

Raíla André

Análise da instabilidade de Jeans em sistemas auto-gravitantes e um modelo de estrutura estelar no contexto da teoria de gravidade $f(R)$

Curitiba

2017

Raíla André

**Análise da instabilidade de Jeans em sistemas auto-gravitantes e
um modelo de estrutura estelar no contexto da teoria de
gravidade $f(R)$**

Defesa de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutora em Física.

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Gilberto M. Kremer

Curitiba
2017

André, Raíla

Análise da instabilidade de jeans em sistemas auto-gravitantes e um modelo de estrutura estelar no contexto da teoria da gravidade f (R) / Raíla André. – Curitiba, 2017.

122 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós Graduação em Física

Orientador: Gilberto M. Kremer

Bibliografia: p. 116-122

1. Colapso gravitacional. 2. Teoria do transporte. 3. Gravidade (Física). I. Kremer, Gilberto M. II. Título.

CDD 526.7



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

ATA Nº15

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM FÍSICA

No dia vinte e tres de Fevereiro de dois mil e dezessete às 14:00 horas, na sala PE04, Departamento de Física - Bloco II - Centro Politécnico, foram instalados os trabalhos de arguição da doutoranda **RAILA ANDRE** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **Análise da Instabilidade de Jeans em Sistemas Auto-gravitantes e um Modelo de Estrutura Estelar no contexto da Teoria de Gravidade $f(R)$** . A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: GILBERTO MEDEIROS KREMER (UFPR), MARTIN GUSTAVO RICHARTE (UFPR), WILSON MARQUES JUNIOR (UFPR), THIAGO DOS SANTOS PEREIRA (UEL), WINFRIED ERNST WILHELM ZIMDAHL (UFES). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra a discente, para que a mesma expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. A aluna respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e a doutoranda deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela aprovação da aluna. A doutoranda foi convidada a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, GILBERTO MEDEIROS KREMER, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 23 de Fevereiro de 2017.


GILBERTO MEDEIROS KREMER

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


MARTIN GUSTAVO RICHARTE

Avaliador Externo (UFPR)


WILSON MARQUES JUNIOR

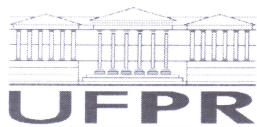
Avaliador Interno (UFPR)


THIAGO DOS SANTOS PEREIRA

Avaliador Externo (UEL)


WINFRIED ERNST WILHELM ZIMDAHL

Avaliador Externo (UFES)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **RAILA ANDRE** intitulada: **Análise da Instabilidade de Jeans em Sistemas Auto-gravitantes e um Modelo de Estrutura Estelar no contexto da Teoria de Gravidade $f(R)$** , após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 23 de Fevereiro de 2017.

GILBERTO MÉDEIROS KREMER

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

MARTIN GUSTAVO RICHARTE

Avaliador Externo (UFPR)

WILSON MARQUES JUNIOR

Avaliador Interno (UFPR)

THIAGO DOS SANTOS PEREIRA

Avaliador Externo (UEL)

WINFRIED ERNST WILHELM ZIMDAHL

Avaliador Externo (UFES)

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer pela orientação e por todo apoio durante o Mestrado e Doutorado;
- Ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro;
- À minha família pelo apoio e incentivo;
- Em especial aos amigos: Dra. Ana Cristina Sprotte Costa, Dra. Marina Elaine Wosniack e MSc. Rafael Marques da Silva pelas preciosas dicas e discussões no que concerne à parte numérica/computacional desta tese;
- E a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta tese, analisamos, primeiramente, a dinâmica de sistemas auto-gravitantes sem colisão descritos pela gravidade $f(R)$ e equação de Boltzmann na aproximação de campo fraco, focando na instabilidade de Jeans para esses sistemas. As equações de campo nessa aproximação foram obtidas no formalismo de Palatini. Através da solução das equações acopladas obtivemos o critério de colapso para fluido homogêneo infinito e sistemas estelares, dado pela relação de dispersão. O limite de instabilidade obtido foi comparado com os resultados da teoria Newtoniana e da teoria de gravidade $f(R)$ no formalismo métrico. A formação de estruturas mostrou-se favorecida no modelo descrito pela gravidade $f(R)$ via formulação de Palatini. Em seguida, analisamos a dinâmica de um sistema auto-gravitante sem colisão composto por matéria escura e bariônica. Em busca de uma descrição para essa dinâmica, empregamos a equação de Boltzmann sem colisão para os constituintes e a equação de Poisson para o campo gravitacional. Através da solução dessas equações, obtivemos o critério de colapso dado pela relação de dispersão. Encontramos o número de onda de Jeans e a massa de Jeans para dois valores diferentes de razão entre as velocidades de dispersão da matéria escura e bariônica. Os resultados obtidos foram comparados ao caso clássico. O modelo apresentado nesta tese provou ter um maior limite de instabilidade e portanto, apresentou uma vantagem na formação de estrutura. Apresentamos ainda, um modelo de estrutura estelar sob o ponto de vista da gravidade $f(R)$, via formalismo métrico, capaz de descrever algumas classes de estrelas (Anãs Brancas, Anãs Marrons, estrelas de Nêutrons, Gigantes Vermelhas e o Sol). Tal modelo teve como alicerces as equações de campo da gravidade $f(R)$, a equação de equilíbrio hidrostático e uma equação de estado politrópica. Comparamos os resultados obtidos com aqueles encontrados pela teoria Newtoniana. Constatou-se que, nestes sistemas, onde os regimes de maior curvatura emergem, as relações de estrutura estelar sofrem modificações. Apesar da simplicidade do modelo, os resultados obtidos foram satisfatórios. Os valores estimados para a pressão, densidade e temperatura das estrelas estão dentro dos determinados por observações.

Palavras-chaves: Instabilidade de Jeans, equação de Boltzmann, formalismo de Palatini, teoria de gravidade $f(R)$, formação de estruturas, massa de Jeans, comprimento de Jeans, matéria escura, cosmologia, modelos cosmológicos, estrutura estelar, equação politrópica, estrelas.

Abstract

In this thesis we analyzed the dynamics of collisionless self-gravitating systems described by the $f(R)$ -gravity and Boltzmann equation in the weak field approximation, focusing on the Jeans instability for these systems. The field equations in this approximation were obtained within the Palatini formalism. Through the solution of coupled equations we achieved the collapse criterion for infinite homogeneous fluid and stellar systems, which is given by a dispersion relation. The instability limit obtained was compared with the results of the standard theory and $f(R)$ -gravity in metric formalism. The formation of structure was favored in the model described by $f(R)$ -gravity in Palatini formulation. In sequence, we analyzed the dynamic of collisionless self-gravitating system composed by dark and baryonic matter. Searching for a description of this dynamics, we employed the collisionless Boltzmann equation for the constituents and the Poisson equation for the gravitational field. Through the solution of these equations we achieved the collapse criterion given by a dispersion relation. We found the Jeans wavenumber and Jeans mass for two different values of the ratio between the velocity dispersion of dark and baryonic matter. The results obtained were compared with the standard case. This model proved to have a higher limit of instability and therefore, exhibited an advantage in the structure formation. We also presented a model of stellar structure from the $f(R)$ -gravity point of view (in metric formalism) capable to describe some classes of stars (White Dwarfs, Brown Dwarfs, Neutrons stars, Red Giants and the Sun). This model was based on $f(R)$ -gravity field equations, hydrostatic equilibrium equation and a polytropic equation of state. We compared the results obtained with those found by the Newtonian theory. It has been found that in these systems, where high curvature regimes emerge, stellar structure equations undergo modifications. Despite the simplicity of this model, the results were satisfactory. The estimated values for pressure, density and temperature of the stars are within those determined by observations.

Key-words: Jeans instability, Boltzmann equation, Palatini formalism, $f(R)$ -gravity, structure formation, Jeans mass, Jeans length, dark matter, cosmology, cosmological models, stellar structure, polytropic equation, stars.

Sumário

Introdução	12
1 RELATIVIDADE GERAL	16
1.1 A Relatividade Geral	16
1.1.1 Equações de movimento em Relatividade Geral	18
1.1.2 Tensor métrico e a geometria do espaço-tempo	19
1.1.3 Relação entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico	20
1.1.4 Tensor de Curvatura	21
1.1.5 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura	22
1.1.6 Tensor Energia-Momento	22
1.1.7 As equações de campo de Einstein	22
1.1.7.1 A ação do campo gravitacional	23
1.1.7.2 A ação do campo de matéria	25
1.1.7.3 A ação total	25
2 COSMOLOGIA	27
2.1 A cosmologia como ciência	27
2.2 Fundamentação	28
2.2.1 Princípio Cosmológico	28
2.2.2 A lei de Hubble	29
2.3 O Big Bang	30
2.3.1 A radiação cósmica de fundo	31
2.4 A densidade dos constituintes do Universo	32
2.4.1 Bárions	32
2.4.2 Radiação	33
2.4.3 Matéria escura	33
2.4.4 Energia escura	34
2.5 A cronologia do Universo	34
2.5.1 A Era de Planck	35
2.5.2 A inflação	35
2.5.3 A Era da Radiação	35

2.5.4	A Era da Matéria	36
2.5.5	A Era da Energia Escura	36
3	A TEORIA $f(R)$ DA GRAVITAÇÃO E OS FORMALISMOS DE PALATINI E MÉTRICO	37
3.1	A generalização da Relatividade Geral	37
3.1.1	Gravidade $f(R)$: Introdução	38
3.1.2	Gravidade $f(R)$ no formalismo métrico	39
3.1.3	Gravidade $f(R)$ no formalismo de Palatini	40
3.2	Matéria escura e energia escura como efeitos de curvatura	40
4	A INSTABILIDADE DE JEANS	43
4.1	A instabilidade de Jeans	43
4.1.1	Teoria de perturbação	44
4.1.1.1	Componentes estáticos	44
4.1.1.2	Perturbações	44
4.1.1.3	Equações perturbadas	44
4.1.1.4	Relação de dispersão	45
4.2	O número de onda e a massa de Jeans	45
4.2.1	O número de onda de Jeans via análise dimensional	46
4.2.1.1	Análise através da pressão	46
4.2.1.2	Análise através da escala de tempo	47
4.3	Análise da instabilidade de Jeans via equação de Boltzmann	48
4.3.1	A equação de Boltzmann	48
4.3.2	Sistemas auto-gravitantes via equação de Boltzmann	49
4.3.3	Análise de sistemas auto-gravitantes via equação de Boltzmann para a gravidade $f(R)$ no formalismo métrico	51
5	SISTEMAS AUTO-GRAVITANTES EM TEORIA $f(R)$ NO FORMALISMO DE PALATINI	53
5.1	Formalismo de Palatini para gravidade $f(R)$ no limite Newtoniano	53
5.1.1	Conexão afim generalizada na teoria da gravidade $f(R)$	56
5.1.2	Tensor e escalar de Ricci generalizados na teoria de gravidade $f(R)$	56
5.2	O limite Newtoniano	58
5.2.1	Conexão afim e escalar de Ricci generalizados no limite Newtoniano	58
5.2.2	Tensor de Ricci generalizado e equações de campo no limite Newtoniano	60
5.3	Equação de Boltzmann sem colisão no limite Newtoniano e a relação de dispersão	61
5.4	A massa de Jeans segundo a gravidade $f(R)$ na formulação de Palatini	64

5.5	Conclusões	67
6	ANÁLISE DA INSTABILIDADE DE UM SISTEMA COMPOSTO POR MATÉRIAS ESCURA E BARIÔNICA	69
6.1	Sistemas de equações e a relação de dispersão	69
6.2	Conclusões	73
7	MODELO DE ESTRUTURA ESTELAR EM EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO NO CONTEXTO DA TEORIA $f(\mathcal{R})$	74
7.1	A equação de Lane-Emden na teoria Newtoniana	75
7.2	A equação de Lane-Emden para um modelo descrito pela teoria $f(\mathcal{R})$	76
7.3	Modelos estelares politrópicos	78
7.3.1	Equação Politrópica	78
7.3.2	As soluções da equação de Lane-Emden	80
7.4	Breve descrição de algumas classes de estrelas	81
7.4.1	Estrelas de Nêutrons	81
7.4.2	Anãs Marrons	82
7.4.3	Gigantes Vermelhas	83
7.4.4	Anãs Brancas	84
7.4.5	Sol	85
7.5	As equações da estrutura estelar	86
7.5.1	Modelo de estrutura estelar segundo à teoria Newtoniana	86
7.5.1.1	Raio	86
7.5.1.2	Massa	86
7.5.1.3	Relação Massa-Raio	87
7.5.1.4	Condensação Central	87
7.5.1.5	Pressão Central	87
7.5.1.6	Temperatura Central	88
7.5.2	Modelo de estrutura estelar segundo à teoria de gravidade $f(\mathcal{R})$	89
7.5.2.1	Raio	89
7.5.2.2	Massa	89
7.5.2.3	Relação Massa-Raio	90
7.5.2.4	Condensação Central	90
7.5.2.5	Pressão Central	90
7.5.2.6	Temperatura Central	91
7.5.3	Estimativa de um valor para a massa atômica estelar	91
7.6	Soluções Politrópicas	93
7.6.1	Pressão	93
7.6.2	Temperatura	98

7.6.3	Densidade	103
7.7	Luminosidade	108
7.8	Conclusões	111
Conclusões		114
Referências		117

Introdução

A cosmologia busca por modelos que possam descrever o Universo em todas as Eras e em diferentes escalas. O estudo da expansão acelerada e da formação de estruturas (galáxias e aglomerado de galáxias) está presente neste contexto. A Relatividade Geral foi a primeira teoria empregada na tentativa de uma descrição do Universo. Ela tem emergido como uma teoria altamente bem sucedida na cosmologia, sobrevivendo a vários testes. Ainda assim, existem várias indicações de que podem estar incompletos.

O primeiro problema é a discordância entre os valores predito e observado da densidade de matéria no Universo. O valor predito para a matéria ordinária [21], aquela que compõe tudo o que conhecemos, também denominada *matéria bariônica*, decorre do ajuste da teoria, na fase inicial de expansão, e tem por objetivo o cálculo das quantidades dos elementos químicos presentes no Universo [5]. Os primeiros elementos foram sintetizados, de acordo com o modelo, na fase quente e densa do Universo e serviram de matéria prima para a formação dos demais elementos no interior das estrelas [4]. Por outro lado, o valor observado da densidade de matéria é obtido a partir da contagem de objetos luminosos (estrelas, galáxias, etc) conhecidos. Observou-se uma diferença entre os valores de densidade de matéria prevista e observada. Uma possível explicação para esta diferença seria devido à presença da matéria escura, um tipo de matéria que até o presente momento não foi detectada. A princípio, acredita-se que ela só interaja gravitacionalmente.

O segundo problema é observado na dinâmica das galáxias. A velocidade com que elas se movimentam exige que haja mais matéria do que é observado para mantê-las em seus aglomerados. Isto também leva a crer na existência de uma matéria desconhecida responsável por esta dinâmica, a matéria escura.

Outra questão surgiu em 1998, quando observações da magnitude aparente e do desvio para vermelho de supernovas começaram a indicar que o Universo não só está em expansão como está em expansão acelerada. Como forma de explicar essa aceleração, surgiu uma hipótese de existência de um tipo de energia desconhecida, chamada *energia escura*, que poderia atuar contra a gravidade [67]. Observações atuais das anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas

(realizadas pelo satélite *WMAP*), indicam que aproximadamente 72% da densidade atual do Universo é composta pela energia escura, 23% por matéria escura e apenas 4% pela matéria conhecida, composta por bárions e léptons [12].

Diante desta situação, dois enfoques diferentes para tentar solucionar esses problema surgiram na cosmologia: a introdução de entes desconhecidos (matéria escura e energia escura) na Relatividade Geral e a generalização desta teoria, onde a geometria do espaço-tempo se modifica e tais entes não estão presentes. Desta generalização emergiu a teoria de gravidade conhecida como teoria de gravidade modificada $f(R)$. Essa nova teoria é, na verdade, uma família de teorias, cada uma definida por uma função diferente do escalar de Ricci. No caso em que $f(R) = R$, recupera-se a Relatividade Geral. Uma consequência importante dessa nova teoria reside no fato de que, em princípio, não seria necessário introduzir entidades desconhecidas, matéria escura e energia escura, para explicar a expansão acelerada do Universo e a formação de estruturas, tais como galáxias e aglomerado de galáxias [41].

Outro problema que tem sido investigado na cosmologia é o problema da formação de estruturas. Existem muitos modelos que tentam explicar quais são as condições e em que época surgiram as estruturas. A instabilidade de Jeans está, neste contexto, buscando um entendimento sobre quais condições uma pequena perturbação de uma nuvem de gás cresce exponencialmente [93]. Um caminho simples para entender esses critérios é pensar em argumentos de balanço de força. O colapso ocorre se a força gravitacional (dirigida para o interior da nuvem) é maior que a força devido à pressão do gás (dirigida para fora da nuvem). Os parâmetros usados para quantificar essa instabilidade são o número de onda de Jeans e a massa de Jeans, que serão discutidos ao longo desta tese.

Com o objetivo de estudar a formação de estruturas, adotamos primeiramente, um modelo descrito pela gravidade $f(R)$ do ponto de vista da formulação de Palatini [75], capaz de descrever a dinâmica e o colapso de sistemas auto-gravitantes sem colisão. Para investigar essa dinâmica, assume-se sob certas condições que o sistema, por exemplo, uma galáxia, pode ser aproximada por um fluido contínuo. Neste contexto, a equação de Boltzmann [62] sem colisão, compõe o modelo a fim de descrever o comportamento estatístico do sistema termodinâmico em questão, juntamente com as equações de Poisson para os campos. Outra aproximação necessária para estudar a dinâmica dos sistemas de interesse, é a aproximação Newtoniana [93]. Essa aproximação é aplicada a sistemas físicos que exibem campo gravitacional fraco, com variação lenta ou estática e objetos que movem-se lentamente comparados com a velocidade da luz. No limite Newtoniano, o espaço é aproximadamente plano, portanto um espaço de Minkowski em primeira aproximação. Esse modelo provou ter um alto limite de instabilidade, sugerindo o favorecimento na formação de estruturas, inclusive na época em que o Universo era quente. Isto indicou que a formação de estruturas pode ter tido um início anterior ao que é previsto pela teoria clássica.

Seguindo o mesmo objetivo, abordamos ainda sob um diferente enfoque, um modelo para

analisar a dinâmica e o colapso de um sistema auto-gravitante sem colisão, composto por matéria escura e matéria bariônica. Neste caso, consideramos uma equação de Boltzmann para cada constituinte e a equação de Poisson para o campo gravitacional. Esse modelo mostrou um alto limite de instabilidade, favorecendo a formação de estruturas, indicando que estas podem ter começado a se formar mais cedo, na época que a matéria escura dominava.

Importante citar que, para diferenciarmos o formalismo métrico e o formalismo de Palatini convém, através da geometria diferencial, distinguirmos os conceitos de métrica e conexão afim para um melhor entendimento. A métrica é definida como a medida de distância entre dois pontos no *manifold* ou como a medida de ângulo no espaço tangente. A conexão afim, por sua vez, é definida como o mapa entre os espaços tangentes que definem o transporte paralelo. Portanto, matematicamente, a métrica e a conexão são quantidades independentes [45]. Da mesma forma, para ambos os casos pode-se definir geodésicas diferentes. A geodésica métrica é a menor curva obtida entre dois pontos (curva que minimiza a ação), já a geodésica afim é definida como a curva com o vetor tangente covariantemente constante, ou seja, as geodésicas métrica e afim são diferentes exceto para o caso Levi-Civita. A partir dessas considerações, podemos aplicar o princípio variacional à ação proposta no modelo, considerando a métrica e a conexão como quantidades dependentes ou independentes. No caso do formalismo métrico, considera-se que tais quantidades são dependentes. A variação da ação neste contexto leva-nos às equações de campo de Einstein. O formalismo de Palatini, por sua vez, leva às equações de campo de Einstein com $R_{\mu\nu}$ e R generalizados e uma equação responsável pela dinâmica da conexão afim [43]. Neste caso, a conexão afim emerge naturalmente da variação da ação, ao contrário do formalismo métrico. Essas diferenças marcadas entre tais formalismos geram algumas diferenças nos resultados obtidos e conseqüentemente, diferenças substanciais nas interpretações físicas.

Neste âmbito, apresentamos ainda os resultados obtidos para um modelo estelar segundo a teoria de gravidade $f(R)$ no formalismo métrico. O interesse desse modelo, no presente contexto, manifesta-se no fato de que, devido ao expressivo campo gravitacional atuante, o interior das estrelas pode ser visto como locais apropriados para testar teorias alternativas de gravidade. Nestas regiões, os regimes de alta curvatura podem emergir e modificar as relações de estrutura estelar. Desta forma, tivemos como objetivo mostrar que as grandezas como pressão, temperatura e densidade podem ser consistentemente alcançadas pelas teorias de gravidade estendida, descrevendo diferentes classes de estrelas; e como se dão as mudanças esperadas nos valores dessas grandezas. Confrontando ainda estes resultados com aqueles relativos à teoria Newtoniana e com dados observacionais, constatamos que a melhor descrição de estrelas massivas foi obtida para a teoria $f(R)$. No caso das estrelas de baixa massa, a teoria $f(R)$ não se mostrou necessária, uma vez que a melhor descrição destas estrelas foi alcançada pelo modelo Newtoniano.

No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos sobre a Relatividade Geral, teoria por trás dos modelos cosmológicos. Em seguida, no segundo capítulo, apresentamos uma breve introdução

à cosmologia. No capítulo subsequente, a teoria $f(R)$ da gravitação, nos formalismos métrico e de Palatini, é explorada e o quarto capítulo é destinado à instabilidade de Jeans. A partir do quinto capítulo, apresentamos os resultados desta tese, que visa estudar a formação de estruturas através da análise de instabilidade de sistemas auto-gravitantes e a estrutura estelar em gravidade $f(R)$.

Capítulo 1

Relatividade Geral

Neste primeiro capítulo, a Teoria da Relatividade Geral será apresentada com o intuito de facilitar a compreensão do trabalho desenvolvido nesta tese.

1.1 A Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral foi proposta por Albert Einstein em 1915 [36] com o objetivo de generalizar a teoria da gravitação Newtoniana. Esta teoria considera os conceitos sobre o espaço e o tempo apresentados na Relatividade Restrita, proposta por Einstein em 1905, e propõe a generalização do princípio da relatividade para sistemas onde o campo gravitacional está presente. Esta generalização trouxe consequências profundas, algumas delas serão discutidas ao longo deste capítulo.

Desde a Antiguidade, procura-se entender o movimento de um corpo em relação a um outro em movimento uniforme ou acelerado. Esse movimento relativo é a base conceitual da teoria da Relatividade. Os primeiros a se preocuparem com esta questão foram os gregos. No entanto, eles tiveram grandes dificuldades em compreender o movimento relativo. Tais dificuldades permaneceram por muito tempo até serem retomadas no século *XVII* por Galileu Galilei, quando propôs seu princípio da relatividade que culminou na ideia de que as leis fundamentais da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, em outras palavras, dois observadores que se movem com velocidade uniforme, um em relação ao outro, devem formular as leis da natureza da mesma forma. E em particular, nenhum observador pode distinguir entre repouso absoluto e movimento absoluto. Desta forma, não existe movimento absoluto, mas apenas movimento relativo entre os corpos [83].

Mas o problema do movimento relativo ainda não estava completamente solucionado, afinal Galileu descreveu, através do seu princípio, apenas os casos em que o movimento se dá com velocidade uniforme. A generalização desta questão veio com a Relatividade Geral, onde Einstein investigou a equivalência entre movimento acelerado e gravidade. Ao postular que um observador

não pode distinguir os efeitos da gravidade dos da aceleração inercial, observando a sua vizinhança, Einstein estende a relatividade do movimento a todos os observadores, ao mesmo tempo que constrói uma nova teoria da gravitação. Desta maneira, ele ultrapassa a limitação da Relatividade Restrita, que estabelece uma equivalência apenas para os observadores inerciais. Na presença de um campo gravitacional é indispensável considerar observadores acelerados [13].

Dentro deste contexto, segundo Einstein, o campo gravitacional passa a ter uma existência relativa, assim como, por exemplo, o campo elétrico gerado pela indução eletromagnética. A equivalência de um observador em queda livre é dada por um referencial inercial, onde também não se nota a aceleração gravitacional. É como se os objetos, neste referencial, estivessem acompanhando seu movimento, gerando essa percepção [36]. Essa conclusão obtida por Einstein é conhecida por *Princípio de Equivalência Forte*. Juntamente como esse princípio, une-se o *Princípio da Equivalência Fraco*, que considera a equivalência entre as massas gravitacional e inercial [39].

A extensão do postulado da Relatividade traz consigo algumas questões, como no caso de dois observadores acelerados em relação ao outro. Neste caso, qualquer um deles pode afirmar que está em repouso em relação a um terceiro observador na Terra, se aceitar a presença de um campo gravitacional. Podemos ilustrar esta situação considerando um certo observador X em queda livre e um observador Y , em repouso no campo gravitacional terrestre, que observa X acelerando durante sua queda. Para X , em queda livre, não parece haver campo gravitacional, podendo-se até mesmo afirmar que ele está em repouso e que Y está acelerando para cima. Podemos ilustrar ainda da seguinte maneira: imaginemos dois astronautas lado a lado, à deriva no espaço, longe de qualquer campo gravitacional. O astronauta A , liga num certo instante os motores de sua nave e inicia um movimento acelerado. De acordo com o astronauta B , em movimento uniforme em relação a um observador na Terra, A está acelerado, no entanto, A pode admitir que está em repouso num campo gravitacional e que B está em queda livre nesse mesmo campo gravitacional [36]. Através desses exemplos, pode-se concluir que enquanto os observadores em movimento relativo uniforme são totalmente equivalentes do ponto de vista das leis físicas, os dois observadores em movimento relativo não uniforme não são, afinal estar à deriva no espaço vazio em movimento uniforme é diferente de acelerar no espaço exterior. No entanto, esta única constatação não permitiu que Einstein generalizasse em absoluto a equivalência entre todos os movimentos acelerados, faltavam ainda o *Princípio da Equivalência Forte* e a consideração sobre a luz.

Vale lembrar que o princípio enunciado por Galileu, de que todos os corpos caem com a mesma aceleração num campo gravitacional, não tem uma explicação na teoria Newtoniana da gravitação. Foi incorporado nessa teoria através da igualdade numérica entre massas inerciais e gravitacionais. Até então, esta igualdade não tinha sido explicada. Einstein concluiu que esta igualdade surge de uma conexão entre a aceleração e a gravidade, que nomeou de *Princípio da Equivalência*.

Costuma-se expressar o *Princípio da Equivalência* por meio do *Princípio da Covariância Geral*, que postula que "uma equação é válida em um campo gravitacional arbitrário se ela vale na ausência

de gravidade, ou seja, se ela concordar com a Relatividade Restrita e se ela preservar sua forma sob uma transformação geral de coordenadas, ou em outras palavras, pode ser escrita de forma covariante" [93].

Einstein foi capaz de deduzir algumas características dos campos gravitacionais a partir da análise de movimentos acelerados no espaço-tempo Minkowskiano. Em particular, examinou a situação de um observador num disco em rotação em torno de um eixo que passa por seu centro. A partir disto, formulou a seguinte questão: qual a razão entre o perímetro do disco e seu raio para um observador em rotação com o disco e para um outro observador em repouso? É certo que o observador em repouso dará a resposta de acordo com a geometria Euclidiana e dirá que é 2π , todavia o observador em rotação, para quem as réguas colocadas ao longo da circunferência do disco estão contraídas no sentido do movimento, afirmará que a razão é maior do que 2π , visto que o raio do disco não se altera, uma vez que, segundo a Relatividade Restrita, a contração e a dilatação ocorrem na direção do movimento, e que são necessárias mais réguas para perfazer o perímetro do disco. Isto significa que a geometria nesta situação não é a Euclidiana. A partir desta constatação, Einstein foi levado a pensar que para um observador num campo gravitacional, de acordo com o *Princípio da Equivalência*, a geometria espacial também não seria Euclidiana. Provavelmente, a análise deste problema contribuiu para a ideia de representar a gravidade pela curvatura do espaço-tempo. Neste contexto, o espaço-tempo e o campo gravitacional não são duas entidades separadas, mas duas componentes de uma única entidade.

Para lidar com espaço-tempo curvo, Einstein recorreu à geometria diferencial de Riemann. No caso do espaço-tempo quadri-dimensional da Relatividade Geral, o tensor métrico desempenha um duplo papel: descreve a geometria do espaço-tempo e o campo gravitacional. E a energia, presente na matéria é a fonte dos campos gravitacionais que satisfazem equações diferenciais de segunda ordem da teoria. Faltava então, obter estas equações, conhecidas como equações de campo de Einstein.

1.1.1 Equações de movimento em Relatividade Geral

A partir desta seção, serão apresentados os elementos básicos para a construção da Relatividade Geral, tais como o tensor métrico, a conexão afim, os tensores de curvatura, de Ricci e Energia-Momento, além das equações de campo da teoria. Para começar, considere uma partícula em queda livre sob ação de um campo gravitacional, em um sistema de coordenadas θ^α que se move juntamente com a partícula [93]. Portanto, neste referencial não se observa aceleração

$$\frac{d^2\theta^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (1.1)$$

onde τ é o tempo próprio conhecido da Relatividade Restrita.

Para relacionarmos o sistema de coordenadas θ^α com um sistema de coordenadas cartesianas x^μ ,

em repouso em relação ao laboratório, utilizamos a regra da cadeia

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Derivando e empregando novamente a regra da cadeia, chegamos a

$$\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.3)$$

Multiplicando por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta^\alpha}$, obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.4)$$

de onde definimos a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (1.5)$$

A conexão afim é um objeto geométrico de grande importância na geometria diferencial; ela conecta espaços tangentes próximos, permitindo que campos vetoriais tangentes sejam diferenciados como se fossem funções sobre a variedade com valores em um espaço vetorial fixo [36]. Vale ressaltar que a conexão afim não se trata de um tensor, embora aparente ser, pois não obedece a regra que rege a transformação de tensores e que governa o transporte paralelo de campos tensoriais ao longo de uma dada curva no espaço-tempo.

1.1.2 Tensor métrico e a geometria do espaço-tempo

Define-se como métrica, o elemento de linha ds^2 que mede a distância entre dois pontos em um espaço de dimensão qualquer. No referencial inercial local é válido o uso da métrica do espaço-tempo plano da Relatividade Restrita, conhecida como métrica de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta, \quad (1.6)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a matriz representada abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Pode-se reescrever a métrica da seguinte maneira

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.8)$$

de onde define-se o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\theta^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (1.9)$$

Desta forma, temos a relação entre o tensor métrico segundo o referencial do laboratório $g_{\mu\nu}$ e o tensor métrico segundo o referencial local $\eta_{\alpha\beta}$. Assim, pode-se reescrever a métrica do seguinte modo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.10)$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é importante no contexto da Relatividade Geral. É a partir dele que todas as quantidades geométricas são obtidas. Através dele mede-se a distância entre dois pontos e ângulos entre vetores em um espaço-tempo curvo.

Pode-se definir a versão contravariante do tensor métrico da seguinte maneira

$$g^{\nu\sigma} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial\theta^\beta}. \quad (1.11)$$

Calculando o produto entre (1.9) e (1.11), obtemos

$$g^{\nu\sigma} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\sigma, \quad (1.12)$$

onde a relação $\eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\alpha} = \delta_\mu^\beta$ foi empregada.

Por fim, define-se a quantidade g como o determinante do tensor métrico:

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (1.13)$$

1.1.3 Relação entre a Conexão Afim e o Tensor Métrico

O objetivo, nesta seção, é encontrar uma expressão que relacione a conexão afim e o tensor métrico. Para isto, multiplica-se (1.5) por $\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\lambda}$, obtendo-se

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2\theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (1.14)$$

Calculando a derivada de (1.9) em relação a x^λ , temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2\theta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial\theta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2\theta^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.15)$$

Fazendo-se uso de (1.14), chega-se a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial\theta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial\theta^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.16)$$

Reconhecendo-se $g_{\rho\nu}$ e $g_{\rho\mu}$ na expressão acima e utilizando-se a propriedade de simetria do tensor métrico, simplifica-se (1.16) para se obter

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (1.17)$$

Fazendo-se a soma de três termos da expressão acima com índices permutados e observando-se que a conexão afim é simétrica em relação a seus índices inferiores, obtêm-se

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu}. \quad (1.18)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação por $g^{\nu\sigma}$, encontra-se a expressão que relaciona a conexão afim (conhecida na Relatividade Geral por símbolo de Christoffel) e o tensor métrico

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (1.19)$$

1.1.4 Tensor de Curvatura

Sabe-se que a derivada parcial de um tensor não gera outro tensor. A operação que realiza esta tarefa é conhecida como derivada covariante

$$\nabla_\lambda V^\mu = V^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa. \quad (1.20)$$

No entanto, a derivada covariante não é comutativa ao contrário da derivada parcial. Para um tensor V^λ definimos o seguinte comutador

$$[\nabla_\kappa \nabla_\nu] V^\lambda = \nabla_\kappa \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\kappa V^\lambda. \quad (1.21)$$

Aplicando-se a definição de derivada covariante (1.20) na expressão acima, obtêm-se

$$[\nabla_\kappa \nabla_\nu] V^\lambda = \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \right) V^\mu. \quad (1.22)$$

A partir desta equação, define-se o tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma. \quad (1.23)$$

Utilizando-se a propriedade do tensor métrico de abaixamento de índice, define-se o tensor de Riemann covariante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\sigma. \quad (1.24)$$

Tal tensor possui as seguintes propriedades:

(i) Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \quad (1.25)$$

(ii) Anti-Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}. \quad (1.26)$$

(iii) Ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (1.27)$$

1.1.5 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

Define-se o tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\nu\rho} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}. \quad (1.28)$$

Contraindo-se o tensor de Ricci com a métrica, obtêm-se o escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (1.29)$$

que relaciona cada ponto do espaço-tempo a um único número real.

1.1.6 Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ representa o fluxo de quadri-momento p_{μ} , através da hiper-superfície que engloba as fontes de campo. Este tensor é simétrico, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. As suas componentes carregam consigo significados físicos: a componente T_{00} é a densidade de energia, as componentes espaço-temporais T_{i0} representam a densidade da i -ésima componente do momento, as componentes espaciais T_{ii} designam o fluxo da i -ésima componente do momento através da superfície, cuja direção normal está na direção i , e as componentes espaciais T_{ij} com $i \neq j$, representam o fluxo da i -ésima componente do momento através da superfície, cuja direção normal está na direção j .

A lei de conservação do tensor energia-momento é expressa pela condição de nulidade da derivada covariante de $T_{\mu\nu}$,

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.30)$$

1.1.7 As equações de campo de Einstein

A teoria da gravitação de Einstein não somente nos informa que o espaço-tempo é curvo, mas também de quanto é sua curvatura. Ela nos fornece um conjunto de equações que relacionam tal

curvatura com a distribuição de matéria-energia no espaço. Nas palavras do físico John Wheeler, a matéria diz ao espaço como deve se curvar e a geometria diz à matéria como ela deve se mover.

As equações propostas por Einstein são chamadas de equações de campo, pois descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional. Para se obter tais equações, parte-se do princípio da mínima ação

$$\delta S_T = 0, \quad (1.31)$$

onde S_T é a soma da ação do campo gravitacional S_g com a ação do campo de matéria S_m . As expressões para essas ações seguem logo abaixo:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_g d^4x; \quad (1.32)$$

$$S_m = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x, \quad (1.33)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento invariante do espaço-tempo, G é a constante gravitacional de Newton, $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ são as densidades de Lagrangeana do campo gravitacional e da matéria, respectivamente. Vale ainda citar que a ação deve ser invariante sob transformações de Lorentz, ou seja, sua integral não deve depender da escolha do sistema de coordenadas. Logo, a ação deve ser uma grandeza escalar [65].

Desta forma, \mathcal{L}_g deve ser um escalar. Tal escalar deve ter pelo menos derivadas segundas da métrica não nulas, já que a métrica propriamente dita e suas derivadas primeiras podem ser anuladas por uma escolha de referencial. Sabe-se que o tensor de Riemann satisfaz esta exigência, e que por sua vez, o único escalar que pode ser construído através dele é o escalar de curvatura R . Portanto, reescreve-se a ação total como

$$S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x, \quad (1.34)$$

onde $\int \sqrt{-g} R d^4x$ é a ação de Einstein-Hilbert.

1.1.7.1 A ação do campo gravitacional

Usando-se a definição do escalar de curvatura (1.29) na ação (1.32) e aplicando-se o princípio da mínima ação, obtêm-se

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \delta \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (1.35)$$

onde a variação é feita com relação a $g_{\mu\nu}$.

Para se obter $\delta \sqrt{-g}$, utiliza-se a seguinte relação

$$M^{ij} = \frac{\mathcal{M}_{ij}}{m}, \quad (1.36)$$

onde M^{ij} é uma matriz qualquer, \mathcal{M}_{ij} é seu o cofator e $m = \det(M_{ij})$, que pode ser escrita como

$$m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \mathcal{M}_{ij}, \quad (1.37)$$

onde $M^{ij} = (M_{ij})^{-1}$. Derivando-se (1.37) com relação a M_{ij} e usando-se (1.36), chega-se a

$$\frac{\partial m}{\partial M_{ij}} = m M^{ij}. \quad (1.38)$$

De posse destas expressões e sabendo-se que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g, \quad (1.39)$$

renomeia-se m por $g = \det(g_{\mu\nu})$ e M^{ij} por $g^{\mu\nu}$. Através de (1.38), obtêm-se

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.40)$$

Lembrando-se que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, chega-se a

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.41)$$

Substituindo (1.41) em (1.40),

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.42)$$

Finalmente, aplicando-se este resultado a (1.39), chega-se à expressão desejada

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.43)$$

Desta maneira, reescreve-se (1.35) como

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x. \quad (1.44)$$

Para se calcular a variação de $R_{\mu\nu}$, lembra-se que $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ e usa-se a definição do tensor de Riemann (1.23)

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \delta \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} + \delta \Gamma^\lambda_{\nu\eta} \Gamma^\eta_{\mu\lambda} - \delta \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\eta} - \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\eta} \Gamma^\eta_{\mu\nu}. \quad (1.45)$$

Escrevendo-se

$$\nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \partial_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}; \quad (1.46)$$

$$\nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

e substituindo-se em (1.45), reescreve-se $\delta R_{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (1.48)$$

Usamos este resultado para calcular a integral do segundo termo de (1.44):

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \left[\nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \right] d^4x. \quad (1.49)$$

Lembrando-se que a derivada covariante do tensor métrico $\nabla_\lambda g^{\mu\nu}$ se anula, pode-se mover $g^{\mu\nu}$ para dentro do colchetes, realizando-se troca de índices apenas no primeiro termo da expressão

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d^4x. \quad (1.50)$$

Os termos dentro dos parênteses são densidades vetoriais de peso +1, desta maneira pode-se trocar suas derivadas covariantes por derivadas ordinárias [36]. Sendo assim, é possível utilizar o teorema da divergência, transformando a integral de volume em uma de superfície, que se anula na fronteira de integração. Desta forma, obtêm-se

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d^4x = \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) dS_\lambda = 0. \quad (1.51)$$

Assim, a variação da ação do campo gravitacional é dada pela seguinte expressão

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.52)$$

1.1.7.2 A ação do campo de matéria

Variando-se a ação do campo de matéria (1.33) com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtêm-se

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.53)$$

Define-se tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.54)$$

1.1.7.3 A ação total

Combinando (1.52) e (1.53), escreve-se a variação da ação total com relação a $g_{\mu\nu}$ como

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.55)$$

Como o termo $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, o princípio da ação mínima só será satisfeito se tivermos

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.56)$$

Esta equação é conhecida como as equações de campo de Einstein, e definimos $G_{\mu\nu}$ como o tensor de Einstein. O lado direito descreve a distribuição das fontes de matéria-energia e o lado esquerdo a geometria do espaço-tempo responsável por esta distribuição.

Fazendo uma contração com $g^{\mu\nu}$ pode-se reescrever as equações de Einstein (1.56) como

$$R = \frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (1.57)$$

onde T é o traço do tensor energia-momento. Substituindo (1.57) em (1.56),

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.58)$$

Para vácuo, $T_{\mu\nu}$ é nulo e as equações de campo de Einstein se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.59)$$

Através deste capítulo introduzimos os aspectos básicos das teorias da Relatividade Geral. As equações de movimento derivadas a partir do *Princípio da Covariância* foram obtidas. O tensor métrico e a conexão afim foram definidos a partir destas. Mostramos a relação entre a geometria do espaço-tempo e o tensor métrico. Os tensores de curvatura de Riemann e de Ricci foram apresentados, assim como o próprio escalar deste último. A definição de tensor energia-momento foi introduzida, bem como a lei de conservação a que este é submetido. Por fim, a ação de Einstein-Hilbert foi apresentada juntamente com a ação responsável pelo setor da matéria. As equações de campo de Einstein com fontes, derivadas destas ações, foram obtidas. Mostrou-se também, a forma de tais equações quando não se tem fontes.

Capítulo 2

Cosmologia

Neste capítulo serão apresentadas, de forma breve, algumas ideias e conceitos presentes na cosmologia. Entre os assuntos abordados estão o princípio cosmológico, a expansão cósmica, a constituição do Universo e as suas Eras.

2.1 A cosmologia como ciência

Mas afinal, o que é cosmologia? Cosmologia é o estudo da estrutura dinâmica do Universo como um todo, ou seja, é a ciência que estuda a estrutura, a evolução e a composição do Universo.

A cosmologia moderna surgiu no século XX com a teoria da Relatividade. O primeiro artigo foi escrito por Albert Einstein em 1917 [83]. Neste trabalho, ele analisou o Universo como um todo através da Relatividade, introduzindo o conceito da constante cosmológica. Essa constante foi proposta com o intuito de permitir soluções cosmológicas estáticas.

Percebeu-se, posteriormente, que mesmo com a presença desta constante cosmológica, era possível obter soluções dinâmicas nas quais o Universo poderia se expandir ou se contrair. Essas soluções são conhecidas hoje, genericamente, por soluções de Friedmann, nome que faz referência a Alexander Friedmann, matemático que obteve estas equações em 1922 [16].

Com o desenvolvimento de melhores telescópios no início do século XX, foi possível estudar o Universo em escalas ainda não exploradas. Edwin Hubble foi um dos que iniciaram um estudo sistemático de outras galáxias além da nossa, a Via Láctea. Ele notou que elas pareciam estar se afastando e que a velocidade deste afastamento aumentava com a distância relativa entre a galáxia observada e a Via Láctea [84].

Observações como estas permitiram estabelecer fundamentos para o modelo cosmológico padrão. Um deles é o princípio cosmológico que estabelece o Universo como homogêneo e isotrópico em larga escala [67]. Estas e outras observações permitiram também que a cosmologia se afirmasse como ciência.

Hoje a cosmologia enfrenta diversos desafios, entre eles estão o problema conhecido como curva de rotação de galáxia e a expansão acelerada observada atualmente, que ainda não tem uma causa confirmada. Em 1933, os astrônomos observaram um fato bastante curioso ao estudar as curvas de rotação das galáxias espirais. Observaram grandes diferenças entre as velocidades de rotação do disco, do gás e do halo de uma galáxia espiral típica. Devido a grande diferença observada entre a velocidade da galáxia e a do disco, foi levantada a hipótese de que o halo continha muito mais matéria do que imaginado e que essa matéria somente sofria a ação da gravidade, não emitindo nenhum tipo de radiação eletromagnética. A esse ente estranho foi dado o nome de *matéria escura*. Segundo a mecânica Newtoniana, a velocidade de uma galáxia espiral deve variar em função da posição do elemento de massa em relação a distância até o centro e deve ser proporcional à massa. Mas isto não foi constatado. A curva de velocidade do halo que foi obtida, cresce comparada à curva teórica, contrário ao que era esperado.

Recentemente, a descoberta de que o Universo encontra-se numa expansão acelerada trouxe novamente à discussão a ideia de uma constante cosmológica que exerce pressão negativa e faz com que a matéria usual não seja a única a dominar o mecanismo de expansão. Na tentativa de dar uma explicação para este fenômeno, surge a *energia escura*, ente capaz de acelerar a expansão do Universo.

Atualmente, conclui-se que o Universo possui uma geometria espacialmente Euclidiana em grandes escalas, com 95% de sua composição química desconhecida. Com relação ao mecanismo de expansão, a presença da energia escura faz com que o Universo, apesar de plano e com densidade de matéria menor que a densidade crítica, sofra uma aceleração no processo de expansão. Assim, em termos dinâmicos, podemos dizer que o Universo atual tem cerca de 13 bilhões de anos, é espacialmente plano e sofre uma expansão gradualmente acelerada.

2.2 Fundamentação

2.2.1 Princípio Cosmológico

A cosmologia moderna afirma que o lugar que ocupamos no Universo não tem nada de especial. Esta afirmação é conhecida como princípio cosmológico. Nem sempre foi assim, os gregos acreditavam que a Terra ocupava um lugar privilegiado, o centro do Universo, como afirmava Ptolomeu. Esta ideia foi defendida até meados do ano de 1500 quando Nicolaus Copérnico [51], declarou que a Terra, assim como os outros planetas do sistema solar, orbitavam o Sol. No entanto, a ideia de uma localização privilegiada no Universo permaneceu, agora com o Sol ocupando o centro do Universo.

Duzentos anos depois, William Herschel [48] identificou em suas observações uma estrutura em disco, agora conhecida como nossa galáxia, a Via Láctea. Porém, ele concluiu erroneamente ao

afirmar que o sistema solar ocupava o centro da galáxia. Somente em meados de 1900 que fomos convencidos por Harlow Shapley, que o sistema solar não ocupa o centro da galáxia, e que por sua vez, a galáxia não ocupa o centro do Universo, mas que estamos a aproximadamente dois terços do raio de distância do centro da galáxia. Em 1952, Wilhelm Heinrich Walter Baade demonstrou que a Via Láctea é uma galáxia típica como outra qualquer observada, o que levou ao ponto de vista moderno, conhecido como princípio cosmológico. Portanto, o Universo apresenta o mesmo aspecto de todos os pontos, exceto por inomogeneidades locais [76].

Há evidências de que o Universo é suave em largas escalas (acima de 170 Mpc), o que sustenta o princípio cosmológico. Costuma-se afirmar que em grandes escalas, o Universo possui duas propriedades importantes, a homogeneidade e isotropia. A homogeneidade diz respeito ao fato de que o Universo é o mesmo quando olhado em cada ponto do espaço, e a isotropia, de que ele é o mesmo quando olhado em todas as direções possíveis [67].

2.2.2 A lei de Hubble

Em 1929, através de diversas observações de galáxias distantes, Hubble descobriu que estas galáxias estavam se afastando rapidamente de nós e que todas as galáxias, simultaneamente, se afastam uma das outras. Seu resultado baseou-se na descoberta de uma relação linear entre a distância \vec{r} das galáxias até nós e a velocidade \vec{v} com que elas se afastam de nós [84]. Essa relação é conhecida como lei de Hubble

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (2.1)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble atual, e seu valor hoje é $H_0 = 73,24 \pm 1,74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [82].

Com isto, introduzimos agora um sistema de coordenadas \vec{x} que acompanha a expansão, conhecidas como coordenadas comóveis. Neste sistema, um observador estacionário que participa da expansão, terá a mesma coordenada em todos os instantes. Sua coordenada física é dada por

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}, \quad (2.2)$$

onde \vec{r} é a distância real, \vec{x} é a distância comóvel (valor constante no tempo) e $a(t)$ é o fator de escala, definido como a medida da expansão do Universo normalizada para as distâncias observadas atualmente. O fator de escala mede quantas vezes as distâncias físicas eram menores no passado quando comparadas com as mesmas distâncias medidas hoje. Convenciona-se que atualmente ($t = t_0$), o fator de escala é unitário.

Através das equações (2.1) e (2.2), definimos o parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.3)$$

Aqui a constante de Hubble foi generalizada para um tempo qualquer, por isto passou a ser chamada de parâmetro. O parâmetro atual é H_0 e seu valor positivo implica que o Universo está em expansão.

Mas não apenas as galáxias estão se afastando da nossa galáxia, outros objetos presentes no Universo também estão e, quanto mais longe eles estiverem, maior parecem suas velocidades de recessão. Essas velocidades são medidas através do desvio para o vermelho z , conhecido pelo termo de *redshift* [67]. A partir do efeito Doppler para ondas luminosas temos

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \approx \frac{v}{c}, \quad (2.4)$$

onde λ_{em} é o comprimento de onda da luz emitida pelo objeto e λ_{obs} é o comprimento de onda da luz proveniente do objeto que observamos. O efeito Doppler mencionado aqui, não é de origem cinemática, resultado do afastamento entre a fonte e o observador, mas uma consequência da própria expansão do espaço. Quando uma onda se propaga num espaço em expansão, o seu comprimento de onda sofrerá um aumento proporcional ao valor do fator de escala do Universo. A partir de (2.4), pode-se escrever o fator de escala em função do *redshift*

$$a(z) = \frac{1}{1+z}. \quad (2.5)$$

À primeira vista, parece que o princípio cosmológico está sendo violado quando se considera que todos os objetos estão se afastando do nosso ponto de observação, a Terra. Isto nos levaria a pensar que estaríamos num ponto privilegiado do Universo. Todavia, qualquer observador em qualquer parte do Universo, observa o mesmo.

2.3 O Big Bang

A partir da lei de Hubble, podemos concluir que toda matéria e radiação do Universo estavam juntos em um mesmo ponto, em um passado remoto. Tudo estaria confinado em um ponto naquele instante, até que se expandiu para todos os lados, a grandes velocidades. As posições e velocidades atuais das galáxias são decorrentes daquele primeiro impulso. Este impulso que marcou o começo do Universo é chamado de *Big Bang*. Estudos indicam que tal evento deve ter ocorrido há cerca de 13 bilhões de anos [2].

Sabemos quando o *Big Bang* ocorreu. Mas existe alguma maneira de dizer onde ele ocorreu? O princípio cosmológico diz que o Universo é o mesmo em todos os lugares. Mas a Lei de Hubble, implica que todas as galáxias se criaram de um ponto em um dado momento no passado. Este ponto não seria então diferente do resto do Universo, violando a suposição de homogeneidade expressa pelo princípio cosmológico? A resposta é não.

Para entender porque não há um "centro" para a expansão, temos que mudar um pouco a nossa percepção do Universo. Se considerarmos que o *Big Bang* foi simplesmente uma explosão que espalhou a matéria e formou as galáxias que vemos, neste caso deve existir um centro e uma borda, logo o princípio cosmológico não pode ser aplicado. A única maneira em que podemos ter, ao mesmo tempo, a Lei de Hubble e o princípio cosmológico respeitados, seria se o *Big Bang* tivesse

envolvido o Universo inteiro, e não só a matéria e a radiação presentes nele. Em outras palavras, o Universo em si se expandiu e está se expandindo! As galáxias estão simplesmente sendo levadas com o movimento geral do Universo.

No momento do *Big Bang*, nada residia em um ponto definido dentro do Universo. Portanto, não havia nenhum ponto onde o *Big Bang* ocorreu. Não faz sentido falar em espaço-tempo antes do surgimento do Universo; tudo que conhecemos, inclusive o próprio espaço-tempo surgiu a partir do *Big Bang*.

2.3.1 A radiação cósmica de fundo

Uma observação a favor da teoria do *Big Bang* foi a detecção da Radiação Cósmica de Fundo em 1965 pelos radioastrônomo Arno Penzias e Robert Wilson [77]. Essa radiação foi prevista em 1948 por George Gamow. Em seu artigo, ele explica de maneira puramente teórica que a radiação cósmica de fundo nada mais é do que a radiação eletromagnética proveniente do *Big Bang* (surgimento datado em 380.000 anos após o evento) e que poderia ser entendida como um corpo negro emitindo radiação eletromagnética. Na época em que o artigo foi publicado não existiam meios capazes de detectar essa radiação, cuja frequência de pico é de 160,4GHz (banda de rádio do espectro eletromagnético). Desta maneira, toda previsão teórica foi deixada de lado na época.

Em 1963, Robert Dicke aperfeiçoou a teoria de Gamow, chegando à conclusão de que a radiação cósmica de fundo poderia ser detectada em qualquer ponto do Universo. No entanto, apenas Penzias e Wilson receberam o prêmio Nobel em 1978 pela descoberta desta radiação. Em 1992, o satélite COBE foi utilizado para pesquisar mais sobre a radiação cósmica de fundo e suas origens. A radiação cósmica de fundo é detectada na Terra em todas as direções com temperatura de um corpo negro: $T_0 = 2,725 \pm 0,001K$ [72].

Da teoria da distribuição termal do corpo negro [35], temos a densidade total de energia da radiação ϵ_{rad} em função da temperatura T como

$$\epsilon_{rad} \equiv \rho_{rad}c^2 = \alpha T^4, \quad (2.6)$$

onde α é a constante do corpo negro. Para a temperatura observada atualmente, temos como valor para a densidade de energia da radiação $4,17 \times 10^{-14} Jm^{-3}$ [67].

Escrevendo $\epsilon_{rad}(t_0)$ em termos da densidade crítica (ver definição na seção 2.4), lembrando que para converter energia em densidade de massa, devemos dividir por c^2 . Logo, obtemos

$$\Omega_{rad} = 2,47 \times 10^{-5} h^{-2}, \quad (2.7)$$

onde $h = 0,72 \pm 0,08$ [67]. Portanto, a radiação cósmica de fundo é pequena, mas não pode ser negligenciada, já que é uma fração considerável da densidade crítica.

A densidade de radiação evolui com o tempo de acordo com a seguinte expressão

$$\rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}, \quad (2.8)$$

que combinada com (2.6) fornece

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (2.9)$$

Portanto, o Universo esfriou a medida que se expandia. Atualmente, a temperatura do Universo é de cerca de $3K$, mas no passado a sua temperatura era muito mais alta.

Mas qual é a origem da radiação cósmica de fundo? Sabe-se que o átomo de hidrogênio tem uma energia mínima de ionização de $13,6eV$. No passado, a temperatura do Universo era alta o suficiente para os fótons possuírem energia capaz de ionizar completamente esses átomos. Estima-se que quando o Universo tinha cerca de um milionésimo do tamanho atual, sua temperatura era de aproximadamente $3 \times 10^6 K$. Temperatura alta o suficiente para que a energia típica de um fóton na distribuição termal fosse maior que a energia de ionização dos átomos de hidrogênio, portanto os átomos não poderiam existir naquela época. Núcleos e elétrons estavam separados e os fótons interagem fortemente com os elétrons livres, via espalhamento Compton. O livre caminho médio de qualquer fóton era demasiadamente curto. As partículas colidiam frequentemente, formando um plasma ionizado.

Conforme o Universo se expandia, sua temperatura diminuía, fazendo com que os fótons perdessem cada vez mais energia, não conseguindo ionizar os átomos. Em um curto período de tempo, o Universo passou de opaco para completamente transparente. Os fótons foram capazes de viajar livremente pelo espaço. Este processo é conhecido como desacoplamento. Nesta época (380 mil anos após o *Big Bang*), a temperatura era de cerca de $3000K$. Comparando este dado com a temperatura atual, usando (2.9), conclui-se que o Universo tinha cerca de um milionésimo do tamanho presente quando o desacoplamento ocorreu.

2.4 A densidade dos constituintes do Universo

A densidade total de matéria do Universo é quantificada pelo parâmetro de densidade Ω_i , definido como a razão entre a densidade atual ρ^0 e a densidade crítica ρ_c (valor de densidade em que a geometria espacial do Universo é plana). Procura-se não apenas seu valor, mas como esta densidade é distribuída entre os diferentes constituintes presentes no Universo.

2.4.1 Bárions

Bárions são partículas massivas sujeitas à interação forte e com spin $1/2$. Os exemplos mais comuns desse tipo de partículas são os prótons e os nêutrons. No entanto, estes são formados por

partículas mais fundamentais, conhecidas como quarks e representam de forma significativa a matéria bariônica presente no Universo.

No Universo atual, os bárions tem sua energia cinética muito menor que sua massa-energia, o que significa que podemos considerá-los como matéria não-relativística. Consideramos também, uma matéria não interagente e que não exerce pressão ($p = 0$).

Através da nucleossíntese (estudo da formação de elementos leves), da observação e do cálculo de uma média aproximada da quantidade de estrelas, de grupo de galáxias e de outros corpos celestes, restringe-se à densidade de matéria bariônica presente no Universo a [12]:

$$\Omega_b^0 = \frac{\rho_b^0}{\rho_c^0} = 0,0463 \pm 0,0024, \quad (2.10)$$

onde ρ_b^0 é a densidade de bárions atual e ρ_c^0 é a densidade crítica atual.

2.4.2 Radiação

Acredita-se que a densidade global de matéria no Universo é provavelmente próxima à densidade crítica ρ_c^0 estimada em $10^{-26} \text{kg}/\text{m}^3$. Portanto, o Universo é aparentemente plano, ou próximo a isto. Agora sabe-se que a maior parte da radiação do Universo está em forma de radiação de fundo e que matéria e energia são equivalentes. Então, como comparar estas duas formas de energia? Quem predomina em largas escalas? A matéria ou a energia?

Para responder esta pergunta, podemos comparar o valor dos parâmetros de densidade para este dois constituintes. A radiação tem como valor atual

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0} \approx 4,76 \times 10^{-5}. \quad (2.11)$$

Comparando este resultado com (2.10), concluímos que no momento a densidade de matéria no Universo excede em várias ordens de magnitude a densidade da radiação. Neste caso, dizemos que estamos vivendo em um Universo que é dominado pela matéria.

2.4.3 Matéria escura

A natureza da matéria escura é uma das questões mais discutidas por astrônomos e cosmólogos nas últimas duas décadas. Ela é uma forma de matéria postulada que só interage gravitacionalmente. Sua existência pode ser inferida a partir de efeitos gravitacionais sobre a matéria luminosa (estrelas e galáxias). Através de uma análise meticulosa do movimento de alguns destes objetos astronômicos, evidenciou-se que a matéria bariônica não poderia ser a única responsável por estes efeitos.

A partir da detecção de raios X vindos de aglomerados de galáxias, dos dados da radiação cósmica de fundo e das análises dos efeitos de lentes gravitacionais, pode-se obter valores mais

precisos para a densidade de matéria total do Universo. Descontando o valor conhecido da matéria bariônica, temos para a densidade de matéria escura o seguinte valor [12]:

$$\Omega_{me}^0 = \frac{\rho_{dm}^0}{\rho_c^0} = 0,233 \pm 0,023. \quad (2.12)$$

2.4.4 Energia escura

Energia escura é uma forma hipotética de energia que estaria distribuída por todo espaço e que tende a expandir o Universo. Dados observacionais comprovam sua expansão acelerada, no entanto os constituintes conhecidos e até mesmo a matéria escura, não são capazes de promover esta aceleração. Disto nasce a necessidade de introduzirmos um novo componente no Universo, a energia escura. Uma de suas características é a pressão negativa considerável que possui. O efeito de tal pressão seria semelhante, qualitativamente, a uma força que age em larga escala em oposição à gravidade.

É de grande importância a determinação da densidade total do Universo, pois é através deste conhecimento que poderemos determinar sua curvatura. Através da análise das flutuações de temperatura presentes na radiação cósmica de fundo, estabelece-se o limite para a densidade total

$$\Omega_{total}^0 = 1,02 \pm 0,02. \quad (2.13)$$

Sabe-se que para $\Omega_{total}^0 = 1$, o Universo tem curvatura espacial nula, o que determina uma geometria espacialmente plana. Somando a contribuição dos constituintes considerados anteriormente (bárions, radiação e matéria escura), obtemos como valor 0,28, muito longe da densidade total. Portanto, pode existir algum componente desconhecido responsável pela parcela faltante.

A natureza da energia escura é um dos grandes desafios da física. Existem diversos modelos fenomenológicos que tentam explicá-la, contudo os dados observacionais estão longe de determinar qual é o modelo mais apropriado. Entre as propostas de energia escura estão: a constante cosmológica (que pode ser interpretada tanto como uma modificação da natureza geométrica nas equações de campo de Einstein quanto como um efeito da energia de vácuo, que preenche o Universo de maneira homogênea) e a quintessência (usualmente modelada como campo escalar). Partindo dessas hipóteses, sem entrar em detalhes quanto aos cálculos, encontra-se como limite para esta componente escura, o seguinte valor [12]:

$$\Omega_{ee}^0 = 0,721 \pm 0,025. \quad (2.14)$$

2.5 A cronologia do Universo

Será que o Universo foi sempre dominado pela matéria? Para responder esta e outras perguntas devemos estudar a história do Universo. O modelo de evolução mais aceito é o modelo do *Big Bang*,

já citado anteriormente. Entre os eventos marcantes do Universo estão: a Era de Planck, a inflação, a Era da Radiação, a Era da Matéria e a Era da Energia Escura. Durante esta seção, apresentaremos alguns detalhes sobre essas principais época pelas quais o Universo passou.

2.5.1 A Era de Planck

A Era de Planck foi o primeiro período na história do Universo. Teve seu início a partir do *Big Bang* e durou até 10^{-43} segundos após este evento. Acredita-se que, devido à escala extraordinariamente diminuta do Universo nesta época, efeitos quânticos da gravidade dominavam as interações físicas. Acredita-se ainda que, durante este período, a gravidade era tão forte quanto as outras forças fundamentais e que todas essas forças estariam unificadas. Por estar altamente quente e denso, o Universo era muito instável nesta época. Com a expansão e o resfriamento, as forças fundamentais passaram por um processo conhecido como *quebra de simetria*, quando passaram a se manifestar separadamente [94].

A cosmologia sugere que a Era de Planck pode ter inaugurado o período da unificação e que a *quebra de simetria* levou à era da inflação cósmica, durante a qual o Universo se expandiu em uma escala inimaginável, em um período de tempo extremamente curto.

2.5.2 A inflação

O período subsequente à Era de Planck é conhecido como inflação cósmica ou simplesmente como inflação. Trata-se de uma época em que o Universo se expandiu de forma exponencial. Iniciou-se em 10^{-36} segundos após o *Big Bang* e teve seu término entre 10^{-33} e 10^{-32} segundos. Após este curto período, o Universo continuou a se expandir, embora desaceleradamente [70].

A hipótese da inflação foi sugerida em 1980 por Alan Guth e Andrei Linde. Ela é capaz de explicar a origem da estrutura em larga escala do cosmo. Acredita-se ainda que a inflação pode explicar o porquê do Universo aparentar ser o mesmo em todas as direções (isotropia), o porquê da radiação cósmica de fundo estar distribuída homoganeamente, o porquê do Universo ser plano e, por fim, o porquê de monopólos magnéticos não terem sido observados até então. Apesar desta hipótese apresentar respostas para estas perguntas, ainda não se conhece o mecanismo responsável pelo início da inflação.

2.5.3 A Era da Radiação

Durante essa era, a dinâmica do Universo foi dada pela radiação, que se refere geralmente aos constituintes do Universo que se movem relativisticamente, principalmente fótons e neutrinos. Esta Era ocorreu até aproximadamente 47 mil anos após o *Big Bang*, momento em que a expansão do Universo fez com que a densidade de matéria superasse a densidade de radiação presente no Universo [94].

Nesta fase, todo o material estava completamente ionizado e a interação entre matéria e radiação era muito intensa, gerando um forte acoplamento entre estes dois constituintes. Em consequência, os objetos astronômicos conhecidos atualmente, não tinham condições de se formar nesta fase.

2.5.4 A Era da Matéria

Em seguida à Era da radiação, surgiu um regime de expansão cosmológica no qual o efeito dominante proveio da densidade de matéria presente. Na escala cosmológica, o domínio da matéria começou quando a temperatura da radiação de fundo caiu para abaixo de 3000 K.

Foi nesta Era que as galáxias, aglomerados e estrelas puderam finalmente encontrar condições propícias de formação. Antes dessa fase, a temperatura era demasiadamente elevada para permitir a formação de estruturas [94].

2.5.5 A Era da Energia Escura

Conforme o Universo continuou se expandindo, a densidade de matéria caiu, sendo superada pela densidade de energia escura presente no cosmo. Segundo hipóteses, essa forma de energia, predominante na Era atual, seria responsável pela expansão acelerada do Universo, observada atualmente [94].

Com esta descrição breve sobre as principais Eras do Universo, finaliza-se este capítulo onde foram apresentados alguns conceitos e ideias básicas presentes na cosmologia moderna. O modelo de evolução mais aceito atualmente, o *Big Bang*, foi introduzido, assim como a natureza dos constituintes presentes no Universo e a importância de cada um deles no cenário da evolução.

Capítulo 3

A teoria $f(R)$ da gravitação e os formalismos de Palatini e métrico

Neste capítulo, daremos continuidade a alguns assuntos apresentados nos capítulos anteriores. Apresentaremos uma generalização da Relatividade Geral, conhecida como teoria $f(R)$ da gravitação. Em seguida, exploraremos dois formalismos utilizados na análise da dinâmica dos sistemas de interesse, o formalismo de Palatini e o formalismo métrico. Esta exposição será indispensável para o entendimento dos capítulos a seguir.

3.1 A generalização da Relatividade Geral

A Relatividade Geral é a generalização da teoria da gravitação de Newton. Muitas previsões da Relatividade Geral diferem significativamente das previsões fornecidas pela física clássica, especialmente no que diz respeito à passagem do tempo, a geometria do espaço, o movimento dos corpos em queda livre e a propagação da luz. Previsões da Relatividade Geral foram confirmadas em várias observações e experimentos até o presente momento. Embora ela não seja a única teoria relativística da gravidade, é a mais simples das teorias consistentes com dados observacionais. No entanto, há questões ainda sem resposta. Neste contexto aparece a teoria de gravidade $f(R)$. Trata-se de uma extensão da Relatividade Geral derivada do relaxamento da hipótese de que a ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional seja sempre linear quanto ao escalar de curvatura R , isto é, $f(R) = R$. Neste sentido, a gravidade $f(R)$ representa uma classe de teorias definidas como funções arbitrárias de R [23]. Assim, ela pode ser considerada como um simples exemplo de teoria estendida de gravidade [27].

3.1.1 Gravidade $f(R)$: Introdução

Na gravidade $f(R)$, a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (3.1)$$

é generalizada por:

$$S = \int \sqrt{-g} f(R) d^4x, \quad (3.2)$$

onde usamos o sistema de unidades naturais $8\pi Gc^{-4} = 1$, $g = |g_{\mu\nu}|$ é o determinante do tensor métrico e $f(R)$ é a função do escalar de Ricci R . Essa abordagem tem como objetivo encobrir as deficiências do modelo padrão da cosmologia e da falta de uma teoria de gravidade quântica. Devido a essas questões, teorias alternativas de gravidade têm sido consideradas a fim de tentar elaborar um esquema onde os resultados positivos da Relatividade Geral possam ser recuperados. As aproximações mais frutíferas são as teorias de gravidade estendidas, que se tornaram uma espécie de paradigma no estudo da interação gravitacional [88]. Elas são baseadas em correções e extensões da teoria de Einstein. O paradigma consiste, essencialmente, em adicionar invariantes de curvatura de ordem maior, minimamente ou não-minimamente acoplados à campos escalares. Outras motivações para modificar a Relatividade Geral vêm do Princípio de Mach [18] que assume um acoplamento gravitacional variável. Este princípio estabelece que o referencial inercial local é determinado por uma média do movimento de objetos astronômicos distantes. Este fato implica que o acoplamento gravitacional pode ser dependente de escala e relacionado a algum campo escalar fundamental. Como uma consequência, o conceito de inércia e o Princípio da Equivalência precisam ser revisados.

Estas teorias estendidas podem ser encaradas de uma forma ainda mais geral do ponto de vista da formulação de Palatini para a gravidade [74]. A ideia fundamental do formalismo de Palatini é considerar a conexão afim Γ independente da métrica g definida no espaço-tempo [36]. O formalismo de Palatini para a teoria de Einstein-Hilbert resulta ser equivalente à teoria puramente métrica. Como consequência, não existe razão para impor o princípio variacional de Palatini na teoria de Einstein-Hilbert no lugar do princípio variacional métrico. Entretanto, a situação muda completamente se consideramos teorias de gravidade dependendo de funções de invariantes de curvatura, como $f(R)$, ou não-minimamente acoplada para alguns campos escalares. Nesses casos, os princípios variacionais de Palatini e métrico provêm diferentes equações de campo, diferindo as teorias derivadas.

Do ponto de vista físico, considerar a métrica g e a conexão Γ como campos independentes, significa desacoplar a estrutura métrica do espaço-tempo e sua estrutura geodésica. A estrutura do espaço-tempo é governada por g enquanto que as trajetórias das partículas, movendo-se no espaço-tempo, são governadas por Γ . Esse desacoplamento enriquece a estrutura geométrica do

espaço-tempo e generaliza o formalismo puramente métrico, onde considera-se que Γ é uma função de g . Neste caso, Γ é conhecido como símbolo de Christoffel.

A partir destas informações, abordaremos a teoria de gravidade $f(R)$ no formalismo métrico e no formalismo de Palatini, procurando as diferenças essenciais entre estas duas formulações.

3.1.2 Gravidade $f(R)$ no formalismo métrico

No formalismo métrico, as equações de campo são obtidas a partir de variações com respeito à métrica e não tratando a conexão afim independentemente [28]. Os passos principais são os mesmos no caso da variação da ação de Einstein-Hilbert, mas existem algumas diferenças importantes. Como visto em (1.39), a variação do determinante é

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

O escalar de Ricci é definido como

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Portanto, a variação com respeito ao inverso da métrica é dada por

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\rho\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (3.5)$$

O termo $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ pode ser escrito como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}). \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5):

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde ∇_μ é a derivada covariante e $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ é o operador D'Alembertiano. Aqui adotamos a assinatura da métrica como $(+, -, -, -)$. Vamos considerar agora, uma função analítica genérica $f(R)$, obedecendo o princípio variacional $\delta\int d^4x\sqrt{-g}f(R) = 0$. Temos

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}f(R) = \int d^4x\left[(\delta\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}\delta f(R)\right] = 0; \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \delta\int d^4x\sqrt{-g}f(R) &= \int d^4x\left[f'(R)\sqrt{-g}\delta R - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R)\right] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[f'(R)\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R)\right] = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $f'(R) = \frac{df(R)}{dR}$. Fazendo integração por partes nos segundo e terceiro termos, temos

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}f(R) = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + \left(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)f'(R)\right] = 0. \quad (3.10)$$

Desta maneira, obtemos as equações de campo sem fontes:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + \left[g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu\right]f'(R) = 0. \quad (3.11)$$

3.1.3 Gravidade $f(R)$ no formalismo de Palatini

A ideia fundamental do formalismo de Palatini é considerar a conexão $\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}$ como uma variável independente da métrica $g_{\mu\nu}$. Assumindo que $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ é simétrico, a formulação de Palatini da Relatividade Geral é equivalente à versão métrica dessa teoria com a consequência de que as equações de campo para a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, fornecem exatamente a conexão de Levi-Civita da métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto, não existe uma razão particular para impor o princípio variacional de Palatini na Relatividade Geral no lugar do princípio variacional métrico [75].

A situação é diferente nas teorias de gravidade estendidas dependendo das funções de invariantes de curvatura ou de campos não-minimamente acoplados. Nesses casos, o princípio variacional métrico e o de Palatini fornecem diferentes equações de campo.

O formalismo de Palatini, no contexto de teoria de gravidade estendida, tem sido um objeto de muito interesse no campo de aplicações cosmológicas. Como discutido acima, considerando a métrica $g_{\mu\nu}$ e a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ como campos independentes, desacoplamos a estrutura métrica do espaço-tempo e sua estrutura geodésica com a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ sendo distinta da conexão de Levi-Civita de $g_{\mu\nu}$. Em princípio, esse desacoplamento enriquece a estrutura geométrica do espaço-tempo e generaliza o formalismo puramente métrico. Por meio das equações de campo de Palatini, essa estrutura do espaço-tempo é naturalmente transladada para um outro tipo de estrutura: no lugar de uma métrica e uma conexão independente, o formalismo de Palatini pode ser visto contendo duas métricas independentes $g_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu}$. Na teoria de gravidade $f(R)$ no formalismo de Palatini, a nova métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, que determina a geodésica, está relacionada com a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, já que esta é a conexão de Levi-Civita para $\hat{g}_{\mu\nu}$ [28].

No formalismo de Palatini, o escalar de Ricci em $f(R)$ é $R \equiv R(g, \Gamma) \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(\Gamma)$ (escalar de Ricci generalizado), enquanto que $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ é o tensor de Ricci da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ que, *a priori*, não tem relações com a métrica $g_{\mu\nu}$ que fornece o escalar de Ricci usual \tilde{R} [42]. O setor gravitacional da teoria é descrito pela função $f(R)$, enquanto que $\sqrt{-g}$ denota a densidade escalar usual. As equações de campo derivadas do princípio variacional de Palatini são

$$f'(R)R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

$$\nabla_{\alpha}^{\Gamma} [\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}] = 0, \quad (3.13)$$

onde ∇_{μ}^{Γ} é a derivada covariante da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$.

3.2 Matéria escura e energia escura como efeitos de curvatura

As considerações acima podem ser trabalhadas na perspectiva de enfrentar o problema do setor escuro do Universo [22, 71]. A questão da matéria escura vem de estimativas da massa de

sistemas auto-gravitantes. Em diversas observações, há mais matéria inferida dinamicamente do que pode ser explicada a partir da observação direta. Essa discrepância de massa é usualmente atribuída à matéria adicional, assumindo a validade das leis de Newton na escala astronômica. Oort foi o primeiro que considerou o problema da *massa faltante*. Observando o *redshift* de estrelas movendo-se próximas ao plano da nossa galáxia, ele afirmou que poderia calcular como as estrelas estariam se movendo. Deveria haver matéria suficiente no interior da galáxia, tal que a força gravitacional central fosse forte o suficiente para manter as estrelas nas órbitas. Mas ele descobriu que não havia massa suficiente para isto. A discrepância não era pequena: a galáxia deveria ter, pelo menos, duas vezes a massa de todos os seus componentes visíveis. Adicionalmente, em 1960, o perfil radial da velocidade tangencial de estrelas em suas órbitas em torno do centro galáctico, como uma função de suas distâncias deste centro, foi medida. Foi descoberto que tipicamente, uma vez que se afasta do centro da galáxia, todas as estrelas viajam com a mesma velocidade, independente da distância a partir deste centro.

Observou-se também problemas em larga escala. Em 1933, Zwicky anunciou que quando ele mediu as velocidades individuais de um grande grupo de galáxias, conhecido como aglomerado Coma, constatou que todas as galáxias estavam se movendo tão rapidamente, umas em relação às outras, que o aglomerado deveria ter se desfeito há muito tempo. A massa visível das galáxias que compõem o *cluster* era pouca para produzir força gravitacional suficiente para manter o aglomerado coeso. Assim, não era só na nossa galáxia que faltava massa, mas também em todo o aglomerado de Coma, que sofre o mesmo problema em uma escala diferente. Inicialmente, o problema só foi abordado mantendo as leis de Newton invioláveis e postulando a existência de alguns entes desconhecidos para ocupar o lugar da massa faltante.

Além disso, há evidências de um Universo espacialmente plano e que está passando por uma fase de expansão acelerada. A interpretação de todas essas informações num modelo auto-consistente é a principal tarefa da cosmologia moderna. Através da adição de um ingrediente a mais, a constante cosmológica Λ , o modelo Λ CDM fornece um bom ajuste para a maior parte dos dados que fornecem um retrato fiel do Universo observado hoje. No entanto, este modelo é afetado por graves deficiências teóricas. De acordo com a teoria inflacionária, o valor da sua densidade de energia nos primórdios do Universo deveria ser $\rho_\Lambda \approx 10^{95} \text{ kg}/\text{m}^3$. Por outro lado, o valor atual deve ser $\rho_\Lambda^0 \approx 10^{-26} \text{ kg}/\text{m}^3$. Portanto, temos $\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda^0} \approx 10^{121}$. Se Λ é uma constante, temos aqui uma grave contradição.

Essencialmente, a energia escura tem que atuar como um fluido de pressão negativa para dar origem a uma aceleração global deste fluido. Apesar dos mecanismos que geram a dinâmica cosmológica estarem claros, a natureza e as propriedades fundamentais da energia escura permanecem essencialmente desconhecidas. A situação para a matéria escura é semelhante: suas propriedades de agrupamento e de distribuição são relativamente bem conhecidas, em qualquer escala, mas sua natureza, até então, é desconhecida em nível fundamental.

Por outro lado, a necessidade de componentes desconhecidos poderia ser considerada como um sinal da quebra da Relatividade Geral em escalas cosmológicas. Neste contexto, teorias estendidas de gravidade poderiam ser, em princípio, uma alternativa interessante para explicar a aceleração cósmica e as estruturas em grande escala, sem quaisquer componentes faltantes. Na sua versão mais simples, o escalar de curvatura de Ricci R , linear na ação de Einstein-Hilbert, poderia ser substituído por uma função genérica $f(R)$, cuja verdadeira forma pode ser reconstituída por dados observacionais [17].

Indo para o limite de campo fraco, o que significa essencialmente considerar escalas do sistema solar, espera-se que qualquer teoria alternativa relativista da gravidade reproduza a Relatividade Geral, que está firmemente testada no limite destas escalas. Mesmo esse limite é uma questão de debate, pois várias teorias relativistas não reproduzem exatamente os resultados de Einstein em seu limite Newtoniano, mas, em certo sentido, generalizam.

Neste capítulo, concluímos que a gravidade $f(R)$ é uma classe de teorias representando uma nova aproximação para interação gravitacional. O paradigma é que a Relatividade Geral tem de ser estendida a fim de resolver várias lacunas que emergem em grandes escalas. Do ponto de vista astrofísico e cosmológico, o objetivo é abranger fenômenos como a energia escura e a matéria escura sob um padrão geométrico [22]. Do ponto de vista geométrico, em princípio, não é necessária a introdução de outros ingredientes e de partículas. Preserva ainda todos os resultados bem sucedidos da Relatividade Geral, baseando-se nos mesmos princípios fundamentais.

A principal crítica a esta abordagem é que, até o momento, nenhum modelo $f(R)$ ou qualquer teoria estendida de gravidade, conseguiu abordar toda a fenomenologia variando desde a escala quântica até a escala cosmológica. Além disso, a descrição dos modelos $f(R)$, com respeito aos componentes escuros do Universo, é substancialmente equivalente ao relacionado com a hipótese da existência dos entes escuros. A necessidade de experimentos, capazes de preservar ou excluir uma dessas duas teorias, Relatividade Geral com componentes escuros ou teorias generalizadas $f(R)$, está pressionando a comunidade científica para resolver o debate.

Capítulo 4

A instabilidade de Jeans

Neste capítulo, apresentaremos os critérios para o colapso de nuvens de gás interestelares, responsáveis pela formação de estruturas no Universo (galáxias, aglomerados de galáxias e etc). A esse colapso é dado o nome de Instabilidade de Jeans [57]. Este fenômeno é de grande importância para o desenvolvimento desta tese, o que explica o motivo pelo qual destinamos um capítulo inteiro para este assunto.

4.1 A instabilidade de Jeans

A instabilidade de Jeans [8], em um Universo estático, causa o colapso de nuvens interestelares de gás e conseqüentemente, a formação de estruturas. Basicamente, isto ocorre quando a pressão interna do gás não é forte o suficiente para impedir o colapso gravitacional da região preenchida com matéria. Essa teoria se aplica a qualquer sistema auto-gravitante, no caso de um meio estático. O fluxo de fluido nesse regime é governado pelas equações da continuidade, de Euler e pela equação de Poisson [14], respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \phi, \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (4.3)$$

onde ρ é a densidade do fluido, \vec{v} é a velocidade de suas partículas, P é sua pressão e ϕ é o potencial gravitacional na região.

Nota-se que estas três equações possuem quatro variáveis. Usaremos a equação de estado para fechar o sistema.

4.1.1 Teoria de perturbação

4.1.1.1 Componentes estáticos

Separaremos todas as quantidades estáticas das quantidades perturbadas. Usaremos o subscrito "0" para denotar quantidades de ordem zero, o *background*. Consideramos ρ_0 e P_0 constantes e \vec{v}_0 nula. Ainda temos que especificar o valor de ϕ_0 . No entanto, este valor é limitado, pois deve satisfazer as três primeiras equações para os valores de ρ_0 , P_0 e \vec{v}_0 especificados.

As derivadas de todos os termos constantes são iguais a zero, então da equação de Euler, obtemos $\vec{\nabla}\phi_0 = 0$. Por outro lado, a equação de Poisson requer que $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$. Portanto, ϕ_0 só pode satisfazer as três equações, simultaneamente, se $\rho_0 = 0$, o que implica em um Universo vazio. Essa inconsistência em ϕ_0 para um fluido homogêneo e uniforme é conhecida com *Jeans swindle* [14]. No próximo capítulo, este conceito será explorado com mais detalhes.

4.1.1.2 Perturbações

Introduzimos agora, pequenas perturbações às condições iniciais:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1, & P &= P_0 + P_1, \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_1, & \phi &= \phi_0 + \phi_1.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Podemos definir uma velocidade do som quando a entropia s se mantém fixa [14]. No nosso caso, essa definição é a razão das quantidades perturbadas da pressão e da densidade:

$$v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{P_1}{\rho_1}.\tag{4.5}$$

4.1.1.3 Equações perturbadas

Seguindo a teoria da perturbação, substituindo as quantidades perturbadas nas equações (4.1), (4.2) e (4.3), e negligenciando os termos de segunda ordem em diante, obtemos as equações linearizadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) = 0,\tag{4.6}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} P_1}{\rho_0} - \vec{\nabla} \phi_1 = -\frac{v_s^2 \vec{\nabla} \rho_1}{\rho_0} - \vec{\nabla} \phi_1,\tag{4.7}$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1.\tag{4.8}$$

Na equação (4.6), ρ_0 foi removido da derivada espacial já que se trata de uma quantidade constante. E na equação (4.2), o segundo termo é igual a zero pois \vec{v} é uma quantidade de primeira ordem.

4.1.1.4 Relação de dispersão

Uma técnica padrão é combinar um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para obter uma equação diferencial de segunda ordem. Para isto, diferenciamos (4.6) e substituímos em (4.7) para obter uma equação diferencial de segunda ordem para ρ_1 ,

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0 \left(-\frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla^2 (\rho_1 - \phi_1) \right) = 0. \quad (4.9)$$

Usando (4.8) eliminamos ϕ_1 , obtendo

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0. \quad (4.10)$$

Reconhecemos essa expressão como uma equação de onda. A abordagem geral para a resolução da equação de onda é usar soluções de onda plana no espaço de Fourier. Assumindo a seguinte forma de solução para ρ_1 ,

$$\rho_1(\vec{x}, t) \propto \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \rho_1(\vec{k}, \omega) d^3k. \quad (4.11)$$

Com essa forma de solução, as derivadas podem ser facilmente calculadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -i\omega \rho_1, \quad \vec{\nabla} \rho_1 = i\vec{k} \rho_1. \quad (4.12)$$

Substituindo essa forma de solução na equação de onda acima, obtemos

$$-\omega^2 + v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 = 0. \quad (4.13)$$

Essa expressão é conhecida como relação de dispersão. A presença do termo gravitacional implica em ondas dispersivas.

No caso em que ω^2 é negativo, ω deve ser imaginário. A solução de onda é sempre oscilatória quando ω é real. Entretanto, se ω é imaginário, as soluções são exponenciais reais, o que leva à instabilidade gravitacional mencionada anteriormente [14].

4.2 O número de onda e a massa de Jeans

O termo gravitacional na relação de dispersão pode ser escrito em termos de outros parâmetros

$$\omega^2 = v_s^2 (k^2 - k_J^2), \quad (4.14)$$

onde o número de onda de Jeans é definido como

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2}}. \quad (4.15)$$

Essa equação é muito importante, pois define uma escala em que os efeitos gravitacionais passam a dominar o sistema em questão. Todos os modos com número de onda menor que seu valor crítico k_J , experimentarão um crescimento exponencial.

Os correspondentes comprimento de Jeans e massa de Jeans são definidos a seguir:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}, \quad (4.16)$$

$$M_J = \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3. \quad (4.17)$$

A massa de Jeans é definida como a massa originalmente contida em uma esfera de diâmetro λ_J . A evolução de um modo particular depende do número de onda de Jeans [93].

Para $k < k_J$ ou $\lambda > \lambda_J$:

Neste caso, a relação de dispersão indica que a solução cresce exponencialmente,

$$\omega^2 = v_J^2(k^2 - k_J^2) < 0, \quad (4.18)$$

logo ω é imaginário. Portanto,

$$\rho_1 \propto e^{\pm|\omega|t}. \quad (4.19)$$

A solução cresce exponencialmente ou decai. O modo crescente predomina, dando origem à chamada instabilidade de Jeans. Assim, para certos modos, a gravidade rapidamente amplifica a pequena perturbação ρ_1 . Entretanto, esta perturbação, por se tratar de uma perturbação linear, é interrompida quando se torna grande.

Para $k > k_J$ ou $\lambda < \lambda_J$:

Nesse caso, ω é real e ρ_1 oscila. A solução é estável e comporta-se como uma onda sonora.

4.2.1 O número de onda de Jeans via análise dimensional

A instabilidade de Jeans resulta do entrave entre a força associada à pressão do fluido e a força gravitacional. Essas forças atuam em sentidos opostos.

O número de onda de Jeans é um indicador de que esses fatores são mais importantes para um dado modo. Baseado em alguns argumentos físicos, é possível derivar o número de onda de Jeans usando análise dimensional [14].

4.2.1.1 Análise através da pressão

Considere um elemento de fluido em uma nuvem uniforme de raio R e densidade ρ . Para conhecermos a força experimentada por um pequeno volume V , devemos calcular a força gravitacional

por unidade de volume,

$$\frac{F_g}{V} \sim \frac{GM\rho_0}{R^2} \sim G\rho^2 R, \quad (4.20)$$

considerando que $M \propto \rho R^3$. A força por unidade de volume é também o gradiente da pressão,

$$\frac{F_p}{V} \sim \nabla P \sim v_s^2 \nabla \rho \sim v_s^2 \frac{\rho}{R}. \quad (4.21)$$

Comparando essas duas forças, a gravidade domina se

$$G\rho^2 R > \frac{v_s^2 \rho}{R}. \quad (4.22)$$

Logo,

$$R > \sqrt{\frac{v_s^2}{G\rho}}, \quad (4.23)$$

que é o comprimento de Jeans.

4.2.1.2 Análise através da escala de tempo

A escala de tempo relevante para uma queda livre é:

$$t_g = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (4.24)$$

Isso resulta por que a escala relevante é $R \sim at^2$, onde $a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} = G\rho R$. Portanto,

$$R \propto G\rho R t^2. \quad (4.25)$$

Logo,

$$t \propto \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (4.26)$$

A escala de tempo associada com a força devido a pressão é dada por $t_p = \frac{R}{v_s}$. Comparando as escalas de tempo, a gravidade é dominante se a escala de tempo da gravidade for menor, ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{G\rho}} < \frac{R}{v_s}. \quad (4.27)$$

Portanto, obtemos novamente o comprimento de Jeans:

$$R > \sqrt{\frac{v_s^2}{G\rho}}. \quad (4.28)$$

4.3 Análise da instabilidade de Jeans via equação de Boltzmann

Outra maneira de descrever o colapso de um sistema auto-gravitante sem colisão, pode ser feita através da introdução da equação de Boltzmann sem colisão no lugar das equações da hidrodinâmica (4.1) e (4.2) (para mais detalhes, ver [26]). Antes de iniciar esta análise, vale apresentar de maneira sucinta, a equação de Boltzmann.

4.3.1 A equação de Boltzmann

Desenvolvida por Ludwig Boltzmann, esta equação é um ferramenta importante para a análise dos fenômenos de transporte envolvendo gradientes de densidade e temperatura [29]. Ela descreve o comportamento estatístico de sistemas termodinâmicos e se apresenta na seguinte forma [61]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F_i}{\partial c_i} = \int (f'_* f' - f_* f) g b db d\epsilon d\vec{c}_*. \quad (4.29)$$

É uma equação íntegro-diferencial para a função distribuição f , que nos dá o número de partículas que, no tempo t , encontram-se no elemento de volume entre \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ com velocidades c e $\vec{c} + d\vec{c}$. Quanto a demonstração da equação, não entraremos em detalhes [29].

Na equação acima, foram feitas as seguintes abreviações:

$$f' \equiv f(\vec{x}, \vec{c}', t), \quad f'_* \equiv f(\vec{x}, \vec{c}'_*, t), \quad (4.30)$$

$$f \equiv f(\vec{x}, \vec{c}, t), \quad f_* \equiv f(\vec{x}, \vec{c}_*, t), \quad (4.31)$$

onde \vec{c} e \vec{c}_* são as velocidades assintóticas de duas partículas de um gás, antes da colisão entre elas; \vec{c}' e \vec{c}'_* são as respectivas velocidades após a colisão; \vec{g} é a velocidade relativa entre as duas partículas do gás, ou seja, $\vec{g} = \vec{c}_* - \vec{c}$; b é o parâmetro de impacto da colisão, ϵ , o ângulo azimutal, e F_i é a força externa que atua no sistema.

Se a força externa específica não depender da velocidade das partículas (como é o caso da gravidade) ou depender dela através de um produto vetorial (como a força de Coriolis em sistemas não inerciais ou da força de Lorentz em gases ionizados), o divergente $\frac{\partial F_i}{\partial c_i}$ é nulo e a equação de Boltzmann (4.29) se reduz a:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = \int (f'_* f' - f_* f) g b db d\epsilon d\vec{c}_*. \quad (4.32)$$

O termo à direita desta equação é conhecido como termo colisional. Ele descreve as colisões entre as partículas do gás em questão. Para um sistema sem colisões, esse termo se reduz a zero.

Vale ainda citar que a determinação da equação de Boltzmann é feita com base nas seguintes hipóteses [29]:

1ª hipótese: Para um gás rarefeito, somente as interações entre os pares de partículas (colisões binárias) são levadas em consideração;

2ª hipótese: O efeito das forças externas sobre as partículas durante a colisão é pequeno em comparação às forças que agem entre as partículas;

3ª hipótese: Em qualquer posição \vec{x} e tempo t , as velocidades de duas partículas não estão correlacionadas. Esta suposição é conhecida como *suposição do caos molecular*;

4ª hipótese: A variação da função de distribuição f não é muito grande ao longo de um intervalo τ^* , que é suficientemente grande em comparação com o tempo de duração de uma colisão τ_c , porém suficientemente pequeno em comparação com o tempo médio entre duas colisões τ , isto é, $\tau_c \ll \tau^* \ll \tau$. Logo, a função de distribuição f é constante ao longo de uma distância comparável ao tamanho das partículas, porém variável ao longo de uma distância comparável ao livre caminho médio.

A equação de Boltzmann na presença de um campo gravitacional tem a seguinte forma [29]:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^\sigma} = \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \sqrt{-g} \frac{d^3 p_*}{p_{*0}} = Q(f, f_*). \quad (4.33)$$

Novamente, quanto à demonstração desta equação, não entraremos em detalhes [29]. No lado direito está o termo de colisão. Aqui p^μ é o quadri-momento da partícula, x^μ é seu quadri-vetor posição, f é a função distribuição, $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é a conexão afim, σ é a seção de choque diferencial invariante, $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido que caracteriza a colisão binária entre as partículas do gás, F é o fluxo invariante dado por $F = \sqrt{(g_{\mu\nu} p_*^\mu p_*^\nu)^2 - m^4 c^4}$ e o elemento invariante é dado por $\sqrt{-g} \frac{d^3 p_*}{p_{*0}}$.

4.3.2 Sistemas auto-gravitantes via equação de Boltzmann

Para o estudo do colapso de sistemas auto-gravitantes sem colisões (ver [26]), escreve-se o par de equações abaixo:

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r) f(\vec{r}, \vec{v}, t) - (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}_v) f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0, \quad (4.34)$$

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = 4\pi G \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (4.35)$$

Como feito anteriormente, introduz-se pequenas perturbações na função distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ e no potencial $\phi(\vec{r}, t)$. No equilíbrio, assumindo homogeneidade, essas funções são descritas por $f_0(\vec{v})$ e $\phi_0(\vec{r})$, respectivamente. Desta forma, temos

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{v}) + \epsilon f_1(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (4.36)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0(\vec{r}) + \epsilon \phi_1(\vec{r}, t), \quad (4.37)$$

onde $\epsilon \ll 1$. Substituindo nas equações (4.34) e (4.35), obtêm-se as equações linearizadas:

$$\frac{\partial f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} - \vec{\nabla} \phi_1(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial f_0(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{v}} - \vec{\nabla} \phi_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (4.38)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi_1(\vec{r}, t) = 4\pi G \int f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (4.39)$$

As equações de ordem ϵ_0 se anulam, visto que f_0 depende apenas de \vec{v} e $\phi_0 = 0$, segundo o *Jeans swindle*, citado anteriormente. Escrevendo as equações no espaço de Fourier, temos

$$-i\omega f_1 + \vec{v} \cdot (i\vec{k} f_1) - (i\vec{k} \phi_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (4.40)$$

$$-k^2 \phi_1 = 4\pi G \int f_1 d\vec{v}. \quad (4.41)$$

Combinando tais equações, obtêm-se a relação de dispersão para o dado sistema:

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}}{\vec{v} \cdot \vec{k} - \omega} d\vec{v} = 0. \quad (4.42)$$

Assume-se, para sistemas estelares, uma função de distribuição de Maxwell:

$$f_0 = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-(v^2/2\sigma^2)}, \quad (4.43)$$

onde σ é a velocidade de dispersão das partículas devido à temperatura definida por $\sigma^2 = \frac{k_B T}{m_H}$, onde k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura e m_H é a massa do próton. Substituindo em (4.42) e impondo $\vec{k} = (k, 0, 0)$, sem perda de generalidade, encontra-se:

$$1 - \frac{2\sqrt{2\pi}G\rho_0}{k\sigma^3} \int \frac{v_x e^{-(v_x^2/2\sigma^2)}}{kv_x - \omega} dv_x = 0. \quad (4.44)$$

O limite de instabilidade é obtido para $\omega = 0$, levando a

$$k_j^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2}, \quad (4.45)$$

o número de onda de Jeans. Através deste resultado, determina-se a massa de Jeans

$$M_{Jc} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1}{\rho_0}} \left(\frac{\pi\sigma^2}{G} \right)^{3/2}. \quad (4.46)$$

Por fim, escreve-se a relação de dispersão como uma razão entre k^2 e k_j^2 , afim de torná-la adimensional,

$$\frac{k^2}{k_j^2} = \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}\omega_I^2}{\sqrt{2}k\sigma} e^{\omega_I/2k\sigma} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{\omega_I}{\sqrt{2}k\sigma}\right) \right] \right\}, \quad (4.47)$$

onde ω_I é a parte imaginária da frequência ω . A relação de dispersão fornece os critérios de colapso para o sistema em questão.

4.3.3 Análise de sistemas auto-gravitantes via equação de Boltzmann para a gravidade $f(R)$ no formalismo métrico

Esta análise foi realizada em [26]. Nesta seção, mostraremos as partes mais importantes do desenvolvimento deste assunto para fins de comparação com os resultados do modelo abordado nesta tese, apresentados no próximo capítulo.

Parte-se de uma ação geral para a teoria $f(R)$,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \chi \mathcal{L}_m], \quad (4.48)$$

onde $f(R)$ é uma função analítica do invariante de curvatura R , $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ é o acoplamento do campo gravitacional, \mathcal{L}_m é a Lagrangeana que exprimi a contribuição da matéria. Através da variação da ação segundo o formalismo métrico, obtêm-se as seguintes equações de campo:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = \chi T_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

com traço

$$3\square f'(R) + f'(R)R - 2f(R) = \chi T, \quad (4.50)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e $f'(R) = \frac{df(R)}{dR}$. A assinatura adotada foi $(-, +, +, +)$.

Aplicando o limite Newtoniano neste par de equações, encontra-se (ver [26]):

$$\nabla^2(\phi + \varphi) - 2f''(0)\nabla^4(\phi - \varphi) = 16\pi G \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (4.51)$$

$$\nabla^2(\phi - \varphi) + 3f''(0)\nabla^4(\phi - \varphi) = -8\pi G \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (4.52)$$

onde ϕ e φ são os potenciais gravitacionais associados as componentes do tensor métrico $g_{00}^{(2)}$ e $g_{ii}^{(2)}$ no limite Newtoniano, respectivamente. Este limite será abordado com mais profundidade a partir do próximo capítulo.

Para estudar a instabilidade de Jeans no contexto de gravidade $f(R)$ no formalismo métrico, agrega-se mais uma equação ao sistema: a equação de Boltzmann sem colisão. Neste caso, a mesma exibida em (4.29). Em seguida, considera-se uma pequena perturbação no estado de equilíbrio do sistema e lineariza-se as equações de maneira semelhante ao que foi feito na seção anterior. A partir disto, escreve-se as equações de campo, o traço e a equação de Boltzmann no espaço de Fourier e através de manipulação matemática entre estas três equações, obtêm-se a relação de dispersão para a gravidade $f(R)$ na formulação métrica,

$$3\frac{k^4}{k_j^4} + \frac{k^2}{k_j^2} = \left(\frac{4k^2}{k_j^2} + 1\right) \left\{ 1 - \sqrt{\pi} \frac{\omega_I}{\sqrt{2k\sigma}} e^{\omega_I^2/2k^2\sigma^2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_I}{\sqrt{2k\sigma}}\right) \right] \right\}. \quad (4.53)$$

A partir deste resultado, obtêm-se $k^2 = 1.2637 k_j^2$ como limite para o colapso, onde k_j é dado por (4.45). A massa de Jeans para este modelo é dada por

$$\tilde{M}_j = 6 \sqrt{\frac{6}{(3 + \sqrt{21})^3}} M_{J_c}, \quad (4.54)$$

onde M_{J_c} é dado por (4.46).

Os resultados apresentados nessa seção e na anterior foram obtidos em [26]. Eles serão comparados com os resultados do modelo de instabilidade de sistemas auto-gravitantes em teoria $f(R)$ no formalismo de Palatini, trabalho desenvolvido nesta tese que será apresentado no capítulo a seguir.

Neste capítulo, a instabilidade de Jeans foi apresentada de três pontos de vista diferentes: via equações da hidrodinâmica, via equação de Boltzmann no modelo Newtoniano e no modelo de gravidade $f(R)$ para a formulação métrica. A relação de dispersão, a massa e o número de onda de Jeans também foram obtidos para todos os casos exibidos. Como já foi dito, os resultados apresentados aqui serão utilizados no próximo capítulo.

Capítulo 5

Sistemas auto-gravitantes em teoria $f(R)$ no formalismo de Palatini

Neste capítulo, serão apresentados os primeiros resultados desta tese. Os capítulos anteriores serviram como base para o entendimento do trabalho desenvolvido. Com o objetivo de estudar a formação de estruturas, adotamos um modelo descrito pela teoria de gravidade $f(R)$ sob o ponto de vista da formulação de Palatini, capaz de descrever a dinâmica e o colapso de sistemas auto-gravitantes sem colisão [6]. Para investigar essa dinâmica, assumimos sob certas condições que o sistema, por exemplo, uma galáxia, pôde ser aproximado por um fluido contínuo. Desta forma, em busca do critério de colapso para o modelo, introduzimos a equação de Boltzmann sem colisão e de equações de Poisson para os campos. Os valores obtidos para o comprimento e a massa de Jeans sugerem um favorecimento na formação de estruturas. As soluções encontradas foram comparadas com as obtidas para a teoria $f(R)$ no formalismo métrico e para a gravidade Newtoniana [26]. Os resultados obtidos serão discutidos em detalhes ao longo deste capítulo.

5.1 Formalismo de Palatini para gravidade $f(R)$ no limite Newtoniano

No modelo proposto neste trabalho, escolhemos uma ação simples que representa as teorias de gravidade modificadas. Esta ação está representada como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(R) + \chi \mathcal{L}_m \right], \quad (5.1)$$

onde $f(R)$ é uma função analítica do escalar de Ricci $R \equiv R(\Gamma)$, $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ é o acoplamento do campo gravitacional e \mathcal{L}_m é a densidade de Lagrangeana do campo de matéria. É importante mencionar que adotamos como assinatura $(-, +, +, +)$, como notação $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}(\Gamma)$, $R \equiv R(\Gamma)$, $\tilde{R}_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}(g)$, $\tilde{R} \equiv R(g)$ e usamos a contração $R_{\nu\alpha\beta}^\alpha$.

A partir do princípio da ação mínima, variamos o setor gravitacional da ação (5.1) de acordo com a formulação de Palatini

$$\delta S_g = \delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (5.2)$$

obtendo

$$\delta S_g = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + f'(R) R_{\mu\nu} \right] + \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0, \quad (5.3)$$

onde $f'(R) \equiv \frac{df}{dR}$.

Variando o setor responsável pela fonte do campo gravitacional

$$\delta S_m = \chi \delta \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (5.4)$$

obtemos a seguinte expressão

$$\delta S_m = \chi \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (5.5)$$

a partir da qual definimos o tensor energia-momento como se segue

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (5.6)$$

Reunindo os resultados obtidos para os dois setores, temos

$$\begin{aligned} \delta S = \delta(S_g + S_m) &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + f'(R) R_{\mu\nu} + \chi T_{\mu\nu} \right] \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A primeira integral envolve a variação do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ enquanto que a segunda envolve a variação da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Desta maneira, cada uma destas integrais deve se anular separadamente, uma vez que $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são arbitrários. Portanto, a partir de (5.7) obtemos as equações de campo de Einstein modificadas e independentes

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = -\chi T_{\mu\nu}, \quad (5.8)$$

e a seguinte expressão

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (5.9)$$

Em busca da solução da equação (5.9), partimos do tensor de Ricci generalizado, uma vez que, como pode-se notar, a variação é feita sobre este tensor

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda. \quad (5.10)$$

Fazendo a variação, temos

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda. \quad (5.11)$$

Usando o fato de que

$$\tilde{\nabla}_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda \quad (5.12)$$

pode ser reescrito como

$$\tilde{\nabla}_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad (5.13)$$

encontramos a equação de Palatini

$$\delta R_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (5.14)$$

Substituindo este resultado em (5.9) e observando que

$$\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) = \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \quad (5.15)$$

$$\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (5.16)$$

obtemos

$$\int d^4x \left[\tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right. \\ \left. + \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right] = 0. \quad (5.17)$$

Os dois primeiros termos desta equação podem ter suas derivadas covariantes trocadas por derivadas ordinárias, visto que se tratam de densidades vetoriais de peso +1 [36]. Esta troca possibilita utilizarmos o teorema da divergência para o cálculo da integral em questão

$$\int d^4x \left[\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right] \\ + \int dS \left[\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right] = 0. \quad (5.18)$$

A segunda integral na equação acima pode ser desconsiderada, já que os campos na superfície se anulam. Desta maneira, temos

$$\int d^4x \left[\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right] = 0. \quad (5.19)$$

Com o auxílio do tensor métrico para subida de índices, colocamos em evidência o termo $\delta \Gamma_{\mu}^{\lambda\alpha}$

$$\int d^4x \left[g_{\alpha\nu} \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) - g_{\alpha\lambda} \tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) \right] \delta \Gamma_{\mu}^{\lambda\alpha} = 0. \quad (5.20)$$

Multiplicando esta equação por $g^{\alpha\nu}$ e usando o fato de que $g^{\alpha\nu} g_{\alpha\nu}$ representa o traço da matriz do tensor métrico, encontramos a equação responsável pela dinâmica dos campos $\Gamma_{\mu}^{\lambda\alpha}$

$$\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.21)$$

5.1.1 Conexão afim generalizada na teoria da gravidade $f(R)$

A partir deste ponto, temos como objetivo encontrar uma expressão para a conexão afim generalizada em função de $f'(R)$, do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e do símbolo de Christoffel $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$. Para isto, definimos uma métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ como

$$h_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu}. \quad (5.22)$$

Trata-se apenas de um artifício matemático que tem como objetivo encontrar uma forma para a equação dinâmica dos campos da conexão afim (5.22), cuja solução já seja conhecida.

A inversa da métrica auxiliar é dada por

$$h^{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)}g^{\mu\nu} \quad (5.23)$$

e seu determinante por

$$h = f'^4(R)g, \quad (5.24)$$

o que nos leva a

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{f'^2(R)}\sqrt{-h}. \quad (5.25)$$

Substituindo estes resultados em (5.21), obtemos a equação parametrizada da dinâmica dos campos relacionados à conexão afim

$$\nabla_{\lambda}(\sqrt{-h} h^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.26)$$

A solução que satisfaz a equação acima, é a conexão afim para a métrica auxiliar

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{h^{\lambda\alpha}}{2} \left(\partial_{\mu} h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} \right). \quad (5.27)$$

Substituindo (5.22) obtemos a expressão para a conexão afim generalizada

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + \frac{1}{2f'(R)} g^{\alpha\lambda} \left[\partial_{\mu} f'(R) g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} f'(R) g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} f'(R) g_{\mu\nu} \right]. \quad (5.28)$$

5.1.2 Tensor e escalar de Ricci generalizados na teoria de gravidade $f(R)$

O objetivo nesta seção é determinar, a partir da conexão afim obtida na seção anterior, uma expressão para o tensor de Ricci generalizado, e a partir deste, uma expressão para o escalar de Ricci correspondente. Sendo assim, reescrevemos (5.28) como

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}, \quad (5.29)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2f'(R)} g^{\alpha\lambda} \left[\partial_{\mu} f'(R) g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} f'(R) g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} f'(R) g_{\mu\nu} \right]. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.29) em (5.10), temos

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\theta \bar{\Gamma}_{\nu\theta}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\theta \Gamma_{\nu\theta}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\theta \bar{\Gamma}_{\nu\theta}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\alpha\theta}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\theta \Gamma_{\alpha\theta}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\alpha\theta}^\alpha, \quad (5.31)$$

onde $\tilde{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci usual.

Observando a troca de índices, calculamos agora $\tilde{\nabla}_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha$ e $\tilde{\nabla}_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$, obtendo, respectivamente

$$\tilde{\nabla}_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha = \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\nu\theta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\theta - \Gamma_{\mu\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\mu}^\alpha = \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\alpha}^\alpha, \quad (5.32)$$

$$\tilde{\nabla}_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\theta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\theta - \Gamma_{\mu\alpha}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\mu}^\alpha. \quad (5.33)$$

Por substituição de (5.32) e (5.33) em (5.31), obtemos

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\theta \bar{\Gamma}_{\nu\theta}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\alpha\theta}^\alpha. \quad (5.34)$$

Usando (5.33) e (5.32), obtemos como resultado para as derivadas covariantes da equação acima, as seguintes expressões

$$\tilde{\nabla}_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha = \frac{2}{f'(R)} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu f'(R) - \frac{2}{f'^2(R)} \partial_\mu f'(R) \partial_\nu f'(R), \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha &= -\frac{1}{f'^2(R)} \partial_\mu f'(R) \partial_\nu f'(R) + \frac{1}{2f'^2(R)} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha f'(R) \tilde{\nabla}^\alpha f'(R) + \frac{1}{f'(R)} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu f'(R) \\ &\quad - \frac{1}{2f'(R)} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}^\alpha f'(R). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Utilizando (5.30) calculamos os outros termos de (5.34)

$$\bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\theta \bar{\Gamma}_{\nu\theta}^\alpha = \frac{3}{2f'^2(R)} \partial_\mu f'(R) \partial_\nu f'(R) - \frac{1}{2f'^2(R)} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha f'(R) \tilde{\nabla}^\alpha f'(R), \quad (5.37)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\theta \bar{\Gamma}_{\alpha\theta}^\alpha = \frac{2}{f'^2(R)} \partial_\mu f'(R) \partial_\nu f'(R) - \frac{1}{f'^2(R)} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\theta f'(R) \tilde{\nabla}^\theta f'(R). \quad (5.38)$$

Substituindo (5.35) - (5.38) em (5.34) chegamos ao tensor de Ricci generalizado

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2f'^2(R)} \partial_\mu f'(R) \partial_\nu f'(R) + \frac{1}{f'(R)} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu f'(R) + \frac{1}{2f'(R)} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}^\alpha f'(R). \quad (5.39)$$

Através da contração do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ com o tensor de Ricci (5.39), determinamos o escalar de Ricci generalizado

$$R = \tilde{R} - \frac{3}{2f'^2(R)} \partial_\mu f'(R) \partial^\mu f'(R) + \frac{3}{f'(R)} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu f'(R), \quad (5.40)$$

onde \tilde{R} é o escalar de Ricci usual.

5.2 O limite Newtoniano

O limite Newtoniano é uma aproximação matemática aplicado a sistemas físicos que exibem campo fraco, a objetos que se movem a velocidades consideravelmente menores do que a velocidade da luz e a campos gravitacionais estáticos ou que variam lentamente. Sob estas condições, podemos considerar o espaço-tempo aproximadamente plano, fazendo uso do tensor de Minkowski em primeira aproximação. Nesta seção, apresentaremos as equações sob este limite. Primeiramente, as componentes não-nulas da conexão afim, em seguida, o tensor e o escalar de Ricci, as equações de campo do modelo e por fim, a equação de Boltzmann sem colisão, ferramenta essencial para o entendimento dos processos que ocorrem em nuvens interestelares.

5.2.1 Conexão afim e escalar de Ricci generalizados no limite Newtoniano

Como já foi discutido, na aproximação Newtoniana, o tensor métrico pode ser escrito em termos do tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ mais correções da ordem de \bar{v}^2 . Desta maneira, no limite Newtoniano, as componentes do tensor métrico podem ser escritas da seguinte forma [93]

$$g_{00} = -1 + g_{00}^{(2)} + \dots, \quad (5.41)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (5.42)$$

onde

$$g_{00}^{(2)} = -\frac{2}{c^2}\phi, \quad g_{ij}^{(2)} = -\frac{2}{c^2}\delta_{ij}\varphi. \quad (5.43)$$

Os potenciais Newtonianos são representado por ϕ e φ . Vale notar que negligenciamos a componente g_{i0} , visto que possui apenas termos com ordem maior do que \bar{v}^2 .

Como foi escrito em (5.28), podemos separar a conexão afim generalizada em dois termos: o símbolo de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ e as correções $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ devido ao formalismo de Palatini. Desta maneira, vamos escrever ambos no limite Newtoniano. Primeiramente, vamos começar com o símbolo de Christoffel que tem sua forma exibida abaixo

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\alpha\rho}}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right\}. \quad (5.44)$$

Para calcular as componentes da conexão afim, levamos em conta a ordem das componentes espaciais e temporal

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \approx \frac{1}{\bar{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^0} \approx \frac{\bar{v}}{\bar{r}}. \quad (5.45)$$

Usando (5.41) e (5.42), verificamos que apenas as componentes Γ_{00}^i , Γ_{jk}^i e Γ_{0i}^0 são da ordem de \bar{v}^2 . As outras componentes são de ordem superior. Para o símbolo de Christoffel, pode-se mostrar através de (5.44):

$$\tilde{\Gamma}_{00}^{i(2)} = -\frac{1}{2}\partial_i g_{00}^{(2)}, \quad (5.46)$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^{i(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_k g_{ij}^{(2)} + \partial_j g_{ik}^{(2)} - \partial_i g_{jk}^{(2)} \right\}, \quad (5.47)$$

$$\tilde{\Gamma}_{0i}^{0(2)} = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00}^{(2)}, \quad (5.48)$$

onde o símbolo $\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu(N)}$ denota o termo em $\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu}$ da ordem de $\bar{v}^{(N)}/\bar{r}$. Em termos do potencial Newtoniano, temos

$$\tilde{\Gamma}_{00}^{i(2)} = \frac{1}{c^2} \partial_i \phi, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^{i(2)} = -\frac{1}{c^2} \left\{ \delta_{ij} \partial_k \phi + \delta_{ik} \partial_j \phi - \delta_{jk} \partial_i \phi \right\}, \quad \tilde{\Gamma}_{0i}^{0(2)} = \frac{1}{c^2} \partial_i \phi. \quad (5.49)$$

Neste trabalho, consideramos a seguinte expressão para a função do escalar de Ricci

$$f(R) = R + f_2 R^2, \quad (5.50)$$

onde f_2 é um termo pequeno e $R \approx R^{(2)} + R^{(4)} + \dots$, como visto anteriormente.

Usando (5.50) e (5.30), calculamos as componentes de $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ no limite Newtoniano, em função do escalar de Ricci

$$\tilde{\Gamma}_{00}^{i(2)} = f_2 \partial_i R^{(2)}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^{i(2)} = f_2 \left\{ \delta_{ik} \partial_j R^{(2)} + \delta_{ij} \partial_k R^{(2)} - \delta_{jk} \partial_i R^{(2)} \right\}, \quad \tilde{\Gamma}_{0i}^{0(2)} = f_2 \partial_i R^{(2)}. \quad (5.51)$$

Para obtermos estes termos em função do potencial Newtoniano, precisamos encontrar a expressão do escalar de Ricci generalizado em função deste potencial no limite de campo fraco. Para isto, substituímos (5.50) em (5.40), expandimos segundo a série de Taylor e obtemos

$$\left(1 - 6f_2 \nabla^2\right) R^{(2)} = \tilde{R}^{(2)}. \quad (5.52)$$

Considerando $\left(1 - 6f_2 \nabla^2\right)$ um operador inversível, temos

$$R^{(2)} \approx \left(1 + 6f_2 \nabla^2 + 36f_2^2 \nabla^4\right) \tilde{R}^{(2)}. \quad (5.53)$$

Como visto anteriormente, o escalar de curvatura \tilde{R} no limite Newtoniano é dado por

$$\tilde{R}^{(2)} = -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla^2 g_{ii}^{(2)} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 (\phi - \varphi), \quad (5.54)$$

onde ϕ e φ são os potenciais gravitacionais associados com $g_{00}^{(2)}$ e $g_{ii}^{(2)}$, respectivamente. Desta maneira, através de (5.53), obtemos o escalar de Ricci generalizado até a ordem de f_2^2

$$R^{(2)} \approx \frac{1}{c^2} \left[\nabla^2 (\phi - \varphi) + 6f_2 \nabla^4 (\phi - \varphi) + 36f_2^2 \nabla^6 (\phi - \varphi) \right]. \quad (5.55)$$

Substituindo este resultado em (5.51), encontramos

$$\bar{\Gamma}_{00}^{i(2)} = \left(\frac{f_2}{c^2} \nabla^2 + \frac{6f_2^2}{c^2} \nabla^4 \right) (\partial_i \phi - \partial_i \varphi), \quad (5.56)$$

$$\bar{\Gamma}_{jk}^{i(2)} = \left(\frac{f_2}{c^2} \nabla^2 + \frac{6f_2^2}{c^2} \nabla^4 \right) \left[\delta_{ik} (\partial_j \phi - \partial_j \varphi) + \delta_{ij} (\partial_k \phi - \partial_k \varphi) - \delta_{jk} (\partial_i \phi - \partial_i \varphi) \right], \quad (5.57)$$

$$\bar{\Gamma}_{0i}^{0(2)} = \left(\frac{f_2}{c^2} \nabla^2 + \frac{6f_2^2}{c^2} \nabla^4 \right) (\partial_i \phi - \partial_i \varphi). \quad (5.58)$$

Por fim, reunindo os resultados obtidos para as componentes de $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ e $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$, escrevemos a expressão para a conexão afim generalizada (5.28) em função dos potenciais gravitacionais

$$\Gamma_{00}^{i(2)} = \frac{1}{c^2} \partial_i \phi + \left(\frac{f_2}{c^2} \nabla^2 + \frac{6f_2^2}{c^2} \nabla^4 \right) (\partial_i \phi - \partial_i \varphi), \quad (5.59)$$

$$\Gamma_{jk}^{i(2)} = -\frac{1}{c^2} \left[\delta_{ij} \partial_k \phi + \delta_{ik} \partial_j \phi - \delta_{jk} \partial_i \phi \right] + \left(\frac{f_2}{c^2} \nabla^2 + \frac{6f_2^2}{c^2} \nabla^4 \right) \times \quad (5.60)$$

$$\left[\delta_{ik} (\partial_j \phi - \partial_j \varphi) + \delta_{ij} (\partial_k \phi - \partial_k \varphi) - \delta_{jk} (\partial_i \phi - \partial_i \varphi) \right],$$

$$\Gamma_{0i}^{0(2)} = \frac{1}{c^2} \partial_i \phi + \left(\frac{f_2}{c^2} \nabla^2 + \frac{6f_2^2}{c^2} \nabla^4 \right) (\partial_i \phi - \partial_i \varphi). \quad (5.61)$$

5.2.2 Tensor de Ricci generalizado e equações de campo no limite Newtoniano

Com o objetivo de encontrarmos as equações de campo no limite de campo fraco, partimos da componente temporal de (5.39), substituímos (5.50) e expandimos segundo a série de Taylor para obter

$$R_{00}^{(2)} = \tilde{R}_{00}^{(2)} - f_2 \nabla^2 R^{(2)}. \quad (5.62)$$

A componente temporal do tensor de Ricci na aproximação de \bar{v}^2 se reduz a (ver [93]):

$$\tilde{R}_{00}^{(2)} = \frac{\nabla^2 g_{00}^{(2)}}{2} = -\frac{\nabla^2 \phi}{c^2}. \quad (5.63)$$

Substituindo (5.52) e (5.63) em (5.62), encontramos a componente temporal do tensor de Ricci generalizado no limite Newtoniano

$$R_{00}^{(2)} \approx -\frac{1}{c^2} \left[\nabla^2 \phi + f_2 \nabla^4 (\phi - \varphi) + 6f_2^2 \nabla^6 (\phi - \varphi) \right]. \quad (5.64)$$

É importante citar que estamos considerando a fonte do campo gravitacional como sendo um fluido sem pressão onde as componentes do tensor energia-momento são dadas por

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2, 0, 0, 0) \quad (5.65)$$

com ρ denotando a densidade de massa do fluido.

Para escrevermos as equações de campo em termos dos potenciais gravitacionais, tomamos a componente temporal da equação de campo de Einstein (5.8) no limite Newtoniano

$$R_{00}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{00}R^{(2)} = -\chi T_{00}^{(2)}, \quad (5.66)$$

o que nos leva a

$$\nabla^2(\phi + \varphi) - 4f_2\nabla^4(\phi - \varphi) - 24f_2^2\nabla^6(\phi - \varphi) = 16\pi G\rho. \quad (5.67)$$

Para obter a outra equação de campo, calculamos o traço de (5.8) que resulta em

$$f'(R)R - 2f(R) = -\chi T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \quad (5.68)$$

e escrevemos no limite Newtoniano, obtendo

$$\nabla^2(\phi - \varphi) + 6f_2\nabla^4(\phi - \varphi) + 36f_2^2\nabla^6(\phi - \varphi) = -8\pi G\rho. \quad (5.69)$$

As equações (5.67) e (5.69) formam um sistema de equações de Poisson. Se somarmos essas equações e considerarmos $f_2 = 0$, a equação de Poisson padrão é recuperada.

5.3 Equação de Boltzmann sem colisão no limite Newtoniano e a relação de dispersão

A dinâmica de sistemas auto-gravitantes sem colisões pode ser descrita pelas equações de Boltzmann e Poisson acopladas, derivadas da gravidade $f(R)$ na aproximação de campo fraco. Agora, nosso objetivo é obter a equação de Boltzmann sem colisão no limite Newtoniano, e a partir disto, obter um critério para o colapso de sistemas estelares conhecido como relação de dispersão. Como já foi mostrado, a equação de Boltzmann sem colisão na presença de campo gravitacional tem a seguinte forma

$$p^\mu \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial p^i} = 0. \quad (5.70)$$

No limite Newtoniano ela se reduz a (ver [3,79])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r)f - (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}_v)f = 0, \quad (5.71)$$

onde $f \equiv f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a função distribuição.

Considerando que um sistema em equilíbrio é descrito por uma função distribuição independente do tempo $f_0(x, \vec{v})$, pelos potenciais $\phi_0(x)$ e $\varphi_0(x)$ e que está sujeito a uma pequena perturbação, podemos escrever

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{r}, \vec{v}) + \epsilon f_1(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (5.72)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0(\vec{r}) + \epsilon \phi_1(\vec{r}, t), \quad (5.73)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \epsilon \varphi_1(\vec{r}, t), \quad (5.74)$$

onde $\epsilon \ll 1$. O equilíbrio para um sistema homogêneo é alcançado pelo que chamamos de *Jeans swindle* que nos permite fazer $\phi_0 = 0$ e $\varphi_0 = 0$ sem perda de consistência. O *Jeans swindle* pode ser entendido através de considerações de simetria. Dado que em um sistema é homogêneo, não existe direção preferencial para $\nabla \phi_0$, e através da equação de Poisson padrão, nós sabemos que $\nabla^2 \phi_0$ é proporcional ao potencial não perturbado ρ_0 . Esses requisitos são inconsistentes a menos que $\rho_0 = 0$. Pode-se remover essa inconsistência assumindo-se que a equação de Poisson em um sistema estelar homogêneo infinito descreve somente a relação entre a densidade perturbada e o potencial perturbado e que o potencial não perturbado é nulo [14]. O mesmo se aplica para o campo φ . Depois dessas considerações, nós linearizamos as equações de campo e a de Boltzmann através da substituição dessas condições de perturbação do equilíbrio. Subsequentemente, escrevemos as equações no espaço de Fourier como se segue

$$-i\omega \bar{f}_1 + \vec{v} \cdot (i\vec{k} \bar{f}_1) - (i\vec{k} \bar{\phi}_1) \cdot \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (5.75)$$

$$-k^2(\bar{\phi}_1 + \bar{\varphi}_1) - 4f_2 k^4(\bar{\phi}_1 - \bar{\varphi}_1) + 24f_2^2 k^6(\bar{\phi}_1 - \bar{\varphi}_1) = 16\pi G \int \bar{f}_1 d\vec{v}, \quad (5.76)$$

$$k^2(\bar{\phi}_1 - \bar{\varphi}_1) - 6f_2 k^4(\bar{\phi}_1 - \bar{\varphi}_1) + 36f_2^2 k^6(\bar{\phi}_1 - \bar{\varphi}_1) = 8\pi G \int \bar{f}_1 d\vec{v}, \quad (5.77)$$

onde as quantidades com barra indicam as transformadas de Fourier no espaço (ω, \vec{k}) .

Manipulando as equações (5.76) e (5.77) com objetivo de eliminar o termo $\bar{\varphi}_1$, obtemos

$$\bar{\phi}_1 = \frac{16\pi G(1 - f_2 k^2 + 48f_2^2 k^4)}{4k^2(-1 + 6f_2 k^2 - 36f_2^2 k^4)} \int \bar{f}_1 d\vec{v}. \quad (5.78)$$

Substituindo essa relação em (5.75), encontramos a relação de dispersão

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \frac{(1 - 8f_2 k^2 + 48f_2^2 k^4)}{(1 - 6f_2 k^2 + 36f_2^2 k^4)} \int \left(\frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}}{\vec{v} \cdot \vec{k} - \omega} \right) = 0. \quad (5.79)$$

Em sistemas estelares assume-se usualmente a função distribuição de Maxwell

$$f_0(\vec{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.80)$$

onde σ é a velocidade de dispersão das partículas como função da temperatura e ρ_0 é uma constante da densidade de massa.

Sem perda de generalidade, podemos escolher $\vec{k} = (k, 0, 0)$. Desta maneira, a relação de dispersão para essa distribuição é dada por

$$1 - \frac{2\sqrt{2\pi}G\rho_0}{k\sigma^3} \frac{(1 - 8f_2k^2 + 48f_2^2k^4)}{(1 - 6f_2k^2 + 36f_2^2k^4)} \int \frac{v_x e^{-\frac{v_x^2}{2\sigma^2}}}{kv_x - \omega} dv_x = 0. \quad (5.81)$$

Fazendo $f_2 = 0$, recuperamos a expressão para o caso Newtoniano.

Fazendo mudanças de variáveis, obtemos

$$\frac{k^2}{k_J^2} - \frac{(1 - 8f_2k^2 + 48f_2^2k^4)}{(1 - 6f_2k^2 + 36f_2^2k^4)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \frac{x^2 e^{-x^2}}{x^2 - \omega/(2\sigma^2k^2)} dx = 0. \quad (5.82)$$

Aqui, introduzimos o número de onda de Jeans $k_J = \sqrt{4\pi G\rho_0/\sigma^2}$ e a variável de integração $x = v_x/(\sqrt{2}\sigma)$.

Soluções instáveis são obtidas para $\mathcal{R}(\omega) = 0$ e $\omega_I = \mathcal{I}(\omega) > 0$. Neste caso, a integral do lado direito de (5.82) pode ser calculada (ver equação 3.466 de [49]). Após calcularmos a integral e introduzirmos a parametrização $f_2 = -1/(2k_J^2)$, a relação de dispersão se reduz a

$$\frac{\left\langle \frac{9k^6}{k_J^6} \right\rangle + \left(\frac{3k^4}{k_J^4} \right) + \frac{k^2}{k_J^2}}{\left\langle \frac{12k^4}{k_J^4} \right\rangle + \left(\frac{4k^2}{k_J^2} \right) + 1} = \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}\omega_I}{\sqrt{8\pi G\rho_0}} \frac{k_J}{k} e^{\left(\frac{\omega_I^2}{8\pi G\rho_0} \frac{k_J^2}{k^2} \right)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\omega_I}{\sqrt{8\pi G\rho_0}} \frac{k_J}{k} \right) \right\}. \quad (5.83)$$

Na equação acima erfc é a função erro complementar. Sem os termos entre parênteses no numerador e no denominador no lado esquerdo de (5.83), temos a relação de dispersão clássica para a gravidade Newtoniana (4.47). Os termos entre parênteses referem-se à contribuição da teoria $f(R)$ no formalismo métrico (4.53), enquanto que os termos em parênteses e *brackets* correspondem à contribuição da formulação de Palatini.

A solução de (5.83) para $\omega_I = 0$ fornece os valores limites para o número de onda: (a) $k^2 = 1,3171 k_J^2$ para a teoria $f(R)$ no formalismo de Palatini, (b) $k^2 = 1,2638 k_J^2$ para a teoria $f(R)$ no formalismo métrico e (c) $k^2 = k_J^2$ na teoria Newtoniana. Por comparação, a relação de dispersão obtida é plotada na Fig. 1 junto com os resultados obtidos do formalismo métrico, explorado em [26], e para a gravidade Newtoniana. O valor crítico para o comprimento de onda da oscilação é o comprimento de Jeans. Abaixo deste valor, as oscilações permanecem estáveis e acima deste

valor, o colapso gravitacional ocorre. Através da Fig. 1 é possível observar que o número de onda associado com o comprimento de Jeans no formalismo de Palatini é maior quando comparado com os casos métrico e Newtoniano, conseqüentemente, pode-se observar o decrescimento das oscilações para a formulação de Palatini quando confrontado com os outros citados.

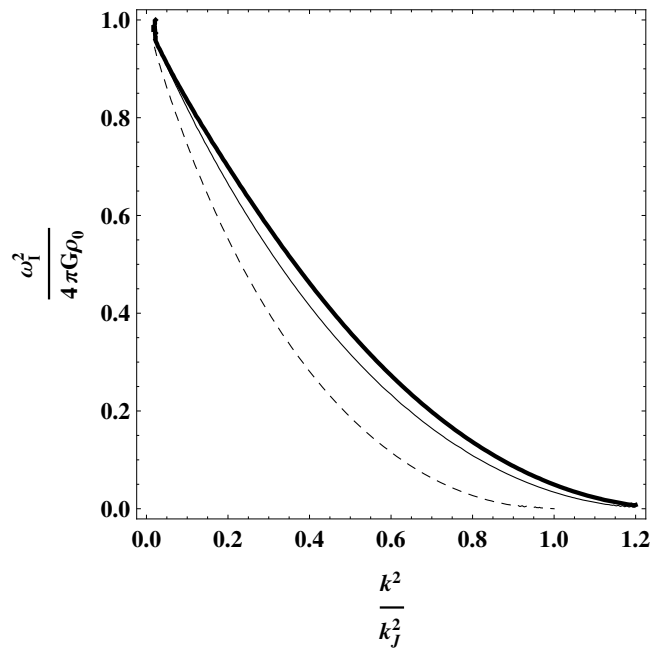


Figura 1 – Razão dos números de onda k^2/k_J^2 versus frequência normalizada $\omega_1^2/(4\pi G\rho_0)$ para a relação de dispersão. Neste gráfico, o critério de instabilidade para o sistema é exibido pela relação de dispersão para a gravidade $f(R)$ obtida via formalismo de Palatini, indicado pela linha em negrito, pelo formalismo métrico, representado pela linha fina e pela gravidade Newtoniana, mostrado pela linha pontilhada.

5.4 A massa de Jeans segundo a gravidade $f(R)$ na formulação de Palatini

Sob certas condições, uma nuvem de gás interestelar pode iniciar um colapso gravitacional. Isto ocorre quando, basicamente, a pressão hidrodinâmica não é capaz de contrabalancear a força gravitacional. A nuvem é estável para massa suficientemente pequena, a uma dada temperatura e raio. Mas se esta massa superar um valor crítico, a nuvem iniciará um processo de contração até que alguma força impeça o colapso total. Na teoria Newtoniana, esse valor crítico de massa é conhecido como massa de Jeans M_{Jc} , que é definida como a massa contida em uma esfera de diâmetro $\lambda_J = 2\pi/k_J$ com $k_J^2 = 4\pi G\rho_0/\sigma^2$ [93], isto é,

$$M_{Jc} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\pi\sigma^2}{G} \right)^3}, \quad (5.84)$$

onde ρ_0 é a densidade do meio interestelar e σ é a velocidade de dispersão das partículas devido à temperatura.

Da mesma maneira, calculando a massa contida numa esfera de diâmetro $\lambda = 2\pi/k$, através do valor limite encontrado para o número de onda $k^2 = 1,2638 k_J^2$ no formalismo métrico, obtemos a massa de Jeans em função da massa no caso Newtoniano

$$\tilde{M}_J = 0,704M_{J_c}. \quad (5.85)$$

Analogamente, através do valor limite encontrado para o número de onda $k^2 = 1,3171 k_J^2$ na formulação de Palatini, obtemos a massa de Jeans para o sistema em consideração em função da massa de Jeans para o caso clássico

$$M_J = 0,662M_{J_c}. \quad (5.86)$$

Os valores obtidos nos sugerem que a teoria $f(R)$ na formulação de Palatini favorece a formação de estruturas, uma vez que fornece uma massa crítica menor para que haja colapso gravitacional. Com o objetivo de analisar e comparar o comportamento da massa de Jeans com os resultados obtidos previamente na literatura, usamos os dados fornecidos em [26] para a massa crítica no caso clássico. Para isso, calcula-se a massa de Jeans na formulação métrica usando (5.85) e, no formalismo de Palatini através de (5.86). As massas são dadas em unidades de massa solar (unidade padrão usada para indicar massa de estrelas, aglomerados e galáxias). Esse dados estão exibidos na tabela abaixo.

Sistemas	$T(K)$	$M_{J_c}(M_\odot)$	$\tilde{M}_J(M_\odot)$	$M_J(M_\odot)$
Nuvens difusas de Hidrogênio	50	795,13	559,68	526,02
Nuvens moleculares difusas	30	82,63	58,16	54,66
Nuvens moleculares gigantes	15	206,58	145,41	136,66
Glóbulos de Bok	10	11,24	7,91	7,44

Tabela 1. Massa de Jeans, em termos da massa solar M_\odot , para a gravidade Newtoniana (M_{J_c}), gravidade $f(R)$ no formalismo métrico (\tilde{M}_J) e para o formalismo de Palatini (M_J). Os dados de temperatura T , M_{J_c} e \tilde{M}_J , dessa tabela, foram retirados da referência [26].

Regiões em que a matéria interestelar é constituída de Hidrogênio neutro são conhecidas como Nuvens difusas de Hidrogênio. A maior parte da matéria entre as estrelas na Via Láctea, assim como em outras galáxias espirais, ocorre na forma destas nuvens. Este tipo de estrutura pode ser visto como uma região distinta no meio interestelar de baixa densidade, ou então, nas bordas externas das nuvens moleculares. Essas nuvens moleculares, por sua vez, são um tipo de meio interestelar cuja densidade e tamanho permitem a formação de moléculas de Hidrogênio, o que diferencia de outras estruturas observadas, haja vista que a maior parte do meio interestelar contém

predominantemente gás ionizado. Um conjunto de gás molecular com massa de cerca de centenas de vezes maior que a massa do Sol é chamado de nuvem molecular gigante. Sua estrutura é complexa, podendo conter aglomerados em seu interior. Um exemplo de nuvem molecular gigante é a nuvem de Órion, também conhecida como Nebulosa de Órion. Por fim, glóbulos de *Bok* são nuvens densas de poeira e gás que têm, tipicamente, uma massa em torno de 2 a 50 massas solares. Entre os seus constituintes está o Hidrogênio molecular. Um fato interessante sobre estes glóbulos diz respeito à temperatura. Eles estão entre os sistemas que apresentam as menores temperaturas no Universo [26].

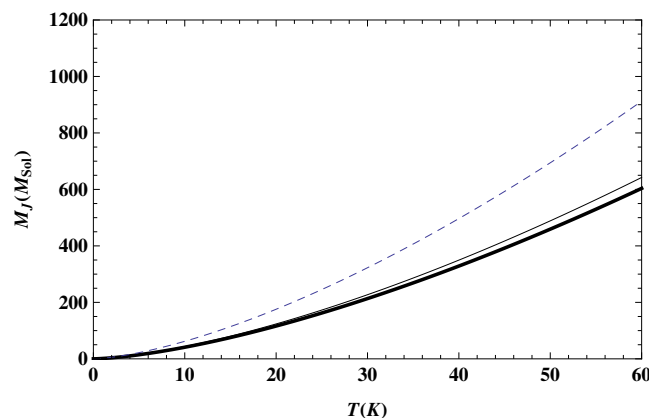


Figura 2 – Relação entre massa de Jeans e temperatura. A linha pontilhada indica o comportamento da massa de Jeans no caso clássico. A linha fina indica o comportamento da massa de Jeans na gravidade $f(R)$ no formalismo métrico e a linha em negrito corresponde à formulação de Palatini.

Usando os dados de temperatura e de massa fornecidos pela referência [26] (ver Tabela 1), construímos um gráfico de massa de Jeans, para todos os modelos considerados, em função da temperatura dos meios interestelares. Curvas foram ajustadas aos pontos dando origem à Fig. 2. Este gráfico demonstra que o limite de instabilidade para iniciar o colapso de uma nuvem interestelar na gravidade $f(R)$, segundo o formalismo de Palatini, é menor do que no caso Newtoniano e no caso descrito pela gravidade $f(R)$ no formalismo métrico. A principal consequência deste fato é a vantagem na formação de estruturas, já que a massa de Jeans dos sistemas, para o nosso modelo, apresentam valores menores entre todos os casos considerados. Pode-se ver também, por este gráfico, que a formação de estruturas é favorável, à baixas temperaturas, para todos os modelos, uma vez que a massa de Jeans apresenta valores menores para temperaturas mais baixas. Ainda neste gráfico, é possível observar que a taxa de crescimento da massa de Jeans com a temperatura é menor para o formalismo de Palatini. Se extrapolarmos para temperaturas ainda maiores, teremos uma diferença ainda mais pronunciada entre as massa críticas no caso Newtoniano e no formalismo de Palatini. Para a teoria Newtoniana, torna-se ainda mais difícil formar estruturas na época em que o Universo era quente e denso, uma vez que necessita-se de uma massa maior para iniciar

o colapso. Isso indica, que a formação de estruturas na formulação de Palatini, pode ter tido um início anterior ao que é previsto pela teoria Newtoniana. Desta maneira, segundo o nosso modelo, observaríamos no Universo, estruturas mais antigas do que é esperado pela teoria Newtoniana.

5.5 Conclusões

Neste capítulo, analisamos a dinâmica e o colapso de sistemas auto-gravitantes descritos pelo limite Newtoniano da gravidade $f(R)$. As equações de campos obtidas pelo formalismo de Palatini foram as equações de Poisson modificadas. A equação de Boltzmann sem colisão, no limite Newtoniano, foi escrita e linearizada, assim como as equações de Poisson. Assumindo uma distribuição Maxwelliana, a relação de dispersão do nosso modelo foi obtida. Através desta relação, soluções numéricas foram obtidas e comparadas com as já estudadas.

A relação de dispersão é um critério de colapso para sistemas estelares e fluidos homogêneos infinitos. Aqui, esta relação é usada para o estudo da instabilidade de sistemas sem colisões. A Fig.1 mostra o comportamento da relação de dispersão para os modelos confrontados: gravidade Newtoniana, gravidade $f(R)$ no formalismo métrico e no formalismo de Palatini. É importante notar que o comprimento característico é dado em termos do comprimento característico clássico k_J . Nosso modelo prova ter um limite de instabilidade maior quando comparado com os modelos Newtoniano e de gravidade $f(R)$ no formalismo métrico. O colapso ocorre para o valor $k^2 = 1.317 k_J^2$, o que significa que o limite de massa das nuvens interestelares diminui, modificando as condições iniciais para iniciar o colapso. A relação de dispersão obtida via formulação de Palatini difere daquela obtida via formulação métrica somente por termos de ordem f_2^2 , abaixo dessa ordem, nenhuma diferença foi encontrada. Os termos de ordem f_2^2 surgiram somente nas soluções de Palatini quando escrevemos o escalar de Ricci dependendo apenas do escalar de Ricci usual. Desta maneira, pode-se concluir que as diferenças reportadas aqui são resultados diretos da aplicação da formulação de Palatini.

A massa de Jeans é um critério para o estudo do colapso gravitacional de nuvens interestelares. A nuvem é estável para massa suficientemente pequena (a uma dada temperatura e raio), menor que o limite estabelecido pela massa de Jeans. Se a nuvem excede esse limite, o processo de contração se inicia até que alguma força possa impedir o colapso total. Através da Tabela I e da Fig. 2, verificamos que a massa de Jeans para os sistemas descritos pela gravidade $f(R)$ via formalismo de Palatini, exibem valores menores que aqueles encontrados para o caso métrico e, especialmente, para a gravitação Newtoniana. Isso demonstra que o limite para iniciar o colapso de uma nuvem interestelar está abaixo do limite clássico, favorecendo a formação de estruturas. Podemos interpretar esse resultado, dizendo que a mesma quantidade de matéria é capaz de produzir uma maior curvatura, causando uma aceleração maior das partículas testes. Desta maneira, as partículas testes descrevem uma geodésica diferente daquela que elas descreveriam se

seguissem o formalismo métrico. Comparamos também, o comportamento da massa de Jeans com a temperatura para algumas nuvens interestelares. O gráfico indicou que para baixas temperaturas, a formação de estruturas torna-se favorável, considerando que a massa de Jeans, nessas situações, apresenta valores menores. Quando comparada com os casos estudados em [26], nota-se que a curva que descreve a massa de Jeans do nosso modelo, mostra um crescimento menos pronunciado que os outros, o que indica que os valores para a massa de Jeans na formulação de Palatini tornam-se um limite inferior para o colapso de nuvens. Pode-se ainda notar que, na época em que o Universo era quente, segundo à teoria Newtoniana, a massa crítica para o colapso deveria ser maior. Isso sugere que a formação de estruturas, na formulação de Palatini, pode ter tido um início anterior ao que é previsto pela teoria clássica, o que nos levaria a observar estruturas mais antigas. Assim, concluímos que no nosso modelo, a formação de estruturas é favorecida.

Capítulo 6

Análise da instabilidade de um sistema composto por matérias escura e bariônica

Neste capítulo, apresentaremos um trabalho sobre a instabilidade de Jeans onde a matéria escura está presente juntamente com a matéria bariônica [63]. O modelo aceito desse componente desconhecido é o modelo de matéria escura fria. Tal modelo postula a matéria escura como partículas massivas fracamente interagentes, cujas velocidades típicas são muito menores do que a velocidade da luz. Como consequência, a matéria escura é um auxiliar no processo de formação de estruturas. Neste cenário, a matéria escura fria leva a um processo de formação hierárquico onde pequenas estruturas são formadas primeiro e estruturas massivas são formadas mais tarde [91]. Modelos com matéria escura quente, por outro lado, apresentam dificuldades para explicar a formação de galáxias e outras estruturas em menor escala. As altas velocidades não permitem a aglomeração na escala necessária. Neste contexto, nosso modelo consiste em matéria escura fria com matéria bariônica sujeitas a um campo gravitacional.

Buscando o critério de colapso para nosso modelo, invocamos a equação de Boltzmann para os constituintes e a equação de Poisson para o campo gravitacional. Esse conjunto de equações leva à relação de dispersão, critério para o colapso de fluidos homogêneos infinitos e sistemas estelares. O objetivo é obter o número de onda de Jeans e a massa de Jeans para o caso em discussão e comparar com os resultados obtidos no caso padrão [26].

6.1 Sistemas de equações e a relação de dispersão

Iniciamos com as três equações que descrevem um sistema composto por matérias escura e bariônica sujeitas a um campo gravitacional ϕ . Aqui, usamos os índices B e D para a matéria bariônica e para a matéria escura, respectivamente. As equações escritas para estes constituintes

são equações de Boltzmann sem colisão. Para o campo gravitacional, temos a equação de Poisson:

$$\frac{\partial f_B}{\partial t} + \vec{v}_B \cdot \vec{\nabla} f_b - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}_{v_B} f_B = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial f_D}{\partial t} + \vec{v}_D \cdot \vec{\nabla} f_D - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}_{v_D} f_D = 0, \quad (6.2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \int f_D d\vec{v}_D + 4\pi G \int f_B d\vec{v}_B. \quad (6.3)$$

Com o objetivo de linearizar este conjunto de equações, introduzimos uma pequena perturbação ao sistema inicialmente em equilíbrio descrito pela funções f_{0_B} , f_{0_D} e ϕ_0 ,

$$f_B(\vec{r}, \vec{v}_B, t) = f_{0_B}(\vec{v}_B) + \epsilon f_{1_B}(\vec{r}, \vec{v}_B, t), \quad (6.4)$$

$$f_D(\vec{r}, \vec{v}_D, t) = f_{0_D}(\vec{v}_D) + \epsilon f_{1_D}(\vec{r}, \vec{v}_D, t), \quad (6.5)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0(\vec{r}) + \epsilon \phi_1(\vec{r}, t), \quad (6.6)$$

onde $\epsilon \ll 1$. Sem perda de consistência, usando o *Jeans swindle*, podemos fazer $\phi_0 = 0$. Com essas considerações, linearizamos o sistema de equações (6.1) - (6.3) e o escrevemos, no espaço de Fourier, como

$$-\omega f_{1_B} + \vec{k} \cdot \vec{v}_B f_{1_B} - \phi_1 \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{0_B}}{\partial \vec{v}_B} = 0, \quad (6.7)$$

$$-\omega f_{1_D} + \vec{k} \cdot \vec{v}_D f_{1_D} - \phi_1 \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{0_D}}{\partial \vec{v}_D} = 0, \quad (6.8)$$

$$-k^2 \phi_1 = 4\pi G \int f_{1_D} d\vec{v}_D + 4\pi G \int f_{1_B} d\vec{v}_B. \quad (6.9)$$

Combinado as equações (6.7) - (6.9), obtemos a expressão

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \left\{ \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{0_D}}{\partial \vec{v}_D}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_D - \omega} + \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{0_B}}{\partial \vec{v}_B}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_B - \omega} \right\} = 0. \quad (6.10)$$

Assumimos uma função distribuição de Maxwell para cada componente:

$$f_{0_B} = \frac{\rho_{0_B} e^{-v_B^2/2\sigma_B^2}}{(2\pi\sigma_B^2)^{3/2}}, \quad f_{0_D} = \frac{\rho_{0_D} e^{-v_D^2/2\sigma_D^2}}{(2\pi\sigma_D^2)^{3/2}}, \quad (6.11)$$

onde σ_B e σ_D são as velocidades de dispersão das matérias bariônica e escura e ρ_{0_B} e ρ_{0_D} são suas densidades, respectivamente. Consideramos $\frac{\rho_{0_B}}{\rho_{0_D}} = \frac{1}{5,5}$, visto que a razão entre a densidade de

matéria bariônica e a densidade de matéria escura se mantêm neste valor desde o período da nucleossíntese primordial. Por simplicidade, fazemos $\vec{k} = (k, 0, 0)$. Como resultado, obtemos a seguinte relação de dispersão para essas distribuições:

$$1 - \frac{2\sqrt{2\pi}G\rho_{0D}}{k\sigma_D^3} \int \frac{v_{D_x} e^{-v_D^2/2\sigma_D^2} dv_{D_x}}{kv_{D_x} - \omega} - \frac{2\sqrt{2\pi}G\rho_{0B}}{k\sigma_B^3} \int \frac{v_{B_x} e^{-v_B^2/2\sigma_B^2} dv_{B_x}}{kv_{B_x} - \omega} = 0. \quad (6.12)$$

Fazendo uma mudança de variáveis, reescrevemos (6.12) como

$$1 - \frac{8\sqrt{\pi}G\rho_{0D}}{k^2\sigma_D^2} \int_0^\infty \frac{u_D^2 e^{-u_D^2} du_D}{(u_D^2 + \beta_D^2)} - \frac{8\sqrt{\pi}G\rho_{0B}}{k^2\sigma_B^2} \int_0^\infty \frac{u_B^2 e^{-u_B^2} du_B}{(u_B^2 + \beta_B^2)} = 0, \quad (6.13)$$

onde $\beta_D = -i\omega/(\sqrt{2}k\sigma_D)$, $\beta_B = -i\omega/(\sqrt{2}k\sigma_B)$, $u_D^2 = v_{D_x}^2/(2\sigma_D^2)$ e $u_B^2 = v_{B_x}^2/(2\sigma_B^2)$. Usando a identidade

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2} dx}{(x^2 + \beta^2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\pi}{2} \beta e^\beta \operatorname{erfc}(\beta), \quad (6.14)$$

encontramos

$$1 - \frac{4\pi G\rho_{0D}}{k^2\sigma_D^2} \left\{ 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k\sigma_D} e^{-\omega^2/(2k^2\sigma_D^2)} \operatorname{erfc}\left(-\frac{i\omega}{\sqrt{2}k\sigma_D}\right) \right\} - \frac{4\pi G\rho_{0B}}{k^2\sigma_B^2} \left\{ 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k\sigma_B} e^{-\omega^2/(2k^2\sigma_B^2)} \operatorname{erfc}\left(-\frac{i\omega}{\sqrt{2}k\sigma_B}\right) \right\} = 0. \quad (6.15)$$

Introduzindo a normalização

$$\omega_* = \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi G\rho_{0D}}}; \quad k_* = \frac{k\sigma_D}{\sqrt{4\pi G\rho_{0D}}}, \quad (6.16)$$

obtemos a relação de dispersão como

$$k_*^2 = \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{k_*} e^{\omega_*^2/(2k_*^2)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\omega_*}{\sqrt{2}k_*}\right) \right\} + \frac{\rho_{0B}}{\rho_{0D}} \frac{\sigma_D^2}{\sigma_B^2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{k_*} \frac{\sigma_D}{\sigma_B} e^{\omega_*^2\sigma_D^2/(2k_*^2\sigma_B^2)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\omega_*}{\sqrt{2}k_*\frac{\sigma_D}{\sigma_B}}\right) \right\}. \quad (6.17)$$

Por comparação, construímos um gráfico da relação de dispersão (6.17) para dois valores diferentes para a razão $\frac{\sigma_D}{\sigma_B}$ e a relação de dispersão obtida no caso clássico [26] (ver Fig. 3). Vale citar que as oscilações presentes no gráfico são frutos da instabilidade numérica do software empregado para a solução das equações.

O modelo mostra um alto limite de instabilidade. Na presença de matéria escura, o comprimento de Jeans para uma nuvem de gás é sempre reduzido. A solução para (6.17) para $\omega_* = 0$ resulta em $k_* = 1,04545$ para $\frac{\sigma_D}{\sigma_B} = 0,5$ e $k_* = 1,72727$ para $\frac{\sigma_D}{\sigma_B} = 2$. Escolhemos dois valores diferentes

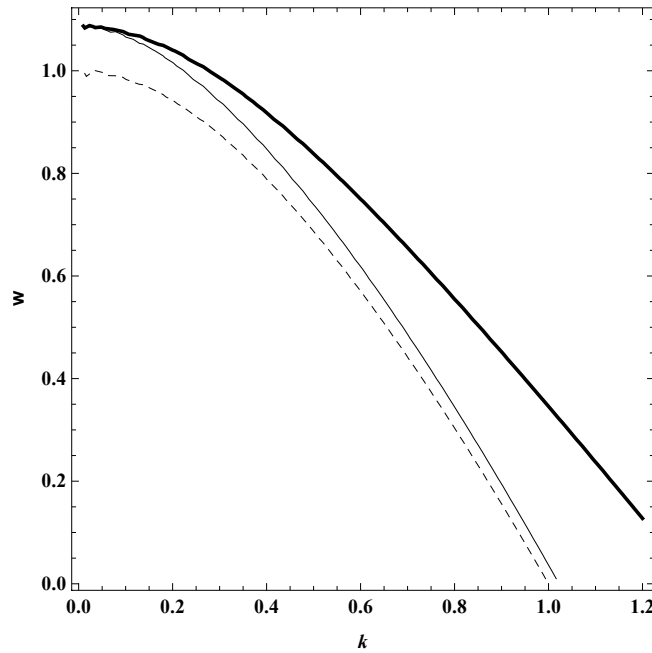


Figura 3 – Neste gráfico, o critério de instabilidade para o sistema é exibido pela relação de dispersão (6.17) para $\frac{\sigma_D}{\sigma_B} = 2$, indicado pela linha cheia, para $\frac{\sigma_D}{\sigma_B} = 0.5$, representado pela linha fina e o caso Newtoniano, mostrado para a linha pontilhada. Consideramos $\frac{\rho_B}{\rho_D} = \frac{1}{5.5}$.

para a razão $\frac{\sigma_D}{\sigma_B}$ para abranger duas situações possíveis, o caso em que a velocidade de dispersão da matéria bariônica é maior que a velocidade de dispersão da matéria escura, e o caso em que a velocidade de dispersão da matéria escura é maior que a bariônica.

A massa de Jeans do sistema (para o valor crítico de k_*) pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$M_{J_{BD}} = \frac{4\pi}{3}(\rho_{0D} + \rho_{0B}) \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{k_*} \right)^3 = \frac{16\pi^4}{3}(\rho_{0D} + \rho_{0B}) \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho_{0B}}{\rho_{0D}} \frac{\sigma_D^2}{\sigma_B^2} \right)^{3/2}}. \quad (6.18)$$

Para tornar a expressão adimensional, dividimos essa equação pela massa de Jeans para um sistema composto somente por matéria escura, obtendo

$$\frac{M_{J_{BD}}}{M_{J_D}} = \frac{\left(1 + \frac{\rho_{0B}}{\rho_{0D}} \right)}{\left(1 + \frac{\rho_{0B}}{\rho_{0D}} \frac{\sigma_D^2}{\sigma_B^2} \right)^{3/2}}. \quad (6.19)$$

Para $\sigma_D/\sigma_B = 0,5$, temos $M_{J_{BD}}/M_{J_D} = 1,10559$. Se $\sigma_D/\sigma_B = 2$, $M_{J_{BD}}/M_{J_D} = 0,520606$. Como já mencionado, a presença de matéria escura faz com que o número de onda de Jeans apresente valores baixos. Isso pode ser explicado baseando-se na idéia central da instabilidade de Jeans que causa o colapso de nuvens de gás interestelares, resultando na formação de estruturas [91]. Esse

fenômeno ocorre quando a pressão interna da nuvem não é forte o suficiente para evitar o colapso gravitacional. Quando a matéria escura está presente, ela se aglomera primeiro sem dificuldades, já que este tipo de constituinte não é influenciado pela pressão como a matéria bariônica. Depois deste estágio, o aglomerado formado começa a atrair partículas de matéria bariônica. Isso mostra que nesse modelo, onde a matéria escura está presente, as estruturas começaram a se formar mais cedo, no tempo em que o ente escuro dominava, o que reforça o fato de que uma menor massa de Jeans foi requerida para iniciar o colapso.

Através da Fig. 3 observamos também que quanto maior a razão entre as velocidades de dispersão σ_D/σ_B , mais a curva se afasta do modelo Newtoniano, obtendo um maior valor crítico de k_* e uma razão M_{JBD}/M_{JD} menor. Quando σ_B é relativamente menor que σ_D com respeito a um dado campo gravitacional, as partículas facilmente se agregam, uma vez que elas dificilmente superam a velocidade de escape do dado campo.

6.2 Conclusões

Neste capítulo, analisamos a dinâmica e o colapso de um sistema auto-gravitante sem colisão composto por matéria escura e bariônica. Esse sistema é descrito por duas equações de Boltzmann sem colisão, um para cada constituinte, e pela equação de Poisson para o campo gravitacional. Linearizando essas equações e assumindo uma distribuição de Maxwell, a relação de dispersão para esse modelo é encontrada. Essa relação permite obter o critério de colapso para as nuvens compostas pelos constituintes mencionados. A Fig. 3 mostra o comportamento da relação de dispersão (6.17) para dois valores diferentes da razão σ_D/σ_B e a relação obtida no caso clássico. O modelo mostra um alto limite de instabilidade com um número de onda maior, conseqüentemente, uma massa crítica menor quando comparada com o caso Newtoniano.

A massa de Jeans sempre tem valores menores nos modelos onde a matéria escura está presente. Esse fenômeno ocorre devido ao fato da matéria escura não ser influenciada pela pressão como a matéria bariônica, o que faz com que o constituinte escuro se aglomere mais facilmente. Em seguida, a matéria bariônica passa a se agregar devido à atração do campo gravitacional gerado por esse aglomerado inicial. Esse resultado demonstra que as estruturas começaram a se formar mais cedo, na época que a matéria escura dominava.

Concluimos também que quando a velocidade de dispersão da matéria bariônica é relativamente menor que a velocidade de dispersão da matéria escura, as partículas de matéria bariônica são facilmente agregadas, já que dificilmente superam a velocidade de escape de um dado campo gravitacional. Esse comportamento pode ser observado através da Fig.3 quando σ_D/σ_B aumenta, também k_* aumenta. Desta maneira, esse modelo prova ter um alto limite de instabilidade, e por conseqüência, exibe uma vantagem quanto à formação de estruturas.

Capítulo 7

Modelo de estrutura estelar em equilíbrio hidrostático no contexto da teoria $f(\mathcal{R})$

A gravidade $f(\mathcal{R})$ é uma classe de teorias que representam uma nova abordagem para a interação gravitacional. Neste contexto, a Relatividade Geral tem que ser estendida a fim de resolver várias lacunas existentes. A partir dos pontos de vista astrofísico e cosmológico, o objetivo é abranger fenômenos como a energia escura e matéria escura sob um padrão geométrico com a possibilidade de que a interação gravitacional dependa das escalas. Neste sentido, em princípio, essas teorias não necessitam da introdução de novas partículas e preservam todos os resultados bem sucedidos da teoria de Einstein, sendo baseada nos mesmos princípios físicos fundamentais (Princípio da Equivalência, invariância de calibre, etc).

A principal crítica a esta abordagem é que, até o momento, nenhum modelo de gravidade estendida, inclusive a gravidade $f(\mathcal{R})$, consegue lidar com toda a fenomenologia, variando da escala quântica para a cosmológica. Outro problema reside no fato da descrição da teoria $f(\mathcal{R})$ ser substancialmente equivalente às descrições associadas à hipótese de componentes escuros. Esta interpretação surge do fato de que os graus de liberdade presentes na teoria $f(\mathcal{R})$ podem ser expressos por um tensor energia-momento efetivo capaz de dar origem aos efeitos da energia escura [25]. Desse quadro surge a necessidade de experimentos capazes de preservar ou excluir uma das teorias.

No modelo abordado neste trabalho, propõem-se correções de segunda ordem no escalar de Ricci. Tais ordens na correção constituem uma extensão da Relatividade Geral e são particularmente interessantes na cosmologia, uma vez que permitem a construção de um modelo inflacionário auto-consistente [89].

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos para um modelo estelar segundo a teoria de gravidade $f(\mathcal{R})$. O objetivo é controlar precisamente como os resultados desviam daqueles obtidos através da Relatividade Geral (limite Newtoniano desta teoria), a fim de ver como os regimes de

gravidade forte afetam grandezas como pressão, temperatura e densidade. Confrontamos ainda estes resultados com aqueles relativos à teoria Newtoniana, já conhecidos da literatura.

O interesse desse modelo, no presente contexto, manifesta-se no fato de que, devido ao expressivo campo gravitacional atuante, o interior das estrelas pode ser visto como locais apropriados para testar teorias alternativas de gravidade. Nestas regiões, os regimes de alta curvatura podem emergir e modificar as relações de estrutura estelar. Desta forma, temos como objetivo mostrar que as grandezas como pressão, temperatura e densidade podem ser consistentemente alcançadas pelas teorias de gravidade estendida, como a gravidade $f(\mathcal{R})$, e como se dão as mudanças esperadas nos valores dessas grandezas. Neste capítulo, indicaremos R como o raio da estrela e \mathcal{R} como o escalar de Ricci.

7.1 A equação de Lane-Emden na teoria Newtoniana

Antes de apresentarmos os resultados obtidos para a teoria $f(\mathcal{R})$, convém descrevermos primeiramente o equilíbrio hidrostático de uma estrutura estelar na gravidade Newtoniana. Para isto, consideramos um sistema auto-gravitante, esfericamente simétrico e em equilíbrio, através das equações de Poisson e do equilíbrio hidrostático [24, 34], respectivamente apresentadas abaixo:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4\pi G\rho, \quad (7.1)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \quad (7.2)$$

onde $\rho(r)$ é a densidade de matéria, $p(r)$ é a pressão e $\phi(r)$ é o potencial gravitacional.

Assumimos a equação de estado politrópica, que será abordada mais adiante, como:

$$p = k\rho^\gamma, \quad (7.3)$$

onde k é a constante politrópica e γ o expoente politrópico. Em seguida, inserimos (7.3) em (7.2), obtendo

$$\frac{d\phi}{dr} = \gamma k \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (7.4)$$

Para $\gamma \neq 1$, a integração da equação acima resulta em

$$\rho = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma k} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{\phi}{(n+1)k} \right]^n, \quad (7.5)$$

onde a constante de integração escolhida foi: $\phi = 0$ na superfície ($\rho = 0$). A constante n é conhecida como índice politrópico e é definida como $n = \frac{1}{\gamma-1}$. E através das equações (7.3) e (7.5), obtemos a seguinte expressão para a pressão:

$$p = \frac{\rho\phi}{(n+1)}. \quad (7.6)$$

Em seguida, substituindo (7.5) na equação de Poisson (7.1), encontramos a expressão abaixo:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = -4\pi G \frac{\phi^n}{[(n+1)k]^n}. \quad (7.7)$$

Definimos as seguintes variáveis adimensionais:

$$z = \frac{r}{\xi}, \quad \omega(z) = \frac{\phi}{\phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (7.8)$$

onde o índice c refere-se ao centro da estrela e

$$\xi = \sqrt{\frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)}}. \quad (7.9)$$

A partir disto, obtemos a equação responsável pela descrição do equilíbrio hidrostático de estruturas estelares na teoria Newtoniana, conhecida como equação de Lane-Emden padrão:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} + \omega^n = 0. \quad (7.10)$$

Em astrofísica, a equação de Lane-Emden modela estruturas de sistemas termodinâmicos descritos pela equação de estado de fluido politrópico sujeitos somente à influência de sua própria massa (sistemas auto-gravitantes). Através desta equação é possível determinar grandezas físicas do sistema como pressão, densidade e temperatura. Sendo assim, tais modelos permitem uma descrição simples de estrelas e planetas. Vale ainda citar que, de forma equivalente, podemos obter a equação de Lane-Emden através da equação de conservação de massa e da equação de equilíbrio hidrostático [86].

7.2 A equação de Lane-Emden para um modelo descrito pela teoria $f(\mathcal{R})$

Para descrever um modelo de estrutura estelar através da gravidade $f(\mathcal{R})$ [19, 88, 89], adotamos a ação representada abaixo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\mathcal{R}) + \chi \mathcal{L}_m], \quad (7.11)$$

onde o escalar de Ricci é função apenas do tensor métrico $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}(g)$, $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + f_2 \mathcal{R}^2$ e $\chi = 8\pi G$. Vale citar ainda que adotamos a métrica $(-, +, +, +)$, e as unidades naturais, portanto $c = 1$.

Variando a ação conforme o formalismo métrico, obtemos

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(\mathcal{R}) + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(\mathcal{R}) = -\chi T_{\mu\nu}, \quad (7.12)$$

onde $f'(\mathcal{R}) = \frac{df(\mathcal{R})}{d\mathcal{R}}$. O traço da equação de campo acima é dado por

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) + 3\square f'(\mathcal{R}) = -\chi T_\sigma^\sigma. \quad (7.13)$$

Neste modelo vamos abordar a situação em que as partículas do sistema movem-se a uma velocidade muito baixa (comparada à velocidade da luz), e que o campo gravitacional ao qual estão submetidas é considerado fraco e estático. Tais exigências formam o que conhecemos como limite Newtoniano [93]. Desta maneira, escrevendo as equações (7.12) e (7.13) neste limite, temos

$$\mathcal{R}_{00}^{(2)} + \frac{\mathcal{R}^{(2)}}{2} + \frac{1}{3m^2}\nabla^2\mathcal{R}^{(2)} = -\chi\rho, \quad (7.14)$$

$$-\mathcal{R}^{(2)} - \frac{1}{m^2}\nabla^2\mathcal{R}^{(2)} = \chi\rho, \quad (7.15)$$

onde $m^2 = -\frac{1}{6f_2}$. Em seguida, reescrevemos (7.15) como

$$\left(1 + \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)\mathcal{R}^{(2)} = -\chi\rho. \quad (7.16)$$

Passando o termo em parênteses para o lado direito da equação e expandido em série de Taylor até o termo de ordem m^{-2} , temos

$$\mathcal{R}^{(2)} \approx -\chi\left(1 - \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)\rho. \quad (7.17)$$

Substituindo o limite Newtoniano da componente temporal do tensor de Ricci dado por: $\mathcal{R}_{00}^{(2)} = \nabla^2\phi$ [93], as equações (7.5) e (7.17) em (7.14), obtemos

$$\nabla^2\phi + \frac{4\pi G}{3m^2[(n+1)k]^n}\nabla^2\phi^n = -\frac{4\pi G}{[(n+1)k]^n}\phi^n. \quad (7.18)$$

Em coordenadas esféricas, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{4\pi G}{3m^2[(n+1)k]^n}\frac{\partial^2\phi^n}{\partial r^2} + \frac{8\pi G}{3m^2[(n+1)k]^n}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi^n}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{[(n+1)k]^n}\phi^n. \quad (7.19)$$

Da mesma maneira como feito anteriormente, definindo variáveis adimensionais (7.8) e (7.9), obtemos a equação de Lane-Emden para o modelo de gravidade $f(\mathcal{R})$ via formalismo métrico, exibida abaixo:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\omega}{dz} + \omega^n + \frac{1}{3m^2\xi^2}\frac{d^2\omega^n}{dz^2} + \frac{2}{3m^2\xi^2}\frac{1}{z}\frac{d\omega^n}{dz} = 0. \quad (7.20)$$

Observe que para $m \rightarrow \infty$, isto é $f_2 \rightarrow 0$, recuperamos a equação de Lande-Emden para o modelo descrito pela gravidade Newtoniana.

7.3 Modelos estelares politrópicos

A equação politrópica (7.3) tem um papel importante nos modelos de estrutura estelar, uma vez que representa corretamente o comportamento do gás estelar e conseqüentemente, soluciona o problema fundamental destas estruturas, juntamente com a equação de equilíbrio hidrostático. Tais soluções são chamadas de politrópicos. A motivação para empregar a equação de estado politrópica no estudo de estruturas estelares vem da observação do comportamento de gases ideais num processo adiabático. A generalização desse comportamento é caracterizado pela equação politrópica. A descrição por parte dessa equação é interessante, uma vez que a convecção estabelecida no interior das estrelas corresponde a um gradiente de temperatura resultante de um gás adiabático em equilíbrio hidrostático. Adiciona-se ainda à motivação, a natureza simples da estrutura politrópica e sua correspondência com classes de estrelas conhecidas. Tal simplicidade fornece uma base para a incorporação de efeitos adicionais (como a rotação), e portanto, uma visão sobre a natureza dos efeitos em verdadeiras estrelas [55].

7.3.1 Equação Politrópica

Da termodinâmica básica, sabemos que uma mudança infinitesimal no calor dQ de um gás, pode ser relacionada a uma mudança na sua energia interna dU e ao trabalho realizado sobre ele, de tal forma que

$$dQ = dU + pdV = \frac{dU}{dT}dT + pdV. \quad (7.21)$$

Sendo β uma função das variáveis físicas, definimos o calor específico c_β , com β constante, por

$$c_\beta = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{\beta=\text{constante}}. \quad (7.22)$$

Desta forma, mantendo β constante, o lado direito da equação (7.22) pode ser determinado através da equação (7.21). Portanto, o calor específico c_V a volume constante é dado por

$$c_V = \frac{dU}{dT}. \quad (7.23)$$

Assim, para uma mudança quasi-estática, temos

$$dQ = c_V dT + pdV. \quad (7.24)$$

Um processo politrópico é um processo quasi-estático que mantém o calor específico constante. Neste caso, temos

$$\frac{dQ}{dT} = c = \text{constante}. \quad (7.25)$$

Portanto, uma adiabática é um politrópico com calor específico nulo e uma isoterma é um politrópico com capacidade térmica infinita. Uma mudança quasi-estática em que a pressão e o volume são mantidos constantes são politrópicos com c_p e c_V , respectivamente.

Através das equações (7.24) e (7.25), obtemos para uma mudança politrópica infinitesimal, a seguinte expressão

$$(c_V - c)dT + pdV = 0. \quad (7.26)$$

Da lei dos gases ideais:

$$pV = RT, \quad (7.27)$$

onde V é o volume por unidade de massa e R é a constante do gases por unidade de massa, representada como

$$R = c_p - c_V, \quad (7.28)$$

reescrevemos a equação (7.26) como

$$(c_V - c)\frac{dT}{T} + (c_p - c_V)\frac{dV}{V} = 0. \quad (7.29)$$

Integrando, obtemos

$$T^{(c_V - c)}V^{(c_p - c_V)} = \text{constante}. \quad (7.30)$$

Definindo o expoente politrópico como

$$\gamma = \frac{c_p - c}{c_V - c}, \quad (7.31)$$

temos

$$\gamma - 1 = \frac{c_p - c_V}{c_V - c}. \quad (7.32)$$

Desta forma, a equação (7.30) pode ser reescrita como

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}. \quad (7.33)$$

Através da equação de estado (7.27), podemos eliminar T da equação (7.33) e obter

$$pV^\gamma = \text{constante}. \quad (7.34)$$

Similarmente, eliminando V através das equações (7.33) e (7.34), temos

$$p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{constante}. \quad (7.35)$$

No plano (p, V) , os politrópicos com um dado expoente γ formam uma família de curvas paramétricas. Essas famílias de curvas podem ser classificadas rotulando cada curva por uma "temperatura politrópica", definida como a temperatura ao longo de um dado politrópico onde o volume específico V (e portanto, a densidade), tem um valor unitário. Denotamos Θ_γ como a temperatura politrópica. Desta forma, temos

$$TV^{\gamma-1} = \Theta_\gamma. \quad (7.36)$$

Assim, de forma mais conveniente, podemos representar as variáveis físicas em termos da temperatura politrópica. Deste modo, escrevemos

$$\rho = \lambda \Theta^n; \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (7.37)$$

onde λ é um fator constante, n é o índice politrópico e ρ é a densidade. Uma vez que a densidade é relacionada ao volume específico V , através de (7.36) podemos escrever

$$T = \Theta_\gamma \rho^{\gamma-1}. \quad (7.38)$$

Através das equações (7.27) e (7.38), obtemos a relação politrópica entre pressão e densidade:

$$p = R\Theta_\gamma \rho^{(n+1)/n} = k\rho^{(n+1)/n}, \quad (7.39)$$

onde k é uma constante.

7.3.2 As soluções da equação de Lane-Emden

A equação de Lane-Emden na teoria Newtoniana (7.10) apresenta soluções analíticas para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$. Para outros valores, soluções numéricas podem ser encontradas.

Determinado valor de n fornece uma descrição para uma classe de estrelas. Abaixo listamos alguns deles:

- $n = 0$: a densidade de matéria como função do raio é constante, isto é, $\rho(r) = \rho_c$. Essa é a solução para uma esfera incompressível com densidade constante .
- $n = 1$: solução para estrelas de Nêutrons.
- $n = 1,5$: solução mais aproximada para estrelas completamente convectivas, como Gigantes Vermelhas e Anãs Marrom; e até mesmo para planetas como Júpiter (planeta gigante gasoso).
- $n = 3$: solução que representa a Aproximação de Eddington. Não existe solução analítica para esse valor de n , no entanto é útil, pois corresponde a uma estrela completamente radiativa, como o Sol e estrelas com núcleos degenerados como Anãs Brancas.

- $n = 5$: solução com raio infinito. Corresponde a um modelo simples de um sistema estelar auto-consistente.
- $n = \infty$: solução para uma esfera auto-gravitante isotérmica, cuja estrutura é idêntica a de um sistema de estrelas sem colisão, como aglomerados globulares.

Neste trabalho, analisaremos as soluções apenas para os seguintes valores de n : 1; 1,5 e 3. Desta forma, convém descrevermos na próxima seção, de forma breve, as classes de estrelas correspondentes a estes valores.

7.4 Breve descrição de algumas classes de estrelas

7.4.1 Estrelas de Nêutrons

Como o seu nome sugere, elas são compostas basicamente por nêutrons. Estas estrelas resultam do colapso gravitacional do núcleo de uma estrela massiva ($10M_{\odot} - 29M_{\odot}$) [47], e por sua vez, o colapso de uma estrela de Nêutrons dá origem às supernovas. No entanto, devido à força nuclear forte repulsiva à gravidade, tal colapso não ocorre facilmente.

Geralmente estas estrelas apresentam um raio de cerca de $11 \times 10^3 m$ de extensão e uma massa de aproximadamente 1,1 a 3 vezes a massa do Sol [60]. Entretanto, a maior massa observada de uma estrela deste tipo é de cerca de $2,01M_{\odot}$ [31, 102].

A densidade estimada para este tipo de estrela está entre $3,7 \times 10^{17} kg/m^3$ e $5,9 \times 10^{17} kg/m^3$, sendo que esta densidade varia de $10^9 kg/m^3$ na superfície a $10^{17} kg/m^3$ no centro. Devido a esta alta densidade, seu campo gravitacional na superfície é cerca de 2×10^{11} vezes mais forte que o medido na superfície terrestre, proporcionando efeitos de lentes gravitacionais nas proximidades da estrela. Convém citar que as equações de estado nestas altas densidades não são precisamente conhecidas devido às suas dificuldades teóricas e empíricas. Neste caso, torna-se necessário considerar efeitos quânticos para uma melhor descrição.

Possuem ainda, forte campo magnético, entre 10^8 e 10^{15} vezes o campo magnético da Terra. E ao rotacionarem, podem emitir feixes de radiação eletromagnéticas, detectados como pulsares. Geralmente, essas estrelas podem ser facilmente localizadas quando fazem parte de um sistema binário.

A temperatura interna de uma estrela de Nêutrons recém-formada está em torno de $10^{11} K$ a $10^{12} K$. Entretanto, em poucos anos, a temperatura na superfície cai para $10^6 K$, devido ao grande número de neutrinos emitidos pela estrela. Mesmo nesta magnitude de temperatura, grande parte da luz gerada pela estrela está no espectro de raio X [47].

Para exemplificar escolhemos *PSR J0348+0432*, uma estrela de Nêutrons descoberta em 2007, pertencente a um sistema binário com uma Anã Branca [68] e com classificação espectral *Pulsar*.

Sua massa é de aproximadamente $2,01M_{\odot}$ e o seu raio mede cerca de $1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$, isto é $12,072 \times 10^3m$ [7]. Sua temperatura central está estimada em $1,50 \times 10^{11}K$ [54], densidade central em $1,50 \times 10^{18}kg/m^3$ e pressão central em $5,01 \times 10^{34}Pa$ [100]. Os dados de massa e raio desta estrela serão usados para computar os valores de pressão, temperatura e densidade do modelo desenvolvido nesta tese, assim como os outros dados observacionais aqui relatados servirão de base para comparação destes resultados obtidos.

7.4.2 Anãs Marrons

Por possuírem massa menor que a necessária para a fusão do Hidrogênio ser sustentada, cerca de $0,08M_{\odot}$, as Anãs Marrons são classificadas como objetos subestelares [30, 64]. Além disso, são estrelas pequenas, com raio da ordem do raio de Júpiter ($7,1492 \times 10^7m$ [96]), e são objetos difíceis de serem detectados, pois a maior parte da sua emissão está localizada no espectro do infravermelho.

As Anãs Marrons são estrelas completamente convectivas, isto é, são estrelas que não possuem zona de radiação. Desta forma, o transporte dominante de energia é através da convecção. Como consequência, elas não possuem camadas ou diferenças de composição química em seu interior.

O procedimento padrão para o nascimento de estrelas é através do colapso de uma nuvem de gás interestelar fria e poeira. Conforme a nuvem se contrai, ela se aquece devido ao mecanismo de *Kelvin-Helmholtz*. Em astrofísica, este mecanismo ocorre quando a superfície de uma estrela ou planeta esfria. Essa queda de temperatura faz com que a pressão diminua, resultando no encolhimento da estrela/planeta. Essa compressão, por sua vez, aumenta a temperatura do núcleo da configuração. Esse mecanismo está manifestado em planetas como Júpiter e Saturno, e em Anãs Marrons cujas temperaturas centrais não são altas suficientes para a fusão nuclear [56]. Neste processo de contração, o gás irradia muita energia. Eventualmente, a região central torna-se muito densa ao ponto de aprisionar parte da radiação. Como consequência, a temperatura e a densidade central da nuvem aumentam drasticamente, diminuindo a contração, até alcançar as condições necessárias para reações termonucleares ocorrerem. A pressão do gás e a pressão de radiação gerada por essas reações termonucleares previne as contrações devido ao campo gravitacional. Ao final deste processo, o equilíbrio hidrostático é alcançado e a estrela iniciará o processo de fusão nuclear. Se, no entanto, a massa da protoestrela é menor que $0,08M_{\odot}$, como no caso das Anãs Marrons, a contração gravitacional não aumenta a temperatura do núcleo de forma efetiva e antes que a temperatura no centro aumente o suficiente para iniciar os processos nucleares, a densidade central atinge um ponto onde os elétrons se aproximam o suficiente para gerar uma pressão degenerescência quântica [52].

De acordo com modelos conhecidos para Anãs Marrons, a densidade central deste tipo de estrela varia entre $10^3kg/m^3$ e $10^6kg/m^3$, e a pressão no núcleo é cerca de $10^{16}Pa$.

Como exemplo, temos *Teide 1*, a primeira Anã Marrom identificada em 1995. Está localizada no aglomerado das *Pleiades* a aproximadamente 400 anos-luz da Terra e é classificada espectralmente como *M8* [80]. Possui uma massa de cerca de $0,053M_{\odot}$ e raio $0,1R_{\odot}$ [80]. Sua temperatura na superfície é de aproximadamente $2700K$, sendo que a temperatura central não deve ultrapassar $2,7 \times 10^6K$, uma vez que acima desta temperatura a fusão do Hidrogênio se torna possível [10]. Novamente, os dados de massa e raio desta estrela serão usados para computar os valores de pressão, temperatura e densidade do modelo desenvolvido nesta tese, assim como os demais dados observacionais aqui relatados servirão de base para comparação destes resultados obtidos.

7.4.3 Gigantes Vermelhas

Gigantes vermelhas são grandes estrelas luminosas de massa intermediária ou baixa, entre $0,3M_{\odot}$ e $8M_{\odot}$, em uma fase tardia de evolução estelar. Apresentam valores expressivos de diâmetro, cerca de 10^2R_{\odot} , e baixas temperaturas na superfície, entre $4000K$ e $3000K$. São estrelas que consumiram todo o suprimento de Hidrogênio de seus núcleos e iniciaram a fusão de termonuclear de outros elementos mais pesados [99].

A sua densidade central é pode chegar a $10^8kg/m^3$, contrastando com $10^{-3}kg/m^3$ das camadas exteriores. A temperatura central é estimada em 10^8K e a pressão central em 10^8Pa .

Para estrelas com massa menor que $2M_{\odot}$ (grupo onde o Sol se inclui), chegará um momento em que já não haverá mais Hidrogênio para ser consumido. Quando isto ocorrer, as reações nucleares não poderão se sustentar e o núcleo sofrerá com a contração devido à gravidade. Essa contração permitirá que Hidrogênio adicional entre em uma região onde temperatura e pressão são adequadas para a fusão. Essas altas temperaturas aumentarão a taxa de reação, até um momento em que o núcleo tornar-se-á tão denso ao ponto da pressão de degenerescência dos elétrons evitar o colapso gravitacional. A partir deste momento, as camadas externas da estrela expandir-se-ão e a estrela dará início ao processo de fusão do Hélio, tornando-se uma Gigante Vermelha [85]. Para uma estrela com massa abaixo de $8M_{\odot}$ não se iniciará o processo de fusão termonuclear de Carbono e Oxigênio em seu núcleo. Ao final da sua fase gigante, ela ejetará todas suas camadas exteriores, formando uma nebulosa planetária com o núcleo exposto, e ao final, tornar-se-á uma Anã Branca [40]. Se a estrela tem entre $0,3M_{\odot}$ e $0,5M_{\odot}$, ela não é massiva o suficiente para iniciar a fusão do Hélio. Portanto, ao final de sua fase gigante, ela ejetará todas suas camadas exteriores e transformar-se-á em uma Anã Branca, sem passar pela fase de nebulosa planetária [66].

Como exemplo de Gigante Vermelha, citamos *Aldebaran*, também conhecida por *Alpha Tauri*. Esta estrela está localizada a 65 anos luz de distância do Sol na constelação de Taurus e tem como classificação espectral: *K5III* [50]. Possui massa $2,5M_{\odot}$ [73,92] e raio $44,2R_{\odot}$ [81]. Vale citar que os valores centrais de temperatura e densidade encontrados na literatura para essa estrela não concordam entre si. Novamente que os dados de massa e raio desta estrela serão usados para computar os valores das grandezas físicas descritas pelo modelo descrito nesta tese, assim como

os outros dados observacionais aqui citados servirão de base para comparação destes resultados obtidos para esta estrela.

7.4.4 Anãs Brancas

Uma Anã Branca é um estágio remanescente de estrela muito densa, composta essencialmente por matéria degenerada. Constitui o estágio final da evolução para estrelas cuja as massas não são grande o suficiente para tornarem-se estrelas de Nêutrons (Sol e grande parte das estrelas presentes na Via Láctea) [44].

Depois do período de fusão de Hidrogênio das estrelas da sequência principal de massa pequena ou média, essas estrelas irão se expandir para uma Gigante Vermelha a fim de realizar a fusão de Hélio para Carbono e Oxigênio. No entanto, se uma Gigante Vermelha não tem massa suficiente para manter temperatura necessária para a fusão do Carbono, cerca de $10^8 K$, uma massa inerte de Carbono e Oxigênio irá se concentrar no centro. Depois da estrela ejetar suas camadas externas e formar uma nebulosa planetária, restará apenas seu núcleo, a remanescente Anã Branca.

A fraca luminosidade das Anãs Brancas provém da emissão da energia térmica armazenada, pois neste estágio a estrela não é capaz de realizar a fusão termonuclear. Como resultado, a energia térmica não pode sustentar a estrela diante do colapso gravitacional, neste caso é a pressão de degenerescência dos elétrons que a sustenta. Essa degenerescência permite uma massa máxima para uma Anã Branca sem rotação, o limite de Chandrasekhar - aproximadamente $1,4M_{\odot}$; acima deste limite a pressão de degenerescência não é capaz de sustentar a estrela contra a ação gravitacional.

Por não possuir uma fonte própria de energia, ao final da sua vida, a estrela esfriará e tornar-se-á uma anã escura fria. O tempo necessário para que uma Anã Branca irradie toda sua energia é maior que a idade atual do Universo, portanto anãs escuras nunca foram observadas.

As massas estimadas para Anãs Brancas estão entre $0,17M_{\odot}$ e $1,33M_{\odot}$, embora a maioria delas possua massas entre $0,5M_{\odot}$ e $0,7M_{\odot}$ [58,59]. Os raios estimados para Anãs Brancas observadas estão tipicamente entre $5,56 \times 10^6 m$ e $13,91 \times 10^6 m$ [87].

Uma Anã Branca típica tem densidade média entre $10^8 kg/m^3$ e $10^{12} kg/m^3$. Em densidades dessa ordem, de acordo com a Relatividade Geral, a luz da estrela sofre um *redshift* gravitacional, isto ocorre com a estrela *Sirius B*, por exemplo [37]. Essas densidades só são possíveis por que o material presente nas Anãs Brancas não é composto de átomos conectados por ligações químicas, mas por plasma de núcleos e elétrons não-ligados. Portanto, não há obstáculo para aproximar núcleos e elétrons, como há na matéria usual. Sabe-se também que o centro das Anãs Brancas mantêm uma temperatura entre $10^6 K$ a $10^7 K$ e estima-se que a pressão central seja da ordem de $10^{24} Pa$.

Outro fato interessante acerca destas estrelas está no fato de que mesmo que elas esfriem

bastante, ainda possuirão muita energia. Isto é devido ao Princípio de exclusão de Pauli, que diz que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado, logo estes devem obedecer a estatística de Fermi-Dirac. Portanto, na temperatura zero, nem todos os elétrons poderão ocupar o estado de energia mais baixo, alguns deles terão que ocupar estados de maior energia, formando uma banda de estados de mais baixa energia, o "mar de Fermi". Isto permite a coexistência de baixas temperaturas e altas energias. Levando esses fatos em consideração, podemos compreender que se uma Anã Branca sofre compressão, o número de elétrons em um dado volume aumentará, e de acordo com o Princípio de Exclusão de Pauli, isso levará a um aumento da energia cinética dos elétrons, e conseqüentemente, um aumento da pressão interna. É essa pressão de degenerescência dos elétrons que sustenta a Anã Branca contra o colapso gravitacional.

A existência de uma massa limite a qual Anãs Brancas não podem exceder (caso contrário elas tornar-se-iam estrelas de Nêutrons) é outra consequência da pressão de degenerescência dos elétrons. O valor publicado por Chandrasehkar foi de $0,91M_{\odot}$ [32]. Para uma Anã Branca sem rotação, esse limite é aproximadamente igual a $5,7M_{\odot}/\mu_e^2$, onde μ_e é o peso molecular médio por elétrons da estrela [33].

Como exemplo, escolhemos citar novamente *Sirius B*. Essa estrela faz parte de um sistema binário denominado por *Sirius* e está localizada na constelação *Canis Major*. É a estrela mais brilhante observada na Terra, devido à sua luminosidade intrínseca e sua proximidade com a Terra (cerca de 8,6 anos luz), e é classificada espectralmente como DA2. Possui massa de $1,05M_{\odot}$ [90] e raio de $0,008R_{\odot}$ [53]. A temperatura na superfície é estimada em $2,52 \times 10^4 K$ e no centro em $2,20 \times 10^7 K$. Possui densidade média de cerca de $2,80 \times 10^9 kg/m^3$, densidade central de $3,30 \times 10^{10} kg/m^3$ e pressão central $4,95 \times 10^{24} Pa$ [90]. Da mesma forma, os dados de massa e raio desta estrela serão usados para computar os valores das grandezas físicas descritas pelo modelo descrito nesta tese, assim como os demais dados observacionais aqui citados servirão de base para comparação destes resultados obtidos.

7.4.5 Sol

O Sol é a estrela mais próxima da Terra e foi formada através do colapso gravitacional de uma grande nuvem molecular há aproximadamente 4,6 bilhões de anos atrás [15]. Cerca de 73% da massa do Sol consiste de Hidrogênio, 25% de Hélio e 2% de elementos pesados como Oxigênio, Carbono e Ferro [11].

Seu raio medido é de $6,957 \times 10^8 m$ [69, 101], sua massa é $1,98855 \times 10^{30} kg$, temperatura central é $1,571 \times 10^7 K$, temperatura na superfície é cerca de $5780 K$, densidade média é $1,408 \times 10^3 kg/m^3$, densidade central é $1,622 \times 10^5 kg/m^3$ e pressão central é de $2,477 \times 10^{16} Pa$ [97]. Esses dados de massa e raio serão utilizados para calcular os valores das grandezas físicas descritas pelo modelo descrito nesta tese, assim como os outros dados observacionais aqui relatados servirão de base para comparação dos resultados obtidos para esta estrela.

O Sol é uma estrela com meia-idade e espera-se sua estabilidade por mais 5 bilhões de anos. Ao chegar ao final do processo de fusão do Hidrogênio em seu núcleo, o Sol que atualmente é classificada como uma estrela anã, tornar-se-á uma Gigante Vermelha.

7.5 As equações da estrutura estelar

Através da solução da equação de Lane-Emden, podemos escrever expressões para características físicas da estrutura estelar, como raio, massa, temperatura, densidade de matéria e pressão. Em seguida, apresentamos os resultados da teoria Newtoniana, conhecidos na literatura, e os resultados obtidos neste presente trabalho para a gravidade $f(\mathcal{R})$.

7.5.1 Modelo de estrutura estelar segundo à teoria Newtoniana

7.5.1.1 Raio

Através das equações (7.8) e (7.9), obtemos o raio $R = \xi z_{(n)}$ da estrela dado por [34]:

$$R = \sqrt{\frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)} z_{(n)}}, \quad (7.40)$$

onde G é a constante gravitacional, k é a constante politrópica e $z_{(n)}$ é o primeiro zero de $\omega_{(n)}$. Portanto, nota-se que por ser definido pelo primeiro zero na solução, valores grandes de z não são relevantes para modelos estelares. Uma vez que o limite da estrela é indicado por $\omega = 0$ [38], temos

$$R = (r)_{\omega=0}, \quad GM = \left(-r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)_{\omega=0}, \quad (7.41)$$

$$R' = (z)_{\omega=0} = z_{(n)}, \quad M' = \left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right)_{\omega=0}. \quad (7.42)$$

Desta maneira, escrevemos

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)}}. \quad (7.43)$$

7.5.1.2 Massa

A massa $M(z)$ interior a z é dada por [34]:

$$M(z) = \int_0^{\xi z} 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \xi^3 \rho_c \int_0^z z^2 \omega^n dz. \quad (7.44)$$

Empregando a equação de Lane-Emden (7.10), integramos sobre toda a estrela, obtendo

$$M = -4\pi \xi^3 \rho_c \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right)_{z_{(n)}}. \quad (7.45)$$

Substituindo a expressão para ξ definida em (7.9) e para ρ_c dada por (7.5), temos

$$GM = \left\{ \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \right\}^{\frac{1}{2}} \phi_c^{\frac{(3-n)}{2}} \left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right)_{z_{(n)}}. \quad (7.46)$$

Através de M' descrito por (7.42), obtemos a seguinte razão:

$$\frac{GM}{M'} = \left\{ \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \right\}^{\frac{1}{2}} \phi_c^{\frac{(3-n)}{2}}. \quad (7.47)$$

Desta forma, conhecendo dados de massa M e raio R (consequentemente de densidade média $\bar{\rho}$), convém escrever as expressões em termos destas grandezas [38].

7.5.1.3 Relação Massa-Raio

Para determinarmos uma relação entre a massa e o raio da configuração, eliminamos ϕ_c em (7.47) através de (7.43), obtendo

$$\left(\frac{GM}{M'} \right)^{(n-1)} \left(\frac{R'}{R} \right)^{(n-3)} = \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G}. \quad (7.48)$$

Portanto, através da equação acima, observa-se que k pode ser determinado através dos dados de massa M e raio R da estrela.

7.5.1.4 Condensação Central

Condensação central é definida como a razão entre a densidade média e a densidade central da configuração. A densidade média de uma esfera de raio $R = \xi z_{(n)}$ é dada por:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \xi^3 z_{(n)}^3}. \quad (7.49)$$

Utilizando (7.45), obtemos

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \left(-\frac{3}{z} \frac{d\omega}{dz} \right)_{z_{(n)}}^{-1}. \quad (7.50)$$

Através desta relação, verifica-se que para um dado politrópico de índice n , a densidade central é um múltiplo da densidade média.

7.5.1.5 Pressão Central

De acordo com (7.6), para o centro da estrela, temos

$$p_c = \frac{\rho_c \phi_c}{(n+1)}. \quad (7.51)$$

Multiplicando o inverso de (7.43) por (7.47), encontramos

$$\frac{GM R'}{M' R} = \phi_c. \quad (7.52)$$

Através da equação acima, nota-se que ϕ_c pode ser determinado através dos dados de massa M e raio R da estrela.

Usando o resultado obtido para a condensação central (7.50) e a equação (7.52), determinamos a pressão no centro da estrela como

$$p_c = \frac{\bar{\rho}}{(n+1)} \frac{GM R'}{M' R} \left(-\frac{3 d\omega}{z dz} \right)_{z(n)}^{-1}. \quad (7.53)$$

E através da definição de ω em (7.8) e da equação de estado politrópica (7.3), obtemos a expressão para pressão no interior da estrela em função de ω , dada por:

$$p = p_c \omega^{(n+1)}. \quad (7.54)$$

7.5.1.6 Temperatura Central

Para determinarmos a temperatura central da configuração, partimos da lei dos gases ideais:

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu m_\mu}, \quad (7.55)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, μ é a massa atômica e m_μ é a unidade de massa atômica. Considerando $\rho = \rho_c \omega^n$ e $p = p_c \omega^{(n+1)}$, reescrevemos (7.55) como

$$T = \frac{p_c \mu m_\mu}{\rho_c k_B} \omega, \quad (7.56)$$

a partir da qual definimos a temperatura central como

$$T_c = \frac{p_c \mu m_\mu}{\rho_c k_B}, \quad (7.57)$$

uma vez que no centro $\omega = 1$. Utilizando (7.51) e (7.52), reescrevemos a temperatura central da seguinte maneira:

$$T_c = \frac{\mu m_\mu}{(n+1)k_B} \frac{GM R'}{M' R}. \quad (7.58)$$

Logo, através de (7.56), temos

$$T = T_c \omega. \quad (7.59)$$

7.5.2 Modelo de estrutura estelar segundo à teoria de gravidade $f(\mathcal{R})$

7.5.2.1 Raio

Da mesma maneira como foi feito anteriormente, obtemos o raio da estrela dado por $R = \xi z_{(n)}$, através das equações (7.8) e (7.9). Portanto, temos

$$R = \sqrt{\frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)}} z_{(n)}, \quad (7.60)$$

onde $z_{(n)}$ é o primeiro zero da solução. Novamente, temos

$$R = (r)_{\omega=0}, \quad GM = \left(-r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)_{\omega=0}, \quad (7.61)$$

$$R'_{f(\mathcal{R})} = (z)_{\omega=0} = z_{(n)}, \quad M'_{f(\mathcal{R})} = \left[\left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) + \frac{1}{3m^2 \xi^2} \left(-z^2 \frac{d\omega^n}{dz} \right) \right]_{\omega=0}. \quad (7.62)$$

Portanto,

$$\frac{R}{R'_{f(\mathcal{R})}} = \sqrt{\frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)}}. \quad (7.63)$$

Note que agora temos termos adicionais de correção devido à gravidade $f(\mathcal{R})$.

7.5.2.2 Massa

Obtemos a massa $M(z)$ para este modelo substituindo a equação de Lande-Emden (7.20) em (7.44), resultando em

$$M(z) = 4\pi \xi^3 \rho_c \int_0^z dz \left[-\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) - \frac{1}{3m^2 \xi^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega^n}{dz} \right) \right]. \quad (7.64)$$

Integrando, obtemos

$$M = 4\pi \xi^3 \rho_c \left[\left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) + \frac{1}{3m^2 \xi^2} \left(-z^2 \frac{d\omega^n}{dz} \right) \right]_{z_{(n)}}. \quad (7.65)$$

Substituindo a expressão (7.9) que define ξ e a expressão (7.5), temos

$$M = 4\pi \left\{ \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)} \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\phi_c^n}{[(n+1)k]^n} \left[\left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) + \frac{1}{3m^2 \xi^2} \left(-z^2 \frac{d\omega^n}{dz} \right) \right]_{z_{(n)}}. \quad (7.66)$$

Aqui vamos definir um parâmetro α como

$$\alpha = m\xi = m \sqrt{\frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \phi_c^{(1-n)}}. \quad (7.67)$$

Vale citar que α é o único parâmetro livre do modelo.

A partir desta definição, reescrevemos (7.66) na forma

$$GM = \left\{ \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \right\}^{\frac{1}{2}} \phi_c^{\frac{(3-n)}{2}} \left[\left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) + \frac{1}{3\alpha^2} \left(-z^2 \frac{d\omega^n}{dz} \right) \right]_{z(n)}. \quad (7.68)$$

De acordo com (7.62), podemos reescrever (7.68) como

$$\frac{GM}{M'_{f(\mathcal{R})}} = \left\{ \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G} \right\}^{\frac{1}{2}} \phi_c^{\frac{(3-n)}{2}}. \quad (7.69)$$

Lembrando que M e R são dados e que $M'_{f(\mathcal{R})}$ e $R'_{f(\mathcal{R})}$ são calculados a partir da solução de Lane-Emden.

7.5.2.3 Relação Massa-Raio

Eliminando ϕ_c através das equações (7.63) e (7.69), encontramos a relação massa-raio da configuração:

$$\left(\frac{GM}{M'_{f(\mathcal{R})}} \right)^{(n-1)} \left(\frac{R'_{f(\mathcal{R})}}{R} \right)^{(n-3)} = \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G}. \quad (7.70)$$

7.5.2.4 Condensação Central

Da mesma forma, obtemos a condensação central através da densidade média de um estrela de raio $R = \xi z_{(n)}$ e da expressão (7.65) para a massa da configuração, resultando em

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \left(-\frac{3}{z} \frac{d\omega}{dz} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{z} \frac{d\omega^n}{dz} \right)^{-1}_{z(n)}. \quad (7.71)$$

7.5.2.5 Pressão Central

De acordo com a equação (7.6), a pressão central (onde $z = 0$) é dada por:

$$p_c = \frac{\rho_c \phi_c}{(n+1)}. \quad (7.72)$$

A fim de escrevermos ϕ_c como função da massa e do raio, multiplicamos (7.63) e (7.69), obtendo

$$\frac{GM}{M'_{f(\mathcal{R})}} \frac{R'_{f(\mathcal{R})}}{R} = \phi_c \quad (7.73)$$

Desta forma, substituindo (7.71) e (7.73) em (7.72), encontramos

$$p_c = \frac{\bar{\rho}}{(n+1)} \frac{GM}{M'_{f(\mathcal{R})}} \frac{R'_{f(\mathcal{R})}}{R} \left(-\frac{3}{z} \frac{d\omega}{dz} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{z} \frac{d\omega^n}{dz} \right)^{-1}_{z(z)}. \quad (7.74)$$

Através da definição de ω por (7.8) e da equação de estado politrópica (7.3), escrevemos

$$p = p_c \omega^{(n+1)}. \quad (7.75)$$

Neste caso, p_c é dado por (7.74).

7.5.2.6 Temperatura Central

Como feito na seção anterior, definimos a temperatura central como

$$T_c = \frac{p_c \mu m_\mu}{\rho_c k_B}. \quad (7.76)$$

Usando (7.6) e (7.73), reescrevemos (7.76) como

$$T_c = \frac{G\mu m_\mu}{(n+1)k_B} \frac{M}{M'_{f(\mathcal{R})}} \frac{R'_{f(\mathcal{R})}}{R}. \quad (7.77)$$

Da mesma forma,

$$T = T_c \omega, \quad (7.78)$$

onde T_c é definido por (7.77).

7.5.3 Estimativa de um valor para a massa atômica estelar

Esta subseção é dedicada à estimativa de um valor para a massa atômica baseada na composição química estelar. Primeiramente, vamos considerar um gás totalmente ionizado consistindo de uma mistura de elementos. Nesta situação, diferentes partículas se comportam como partículas de um gás ideal, com número de densidade n_i e pressão $p_i = n_i k_B T$. Logo, a pressão total do gás é

$$p = \sum_i p_i = \sum_i n_i k_B T. \quad (7.79)$$

E a energia interna por unidade de volume é dada por

$$U = \sum_i U_i = \frac{3}{2} \sum_i n_i k_B T. \quad (7.80)$$

Note que isto segue da suposição do equilíbrio termodinâmico, em que cada componente com mesmo número de densidade de elétrons, contribui da mesma maneira para a pressão do gás.

Quando completamente ionizado, cada átomo contribui com $Z_j + 1$ partículas, onde Z_j é o número atômico. O número de átomos do elemento por volume é dado por $\frac{\rho X_j}{A_j m_\mu}$, onde A_j é a massa atômica e X_j é a fração de massa (razão da massa do elemento pela massa da mistura). Assim, o número total de partículas do elemento por volume é $\frac{\rho X_j}{A_j m_\mu} (Z_j + 1)$. Portanto, através de (7.79) determinamos:

$$p = \sum_j \rho X_j \frac{(Z_j + 1)}{A_j m_\mu} k_B T \equiv \frac{\rho k_B T}{\mu m_\mu}. \quad (7.81)$$

Desta forma, encontramos:

$$\mu^{-1} = \sum_j X_j \frac{(Z_j + 1)}{A_j}. \quad (7.82)$$

Essencialmente, as estrelas são compostas por Hidrogênio, Hélio e uma pequena parcela de metais pesados. Deste modo, a fim de determinar a massa atômica para estrelas em geral, devemos levar em conta essa composição. Vamos definir X como a fração de massa do Hidrogênio, Y como a fração de massa do Hélio e Z como a fração de massa correspondente aos elementos pesados. Adotamos a normalização $X + Y + Z = 1$, uma vez que a soma das massas de todos os elementos deve resultar na massa total da configuração. Sabemos que a massa atômica do Hidrogênio vale 1 e a massa atômica do Hélio, 4. Desta forma, consideramos $\frac{(Z_j+1)}{A_j} \approx 2, \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ para Hidrogênio, Hélio e elementos pesados, respectivamente. Diante de todas essas considerações, escrevemos (7.82) como

$$\mu \approx \frac{4}{3 + 5X - Z}. \quad (7.83)$$

Em decorrência das variadas composições químicas, cada classe de estrela possui um valor de massa atômica associado. Desta forma, a seguir, apresentamos os valores para as estrelas descritas neste trabalho:

- Estrelas de Nêutrons: Por serem compostas basicamente por nêutrons, neste caso μ é a massa atômica média por nêutron [78], que em unidades atômica tem o seguinte valor:

$$\mu \approx 1. \quad (7.84)$$

- Anãs Marrons: Essas estrelas são compostas por Hidrogênio (inclusive Deutério), Hélio e metais pesados. Desta forma, considerando as fração de massa $X = 0,70$; $Y = 0,28$ e $Z = 0,02$ (desconsiderando a fração de massa correspondente ao Deutério, que é cerca de 2×10^{-5}) [95], temos:

$$\mu \approx 0,62. \quad (7.85)$$

- Gigantes Vermelhas: Neste estágio, as estrelas já consumiram toda sua reserva de Hidrogênio, restando apenas Hélio e metais pesados, por conseguinte $X = 0$, $Y = 0,98$ e $Z = 0,02$ [46], resultando em:

$$\mu \approx 1,34. \quad (7.86)$$

- Anãs Brancas: Neste estágio, essas estrelas já converteram todo o Hidrogênio e Hélio disponíveis em metais pesados, de modo que as frações de massa são assumidas como $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 1$ [29,78], logo

$$\mu \approx 2,00. \quad (7.87)$$

- Sol: Aproximadamente 73% da sua massa corresponde à massa do Hidrogênio, 25% do Hélio e 2% dos elementos pesados. Portanto, de acordo com esses valores, $X = 0,73$; $Y = 0,25$ e $Z = 0,02$ [9], resultando em:

$$\mu_c \approx 0,60. \quad (7.88)$$

É interessante notar que os valores apresentados acima são valores médios para cada classe estelar (exceto para o Sol, por se tratar de uma estrela específica), uma vez que podem variar de acordo com a estrela.

7.6 Soluções Politrópicas

A partir desta seção, obtemos soluções politrópicas para os modelos de estrutura estelar segundo a teoria Newtoniana e a teoria $f(\mathcal{R})$ para algumas classes conhecidas de estrelas, entre elas: estrelas de Nêutrons, Anãs Marrons, Anãs Brancas, Gigantes Vermelhas e estrelas do tipo Sol. Apresentamos os resultados para a pressão, temperatura e densidade no interior da estrela de acordo com o valor de n correspondente à sua classe e com o valor de α (parâmetro livre do modelo $f(\mathcal{R})$) relacionado com o coeficiente f_2 da função do escalar de curvatura \mathcal{R} .

7.6.1 Pressão

As curvas que descrevem o comportamento da pressão no interior das estrelas foram obtidas através das expressões (7.53) e (7.54) para o caso Newtoniano, e através das equações (7.74) e (7.75) para a teoria $f(\mathcal{R})$. Para isto, solucionamos numericamente as equações de Lane-Emden (7.10) e (7.20), para os respectivos casos, a fim de obtermos ω em função de z , conseqüentemente, p em função de z , e por fim, em função de R , o raio da estrela. Vale notar que para efeitos de comparação entre as curvas, para todos os casos, normalizamos o raio.

Apresentamos a seguir os resultados para $n = 1$. Para isto, escolhemos uma estrela de massa $M = 2,01M_{\odot}$ e raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$ para representar uma estrela de Nêutrons, como a já citada *PSR J0348+0432*. Abaixo temos as curvas e uma tabela com os valores de pressão no centro e na superfície desta estrela (em Pascal) para alguns valores de α . Para obtermos a pressão na superfície da estrela, consideramos um valor de ω próximo à superfície.

O modelo Newtoniano está representado por $\alpha \rightarrow \infty$ e o modelo $f(\mathcal{R})$ pelos outros valores de α . Mencionamos aqui que o caso $\alpha \rightarrow \infty$ apenas ilustra valores de α muito grande, acima de $\alpha = 5$. Como veremos adiante, em todas as situações analisadas (pressão, temperatura e densidade para os três valores de n), verificou-se que para $\alpha > 5$ não foram obtidas diferenças substanciais entre os resultados.

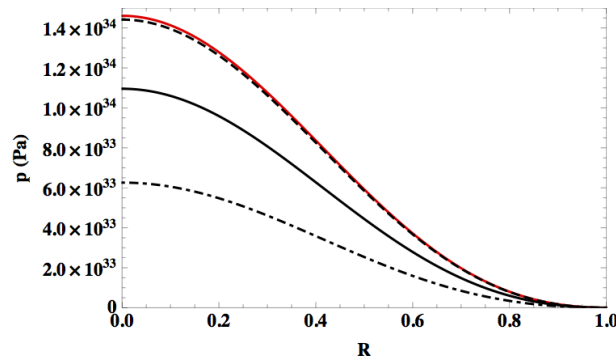


Figura 4 – Neste gráfico temos o comportamento da pressão em função de R normalizado (distância do centro da estrela até um ponto próximo à superfície) para uma estrela de Nêutrons de massa $M = 2,01M_{\odot}$ e raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 1$: Estrela de Nêutrons		
$M = 2,01M_{\odot}, R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$		
α	$p_c(Pa)$	$p_s(Pa)$
∞	$1,46061 \times 10^{34}$	$3,59398 \times 10^{26}$
5,00	$1,44163 \times 10^{34}$	$1,94533 \times 10^{26}$
1,00	$1,09556 \times 10^{34}$	$2,07225 \times 10^{26}$
0,50	$6,25999 \times 10^{33}$	$1,57958 \times 10^{26}$

Tabela 1 – Valores de pressão no centro e na superfície de uma estrela de Nêutrons de massa $M = 2,01M_{\odot}$ e raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$ para diferentes valores de α .

Verificou-se através da tabela 1 que os resultados de pressão central que mais se aproximam do valor estimado, de acordo com os dados [100], para uma estrela com essas características

são aqueles correspondentes aos seguintes valores de parâmetro: $\alpha = 1$, $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$ (teoria Newtoniana).

Da mesma forma, obtemos os valores de pressão para uma estrela descrita por $n = 1,5$; de massa $M = 0,053M_{\odot}$ e raio $R = 0,1R_{\odot}$, exemplificada pela Anã Marrom Teide 1. Novamente, abaixo apresentamos as curvas obtidas e os valores relacionados na tabela 2.

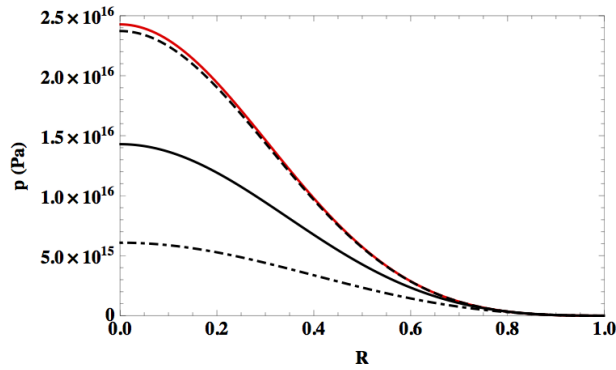


Figura 5 – Gráfico da pressão de uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$ e raio $R = 0,1R_{\odot}$, em função de R normalizado para $n = 1,5$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva em vermelho, o modelo Newtoniano.

$n = 1,5$: Anã Marrom		
$M = 0,053M_{\odot}, R = 0,1R_{\odot}$		
α	$p_c(Pa)$	$p_s(Pa)$
∞	$2,42750 \times 10^{16}$	$3,65824 \times 10^8$
5,00	$2,37216 \times 10^{16}$	$1,35592 \times 10^8$
1,00	$1,42928 \times 10^{16}$	$4,17922 \times 10^8$
0,50	$6,08385 \times 10^{15}$	$2,02836 \times 10^{11}$

Tabela 2 – Valores de pressão no centro e na superfície da uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$ e raio $R = 0,1R_{\odot}$ para alguns valores de α .

Para $\alpha = 1$, $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$, temos valores de pressão central da mesma ordem de grandeza da pressão estimada para uma Anã Marrom, como mencionado previamente.

De forma semelhante, para $n = 1,5$ calculamos a pressão para uma estrela Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$ e raio $R = 44,2R_{\odot}$, representada por Aldebaran.

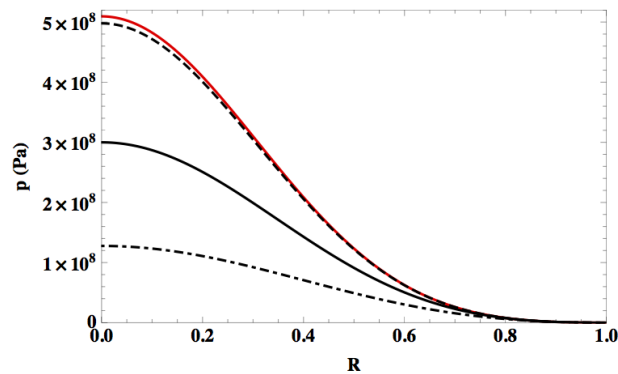


Figura 6 – Gráfico da pressão de uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$ e raio $R = 44,2R_{\odot}$, em função de R normalizado para $n = 1,5$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 1,5$: Gigante Vermelha		
$M = 1,5M_{\odot}, R = 44,2R_{\odot}$		
α	$p_c(Pa)$	$p_s(Pa)$
∞	$5,09450 \times 10^8$	$2,01844 \times 10^3$
5,00	$4,97835 \times 10^8$	$2,00179 \times 10^3$
1,00	$2,99957 \times 10^8$	$1,43830 \times 10^3$
0,50	$1,27679 \times 10^8$	$4,25683 \times 10^3$

Tabela 3 – Resultados de pressão central e superficial obtidos para uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$ e raio $R = 44,2R_{\odot}$ para valores diversos de α .

Como pode ser visto na tabela 3, todos os valores obtidos para a pressão no núcleo da Gigante Vermelha relatada, possuem a mesma ordem de grandeza esperada para uma estrela dessa categoria, cerca de $10^8 Pa$.

Analogamente, obtivemos a pressão em uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$ e raio $R = 0,008R_{\odot}$, conforme a estrela *Sirius B* citada anteriormente.

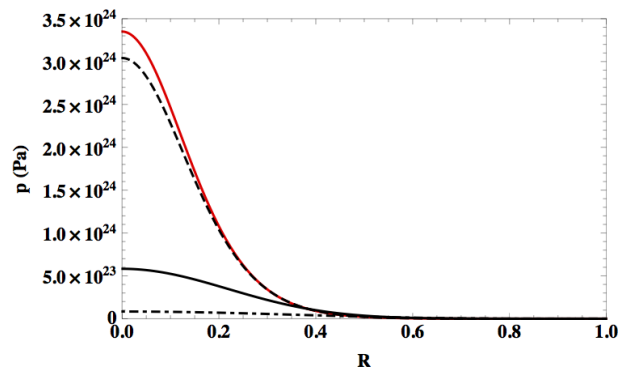


Figura 7 – Pressão em uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$ e $R = 0,008R_{\odot}$, em função de R normalizado para $n = 3$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva em vermelho, o modelo Newtoniano.

$n = 3$: Anã Branca		
$M = 1,05M_{\odot}, R = 0,008R_{\odot}$		
α	$p_c(Pa)$	$p_s(Pa)$
∞	$3,34962 \times 10^{24}$	$3,41628 \times 10^6$
5,00	$3,04099 \times 10^{24}$	$1,08992 \times 10^6$
1,00	$5,82301 \times 10^{23}$	$4,25633 \times 10^3$
0,50	$8,36846 \times 10^{22}$	$2,34802 \times 10^7$

Tabela 4 – Resultados para a pressão no centro e na superfície em uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$ e raio $R = 0,008R_{\odot}$ para determinados valores de α .

Entre os valores de pressão no núcleo encontrados na tabela 4, os que melhor se ajustam ao valor estimado pelo dados [90] são obtidos para $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$.

Para o Sol, descrito por $n = 3$, obtivemos os seguintes resultados:

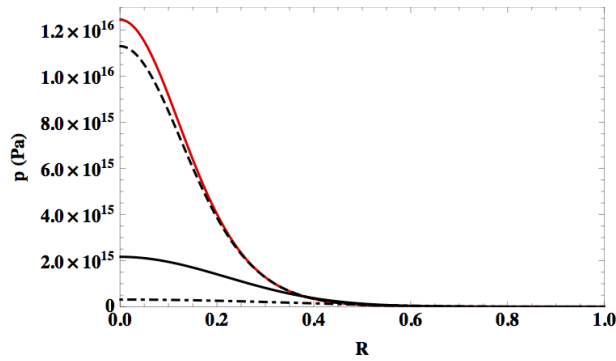


Figura 8 – Comportamento da pressão no Sol, em função de R normalizado, para $n = 3$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 3$: Sol		
$M = M_{\odot}, R = R_{\odot}$		
α	$p_c(Pa)$	$p_s(Pa)$
∞	$1,24445 \times 10^{16}$	$7,73761 \times 10^2$
5,00	$1,12979 \times 10^{16}$	$7,96025 \times 10^2$
1,00	$2,16336 \times 10^{15}$	$1,59602 \times 10^3$
0,50	$3,10905 \times 10^{14}$	$1,31376 \times 10^4$

Tabela 5 – Valores de pressão no centro e na superfície do Sol para alguns valores de α .

Para $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$ encontramos os melhores resultados para a pressão no núcleo do Sol. Os outros resultados listados na tabela 5 estão uma ou duas ordem de grandeza abaixo do relatado pelos dados observacionais [97].

Observou-se através dos gráficos 4-8 que em todos os casos, as curvas de pressão caem mais rapidamente conforme α diminui. De acordo com equação (7.67), α e f_2 são inversamente proporcionais (lembrando que $m^2 = -\frac{1}{6f_2}$ e que ξ é constante para cada valor de n), logo quando α decresce, f_2 cresce, afastando-se da teoria Newtoniana. Em resumo, quanto mais a teoria estendida se afasta da teoria Newtoniana, menor é a pressão no núcleo da estrela.

7.6.2 Temperatura

Nesta subseção, tendo em vista analisar o comportamento da temperatura nas mesmas estrelas, partimos das equações (7.58) e (7.59) para a descrição da temperatura no modelo Newtoniano e das equações (7.77) e (7.78) para o modelo $f(\mathcal{R})$. Deve-se lembrar que cada tipo de estrela possui um valor de μ (massa atômica) associado, conforme sua composição. Igualmente, com o propósito de obter a temperatura em função de R (normalizado), solucionamos a equação de Lane-Emden

para os dois casos estudados concomitantemente com as equações para a temperatura citadas acima. Da mesma forma, a temperatura na superfície foi calculada considerando-se um valor de ω próximo a esta. Deste modo, para a estrela de Nêutrons indicada anteriormente, obtivemos os seguintes resultados:

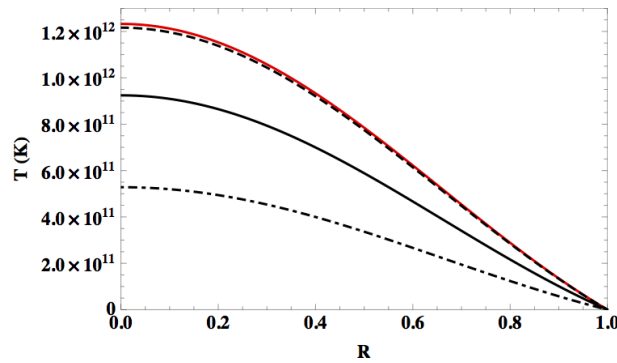


Figura 9 – Neste gráfico temos o comportamento da temperatura para uma estrela de Nêutrons de massa $M = 2,01M_{\odot}$, raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$ e $\mu \approx 1$, em função de R normalizado (distância do centro da estrela até um ponto próximo à superfície) para $n = 1$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva em vermelho, o modelo Newtoniano.

$n = 1$: Estrela de Nêutrons		
$M = 2,01M_{\odot}, R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$		
α	$T_c(K)$	$T_s(K)$
∞	$1,23246 \times 10^{12}$	$1,93373 \times 10^8$
5,00	$1,21629 \times 10^{12}$	$1,41333 \times 10^8$
1,00	$9,24368 \times 10^{11}$	$1,27101 \times 10^8$
0,50	$5,28203 \times 10^{11}$	$8,38786 \times 10^7$

Tabela 6 – Resultados obtidos para temperatura central e superficial em uma estrela de Nêutrons de massa $M = 2,01M_{\odot}$, raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$ e $\mu \approx 1$ para alguns valores de α .

Observou-se através da tabela 6 e da Fig. 9 que os resultados que mais se aproximam do valor esperado para a temperatura central de uma estrela de Nêutrons como essa [54], são aqueles obtidos para $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1$. Lamentavelmente, dados satisfatórios para temperatura na superfície desta estrela não foram encontrados na literatura, questão esta que será discutida mais adiante.

De maneira semelhante, para a Anã Marrom mencionada acima, encontramos:

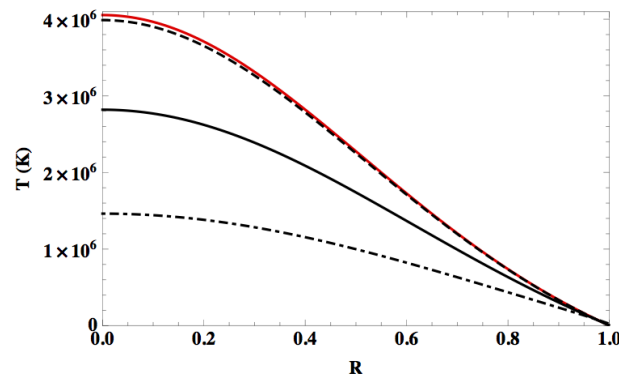


Figura 10 – Comportamento da temperatura em uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$, raio $R = 0,1R_{\odot}$ e $\mu \approx 0,62$; em função de R normalizado para $n = 1,5$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 1,5$: Anã Marrom		
$M = 0,053M_{\odot}, R = 0,1R_{\odot}$		
α	$T_c(K)$	$T_s(K)$
∞	$4,05457 \times 10^6$	$3,01457 \times 10^3$
5,00	$3,98852 \times 10^6$	$2,01221 \times 10^3$
1,00	$2,81928 \times 10^6$	$2,73217 \times 10^3$
0,50	$1,46249 \times 10^6$	$2,32536 \times 10^3$

Tabela 7 – Valores determinados para temperatura no centro e na superfície de uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$, raio $R = 0,1R_{\odot}$ e $\mu \approx 0,62$; descritos pelos modelos Newtoniano e $f(\mathcal{R})$.

Segundo à tabela 7 e a Fig. 10, os resultados que mais se ajustam aos valores de temperatura central e superficial esperados para esta Anã Marrom, segundo os dados observacionais [10], são aqueles cujos valores correspondem a $\alpha = 1$.

Similarmente, para Gigante Vermelha, a temperatura apresentou o seguinte comportamento:

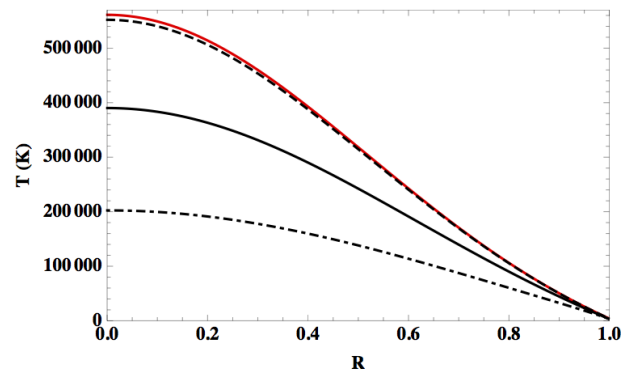


Figura 11 – Gráfico da temperatura em uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$, raio $R = 44,2R_{\odot}$ e $\mu \approx 1,34$; em função de R normalizado para $n = 1,5$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 1,5$: Gigante Vermelha		
$M = 1,5M_{\odot}, R = 44,2R_{\odot}$		
α	$T_c(K)$	$T_s(K)$
∞	$5,61113 \times 10^5$	$3,87466 \times 10^3$
5,00	$5,51973 \times 10^5$	$3,83400 \times 10^3$
1,00	$3,90162 \times 10^5$	$2,90788 \times 10^3$
0,50	$2,02395 \times 10^5$	$3,27677 \times 10^3$

Tabela 8 – Valores de temperatura no centro e na superfície de uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$, raio $R = 44,2R_{\odot}$ e $\mu \approx 1,34$ para diferentes valores de α .

As temperaturas centrais exibidas na tabela 8 e na Fig. 11 apresentam as mesmas ordem de grandeza. No entanto, não se conhece ao certo, um valor exato para a temperatura no centro de uma estrela como essa. Os dados encontrados na literatura divergem. Portanto não foi possível confrontarmos de forma segura os dados obtidos para os modelos retratados neste trabalho. Já a temperatura na superfície, segundo sua classificação espectral, está em cerca de $3,8 \times 10^3 K$ [50]. Desse modo, através da tabela 8, constatamos que os melhores valores são aqueles relacionados a $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$.

Assim como feito anteriormente, temos os seguintes resultados para a Anã Branca:

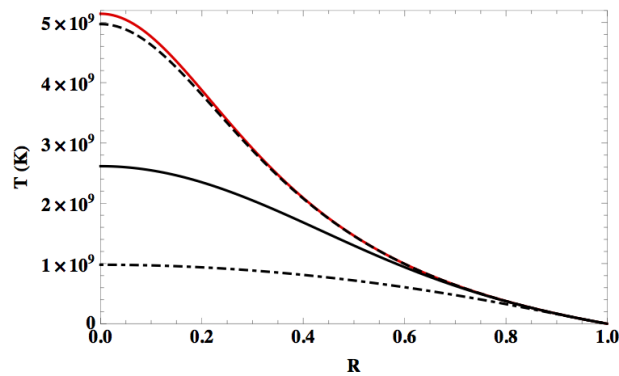


Figura 12 – Gráfico da temperatura em uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$, raio $R = 0,008R_{\odot}$ e $\mu \approx 2$, em função de R normalizado para $n = 3$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 3$: Anã Branca		
$M = 1,05M_{\odot}, R = 0,008R_{\odot}$		
α	$T_c(K)$	$T_s(K)$
∞	$5,14318 \times 10^9$	$1,63450 \times 10^5$
5,00	$4,97189 \times 10^9$	$1,21662 \times 10^5$
1,00	$2,61453 \times 10^9$	$2,41740 \times 10^4$
0,50	$9,79402 \times 10^8$	$1,26735 \times 10^5$

Tabela 9 – Resultados obtidos para temperatura em uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$, raio $R = 0,008R_{\odot}$ e $\mu \approx 2$ para alguns valores de α .

Neste caso, todos os valores apresentados para a temperatura central estão uma ou duas ordem de grandeza acima do esperado para esta Anã Branca [90] (ver Fig 12 e tabela 9). Para a temperatura na superfície, o valor relativo a $\alpha = 1$ desempenha o melhor resultado.

De maneira idêntica, solucionamos as equações para $n = 3$, com os valores relativos ao Sol, para obtermos:

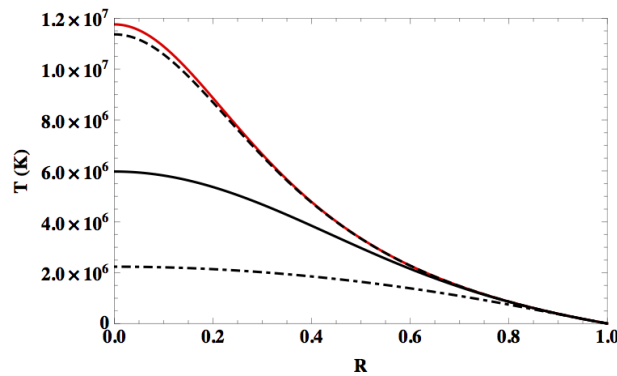


Figura 13 – Comportamento da temperatura do Sol em função de R normalizado para $n = 3$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 3$: Sol		
$M = M_{\odot}, R = R_{\odot}$		
α	$T_c(K)$	$T_s(K)$
∞	$1,17558 \times 10^7$	$5,87087 \times 10^3$
5,00	$1,13643 \times 10^7$	$5,85490 \times 10^3$
1,00	$5,97608 \times 10^6$	$5,53863 \times 10^3$
0,50	$2,23863 \times 10^6$	$5,70762 \times 10^3$

Tabela 10 – Valores obtidos para a temperatura no centro e na superfície do Sol para diferentes valores do parâmetro α .

Entre os valores obtidos para a temperatura no núcleo do Sol, aqueles que melhor se ajustam aos dados [97] estão relacionados a $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$. Para a temperatura na superfície, todos os valores são compatíveis com os dados, salvo irrisórias diferenças que podem ser vistas na coluna mais à direita da tabela 10.

Através dos gráficos 9-13, verificou-se que em todos os casos, as curvas de temperatura apresentam um decrescimento mais acelerado conforme α diminui, assim como foi constatado com as curvas de pressão. Logo, quanto mais o modelo $f(\mathcal{R})$ se afasta da teoria Newtoniana (quanto maior a correção dessa teoria), menor é a temperatura prevista no centro da estrela.

7.6.3 Densidade

Para determinarmos o comportamento da densidade de matéria no interior estelar, solucionamos as equações (7.50) para o caso Newtoniano, (7.71) para o modelo $f(\mathcal{R})$, considerando a densidade média calculada através da massa M e do raio R da estrela em questão, e para ambos os casos a equação (7.8), que define ω em função de ρ . Sem dúvida, espera-se em todas as situações que a

densidade diminua conforme se aproxime da superfície, assim como observado com a temperatura e a pressão nos mesmos sistemas. A densidade na superfície é obtida considerando-se um ponto próximo à interface da estrela com o exterior, onde ω é nulo, segundo as condições de contorno adotadas.

Abaixo apresentamos os resultados obtidos para a estrela de Nêutrons, mencionada anteriormente.

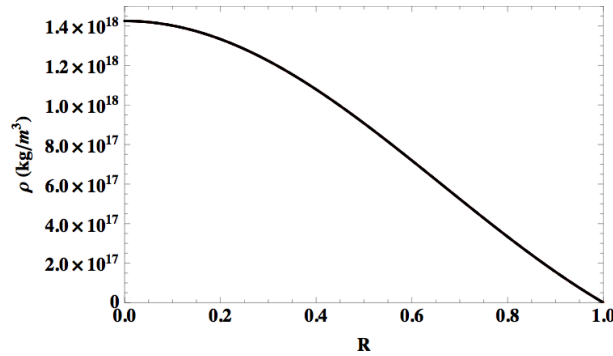


Figura 14 – Neste gráfico temos o comportamento da densidade em função de R normalizado (distância do centro da estrela até um ponto próximo à superfície) para uma estrela de Nêutrons de massa $M = 2,01M_{\odot}$ e raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 1$: Estrela de Nêutrons		
$M = 2,01M_{\odot}, R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$		
α	$\rho_c(kg/m^3)$	$\rho_s(kg/m^3)$
∞	$1,42490 \times 10^{18}$	$2,23568 \times 10^{14}$
5,00	$1,42508 \times 10^{18}$	$1,65594 \times 10^{14}$
1,00	$1,42501 \times 10^{18}$	$1,95938 \times 10^{14}$
0,50	$1,42494 \times 10^{18}$	$2,26281 \times 10^{14}$

Tabela 11 – Valores de densidade central e superficial de uma estrela de Nêutrons com massa $M = 2,01M_{\odot}$ e raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$ para alguns valores de α .

Aqui temos o caso em que todas as curvas coincidem (ver Fig 14), logo os valores obtidos para a densidade central e superficial não apresentam diferenças consideráveis (ver tabela 11). Portanto, nesta situação, todos os valores de densidade central estão próximos ao valor relatado para uma estrela de Nêutrons com os aspectos descritos anteriormente [100].

Da mesma forma, determinamos os seguintes valores de densidade para a Anã Marrom:

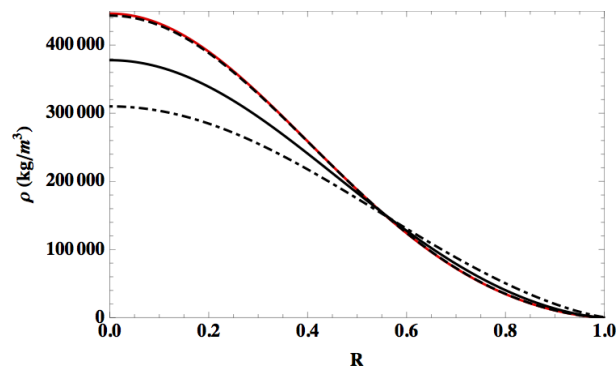


Figura 15 – Gráfico da densidade de uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$ e raio $R = 0,1R_{\odot}$, em função de R normalizado para $n = 1,5$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 1,5$: Anã Marrom		
$M = 0,053M_{\odot}, R = 0,1R_{\odot}$		
α	$\rho_c(kg/m^3)$	$\rho_s(kg/m^3)$
∞	$4,46305 \times 10^5$	$6,72716 \times 10^{-3}$
5,00	$4,43352 \times 10^5$	5,02317
1,00	$3,77916 \times 10^5$	$1,14017 \times 10^1$
0,50	$3,10100 \times 10^5$	$6,38682 \times 10^2$

Tabela 12 – Resultados obtidos para a densidade central e superficial de uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$ e raio $R = 0,1R_{\odot}$ para os modelos Newtoniano e $f(\mathcal{R})$.

De acordo com a tabela 12 e Fig 15, a densidade central resultante dos modelos abordados neste trabalho, apresentam valores dentro da ordem de grandeza esperada para uma Anã Marrom com as características citadas anteriormente, entre $10^3 kg/m^3$ e $10^6 kg/m^3$ [20,80].

Igualmente, para a Gigante Vermelha obtivemos:

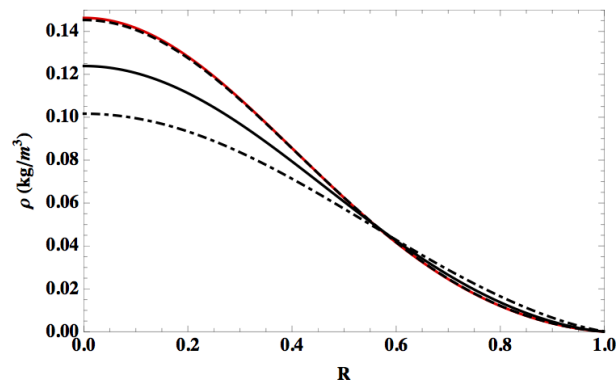


Figura 16 – Comportamento da densidade de uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$ e raio $R = 44,2R_{\odot}$, em função de R normalizado para $n = 1,5$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva em vermelho, o modelo Newtoniano.

$n = 1,5$: Gigante Vermelha		
$M = 1,5M_{\odot}, R = 44,2R_{\odot}$		
α	$\rho_c(kg/m^3)$	$\rho_s(kg/m^3)$
∞	$1,46278 \times 10^{-1}$	$8,39346 \times 10^{-5}$
5,00	$1,45310 \times 10^{-1}$	$8,41202 \times 10^{-5}$
1,00	$1,23864 \times 10^{-1}$	$7,96939 \times 10^{-5}$
0,50	$1,01637 \times 10^{-1}$	$2,09331 \times 10^{-4}$

Tabela 13 – Densidade no centro e na superfície de uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$ e raio $R = 44,2R_{\odot}$ para diferentes valores de α .

As densidades centrais apresentadas na tabela 13 e Fig 16 possuem a mesma ordem de grandeza. Novamente, os dados encontrados na literatura para esta estrela não são congruentes, o que dificulta a comparação com os resultados obtidos.

Do mesmo modo, para Anã Branca, obtivemos:

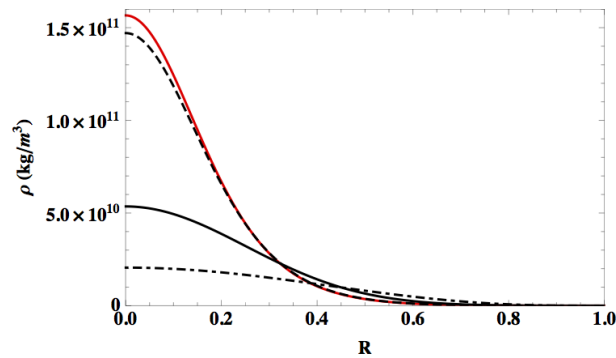


Figura 17 – Gráfico da densidade de uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$ e raio $R = 0,008R_{\odot}$, em função de R normalizado para $n = 3$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 3$: Anã Branca		
$M = 1,05M_{\odot}, R = 0,008R_{\odot}$		
α	$\rho_c(kg/m^3)$	$\rho_s(kg/m^3)$
∞	$1,56610 \times 10^{11}$	$5,02623 \times 10^{-3}$
5,00	$1,47078 \times 10^{11}$	$1,19817 \times 10^{-1}$
1,00	$5,35560 \times 10^{10}$	$4,23376 \times 10^{-5}$
0,50	$2,05446 \times 10^{10}$	$4,45430 \times 10^{-2}$

Tabela 14 – Densidade no centro e na superfície de uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$ e raio $R = 0,008R_{\odot}$ para diferentes valores de α .

Tratando-se dos valores de densidade central desta Anã Branca, segundo à tabela 14 e Fig. 17, quando comparados com o valor estimado em [90], os melhores resultados são aqueles encontrados para $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1$.

Para o Sol, apresentamos os seguintes resultados:

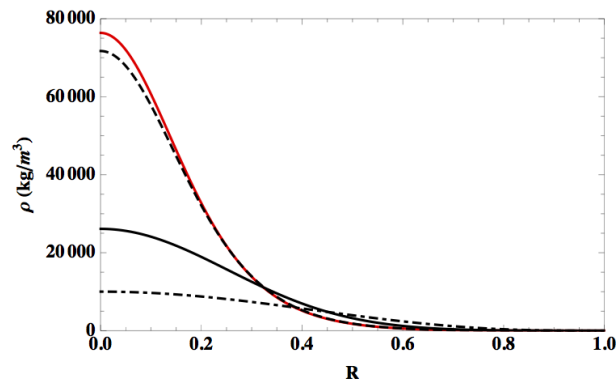


Figura 18 – Densidade do Sol em função do raio R normalizado para $n = 3$. A curva ponto-tracejada representa o resultado do modelo $f(\mathcal{R})$ para $\alpha = 0,5$; a curva em preto, $\alpha = 1$; a curva tracejada, $\alpha = 5$; e a curva vermelha, o modelo Newtoniano.

$n = 3$: Sol		
$M = M_{\odot}, R = R_{\odot}$		
α	$\rho_c (kg/m^3)$	$\rho_s (kg/m^3)$
∞	$7,63659 \times 10^4$	$9,50908 \times 10^{-6}$
5,00	$7,17182 \times 10^4$	$9,80818 \times 10^{-6}$
1,00	$2,61149 \times 10^4$	$4,69032 \times 10^{-5}$
0,50	$1,00189 \times 10^4$	$1,66053 \times 10^{-4}$

Tabela 15 – Densidade no centro e na superfície do Sol para alguns valores de α .

De acordo com a Fig. 18 e a tabela 15, as densidades centrais aqui obtidas para o Sol apresentam valores com uma ordem de grandeza abaixo do assegurado pelos dados [97], inclusive o modelo politrópico Newtoniano, considerado um modelo razoável para a descrição do Sol.

Quanto à densidade no interior das estrelas, verificamos que para $n = 1$, as curvas coincidem para todos os valores de α escolhidos, inclusive para o caso Newtoniano. Para os outros valores de n , observamos o mesmo comportamento descrito para a pressão e a temperatura; quanto menor α , menor é a densidade central da estrela e mais rapidamente a curva de densidade decresce.

7.7 Luminosidade

Esta seção é dedicada ao cálculo da luminosidade, definida como a quantidade de energia emitida por um objeto astronômico por unidade de tempo, neste caso, emitido por uma estrela. No Sistema Internacional de medidas, a luminosidade é dada em J/s (Joule por segundo), ou seja, em W (Watts). No entanto, em astrofísica é conveniente expressar os resultados em função da luminosidade solar L_{\odot} .

Pode-se determinar a luminosidade das estrelas através da temperatura. Para isto, considera-se uma estrela como um modelo de corpo negro (objeto idealizado, perfeitamente opaco e não-refletivo) e parte-se da equação de Stefan-Boltzmann:

$$L = \sigma AT^4, \quad (7.89)$$

onde A é a área da superfície, T é a temperatura e $\sigma = 5,6704 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Desta forma, em função da luminosidade solar L_{\odot} , obtemos:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4, \quad (7.90)$$

onde R é o raio da estrela e T a temperatura na sua superfície. Com essa expressão, torna-se possível estimarmos a luminosidade através da temperatura [21].

A partir da equação (7.90), dos valores de raio e temperatura na superfície para as estrelas consideradas anteriormente (ver tabelas 6 - 10), construímos as tabelas abaixo, onde relacionamos os valores de luminosidade com os valores de α .

$n = 1$: Estrela de Nêutrons	
$M = 2,01M_{\odot}, R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$	
α	L/L_{\odot}
∞	$4,38084 \times 10^8$
5,00	$1,25012 \times 10^8$
1,00	$8,17641 \times 10^7$
0,50	$1,55087 \times 10^7$

Tabela 16 – Luminosidade de uma estrela de Nêutrons de massa $M = 2,01M_{\odot}$ e raio $R = 1,87 \times 10^{-5}R_{\odot}$ para alguns valores de α .

Estrelas de Nêutrons são classificadas espectralmente como Pulsares. Embora essas estrelas possam ser colocadas no diagrama H-R ¹da mesma forma que outras, não é prático fazê-lo, pois tanto a luminosidade quanto a temperatura da fotosfera (superfície) são quase impossíveis de determinar. Duas são as razões para isso: (i) no seu surgimento elas possuem altas temperaturas (temperatura central de aproximadamente 10^{11}K e de 10^7K na fotosfera), mas esfriam muito rapidamente (há muitas incertezas no estudo desses processos) e (ii) geralmente a emissão fotossensível é ofuscada pela emissão da magnetosfera ou pela luminosidade devido à acreção de um objeto próximo ou do próprio meio interestelar [98]. Portanto, devido a essas questões torna-se difícil a determinação de um valor para luminosidade dessa classe de estrela. Sendo assim, os valores obtidos na tabela 16 não puderam ser confrontados com algum dado observacional obtido anteriormente.

¹ diagrama de *Hertzsprung-Russel* é um gráfico de dispersão de estrelas mostrando a relação entre a luminosidade versus classificações espectrais ou temperaturas efetivas.

$n = 1,5$: Anã Marrom	
$M = 0,053M_{\odot}, R = 0,1R_{\odot}$	
α	L/L_{\odot}
∞	$7,39928 \times 10^{-4}$
5,00	$1,46886 \times 10^{-4}$
1,00	$4,99250 \times 10^{-4}$
0,50	$2,61969 \times 10^{-4}$

Tabela 17 – Correspondência entre luminosidade de uma Anã Marrom de massa $M = 0,053M_{\odot}$ e raio $R = 0,1R_{\odot}$, e diferentes valores do parâmetro α .

A estrela Anã Marrom citada como exemplo tem como classificação espectral $M8$, que corresponde, segundo dados observacionais, a uma temperatura superficial em torno de $2700K$ e $2167K$ e luminosidade entre $2,00 \times 10^{-3}L_{\odot}$ e $3,53 \times 10^{-3}L_{\odot}$ [1]. Desta forma, como pode ser visto na tabela 17, os valores de luminosidade obtidos através de ambos os modelos diferem em uma ordem de grandeza do valor esperado.

$n = 1,5$: Gigante Vermelha	
$M = 1,5M_{\odot}, R = 44,2R_{\odot}$	
α	L/L_{\odot}
∞	$3,94517 \times 10^2$
5,00	$3,78219 \times 10^2$
1,00	$1,25152 \times 10^2$
0,50	$2,01799 \times 10^2$

Tabela 18 – Luminosidade de uma Gigante Vermelha de massa $M = 1,5M_{\odot}$ e raio $R = 44,2R_{\odot}$ para alguns valores de α .

A Gigante Vermelha neste exemplo, é classificada como uma estrela $K5III$. De acordo com dados observacionais, essa classificação corresponde a uma temperatura superficial entre $3780K$ e $3700K$ e luminosidade de aproximadamente $4,35 \times 10^2L_{\odot}$ [1]. Neste caso, segundo a tabela 18, os melhores valores correspondem a $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$.

$n = 3$: Anã Branca	
$M = 1,05M_{\odot}, R = 0,008R_{\odot}$	
α	L/L_{\odot}
∞	$4,09271 \times 10^1$
5,00	$1,25629 \times 10^1$
1,00	$1,95822 \times 10^{-2}$
0,50	$1,47928 \times 10^1$

Tabela 19 – Correspondência entre luminosidade de uma Anã Branca de massa $M = 1,05M_{\odot}$ e raio $R = 0,008R_{\odot}$, e o parâmetro α .

Esta Anã Branca está classificada espectralmente como $DA2$. Conforme essa classificação, sua temperatura superficial deve ser cerca de $25200K$ e sua luminosidade deve ser aproximadamente $2,55 \times 10^{-2}L_{\odot}$ [1]. Portanto, de acordo com a tabela 19, o valor mais adequado foi encontrado para $\alpha = 1$.

$n = 3$: Sol	
$M = M_{\odot}, R = R_{\odot}$	
α	L/L_{\odot}
∞	1,06438
5,00	1,05285
1,00	0,84314
0,50	0,95084

Tabela 20 – Luminosidade solar para diferentes valores de α .

Tendo em vista sua importância e sua proximidade, o Sol é a estrela mais conhecida. Conforme os dados indicam, o Sol possui temperatura superficial em torno de $5780K$ e $5800K$, sendo classificada como uma estrela $G2V$. Diante desses dados, verificamos através da tabela 20, que os melhores valores de luminosidade são descritos por $\alpha = 0,5$, $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$.

7.8 Conclusões

Neste trabalho, analisamos estrutura estelar sob o ponto de vista da gravidade $f(\mathcal{R})$. A razão que nos conduziu adotar tal abordagem é o fato de que as correções de ordem superior na curvatura podem emergir em regimes de campo gravitacional intenso, como ocorre no interior das estrelas. Neste regime, é tangível supor que a emergência destas correções possam gerar efeitos na pressão, temperatura e densidade, por exemplo. Desta forma, nas equações de estrutura estelar, novos termos relacionados às correções na curvatura levam a diferentes comportamentos destas grandezas. Vale citar ainda que uma vez que esses termos quadráticos surgem em regimes de

campo forte, esses modelos não podem ser confrontados com os testes no Sistema Solar, como feito na Relatividade Geral. Nesta escala, temos o regime de campo fraco, onde apenas os termos com escalar de Ricci \mathcal{R} linear mostram-se relevantes.

Para realizarmos a análise da estrutura estelar sob o enfoque desta teoria estendida de gravidade, partimos de uma ação que representa os modelos de gravidade $f(\mathcal{R})$, da equação de equilíbrio hidrostático e da equação de estado politrópica. A fim de compararmos os resultados obtidos por este modelo com aqueles obtidos pela teoria Newtoniana, realizamos a análise da estrutura estelar também sob o ponto de vista dessa teoria. Neste caso, partimos da equação de Poisson para o campo gravitacional, da equação de equilíbrio hidrostático e da mesma equação de estado politrópica. A partir disto, solucionamos numericamente as equações responsáveis pela estrutura estelar, evidenciando o papel que as correções na curvatura desempenham nestas equações. Desta forma, as expressões para pressão, densidade, temperatura e indiretamente, luminosidade, passam a depender estritamente dos valores destas correções. Interpretando esses termos adicionais como correções da Relatividade Geral, controlamos os desvios do modelo com respeito à teoria de Einstein. Vale citar ainda que nas soluções procedentes do modelo de gravidade $f(\mathcal{R})$, nota-se a presença de um grau de liberdade extra α relacionado com a correção f_2 .

Através dos gráficos 4 - 18, temperatura, pressão e densidade para estrelas de diferentes classes, descritas pela teoria Newtoniana e pelo modelo de gravidade $f(\mathcal{R})$, foram comparadas numericamente. Essas grandezas foram representadas em função do raio normalizado da estrela. Observando esses gráficos, verificamos que aumentando o termo de correção f_2 , conseqüentemente, diminuindo α (de acordo com a equação (7.67), mantendo ξ constante, α e f_2 são inversamente proporcionais), constatamos que em todos os casos, essas grandezas físicas dentro da estrela apresentam um decréscimo mais rápido e valores centrais menores. Desta forma, quanto mais a teoria estendida se afasta da teoria Newtoniana (quanto mais α diminui), menor é a pressão e a temperatura no interior da estrela. Quanto à densidade, verificamos que para $n = 1$, as curvas coincidem para todos os valores de α escolhidos, inclusive para o caso Newtoniano. Para os outros valores de n , observamos o mesmo comportamento que foi descrito para a pressão e a temperatura; quanto menor α , menor é a densidade central da estrela e mais rapidamente a curva decresce. Tudo isso nos leva a crer que a magnitude das correções gravitacionais altera a estrutura estelar. Portanto, aumentando o valor do parâmetro f_2 , as relações de pressão, densidade e temperatura originais da Relatividade Geral são afetadas por um termo que modifica, de certa forma, a massa e o raio da estrela. É importante destacar que não fizemos uso de matéria exótica, apenas de matéria usual (bariônica). Adotamos aqui o "*Jordan frame*", de modo que os resultados do setor gravitacional foram corrigidos enquanto que o setor de matéria não foi afetado. Deste modo, a estrutura geodésica não foi alterada e a equação de estado politrópica padrão pôde ser assumida.

Através da análise dos gráficos e das tabelas, pode-se constatar que de forma geral, a melhor descrição das estrelas de Nêutrons, Anãs Marrons e Anãs Brancas foi alcançada pelo parâmetro $\alpha =$

1. Este fato corrobora com o comportamento esperado das grandezas físicas em estrelas com campos gravitacionais intensos. Vale citar que este valor de α representa um caso em que a curvatura é mais acentuada e conseqüentemente, o campo gravitacional é mais intenso (quanto menor α , maior o termo de correção f_2 na função do escalar de curvatura). Portanto, nestes casos, para uma melhor descrição se faz necessário um modelo de estrutura estelar segundo a teoria de gravidade $f(\mathcal{R})$, uma vez que a contribuição das correções nas grandezas são mais expressivas. Outra questão a ser discutida baseia-se na análise dos resultados obtidos para as estrelas de Nêutrons. Para essas estrelas, alguns resultados encontrados não apresentaram diferenças expressivas entre os valores obtidos pelos modelos $f(\mathcal{R})$ e Newtoniano, apesar do modelo com $\alpha = 1$ ter se aproximado mais dos valores observados para esta estrela. Esperava-se diferenças tão expressivas quanto aquelas que foram observadas nas Anãs Brancas, uma vez que as estrelas de Nêutrons também possuem campos gravitacionais intensos. Justificamos este fato notando que a equação de estado aqui empregada (equação politrópica) não é a mais adequada, uma vez que não considera os efeitos quânticos presentes neste tipo de estrela. Já as Gigantes Vermelhas e o Sol (estrelas com campo fraco), foram melhor representadas por $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$. Isto reforça um fato observado nos gráficos (em todos os casos relatados neste trabalho, as curvas correspondentes a estes valores de parâmetros são quase coincidentes): para valores acima de $\alpha = 5$, já conseguimos recuperar a descrição Newtoniana para as estrelas. Desta forma, podemos concluir que no caso em que o campo gravitacional associado é fraco, a melhor descrição é obtida através de um modelo Newtoniano, não sendo necessária a abordagem via teoria $f(\mathcal{R})$.

Como foi apresentado, esse trabalho teve como intenção indicar a possibilidade de descrever algumas classes de estrelas em modelos politrópicos sob uma diferente suposição sobre a gravidade. O estudo desses sistemas nesta abordagem pode ser importante para testar teorias de gravidade $f(\mathcal{R})$, uma vez que encontram-se nas estrelas, regimes de campos gravitacionais fortes.

Apesar da simplicidade do modelo, os resultados obtidos foram satisfatórios. Salvo alguns valores de luminosidade para determinadas estrelas, os valores estimados para a pressão, densidade e temperatura estão dentro dos determinados por observações. Os resultados desse trabalho podem ser estendidos para estrelas dotadas de campos magnéticos e em rotação, por exemplo, e ainda para uma equação de estado diferente.

Conclusões

Entre os trabalhos abordados nesta tese, apresentamos um modelo que descreve a dinâmica de sistemas auto-gravitantes descritos pelo limite Newtoniano da gravidade $f(R)$ no formalismo de Palatini. Através das equações obtidas por este formalismo juntamente com a equação de Boltzmann sem colisão, no limite Newtoniano, obtivemos o critério de colapso para sistemas estelares e fluidos homogêneos, conhecida como relação de dispersão. Através desta relação, soluções numéricas foram encontradas e comparadas com as obtidas previamente em [26]. Através desta comparação, nosso modelo provou ter um maior limite de instabilidade. O limite de massa das nuvens interestelares diminuiu, modificando as condições iniciais para o colapso. A relação de dispersão obtida via formulação de Palatini diferiu daquela obtida via formulação métrica somente por termos de ordem f_2^2 , abaixo dessa ordem, nenhuma diferença foi encontrada. Os termos de ordem f_2^2 surgiram somente nas soluções de Palatini quando escrevemos o escalar de Ricci generalizado em função do escalar de Ricci usual. Desta maneira, concluímos que as diferenças reportadas aqui são resultados diretos da aplicação da formulação de Palatini.

Outro resultado obtido nesta análise está relacionado com a massa de Jeans. Verificamos que as massas de Jeans para os sistemas descritos pela gravidade $f(R)$ via formalismo de Palatini, exibem valores menores do que daqueles encontrados para o caso métrico e, especialmente, para a gravitação Newtoniana. Isso demonstrou que o limite para iniciar o colapso de uma nuvem interestelar está abaixo do limite clássico, favorecendo a formação de estruturas. Interpretamos esse resultado, dizendo que a mesma quantidade de matéria é capaz de produzir uma curvatura mais acentuada, causando uma aceleração maior das partículas testes e conseqüentemente, faz com que essas partículas descrevam uma geodésica diferente daquela que descreveriam se seguissem o formalismo métrico. Comparamos também, o comportamento da massa de Jeans com a temperatura para algumas nuvens interestelares. Concluímos que para baixas temperaturas, a formação de estruturas torna-se favorável, considerando que a massa de Jeans, nessas situações, apresenta valores menores. Notamos ainda que, na época em que o Universo era quente, segundo a teoria Newtoniana, a massa crítica para o colapso deveria ser maior. Isso sugere, que a formação de estruturas na formulação de Palatini pode ter tido um início anterior ao que é previsto pela

teoria clássica, o que nos levaria a observar estruturas mais antigas. Assim, concluímos que no nosso modelo, a formação de estruturas é favorecida.

Abordamos ainda um outro modelo para analisar a dinâmica e o colapso de um sistema auto-gravitante sem colisão composto por matérias escura e bariônica. Esse sistema foi descrito por duas equações de Boltzmann sem colisão, uma para cada constituinte, e pela equação de Poisson para o campo gravitacional. Através dessas equações, obtivemos a relação de dispersão. O modelo mostrou ter um maior limite de instabilidade e conseqüentemente, uma massa de Jeans menor quando comparada com o caso Newtoniano. Observou-se que a massa de Jeans sempre apresenta valores menores nos modelos onde a matéria escura está presente. Esse fenômeno ocorre devido ao fato da matéria escura não ser influenciada pela pressão como a matéria bariônica, o que faz com que o constituinte escuro se aglomere mais facilmente. Em seguida, a matéria bariônica passa a se agregar devido à atração do campo gravitacional gerado por esse aglomerado inicial. Esse resultado demonstra que as estruturas começaram a se formar mais cedo, na época que a matéria escura dominava.

Concluímos também que quando a velocidade de dispersão da matéria bariônica é relativamente menor que a velocidade de dispersão da matéria escura, as partículas de matéria bariônica são facilmente agregadas, já que dificilmente superam a velocidade de escape de um dado campo gravitacional. Desta maneira, esse modelo prova ter um maior limite de instabilidade, e por conseqüência, exibe uma vantagem quanto à formação de estruturas.

Motivados pelo interesse em estudar alguns sistemas físicos em regime de campos gravitacionais intensos, incluímos ainda, nesta tese, um modelo de estrutura estelar sob o ponto de vista da gravidade $f(R)$, uma vez que as correções de ordem superior na curvatura (oriundas das teorias de gravidade modificada) estão propensas a emergir de forma expressiva no interior de estrelas, onde se localizam fortes campos gravitacionais. Neste regime, novos termos relacionados às correções na curvatura modificaram as conhecidas equações de estrutura estelar, alterando o comportamento de algumas grandezas físicas relacionadas ao sistema em questão. O modelo teve como alicerces as equações de campo da gravidade $f(R)$ (via formulação métrica), a equação de equilíbrio hidrostático e uma equação de estado politrópica. A fim de compararmos os resultados obtidos por este modelo com aqueles obtidos pela teoria Newtoniana, realizamos a análise da estrutura estelar também sob o ponto de vista dessa teoria.

Analisando os gráficos, verificamos que ao aumentar o termo de correção f_2 , as grandezas físicas (pressão, temperatura e densidade) no interior das estrelas decresceram de forma mais rápida. Desta forma, pôde-se constatar que a magnitude das correções gravitacionais alterou a estrutura estelar. Através da análise dos gráficos e das tabelas, pôde-se constatar ainda que de forma geral, a melhor descrição das estrelas de Nêutrons, Anãs Marrons e Anãs Brancas foi alcançada pelo parâmetro $\alpha = 1$. Este resultado corroborou o que era esperado em estrelas com campos gravitacionais intensos, uma vez que $\alpha = 1$ representa um caso em que a curvatura é

mais acentuada e conseqüentemente, o campo gravitacional é mais intenso. Nestes casos, para uma melhor descrição, mostrou-se necessário um modelo de estrutura estelar segundo a teoria de gravidade $f(R)$. Ainda neste contexto, analisando os resultados obtidos para as estrelas de Nêutrons constatamos que alguns destes resultados não apresentaram diferenças expressivas entre os valores obtidos pelos modelos $f(R)$ e Newtoniano. Esperava-se diferenças tão expressivas quanto aquelas que foram observadas nas Anãs Brancas, visto que as estrelas de Nêutrons também possuem campos gravitacionais intensos. Justificamos esses resultados notando que a equação de estado empregada no modelo (equação politrópica) não é a mais adequada, uma vez que não considera os efeitos quânticos presentes nestas estrelas. Já as Gigantes Vermelhas e o Sol (estrelas com campo fraco), foram melhor representadas por $\alpha = 5$ e $\alpha \rightarrow \infty$. Isto reforçou um fato observado nos gráficos: para valores acima de $\alpha = 5$ já é possível recuperar a descrição Newtoniana para as estrelas. Assim, concluímos que no caso de campo gravitacional fraco, a melhor descrição é alcançada por um modelo Newtoniano, não sendo necessário o emprego da teoria de gravidade $f(R)$.

Apesar da simplicidade do modelo, os resultados obtidos foram satisfatórios. Salvo alguns valores de luminosidade para determinadas estrelas e alguns resultados obtidos para estrelas de Nêutrons, os valores estimados para a pressão, densidade e temperatura estão dentro dos determinados por observações. Reforça-se aqui que o estudo desses sistemas nesta abordagem pode ser importante para testar teorias de gravidade $f(R)$, visto que encontramos nas estrelas, regimes de campos gravitacionais fortes.

Em suma, nesta tese sugerimos modelos de formação de estruturas e estrutura estelar via gravidade $f(R)$, capazes de fornecer algumas pistas para testar essas teorias de gravidade estendida. Buscando ainda por modelos que melhor descrevessem a formação de estruturas, abordamos esse problema também sob o enfoque da matéria escura.

Referências

- [1] Stellar Classification Table, SpaceGear.Orgs SCTable. Acesso em: 31 de out. 2016.
- [2] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII Cosmological Parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 594, 2016.
- [3] C. Agón et al. Kinetic theory of collisionless self-gravitating gases: Post-Newtonian polytropes. *Physical Review D*, 83, 2011.
- [4] R. Alpher. A neutron-capture theory of the formation and relative abundance of the elements. *Physical Review*, 74, 1948.
- [5] R. Alpher et al. The origin of chemical elements. *Physical Review*, 73, 1948.
- [6] R. André and G. M. Kremer. Collisionless self-gravitating systems in f(R)-gravity within Palatini approach and relativistic Boltzmann equation in the Newtonian approach. *Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology, Second Argentinian-Brazilian Meeting*, 2014.
- [7] J. Antoniadès et al. A massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340, 2013.
- [8] E. Arbuzova et al. Jeans instability in classical and modified gravity. *Physics Letters B*, 739, 2014.
- [9] M. Asplund et al. The Chemical Composition of the Sun. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 47, 2009.
- [10] S. Auddy et al. Analytic Models of Brown Dwarfs and the Substellar Mass Limit. *Advances in Astronomy*, 2016, 2016.
- [11] S. Basu and H. M. Antia. Helioseismology and Solar Abundances. *Physics Reports*, 457, 2008.
- [12] C. L. Bennett et al. Nine-Years Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations. *The Astrophysical Journal Supplement*, 208(20B), 2013.

-
- [13] M. Berry. *Principles of cosmology and gravitation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [14] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton Series in Astrophysics, Princeton, 2th edition, 2008.
- [15] A. Bonanno et al. The age of the Sun and the relativistic corrections in the EOS. *Astronomy and Astrophysics*, 390, 2008.
- [16] S. Bonometto et al. *Modern Cosmology*. Institute of Physics Publishing, Philadelphia, 2002.
- [17] A. Borowiec et al. Cosmic acceleration from modified gravity with Palatini formalism. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 27, 2012.
- [18] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 124, 1961.
- [19] H. A. Buchdahl. Non-linear Lagrangians and Cosmological Theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 150, 1970.
- [20] A. Burrows and J. Liebert. The science of brown dwarfs. *Reviews of Modern Physics*, 65, 1993.
- [21] E. Böhm-Vitense. *Introduction to stellar astrophysics: basic stellar observations and data*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [22] S. Capozziello et al. From dark energy & dark matter to dark metric. *Foundations Physics*, 2009.
- [23] S. Capozziello et al. A bird's eye view of $f(R)$ -gravity. *The Open Astronomy Journal*, 3, 2010.
- [24] S. Capozziello et al. Hydrostatic equilibrium and stellar structure in $f(R)$ gravity. *Physical Review D*, 83, 2011.
- [25] S. Capozziello et al. Cosmic relic abundance and $f(R)$ gravity. *Physical Letters B*, 715, 2012.
- [26] S. Capozziello et al. Jeans analysis of self-gravitating systems in $f(R)$ -gravity. *Physical Review D*, 85, 2012.
- [27] S. Capozziello and V. Faraoni. *Beyond Einstein Gravity. A survey of gravitational theories for Cosmology and Astrophysics*. Springer, Dordrecht - Heidelberg - London - New York, 2011.
- [28] S. Capozziello and M. D. Laurentis. Extended theories of gravity. *Physics Report*, 509, 2011.
- [29] C. Cercignani and G. M. Kremer. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2002.

- [30] G. Chabrier and I. Baraffe. Theory of Low-Mass star and substellar objects. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38, 2000.
- [31] N. Chamel et al. On the maximum mass of Neutron stars. *International Journal of Modern Physics*, 22, 2013.
- [32] S. Chandrasekhar. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 74, 1931.
- [33] S. Chandrasekhar. The highly collapsed configurations of a stellar mass (Second paper). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 95, 1935.
- [34] S. Chandrasekhar. *An introduction to the study of Stellar Structure*. University of Chicago Press, Chicago, 1957.
- [35] R. H. Dicke et al. Cosmic black-body radiation. *American Astronomy Society*, 142, 1965.
- [36] R. D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [37] A. S. Eddington. On the relation between the masses and luminosities of the stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 84, 1924.
- [38] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, Cambridge, 1926.
- [39] A. Einstein. On the influence of gravity on the propagation of light. *Annalen der Physik*, 35, 1911.
- [40] F. Fagotto et al. Evolutionary sequences of stellar model with new radiative opacities IV. $z=0.004$ and $z=0.008$. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 105, 1994.
- [41] V. Faraoni. $f(R)$ gravity: successes and challenges. *XVII Congresso SIGRAV "General Relativity and Gravitational Physics"*. Società Italiana di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, 2008.
- [42] S. Fay et al. $f(R)$ gravity theories in Palatini formalism: cosmological dynamics and observational constraints. *Physical Review D*, 75, 2007.
- [43] M. Ferraris et al. Variational Formulation of General Relativity from 1915 to 1925. "Palatini's Method" Discovery by Einstein in 1925. *General Relativity and Gravitation*, 14, 1982.
- [44] G. Fontaine et al. The potential of White Dwarf Cosmochronology. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 113, 2001.
- [45] G. W. Gibbons. *Part III: Applications of Differential Geometry to Physics*. Cambridge CB30WA, 2006.

- [46] G. A. Glatzmaier. *Astronomy 112: The Physics of Stars. Class 16 Notes: Post-Main Sequence Evolution of Low Mass Star*, 2016. Acessado em: 26 de out. 2016.
- [47] N. K. Glendenning. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2012.
- [48] V. Gorini and U. Moschella. *Modern Cosmology*. IOP Publishing Ltd, Florida, 2002.
- [49] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Cambridge, 7th edition, 2007.
- [50] R. O. Gray et al. Contributions to the Nearby Stars (NStars) Project: Spectroscopy of Stars Earlier than MO within 40pc - The Southern Sample. *The Astronomical Journal*, 132, 2006.
- [51] J. F. Hawley and K. A. Holcomb. *Foundations of Modern Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2th edition, 2005.
- [52] C. Hayashi and T. Nakano. Evolution of Stars of Small Masses in the Pre-Main-Sequence Stages. *Progress of Theoretical Physics*, 30, 1963.
- [53] J. B. Holberg et al. Sirius B: A new more accurate view. *The Astrophysical Journal*, 497, 1998.
- [54] B. Hong et al. Influence of Entropy on Composition and Structure of Massive Protoneutron stars. *Communications in Theoretical Physics*, 66, 2016.
- [55] G. P. Horedt. *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [56] P. G. J. Irwin. *Giant Planets of our Solar System: Atmospheres, Composition, and Structure*. Springer, Chichester, 2003.
- [57] J. H. Jeans. The Stability of a Spherical Nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 199, 1902.
- [58] S. O. Kepler. White dwarf mass distributions in the SDSS. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375, 2007.
- [59] M. Kilic et al. The lowest mass white dwarf. *The Astrophysical Journal*, 660, 2007.
- [60] B. Kiziltan. *Reassessing the Fundamentals: On the Evolution, Ages and Masses of Neutron Stars*. Dissertation.com, Florida, 2011.
- [61] G. M. Kremer. *Uma introdução à Teoria Cinética Relativística*. Editora UFPR, Curitiba, 1998.
- [62] G. M. Kremer. *Uma Introdução à Equação de Boltzmann*. Editora USP, São Paulo, 2004.

- [63] G. M. Kremer and R. André. Analysis of instability of systems composed by dark and baryonic matter. *International Journal of Modern Physics D*, 25, 2016.
- [64] S. Kumar. The structure of star of very small mass. *The Astrophysical Journal*, 137, 1963.
- [65] L. D. Landau and E. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975.
- [66] G. Laughlin et al. The end of the Main Sequence. *The Astrophysical Journal*, 482, 1997.
- [67] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley & Sons, LTD, Chichester, 2th edition, 2003.
- [68] R. S. Lynch et al. The Green Bank Telescope 350 MHz Drift-scan Survey II: Data Analysis and the Timing of 10 New Pulsar, Including a Relativistic Binary. *The Astrophysical Journal*, 763, 2013.
- [69] E. E. Mamajek et al. Resolution B3 on Recommended Nominal Conversion Constants for Selected Solar and Planetary Properties, Aug. 2015. Acessado em: 25 de out. 2016.
- [70] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge - New York, 2005.
- [71] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 4, 2007.
- [72] P. Noterdaeme et al. The evolution of the cosmic microwave background temperature. Measurements of tcmb at high redshift from carbon monoxide excitation. *Astronomy and Astrophysics*, 526, 2011.
- [73] K. Ohnaka. Spatially resolved, high-spectral resolution observation of the K giant Aldebaran in the CO first overtone lines with VLT I/Amber. *Astronomy and Astrophysics*, 589, 2013.
- [74] G. J. Olmo. Cosmology in Palatini theories of gravity. *AIP Conference Proceedings*, 2011.
- [75] G. J. Olmo. Palatini approach to modified gravity: f(R) theories and beyond. *International Journal of Modern Physics D*, 20, 2011.
- [76] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [77] A. A. Penzias and R. W. Wilson. Measurement of the flux density of cas a at 4080 mc/s. *American Astronomy Society*, 142, 1965.
- [78] W. H. Press. Astronomy 45 Course Notes. Introduction to Astrophysics: Stars and Stellar Structure, 2016. Acessado em: 26 de out. 2016.

- [79] J. Ramos-Caro et al. Kinetic theory of collisionless self-gravitating gases: II relativistic corrections in galactic dynamics. *Physical Review D*, 86, 2012.
- [80] R. Rebolo et al. Brown Dwarfs in the Pleiades Cluster confirmed by the Lithium test. *The Astrophysical Journal*, 469, 1996.
- [81] A. Richichi and V. Roccatagliata. Aldebaran's angular diameter: How well do we know it? *Astronomy and Astrophysics*, 433, 2005.
- [82] A. G. Riess. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *The Astrophysical Journal*, 826, 2016.
- [83] W. Rindler. *Relativity Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, New York, 2th edition, 2006.
- [84] M. Roos. *Introduction to Cosmology*. John Wiley & Sons, LTD, Chichester, 3rd edition, 2003.
- [85] I. J. Sackmann et al. Our Sun. III. Present and Future. *The Astrophysical Journal*, 418, 1993.
- [86] E. L. Schatzman and F. Praderie. *The Stars*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1993.
- [87] H. L. Shipman. Masses and radii of white dwarf stars. III - Results for non hydrogen-rich and 28 helium-rich stars. *The Astronomical Journal*, 228, 1979.
- [88] T. Sotiriou and V. Faraoni. f(R) theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82, 2010.
- [89] A. A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physical Review Letters B*, 91, 1980.
- [90] P. Teerikorpi et al. *The Evolving Universe and the Origin of Life: The Search of Our Cosmic Roots*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2009.
- [91] D. Tsiklauri. Jeans instability of interstellar gas cloud in the background of weakly interacting massive particles. *The Astrophysical Journal*, 507, 1998.
- [92] T. Tsuji. Cool luminous stars: the hybrid nature of their infrared spectra: Carbon, Oxygen, and their isotopic abundance in 23K-M Giant stars. *Astronomy and Astrophysics*, 489, 2008.
- [93] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology. Principles and applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, LTD, New York, 1972.
- [94] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [95] B. A. Wilking et al. Spectroscopy of Brown Dwarf Candidate in the ρ Ophiuchi Molecular Core. *The Astronomical Journal*, 117, 1999.

- [96] R. D. Williams. Jupiter Fact Sheet. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html>. Acessado em: 01 de fev. 2017.
- [97] R. D. Williams. Sun Fact Sheet. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>. Acessado em: 25 de jul. 2016.
- [98] D. G. Yakovlev and C. J. Pethick. Neutron Star Cooling. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 42, 2004.
- [99] M. A. Zeilik. *Introduction Astronomy and Astrophysics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1998.
- [100] X.-F. Zhao. The properties of the massive neutron star PSR J0348+0432. *International Journal of Modern Physics D*, 24, 2015.
- [101] M. V. Zombeck. *Handbook of Space Astronomy and Astrophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition edition, 1990.
- [102] F. Özel et al. In the mass distributions and birth mass of Neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 757, 2012.

^