIGT, R. G. (Eds.) *Finite Elements: Theory and Application*. New York: Springer, 1988. p. 199–239.
- [4] BABUŠKA, I.; SURI, M. The hp version of the finite element method with quasiuniform meshes. *RAIRO-Math. Model. Num.*, v. 21, n. 2, p. 199–238, 1987.
- [5] BABUSKA, I.; SZABO, B. A.; KATZ, I. N. The p -version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 18, n. 3, p. 515–545, 1981.
- [6] BERNARDI, C.; MADAY, Y. Spectral methods. In: CIARLET, P. G.; LIONS, J. L. (Eds.) *Techniques of scientific computing (Part 2)*. Amsterdam: Elsevier, 1997. v. 5 of *Handbook of numerical analysis*, p. 209–485.
- [7] BRADJI, A.; FUHRMANN, J. Some new error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations using the Newmark method. *Math. Bohemica*, v. 139, n. 2, p. 125–136, 2014.
- [8] BRENNER, S.; SCOTT, R. *The mathematical theory of finite element methods*. New York: Spring-Verlag, 1994.
- [9] CANUTO, C.; QUARTERONI, A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. *Math. Comp.*, v. 38, n. 157, p. 67–86, 1982.
- [10] CHALJUB, E.; KOMATITSCH, D.; VILOTTE, J.-P.; CAPDEVILLE, Y.; VALETTE, B.; FESTA, G. Spectral element analysis in seismology. In: WU, R.-S.; MAUPIN, V. (Eds.) *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Media*. New York: Elsevier, 2007. v. 48 of *Advances in Geophysics*, p. 365–419.

- [11] CHANG, S.-C.; WANG, X.-Y.; CHOW, C.-Y. The space-time conservation element and solution element method: a new high-resolution and genuinely multidimensional paradigm for solving conservation laws. *J. Comput. Phys.*, v. 156, n. 1, p. 89–136, 1999.
- [12] CHUNG, E. T.; YU, T. F. Staggered-grid spectral element methods for elastic wave simulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 285, p. 132–150, 2015.
- [13] CIARLET, P. *The finite element method for elliptic problems*. Philadelphia: SIAM, 2002.
- [14] CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, 1960.
- [15] COWSAR, L. C.; DUPONT, T. F.; WHEELER, M. F. A priori estimates for mixed finite element approximations of second-order hyperbolic equations with absorbing boundary conditions. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 33, n. 2, p. 492–504, 1996.
- [16] CRISTINI, P.; KOMATITSCH, D. Some illustrative examples of the use of a spectral-element method in ocean acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 131, n. 3, p. EL229–EL235, 2012.
- [17] CUPILLARD, P.; DELAUAUD, E.; BURGOS, G.; FESTA, G.; VILOTTE, J.-P.; CAPDEVILLE, Y.; MONTAGNER, J.-P. RegSEM: a versatile code based on the spectral element method to compute seismic wave propagation at the regional scale. *Geophysical Journal International*, v. 188, n. 3, p. 1203–1220, 2012.
- [18] DAVIS, P.; RABINOWITZ, P. *Methods of numerical integration*. 2nd. ed. San Diego: Academic Press, 1984.
- [19] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T.; BADE, W. G.; BARTLE, R. G. *Linear operators*. New York: Wiley-Interscience, 1971.
- [20] DUPONT, T. L^2 -estimates for Galerkin methods for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 10, n. 5, p. 880–889, 1973.
- [21] DURU, K.; KREISS, G. A well-posed and discretely stable perfectly matched layer for elastic wave equations in second order formulation. *Communications in Computational Physics*, v. 11, n. 5, p. 1643 – 1672, 2012.
- [22] DURUFLE, M.; GROB, P.; JOLY, P. Influence of Gauss and Gauss-Lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. *Numer. Part. Differ. Equat.*, v. 25, n. 3, p. 526–551, 2009.

- [23] ENGQUIST, B.; MAJDA, A. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, v. 31, p. 629–651, 1977.
- [24] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [25] FISCHER, P. F.; PATERA, A. T. Parallel spectral element solution of the Stokes problem. *J. Comput. Phys.*, v. 92, n. 2, p. 380–421, 1991.
- [26] GEORGOULIS, E. Inverse-type estimates on hp-finite element spaces and applications. *Mathematics of Computation*, v. 77, n. 261, p. 201–219, 2008.
- [27] GRISVARD, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Boston: Pitman Publishing Inc, 1985.
- [28] JOHNSON, C. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [29] KOMATITSCH, D.; TROMP, J. Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.*, v. 139, n. 3, p. 806–822, 1999.
- [30] KOMATITSCH, D.; VILOTTE, J.-P. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, v. 88, n. 2, p. 368–392, 1998.
- [31] KOMATITSCH, D.; TROMP, J. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, v. 154, n. 1, p. 146–153, 2003.
- [32] KONDRAT’EV, V. A.; OLEINIK, O. A. Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains. *Russ. Math. Surv.*, v. 38, n. 2, p. 1, 1983.
- [33] KUDELA, P. Parallel implementation of spectral element method for Lamb wave propagation modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 106, p. 413–429, 2016.
- [34] LIONS, J.; MAGENES, E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
- [35] MADAY, Y.; RØNQUIST, E. Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 80, n. 1-3, p. 91–115, 1990.

- [36] MAZZIERI, I.; RAPETTI, F. Dispersion analysis of triangle-based spectral element methods for elastic wave propagation. *Numerical Algorithms*, v. 60, n. 4, p. 631–650, 2012.
- [37] MEDEIROS, L. A. J.; MILLA-MIRANDA, M. A. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.
- [38] MOZOLEVSKI, I.; BÖSING, P.; SCHUH, L. I. A. Método de Galerkin descontínuo com penalização de fluxos para a equação reação-difusão. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 8, n. 2, p. 287–297, 2007.
- [39] PATERA, A. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, v. 54, n. 3, p. 468–488, 1984.
- [40] PAVARINO, L. F. *Domain decomposition algorithms for the p-version finite element method for elliptic problems*. Tese de Doutorado, New York University, 1992.
- [41] PRIOLO, E.; CARCIONE, J.; SERIANI, G. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.*, v. 95, n. 2, p. 681–693, 1994.
- [42] QUARTERONI, A.; TAGLIANI, A.; ZAMPIERI, E. Generalized Galerkin approximations of elastic waves with absorbing boundary conditions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 163, n. 1, p. 323–341, 1998.
- [43] RAVIART, P.-A.; THOMAS, J.-M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Paris: Masson, 1988.
- [44] RONG, Z.; XU, C. Numerical approximation of acoustic waves by spectral element methods. *Appl. Numer. Math.*, v. 58, n. 7, p. 999–1016, 2008.
- [45] SERIANI, G.; PRIOLO, E. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elem. Anal. Des.*, v. 16, n. 3–4, p. 337–348, 1994.
- [46] SHEEN, D. Second-order absorbing boundary conditions for the wave equation in a rectangular domain. *Math. Comput.*, v. 61, n. 204, p. 595–606, 1993.
- [47] SZABO, B.; MEHTA, A. p -convergent finite element approximations in fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 12, n. 3, p. 551–560, 1978.
- [48] SZABO, B. A.; BABUŠKA, I. *Finite element analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [49] TONG, P.; CHEN, C.-W.; KOMATITSCH, D.; BASINI, P.; LIU, Q. High-resolution seismic array imaging based on an SEM-FK hybrid method. *Geophysical Journal International*, v. 197, n. 1, p. 369–395, 2014.

- [50] TURNER, M. J.; CLOUGH, R. J.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronaut. Sci.*, 1956.
- [51] WANG, X.; CAI, M. FLAC/SPECFEM2D coupled numerical simulation of wavefields near excavation boundaries in underground mines. *Computers & Geosciences*, v. 96, p. 147–158, 2016.
- [52] WILKINSON, J. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford: Clarendon Press, 1965.
- [53] WU, Z.-J.; LI, F.-M.; WANG, Y.-Z. Study on vibration characteristics in periodic plate structures using the spectral element method. *Acta Mechanica*, v. 224, n. 5, p. 1089–1101, 2013.
- [54] XIAO, D.; HAN, Q.; LIU, Y.; LI, C. Guided wave propagation in an infinite functionally graded magneto-electro-elastic plate by the Chebyshev spectral element method. *Composite Structures*, v. 153, p. 704–711, 2016.
- [55] ZAMPIERI, E.; PAVARINO, L. F. Approximation of acoustic waves by explicit Newmark's schemes and spectral element methods. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 185, n. 2, p. 308–325, 2006.
- [56] ZAMPIERI, E.; PAVARINO, L. F. An explicit second order spectral element method for acoustic waves. *Adv. Comput. Math.*, v. 25, n. 4, p. 381–401, 2006.