

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WILLIAN CARLOS LESINHOVSKI

ANÁLISE DE VON NEUMANN DE UM MODELO
DISPERSIVO DE ONDAS INTERNAS

CURITIBA
2017

WILLIAN CARLOS LESINHOVSKI

ANÁLISE DE VON NEUMANN DE UM MODELO
DISPERSIVO DE ONDAS INTERNAS

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática,
Setor de Ciências Exatas, Universidade
Federal do Paraná, como requisito
parcial à obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ailín Ruiz de
Zárate Fábregas

CURITIBA
2017

L629a

Lesiniovski, Willian Carlos

Análise de von Neumann de um modelo dispersivo de ondas internas /
Willian Carlos Lesiniovski. – Curitiba, 2017.

71 f. : il. color. ; 30 cm.

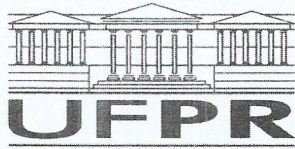
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Ailín Ruiz de Zárate Fábregas.

Bibliografia: p. 71.

1. Método espectral. 2. Derivação numérica. 3. Transformadas de
Fourier. I. Universidade Federal do Paraná. II. Fábregas, Ailín Ruiz de
Zárate III. Título.

CDD: 518.2



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **WILLIAN CARLOS LESINHOVSKI** intitulada: **ANÁLISE DE VON NEUMANN DE UM MODELO DISPERSIVO PARA ONDAS INTERNAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2017.

AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR

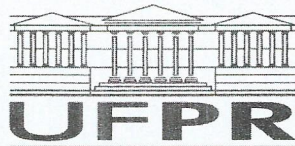
Avaliador Externo (UFPR)

DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO

Avaliador Externo (UFRJ)

JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI

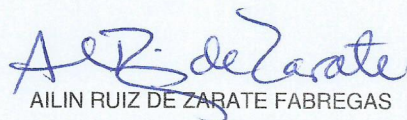
Avaliador Externo (UFPR)



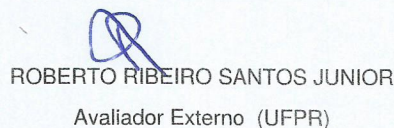
ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

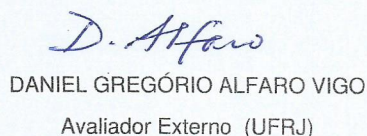
No dia vinte e dois de Fevereiro de dois mil e dezessete às 14:00 horas, na sala LAMIND, Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 100 - Jardim das Américas, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **WILLIAN CARLOS LESINHOVSKI** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada **ANÁLISE DE VON NEUMANN DE UM MODELO DISPERSIVO PARA ONDAS INTERNAS**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS (UFPR), ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR (UFPR), DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO (UFRJ), JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

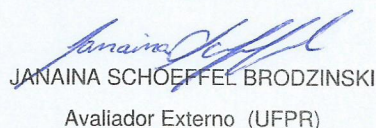
Curitiba, 22 de Fevereiro de 2017.


AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR
Avaliador Externo (UFPR)


DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO
Avaliador Externo (UFRJ)


JANAINA SCHOEFFEL BRODZINSKI
Avaliador Externo (UFPR)

Agradecimentos

Aos meus pais, Carlos e Eliane, pelo incentivo, apoio e educação que sempre me deram.

A minha namorada, Jéssica, que está sempre ao meu lado.

A minha orientadora, Ailín Ruíz de Zárate Fábregas, por aceitar o convite para me orientar e por me ajudar no desenvolvimento deste trabalho.

A Capes, pelo auxílio financeiro recebido através da bolsa de estudos.

Resumo

Neste trabalho é realizado um estudo sobre a estabilidade de um esquema numérico para um sistema do tipo Boussinesq para ondas internas. Através da Análise de von Neumann obteve-se três condições suficientes para que o método numérico proposto para a versão linearizada do sistema seja estável. Tais condições foram corroboradas por experimentos computacionais e serviram de base para a implementação de um esquema numérico para a versão fracamente não linear do sistema que também se mostrou estável nos testes.

Palavras-chave: Método espectral. Derivação numérica. Transformadas de Fourier.

Abstract

In this work a stability study of a numerical scheme that approximates a Boussinesq type system for internal waves is addressed. Three sufficient conditions to ensure stability of the linearized numerical approximation are obtained by performing a von Neumann analysis. Said conditions are validated by computational simulations and serve as the basis for the implementation of a numerical scheme for the weakly nonlinear system which also remains stable in the tests.

Key words: Spectral method. Numerical differentiation. Fourier Transforms.

Lista de Figuras

1.1	Configuração de duas camadas com tampa rígida e fundo plano.	20
3.1	Ilustração do método de linhas.	29
3.2	Região de estabilidade do método de Runge-Kutta de quarta ordem.	33
4.1	$ \gamma(\theta) $, $ \gamma(\theta) /\sqrt{ \theta }$ e $ \gamma(\theta) / \theta $ para cada discretização espacial com $\Delta\theta = \pi/40$	40
4.2	Δt_σ , Δt_μ e Δt_c em função de Δx	41
4.3	Δt máximo para cada discretização espacial em função de Δx	43
5.1	Modos de Fourier da onda viajante da ILW ($ \hat{\eta}(\cdot, 0) $) comparados com os modos da onda viajante aproximada do sistema (1.3), obtida após aplicar o método de Newton modificado. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $N = 512$ e $\Delta x = 0.0123$	48
5.2	Uso do método de Newton para obter uma onda viajante para o sistema (1.3) com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$	49
5.3	Uso do método de Newton para obter uma onda viajante para o sistema (1.3) com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$	49
5.4	Uso do método de Newton para obter uma onda viajante para o sistema (1.3) com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$	50
5.5	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da ILW.	53
5.6	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da rILW.	53
5.7	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da KdV.	54
5.8	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da Gaussiana.	54
5.9	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da ILW.	55
5.10	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da rILW.	55
5.11	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da KdV.	56
5.12	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da Gaussiana.	56
5.13	$\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $\Delta x = 0.0123$ e $\Delta t = 0.0990$	57
5.14	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da ILW.	58
5.15	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da rILW.	58
5.16	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da KdV.	59
5.17	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da Gaussiana.	59
5.18	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da ILW.	60
5.19	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da rILW.	60
5.20	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da KdV.	61
5.21	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da Gaussiana.	61
5.22	$\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $\Delta x = 0.0123$ e $\Delta t = 0.0990$	62

A.1 Árvore dos programas utilizados na implementação do método. 65

Sumário

1	Introdução	19
2	Revisão de Análise de Fourier	23
2.1	Série de Fourier	23
2.2	Transformada de Fourier periódica	24
2.3	Transformada de Fourier discreta	24
2.4	Resultados do sistema linearizado	26
3	Discretização do modelo linearizado	29
3.1	Discretização do operador de derivação espacial de primeira ordem	30
3.1.1	Diferenças Finitas	31
3.1.2	B-Spline	31
3.1.3	Diferenciação Espectral	32
3.2	Discretização de ψ e obtenção da matriz P	32
3.3	Discretização temporal	33
4	Análise de von Neumann	35
5	Implementação computacional	45
5.1	Perfil inicial da onda	45
5.2	Velocidade do sistema e direção de propagação da onda	49
5.3	Esquema numérico para o sistema fracamente não linear	51
5.4	Testes computacionais	52
5.4.1	Sistema linearizado	52
5.4.2	Sistema fracamente não linear	57
6	Conclusões	63
A	Programas utilizados	65
	Referências	71

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem por objeto de estudo um modelo reduzido para ondas internas obtido a partir das equações de Euler para duas camadas de fluidos. Ondas internas existem devido à estratificação do oceano pela diferença de densidade da água. A estratificação pode ser causada pela variação de salinidade ou por variações de temperatura, dentre as causas mais comuns. Este tema é de importância para a segurança das operações em plataformas de produção de petróleo *offshore*, onde as ondas internas podem interagir com as estruturas submersas no fundo do mar e a topografia, comprometendo as operações de recuperação de petróleo e gás. Ondas internas também ocorrem na atmosfera, onde correntes de ar interagem com a orografia, por exemplo montanhas ou o perfil de uma região urbana, o que é relevante no estudo da dispersão de poluentes.

Modelos bastante eficientes para o estudo da propagação de ondas internas foram obtidos a partir das Equações de Euler usando análise assintótica [3, 4]. Para modelar esse fenômeno, consideramos dois fluidos invíscidos, imiscíveis, incompressíveis e irrotacionais de densidades diferentes limitados por um fundo plano e uma tampa rígida como mostra a figura 1.1. A densidade do fluido da camada superior é ρ_1 e a densidade do fluido da camada inferior é ρ_2 . Para garantir uma configuração estável assumimos que $\rho_2 > \rho_1 > 0$. A camada superior é delgada se comparada à longitude de onda característica (L), ou seja, h_1 é muito menor do que L ($0 < h_1 \ll L$, regime de águas rasas).

A amplitude característica da perturbação da interface é denotada por $a > 0$. Se ela é pequena quando comparada com h_1 estamos no regime fracamente não linear de propagação. Se ela for da ordem de h_1 estamos no regime fortemente não linear. A camada inferior é profunda sem ter profundidade infinita, ou seja, h_2 é comparável com L ($0 < h_2 = O(L)$, regime de águas intermediárias). O sistema de coordenadas (x, z) está situado à altura da interface em repouso. Uma onda interna se desenvolve na interface entre os dois fluidos.

O modelo fortemente não linear apresentado em [13], que descreve a evolução ao longo do tempo t da onda interna descrita por $\eta(x, t)$ junto com a média da velocidade horizontal da camada superior $u(x, t)$ é dado pelo sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = [(1 - \eta)u]_x, \\ u_t + u u_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [(1 - \eta)u]_{xt} + \\ + \frac{\beta}{3(1-\eta)} \left((1 - \eta)^3 (u_{xt} + u u_{xx} - u_x u_x) \right)_x + \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [\eta \mathcal{T}_\delta [(1 - \eta)u]_x]_{xt} + \\ + \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\eta ((1 - \eta)u)_{xt} + \frac{1}{2} ((1 - \eta)u)_x^2 \right)_x + \frac{\beta}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\mathcal{T}_\delta [((1 - \eta)u)_x]^2 \right)_x + O(\beta^{3/2}), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

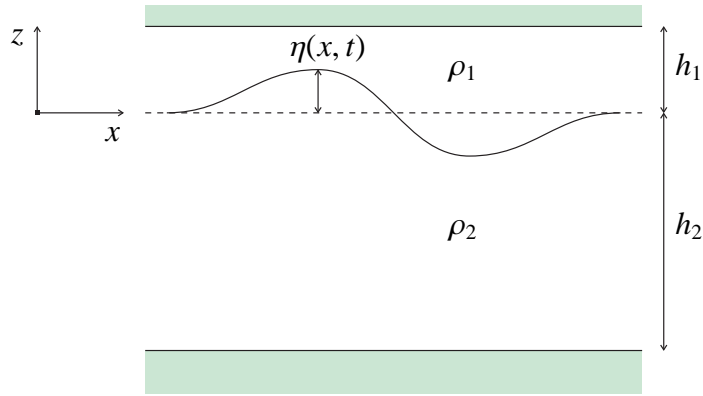


Figura 1.1: Configuração de duas camadas com tampa rígida e fundo plano.

onde $\delta = h_2/L$, $\beta = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2$ é o parâmetro de dispersão e o domínio é periódico na variável x . O operador pseudodiferencial \mathcal{T}_δ é conhecido como transformada de Hilbert na faixa e é definido no domínio da frequência como

$$\widehat{\mathcal{T}_\delta[f]}(k) = i \coth(\delta k) \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^*. \quad (1.2)$$

O operador \mathcal{T}_δ vem de resolver uma equação de Laplace que surge durante a dedução de (1.1). Esta pode ser encontrada com detalhes em [12].

Considerando o regime de propagação de ondas fracamente não linear, introduzem-se os escalamentos $\eta = \alpha \eta^*$, $u = \alpha u^*$, onde $\alpha = a/h_1$ é pequeno e da mesma ordem de β . Como resultado, ignorando os asteriscos, a partir do sistema (1.1) obtém-se o seguinte sistema de tipo Boussinesq,

$$\begin{cases} \eta_t = [(1 - \alpha\eta)u]_x, \\ u_t + \alpha u u_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \eta_x = \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}, \end{cases}$$

de ordem $\beta^{\frac{3}{2}}$. Após a normalização da velocidade adimensional $c_0^2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)$ pelo escalamento

$$\eta = \eta^\dagger, \quad u = c_0 u^\dagger, \quad t = \frac{t^\dagger}{c_0},$$

e ignorando os \dagger , obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Note que, no caso particular em que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ este sistema tem a forma

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ u_t = \eta_x. \end{cases} \quad (1.4)$$

Que é uma outra forma de apresentar a equação da onda.

Podemos comparar (1.3) com o modelo obtido em [4] que não tem o termo de terceira ordem $(\beta/3)u_{xxt}$,

$$\begin{cases} \eta_t = [(1 - \alpha\eta)u]_x, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u]_{xt}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Essa diferença ocorre pois (1.3) é de ordem mais alta do que (1.5) conforme vemos em [13]. Estudos do modelo de menor ordem podem ser encontrados em [12] e [9].

O sistema (1.3) já foi estudado desde o ponto de vista teórico no que diz respeito à boa colocação em espaços de Sobolev em [2], mas carece de estudos acerca de implementação numérica. O objetivo deste trabalho é desenvolver uma implementação numérica para este sistema e analisar as propriedades de estabilidade e convergência do esquema numérico escolhido, visto que já existem estudos semelhantes para o sistema (1.5).

A primeira parte deste trabalho consiste em estudar a estabilidade numérica para uma discretização do sistema (1.6) que é a versão linearizada do sistema (1.3). Para tal vamos seguir de perto [9] onde um estudo semelhante é feito para a versão linearizada do sistema (1.5).

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ u_t - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u]_{xt} - \frac{\beta}{3} u_{xxt} = \eta_x. \end{cases} \quad (1.6)$$

Na segunda parte do trabalho faremos a implementação do sistema (1.3) tendo como base os resultados obtidos para o sistema (1.6). Vamos realizar testes computacionais a fim de comprovar a eficiência do método utilizando ondas viajantes como condição inicial.

A dissertação está organizada do seguinte modo. No Capítulo 2 são apresentados alguns resultados relevantes sobre séries de Fourier, Transformada Discreta de Fourier (TDF) e o estudo teórico do sistema (1.3) feito em [2]. A discretização do sistema (1.6) e a análise de estabilidade desta são feitas nos Capítulos 3 e 4, respectivamente. No Capítulo 5 são realizados testes computacionais da implementação numérica do sistema (1.3).

Capítulo 2

Revisão de Análise de Fourier

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e resultados relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Algumas demonstrações foram omitidas mas são dadas referências de onde encontrá-las.

2.1 Série de Fourier

Antes de falar sobre Séries de Fourier devemos definir o que é uma função periódica.

Definição 2.1.1. Um função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita periódica de período $l > 0$ se $f(x + l) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Em muitos casos é conveniente escrever uma função periódica como um somatório de exponenciais complexas, ou seja, escrevê-la como uma Série de Fourier na forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(\mathbf{i}k\pi x/l), \quad (2.1)$$

onde os coeficientes c_k são determinados por

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-\mathbf{i}k\pi x/l) dx. \quad (2.2)$$

É comum utilizar a notação $c_k = \hat{f}(k)$ para os coeficientes da Série de Fourier. A próxima definição será muito útil para trabalhar com o operador \mathcal{T}_δ .

Definição 2.1.2. A convolução periódica de duas funções f e g é definida como

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x - y)dy.$$

Existem muitas propriedades da Série de Fourier, mas apresentaremos aqui apenas as que utilizaremos neste trabalho:

$$(\hat{af})(k) = a\hat{f}(k), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\widehat{(f + g)}(k) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k),$$

$$\widehat{(f')}(k) = (\mathbf{i}k\pi/l)\hat{f}(k),$$

$$(f * g)^\wedge(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas em [5].

2.2 Transformada de Fourier periódica

Diferente da Série de Fourier, a Transformada de Fourier Periódica (TFP) é um operador que leva uma função em uma sequência. Antes de apresentá-la vamos definir os seguintes espaços.

Definição 2.2.1. O espaço das funções periódicas de quadrado integrável é definido como

$$L_{per}^2[-l, l] := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ periódica de período } 2l \text{ tal que existe } \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx\}.$$

Definição 2.2.2. O espaço das sequências de quadrado somável é definido como

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ tal que } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \text{ é convergente}\}.$$

Podemos agora definir a TFP.

Definição 2.2.3. A Transformada de Fourier Periódica é o operador linear

$$\begin{aligned} \wedge : L_{per}^2[-l, l] &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

tal que

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-ik\pi x/l) dx.$$

A Transformada de Fourier Periódica inversa é definida a seguir:

Definição 2.2.4. A Transformada de Fourier Periódica inversa é um operador linear

$$\begin{aligned} \vee : l^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L_{per}^2[-l, l] \\ \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto f \end{aligned}$$

tal que

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(ik\pi x/l).$$

Os coeficientes de Fourier $\hat{f}(k)$ da função f , imagem da TFP inversa, coincidem com os termos α_k da sequência $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

2.3 Transformada de Fourier discreta

A TFP tem propriedades interessantes, mas precisa de um tratamento diferente para ser usada computacionalmente. Primeiramente, vamos definir uma malha de pontos em $[0, 2l]$. Seja N um número par e $\Delta x = 2l/N$, os pontos x_j da malha são definidos como $x_j = j\Delta x$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Ao usarmos a regra do trapézio para aproximar $\hat{f}(k)$ obtemos a definição da Transformada de Fourier Discreta (TFD).

Definição 2.3.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função periódica de período $2l$ e $f_j = f(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. A TFD é definida como

$$\hat{f}_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j \exp(-ik\pi x_j/l), \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

A inversa da TFD é dada por

$$f_j = \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_k w_N^{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

com

$$w_N = \exp(i2\pi/N).$$

A TFD é usada do seguinte modo: aplicamos a TFD na função em questão, usamos a propriedade da TFP necessária e retornamos ao domínio periódico com a TFD inversa. Deste modo é possível realizar diferenciação e convolução, por exemplo.

Podemos escrever a TFD em uma versão matricial através da matriz de Fourier F dada por

$$F_{m,j} = \exp(-2\pi i(m - N/2)j/N), \quad 1 < m, j < N$$

Denotando $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_N]^T$ e $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_{-N/2+1}, \dots, \hat{f}_{N/2}]^T$ temos

$$\hat{\mathbf{f}} = \Delta x F \mathbf{f} \text{ e } \mathbf{f} = \frac{1}{2l} \overline{F}^T \hat{\mathbf{f}}.$$

O uso da TFD será escrito da forma $\mathbf{g} = \frac{1}{N} \overline{F}^T D F \mathbf{f}$, onde D é uma matriz diagonal obtida com ajuda das propriedades da TFP usada. Por exemplo, pela propriedade da derivada $(\hat{f}')_k = (ik\pi/l)\hat{f}_k$ temos a matriz diagonal $D = \text{diag}(ik\pi/l)$, $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$.

Algo interessante a destacar é que a matriz de Fourier diagonaliza matrizes Toeplitz circulares.

Definição 2.3.2. Dados os valores c_1, c_2, \dots, c_N , uma matriz Toeplitz circular C é definida como

$$C_{i,j} = \begin{cases} c_{1+j-i}, & i \leq j, \\ c_{N+1+j-i}, & i > j. \end{cases} \quad (2.3)$$

Se C é uma matriz Toeplitz circular, então existe uma matriz diagonal D tal que $C = \frac{1}{N} \overline{F}^T D F$. Este fato é provado em [7]. O teorema a seguir dá uma fórmula simples de cálculo dos autovalores de uma matriz Toeplitz circular.

Teorema 2.3.3. Os autovalores de uma matriz Toeplitz circular C definida pelos valores c_1, c_2, \dots, c_N são dados por

$$\lambda_k(C) = \sum_{m=1}^N c_m \exp(i(m-1)\theta_k), \quad \text{onde } \theta_k = \frac{2\pi k}{N}.$$

Demonstração: Considere $k = l - N/2$, $1 \leq l \leq N$ e $\mathbf{w} = C\mathbf{v}$, onde \mathbf{v} é a l -ésima coluna de \overline{F}^T . A j -ésima entrada de \mathbf{w} é dada por

$$\begin{aligned} w_j &= \sum_{n=1}^N C_{j,n} \exp(\mathbf{i}n\theta_k) = \left(\sum_{n=1}^N C_{j,n} \exp(\mathbf{i}(n-j)\theta_k) \right) \exp(\mathbf{i}j\theta_k) = \\ &= \left(\sum_{n=1}^N C_{j,n} \exp(\mathbf{i}(n-j)\theta_k) \right) v_j. \end{aligned}$$

Se provarmos que a expressão que multiplica v_j é uma constante que não depende de j teremos a fórmula desejada.

$$\sum_{n=1}^N C_{j,n} \exp(\mathbf{i}(n-j)\theta_k) = \sum_{n=1}^{j-1} c_{N+1+n-j} \exp(\mathbf{i}(n-j)\theta_k) + \sum_{n=j}^N c_{1+n-j} \exp(\mathbf{i}(n-j)\theta_k).$$

Fazendo a mudança de índices $n-j = m - N - 1$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_k(C) &= \sum_{m=N-j+2}^N c_m \exp(\mathbf{i}(m-N-1)\theta_k) + \sum_{m=1}^{N-j+1} c_m \exp(\mathbf{i}(m-1)\theta_k) \\ &= \sum_{m=N-j+2}^N c_m \exp(\mathbf{i}(m-1)\theta_k) + \sum_{m=1}^{N-j+1} c_m \exp(\mathbf{i}(m-1)\theta_k) \\ &= \sum_{m=1}^N c_m \exp(\mathbf{i}(m-1)\theta_k), \end{aligned}$$

e obtemos a fórmula desejada. ■

2.4 Resultados do sistema linearizado

Utilizando a TFP e suas propriedades é possível encontrar uma solução para o sistema linearizado (1.6) que é dada pela expressão a seguir. A dedução desta solução pode ser encontrada com maiores detalhes em [2].

$$\begin{bmatrix} \eta(x, t) \\ u(x, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathbf{i}\frac{k\pi x}{l}\right) G\left(t, \frac{k\pi}{l}\right) \begin{bmatrix} \hat{\eta}(k, 0) \\ \hat{u}(k, 0) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} G(t, \kappa) &= \begin{bmatrix} \cos(\kappa v(\kappa)t) & \mathbf{i}v^{-1}(\kappa) \sin(\kappa v(\kappa)t) \\ \mathbf{i}v(\kappa) \sin(\kappa v(\kappa)t) & \cos(\kappa v(\kappa)t) \end{bmatrix}, \\ v(\kappa) &= \left(1 + \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta} \phi(\kappa\delta) + \frac{\beta}{3} \kappa^2 \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

e

$$\phi(\kappa) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ \kappa \coth \kappa, & \kappa \neq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Além disso, é provado em [2] que a solução do sistema (1.6) é única e depende continuamente dos dados iniciais, isto é, o sistema linearizado é bem posto em espaços de Sobolev periódicos. Antes de enunciar os resultados que garantem a boa colocação precisamos definir alguns espaços.

Definição 2.4.1. Dizemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço $C_{per}^\infty = C_{per}^\infty[-l, l]$ se esta é infinitamente diferenciável e periódica de período $2l$.

Definição 2.4.2. O espaço de Sobolev periódico $H_{per}^s = H_{per}^s[-l, l]$, $s > 0$ é o fecho do conjunto das funções $f \in C_{per}^\infty$ tais que

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + (k\pi/l)^2)^s |\hat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Definição 2.4.3. O produto cartesiano de espaços de Sobolev é definido como $H^{(s,r)} = H_{per}^s \times H_{per}^r$ com a norma $\| [f_1, f_2]^T \|_{s,r}^2 = \|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_r^2$.

Com o teorema enunciado a seguir, cuja demonstração encontra-se em [2], é possível provar que a solução do sistema (1.6) é única e que depende continuamente dos dados iniciais. Assim, junto com (2.4) temos que o sistema linearizado é bem posto.

Teorema 2.4.4. *Sejam $\eta(\cdot, 0) \in H^s$ e $u(\cdot, 0) \in H^{s+1}$, com $s > 0$, as condições iniciais do sistema (1.6). Existe uma constante positiva C que só depende de s tal que*

$$\| [\eta(\cdot, t), u(\cdot, t)]^T \|_{s,s+1} \leq C \| [\eta(\cdot, 0), u(\cdot, 0)]^T \|_{s,s+1}, \quad \forall t > 0.$$

onde $\eta(x, t)$ e $u(x, t)$ são soluções do sistema (1.6).

Como vamos trabalhar com a discretização do sistema (1.6), vamos considerar H_N^s que é a versão discreta de H^s consistente no espaço N -dimensional \mathbb{C}^N munido da norma

$$\|f\|_{N,s}^2 = 2\pi \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} (1 + (k\pi/l)^2)^s |\hat{f}(k)|^2.$$

Capítulo 3

Discretização do modelo linearizado

Neste capítulo vamos apresentar a discretização do sistema (1.6). Esta é feita mediante o método de linhas, que consiste em realizar a discretização espacial de um sistema de EDPs transformando este em um sistema de EDOs com um número maior de equações, o qual será resolvido com um método numérico adequado. Neste caso, o sistema (1.6) com duas EDPs será transformado em um sistema com $2N$ EDOs, onde $N \in \mathbb{N}$ é o número de pontos na malha espacial.

Como o problema é periódico, isto é, u e η são funções periódicas de período $2l$ em x , vamos trabalhar apenas no intervalo $[0, 2l]$. Sejam $N \in \mathbb{N}$ um número par e $\Delta x = 2l/N$, os pontos da malha espacial são $x_j = j\Delta x$, $j = 1, \dots, N$. O ponto $x_0 = 0$ não é utilizado por conta da periodicidade de u e η ($u(x_0) = u(x_N)$ e $\eta(x_0) = \eta(x_N)$).

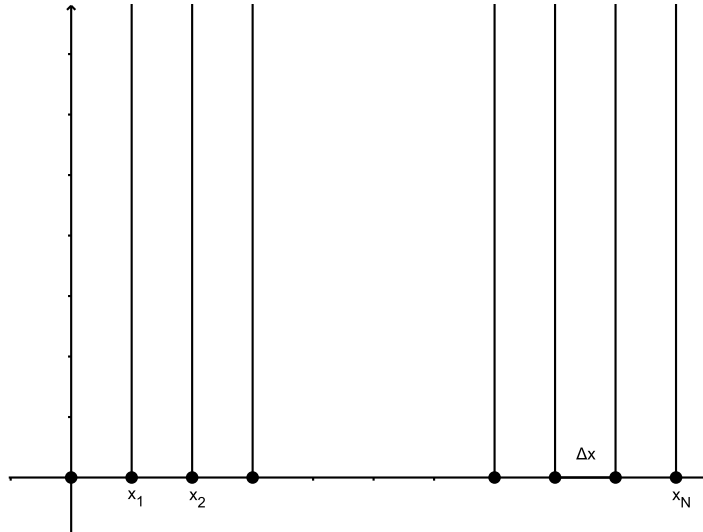


Figura 3.1: Ilustração do método de linhas.

Agora, no lugar de u e η , funções nas variáveis x e t , teremos as funções vetoriais em t $\mathbf{u}(t) = [u_1, \dots, u_N]^T$ e $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1, \dots, \eta_N]^T$ cujas entradas são funções na variável t , isto é, $u_j = u(x_j, t)$ e $\eta_j = \eta(x_j, t)$, $j = 1, \dots, N$.

Para facilitar a discretização das derivadas espaciais, considere a função auxiliar ψ definida por

$$\psi = u - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_{\delta, x}[u] - \frac{\beta}{3} u_{xx}. \quad (3.1)$$

De forma análoga temos a função vetorial $\boldsymbol{\psi}(t)$ onde $\psi_j = \psi(x_j, t)$. O nosso objetivo é determinar matrizes C e P tais que $u_x \approx C\mathbf{u}$, $\eta_x \approx C\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\psi} \approx P\mathbf{u}$ na malha, de modo

que, se considerarmos a igualdade nestas aproximações, obtemos o sistema de $2N$ EDOs

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_t = C\mathbf{u}, \\ P\mathbf{u}_t = C\boldsymbol{\eta}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Desde que P seja invertível, podemos apresentar este como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C \\ P^{-1}C & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Observação 3.0.5. O subíndice t nas funções vetoriais denota a derivada de cada componente dessas com relação a t .

Na Seção 3.1 vamos apresentar três possibilidades de escolha para a matriz C e na Seção 3.2 iremos obter a matriz P utilizando propriedades da série de Fourier. Na Seção 3.3 será feita a discretização temporal do sistema semi-discretizado (3.2) com o método de Runge-Kutta clássico de quarta ordem.

3.1 Discretização do operador de derivação espacial de primeira ordem

Diversas maneiras de discretizar derivadas estão descritas na literatura de forma a termos $u_x \approx C\mathbf{u}$, mas vamos aqui impor algumas restrições sobre a matriz C para reproduzir as propriedades conservativa e periódica do modelo (1.4). Assim, C deve ser real, anti-simétrica ($C^T = -C$) e Toeplitz circulante conforme é discutido em [10].

Como C é Toeplitz circulante, ela é completamente determinada pelos valores c_1, \dots, c_N que compõem a sua primeira coluna. Conforme visto no Capítulo 2, C é diagonalizada pela matriz de Fourier e seus autovalores tem a forma

$$\lambda_k(C) = \sum_{m=1}^N c_m e^{i(m-1)\theta_k}, \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad -N/2 + 1 \leq k \leq N/2. \quad (3.4)$$

Como C é anti-simétrica vale $C_{ij} = -C_{ji}$, usando a definição de matriz Toeplitz circulante (2.3), suponto $i > j$, vale $c_{i-j+1} = -c_{j-i+N+1}$, em particular, para $i = N$

$$c_{1+j} = -c_{N+1-j}. \quad (3.5)$$

Tomando $j = N/2$ na igualdade acima e notando que $c_1 = -c_1$ obtemos

$$c_1 = c_{N/2+1} = 0. \quad (3.6)$$

Outra consequência de C ser anti-simétrica é que seus autovalores são imaginários puros. Podemos então escrever (3.4) como

$$\lambda_k(C) = \mathbf{i} \sum_{m=0}^{N-1} c_{1+m} \operatorname{sen}(m\theta_k) = \mathbf{i} \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \operatorname{sen}(m\theta_k) + \mathbf{i} \sum_{m=N/2+1}^{N-1} c_{1+m} \operatorname{sen}(m\theta_k). \quad (3.7)$$

Aplicando (3.5) e (3.6) temos

$$\lambda_k(C) = \mathbf{i} \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \operatorname{sen}(m\theta_k) - \mathbf{i} \sum_{m=N/2+1}^{N-1} c_{N+1-m} \operatorname{sen}(m\theta_k). \quad (3.8)$$

Faremos agora uma mudança de índice no segundo somatório, $N + 1 - m = 1 + j$, ou seja, $m = N - j$. Os extremos do somatório serão $m = N - 1 \rightarrow j = 1$, $m = N/2 + 1 \rightarrow j = N/2 - 1$. Logo,

$$\lambda_k(C) = \mathbf{i} \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \text{sen}(m\theta_k) - \mathbf{i} \sum_{j=1}^{N/2-1} c_{1+j} \text{sen}((N-j)\theta_k). \quad (3.9)$$

Note que $\text{sen}((N-j)\theta_k) = -\text{sen}(j\theta_k)$. Assim, concluímos que

$$\lambda_k(C) = \mathbf{i} \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \text{sen}(m\theta_k) + \mathbf{i} \sum_{j=1}^{N/2-1} c_{1+j} \text{sen}(j\theta_k) = 2\mathbf{i} \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \text{sen}(m\theta_k). \quad (3.10)$$

Considerando a função auxiliar γ definida para $\theta \in [-\pi, \pi]$ por

$$\gamma(\theta) = 2\Delta x \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \sin(m\theta), \quad (3.11)$$

temos que

$$\lambda_k(C) = \frac{\mathbf{i}}{\Delta x} \gamma(\theta_k), \quad -N/2 + 1 \leq k \leq N/2, \quad (3.12)$$

onde para cada uma das discretizações descritas a seguir teremos uma função γ diferente.

3.1.1 Diferenças Finitas

Podemos usar a aproximação de quarta ordem e cinco pontos para aproximar as derivadas espaciais [10], cuja fórmula é dada por

$$u_x(x_j) \approx (C\mathbf{u})_j = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{2}{3}(u_{j+1} - u_{j-1}) + \frac{1}{12}(u_{j-2} - u_{j+2}) \right). \quad (3.13)$$

A matriz C é denotada por C^{FD} e os coeficientes $c_i = c_i^{FD}$ são definidos como

$$c_2^{FD} = -c_N^{FD} = \frac{2}{3\Delta x}, \quad c_3^{FD} = -c_{N-1}^{FD} = -\frac{1}{12\Delta x}, \quad c_i = 0 \text{ caso contrário.}$$

Assim obtemos a expressão

$$\gamma^{FD}(\theta) = 2\Delta x \left(\frac{2}{3\Delta x} \text{sen } \theta - \frac{1}{12\Delta x} \text{sen } 2\theta \right) = \frac{4}{3} \text{sen } \theta - \frac{1}{6} \text{sen } 2\theta. \quad (3.14)$$

3.1.2 B-Spline

Utilizando a discretização da diferenciação por B-Spline linear por partes como em [10], a matriz C é dada por $C^{BS} = Q^{-1}B$, onde B, Q são duas matrizes Toeplitz circulantes cujos coeficientes seguem a relação

$$c_2^B = -c_N^B = 3, \quad c_i^B = 0 \text{ caso contrário,} \\ c_1^Q = 4\Delta x, \quad c_2^Q = c_N^Q = \Delta x, \quad c_i^Q = 0 \text{ caso contrário.}$$

Conforme [9], γ^{BS} tem a forma

$$\gamma^{BS}(\theta) = \frac{3}{2} \left(\frac{\text{sen}(\theta)}{1 + \cos(\theta)/2} \right).$$

3.1.3 Diferenciação Espectral

A diferenciação espectral usa a transformada de Fourier discreta e propriedades da série de Fourier para aproximar a derivada em x . Segundo [8] os coeficientes de C^{SP} são definidos como

$$c_1^{SP} = 0, \quad c_i^{SP} = \frac{(-1)^{N+1-i}\pi}{2l} \cot\left(\frac{\theta_{N+1-i}}{2}\right), \quad i \neq 1.$$

Em [9] a função γ^{SP} é calculada utilizando o fato de que $\lambda_k(C^{SP}) = i\pi k/l$, $-N/2 + 1 \leq k \leq N/2 - 1$, e $\lambda_0(C^{SP}) = 0$ tem multiplicidade dois [8]

$$\gamma^{SP}(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \theta = \pm\pi. \end{cases}$$

A melhor escolha para o nosso modelo vai depender das propriedades de estabilidade que serão discutidas no Capítulo 4.

3.2 Discretização de ψ e obtenção da matriz \mathbf{P}

A discretização de ψ será feita por meio de séries de Fourier e transformada de Fourier discreta, aproveitando algumas propriedades dessas bem como o fato de que

$$(\hat{\mathcal{T}}_{\delta,x}[f])(k) = \frac{1}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) \hat{f}(k).$$

Logo, podemos escrever $\hat{\psi}(k)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k) &= \hat{u}(k) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} (\hat{\mathcal{T}}_{\delta,x}[u])(k) - \frac{\beta}{3} \hat{u}_{xx}(k) \\ &= \hat{u}(k) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) \hat{u}(k) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\beta}{3} \hat{u}(k) \\ &= \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\beta}{3}\right) \hat{u}(k) \\ &= v(k\pi/l)^{-2} \hat{u}(k), \end{aligned}$$

onde

$$v(\kappa) = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(\kappa\delta) + \kappa^2 \frac{\beta}{3}\right)^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Temos então

$$\psi = \frac{1}{2l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\pi/l)^{-2} \hat{u}(k) \exp\left(i \frac{k\pi}{l} x\right). \quad (3.16)$$

Truncando o somatório acima e substituindo \hat{u} pela sua aproximação via TFD \hat{u} , obtemos

$$\psi_j = \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} v(k)^{-2} \hat{u}(k) \exp\left(i \frac{2\pi k j}{N}\right), \quad 1 \leq j \leq N, \quad (3.17)$$

ou seja,

$$\hat{\psi}(k) = v(k\pi/l)^{-2} \hat{u}(k). \quad (3.18)$$

A igualdade (3.18) pode ser escrita matricialmente como

$$\hat{\psi} = \hat{P} \hat{u}, \quad \text{onde} \quad \hat{P} = \text{diag}\left(v(k\pi/l)^{-2}\right), \quad k = -N/2 + 1, \dots, N/2. \quad (3.19)$$

Utilizando os resultados da transformada de Fourier discreta apresentados no Capítulo 2 e (3.19) temos

$$\psi = \frac{1}{2l} \overline{F}^T \hat{\psi} = \frac{1}{2l} \overline{F}^T \hat{P} \hat{u} = \frac{1}{2l} \overline{F}^T \hat{P} \Delta x F \mathbf{u} = \frac{1}{N} \overline{F}^T \hat{P} F \mathbf{u} = P \mathbf{u}, \quad (3.20)$$

onde,

$$\lambda_k(P) = v(k\pi/l)^{-2} = \lambda_k(\hat{P}), \quad k = -N/2 + 1, \dots, N/2.$$

Com a expressão (3.20) a discretização espacial está completa, e o sistema pode ser escrito conforme (3.2).

3.3 Discretização temporal

A discretização temporal utilizará o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) assim como em [9]. Vamos considerar a malha $t_n = n\Delta t$, onde Δt é o passo de integração do método RK4, de modo que $0 = t_0 < t_1 < \dots < T$.

O método de linhas funciona bem se os autovalores λ_k do operador do sistema semi-discretizado linear, escalados por Δt , estão na região de estabilidade R do método usado para a integração temporal, isto é, $z = \lambda_k \Delta t \in R$, [8]. A escolha do método RK4 se justifica pois a região de estabilidade deste (figura 3.2) é boa para autovalores imaginários puros como os do operador D , conforme prova o seguinte lema.

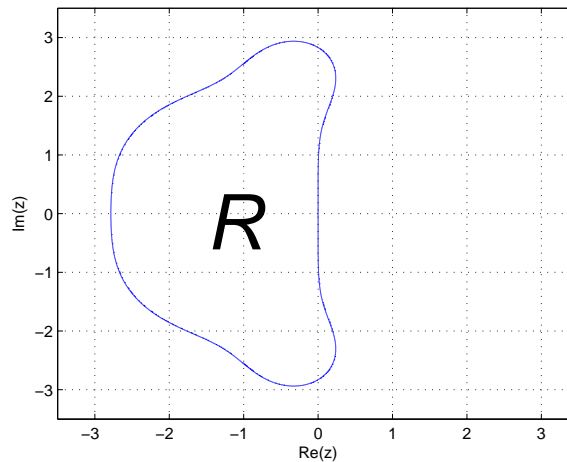


Figura 3.2: Região de estabilidade do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Lema 3.3.1. Os autovalores da matriz D do sistema (3.3) são imaginários puros e são dados por $\lambda_k(D) = \pm\lambda_k(C)/\sqrt{\lambda_k(P)}$.

Demonstração: Sabemos que C e P , conseqüentemente P^{-1} , são diagonalizadas pela matriz de Fourier, portanto, compartilham a mesma base de autovetores. Suponhamos que $[\mathbf{v}_k^T \alpha \mathbf{v}_k^T]^T$ é um autovetor de D , sendo \mathbf{v}_k a k -ésima coluna de F e α uma constante a ser determinada. temos então

$$\begin{aligned} D \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \alpha \mathbf{v}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C \\ P^{-1}C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \alpha \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha C \mathbf{v}_k \\ P^{-1}C \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha \lambda_k(C) \mathbf{v}_k \\ (\lambda_k(C)/\lambda_k(P)) \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \lambda_k(C) \mathbf{v}_k \\ (\lambda_k(C)/\alpha \lambda_k(P)) \alpha \mathbf{v}_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para que $[\mathbf{v}_k^T \alpha \mathbf{v}_k^T]^T$ seja autovetor de D deve ocorrer

$$\alpha \lambda_k(C) = \frac{\lambda_k(C)}{\alpha \lambda_k(P)} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\lambda_k(P)} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_k(P)}},$$

desde que $\lambda_k(C) \neq 0$. Se $\lambda_k(C) = 0$ temos que $\lambda_k(D) = 0$ independente da escolha de $\alpha \neq 0$. Logo, os autovalores de D são

$$\lambda_k(D) = \pm \lambda_k(C)/\sqrt{\lambda_k(P)}. \quad (3.21)$$

Perceba que $\lambda_k(D)$ é imaginário puro pois $\lambda_k(C)$ é imaginário puro e $\lambda_k(P)$ é real positivo. ■

Conforme vemos em [1], ao aplicar RK4 em (3.3) este terá a forma

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{n+1} \\ \mathbf{u}^{n+1} \end{bmatrix} = \left(I + \Delta t D + \frac{\Delta t^2}{2} D^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} D^3 + \frac{\Delta t^4}{4!} D^4 \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^n \\ \mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde $\boldsymbol{\eta}^n$ e \mathbf{u}^n são as aproximações calculadas pelo método para $\boldsymbol{\eta}(t_n)$ e $\mathbf{u}(t_n)$.

Note que C e P^{-1} comutam porque ambas têm a mesma base de autovetores, assim as potências de D são

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{bmatrix} P^{-1}C^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-1}C^2 \end{bmatrix}, \quad D^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P^{-1}C^3 \\ P^{-2}C^3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e} \\ D^4 &= \begin{bmatrix} P^{-2}C^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-2}C^4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Devido a isto, escrevemos (3.22) como

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{n+1} = \left[I + \frac{\Delta t^2}{2} P^{-1}C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} P^{-2}C^4 \right] \boldsymbol{\eta}^n + \left[\Delta t C + \frac{\Delta t^3}{3!} P^{-1}C^3 \right] \mathbf{u}^n, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \left[\Delta t P^{-1}C + \frac{\Delta t^3}{3!} P^{-2}C^3 \right] \boldsymbol{\eta}^n + \left[I + \frac{\Delta t^2}{2} P^{-1}C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} P^{-2}C^4 \right] \mathbf{u}^n. \end{cases} \quad (3.23)$$

Observação 3.3.2. Se C e P^{-1} não comutassem, o lema 3.3.1 não seria possível, assim como escrever o sistema (3.22) conforme (3.23).

Desta forma finalizamos este capítulo sobre a discretização do sistema (1.6).

Capítulo 4

Análise de von Neumann

Conforme apresentado no Capítulo 1, o sistema (1.6) é bem posto. Neste capítulo vamos mostrar que a versão discreta do sistema (1.6), o esquema numérico (3.23) preserva a boa colocação dentro de algumas condições, isto é, temos estabilidade numérica.

A estabilidade numérica é fundamental para garantir que pequenos erros cometidos nas discretizações não sejam amplificados [8], caso contrário, a solução numérica não seria uma boa aproximação da solução analítica. Para obter a estabilidade numérica devemos escolher adequadamente Δx e Δt , mais precisamente, usando uma proporção entre estes. Além do número de Courant $\sigma = \Delta t/\Delta x$, tradicionalmente usado na análise de von Neumann, usaremos também $\mu = \Delta t/\sqrt{\Delta x}$ devido a certas características do problema que serão apresentadas neste capítulo. Também é possível garantir a estabilidade quando Δt é menor do que uma constante como veremos a seguir. Na sequência as três possibilidades serão comparadas.

Procedendo como em [9] e utilizando a notação de [1], ao transformarmos (3.23) para o espaço de Fourier temos, para $-N/2 + 1 \leq k \leq N/2$,

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta}_k^{n+1} \\ \hat{u}_k^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta_k, \sigma, \Delta x) & \mathbf{i}v^{-1}(\frac{\theta_k}{\Delta x})s(\theta_k, \sigma, \Delta x) \\ \mathbf{i}v(\frac{\theta_k}{\Delta x})s(\theta_k, \sigma, \Delta x) & c(\theta_k, \sigma, \Delta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\eta}_k^n \\ \hat{u}_k^n \end{bmatrix} = G_k \begin{bmatrix} \hat{\eta}_k^n \\ \hat{u}_k^n \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} c(\theta, \sigma, \Delta x) &= 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 \left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) \gamma^2(\theta) + \frac{1}{4!}\sigma^4 v^4 \left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) \gamma^4(\theta), \\ s(\theta, \sigma, \Delta x) &= \sigma v \left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) \gamma(\theta) - \frac{1}{3!}\sigma^3 v^3 \left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) \gamma^3(\theta). \end{aligned}$$

Usando (4.1) recursivamente obtemos $[\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T = G_k^n [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T$. Assim como a solução (2.4) do sistema (1.6) é obtida via superposição de ondas, vamos agora encontrar soluções de (3.23) que tenham a forma

$$\begin{bmatrix} \eta_j^n \\ u_j^n \end{bmatrix} = (g_k^\pm)^n \exp(\mathbf{i}2\pi k j/N) \begin{bmatrix} a_k^\pm \\ b_k^\pm \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde g_k^\pm são os autovalores da matriz G_k e $[a_k, b_k]^T \neq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} \det(G_k - g_k I) = 0 &\Rightarrow (c(\theta_k, \sigma, \Delta x) - g_k)^2 + (s(\theta_k, \sigma, \Delta x))^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow c(\theta_k, \sigma, \Delta x) - g_k = \pm \mathbf{i}s(\theta_k, \sigma, \Delta x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g_k^\pm = g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x) = c(\theta_k, \sigma, \Delta x) \mp \mathbf{i}s(\theta_k, \sigma, \Delta x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Escrevendo g_k^\pm na forma polar temos $g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x) = |g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x)| \exp(\mp i \varphi(\theta, \sigma, \Delta x))$ e de modo análogo ao feito em [9], (4.2) pode ser apresentada como

$$\begin{bmatrix} \eta_j^n \\ u_j^n \end{bmatrix} = \exp \left\{ i \left(\frac{k\pi}{l} x_j \mp \omega_k t_n \right) \right\} \begin{bmatrix} a_k^\pm \\ b_k^\pm \end{bmatrix}, \quad \omega_k = \frac{1}{\Delta t} \varphi(\theta, \sigma, \Delta x). \quad (4.4)$$

Assim como em [9], definimos a velocidade de fase numérica como

$$v_k^\pm = -\frac{\varphi(\theta_k, \sigma, \Delta x)}{\sigma \theta_k}, \quad k = -N/2 + 1, \dots, N/2,$$

e a velocidade de fase numérica relativa por

$$v_{\text{rel}} = \frac{\varphi(\theta, \sigma, \Delta x)}{\sigma \theta v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)}, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (4.5)$$

Para garantir a estabilidade do sistema (3.23), devemos mostrar que, sob determinadas condições, existe uma constante positiva C_s que não depende de n nem de Δt tal que vale a desigualdade

$$\|[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T\|_{N,s,s+1} \leq C_s \|[\boldsymbol{\eta}^0, \mathbf{u}^0]^T\|_{N,s,s+1}, \quad \forall n \Delta t \leq T. \quad (4.6)$$

A proposição 4.0.4 garante que se $|g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x)| \leq 1$, então (4.6) vale. Para provar esta proposição precisamos do lema a seguir. A demonstração deste foi omitida, mas pode ser encontrada em [2].

Lema 4.0.3. *Existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que $\forall y \in \mathbb{R}$*

$$c_1 \leq \frac{1 + ay \coth(\delta y) + by^2}{1 + y^2} \leq c_2. \quad (4.7)$$

Se considerarmos $a = (\rho_2/\rho_1)\sqrt{\beta}$ e $b = \beta/3$ podemos concluir que

$$c_1 \leq \frac{1}{v(y)^2(1 + y^2)} \leq c_2. \quad (4.8)$$

Proposição 4.0.4 (Condição de von Neumann). *Sejam $\beta > 0$ e $s \geq 0$. Uma condição suficiente para que o sistema (3.23) seja estável em $H_N^{(s,s+1)}$ é*

$$|g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x)| \leq 1, \quad (4.9)$$

para todo $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Demonstração: Seja $[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T$ a solução do sistema (3.23). Temos que

$$\begin{aligned} \|[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T\|_{N,s,s+1}^2 &= \|\boldsymbol{\eta}^n\|_{N,s}^2 + \|\mathbf{u}^n\|_{N,s+1}^2 = \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} [1 + (k\pi/l)^2]^s |\hat{\eta}_k^n|^2 + \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} [1 + (k\pi/l)^2]^{s+1} |\hat{u}_k^n|^2 = \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} [1 + (k\pi/l)^2]^s (|\hat{\eta}_k^n|^2 + [1 + (k\pi/l)^2] |\hat{u}_k^n|^2) \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} [1 + (k\pi/l)^2]^s \|A(k\pi/l) [\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T\|_2^2, \end{aligned}$$

onde

$$A(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + \kappa^2} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

De forma análoga obtemos

$$\|[\boldsymbol{\eta}^0, \mathbf{u}^0]^T\|_{N,s,s+1}^2 = \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} [1 + (k\pi/l)^2]^s \|A(k\pi/l)[\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T\|_2^2. \quad (4.11)$$

Basta, então, provar que existe uma constante positiva C_s tal que

$$\|A(k\pi/l)[\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T\|_2^2 \leq C_s^2 \|A(k\pi/l)[\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T\|_2^2. \quad (4.12)$$

Lembre que $[\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T = (G_k)^n [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T$, logo

$$\begin{aligned} \|A(k\pi/l)[\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T\|_2^2 &= \|A(k\pi/l)(G_k)^n [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T\|_2^2 = \\ &= \|A(k\pi/l)(G_k)^n A^{-1}(k\pi/l) A(k\pi/l) [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T\|_2^2 \leq \\ &\leq \|A(k\pi/l)(G_k)^n A^{-1}(k\pi/l)\|_2^2 \|A(k\pi/l) [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T\|_2^2. \end{aligned}$$

Note que $G_k = V(k\pi/l) \tilde{G}_k V(k\pi/l)^{-1}$, onde

$$V(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v(\kappa) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_k = \begin{bmatrix} c(\theta_k, \Delta x) & is(\theta_k, \Delta x) \\ is(\theta_k, \Delta x) & c(\theta_k, \Delta x) \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \|A(k\pi/l)(G_k)^n A^{-1}(k\pi/l)\|_2^2 &= \|A(k\pi/l)V(k\pi/l)\tilde{G}_k^n (A(k\pi/l)V(k\pi/l))^{-1}\|_2^2 \leq \\ &\leq \|A(k\pi/l)V(k\pi/l)\|_2^2 \|\tilde{G}_k\|_2^{2n} \|(A(k\pi/l)V(k\pi/l))^{-1}\|_2^2. \end{aligned}$$

Como os autovalores de \tilde{G}_k são $g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)$, temos

$$\|\tilde{G}_k\|_2^{2n} \leq \max \{|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)|^{2n}\}. \quad (4.13)$$

Por hipótese, $|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)| \leq 1$ para todo $\theta_k \in (-\pi, \pi]$, logo

$$\|\tilde{G}_k\|_2^{2n} \leq 1^{2n} = 1. \quad (4.14)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|A(k\pi/l)V(k\pi/l)\|_2^2 \|(A(k\pi/l)V(k\pi/l))^{-1}\|_2^2 &= \\ \max \left\{ v(k\pi/l)^2(1 + (k\pi/l)^2), \frac{1}{v(k\pi/l)^2(1 + (k\pi/l)^2)} \right\}. \end{aligned}$$

De (4.8) obtemos

$$\frac{1}{v(k\pi/l)^2(1 + (k\pi/l)^2)} \leq c_2, \quad e \quad v(k\pi/l)^2(1 + (k\pi/l)^2) \leq 1/c_1. \quad (4.15)$$

Portanto,

$$\|A(k\pi/l)V(k\pi/l)\|_2^2 \|(A(k\pi/l)V(k\pi/l))^{-1}\|_2^2 \leq \max \{1/c_1, c_2\} = C_s^2. \quad (4.16)$$

Logo,

$$\|A(k\pi/l) [\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T\|_2^2 \leq C_s^2 \|A(k\pi/l) [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T\|_2^2,$$

o que nos leva a concluir que

$$\|[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T\|_{N,s,s+1} \leq C_s \|[\boldsymbol{\eta}^0, \mathbf{u}^0]^T\|_{N,s,s+1}.$$

■

A proposição 4.0.4 garante a estabilidade do método, mas precisamos determinar sob quais condições $|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)| \leq 1$. O lema 4.0.5 traz uma forma de escrever $|g^\pm|^2$ que será de grande ajuda para este propósito.

Lema 4.0.5. *Seja g_k^\pm definido conforme (4.3). Podemos escrever $|g^\pm|^2$ como*

$$|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)|^2 = 1 + p(y), \quad \text{onde } p(y) = y^6(y^2 - 8)/576 \quad e \quad y = \sigma v(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma(\theta). \quad (4.17)$$

Demonstração: Primeiramente, considere $y = \sigma v(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma(\theta)$. Assim,

$$g^\pm = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 \mp i \left[y - \frac{1}{3!}y^3 \right].$$

Da propriedade de números complexos $|a + ib|^2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Temos,

$$|g^\pm|^2 = g^\pm \overline{g^\pm} = \left[1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 \right]^2 + \left[y - \frac{1}{3!}y^3 \right]^2.$$

Basta, agora, realizar manipulações algébricas para chegarmos no resultado esperado:

$$\begin{aligned} |g^\pm|^2 &= \left[1 - y^2 + \frac{1}{3}y^4 - \frac{1}{4!}y^6 + \frac{1}{4!4!}y^8 \right] + \left[y^2 - \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{3!3!}y^6 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{72}y^6 + \frac{1}{576}y^8 = 1 - y^6 \left[\frac{1}{72} - \frac{1}{576}y^2 \right] = 1 + y^6(y^2 - 8)/576. \end{aligned}$$

■

Devido à dependência explícita de Δx em $|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)|$, conseguimos obter três condições independentes para garantir a estabilidade do método. Estas são apresentadas no teorema 4.0.8 cuja demonstração necessita dos dois lemas enunciados a seguir.

Lema 4.0.6. *Seja $\phi(\cdot)$ a função definida em (2.5). São válidas as seguintes desigualdades:*

$$\phi(y) \geq |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

$$\phi(y) \geq 1, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.19)$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [2].

Lema 4.0.7. *Seja $\beta > 0$. Vale a seguinte desigualdade.*

$$1 + \frac{\beta}{3}y^2 > \sqrt{\beta}|y|, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.20)$$

Demonstração: Devemos mostrar que as funções $f_1(y) = 1 + \frac{\beta}{3}y^2 + \sqrt{\beta}y$ e $f_2(y) = 1 + \frac{\beta}{3}y^2 - \sqrt{\beta}y$ são positivas. Como $f_1(0) = f_2(0) = 1$, precisamos apenas mostrar que as raízes destas funções são números complexos.

Da fórmula quadrática, as raízes de f_1 são números complexos se $(\sqrt{\beta})^2 - 4\frac{\beta}{3}1 = \beta(1 - 4/3) < 0$. O que sempre ocorre se $\beta > 0$. Para f_2 temos a condição análoga $(-\sqrt{\beta})^2 - 4\frac{\beta}{3}1 = \beta(1 - 4/3) < 0$. Logo, vale a desigualdade (4.20). ■

De posse desses lemas podemos enunciar o teorema que garante a estabilidade do sistema discreto (3.23).

Teorema 4.0.8. *Seja $\beta > 0$. Para que o modelo discreto (3.23) seja estável basta que uma das seguintes condições seja verdadeira,*

$$\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta}}, \quad \gamma_1 = 2\sqrt{2} \left(\sup_{|\theta| \leq \pi} |\gamma(\theta)| \right)^{-1}, \quad (4.21)$$

$$\mu = \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} \leq \gamma_2 \sqrt{\sqrt{\beta} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}, \quad \gamma_2 = 2\sqrt{2} \left(\sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\} \right)^{-1}, \quad (4.22)$$

$$\Delta t \leq \gamma_3 \sqrt{\frac{\beta}{3}}, \quad \gamma_3 = 2\sqrt{2} \left(\sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{|\theta|} \right\} \right)^{-1}. \quad (4.23)$$

Demonstração:

Pelo teorema 4.0.4, basta provar que $|g_k^\pm| \leq 1$. Para tal, lembre que

$$|g_k^\pm|^2 = 1 + p(\sigma v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)). \quad (4.24)$$

Assim, se $p(\sigma v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)) \leq 0$ então $|g_k^\pm| \leq 1$. Note que $p(y) \leq 0$ se $|y| \leq 2\sqrt{2}$. Logo, o sistema é estável se

$$\sigma |v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)| \leq 2\sqrt{2}. \quad (4.25)$$

Para a primeira condição usamos que $\phi(y) \geq 1$ e $(\beta/3)y^2 \geq 0$, portanto,

$$|v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)| \leq \sup_{|\theta| \leq \pi} v(\frac{\theta}{\Delta x}) \sup_{|\theta| \leq \pi} |\gamma(\theta)| \leq \left[1 + \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta} \right]^{-1/2} \sup_{|\theta| \leq \pi} |\gamma(\theta)|.$$

Aplicando esta em (4.21) e realizando algumas manipulações algébricas obtemos (4.25).

Para a segunda condição usamos (4.18) e o lema 4.0.7 para obter

$$\begin{aligned} |v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)| &\leq \sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{\frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta} |\theta \delta / \Delta x| + \sqrt{\beta} |\theta / \Delta x|}} \right\} = \\ &= \left(\sqrt{\frac{\Delta x}{\sqrt{\beta} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}} \right) \sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\}. \end{aligned}$$

Substituindo esta em (4.22) temos (4.25).

Para a terceira condição vamos usar que $\phi(k) > 0$.

$$|v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)| \leq \sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{\frac{\beta}{3} (\theta / \Delta x)^2}} \right\} = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\frac{\beta}{3}}} \right) \sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{|\theta|} \right\}.$$

Aplicando esta em (4.23) obtemos (4.25).

Ou seja, se uma das três condições, (4.21), (4.22) ou (4.23), é válida então $|g_k^\pm| \leq 1$ e o método é estável. ■

Em geral, queremos obter o maior Δt possível para um certo Δx de forma a diminuir o número de passos de integração sem perder a estabilidade, pois queremos uma solução numérica próxima à analítica sem um custo computacional elevado. Note que γ_1 , γ_2 e γ_3 dependem das discretizações espaciais, assim, para obtermos um passo temporal maior devemos escolher as discretizações espaciais que fornecem os maiores valores para γ_1 , γ_2 e γ_3 , ou seja, devemos escolher as discretizações que fornecem os menores valores para

$$\sup_{|\theta| \leq \pi} |\gamma(\theta)|, \quad \sup_{|\theta| \leq \pi} \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \quad \text{e} \quad \sup_{|\theta| \leq \pi} \frac{|\gamma(\theta)|}{|\theta|}.$$

A figura 4.1 mostra os gráficos de $|\gamma(\theta)|$, $|\gamma(\theta)|/\sqrt{|\theta|}$ e $|\gamma(\theta)|/|\theta|$ para cada uma das discretizações espaciais da Seção 3.1. Nela podemos perceber que a discretização por diferenças finitas é mais apropriada nos dois primeiros casos e que no terceiro não há diferença entre as três discretizações.

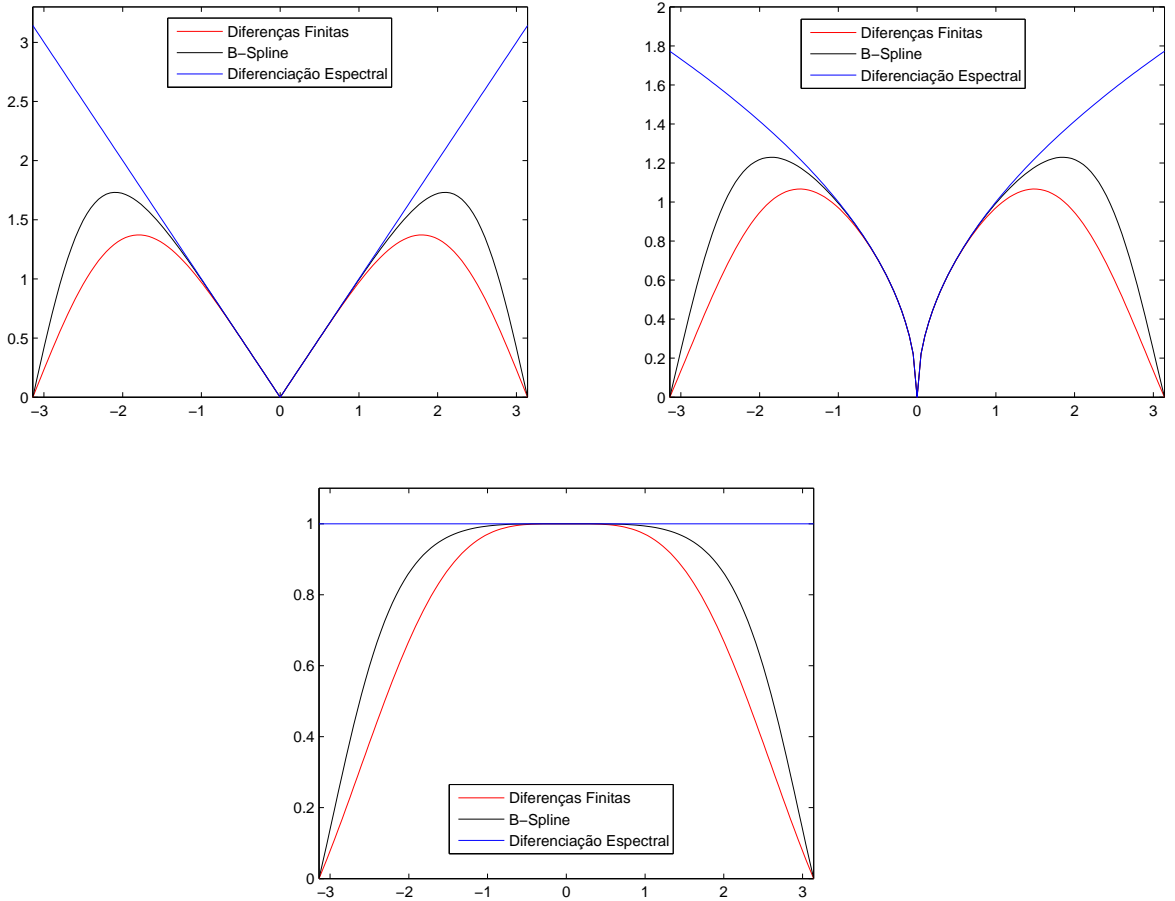


Figura 4.1: $|\gamma(\theta)|$, $|\gamma(\theta)|/\sqrt{|\theta|}$ e $|\gamma(\theta)|/|\theta|$ para cada discretização espacial com $\Delta\theta = \pi/40$.

De fato podemos afirmar que diferenças finitas é mais adequado nos dois primeiros casos quando comparamos as aproximações dos valores de γ_1 e γ_2 calculadas para cada discretização e que o valor de γ_3 é igual para as três discretizações.

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{FD} &\approx 2.061, & \gamma_1^{BS} &\approx 1.633, & \gamma_1^{SP} &\approx 0.900, \\
\gamma_2^{FD} &\approx 2.651, & \gamma_2^{BS} &\approx 2.300, & \gamma_2^{SP} &\approx 1.595, \\
\gamma_3^{FD} &\approx 2.828, & \gamma_3^{BS} &\approx 2.828, & \gamma_3^{SP} &\approx 2.828.
\end{aligned}$$

Além da discretização espacial, podemos escolher entre os critérios (4.21), (4.22) e (4.23) para garantir a estabilidade. Considere Δt_σ , Δt_μ e Δt_c os maiores valores de Δt obtidos por (4.21), (4.22) e (4.23), respectivamente, dado um Δx . A figura 4.2 mostra os gráficos comparando Δt_σ , Δt_μ e Δt_c para cada uma das três discretizações espaciais apresentadas indicando com asteriscos os valores de Δx onde duas condições se igualam. Neste caso consideramos $\beta = 0.01$, $h_2/h_1 = 35.05$ e $\rho_1/\rho_2 = 0.5$ conforme [9].

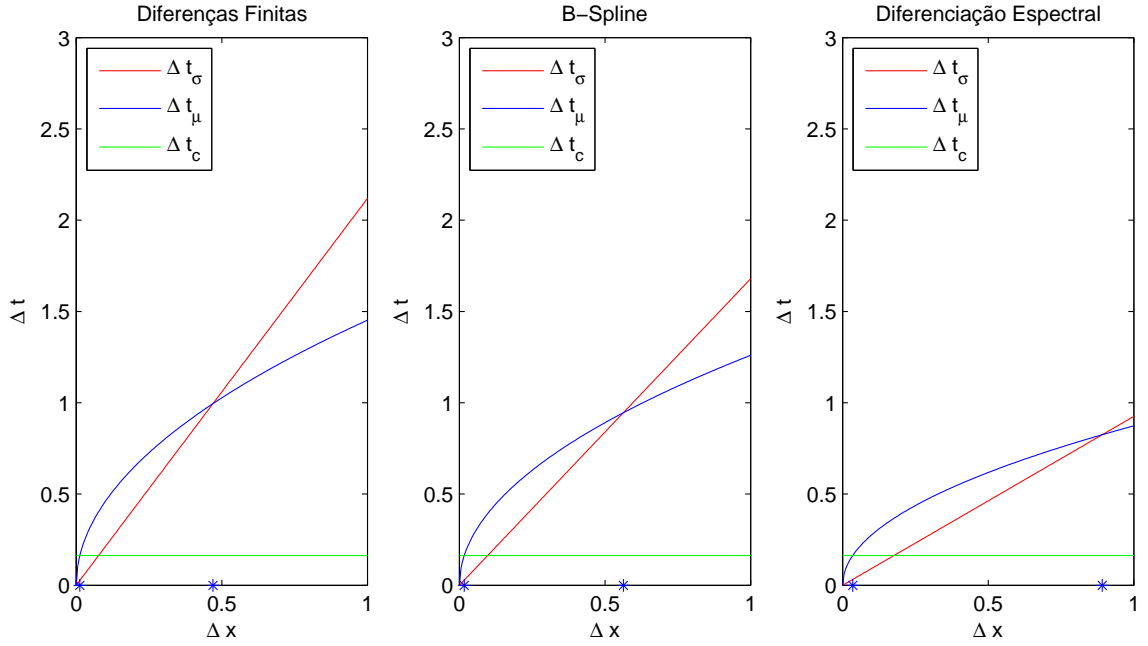


Figura 4.2: Δt_σ , Δt_μ e Δt_c em função de Δx .

Note que nos três casos Δt_σ é mais indicada para valores maiores de Δx , Δt_c para valores bastante pequenos de Δx e Δt_μ para os valores intermediários de Δx . Este fato nos leva a determinar um critério para decidir qual condição usar dado Δx .

Primeiramente, perceba que a razão $\Delta t_\sigma/\Delta t_\mu$ pode ser escrita como

$$\frac{\Delta t_\sigma}{\Delta t_\mu} = \sqrt{\Delta x} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sqrt{\frac{\rho_1 + \sqrt{\beta} \rho_2 / \delta}{\sqrt{\beta}(\rho_1 + \rho_2)}}. \quad (4.26)$$

Se $\Delta t_\sigma/\Delta t_\mu \leq 1$, Δt_μ é mais indicado, caso contrário, devemos usar Δt_σ . De modo análogo podemos escrever a razão $\Delta t_\mu/\Delta t_c$ como

$$\frac{\Delta t_\mu}{\Delta t_c} = \sqrt{\Delta x} \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \beta / 3}}. \quad (4.27)$$

De (4.26) e (4.27) podemos determinar o seguinte critério para escolha de Δt :

Observação 4.0.9. Sejam as desigualdades

$$\Delta x < \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \frac{\sqrt{\beta}(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 + \sqrt{\beta}\rho_2/\delta}, \quad (4.28)$$

$$\Delta x < \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right)^2 \frac{\rho_1\beta/3}{\sqrt{\beta}(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (4.29)$$

se (4.28) vale mas (4.29) não, usamos Δt_μ como passo temporal, se (4.29) vale então devemos usar Δt_c , caso contrário usamos Δt_σ .

É possível provar que para as três discretizações propostas sempre que (4.29) for verdadeira (4.28) também será. De fato, considere $\Delta\bar{x}$ e $\Delta\tilde{x}$ os valores de Δx onde ocorrem as igualdades em (4.28) e (4.29), respectivamente. Como a função \sqrt{x} é crescente, se mostrarmos que

$$\Delta t_\sigma = \Delta\bar{x}\gamma_1\sqrt{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}} \geq \gamma_3\sqrt{\frac{\beta}{3}} = \Delta t_c$$

então teremos $\Delta\bar{x} > \Delta\tilde{x}$.

Primeiramente note que $\sqrt{\beta}/\delta = h_1/h_2 < 1$ e $\gamma_2^2/\gamma_1 \geq \gamma_3/\sqrt{3}$, assim

$$\begin{aligned} \Delta t_\sigma &= \Delta\bar{x}\gamma_1\sqrt{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}} = \frac{\gamma_2^2\sqrt{\beta}(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})}{\gamma_1\sqrt{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}}}\sqrt{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}} = \\ &= \frac{\gamma_2^2\sqrt{\beta}(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})}{\gamma_1\sqrt{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}}} \geq \frac{\gamma_3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\beta}(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})}{\sqrt{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}}} \geq \frac{\gamma_3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\beta}(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})}{1 + \frac{\rho_2\sqrt{\beta}}{\rho_1\delta}} \geq \\ &\geq \frac{\gamma_3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\beta}(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \gamma_3\sqrt{\frac{\beta}{3}} = \Delta t_c \end{aligned}$$

A Tabela 4.1 apresenta os valores de $\Delta\bar{x}$ e $\Delta\tilde{x}$ para cada discretização considerando $h_2/h_1 = 35.05$ e $\rho_1/\rho_2 = 0.5$. A figura 4.3 mostra os valores máximos de Δt para cada Δx levando em consideração o critério dado anteriormente.

Discretização	$\Delta\bar{x}$		$\Delta\tilde{x}$	
	$\beta = 0.001$	$\beta = 0.01$	$\beta = 0.001$	$\beta = 0.01$
Parâmetro				
Diferenças Finitas	0.1485	0.4696	0.0040	0.0126
B-Spline	0.1780	0.5630	0.0053	0.0168
Diferenciação Espectral	0.2819	0.8914	0.0110	0.0349

Tabela 4.1: Valores de $\Delta\bar{x}$ e $\Delta\tilde{x}$ para cada discretização.

Com base nessas observações, para a realização de testes computacionais do método apenas a discretização por diferenças finitas foi implementada.

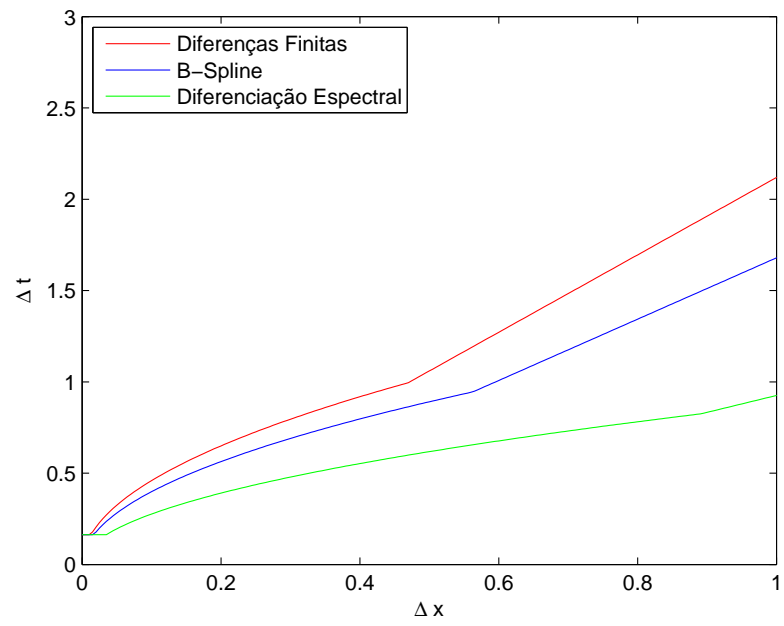


Figura 4.3: Δt máximo para cada discretização espacial em função de Δx .

Capítulo 5

Implementação computacional

Neste capítulo vamos mostrar como foi feita a implementação do método numérico para o sistema fracamente não linear (1.3) baseado na discretização de (1.6), bem como testes realizados para verificar se a estabilidade teórica do esquema se mantém ao implementá-lo.

Para realizar os testes iremos encontrar $\eta(x, 0)$ e $u(x, 0)$ adequados para que tenhamos soluções próximas a uma onda viajante para o sistema (1.3). Uma onda viajante mantém o seu perfil ao longo do tempo, mais precisamente $\eta(x, t) = \eta(x - ct, 0)$, onde c é a velocidade de propagação da onda. Na próxima seção apresentaremos uma forma de obter aproximações de uma onda viajante para este sistema numericamente. Esta abordagem é utilizada em [6] para obter aproximações de uma onda viajante para o sistema (1.5) de ordem mais baixa.

5.1 Perfil inicial da onda

A obtenção da onda viajante se dará da seguinte forma: vamos usar uma mudança de variável $y = x - ct$, onde teremos as funções $\eta(x - ct, 0) = \tilde{\eta}(y)$ e $u(x - ct, 0) = \tilde{u}(y)$, para transformar o sistema (1.3) em uma equação em $\tilde{\eta}$ que será solucionada numericamente através do método de Newton.

Lembre que o sistema (1.3) é dado por

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}. \end{cases}$$

Pela Regra da Cadeia temos

$$\eta_t = -c\tilde{\eta}_y, \quad \eta_x = \tilde{\eta}_y, \quad u_t = -c\tilde{u}_y \quad \text{e} \quad u_x = \tilde{u}_y, \quad (5.1)$$

assim, a primeira equação de (1.3) será

$$-c\tilde{\eta}_y - \tilde{u}_y + \alpha(\tilde{\eta}\tilde{u})_y = 0.$$

que ao integrar resulta em

$$-c\tilde{\eta} - (1 - \alpha\tilde{\eta})\tilde{u} = c_1, \quad (5.2)$$

onde c_1 é a constante de integração.

Considerando $c_1 = 0$ e isolando \tilde{u} em (5.2) temos

$$\tilde{u} = -\frac{c\tilde{\eta}}{1-\alpha\tilde{\eta}}. \quad (5.3)$$

Perceba que ao fazermos a expansão de Taylor de $\frac{1}{1-\alpha\tilde{\eta}}$ obtemos

$$\frac{1}{1-\alpha\tilde{\eta}} = 1 + \alpha\tilde{\eta} + O(\alpha^2). \quad (5.4)$$

Multiplicando (5.4) por $-c\tilde{\eta}$ e substituindo o resultado em (5.3) conseguimos

$$\tilde{u} = -\frac{c\tilde{\eta}}{1-\alpha\tilde{\eta}} = -c\tilde{\eta} - c\alpha\tilde{\eta}^2 + O(\alpha^2) \quad (5.5)$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{u} = -c\tilde{\eta} + O(\alpha), \quad \tilde{u}_y = -c\tilde{\eta}_y + O(\alpha) \quad \text{e} \quad \tilde{u}_{yy} = -c\tilde{\eta}_{yy} + O(\alpha). \quad (5.6)$$

Por outro lado, aplicando (5.1) a segunda equação de (1.3) teremos

$$-c\tilde{u}_y + \alpha\tilde{u}\tilde{u}_y - \tilde{\eta}_y + c\sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}_\delta[\tilde{u}_{yy}] + c\frac{\beta}{3}\tilde{u}_{yyy} = 0,$$

que ao ser integrada resulta em

$$-c\tilde{u} + \frac{\alpha}{2}\tilde{u}^2 - \tilde{\eta} + c\sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}_\delta[\tilde{u}_y] + c\frac{\beta}{3}\tilde{u}_{yy} = c_2, \quad (5.7)$$

onde c_2 é a constante de integração.

Agora, se considerarmos $c_2 = 0$ e substituirmos (5.5) e (5.6) em (5.7) teremos

$$\begin{aligned} c^2\tilde{\eta} + c^2\alpha\tilde{\eta}^2 + O(\alpha^2) + c^2\frac{\alpha}{2}\tilde{\eta}^2 + O(\alpha^2) - \tilde{\eta} - \\ - c^2\sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}_\delta[\tilde{\eta}_y] + O(\alpha\sqrt{\beta}) - c^2\frac{\beta}{3}\tilde{\eta}_{yy} + O(\alpha\beta) = 0. \end{aligned}$$

Dividindo o resultado por c^2 e ignorando os termos de ordem $O(\alpha^2)$, $O(\alpha\sqrt{\beta})$ e $O(\alpha\beta)$ temos

$$\alpha\frac{3}{2}\tilde{\eta}^2 + \left[1 - \frac{1}{c^2}\right]\tilde{\eta} - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}_\delta[\tilde{\eta}_y] - \frac{\beta}{3}\tilde{\eta}_{yy} = 0. \quad (5.8)$$

O próximo passo é discretizar $\tilde{\eta}$ para utilizar o método de Newton em (5.8). A discretização é análoga à feita para a variável espacial no Capítulo 3. Seja $N \in \mathbb{N}$ par e $\Delta y = \frac{2l}{N}$, definimos os pontos da malha $y_j = j\Delta y$, $j = 1, \dots, N$ e o vetor $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_N]^T$ onde $\tilde{\eta}_j \approx \tilde{\eta}(y_j)$.

Discretizando \mathcal{T}_δ de forma análoga a feita para ψ na Seção 3.2 e $\tilde{\eta}_{yy}$ por diferenciação espectral de segunda ordem, temos a versão discretizada de (5.8) dada por

$$f\left(\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N \end{bmatrix}\right) = \alpha\frac{3}{2}\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1^2 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N^2 \end{bmatrix} + \left(\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)I + \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}T + \frac{\beta}{3}S\right)\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N \end{bmatrix} = 0, \quad (5.9)$$

onde

$$T = \frac{1}{N} \overline{F}^T \hat{T} F, \quad \hat{T} = \text{diag} \left(\frac{1}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) \right)$$

e

$$S = \frac{1}{N} \overline{F}^T \hat{S} F, \quad \hat{S} = \text{diag} \left((k\pi/l)^2 \right).$$

Podemos ver que a matriz Jacobiana $J(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$ de f é dada por

$$J(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = 3\alpha \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) + \left[1 - \frac{1}{c^2} \right] I + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} T + \frac{\beta}{3} S.$$

Deste modo, o método de Newton é dado pela fórmula

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{m+1} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}^m - J^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^m) f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^m),$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^m$ é a m -ésima iteração do método.

Como condição inicial para o método escolhemos a onda viajante das equações *Intermediate Long Wave* (ILW), sua versão regularizada (rILW) e *Korteweg-de Vries* (KdV). Apesar de serem modelos não periódicos, são bons candidatos para condição inicial do método de Newton.

A equação ILW é dada por

$$\eta_t + \eta_x + c_1 \eta \eta_x + c_2 \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] = 0,$$

onde

$$c_1 = -\frac{3}{2}\alpha, \quad c_2 = \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 2}.$$

Conforme vemos em [4], a onda viajante admitida por esta equação é

$$\eta(y) = \frac{a \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sinh^2(y/\lambda)}, \quad y = x - ct, \quad (5.10)$$

com

$$a = \frac{4c_2 \theta \tan \theta}{\delta c_1}, \quad \lambda = \frac{\delta}{\theta}, \quad c = 1 - \frac{2c_2}{\delta} \theta \cot(2\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Sua versão regularizada é dada por

$$\eta_t + \eta_x + c_1 \eta \eta_x - c_2 \mathcal{T}_\delta[\eta_{xt}] = 0.$$

A onda viajante da equação rILW também é dada por (5.10) como vemos em [4], porém com

$$a = \frac{4cc_2 \theta \tan \theta}{\delta c_1}, \quad c = \frac{1}{1 + \frac{2c_2}{\delta} \theta \cot(2\theta)}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

A equação KdV é dada por

$$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0.$$

Em [11] podemos ver que a onda viajante da equação KdV é dada por

$$\eta(y) = \frac{c}{2} \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} y \right), \quad y = x - ct, \quad (5.11)$$

Decidimos usar o mesmo valor de c da onda viajante da equação ILW.

Durante os testes numéricos alguns ajustes foram necessários para o cálculo das ondas viajantes. As ondas escolhidas como condição inicial do método não são periódicas e o comprimento de onda é maior que o período escolhido, para resolver este problema em (5.10) multiplicamos o argumento de \sinh por 10 e em (5.11) multiplicamos o argumento de sech por 3. Outro ajuste se deve ao fato de que as ondas escolhidas não possuem média zero ($\int_L \eta(y) dy = 0$) e tem amplitude muito grande para o sistema. Para contornar isto impomos média zero numericamente através da regra do trapézio e amplitude próxima a h_1 multiplicando por 0.1 a onda obtida.

Alguns problemas surgiram ao usar o método com valores maiores para α e β como 0.01 por exemplo. Para contornar isto decidimos aplicar o método primeiramente com $\alpha = \beta = 0.001$ e utilizar o resultado obtido como condição inicial para aplicar o método com os valores desejados de α e β . A primeira solução tem amplitude muito pequena e gera instabilidade ao aplicar o método novamente, contudo, se aumentarmos a amplitude multiplicando esta solução por um valor adequado a instabilidade não ocorre. O valor escolhido para multiplicar a solução foi 10^{16} porém outras potências de 10 podem ser utilizadas. Mesmo no caso $\alpha = \beta = 0.001$ optamos por utilizar o método duas vezes para manter o padrão estabelecido.

Um fato a ser destacado é que a solução obtida pelo método tem amplitude bastante pequena e apresenta apenas uns poucos modos de Fourier com frequência não nula, se comparado com o perfil inicial proveniente da onda solitária da ILW como mostra a figura 5.1. Isto pode indicar um comportamento muito próximo ao da solução da equação linearizada com β pequeno, onde os modos de Fourier estão próximos de ser soluções. Para a solução obtida impomos numericamente média zero e amplitude próxima a h_1 como feito para a condição inicial.

Como nosso objetivo é achar condições iniciais próximas de ondas viajantes, as modificações descritas acima não comprometem os testes numéricos, apenas fornecem perfis iniciais apropriados para testar os esquemas numéricos para os sistemas (1.6) e (1.3).

As figuras 5.2 - 5.4 mostram exemplos da utilização do método de Newton com as ondas viajantes descritas acima, os valores dos coeficientes são os mesmos utilizados na Seção 5.4 com $\beta = 0.001$ e $\Delta x = 0.0123$.

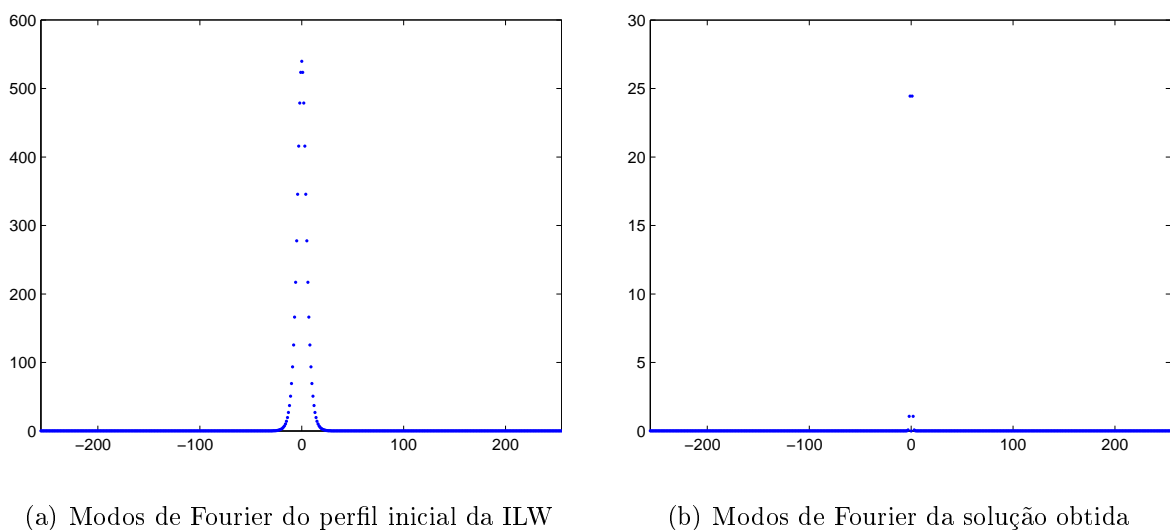
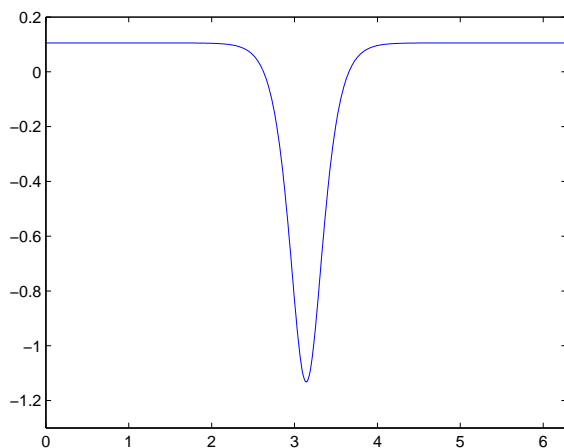
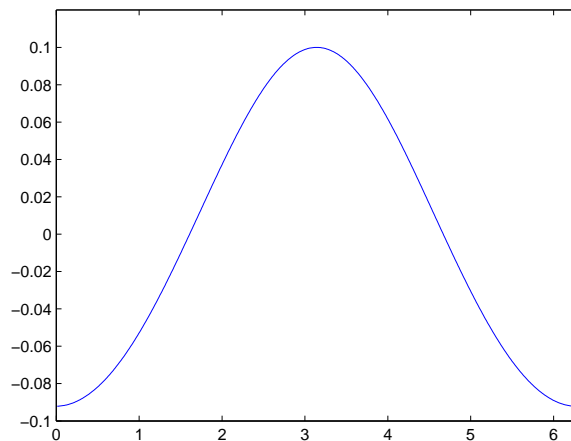


Figura 5.1: Modos de Fourier da onda viajante da ILW ($|\hat{\eta}(\cdot, 0)|$) comparados com os modos da onda viajante aproximada do sistema (1.3), obtida após aplicar o método de Newton modificado. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $N = 512$ e $\Delta x = 0.0123$.

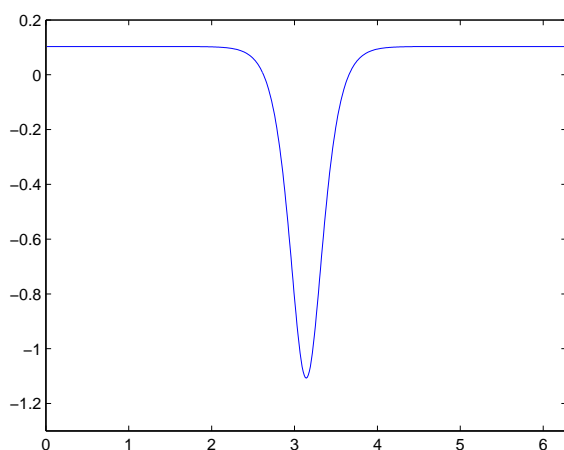


(a) Perfil inicial proveniente da equação ILW

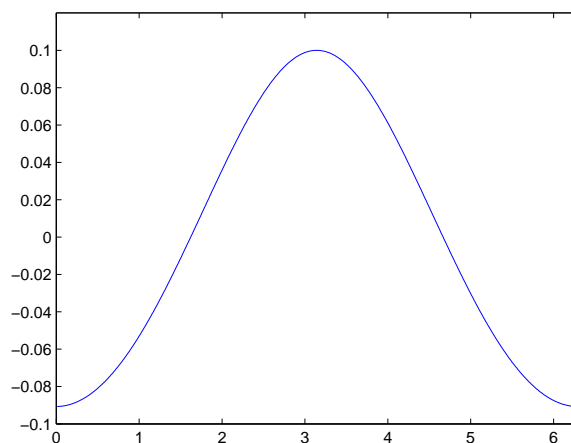


(b) Onda viajante obtida pelo método de Newton

Figura 5.2: Uso do método de Newton para obter uma onda viajante para o sistema (1.3) com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$.



(a) Perfil inicial proveniente da equação rILW



(b) Onda viajante obtida pelo método de Newton

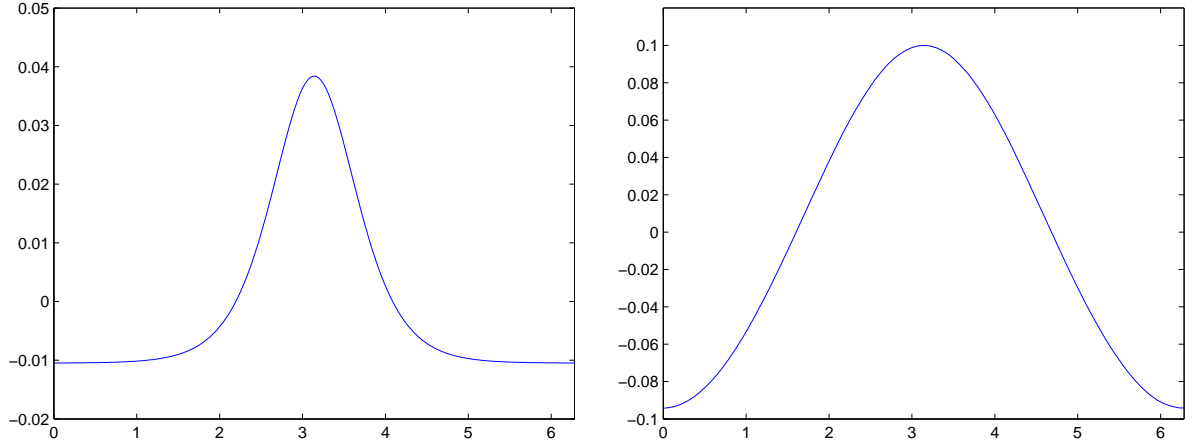
Figura 5.3: Uso do método de Newton para obter uma onda viajante para o sistema (1.3) com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$.

5.2 Velocidade do sistema e direção de propagação da onda

Uma vez que o perfil inicial da onda foi escolhido, devemos determinar a velocidade e direção de propagação deste, isto é, determinar $u(x, 0)$ dado $\eta(x, 0)$. O caso não linear é bastante complicado de tratar, portanto, vamos utilizar o sistema linearizado para determinar $u(x, 0)$ e utilizar este no sistema fracamente não linear.

Aplicando a Transformada de Fourier periódica em (1.6) podemos obter

$$\begin{cases} \hat{\eta}(k, t)_t &= ik\hat{u}(k, t) \\ v(k\pi/l)\hat{u}(k, t)_t &= ik\hat{\eta}(k, t). \end{cases} \quad (5.12)$$



(a) Perfil inicial proveniente da equação KdV (b) Onda viajante obtida pelo método de Newton

Figura 5.4: Uso do método de Newton para obter uma onda viajante para o sistema (1.3) com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$.

Derivando a primeira equação de (5.12) em relação a t e substituindo na segunda equação temos

$$\hat{\eta}(k, t)_{tt} = ik\hat{u}(k, t)_t = ik \left(\frac{ik\hat{\eta}(k, t)}{v(k\pi/l)} \right),$$

o que resulta na equação

$$\hat{\eta}(k, t)_{tt} + \frac{k^2}{v(k\pi/l)}\hat{\eta}(k, t) = 0,$$

que pode ser resolvida usando a equação característica

$$r^2 + \frac{k^2}{v(k\pi/l)} = 0.$$

Assim temos

$$\hat{\eta}(k, t) = c_1(k) \exp(ikv(k\pi/l)t) + c_2(k) \exp(-ikv(k\pi/l)t). \quad (5.13)$$

O objetivo agora é determinar $c_1(k)$ e $c_2(k)$. Para $t = 0$ obtemos

$$\hat{\eta}(k, 0) = c_1(k) + c_2(k). \quad (5.14)$$

Derivando (5.13) com relação a t encontramos

$$\hat{\eta}(k, t)_t = ikv(k\pi/l)c_1(k) \exp(ikv(k\pi/l)t) - ikv(k\pi/l)c_2(k) \exp(-ikv(k\pi/l)t). \quad (5.15)$$

Considerando $t = 0$ e utilizando a primeira equação de (5.12) conseguimos

$$\hat{\eta}(k, 0)_t = ikv(k\pi/l)c_1(k) - ikv(k\pi/l)c_2(k) = ik\hat{u}(k, 0). \quad (5.16)$$

De (5.14) e (5.16) temos o sistema

$$\begin{cases} c_1(k) + c_2(k) & = \hat{\eta}(k, 0) \\ c_1(k) - c_2(k) & = v(k\pi/l)^{-1}\hat{u}(k, 0). \end{cases}$$

Sem maiores dificuldades podemos ver que a solução deste sistema é

$$\begin{cases} c_1(k) & = 0.5(\hat{\eta}(k, 0) + v(k\pi/l)^{-1}\hat{u}(k, 0)) \\ c_2(k) & = 0.5(\hat{\eta}(k, 0) - v(k\pi/l)^{-1}\hat{u}(k, 0)). \end{cases}$$

Nosso objetivo é ter apenas uma direção de propagação, assim consideramos $c_2(k) = 0$ para todo k , logo

$$\hat{u}(k, 0) = v(k\pi/l)\hat{\eta}(k, 0).$$

Para o cálculo computacional de $u(x, 0)$ usaremos transformada de Fourier discreta conforme feito em outros casos.

5.3 Esquema numérico para o sistema fracamente não linear

O esquema numérico para o sistema fracamente não linear (1.3) foi feito seguindo de perto [12]. As discretizações espacial e temporal serão feitas como na versão linearizada, mas não utilizaremos a abordagem matricial devido ao custo computacional elevado. Para o sistema linearizado será necessário apenas considerar $\alpha = 0$.

Vamos reescrever (1.3) como

$$\begin{cases} \eta_t & = E(\eta, u) \\ \psi_t & = F(\eta, u) \end{cases}$$

onde,

$$\begin{aligned} E(\eta, u) &= [(1 - \alpha\eta)u]_x, \\ F(\eta, u) &= \eta_x - \alpha uu_x, \\ \psi &= u - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_{\delta, x}(u) - \frac{\beta}{3} u_{xx}. \end{aligned}$$

As derivadas espaciais das funções auxiliares E e F são discretizadas por diferenças finitas de quarta ordem conforme (3.13). Para calcular u a partir de ψ usamos TFD como na Seção 3.2, definindo o operador $u = B(\psi)$ tal que

$$\hat{u}(k) = v(k\pi/l)^2 \hat{\psi}(k), \quad v(\kappa) = \left(1 + \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta} \phi(\kappa\delta) + \kappa^2 \frac{\beta}{3} \right)^{-1/2}.$$

A discretização temporal será feita com o método de RK4 para η e ψ . Como E e F são definidas a partir de u , a cada passo temporal, incluindo os intermediários, devemos calcular u através de B . Portanto, temos as fórmulas de recorrência

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{n+1} = \boldsymbol{\eta}^n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ \boldsymbol{\psi}^{n+1} = \boldsymbol{\psi}^n + \frac{\Delta t}{6}(KK_1 + 2KK_2 + 2KK_3 + KK_4), \end{cases} \quad (5.17)$$

onde,

$$\begin{aligned}
K_1 &= E(\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n), \\
KK_1 &= F(\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n), \\
\mathbf{u}_{k1} &= B(\boldsymbol{\psi}^n + 0.5\Delta t KK_1), \\
K_2 &= E(\boldsymbol{\eta}^n + 0.5\Delta t K_1, \mathbf{u}_{k1}), \\
KK_2 &= F(\boldsymbol{\eta}^n + 0.5\Delta t K_1, \mathbf{u}_{k1}), \\
\mathbf{u}_{k2} &= B(\boldsymbol{\psi}^n + 0.5\Delta t KK_2), \\
K_3 &= E(\boldsymbol{\eta}^n + 0.5\Delta t K_2, \mathbf{u}_{k2}), \\
KK_3 &= F(\boldsymbol{\eta}^n + 0.5\Delta t K_2, \mathbf{u}_{k2}), \\
\mathbf{u}_{k3} &= B(\boldsymbol{\psi}^n + 0.5\Delta t KK_3), \\
K_4 &= E(\boldsymbol{\eta}^n + 0.5\Delta t K_3, \mathbf{u}_{k3}), \\
KK_4 &= F(\boldsymbol{\eta}^n + 0.5\Delta t K_3, \mathbf{u}_{k3}).
\end{aligned}$$

No apêndice A estão os programas usados na implementação.

5.4 Testes computacionais

Nesta seção vamos realizar alguns testes a fim de comprovar a estabilidade do método numérico implementado, bem como apontar algumas características deste. Além das três candidatas a onda viajante apresentadas anteriormente vamos realizar testes com a onda $\eta(y) = \exp(-2y^2)$. Assim como feito para as candidatas a onda viajante impomos média zero e amplitude h_1 para este perfil de Gaussiana. Na Subseção 5.4.1 vamos realizar testes com o sistema linearizado e na Subseção 5.4.2 com o sistema fracamente não linear.

Para os testes escolhemos os seguintes valores para os coeficientes:

$$h_1 = 0.1, \quad h_2 = 3.505, \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 2 \quad \text{e} \quad l = 2\pi. \quad (5.18)$$

Para β escolhemos os valores $\beta = 0.01$ e $\beta = 0.001$. Os coeficientes L e δ serão calculados a partir dos demais. Serão testadas apenas as condições de estabilidade (4.22) e (4.23) pois a condição (4.21) só é melhor que as demais para valores muito grandes de Δx . A Tabela 5.1 mostra os valores máximos de Δt para alguns valores de Δx e β .

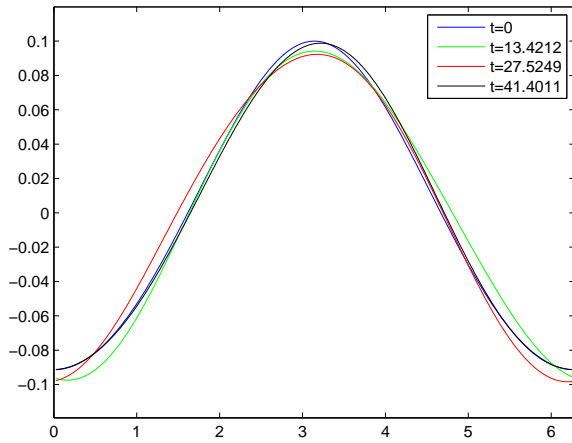
	$\beta = 0.01$	$\beta = 0.001$
$\Delta x = 0.0245$	$\Delta t = 0.2275$	$\Delta t = 0.1279$
$\Delta x = 0.0123$	$\Delta t = 0.1633$	$\Delta t = 0.0905$
$\Delta x = 0.0061$	$\Delta t = 0.1633$	$\Delta t = 0.0640$
$\Delta x = 0.0031$	$\Delta t = 0.1633$	$\Delta t = 0.0516$

Tabela 5.1: Valores máximo de Δt em função de Δx .

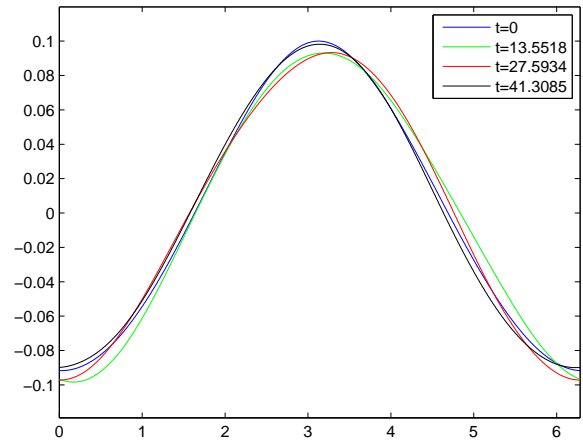
5.4.1 Sistema linearizado

Apesar de termos $\alpha = 0$ no sistema linearizado, para o perfil inicial da onda consideramos $\alpha = \beta$ para usar a equação (5.9). Nas figuras 5.5 - 5.8 os experimentos foram feitos com $\beta = 0.01$ para os quatro perfis iniciais de onda apresentados utilizando o maior Δt

possível dentro das condições de estabilidade. Podemos notar que as três candidatas a onda viajante tiveram um comportamento bastante parecido entre si, o perfil inicial sofreu um pouco de deformação ao decorrer do tempo mas se manteve próximo do esperado. A dispersão alterou bastante o perfil inicial da Gaussiana que se dividiu em duas ondas em $t = 41.4718$. A estabilidade se manteve em todos casos mesmo para o perfil inicial da Gaussiana.

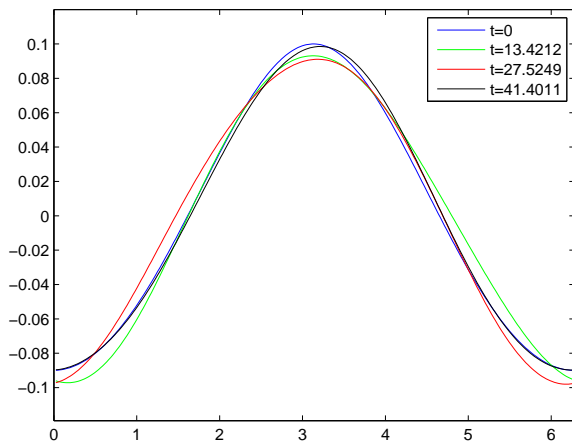


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$

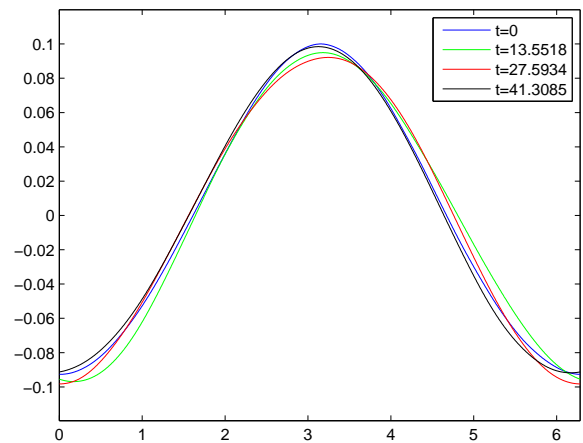


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.5: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da ILW.

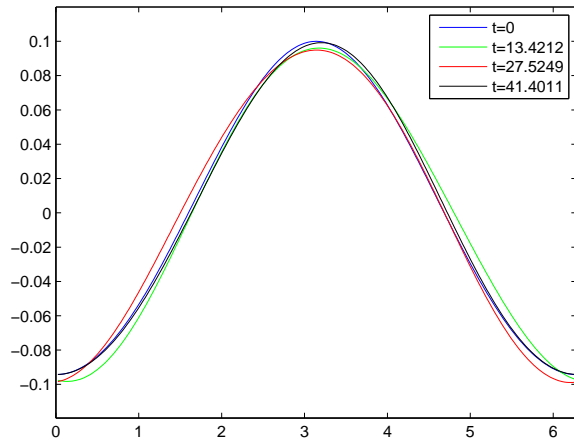


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$

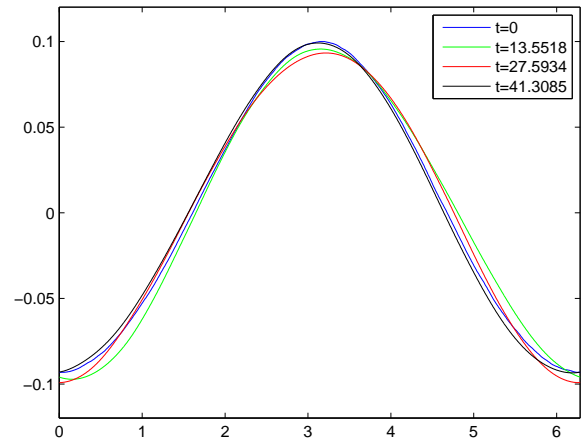


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.6: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da rILW.

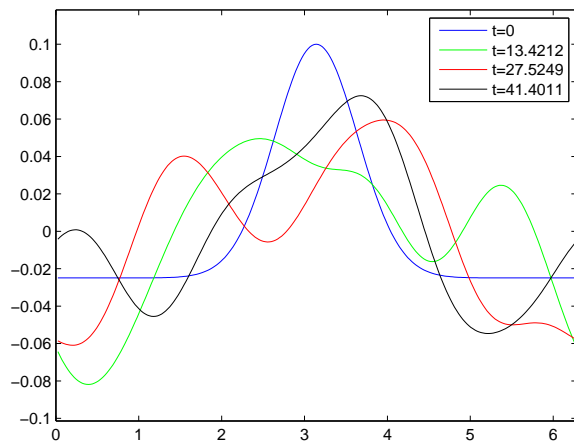


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$

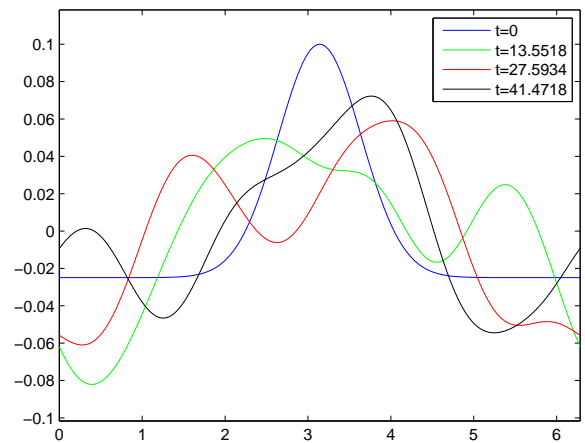


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.7: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da KdV.



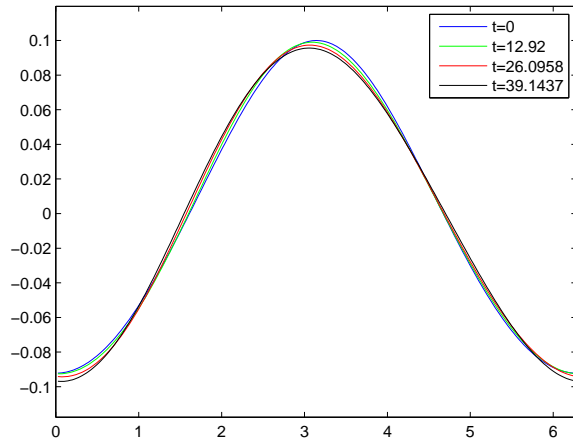
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$



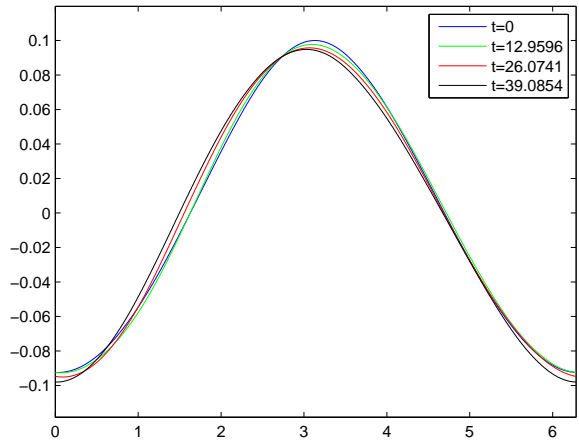
(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.8: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da Gaussiana.

As figuras 5.9 - 5.12 mostram os testes com $\beta = 0.001$ utilizando o maior Δt possível dentro das condições de estabilidade. A dispersão menor deformou menos o perfil inicial da Gaussiana conforme podemos ver nos gráficos desta em 5.8 e 5.12 aproximadamente em $t = 13$. Para as candidatas a onda viajante o resultado foi bastante parecido com o anterior, mas o perfil inicial não se deformou tanto quanto no caso $\beta = 0.01$. Novamente a estabilidade se manteve para os quatro perfis iniciais de onda.

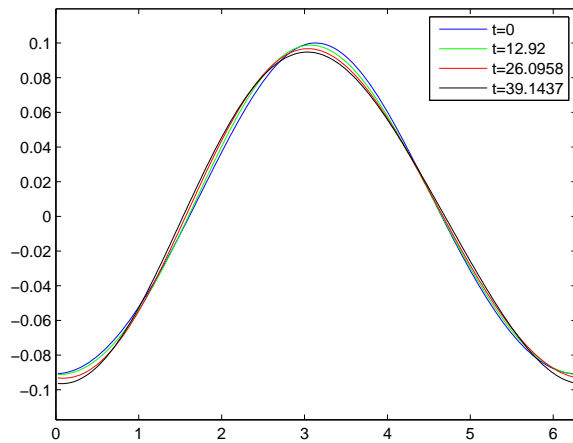


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$

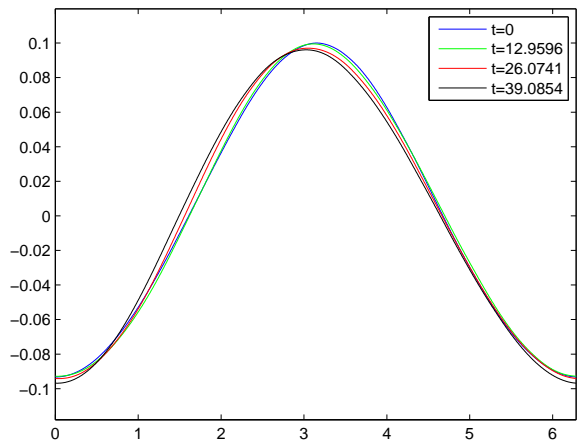


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.9: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da ILW.

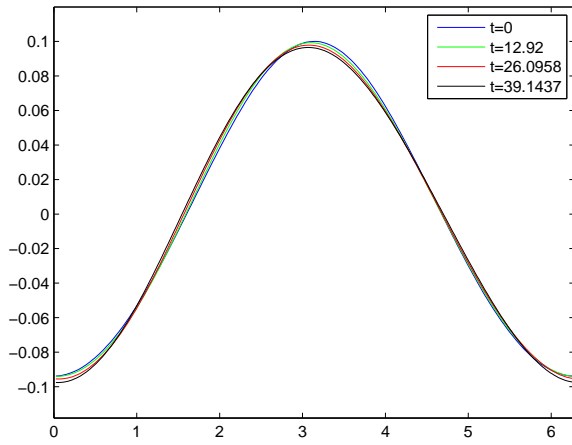


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$

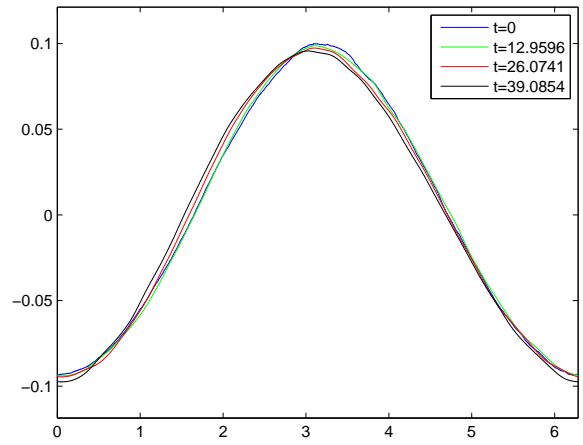


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.10: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da rILW.

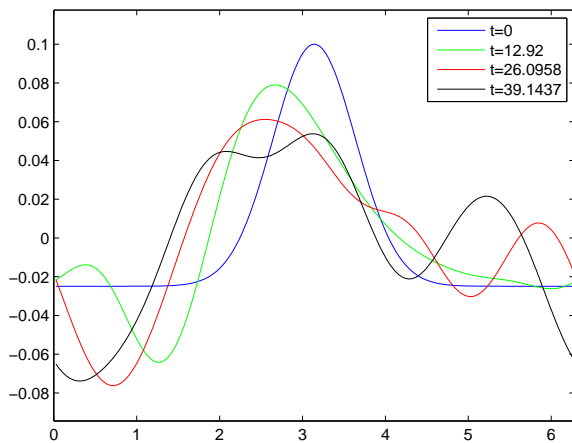


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$

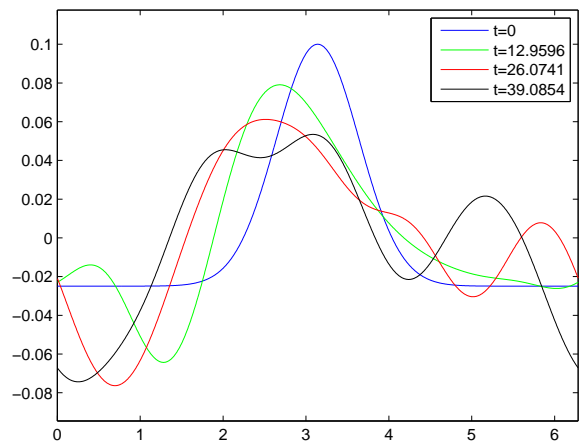


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.11: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da KdV.



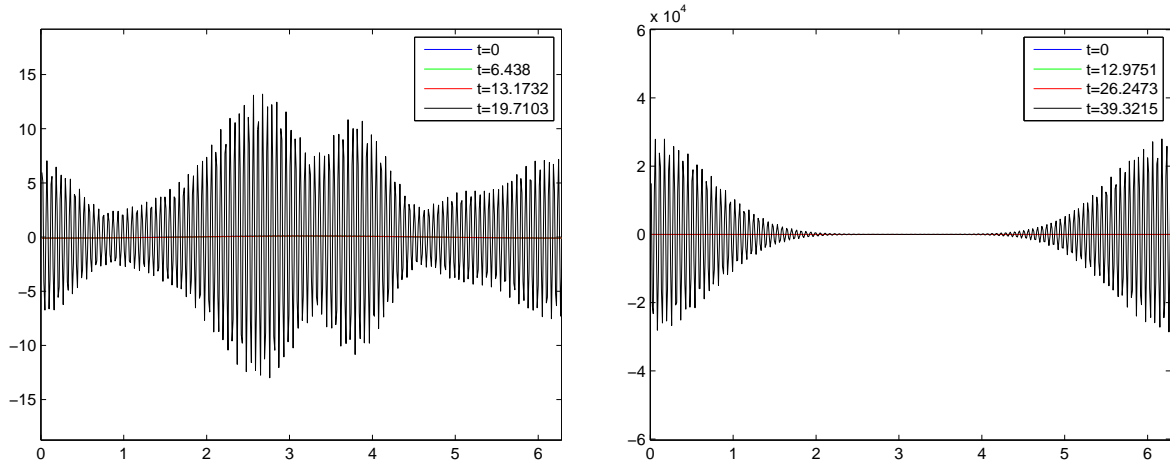
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$



(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.12: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da Gaussiana.

A figura 5.13 mostra os experimentos realizados com os perfis iniciais da ILW e da Gaussiana para $\beta = 0.001$ e $\Delta t = 0.0990$ maior do que o valor máximo dado pelos critérios de estabilidade (Tabela 5.1). Podemos perceber que ao excedermos o limite máximo para Δt o sistema apresenta instabilidade.



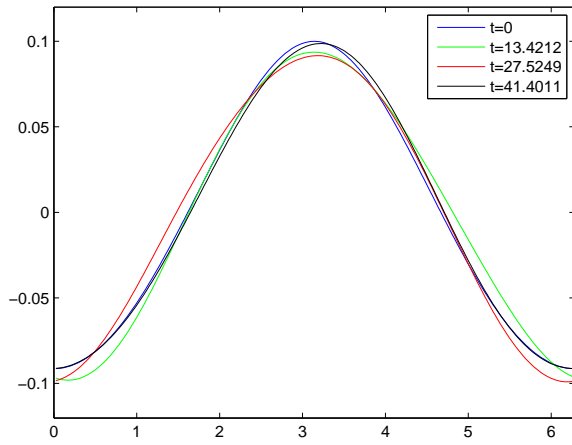
(a) Perfil inicial da ILW

(b) Perfil inicial da Gaussiana

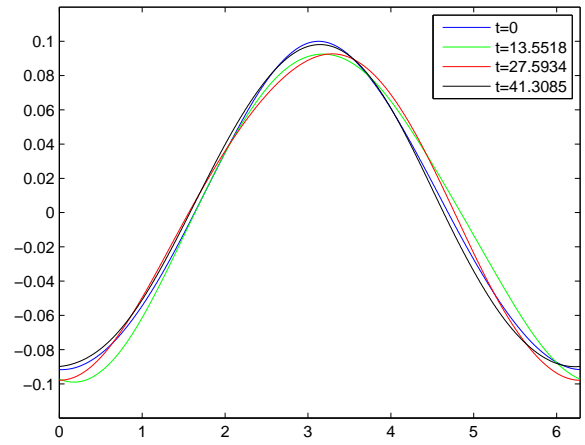
Figura 5.13: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $\Delta x = 0.0123$ e $\Delta t = 0.0990$.

5.4.2 Sistema fracamente não linear

As figuras 5.14 - 5.17 mostram os experimentos feitos com $\beta = \alpha = 0.01$ para os quatro perfis iniciais de onda apresentados. Os resultados são bastante parecidos com os do sistema linearizado para os mesmos valores. Dois fatores podem explicar este comportamento: o fato do sistema ser fracamente não linear e a escolha para a função $u(x, 0)$ ser baseada no sistema linearizado. Foram utilizados os mesmos critérios do sistema linearizado para a escolha de Δt e a estabilidade se manteve, o que indica que esta condição pode ser usada para o sistema fracamente não linear sem perda de estabilidade.

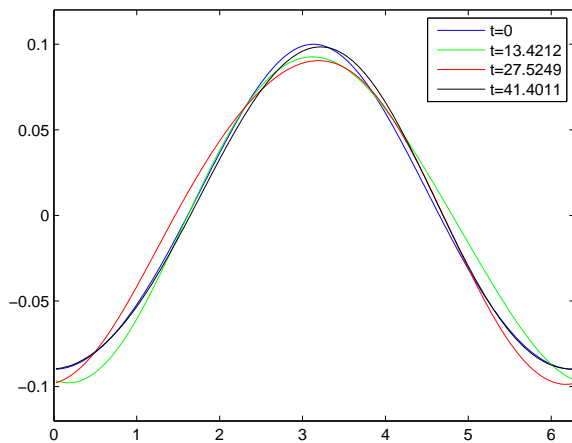


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$

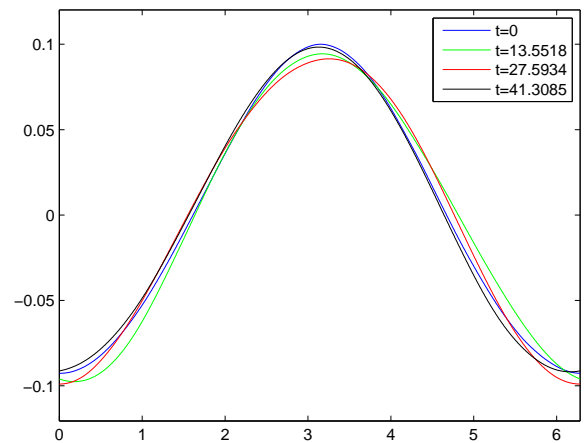


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.14: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da ILW.

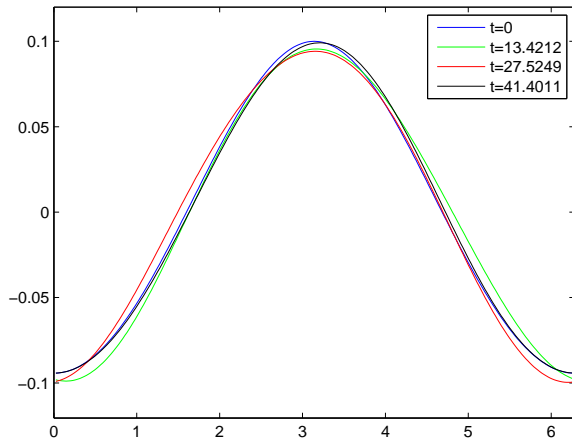


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$

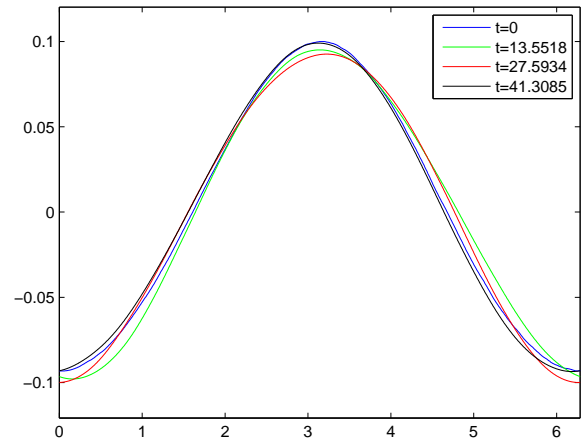


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.15: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da rILW.

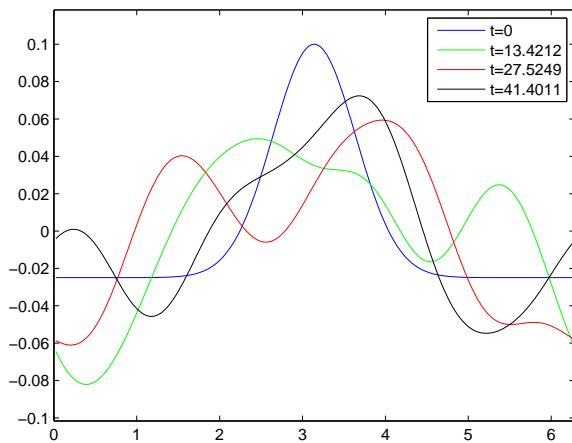


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$

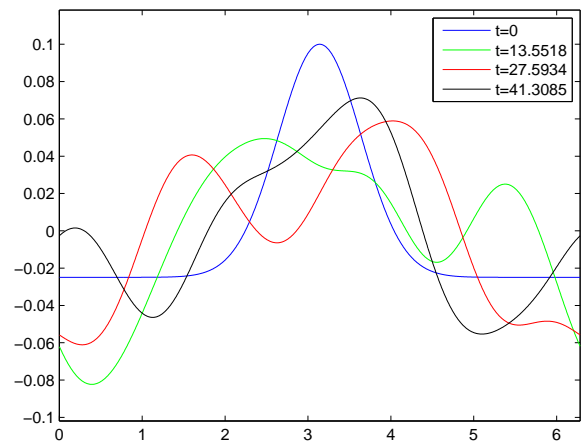


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.16: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da KdV.



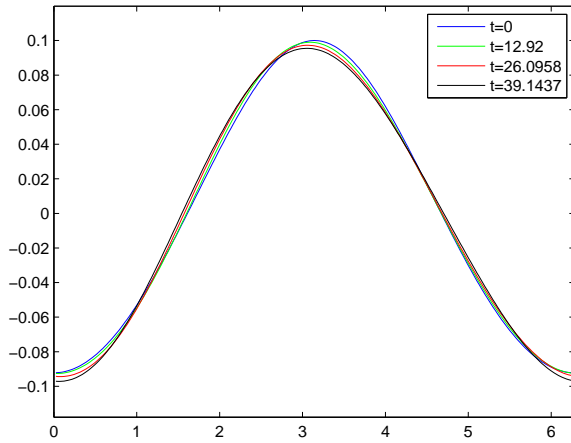
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$



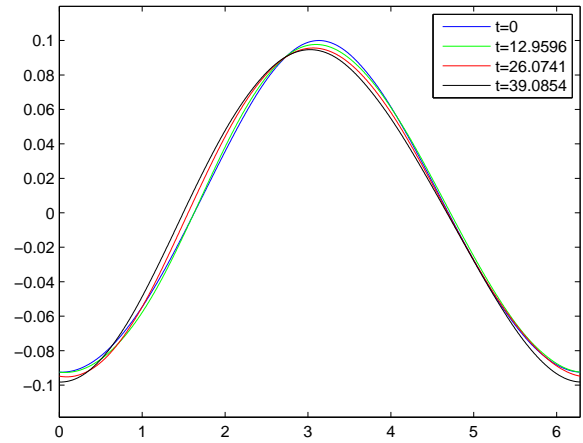
(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura 5.17: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da Gaussiana.

As figuras 5.18 - 5.21 mostram os testes com $\beta = \alpha = 0.001$. Assim como ocorreu para o sistema linearizado a dispersão menor deformou menos os perfis iniciais de onda quando comparado com os resultados obtidos com $\beta = 0.01$. Os resultados também foram bastante parecidos com os do sistema linearizado para os mesmos valores. Novamente a estabilidade se manteve, reforçando a hipótese de que as condições de estabilidade do sistema linearizado são válidas para o sistema fracamente não linear.

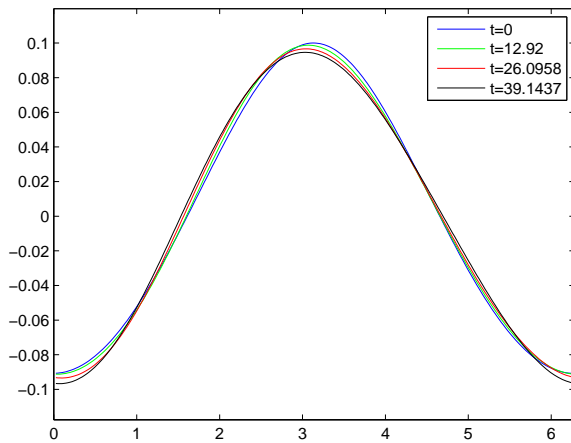


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$

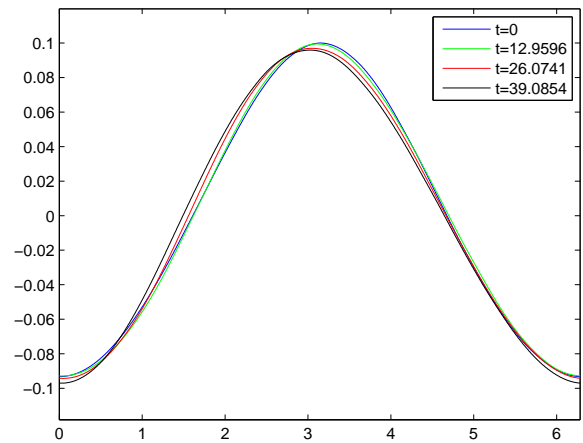


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.18: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da ILW.

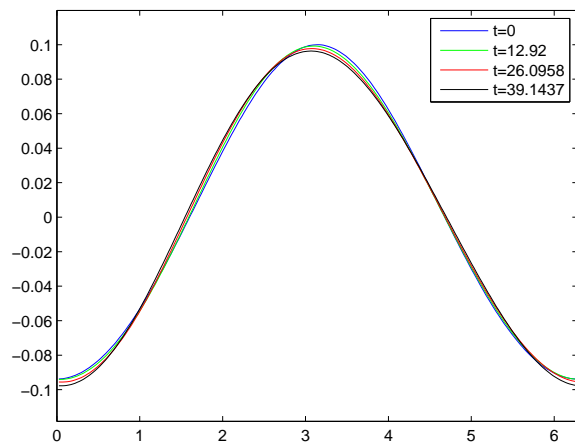


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$

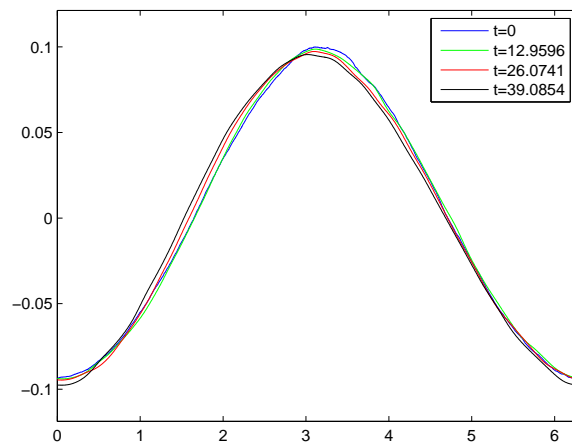


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.19: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da rILW.

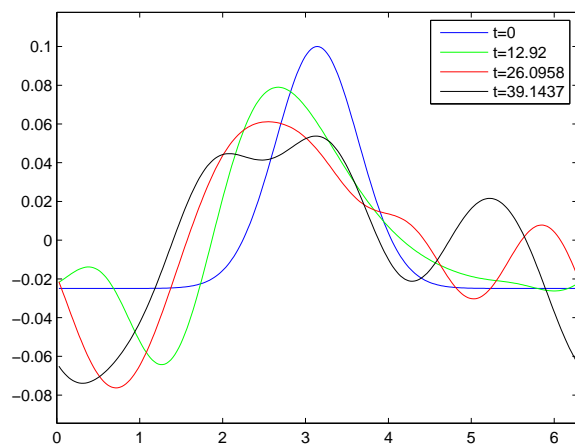


(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$

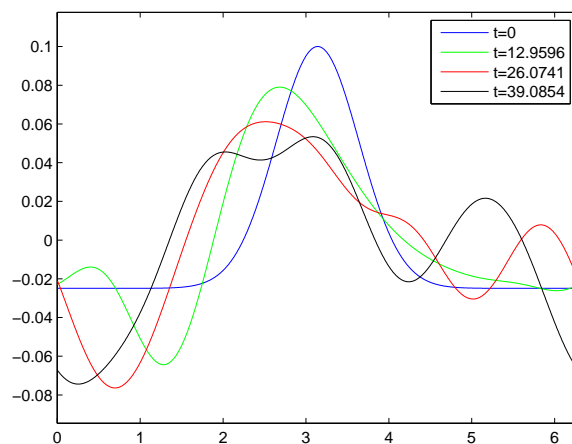


(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.20: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da KdV.



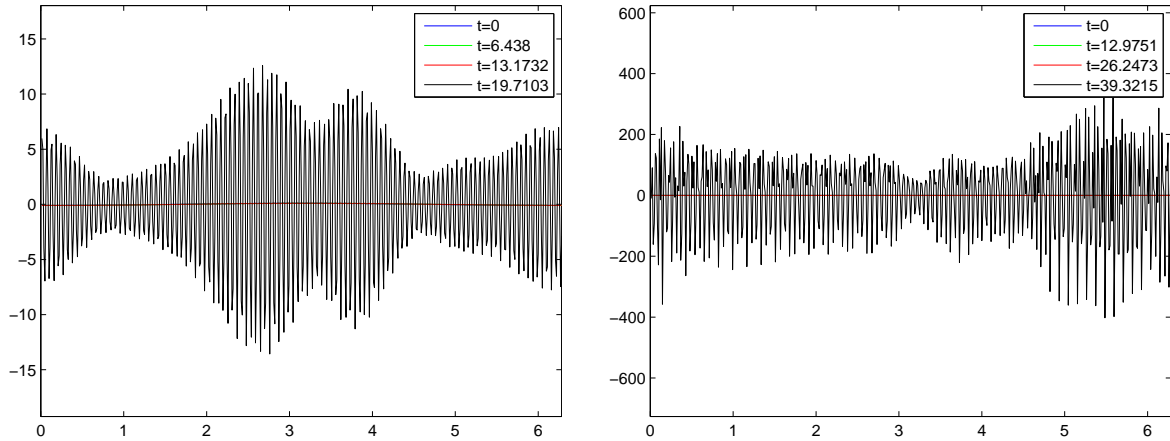
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$



(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura 5.21: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da Gaussiana.

A figura 5.22 mostra os experimentos realizados com os perfis iniciais da ILW e da Gaussiana para $\beta = 0.001$ e $\Delta t = 0.0990$. Ao exceder o limite máximo para Δt pelos critérios de estabilidade do sistema linearizado (Tabela 5.1) também temos instabilidade no sistema fracamente não linear o que novamente reforça a hipótese de que as condições de estabilidade do sistema linearizado se aplicam ao fracamente não linear.



(a) Perfil inicial da ILW

(b) Perfil inicial da Gaussiana

Figura 5.22: $\eta(x,t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $\Delta x = 0.0123$ e $\Delta t = 0.0990$.

Apesar dos resultados obtidos para ondas candidatas a viajante neste capítulo serem próximos do esperado estes ainda não mostram ondas viajantes próprias do modelo fracamente não linear. Por isso, se faz necessária uma procura mais extensiva de condições iniciais adequadas no futuro.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho provamos que o esquema numérico (3.23) para o sistema linearizado (1.6) é estável para escolhas adequadas de Δx e Δt . Através da análise de von Neumann encontramos três condições que garantem a estabilidade do esquema: a (4.21) que usa o número de Courant $\Delta t/\Delta x$, a (4.22) que usa $\Delta t/\sqrt{\Delta x}$ e a (4.23) onde é necessário apenas que Δt seja menor que uma constante.

Experimentos mostraram que o esquema (3.23) é estável computacionalmente dentro das condições estabelecidas. Além disso, a versão deste para o sistema fracamente não linear (1.3) se mostrou estável quando usadas as mesmas condições. Apesar de não ser uma prova analítica e rigorosa é um bom indício de que o esquema (5.17) é estável.

Em trabalhos futuros será estudada a versão do sistema (1.3) com fundo variável onde esperamos encontrar resultados de estabilidade semelhantes aos obtidos aqui. Além disso, vamos continuar procurando boas condições iniciais para o sistema com fundo plano visto que os resultados obtidos, apesar de próximos, não mostraram ondas viajantes. Tais condições são importantes para compreender como o fundo altera a propagação da onda.

Apêndice A

Programas utilizados

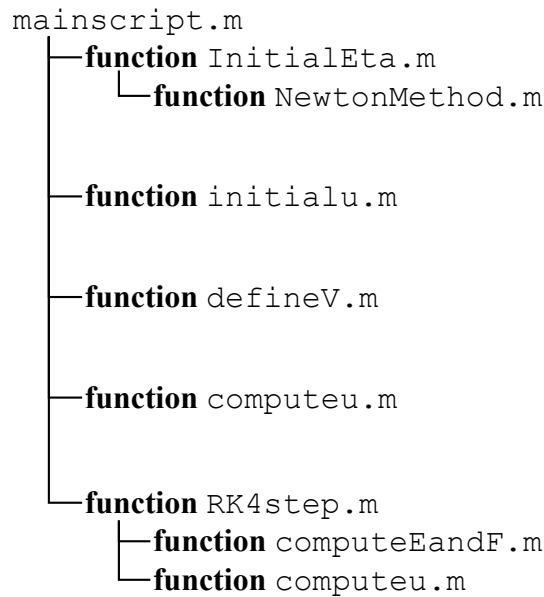


Figura A.1: Árvore dos programas utilizados na implementação do método.

mainscript

```
l = pi; % period/2
N = 2^8;
deltaxi = 2 * pi / N
x = (deltaxi:deltaxi:2*pi);

MODEL = 'flat_linear';
%MODEL = 'flat_weakly_nonlinear';

DISPERSION = 'higher_order'; %CHECK PERIOD 1
%DISPERSION = 'lower_order';

METHOD = 'RK4';

ro1 =1; ro2 =2;
beta = 0.001; alpha =0.001;
h1=0.1;
h2=35.05*h1;% See Choi & Camassa, J. Fl Mech, 1999
L = h1/sqrt(beta)
delta=h2/L;

gamma_2=2.651;
mult_dx=sqrt(beta)*(1+ro2/ro1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Time step
%por=0.95;
```

```

por=1;
%por=1.095;
%por=1.2;

%delat=por*2.828*sqrt(beta/3)
delat = por*gamma_2*sqrt(mult_dx*deltaxi)
%mi=por*gamma_2*sqrt(mult_dx)

Tfinal=20
Tsteps=fix(pi*Tfinal/(delat*1));

%WAVE='ILW'
%WAVE='rILW'
%WAVE='KdV'
WAVE='EXP'

if WAVE=='EXP'
    eta0 = exp(-2*(x-l*ones(1,N)).^2);
    v=ones(1,N);
    media=sum(eta0)/N;
    eta0=eta0-media*v;
    MM=max(eta0);
    init_eta=h1*eta0/MM;
else
    init_eta = InitialEta(1,N,alpha,beta,ro1,ro2,h1,h2,delta,x,WAVE);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Initial velocity

%PROPAGATION = 'two_directions';
PROPAGATION = 'one_direction';

init_u = initialu(init_eta,MODEL,DISPERSION,ro1,ro2,alpha,beta,h2,L,1,PROPAGATION);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Initializing answer
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Eta = init_eta;
U = init_u;
V = defineV(init_eta,init_u,MODEL,DISPERSION,ro1,ro2,alpha,beta,h2,L,1);

switch upper(METHOD)

case 'RK4'
    for i=1:Tsteps
        [eta_next,V_next]=RK4step(Eta(i,:),U(i,:),V(i,:),deltaxi,MODEL,DISPERSION,ro1,ro2,alpha,beta,delat,h2,L,1);
        u_next = computeu(eta_next,V_next,MODEL,DISPERSION,ro1,ro2,alpha,beta,h2,L,1);
        Eta = [Eta; eta_next];

        U = [U; u_next];
        V = [V; V_next];
    end
end

initialEta

function [ init_eta ] = InitialEta4(1,N,alpha,beta,ro1,ro2,h1,h2,delta,x,WAVE)

alpha0=0.001;
beta0=0.001;
L0 = h1/sqrt(beta0);
delta0=h2/L0;

switch WAVE
case 'ILW';
    theta=pi/8;
    lambda=delta0/theta;
    c1=-1.5*alpha0;
    c2=ro2*sqrt(beta0)/(ro1*2);
    aa =4*c2*theta*tan(theta)/(delta0*c1);

```

```

eta0=aa*cos(theta)*cos(theta)./(cos(theta)*cos(theta)*ones(1,N)+sinh(10*(x-1)/lambda).*sinh(10*(x-1)/lambda));
c=1-((2*c2)/delta0)*theta*cot(2*theta);
case 'rILW'
theta=pi/8;
lambda=delta0/theta;
c1=-1.5*alpha0;
c2=ro2*sqrt(beta0)/(ro1*2);
c=1/(1+(2*c2/delta0)*theta*cot(2*theta));
aa =c*4*c2*theta*tan(theta)/(delta0*c1);
eta =aa*cos(theta)*cos(theta)./(cos(theta)*cos(theta)*ones(1,N)+sinh(10*(x-1)/lambda).*sinh(10*(x-1)/lambda));
case 'KdV'
theta=pi/8;
c2=ro2*sqrt(beta0)/(ro1*2);
c=1-((2*c2)/delta0)*theta*cot(2*theta);
eta0 = 0.5*c*(sech(1.5*sqrt(c)*(x-1))).^2;
end

v=ones(1,N);
media=sum(eta0)/N;
eta0=eta0-media*v;
eta0=(10^(-1))*eta0;

eta0=NewtonMethod(1,N,alpha0,beta0,ro1,ro2,delta0,eta0,c);

switch WAVE
case 'ILW';
theta=pi/8;
lambda=delta/theta;
c1=-1.5*alpha;
c2=ro2*sqrt(beta)/(ro1*2);
c=1-((2*c2)/delta)*theta*cot(2*theta);
case 'rILW'
theta=pi/8;
lambda=delta/theta;
c1=-1.5*alpha;
c2=ro2*sqrt(beta)/(ro1*2);
c=1/(1+(2*c2/delta)*theta*cot(2*theta));
case 'KdV'
theta=pi/8;
c2=ro2*sqrt(beta0)/(ro1*2);
c=1-((2*c2)/delta0)*theta*cot(2*theta);
end

eta0=(10^(16))*eta0;

eta0=NewtonMethod(1,N,alpha,beta,ro1,ro2,delta,eta0,c);

media=sum(eta0)/N;
eta0=eta0-media*v;
M=max(eta0);
eta0=(h1/M)*eta0;
init_eta=eta0;

end

```

NewtonMethod

```

function [ init_eta ] = NewtonMethod(1,N,alpha,beta,rho1,rho2,delta,eta0,c)
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here

w = exp(-2*pi*i/N);
for j = 1:N
for k = 1:N
F(j,k) = w^((j-1)*(k-1));
%F(j,k) = w^((j-N/2)*(k));
end
end
aux = [1:N/2 -N/2 + 1:-1];
auxp = pi*aux/1; % 2l period

```

```

td = auxp.*coth(auxp.*delta);
td = [ 1/delta td]';
diagonaltd = diag(td);
ThD = real(conj(F)*diagonaltd*F/N);

diagDD= auxp.^2;
diagDD=[0 diagDD]';
diagonalDD=diag(diagDD);
DD=real(conj(F)*diagonalDD*F/N);

contador = 0;
norma = 10;
eta0=eta0';
while norma > 0.00001 && contador < 10
fun_F = 1.5*alpha*eta0.*eta0 + (-(1/c^2)+1)*eta0 + sqrt(beta)*rho2/rho1*ThD*eta0+(beta/3)*DD*eta0;
Jacobiana = diag(3*alpha.*eta0) + (-(1/c^2)+1)*eye(N) + sqrt(beta)*rho2/rho1*ThD+(beta/3)*DD;
Inversa = inv(Jacobiana);
Eta = eta0 - Inversa*fun_F;
erro = Eta - eta0;
norma = norm(erro,inf);
eta0 = Eta;
contador = contador + 1;
end

init_eta=eta0';

end

initialu

function u = initialu(eta,ro1,ro2,alpha,beta,h2,L,l,PROPAGATION)

N=length(eta);

switch lower(PROPAGATION)
case 'two_directions';
u = zeros(1,N);
case 'one_direction'; %For one propagation direction fft(u) = - omega(k)*fft(eta)/k
etaeta = fft(eta);
aux = [1:N/2 -N/2 + 1:-1];
aux = pi*aux/l; % 2l period
omega_sobre_k = sqrt(1./(ones(1,N-1)+sqrt(beta)*ro2*aux.*coth(h2*aux/L)/ro1 + beta*aux.*aux/3));
omega_sobre_k = [ 0 , omega_sobre_k];
uu = -omega_sobre_k .* etaeta;
u = real(ifft(uu));
end

defineV

function V = defineV(eta,u,ro1,ro2,alpha,beta,h2,L,l)

N=length(eta);

uu = fft(u);

aux = [1:N/2 -N/2 + 1:-1];
aux = pi*aux/l; % 2l period
kernel = (ones(1,N-1) + sqrt(beta)*ro2*aux.*coth(h2*aux/L)/ro1 + beta*aux.*aux/3);
kernel = [1 + sqrt(beta)*L*ro2/(ro1*h2), kernel]; % discrete version

V = real(ifft(kernel.*uu));

RK4step

function [eta_next,V_next] = RK4step(eta,u,V,deltaxi,MODEL,ro1,ro2,alpha,beta,deltat,h2,L,l)

N=length(eta);

switch lower(MODEL)

```

```

case 'flat_linear'
    [K1, KK1] = computeEandF(eta,u,deltaxi,MODEL,ro1,ro2,alpha,beta,1);

    % Rigorously, eta should be modified, but u does not depend on eta in
    % this case.
    Phi_KK1 = computeu(eta, KK1, ro1, ro2, alpha, beta, h2, L, 1);
    [K2, KK2] = computeEandF(eta + deltat*K1/2, u + deltat*Phi_KK1/2, deltaxi, MODEL, ro1, ro2, alpha, beta, 1);

    Phi_KK2 = computeu(eta, KK2, ro1, ro2, alpha, beta, h2, L, 1);
    [K3, KK3] = computeEandF(eta + deltat*K2/2, u + deltat*Phi_KK2/2, deltaxi, MODEL, ro1, ro2, alpha, beta, 1);

    Phi_KK3 = computeu(eta, KK3, ro1, ro2, alpha, beta, h2, L, 1);
    [K4, KK4] = computeEandF(eta + deltat*K3, u + deltat*Phi_KK3, deltaxi, MODEL, ro1, ro2, alpha, beta, 1);

case 'flat_weakly_nonlinear'
    [K1, KK1] = computeEandF(eta,u,deltaxi,MODEL,ro1,ro2,alpha,beta,1);

    % Rigorously, eta should be modified, but u does not depend on eta in
    % this case.
    Phi_KK1 = computeu(eta, KK1, ro1, ro2, alpha, beta, h2, L, 1);
    [K2, KK2] = computeEandF(eta + deltat*K1/2, u + deltat*Phi_KK1/2, deltaxi, MODEL, ro1, ro2, alpha, beta, 1);

    Phi_KK2 = computeu(eta, KK2, ro1, ro2, alpha, beta, h2, L, 1);
    [K3, KK3] = computeEandF(eta + deltat*K2/2, u + deltat*Phi_KK2/2, deltaxi, MODEL, ro1, ro2, alpha, beta, 1);

    Phi_KK3 = computeu(eta, KK3, ro1, ro2, alpha, beta, h2, L, 1);
    [K4, KK4] = computeEandF(eta + deltat*K3, u + deltat*Phi_KK3, deltaxi, MODEL, ro1, ro2, alpha, beta, 1);

end

eta_next = eta + deltat*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
V_next = V + deltat*(KK1+2*KK2+2*KK3+KK4)/6;

```

computeEandF

```

function [E,F] = computeEandF(eta,u,deltaxi,MODEL,ro1,ro2,alpha,beta,1)
%to be modified for the long wave case

N=length(eta);
%finite difference differentiation
u_xi = ( 8*( [u(2:N) u(1)] - [u(N) u(1:N-1)] ) + [u(N-1:N) u(1:N-2)] - [u(3:N) u(1:2)] ) / (12*deltaxi);
eta_xi = ( 8*( [eta(2:N) eta(1)] - [eta(N) eta(1:N-1)] ) + [eta(N-1:N) eta(1:N-2)] - [eta(3:N) eta(1:2)] ) / (12*deltaxi);

switch lower(MODEL)
case 'flat_linear'
    E = u_xi;
    F = eta_xi;
case 'flat_weakly_nonlinear'
    E = (ones(1,N) - alpha*eta).*u_xi - alpha*u .* eta_xi;
    F = eta_xi - alpha*u .* u_xi;
end

```

computeu

```

function u = computeu(eta,V,ro1,ro2,alpha,beta,h2,L,1)

N=length(eta);

VV = fft(V);

aux = [1:N/2 -N/2 + 1:-1];
aux = pi*aux/L; % 2l period
kernel = (ones(1,N-1) + sqrt(beta)*ro2*aux.*coth(h2*aux/L)/ro1 + beta*aux.*aux/3);
kernel = [1 + sqrt(beta)*L*ro2/(ro1*h2), kernel]; % discrete version.

u = real(ifft(VV./kernel));

```


Referências

- [1] U. Ascher. *Numerical methods for evolutionary differential equations*. SIAM, Philadelphia, 2008.
- [2] J. S. Brodzinski, Estudo de um modelo dispersivo não linear para ondas internas. Tese de Doutorado, UFPR, 2016.
- [3] R. Camassa, W. Choi, H. Michallet, P. O. Rusas e J. K. Sveen. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 549: 1-23, 2006.
- [4] W. Choi e R. Camassa. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *Journal of Fluid Mechanics*, 396: 1-36, 1999.
- [5] R. Iório e V. Iório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [6] T. N. dos Santos, Ondas viajantes. Trabalho de conclusão de curso, UFPR, 2010.
- [7] G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics*. Cambridge Press, Wellesley, 1986.
- [8] L. N. Trefethen. *Spectral methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [9] D. G. A. Vigo, A. R. de Zárate, S. P. Oliveira e A. Nachbin. Fully discrete stability and dispersion analysis for a linear dispersive internal wave model, *Computational and Applied Mathematics*, 33: 203-221, 2014.
- [10] R. Vinchnevetesky e J. B. Bowles. *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*. SIAM, Philadelphia, 1982.
- [11] D. Vvedensky. *Partial Differential Equations with Mathematica*. Addison-Wesley, Reading, 1993.
- [12] A. R. de Zárate, Um modelo reduzido para ondas internas interagindo com estruturas submarinas a profundidades intermediárias. Tese de Doutorado, IMPA, 2007.
- [13] A. R. de Zárate, D. G. A. Vigo, A. Nachbin e W. Choi. A Higher-Order Internal Wave Model Accounting for Large Bathymetric Variations, *Studies in Applied Mathematics*, 122: 275-294, 2009.