

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ÉRICA SANTOS MATOS

**MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS  
TRIDIMENSIONAIS DE PONTOS OCULTOS EM TOPOGRAFIA**

CURITIBA

2017

ÉRICA SANTOS MATOS

**MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS  
TRIDIMENSIONAIS DE PONTOS OCULTOS EM TOPOGRAFIA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências Geodésicas.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luís Faggion

CURITIBA

2017

---

M433m

Matos, Érica Santos

Modelagem matemática para a determinação de coordenadas tridimensionais de pontos ocultos em topografia / Érica Santos Matos. – Curitiba, 2017.

131 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 2017.

Orientador: Pedro Luís Faggion.

Bibliografia: p. 128-131.

1. Geodésia. 2. Geociências. 3. Topografia Industrial. I. Universidade Federal do Paraná. II. Faggion, Pedro Luís. III. Título.

CDD: 526.1

---

## TERMO DE APROVAÇÃO

ÉRICA SANTOS MATOS

" MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A DETERMINAÇÃO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS DE PONTOS OCULTOS EM TOPOGRAFIA "

Tese nº 102 aprovada como requisito parcial do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. Dr. Pedro Luis Faggion  
Departamento de Geomática, UFPR



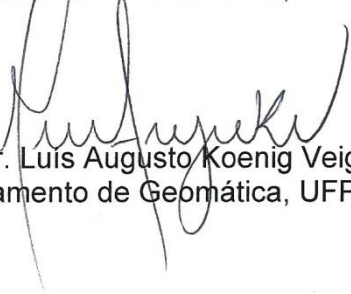
Prof. Dr. Edvaldo Simões da Fonseca Junior  
Escola Politécnica da USP, EPUSP



Profª. Drª Maria de Lourdes de Aquino Macedo Gonçalves  
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE



Prof. Dr. Carlos Aurélio Nadal  
Departamento de Geomática, UFPR



Prof. Dr. Luis Augusto Koenig Veiga  
Departamento de Geomática, UFPR

Curitiba, 16 de fevereiro de 2017

*Aos meus pais, meus grandes mestres,  
em todos os dias da minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus pela vida, benção e proteção.

À minha família por ser o meu porto seguro em todos os momentos da minha vida, em especial à pequena Bruna, que trouxe luz para nossas vidas. Ao meu amor Ivo, por sempre estar ao meu lado e por me fazer sorrir todos os dias.

Ao Prof. Dr. Pedro L. Faggion pela amizade, orientação, conselhos e total apoio nesta jornada.

Aos mestres Prof. Dr. Carlos A. Nadal, Prof. Dr. Luís A. K. Veiga, Prof. Dr. Álvaro M. L. Machado, Prof. Dr. Silvo R. C. de Freitas, Prof. Dr. Edvaldo S. Fonseca Júnior e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria de Lourdes A. M. Gonçalves pelas avaliações, contribuições e sugestões ao longo do desenvolvimento desta tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, em especial às todos os docentes pelos ensinamentos ministrados com excelência, que foram alicerces da construção desta tese.

Aos meus colegas de curso pela amizade e companhia nos estudos, nos trabalhos e nas disciplinas, que tive a oportunidade de conhecer e conviver ao longo destes anos, dentro e fora do ambiente acadêmico. Em especial à Alyne R. S. Gemin pela grande amizade e apoio nestes anos.

Ao técnico Daniel S. Costa pelas discussões e sugestões em momentos cruciais desta pesquisa.

À CAPES e ao CNPq pelas bolsas de estudos concedidas em diferentes momentos do doutorado.

Enfim, à todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

*“A ciência nunca resolve um problema  
sem criar pelo menos outros dez.”*

*George Bernard Shaw*

## RESUMO

Um dos problemas encontrados durante levantamentos topográficos é a obstrução de visada dos pontos de interesse, um exemplo disto é verificado em ambientes industriais, onde geralmente existem tubulações e equipamentos que não permitem o estabelecimento de linhas de visada direta. Uma alternativa para aplicação de técnicas topográficas convencionais é o uso de espelhos planos para o desvio de linhas de visada, onde os pontos de interesse são observados indiretamente. Trabalhos anteriores desenvolveram soluções para observações indiretas de pontos baseadas em diversas transformações de sistemas, com uso de espelho, bem como verificaram a influência da configuração do levantamento na qualidade dos resultados. Neste contexto, o presente estudo é uma continuidade destes trabalhos, no qual é apresentada uma nova abordagem para o problema cuja modelagem matemática desenvolvida visa à determinação de coordenadas tridimensionais de pontos ocultos. A solução apresentada fundamenta-se nos princípios da Topografia e da Ótica Geométrica e é realizada em um referencial único, sem a necessidade de transformações recorrentes. Após a proposição inicial, foram realizados aprimoramentos durante o processo de validação, até alcançar sua forma final. Os resultados obtidos indicam a viabilidade do modelo proposto, nos quais a precisão posicional relativa alcançada é de ordem submilimétrica, enquanto no posicionamento absoluto do ponto são da ordem milimétrica. Aliado à isto, testes de consistência foram executados para avaliar o comportamento do modelo em situações heterogêneas da solução, com variação da posição e atitude dos elementos da modelagem matemática proposta.

**Palavras-chave:** Topografia Industrial. Ponto oculto. Espelho plano.

## ABSTRACT

One of the problems encountered during surveys is obstruction of points to be monitored, an example of this can be found in industrial environments where there are usually pipes and equipment that do not allow the establishment of straight lines. An alternative to the application of topographic survey techniques is the use of plane mirrors to diversion of straight lines where the points of interest are observed indirectly. Previous works have developed solutions for indirect observations of points based on system transformations, using a mirror, as well as verifying of the influence of the configuration of the survey on the quality of the results. In this context, the present study is continuity to these works, in which a new approach is presented to the problem whose mathematical modeling is aimed at the determination of three-dimensional coordinates of hidden points. The solution presented is based on the principles of Surveying and Geometric Optics and is performed in a unique frame, without the need for recurring transformations. After the initial proposition, improvements were made to the solution during validation processes until achieving its final form. The results indicate the feasibility of the proposed model, which the relative positional accuracy achieved in the validation tests is submillimetric order, and the absolute positional accuracy is millimetric order. In addition, consistency tests were performed to evaluate the behavior of the model in heterogeneous situations of the solution, with variation of the position and attitude of the elements of the proposed mathematical modeling.

**Keywords:** Industrial surveying. Hidden points. Plane mirror.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	– EXEMPLO DE CMM .....	22
FIGURA 2.2	– COMPARAÇÃO DOS SISTEMAS MÓVEIS DE MEDIDA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS NA METROLOGIA .....	23
FIGURA 2.3	– SIMULAÇÃO DE APLICAÇÃO DA BARRA PARA PONTOS OCULTOS.....	25
FIGURA 2.4	– BARRA PARA PONTOS OCULTOS .....	25
FIGURA 2.5	– GEOMETRIA DO MÉTODO POR BARRA PARA PONTOS OCULTOS.....	27
FIGURA 2.6	– ESFERA UNITÁRIA PARA DETERMNAÇÃO DO ÂNGULO $ATB$ .	27
FIGURA 2.7	– DETALHE DO QUADRILÁTERO $ABCT$ .....	29
FIGURA 2.8	– MARCAS NO ESPELHO E O PONTO “ESP” .....	35
FIGURA 2.9	– POSIÇÃO DA IMAGEM VIRTUAL DO PONTO DE INTERESSE ..	35
FIGURA 2.10	– SISTEMA DO ESPELHO .....	36
FIGURA 2.11	– REFLEXÃO DA IMAGEM VIRTUAL DO PONTO NO SISTEMA DO ESPELHO.....	37
FIGURA 2.12	– MODELO TRIDIMENSIONAL: INSPEÇÃO DE ARQUEAÇÃO DE TANQUE.....	39
FIGURA 2.13	– MODELAGEM DE PEÇA INDUSTRIAL.....	40
FIGURA 2.14	– PROPOSTA PARA MODELAGEM DE OBJETOS COM USO DE ESPELHO .....	41
FIGURA 2.15	– MEDIDOR TRIORTOGONAL DE JUNTA.....	41
FIGURA 2.16	– PROPOSTA DO USO DE ESPELHO PARA CONTROLE DE PONTOS.....	42
FIGURA 2.17	– EXEMPLOS DE ESPELHOS PARA FINS DE TOPOGRAFIA INDUSTRIAL.....	43
FIGURA 2.18	– FUNCIONAMENTO DO ESPELHO PLANO IDEAL.....	44
FIGURA 2.19	– CAMPO DE TOLERÂNCIA DE PLANICIDADE .....	45
FIGURA 2.20	– RUGOSIDADE DE UMA SUPERFÍCIE .....	46
FIGURA 2.21	– REFLEXÃO ESPECULAR .....	47
FIGURA 2.22	– REFLEXÃO DIFUSA.....	48
FIGURA 2.23	– REFLEXÃO DUPLA EM SUPERFÍCIE COM ESPELHAMENTO POSTERIOR.....	49

FIGURA 2.24 – REFLEXÃO SIMPLES EM SUPERFÍCIE COM ESPELHAMENTO FRONTAL .....	49
FIGURA 2.25 – ELIPSE DE ERROS: PARAMETRIZAÇÃO POR AUTOVALORES E AUTOVETORES.....	52
FIGURA 2.26 – ELIPSOIDE DE ERROS: PARAMETRIZAÇÃO POR AUTOVALORES E AUTOVETORES.....	54
FIGURA 3.1 – SOLUÇÃO PROPOSTA. ....	55
FIGURA 3.2 – ESPELHO PLANO UTILIZADO .....	57
FIGURA 3.3 – ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA $\theta$ E DE REFLEXÃO $\theta'$ .....	64
FIGURA 3.4 – MATERIAIS UTILIZADOS NOS ENSAIOS .....	69
FIGURA 3.5 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO .....	70
FIGURA 3.6 – VETORES INCIDENTES E REFLETIDOS PARA DOIS PONTOS OBSERVADOS DURANTE O ENSAIO DE VALIDAÇÃO.....	72
FIGURA 3.7 – TRAJETÓRIAS HORIZONTAL (AA') E VERTICAL (BB') ADOTADAS NO ENSAIO .....	74
FIGURA 3.8 – SENTIDO DE DESLOCAMENTO DO TALLYVEL SOBRE A SUPERFÍCIE REFLETORA.....	75
FIGURA 3.9 – PERFIS DAS LINHAS AA' E BB' DA SUPERFÍCIE REFLETORA DO ESPELHO.....	76
FIGURA 3.10 – BLOCO DE MADEIRA COM MARCAS .....	77
FIGURA 3.11 – CALIBRAÇÃO DA GEOMETRIA DAS MARCAS.....	77
FIGURA 3.12 – DISPOSIÇÃO DAS DISTÂNCIAS ANALISADAS .....	78
FIGURA 3.13 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE INCIDÊNCIA .....	80
FIGURA 3.14 – RELAÇÃO ENTRE ERROS ABSOLUTOS E ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA .....	81
FIGURA 3.15 – ESQUEMA: EFEITO DA PRECISÃO DA COORDENADA DA MARCA DO ESPELHO NO VETOR NORMAL.....	82
FIGURA 3.16 – ESQUEMA: EFEITO DA PRECISÃO DO VETOR NORMAL NA COORDENADA DO OBJETO.....	83
FIGURA 3.17 – ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR.....	85
FIGURA 3.18 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR .....	85

FIGURA 3.19 – ELIPSES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR.....	86
FIGURA 3.20 – ELIPSOIDES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR.....	87
FIGURA 3.21 – OBSERVAÇÃO DA IMAGEM VIRTUAL DO PONTO 3A NO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR.....	88
FIGURA 3.22 – PAR DE MINIPRISMA SOBRE O SUPORTE.....	88
FIGURA 3.23 – ENSAIO DE DISTÂNCIAS DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA.....	89
FIGURA 3.24 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA.....	89
FIGURA 3.25 – ELIPSES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA.....	90
FIGURA 3.26 – ELIPSOIDES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA.....	91
FIGURA 3.27 – GEOMETRIA PARA O CÁLCULO DO PLANO DO ESPELHO POR PONTO HOMÓLOGO.....	94
FIGURA 3.28 – GEOMETRIA: DESTAQUE DO TRIÂNGULO ABE.....	96
FIGURA 4.1 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO DO MODELO FINAL.....	100
FIGURA 4.2 – RESULTADOS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO DOS MODELOS INICIAL E FINAL.....	101
FIGURA 4.3 – ELIPSES DE ERROS DO ENSAIO COM O MODELO APRIMORADO.....	103
FIGURA 4.4 – ELIPSOIDES DE ERROS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO DO MODELO FINAL.....	104
FIGURA 4.5 – DETALHE DOS ELIPSOIDES DE ERROS NOS PONTOS 2A E 2B.....	104
FIGURA 4.6 – PROPOSTA DO TESTE DE CONSISTÊNCIA DE POSIÇÃO E ATITUDE DO ESPELHO.....	107
FIGURA 4.7 – DETALHE DA MALHA DE PONTOS OBSERVADA NA SUPERFÍCIE DO ESPELHO.....	108
FIGURA 4.8 – DETALHE DA OBSERVAÇÃO DOS PONTOS DA MALHA.....	108

FIGURA 4.9 – ÂNGULOS DIRETORES DO VETOR NORMAL.....	109
FIGURA 4.10 – RELAÇÃO ENTRE ERRO ABSOLUTO E DISTÂNCIA AO PONTO HOMÓLOGO .....	110
FIGURA 4.11 – SISTEMA ARBITRADO NA SUPERFÍCIE DO ESPELHO.....	111
FIGURA 4.12 – ENSAIO 1: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA .....	112
FIGURA 4.13 – ENSAIO 1: VISTA EM PERSPECTIVA.....	112
FIGURA 4.14 – ENSAIO 2: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA .....	113
FIGURA 4.15 – ENSAIO 2: VISTA EM PERSPECTIVA.....	113
FIGURA 4.16 – ENSAIO 3: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA .....	114
FIGURA 4.17 – ENSAIO 3: VISTA EM PERSPECTIVA.....	114
FIGURA 4.18 – ENSAIO 4: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA .....	115
FIGURA 4.19 – ENSAIO 4: VISTA EM PERSPECTIVA.....	115
FIGURA 4.20 – COMPARAÇÃO DAS REGIÕES CENTRAIS DOS QUATRO ENSAIOS REALIZADOS DELIMITADAS PELAS MARCAS DO ESPELHO.....	116
FIGURA 4.21 – DESGASTE NA REGIÃO PERIFÉRICA DO ESPELHO.....	117
FIGURA 4.22 – DETALHE DE PEQUENAS RANHURAS NA SUPERFÍCIE DO ESPELHO AMPLIADAS COM O SISTEMA DE OBSERVAÇÃO DO INTERFERÔMETRO. ....	117
FIGURA 4.23 – ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA PARA A POSIÇÃO A DA IMAGEM DO PONTO HOMÓLOGO .....	119
FIGURA 4.24 – ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA PARA A POSIÇÃO B DA IMAGEM DO PONTO HOMÓLOGO .....	119
FIGURA 4.25 – ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA PARA A POSIÇÃO C DA IMAGEM DO PONTO HOMÓLOGO .....	120
FIGURA 4.26 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO.....	121
FIGURA 4.27 – SOLUÇÕES POR PONTOS HOMÓLOGOS DISTINTOS .....	122

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1	– RESULTADOS ABSOLUTOS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO .....	71
TABELA 3.2	– RESULTADOS RELATIVOS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO .....	71
TABELA 3.3	– LEITURAS DE INCLINAÇÃO REALIZADAS COM O TALYVEL....	75
TABELA 3.4	– VALORES CALIBRADOS DAS MARCAS DO OBJETO DE INTERESSE.....	78
TABELA 3.5	– COMPARAÇÃO ENTRE DISTÂNCIAS CALCULADAS NO ENSAIO E CALIBRADAS DAS MARCAS DO OBJETO DE INTERESSE ...	79
TABELA 3.6	– EFEITO DA PRECISÃO DAS COORDENADAS DAS MARCAS NO VETOR NORMAL .....	82
TABELA 3.7	– EFEITO DA PRECISÃO DO VETOR NORMAL NAS COORDENADAS DOS PONTOS OBSERVADOS .....	84
TABELA 3.8	– RESULTADO ABSOLUTO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR.....	86
TABELA 3.9	– RESULTADO ABSOLUTO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA .....	92
TABELA 3.10	– RESULTADO RELATIVO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA .....	92
TABELA 4.1	– COMPARAÇÃO ABSOLUTA DAS COORDENADAS DOS OBJETOS .....	102
TABELA 4.2	– COMPARAÇÃO RELATIVA DAS COORDENADAS DOS OBJETOS .....	105
TABELA 4.3	– CONFIGURAÇÃO DOS ENSAIOS .....	109
TABELA 4.4	– ÂNGULOS DIRETORES DO VETOR NORMAL DO ESPELHO NOS ENSAIOS .....	110
TABELA 4.5	– COMPARAÇÃO DE SOLUÇÕES COM PONTOS HOMÓLOGOS DISTINTOS.....	122

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1	OBJETIVOS .....	17
1.1.1	Objetivo geral .....	17
1.1.2	Objetivos específicos.....	17
1.2	JUSTIFICATIVA.....	18
1.3	ESTRUTURAÇÃO.....	19
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>20</b>
2.1	TOPOGRAFIA INDUSTRIAL.....	20
2.2	MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DE PONTOS OCULTOS EM AMBIENTES INDUSTRIAIS .....	24
2.2.1	Uso de barra para pontos ocultos ( <i>Hidden points bar</i> ) .....	24
2.2.1.1	Solução matemática – barra para pontos ocultos.....	26
2.2.2	Uso de espelhos.....	33
2.2.2.1	Solução matemática proposta por Gonçalves (2009).....	34
2.3	ESPELHOS E PONTOS OCULTOS – APLICAÇÕES DIVERSAS.....	38
2.3.1	Modelagem e controle de objetos e maquinários .....	38
2.3.2	Monitoramento de estruturas.....	41
2.4	ÓTICA GEOMÉTRICA: O ESPELHO PLANO.....	43
2.4.1	Características do espelho plano .....	44
2.4.1.1	Planicidade .....	44
2.4.1.2	Rugosidade .....	45
2.4.1.3	Revestimento.....	46
2.4.2	Espelho plano como superfície refletora.....	46
2.4.2.1	Reflexão especular e difusa .....	47
2.4.2.2	Reflexão simples e dupla.....	48
2.5	ELIPSES E ELIPSOIDES DE ERROS .....	50
2.5.1	Construção da elipse de erros por autovalores e autovetores.....	50
2.5.2	Construção do elipsoide de erros por autovalores e autovetores .....	52
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>55</b>
3.1	FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA .....	55
3.2	MODELO MATEMÁTICO .....	56
3.2.1	Desenvolvimento teórico .....	56

3.2.1.1	Modelagem da superfície do espelho .....	56
3.2.1.2	Determinação da reta que representa o raio incidente .....	62
3.2.1.3	Interseção do raio incidente na superfície do espelho .....	63
3.2.1.4	Determinação do ângulo de incidência .....	63
3.2.1.5	Determinação da reta que representa o raio refletido .....	65
3.2.1.6	Determinação das coordenadas do ponto de interesse .....	67
3.2.1.7	Controle de qualidade das coordenadas dos pontos ocultos .....	68
3.3	VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	68
3.3.1	Hipótese I: Características físicas do espelho .....	73
3.3.2	Hipótese II: Deficiências do modelo matemático .....	81
3.3.3	Síntese da investigação das hipóteses I e II .....	93
3.4	APRIMORAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO .....	93
3.4.1	Desenvolvimento teórico .....	94
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E ANÁLISES .....</b>	<b>100</b>
4.1	VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO FINAL .....	100
4.2	TESTES DE CONSISTÊNCIA DO MODELO MATEMÁTICO FINAL .....	105
4.2.1	Influência da posição e atitude da superfície refletora .....	106
4.2.2	Influência da posição da imagem virtual do ponto homólogo na superfície do espelho .....	118
4.2.3	Influência do afastamento do ponto homólogo .....	121
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>124</b>
5.1	CONCLUSÕES .....	124
5.2	RECOMENDAÇÕES .....	126
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>128</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Topografia Industrial, vinculada às Geociências, tem aplicabilidade em diversas áreas da atuação da engenharia, onde são utilizadas técnicas e métodos topográficos para o desenvolvimento e acompanhamento de projetos, por exemplo. Gonçalves (2009) cita algumas das principais aplicações como sendo a locação de estruturas e máquinas industriais, controle métrico de equipamentos e produtos industriais ou ainda no controle de deslocamentos de máquinas. Outras atividades são voltadas à integração de sensores e estudos de objetos, com foco na modelagem e monitoramento temporal.

Em diversas situações é de interesse determinar coordenadas de pontos em ambientes de difícil acesso, onde a Topografia Industrial é vista como saída para possibilitar levantamentos que garantam precisão e acuracidade (CUYPERS et al., 2009; OGUNDARE, 2015; GHILANE; WOLF, 2012), de acordo com a necessidade do usuário. Em ambientes industriais, muitas vezes, os espaços são tomados por tubulações, vibrações, variabilidade térmica ou equipamentos de operação que dificultam o estabelecimento de linhas de visada direta para pontos de interesse, inviabilizando o levantamento topográfico convencional do objeto (RADOVANOVIC; TESKEY, 2003).

De acordo com Antonopoulos (2005), Easa e Shaker (2010) há duas opções para a determinação de coordenadas de pontos ocultos. A primeira, foco desta pesquisa, é baseada na observação de pontos utilizando um espelho, no entanto, de literatura escassa, e a segunda através do uso da barra para pontos ocultos. O procedimento para o uso de tal barra consiste em posicioná-la sobre o ponto de interesse e observar marcas calibradas, definindo uma reta no espaço, e a partir desta, estimar matematicamente a posição do ponto observado. A desvantagem desta alternativa está na necessidade de se ter acesso ao ponto de interesse, o que muitas vezes não é possível. Assim, a aplicação de visadas desviadas por espelho plano passa a ser vantajosa, já que é desnecessária a ocupação do próprio ponto por qualquer tipo de acessório.

Ahmed (1995) realiza uma discussão sobre a utilização de visadas desviadas por espelhos planos, indicando como vantagem o menor tempo gasto durante levantamentos indiretos, quando comparado com a necessidade de várias reocupações de equipamentos para observar pontos ocultos ou não. Nesse sentido,

Gonçalves (2009) baseia-se se na concepção de Ahmed (1995), ao apresentar um estudo centrado na definição de uma modelagem matemática, para determinar coordenadas de pontos indiretamente, com uma solução baseada em recorrentes transformações de sistemas de referência, cuja propagação de erros foi estudada por Pinto (2013).

Enfim, o intuito deste trabalho é a determinação de coordenadas tridimensionais de pontos ocultos, que compreendem posições onde à linha de visada está obstruída, entre o observador e o ponto de interesse. Com base no exposto, apresenta-se um aprimoramento da solução sugerida por Gonçalves (2009), onde se desenvolveu uma nova modelagem matemática, em um único sistema de referência, baseada nos princípios da Topografia e da Ótica Geométrica. A hipótese é que o novo modelo evite a degradação da qualidade das informações com recorrentes transformações de referenciais, cuja solução fundamentou-se em aplicar conceitos relacionados com as propriedades geométricas dos espelhos planos.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

Desenvolver um modelo matemático para determinação de coordenadas tridimensionais de pontos ocultos em Topografia com uso da reflexão especular em espelhos planos.

### 1.1.2 Objetivos específicos

São objetivos específicos deste estudo:

- a) Aprimorar a modelagem matemática proposta por Gonçalves (2009) para determinação indireta de coordenadas tridimensionais com uso de espelhos planos, utilizando conceitos da Topografia e da Ótica Geométrica;
- b) Verificar as propriedades geométricas do espelho plano utilizado na pesquisa;
- c) Investigar fatores de erro envolvidos na solução proposta e indicar medidas mitigadoras destes efeitos;

- d) Validar a modelagem matemática com a realização de ensaios controlados, comparando-os com métodos convencionais de observação; e
- e) Testar a consistência da modelagem matemática em situações heterogêneas, com a variação da posição e atitude dos elementos envolvidos na modelagem matemática proposta.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Nos últimos anos as técnicas de determinação de coordenadas tridimensionais, por métodos geodésicos, têm sido empregadas em áreas correlatas como no caso da metrologia, locação industrial e monitoramento de estruturas. Métodos de interseção para definição de coordenadas de pontos inacessíveis como apresentados em Nadal (2000) ou técnicas de calibração como visto Faggion (2001) e Cruz (2010), são exemplos de iniciativas geradas em função da adequação das técnicas tradicionais às novas problemáticas as quais são confrontadas, do grupo de pesquisa “Geodésia Aplicada à Engenharia” vinculado CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), que engloba pesquisas desenvolvidas junto ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, da Universidade Federal do Paraná, no qual esta pesquisa está inserida.

Para o caso de pontos ocultos, uma alternativa para aplicação das técnicas convencionais encontrada na literatura é o uso de espelhos planos como equipamento auxiliar para observações de pontos descrito em trabalho pioneiro publicado por Ahmed (1995). No estudo o autor constata como vantagem o menor tempo gasto no levantamento quando comparado com as técnicas de interseção ótica por teodolitos. Em 2009, é defendida a tese de doutorado “Determinação indireta de coordenadas topográficas utilizando estação total e espelho” (GONÇALVES, 2009) no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas desta universidade, com nova abordagem do assunto, centrada na definição de modelagem matemática adequada e aparatos necessários.

Sendo assim, esta pesquisa visa contribuir e dar continuidade aos trabalhos de Ahmed (1995) e Gonçalves (2009), consolidando o uso de espelhos planos para determinação indireta de coordenadas tridimensionais empregando estações totais. Todavia, o enfoque dado aqui será na proposição e validação de uma nova modelagem matemática.

### 1.3 ESTRUTURAÇÃO

A tese é estruturada da seguinte forma. O capítulo dois sintetiza a fundamentação teórica inerente ao estudo. Em seguida, formaliza-se o problema de estudo e apresenta-se a modelagem matemática proposta para a determinação de coordenadas de pontos ocultos por uso de espelho, compondo o capítulo três. O capítulo quatro abrange os resultados alcançados com a validação da modelagem desenvolvida bem como testes de consistência do modelo, no intuito de averiguar a robustez da solução final proposta. Por fim, conclusões e recomendações, bem como perspectivas futuras desta pesquisa são apresentadas no capítulo cinco.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentam-se conceitos acerca da pesquisa desenvolvida. Inicialmente, introduz-se o conceito de Topografia Industrial. Em seguida, tratam-se das alternativas para a determinação de pontos ocultos, dentre elas o uso de espelhos planos, que é o foco deste trabalho. Face à isto, apresenta-se uma visão geral sobre as características e peculiaridades de espelhos planos, necessárias para a compreensão desta pesquisa. Por fim, é discutida a visualização das incertezas com uso de elipses e elipsoides de erros.

### 2.1 TOPOGRAFIA INDUSTRIAL

A Topografia Industrial, vinculada à Geodésia, consiste na aplicação das técnicas topográficas para o desenvolvimento de obras de engenharia de grande porte ou de maquinários industriais, a análise de comportamento geométrico temporal aplicado no monitoramento de estruturas, a estimativa de volumes, o controle de formas e aplicações metrológicas. Segundo Ogundare (2015) não se trata de uma disciplina específica da Geodésia, Fotogrametria ou qualquer outro campo do conhecimento e sim, o conjunto de conhecimento necessário para alcançar os objetivos do projeto, que, neste caso exige o alcance de precisões milimétricas ou submilimétricas nas suas soluções, fato este que faz ser difundida como Topografia de precisão ou Levantamento de precisão.

A diferenciação entre a Topografia industrial e convencional ocorre principalmente em função dos requisitos necessários no levantamento para alcançar a qualidade dos dados exigidos nas diversas aplicações, que são elencados por Ogundare (2015):

- Uso de equipamentos de alta precisão;
- Observações restritas associadas a modelos de tratamento de dados complexos, o que aumenta o tempo de coleta e processamento;
- Coleta de um grande número de observações. O alto grau de redundância tem o intuito de obter precisões na ordem do milímetro, garantindo a precisão e confiabilidade dos resultados;

- Modelos matemáticos rigorosos para a avaliação de erros, buscando o controle destes erros durante a coleta e processamento, fundamental para o controle de qualidade do levantamento.

Ghilane e Wolf (2012) apontam a Topografia Industrial como campo da Geomática que produz medidas precisas para processos industriais, onde pequenas tolerâncias são requeridas. Faggion et al. (2013) ressalta também que a acuracidade de mensuração é requisito para locações industriais, pois estas necessitam de precisões milimétricas ou melhores no posicionamento de equipamentos, bem como no monitoramento dos mesmos. Logo, as técnicas tradicionais de levantamentos geodésicos e topográficos podem ser adequadas às necessidades do controle métrico industrial, nos quesitos de precisão, acuracidade e aplicabilidade.

Logo, uma das sustentações da Topografia Industrial é a possibilidade da determinação de coordenadas de pontos com precisão. Entretanto, no âmbito industrial, é comum o uso das convencionais máquinas de medida de coordenadas ou CMM (Figura 2.1), do termo em inglês *Coordinate Measuring Machine*, que apenas são adequadas para objetos de pequeno porte. O princípio básico de funcionamento é que o eixo do CMM percorra a superfície da peça de estudo, realizando medidas de sua posição x, y, e z, de maneira que é possível reproduzir um modelo idêntico ao original, com precisão de micrometros. A principal restrição é que os objetos devem extraídos do ambiente onde estão para a realização de medidas (CUYPERS et al., 2009), nestes tipos de equipamentos.

Então, à medida que as aplicações expandem-se para objetos de escalas maiores como maquinários, trilhos e tanques que são imóveis, exigindo que as mensurações devam ser realizadas *in loco*, a Topografia Industrial surge como alternativa. Fan e Zhaoa (2014) afirmam que nos processos de fabricação e montagem de equipamentos de grande porte, a medição e controle das dimensões geométricas e erros associados de peças é a chave para garantir a qualidade de todo o equipamento produzido.

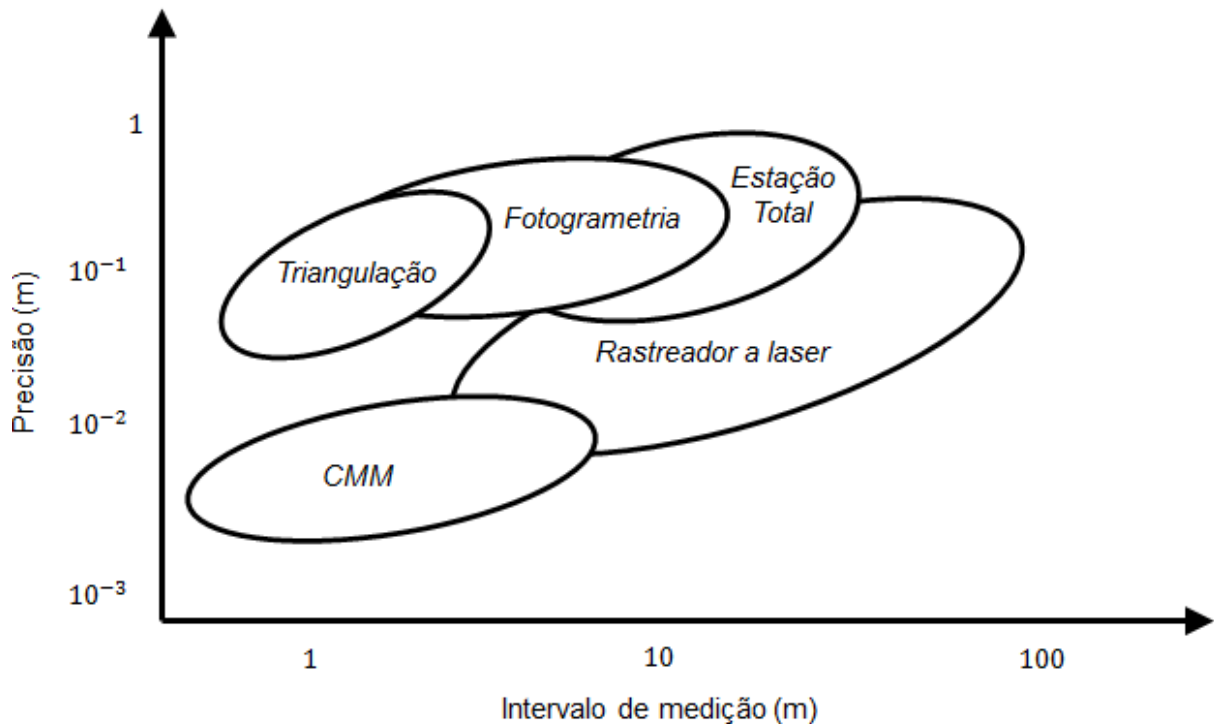
FIGURA 2.1 – EXEMPLO DE CMM



FONTE: Perceptron (2017).

Em seu trabalho, Cuypers et al. (2009) tratam dos diversos sistemas ópticos utilizados na metrologia de grande escala para determinação de coordenadas tridimensionais de objetos, sistemas móveis como o uso de estações totais, fotogrametria e triangulação. Conforme o diagrama da Figura 2.1, as técnicas geodésicas ainda não são capazes de alcançar precisões de ordem micrométrica ( $10^{-3}$  mm), obtendo resultados de milímetros ou décimos de milímetros em sua grande maioria. A vantagem é que o alcance das técnicas geodésicas é maior em relação aos sistemas convencionais, de modo que objetos de grande porte podem ser mensurados.

FIGURA 2.2 – COMPARAÇÃO DOS SISTEMAS MÓVEIS DE MEDIDA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS NA METROLOGIA



FONTE: Adaptado de Cuypers et al. (2009).

O presente estudo trata de uma solução baseada em observações obtidas por irradiação com uso de uma estação total, buscando alcançar a precisão milimétrica, coerente com a Figura 2.2. Já um exemplo da técnica de trilateração pode ser visto em Nadal (2000), onde é proposto método de interseção óptica tridimensional, em que apenas direções são mensuradas e a relação métrica é oriunda da observação de um elemento cujas dimensões são conhecidas e bem determinadas, de tal forma a fornecer um fator de escala a todo o levantamento.

Além da precisão, outros fatores exercem influência nos levantamentos de precisão e, por sua vez, implicam na escolha adequada da solução. Em síntese, três conjuntos devem ser considerados (CUYPERS et al., 2009):

1. Requisitos do levantamento: qualidade e confiabilidade dos dados;
2. Restrições do objeto de estudo: dimensões, materiais construtivos e posição;
3. Restrições do ambiente: temperatura, vibrações, iluminação, riscos de contaminação, espaço disponível.

Assim, não há solução única para todas as situações, sendo necessário avaliar caso a caso, e ponderar o tipo de levantamento adequado.

## 2.2 MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DE PONTOS OCULTOS EM AMBIENTES INDUSTRIAIS

A existência de maquinários, tubulações e ambientes restritos, dificultam o estabelecimento de linhas de visada direta entre o observador e o ponto de interesse, o que inviabiliza a realização do levantamento topográfico na forma convencional. Assim sendo, nesta pesquisa, adotou-se como definição para ponto oculto, todo ponto que se deseja ter o conhecimento de suas coordenadas, porém a linha de visada direta a partir do observador até este ponto possui alguma obstrução, o que impede a visualização direta do mesmo.

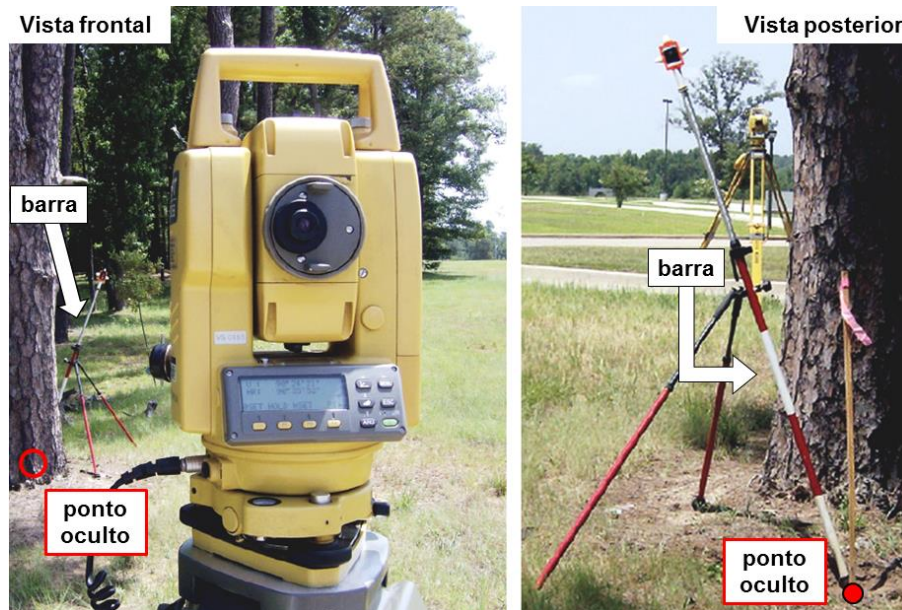
Antonopoulos (2005) apresenta duas alternativas para determinação de coordenadas destes pontos. A primeira segunda por uso de barra para pontos ocultos e a segunda por observações sobre espelho, possui escassa literatura, fato este que motivou o desenvolvimento desta pesquisa.

### 2.2.1 Uso de barra para pontos ocultos (*Hidden points bar*)

A solução com uso de barra para pontos ocultos consiste em observar um conjunto de marcas de geometria conhecida em uma haste posicionada sobre o ponto de interesse e, a partir destas observações, determinar a posição do ponto oculto à observação direta.

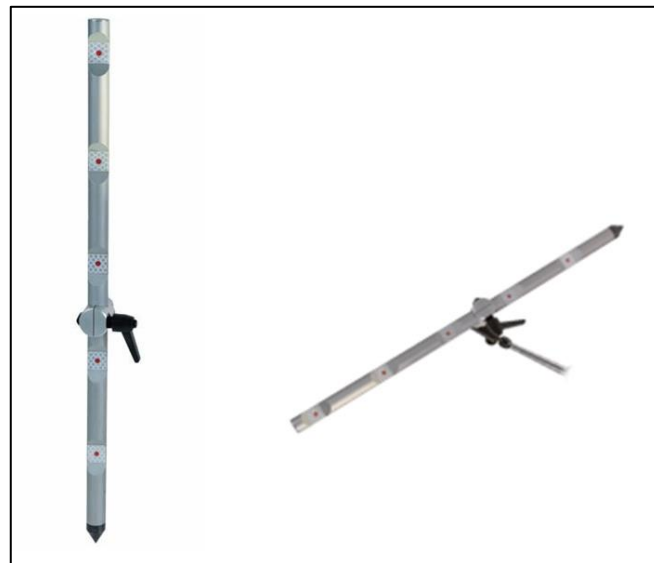
A Figura 2.3 mostra um levantamento simulado de um ponto oculto por uma árvore. A barra é posicionada inclinada desde o ponto até uma região não obstruída. O observador com a estação total realiza medidas no prisma posicionado na haste sobre o ponto de interesse, e, determina indiretamente a coordenada do ponto oculto, materializado junto à estaca posterior a árvore. A Figura 2.4 apresenta o modelo comercial da barra da marca Leica Geosystems, com alvos refletivos sobre a mesma.

FIGURA 2.3 – SIMULAÇÃO DE APLICAÇÃO DA BARRA PARA PONTOS OCULTOS



FONTE: Adaptado de Billings (2008).

FIGURA 2.4 – BARRA PARA PONTOS OCULTOS



FONTE: Leica Geosystems (2014).

Scherer (2004) utiliza a barra para ponto oculto para aprimorar levantamentos arquitetônicos com sistema de varredura à laser, de modo a minimizar múltiplas instalações do sensor para o recobrimento total da superfície, além de garantir a medição de vértices e quinas de interesse para a reconstrução e modelagem digital.

Todavia, as modelagens matemáticas para aplicação do método com uso de barras são diversas, cujas principais foram listadas por Antonopoulos (2005):

- (a) por meio da observação de pontos marcados na barra em posições conhecidas usando dois teodolitos;
- (b) por ajuste de uma esfera, com um raio igual ao comprimento da barra sendo o centro o ponto oculto, com um conjunto de pontos pré-definidos na barra; ou
- (c), por meio da observação de três de pontos na barra utilizando apenas um teodolito.

A última opção, segundo os autores, é a mais viável, porque utiliza apenas um instrumento e é aplicável para a maioria dos casos práticos, especialmente quando o espaço para instalação do teodolito quanto para a barra é limitado e, quando por questões de segurança há impossibilidade de realizar medidas de distância eletronicamente, com uma estação total, por exemplo. Esta solução matemática é apresentada no item a seguir.

#### 2.2.1.1 Solução matemática – barra para pontos ocultos<sup>1</sup>

A geometria do método de barra para pontos ocultos é mostrada na Figura 2.5. O intuito é determinar as coordenadas do ponto oculto D. Para tal a barra é posicionada sobre o ponto oculto D numa orientação conveniente de observação dos demais pontos A, B e C.

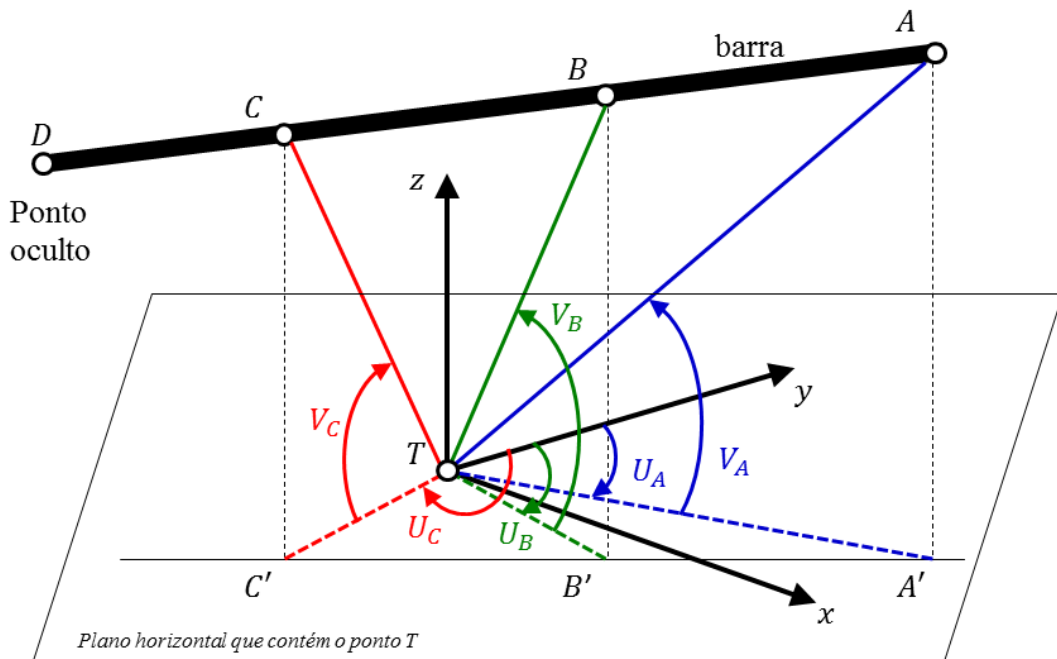
Na solução é considerado um sistema destrógiro tridimensional, cuja origem coincide com o ponto T, onde o eixo z têm o sentido da vertical e o eixo y é definido por uma direção de orientação pertinente, neste caso igual ao zero para contagem de ângulos horizontais.

As direções horizontais e os ângulos verticais são medidos em três pontos A, B e C na barra a partir de uma estação de observação (por exemplo, com um teodolito) configurada no ponto T. As direções horizontais ( $U_A, U_B, U_C$ ) são medidas a partir do eixo y e os ângulos verticais ( $V_A, V_B, V_C$ ) são medidos a partir do plano horizontal. As distâncias entre A e B ( $S_{AB}$ ), B e C ( $S_{BC}$ ), C e D ( $S_{CD}$ ) são conhecidas.

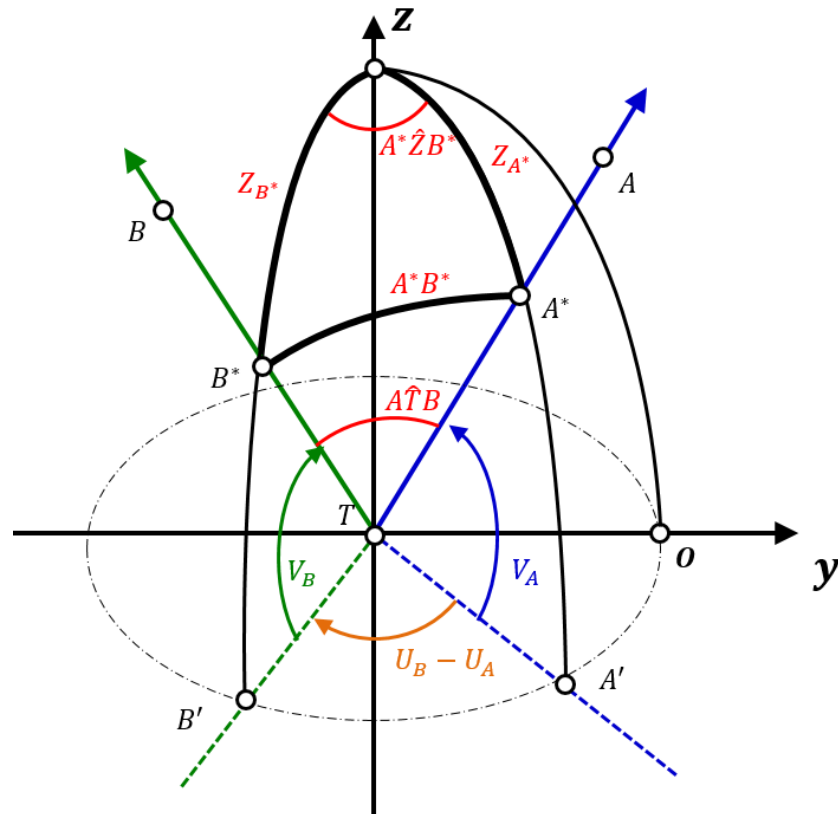
---

<sup>1</sup> Solução matemática baseada em Easa e Shaker (2010) e Antonopoulos (2005). Para maiores detalhes inerentes à propagação de erros consultar ambas as literaturas.

FIGURA 2.5 – GEOMETRIA DO MÉTODO POR BARRA PARA PONTOS OCULTOS



FONTE: Adaptado de Easa e Shaker (2010).

FIGURA 2.6 – ESFERA UNITÁRIA PARA DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO  $A\hat{T}B$ 

FONTE: Adaptado de Antonopoulos (2005).

Inicialmente os ângulos  $A\hat{T}B$  e  $B\hat{T}C$  devem ser determinados. A solução proposta por Antonopoulos (2005) é que se suponha uma esfera de raio unitário com centro coincidente com o ponto T, de maneira que três pontos  $A^*$ ,  $B^*$  e Z são definidos pela interseção da esfera com as direções TA, TB e o eixo z, como mostra a Figura 2.6. De onde se pode expressar por trigometria esférica a seguinte relação formada pelo triângulo esférico  $A^*B^*Z$ :

$$\cos A^*B^* = \cos Z_{A^*} \cos Z_{B^*} + \operatorname{sen} Z_{A^*} \operatorname{sen} Z_{B^*} \cos A^*\hat{Z}B^* \quad (2.1)$$

Com

$Z_{A^*}$ ,  $Z_{B^*}$  são ângulos zenitais das direções TA e TB que podem ser relacionados com os respectivos ângulos verticais  $V_A$  e  $V_B$ :

$$\begin{cases} Z_{A^*} = 90^\circ - V_A \\ Z_{B^*} = 90^\circ - V_B \end{cases} \quad (2.2)$$

$A^*\hat{Z}B^*$  é o ângulo formado pela diferença das direções horizontais de TA e TB, tal que:

$$A^*\hat{Z}B^* = U_B - U_A \quad (2.3)$$

$A^*B^*$  é o lado do triângulo esférico correspondente ao ângulo  $A\hat{T}B$ .

Assim, pode-se reescrever a Equação 2.1 em função das direções horizontais e ângulos verticais medidos, da seguinte forma:

$$\cos A\hat{T}B = \cos(90^\circ - V_A) \cos(90^\circ - V_B) + \operatorname{sen}(90^\circ - V_A) \operatorname{sen}(90^\circ - V_B) \cos(U_B - U_A) \quad (2.4)$$

Simplificando:

$$\cos A\hat{T}B = \operatorname{sen}(V_A) \operatorname{sen}(V_B) + \cos(V_A) \cos(V_B) \cos(U_B - U_A) \quad (2.5)$$

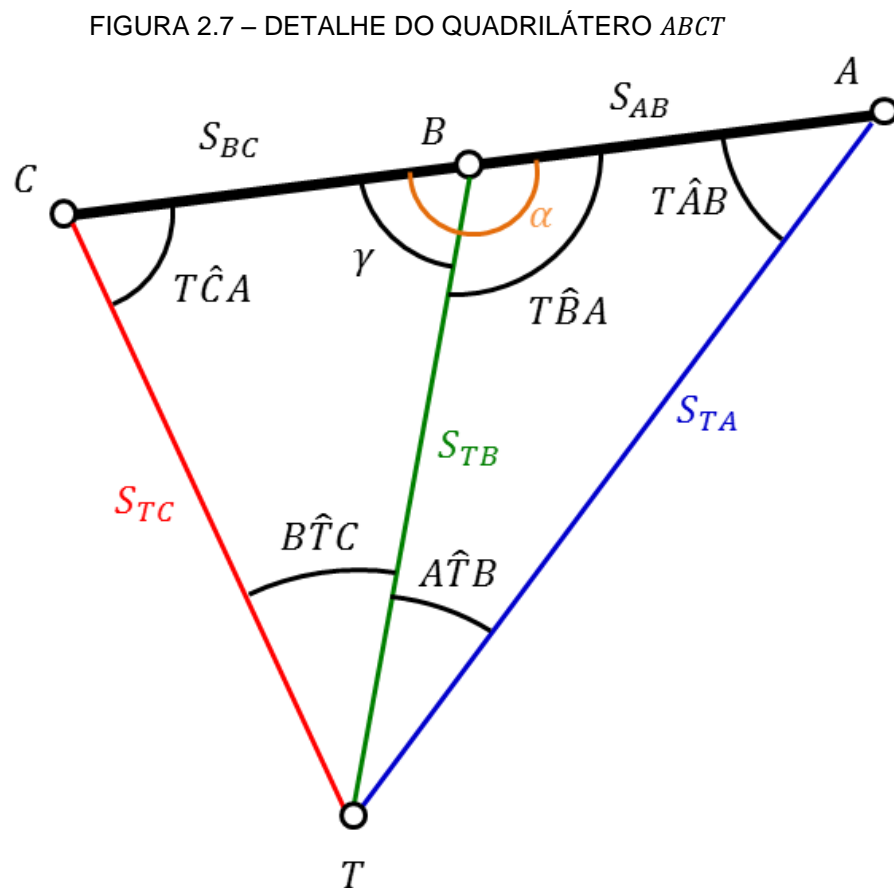
De modo que o ângulo  $A\hat{T}B$  é determinado por:

$$A\hat{T}B = \arccos[\text{sen}(V_A)\text{sen}(V_B) + \cos(V_A)\cos(V_B)\cos(U_A - U_B)] \quad (2.6)$$

E de forma análoga determina-se o ângulo  $B\hat{T}C$ :

$$B\hat{T}C = \arccos[\text{sen}(V_B)\text{sen}(V_C) + \cos(V_B)\cos(V_C)\cos(U_B - U_C)] \quad (2.7)$$

Em seguida, os ângulos  $T\hat{C}A$ ,  $T\hat{A}C$ , e  $T\hat{B}A$  são determinados por solução do problema de Pothenot, ora conhecido por resseção (GHILANI, 2010). Seja então o quadrilátero  $ABCT$  extraído da Figura 2.6, com a indicação de ângulos e distâncias envolvidas como mostra a Figura 2.7.



FONTE: Adaptado de Antonopoulos (2005).

Em função da soma dos ângulos internos do quadrilátero tem-se que:

$$360^\circ = (B\hat{T}C + A\hat{T}B) + T\hat{C}A + T\hat{A}B + \alpha \quad (2.8)$$

Mas como A, B, C pertencem a uma mesma reta, o ângulo  $\alpha$  é igual a  $180^\circ$ , logo:

$$360^\circ = (B\hat{T}C + A\hat{T}B) + T\hat{C}A + T\hat{A}B + 180^\circ \quad (2.9)$$

Desenvolvendo, pode-se definir uma grandeza  $R$ , dada por:

$$R = 180^\circ - (B\hat{T}C + A\hat{T}B) = T\hat{C}A + T\hat{A}B \quad (2.10)$$

Em seguida, aplica-se a lei dos senos nos triângulos  $BTC$  e  $ABT$ , dos quais é possível formular:

$$S_{TB} = \frac{S_{BC} \text{sen}(T\hat{C}A)}{\text{sen}(B\hat{T}C)} \quad (2.11)$$

$$S_{TB} = \frac{S_{AB} \text{sen}(T\hat{A}B)}{\text{sen}(A\hat{T}B)} \quad (2.12)$$

Igualando as Equações 2.11 e 2.12:

$$\frac{S_{BC} \text{sen}(T\hat{C}A)}{\text{sen}(B\hat{T}C)} = \frac{S_{AB} \text{sen}(T\hat{A}B)}{\text{sen}(A\hat{T}B)} \quad (2.13)$$

Tal que é possível expressar uma grandeza  $K$  dada por:

$$K = \frac{S_{BC} \text{sen}(A\hat{T}B)}{S_{AB} \text{sen}(B\hat{T}C)} = \frac{\text{sen}(T\hat{A}B)}{\text{sen}(T\hat{C}A)} \quad (2.14)$$

Isolando  $\text{sen}(T\hat{A}B)$  da Equação 2.14, tal que:

$$\text{sen}(T\hat{A}B) = \frac{S_{BC} \text{sen}(A\hat{T}B)}{S_{AB} \text{sen}(B\hat{T}C)} \text{sen}(T\hat{C}A) \quad (2.15)$$

Mas da Equação 2.10, sabe-se que:

$$T\hat{A}B = R - T\hat{C}A \quad (2.16)$$

Logo considerando as relações das Equações 2.14 e 2.16 é coerente reescrever a Equação 2.15:

$$\text{sen}(R - T\hat{C}A) = K \cdot \text{sen}(T\hat{C}A) \quad (2.17)$$

Desenvolvendo:

$$\text{sen}(R) \cos(T\hat{C}A) - \cos(R) \text{sen}(T\hat{C}A) = K \cdot \text{sen}(T\hat{C}A) \quad (2.18)$$

E dividindo a Equação 2.17 por  $\cos(T\hat{C}A)$ :

$$\text{sen}(R) - \cos(R) \tan(T\hat{C}A) = K \cdot \tan(T\hat{C}A) \quad (2.19)$$

Donde:

$$\tan(T\hat{C}A)[K + \cos(R)] = \text{sen}(R) \quad (2.20)$$

e

$$\text{cotg}(T\hat{C}A) = \frac{[K + \cos(R)]}{\text{sen}(R)} \quad (2.21)$$

De modo que:

$$T\hat{C}A = \text{arccotg} \frac{[K + \cos(R)]}{\text{sen}(R)} \quad (2.22)$$

E da Equação 2.16 e do fato que os A, B, e C são colineares, têm-se:

$$T\hat{A}C = T\hat{A}B = R - T\hat{C}A \quad (2.23)$$

E pela soma dos ângulos internos do triângulo  $ABT$ :

$$T\hat{B}A = 180^\circ - (T\hat{A}B - A\hat{T}B) \quad (2.24)$$

Sendo agora conhecido os ângulos  $T\hat{C}A$ ,  $T\hat{A}C$ , e  $T\hat{B}A$ , é possível determinar as distâncias  $S_{TA}$ ,  $S_{TB}$  e  $S_{TC}$  aplicando lei dos senos nos triângulos  $ABT$  e  $BTC$ , de onde vem:

$$S_{TA} = \frac{S_{AB}\text{sen}(T\hat{B}A)}{\text{sen}(A\hat{T}B)} \quad (2.25)$$

$$S_{TB} = \frac{S_{AB}\text{sen}(T\hat{A}B)}{\text{sen}(A\hat{T}B)} \quad (2.26)$$

$$S_{TC} = \frac{S_{BC}\text{sen}(180^\circ - T\hat{B}A)}{\text{sen}(B\hat{T}C)} \quad (2.27)$$

Assim, as coordenadas dos pontos A, B e C podem ser calculadas:

$$A: \begin{cases} x_A = S_{TA}\text{sen}(U_A)\cos(V_A) \\ y_A = S_{TA}\cos(U_A)\cos(V_A) \\ z_A = S_{TA}\text{sen}(V_A) \end{cases} \quad (2.28)$$

$$B: \begin{cases} x_B = S_{TB}\text{sen}(U_B)\cos(V_B) \\ y_B = S_{TB}\cos(U_B)\cos(V_B) \\ z_B = S_{TB}\text{sen}(V_B) \end{cases} \quad (2.29)$$

$$C: \begin{cases} x_C = S_{TC}\text{sen}(U_C)\cos(V_C) \\ y_C = S_{TC}\cos(U_C)\cos(V_C) \\ z_C = S_{TC}\text{sen}(V_C) \end{cases} \quad (2.30)$$

Por fim, as coordenadas do ponto oculto D são determinadas por:

$$D: \begin{cases} x_D = x_C + l.S_{CD} \\ y_D = y_C + m.S_{CD} \\ z_D = z_C + n.S_{CD} \end{cases} \quad (2.31)$$

Com  $l$ ,  $m$  e  $n$  representando os cossenos diretores da direção definida pela barra dados por:

$$l = \frac{x_C - x_A}{S_{AC}} \quad (2.32)$$

$$m = \frac{y_C - y_A}{S_{AC}} \quad (2.33)$$

$$n = \frac{z_C - z_A}{S_{AC}} \quad (2.34)$$

Cabe ressaltar que a solução se torna complexa pelo fato das marcas posicionadas sobre barra, nesta solução definidas pelos pontos A, B, e C, são observadas apenas com teodolito. O uso de estação total simplifica a obtenção das coordenadas destes pontos, iniciando a solução a partir da Equação 2.28, porém a qualidade da solução pode ser reduzida devido à inserção de medidas de distância eletronicamente.

### 2.2.2 Uso de espelhos

A grande desvantagem do uso de barras para pontos ocultos é a necessidade de posicionar a barra sobre o ponto, o que torna inviável a observação em áreas instáveis, de difícil acesso, que possam acarretar em risco de acidente para o operador. Nesse sentido, a aplicação de visadas desviadas por espelho plano torna-se vantajosa, já que, exceto no primeiro momento, onde ocorre à implantação dos pontos de observação, é desnecessária a ocupação do próprio ponto por qualquer tipo de acessório.

Logo, a alternativa é usar espelhos planos para observações indiretas de pontos, como descrito em trabalho pioneiro publicado por Ahmed (1995). No estudo, o autor constata como vantagem o menor tempo gasto no levantamento quando comparado com as técnicas convencionais topográficas. Outra constatação é que a solução apresentada pelo autor alcança precisão entre 2 a 3 cm na locação de pontos, Porém tal precisão não é tolerável para fins da Topografia Industrial (FAGGION et al., 2013).

Gonçalves (2009) baseia-se na concepção de Ahmed (1995), ao apresentar estudo centrado na definição de uma modelagem matemática adequada e aparatos necessários, para determinação de coordenadas de pontos, realizando-se medições de ângulos zenitais, direções horizontais e distâncias inclinadas utilizando estação total e um espelho plano para o desvio da visada. A autora apresenta diferenças de ordem milimétrica para coordenadas bidimensionais, mas a componente altimétrica teve menor precisão, de ordem centimétrica, devido à dificuldade de determinar a atitude do espelho no espaço, ou seja, determinar o plano que coincide com a superfície do espelho no instante da medição, propagando assim erros na definição das coordenadas tridimensionais dos pontos observados. O estudo da propagação de erros da solução proposta por Gonçalves (2009) foi realizado por Pinto (2013) e, como já mencionado, um dos objetivos desta pesquisa é aprimorar tal solução, sintetizada no item a seguir.

#### 2.2.2.1 Solução matemática proposta por Gonçalves (2009)<sup>2</sup>

A solução proposta por Gonçalves (2009) segue a seguinte sequência de cálculo:

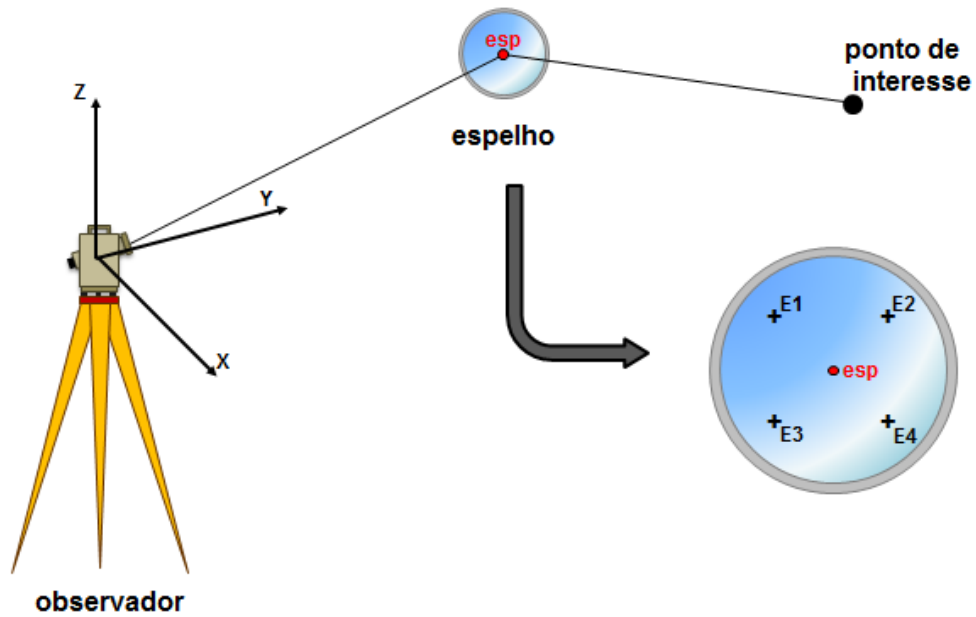
Passo 01. Adoção de um sistema principal com origem vinculada à estação total de observação, definidos pelos eixos  $X'$ ,  $Y'$  e  $Z'$  (Figura 2.8).

Passo 02. Determinação de coordenadas no sistema principal por irradiação de quatro marcas posicionadas na superfície do espelho (pontos E1, E2, E3, E4) e também a coordenada da posição do espelho de onde se observou a imagem virtual ponto de interesse, cujo nome é denominado de ponto “esp” (Figura 2.8). Todos estes pontos pertencem ao plano da superfície refletora, no qual se utilizou um anteparo fosco para determinação da distância entre estação total e espelho plano, indicada por  $d_1$  na Figura 2.9.

---

<sup>2</sup> Síntese baseada em Gonçalves (2009).

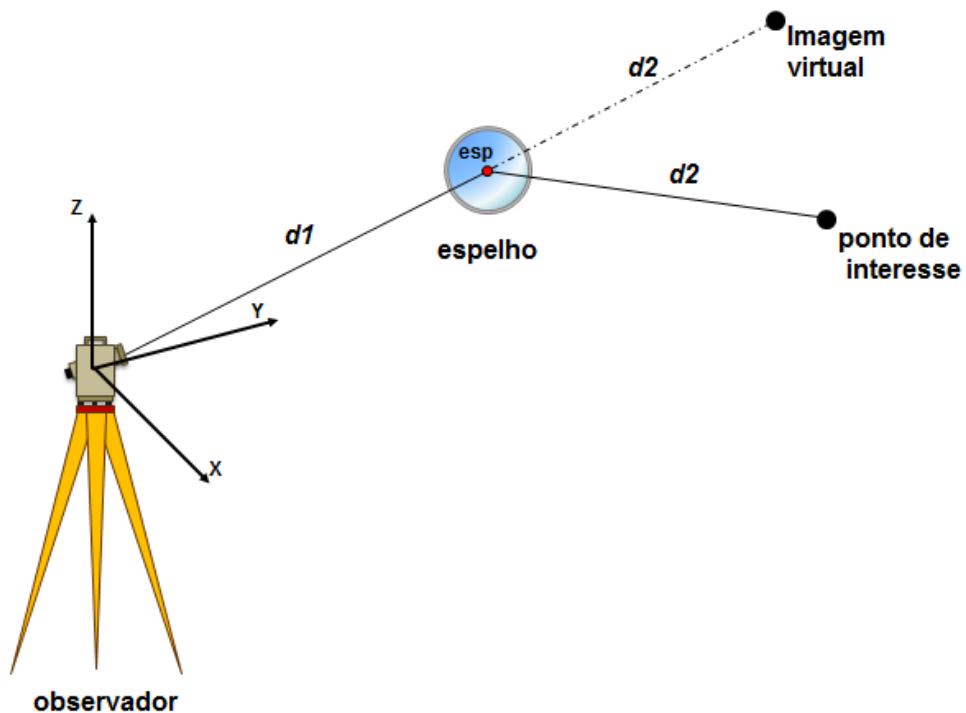
FIGURA 2.8 – MARCAS NO ESPELHO E O PONTO “ESP”



FONTE: Adaptado de Gonçalves (2009).

Passo 03. Determinação das coordenadas no sistema principal das imagens virtuais do ponto de interesse por irradiação, considerando a distância inclinada medida pela estação total, formada pela soma das distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , indicadas na Figura 2.9.

FIGURA 2.9 – POSIÇÃO DA IMAGEM VIRTUAL DO PONTO DE INTERESSE

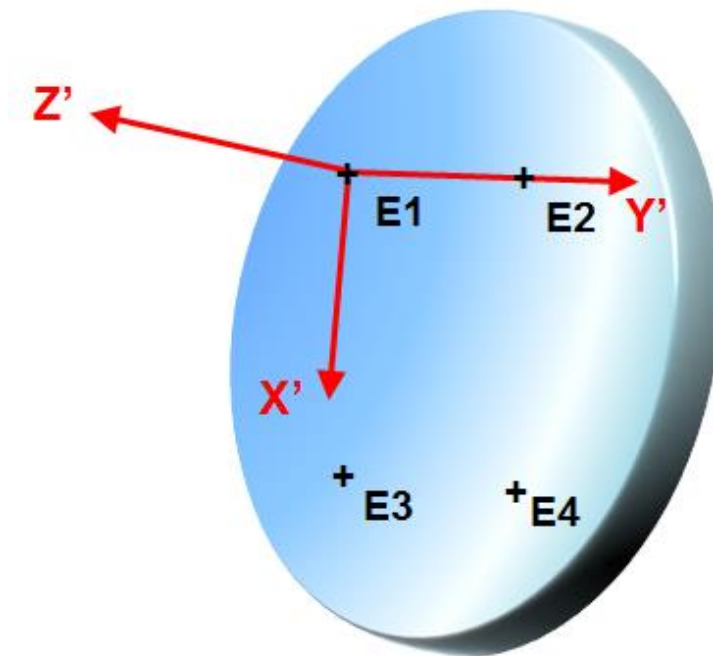


FONTE: Adaptado de Gonçalves (2009).

Passo 04. Definição do sistema do espelho. Por álgebra linear, define-se um sistema do espelho, definidos pelos eixos  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , onde o eixo  $Y'$  tem a direção do vetor definido entre as marcas E1 e E2, o eixo  $Z'$  têm a direção do versor normal do plano do espelho e o eixo  $X'$  torna o terno dextrogiro. A origem é a marca E1 cujas coordenadas, no sistema do espelho foram arbitradas. O sistema do espelho é indicado na Figura 2.10.

$$x'_{E1} = y'_{E1} = z'_{E1} = 0,00 \text{ m} \quad (2.35)$$

FIGURA 2.10 – SISTEMA DO ESPELHO



FONTE: Adaptado de Gonçalves (2009).

Passo 05. Determinação das coordenadas, no sistema de espelho, da estação origem, do ponto de interesse na superfície do espelho “esp” e as marcas do espelho E2, E3 e E4.

Passo 06. Definição da transformação entre sistema principal para o sistema do espelho. Utilizou-se uma transformação afim ajustada considerando as coordenadas das marcas do espelho E1, E2, E3, E4 e da estação total de observação, já que todos os pontos têm suas coordenadas conhecidas em ambos os sistemas de referência.

Passo 07. Determinação das coordenadas da imagem virtual no sistema do espelho aplicando a transformação afim definida no Passo 06.

Passo 08. Realizar a reflexão da imagem virtual para definir a coordenada do ponto de interesse no sistema do espelho, em torno do ponto “esp” na sua superfície considerando translações nos eixos  $X'$  e  $Z'$  do sistema do espelho (Figura 2.11):

$$\begin{cases} \Delta x' = x'_{esp} - x'_{imagem\ virtual} \\ \Delta z' = z'_{esp} - z'_{imagem\ virtual} \end{cases} \quad (2.36)$$

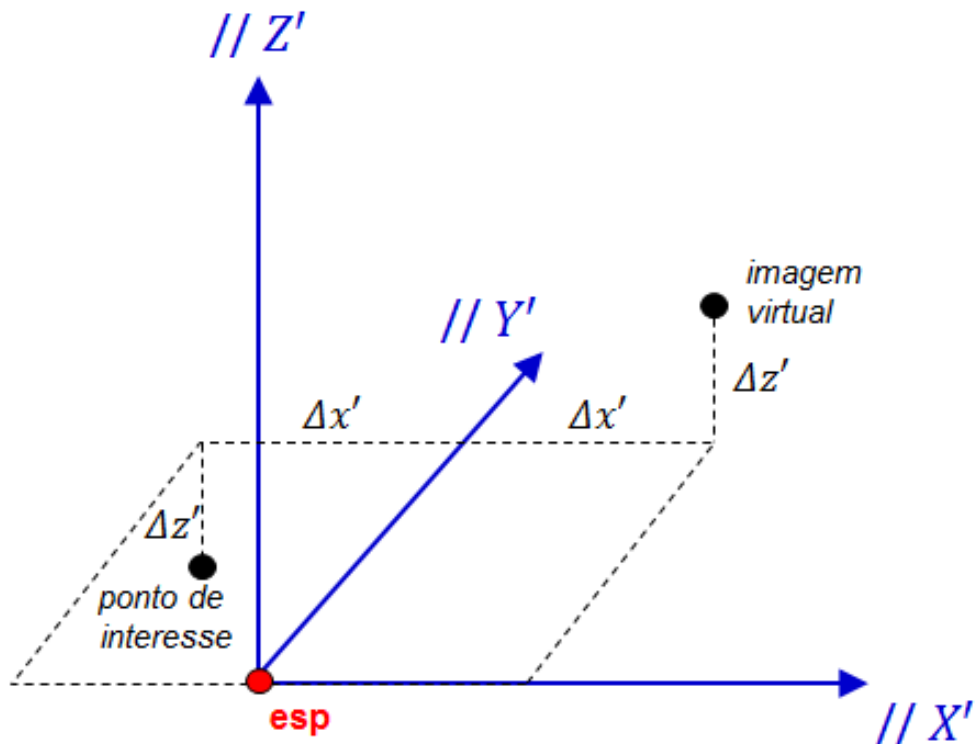
Com

$\Delta x', \Delta y'$  são translações entre a imagem virtual do ponto de interesse e o ponto “esp” na superfície do espelho;

$x'_{esp}, z'_{esp}$  são as coordenadas  $x'$  e  $y'$  no sistema do espelho do ponto “esp”; e

$x'_{imagem\ virtual}, z'_{imagem\ virtual}$  são as coordenadas  $x'$  e  $y'$  da imagem virtual do ponto no sistema do espelho.

FIGURA 2.11 – REFLEXÃO DA IMAGEM VIRTUAL DO PONTO NO SISTEMA DO ESPELHO



FONTE: Adaptado de Gonçalves (2009).

E aplicando tais translações nas coordenadas do ponto “esp” determina-se as coordenadas do ponto de interesse no sistema do espelho:

$$\begin{cases} x'_p = x'_{esp} + \Delta x' \\ y'_p = y'_{esp} \\ z'_p = z'_{esp} + \Delta z' \end{cases} \quad (2.37)$$

Passo 09. Cálculo das coordenadas do ponto de interesse no sistema principal foi realizado aplicando a transformação afim inversa a partir das coordenadas definidas no sistema do espelho, oriundas do Passo 08.

## 2.3 ESPELHOS E PONTOS OCULTOS – APLICAÇÕES DIVERSAS

A necessidade de determinar coordenadas de pontos ocultos é um problema comum aos diversos campos de atuação das Ciências Geodésicas. Como exemplo, aplicações de fotogrametria terrestre que buscam sanar a observação de pontos ocultos com múltiplas instalações dos sensores laser scanner e com a integração de sistemas, logo estudos são focados na minimização do esforço operacional no processamento do registro das nuvens de pontos e na estimativa de feições (SANTOS et al., 2013; SCHNABEL et al., 2007). A Geodésia, por sua vez, tem focado no monitoramento e modelagem de objetos, assim como na integração de sistemas onde a relação espacial entre as feições de estudo é de grande valia às aplicações na engenharia. (CAPRA et al., 2015; BERSH; KALLOP, 2013; CUYPERS et al, 2009). Neste contexto, este item exemplifica alguma das aplicações da solução a ser apresentada nos capítulos posteriores, que se baseia na observação de pontos ocultos com uso de espelhos planos.

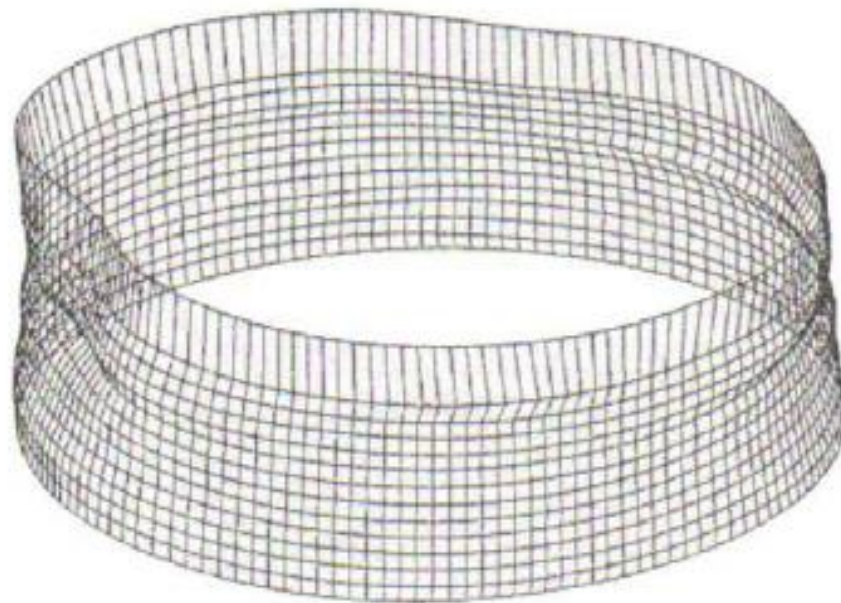
### 2.3.1 Modelagem e controle de objetos e maquinários

Uma das principais necessidades do ambiente industrial é a possibilidade de realizar várias medições e análises das características geométricas de objetos físicos, sejam eles produtos ou maquinários (MAKAROV, 2013).

No que tange a modelagem tridimensional de artefatos industriais, apesar do advento de novas tecnologias de medida, como os sistemas de escaneamento a

laser terrestre, Delčev et al. (2012) afirmam que para verificação da deformação de um objeto, de grandes dimensões, com precisão milimétrica, o adequado é o uso da aplicação de métodos geodésicos. Os autores apresentam estudo de caso para inspeção de arqueação de tanques por métodos geodésicos, com o objetivo de alcançar a incerteza nas medições de no máximo 1 mm, e também aplicam técnicas as quais consideram apenas a observação angular na determinação de coordenadas. Os resultados da modelagem do tanque podem ser vistos na Figura 2.12. Carneiro (1993) também discute a obtenção de pontos para o posterior cálculo volumétrico, considerando uso de somente observações angulares.

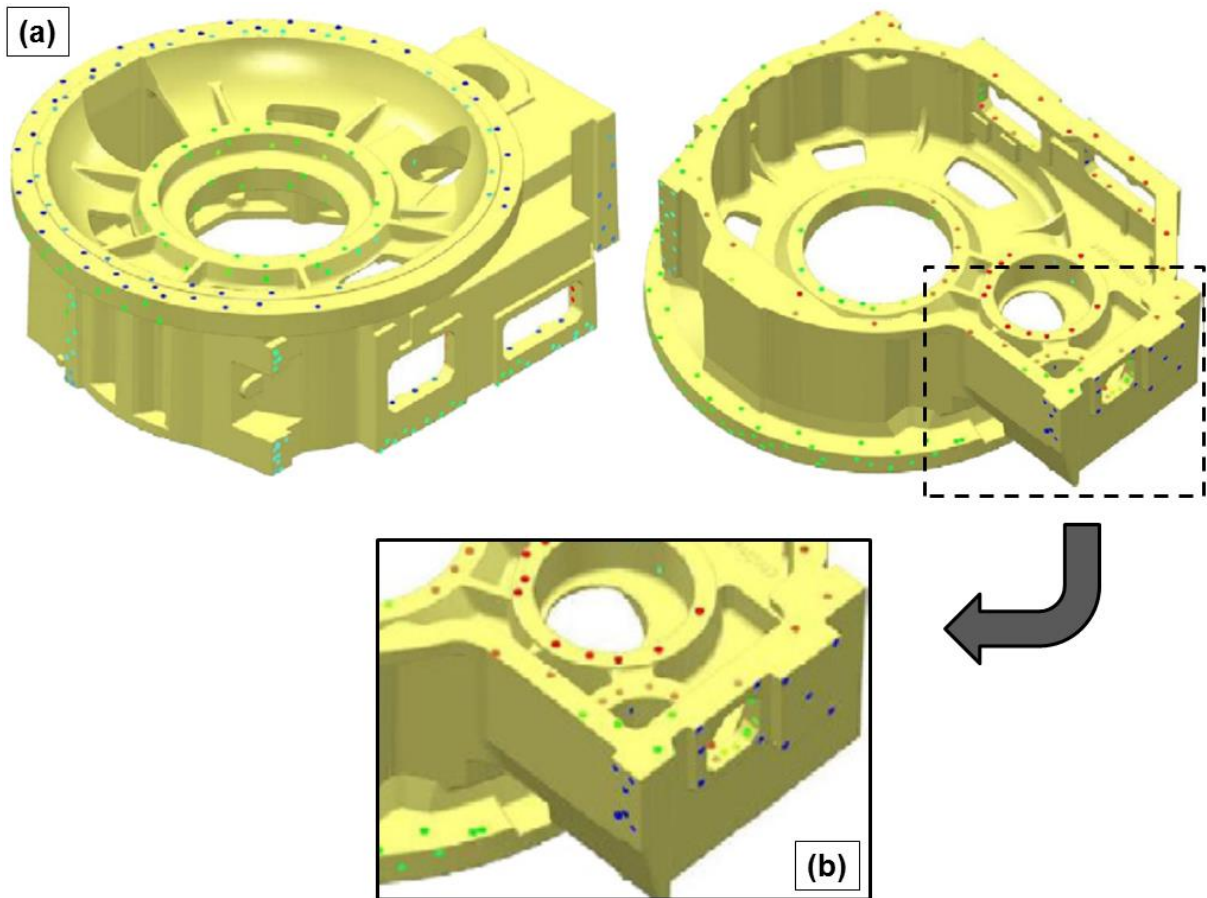
FIGURA 2.12 – MODELO TRIDIMENSIONAL: INSPEÇÃO DE ARQUEAÇÃO DE TANQUE



FONTE: Delčev et al. (2012).

Na mesma linha, Cuypers et al. (2009) estudam a aplicação de diversas técnicas para controle de objetos industriais. A Figura 2.13 apresenta o resultado da comparação da peça observada *in loco*, onde os pontos coloridos indicam divergências encontradas entre realidade e projeto existente.

FIGURA 2.13 – MODELAGEM DE PEÇA INDUSTRIAL

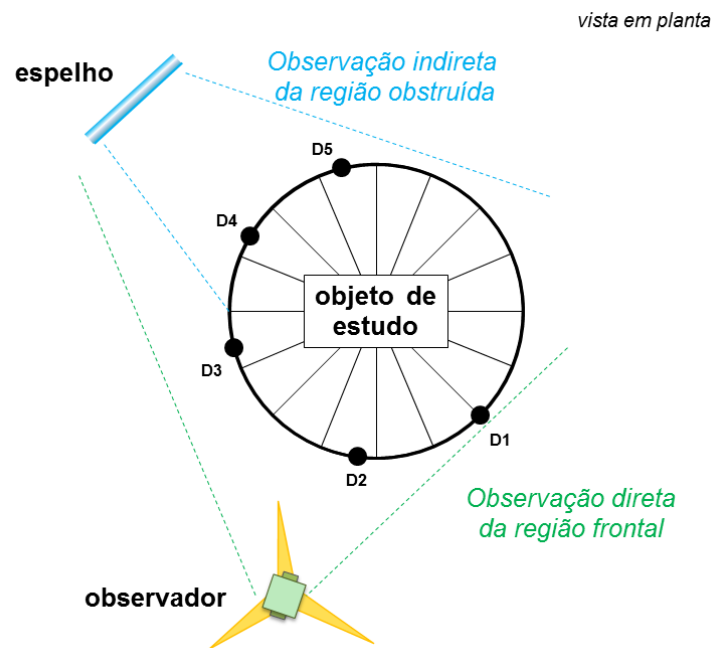


FONTE: Adaptado de Cuypers et al. (2009).

LEGENDA: (a) peça modelada e (b) ampliação do setor indicado, onde nota-se pontos coloridos indicando divergência entre realidade e projeto.

O uso de espelhos vem sanar o efeito da presença de regiões obstruídas ao levantamento em relação às técnicas tradicionais, ampliando a área de observação. A Figura 2.14 ilustra esta proposta, onde a face frontal do objeto é modelada a partir da observação direta, com estação total enquanto a face posterior tem sua modelagem feita indiretamente, contudo qualquer ponto coletado pertencerá a um mesmo referencial. Com isso a vantagem da modelagem apresentada é que as visadas diretas nos pontos D1, D2, D3 e indiretas, com uso do espelho, nos pontos D4 e D5 têm a relação geométrica mantida entre si, possibilitando análises de controle de deformações e estimativas de volumes.

FIGURA 2.14 – PROPOSTA PARA MODELAGEM DE OBJETOS COM USO DE ESPELHO



FONTE: O Autor (2017).

### 2.3.2 Monitoramento de estruturas

Szostak-Chrzanowski et al. (2001) dividem o monitoramento de grandes estruturas em dois conjuntos: (1) os métodos geotécnicos ou físicos; e (2) métodos geodésicos de monitoramento.

O primeiro conjunto tem como vantagem a facilidade na automação das medidas, que permitem o monitoramento contínuo das estruturas. Os métodos geotécnicos baseiam-se no uso de pêndulos, extensômetros, medidores triortogonais de junta (Figura 2.15). Neste caso o monitoramento é local e relativo, o que dificulta a comparação da estrutura como um todo.

FIGURA 2.15 – MEDIDOR TRIORTOGONAL DE JUNTA

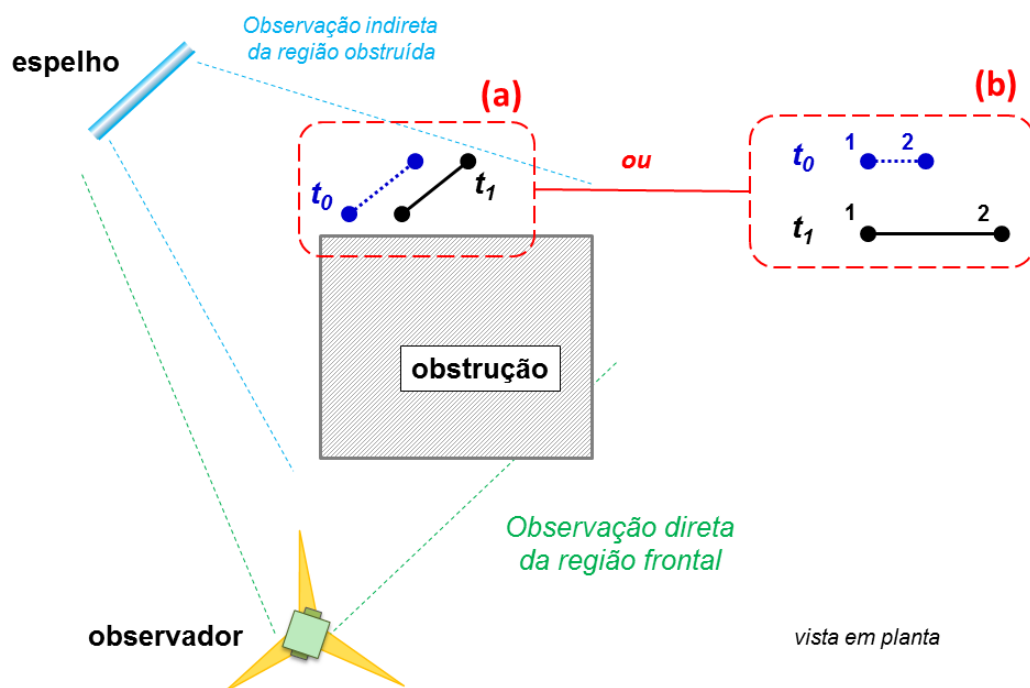


FONTE: Neves (2008).

Por outro lado, o segundo conjunto, que trata dos métodos geodésicos têm como diferencial detectar movimentos absolutos (DEPARTMENT OF THE ARMY, 1994; CHAVES, 1994) que permitem vincular as observações a um sistema de referência geodésico e avaliar a acuracidade da medição globalmente. Diversos estudos correlacionados à monitoramento de estruturas têm sido desenvolvidos no grupo de pesquisa do CNPq no qual esta tese está inserida, “Geodésia aplicada à Engenharia”, exemplificado pelos trabalhos de Cruz (2015), Graça (2014) e Siguel (2013).

Logo, no que tange o monitoramento de estruturas, seja por métodos geotécnicos ou geodésicos, o uso de espelhos visa fornecer mais versatilidade e adequabilidade de observação de pontos de controle e de monitoramento, permitindo mensurar deslocamentos ou deformações com visadas indiretas complementares às das visadas diretas. Uma das aplicações é verificar deslocamentos, na comparação da posição de pontos em duas épocas distintas  $t_0$  e  $t_1$  (Figura 2.16a) ou também deformações da geometria entre dois pontos (Figura 2.16b), tanto em análises absolutas quanto relativas, pois o uso do espelho vem para mitigar áreas de difícil visualização, comuns em grandes estruturas.

FIGURA 2.16 – PROPOSTA DO USO DE ESPELHO PARA CONTROLE DE PONTOS



FONTE: O Autor (2017).

## 2.4 ÓTICA GEOMÉTRICA: O ESPELHO PLANO

A aplicação de espelhos em levantamentos topográficos para casos de visadas de difícil pontaria, de pontos inacessíveis e de pontos ocultos já é realidade. Fabricantes já disponibilizam espelhos específicos para estes fins (Figura 2.17).

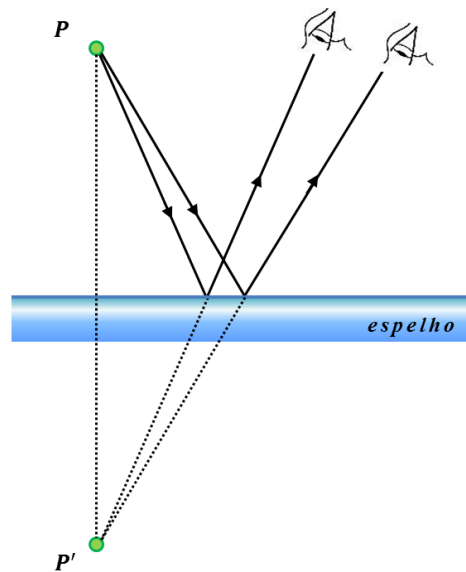
FIGURA 2.17 – EXEMPLOS DE ESPELHOS PARA FINS DE TOPOGRAFIA INDUSTRIAL



FONTE: Adaptado de Leica Geosystems (2014).

Nesses equipamentos utilizam-se espelhos planos em sua concepção, pois estes são os elementos óticos mais simples que existem (NUSSENZVEIG, 1998). A propriedade básica do espelho plano baseia-se no princípio de Fermat. Em um espelho plano, observadores de posições distintas, enxergam um mesmo ponto  $P$  refletido, pois os raios incidentes no espelho convergem para o ponto observado. Logo, a sensação visual do observador é idêntica à que se teria se os raios emanassem de  $P'$ . Diz-se que  $P'$  uma imagem virtual do ponto objeto  $P$ , como visto na Figura 2.18.

FIGURA 2.18 – FUNCIONAMENTO DO ESPELHO PLANO IDEAL



FONTE: Adaptado de Nussenzeig (1998).

Apesar de esta propriedade ser afetada por razões construtivas dos espelhos planos como planicidade, rugosidade e revestimento utilizado, é a trajetória simplificada dos raios refletidos que torna vantajoso a modelagem e a aplicação de espelhos para visadas indiretas em levantamentos geodésicos.

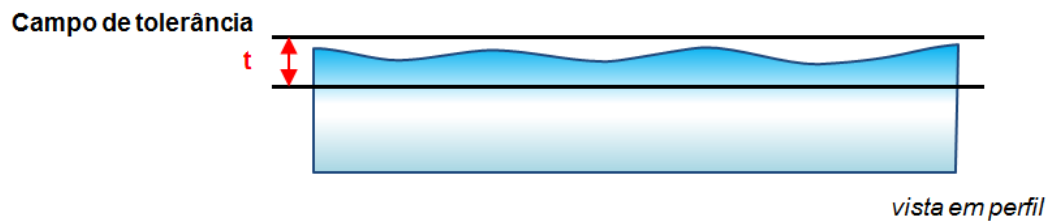
#### 2.4.1 Características do espelho plano

Em soluções analíticas é usual considerar um espelho plano ideal. Todavia, por razões construtivas, os espelhos planos apresentam características servem qualificá-los em relação ao espelho plano ideal. Destas características destacam-se a planicidade, rugosidade e revestimento.

##### 2.4.1.1 Planicidade

A planicidade pode ser tratada como o grau de proximidade entre a superfície do espelho plano e um plano ideal. Apesar de planos não possuírem espessura, adota-se um campo de tolerância, que segundo Magalhães (2006) é limitado por dois planos paralelos, com uma distância ( $t$ ) entre eles, tolerância a qual deve compreender a superfície analisada, conforme a Figura 2.19.

FIGURA 2.19 – CAMPO DE TOLERÂNCIA DE PLANICIDADE



FONTE: Adaptado de Magalhães (2006).

De forma prática, a planicidade é verificada ao comparar a superfície testada com um modelo padrão, isto é, um elemento opticamente plano, sobre ambas incidir um feixe de luz. As franjas de interferência de luz são verificadas e devem ser paralelas entre si para que a superfície testada seja realmente plana. Teste em laboratório por meio de franjas de interferência foi realizado por Gonçalves (2009), que constatou a planicidade do espelho utilizado no desenvolvimento desta pesquisa.

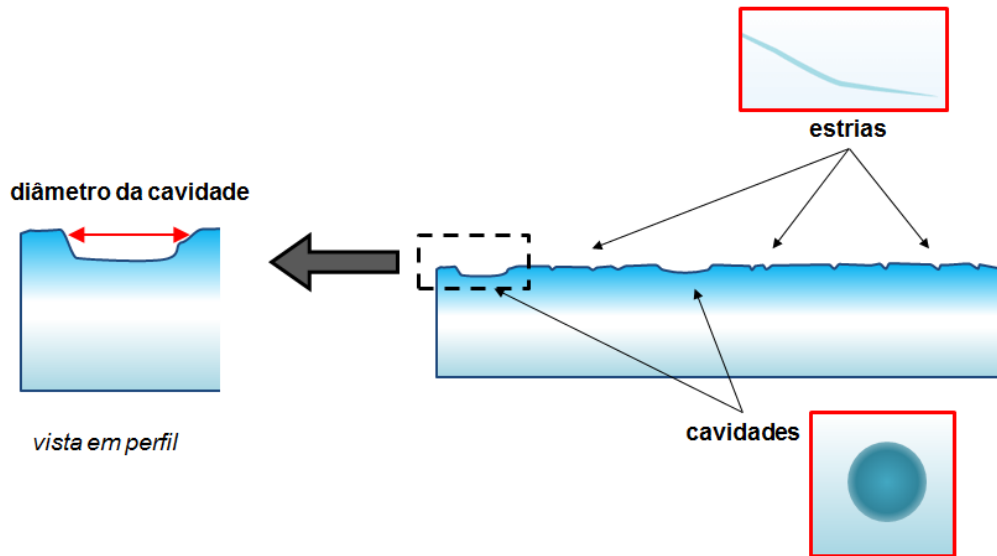
#### 2.4.1.2 Rugosidade

Rugosidade está relacionada com a qualidade geométrica da superfície, considerando a quantidade de estrias e cavidades observadas. Em espelhos, segundo King II et al.<sup>3</sup> (1998 apud GONÇALVES, 2009), a tolerância em uma superfície é especificada como um par de números ( $F-D$ ), em que ( $F$ ) o número máximo de estrias visíveis e ( $D$ ) é o máximo diâmetro das cavidades. Para um elemento ótico de qualidade de precisão é  $60-40^4$  (Figura 2.20). Isto é, para uma superfície ótica de diâmetro de 1000 mm devem ser visíveis no máximo 60 estrias, cujo comprimento total não pode ser superior a 2,5 mm. Além disso, não pode conter mais do que 5 cavidades de tamanho máximo de 0,4mm, e a soma dos diâmetros de todas as cavidades não deve exceder 4mm.

<sup>3</sup> KING II, G., EIKLENBORG, M., VILCHECK, M., IOANNOU, S. **Quality control of high precision optical mirrors**. Engineering 801: Engineering Management – Project 2: Quality Control - San Francisco State University, 1998.

<sup>4</sup> Sistema de qualidade baseado na norma americana: **MILPRF13830B - General specification governing the manufacturing, assembly, and inspection of Optical Components for Fire Control Instruments** (EDMUND OPTICS, 2017).

FIGURA 2.20 – RUGOSIDADE DE UMA SUPERFÍCIE



FONTE: Adaptado de King II et al. (1998 apud GONÇALVES, 2009).

#### 2.4.1.3 Revestimento

Outra característica acerca de espelhos são os tipos de revestimentos em função do uso. A propriedade que define o revestimento a ser usado é a refletividade, que é a razão entre os fluxos de energia dos feixes refletidos e incidentes, podendo ser determinada experimentalmente em função do número de onda, que é obtido utilizando um laser e um medidor de energia, sobre a superfície refletora. No âmbito da Topografia Industrial o tipo de revestimento é importante, pois ao realizar medidas eletrônicas de distâncias, com uso de feixe laser, cujo valor mensurado é dependente do sinal refletido de volta ao emissor, logo a refletividade da superfície é fator que deve ser considerado.

#### 2.4.2 Espelho plano como superfície refletora

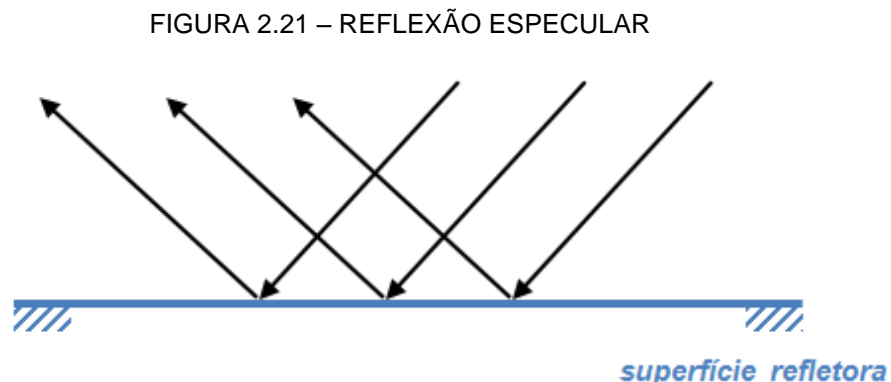
Os espelhos planos considerados nesta pesquisa podem ser tratados como superfícies refletoras, já que permitem a reflexão de feixes de luz, em função do revestimento utilizado. Desta forma, a reflexão de um objeto em uma superfície plana deve atender a três pontos conforme Nussenzveig (1998). Primeiro, a distância entre a imagem virtual e o espelho, será sempre igual à distância entre o objeto real e o espelho. Segundo, não há redução ou ampliação no tamanho do

objeto refletido, ou seja, sempre se observa objetos e imagens em escala natural. E por último, os raios incidentes e refletidos pertencem a um mesmo plano, o qual também contém a normal da superfície refletora.

As reflexões podem ser especulares ou difusas. Podem ser também classificadas em simples ou dupla em função de características da superfície refletora apresentadas a seguir.

#### 2.4.2.1 Reflexão especular e difusa

A reflexão especular (Figura 2.21) ocorre quando os raios são refletidos em uma única direção, ou seja, eles são paralelos entre si. Isto só ocorre quando o espelho for opticamente plano, ou seja, a rugosidade existente e a planicidade estão dentro de padrões adequados como mencionado no item 2.4.1.

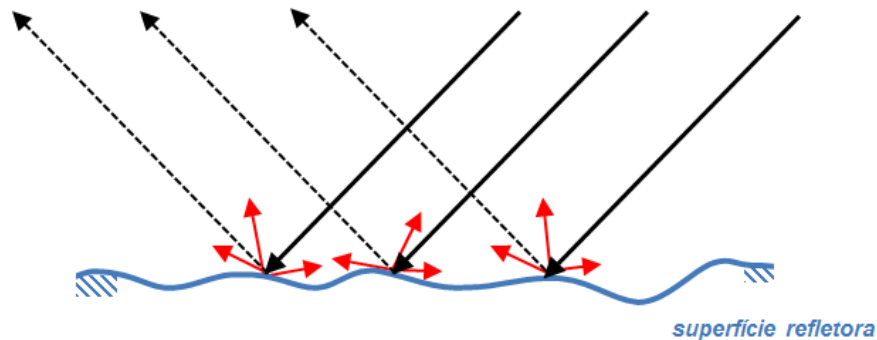


FONTE: Adaptado de Nussenzeig (1998).

A reflexão especular possui como principal característica a geometria entre os raios incidentes e refletidos, pois o ângulo de incidência ( $\theta$ ), ângulo entre a normal da superfície e o raio incidente, tem a mesma medida que o ângulo de reflexão ( $\theta'$ ), ângulo entre a normal da superfície e o raio refletido. O fato dos ângulos de incidência e reflexão serem iguais é possível definir analiticamente as direções refletidas, desde que as direções incidentes e a posição da superfície refletora sejam conhecidas, que é o foco da metodologia proposta.

A reflexão difusa ocorre em superfícies ditas rugosas, de forma que os raios são refletidos para qualquer direção (Figura 2.22).

FIGURA 2.22 – REFLEXÃO DIFUSA



FONTE: Adaptado de Nussenzveig (1998).

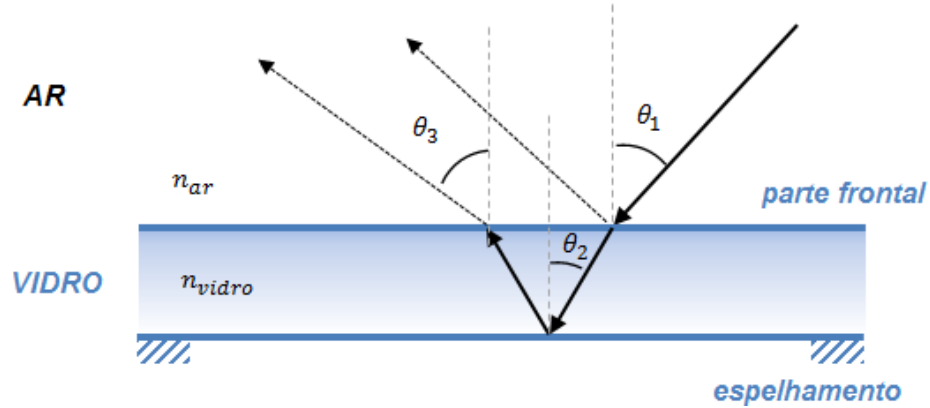
A ocorrência de reflexão difusa é utilizada para aplicação de medidas eletrônicas de distância sem prismas refletores, já que parcela do sinal emitido retorna a fonte emissora, permitindo a medição da grandeza. Todavia, a precisão é reduzida em relação às medidas de eletrônicas de distância baseadas em prismas ou alvos refletores, que fazem uso da reflexão especular.

#### 2.4.2.2 Reflexão simples e dupla

A forma de construção de superfícies refletoras acarreta na ocorrência de reflexões simples ou duplas. Se o revestimento que define reflexão se encontrar na parte posterior do vidro, o raio incidente é refratado, ao penetrar no vidro, visto que a luz passa do ar para o vidro, em meios com índices de refração distintos. O mesmo ocorrerá para o raio refletido, que é refratado ao passar do vidro para o ar.

Na Figura 2.23 observam-se os ângulos de incidência na parte frontal  $\theta_1$ , ângulo de incidência da parte posterior  $\theta_2$ , onde existe o espelhamento e ângulo de reflexão final do raio  $\theta_3$ . Ainda são indicadas que o raio passa por duas camadas diferentes, ar e vidro, com seus respectivos índices de refração,  $n_{ar}$  e  $n_{vidro}$ . No caso de observações topográficas deve-se evitar a reflexão dupla, pois há alteração na direção refletida, bem como o percurso da luz é maior do que numa reflexão na parte externa, acarretando em maiores distâncias e em posições errôneas do ponto observado.

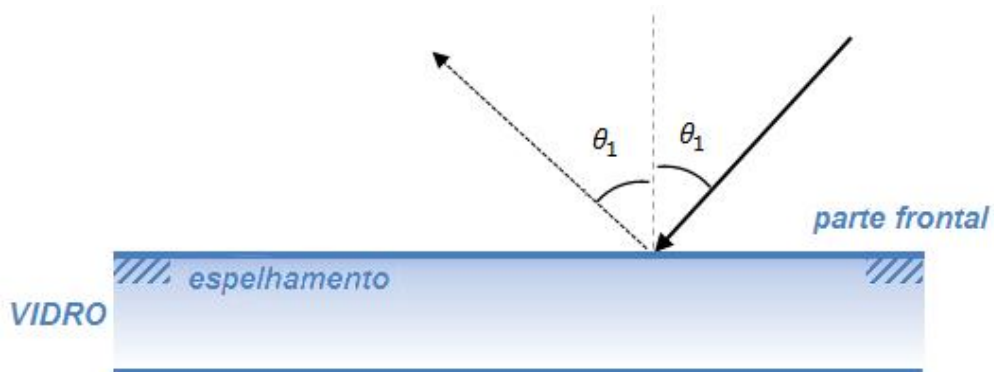
FIGURA 2.23 – REFLEXÃO DUPLA EM SUPERFÍCIE COM ESPELHAMENTO POSTERIOR



FONTE: Adaptado de Nussenzveig (1998).

Para sanar este tipo de problema, busca-se trabalhar apenas com espelhos que possuem o espelhamento na parte frontal, que atuam com reflexões simples, similares àquelas apresentadas na reflexão especular (Figura 2.24), tal que o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão são iguais. A reflexão simples é propícia para aplicações de engenharia, pois além de serem descritas por modelos analíticos simplificados, não acarretam em distorções significativas nas trajetórias dos raios.

FIGURA 2.24 – REFLEXÃO SIMPLES EM SUPERFÍCIE COM ESPELHAMENTO FRONTAL



FONTE: Adaptado de Nussenzveig (1998).

## 2.5 ELIPSES E ELIPSOIDES DE ERROS

As incertezas de um ponto podem ser representadas no caso bidimensional por uma elipse de erro. Todavia, o interessante é progredir da elipse de erros, bidimensional, para o elipsoide de erros, tridimensional, já que as coordenadas de pontos usualmente são tratadas nas três dimensões. Desta forma é possível avaliar o efeito da precisão das três componentes, X, Y e Z, de maneira conjunta e não mais par a par. Enfim, a construção pode ser generalizada para um espaço n-dimensional, contudo os casos particulares de  $n=2$  (elipses de erros) e  $n=3$  (elipsoides de erros) são convenientes às aplicações com coordenadas de pontos (GEMAEL et al., 2015; HIRNOVEM, 1971).

Esta solução generalizada baseia-se na aplicação dos autovalores e autovetores da matriz variância covariância (MVC) das coordenadas do ponto.

### 2.5.1 Construção da elipse de erros por autovalores e autovetores<sup>5</sup>

Dada a MVC das coordenadas de um ponto P bidimensional ( $\Sigma_{xy}$ ) na forma:

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Com

$\sigma_x^2$  é a variância da coordenada X do ponto;

$\sigma_y^2$  é a variância da coordenada Y do ponto;

$\sigma_{xy}, \sigma_{yx}$  são as covariâncias entre as coordenadas X e Y do ponto.

É possível determinar os autovalores ( $\lambda_i$ ) da MVC da Equação 2.38, que são dados pela solução da equação característica:

$$|\Sigma_{xy} - \lambda I| = 0 \quad (2.39)$$

---

<sup>5</sup> Baseado em Gemael et al. (2015) e Hirnovem (1971). Para maiores detalhes recomenda-se a consulta à ambas as literaturas.

Com

$I$  é a matriz identidade de ordem 2.

Uma matriz 2x2 tem a si associada dois autovalores ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ). Estes autovalores correspondem às variâncias máxima e mínima, tal que suas raízes quadradas correspondem ao semieixo maior ( $a$ ) e semieixo menor ( $b$ ) da elipse, definidos nas direções  $x'$  e  $y'$  respectivamente. Logo os autovalores fornecem as dimensões das elipses. Como  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  tem-se que:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\max \sigma^2} = \sqrt{\lambda_1} \\ b &= \sqrt{\min \sigma^2} = \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

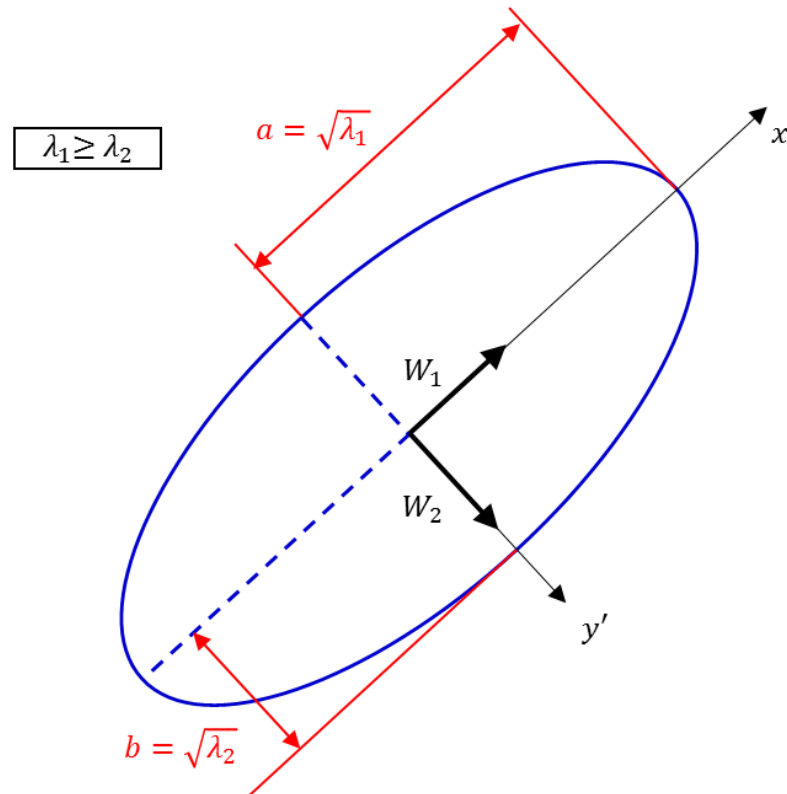
Cada autovalor  $\lambda_i$  é associado a um respectivo autovetor  $W_i$  proveniente da solução:

$$(\Sigma_{xy} - \lambda_i I) W_i = 0 \quad (2.41)$$

Cada autovetor  $W_i$  representa a orientação do semieixo definido por seu autovalor  $\lambda_i$ . O versor de  $W_i$  corresponde aos cossenos diretores do respectivo semieixo. Assim sendo, a dimensão (oriunda dos autovalores) e a orientação (oriunda dos autovetores) dos semieixos da elipse foram determinados.

A Figura 2.25 apresenta a elipse de erros com indicação da parametrização oriunda dos autovalores ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) e autovetores ( $W_1, W_2$ ) da MVC das coordenadas bidimensionais do ponto P, bem como o semieixo maior ( $a$ ) e o semieixo menor ( $b$ ).

FIGURA 2.25 – ELIPSE DE ERROS: PARAMETRIZAÇÃO POR AUTOVALORES E AUTOVETORES



FONTE: O Autor (2017).

### 2.5.2 Construção do elipsoide de erros por autovalores e autovetores<sup>6</sup>

Da mesma forma, pode-se generalizar para o caso tridimensional, construindo-se o chamado elipsoide de erros.

Seja a MVC ( $\Sigma_{xyz}$ ) de um ponto P tridimensional qualquer:

$$\Sigma_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Com

$\sigma_x^2$  é a variância da coordenada X do ponto;

---

<sup>6</sup> Baseado em Gemael et al. (2015) e Hirnovem (1971). Para maiores detalhes recomenda-se a consulta à ambas as literaturas.

$\sigma_y^2$  é a variância da coordenada Y do ponto;

$\sigma_z^2$  é a variância da coordenada Z do ponto;

$\sigma_{xy}, \sigma_{yx}$  são as covariâncias entre as coordenadas X e Y do ponto;

$\sigma_{xz}, \sigma_{zx}$  são as covariâncias entre as coordenadas X e Z do ponto;

$\sigma_{yz}, \sigma_{zy}$  são as covariâncias entre as coordenadas Y e Z do ponto.

Os autovalores  $\lambda_i$  são a solução da equação característica:

$$|\Sigma_{xyz} - \lambda I| = 0 \quad (2.43)$$

Com

$I$  é a matriz identidade de ordem 3.

Em uma matriz 3x3 são gerados três autovalores ( $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ ), tal que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Os semieixos  $(a, b, c)$  do elipsoide de erros, que definem as direções  $x', y', z'$  respectivamente e são determinados a partir dos autovalores por:

$$a = \sqrt{\lambda_1}; \quad b = \sqrt{\lambda_2}; \quad c = \sqrt{\lambda_3} \quad (2.44)$$

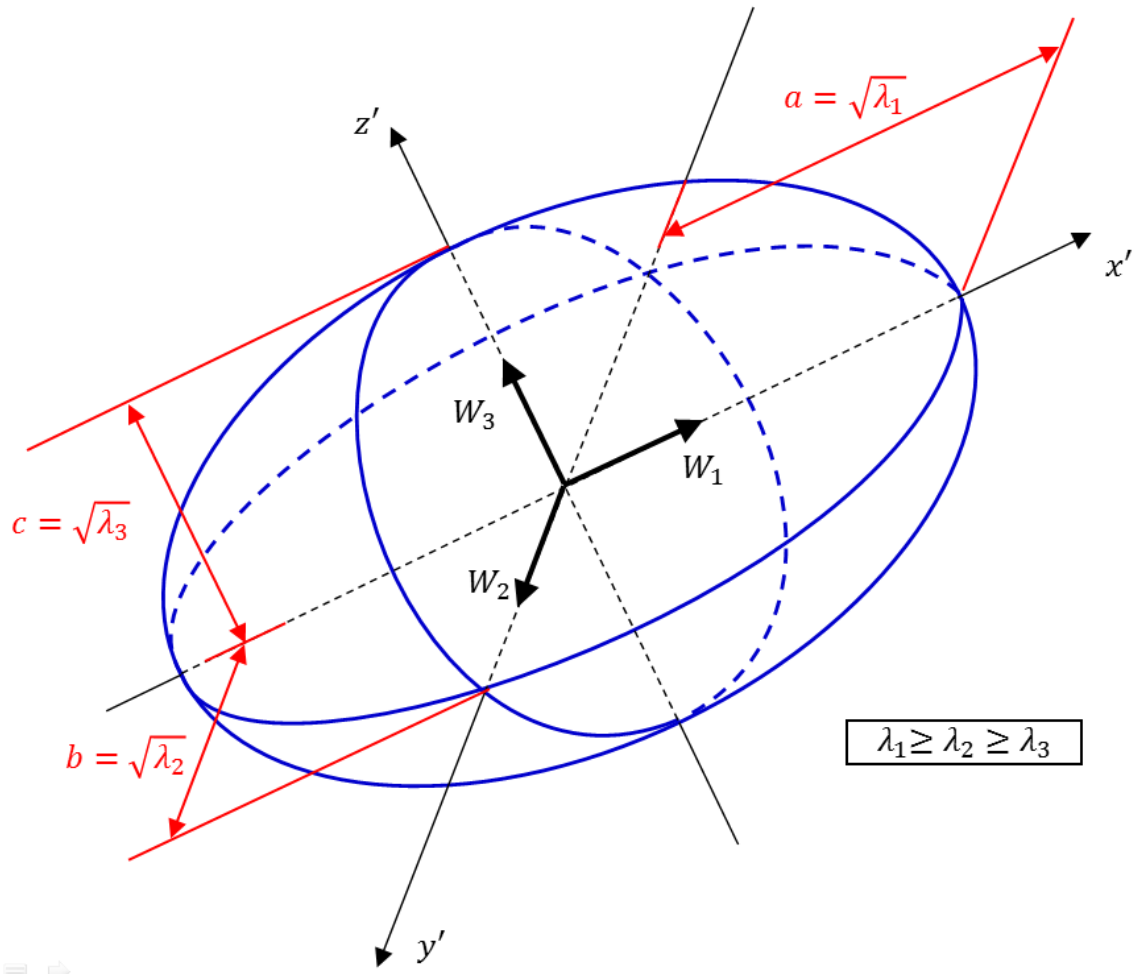
A cada autovalor  $\lambda_i$  é associado um autovetor  $W_i$ , proveniente de:

$$(\Sigma_{xyz} - \lambda_i I) W_i = 0 \quad (2.45)$$

Por fim, o autovetor  $W_i$  corresponde à direção do respectivo semieixo determinado pelo autovalor  $\lambda_i$ . O versor de  $W_i$  é a representação dos cossenos diretores de cada um dos semieixos.

A Figura 2.26 apresenta o elipsoide de erros com indicação da parametrização oriunda dos autovalores ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) e autovetores ( $W_1, W_2, W_3$ ) da MVC das coordenadas tridimensionais do ponto P, bem como o semieixos  $(a, b, c)$  do elipsoide.

FIGURA 2.26 – ELIPSOIDE DE ERROS: PARAMETRIZAÇÃO POR AUTOVALORES E AUTOVETORES



FONTE: O Autor (2017).

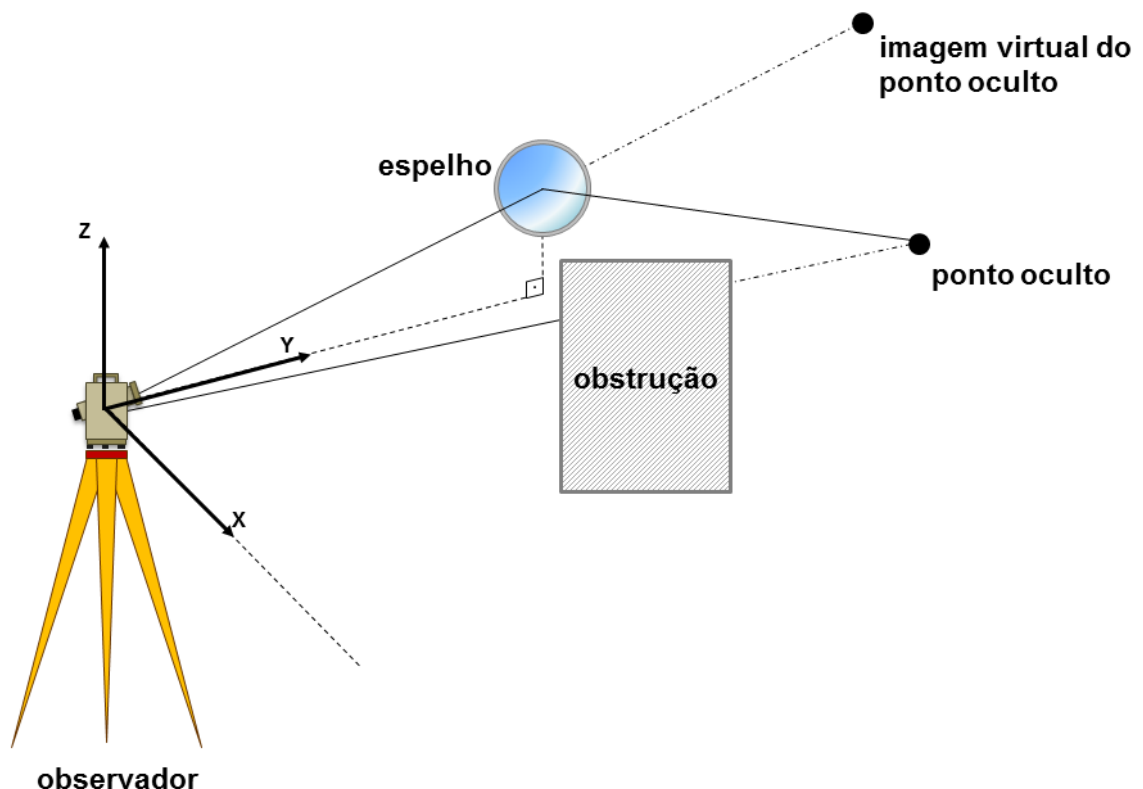
### 3 METODOLOGIA

Inicialmente será formalizado o problema de estudo e em seguida, a modelagem matemática proposta para a determinação de coordenadas de pontos ocultos é apresentada. Contudo, durante a validação da modelagem, descrita no item 3.3, constatou-se a necessidade de aprimoramento do modelo matemático inicial cuja alteração é discutida na parte final deste capítulo.

#### 3.1 FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

A determinação de coordenadas de pontos ocultos pode ser solucionada com a inclusão de um novo elemento no sistema de observação, o espelho plano, o qual permitirá a visualização do ponto oculto de forma indireta, ou seja, a observação de sua imagem virtual (Figura 3.1).

FIGURA 3.1 – SOLUÇÃO PROPOSTA.



FONTE: Adaptado de Gonçalves (2009).

Assim, se a posição e a atitude do espelho são determinadas e se é possível realizar mensurações no ponto considerando as características da reflexão do

espelho, então, a geometria do sistema é determinável e o posicionamento do ponto oculto é realizado.

## 3.2 MODELO MATEMÁTICO

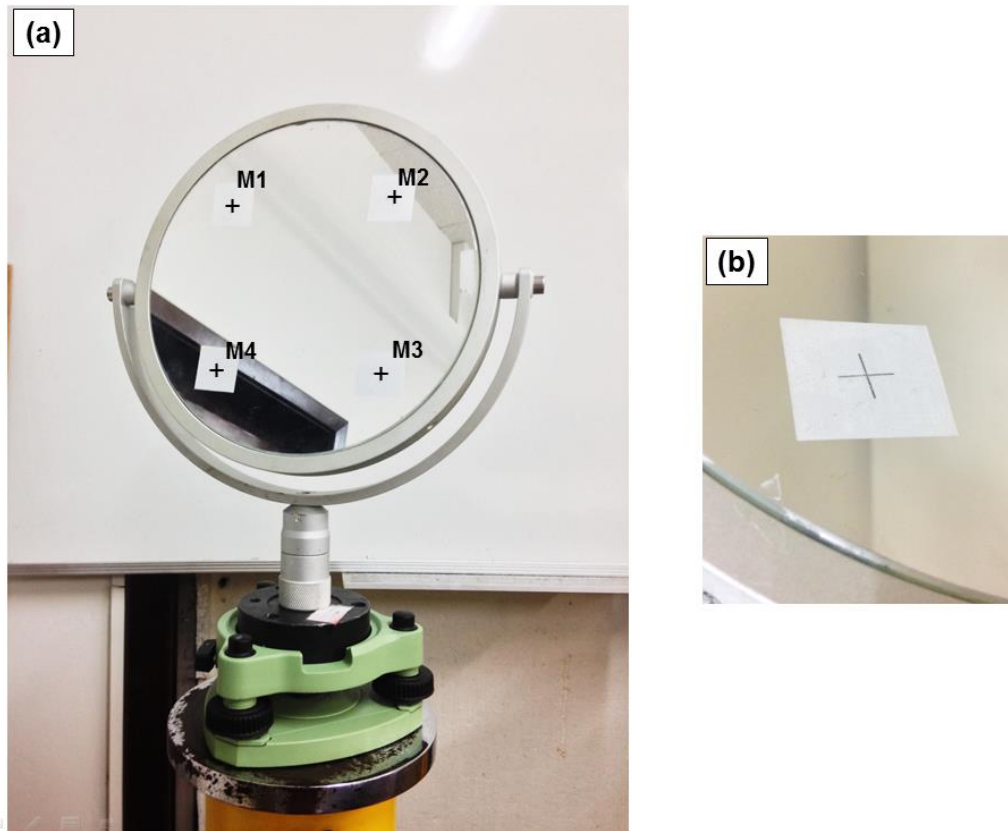
A modelagem matemática proposta considera que todos os elementos da solução são determinados em um único sistema de referência, evitando transformações entre sistemas ao longo do procedimento de cálculo, que podem acarretar na degradação da qualidade das observações iniciais. O sistema de referência proposto é local, com a origem arbitrada na estação de observação ( $E_i$ ), o eixo Y na direção da projeção horizontal da posição média do espelho, o eixo Z coincidente com a vertical do observador e o eixo X completando o terno dextrogiro (Figura 3.1). No desenvolvimento matemático foram considerados versores na solução, isto é, vetores que possuem mesmo sentido e direção dos vetores originais, porém de módulo unitário.

### 3.2.1 Desenvolvimento teórico

#### 3.2.1.1 Modelagem da superfície do espelho

O espelho utilizado nesta pesquisa possui quatro marcas gravadas em sua superfície (Figura 3.2a). Trata-se de espelho plano com diâmetro de 22 cm que têm alta refletividade e espelhamento frontal, com revestimento de níquel, que minimiza os efeitos de refração dos feixes de luz (GONÇALVES, 2009). No intuito de determinar as coordenadas por irradiação das marcas nos ensaios, empregou-se material fosco (Figura 3.2b) ao seu redor, de maneira que fosse possível realizar a medida eletrônica de distância, bem como as medidas das direções, em procedimento análogo ao empregado por Gonçalves (2009).

FIGURA 3.2 – ESPELHO PLANO UTILIZADO



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: (a) disposição das marcas na superfície do espelho plano e (b) material fosco utilizado para realização de medidas eletrônicas de distância nas marcas.

Com as coordenadas das quatro marcas pode-se ajustar um modelo para a superfície do espelho da qual a imagem do objeto de interesse será refletido. Neste caso, a superfície do espelho é tratada como um plano  $\pi$ , cujo modelo funcional é baseado na equação geral do plano, dado por:

$$\pi: \quad A_p \cdot x_m + B_p \cdot y_m + C_p \cdot z_m + D_p = 0 \quad (3.1)$$

Com

$x_m, y_m, z_m$  são as observações do modelo funcional e correspondem as componentes das coordenadas das marcas sobre a superfície do espelho; e

$A_p, B_p, C_p$  são parâmetros a serem ajustados e correspondem aos termos dependentes da equação geral do plano;

$D_p$  é o termo independente da equação geral do plano.

No ajustamento, o termo independente  $D_p$  é fixado como sendo igual ao valor 1 (um), para que o ajustamento recaia em uma única equação do plano dentre as infinitas possibilidades existentes, além de evitar a solução trivial, que acarreta no fato de todos os termos serem nulos, tornando a Equação 3.1 válida. Assim sendo, o modelo funcional adotado foi:

$$A_p \cdot x_m + B_p \cdot y_m + C_p \cdot z_m + 1 = 0 \quad (3.2)$$

O modelo funcional relaciona parâmetros ( $A_p, B_p, C_p$ ) e observações ( $x_m, y_m, z_m$ ) em conjunto, não podendo ser expressos separadamente. Desta forma, de acordo com a formulação apresentada por Gemael et al. (2015), têm-se que o modelo estocástico de ajustamento é o combinado, ou implícito, dado por:

$$F(L_a, X_a) = 0 \quad (3.3)$$

Com

$F$  é o modelo funcional;

$L_a$  é o vetor das observações ajustados;

$X_a$  é o vetor dos parâmetros ajustados

Em sua forma linearizada, tem-se:

$$AX + BV + W = 0 \quad (3.4)$$

Onde:

$A$  é a matriz das derivadas parciais de  $F$  em relação aos parâmetros;

$X$  é o vetor dos parâmetros;

$B$  é a matriz das derivadas parciais de  $F$  em relação às observações;

$V$  é o vetor dos resíduos; e

$W$  é o vetor do erro de fechamento.

Assim, cada marca no espelho resultará em uma equação de condição, cujo sistema final é dado por:

$$\begin{cases} A_P \cdot x_{m1} + B_P \cdot y_{m1} + C_P \cdot z_{m1} + 1 = 0 \\ A_P \cdot x_{m2} + B_P \cdot y_{m2} + C_P \cdot z_{m2} + 1 = 0 \\ A_P \cdot x_{m3} + B_P \cdot y_{m3} + C_P \cdot z_{m3} + 1 = 0 \\ A_P \cdot x_{m4} + B_P \cdot y_{m4} + C_P \cdot z_{m4} + 1 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Logo a quantidade de equações de condição ( $r$ ) é igual a quatro. A quantidade de observações ( $n$ ) é igual a doze, que correspondem ao número de pontos vezes três componentes ( $x_m, y_m, z_m$ ) para cada. Por fim, o número de parâmetros ( $u$ ), ou incógnitas é igual a três, que corresponde aos termos dependentes da equação geral do plano ( $A_P, B_P, C_P$ ).

Como o modelo funcional é não linear, o ajustamento requer a adoção de parâmetros aproximados iniciais e recai em um processo iterativo. Na solução, definiu-se o vetor dos parâmetros iniciais ( $X_0$ ):

$$X_0 = \begin{bmatrix} A_P \\ B_P \\ C_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O vetor das observações ( $L_b$ ) é dado por:

$$L_b = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ y_{m1} \\ z_{m1} \\ x_{m2} \\ x_{m2} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{m4} \\ x_{m4} \\ x_{m4} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Assim é possível calcular o vetor de erro de fechamento ( $W$ ), no passo inicial, como sendo:

$$W = F(L_b, X_0) \quad (3.8)$$

A matriz A é dada por:

$$A = \frac{dF}{dX} = \begin{bmatrix} x_{m1} & y_{m1} & z_{m1} \\ x_{m2} & y_{m2} & z_{m2} \\ x_{m3} & y_{m3} & z_{m3} \\ x_{m4} & y_{m4} & z_{m4} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Similarmente, a matriz B é construída:

$$B = \frac{dF}{dL} = \begin{bmatrix} A_p & B_p & C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_p & B_p & C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_p & B_p & C_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_p & B_p & C_p \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

O peso das observações (P) foi definido considerando a precisão com a qual foram observadas, portanto:

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_{x_{m1}}^2 & & & & & & & & & & & \\ & \sigma_{y_{m1}}^2 & & & & & & & & & & \\ & & \sigma_{z_{m1}}^2 & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & \sigma_{x_{m4}}^2 & & & & & & & \\ & & & & & \sigma_{y_{m4}}^2 & & & & & & \\ & & & & & & \sigma_{z_{m4}}^2 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.11)$$

Com

$\sigma_{x_{mi}}^2, \sigma_{y_{mi}}^2, \sigma_{z_{mi}}^2$  são as variâncias das componentes de cada uma das marcas do espelho.

Sendo assim, é possível resolver iterativamente o valor do vetor das correções X, dado por:

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} (A^T M^{-1} W) \quad (3.12)$$

Onde

$$M = B P^{-1} B^T \quad (3.13)$$

Enfim, em função dos parâmetros iniciais fornecidos e após a convergência das correções, o vetor dos parâmetros ajustados ( $X_a$ ) é dado por:

$$X_a = X_0 + X \quad (3.14)$$

Os elementos do vetor  $X_a$  correspondem aos termos dependentes  $A_p, B_p, C_p$  do plano que representa a superfície do espelho.

A qualidade do ajustamento é avaliada calculando-se o valor da variância a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r - u} = \frac{-K^T W}{r - u} \quad (3.15)$$

Com

$$K = -M^{-1}(AX + W) \quad (3.16)$$

E com isso, é possível definir a matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados ( $\Sigma X_a$ ):

$$\Sigma X_a = \hat{\sigma}_0^2 (A^T M^{-1} A^{-1}) \quad (3.17)$$

Bem como se pode determinar a matriz de variância-covariância das observações ajustadas ( $\Sigma L_a$ ), dada por:

$$\Sigma L_a = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}) \quad (3.18)$$

Finalmente, com a determinação da Equação 3.14 é possível expressar o vetor normal ao plano  $\pi$ ,  $\vec{n}$ , formado em função dos termos da equação geral do plano:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Onde

$n_x, n_y, n_z$  são as componentes do vetor normal unitário à superfície do espelho.

O plano  $\pi$  é determinado no mesmo sistema de coordenadas da estação  $E_i$  e, então, inicia-se o processo de definição das coordenadas do ponto de interesse, com a realização de observações da imagem virtual do ponto oculto P. Posteriormente, duas retas serão determinadas na solução deste problema: a que representa o raio incidente e aquela que representa o raio refletido.

### 3.2.1.2 Determinação da reta que representa o raio incidente

A reta  $r_i$  que materializa o raio incidente proveniente da estação de observação têm equações paramétricas na forma:

$$r_i : \begin{cases} x = x_{Ei} + \text{sen}(\alpha_i)\text{sen}(Z_i)d_i \\ y = y_{Ei} + \text{cos}(\alpha_i)\text{sen}(Z_i)d_i \\ z = z_{Ei} + \text{cos}(Z_i)d_i \end{cases} \quad (3.20)$$

Onde

$x_{Ei}, y_{Ei}, z_{Ei}$  são as coordenadas da estação  $E_i$ ;

$\alpha_i$  é o ângulo horizontal medido em sentido horário a partir do eixo Y até a direção da projeção do raio incidente proveniente de  $E_i$  no plano XY;

$Z_i$  é o ângulo zenital da direção do raio incidente proveniente de  $E_i$  na superfície do espelho;

$d_i$  é a distância inclinada, ou ainda, o parâmetro adotado na equação da reta.

Da Equação 3.20 extrai-se parâmetro importante considerado na solução que é o vetor diretor da reta que materializa o raio incidente. A Equação 3.21 apresenta o vetor diretor  $\vec{r}_i$  da equação da reta do raio incidente oriundo da estação  $E_i$ .

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ r_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha_i)\text{sen}(Z_i) \\ \text{cos}(\alpha_i)\text{sen}(Z_i) \\ \text{cos}(Z_i) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Com

$\vec{r}_i$  é o vetor diretor unitário da equação da reta do raio incidente oriundo da estação  $E_i$ ;

$r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}$  são as componentes do vetor diretor  $\vec{r}_i$ .

### 3.2.1.3 Interseção do raio incidente na superfície do espelho

A interseção do raio incidente na superfície do espelho pode ser tratada como a determinação da interseção entre a reta que materializa o raio incidente e o plano que define a superfície do espelho. A solução analítica é dada através da determinação das coordenadas tridimensionais de um ponto  $(x_i^I, y_i^I, z_i^I)$  que pertença simultaneamente à reta  $r_i$  (Equação 3.20) e ao plano  $\pi$  (Equação 3.2), para cada um dos pontos observados indiretamente pelo espelho, cuja solução é:

$$\begin{cases} x_i^I = x_{Ei} - r_{ix} \left( \frac{Ax_{Ei} + By_{Ei} + Cz_{Ei} + D}{Ar_{ix} + Br_{iy} + Cr_{iz}} \right) \\ y_i^I = y_{Ei} - r_{iy} \left( \frac{Ax_{Ei} + By_{Ei} + Cz_{Ei} + D}{Ar_{ix} + Br_{iy} + Cr_{iz}} \right) \\ z_i^I = z_{Ei} - r_{iz} \left( \frac{Ax_{Ei} + By_{Ei} + Cz_{Ei} + D}{Ar_{ix} + Br_{iy} + Cr_{iz}} \right) \end{cases} \quad (3.22)$$

Onde

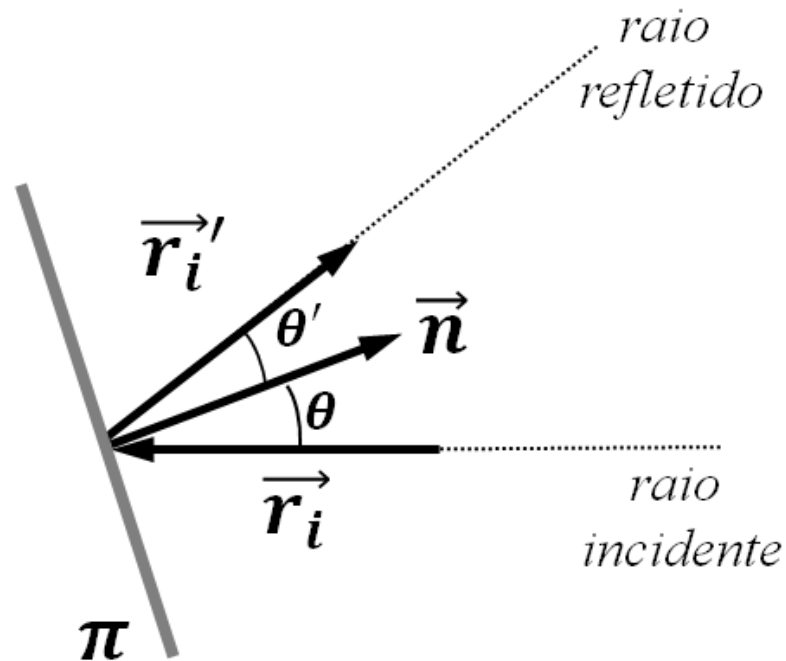
$x_i^I, y_i^I, z_i^I$  são as coordenadas tridimensionais do ponto de interseção do raio incidente  $r_i$  no plano  $\pi$  da superfície do espelho.

### 3.2.1.4 Determinação do ângulo de incidência

Além do conhecimento da posição que o raio incidente intercepta o plano  $\pi$ , é preciso definir o ângulo de incidência deste raio em relação ao espelho. O ângulo de

incidência ( $\theta$ ) é o ângulo formado pela direção do raio incidente e o vetor normal ao plano do espelho, conforme a Figura 3.3.

FIGURA 3.3 – ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA  $\theta$  E DE REFLEXÃO  $\theta'$



FONTE: Adaptado de Nussenzveig (1998).

Para a estação  $E_i$ , o ângulo de incidência  $\theta$  é formado pelo oposto do vetor diretor do raio incidente ( $-\vec{r}_i$ ) oriundo da estação  $E_i$  e o vetor normal ao plano do espelho  $\vec{n}$ . E a seguinte relação é verdadeira:

$$\cos(\theta) = \frac{-\vec{r}_i \cdot \vec{n}}{|-\vec{r}_i| |\vec{n}|} \quad (3.23)$$

Porém como ambos os vetores envolvidos são unitários, o ângulo  $\theta$  é dado por:

$$\theta = \arccos(-r_{ix}n_x - r_{iy}n_y - r_{iz}n_z) \quad (3.24)$$

Por se tratar de ângulos de incidência, a lei de reflexão restringe como soluções válidas os valores de  $\theta$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

### 3.2.1.5 Determinação da reta que representa o raio refletido

A etapa seguinte é a determinação da reta que representa o raio refletido. Seja a configuração apresentada na Figura 3.3 o vetor diretor da reta que representa a direção do raio refletido que é determinado considerando a lei da reflexão. Onde é possível condicionar que:

(1) O vetor diretor do raio incidente ( $\vec{r}_i$ ), o vetor normal à superfície do espelho ( $\vec{n}$ ) e o vetor diretor do raio refletido ( $\vec{r}'_i$ ) são coplanares, ou seja, pertencem ao mesmo plano de incidência, logo:

$$\begin{vmatrix} r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ n_x & n_y & n_z \\ r'_{ix} & r'_{iy} & r'_{iz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

(2) O ângulo de reflexão  $\theta'$  é formado entre o vetor normal à superfície do espelho ( $\vec{n}$ ) e o vetor diretor do raio refletido ( $\vec{r}'_i$ ); determinado por:

$$\cos(\theta') = \vec{n} \cdot \vec{r}'_i \quad (3.26)$$

(3) O ângulo entre o oposto do vetor diretor do raio incidente ( $-\vec{r}_i$ ) e o vetor diretor do raio refletido ( $\vec{r}'_i$ ) é dado pela soma dos ângulos de incidência  $\theta$  e de reflexão  $\theta'$ , que são iguais pela lei da reflexão, portanto:

$$\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta + \theta) = \cos(2\theta) = -\vec{r}_i \cdot \vec{r}'_i \quad (3.27)$$

Estas condições permitem a construção de um sistema de três equações a três incógnitas, que correspondem as componentes do vetor diretor do raio refletido, dadas por  $(r'_{ix}, r'_{iy}, r'_{iz})$ . Enfim, o sistema construído é:

$$\begin{cases} (r_{i_z}n_y - r_{i_y}n_z)r'_{i_x} + (r_{i_x}n_z - r_{i_z}n_x)r'_{i_y} + (r_{i_y}n_x - r_{i_x}n_y)r'_{i_z} = 0 \\ \left(\frac{n_x}{\cos(\theta)}\right)r'_{i_x} + \left(\frac{n_y}{\cos(\theta)}\right)r'_{i_y} + \left(\frac{n_z}{\cos(\theta)}\right)r'_{i_z} = 1 \\ -\left(\frac{r_{i_x}}{\cos(2\theta)}\right)r'_{i_x} - \left(\frac{r_{i_y}}{\cos(2\theta)}\right)r'_{i_y} - \left(\frac{r_{i_z}}{\cos(2\theta)}\right)r'_{i_z} = 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

Onde

$r'_{i_x}, r'_{i_y}, r'_{i_z}$  são as componentes incógnitas do vetor diretor do raio refletido;

O sistema da Equação 3.28 pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (r_{i_z}n_y - r_{i_y}n_z) & (r_{i_x}n_z - r_{i_z}n_x) & (r_{i_y}n_x - r_{i_x}n_y) \\ \left(\frac{n_x}{\cos(\theta)}\right) & \left(\frac{n_y}{\cos(\theta)}\right) & \left(\frac{n_z}{\cos(\theta)}\right) \\ -\left(\frac{r_{i_x}}{\cos(2\theta)}\right) & -\left(\frac{r_{i_y}}{\cos(2\theta)}\right) & -\left(\frac{r_{i_z}}{\cos(2\theta)}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_{i_x} \\ r'_{i_y} \\ r'_{i_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

E então solucionado,

$$\begin{bmatrix} r'_{i_x} \\ r'_{i_y} \\ r'_{i_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_{i_z}n_y - r_{i_y}n_z) & (r_{i_x}n_z - r_{i_z}n_x) & (r_{i_y}n_x - r_{i_x}n_y) \\ \left(\frac{n_x}{\cos(\theta)}\right) & \left(\frac{n_y}{\cos(\theta)}\right) & \left(\frac{n_z}{\cos(\theta)}\right) \\ -\left(\frac{r_{i_x}}{\cos(2\theta)}\right) & -\left(\frac{r_{i_y}}{\cos(2\theta)}\right) & -\left(\frac{r_{i_z}}{\cos(2\theta)}\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A Equação 3.30 é válida desde que o sistema seja possível e determinado, ou seja, com solução única. Por fim, define-se a reta do raio refletido ( $r'_i$ ) que contém como origem o ponto de interseção do raio incidente na superfície do espelho e assume a direção do raio refletido, de parâmetro da reta  $d$ , descrita por:

$$r'_i: \begin{cases} x = x_i^l + r'_{i_x}d \\ y = y_i^l + r'_{i_y}d \\ z = z_i^l + r'_{i_z}d \end{cases} \quad (3.31)$$

### 3.2.1.6 Determinação das coordenadas do ponto de interesse

Uma informação que deve ser coletada em campo, através da reflexão do espelho, é a distância medida entre a estação e o ponto oculto. Nesta devem ser aplicadas correções ambientais a fim de minimizar os efeitos atmosféricos nas medidas. Na solução, a distância total medida ( $d_t$ ) é expressa como a soma de duas parcelas:

(1) A distância percorrida pelo raio incidente ( $d_{inc}$ ), igual à distância entre a estação  $E_i$  e o espelho; e

(2) A distância percorrida pelo raio refletido ( $d_{ref}$ ), igual à distância entre o espelho e o ponto de interesse.

A distância euclidiana entre a estação de observação  $E_i$  e o ponto de intersecção do raio incidente na superfície refletora define a primeira parcela e é dada por:

$$d_{inc} = \sqrt{(x_i^I - x_{Ei})^2 + (y_i^I - y_{Ei})^2 + (z_i^I - z_{Ei})^2} \quad (3.32)$$

A segunda parcela é dada por:

$$d_{ref} = d_t - d_{inc} \quad (3.33)$$

Por fim, as coordenadas do ponto oculto ( $x_p, y_p, z_p$ ) podem ser determinadas utilizando a distância percorrida pelo raio refletido como parâmetro:

$$\begin{cases} x_p = x_i^I + r'_{ix} d_{ref} \\ y_p = y_i^I + r'_{iy} d_{ref} \\ z_p = z_i^I + r'_{iz} d_{ref} \end{cases} \quad (3.34)$$

### 3.2.1.7 Controle de qualidade das coordenadas dos pontos ocultos

No intuito de avaliar a qualidade final das coordenadas dos pontos ocultos, provenientes do modelo proposto empregou-se a lei geral de propagação de variâncias em todas as etapas de cálculo descritas nos itens anteriores, dada na forma matricial por (GHILANI, 2010; KAHMEN; FAIG, 1988):

$$\Sigma_{yy} = A \cdot \Sigma_{xx} \cdot A^T \quad (3.35)$$

Onde:

$\Sigma_{xx}$  é a matriz variância covariância dos parâmetros observados;

$\Sigma_{yy}$  é a matriz variância covariância do modelo funcional em análise; e

$A$  é a matriz jacobiana, formada pelas derivadas parciais do modelo funcional em relação aos parâmetros.

Assim, a qualidade dos dados será apresentada na forma de elipses e elipsoides de erros, indicadas nos ensaios realizados nesta pesquisa. A construção destas figuras foi realizada através dos autovalores e autovetores da matriz variância covariância dos pontos determinados pela modelagem proposta, conforme apresentado no item 2.5.

## 3.3 VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

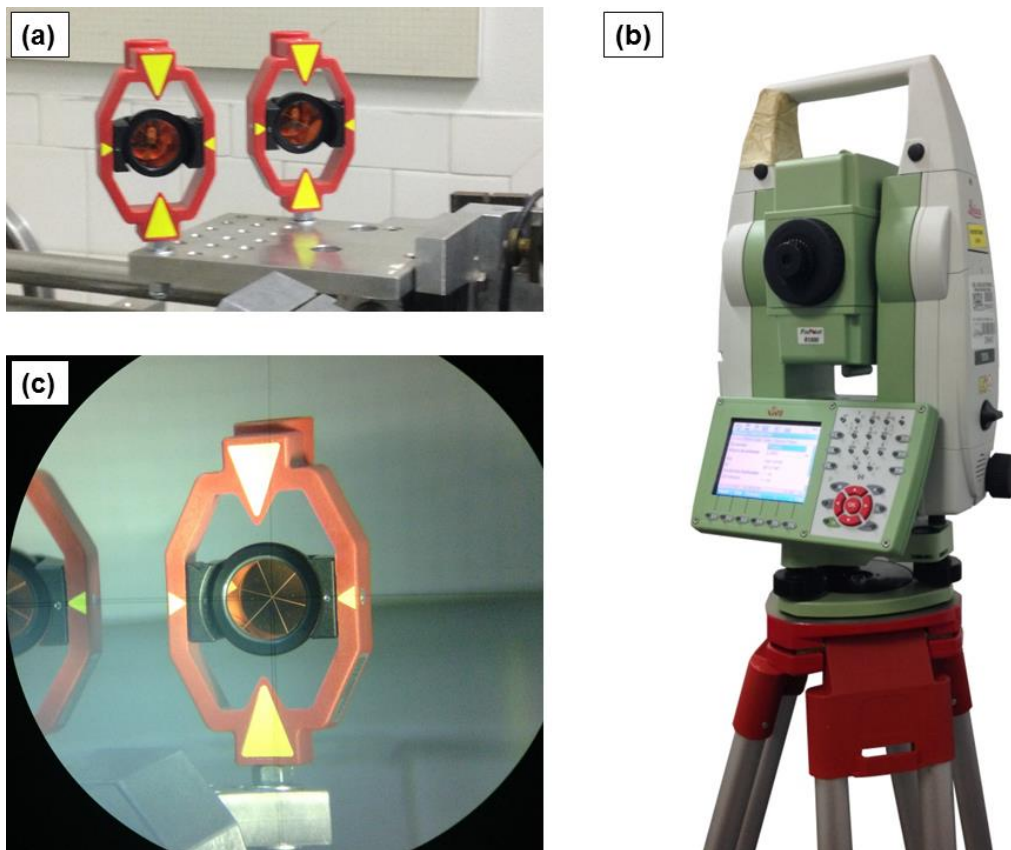
Para validar o modelo matemático proposto no item anterior realizou-se um ensaio controlado, no qual os seguintes materiais foram utilizados:

- Pontos de interesse materializados por dois miniprismas refletivos, posicionados lado a lado, afastados cerca de 20 cm a alturas similares (Figura 3.4a);
- Um espelho plano conforme descrito no item 3.2.1.1;
- Uma estação total TS15 da marca Leica Geosystems (Figura 3.4b), cuja precisão nominal angular é de 1" e linear de  $\pm (1 \text{ mm} + 1,5 \text{ ppm})$  ou  $\pm (2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$ , para medidas de distância com prismas refletivos e sem

prismas refletores respectivamente, em distâncias inferiores a cinquenta metros. Processos de verificação e calibração na estação total foram executados antes da realização dos ensaios.

- As etapas de cálculo foram executadas por meio de rotinas computacionais com auxílio do software MATLAB.

FIGURA 3.4 – MATERIAIS UTILIZADOS NOS ENSAIOS



FONTE: O Autor (2017).

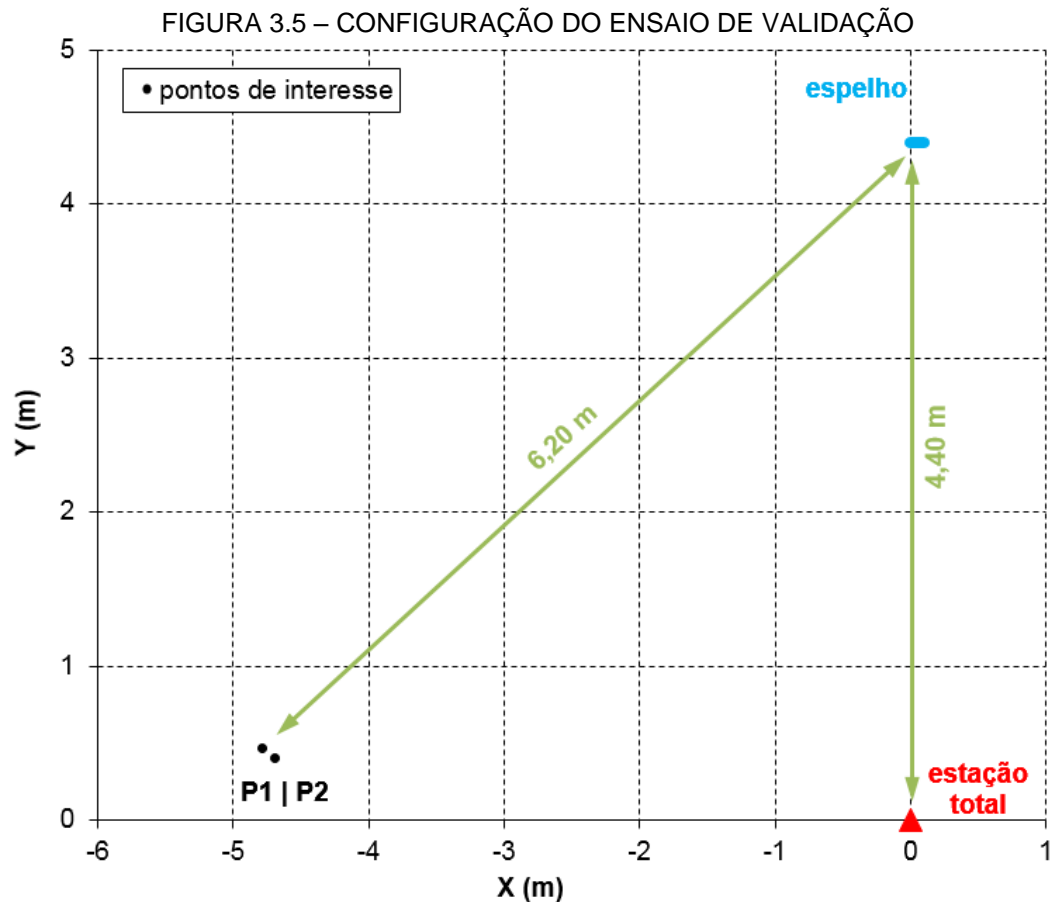
LEGENDA: (a) pontos de interesse, (b) estação total TS15 da marca Leica Geosystems e (c) observação indireta vista da luneta do equipamento

Para a realização do ensaio, a estação total foi posicionada em uma configuração que permitisse a visualização:

1. Das marcas gravadas na superfície do espelho para a modelagem do plano do espelho conforme descrito no item 3.2.1;
2. Dos pontos ocultos pela observação da imagem virtual através do espelho (Figura 3.4c).

3. Dos pontos ocultos pela observação direta, sem obstrução. Esta condição foi imposta para possibilitar a validação do modelo, ao comparar coordenadas obtidas pelo modelo com aquelas determinadas pelos métodos convencionais.

As condições do ambiente também foram monitoradas e empregadas na correção das distâncias obtidas eletronicamente. A Figura 3.5 apresenta a geometria do ensaio realizado, onde a origem do sistema representa o observador, que coincide com o centro ótico da estação total, o espelho afastado a 4,40 metros, cuja projeção horizontal define o eixo Y do sistema, o eixo Z é coincidente com a vertical do observador e o eixo X, torna o terno dextrógiro. O objeto de estudo está afastado 6,20 metros em relação ao espelho. A observação dos pontos ocultos P1 e P2 é realizada pela imagem refletida do espelho e também por observação direta da estação total.



FONTE: O Autor (2017).

Para este ensaio, coordenadas foram calculadas pelo modelo matemático desenvolvido no item 3.2, com a observação da imagem refletida pelo espelho e também foram calculadas pela observação direta por irradiação.

Neste trabalho dois tipos de análise serão considerados:

1. Análise absoluta: Trata-se da comparação de coordenadas calculadas pelo modelo proposto com as respectivas coordenadas determinadas diretamente cujos valores foram adotados como de referência.
2. Análise relativa: Trata-se da comparação das diferenças entre duas coordenadas calculadas pelo modelo proposto com as diferenças oriundas das respectivas coordenadas determinadas diretamente, cujos valores foram adotados como de referência.

Assim exposto, os resultados relativos e absolutos encontrados no ensaio de validação são apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2 adiante. As diferenças absolutas indicadas na Tabela 3.1 são de ordem centimétrica, fato este que limita as aplicações da modelagem proposta. Em contrapartida, nos resultados relativos, as diferenças são inferiores ao milímetro como consta na Tabela 3.2, qualidade posicional que é compatível com diversas aplicações como o controle estrutural, *as-built* e integração de sistemas (OGUNDARE, 2015; FAGGION et al., 2013).

TABELA 3.1 – RESULTADOS ABSOLUTOS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO

PONTO	Coordenadas calculadas pelo modelo proposto (mm)			Coordenadas de referência (mm)			Diferenças (mm)		
	A			B			C = A - B		
	X	Y	Z	X	Y	Z	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
P1	-4795,4	495	-226,5	-4785,5	466,1	-164,5	-9,9	+28,9	-62,0
P2	-4706,3	433,7	-228,3	-4695,7	404,7	-166,1	-10,6	+29,0	-62,2

FONTE: O Autor (2017).

TABELA 3.2 – RESULTADOS RELATIVOS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO

LINHA	Coordenadas calculadas pelo modelo proposto (mm)			Coordenadas de referência (mm)			Diferenças (mm)		
	A			B			C = A - B		
	dx	dy	dz	dx	dy	dz	$\Delta dx$	$\Delta dy$	$\Delta dz$
P1- P2	89,1	-61,3	-1,8	89,8	-61,4	-1,6	-0,7	0,1	-0,2

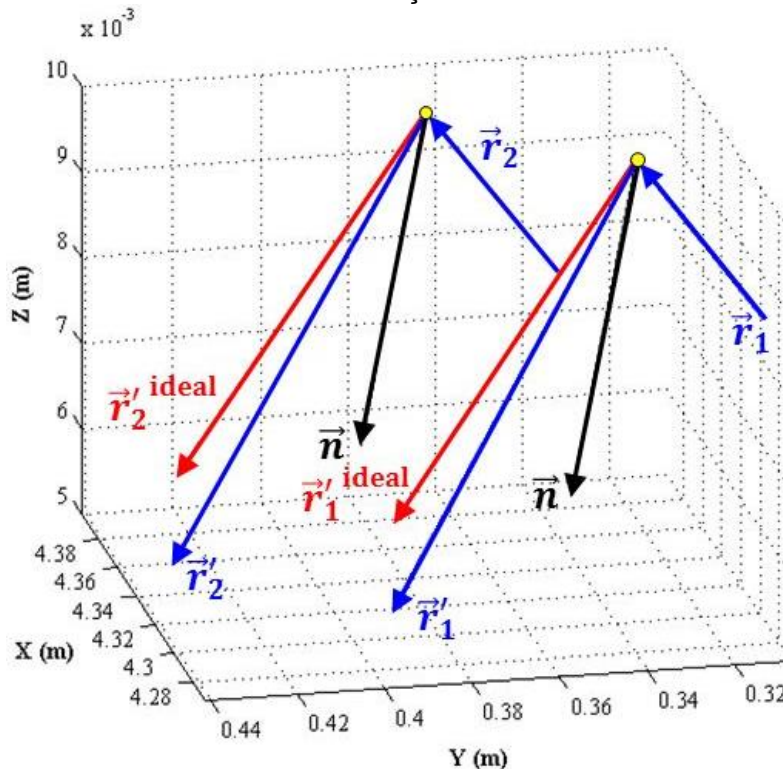
FONTE: O Autor (2017).

Em síntese, com base nos valores das Tabelas 3.1 e 3.2 constatou-se que ao aplicar o modelo proposto obteve-se:

- Precisões de ordem submilimétrica na posição relativa de pontos observados indiretamente e;
- Erros sistemáticos na posição absoluta de pontos observados indiretamente, com diferenças nas coordenadas de ordem centimétrica.

Para identificar a origem do erro sistemático, consideraram-se as coordenadas observadas diretamente, e a partir destas, em um processo inverso, foram determinados quais seriam os raios refletidos ideais. Na Figura 3.6 são apresentados os vetores incidentes ( $\vec{r}$ ) e refletidos ( $\vec{r}'$ ) para os dois pontos observados indiretamente, e o vetor normal ( $\vec{n}$ ) à superfície refletora, para os dois pontos deste ensaio de validação. O vetor vermelho indica a direção ideal que o vetor refletido ( $\vec{r}'$ ) deveria assumir, supondo a posição determinada com observações diretas nos objetos de interesse.

FIGURA 3.6 – VETORES INCIDENTES E REFLETIDOS PARA DOIS PONTOS OBSERVADOS DURANTE O ENSAIO DE VALIDAÇÃO



FONTE: O Autor (2017).

É possível identificar que o raio refletido, calculado pelo modelo, apresenta divergência em relação ao raio refletido ideal, obtido pelas coordenadas de referência dos pontos observados. Em repetições do ensaio de validação, verificou-se também que este efeito é similar para todos os pontos medidos em uma dada posição do espelho, onde ao se alterar a posição desta superfície, altera-se o efeito nos pontos.

Tal fato sustenta a suposição de que as características inerentes ao espelho são condicionantes no efeito sistemático constatado. Neste raciocínio, duas hipóteses foram formuladas e testadas para a possível causa da distorção dos raios:

- Hipótese I: Existem problemas construtivos do espelho plano, acarretando na não homogeneidade de sua superfície refletora, de modo que o espelho distorce os raios refletidos em função do ângulo de incidência; e
- Hipótese II: A modelagem do plano da superfície é deficiente e não representativa da realidade, o que ocasionaria um erro sistemático a todas as observações, já que o vetor normal é fundamental para a determinação dos raios refletidos.

A seguir tratar-se-á das duas hipóteses individualmente buscando solucionar o problema identificado.

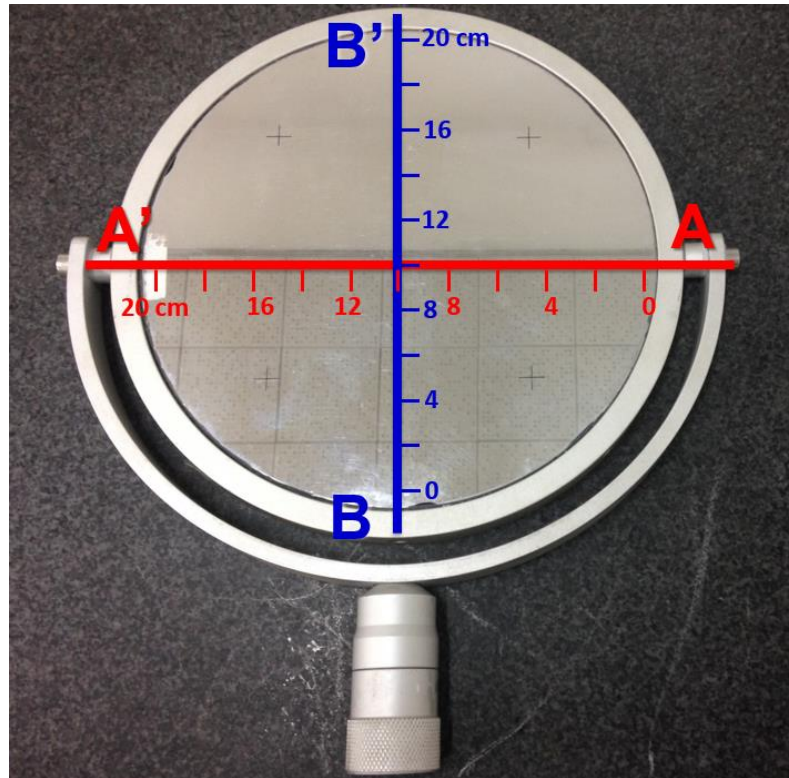
### 3.3.1 Hipótese I: Características físicas do espelho

Uma das hipóteses da presença do efeito sistemático detectado é de que o espelho utilizado não é, em sua totalidade, uma superfície plana. Esta hipótese foi testada com uso de um nível eletrônico baseado em corpo suspenso, da marca Talyvel. Este equipamento possui amplitude de medida de  $-600''$  a  $600''$  (segundos de arco), com precisão associada de  $0,2''$  (FAGGION, 1993). A característica do nível eletrônico de corpo suspenso é de fornecer a inclinação relativa entre as extremidades sensoriais de sua superfície de contato.

Na validação proposta, considerou-se que trajetórias retilíneas sobre uma superfície plana devem fornecer valores iguais de inclinação, de forma a delimitar retas pertencentes a um plano, independentes da atitude do mesmo. Para tal foram

definidas duas linhas do espelho, AA' e BB', às quais se associou uma graduação milimétrica (Figura 3.7).

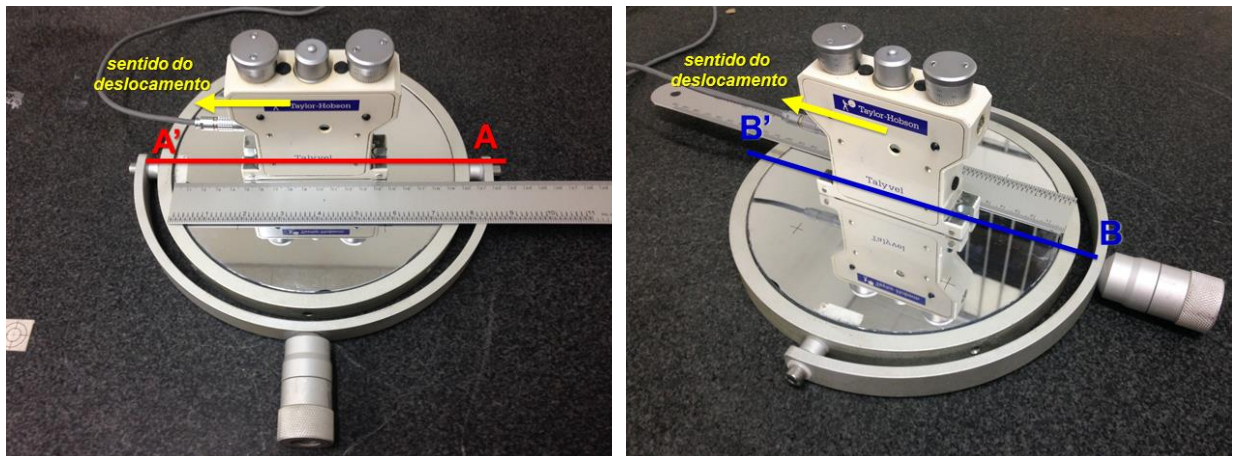
FIGURA 3.7 – TRAJETÓRIAS HORIZONTAL (AA') E VERTICAL (BB') ADOTADAS NO ENSAIO



FONTE: O Autor (2017).

Posicionou-se o equipamento na marcação inicial de 0 cm e o deslocou a cada 1 cm, conforme as indicações da Figura 3.8, até que a extremidade do mesmo alcançasse a borda do espelho, realizando medidas de inclinações (mm/m). Como a dimensão do equipamento é de 10 cm entre as superfícies sensoriais, as medidas foram associadas com a posição do centro do equipamento no instante de medição, conforme consta a Tabela 3.3.

FIGURA 3.8 – SENTIDO DE DESLOCAMENTO DO TALYVEL SOBRE A SUPERFÍCIE REFLETORA



FONTE: O Autor (2017).

TABELA 3.3 – LEITURAS DE INCLINAÇÃO REALIZADAS COM O TALYVEL

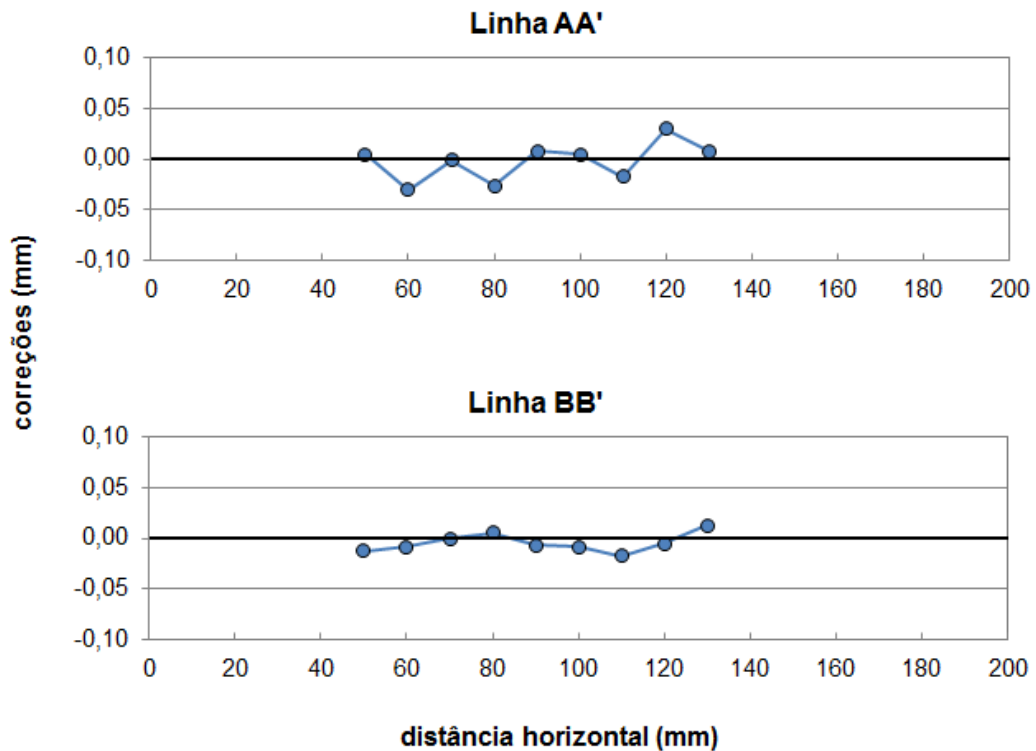
POSIÇÃO (mm)	INCLINAÇÃO	
	DIAGONAL AA'	DIAGONAL BB'
50	-2,88%	0,05%
60	-3,23%	-0,30%
70	-2,94%	-0,01%
80	-3,19%	-0,26%
90	-2,85%	0,08%
100	-2,88%	0,05%
110	-3,10%	-0,17%
120	-2,63%	0,30%
130	-2,85%	0,08%
<b>MÉDIA</b>	<b>-2,93%</b>	<b>-0,07%</b>

FONTE: O Autor (2017).

Considerou-se o valor médio de inclinação como referência para cada uma das trajetórias percorridas, no instante de execução do ensaio. Logo, os valores de -2,93% e -0,07% foram adotados como referência para trajetória horizontal e vertical respectivamente.

Em seguida, calcularam-se correções para cada posição de observação em relação ao valor médio de referência, em milímetros, em função do resíduo da inclinação, considerando deslocamentos horizontais entre si de 10 mm, conforme é apresentado na Figura 3.9.

FIGURA 3.9 – PERFIS DAS LINHAS AA' E BB' DA SUPERFÍCIE REFLETORA DO ESPELHO

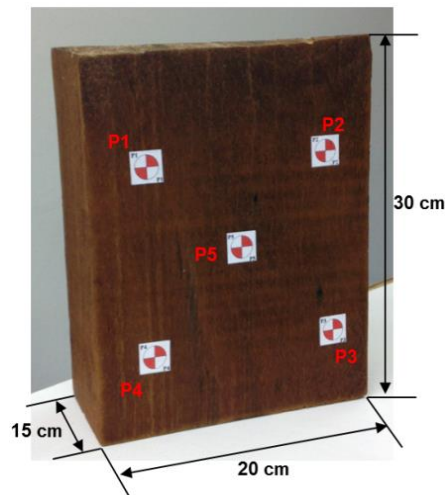


FONTE: O Autor (2017).

As diferenças encontradas em ambos os perfis não ultrapassam 0,05 mm de magnitude, o que é superior cerca de 20 vezes a precisão da medida de distância realizada pela estação total, de ordem milimétrica. Enfim, baseado nestes resultados, pode-se afirmar que as irregularidades encontradas não são significativas perante as grandezas nas quais as observações são realizadas, fato que subsidia a adoção do modelo plano para a superfície refletora.

Outro teste realizado foi para verificar se objetos refletidos pelo espelho são apresentados em escala natural, além de manter suas formas sem deformação, o que é característica de um espelho plano (HECHT, 2002; NUSSENZVEIG, 1998). Para tal, utilizou-se como objeto de estudo um bloco de madeira, com cinco marcas, de dimensões aproximadas de 20x30x15 cm (Figura 3.10).

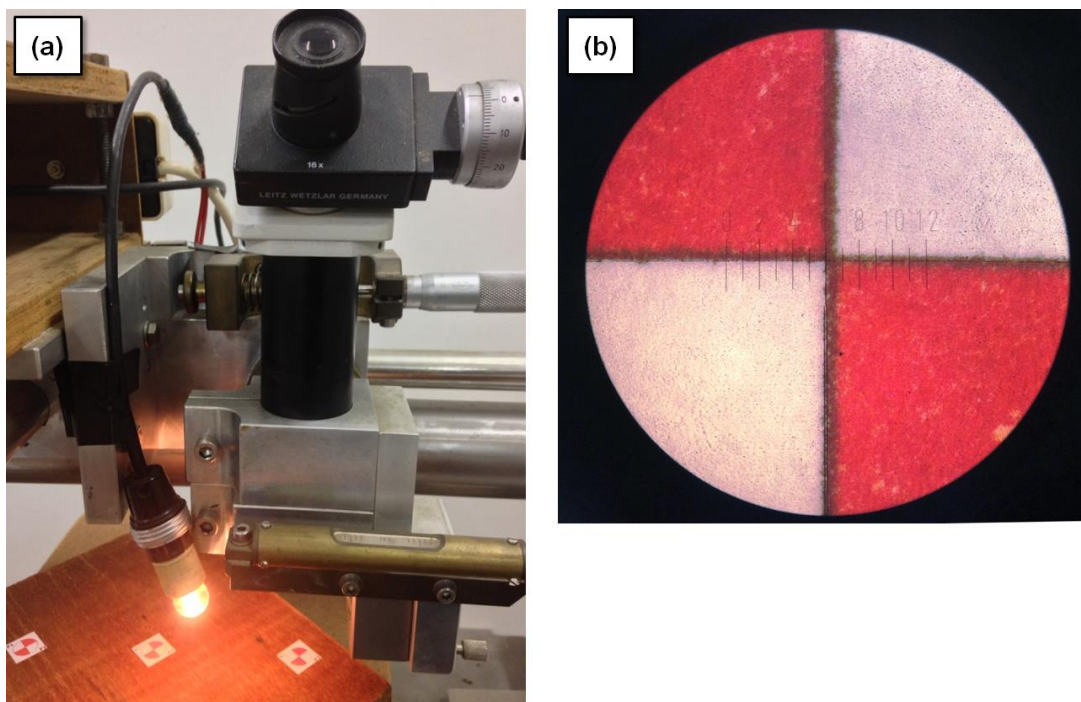
FIGURA 3.10 – BLOCO DE MADEIRA COM MARCAS



FONTE: O Autor (2017).

As distâncias entre as marcas posicionadas sobre a superfície do objeto foram calibradas por interferometria (Figura 3.11a). Devido à dimensão física e a ampliação proveniente do interferômetro (Figura 3.11b), foram realizadas leituras na borda esquerda e direita de cada marca, e adotou-se como referência o valor médio calculado para cada posição.

FIGURA 3.11 – CALIBRAÇÃO DA GEOMETRIA DAS MARCAS



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: (a) calibração por interferometria das marcas do objeto de interesse e (b) dimensão da marca na ampliação do interferômetro.

Os resultados da calibração das distâncias entre as marcas são apresentados na Tabela 3.4.

TABELA 3.4 – VALORES CALIBRADOS DAS MARCAS DO OBJETO DE INTERESSE

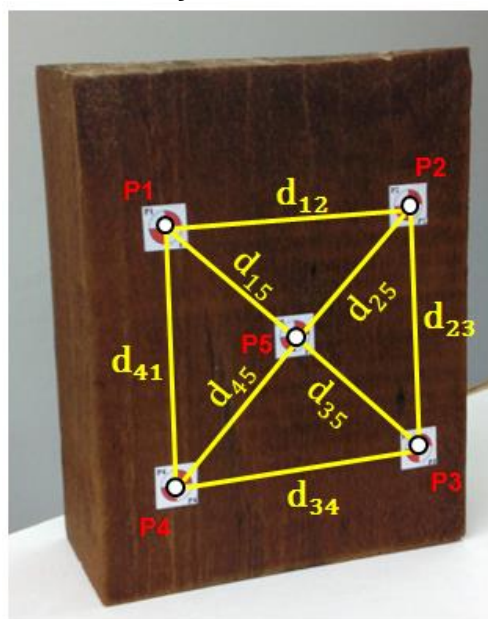
Distância	Valor (mm)	$\sigma$ (mm)
P1-P2	91,44	0,008
P2-P3	91,87	0,007
P3-P4	95,43	0,013
P4-P1	89,79	0,008
P5-P1	61,76	0,008
P5-P2	63,13	0,005
P5-P3	69,12	0,012
P5-P4	66,58	0,013

FONTE: O Autor (2017).

As distâncias calibradas foram obtidas após cinco séries de observação e tiveram, em média, o desvio padrão na ordem de um centésimo de milímetro.

Em seguida, realizaram-se medidas nas marcas do bloco de madeira, através de observação por espelho, aplicando na determinação das coordenadas o modelo matemático proposto e, com estas coordenadas calcularam-se as mesmas distâncias (Figura 3.12) que foram calibradas previamente (Tabela 3.5).

FIGURA 3.12 – DISPOSIÇÃO DAS DISTÂNCIAS ANALISADAS



FONTE: O Autor (2017).

TABELA 3.5 – COMPARAÇÃO ENTRE DISTÂNCIAS CALCULADAS NO ENSAIO E CALIBRADAS DAS MARCAS DO OBJETO DE INTERESSE

<b>Distância</b>	<b>Calculada (mm)</b>	<b>Calibrada (mm)</b>	<b>Diferença (mm)</b>
P1-P2	91,07	91,44	-0,36
P2-P3	91,89	91,87	0,02
P3-P4	95,00	95,43	-0,43
P4-P1	89,75	89,79	-0,04
P1-P5	61,75	61,76	0,00
P2-P5	62,85	63,13	-0,28
P3-P5	68,94	69,12	-0,18
P4-P5	66,51	66,58	-0,08

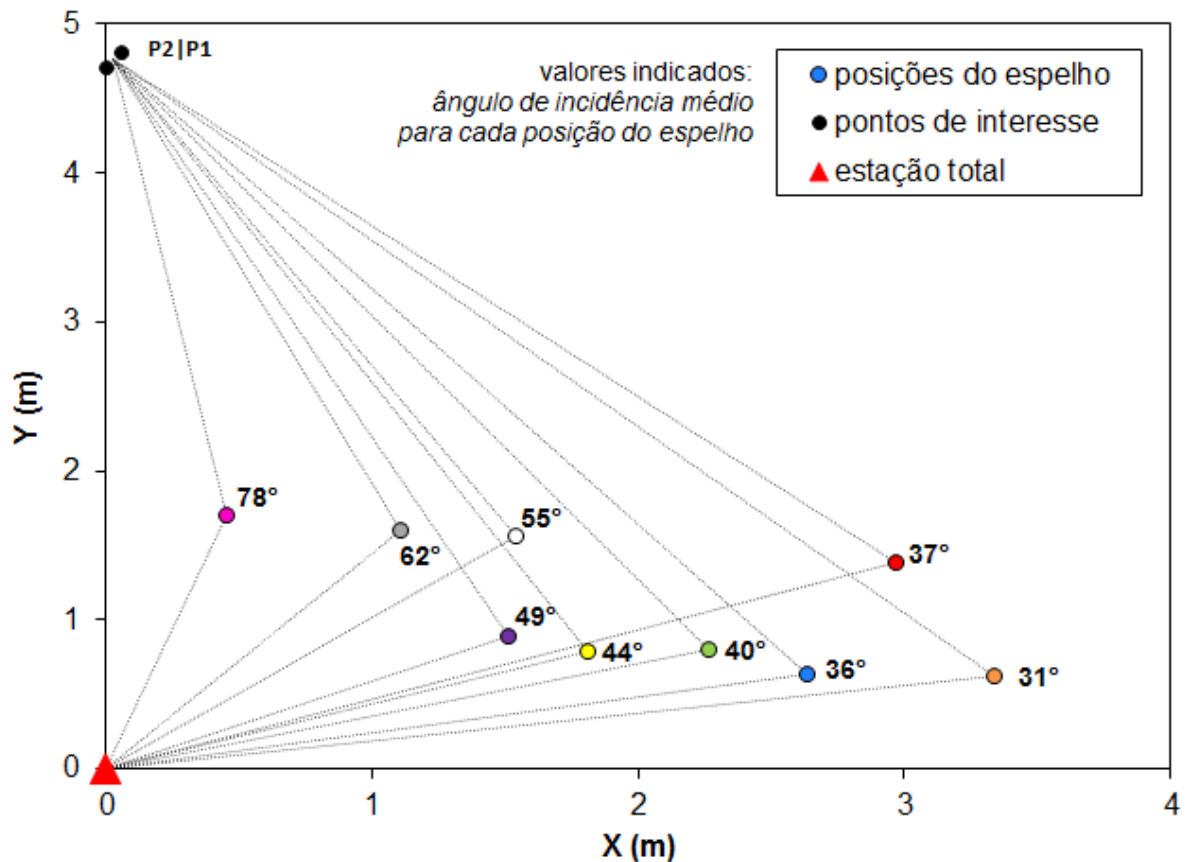
FONTE: O Autor (2017).

Na Tabela 3.5 as diferenças encontradas são inferiores ao milímetro, logo não há alteração significativa de escala no objeto observado pelo espelho plano, de modo que não foram constatadas mudanças entre a geometria dos pontos, exceto a influência da precisão das coordenadas calculadas.

Outra investigação foi acerca de uma possível refração dos raios caso o espelhamento do espelho não fosse perfeitamente frontal, o que acarretaria em uma correlação dos erros e do ângulo de incidência dos raios observados.

Para tal, testaram-se variações do ângulo de incidência entre 30° e 80° em relação à normal do espelho, em um total de nove posições distintas do espelho observando um mesmo par de pontos, afastados entre si cerca de 10 cm, a partir de uma mesma estação de observação, como indicado na Figura 3.13.

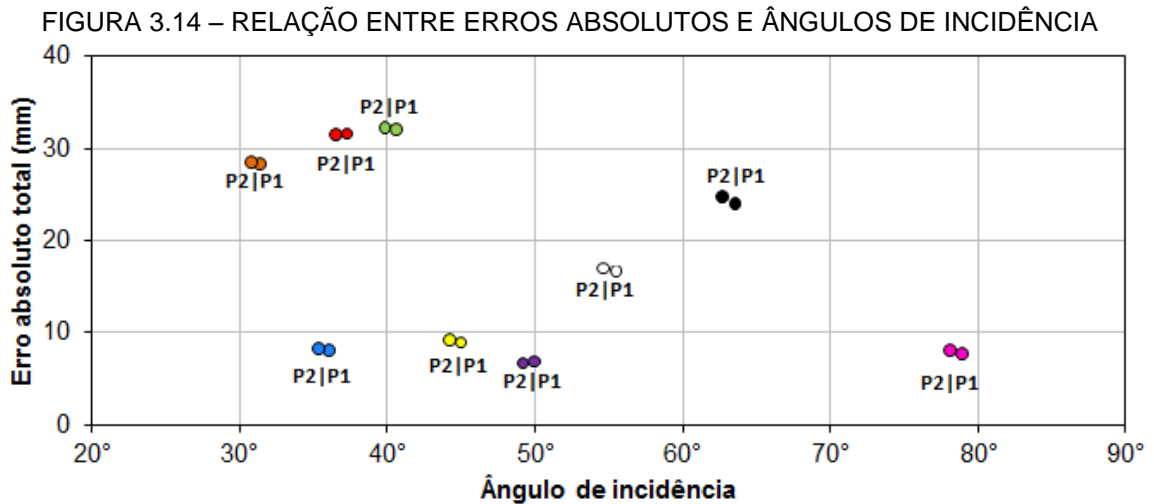
FIGURA 3.13 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE INCIDÊNCIA



FONTE: O Autor (2017).

A escolha do intervalo de ângulo de incidência ocorreu pela possibilidade de observação da imagem virtual dos pontos, o que não é propício em ângulos de incidência pequenos, na direção da normal, onde se enxerga a reflexão do próprio observador ou grandes, próximos de  $90^\circ$ , pois as linhas de observação se tornam rasantes à superfície do espelho, restringindo a área útil de visualização no espelho das imagens refletidas.

Nota-se que para cada posição do espelho observada, o erro absoluto é tem mesma magnitude para os dois pontos observados (Figura 3.14). No gráfico, constata-se a não correlação entre o erro absoluto e o ângulo de incidência, ao avaliar as nove instalações do espelho neste ensaio. Enfim, não há indícios que a origem do efeito sistemático é devido a características físicas do espelho, bem como a sua posição e atitude no levantamento considerando o modelo matemático proposto.



FONTE: O Autor (2017).

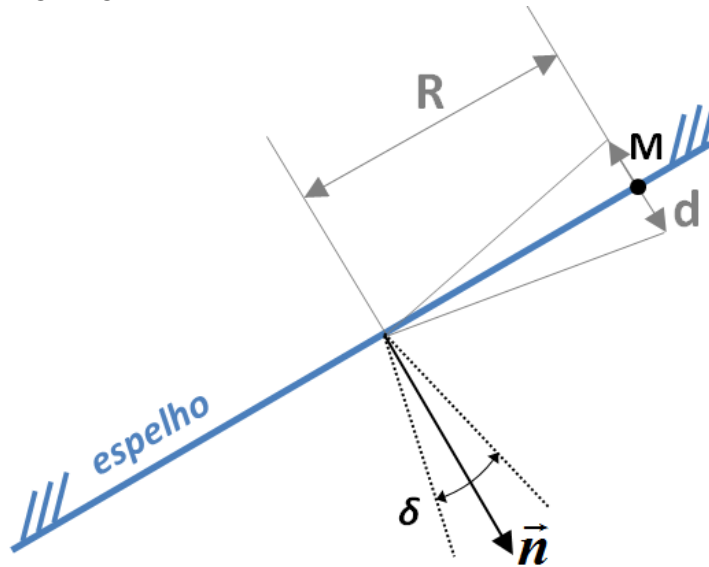
### 3.3.2 Hipótese II: Deficiências do modelo matemático

No que tange à segunda hipótese, ao analisar os resíduos das marcas do espelho utilizando o modelo plano proveniente do ajustamento, encontra-se valores em média de 1 mm, o que é coerente com a qualidade das observações. Contudo, a propagação dos erros associados nas marcas adotadas como referência para a determinação dos planos das posições do espelho, têm efeito na qualidade de determinação do vetor definido, oriundo da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados. Com base nesta afirmação investigou-se a relação entre a precisão na determinação das coordenadas das marcas e a precisão na definição do vetor normal ao plano do espelho.

Considerando o esquema apresentado na Figura 3.15, o ponto M representa uma das marcas na superfície do espelho;  $d$  é a região de incerteza associada com a posição da marca;  $R$  é a distância entre a marca e o centro do espelho já que se adota na solução um plano ideal para toda região da superfície refletora, no caso de um espelho de 22 cm, adotou-se nesta investigação um valor aproximado entre a marca e o centro do espelho igual a 10 cm; e  $\delta$  representa o efeito da incerteza do ponto M no vetor normal  $\vec{n}$ , que é determinado por:

$$\delta = \frac{d \cdot 180^\circ}{\pi R} \quad (3.36)$$

FIGURA 3.15 – ESQUEMA: EFEITO DA PRECISÃO DA COORDENADA DA MARCA DO ESPELHO NO VETOR NORMAL



FONTE: O Autor (2017).

A consideração do efeito da incerteza da marca na definição da normal é simplificada na Equação 3.36, pois não leva em consideração a composição geométrica das quatro marcas, nem o efeito do ajustamento por mínimos quadrados que possibilita a minimização dos erros. Contudo, podem-se investigar a partir da Equação 3.36 os valores encontrados no ensaio de validação descrito no item 3.3.

No ensaio de validação, obteve-se desvio padrão médio de  $\pm 0,5$  mm para as componentes X, Y, Z das marcas sobre o espelho, obtido pela propagação de variâncias do conjunto de dados observado e para o vetor normal o desvio padrão médio de  $1' 30''$  oriundo do resultado do ajustamento. Ao usar o valor de  $d$  igual a 0,5 mm na equação, resulta-se em um  $\delta$  de  $17' 11''$  valor maior que o obtido no ensaio. Para determinar o vetor normal com precisão de segundos de arco seria necessário fornecer coordenadas das marcas com precisão micrométrica, conforme indica a Tabela 3.6, construída a partir da Equação 3.36.

TABELA 3.6 – EFEITO DA PRECISÃO DAS COORDENADAS DAS MARCAS NO VETOR NORMAL

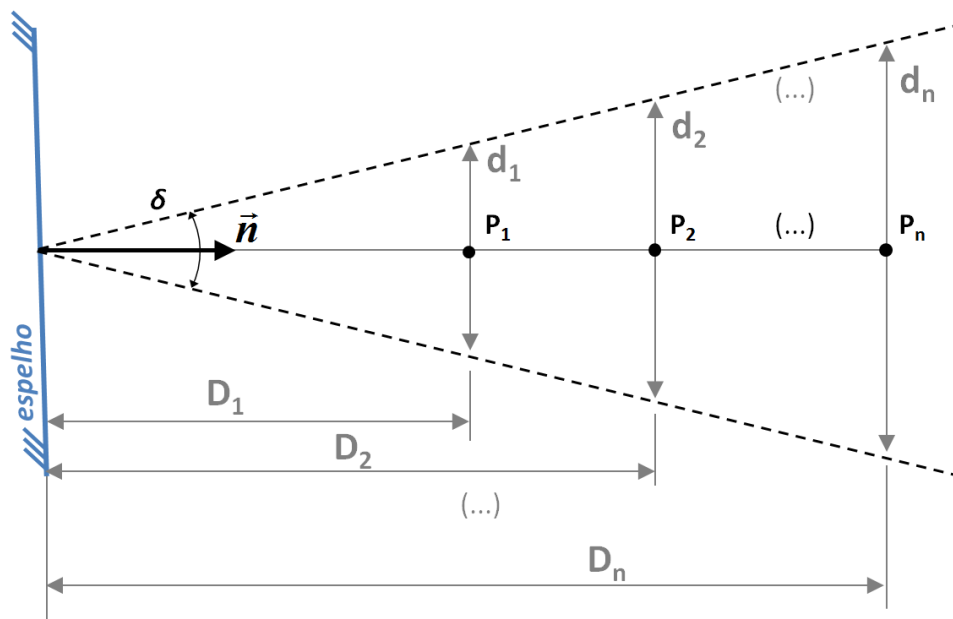
$d$ (m)	$\delta$
0,001	34' 23"
0,0001	03' 36"
0,00001	00' 21"
0,000001	00' 02"

FONTE: O Autor (2017).

Com base nos valores apresentados na Tabela 3.6, questiona-se qual é a rigidez necessária na definição do vetor normal para alcançar coordenadas absolutas de pontos visualizados indiretamente com precisão milimétrica. Pinto (2013) afirma que para conseguir coordenadas de pontos observados indiretamente com precisão milimétrica, é preciso que a atitude do plano, representada por seu vetor normal, seja determinada com ao menos cinco segundos de arco.

No intuito de averiguar tal afirmação, estimou-se o efeito de um erro angular na normal da determinação de uma coordenada, entretanto além da precisão da normal também é preciso considerar a distância entre o objeto e o espelho, que está diretamente relacionado com a qualidade da coordenada devido à propagação dos erros ao longo da distância refletida. A Figura 3.16 apresenta esquema deste efeito.

FIGURA 3.16 – ESQUEMA: EFEITO DA PRECISÃO DO VETOR NORMAL NAS COORDENADAS DO OBJETO



FONTE: O Autor (2017).

O vetor normal  $\vec{n}$  tem a si associado a incerteza angular  $\delta$ , que para os pontos observados  $P_1, P_2, \dots, P_n$  gera uma incerteza associada  $d_1, d_2, \dots, d_n$  que é diretamente relacionada com a distância do espelho ao objeto  $D_1, D_2, \dots, D_n$  que são obtidas pela Equação 3.37:

$$d_i = \frac{\delta \cdot \pi \cdot D_i}{180^\circ} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.37)$$

Assim, a Tabela 3.7 apresenta valores simulados para a precisão das coordenadas em função da incerteza da normal descritos pela Equação 3.37. Quando a normal têm precisão de 02" de arco, é possível determinar, hipoteticamente, coordenadas com precisão milimétrica de objetos afastados a 50 m, porém ressalva-se que não se consideram características do ambiente e de observação nesta averiguação. Os valores encontrados são compatíveis com as afirmações de Pinto (2013).

TABELA 3.7 – EFEITO DA PRECISÃO DO VETOR NORMAL NAS COORDENADAS DOS PONTOS OBSERVADOS

$\delta$	<i>Distância entre espelho e objeto</i>				
	<i>5 m</i>	<i>10 m</i>	<i>15 m</i>	<i>20 m</i>	<i>50 m</i>
	<b>d (mm)</b>				
34' 23"	50	100	150	200	500
03' 36"	5	10	15	20	50
00' 21"	0,5	1	1,5	2	5
00' 02"	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5

FONTE: O Autor (2017).

Expandindo o conceito teórico, testou-se na prática se a qualidade das observações está relacionada com a qualidade do modelo de plano calculado no processo. Para tal, dois ensaios foram realizados, com objetos posicionados a curtas distâncias, afastados de no máximo 2,5 metros do espelho, e a longas distâncias, com objetos distantes cerca de 20 metros.

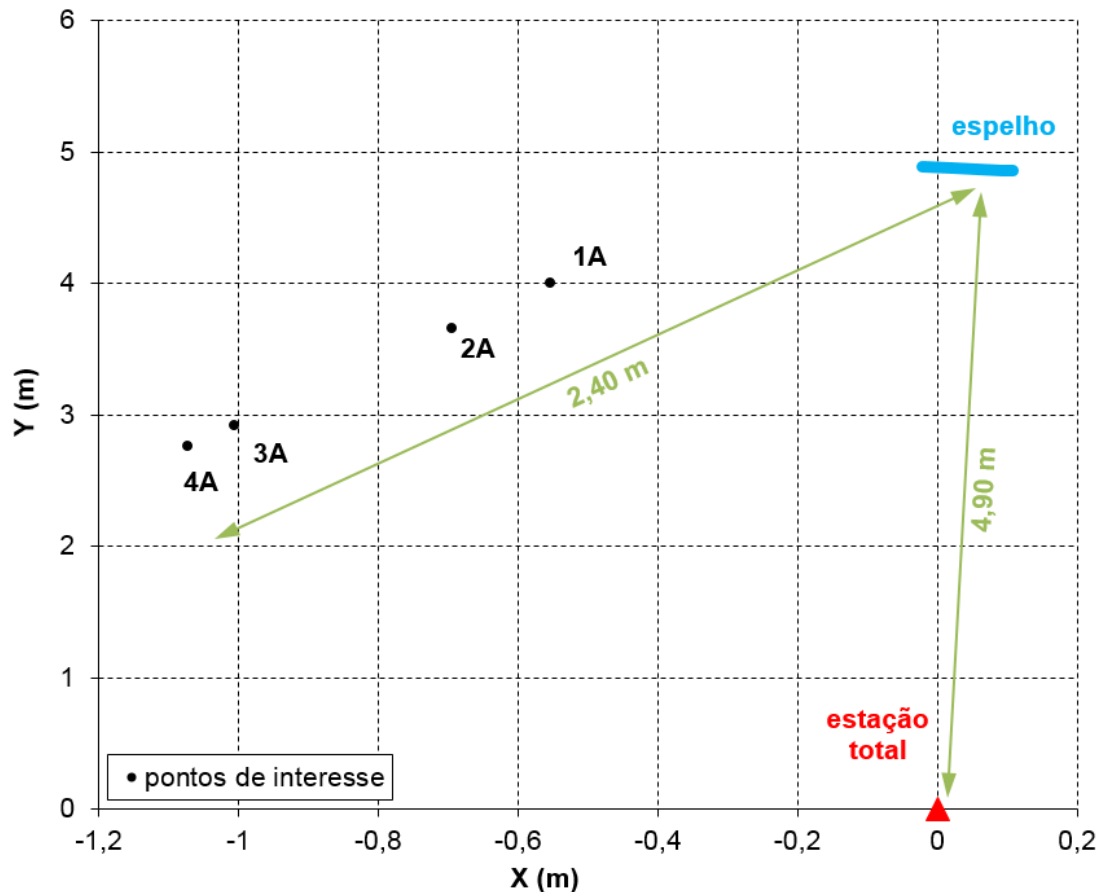
No ensaio com curtas distâncias, observou-se direta e indiretamente pontos sobre uma mira horizontal de ínvar, em ambiente controlado de laboratório, como mostram as Figura 3.17 e 3.18. Neste ensaio observou os pontos 1A, 2A, 3A e 4A fixados na mira horizontal de ínvar e determinou coordenadas diretamente e pelo modelo proposto.

FIGURA 3.17 – ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR



FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 3.18 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR



FONTE: O Autor (2017).

Os resultados da análise absoluta indicam diferenças de ordem centimétrica entre as coordenadas obtidas pelo modelo proposto e as obtidas diretamente, adotadas como valores de referência, como indicadas na Tabela 3.8. Nota-se

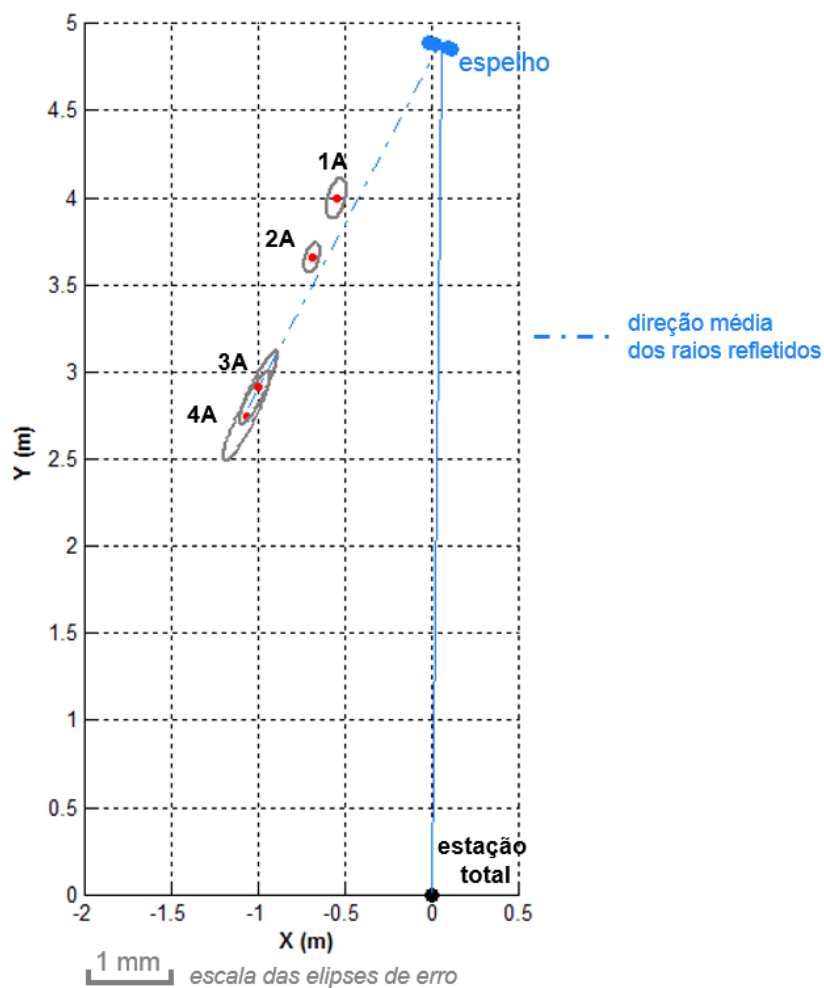
também que à medida que o ponto está distante do espelho, as diferenças aumentam bem como as incertezas representadas pelas respectivas elipses de erros (Figura 3.19). Além disso, o vetor normal foi definido com a incerteza de 6' 51" e as diferenças encontradas conferem com as estimativas dadas pela Equação 3.20.

TABELA 3.8 – RESULTADO ABSOLUTO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR

Ponto	Distância Refletida (m)	Diferenças (mm)			
		$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta total$
1	1,039	3,3	-3,0	-4,9	6,6
2	1,416	4,8	-2,0	-6,8	8,5
3	2,235	7,6	-3,9	-10,6	13,6
4	2,413	6,1	-9,2	-11,6	16,0

FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 3.19 – ELIPSES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR



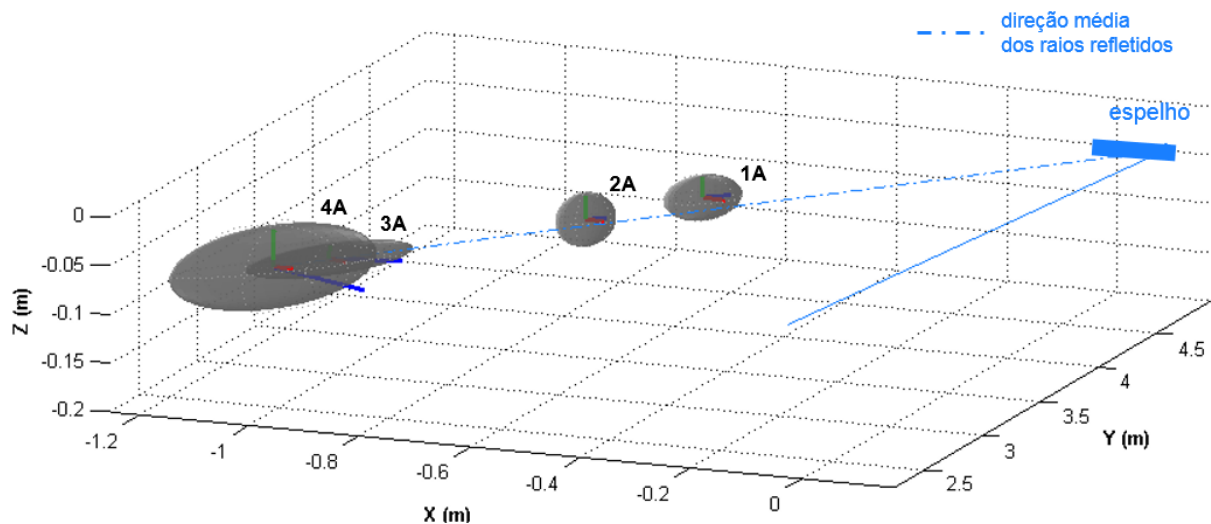
FONTE: O Autor (2017).

Ao analisar tridimensionalmente nota-se o mesmo efeito. Os elipsoides de erros foram construídos ao longo da pesquisa de modo que os semieixos  $a$ ,  $b$  e  $c$  fossem representados pelas cores azul, vermelho e verde e que a seguinte relação é verdadeira, oriunda da construção por autovalores:

$$a \geq b \geq c \quad (3.38)$$

A Figura 3.20 apresenta os elipsoides de erros para este ensaio. Notam-se elipsoides achatados em relação ao eixo  $z$  e alongados na direção dos raios refletidos, o que caracteriza na análise conjunta o predomínio de um efeito de origem linear nos erros observados. Contudo, o principal motivo para o efeito linear observado é a geometria do ensaio vista na Figura 3.18, onde os ângulos de incidência considerados são próximos da normal, o que gera posições de visada não propícia para observação, como na visada da imagem virtual indicada na Figura 3.21.

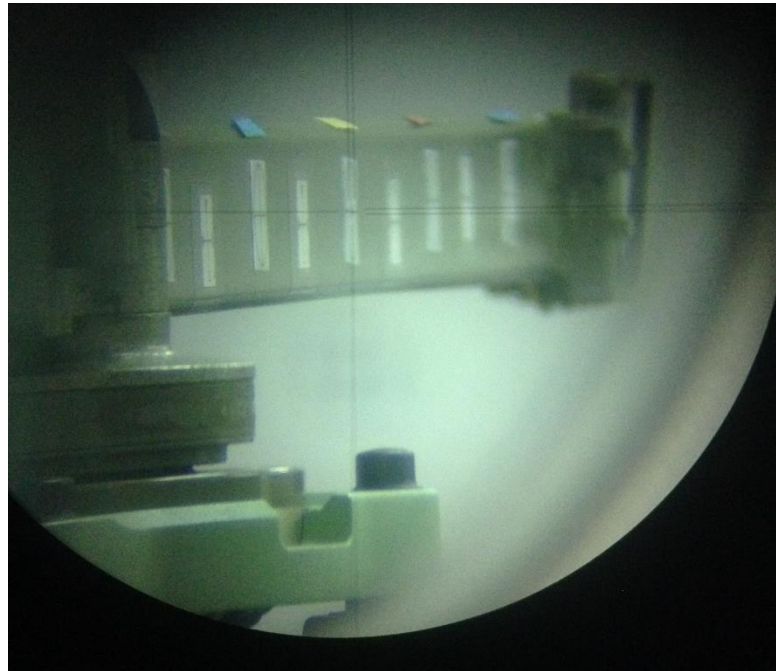
FIGURA 3.20 – ELIPSOIDES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: Elipsoides de erros com ampliação de 500 vezes.

FIGURA 3.21 – OBSERVAÇÃO DA IMAGEM VIRTUAL DO PONTO 3A NO ENSAIO DE DISTÂNCIAS CURTAS COM MIRA HORIZONTAL DE ÍNVAR



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: Foto tirada pela luneta do equipamento. A imagem refletida pelo espelho não é favorável à realização de pontarias.

Em seguida, realizou-se ensaio similar para distâncias maiores, com auxílio de um par de miniprismas sobre um suporte fixo (Figura 3.22) que foi deslocado em cinco posições distintas, de 5 a 22 metros (Figuras 3.23 e 3.24).

FIGURA 3.22 – PAR DE MINIPRISMA SOBRE O SUPORTE



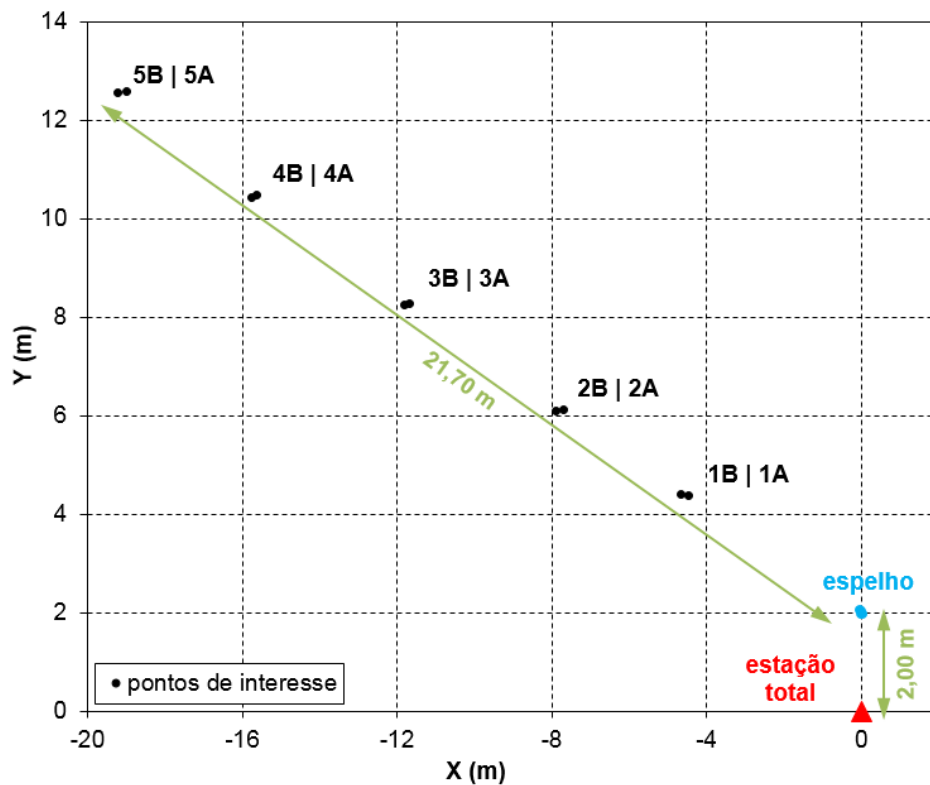
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 3.23 – ENSAIO DE DISTÂNCIAS DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA



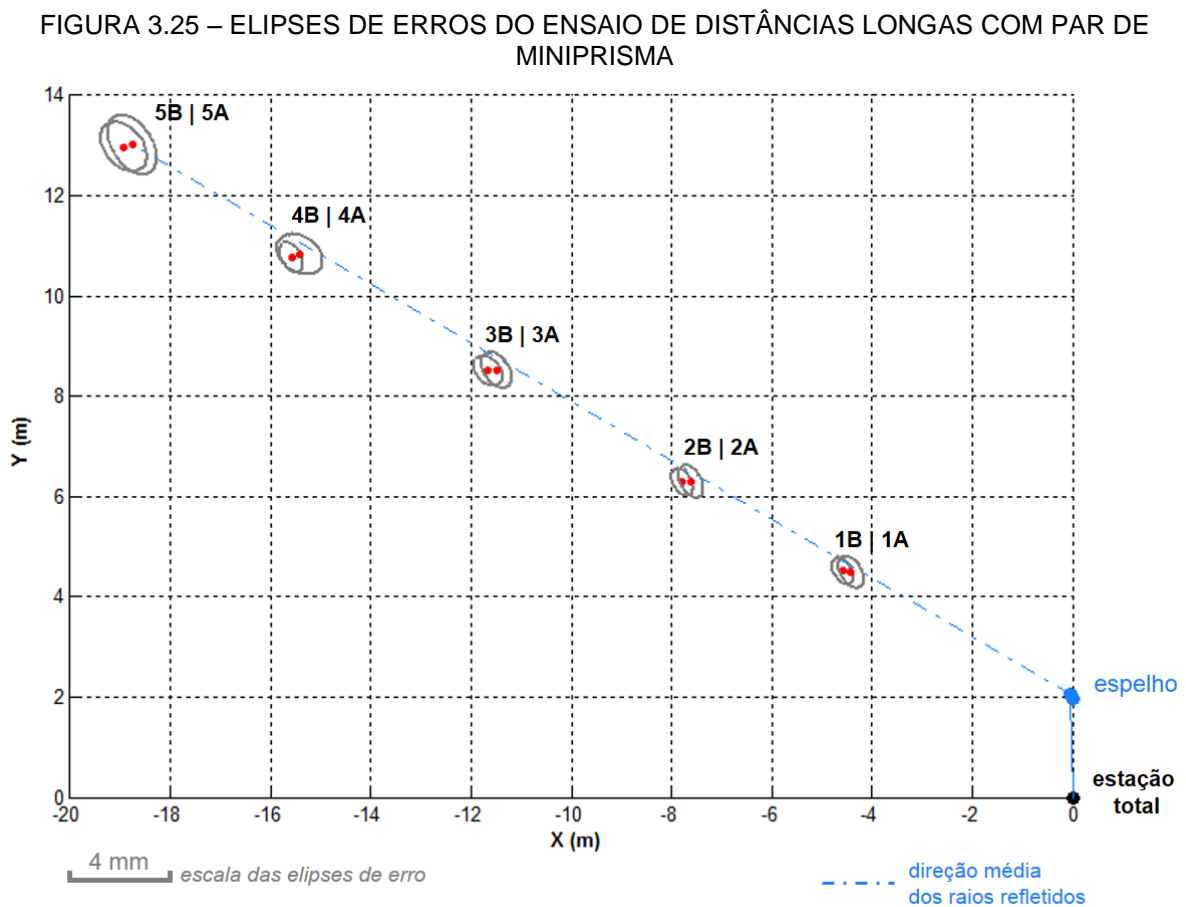
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 3.24 – CONFIGURAÇÃO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA



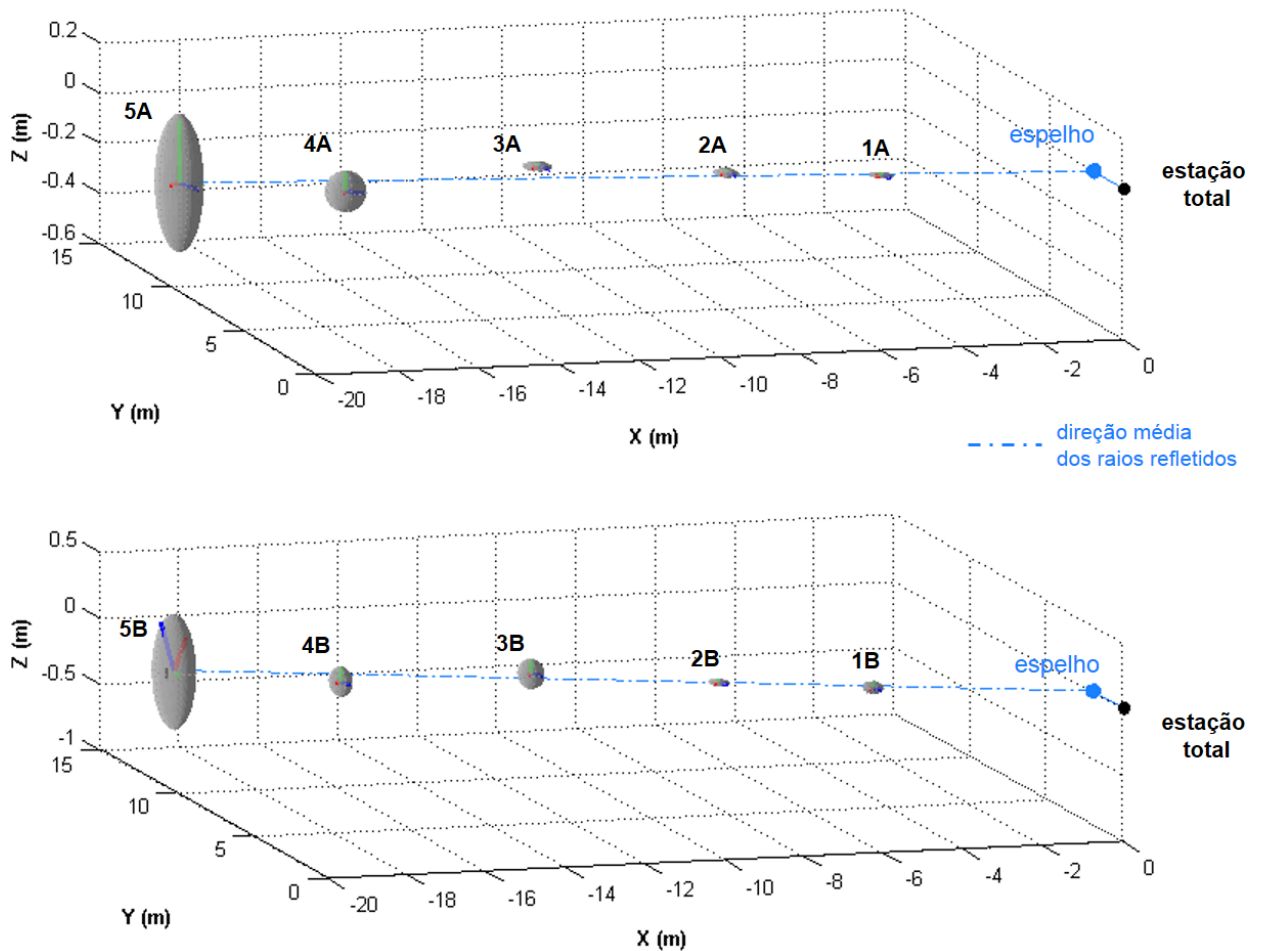
FONTE: O Autor (2017).

A Figura 3.25 apresenta as elipses de erros para os pontos calculados pelo modelo proposto, onde é possível notar a tendência de que os pontos mais afastados do espelho possuem a si associados a maior das incertezas, não sendo predominante o efeito linear. Novamente, os elipsoides de erro (Figura 3.26) são achatados na direção da componente Z, e representam a incerteza conjunta das componentes X, Y e Z das coordenadas dos pontos. Observa-se o formato de “cone” para incertezas, onde melhores definições são próximas do espelho enquanto os maiores elipsoides estão associados a pontos longínquos.



FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 3.26 – ELIPSOIDES DE ERROS DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: Elipsoides de erros com ampliação de 500 vezes.

O comportamento das elipses de erros reafirma a deficiência na determinação da atitude do vetor normal do espelho que teve neste ensaio incerteza associada de cerca de  $15'52''$ . Pela Equação 3.37, esta incerteza que refletiria a um erro  $d$  de cerca de 100 mm em 20 metros que é cinco vezes menor do valor máximo encontrado para o ponto 5B, afastado a 21,813 m do espelho, como consta na Tabela 3.9.

TABELA 3.9 – RESULTADO ABSOLUTO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA

Ponto	Distância Refletida (m)	Diferenças (mm)			
		$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta total$
1A	5,058	57,8	102,5	-30,6	121,6
1B	5,250	58,7	106,4	-32,0	125,7
2A	8,730	96,3	172,3	-52,8	204,3
2B	8,902	95,8	176,4	-54,4	208,0
3A	13,192	143,8	257,6	-79,3	305,5
3B	13,355	142,9	261,8	-81,3	309,1
4A	17,737	195,0	345,3	-106,6	410,6
4B	17,874	193,0	347,8	-107,6	412,0
5A	21,688	242,1	418,7	-125,9	499,8
5B	21,831	241,9	422,3	-128,9	503,4

FONTE: O Autor (2017).

Todavia, ao analisar-se o posicionamento relativo de pontos (Tabela 3.10), esta incerteza é minimizada em pontos a distâncias similares e, a relação geométrica entre eles é garantida com precisão de milímetros às maiores distâncias.

TABELA 3.10 – RESULTADO RELATIVO DO ENSAIO DE DISTÂNCIAS LONGAS COM PAR DE MINIPRISMA

LINHA	Direto (m)			Modelo (m)			Diferenças (mm)		
	$dx$	$dy$	$dz$	$dx$	$dy$	$dx$	$\Delta dx$	$\Delta dy$	$\Delta dz$
1A-1B	-172,1	30,0	-2,3	-173,1	26,1	-0,8	1,0	3,9	-1,5
2A-2B	-170,7	-16,4	-2,2	-170,2	-20,5	-0,6	-0,5	4,1	-1,6
3A-3B	-171,2	-18,6	-3,6	-170,2	-22,8	-1,7	-1,0	4,2	-1,9
4A-4B	-164,6	-61	-2,4	-162,5	-63,6	-1,3	-2,1	2,6	-1,1
5A-5B	-167,7	-39,7	-3,5	-167,5	-43,3	-0,7	-0,2	3,6	-2,8

FONTE: O Autor (2017).

Com base nestas investigações, constatou-se que a qualidade dos dados na definição das marcas é insuficiente para alcançar a rigidez na determinação da atitude do plano. A precisão dos valores encontrados é da ordem de minutos de arco, o que justifica os erros sistemáticos apresentados, já que o vetor normal não representa concisamente a realidade.

### 3.3.3 Síntese da investigação das hipóteses I e II

Em relação às características físicas do espelho, constatou-se que é coerente a adoção do modelo plano para a superfície refletora e que irregularidades construtivas não foram encontradas. Além disto, o espelho manteve a forma e escala de objetos refletidos, característica de um espelho plano. Portanto a hipótese I foi rejeitada.

Todavia, a modelagem do plano da superfície refletora mostrou-se deficiente, não alcançando qualidade compatível com os resultados esperados. O ideal seria aprimorar a determinação das coordenadas das marcas a uma precisão de micrometros, o que inviabiliza a praticidade e adoção da solução proposta, de tal maneira que a hipótese II foi aceita. Neste sentido, é proposto um aprimoramento de modo a mitigar o efeito da inconsistência na modelagem do plano.

## 3.4 APRIMORAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

As constatações discutidas no item anterior indicaram a deficiência na determinação de um modelo de plano para a superfície refletora utilizando pontos em sua superfície e aplicação do método dos mínimos quadrados. A qualidade posicional das coordenadas das marcas gerou desvio no vetor normal do plano calculado em relação à realidade.

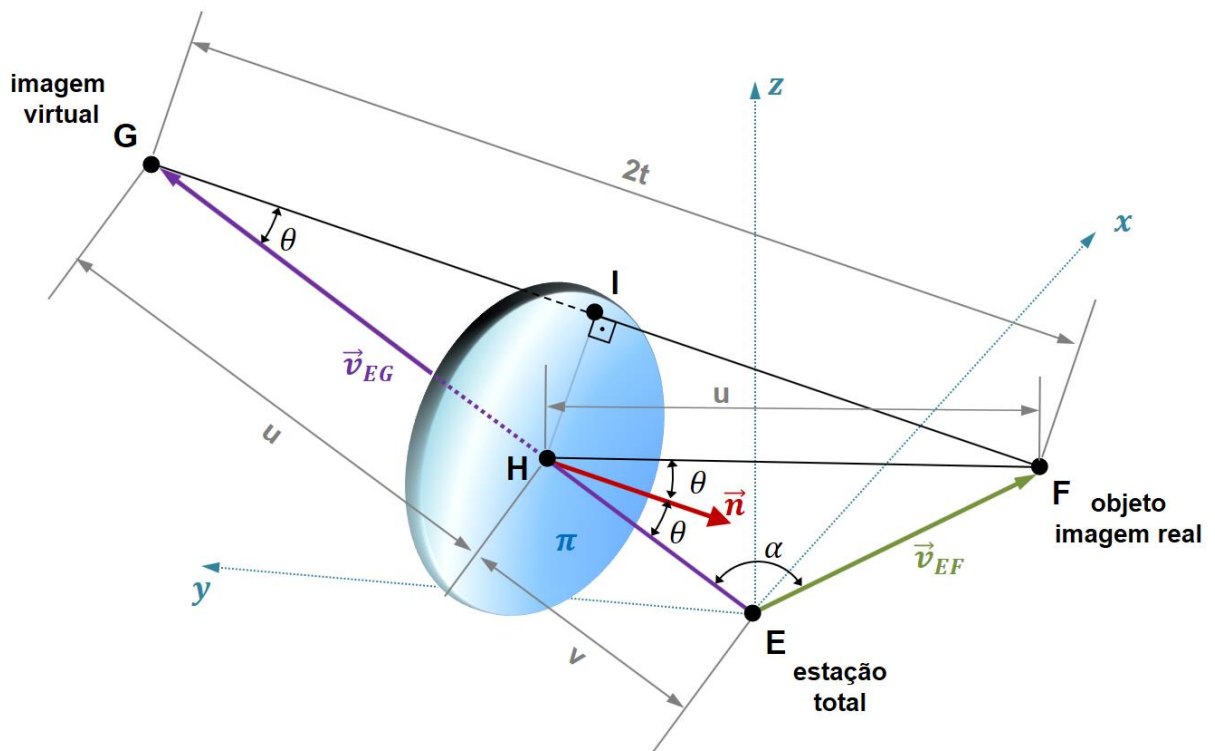
É inviável alcançar qualidade posicional micrométrica das coordenadas das marcas por técnicas geodésicas, portanto buscou-se propor nova forma de modelagem do plano que seja capaz de absorver possíveis efeitos sistemáticos e, desta forma, obter resultados satisfatórios, tanto em análise absoluta quanto relativa.

A melhoria que se propõe no modelo matemático do plano do espelho é adotar uma solução única baseada na observação de um ponto homólogo, adotado como referência. Define-se como ponto homólogo como sendo um ponto onde é possível realizar medidas pela imagem virtual, obtida pela observação sobre a superfície do espelho, e também da imagem real, com observação direta. O limitante da solução é a dificuldade de encontrar uma posição ótima que permita com uma estação total observar um ponto e seu reflexo.

### 3.4.1 Desenvolvimento teórico

Para a demonstração do desenvolvimento matemático do aprimoramento proposto, considere a Figura 3.27. A relação geométrica entre a imagem virtual e real permite a modelagem tridimensional da superfície do espelho. Para simplificação de notação considera-se que os pontos E, F e G correspondem respectivamente às posições: da estação total; do objeto ou da imagem real; e da imagem virtual; cujas coordenadas foram determinadas por irradiação.

FIGURA 3.27 – GEOMETRIA PARA O CÁLCULO DO PLANO DO ESPELHO POR PONTO HOMÓLOGO



FONTE: O Autor (2017).

Primeiro, determina-se o ângulo  $\alpha$  entre os vetores  $\vec{v}_{EF}$  e  $\vec{v}_{EG}$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\vec{v}_{EF} \cdot \vec{v}_{EG}}{|\vec{v}_{EF}| |\vec{v}_{EG}|} \right) \quad (3.39)$$

Com

$\vec{v}_{EF}$  é o vetor formado entre a estação total (E) e a imagem real (F);

$\vec{v}_{EG}$  é o vetor formado entre a estação total (E) e a imagem virtual (G).

Em seguida, determina-se o comprimento  $2t$  que corresponde à distância entre o objeto e sua imagem ao plano do espelho. Duas possibilidades:

1) Aplicar a lei dos cossenos no triângulo EFG

$$2t = \sqrt{|\vec{v}_{EF}|^2 + |\vec{v}_{EG}|^2 - 2|\vec{v}_{EF}||\vec{v}_{EG}|\cos\alpha} \quad (3.40)$$

2) Determinar a distância euclidiana entre os pontos F e G

$$2t = \sqrt{(X_F - X_G)^2 + (Y_F - Y_G)^2 + (Z_F - Z_G)^2} \quad (3.41)$$

Onde

$X_F, Y_F, Z_F$  são as coordenadas do objeto, ou imagem real;

$X_G, Y_G, Z_G$  são as coordenadas da imagem virtual do objeto.

Com a distância  $2t$  conhecida, determina-se o ângulo de incidência  $\theta$  aplicando a lei dos senos no triângulo EFG, tal que:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{|\vec{v}_{EF}|\sin\alpha}{2t}\right) \quad (3.42)$$

O ponto I corresponde a uma posição mediana entre imagem real e virtual, pois pelas leis de reflexão aplicadas em um espelho plano, ambas as imagens formadas estão igualmente espaçadas em relação à superfície refletora. Se o afastamento total entre os pontos F e G é  $2t$ , o afastamento em relação ao espelho, de ambos os pontos é a metade deste comprimento,  $t$ . O ponto H corresponde a interseção do raio incidente e a superfície refletora. Assim o comprimento  $u$ , que é a distância entre o ponto de interseção e a imagem virtual, pode ser determinado a partir do triângulo retângulo GHI:

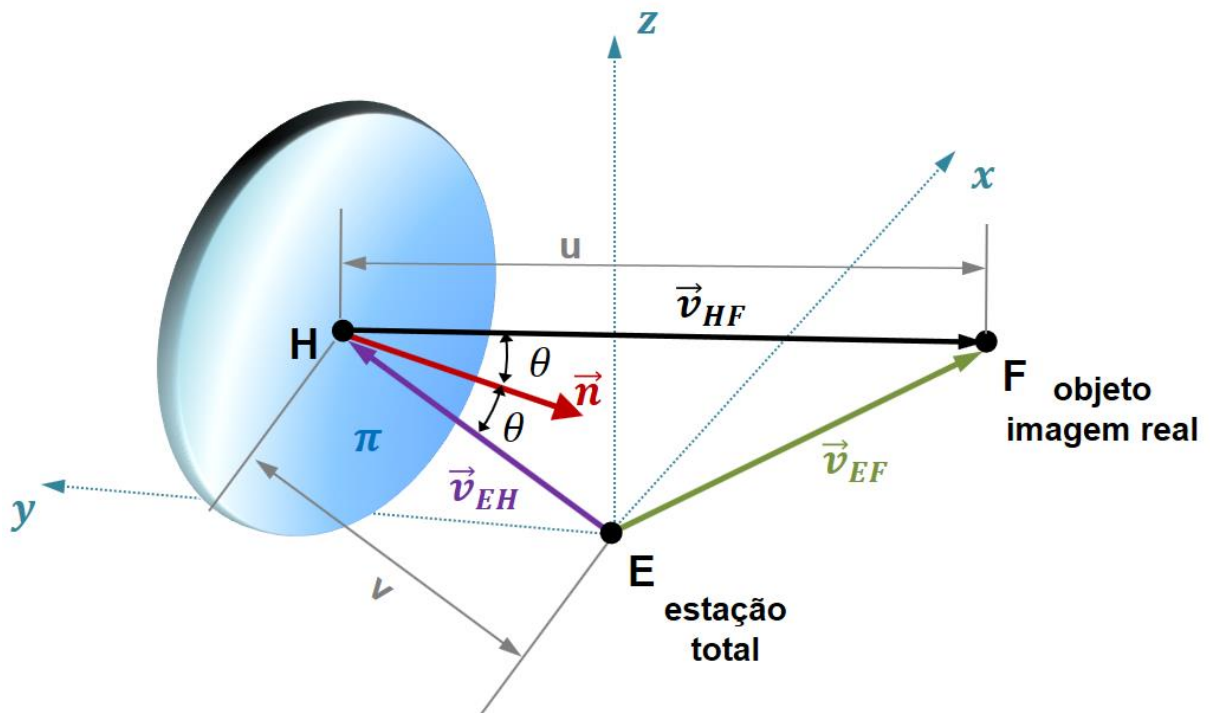
$$u = \frac{t}{\cos\theta} \quad (3.43)$$

A distância  $u$ , por definição, também corresponde ao comprimento do segmento  $HF$ , que é a distância percorrida pelo raio refletido. O valor de  $v$ , distância percorrida pelo raio incidente, pode ser calculado por:

$$v = |\vec{v}_{EG}| - u \quad (3.44)$$

Considere o triângulo  $EFH$  destacado na Figura 3.28. O vetor  $\vec{v}_{EH}$ , formado entre a estação total ( $E$ ) e a intersecção do raio incidente na superfície refletora ( $H$ ), tem a mesma direção do vetor  $\vec{v}_{EG}$  (Figura 3.27) e norma igual ao comprimento  $v$ , portanto tal vetor é conhecido.

FIGURA 3.28 – GEOMETRIA: DESTAQUE DO TRIÂNGULO ABE



FONTE: O Autor (2017).

O vetor  $\vec{v}_{HF}$  referente ao raio refletido, formado entre o ponto de intersecção da superfície refletora ( $H$ ) e o objeto ( $F$ ) é dado por:

$$\vec{v}_{HF} = \vec{v}_{EF} - \vec{v}_{EH} \quad (3.45)$$

A próxima etapa é determinar o vetor normal ao plano que representará a superfície do espelho  $\vec{n}$  que pode ser expresso na forma:

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (3.46)$$

Onde

$n_x, n_y, n_z$  são as componentes do vetor normal ao plano  $\vec{r}_i$ .

As três componentes  $n_x, n_y, n_z$  são as incógnitas, que podem determinadas considerando as seguintes condições, formuladas considerando apenas com vetores unitários:

(1) O vetor do raio incidente ( $\vec{v}_{EH}$ ), o vetor normal à superfície do espelho ( $\vec{n}$ ) e o vetor o raio refletido ( $\vec{v}_{HF}$ ) são coplanares, pertencem ao mesmo plano de incidência:

$$\begin{vmatrix} v_{EH_x} & v_{EH_y} & v_{EH_z} \\ v_{HF_x} & v_{HF_y} & v_{HF_z} \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = 0 \quad (3.47)$$

Onde

$v_{EH_x}, v_{EH_y}, v_{EH_z}$  são as componentes do vetor  $\vec{v}_{EH}$ ;

$v_{HF_x}, v_{HF_y}, v_{HF_z}$  são as componentes do vetor  $\vec{v}_{HF}$ .

(2) O ângulo de reflexão  $\theta$  é formado entre o vetor normal à superfície do espelho ( $\vec{n}$ ) e o vetor diretor do raio refletido ( $\vec{v}_{HF}$ ), determinado por:

$$\cos(\theta) = \vec{n} \cdot \vec{v}_{HF} = n_x \cdot v_{HF_x} + n_y \cdot v_{HF_y} + n_z \cdot v_{HF_z} \quad (3.48)$$

(3) O ângulo de reflexão  $\theta$  é formado entre o oposto do vetor diretor do raio incidente ( $-\vec{v}_{EH}$ ) e o vetor normal à superfície do espelho ( $\vec{n}$ ), determinado por:

$$\cos(\theta) = -\vec{v}_{EH} \cdot \vec{n} = -v_{EH_x} \cdot n_x - v_{EH_y} \cdot n_y - v_{EH_z} \cdot n_z \quad (3.49)$$

Estas condições permitem a construção de um sistema de três equações a três incógnitas que correspondem as componentes do vetor diretor do raio refletido. Logo, o sistema a ser solucionado, oriundo das equações 3.47, 3.48, e 3.49, em sua forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ v_{HF_x} & v_{HF_y} & v_{HF_z} \\ -v_{EH_x} & -v_{EH_y} & -v_{EH_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Cujos coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são:

$$\begin{cases} c_1 = v_{EH_y} \cdot v_{HF_z} - v_{EH_z} \cdot v_{HF_y} \\ c_2 = v_{EH_z} \cdot v_{HF_x} - v_{EH_x} \cdot v_{HF_z} \\ c_3 = v_{EH_x} \cdot v_{HF_y} - v_{EH_y} \cdot v_{HF_x} \end{cases} \quad (3.51)$$

Se o sistema de equações 3.50 é possível e determinado, ou seja, de solução única, determina-se as componentes do vetor normal à superfície do espelho da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ v_{HF_x} & v_{HF_y} & v_{HF_z} \\ -v_{EH_x} & -v_{EH_y} & -v_{EH_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Finalmente, para calcular a equação geral do plano:

$$A_p \cdot x + B_p \cdot y + C_p \cdot z + D_p = 0 \quad (3.53)$$

Consideram-se os termos dependentes  $A_p$ ,  $B_p$  e  $C_p$  iguais às componentes do vetor normal do plano, que correspondem à atitude do espelho descrita por seus cossenos diretores em relação ao sistema cartesiano adotado. Então, tem-se que:

$$\begin{cases} A_p = n_x \\ B_p = n_y \\ C_p = n_z \end{cases} \quad (3.54)$$

Para determinar o termo independente  $D_P$  é necessário conhecer um ponto sobre a superfície do espelho. Conforme a Figura 3.28, o ponto H que corresponde à interseção do raio incidente na superfície refletora é um ponto que pertencente ao plano a ser modelado. As coordenadas do ponto H podem ser expressas por:

$$(X_H, Y_H, Z_H) = v \cdot \frac{\vec{v}_{EH}}{|\vec{v}_{EH}|} \quad (3.55)$$

Com

$X_H, Y_H, Z_H$  são as coordenadas do ponto H.

Utilizando as coordenadas do ponto H na equação geral do plano, calcula-se o valor do termo independente  $D_P$ :

$$D = -(A \cdot X_H + B \cdot Y_H + C \cdot Z_H) = -(n_x \cdot X_H + n_y \cdot Y_H + n_z \cdot Z_H) \quad (3.56)$$

Logo, este desenvolvimento foi adotado como aprimoramento ao modelo matemático inicial desenvolvido no item 3.2.1, substituindo a etapa descrita no item 3.2.1.1 que trata da modelagem da superfície do espelho.

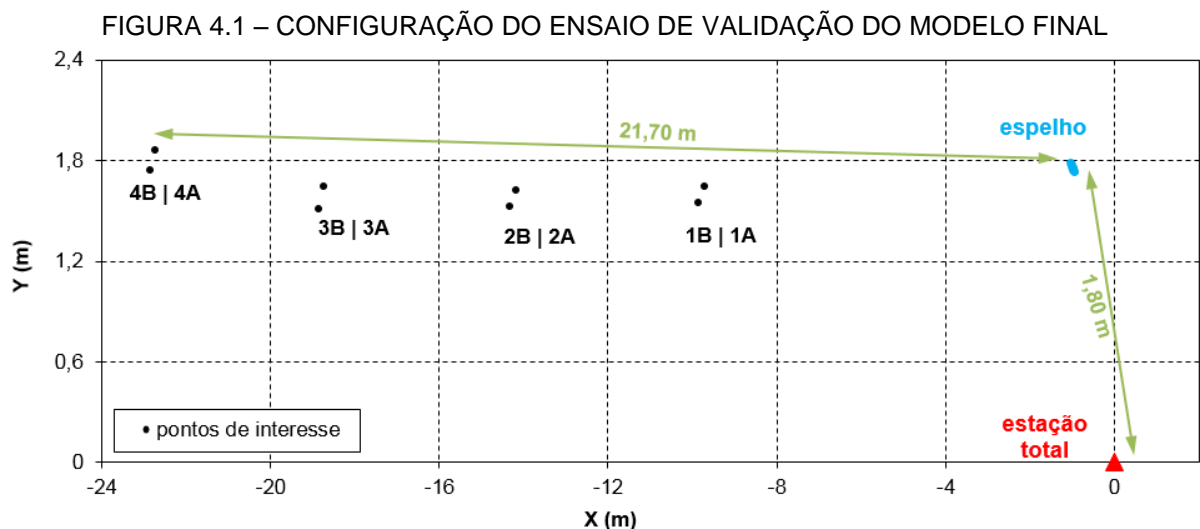
## 4 RESULTADOS E ANÁLISES

A adoção do aprimoramento apresentado no item 3.4, em que o plano da superfície do espelho é definido por ponto homólogo, substitui a modelagem através das coordenadas das marcas e o ajustamento por mínimos quadrados, estruturando o modelo matemático final. Neste capítulo será discutida a validação do modelo, no seu formato final, com a realização de novo ensaio controlado. Em seguida, para testar a consistência do modelo, investigações foram feitas em função dos elementos fundamentais da solução: o espelho e o ponto homólogo.

### 4.1 VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO FINAL

Após o ajuste realizado no modelo matemático proposto, realizou-se um novo ensaio para verificar a consistência da solução. Com os mesmos materiais descritos no item 3.3, refez-se o levantamento considerando a existência de um ponto homólogo permitindo que esta informação fosse inserida na modelagem do plano.

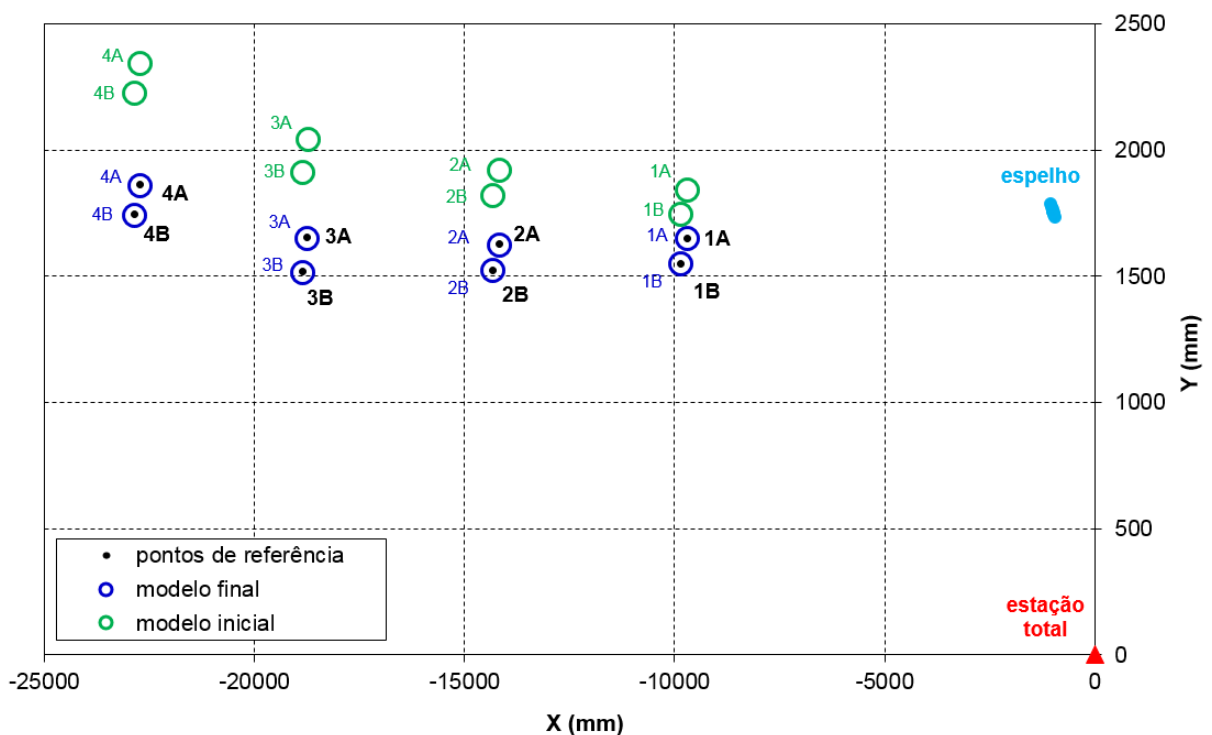
Neste experimento, além do ponto homólogo, ponto observado de forma direta e indireta, também foram observados com a estação total quatro pares de pontos posicionados em distâncias distintas do espelho, conforme a Figura 4.1. O ponto homólogo adotado na solução do modelo final foi o ponto 1A por ser o mais próximo do espelho.



FONTE: O Autor (2017).

A partir das observações realizadas nos pontos, direta e indiretamente, com a observação de imagens virtuais calculou-se coordenadas considerando três soluções possíveis. A primeira oriunda do modelo inicial, com plano definido por MMQ; a segunda considerando o modelo final, onde o plano é determinado por ponto homólogo; e a terceira considerando a determinação de coordenadas diretas, por irradiação, da forma convencional. A Figura 4.2 apresenta os resultados das três soluções supracitadas.

FIGURA 4.2 – RESULTADOS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO DOS MODELOS INICIAL E FINAL



FONTE: O Autor (2017).

Na Figura 4.2 os resultados do modelo inicial são exibidos em verde enquanto que os do modelo final estão em azul e os pontos pretos correspondem às posições reais dos pontos que foram calculados diretamente, ora adotadas como valores de referência.

A primeira constatação, como mencionado anteriormente, é que as coordenadas dos pontos calculados pelo modelo inicial têm erros em suas posições absolutas de maior magnitude do que o modelo ajustado. Tais erros são da ordem centímetros e são diretamente proporcionais à distância entre o objeto e o espelho

como visto na Figura 4.2, uma vez que o efeito da incerteza angular é ampliado à medida que o ponto se afasta da posição do espelho.

No segundo grupo a partir do modelo final, os resultados mostraram melhorias significativas nas coordenadas alcançando ordem milimétrica na precisão absoluta da posição. A Tabela 4.1 mostra os valores encontrados.

TABELA 4.1 – COMPARAÇÃO ABSOLUTA DAS COORDENADAS DOS OBJETOS

PONTO	Dist. do espelho (m)	Modelo Final (mm) A			Pontos de Referência (mm) B			Diferenças (mm) C=A-B			
		X	Y	Z	X	Y	Z	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	Total
1A	8,9	-9709,6	1648,0	-48,4	-9709,6	1648,0	-48,4	0,0	0,0	0,0	0,0
1B	8,7	-9849,0	1548,2	-48,7	-9848,8	1548,0	-49,0	-0,2	0,2	0,3	0,4
2A	13,4	-14179,0	1624,8	-46,2	-14178,8	1627,2	-46,5	-0,2	-2,4	0,3	2,4
2B	13,2	-14317,7	1522,8	-47,9	-14316,8	1525,1	-48,2	-0,9	-2,3	0,3	2,5
3A	17,9	-18735,9	1648,4	-171,6	-18735,7	1652,6	-171,4	-0,2	-4,2	-0,2	4,2
3B	17,7	-18847,5	1513,0	-171,8	-18847,3	1518,5	-172,7	-0,2	-5,5	0,9	5,6
4A	21,8	-22722,6	1858,2	-169,1	-22722,4	1864,4	-170,8	-0,2	-6,2	1,7	6,4
4B	21,7	-22847,7	1739,7	-170,7	-22848,2	1745,7	-171,5	0,5	-6,0	0,8	6,1

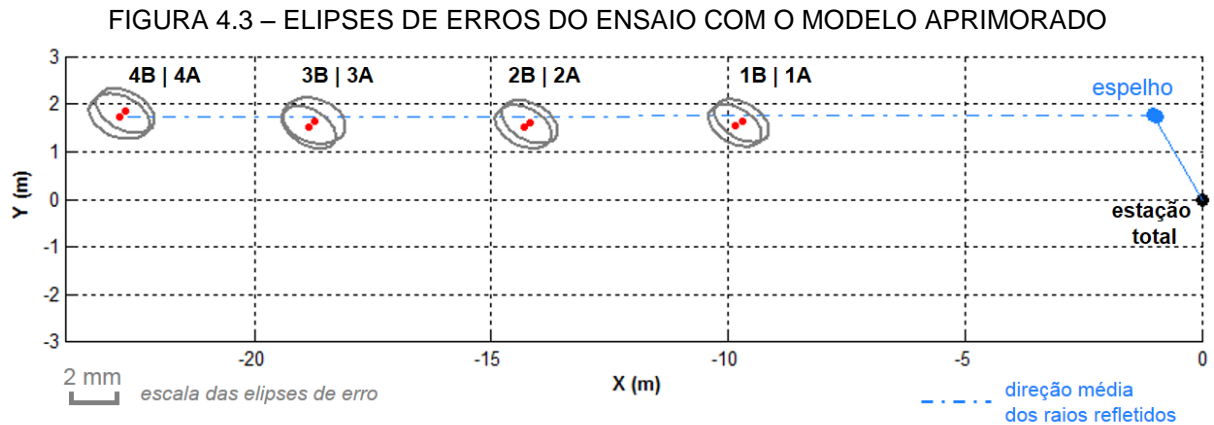
FONTE: O Autor (2017).

A adoção do ponto 1A como ponto homólogo para a definição do plano caracteriza na fixação de sua posição na solução, o que resulta na ausência de erros na sua determinação indireta pelo modelo ajustado. O uso de pontos que estão mais próximos ao espelho e ao mesmo tempo longe do ponto oculto como referência foi adotado por questões de praticidade em campo.

As outras diferenças apresentadas são da ordem de décimos de milímetro de valores para os componentes X e Z. A componente Y absorveu grande parte do erro existente na solução, que corresponde à direção das imagens virtuais observadas. Após o aprimoramento do modelo com a minimização dos problemas angulares, a principal fonte de erros são as distâncias medidas, posicionadas paralelas à direção Y de acordo com a composição do sistema de referência adotado no ensaio. Nota-se também que as diferenças observadas das coordenadas são maiores quando o ponto se distancia do ponto 1A. Além disso, as distâncias similares contem erros na posição absoluta também similares e com a mesma ordem de grandeza, por conseguinte, um resíduo como resultado da distância entre o espelho e o objeto.

A Figura 4.3 apresenta as elipses de erros deste ensaio com o cálculo realizado através do modelo final. Estas possuem seu eixo maior na direção paralela

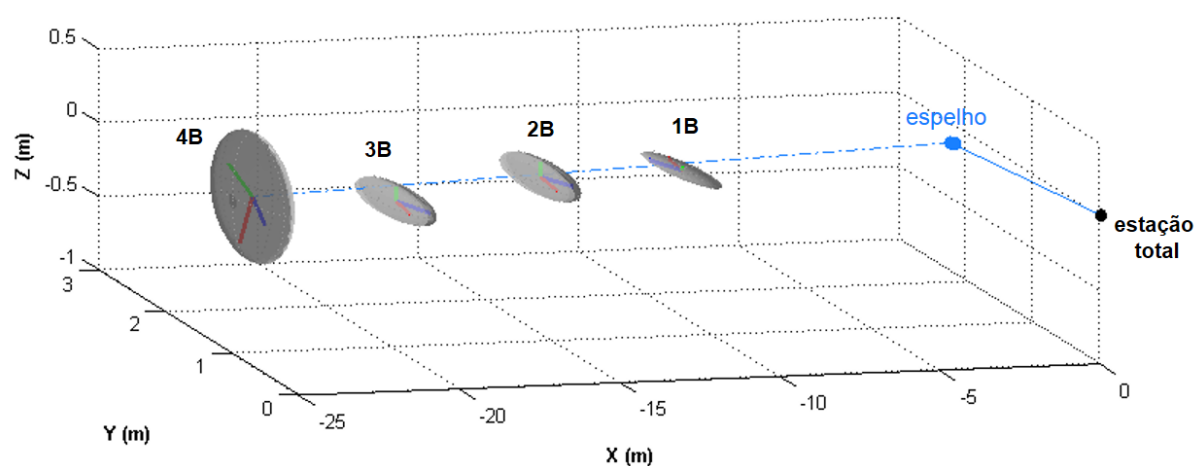
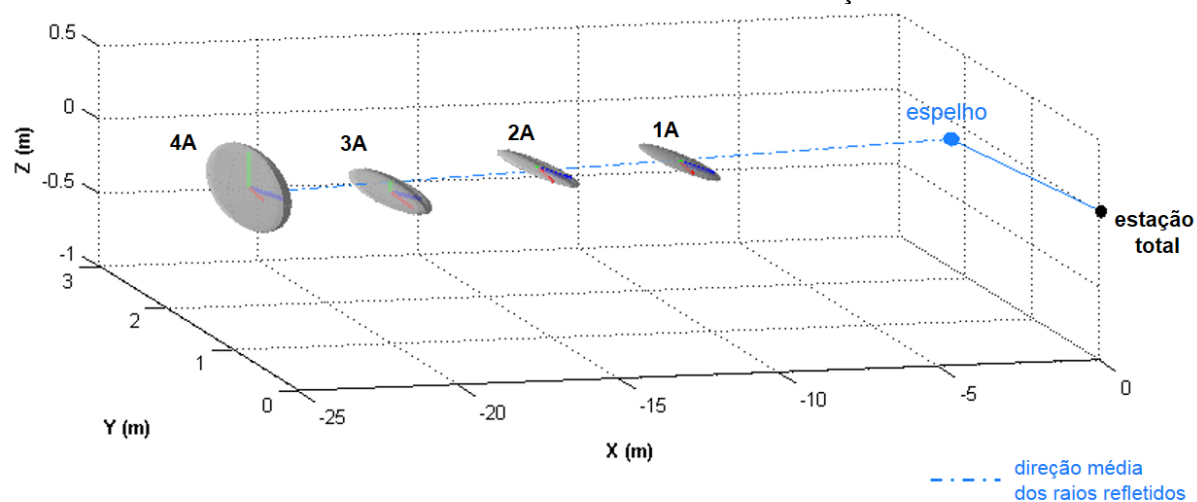
à dos raios refletidos pelo espelho, representando parcela de erro oriunda de fatores lineares, porém nota-se que tratam de elipses não alongadas, o que indica a não predominância de erros lineares ou angulares.



FONTE: O Autor (2017).

Todavia, ao se analisar os elipsoides de erros é possível identificar tendência nas incertezas. Na Figura 4.4 observam-se os elipsoides de erro dos oitos separadamente, pois ocorreu sobreposição devido à ampliação imposta bem como proximidades dos pontos pertencentes a cada par. A Figura 4.5 apresenta detalhe dos elipsoides nos pontos 2A e 2B, sobrepostos parcialmente após redução da ampliação dos mesmos. No modelo final a forma é alongada na direção perpendicular à dos raios refletidos, indicando que a principal parcela predominante ainda é oriunda das direções medidas bem com da atitude do plano, fixada em uma solução local para o ponto homólogo, fato este não evidenciado na análise das elipses de erros.

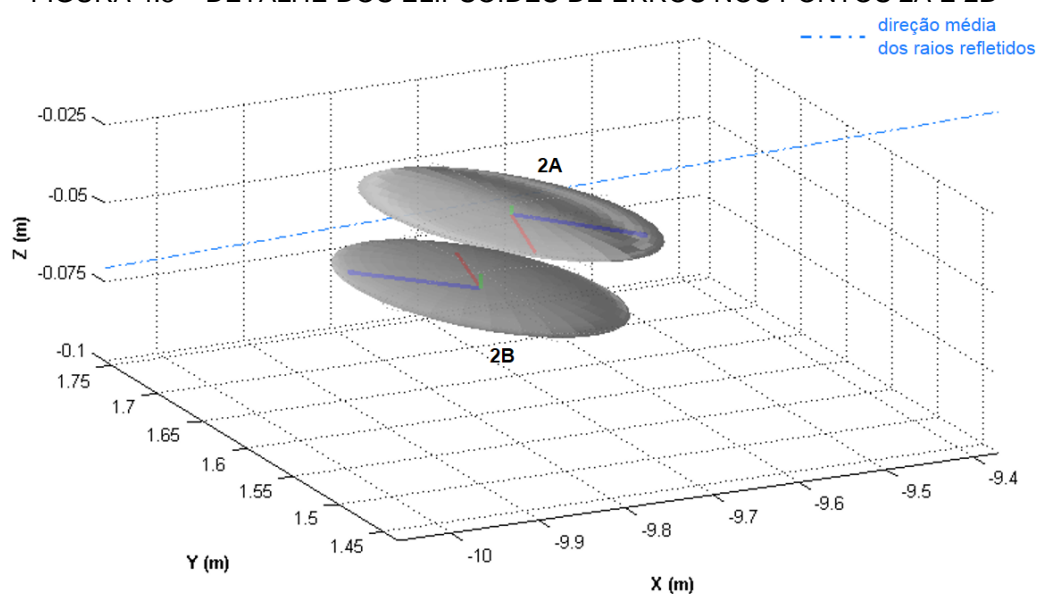
FIGURA 4.4 – ELIPSOIDES DE ERROS DO ENSAIO DE VALIDAÇÃO DO MODELO FINAL



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: Elipsoides de erros com ampliação de 500 vezes.

FIGURA 4.5 – DETALHE DOS ELIPSOIDES DE ERROS NOS PONTOS 2A E 2B



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: Elipsoides de erros com ampliação de 100 vezes.

No aspecto relativo, as variações determinadas pelo modelo final são apresentadas na Tabela 4.2.

TABELA 4.2 – COMPARAÇÃO RELATIVA DAS COORDENADAS DOS OBJETOS

LINHA	Modelo Final (mm) A				Pontos de Referência (mm) B				Diferenças (mm) C=A-B			
	$\delta x$	$\delta y$	$\delta z$	total	$\delta x$	$\delta y$	$\delta z$	total	$\Delta \delta x$	$\Delta \delta y$	$\Delta \delta z$	total
1A-1B	-139,4	-99,8	-0,3	171,4	-139,2	-100,0	-0,6	171,4	-0,2	0,2	0,3	0,0
2A-2B	-138,7	-102,0	-1,7	172,2	-138,0	-102,1	-1,7	171,7	-0,7	0,1	0,0	0,5
3A-3B	-111,6	-135,4	-0,2	175,5	-111,6	-134,1	-1,3	174,5	0,0	-1,3	1,1	1,0
4A-4B	-125,1	-118,5	-1,6	172,3	-125,8	-118,7	-0,7	173,0	0,7	0,2	-0,9	-0,6

FONTE: O Autor (2017).

As diferenças na ordem submilimétrica indicadas na Tabela 4.2 mostram que as orientações e dimensões entre os pontos calculados pelo modelo proposto são preservadas, sem deformação ou mudança de escala. No entanto, a posição relativa da ordem submilimétrica só é assegurada entre os pontos que têm distâncias similares, que por sua vez implicam na minimização dos resíduos de erro mostradas na Tabela 4.1. Esta característica não foi observada quando se trabalha com dois pontos afastados do espelho com distâncias significativamente diferentes.

#### 4.2 TESTES DE CONSISTÊNCIA DO MODELO MATEMÁTICO FINAL

O aprimoramento proposto no capítulo três implicou em resultados satisfatórios na análise da qualidade absoluta das coordenadas de pontos determinados indiretamente, determinadas no ensaio de validação discutido no item 4.1.

Porém o teste de validação foi realizado em apenas uma única situação de geometria dos elementos cruciais – o espelho e o ponto homólogo. Sendo assim, a solução ainda carece de maiores investigações para validar sua robustez e consistência em situações heterogêneas. Estas situações são geradas por diferentes composições de observação, com distintas posições do espelho e do ponto homólogo. Portanto, testes foram realizados, partindo da conjectura do modelo matemático em sua forma final, com o plano sendo determinado por observação de um ponto homólogo, direta e indiretamente. Buscou-se investigar:

- a) A influência da posição e atitude da superfície refletora;
- b) A influência da posição da imagem virtual do ponto homólogo na superfície do espelho;
- c) A influência do afastamento do ponto homólogo.

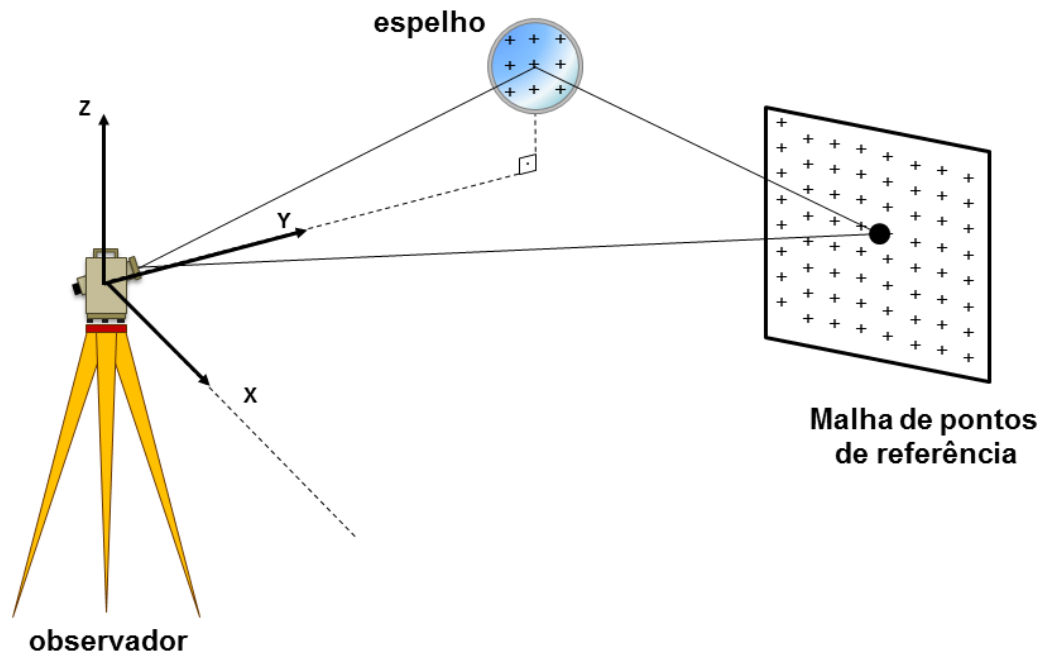
As três investigações serão tratadas individualmente nos subitens a seguir.

#### 4.2.1 Influência da posição e atitude da superfície refletora

No capítulo três foi comprovado que o espelho utilizado nos ensaios pode ser considerado plano. Contudo, este teste visa verificar se variações na posição e atitude do espelho, têm influência nos resultados obtidos com o modelo final. Nesse sentido, propôs utilizar o modelo final em processo análogo a calibração de câmaras fotogramétricas (HABIB et al., 2013; CAMPOS et al., 2015), que tem como concepção adquirir uma imagem sobre um padrão geométrico conhecido e determinar distorções oriundas do sistema de captura da câmara e, com isso gerar modelos de correção para mitigar este efeito em aquisições de imagens futuras.

A Figura 4.6 mostra a proposta do teste de posição e atitude do espelho. Em diferentes posições e atitudes do espelho, observa-se indiretamente uma malha de pontos, cujas coordenadas são conhecidas, que recobrem toda a superfície refletora. Calcula-se então, as coordenadas dos pontos observados com o modelo final desenvolvido. Em seguida, associa-se o erro absoluto das coordenadas dos pontos observados à superfície do espelho onde as respectivas imagens virtuais foram observadas.

FIGURA 4.6 – PROPOSTA DO TESTE DE CONSISTÊNCIA DE POSIÇÃO E ATITUDE DO ESPELHO



FONTE: O Autor (2017).

A hipótese é que independente da posição e atitude do espelho, os erros observados associados à sua superfície em diferentes situações devem ter magnitude similar, de maneira que é possível afirmar que a superfície utilizada tem comportamento homogêneo e, não interfere diretamente nos resultados.

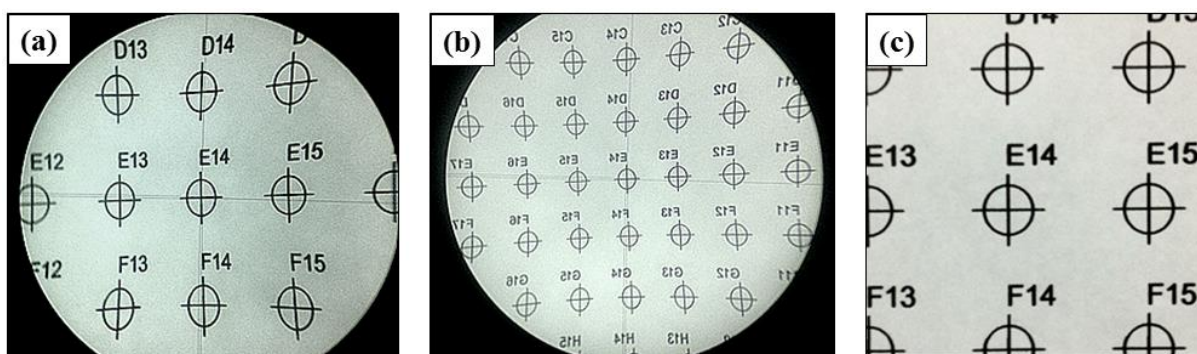
Nos ensaios, a estação total, espelho e malha de referência foram posicionados de modo que toda a superfície do espelho fosse recoberta por pontos de observação como mostra a Figura 4.7, com detalhe do espelho. A Figura 4.8 mostra as observações pela luneta no alvo (a) diretamente, (b) indiretamente pelo espelho e (c) o modelo de alvo impresso. A diferença das ampliações nas observações pela luneta deve-se ao fato que a trajetória dos raios é menor diretamente, do que indiretamente, já que o raio é desviado pelo espelho. Nota-se também na Figura 4.8b as imagens invertidas da malha, devido à reflexão do espelho.

FIGURA 4.7 – DETALHE DA MALHA DE PONTOS OBSERVADA NA SUPERFÍCIE DO ESPELHO



FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.8 – DETALHE DA OBSERVAÇÃO DOS PONTOS DA MALHA



FONTE: O Autor (2017).

LEGENDA: (a) observação direta do ponto E14 pela luneta, (b) observação indireta do ponto E14 pela luneta com auxílio do espelho (vide nome das marcas invertido) e (c) detalhe do modelo de marcas impresso. As deformações são oriundas por se tratarem de fotografias da imagem observada pela luneta da estação total.

Como dito, a fim de averiguar a consistência dos resultados, o levantamento foi realizado em quatro configurações diferentes como consta na Tabela 4.3.

TABELA 4.3 – CONFIGURAÇÃO DOS ENSAIOS

ENSAIO	Distância média entre observador e espelho	Distância média entre espelho e malha de pontos	Quantidade de pontos observados   Densidade
1	1,95 m	2,41 m	243 pontos   0,64 pontos/cm <sup>2</sup>
2	5,79 m	7,48 m	38 pontos   0,10 pontos/cm <sup>2</sup>
3	2,12 m	1,92 m	32 pontos   0,08 pontos/cm <sup>2</sup>
4	4,00 m	4,20 m	55 pontos   0,14 pontos/cm <sup>2</sup>

FONTE: O Autor (2017).

NOTA: Densidade calculada considerando a área do espelho igual a 380 cm<sup>2</sup>.

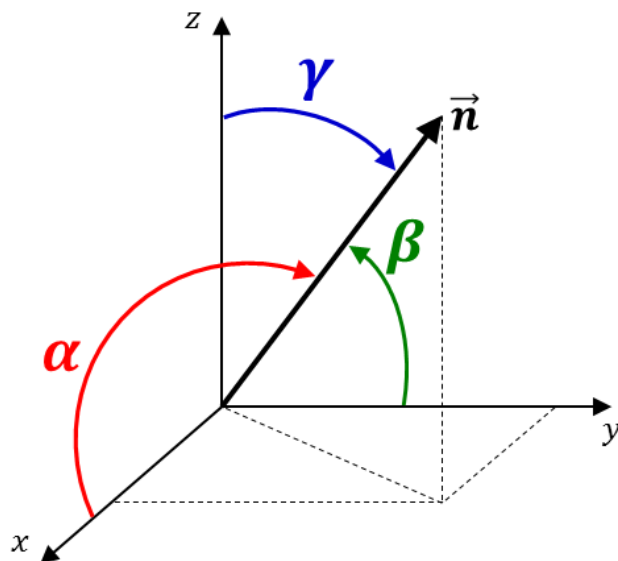
Para cada ensaio o espelho foi posicionado a atitudes diferentes, descritas pelos ângulos diretores do vetor normal (Figura 4.9) dados pela Equação 4.1. Os valores obtidos para cada ensaio compõe a Tabela 4.4.

$$\begin{cases} \alpha = \arccos\left(\frac{n_x}{|\vec{n}|}\right) \\ \beta = \arccos\left(\frac{n_y}{|\vec{n}|}\right) \\ \gamma = \arccos\left(\frac{n_z}{|\vec{n}|}\right) \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde

$\alpha, \beta, \gamma$  são os ângulos diretores do vetor normal  $\vec{n}$  em relação aos eixos  $x, y$  e  $z$  respectivamente.

FIGURA 4.9 – ÂNGULOS DIRETORES DO VETOR NORMAL



FONTE: O Autor (2017).

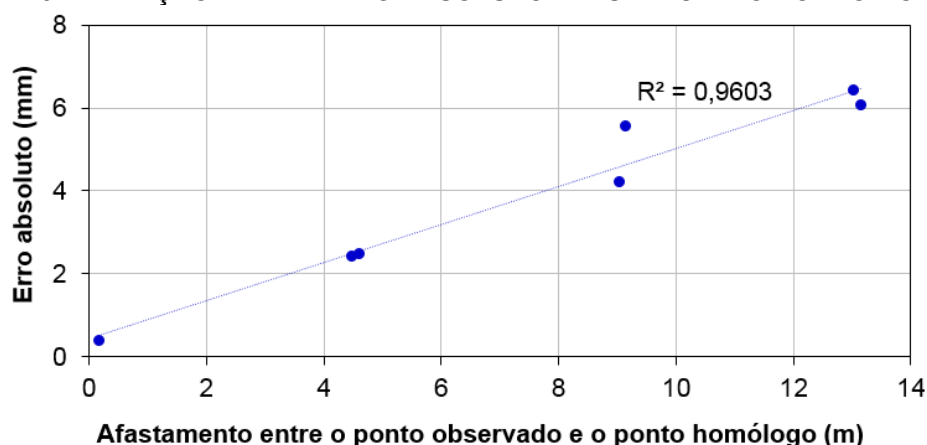
TABELA 4.4 – ÂNGULOS DIRETORES DO VETOR NORMAL DO ESPELHO NOS ENSAIOS

ENSAIO	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	57° 11' 34"	147° 04' 54"	87° 35' 31"
2	98° 52' 44"	170° 54' 48"	88° 04' 58"
3	129° 55' 34"	138° 20' 41"	80° 03' 03"
4	108° 59' 53"	160° 37' 41"	86° 21' 06"

FONTE: O Autor (2017).

O ponto homólogo adotado para todos os ensaios foi arbitrado em um ponto mediano da coleta, que outrora também representa a região central do espelho. A adoção de um ponto do conjunto de dados minimiza erros inerentes à diferença de distância entre o plano definido para a posição do ponto homólogo e os pontos observados. Fato é que o ensaio descrito no item 4.1 indicou que o afastamento entre o ponto homólogo e o ponto observado é diretamente relacionado com o aumento dos erros absolutos nas coordenadas, cujos resultados dos pontos podem ser expressos na forma gráfica (Figura 4.10).

FIGURA 4.10 – RELAÇÃO ENTRE ERRO ABSOLUTO E DISTÂNCIA AO PONTO HOMÓLOGO

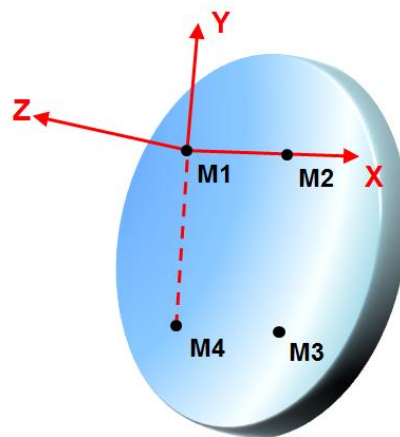


FONTE: O Autor (2017).

Em uma regressão linear, o coeficiente de correlação de Pearson é de 0,9603, valor que caracteriza a alta correlação entre as variáveis: erro absoluto e afastamento entre o ponto observado e o ponto homólogo. Portanto, a adoção de um ponto homólogo junto à região de interesse vem mitigar esse efeito.

Enfim, para interpretação adequada dos resultados adotou-se um referencial arbitrário sobre a superfície do espelho. Sua posição foi definida com uso das quatro marcas existentes, similar ao sistema adotado por Gonçalves (2009). Este sistema tem a marca M1 com coordenadas arbitrárias iguais à  $(100;100;100)$ , o eixo x na direção da marca M2, eixo Z na direção da normal do espelho e o eixo Y, na direção inversa de M4, completando o terno dextrogiro, como indicado na Figura 4.11. Os dados dos ensaios foram adequados ao sistema arbitrário através de transformação afim.

FIGURA 4.11 – SISTEMA ARBITRADO NA SUPERFÍCIE DO ESPELHO

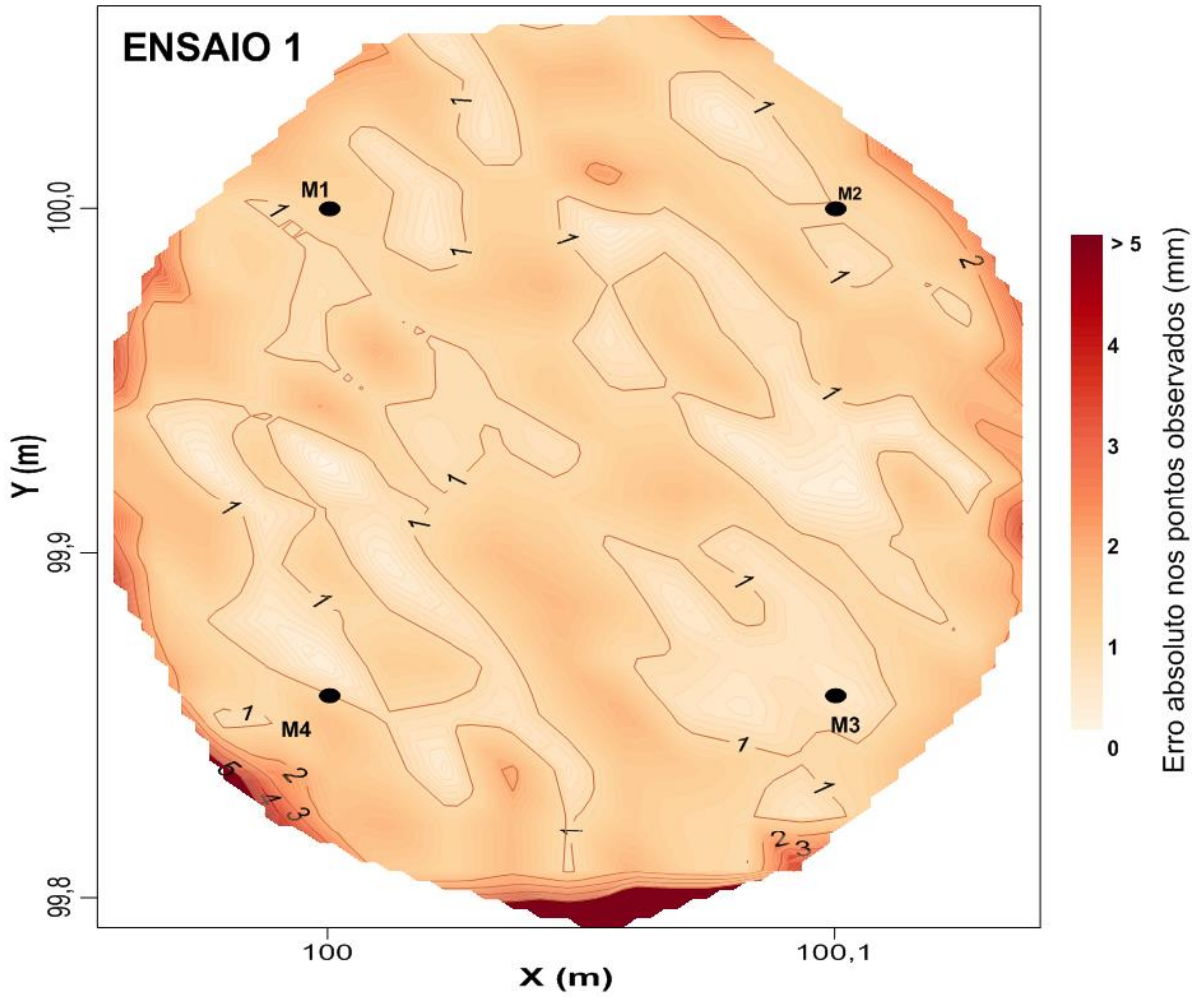


FONTE: Adaptado de Gonçalves (2009).

Nas posições das intersecções entre o raio incidente das observações das imagens virtuais e o plano do espelho, adotou a componente do eixo Z como correspondendo aos erros absolutos obtidos em cada um dos ensaios. Assim, foi possível gerar representações da superfície do espelho com erros absolutos associados.

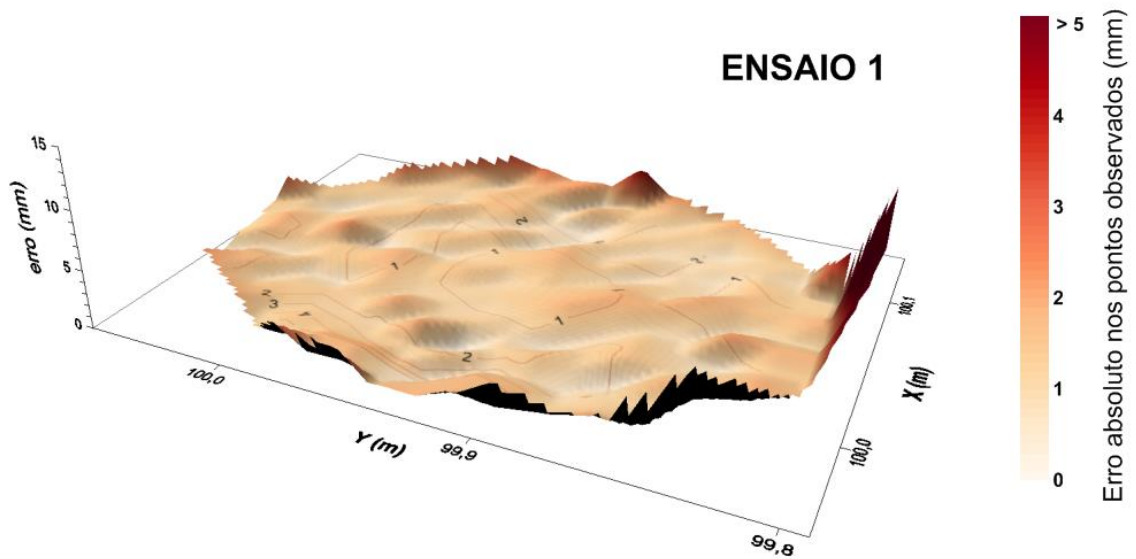
As Figuras 4.12 e 4.13 representam os resultados do Ensaio 1, que tem uma superabundância de pontos, no total de 243 sobre a superfície. Nota-se que regiões periféricas estão associadas a erros absolutos maiores de 5 mm. Todavia, a superfície teve comportamento homogêneo como resposta, associando-se erros de até 2 mm em toda a região central da superfície refletora do espelho.

FIGURA 4.12 – ENSAIO 1: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA



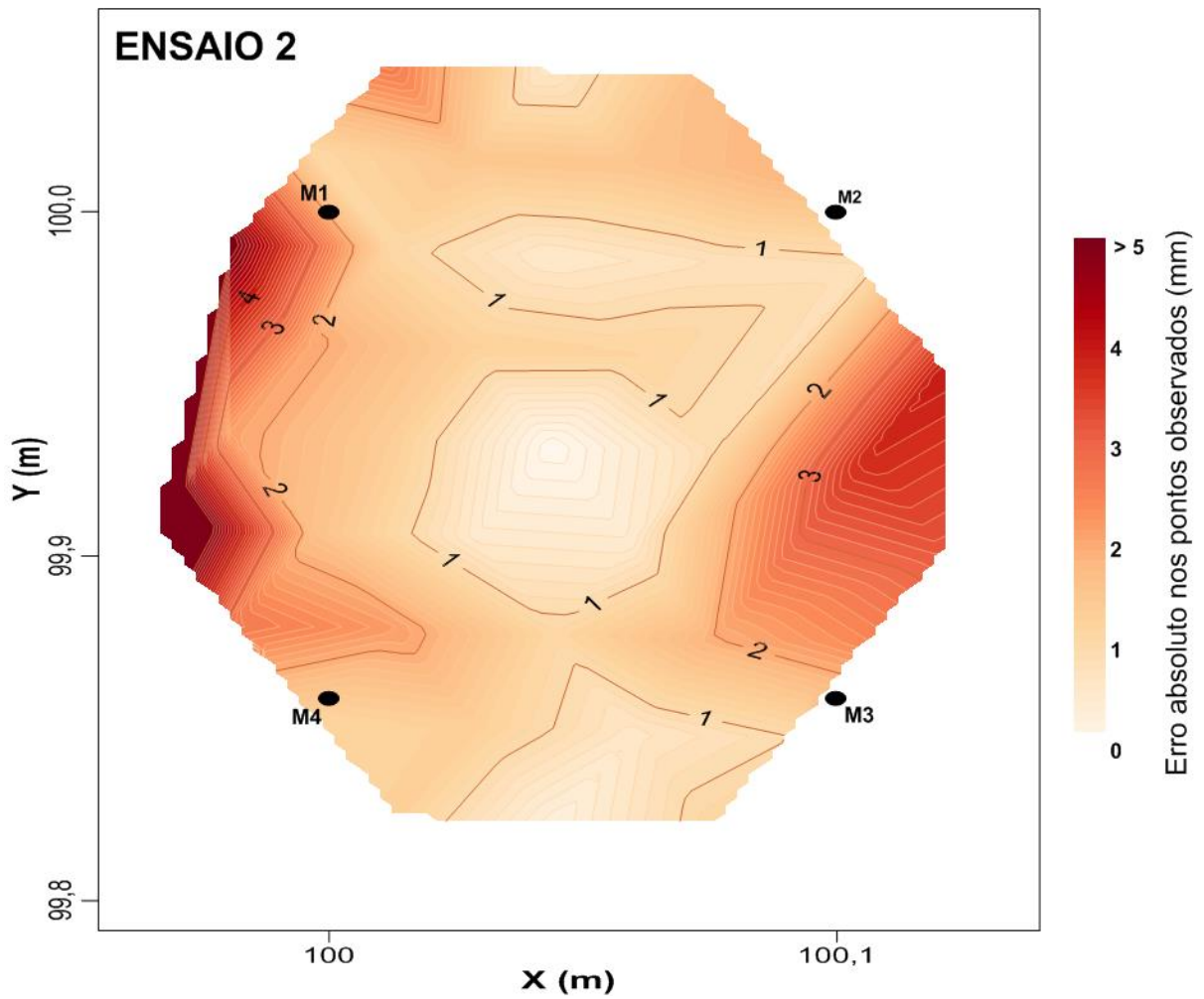
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.13 – ENSAIO 1: VISTA EM PERSPECTIVA



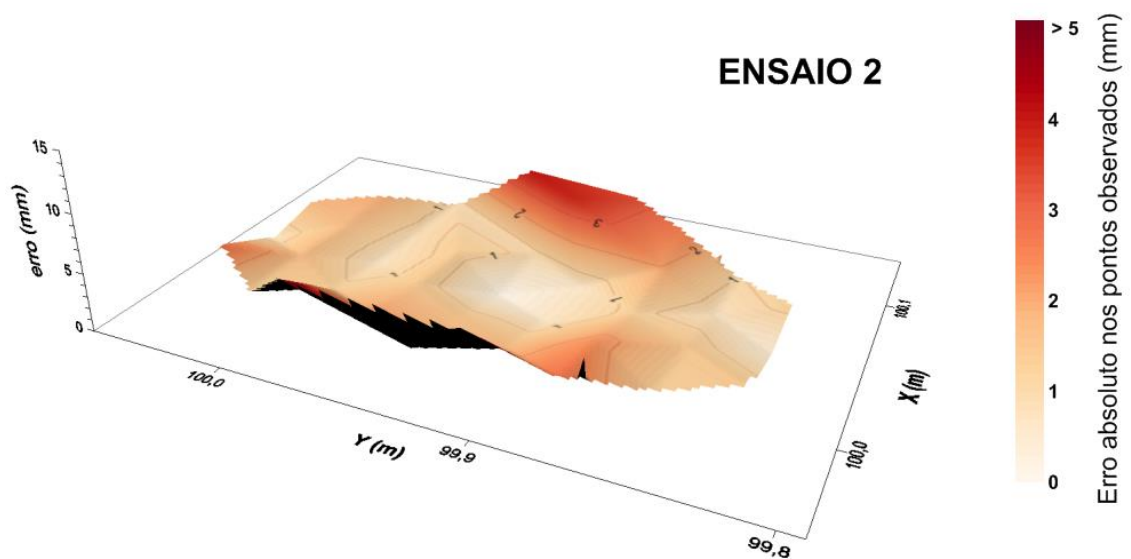
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.14 – ENSAIO 2: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA



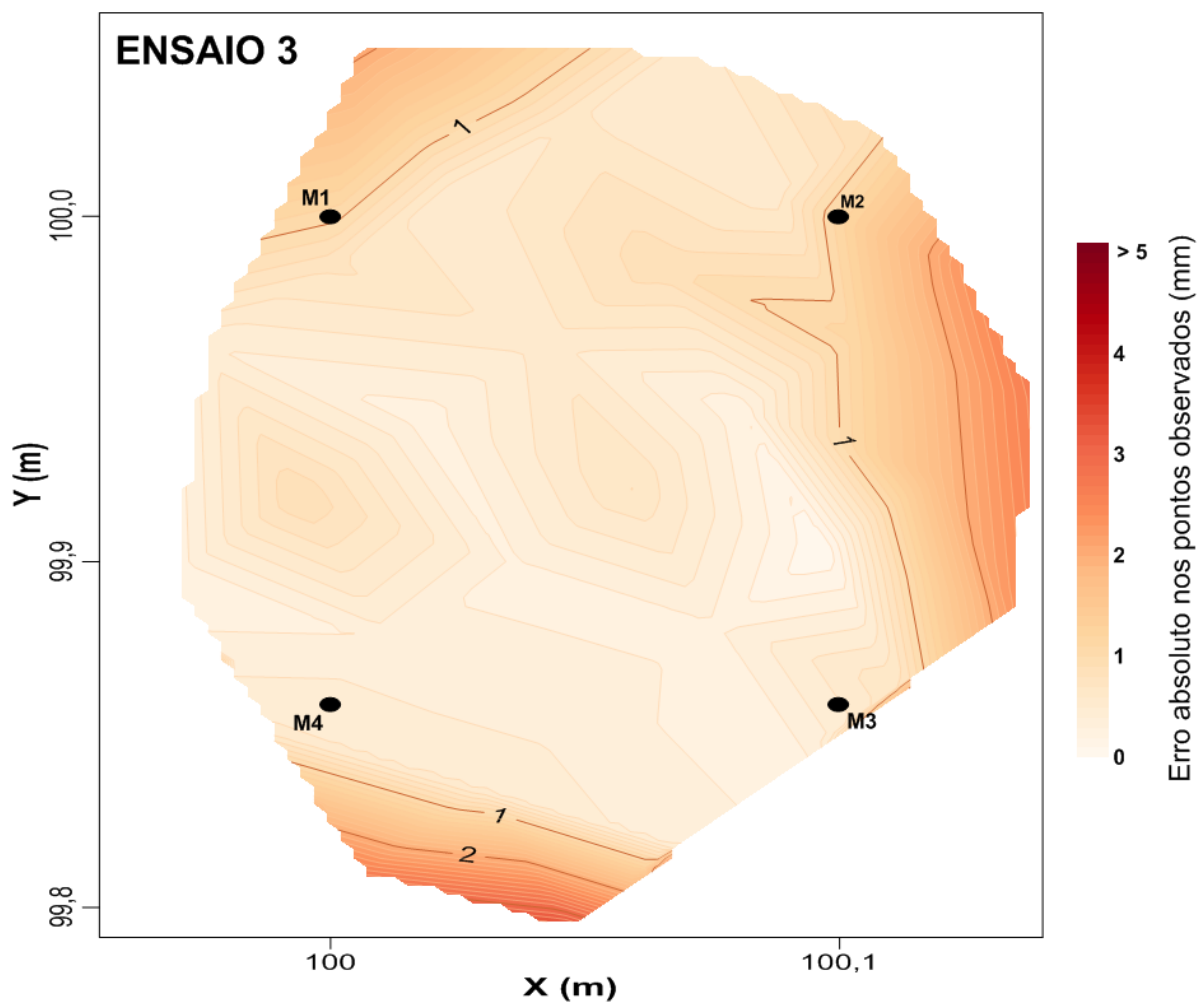
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.15 – ENSAIO 2: VISTA EM PERSPECTIVA



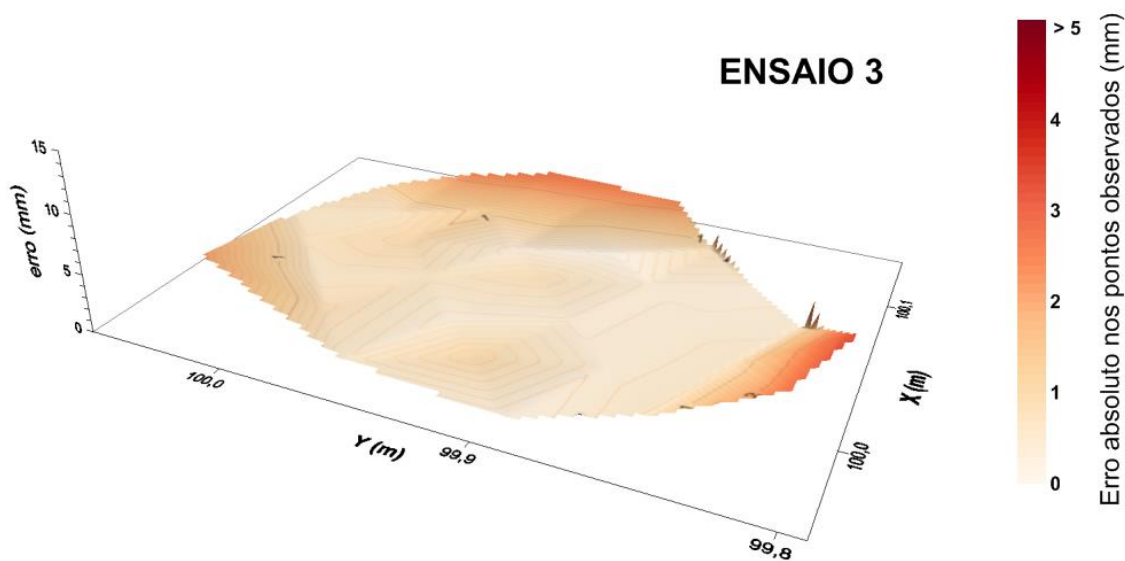
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.16 – ENSAIO 3: ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA



FONTE: O Autor (2017).

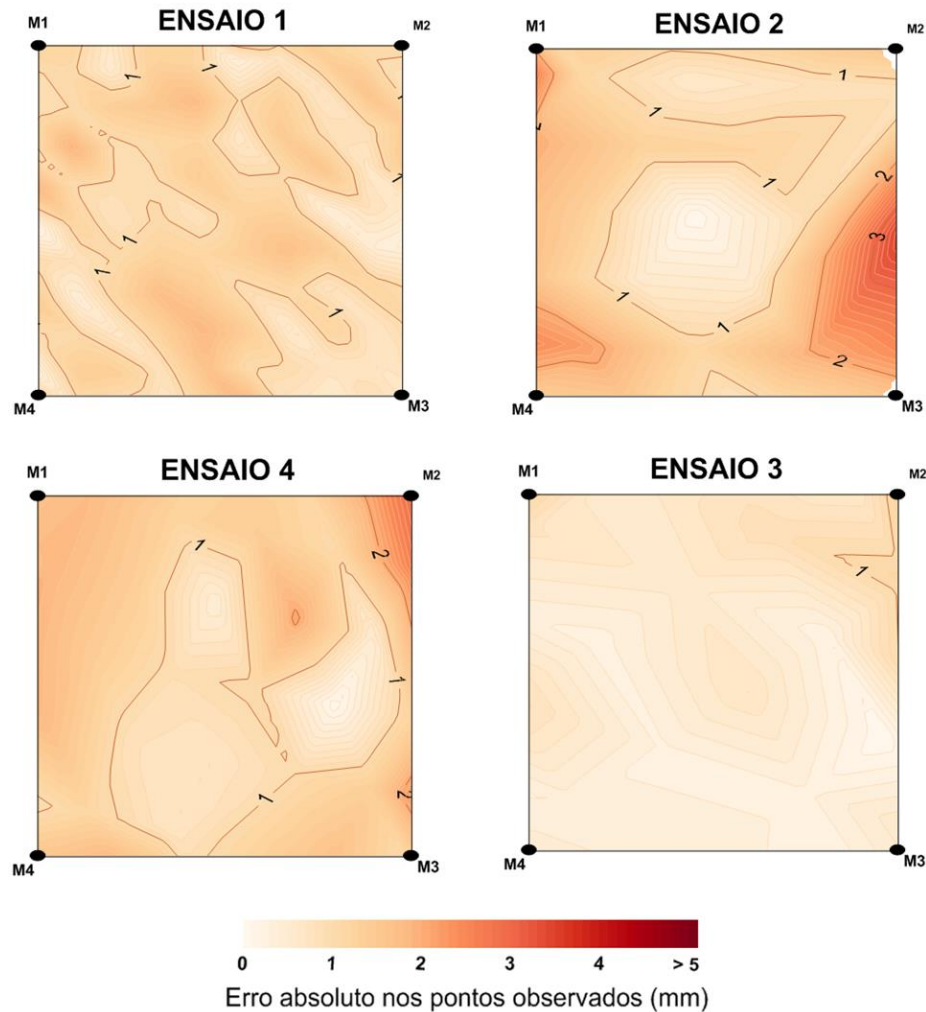
FIGURA 4.17 – ENSAIO 3: VISTA EM PERSPECTIVA



FONTE: O Autor (2017).



FIGURA 4.20 – COMPARAÇÃO DAS REGIÕES CENTRAIS DOS QUATRO ENSAIOS REALIZADOS DELIMITADAS PELAS MARCAS DO ESPELHO



FONTE: O Autor (2017).

Da mesma forma, os ensaios 2, 3 e 4 alcançaram resultados similares (Figuras 4.14 a 4.19). Regiões centrais homogêneas, com erros na ordem de até 2 mm e regiões periféricas associadas à erros absolutos maiores. A Figura 4.20 é uma comparação da região central, delimitada pelas quatro marcas já existentes no espelho, nos quatro ensaios. Nota-se que não há alterações bruscas nos erros absolutos dos pontos observados. As pequenas diferenças observadas se devem por dois fatos: a atitude do espelho e a densidade de pontos de cada. Todavia, a variação da posição e atitude do espelho não influencia diretamente nos resultados.

A mudança na atitude do espelho causa mudanças nas áreas das regiões periféricas que tem maiores erros, pois a pontaria de observação é prejudicada. Nestas regiões periféricas existe também uma reflexão difusa do feixe laser, devido ao feixe laser incidir na superfície refletora e no suporte de apoio simultaneamente,

além de desgastes já existentes no espelho (Figura 4.21). Tal fato afeta a qualidade do sinal de retorno, que por sua vez, implica na degradação da consistência da coordenada já que a configuração para pontaria de alvos não é favorável ao observador.

FIGURA 4.21 – DESGASTE NA REGIÃO PERIFÉRICA DO ESPELHO



FONTE: O Autor (2017).

Durante estes ensaios, percebeu-se ainda, que o desgaste do espelho, causando-lhe pequenas ranhuras (Figura 4.22) também causa problemas em pontarias, já que há uma parcela do sinal incidente na superfície sendo refletida difusamente devido à textura presente enquanto o esperado é que o espelho tenha em sua totalidade uma reflexão especular.

FIGURA 4.22 – DETALHE DE PEQUENAS RANHURAS NA SUPERFÍCIE DO ESPELHO AMPLIADAS COM O SISTEMA DE OBSERVAÇÃO DO INTERFERÔMETRO.



FONTE: O Autor (2017).

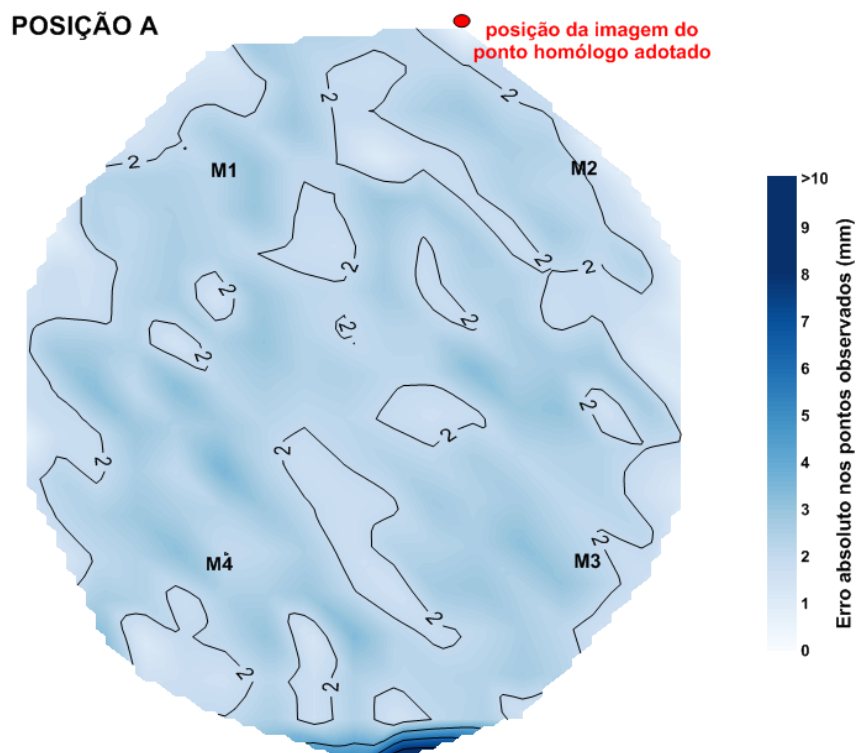
#### 4.2.2 Influência da posição da imagem virtual do ponto homólogo na superfície do espelho

Os dados do ensaio 1 descrito no item anterior 4.2.1 resultaram em 283 pontos distribuídos sobre toda a superfície do espelho. Na solução apresentada nas figuras 4.12 e 4.13 utilizou-se um ponto médio, na região central do espelho. O questionamento levantado é se a posição da imagem do ponto homólogo na superfície tem influência na determinação do plano e, por sua vez, na qualidade posicional dos pontos observados indiretamente. Além disso, afirmações de Gonçalves (2009) ressaltam que melhores resultados são obtidos quando a região do espelho utilizada é reduzida a dois centímetros de diâmetro, logo também será testado se a área útil deve ser minimizada para garantir a consistência da solução proposta.

Para tal escolheu três outros pontos arbitrários do conjunto do ensaio, que definem as posições A, B e C, na parte superior, mediana e inferior da superfície do espelho, respectivamente. Para cada posição, determinou-se um plano para superfície refletora conforme o modelo matemático final. Em seguida, foram geradas representações da superfície similares às do item 4.2.1 onde para cada posição observada no espelho associou-se o erro absoluto total determinado nas coordenadas dos pontos observados pelo espelho.

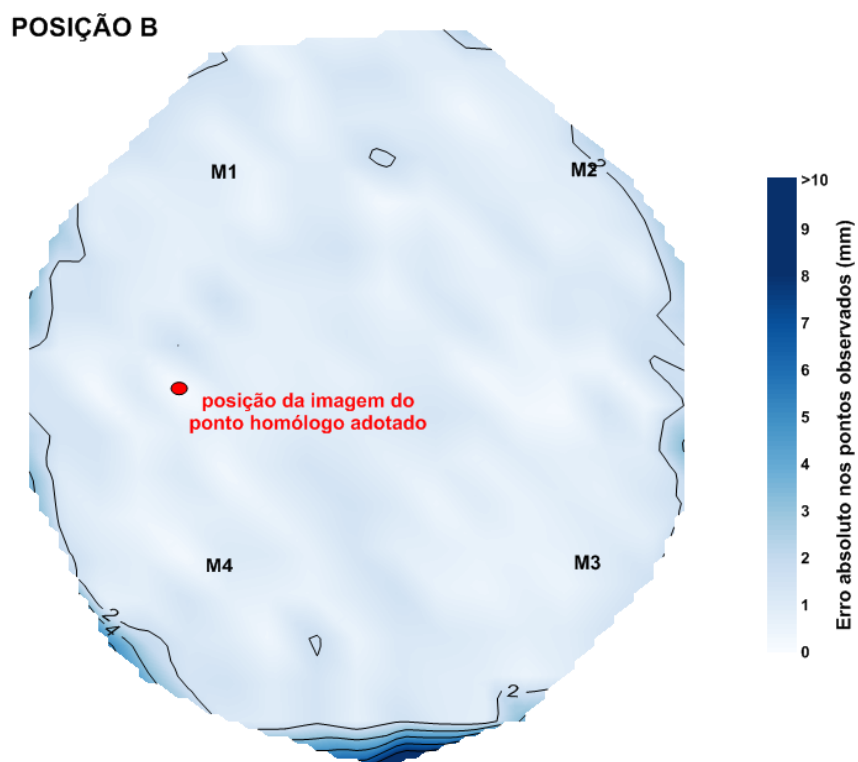
As Figuras 4.23, 4.24 e 4.25 apresentam os resultados encontrados para a adoção das posições A, B e C para a imagem do ponto homólogo utilizado na definição do plano.

FIGURA 4.23 – ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA PARA A POSIÇÃO A DA IMAGEM DO PONTO HOMÓLOGO



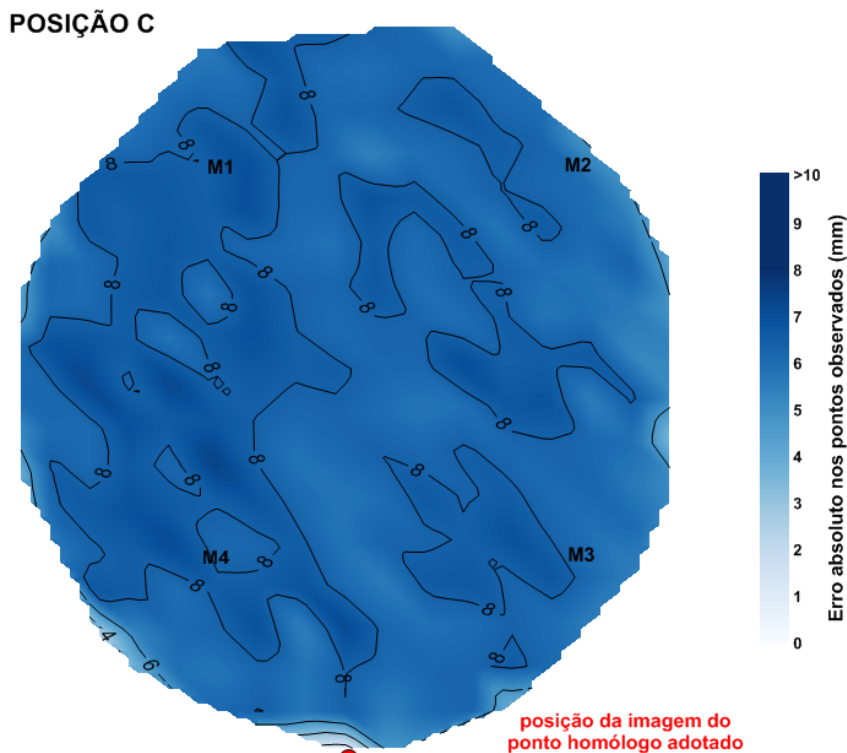
FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.24 – ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA PARA A POSIÇÃO B DA IMAGEM DO PONTO HOMÓLOGO



FONTE: O Autor (2017).

FIGURA 4.25 – ERROS ABSOLUTOS ASSOCIADOS À SUPERFÍCIE REFLETORA PARA A POSIÇÃO C DA IMAGEM DO PONTO HOMÓLOGO



FONTE: O Autor (2017).

A principal constatação é que a posição da imagem do ponto homólogo observado tem influência direta na qualidade posicional do objeto observado indiretamente. Em regiões periféricas, cuja observação da imagem de pontos não é adequada ocorre degradação em todo o conjunto de dados. A posição A, superior, gerou erros médios em torno de 2 mm, magnitude menor que a posição C, inferior, onde os erros associados são em média de 8 mm, para um mesmo conjunto de dados.

Na posição C (Figura 4.25) nota-se região mais clara em torno da posição da imagem do ponto homólogo adotado, pois no desenvolvimento o ponto adotado na determinação do plano é injuncionado na solução, de maneira que o erro associado na sua observação indireta é nulo, fato que influencia a região de entorno. A posição B, mediana (Figura 4.24), é a solução que apresenta melhor resultado do conjunto. Os erros associados na grande região central, área clara, são inferiores a 2 mm.

Assim, verificou-se que a posição da imagem do ponto homólogo deve ocorrer em uma região central do espelho, evitando-se as regiões periféricas de que degradam a qualidade dos resultados. Todavia não há necessidade de restrição da

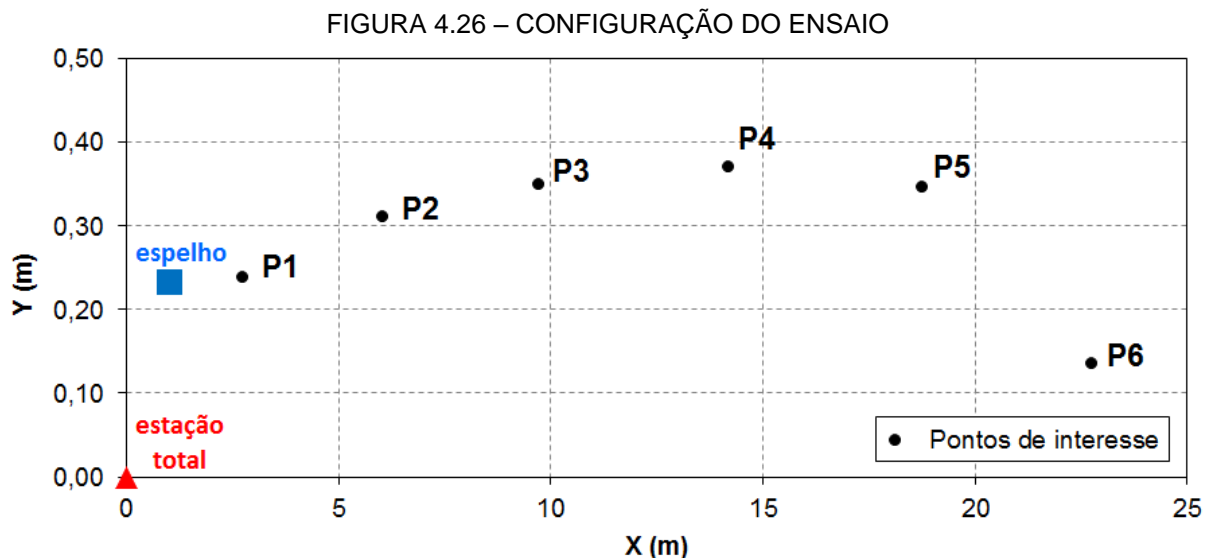
área do espelho, como mencionado em Gonçalves (2009) desde que a imagem do ponto adotado para a modelagem do plano seja bem definido e, se possível, no centro da região de observação indireta dos pontos de interesse.

#### 4.2.3 Influência do afastamento do ponto homólogo

O ensaio realizado no item anterior mostrou que a posição da imagem do ponto homólogo tem influência na solução obtida, logo é suposto que o afastamento do ponto em relação ao espelho e ao ponto de interesse terá também influência na consistência final das coordenadas dos pontos observados.

Assim, para este teste, observou-se direta e indiretamente um conjunto de pontos com afastamentos distintos entre si, e, calcularam-se diversas soluções partindo da adoção de pontos homólogos próximos ao espelho e longínquos, verificando o efeito causado nos demais pontos do conjunto.

O levantamento realizado utilizou-se de seis pontos, denominados de P1 a P6, sequencialmente que foram posicionados distantes do espelho de 2 metros a 23 metros, conforme geometria do ensaio (Figura 4.26).



FONTE: O Autor (2017).

Cinco soluções foram realizadas considerando como homólogos os pontos P2 a P6, individualmente em cada uma. O ponto P1 foi utilizado para verificar o efeito de uma posição de interesse entre o espelho e o ponto homólogo que apesar de

possível, não é a solução usual. Em cada uma das soluções, verificaram-se os erros absolutos totais nas coordenadas dos demais pontos, considerando como referência o valor das coordenadas obtidas por observação direta. Os resultados encontrados são apresentados na Tabela 4.5.

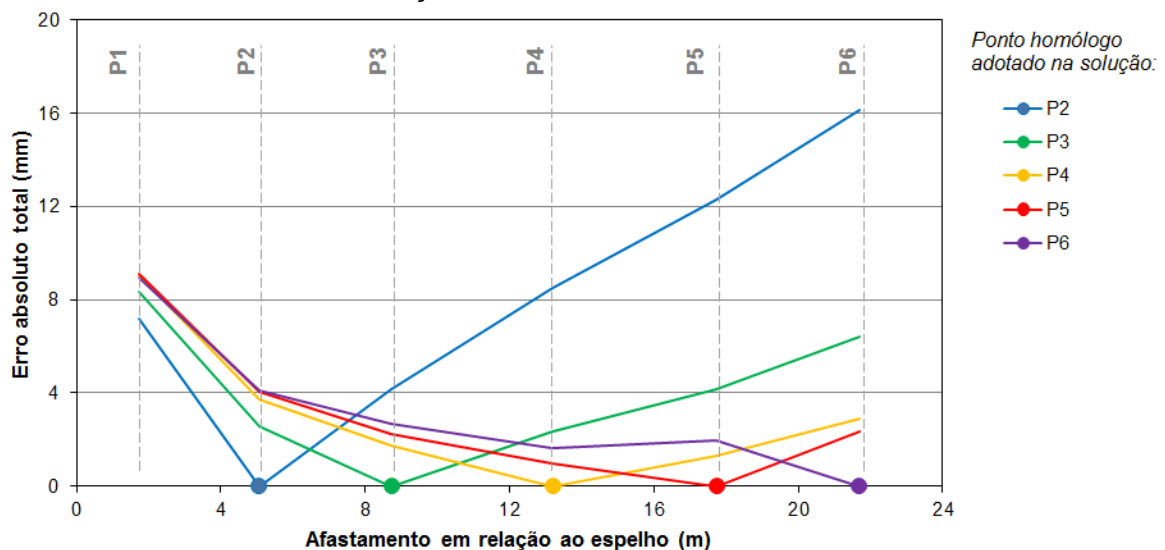
TABELA 4.5 – COMPARAÇÃO DE SOLUÇÕES COM PONTOS HOMÓLOGOS DISTINTOS

Afastamento do espelho	Ponto observado	Erro absoluto total (mm)				
		Ponto homólogo adotado na solução:				
		P2	P3	P4	P5	P6
01,73 m	P1	7,2	8,3	9,0	9,1	8,9
05,06 m	P2	0,0	2,6	3,7	4,0	4,1
08,74 m	P3	4,2	0,0	1,7	2,2	2,7
13,20 m	P4	8,5	2,4	0,0	1,0	1,7
17,44 m	P5	12,3	4,1	1,3	0,0	1,9
21,70 m	P6	16,1	6,4	2,9	2,4	0,0

FONTE: O autor

Os pontos adotados como pontos homólogos são aqueles cujo erro absoluto total é nulo. Nota-se que pontos próximos destes, em cada uma das soluções, têm menores erros que aqueles afastados. A adoção de pontos homólogos próximos do espelho gera soluções onde a degradação da qualidade das coordenadas aumenta significativamente em relação àquelas cujo ponto homólogo está mais afastado. Ao apresentar os resultados na forma gráfica nota-se este efeito (Figura 4.27).

FIGURA 4.27 – SOLUÇÕES POR PONTOS HOMÓLOGOS DISTINTOS



FONTE: O Autor (2017).

Na Figura 4.27 cada uma das séries apresenta a solução de um dos pontos, cuja indicação do ponto é feita no eixo inferior, já que como comentado, o erro é nulo. Nota-se, por exemplo, que o ponto P6, o mais afastado do espelho, tem suas coordenadas melhor definidas em soluções com pontos próximos P4 (amarelo) e P5 (vermelho) do que com pontos afastados de si, como P2 (azul) e P3 (verde). A diferença encontrada é cerca de sete vezes ao se comparar o erro de 16,1 mm obtido na série de P2 e 2,4 mm na série de P5.

Sendo assim, constata-se que o afastamento do ponto interfere também na solução. O ideal é que o ponto homólogo seja materializado o mais afastado do espelho, em direção ao objeto de interesse até onde a observação direta e indireta seja possível, de maneira a minimizar efeitos de erro que são oriundos do posicionamento dos elementos do sistema construído na solução. Claro que, a proximidade do objeto deve ser tal a não inviabilizar a solução proposta.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Por fim, neste capítulo serão apresentadas as conclusões e recomendações acerca da pesquisa desenvolvida.

### 5.1 CONCLUSÕES

A solução de determinação do modelo do plano da superfície do espelho a partir de um ponto homólogo – ponto onde é realizada observação na direta e na imagem virtual formada pela reflexão do espelho – é a sustentação dos resultados satisfatórios encontrados nesta pesquisa. Em suma, através dos experimentos realizados foi possível verificar a viabilidade do modelo proposto para a determinação de coordenadas tridimensionais de pontos ocultos, ou seja, cuja linha de visada direta é obstruída, com precisão associada de ordem milimétrica. Ressalta-se que o foco deste estudo foram cenários industriais ou áreas de difícil acesso, que restringem o uso de outras técnicas nas formas convencionais, por isso, a importância desta abordagem como solução alternativa.

Um dos objetivos iniciais era realizar melhorias na solução proposta por Gonçalves (2009), entretanto no decorrer do desenvolvimento, foi apresentada uma solução nova em relação à da autora supracitada, tendo como características similares apenas os aspectos iniciais no desenvolvimento matemático.

Na proposta inicial, o uso do método dos mínimos quadrados não foi adequado para a determinação da atitude do espelho por causa da geometria e escassez de pontos, combinados com a precisão milimétrica dos mesmos, não suficiente para definir a normal do espelho com precisão de segundos de arco. O aprimoramento da solução, com uso de ponto homólogo foi eficiente para a determinação da atitude plano, onde se inseriu na modelagem as coordenadas de um único ponto observado direta e indiretamente. Ressalvas em relação à adoção do ponto homólogo devem ser impostas, pois ainda não é a solução ótima, já que restringe a amplitude do levantamento, pois sempre se faz necessária a definição deste ponto em campo, no qual se devem realizar medidas diretamente e por reflexão, o que pode não ser trivial em ambientes industriais.

Contudo, com esta alteração da modelagem, no que tange às precisões alcançadas, constatou-se que no posicionamento absoluto as coordenadas dos

pontos foram estimadas com precisões da ordem milimétrica. Já no posicionamento relativo, as diferenças entre coordenadas são inferiores ao milímetro, qualidade esta que viabiliza a metodologia apresentada para o controle e monitoramento da variação temporal entre dois pontos, por exemplo.

Os testes de consistência do modelo tiveram o intuito de investigar os efeitos de alterações de posições do espelho e do ponto homólogo. Primeiro verificou-se que a solidez qualidade do levantamento depende diretamente da escolha do ponto homólogo. Sua posição em relação ao objeto de estudo e ao espelho, bem como a região do espelho onde a observação da sua imagem virtual é realizada, interfere diretamente nos resultados. Sugere-se, então, que a imagem do ponto homólogo seja próxima das demais imagens dos pontos de interesse. E, segundo, constatou-se que o ponto homólogo deve estar o mais próximo possível do objeto de estudo, garantido que o plano definido seja mais representativo da necessidade.

O elemento fundamental para a realização desta pesquisa, o espelho plano, foi testado em diversos momentos e mostrou-se adequado nos quesitos de planicidade e dimensão. Entretanto, o suporte existente não tem controle de pequenos movimentos na atitude do espelho, o que dificultou o posicionamento deste nos ensaios realizados. Com o desenvolvimento desta pesquisa, constata-se que a posição e atitude do espelho não são fatores ponderantes na qualidade dos resultados, contanto que a imagem do ponto homólogo seja na região de observação e, se possível, em região central de sua superfície.

O uso de elipsoide de erros para a análise das incertezas dos resultados permitiu a identificação de comportamentos que não foram modelados pelas elipses de erro. Logo, constatou-se que quando se trabalha com coordenadas tridimensionais de pontos, é necessário que as análises também sejam realizadas com as três dimensões em conjunto, para um entendimento global, que considera as três componentes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) da coordenada de um ponto. Todavia, o entendimento dos elipsoides é adequado para um ambiente computacional dinâmico, com possibilidade de realizar visualizações a partir de diferentes pontos de vista em relação à representação estática bidimensional, como nas figuras que ilustram esta tese.

Enfim, com base nos resultados e na validação do modelo, conclui-se que este estudo apresentou uma nova abordagem que possibilita determinar posições relativas com qualidade da ordem submilimétrica, independente do uso de ponto

homólogo ou não para a determinação do plano da superfície refletora. Assim, o modelo matemático apresentado torna-se uma alternativa para o levantamento problemas de levantamentos em condições desfavoráveis para a aplicação de técnicas topográficas em seus formatos convencionais.

## 5.2 RECOMENDAÇÕES

Complementarmente, algumas perspectivas de estudo e recomendações foram identificadas neste trabalho. Eis que são:

- Investigar novos métodos para a modelagem do plano do espelho e, se possível, propor maneiras para definir sua atitude por medidas indiretas, ou seja, externas ao espelho. Uma alternativa é acoplar um sensor inercial para o controle da atitude do espelho, eliminando a necessidade da existência do ponto homólogo.
- Avaliar a influência do espelho nas medidas eletrônicas de distância, em função das características físicas do sinal refletido e qual o efeito na consistência da medida.
- Realizar estudos *in loco* para analisar as peculiaridades de aplicação em ambiente real. A hipótese é que condições intempéricas, como iluminação e umidade, podem afetar a aplicação do espelho, exigindo adequações nos equipamentos e peças da solução proposta.
- Aperfeiçoar o processamento dos dados com a elaboração de um aplicativo para a leitura dos dados brutos da estação total e dos medidores de condições ambientais (temperatura, umidade e pressão), realização de todo processo de cálculo e de propagação de variâncias, apresentação tabular e gráfica dos resultados. Sugere-se a adoção de linguagem de programação mais robusta, além da implantação de processos de tratamentos de erros e de restrições.
- Aprimorar o suporte do espelho, com dispositivo melhor para transporte e ajuste de posição, que permita movimentos micrométricos, de maneira que não haja contato com a superfície, garantindo maior cuidado no manuseio.

- Realizar estudo investigativo acerca da viabilidade econômica, ambiental, além de questões técnicas, operacionais e logísticas para a aplicação da solução proposta em um projeto de engenharia.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMED, F. A. Range Determination Using Target Images. **Journal of Surveying Engineering**, v. 120, n. 4, p. 135-144, 1995.

ANTONOPOULOS, A. Fixation by Hidden Points Bar from One Theodolite. **Journal of Surveying Engineering**. v. 131, n.4, p.113-117, 2005.

BESHR, A. A. E; KALLOP, M. R. Monitoring Bridge Deformation Using Auto-Correlation Adjustment Technique for Total Station Observations. **Positioning**, v. 4, p.1-7, 2013.

BILLINGS, S. Tips & Tricks: Hidden Point Offset. **The American Surveyor**, n.11, 2008.

CAMPOS, M. B.; TOMMASELLI, A. M. G; MORAES, M. V. A.; MARCATO JUNIOR, J. Análise comparativa dos resultados obtidos pelos métodos de calibração de campo tridimensional e bidimensional. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 21, n.2, p 308-328, 2015.

CAPRA, A.; BERTACCHINI, E.; CASTAGNETTI, C.; RIVOLA, R.; DUBBINI, M. Recent approaches in geodesy and geomatics for structures monitoring. **Rendiconti Lincei**, v. 26, n.1, p. 53-61, 2015.

CARNEIRO, A. F. R. **Possibilidades metodológicas para obtenção de um campo de pontos com vistas ao cálculo de volume de objetos**. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1993.

CHAVES, J. C. **Controle de Deformações em Barragens: Métodos de Monitoramento e Viabilidade de Utilização do GPS**. 197 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Transportes, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1994.

CRUZ, W. **Impacto causado pela evolução dos medidores eletrônicos de distância no processo de calibração**. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010.

CRUZ, W. **Integração de dados de monitoramento de estruturas antrópicas. Estudo de caso: UHE Mauá**. 145 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

CUYPERS, W.; VAN GESTEL, N.; VOET, A.; KRUTH, J. P.; MINGNEAU, J.; BLEYS, P. Optical measurement techniques for mobile and large-scale dimensional metrology **Optics and Lasers in Engineering**, v. 47, p.292-300, 2009.

DELČEV, S.; OGRIZOVIĆ, V.; GUČEVIĆ, J. Geodetic method of the fuel tank form inspection. **Measurement**, v. 45, n. 10, p. 2376-2381, 2012.

DEPARTMENT OF THE ARMY. **Manual 1110-1-1004 Deformation Monitoring and Control Surveying**. U. S. Army Corps Of Engineers Washington, DC, 1994.

EASA, S. M; SHAKER, A. Error Propagation of the Hidden-Point Bar Method: Effect of Bar Geometry. **World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index**, v. 8, n.4, p. 256-262, 2010.

EDMUND OPTICS. **Understanding Surface Quality Specifications based on U.S. Standard MIL-PRF-13830B**. Barrington, 2017. Disponível em <<https://www.edmundoptics.com/resources/application-notes/optics/understanding-surface-quality-specifications/>> Acesso em: 15 de março de 2017.

FAGGION, P. L. **Contribuição para a implantação de um sistema de aferição de miras na UFPR**. 147 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 1993.

FAGGION, P. L. **Obtenção dos elementos de calibração e certificação de medidores eletrônicos de distância em campo e laboratório**. 134 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2001.

FAGGION, P. L.; KOENIG, L. A. V.; SILVA, T. F.; ANDOLFATO, S. H. D. Estudo da aplicação de estações totais para a determinação de deslocamentos relativos em laboratório. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 19, n. 1, p. 34-44, 2013.

FAN, Y.; ZHAOA, B. Coordinate measurement of hidden parts using an attitude angle sensor and a laser rangefinder. **Optical Engineering**, v. 53, n.12, p.1-7, 2014.

GEMAEL, C.; MACHADO, A. M. L.; WANDRESEN, R. **Introdução ao ajustamento de observações – aplicações geodésicas**. 2ed. Curitiba: Editora UFPR, 2015.

GHILANI, C. D. **Adjustment computations – Spatial data analysis**. 5 ed. Hoboken: Wiley, 2010.

GHILANI, C. D.; WOLF, P. R. **Elementary surveying: an introduction to geomatics**. 13 ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2012.

GRAÇA, N. L. S. S. **Validação da determinação de deslocamentos relativos em obras de engenharia obtidos com técnica geodésica e medidores triortogonais de junta**. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

GONÇALVES, M. L. A. M. **Determinação indireta de coordenadas topográficas utilizando estação total e espelho**. 131 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas CPGCG, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.

HABIB, A.; LARI, Z.; KWAK, E.; AL-DURGHAM, K. Automated detection, localization, and identification of signalized targets and their impact on digital camera calibration. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 65, n. 4, p.785-803, 2013.

HECHT, E. **Optics**. 4 ed. Edinburgh Gate: Pearson Education Limited, 2002.

HIRNOVEM, R. H. **Adjustment by least squares in geodesy and photogrammetry**. New York: F. Ungar Publishing Co., 1971.

KAHMEN, H.; FAIG, W. **Surveying**. Berlin: Walter de Gruyter, 1988.

LEICA GEOSYSTEMS. **Leica Geosystems Metrology Products – Catalog Version 1.2**. 2014. Disponível em: <[http://www.leica-geosystems.com/downloads123/m1/metrology/general/brochures/Leica%20Geosystems%20Metrology%20Products\\_catalog\\_en.pdf](http://www.leica-geosystems.com/downloads123/m1/metrology/general/brochures/Leica%20Geosystems%20Metrology%20Products_catalog_en.pdf)> Acesso em 02 de setembro de 2014.

MAGALHÃES, R. C. A. **Sistema para erro de medição de planicidade**. 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MAKAROV, D. **Industrial Metrology Product Development: Best Practices and Success Factors**. Dissertação (Mestrado em Sistemas de Comunicação) - KHT Royal Institute of Technology, Estocolmo, Suécia, 2013.

NADAL, C. A. **Interseção óptica tridimensional aplicada à engenharia de precisão**. 116 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2000.

NEVES, R. V. **Processamento e análise de levantamentos geodésicos aplicado ao monitoramento de estruturas civis**. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica – ótica, relatividade e física quântica**. v 4. São Paulo: Edgard Blucher, 1998.

OGUNDARE, J. O. **Precision Surveying: The Principles and Geomatics Practice**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 2015.

PERCEPTRON. **Bridge Coordinate Measuring Machines**. Plymouth, 2017. Disponível em: <<http://perceptron.com/products/dimensional-inspection/bridge-coordinate-measuring-machines/>> Acesso em 15 de março de 2017.

PINTO, S. F. **Posicionamento topográfico de alvos visualizados através de espelho plano, estimando precisão**. 89 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

RADOVANOVIC, R. S.; TESKEY, W. F. A novel method of high precision height determination for industrial applications. **11th FIG Symposium on Deformation Measurements**. Santorini, 2003.

SANTOS, D. R.; DAL POZ, A. P.; KHOSHELHAM, K. Indirect georeferencing of terrestrial laser scanning data using control lines. **The Photogrammetric Record**, v.28, n. 143, p. 276-292, 2013.

SCHERER, M. How to optimize the recording of geometrical data and image data for the purpose of architectural surveying. **International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing**, v. 35, n. B5, p. 228-231, 2004.

SCHNABEL, R.; WAHL, R.; KLEIN, R. Efficient RANSAC for Point-Cloud Shape Detection. **Computer Graphics forum**, v. 26, n. 2, p.214-226, 2007.

SIGUEL, A. R. **Monitoramento da barragem da usina hidrelétrica Mauá utilizando irradiação tridimensional**. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

SZOSTAK-CHRZANOWSKI, A.; MASSIÉRA, M.; CHRZANOWSKI, A.; HILL, C. Use of geodetic monitoring surveys in verifying design parameters of large earthen dams at the stage of filling the reservoir. **10th international symposium on deformation measurement**, Orange CA, 2001.