

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CIBELE CORNEJO JACINTO PORTELA

ASSOCIAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A UM ALGORITMO
HÍBRIDO PARA ANÁLISE INVERSA DE ELASTICIDADE EM DUTOS

CURITIBA

2017

CIBELE CORNEJO JACINTO PORTELA

ASSOCIAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A UM ALGORITMO
HÍBRIDO PARA ANÁLISE INVERSA DE ELASTICIDADE EM DUTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Mestre, Setor de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda

Coorientador: Profa. Dra. Amanda Jarek

CURITIBA

2017

P843a Portela, Cibele Cornejo Jacinto
Associação do método dos elementos de contorno a um algoritmo híbrido
para análise inversa de elasticidade em dutos / Cibele Cornejo Jacinto
Portela. – Curitiba, 2017.
88 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências e
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia, 2017.

Orientador: Luiz Alkimin de Lacerda – Co-orientador: Amanda Jareck
Bibliografia: p. 86-88.

1. Métodos numéricos. 2. Método de Newton-Raphson . 3. Algoritmo
genético. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lacerda, Luiz Alkimin de.
III. Amanda, Jareck. IV. Título.

CDD: 005.136



Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Tecnologia / Setor de Ciências Exatas
Departamento de Construção Civil / Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia –
PPGMNE/UFPR.



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos Em Engenharia da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Cibele Cornejo Jacinto Portela, intitulada: "Associação do Método dos Elementos de Contorno A Um Algoritmo Híbrido Para Análise Inversa de Elasticidade em Dutos", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 21 de março de 2017.

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER (UFPR)

LUIZ CARLOS WROBEL (Brunel University)

Curitiba, 21 de março de 2017

Dedico esta dissertação aos meus pais, Marcos e Lily, meus maiores exemplos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e minha irmã, Lily Del Carmen Jacinto, Marcos Godwald Jacinto e Denise Del Carmen Jacinto que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida, sempre me motivando, entendendo as minhas faltas, momentos de afastamento e reclusão e me mostraram o quanto era importante estudar. Tudo que consegui só foi possível graças ao amor, apoio e dedicação que vocês sempre tiveram por mim.

Ao meu marido, Rafael Maes Portela, por sempre estar ao meu lado, pelo amor, apoio, confiança e motivação incondicional que sempre me impulsionam em direção às vitórias dos meus desafios.

À toda minha família, pelo apoio e estímulo.

Ao meu orientador, Professor Dr. Luiz Alkimin de Lacerda, pela sua orientação, total apoio, dedicação, conhecimento que transmitiu, opiniões e críticas, total colaboração no solucionar de dúvidas e problemas que surgiram ao longo da realização deste trabalho e por todas as palavras de incentivo.

À minha coorientadora, Professora Dra. Amanda Jarek, por seu apoio, amizade, paciência, incentivo, dedicação, competência, pelas inúmeras vezes que me ajudou, me aconselhou e esteve comigo ao longo dessa jornada.

Ao Curso de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR e as pessoas com quem convivi nesses espaços ao longo desse período. A experiência de uma produção compartilhada na comunhão com amigos nesses espaços foi uma excelente experiência na minha formação acadêmica e vida.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Ao Emílio Kavamura, por disponibilizar o template em latex para escrever esta dissertação nos formatos da UFPR.

À secretaria do CESEC - Centro de Estudos de Engenharia Civil que, durante o meu tempo de permanência neste mestrado, sempre auxiliou em tudo que eu precisei.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Luiz Carlos Wrobel e Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer, pelas contribuições de melhoria desse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original." Albert Einstein

RESUMO

O transporte do petróleo e gás constitui uma importante etapa na cadeia produtiva do setor petrolífero e os dutos desempenham um papel fundamental como meio de transporte, interligando portos, refinarias, áreas de produção e centros consumidores. Tendo em vista a importância dos dutos, este trabalho teve como objetivo desenvolver duas ferramentas que realizam uma análise inversa para obtenção de condições de contorno e da localização onde atuam. Essa análise inversa é feita por meio de um processo de otimização tendo como restrições as informações obtidas de monitoramentos distribuídos no duto que, neste trabalho, são simuladas por meio de uma análise direta. A modelagem numérica desenvolvida consistiu na resolução de dois problemas: um problema direto, no qual o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é usado para obtenção dos deslocamentos e forças de superfície distribuídas na estrutura; e um problema inverso, no qual dois modelos de otimização foram realizados através do desenvolvimento de duas ferramentas. A primeira utiliza o método dos Algoritmos Genéticos (AGs), minimizando os resíduos entre as deformações relativas calculadas e “monitoradas” até que se obtenha a configuração que satisfaça os valores impostos como referência. A segunda possui uma abordagem híbrida na qual associa os Algoritmos Genéticos com o Método de Newton-Raphson (MNR) para a realização da análise inversa. As ferramentas se mostraram eficientes apresentando resultados aproximados dos esperados, porém o Método Híbrido (MH), comparado com o de uso apenas do Algoritmo Genético (AG), exigiu um menor custo computacional e apresentou resultados com maior rapidez e precisão. Esse estudo poderá contribuir na verificação da integridade da estrutura, na previsão de possíveis consequências como vazamentos e no auxílio na tomada de decisão sobre operacionalidade de dutos.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Elasticidade, Algoritmo Genético, Análise Inversa, Método de Newton-Raphson.

ABSTRACT

The transportation of oil and gas is an important step in the oil industry's and the pipelines play a key role as a means of transportation, interconnecting ports, refineries, production areas and consumer centers. Considering the importance of the pipelines, this work had the objective of developing two tools that perform an inverse analysis to obtain contour conditions and their location. This inverse analysis is done by an optimization process having as restrictions the information obtained from monitoring distributed in the pipeline that, in this work, are simulated through a direct analysis. The numerical modeling developed consisted of solving two problems: a direct problem in which the Boundary Element Method is used to obtain the displacements and surface forces distributed in the structure; and an inverse problem, in which two optimization models were realized through the development of two tools. The first one uses the Genetic Algorithm Method, minimizing the residuals between the calculated and monitored relative deformations, until the configuration that satisfies the values imposed as reference is obtained. The second has a hybrid approach in which it associates the Genetic Algorithms with the Newton-Raphson Method for performing the inverse analysis. The tools proved to be efficient with approximate results, but the Hybrid Method, compared to the use of the Genetic Algorithm alone, required a lower computational cost and presented results with greater speed and accuracy. This study may contribute to the verification of the integrity of the structure, the prediction of possible consequences such as leaks and the aid in decision making on pipeline operability.

Keywords: Boundary Element Method, Elasticity, Genetic Algorithm, Inverse Analysis, Newton-Raphson Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – TENSÕES QUE ATUAM EM UM ELEMENTO INFINITESIMAL.	24
FIGURA 2 – COMPONENTES DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE EM UM PONTO QUALQUER.	25
FIGURA 3 – VALORES PRESCRITOS NO CONTORNO.	28
FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO DA FORÇA CONSIDERADA NO PROBLEMA FUNDAMENTAL.	34
FIGURA 5 – PONTO FONTE x' SITUADO NO CONTORNO CIRCUNDADO POR UMA REGIÃO SEMIESFÉRICA.	35
FIGURA 6 – ELEMENTO QUADRILATERAL.	38
FIGURA 7 – FUNÇÃO DE FORMA N_3 DE UM ELEMENTO DE CONTORNO QUADRILATERAL.	39
FIGURA 8 – ELEMENTO CONSTANTE.	40
FIGURA 9 – SUBDIVISÃO DO ELEMENTO PARA A INTEGRAÇÃO DE \mathbf{U} QUANDO O PONTO DE COLOCAÇÃO É O NÓ DO ELEMENTO DE INTEGRAÇÃO.	44
FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DO CUBO TRACIONADO E DE SUA MALHA.	45
FIGURA 11 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z DO CUBO.	45
FIGURA 12 – CILINDRO DE AÇO MACIÇO TRACIONADO.	47
FIGURA 13 – DESLOCAMENTOS NO EIXO Z.	47
FIGURA 14 – ERRO RELATIVO COM O REFINAMENTO DA MALHA DO MEC PARA O TUBO ENGASTADO.	48
FIGURA 15 – VIGA DE AÇO MACIÇA FLEXIONADA.	49
FIGURA 16 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z.	50
FIGURA 17 – ERRO RELATIVO COM O REFINAMENTO DA MALHA DO MEC PARA O TUBO FLEXIONADO.	50
FIGURA 18 – EXEMPLO DE FUNCIONAMENTO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS.	55
FIGURA 19 – DESCRIÇÃO DA OPERAÇÃO DE CRUZAMENTO.	57
FIGURA 20 – ESQUEMA DO AG ASSOCIADO AO MEC.	58
FIGURA 21 – DESCRIÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	59
FIGURA 22 – EXEMPLOS DE COMPORTAMENTOS INDESEJÁVEIS NO MNR.	60
FIGURA 23 – ESQUEMA DE UM AG ASSOCIADO AO MNR.	63
FIGURA 24 – ESQUEMA DO MÉTODO HÍBRIDO ASSOCIADO AO MEC.	64
FIGURA 25 – MODELO DE ESTUDO.	65
FIGURA 26 – MODELO DE ESTUDO DO EXEMPLO 1.	66
FIGURA 27 – MALHA DE 1056 ELEMENTOS DE SUPERFÍCIE NO DUTO.	66
FIGURA 28 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z OBTIDOS PELO MEC PARA O EXEMPLO 1.	67

FIGURA 29 – VARIAÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM USO DO AG NO EXEMPLO 1.	69
FIGURA 30 – MODELO DE ESTUDO DO EXEMPLO 2.	71
FIGURA 31 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z OBTIDOS PELO MEC PARA O EXEMPLO 2.	72
FIGURA 32 – VARIAÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM O USO DO AG NO EXEMPLO 2.	74
FIGURA 33 – VARIAÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM O USO DO AG NO EXEMPLO 2.	76
FIGURA 34 – MODELO DE ESTUDO DO EXEMPLO 3.	77
FIGURA 35 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z OBTIDOS PELO MEC PARA O EXEMPLO 3.	78
FIGURA 36 – VARIAÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM O USO DO AG NO EXEMPLO 3.	81
FIGURA 37 – CONVERGÊNCIA NA OTIMIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE FORÇA COM O NÚMERO DE GERAÇÕES.	82

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – DESLOCAMENTOS RESULTANTES DA APLICAÇÃO ANALÍTICA E DO MEC NOS PONTOS FUNCIONAIS.	46
TABELA 2 – ERRO PERCENTUAL RELATIVO DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ANALÍTICO E PELO MEC.	46
TABELA 3 – ERRO PERCENTUAL RELATIVO DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ANALÍTICO E PELO MEC PARA O TUBO TRACIONADO.	47
TABELA 4 – ERRO PERCENTUAL RELATIVO DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ANALÍTICO E PELO MEC PARA A VIGA FLEXIONADA.	49
TABELA 5 – COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS.	67
TABELA 6 – DESLOCAMENTOS DOS PONTOS NODAIS.	68
TABELA 7 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 1.	69
TABELA 8 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 2 (ALGORITMO GENÉTICO).	74
TABELA 9 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 2 (MÉTODO HÍBRIDO)	75
TABELA 10 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (ALGORITMO GENÉTICO)	79
TABELA 10 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (ALGORITMO GENÉTICO)	80
TABELA 10 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (ALGORITMO GENÉTICO)	81
TABELA 11 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (MÉTODO HÍBRIDO)	83

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
AGs	Algoritmos Genéticos
ER	Erro relativo
FA	Função Aptidão
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MGC	Método dos Gradientes Conjugados
MH	Método Híbrido
MNR	Método de Newton-Raphson
NE	Número de elementos no contorno
NN	Número de nós geométricos
NF	Número de pontos nodais funcionais
VPC	Valor principal de Cauchy

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES ROMANOS

b_i, b_i^*	Forças de volume
C	Matriz diagonal de coeficientes do MEC definida de acordo com a geometria do contorno no ponto fonte
D	Tensor derivado da solução fundamental dos deslocamentos U_{ij}
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
e_i	Força unitária na direção i
G_i	Vetor de Galerkin
G	Matriz resultante da integral de U sobre os elementos de contorno
H	Matriz resultante da integral de T sobre os elementos de contorno
I	Momento de Inércia
J	Jacobiano de uma transformação
n	Vetor normal
N_v	Número de medidas em campo
N_p	Números de indivíduos de uma população
np	Números de pontos dentro de um espaço de busca
P_c	Probabilidade de cruzamento
P_m	Probabilidade de mutação
P_{min}, P_{max}	Valores mínimos e máximos para um parâmetro
r	Distância do ponto de aplicação até um ponto fonte
R_{1k}, R_{2k}	Constantes utilizadas nos cálculos de D_{jli} e D_{jli}
S	Tensor derivado da solução fundamental das forças de superfície T_{ij}
u_i	Componentes dos deslocamentos na direção i
u	Vetor de deslocamentos

U_{ij}, u^*	Matriz com as componentes de deslocamento do problema fundamental
t_i	Componentes das forças de superfície na direção i
\mathbf{t}	Vetor das forças de superfície
T_{ij}, t^*	Matriz com as componentes das forças de superfície do problema fundamental
W_{max}	Flecha máxima
\mathbf{y}	Vetor contendo os termos incógnitos de deslocamento e força de superfície
x_1, x_2, x_3	Direções no sistema cartesiano global
x_{exp}	Deslocamento relativo entre dois pontos medidos experimentalmente
x_{calc}	Deslocamento relativo entre dois pontos calculados pelo MEC
Z_k	Valor da função aptidão para cada indivíduo

CARACTERES GREGOS

Γ	Representa o contorno de um problema
Γ^*	Representa o contorno de um meio elástico que contém o sólido em análise
δ_{ij}	Delta de Kronecker
∂	Derivada Parcial
η_i	Sistema de coordenadas adimensionais
ε	Deformação
λ	Constante de <i>Lamé</i>
μ	Módulo de cisalhamento
ψ_m	Funções de forma
ν	Coefficiente de Poisson
Ω	Representa o domínio de um problema
Ω^*	Representa o domínio de um meio elástico que contém o sólido em análise
ϕ_n	Funções de interpolação
σ	Tensões
θ	Ângulo formado entre a normal (n_i) e r

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 METODOLOGIA UTILIZADA	18
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO	18
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS EM MEIOS ELÁSTICOS	23
3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE	23
3.1.1 Equações de equilíbrio	23
3.1.2 Relações entre deformação e deslocamento	25
3.1.3 Equações de compatibilidade de deformações	26
3.1.4 Equações constitutivas / Lei de Hooke Generalizada	26
3.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO	27
3.3 TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI	28
3.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO	29
3.5 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	31
3.6 EQUAÇÕES PARA DESLOCAMENTO NO CONTORNO	34
3.7 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	37
3.7.1 IMPOSIÇÃO DE MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO	42
3.7.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS MATRIZES H e G	43
3.7.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE NÚCLEOS FRACAMENTE SINGULARES	43
3.8 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO	44
3.8.1 Exemplo 1	44
3.8.2 Exemplo 2	46
3.8.3 Exemplo 3	48
4 ANÁLISE INVERSA	52
4.1 ALGORITMOS GENÉTICOS	52
4.1.1 Introdução	52
4.1.2 Características	53
4.1.3 Terminologia	54
4.1.4 Funcionamento	54
4.1.5 Modelo Formado pelos Algoritmos Genéticos e o Método dos Elementos de Contorno	58
4.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	59
4.2.1 Aplicação do método de Newton-Raphson com o MEC para elasticidade	61
4.3 MODELO FORMADO PELO MÉTODO HÍBRIDO E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	63

5 APLICAÇÕES	65
5.1 EXEMPLO 1	65
5.1.1 Análise Direta para simulação de dados experimentais	66
5.1.2 Análise Inversa com o Algoritmo Genético	68
5.2 EXEMPLO 2	70
5.2.1 Análise Direta para simulação de dados experimentais	71
5.2.2 Análise Inversa com o Algoritmo Genético	72
5.2.3 Análise Inversa com o Método Híbrido	75
5.3 EXEMPLO 3	76
5.3.1 Análise Direta para simulação de dados experimentais	77
5.3.2 Análise Inversa com o Algoritmo Genético	78
5.3.3 Análise Inversa com o Método Híbrido	83
6 CONCLUSÕES	84
6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	85
REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

O transporte de petróleo e gás constitui uma importante etapa na cadeia do setor petrolífero e o seu principal meio de transporte são os dutos. Com o aumento da demanda e da utilização do petróleo e de seus derivados, houve um significativo aumento nos projetos de dutos exigindo maiores diâmetros e menores espessuras de parede operando sob alta pressão. Devido à solicitação de altas tensões, surgem os riscos de ruptura que podem ser minimizados com melhorias aplicadas, resultando num menor custo de produção e auxílio na prevenção de acidentes. Desta forma, um melhor entendimento do seu comportamento estrutural é de grande importância para as empresas petrolíferas e, cada vez mais, projetos mais elaborados e precisos são exigidos para evitar condições que podem resultar em falhas gerando danos ambientais, econômicos e até mesmo humanos.

Com o avanço tecnológico no que tange às técnicas de engenharia, observa-se a necessidade de se aplicar novos conceitos para acompanhar os desenvolvimentos, proporcionando aos profissionais ferramentas mais refinadas para serem aplicadas na análise mecânica. Para este estudo do comportamento de estruturas, os procedimentos numéricos são importantes opções. Comparados aos testes experimentais, apesar destes serem de fundamental importância para calibração e verificação de um modelo numérico, possuem menor custo e podem ser aplicados para uma grande variedade de carregamentos e geometrias visando a otimização de material na sua construção. Além disso, apresentam vantagens por possuir uma aplicação mais ampla quando comparados aos métodos analíticos, que consideram simplificações em suas formulações e muitas vezes não podem ser solucionados.

Neste sentido, para o presente trabalho dois programas computacionais foram desenvolvidos, em linguagem de programação Fortran 95, inseridos no contexto da elasticidade linear em problemas tridimensionais, para análise inversa de dutos. Na mecânica dos sólidos, a análise inversa permite identificar parâmetros de interesse tais como: condições de contorno, geometria e propriedades dos materiais. Esses problemas inversos constituem uma classe de grande campo de investigação em problemas na ciência e engenharia, pois em muitas aplicações da engenharia têm-se a necessidade da identificação desses parâmetros a partir de dados medidos experimentalmente.

Para a modelagem numérica foi desenvolvido primeiramente um modelo direto, no qual o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é usado para obtenção dos deslocamentos e tensões distribuídos na estrutura. Esse programa foi utilizado como subprograma de um código que emprega os Algoritmos Genéticos (AGs) em uma análise inversa para a determinação de condições de contorno de estruturas, por meio de medidas em campo. Porém, como os AGs possuem o inconveniente de geralmente exigirem um alto custo computacional quando comparados a métodos gradientes, esse fato serviu como motivação para a elaboração também

de um segundo código que executa uma análise inversa com o uso de um Método Híbrido (MH) associando um Algoritmo Genético (AG) ao método gradiente de Newton-Raphson (MNR). Sabe-se também, que um ponto fraco do MNR é a necessidade de uma boa aproximação inicial para assegurar a sua convergência. Sendo assim, com o objetivo de unir as características vantajosas desses dois métodos, neste segundo código o AG é responsável pela busca da aproximação inicial para posterior aplicação do MNR, com um baixo custo computacional.

Esse estudo poderá contribuir na verificação da integridade estrutural, na previsão de possíveis consequências como vazamentos e no auxílio na tomada de decisão sobre operacionalidade de dutos.

1.1 METODOLOGIA UTILIZADA

Primeiramente foi feita uma revisão da literatura baseada em dissertações e teses, conteúdos confiáveis da internet, artigos e livros com a intenção de aprimorar os conhecimentos da área, objetivando um programa de qualidade.

Em seguida foi desenvolvido um programa computacional em linguagem Fortran 95, visando reproduzir a metodologia encontrada na literatura referente ao MEC. Esse programa foi desenvolvido para a resolução de problemas de elasticidade tridimensional com elementos constantes quadrilaterais com parâmetros em dupla precisão. A opção por essa linguagem é consequência da disponibilidade de vastas bibliotecas que permitem uma maior facilidade na programação de algoritmos de cálculo, além de ser uma linguagem muito difundida no meio científico, inclusive no que se refere ao MEC. Fez-se então a validação do código através de comparações com problemas que possuem soluções analíticas.

O código implementado com o MEC para a análise direta foi utilizado como subprograma de um código que emprega um Algoritmo Genético (AG) para uma análise inversa. O AG foi desenvolvido para o problema de otimização que obtém condições de contorno e suas respectivas localizações.

Na sequência, partiu-se para a implementação de um código que aplica o AG e o MNR para uma análise inversa que permite a obtenção de condições de contorno e localização em que atuam. Foram realizados testes com diferentes casos para a validação dos programas com análise inversa, com o uso dos dados experimentais simulados pelo programa do modelo direto. Uma comparação entre os resultados gerados pelos dois códigos é realizada para efeito de validação.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem como principais objetivos:

- Apresentar a base teórica e as formulações para o tratamento de problemas inversos

encontrados na elasticidade linear, utilizando o Método de Elementos de Contorno e as técnicas de otimização por Algoritmos Genéticos e Método de Newton-Raphson.

- Validação do código de análise direta comparando os resultados de modelos simples com soluções analíticas.
- Desenvolver ferramentas computacionais com uma formulação proposta capaz de resolver problemas inversos não só para dutos como também para análise de estruturas em geral.
- Analisar exemplos de aplicação das ferramentas computacionais desenvolvidas com a utilização de dados experimentais simulados e discutir resultados.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em 7 capítulos, que serão descritos a seguir.

O primeiro capítulo possui a introdução e uma contextualização do presente estudo, onde são apresentadas as motivações e os principais conceitos para a realização deste trabalho. No capítulo 2 encontra-se a revisão bibliográfica.

Conceitos básicos da teoria da elasticidade e uma revisão da aplicação do Métodos dos Elementos de Contorno na elasticidade linear via soluções fundamentais de Kelvin para o problema tridimensional, são descritos no capítulo 3. No final deste capítulo são apresentados exemplos de aplicação para a validação do código com o MEC.

Os conceitos relevantes para o tratamento e entendimento do problema inverso estão no capítulo 4. Destacam-se os métodos de Algoritmo Genético e Newton-Raphson que são os métodos utilizados para a análise inversa neste trabalho.

Os exemplos de aplicação para as validações dos códigos de análise inversa são apresentados no capítulo 5.

O capítulo 6 traz as conclusões e sugestões de possíveis desenvolvimentos para trabalhos futuros. Enfim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas para esse trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Atualmente o comportamento mecânico de estruturas pode ser obtido por meio de modelagem computacional, resultando num baixo custo quando comparado aos ensaios experimentais. Modelos numéricos podem ser usados para o estudo de uma ampla variedade de carregamentos e geometrias de estruturas (KATSIKADELIS, 2002).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos mais utilizados como ferramenta de análise. A aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) não é tão ampla como a do MEF, porém tem sido estabelecido como uma efetiva alternativa ao MEF em diversas áreas de análise na engenharia (ALIABADI, 2002). Uma de suas características é a redução na dimensionalidade do problema. Por exemplo, um problema tridimensional se reduz a uma superfície bidimensional de domínio a ser discretizado e um problema bidimensional se reduz somente a uma linha unidimensional de contorno do domínio. O MEC utiliza uma solução fundamental dada por um campo singular, sendo esta uma solução exata das equações diferenciais no domínio do corpo, resultando numa equação integral apenas sobre o contorno.

Apesar de ser uma técnica nova, seus fundamentos são baseados em formulações clássicas de Fredholm (1903), Mikhilin (1957), na teoria do potencial, e Betti (1872), Somigliana (1886) e Kupradze (1965) na teoria da elasticidade (ALIABADI, 2002).

O surgimento do MEC como método computacional pode ser atribuído aos trabalhos de Jawson (1963), e Symm (1963), no qual introduziram o MEC para a solução de problemas potenciais 2D governados pela equação de Laplace.

Jawson (1963) trata em seu artigo aspectos teóricos do método e indica também a possibilidade de extensão das equações integrais de contorno para problemas de teoria da elasticidade e problemas tridimensionais. O artigo de Symm (1963) por sua vez, trata da implementação computacional, bem como da apresentação de resultados numéricos, para os quais utiliza elementos constantes.

A partir destes trabalhos, as primeiras aplicações do MEC em problemas de elasticidade bidimensional foram realizadas por Rizzo (1967). Suas formulações são desenvolvidas tendo em vista a analogia entre as equações básicas que regem os problemas de potencial e elasticidade, conforme sugerido por Jawson (1963). Rizzo (1967), em seu trabalho, destaca que os núcleos singulares que surgem na obtenção das equações integrais de contorno para elasticidade são mais complicados que aqueles para o problema de potencial. Além disso, ressalta que é necessária uma atenção especial aos núcleos singulares cujas integrais só existem no sentido do valor principal de Cauchy (VPC).

O primeiro trabalho relevante com o MEC direto em elasticidade 3D, foi desenvolvido por Cruse (1969), que utilizou elementos constantes triangulares, para representar as variáveis

físicas. Os resultados numéricos apresentados por Cruse (1969) mostram que diferentemente do que se acreditava anteriormente (Jawson (1963) e Symm (1963)), não há necessidade de se utilizar mesmo grau de refinamento para toda a malha.

O trabalho de Cruse (1974) consiste em uma formulação melhorada para problemas tridimensionais, comparada com seu trabalho de 1969, pois utiliza elementos triangulares planos com aproximação linear, apresentando respostas mais precisas. Neste trabalho, Cruse (1974) ainda destaca, visando uma melhora ainda maior nos resultados obtidos pelo MEC, a necessidade de novos trabalhos que considerem o uso de elementos com funções de interpolação de ordem superior.

Os trabalhos de Lachat (1975) e Lachat e Watson (1976) são, talvez, as mais significativa contribuições iniciais para o MEC se tornar uma técnica numérica efetiva, os quais apresentam uma formulação isoparamétrica para o método (ALIABADI, 2002). O MEC com aplicações na engenharia teve sua divulgação inicial bem definida com a publicação do livro (BREBBIA, 1978). A partir disso, muitos problemas têm sido estudados por esse método. Destacam-se alguns trabalhos recentes nos quais o MEC foi aplicado em problemas de elasticidade:

Chaves (1997) apresenta uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para o problema de flexão de placas através da teoria clássica de Kirchhoff, com ênfase especial a placas com variação de espessura. Costa (2014) introduz uma nova formulação do MEC para análise de estruturas formadas pela associação tridimensional de placas espessas. Outra referência interessante é a de Ubessi (2014) que implementa numericamente o MEC 3D para elasticidade linear, com avaliação direta das integrais fracamente e fortemente singulares. Jarek (2016), apresenta a formulação de elementos de contorno para meios isotrópicos e anisotrópicos, para avaliar o estado de tensões e deformações de um maciço rochoso.

Na literatura técnica é possível encontrar também muitos trabalhos em diversas áreas de aplicação, que obtiveram bons resultados na solução de problemas de otimização com o uso do Método dos Elementos de Contorno acoplados aos Algoritmos Genéticos. Essas primeiras aplicações na resolução de problemas inversos ocorreram na década de 90.

Ouazar, Walters e Cheng (1996) elaboraram com sucesso uma metodologia para análise inversa com o uso de Algoritmos Genéticos e Elementos de Contorno para a maximização da taxa de extração de água subterrânea para a gestão em aquíferos. Essa proposta teve como finalidade otimizar a vazão de bombeamento de um aquífero submetido a algumas condições iniciais pré-estabelecidas. Em um segundo exemplo foi proposta a integração do AG com o Método dos Elementos de Contorno com Dupla-Reciprocidade (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992) para a obtenção de parâmetros hidráulicos do mesmo aquífero.

Mera, Elliott e Ingham (2004) propuseram a combinação do AG com o MEC para a identificação da posição e forma geométrica de parte de um domínio desconhecido, com a

motivação de quantificar a perda de um material devido à corrosão de uma forma não destrutiva. Para a função objetivo, foram utilizadas informações adicionais da parte conhecida do domínio. Os resultados foram comparados com o Método do Gradiente Projetado (ROSEN, 1960) e o Método Nelder-Mead (NELDER; MEAD, 1965), onde o AG se mostrou mais eficiente.

Trabalhando com proteção catódica, Miltiadou e Wrobel (2002) fizeram um estudo que objetiva a otimização de problemas bidimensionais, com a estimativa de curvas de polarização por meio de análise inversa, para condições lineares e não lineares. Os exemplos de aplicação incluíram diferentes tipos de curvas de polarização em eletrólitos finitos e infinitos. Os resultados foram comparados com o uso do Método dos Gradientes Conjugados (MGC) e como resposta os AGs se mostraram mais robustos independentemente da posição dos sensores e da escolha inicial.

Lopes (2009) elaborou um estudo com aplicação para detecção de danos com o MEC em acústica para determinar o potencial e o fluxo acústico no decorrer do tempo em uma placa fina na presença de um furo com a emissão de um sinal acústico e captura por sensores dispostos na superfície. Por meio de uma análise inversa, o autor utilizou o AG como técnica de otimização para a obtenção da localização do dano.

Também na área de danos, Santos, Campos-Velho e Chiwiacowsky (2011) propuseram um método híbrido de Algoritmo Genético associado a um Método de Gradientes Conjugados para estimação de danos em estruturas. Os exemplos são realizados em uma barra discretizada em elementos finitos. Essa hibridização permite que a estimativa inicial já comece com uma solução, em média, melhor que a obtida com uma condição aleatória, como é efetuada com o MGC convencional. Além disso, quando comparada com a resposta do MGC, a solução final fica mais próxima da desejada.

Uma referência interessante que utilizou um Método Híbrido com uma otimização feita por AG associado ao MNR, foi o trabalho de Feliz (2009), que propõe um sistema composto por esses dois métodos sendo o AG responsável de fornecer uma solução inicial para o algoritmo com o MNR. Esse algoritmo é aplicado no problema de convergência de fluxo de potência em sistemas de energia, fornecendo bons resultados.

Um exemplo de trabalho com uso do MEC e MNR foi o de Furuzato e Lacerda (2016) que apresentou um exemplo de aplicação na área de proteção catódica em fundação em grelha de torre de alta tensão. A modelagem numérica foi realizada através do Método dos Elementos de Contorno e a resolução do problema não linear, que define a curva de polarização da relação eletroquímica entre a superfície a ser protegida e o solo, foi resolvida pelo Método de Newton-Raphson.

Nesse contexto, o presente trabalho visa desenvolver um estudo capaz de resolver problemas inversos onde se tem dados experimentais que necessitam determinar a posição e o valor de certo carregamento.

3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS EM MEIOS ELÁSTICOS

Este capítulo inicia com a revisão de alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade. Em seguida apresenta o desenvolvimento das equações integrais para aplicação do MEC na elasticidade isotrópica tridimensional via soluções fundamentais de Kelvin. Esta formulação teórica pode ser encontrada em referências clássicas como nos obras de Brebbia e Dominguez (1992), Aliabadi (2002) e de Brebbia, Telles e Wrobel (1984). Ao final desse capítulo, são apresentados exemplos simples de aplicação que foram utilizados para a validação do código desenvolvido para esse trabalho.

3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE

A teoria da elasticidade estuda a determinação das tensões, deformações de um corpo e a relação entre elas como resposta à ação de forças exteriores. Essa teoria teve sua origem a partir da Lei de Hooke, que é a lei física relacionada à elasticidade dos corpos e possui larga aplicação na engenharia como na mecânica estrutural, na mecânica dos sólidos e na mecânica da fratura para a descrição do comportamento de diversos materiais.

Para o estudo da elasticidade linear, admite-se que o material em estudo obedeça à Lei de Hooke Generalizada, ou seja, possui características isotrópicas e a mudança na orientação do corpo devido à deformação é negligenciável (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Várias expressões apresentadas neste texto serão escritas utilizando notação cartesiana indicial, onde os índices 1, 2, 3, são usados para substituir x, y, z. Quando aparecer um índice repetido em uma expressão, este se refere a um somatório. Por exemplo:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \quad (1)$$

e

$$b_{ii} = b_{11} + b_{22} + b_{33} = \sum_{i=1}^3 b_{ii} \quad (2)$$

3.1.1 Equações de equilíbrio

A forças externas que atuam em um corpo são admitidas como sendo de dois tipos: forças de volume e forças de superfície. As de volume atuam distribuídas pelo corpo, como a gravidade, sendo assim, são determinadas por unidade de volume. Já as forças de superfície são determinadas por unidade de área, pois estas são distribuídas na superfície do corpo, como a pressão hidrostática (TIMOSHENKO; GOODIER, 1968).

O estado de tensões em um ponto, a princípio, possui nove componentes distintas que podem ser agrupadas em um tensor de tensões de segunda ordem representado na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Essas componentes não são todas independentes, mas estão relacionadas por meio das equações de equilíbrio. Esse estado de tensões pode ser representado pelas tensões atuantes em um cubo infinitesimal, conforme ilustrado na figura 1.

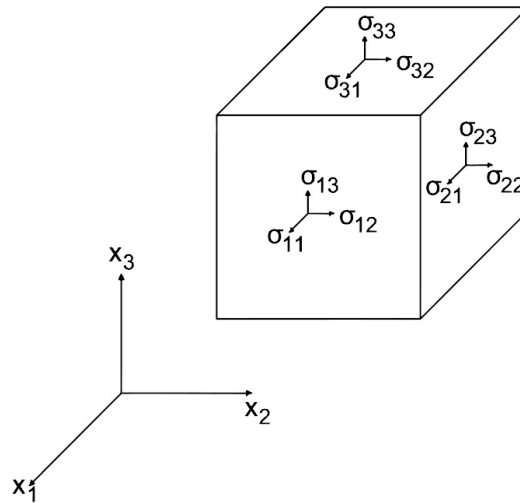


FIGURA 1 – TENSÕES QUE ATUAM EM UM ELEMENTO INFINITESIMAL.

Considerando o elemento infinitesimal representado na figura 1, as equações que regem o equilíbrio de um ponto qualquer deste corpo onde atuam forças de volume b_i e de superfície t_i , que devem ser satisfeitas em todo o domínio Ω , podem ser escritas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ou em notação indicial:

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0 \quad (5)$$

onde σ_{ij} ou σ_{ji} são tensões internas.

Para respeitar o equilíbrio dos momentos em torno dos eixos, a condição de equilíbrio do corpo garante a simetria existente no tensor de tensões, resultando em:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (6)$$

ou também:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (7)$$

As componentes das forças de superfície em um ponto qualquer do corpo, que atuam em um plano que intercepta esse ponto e os três planos de referência (xy , yx e yz), representadas na figura 2, podem ser expressas em termos das seis componentes do tensor de tensões por:

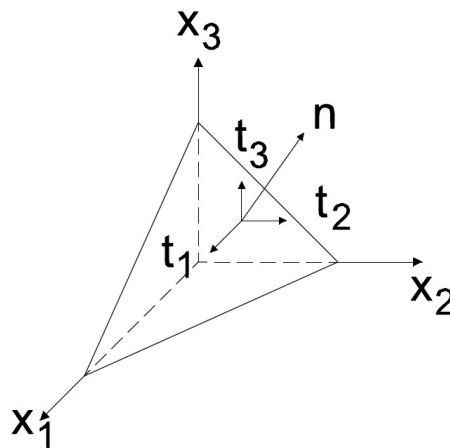


FIGURA 2 – COMPONENTES DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE EM UM PONTO QUALQUER.

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ t_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ t_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (8)$$

ou:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (9)$$

onde n_j representa os cossenos diretores dos ângulos entre a normal n e os eixos x_j .

3.1.2 Relações entre deformação e deslocamento

Segundo Timoshenko e Goodier (1968), para o estudo da deformação de um corpo na teoria da elasticidade, presume-se que um corpo sob ação de forças externas com restrição de

deslocamento ou rotação, comporta-se como um corpo deformável, ou seja, não há deslocamento sem que haja deformações.

As componentes do tensor de deformação considerando pequenos deslocamentos e pequenas rotações, desprezando pequenas variações nas dimensões dos corpos deformados, são dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (10)$$

onde u_i representa as componentes de deslocamento.

As componentes ε_{ij} de deformações também podem ser agrupadas em um tensor de deformações definido matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \quad (12)$$

3.1.3 Equações de compatibilidade de deformações

Quando os deslocamentos u_i são conhecidos, é possível determinar as componentes ε_{ij} em qualquer região onde a derivada parcial $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ exista. Já no caso em que u_i sejam desconhecidos o sistema formado pela equação (10) não possui solução única, pois apesar de serem seis as componentes de deformação, são apenas três as componentes de deslocamentos. Assim, as componentes independentes de deformações devem satisfazer algumas condições adicionais. Eliminando-se as componentes de deslocamento das relações deformação-deslocamento, obtém-se um conjunto de equações independentes de compatibilidade de deformações:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (13)$$

3.1.4 Equações constitutivas / Lei de Hooke Generalizada

O estado de tensões e deformações de um corpo é relacionado pelas equações constitutivas do material; essa relação entre o tensor de tensão e o tensor de deformação pode ser descrita pela chamada Lei de Hooke Generalizada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (14)$$

onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem que contém as constantes que caracterizam o material no âmbito elástico.

Ao considerar o princípio de conservação de energia, a simetria dos tensores de tensão e de deformação e que o material é isotrópico, o número de constantes elásticas é reduzido a dois. Assim, a relação entre tensão e deformação para um sólido elástico isotrópico pode ser descrita por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (15)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé e relacionam-se com o módulo de elasticidade, E , e o coeficiente de Poisson, ν , através das seguintes equações:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (17)$$

Em (15) δ_{ij} é o delta de Kronecker e tem a seguinte definição:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (18)$$

Pode-se escrever também a relação inversa da equação (15) da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (19)$$

3.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para a resolução de um problema direto na elasticidade que envolve uma equação diferencial com um domínio Ω , limitado por um contorno Γ , é necessário que se conheçam as condições de contorno.

Admiti-se que Γ_1 e Γ_2 são parte do contorno Γ , de acordo com a figura 3. Definem-se então, os valores prescritos de contorno que serão utilizados na análise do problema, podendo estes serem, por exemplo, dos tipos:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ (condições de contorno essenciais ou de Dirichlet em } \Gamma_1)$$

ou

$$t_i = \bar{t}_i \text{ (condições de contorno naturais ou de Neumann em } \Gamma_2)$$

onde o traço sobre os valores indica que são valores prescritos.

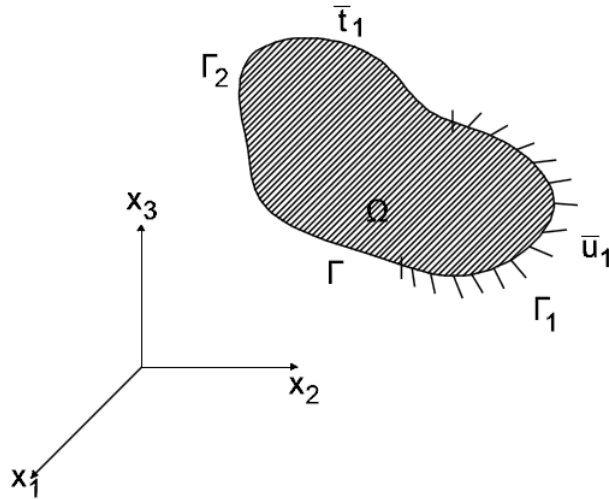


FIGURA 3 – VALORES PRESCRITOS NO CONTORNO.

3.3 TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI

A equação integral de contorno pode ser obtida através do teorema da reciprocidade de Betti. Para este propósito, admite-se um domínio finito Ω delimitado pelo contorno Γ , inserido em um meio infinito Ω^* com contorno $\Gamma^* \rightarrow \infty$. Considera-se a existência de dois estados de equilíbrio sob a ação de diferentes carregamentos e deslocamentos prescritos, sendo que Ω apresenta o estado de equilíbrio (1) e o Ω^* apresenta o estado de equilíbrio (2). Designam-se os deslocamentos, as forças de volume e de superfície para esses dois estados:

Estado (1):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Estado (2):

$$\mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b}^* = \begin{Bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ t_3^* \end{Bmatrix} \quad (21)$$

De acordo com o teorema de Betti, o trabalho produzido pelas ações de um sistema de forças generalizadas do Estado (1) com os deslocamentos do Estado (2), é igual ao trabalho realizado pelo sistema de forças generalizadas do Estado (2) com os deslocamentos do Estado (1) (KATSIKADELIS, 2002).

Aliabadi (2002) apresenta o desenvolvimento da formulação para chegar na expressão que representa o teorema da reciprocidade de Betti.

Da equação de equilíbrio (5) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0 \quad (22)$$

Essa equação corresponde a um processo de ponderação da equação diferencial governante, como no processo utilizado pelo Método dos Resíduos Ponderados.

A integral envolvendo o termo $\sigma_{ij,j} u_i^*$ pode ser reescrita da forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*) d\Omega \quad (23)$$

:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^*) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ji} u_{j,i}^*) = \sigma_{ij} u_{i,j}^* \quad (24)$$

Aplicando o teorema da divergência na primeira integral à direita da equação (23) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (25)$$

Assim:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (26)$$

Substituindo a equação (26) na equação (22) chega-se a:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (27)$$

A integral da direita da equação (27) pode ser reescrita de acordo com as equações constitutivas (15):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} [\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}] \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (28)$$

Assim, obtém-se a equação que representa o teorema da reciprocidade de Betti, em termos de deslocamentos, forças de superfície e forças de volume para o corpo ($\Omega + \Gamma$):

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (29)$$

3.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Para problemas de elasticidade, as equações integrais do contorno podem ser derivadas do teorema de Betti. Admite-se que as componentes de forças de corpo b_i^* correspondem

a forças unitárias concentradas aplicadas em X' num meio infinito, em cada uma das três direções ortogonais definidas pelo vetor de componentes e_i , representadas pela função Delta de Dirac da seguinte maneira:

$$b_i^* = \Delta(X - X') e_i \quad (30)$$

Sabe-se, pelas características do Delta de Dirac que:

$$\int_{\Omega} \Delta(X - X') g(X) d\Omega = g(X') \quad (31)$$

Assim, a segunda integral da direita da equação (29) pode ser substituída por:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(X') \quad (32)$$

Os deslocamentos e as forças de superfície, para o caso particular considerando uma carga unitária atuando independentemente, podem ser escritos como:

$$u_i^* = U_{ij}(X, X') e_j \quad (33)$$

$$t_i^* = T_{ij}(X, X') e_j \quad (34)$$

onde $U_{ij}(X, X')$ e $T_{ij}(X, X')$ representam, respectivamente, as forças de superfície e os deslocamentos na direção j no ponto X (ponto campo) devido a uma força concentrada unitária aplicada na direção i no ponto X' (ponto fonte). Assim, a equação (29) pode ser reescrita na forma da equação (35) conhecida como Identidade de Somigliana para os deslocamentos.

$$u_i(X') = \int_{\Gamma} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(X', X) b_j(X) d\Omega \quad (35)$$

onde $x \in \Gamma$, $X \in \Omega$ e $X' \in \Omega$. A Identidade de Somigliana fornece valores dos deslocamentos num ponto interno X' através de valores dos deslocamentos e forças de superfície do contorno Γ .

Na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} d\Omega \quad (36)$$

Através da equação (35) para deslocamentos em pontos internos, é possível determinar as deformações e as tensões nos pontos internos. Derivando a equação (35) em relação ao ponto fonte X' , encontra-se:

$$u_{i,k}(X') = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(X', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,k}(X', x) u_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij,k}(X', X) b_j(X) d\Omega \quad (37)$$

Aplicando a Lei de Hooke chega-se à equação integral de tensões para pontos internos:

$$\sigma_{ij}(X') = \int_{\Gamma} D_{kij}(X', x) t_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}(X', x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(X', X) b_k(X) d\Omega \quad (38)$$

onde D_{kij} e S_{kij} são tensores obtidos através dos tensores de deslocamentos e de forças de superfície do problema fundamental; suas componentes são dadas por:

$$D_{kij}(X', x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(-r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ki} + r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \quad (39)$$

$$S_{kij}(X', x) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[\begin{array}{l} (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) \\ -4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \end{array} \right] \\ + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + \\ (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad (40)$$

onde:

r : distância do ponto fonte ao ponto campo;

n : normal;

$\frac{\partial r}{\partial n}$: derivada do vetor r em relação a normal n .

3.5 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Brebbia e Dominguez (1992) explicam que a formulação integral das equações de contorno para elasticidade requer uma solução fundamental de problemas com as mesmas

propriedades materiais do corpo em consideração, correspondendo a um domínio infinito com uma fonte unitária concentrada. Essa solução fundamental é conhecida como solução de Kelvin.

Segundo Beer, Ian e Duenser (2008), essa solução deve satisfazer as seguintes condições:

- Equações constitutivas;
- Equilíbrio e conservação de energia;
- Compatibilidade ou continuidade.

Para problemas tridimensionais, a solução fundamental é obtida com a aplicação de forças unitárias nas direções x , y , z em um domínio infinito.

Uma das formas para chegar à equação da solução fundamental de Kelvin para problemas de elasticidade 3D, pode ser encontrada em (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Substituindo as equações constitutivas e as equações de deformação/deslocamento nas condições de equilíbrio, obtêm-se as equações de Navier em termos dos deslocamentos:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,jj} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu}b_i = 0 \quad (41)$$

Na equação (41), substituindo a parcela referente à força de volume pela função Delta de Dirac, aplicando-se uma força unitária em X' na direção do vetor unitário e_i , obtêm-se:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,jj} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu}\Delta(X - X')e_i = 0 \quad (42)$$

A forma mais usual de obter a solução fundamental é através do uso do vetor de Galerkin. Assim, representando os deslocamentos em termos do vetor de Galerkin, obtêm-se:

$$u_j = G_{j,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)}G_{k,jk} \quad (43)$$

Substituindo a equação (43) na equação (42), tem-se:

$$G_{i,kkjj} + \frac{1}{\mu}\Delta(X - X')e_i = 0 \quad (44)$$

ou

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \frac{1}{\mu}\Delta(X - X')e_i = 0 \quad (45)$$

Considerando:

$$F_i = \nabla^2 G_i \quad (46)$$

A equação (45) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 (F_i) + \frac{1}{\mu} \Delta (X - X') e_i = 0 \quad (47)$$

A solução para a equação (47) no caso tridimensional é dada por:

$$F_i = \frac{1}{4\pi r \mu} e_i \quad (48)$$

onde r é a distância entre o ponto onde é aplicado o Delta de Dirac e qualquer outro ponto.

Substituindo a equação (48) na equação (46), tem-se:

$$\nabla^2 G_i = \frac{1}{4\pi \mu} e_i \quad (49)$$

A solução para essa equação (49) resulta:

$$G_i = G e_i \quad (50)$$

onde o vetor de Galerkin é dado por:

$$G_i = \frac{1}{8\pi \mu} r e_i \quad (51)$$

Considerando a aplicação de cada força independentemente, tem-se:

$$G_{ij} = G \delta_{ij} \quad (52)$$

onde $G_{ij} = G \delta_{ij}$ é o componente j do vetor de Galerkin em um ponto quando uma carga unitária é aplicada em X' na direção i .

O deslocamento em um ponto no domínio com a aplicação de forças concentradas unitárias em cada direção independentemente é escrito como:

$$u_j^* = u_{ij}^* e_i \quad (53)$$

De acordo com a equação (43) é possível obter:

$$u_{ij}^* = G_{ij,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,jk} \quad (54)$$

Substituindo as equações (52) e (51) na equação (54) obtém-se a solução fundamental de Kelvin para deslocamentos para elasticidade 3D:

$$u_{ij}^* = U(X', x) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (55)$$

onde u_{ij}^* ou $U(X', x)$ é a solução fundamental para o deslocamento em qualquer ponto na direção j quando a força unitária é aplicada em X' na direção i .

As forças de superfície em Γ podem ser definidas por:

$$t_j^* = t_{ij}^* e_i \quad (56)$$

A expressão para forças de superfície é dada por:

$$t_{ij}^* = T(X', x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right] \quad (57)$$

onde t_{ij}^* ou $T(X', x)$ é a solução fundamental para a força de superfície em qualquer ponto na direção j quando a força unitária é aplicada em X' na direção i . A figura 4 representa o problema fundamental.

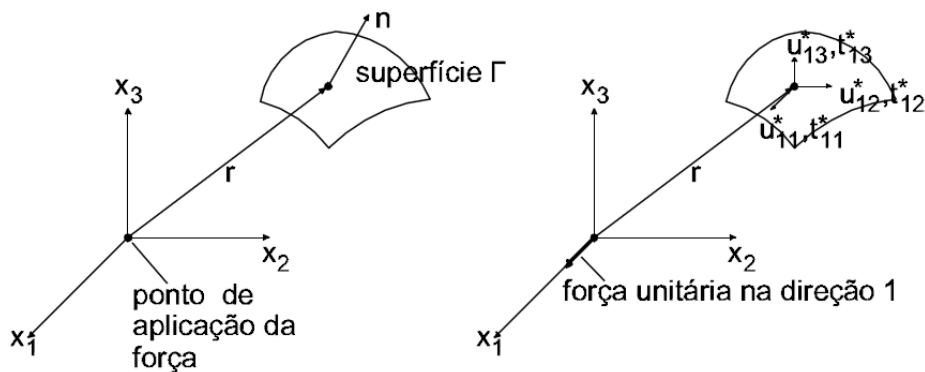


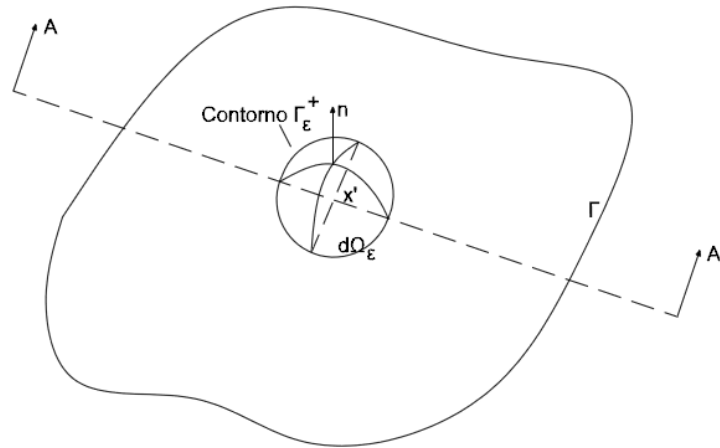
FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO DA FORÇA CONSIDERADA NO PROBLEMA FUNDAMENTAL.

3.6 EQUAÇÕES PARA DESLOCAMENTO NO CONTORNO

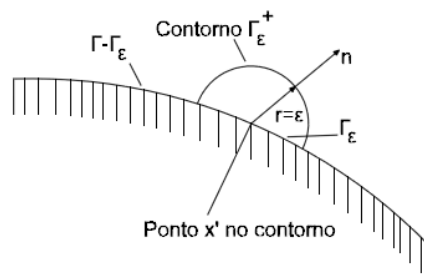
A equação da Identidade da Somigliana, apresentada anteriormente, pode fornecer valores de deslocamentos em qualquer ponto interno, mas para isso é necessário que sejam conhecidos os valores de forças de superfície e deslocamentos em todos os pontos do contorno. Dessa forma, os valores incógnitos no contorno de deslocamentos e força de superfície precisam ser obtidos escrevendo a equação da integral de contorno para pontos no contorno. A estratégia do Método dos Elementos de Contorno, para a obtenção dessa integral para pontos no contorno,

consiste em levar o ponto de colocação da carga unitária para o contorno, avaliando-se então, o limite dessa expressão quando $X' \rightarrow x'$, sendo $x' \in \Gamma$.

Para tal, acrescenta-se no domínio uma região semiesférica em torno do ponto fonte x' , com contorno Γ_ε^+ e com raio ε tendendo a zero, como ilustrado na figura 5. Sendo assim, o ponto fonte torna-se um ponto do contorno e a expressão resultante será a equação da Identidade de Somigliana particularizada para o ponto fonte pertencente ao contorno.



(a) Vista Geral



(b) Vista do corte AA

FIGURA 5 – PONTO FONTE x' SITUADO NO CONTO RNO CIRCUNDADO POR UMA REGIÃO SEMIESFÉRICA.

O contorno aumentado Γ^A , é expresso pela seguinte expressão:

$$\Gamma^A = (\Gamma - \Gamma_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon^+ \quad (58)$$

sendo Γ_ε a parte removida do contorno.

Com o acréscimo do contorno a equação da Identidade de Somigliana (35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_i(X') = - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(X', X) b_j(X) d\Omega \quad (59)$$

Estudando cada integral separadamente, aplicando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e, portanto, $\Gamma^A \rightarrow \Gamma$, a primeira integral do lado direito fica:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma \right\} \quad (60)$$

onde a segunda integral do lado direito da equação (60) fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(x', x) [u_j(x) - u_j(x')] d\Gamma \right\} + \\ &+ u_j(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(x', x) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

A primeira integral do lado direito da equação (61) é nula devido à continuidade de $u_j(x)$ e a segunda integral pode ser representada por:

$$\alpha_{ij}(x') u_j(x') = u_j(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(x', x) d\Gamma \quad (62)$$

A primeira integral à direita da equação (60) pode ser interpretada no sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC), e sua existência pode ser provada se $u_j(x)$ satisfaz à condição de Holder em x' , na forma:

$$|u_j(x) - u_j(x')| \leq B r^\alpha \quad (63)$$

onde B e α são constantes positivas.

Portanto, a equação (60) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma = VPC \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma + \alpha_{ij}(x') u_j(x') \quad (64)$$

onde $VPC \int$ representa a integral calculada no sentido do Valor Principal de Cauchy.

A segunda integral do lado direito da equação (59) quando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma \right\} \quad (65)$$

A primeira integral do lado direito dessa equação se torna uma integral no contorno Γ quando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma \quad (66)$$

Para problemas tridimensionais a solução fundamental para os deslocamentos possuem singularidades na ordem de $\frac{1}{\varepsilon}$. Como o contorno acrescentado é esférico, surgirá um termo ε^2 (a área de uma esfera é $4\pi\varepsilon^2$). Assim, a segunda integral do lado direito da equação (65) tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma = 0 \quad (67)$$

Assim, a equação resultante da equação (59) é:

$$C_{ij}(x') u_j(x') + VPC \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(x', X) b_j(X) d\Omega \quad (68)$$

onde a primeira integral a esquerda é calculada no sentido do valor principal de Cauchy e $C_{ij}(x') = \delta_{ij}(x') + \alpha_{ij}(x')$. O termo $C_{ij}(x')$ depende do contorno. Para um contorno suave, assume os seguintes valores:

$$C_{ij}(x') u_j(x') = \frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(x') \quad (69)$$

O MEC tem origem com a avaliação numérica da expressão (68). Esta formulação é denominada de formulação direta. Ela fornece uma relação que deve ser satisfeita pelas forças de superfície e pelos deslocamentos no contorno. Quando as condições de contorno são aplicadas, essa equação pode ser usada para calcular as incógnitas no restante do contorno.

3.7 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Um dos requerimentos fundamentais para um modelo matemático é a descrição do problema, seu contorno, suas condições de contorno e de suas propriedades de uma forma

matemática. A definição exata da forma de um contorno complexo pode exigir infinitos pontos de uma superfície. Para ser possível modelar este tipo de problema com um número razoável de dados de entrada, apenas um limitado número de pontos deve ser definido e a forma entre esses pontos deve ser aproximada por funções.

A representação do contorno do corpo é feita com a utilização dos chamados elementos de contorno. Para a descrição do contorno de problemas tridimensionais, elementos bidimensionais são usados. Primeiro, é necessária a especificação de um número discreto de pontos no contorno. Em seguida, faz-se uma interpolação entre esses pontos. Para cada elemento, é conveniente a passagem do sistema de referência de coordenadas globais tridimensional, para um sistema local de duas dimensões, sobre a superfície do elemento em si (η_1, η_2) (BEER; IAN; DUENSER, 2008).

No presente trabalho utiliza-se de um tipo de elemento de contorno quadrilateral representado pela figura 6.

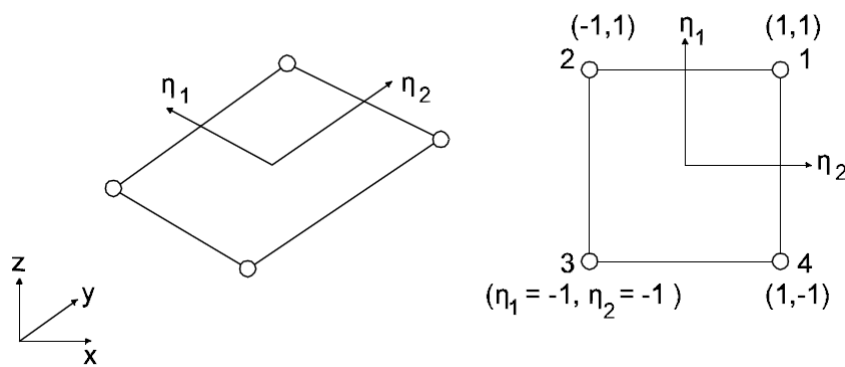


FIGURA 6 – ELEMENTO QUADRILATERAL.

As coordenadas cartesianas de um ponto com coordenada local (η_1, η_2) , pertencentes a um elemento Γ_j , são expressas em termos das coordenadas de seus nós geométricos (x_m, y_m, z_m) e das suas funções de forma ψ_m satisfazendo as seguintes relações:

$$x = \sum_{m=1}^{NN} \psi_m x_m \quad (70)$$

$$y = \sum_{m=1}^{NN} \psi_m y_m \quad (71)$$

$$z = \sum_{m=1}^{NN} \psi_m z_m \quad (72)$$

onde NN corresponde ao número de nós geométricos do elemento Γ_j e ψ_m representa a função de forma associada ao nó m pertencente a Γ_j . As funções de forma têm a seguinte propriedade: $\psi_m = 1$, quando estão computadas na coordenada do nó geométrico, e $\psi_m = 0$

quando correspondem a outro nó qualquer. A figura 7 representa a função de forma associada ao nó 3 do elemento em questão.

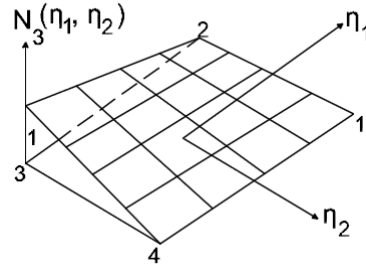


FIGURA 7 – FUNÇÃO DE FORMA N_3 DE UM ELEMENTO DE CONTORNO QUADRILATERAL.

As funções de forma, que podem ser obtidas pelo polinômio de Lagrange para elementos quadrilaterais com quatro pontos geométricos, são as seguintes:

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1) \quad (73)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4}(\eta_1 - 1)(\eta_2 + 1) \quad (74)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4}(\eta_1 - 1)(\eta_2 - 1) \quad (75)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4}(\eta_1 + 1)(\eta_2 - 1) \quad (76)$$

Além da definição da forma do sólido a ser modelado, é necessário também especificar a variação das quantidades físicas (deslocamento e força de superfície no caso da elasticidade) em um elemento. Os valores de u e t para qualquer ponto do contorno Γ_j , podem ser aproximados utilizando-se funções de interpolação ϕ_n e seus valores nos nós funcionais u_n e t_n :

$$u = \sum_{n=1}^{NF} \phi_n u_n \quad (77)$$

$$t = \sum_{n=1}^{NF} \phi_n t_n \quad (78)$$

sendo que u_n e t_n representam, respectivamente, os valores dos deslocamentos e de forças de superfície no nó funcional n do elemento Γ_j , NF corresponde ao número de pontos nodais funcionais em Γ_j e ϕ_n é a função de interpolação associada ao ponto nodal n .

Neste trabalho, como foram utilizados elementos constantes, representados pela figura 9, as funções utilizadas para aproximação de u e t são funções de interpolações constantes.

Para essa função, todo o elemento possui valores de u e t constantes. Então o único valor que precisa ser avaliado é o valor no ponto centrorial do elemento. A função de aproximação recebe o valor de 1.

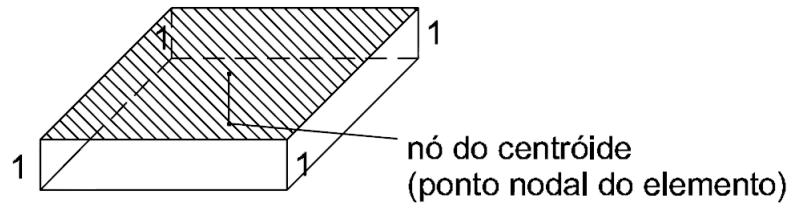


FIGURA 8 – ELEMENTO CONSTANTE.

Reescrevendo a equação (68), considerando ausência de forças de volume, antes das condições de contorno serem aplicadas, tem-se:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma \quad (79)$$

Representando $u_j(x)$, $t_j(x)$, $U_{ij}(x', x)$, e $T_{ij}(x', x)$ matricialmente:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (81)$$

Assim a equação (79) em forma matricial fica:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \int_{\Gamma} \mathbf{T}\mathbf{u}d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}\mathbf{t}d\Gamma \quad (82)$$

Substituindo na equação (82) as equações (77) e (78) que trazem os valores aproximados de u e t em cada elemento e discretizado o contorno em NE elementos, tem-se:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \sum_{n=1}^{NF} (\phi_n u_n^j) \mathbf{T} d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \sum_{n=1}^{NF} (\phi_n t_n^j) \mathbf{U} d\Gamma_j \quad (83)$$

onde o somatório de $j=1$ até NE, indica o somatório dos NE elementos no contorno e Γ_j é o contorno do elemento j . Esse processo é conhecido como discretização da equação integral.

Como para esse trabalho as funções de interpolação ϕ_n possuem valor de 1 e u_n^j e t_n^j são constantes, podendo ser tirados da integral, equação (83) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NF} u_n^j \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NF} t_n^j \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} d\Gamma_j \quad (84)$$

Considera-se:

$$\hat{h}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} d\Gamma_j \quad (85)$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} d\Gamma_j \quad (86)$$

Efetua-se a mudança de coordenadas do sistema global para o sistema local (η_1, η_2) .

Sendo:

$$d\Gamma = |G| d\eta_1 d\eta_2 \quad (87)$$

onde $|G|$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

As submatrizes \hat{h}_{ij} e g_{ij} ficam:

$$\hat{h}_{ij} = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} |G| \mathbf{T} d\eta_1 d\eta_2 \quad (88)$$

$$g_{ij} = \int_{\eta_1} \int_{\eta_2} |G| \mathbf{U} d\eta_1 d\eta_2 \quad (89)$$

Para cada nó funcional i obtém-se:

$$C_i u_i + [\hat{h}_{i1} \hat{h}_{i2} \dots \hat{h}_{ii} \dots \hat{h}_{ir}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = [g_{i1} g_{i2} \dots g_{ii} \dots g_{ir}] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} \quad (90)$$

onde u_j e t_j são as incógnitas dos nós j , \hat{h}_{ij} e g_{ij} são os coeficientes que relacionam o nó i com todos os outros nós do contorno do corpo.

Escrevendo a equação matricial para todos os nós i juntos:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \hat{h}_{12}\dots & \hat{h}_{1i}\dots & \hat{h}_{1r} \\ \hat{h}_{21} & h_{22}\dots & \hat{h}_{2i}\dots & \hat{h}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{h}_{i1} & \hat{h}_{i2}\dots & h_{ii}\dots & \hat{h}_{ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{h}_{r1} & \hat{h}_{r2}\dots & \hat{h}_{ri}\dots & h_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12}\dots & g_{1i}\dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22}\dots & g_{2i}\dots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2}\dots & g_{i\dots} & g_{ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2}\dots & g_{ri}\dots & g_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} \quad (91)$$

onde as submatrizes da diagonal são:

$$h_{ii} = \hat{h}_{ii} + C_i \quad (92)$$

A equação (91) pode ser escrita como:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \quad (93)$$

Havendo uma incógnita por nó, o sistema pode ser reordenado movendo as colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} de um lado para outro, de forma que todas as incógnitas sejam levadas para o lado esquerdo, formando o seguinte sistema:

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{b} \quad (94)$$

onde \mathbf{y} é o vetor das incógnitas no contorno e \mathbf{b} contém as contribuições das condições de contorno.

No problema direto, quando todas as condições de contorno são conhecidas, esse sistema possui o mesmo número de incógnitas e equações e pode ser resolvido diretamente. No caso em que nem todas as condições de contorno são conhecidas, esse sistema possui um número de incógnitas maior que o de equações e são necessárias informações adicionais de dados de campo para resolvê-lo.

Resolvendo o sistema, é possível obter os valores nodais no contorno. A solução desse sistema permite o cálculo dos deslocamentos e das tensões nos pontos internos.

3.7.1 IMPOSIÇÃO DE MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO

Para obtenção das submatrizes h_{ii} , os coeficientes C_i podem ser obtidos considerando um movimento de corpo rígido, ou seja, impondo ao problema somente condições de contorno de deslocamentos, tem-se:

$$HI_i = 0 \quad (95)$$

onde I_l é um vetor que define um deslocamento rígido unitário na direção l . Então, a diagonal de H fica:

$$h_{ii} = - \sum_{i \neq j} h_{ij} \quad (96)$$

ou seja, os coeficientes da diagonal podem ser obtidos pelos demais coeficientes da matriz H , sem a necessidade de obter os coeficientes C_i nem os \hat{h}_{ii} . Essa expressão (96) é válida para domínios finitos.

3.7.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS MATRIZES H e G

Para calcular os termos das matrizes H e G , quando $i \neq j$, nesse trabalho as integrais não singulares foram calculadas por quadratura Gaussiana padrão (BEER; IAN; DUENSER, 2008), utilizando um número fixo de 10 pontos de Gauss nas duas direções. Empregando a integração numérica, sendo:

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{NF}]^T \quad (97)$$

As equações (88) e (89) ficam:

$$\hat{h}_{ij} \approx \sum_{g_1=1}^{NG1} \sum_{g_2=1}^{NG2} |G| \mathbf{T} \boldsymbol{\phi} w_{g_1} w_{g_2} \quad (98)$$

$$g_{ij} \approx \sum_{g_1=1}^{NG1} \sum_{g_2=1}^{NG2} |G| \mathbf{U} \boldsymbol{\phi} w_{g_1} w_{g_2} \quad (99)$$

onde $NG1$ e $NG2$ são os números de pontos de integração na direção η_1 e η_2 respectivamente e w_{g_1} e w_{g_2} são os coeficientes de ponderação da integração numérica.

3.7.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE NÚCLEOS FRACAMENTE SINGULARES

Para obtenção das submatrizes g_{ii} , o elemento quadrangular é dividido em quatro subelementos triangulares, representado na figura 9. Cada subelemento é então tratado como quadrilateral dos quais 2 de seus cantos são coincidentes. Assim, a integração de \mathbf{U} é feita para cada subelemento quadrangular pela quadratura Gaussiana.

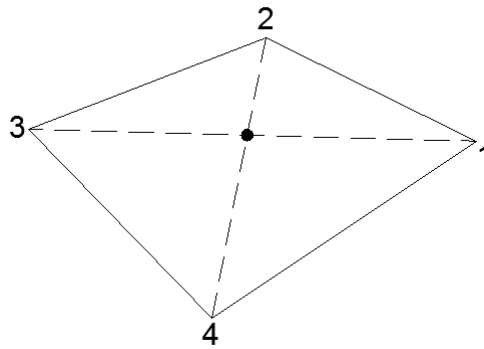


FIGURA 9 – SUBDIVISÃO DO ELEMENTO PARA A INTEGRAÇÃO DE \mathbf{U} QUANDO O PONTO DE COLOCAÇÃO É O NÓ DO ELEMENTO DE INTEGRAÇÃO.

A singularidade do tipo $\frac{1}{r}$ para $r \rightarrow 0$ contida em \mathbf{U} , é cancelada tratando o triângulo como um quadrilátero com dois de seus cantos colapsados no ponto de colocação. Essa aproximação foi proposta por Lachat (1975).

3.8 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

3.8.1 Exemplo 1

Para validação do código implementado com o uso do MEC 3D em relação aos resultados no contorno, foi analisado, primeiramente, um exemplo simples de um cubo, representado na figura 10 com as seguintes características:

- Módulo de Elasticidade: 200GPa;
- Coeficiente de Poisson: 0,32;
- Lado: 2,0m.

Todos os elementos de sua face superior foram tracionados com uma força superficial de 10kPa no eixo vertical. Em sua base, o movimento no elemento central foi restringido em seus 3 eixos e nos demais elementos da base o movimento foi restringido apenas na direção vertical.

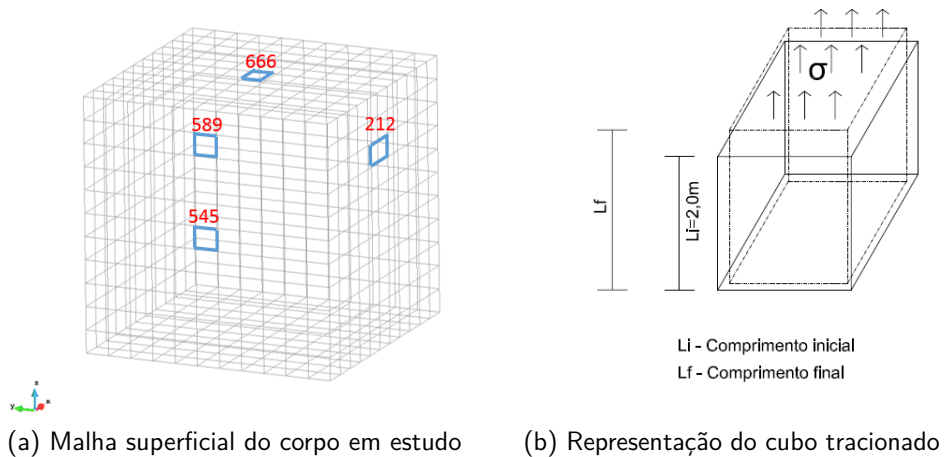


FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DO CUBO TRACIONADO E DE SUA MALHA.

A figura 11 ilustra os deslocamentos obtidos com a aplicação do código de análise direta.

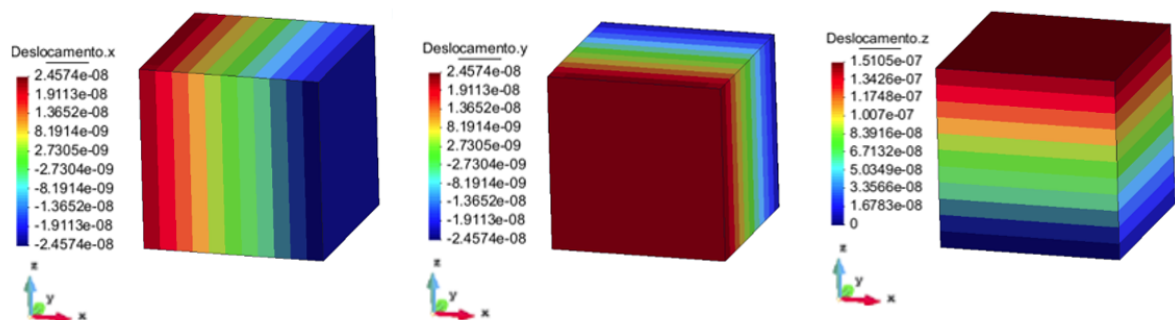


FIGURA 11 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z DO CUBO.

Timoshenko e Goodier (1968) apresentam a lei de Hooke de onde obtém-se a solução analítica para esse caso. Como na face superior do cubo foi aplicado um estado de tensão uniforme σ_{33} , a extensão ε_{33} se relaciona-se com a tensão σ_{33} pela fórmula:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} \quad (100)$$

sendo:

E : Módulo de elasticidade longitudinal

σ : Tensão

O alongamento na direção z é acompanhado por componentes laterais de deformação (contração) dadas por:

$$\varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} \quad (101)$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} \quad (102)$$

A tabela 1 apresenta os resultados obtidos pelo MEC e a solução analítica para os nós funcionais de alguns elementos identificados na figura 10.

TABELA 1 – DESLOCAMENTOS RESULTANTES DA APLICAÇÃO ANALÍTICA E DO MEC NOS PONTOS FUNCIONAIS.

Método	MEC	Analítico	MEC	Analítico	MEC	Analítico
Elemento/Desl.	X	X	Y	Y	Z	Z
El. 666	0,0	0,0	0,0	0,0	1,51E-07	1,50E-07
El. 545	2,44E-08	2,40E-08	0,0	0,0	7,54E-08	7,50E-08
El. 589	2,44E-08	2,40E-08	0,0	0,0	1,30E-07	1,30E-07
El. 212	1,31E-08	1,30E-08	2,45E-08	2,40E-08	1,16E-07	1,16E-07

Para o cálculo do erro percentual relativo, adotou-se a seguinte fórmula:

$$ER = \frac{|X_{ana} - X_{mec}|}{X_{ana}} \cdot 100 \quad (103)$$

Sendo:

X_{ana} - Valor obtido pelo método analítico

X_{mec} - Valor obtido pelo MEC

A tabela 2 apresenta o erro percentual gerado pelo MEC em relação à formulação analítica.

TABELA 2 – ERRO PERCENTUAL RELATIVO DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ANALÍTICO E PELO MEC.

Coordenadas	ER(%)		
	X	Y	Z
El. 666	0,0 %	0,0 %	0,70%
El. 545	1,73%	0,0%	0,62%
El. 589	1,93%	0,0%	0,40%
El. 212	0,78%	1,93%	0,42 %

Observa-se que os deslocamentos obtidos pela forma analítica e pelo MEC apresentam ótima concordância.

3.8.2 Exemplo 2

O segundo caso consiste de um modelo representando um cilindro de aço maciço, com as seguintes características:

- Módulo de Elasticidade: 200GPa;
- Coeficiente de Poisson: 0,32;
- Comprimento: 7,0m;
- Diâmetro: 0,3m.

Nesse exemplo de estudo, ilustrado pela figura 12, o cilindro é engastado em uma extremidade e tracionado na outra por uma força de superfície de 1MPa.



FIGURA 12 – CILINDRO DE AÇO MACIÇO TRACIONADO.

A equação (100) também é utilizada para obtenção da solução analítica para este caso.

O resultado analítico foi comparado com o MEC para diferentes malhas com 528, 1168 e 2400 elementos. Os resultados referentes aos erros relativos podem ser visualizados na tabela 3.

TABELA 3 – ERRO PERCENTUAL RELATIVO DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ANALÍTICO E PELO MEC PARA O TUBO TRACIONADO.

Malha		
MEC 528	MEC 1168	MEC 2400
5,11 %	1,07 %	0,57%

A figura 13 apresenta os resultados obtidos pelo MEC para os deslocamentos em z com a utilização da malha de 1168 elementos.

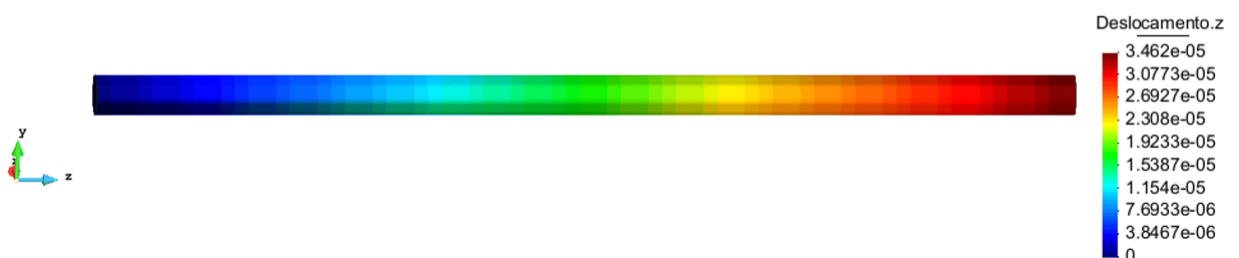


FIGURA 13 – DESLOCAMENTOS NO EIXO Z.

Verifica-se pela figura 13 que os resultados apresentaram um comportamento coerente, com o deslocamento aumentando linearmente de zero, na extremidade engastada, até a outra extremidade.

O gráfico da figura 14 ilustra o erro relativo do MEC em relação à solução analítica para as diferentes malhas.

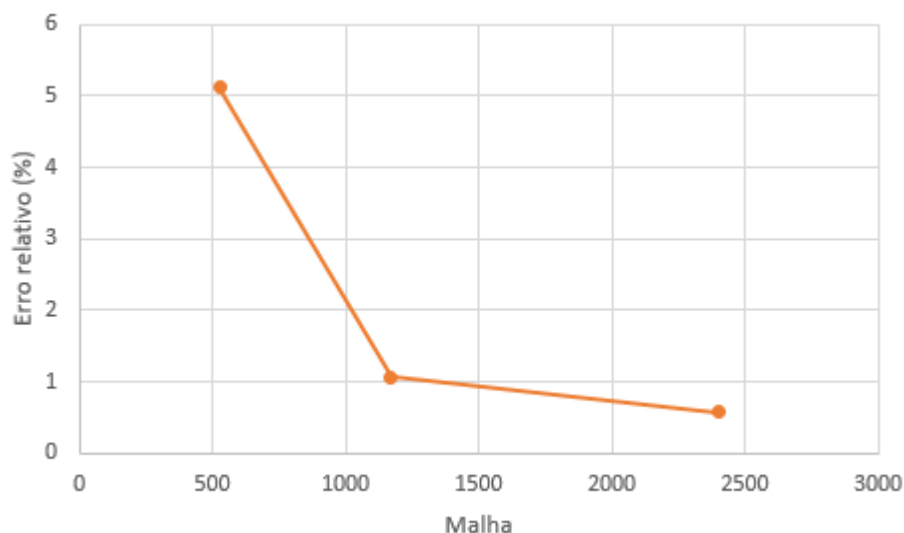


FIGURA 14 – ERRO RELATIVO COM O REFINAMENTO DA MALHA DO MEC PARA O TUBO ENGASTADO.

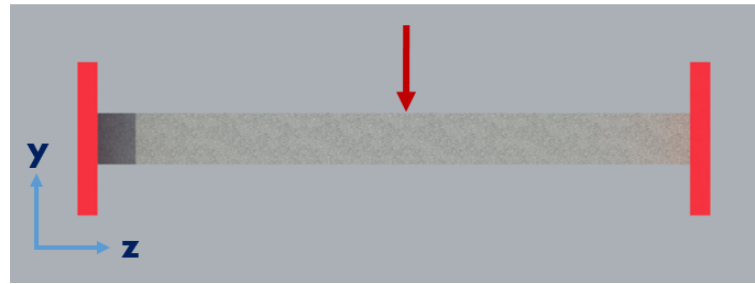
Através desse gráfico verifica-se a aproximação do resultado do MEC com o analítico conforme a malha é mais refinada.

3.8.3 Exemplo 3

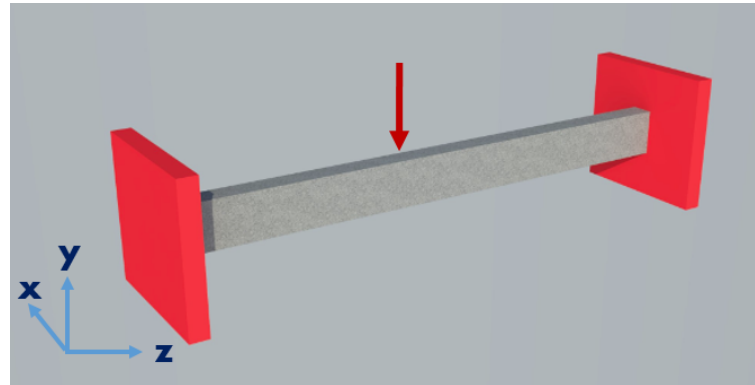
Um último exemplo foi estudado com um modelo representando uma viga de aço maciço, com as seguintes características:

- Módulo de Elasticidade: 200GPa;
- Coeficiente de Poisson: 0,32;
- Comprimento: 3,5m;
- Largura: 0,15m;
- Altura: 0,3m.

Nesse exemplo, representado pela figura 15, a viga é engastada nas suas duas extremidades e é flexionada por uma força de superfície pontual de -9MPa em um elemento na sua região central.



(a) Vista Frontal



(b) Vista em Perspectiva

FIGURA 15 – VIGA DE AÇO MACIÇA FLEXIONADA.

A solução analítica para a flecha máxima de uma viga biengastada com uma força P central para o caso unidimensional é obtida pela fórmula:

$$W_{max} = \frac{1}{192} \frac{PL^3}{EI} \quad (104)$$

sendo:

I - Momento de inércia

A tabela 4 apresenta os erros relativos obtidos com as malhas de 990, 2086 e 2710 elementos.

TABELA 4 – ERRO PERCENTUAL RELATIVO DA RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ANALÍTICO E PELO MEC PARA A VIGA FLEXIONADA.

Malha		
MEC 990	MEC 2086	MEC 2710
48,38 %	35,06 %	30,07%

A figura 16 apresenta os resultados obtidos pelo MEC para os deslocamentos em x , y , z com a utilização da malha de 2086 elementos.

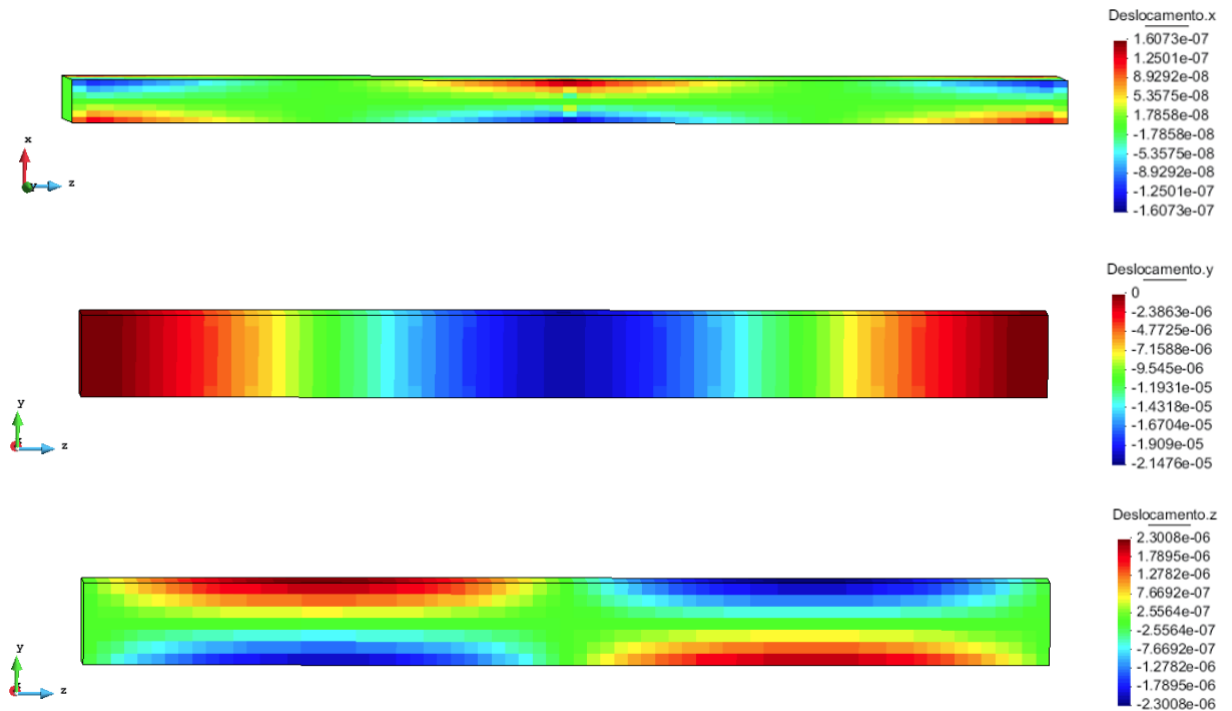


FIGURA 16 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z.

Verifica-se pela figura 16 que os resultados para esse exemplo também apresentam um comportamento coerente.

Na figura 17 tem-se o gráfico dos erros relativos versus a malha para os resultados obtidos pelo MEC em relação ao analítico. Uma vez mais, é possível verificar a aproximação do resultado do MEC com o analítico conforme a malha é mais refinada.

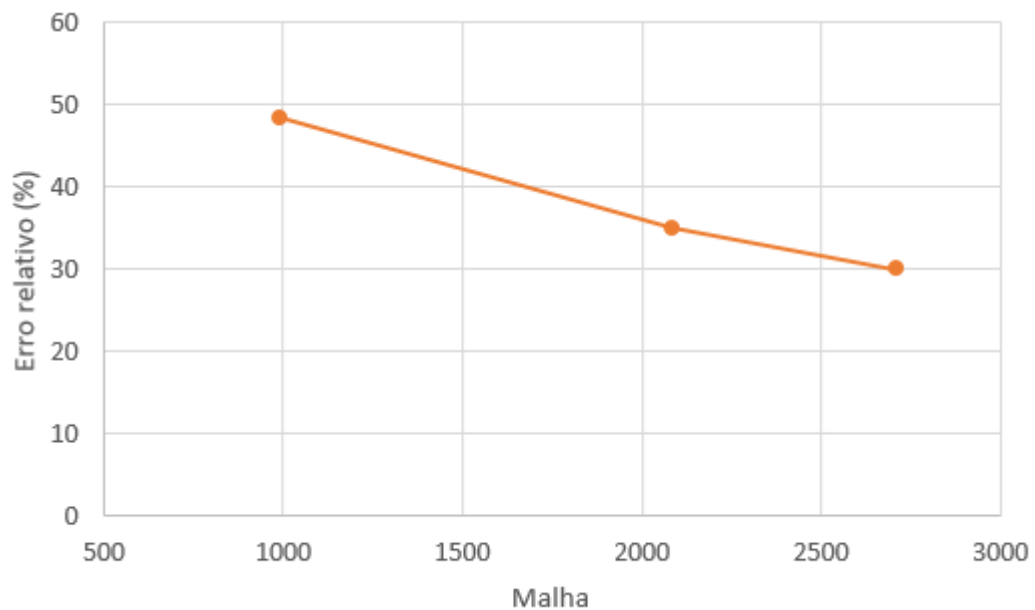


FIGURA 17 – ERRO RELATIVO COM O REFINAMENTO DA MALHA DO MEC PARA O TUBO FLEXIONADO.

Verificou-se que esse último exemplo apresentou erros relativos com valores significativos. Um dos motivos que pode ter contribuído para o erro relativo apresentado foi o fato de a solução analítica ser para casos unidimensionais e o presente exemplo ser tridimensional. Outro fator importante deve-se ao fato de que a fórmula da flexão ser uma função do 3^a grau e o cálculo com o MEC utilizar elementos constantes. Com o uso de elementos lineares ou quadráticos, espera-se um resultado melhor, porém com um maior custo computacional. Neste trabalho optou-se por manter o uso dos elementos constantes pelo fato desse erro não influenciar no resultado da análise inversa, pois os dados em campo são também simulados com o modelo direto utilizando elementos constantes. Porém, com os dados experimentais medidos em campo na prática, esse erro pode ter grande influência na análise inversa. Sendo assim, sugere-se a implementação de elementos de maior ordem em trabalhos futuros.

4 ANÁLISE INVERSA

Em um problema direto na elasticidade são conhecidas: a equação governante, as condições de contorno, a geometria e as propriedades do material. Assim, as tensões, deformações e deslocamentos ao longo do corpo podem ser obtidos diretamente. Já em um problema inverso, os parâmetros no contorno, geometria e propriedades do material, podem não ser conhecidos. O propósito de uma análise inversa é a identificação de parâmetros desconhecidos usando informações adicionais de medidas experimentais.

Uma forma de interpretar o problema inverso é considerá-lo como um problema de otimização, buscando-se maximizar ou minimizar uma função objetivo dada, via métodos gradientes ou não gradientes. Os métodos gradientes envolvem derivadas e seus resultados são fortemente dependentes do valor inicial assumido, devendo convergir a um ótimo global na vizinhança do ponto inicial. Um ponto fraco desse método é a necessidade de uma boa aproximação inicial para a sua convergência. Uma forma de se evitar a chegada a um mínimo local é rodar o programa múltiplas vezes com diferentes escolhas iniciais, porém esse processo pode demorar. Já os métodos não gradientes não necessitam de derivadas e a otimização é feita apenas pela função objetivo. Esses métodos não gradientes vem se desenvolvendo pela sua facilidade de implementação para uma variedade de problemas, mas geralmente são mais demorados para convergir a um mínimo ou máximo do que as técnicas gradientes (MILTIADOU; WROBEL, 2002).

Para este trabalho optou-se por utilizar o método não gradiente dos Algoritmos Genéticos afim de verificar sua eficiência para uma análise inversa em dutos. Uma possível desvantagem dos AGs é o custo computacional requerido para o processo de busca. Neste sentido, foi elaborado também um programa que utiliza um método híbrido com o uso do método não gradiente dos Algoritmos Genéticos associado com o método gradiente de Newton-Raphson, aproveitando as características vantajosas e minimizando as desvantajosas tanto de um como de outro. Com o AG, faz-se uma exploração no espaço de busca evitando a convergência em um mínimo local para então utilizar esse resultado como escolha inicial na aplicação do MNR, diminuindo o custo computacional.

4.1 ALGORITMOS GENÉTICOS

4.1.1 Introdução

Nos anos 1950 e 1960, vários cientistas, de forma independente, estudaram sistemas evolucionários com a ideia de que a evolução podia ser usada como uma ferramenta de otimização para problemas na engenharia. A ideia básica de todos esses sistemas foi a de envolver uma população de candidatos a soluções para um determinado problema, usando

operadores baseados na variação genética e seleção natural. Em 1960, I. Rechenberg introduziu a computação evolucionária por meio de sua obra "Estratégias de Evolução". O seu estudo foi então desenvolvido por outros pesquisadores (MITCHELL, 1996).

Os Algoritmos Genéticos foram inventados por John Holland, por seus colegas e seus estudantes da Universidade de Michigan. Em 1975, Holland publicou "*Adaptation in Natural and Artificial System*" (GOLDBERG, 1989). O trabalho de Holland apresenta o estudo dos AGs como uma metáfora para os processos evolutivos, simulando a adaptação e a evolução no mundo real dentro de computadores. Esse método transformou-se em uma ferramenta de uso disseminado pelos cientistas da computação (LINDEN, 2008).

Os AGs possuem uma larga aplicação em muitas áreas científicas, tais como: na aeronáutica, medicina, robótica, reconhecimento facial, processamento de imagens, tecnologia a laser e controle. São algoritmos de otimização numérica baseados na seleção natural e na genética. Da teoria de evolucionismo de C. Darwin, o princípio de seleção privilegia os indivíduos que são mais aptos e com maior possibilidade de sobrevivência e, portanto, esses possuem uma maior probabilidade de reprodução. Quanto maior o número de descendentes, maiores são as chances de permanecerem seus códigos genéticos para as próximas gerações. Esses códigos genéticos constituem a identidade de cada indivíduo e estão representados nos cromossomos. Estes são os princípios que inspiram a construção dos AGs, que buscam uma melhor solução para um determinado problema através da evolução de populações de soluções codificadas por meio de cromossomos artificiais (COLEY, 1999).

4.1.2 Características

Linden (2008) apresenta algumas características dos AGs:

- São técnicas probabilísticas, ou seja, com uma mesma população inicial e o mesmo conjunto de parâmetros pode-se encontrar diferentes soluções cada vez que é executado.
- São técnicas heurísticas de otimização global que não usam apenas informação local, logo, não ficam necessariamente presos em máximos e mínimos locais, como certos métodos de busca que seguem a derivada de uma função de forma a encontrar o máximo ou o mínimo de uma função ficando facilmente retidos em máximos ou mínimos locais.
- Descontinuidade na função ou em suas derivadas não afetam seu funcionamento, pois não usam informações de derivadas na sua evolução. Isto faz com que sejam adequados para funções com descontinuidades ou para quando não se pode calcular a derivada.
- Trabalham com uma população de pontos. Essa técnica diferencia-se dos esquemas enumerativos pelo fato de não procurar em todos os pontos possíveis, mas sim em um subconjunto desses pontos.

- Possuem componentes aleatórios, mas como usam informações da população corrente para determinar o próximo estado de busca, não podem ser considerados totalmente aleatórios.

4.1.3 Terminologia

Como os AGs são inspirados na teoria da evolução das espécies, sua terminologia possui uma analogia muito forte com os termos da biologia. Em seguida são apresentados os principais termos utilizados.

- Cromossomo/Indivíduo: cadeia de bits que representa uma possível solução para o problema;
- População: conjunto de pontos com possíveis soluções (indivíduos) no espaço de busca;
- Geração: ciclo completo que gera uma nova população;
- Gene: representação de cada característica de acordo com o alfabeto utilizado, podendo ser binário, inteiro ou real. Neste trabalho, adotam-se os genes em forma de binário.
- Alelo: representa os valores que o gene pode assumir; sendo esses para o caso binário os valores são: 0 ou 1.

4.1.4 Funcionamento

A ideia do funcionamento dos AGs é construir um modelo de “evolução” onde as possíveis soluções do problema são “indivíduos” de uma “população” que irá “evoluir” a cada iteração ou “geração”.

Um esquema do funcionamento dos AGs é ilustrado na figura 18, podendo ser descrito pelos seguintes passos (LINDEN, 2008):

- a) Inicializar a população de cromossomos, geralmente de forma aleatória.
- b) Avaliar cada cromossomo da população, através da função objetivo, chamada também de função aptidão (FA), que determina a qualidade do indivíduo como solução do problema em questão.
- c) Selecionar os pais que vão gerar novos cromossomos. São privilegiados os indivíduos mais aptos, sem desprezar completamente os menos aptos para a manutenção da diversidade da população.
- d) Aplicar os operadores de cruzamento e mutação a estes pais de forma a gerar indivíduos da nova geração. Estes operadores são os principais mecanismos dos AGs para explorar regiões desconhecidas do espaço de busca.

e) Se o melhor cromossomo satisfaz os requerimentos e desempenho, fim do esquema, caso contrário, voltar ao passo b).

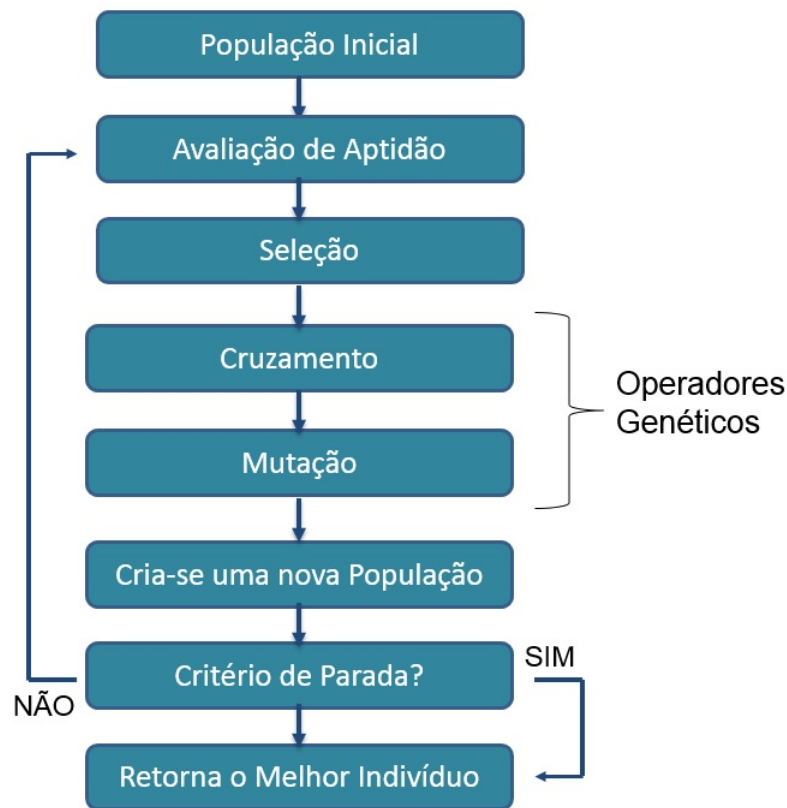


FIGURA 18 – EXEMPLO DE FUNCIONAMENTO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS.

Segundo Coley (1999), os AGs são inicializados com uma população de possíveis soluções que geralmente são geradas de forma aleatória. Essa população é formada por indivíduos representados por cromossomos que podem ser vistos como pontos de solução no espaço de busca do problema a ser otimizado.

Os cromossomos em uma população dos AGs geralmente levam a forma de um vetor binário, ou seja, cada posição no cromossomo possui duas possibilidades de valor: 0 ou 1. (MELANIE,1996)

Pacheco (1999) cita como algumas das vantagens da representação binária, a facilidade de manipular os cromossomos através dos operadores genéticos e a facilidade da transformação de real e inteiro.

Linden (2008) explica que, para a representação de números reais por binários, é necessário saber a faixa de trabalho de cada uma das variáveis e a precisão desejada, que está ligada ao número de pontos (np) dentro do espaço de busca. O número de pontos para uma codificação binária é dado por:

$$np = 2^k \quad (105)$$

sendo k o número de bits em cada cromossomo, define-se assim, quantos bits serão necessários para uma variável que, quanto maior, melhor a sua precisão. A precisão de uma variável que opera em uma faixa $[P_{min}, P_{max}]$ é calculada por:

$$precisao = \frac{P_{max} - P_{min}}{2^k - 1} \quad (106)$$

Por exemplo, se 10 bits são definidos para uma variável que trabalha na faixa de operação de 2 até 10 então a sua precisão é de $\frac{10-2}{2^{10}-1} \approx 0,00078$.

Para mapear a representação binária dentro do intervalo real $[P_{min}, P_{max}]$, utiliza-se a equação:

$$real = P_{min} + \frac{P_{max} - P_{min}}{2^k - 1} n_{inteiro} \quad (107)$$

onde $n_{inteiro}$ é o inteiro correspondente ao binário.

Os AGs, portanto, são iniciados com uma população inicial, gerada de forma aleatória, de cromossomos que são convertidos, posteriormente, para as variáveis reais de otimização. Após obter a primeira população, calcula-se o valor de uma função objetivo para cada variável gerada. Através dessa função, também chamada de função aptidão, é possível avaliar a qualidade de cada solução para o problema de máximo ou de mínimo.

No presente trabalho, o AG é implementado para determinar os minimizadores da função objetivo que é representada por:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{N_v} \left(\frac{x_{exp_i} - x_{calc_i}}{x_{calc_i}} \right)^2, k = 1, 2, \dots, N_p \quad (108)$$

onde:

Z_k - o valor da função para cada indivíduo.

x_{exp_i} - deslocamento relativo entre os dois pontos medidos experimentalmente

x_{calc_i} - deslocamento relativo entre os dois pontos calculados pelo MEC

N_v - número de medidas

N_p - número de indivíduos

Esses cromossomos são então submetidos a um processo evolucionário com a aplicação da seleção e dos chamados operadores genéticos. Um típico algoritmo genético usa dois operadores para direcionar a população, através de uma série de gerações, para o ótimo global: o de cruzamento e o de mutação.

A seleção é aplicada sobre a população de maneira semelhante à seleção natural encontrada em sistemas biológicos. Utilizando a função aptidão, é possível avaliar os indivíduos, priorizando os indivíduos mais eficientes que, para esse caso, são as variáveis que resultam nos menores valores para função objetivo. Esse processo faz com que esses indivíduos mais

aptos tenham uma maior possibilidade de promover a informação que eles possuem para uma próxima geração. Os indivíduos menos aptos não são totalmente excluídos para evitar a chamada convergência genética, onde a população tenderia a possuir indivíduos cada vez mais semelhantes, gerando uma perda de diversidade desta população.

O método de seleção aplicado nesse trabalho foi o chamado torneio que utiliza de sucessivas "disputas", onde em cada uma dois indivíduos são escolhidos ao acaso e o de maior aptidão é selecionado.

O cruzamento permite a troca de informações entre indivíduos, podendo fazer uma analogia ao processo reprodutivo dos organismos. Esse operador promove uma mistura das características de dois indivíduos "pais", que foram previamente selecionados gerando novos indivíduos que potencialmente combinem as melhores características dos que foram usados como base.

Para aplicação do cruzamento acrescenta-se um parâmetro ao algoritmo que é a probabilidade deste operador ser aplicado dentro da população, chamado de probabilidade de cruzamento (P_c). A maneira como este operador é aplicado nesse trabalho é chamada de segmentada: este operador é aplicado para cada par de genes dos cromossomos selecionado na etapa anterior. São gerados números pseudoaleatórios no intervalo $[0, 1]$. Se o valor gerado for menor que P_c , então são invertidos os valores nos genes selecionados, se não, seus valores permanecem os mesmos.

Por exemplo, supondo que para um par de cromossomos selecionado, os números aleatórios gerados sejam menores que P_c para a localização dos bits na casa 2, 5 e 6, o cruzamento desses dois indivíduos é representado na figura 19:

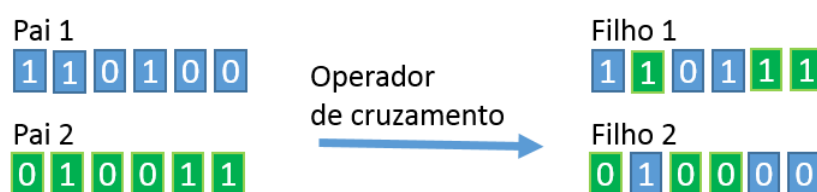


FIGURA 19 – DESCRIÇÃO DA OPERAÇÃO DE CRUZAMENTO.

O operador de mutação, usado geralmente com uma taxa bastante moderada, altera aleatoriamente o valor dos bits de um indivíduo. Seu objetivo é a manutenção da diversidade genética da população, assegurando que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca possivelmente não será zero. Ele é aplicado criando novos valores de características que não existiam ou que apareciam em pequena quantidade na população.

O operador de mutação para este trabalho é aplicado bit a bit para toda a população de cromossomos. Para selecionar os bits que sofrerão mutação, cria-se mais um parâmetro para o AG que é o da probabilidade de mutação (P_m). De maneira análoga à realizada no operador

de cruzamento, gera-se um número pseudoaleatório entre $[0, 1]$ para cada bit do cromossomo. Se este número for menor que P_m , então este bit é modificado, ou seja, se for zero passa a ser 1 e se for 1 passa a ser zero.

Após a seleção, o cruzamento e a mutação terem sido aplicados na população inicial, uma nova população é formada e o contador de geração é aumentado na proporção unitária. Estes processos de seleção, cruzamento e mutação são continuados até terem percorrido um determinado número de gerações ou até alguma forma de critério de convergência ser cumprido.

Para este trabalho foi empregado o processo de elitismo, que é o nome do método que copia o melhor indivíduo de uma população para a nova população criada. O elitismo pode aumentar o desempenho do AG pois previne a perda da melhor solução já encontrada, porém, possui o inconveniente de poder causar uma convergência prematura (GOLDBERG, 1989).

4.1.5 Modelo Formado pelos Algoritmos Genéticos e o Método dos Elementos de Contorno

Na figura 20, apresenta-se o esquema de um modelo formado pelos Algoritmos Genéticos e o Método dos Elementos de Contorno, especificando se as variáveis apresentam-se na sua forma binária ou real. Inicia-se com uma população inicial formada por possíveis soluções do problema, representadas por vetores binários. Em seguida, transformam-se esses vetores binários para números reais. Toda essa população inicial é submetida ao MEC e através de seus resultados, cada indivíduo dessa população é avaliado pela função aptidão e selecionado de acordo com sua qualidade. Esses indivíduos são submetidos aos operadores genéticos, uma nova população é criada e o ciclo volta a acontecer até um critério de parada ser satisfeito.

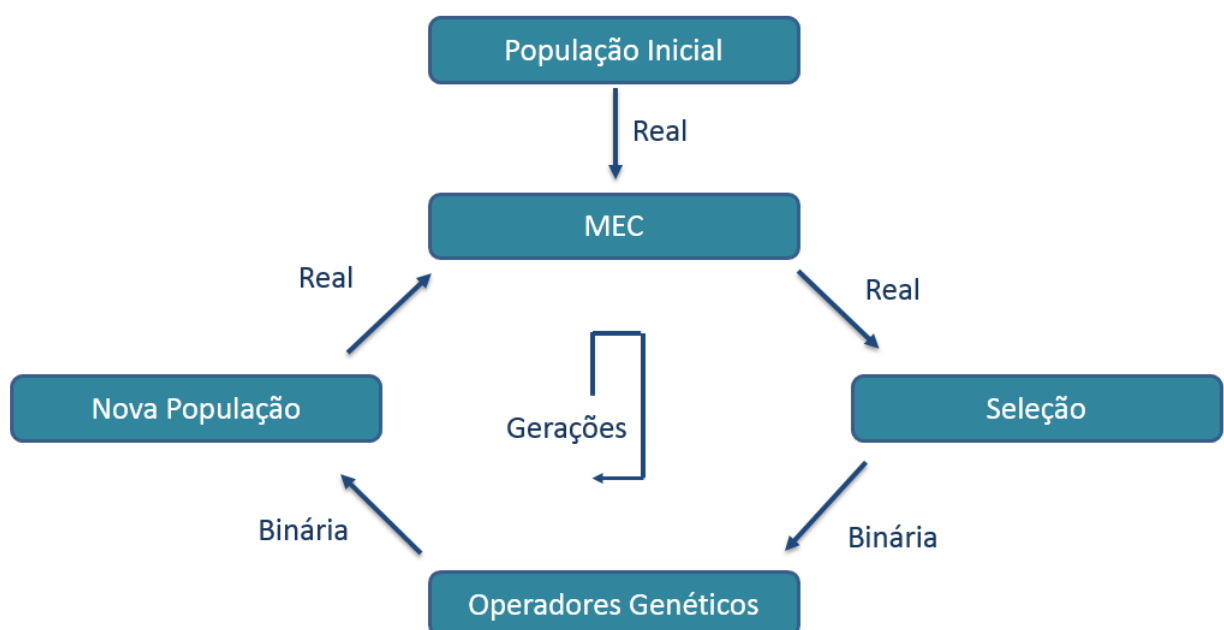


FIGURA 20 – ESQUEMA DO AG ASSOCIADO AO MEC.

4.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton Raphson é muito conhecido e poderoso pela sua eficiência, simplicidade, precisão e velocidade de convergência. O método consiste em um procedimento para o cálculo da raiz de uma função $f(x)$. A sua ideia básica é aplicar sucessivamente uma fórmula partindo de um valor inicial, obtendo, assim, uma sequência de pontos que convergirá para a raiz da função.

Para sua interpretação geométrica, ilustrada na figura 21, supõe-se um valor inicial x_0 , e traça-se uma reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. O ponto de corte dessa reta com o eixo das abcissas, representa uma nova aproximação x_1 . O processo se repete começando com x_1 , obtendo uma nova aproximação x_2 e assim sucessivamente. O processo iterativo termina quando a precisão desejada é alcançada ou um determinado número máximo de iterações é atingido (FEDERICO; HURTADO, 2014).

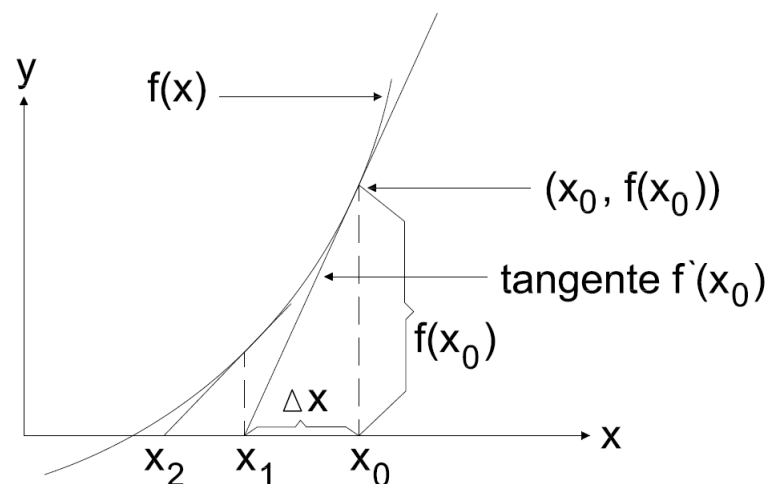


FIGURA 21 – DESCRIÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.

Sendo a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (109)$$

substituindo na equação y por 0 e x por x_1 (ponto de intersecção da reta tangente com o eixo das abcissas):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (110)$$

Em geral:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (111)$$

O MNR possui certos inconvenientes. Em alguns casos, o método não converge para a solução desejada ou não se encontra solução alguma. A figura 22 exemplifica duas dessas situações: anulamento da derivada e mudança de concavidade.

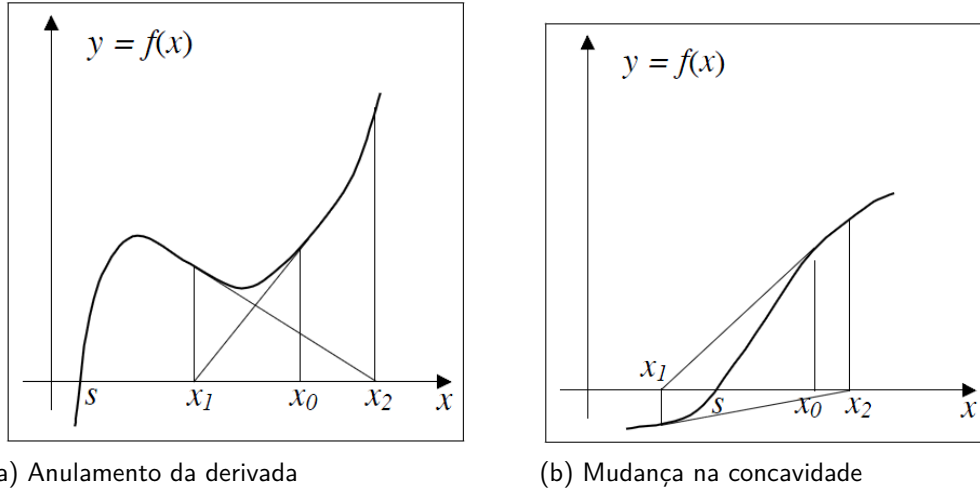


FIGURA 22 – EXEMPLOS DE COMPORTAMENTOS INDESEJÁVEIS NO MNR.

Esse método pode ser usado não só para problemas escalares como também na resolução de problemas com sistema de equações da forma:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{112}$$

Definindo $F(\mathbf{x})$ como o vetor:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}
 \tag{113}$$

Analisando esse sistema de equações (112) na forma vetorial, tem-se:

$$F(\mathbf{x}) = 0
 \tag{114}$$

sendo $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

No problema matricial, o processo é semelhante ao do caso escalar, no qual utiliza-se da expansão em Série de Taylor vetorial no ponto x_0 até o termo de primeira ordem, de modo a obter:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)F'(\mathbf{x}_0) \quad (115)$$

Portanto, será necessário definir a derivada de $F(x)$. Em seguida, define-se a Matriz Jacobiana, que não altera após a primeira iteração, formada pelas derivadas parciais das componentes de $F(\mathbf{x})$:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (116)$$

Desta forma, é possível reescrever a equação (115) como:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)J_F(\mathbf{x}_0) \quad (117)$$

Igualando-se a zero, chega-se ao processo iterativo para sistemas de equações não-lineares:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)J_F(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (118)$$

Conseqüentemente, em problemas envolvendo sistemas de equações, de forma geral tem-se que o MNR será dado pela seguinte iteração:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - J_f^{-1}F(\mathbf{x}_n) \quad (119)$$

4.2.1 Aplicação do método de Newton-Raphson com o MEC para elasticidade

O objetivo do método é encontrar as raízes de um sistema como o apresentado em (107). A equação (93), na forma $\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt}$, será manuseada para poder ser reescrita no formato $F(\mathbf{x}) = 0$. Ao alternar as colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} , obtém-se os vetores \mathbf{y} e \mathbf{v} . Chega-se então ao sistema:

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{Bv} \quad (120)$$

Fazendo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (121)$$

Pode-se escrever:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Rv} \quad (122)$$

Para uma análise direta, o vetor \mathbf{y} contém incógnitas do contorno e o vetor \mathbf{v} as condições de contorno conhecidas. Para análise inversa que busca identificar condições de contorno, as componentes do vetor \mathbf{v} não são todas conhecidas. Existe um subvetor $\mathbf{x} \subset \mathbf{v}$, que contém as incógnitas (condições de contorno desconhecidas).

Como o problema inverso aplicado nesse trabalho consiste em obter os parâmetros no contorno, correspondentes a forças de superfícies (t_1, t_2, \dots, t_k) , então o subvetor \mathbf{x} corresponde a:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} \quad (123)$$

Portanto, é necessário calcular k variáveis e o vetor $F(\mathbf{x})$ tem que, obrigatoriamente, conter k equações. Logo, para aplicação do método são necessárias no mínimo k medidas de deslocamentos relativos medidos em campo. Como pretende-se buscar um \mathbf{x} compatível com as equações de $F(\mathbf{x})$, todas as equações de $F(\mathbf{x})$ tendem a zero quando \mathbf{x} se aproxima do vetor buscado.

O vetor \mathbf{y} , para o caso direto, possui em todas as suas componentes incógnitas. Porém, para o caso inverso, existe um subvetor $\mathbf{n} \subset \mathbf{y}$ composto dos deslocamentos. Como os dados obtidos em campo são deslocamentos relativos, têm-se um vetor \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} n^a_1 - n^b_1 \\ n^a_2 - n^b_2 \\ \vdots \\ n^a_k - n^b_k \end{bmatrix} \quad (124)$$

Com isso é possível obter o seguinte sistema:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{v} - \mathbf{r} \quad (125)$$

onde o vetor $\mathbf{x} \subset \mathbf{v}$ e \mathbf{L} pode ser obtido da matriz \mathbf{R} .

Quando $F(\mathbf{x}) = 0$ tem-se o vetor de \mathbf{x} exato.

Para a resolução dessa análise inversa por Newton-Raphson, aplica-se então a fórmula:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{F(\mathbf{x}_i)}{F'(\mathbf{x}_i)} \quad (126)$$

Nesse método é necessário indicar um ponto para se inicializar o processo. Neste trabalho adotou-se um ponto obtido pelo algoritmo genético.

4.3 MODELO FORMADO PELO MÉTODO HÍBRIDO E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A figura 23 representa o fluxograma referente a como o método do Newton-Raphson é aplicado nesse trabalho, sendo que o valor inicial é obtido pelo algoritmo genético executando-se apenas uma iteração para cada ciclo de geração.

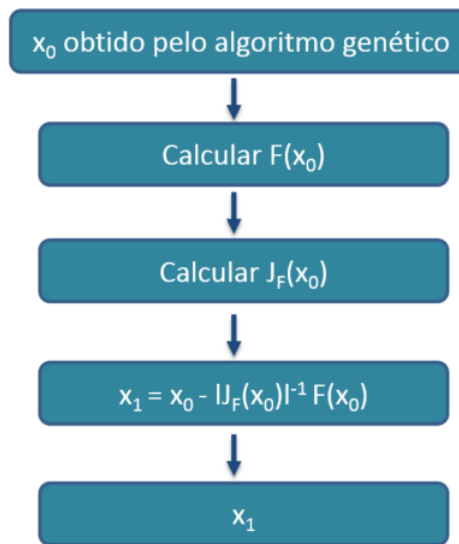


FIGURA 23 – ESQUEMA DE UM AG ASSOCIADO AO MNR.

O esquema da figura 24, ilustra, resumidamente, o funcionamento do MH para análise inversa com o MEC.

Primeiramente, cria-se uma população inicial (possíveis soluções do problema) representadas por vetores binários. Em seguida, transformam-se esses vetores binários em números reais. Para cada geração, toda essa população inicial é submetida ao MEC e pelos resultados obtidos, cada indivíduo dessa população é avaliado pela função aptidão e selecionado de acordo com sua qualidade. O melhor indivíduo dessa população é utilizado como ponto de início para o MNR e um novo indivíduo em número real é criado. Esse indivíduo em real é convertido a um vetor binário. A população anterior juntamente com esse novo indivíduo são submetidos aos operadores genéticos e uma nova população é criada. Com isto, o ciclo volta a acontecer até um critério de parada ser satisfeito.

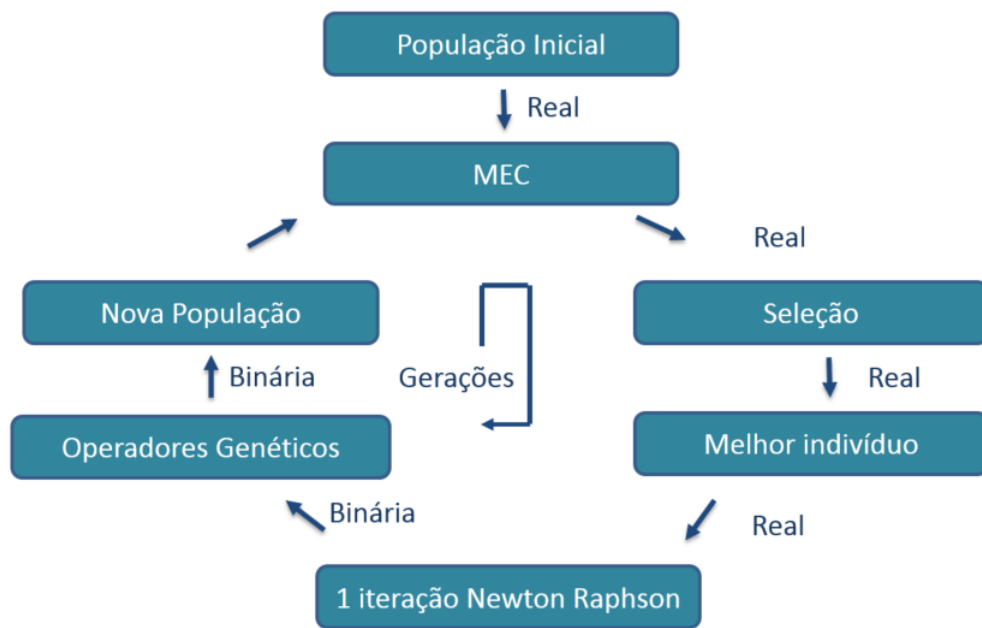


FIGURA 24 – ESQUEMA DO MÉTODO HÍBRIDO ASSOCIADO AO MEC.

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas simulações que foram realizadas com o objetivo de avaliar e validar os programas elaborados. Três exemplos foram analisados através do modelo de um duto de aço, ilustrado na figura 25, com as seguintes propriedades:

- Módulo de Elasticidade: 200GPa;
- Coeficiente de Poisson: 0,32;
- Comprimento: 7,0m;
- Diâmetro externo: 0,3m;
- Diâmetro interno: 0,26m.

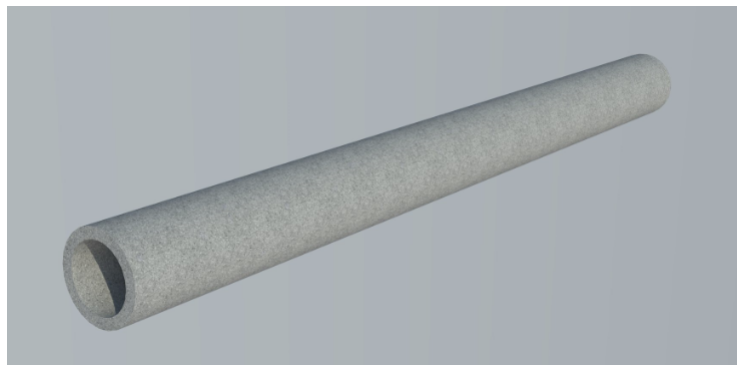
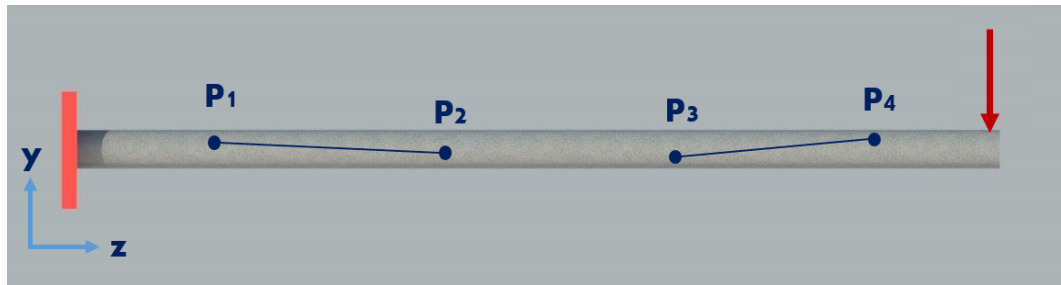


FIGURA 25 – MODELO DE ESTUDO.

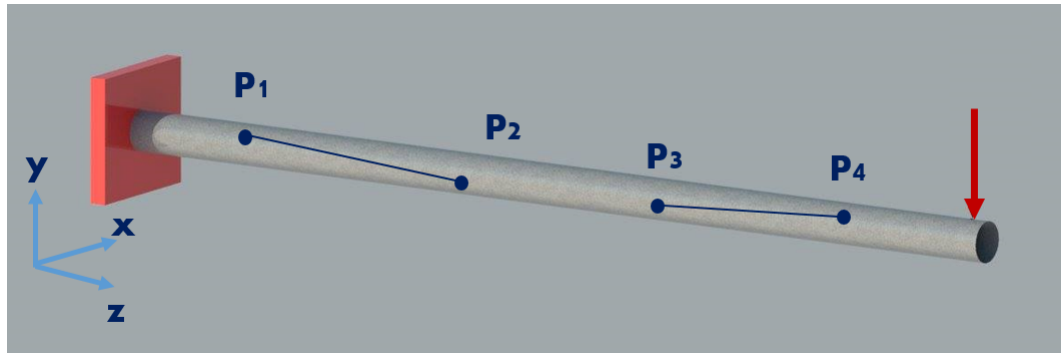
Para cada um desses estudos, primeiramente foi realizada uma análise direta para a obtenção de dados experimentais sintéticos e em seguida uma análise inversa para a busca dos parâmetros.

5.1 EXEMPLO 1

O primeiro exemplo, representado na figura 26, consiste no duto com uma de suas extremidades engastada e uma força de superfície vertical e para baixo aplicada em um elemento adjacente a sua extremidade livre. A análise inversa é feita com a utilização do código MEC com o AG para busca de um parâmetro, que consiste na magnitude da força de superfície.



(a) Vista Frontal



(b) Vista em Perspectiva

FIGURA 26 – MODELO DE ESTUDO DO EXEMPLO 1.

5.1.1 Análise Direta para simulação de dados experimentais

Para a análise direta, foram usadas as seguintes características:

- Malha de 1056 elementos de superfície constantes quadrangulares;
- Força de -15,35kN representada por uma força de superfície sobre um elemento com valor de -1,2MPa como condição de contorno predeterminada.

A figura 27 apresenta a malha gerada com o programa comercial GID versão 12.0.8.

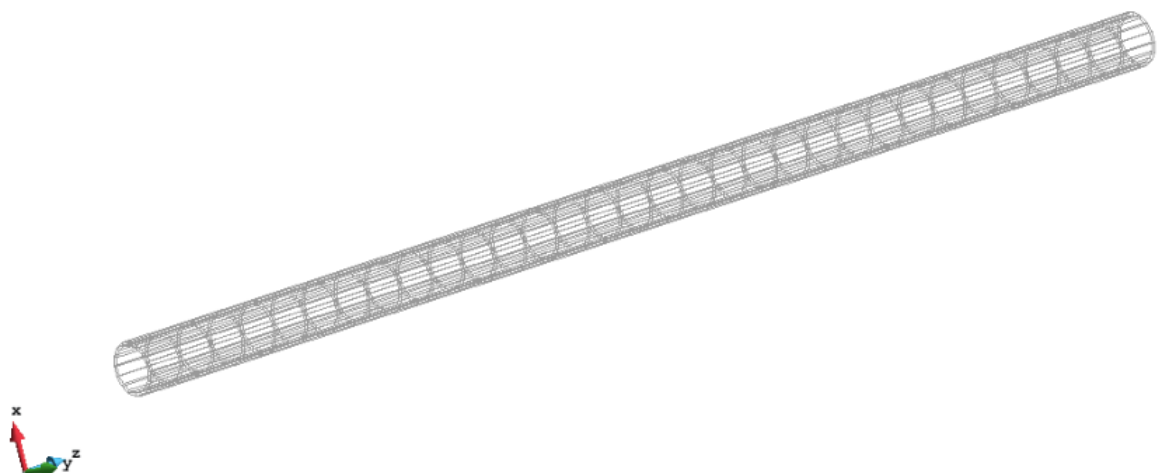


FIGURA 27 – MALHA DE 1056 ELEMENTOS DE SUPERFÍCIE NO DUTO.

Nesse exemplo, duas medidas de deformações relativas entre dois pontos foram usadas como dados de entrada para “guiar” a análise inversa no código com o uso do AG. Os pontos P1 e P2, da figura 26, referem-se aos pontos nodais dos elementos 548 e 651. Já os pontos P3 e P4 referem-se aos pontos nodais dos elementos 693 e 570. Esses pontos possuem as seguintes coordenadas iniciais, de acordo com os valores apresentados na tabela 5:

TABELA 5 – COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS.

Elemento/Coord.(m)	X	Y	Z
El. 548	-0,05380	0,16128	0,76562
El. 651	-0,14461	0,02536	2,29687
El. 693	-0,13342	-0,03093	4,48437
El. 570	-0,05380	0,16128	5,57812

Após a aplicação da análise direta pelo MEC foi possível obter os deslocamentos nos pontos nodais dos elementos. Estes deslocamentos podem ser visualizados na figura 28.

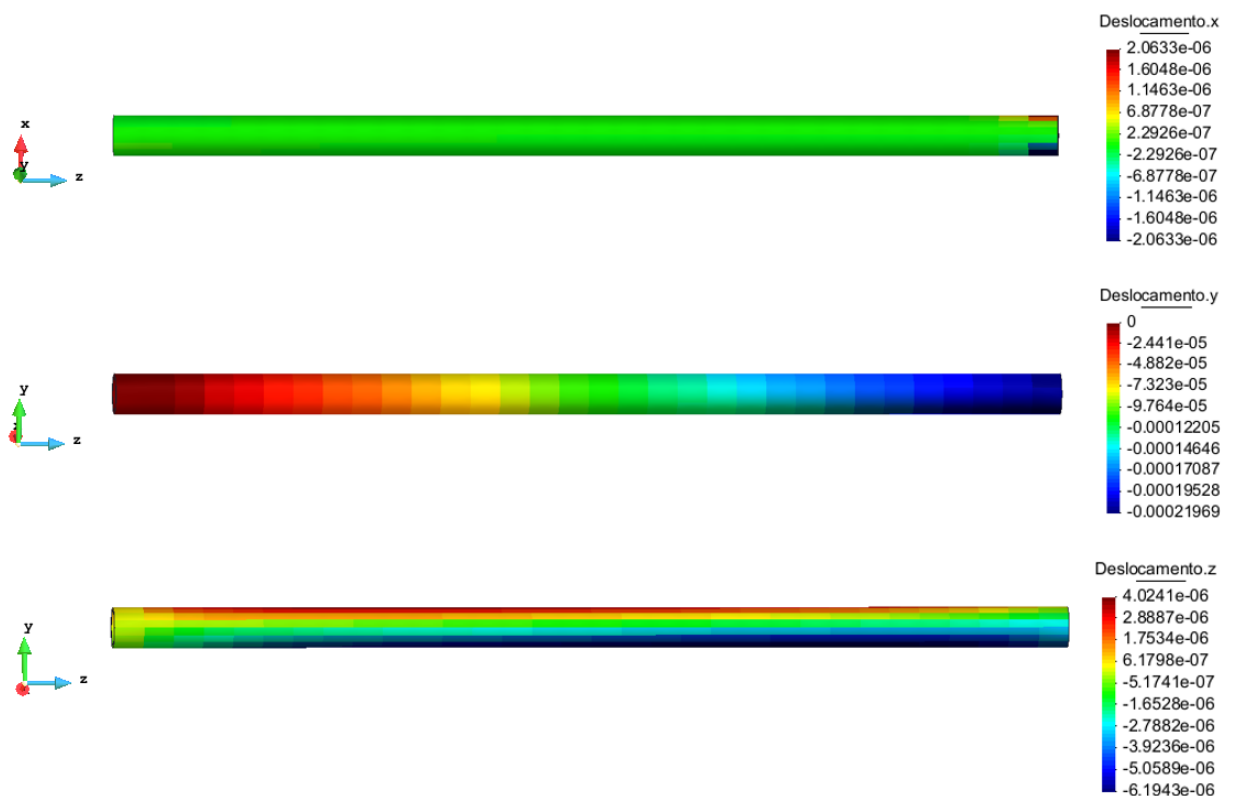


FIGURA 28 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z OBTIDOS PELO MEC PARA O EXEMPLO 1.

Os deslocamentos em seus eixos, nos pontos em questão, são apresentados na tabela 6:

TABELA 6 – DESLOCAMENTOS DOS PONTOS NODAIS.

Elemento/Desl.(m)	X	Y	Z
El. 548	2,02912E-08	-1,45565E-05	3,07007E-06
El. 651	-2,95171E-08	-6,37913E-05	-6,49297E-07
El. 693	-2,83407E-08	-1,39861E-04	-3,15370E-06
El. 570	-2,03202E-08	-1,77017E-04	2,38247E-06

Através desses resultados, foi possível obter os deslocamentos relativos nos pontos em questão, que foram computados como dados de entrada para a análise inversa, com o objetivo de simular dados de campo.

5.1.2 Análise Inversa com o Algoritmo Genético

O código implementado com o MEC para a análise direta foi utilizado como sub-programa de um código que emprega o AG para uma análise inversa. O programa fornece a resposta de cada geração com o seu respectivo valor da função aptidão da equação (108), que quanto menor, maior a qualidade do indivíduo. Nenhum critério de parada foi adotado, portanto o processo só é interrompido na última geração.

Neste exemplo, o AG é empregado com as seguintes características:

- A população possui 15 indivíduos;
- O número de gerações é 15;
- Cromossomos binários com 14 dígitos;
- A probabilidade de cruzamento é de 80% ;
- Todos os bits pertencentes aos cromossomos são submetidos a um operador de mutação com uma probabilidade de 1%;
- Arbitrou-se que o parâmetro procurado, que é o valor da força de superfície, está contido no intervalo [-2MPa,0MPa].

A tabela 7 apresenta o resultado do melhor indivíduo para cada geração lembrando que o resultado esperado é de -1200000Pa.

TABELA 7 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 1.

Geração	Melhor Indivíduo (Pa)	Valor da Função Aptidão do Melhor Indivíduo
1	-1181468,59	2,25E-016
2	-1181468,59	2,25E-016
3	-1181468,59	2,25E-016
4	-1208325,70	4,54E-017
5	-1208081,54	4,28E-017
6	-1206372,45	2,66E-017
7	-1204297,13	1,21E-017
8	-1204175,05	1,14E-017
9	-1204175,05	1,14E-017
10	-1204175,05	1,14E-017
11	-1203198,43	6,71E-018
12	-1203198,43	6,71E-018
13	-1203198,43	6,71E-018
14	-1203198,43	6,71E-018
15	-1203198,43	6,71E-018

Ao plotar os resultados do valor da função aptidão do melhor indivíduo em escala logarítmica de cada geração versus o número da geração, tem-se o gráfico da figura 29.



FIGURA 29 – VARIACÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM USO DO AG NO EXEMPLO 1.

Como já esperado, pela simplicidade do problema, tem-se logo de início uma boa estimativa para o parâmetro buscado. Verifica-se, pela análise dos resultados, uma convergência ao resultado esperado ao longo das gerações demonstrando a validação do algoritmo com o uso do MEC e do AG. O programa gerou um resultado na 11ª geração com erro relativo de 0,26%.

Observa-se que como a faixa de operação da variável era de $[-2000000,0]$ e o número de bits de seu vetor era 14, sua precisão é então calculada através da equação 106 bem como $\frac{0 - (-2000000)}{2^{14} - 1} \approx 122,07$.

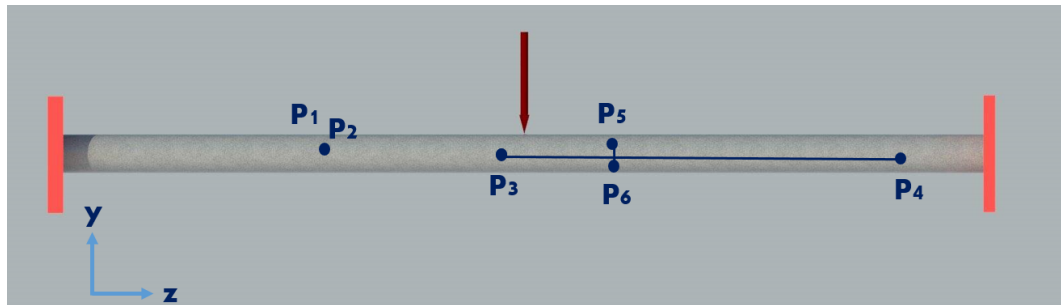
Sendo $2^{14} = 16384$ o número de divisões do espaço de busca, como o melhor resultado foi de $-1203198,43$, as respostas pertencentes ao intervalo aberto $(-1200000 + 3198,43; -1200000 - 3198,43)$ são melhores que a encontrada. Para esse caso, dentro do espaço de busca de 16384 possibilidades de respostas, existiam apenas 52 respostas melhores que a encontrada, o que corresponde a apenas $0,31\%$ de todas as possibilidades.

Como a população era de 15 indivíduos e o número de gerações era de 15, o total de tentativas de busca do AG foi de $15 \times 15 = 225$, correspondendo então, a apenas $1,37\%$ do total de pontos do espaço de busca.

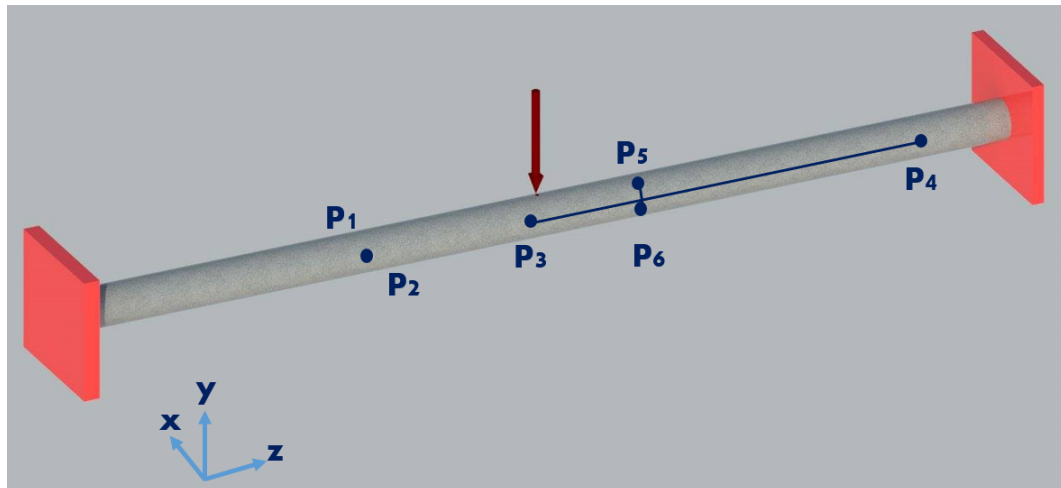
Como para esse exemplo tem-se apenas um parâmetro de busca, o programa não exigiu uma população grande nem um grande número de gerações para chegar próximo ao resultado esperado. Conforme aumenta-se o número de parâmetros, maior o leque de possibilidades de respostas, sendo então necessários um maior número de buscas.

5.2 EXEMPLO 2

O segundo modelo estudado, consiste de um duto com suas duas extremidades engastadas e uma carga central representada por uma força de superfície em um elemento na região central de acordo com a figura 30. A análise inversa foi feita utilizando o código MEC com o AG e em seguida o código MEC com o uso do MH. São duas as variáveis de busca: a magnitude da força de superfície e a localização dessa força.



(a) Vista Frontal



(b) Vista em Perspectiva

FIGURA 30 – MODELO DE ESTUDO DO EXEMPLO 2.

5.2.1 Análise Direta para simulação de dados experimentais

Para a análise direta, nesse exemplo foram usadas as seguintes características:

- Malha de 1056 elementos de superfície constantes quadrangulares;
- Força de $-11,51\text{kN}$ como condição de contorno pré determinada, representada por uma força de superfície P_y com valor de -900kPa ;
- O elemento de atuação da força de superfície é o de número 529, localizado na região superior central do tubo.

Com a aplicação da análise direta obteve-se os deslocamentos nos pontos nodais dos elementos. Neste exemplo, foram computados três deslocamentos relativos, perpendiculares entre si. Os pontos P_1 e P_2 representam os pontos nodais dos elementos 937 e 585, P_3 e P_4 dos elementos 656 e 670 e os pontos P_5 e P_6 referem-se aos elementos 594 e 722 da malha.

Os deslocamentos obtidos pelo MEC são representados na figura 31.

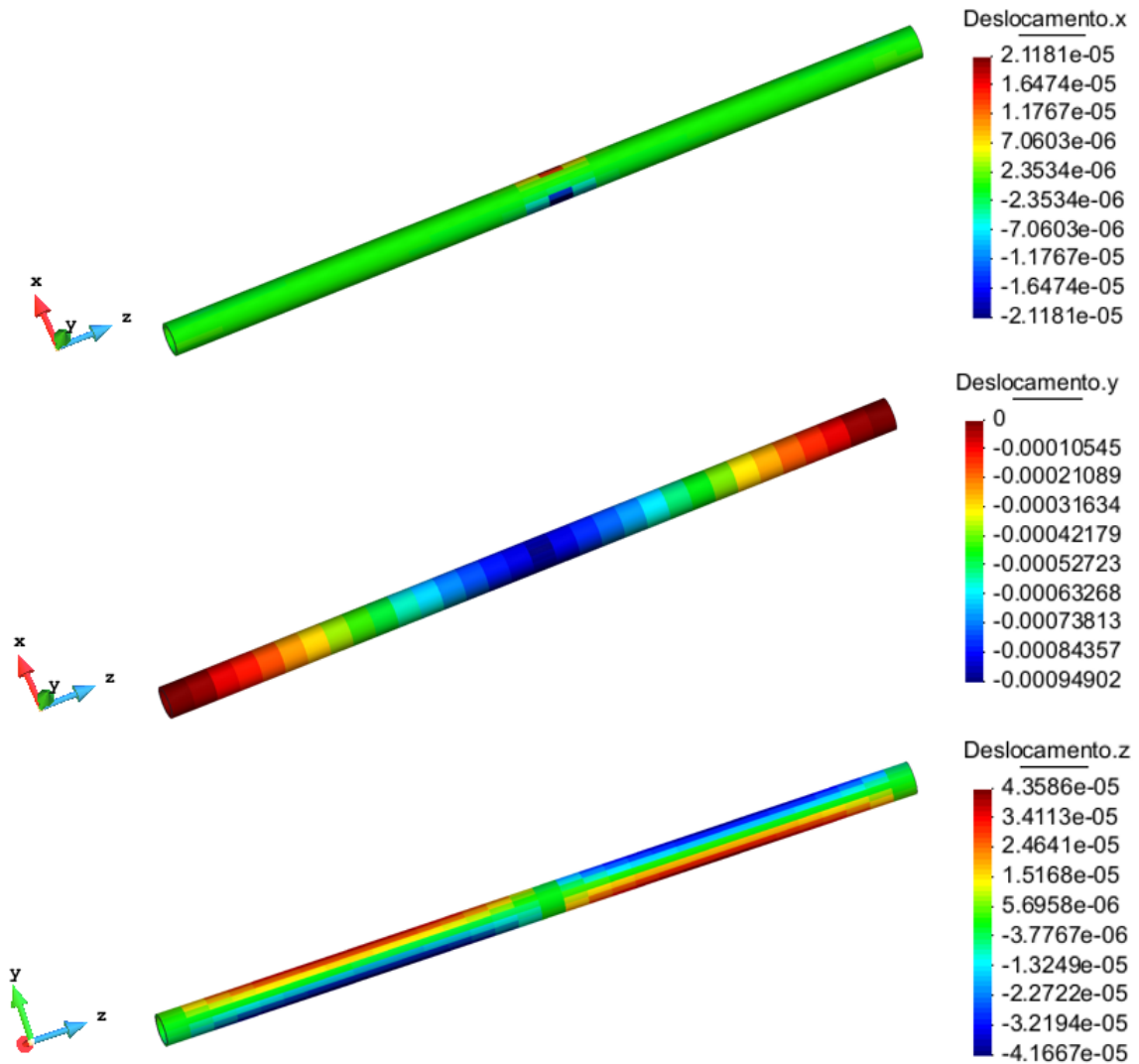


FIGURA 31 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z OBTIDOS PELO MEC PARA O EXEMPLO 2.

Assim como no exemplo anterior, os deslocamentos relativos entre os pontos simulando medidas de campo, foram usados como dados de entrada para utilização nos códigos com a análise inversa.

5.2.2 Análise Inversa com o Algoritmo Genético

Nesse exemplo, para a análise inversa, além da busca do valor da força de superfície, adicionou-se também a busca da posição em que esta atua, ou seja, o elemento de atuação correspondente da força. Para essa busca, adicionou-se como dado de entrada uma matriz M 16×32 representando os elementos da superfície externa do duto. O vetor indivíduo (possibilidade de resposta) é composto de 3 parcelas. A primeira delas são os bits correspondentes à variável força de superfície, a segunda corresponde à variável coluna da matriz M dada e a terceira a variável linha da matriz.

Neste exemplo, o AG é empregado com as seguintes características:

- A população possui 200 indivíduos;
- O número de gerações é 100;
- Definiu-se 14 bits para a variável da força, mais 5+4 bits para a variável localização, totalizando cromossomos com 23 bits para cada indivíduo;
- A probabilidade de cruzamento é de 90%;
- Operador de mutação com uma probabilidade de 1%,
- Arbitrou-se que a variável procurada, que é o da força de superfície P_y , está contida no intervalo [-2MPa,0MPa];
- Arbitrou-se que a variável procurada correspondente à coluna da Matriz dos elementos, está contida no intervalo [1,32];
- Arbitrou-se que a variável procurada correspondente à linha da Matriz dos elementos, está contida no intervalo [1,16].

Por exemplo: seja o vetor $V^T = [10010011001101110010011]$

Transformando os primeiros 14 bits para número decimal chega-se a 9421. Dos 5 bits seguintes encontra-se 25 e dos 4 últimos bits, 3. Assim, da equação 107 tem-se:

- $-2000000 + \frac{0 - (-20000000)}{2^{14} - 1} * 9421 = -849975,58$ para a variável da força.
- $1 + \frac{32-1}{2^5-1} * 25 = 26$ para a variável coluna da Matriz dos elementos.
- $1 + \frac{16-1}{2^4-1} * 3 = 4$ para a variável linha da Matriz dos elementos.

Ou seja, o vetor V corresponde ao indivíduo: força de superfície de -849975,58Pa atuando no elemento em que se encontra na coluna 26 e na linha 4 da matriz M.

A tabela 8 apresenta os resultados gerados do melhor indivíduo para cada geração e seu respectivo elemento de atuação. Sendo as variáveis de busca $P_y = -900000$ Pa e elemento de atuação da força: 529.

TABELA 8 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 2 (ALGORITMO GENÉTICO).

Geração	Melhor Indivíduo (Pa)	Valor da Função Aptidão do Melhor Indivíduo	
1	-1287187,94	563	2,37E-013
2	-1288408,72	1009	3,78E-015
3	-1288408,72	1009	3,78E-015
4	-1288408,72	1009	3,78E-015
5	-1288408,72	1011	3,67E-015
6	-1288408,72	1011	3,67E-015
7	-1309650,25	1009	1,36E-015
8	-1309650,25	1009	1,36E-015
9	-1332356,71	1011	8,21E-017
10	-1332356,71	1011	8,21E-017
11	-904352,07	529	6,26E-017
12	-904352,07	529	6,26E-017
13	-896539,10	529	3,95E-017
14	-896539,10	529	3,95E-017
15	-896539,10	529	3,95E-017
16	-896539,10	529	3,95E-017
17	-896539,10	529	3,95E-017
18	-896539,10	529	3,95E-017
19	-896539,10	529	3,95E-017
20	-900445,58	529	6,56E-019
:	:	:	:
81	-899957,27	529	6,03E-019
:	:	:	:
100	-899957,27	529	6,03E-019

Ao plotar os resultados do valor da função aptidão do melhor indivíduo em escala logarítmica de cada geração versus o número da geração, tem-se o gráfico da figura 32.

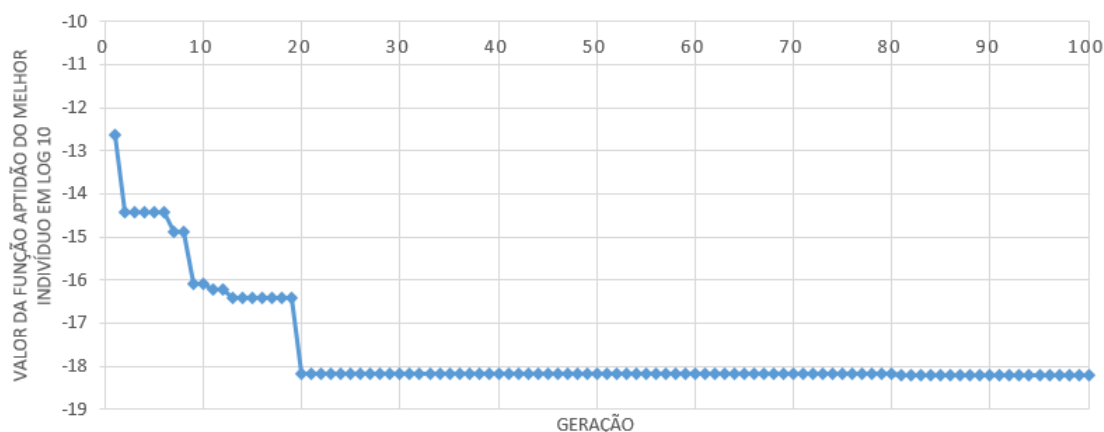


FIGURA 32 – VARIAÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM O USO DO AG NO EXEMPLO 2

Ao avaliar os resultados, verificou-se uma evolução dos indivíduos ao longo das gerações demonstrando a validação do algoritmo com o uso do MEC e do AG para 2 variáveis de busca.

O programa gerou um resultado com erro relativo de 4,74E-03% para o parâmetro da força de superfície. Para o parâmetro da posição da força, o programa encontrou o elemento exato, que para esse caso é o 529. Verifica-se que entre uma geração e outra o resultado ou permanece o mesmo, ou melhora, nunca piora. Isso se deve ao processo chamado de elitismo empregado no algoritmo, ou seja, o melhor indivíduo é armazenado na nova população da geração seguinte como indivíduo de busca.

Para esse exemplo, como os cromossomos eram compostos de 23 bits, o espaço de busca era de $2^{23} = 8388608$ possibilidades de resposta. Foi utilizado então, uma população e um número de gerações maior que no exemplo anterior para a busca do resultado.

5.2.3 Análise Inversa com o Método Híbrido

Para o MH adotou-se um critério de parada para valor de função aptidão (equação (108)), do melhor indivíduo na ordem de E-027. Aplicando o código com o uso do AG híbrido o programa gerou como resultado a tabela 9. O MNR é aplicado somente para a busca da força de superfície e não para a busca da localização dessa força.

TABELA 9 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 2 (MÉTODO HÍBRIDO)

Geração	Melhor Indivíduo	Posição	Valor da Função Aptidão do Melhor Indivíduo
1	-1287187,94	563	2,37E-013
2	-1288408,72	1009	3,78E-015
3	-1288408,72	1009	3,78E-015
4	-1288408,72	1009	3,78E-015
5	-1288408,72	1011	3,67E-015
6	-1288408,72	1011	3,67E-015
7	-1309650,25	1009	1,36E-015
8	-1309650,25	1009	1,36E-015
9	-1332356,71	1011	8,21E-017
10	-1332356,71	1011	8,21E-017
11	-900000,02	529	1,78E-027

Nessa análise já na 11^a geração o erro relativo foi de 2,22E-06%. Verifica-se que quando o programa encontrou o elemento de atuação o resultado convergiu para o esperado. Isso deve-se ao fato do MNR ter sido aplicado apenas na busca dos valores das forças e não na localização. Portanto, quando o elemento de atuação do indivíduo não é o correto, o MNR chega a um resultado incoerente. Consequentemente, a qualidade desse novo indivíduo é baixa e na geração seguinte ou este é eliminado no processo da seleção ou não altera significativamente o resultado.

Ao plotar os resultados do valor da função aptidão do melhor indivíduo em escala logarítmica de cada geração versus o número da geração da análise inversa com o uso do AG e da análise inversa com AG híbrido, tem-se o gráfico da figura 33.

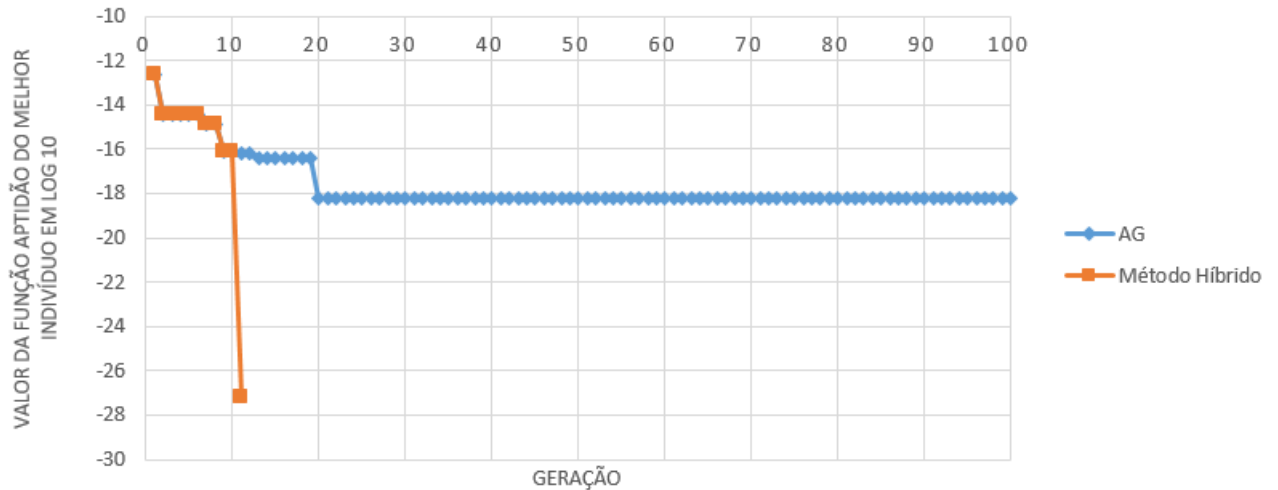
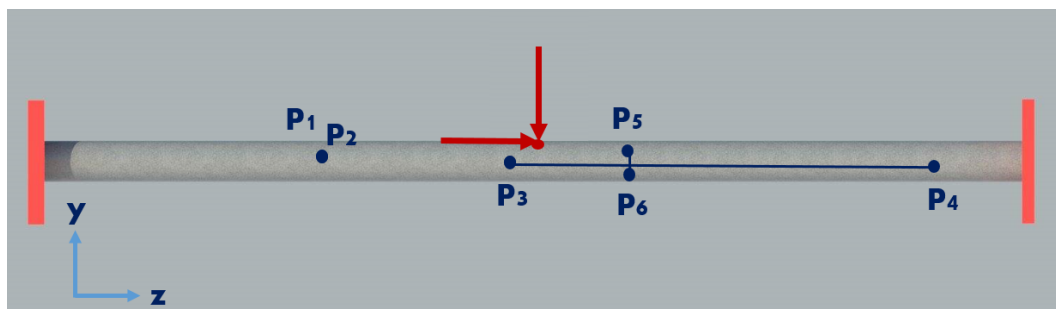


FIGURA 33 – VARIÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM O USO DO AG NO EXEMPLO 2.

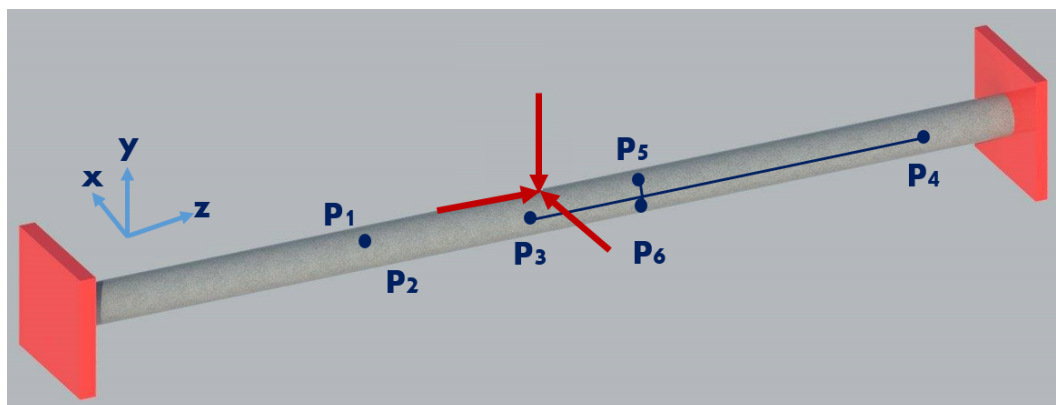
Com o uso do MH, foi possível chegar a um resultado de maneira mais rápida e precisa com erro relativo de $2,22E-06\%$ já na 11ª geração. Enquanto o código com o uso somente do AG o erro relativo foi de $4,74E-03\%$ e somente na 81ª geração.

5.3 EXEMPLO 3

O terceiro exemplo, ilustrado na figura 34, consiste num duto de aço com duas extremidades engastadas, com a atuação de três cargas concentradas ortogonais em um ponto, representadas por 3 forças de superfície aplicadas em um elemento. Sendo que as magnitudes dessas forças de superfície e a localização em que as mesmas estão atuando, são os parâmetros de busca da análise inversa. Para esse exemplo, foi feita também a análise inversa tanto com o programa MEC com o AG e com o que utiliza o MH.



(a) Vista Frontal



(b) Vista em Perspectiva

FIGURA 34 – MODELO DE ESTUDO DO EXEMPLO 3.

5.3.1 Análise Direta para simulação de dados experimentais

A análise direta, com os parâmetros de busca já predeterminados, foi feita com as seguintes características:

- Malha de 1056 elementos de superfície constantes quadrangulares;
- Condições de contorno predeterminadas, possuindo valores de 38,39kN, -115,17kN e 179,15kN respectivamente, conforme figura 34. Essas forças são representadas por forças de superfície (P_x, P_y e P_z) com valores de 3MPa, -9MPa e 14MPa;
- O elemento de atuação das forças de superfície é o de número 529, localizado na região superior no centro do tubo.

Com a aplicação da análise direta foram obtidos os deslocamentos nos pontos nodais dos elementos. Neste exemplo, foram computados três deslocamentos relativos, nos mesmos pontos que no exemplo anterior, perpendiculares entre si. Os pontos P1 e P2 representam os pontos nodais dos elementos 937 e 585, P3 e P4 dos elementos 656 e 670 e os pontos P5 e P6 referem-se aos elementos 594 e 722 da malha.

Após a aplicação da análise direta pelo MEC, foi possível obter os deslocamentos nos pontos nodais dos elementos. Seus deslocamentos são representados pela figura 35.

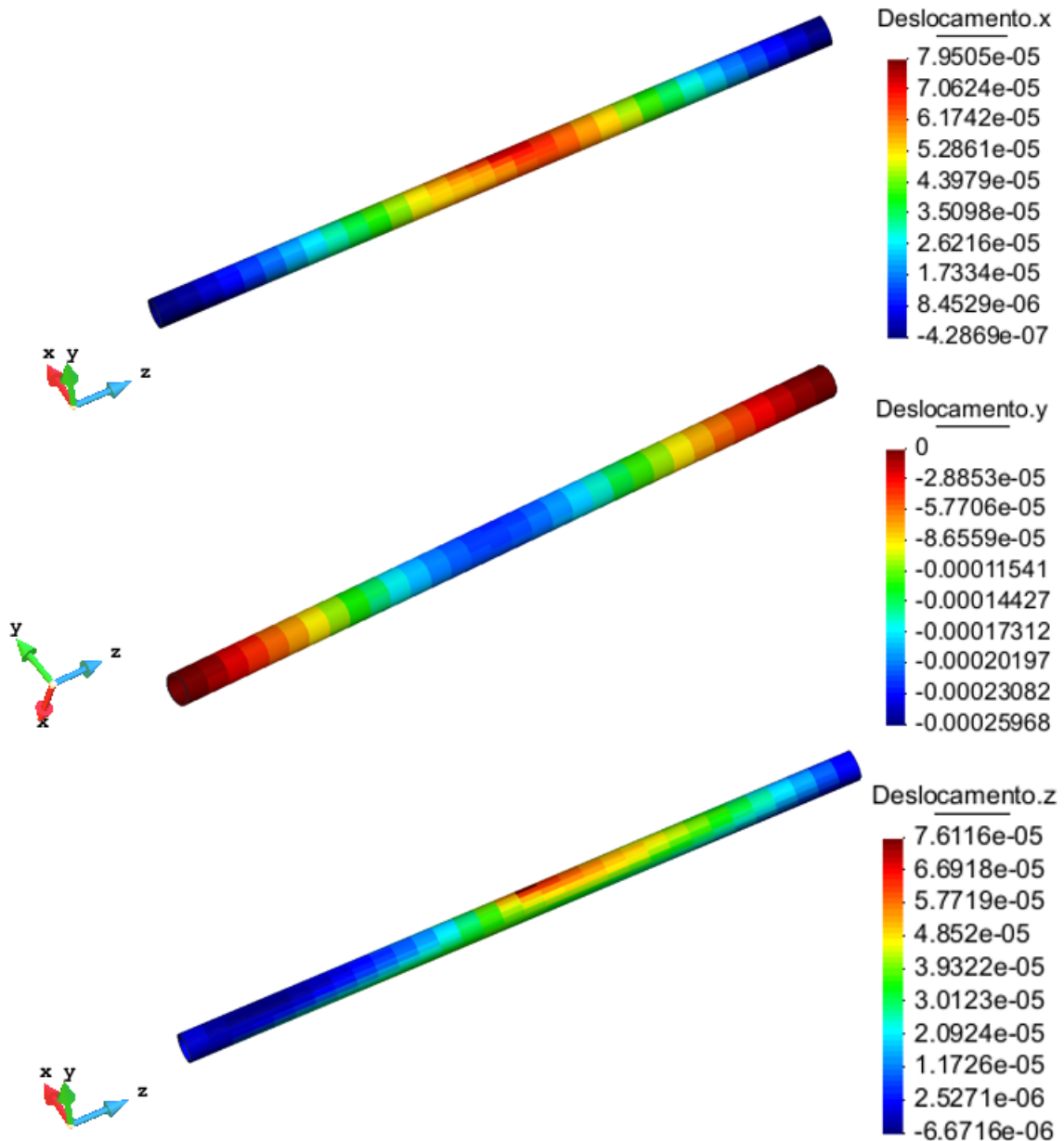


FIGURA 35 – DESLOCAMENTOS NOS EIXOS X, Y, Z OBTIDOS PELO MEC PARA O EXEMPLO 3.

Assim os deslocamentos relativos entre os pontos simulando medidas de campo, foram computados como dados de entrada para utilização nos códigos com a análise inversa.

5.3.2 Análise Inversa com o Algoritmo Genético

Neste exemplo, o AG é empregado com as seguintes características:

- A população possui 200 indivíduos;
- O número de gerações é 200;
- Definiu-se 14 bits para cada variável de força, mais 5+4 bits para a localização, totalizando indivíduo com 51 bits;

- A probabilidade de cruzamento é de 90%;
- Operador de mutação com uma probabilidade de 1%;
- Arbitrou-se que as variáveis procuradas das forças de superfície Px e Pz, contidas no intervalo [0MPa,20MPa];
- Arbitrou-se que a variável procurada da força de superfície Py, contida no intervalo [-20MPa,0MPa];
- Arbitrou-se que a variável procurada correspondente a coluna da Matriz dos elementos, contida no intervalo [1,32];
- A variável procurada correspondente a linha da Matriz dos elementos, contida no intervalo [1,16].

A tabela 10 apresenta o resultado do melhor indivíduo para cada geração.

TABELA 10 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (ALGORITMO GENÉTICO)

Geração	Px(Pa)	Py(Pa)	Pz(Pa)	Pos.	Valor da FA do melhor indivíduo
1	3603735,58	-6951107,86	13523774,64	529	1,37E-011
:	:	:	:	:	:
5	3296099,62	-7263626,93	13520112,31	529	9,04E-012
6	3647683,57	-9763779,53	13520112,31	529	2,53E-012
:	:	:	:	:	:
12	4586461,58	-9763779,53	14026735,03	529	1,73E-012
:	:	:	:	:	:
14	3961423,43	-9841909,30	14024293,47	529	1,49E-012
:	:	:	:	:	:
16	4570591,47	-9517182,45	13566501,86	529	6,89E-013
17	2357321,61	-9130195,93	14016968,81	529	5,63E-013
18	2396386,50	-9130195,93	14056033,69	529	4,25E-013
:	:	:	:	:	:
20	3332722,94	-9130195,93	14056033,69	529	1,22E-013
:	:	:	:	:	:
22	3374229,38	-9130195,93	13985228,59	529	9,69E-014
23	3332722,94	-9177806,26	13997436,37	529	7,86E-014
24	3332722,94	-9128975,16	13855826,16	529	6,12E-014
25	2705243,24	-8855520,97	14053592,14	529	4,21E-014
:	:	:	:	:	:
27	3061710,31	-9128975,16	14004761,03	529	4,07E-014
:	:	:	:	:	:

TABELA 10 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (ALGORITMO GENÉTICO)

Geração	Px(Pa)	Py(Pa)	Pz(Pa)	Pos.	Valor da FA do melhor indivíduo
29	3051944,09	-9099676,49	14024293,47	529	2,38E-014
:	:	:	:	:	:
31	3051944,09	-9070377,83	13985228,59	529	1,29E-014
32	3091008,97	-9099676,49	14024293,47	529	1,01E-014
:	:	:	:	:	:
37	3105658,30	-9099676,49	14024293,47	529	9,82E-015
:	:	:	:	:	:
41	3092229,75	-8993468,84	13987670,15	529	5,62E-015
:	:	:	:	:	:
44	3092229,75	-8993468,84	13985228,59	529	5,11E-015
:	:	:	:	:	:
47	3091008,97	-9013001,28	13987670,15	529	2,91E-015
48	3092229,75	-9022767,50	13985228,59	529	2,40E-015
49	3053164,87	-9022767,50	13985228,59	529	1,15E-015
:	:	:	:	:	:
51	2935970,21	-8993468,84	14026735,03	529	1,10E-015
:	:	:	:	:	:
61	3048281,76	-9005676,62	13990111,70	529	6,36E-016
:	:	:	:	:	:
66	3047060,98	-9005676,62	13985228,59	529	4,72E-016
:	:	:	:	:	:
75	3047060,98	-9008118,17	13987670,15	529	4,68E-016
:	:	:	:	:	:
78	3047060,98	-9006897,39	13985228,59	529	4,61E-016
:	:	:	:	:	:
87	2989684,43	-9004455,84	14007202,59	529	1,51E-016
:	:	:	:	:	:
95	2989684,43	-9004455,84	14004761,03	529	1,29E-016
:	:	:	:	:	:
98	3003112,98	-9004455,84	13997436,37	529	8,75E-017
:	:	:	:	:	:
102	2992125,98	-8999572,73	14004761,03	529	3,79E-017
:	:	:	:	:	:
109	2989684,43	-8999572,73	14004761,03	529	3,51E-017
:	:	:	:	:	:
128	2992125,98	-8999572,73	14002319,48	529	1,56E-017
:	:	:	:	:	:

TABELA 10 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (ALGORITMO GENÉTICO)

Geração	Px(Pa)	Py(Pa)	Pz(Pa)	Pos.	Valor da FA do melhor indivíduo
141	2994567,54	-9000793,51	14002319,48	529	1,44E-017
:	:	:	:	:	:
144	2994567,54	-8999572,73	14002319,48	529	8,31E-018
:	:	:	:	:	:
156	2997009,09	-8999572,73	14001098,70	529	2,04E-018
:	:	:	:	:	:
166	2999450,65	-8999572,73	13999877,92	529	5,21E-019
:	:	:	:	:	:
200	2999450,65	-8999572,73	13999877,92	529	5,21E-019

Ao plotar os resultados do valor da função aptidão da equação (108) do melhor indivíduo em escala logarítmica de cada geração versus o número da geração, tem-se o gráfico da figura 36.

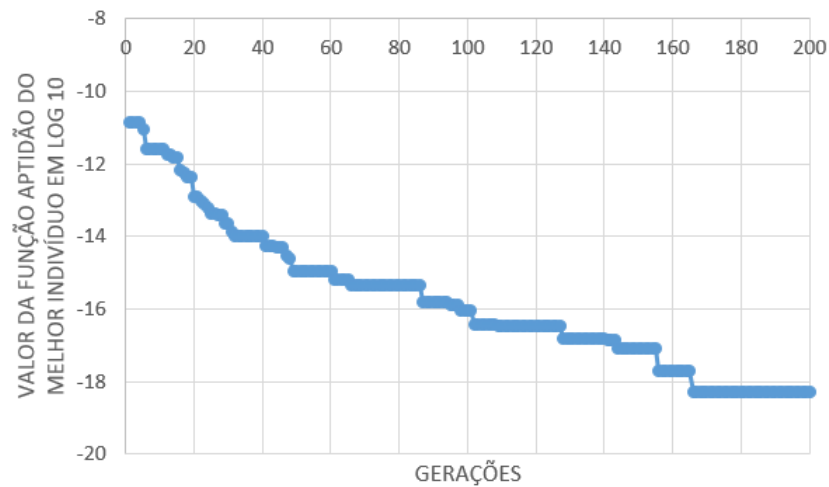


FIGURA 36 – VARIÇÃO DO VALOR DA FUNÇÃO APTIDÃO DO MELHOR INDIVÍDUO EM LOG 10 DE CADA GERAÇÃO COM O USO DO AG NO EXEMPLO 3

A figura 37 ilustra convergência na otimização das variáveis de força.

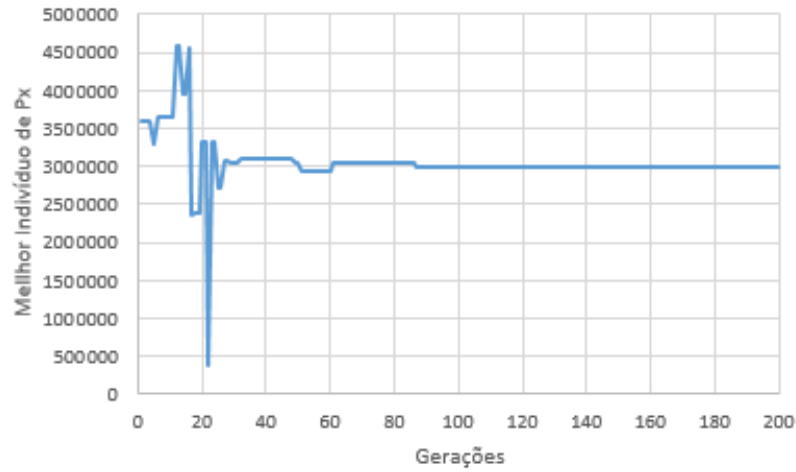
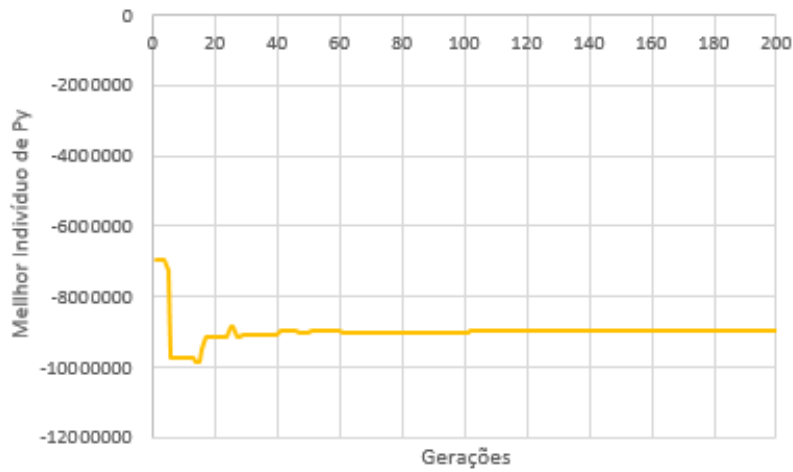
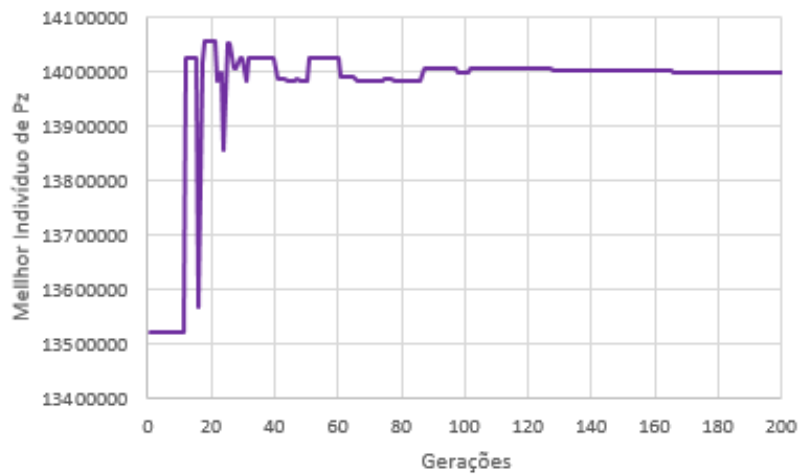
(a) Convergência de P_x (b) Convergência de P_y (c) Convergência de P_z

FIGURA 37 – CONVERGÊNCIA NA OTIMIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE FORÇA COM O NÚMERO DE GERAÇÕES.

O espaço de busca é composto de 2^{51} possibilidades de respostas, para essas 4 variáveis de busca. Verifica-se, pela análise dos resultados, uma convergência ao resultado esperado

ao longo das gerações mesmo para 4 variáveis, demonstrando a validação do algoritmo com o uso do MEC e do AG. O programa gerou um resultado com erros relativos de $1,83E - 02\%$, $4,74E - 03\%$ e $8,72E - 04\%$ para os três parâmetros de força P_x , P_y e P_z respectivamente e encontrou a localização exata de atuação dessas forças.

5.3.3 Análise Inversa com o Método Híbrido

Para o MH adotou-se um critério de parada para valor de função aptidão do melhor indivíduo na ordem de $E-027$, assim como no exemplo anterior. Os resultados gerados são apresentados na tabela 11.

TABELA 11 – MELHOR INDIVÍDUO DE CADA GERAÇÃO DO EXEMPLO 3 (MÉTODO HÍBRIDO)

Geração	P_x (Pa)	P_y (Pa)	P_z (Pa)	Pos.	Valor da FA do melhor indivíduo
1	3000000,03	-9000000,07	14000000,12	529	1,37E-028

Verifica-se que já na primeira geração o critério de parada foi satisfeito, gerando resultados com erros relativos de $1E-06\%$, $7,77E-07\%$ e $8,57E-08\%$ para P_x , P_y e P_z respectivamente. Isso porque o Algoritmo Genético encontrou logo na primeira geração o elemento de atuação correto e, com a aplicação do MNR, com apenas uma iteração, gerou resultados com uma boa precisão. Verificou-se então, que nesse exemplo também, a análise inversa com o MH se mostrou mais eficiente e precisa do que a com o uso apenas do AG.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho fundamentou-se na elaboração de formulações numéricas e no desenvolvimento de dois códigos para análise inversa em estruturas, em linguagem Fortran 95. O primeiro, associa um Algoritmo Genético com o Método dos Elementos de Contorno. Os AGs são simples de implementar e modificar, podendo ser reutilizados de forma indefinida. Porém, em algumas situações, exigem um grande custo computacional. Neste sentido, no presente trabalho empregou-se também um segundo código com uma abordagem híbrida em que o AG é utilizado em associação ao método de Newton-Raphson para uma análise inversa. O MNR é conhecido pela sua eficiência e precisão; contudo, um ponto fraco que possui é a necessidade de uma aproximação inicial precisa para se assegurar a sua convergência. Assim, nessa segunda abordagem, a estimativa inicial para o MNR é obtida através do AG.

As formulações implementadas do MEC para elasticidade tridimensional foram validadas por meio de problemas simples com respostas analíticas conhecidas. As validações dos códigos com a análise inversa foram feitas com a comparação dos resultados obtidos com o modelo direto. Três diferentes situações em dutos foram avaliadas, onde foi possível concluir sobre a eficácia desses métodos para esses casos. Os resultados obtidos pelos dois códigos são também comparados entre eles.

Para os exemplos estudados, o código com o AG associado com o MEC apresentou um bom comportamento no sentido de se estimar tanto os parâmetros das condições de contorno quanto a busca da localização de atuação dessas variáveis. Embora não se tenha obtido valores exatos para tais parâmetros, houve uma grande aproximação entre as variáveis obtidas e os resultados da análise direta. Portanto, pode-se afirmar que os objetivos do AG foram atingidos para esse estudo. Para os três casos os resultados trouxeram erros relativos menores que 0,26%. Porém, comparando com o Método Híbrido, este último exigiu um menor custo computacional, gerando resultados ainda mais precisos, com erros menores que 2,22E-06%. Sendo assim, a sua utilização demonstra possuir um grande potencial para uso como ferramenta para análise estrutural em dutos, que necessitam ser monitorados constantemente devido a esforços sofridos e pela grande quantidade de horas de uso, que podem ocasionar acidentes e grandes prejuízos materiais e ambientais. Esse programa pode ser estendido não só para análise em dutos como também para outras estruturas inseridas no contexto da elasticidade linear.

Não se pode deixar de considerar as incertezas que cercam as variáveis envolvidas no resultado final, influenciadas por alguns fatores adotados para análise inversa. Pequenas populações e baixo número de gerações, podem gerar perda da diversidade para convergir a uma boa solução. Populações grandes e um alto número de gerações podem afetar a eficiência do programa. A probabilidade de mutação, se for muito elevada, faz a busca do algoritmo se tornar aleatória. A probabilidade de cruzamento muito baixa faz com que se perca a “variedade

genética” podendo fazer com que o algoritmo convirja para soluções ruins. A sensibilidade desses parâmetros varia para cada caso, sendo que essas incertezas podem ser diminuídas utilizando diferentes parâmetros de entrada para o mesmo exemplo.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Partindo desta dissertação, apresentam-se outros estudos que poderiam ser desenvolvidos para trabalhos futuros:

- Elaborar mais simulações, com o objetivo de diminuir as incertezas envolvidas nos resultados, com diferentes parâmetros de entrada para o algoritmo genético, tais como: domínio de busca para os parâmetros a serem estimados, tamanho da população, número de gerações, probabilidade de cruzamento e probabilidade de mutação.
- Ampliar o programa desenvolvido para aplicações de análise inversa envolvendo condições de contorno não lineares. Essa sugestão está associada ao comportamento não linear da rigidez apresentada pelo solo em problemas de iteração solo-duto.
- Neste trabalho, os erros relativos obtidos na análise direta não influenciaram o desempenho da análise inversa. Porém, ao se utilizar parâmetros medidos em campo, as incertezas inerentes a essas medições podem conduzir a problemas de convergência na análise inversa. Nesse sentido, sugere-se a implementação de elementos de ordem superior e o estudo do impacto das incertezas de medição nos resultados obtidos. Eventualmente, métodos de regularização deverão ser empregados para ampliar a robustez do método.
- Neste trabalho, para a integração numérica nas integrais não singulares, foi estabelecido um número fixo de 10 pontos de Gauss. Em vista de uma maior eficiência e precisão nos resultados, sugere-se a implementação de uma variação do número de pontos de Gauss de acordo com a distância entre o ponto fonte e o elemento de integração. Para distâncias menores o número de pontos pode ser aumentado e para distância maiores pode ser reduzido.

REFERÊNCIAS

- ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structure*. England: John Wiley & Sons, 2002. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 23 e 28.
- BEER, G.; IAN, S.; DUENSER, C. *The Boundary Element Method with Programming*. New York: SpringerWienNewYork, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 32, 38 e 43.
- BETTI, E. Teoria dell elasticita. *Il Nuovo Cimento*, p. 7–10, 1872. Citado na página 20.
- BREBBIA, C. A. *The boundary element method for engineers*. London: Pentech Press, 1978. Citado na página 21.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements An Introductory Course*. Southampton: Mc Graw-Hill, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 23, 31 e 32.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C.; WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. Citado na página 23.
- CHAVES, E. W. V. *Análise de placas com variação de espessura através do Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1997. Citado na página 21.
- COLEY, D. A. *An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers*. Exeter: World Scientific, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.
- COSTA, D. I. G. *Nova formulaçã do Método dos Elementos de Contorno para a associação de placas espessas*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Citado na página 21.
- CRUSE, T. A. A numerical solutions in three dimensional elastostatics. *International Journal Solids Structures*, v. 5, p. 1259–1274, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- CRUSE, T. A. An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Computers and Structures*, v. 4, p. 741–754, 1974. Citado na página 21.
- FEDERICO, D. S.; HURTADO, A. N. *Metodos Numericos Aplicados a la Ingenieria*. México: Patria, 2014. Citado na página 59.
- FELIZ, E. J. O. *Aplicação de Algoritmos Genéticos para convergência de fluxo de potência em sistemas de energia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Vale do Itajaí, São José, 2009. Citado na página 22.
- FREDHOLM, I. Sur une classe dequations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, v. 27, p. 365–390, 1903. Citado na página 20.
- FURUZATO, E. D.; LACERDA, L. A. de. Proteção catódica de fundação em grelha de torres de transmissão de alta tensão pelo método dos elementos de contorno. In: *I Simpósio de Método Numéricos em Engenharia*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página 22.
- GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Alabama: Addison-Wesley, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 58.

- JAREK, A. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na análise de estabilidade de túneis em meios descontínuos - abordagem probabilística*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Citado na página 21.
- JAWSON, M. A. Integral equation methods in potential theory i. *Proceedings Royal Society London*, Royal Society, v. 275, p. 23–32, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- KATSIKADELIS, J. T. *Boundary Elements: Theory and Applications*. Athens: Elsevier, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.
- KUPRADZE, V. D. Potential methods in theory of elasticity. *Israel Programme for Scientific Translations*, 1965. Citado na página 20.
- LACHAT, J. C. *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 44.
- LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, p. 991–1005, 1976. Citado na página 21.
- LINDEN, R. *Algoritmos Genéticos: Uma importante ferramenta da Inteligência Computacional*. Rio de Janeiro: Brasport, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 55.
- LOPES, M. E. *Modelagem do Problema de Acústica para Estruturas Aeronáuticas pela Técnica dos Elementos de Contorno, com Aplicação para Detecção de Danos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2009. Citado na página 22.
- MERA, N. S.; ELLIOTT, L.; INGHAM, D. B. Numerical solution of a boundary detection problem using genetic algorithms. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 28, p. 405–411, 2004. Citado na página 21.
- MIKHILIN, S. G. *Integral equations*. Pergamon Press, Porto Alegre, 1957. Citado na página 20.
- MILTADOU, P.; WROBEL, L. C. A bem-based genetic algorithm for identification of polarization curves in cathodic protection systems. *Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 54, p. 159–174, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 52.
- MITCHELL, M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Massachusetts: Bradford Book, 1996. Citado na página 53.
- NELDER, J.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, v. 7, p. 308–313, 1965. Citado na página 22.
- OUAZAR, K. D.; WALTERS, G. A.; CHENG, A. H. D. Groundwater optimization and parameter estimation by genetic algorithm and dual reciprocity boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 18, p. 287–296, 1996. Citado na página 21.
- PACHECO, M. A. C. *Algoritmos Genéticos: princípios e aplicações*. 1999. Disponível em: www.ica.ele.puc-rio.br. Citado na página 55.
- PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992. Citado na página 21.

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of applied Mathematics*, v. 25, p. 83–95, 1967. Citado na página 20.

ROSEN, J. The gradient projection method for nonlinear programming. part i: Linear constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 8, p. 181–217, 1960. Citado na página 22.

SANTOS, L.; CAMPOS-VELHO, H. de; CHIWIACOWSKY, L. Análise de robustez do método híbrido de estimação de dano estrutural. *TEMA (São Carlos)*, SBMAC, v. 12, p. 245–252, 2011. Citado na página 22.

SOMIGLIANA, C. Sopra lequilibrio di un corpo elastico isotrope. *Il Nuovo Cimento*, v. 20, p. 181–185, 1886. Citado na página 20.

SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory ii. *Proceedings Royal Society London*, Royal Society, v. 275, p. 33–46, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. *Teoria de La Elasticidad*. España: Urmo, 1968. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 45.

UBESSI, C. J. B. *Método dos Elementos de Contorno para elasticidade linear 3D com avaliação direta das integrais singulares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Citado na página 21.