UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ LORENZO BITTENCOURT

UMA ANÁLISE EMPÍRICA DO CRITÉRIO DE KELLY OU ESTRATÉGIA DA MAXIMIZAÇÃO DA MÉDIA DOS RETORNOS LOGARÍTMICOS

CURITIBA

2016

ANDRÉ LORENZO BITTENCOURT

UMA ANÁLISE EMPÍRICA DO CRITÉRIO DE KELLY OU ESTRATÉGIA DA MAXIMIZAÇÃO DA MÉDIA DOS RETORNOS LOGARÍTMICOS

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção de título de Economista, Curso de Ciências Econômicas, Departamento de Economia, Universidade Federal do Paraná.

Prof. José Guilherme Silva Vieira

CURITIBA

2016

RESUMO

Pouco explorado no Brasil, esse trabalho busca apresentar o Critério de Kelly com ferramenta de decisão de quanto deve ser investido em um ativo de risco e em um ativo livre de risco. Apresentaremos a teoria por trás desse critério bem como testes empíricos para se avaliar sua aplicabilidade no mundo real.

Palavras-chave: Critério de Kelly; Alavancagem de portfólio; Otimização; Investimentos.

ABSTRACT

Pouco explorado no Brasil, esse trabalho busca apresentar o Critério de Kelly com ferramenta de decisão de quanto deve ser investido em um ativo de risco e em um ativo livre de risco. Apresentaremos a teoria por trás desse critério bem como testes empíricos para se avaliar sua aplicabilidade no mundo real.

Keywords: Kelly Criterion; Portfolio Leverage; Optimization; Investment.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Decidir que proporção de recursos alocar em ativos arriscados e ativos livres de risco é uma escolha difícil. Diversos modelos foram propostos, sendo o mais famoso o modelo de média-variância de Markowitz, que delimita uma fronteira de eficiência de portfólios, deixando o investidor escolher um portfólio nessa fronteira com base em sua aversão ao risco e desejo pelo retorno. Com o critério de maximizar a Média Geométrica dos Retornos, o Critério de Kelly (dado uma opção de ativo arriscado e um livre de risco) produz um único portfólio, tirando a subjetividade do investidor. Esse portfolio também maximiza a utilidade para uma função de utilidade logarítmica (Elton e Gruber, 2009) o que justificaria seu uso por investidores maximizadores de utilidade sem restrições.

A ideia de se usar a quantidade de riqueza já existente para avaliar o valor de uma riqueza adicional, conhecido como Utilidade, e de que é preferível analisar uma "aposta" por sua Utilidade Esperada do que seu Retorno Esperado é primeiro exposto por Daniel Bernoulli (Bernoulli, 1954). Das conclusões de Bernoulli sobre Utilidade, as duas mais relevantes são "(...) any increase in wealth, no matter how insignificant, will always result in an increase in utility which is inversely proportionate to the quantity of goods already possessed" (Bernoulli, 1954, p.25). Ou seja, mais riqueza é sempre melhor e a Utilidade de uma riqueza qualquer decresce conforme a riqueza já existente, levando a concluir que quanto maior a riqueza menor o trabalho e/ou risco disposto a se correr para conquistar essa riqueza adicional.

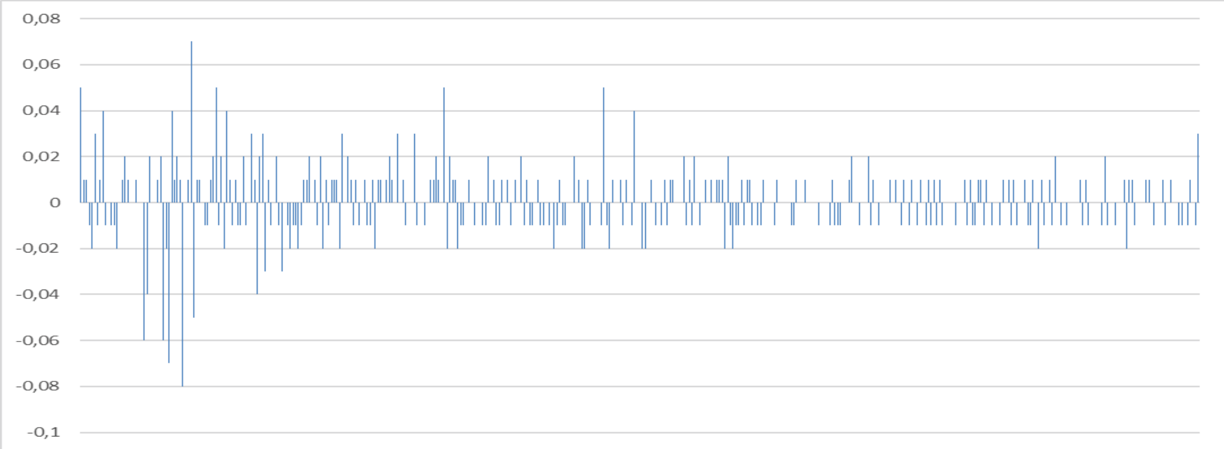
2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

A primeira análise do comportamento pelo qual os preços dos ativos mudam foi proposto por Louis Bachelier em sua tese de doutorado "Théorie de la spéculation" em 1900. Conhecido por sua importância no desenvolvimento da teoria de precificação de opções, esse trabalho propõe que os retornos absolutos dos ativos variam de forma aleatória, independentemente do valor do atual, seguindo uma distribuição normal. Porém, essa tese ficou na obscuridade até ser redescoberta na década de 1950 pelo estatístico Jimmy Savage e apresentada para Paul Samuelson, que se interessou por estar pesquisando sobre precificação de opções na época (Davis, 1993). Em 1905, de forma independente, Albert Einstein analisa o mesmo tipo de processo estocástico, mas aplicado à termodinâmica. Porém, a prova rigorosa desse tipo de processo só foi demonstrada por Norbert Wiener em 1923, por isso esse processo estocástico ficou conhecido como Processo de Wiener.

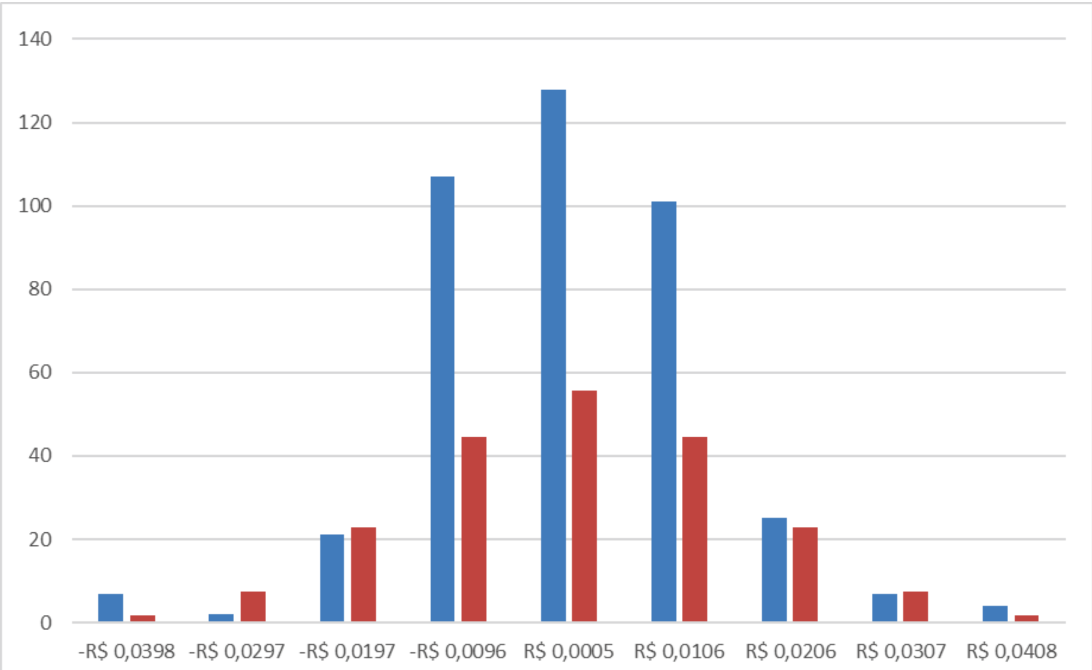
O Processo de Wiener, por vezes chamado de Movimento Browniano, é um processo estocástico contínuo, martingale (informações passadas não ajudam a prever o futuro), cujos incrementos, em termos absolutos, segue uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão constante proporcional ao espaço de tempo do incremento i.e. $N(0,\sigma')$ (Durrett, 2010). Analisando os preços de um ativo intraday ao longo de alguns dias pode parecer que se segue um Processo de Wiener. O preço sobe 5 centavos num minuto, cai 2 centavos na próxima, cai mais 2 etc., como no exemplo abaixo:

GRÁFICO 1 - VARIAÇÃO DOS PREÇOS EM REAIS MINUTO A MINUTO DO ATIVO PETR4 NO DIA 26/04/2016.



FONTE: Terminal Bloomberg. Elaboração Própria.

GRÁFICO 2 – HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS



FONTE: Terminal Bloomberg. Elaboração Própria.
LEGENDA: Em azul, retornos PETR4 no dia 26/04/016. Em vermelho, retornos esperados para uma distribuição normal com média R$0,00049 e desvio padrão R$0,01511 (obtidos pela amostra).

O histograma já nos dá sinais de que tal modelo pode não servir para analisar os retornos dos ativos.

Para quem tem mais prática com o mercado financeiro dois problemas ficam evidentes. O primeiro problema relaciona-se com a média dos incrementos, o segundo com o tipo de incremento medido. Assumindo investidores racionais e avessos ao risco, investir em um ativo com retorno esperado igual a 0 mas com variância maior que 0, tendo a alternativa de manter o dinheiro em espécie com retorno garantido de 0 e variância 0, é uma escolha irracional, ainda mais quando se considera a existência de ativos de renda fixa com retornos positivos e variância 0 ou quase 0. Por isso, é de se esperar que para um ativo com risco (variância maior que 0) tenha um retorno esperado positivo. Dados históricos do S&P500, obtidos no Terminal Bloomberg, corroboram essa ideia. Desde de sua criação em 1871 até 2015 para quase todos os períodos de 5 anos ou mais, o retorno anualizado foi positivo e o retorno anualizado dos 144 anos foi de 9%. Portanto, é previsto que o retorno esperado seja positivo. O segundo problema tem a ver com o uso dos retornos absolutos, usando como exemplo as ações da Alphabet Inc (Conglomerado Google) classe A, seu preço de IPO ajustado foi de aproximadamente US$54, a esse preço uma variação de US$1 representa um movimento de 1,85%, hoje a um preço da ação na casa dos US$830 a mesma variação de US$1 representa um movimento de 0,12%. Então, uma ação que suba em média US$1 ao ano vai se tornando cada vez menos atrativa e o investidor migrará para investimentos que tenha uma melhor relação Retorno absoluto/Preço, pois obterá o mesmo retorno absoluto com menos dinheiro investido. Para manter a atratividade do investimento, ceteris paribus, os retornos relativos (percentual) é que devem seguir uma distribuição normal (ou outra qualquer). Então qualquer modelo que busque descrever o mercado financeiro deve ter duas características:

-Tendência de retornos positivos.

-Retornos relativos é que seguem algum processo.

Para superar as limitações do processo de Wiener, atualmente no ramo de matemática financeira e finanças quantitativas, usa-se uma variante desse processo, conhecido como Movimento Browniano Geométrico, GBM na sigla em inglês (Hull, 1992). Nesse modelo, o retorno logarítmico segue uma distribuição normal, por isso esse processo também é conhecido como modelo log-normal. Hull (1992) apresenta propriedades interessantes desse modelo, condizentes com a realidade:

-Os retornos são independentes de retornos passados e do preço da ação (Compatível com a Hipótese de Mercados Eficientes Fraca)

-O preço do ativo só pode assumir valores positivos (Limited Liability)

-O processo parece ter uma "rugosidade" (a aparência da variabilidade) parecida com a realidade.

-Tendência de retornos positivos

Entretanto, ele aponta alguns problemas:

-Em GBM, a volatilidade é constante, enquanto na realidade vemos que a volatilidade muda e as vezes de forma muito abrupta.

-Informações ou eventos não previsíveis causam saltos nos preços das ações, enquanto o GBM é um processo sem descontinuidade.

-Os retornos nas caudas da distribuição são mais comuns do que o esperado pelo modelo (com uma distribuição normal).

Apesar desses problemas o GBM ainda é bastante utilizado (provavelmente o mais utilizado) por apresentar uma matemática relativamente simples e levar a soluções fechadas em diferentes aplicações (incluindo neste trabalho).

Como não é de interesse desse trabalho se aprofundar nas características matemáticas do GBM, tomaremos a definição apresentada na literatura. Oksendal (2013) e Ross (2014) nos apresentam a definição de um processo GBM, como sendo,

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \qquad (1)$$

Sendo S o valor de um ativo, μ o parâmetro drift, σ a volatilidade e W_t um processo de Wiener, uma variável aleatória de média 0 e desvio padrão igual a 1.

Será do nosso interesse o retorno logarítmico esperado, $E[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)]$. Como W_t é um processo com média 0, seu valor esperado E[Wt] = 0, então o retorno logarítmico esperado é:

$$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \qquad (2)$$

Como daqui para frente, como trabalharemos apenas com o retorno logarítmico esperado, trataremos E[$\ln(S_t/S_0)$] apenas como $\ln(S_t/S_0)$.

2.2 CRITÉRIO DE KELLY

Imagine que lhe é feito a seguinte proposta, um jogo de cara ou coroa onde se der cara você perde o valor apostado e se der coroa dobra-se o valor aposta e você recebe sua aposta inicial de volta. O retorno esperado pode ser facilmente calculado com sendo de 100%, portanto é uma aposta vantajosa e uma pessoa racional a aceitaria. A questão é, quanto devemos apostar ou investir? Se colocar todo o seu capital, você maximizará sua expectativa de lucro, porém tem 50% de chance de perder todo o seu dinheiro e não poder fazer novos investimentos para recuperar o capital perdido, você estará fora do jogo. Se você apostar 0, estará minimizando o risco, mas também não estará aproveitando o benefício de um retorno esperado positivo. Concluímos que o valor ideal deve ser intermediário entre esses dois extremos. Como as probabilidades e retornos são constantes, então a aposta deve ser constante, mas o montante absoluto ou o montante relativo deve ser fixo? Ou seja, deve sempre ser apostado 20 unidades monetárias ou 20% do capital? Se você tem 100 unidades e ganha 20, tem um retorno de 20%, mas se tem 1000, o retorno é de 2%, conforme seu capital for crescendo, seu retorno marginal seria decrescente. Já com uma fração fixa, o retorno marginal será constante, sendo assim mais logico.

Já vimos que devemos apostar/investir algo entre todo o nosso capital e nada dele em uma proporção fixa de f%. Para definir esse valor de "f", primeiro devemos definir um critério, um objetivo que devemos alcançar, se quisermos maximizar a probabilidade de dobrar o capital após uma jogada, então f deve ser 100%, ou se quisermos maximizar a probabilidade de manter o capital inicial após n jogadas f deverá ser 0%. O critério que buscamos é maximizar o retorno no longo prazo.

Em seu trabalho seminal, John Kelly (1956) propõe esse mesmo problema e deduz sua solução pela primeira vez. Focado na engenharia, Kelly trata o problema em termos de teoria da informação, inclusive a incerteza do resultado final do evento ocorre porque o resultado (real) é transmitido por um "canal de comunicação" sujeito à erros. Apesar de John L. Kelly ter feito o trabalho seminal, Edward Thorp foi sem dúvida um dos seus maiores estudiosos e quem mais aplicou o Critério na prática, tanto em apostas quanto em investimentos (Poundstone, 2010). Thorp apresenta uma dedução mais didática e intuitiva (Thorp, 2006), que se segue (adaptada pelo autor para incluir payoffs assimétricos):

Se apostarmos uma fração f de nosso capital em uma aposta que pague b para cada unidade apostada mais nossa aposta original, em caso de vitória, e nada, no caso de derrota, nosso capital após n rodadas será:

$$S_n = S_0(1+fb)^V(1-f)^D \quad (3)$$

Sendo f a fração do capital apostado, V a quantidade de vitórias, D a quantidade de derrotas e $V+D=n$. Como nos interessa maximizar a taxa de crescimento esperado do nosso capital, a seguinte identidade nos será útil:

$$e^{n\log[\frac{S_n}{S_0}]^{1/n}} = \frac{S_n}{S_0} \quad (4)$$

Logo, nosso crescimento na rodada n em função da proporção do capital alocado, $G_n(f)$,

$$G_n(f) = \log[\frac{S_n}{S_0}]^{1/n} = \frac{V}{n}\log(1+fb) + \frac{D}{n}\log(1-f) \quad (5)$$

Em termos de expectativa, V/n é a probabilidade p de vitória em uma rodada e D/n é a probabilidade q de derrota. Logo, o crescimento esperado, $g(f)$ será:

$$g(f) = p\log(1+bf) + q\log(1-f) \quad (6)$$

Para achar a fração f^* que maximiza $g(f)$, $\max[g(f)]$ ocorre quando $\partial g(f)/\partial f = 0$. Resolvendo a maximização acima, encontramos que a fração f^* que maximiza $g(f)$ é:

$$f^* = \frac{(bp-q)}{b} \quad (7)$$

Como $q = 1 - p$

$$f^* = \frac{p(b+1)-1}{b} \quad (8)$$

Para o exemplo que inicia essa seção, aplicando as equações (7) e (5):

p = 0,5

b = 2

$$f^* = \frac{0{,}5(2+1)}{2} = 25\%$$

$$g(f^*) = 0{,}5\log(1 + 2 * 0{,}25) + 0{,}5\log(1 - 0{,}25) = 2{,}55\%$$

Ou seja, para maximizar o retorno no longo prazo, é necessário apostar 25% do capital em cada rodada, alcançando assim um retorno logarítmico médio de 2,55% por rodada.

É interessante notar como o crescimento não é assimptótico com a fração do nosso patrimônio investido. Como fica claro no gráfico abaixo, de 0 a f^* temos um crescimento maior para um f maior. Acima de f^*, quanto maior a fração investida menor nosso crescimento até um ponto que temos um crescimento esperado negativo.

2.2.1 Caso contínuo

Apesar de curiosa, a ideia acima parece ter pouca aplicabilidade. Apostas com retornos esperados positivos são coisas extremamente raras e normalmente com vida curta. Podemos destacar alguns casos como o de contagem de cartas no Blackjack. Descrito e utilizado, possivelmente, pela primeira vez por Edward Thorp (Thorp, 1966), em termos simples, a contagem de carta consiste em utilizar a informação das cartas já vistas para se estimar situações onde o jogo encontra-se com um retorno esperado que favoreça o jogador. Tendo tomado conhecimento do Critério de Kelly na década de 1950, Thorp aplicou largamente esse conceito em sua estratégia de contagem de cartas. Entretanto, a aplicação de tal estratégia requer muita habilidade e trabalho, não sendo prático como uma forma de investimento.

Outro caso curioso explorado por Ziemba (2001) é o de se escolher combinações de números pouco escolhidas em loterias do tipo 6/49, equivalente à Mega-Sena no Brasil. Escolher números “impopulares” pode trazer um retorno esperado positivo, pois caso sejam sorteados, dificilmente o prêmio será dividido em mais de um ganhador. Ziemba demonstra estatisticamente que tal estratégia pode ter um retorno esperado positivo.

Ambos os casos reforçam a ideia de que o caso binomial do Critério é pouco aplicável. O primeiro, porque para obter-se proficiência na contagem de cartas é necessário muita habilidade e treino. O segundo caso é pouco aplicável, pois como demonstrado no artigo, a fração do patrimônio a ser “investido”, de acordo com o Kelly, é tão baixa que pode não ser suficiente para comprar um único bilhete, além disso, pode ser necessário um tempo muito superior à vida humana para que haja uma dominância do retorno esperado sobre a aleatoriedade.

Pelo público que espero que o artigo atinja, já imagino que o leitor está pensando em um “lugar” em que aportes de capital têm retornos esperados positivos, o mercado financeiro. Como já visto anteriormente, investimentos em ações têm retornos esperados positivos. O mercado financeiro tem outras vantagens sobre as apostas com retornos positivos: não é necessário, a princípio, grandes habilidades ou treinos, os investimentos não surgem em curtas janelas de oportunidade, os mercados de ações costumam ser grandes o suficiente para não terem limites para o volume dos investimentos (como os table limits em cassinos), ou pelo menos são poucos os players que devem levar isso em conta e não carregam o estigma social das apostas.

Os investimentos em ações também apresentam duas características adequadas para uso do Critério, retorno esperado e risco esperado. Enquanto no caso binomial você tem o ganho no caso de vitória e a probabilidade de vitória, no mercado acionário há o retorno esperado e a volatilidade.

Aplicar um modelo às ações que possa maximizar os retornos no longo prazo pode ser de extremo interesse para investidores institucionais e pessoas físicas. À primeira vista não conseguimos aplicar as variáveis retorno esperado e volatilidade nas equações já apresentadas, porém podemos deduzir equações para investimentos com payoffs contínuos utilizando a ideia original de John Kelly. Em seu artigo de 2006, Thorp parte da mesma ideia utilizada para se deduzir a equação de Black-Scholes-Merton. A variação do preço das ações, em frações de tempo infinitesimais, pode assumir dois valores, $m \pm s$, sendo m o retorno esperado e s o desvio padrão. Dessa forma, o caso binomial pode ser aplicado para frações de tempo infinitesimais e com um pouco de manipulação algébrica e séries de potência chega-se em uma solução para qualquer intervalo de tempo real.

Como estamos partindo do pressuposto que as ações seguem o GBM, podemos chegar à mesma solução apresentada por Thorp, maximizando o movimento/retorno esperado no GBM. Optei por utilizar esse caminho por considerá-lo mais claro e intuitivo.

Como já visto, o retorno esperado de um ativo S é dado pela equação (2):

$$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \qquad (2)$$

Para um portfólio composto de uma fração f em um ativo S, com drift μ, desvio padrão σ e uma fração $(1 - f)$ num titulo pagador de uma taxa de juros conhecida r. A taxa de retorno esperado, $G(f)$, passa a ser:

$$G(f) = (f\mu - \frac{(f\sigma)^2}{2})t + ((1 - f)r)t \qquad (9)$$

Resolvendo, $\max G(f)$. Chamando de f^* o valor de f que maximiza $G(f)$,

$$\frac{\partial G(f)}{\partial f} = \mu - \frac{2f\sigma^2}{2} - r = 0 \qquad (10)$$

Logo,

$$f^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \qquad (11)$$

Aplicado f^* em $G(f)$,

$$G(f^*) = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} + r \qquad (12)$$

Como só há um ativo de risco, a volatilidade do portfólio é proporcional à quantidade desse ativo,

$$\sigma_p = \sigma f \qquad (13)$$

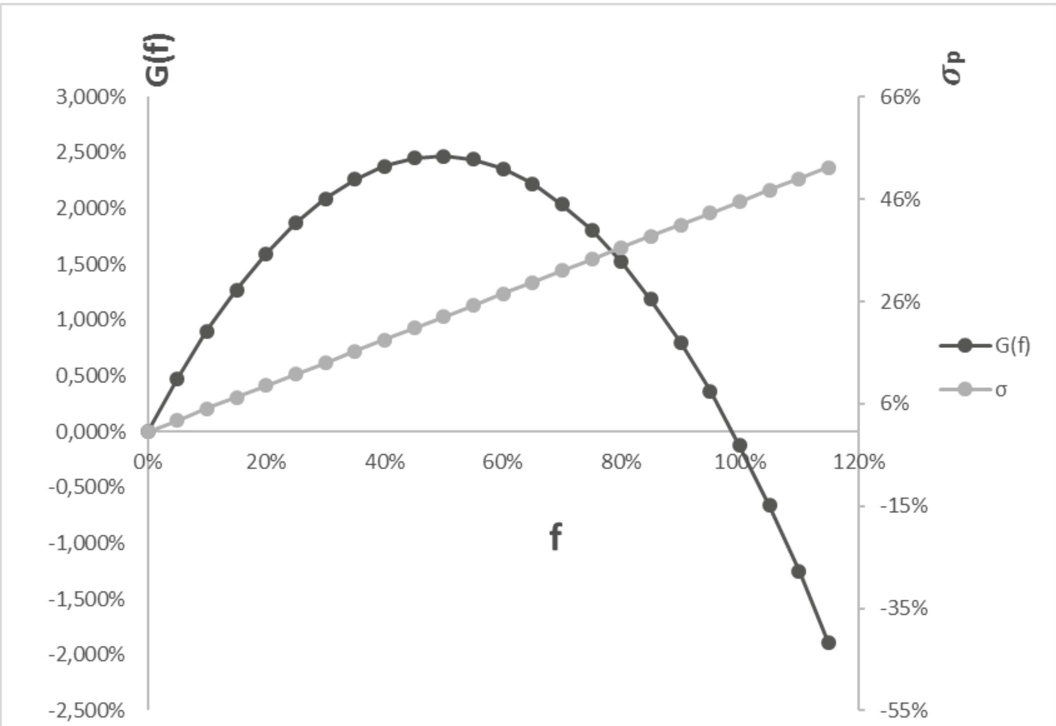
Para f^*,

$$\sigma_{p^*} = \sigma f^* = \sigma \frac{\mu - r}{\sigma^2} = \frac{\mu - r}{\sigma} \qquad (14)$$

Sobre a volatilidade, é interessante notar que ao contrário do $G(f)$ que apresenta uma função côncava, a volatilidade é monótona e crescente com f. Isso significa que portfólios com $f > f^*$ têm um crescimento menor e mais volátil que o portfólio de Kelly.

Graficamente temos, para $\mu = 10\%$; $r = 0\%$; $\sigma = 45\%$:

GRÁFICO 3



FONTE: O autor.

2.2.3 Vantagens e desvantagens

Até agora focamos em deduzir um método capaz de maximizar o retorno no longo prazo, sem levar em considerações outras questões. À primeira vista pode ser tentador enxergar numa estratégia com o maior retorno esperado como sendo a melhor possível, afinal, é de interesse dos investidores o retorno. Essa seção busca tratar das vantagens e desvantagens do Critério de Kelly já apresentadas por outros autores.

No lado das vantagens, MacLean, Thorp e Ziemba (2010) listam algumas delas. A propriedade básica do critério, maximiza a taxa de retorno logarítmica esperado $(\max E[\log G])$ do investimento. Por si só essa é uma propriedade, como discutindo antes, de grande interesse para uma ampla gama de investidores, mas ela tem alguns corolários interessantes. Esse Critério, além de maximizar o log-retorno, maximiza a utilidade dos investidores com funções de utilidade logarítmicas, isso implica de certa forma que investidores com utilidades nessa família de funções estarão “mais satisfeitos”. Sob certas condições, $\max E[\log G]$, também maximiza a mediana dos retornos logarítmicos, algo útil para manter o investidor na estratégia. O investidor de Kelly, sob os pressupostos do modelo, está fora de risco de uma falência, capital se tornar 0, apesar de teoricamente poder atingir níveis arbitrariamente pequenos em cenários adversos.

A última vantagem se refere à facilidade de escolha. Na moderna teoria de portfólio, no modelo de análise de media-variância (Markowitz, 1952) mesmo tendo apenas um ativo (ou fundo de ativos) de risco e um ativo livre de risco, podem ser montados infinitos portfólios eficientes, racionais de serem investidos, com diferentes riscos e retornos. Com base na aversão ao risco, então, um dos pontos sobre a curva será escolhido. O problema é supor o conhecimento do nível de aversão ao risco dos agentes, algo demonstrado (Kahneman,2012) como problemático e ambíguo. Em Kelly, é gerado apenas um portfólio (dado somente um ativo de cada uma das duas categorias) bastando supor que o investidor está interessado em maximizar seu retorno logarítmico.

Do outro lado da moeda, existem desvantagens no Critério, que podem torná-lo não ideal para todos os investidores.

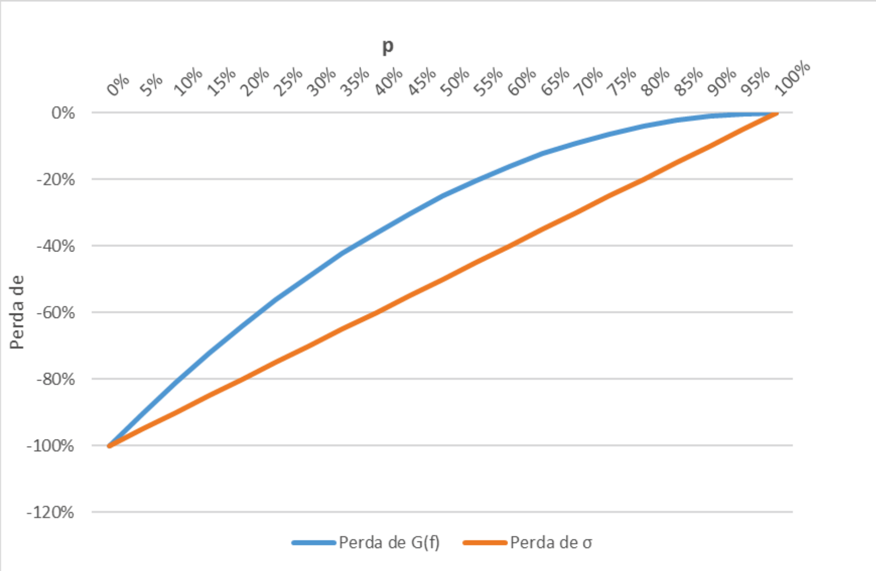
Da última vantagem citada podemos deduzir uma desvantagem. Como não a análise da aversão ao risco, para alguns agentes, o risco desse portfólio pode ser muito maior que o suportado por muitos investidores.

Provavelmente o maior detrator do Critério de Kelly seja o notável economista Paul Samuelson que escreveu diversas críticas, mais notadamente em Samuelson (1971) e Samuelson (1979). Suas críticas concentram-se principalmente no pressuposto da função de utilidade logarítmica, na verdade não é um pressuposto do modelo e sim um pressuposto para os agentes utilizarem o modelo como estratégia ótima. Samuelson demonstra que para qualquer outra função de utilidade o Critério é uma estratégia não ótima. Por sua complexidade matemática estar além do escopo desse trabalho, sugerimos ao leitor interessado se referir ao artigo original. Outra crítica apresentada por Samuelson se refere ao longo prazo. A estratégia maximiza o retorno com certeza o tempo tendendo ao infinito e com isso tende a maximizar o retorno em períodos finitos. Entretanto, no curto prazo (e por vezes no longo prazo) a estratégia pode ter retornos muito fracos ou mesmo negativos.

A última desvantagem a ser apresentada é a que considero de maior preocupação para esse trabalho. Erros na estimação dos parâmetros podem levar o investidor erroneamente a investir mais ou menos que a proporção ideal. Como visto anteriormente, caso o investidor aplique $f < f^*$ terá um crescimento menor que o máximo, mas também terá uma volatilidade menor; caso aplique $f > f^*$ além de ter um crescimento menor que o máximo, terá uma volatilidade maior também, tornando esse caso mais perigoso que o anterior. Para tentar sobrepor essa questão, Maclean e Ziemba (1999) propõem investir uma fração p de f^*, estratégia conhecida como Kelly fracionário. A ideia é que como superestimar f^* é mais custoso que subestimar, ao intencionalmente investir menos, o agente se protege contra os efeitos da superestimação a um custo relativamente pequeno.

No trabalho citado, os autores testam $f = 0{,}5f^*$. Nesse caso, se f^* estiver corretamente estimado, o investidor tem um crescimento 25% menor que $G(f^*)$ e uma volatilidade 50% menor. Para um $p = 0{,}75$, a volatilidade é 25% menor, enquanto o crescimento é apenas 6,25% menor. No gráfico abaixo, vemos a relação entre os valores de p e as quedas de $G(f)$ e σ_p:

GRÁFICO 4



FONTE: O autor.

A princípio não existe uma regra para escolha de p, ficando a cargo do investidor essa escolha.

3 APLICAÇÃO

Para testar o desempenho do Critério de Kelly, serão montadas e analisadas portfolios, com dados passados, consistindo de um índice de ações de referência e a taxa livre de risco compatível com cada índice:

- Ibovespa e SELIC - Brasil
- S&P 500 e Federal Funds Rate - EUA
- FTSE100 e ICE LIBOR (Para Libra) – Inglaterra

Os dados referentes aos índices de ações, foram obtidos através da Plataforma Bloomberg. O histórico da taxa SELIC foi obtido no site do Banco Central do Brasil (2016). O histórico do ICE LIBOR foi obtido no site do Federal Reserve Bank of St. Louis (2016a). E por último, as taxas do Federal Funds Rate também foram obtidas no site do Federal Reserve Bank of St. Louis (2016b).

3.1 TESTE TEÓRICO

Antes de iniciarmos os testes no mundo real, vamos simular o Critério de Kelly numa situação onde garantiremos que os pressupostos do modelo serão seguidos. Para isso iremos simular um ativo no Microsoft Excel. A maneira de simular um ativo no Microsoft Excel e aplicação do Critério de Kelly encontram-se no Apêndice A. Para essa simulação usamos arbitrariamente os parâmetros, ao ano:

- $\mu = 10\%$
- $\sigma = 30\%$
- $r = 5\%$

Com esses parâmetros o retorno esperado do ativo é $E[G(f)] = 0{,}12 - (0{,}3^2/2) = 0{,}055$, ou seja, 5,5% ao ano. Para esses parâmetros, os valores esperados relacionados ao Critério de Kelly são:

$$f^* = \frac{(0{,}10 - 0{,}05)}{0{,}3^2} = 55{,}56\%$$

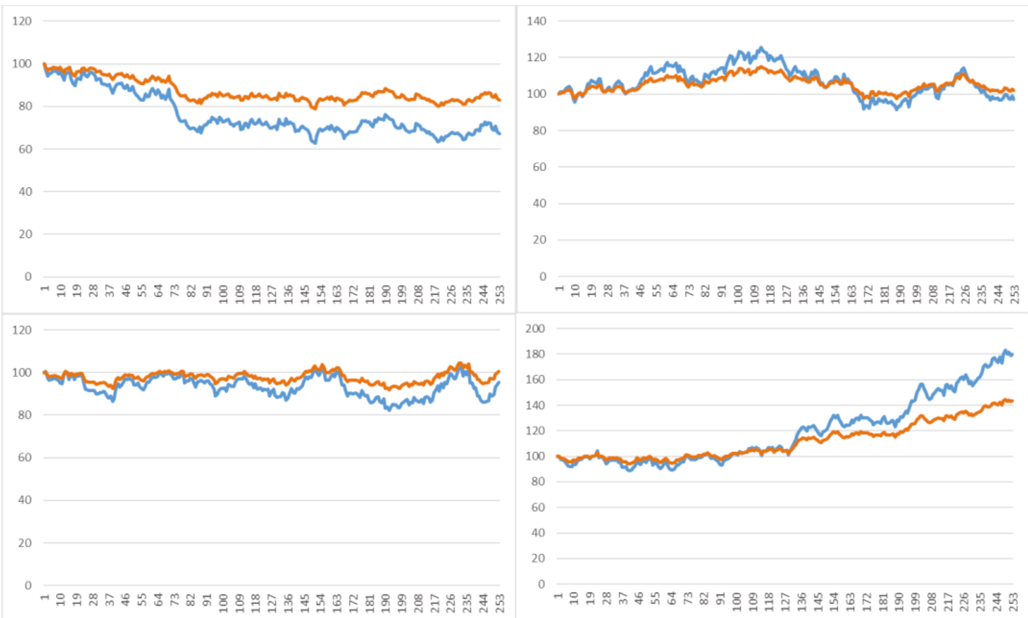
$$G(f^*) = \frac{(0{,}10 - 0{,}05)^2}{2(0{,}3^2)} + 0{,}05 = 6{,}39\%$$

$$\sigma^* = \frac{0{,}1 - 0{,}05}{0{,}3} = 16{,}67\%$$

O Critério pressupõe um balanceamento dinâmico continuamente, assim como o modelo de Black-Scholes-Merton e o Modelo de Markowitz, entretanto tal prática é inviável no mundo real. Custos de corretagem, Spread de compra e venda e infraestruturas necessárias tornam extremamente custoso o balanceamento contínuo. Portanto, tanto na simulação teórica, quanto com ativos reais, será feito o balanceamento diário e como será visto, com pouquíssimas perdas.

Abaixo temos quatro padrões, entre os infinitos possíveis, gerados na simulação:

GRÁFICO 5 – QUATRO POSSÍVEIS PADRÕES



FONTE: O autor.
LEGENDA: Quatro possíveis padrões. Em Azul, investindo 100% do capital no ativo. Em Laranja, investindo usando o Critério de Kelly.

Apesar de serem apenas alguns padrões no universo de possibilidade, é possível notar algumas características. O Critério não garante que o investidor se sairá melhor, em relação ao ativo puro, todas as vezes; tende-se a ter uma volatilidade muito menor. A superioridade do Critério é assintótica com o tempo, a diferença entre o retorno absoluto com e sem o Critério aumenta com o tempo.

Após serem feitas pouco mais de 1300 simulações, os resultados se mostraram bem próximos do esperado. Para o ativo puramente tivemos uma média dos retornos logarítmicos de 5,560% com um desvio padrão de 29,74%, contra os valores esperados de 5,500% e 30% respectivamente, mostrando a adequação da simulação. Usando a estratégia tivemos uma média dos retornos logarítmicos de 6,418% e um desvio padrão de 16,52%, contra os esperados 6,39% e 16,67%. Já que a simulação é apenas uma aplicação da mesma matemática do modelo, com os mesmos pressupostos, obviamente os resultados teriam que ser muito próximos. É apenas uma tautologia útil para visualizarmos a aplicação e intervalos de tempos (Gráfico 5).

3.2 TESTE COM DADOS (BACKTEST)

Para realmente entendermos como o modelo se sairia no mundo real, é necessário ver como ele teria se saído se tivesse sido aplicado no passado, ainda assim sem garantias de que teria o mesmo desempenho no futuro. Tais testes são muito comuns no mercado financeiro e são conhecidos como *Backtest*.

Para realizá-los precisamos definir alguns pressupostos. Nesse caso, iremos considerar a volatilidade (σ) e o drift (μ) como constantes no tempo, com r (taxa livre de risco) sendo o único parâmetro que varia ao longo do tempo (usando as taxas ditas no começo dessa seção), além de claro, considerar que os ativos seguem um movimento Browniano Geométrico. Devemos lembrar que o drift não é o mesmo que o retorno do ativo. Os parâmetros serão calculados a partir de um período denominado de “Período de cálculo” e o teste será feito no período posterior denominado de “Período de Teste”. O balanceamento será feito diariamente. Os detalhes de cálculo no portfólio seguindo o Critério encontram-se no Apêndice A.

Apesar de existirem bons argumentos, como já citado, para investir uma fração de f^*, por purismo à teoria original e para identificar possíveis problemas, não será usado o Critério de Kelly Fracionário.

O investidor que tivesse interesse de realizar os investimentos abaixo não seria capaz de investir diretamente nesses índices, já que são apenas referenciais e não ativos propriamente ditos. Mas há algumas opções, a primeira e menos viável, possível apenas para grandes investidores institucionais, seria replicar o índice comprando seus componentes com a fração f^* e o resto no ativo livre de risco. Outra opção seria dividir entre uma ETF representativa do índice e o ativo livre. A última opção e provavelmente mais prática, seria investir 100% do capital no ativo livre de risco e trabalhar na margem com o contrato futuro do índice. Como o contrato futuro tem um decaimento de valor pela passagem do tempo igual ao ganho de valor do ativo livre de risco (Hull, 1993), o ganho da fração f^* no ativo sem risco, seria compensado pela perda de valor do contrato futuro, tornando tal portfólio equivalente a investir parte no índice, parte no ativo sem risco. Além disso, dessa maneira só seria necessário balancear um único ativo e seria possível alavancar o ativo de risco de uma maneira fácil.

Um último detalhe que deve ser atentado é o de converter a taxa de juros anual para retorno logarítmico, através da expressão $r_{ln} = \ln(1+r)$.

Os parâmetros serão calculados da seguinte forma,

Retorno esperado diário do ativo será a média simples dos retornos logarítmicos:

$$Ret_{dia} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$$

E anual:

$$Ret_{ano} = 252\ Ret_{dia}$$

Com n número de dias da amostra, S_i valor do ativo no dia i.

A volatilidade, será o desvio padrão diário dos retornos da amostra, dado por:

$$\sigma_{dia} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - Ret_{dia})^2}$$

E anula:

$$\sigma_{ano} = \sigma_{dia}\ \sqrt{252}$$

Lembrando que o parâmetro Drift (μ) é diferente do Retorno esperado e deve ser calculado a partir do retorno esperado e da volatilidade:

$$\mu_{ano} = Ret_{ano} + \frac{{\sigma_{ano}}^2}{2}$$

Como trataremos com os parâmetros anuais, por simplificação, indicaremos os parâmetros anuais apenas por seu símbolo sem o subscrito, exceto onde especificado o contrário.

3.2.1 IBOVESPA

Nosso primeiro teste será feito com o Índice Bovespa. O IBOVESPA, principal índice de ações do mercado brasileiro, é resultado de uma carteira teórica composta dos ativos de maior liquidez na BM&FBovespa, calculado com uma base de critérios e divulgada pela mesma instituição (BM&FBovespa, 2015). Atualmente composto de 58 ações, é um bom referencial da bolsa brasileira, além de ser um portfólio bem diversificado.

O período de cálculo é de 02 de janeiro de 1995 à 30 de dezembro de 2010, um período de 16 anos. O período de estudo 03 de janeiro de 2011 a 30 de dezembro de 2015, um período de 5 anos. Os parâmetros medidos no período de cálculo foram:

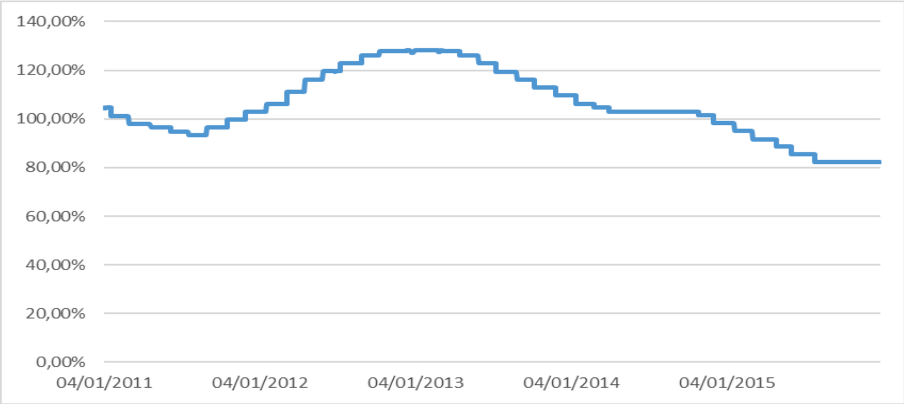
$$Ret = 17{,}68\%$$

$$\sigma = 37{,}21\%$$

$$\mu = 24{,}61\%$$

Como f^* está variando apenas com a taxa livre de risco r, temos a fração no ativo de risco no período de teste variando conforme:

GRÁFICO 6

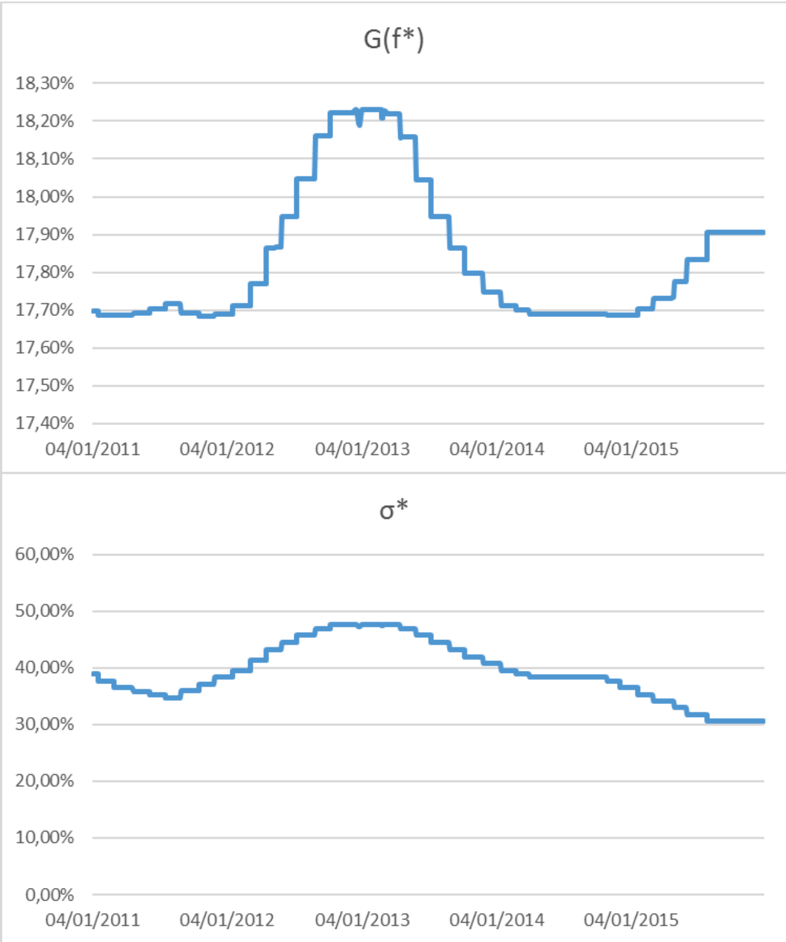


FONTE: O autor.

No gráfico 6, pode-se ver a utilidade de trabalhar com o contrato futuro na margem, já que a maior parte do tempo o portfólio encontra-se alavancado.

Os retornos esperados e volatilidades esperadas, em função do tempo, são:

GRÁFICO 7



FONTE: O autor.

Os resultados encontrados no backtest foram:

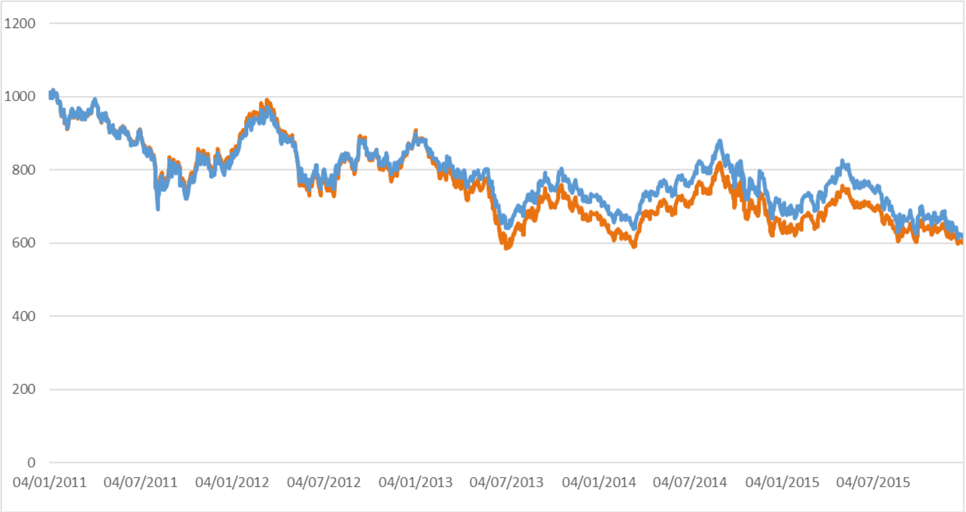
TABELA 1

IBOVESPA	Ativo	Kelly
G(.)	-9,759%	-10,408%
σ	23,135%	24,211%
μ	-7,08%	-7,48%

FONTE: O autor.

Seguindo o seguinte padrão, normatizado em 1000 no dia 04 de janeiro de 2011:

GRÁFICO 8 – VALORES DO PORTFÓLIO AO LONGO DO TEMPO, NOMATIZADO EM 1000 NO DIA 04/01/2011



FONTE: O autor.
LEGENDA: Em azul, investindo puramente no ativo. Em laranja, usando a estratégia de Kelly.

Para o período e ativo em questão, notamos que o Critério apresentou uma performance ligeiramente inferior do que o índice puramente, tendo um retorno anualizado médio 0,65 pontos percentuais menor e uma volatilidade anualizada média de 1,07 pontos percentuais maior. É importante notar que esse foi um dos maiores períodos de recessão econômica no Brasil, fazendo com que os parâmetros reais fossem muito diferentes dos estimados, produzindo um f^* estimado também diferente do real, podendo assim atribuir a isso o desempenho inferior. Como nesse caso, o portfólio se mantem boa parte do tempo próximo a 100% no ativo, as diferenças entre os resultados não foram tão grandes.

3.2.2 S&P 500

O segundo teste será feito com o índice Standard & Poor's 500, calculado e divulgado S&P Dow Jones Indices, uma joint venture da S&P Global, CME Group e News Corp. Considerado pela mídia especializada como o mais acompanhado e representativo índice da economia norte-americana (Investopedia, 2016). O S&P 500 é composto pelas 500 maiores companhias, por valor de mercado, negociadas na New York Stock Exchange ou na NASDAQ, ponderadas pelo seu valor de mercado. (S&P Global, 2016).

O período de cálculo vai de 03 de janeiro de 1995 a 31 de dezembro de 2010, 16 anos e o período de teste de 03 de janeiro de 2011 a 31 de dezembro de 2015, 5 anos. Períodos virtualmente iguais ao teste anterior. Os parâmetros obtidos no período de cálculo foram:

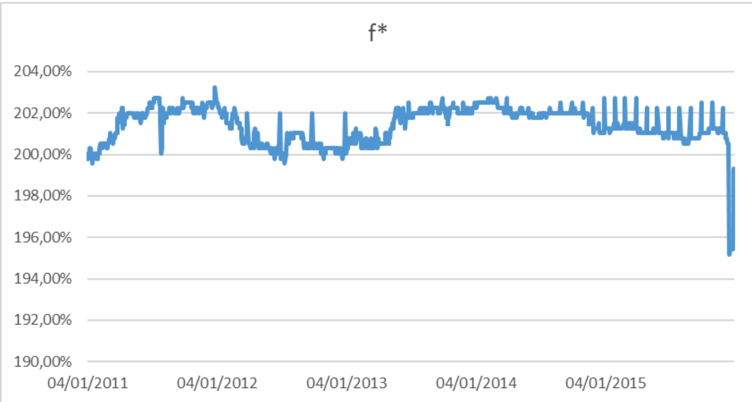
$$Ret = 6{,}30\%$$

$$\sigma = 20{,}22\%$$

$$\mu = 8{,}55\%$$

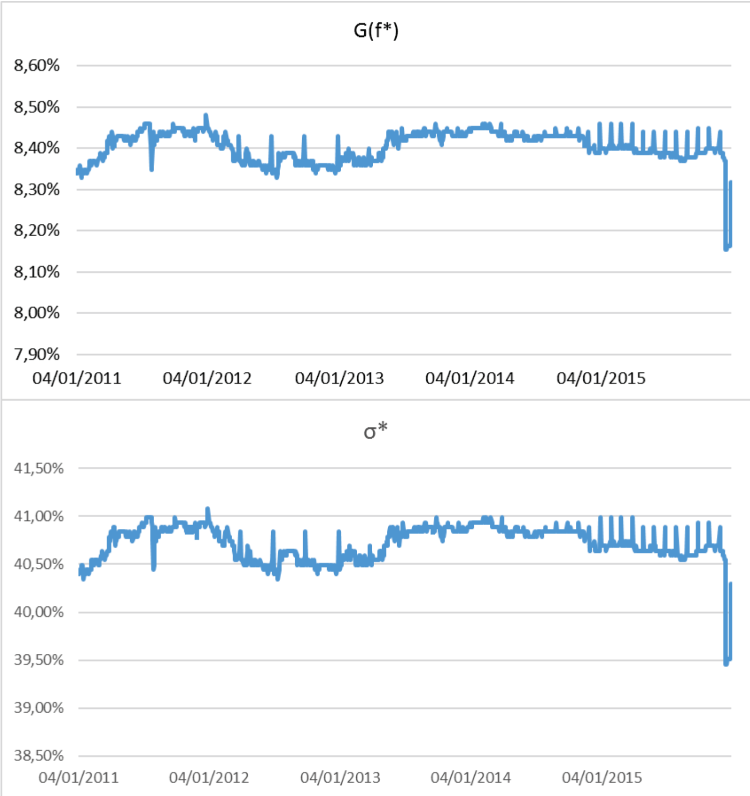
Os valores de f^*, $G(f^*)$ e σ^* calculados foram:

GRÁFICO 9



FONTE: O autor.

GRÁFICO 10



FONTE: O autor.

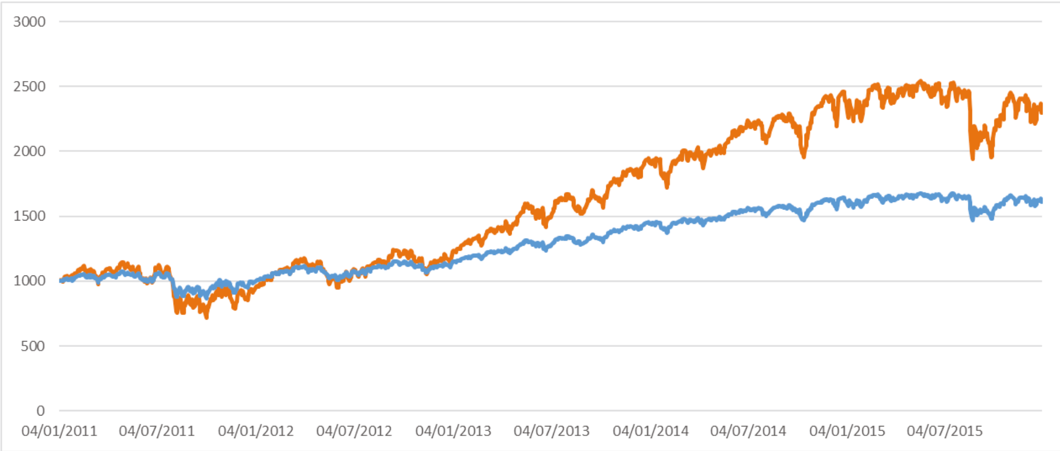
Os resultados encontrados no backtest foram:

TABELA 2

S&P 500	Ativo	Kelly
G(.)	9,510%	16,664%
σ	15,487%	31,302%
μ	10,71%	21,56%

FONTE: O autor.

Gráfico 11 – VALORES DO PORTFÓLIO AO LONGO DO TEMPO, NORMATIZADO EM 1000 NO DIA 04/01/2011.



FONTE: O autor.
LEGENDA: Em azul, investindo puramente no ativo. Em laranja, usando a estratégia de Kelly.

Para esse período, o S&P 500 teve um retorno 3,21 pontos percentual maior e uma volatilidade 4,73 pontos percentual menor do que as médias históricas, o oposto do que aconteceu no IBOVESPA. Dessa forma, a estratégia usando o Critério atingiu um retorno muito acima do esperado com uma volatilidade bem abaixo. É interessante se pensar que o Critério apesar de ter se saído melhor que o esperado, conhecendo de antemão dos reais valores dos parâmetros para o período, teríamos calculado f^* maiores e obteríamos retornos ainda maiores.

3.2.3 FTSE 100

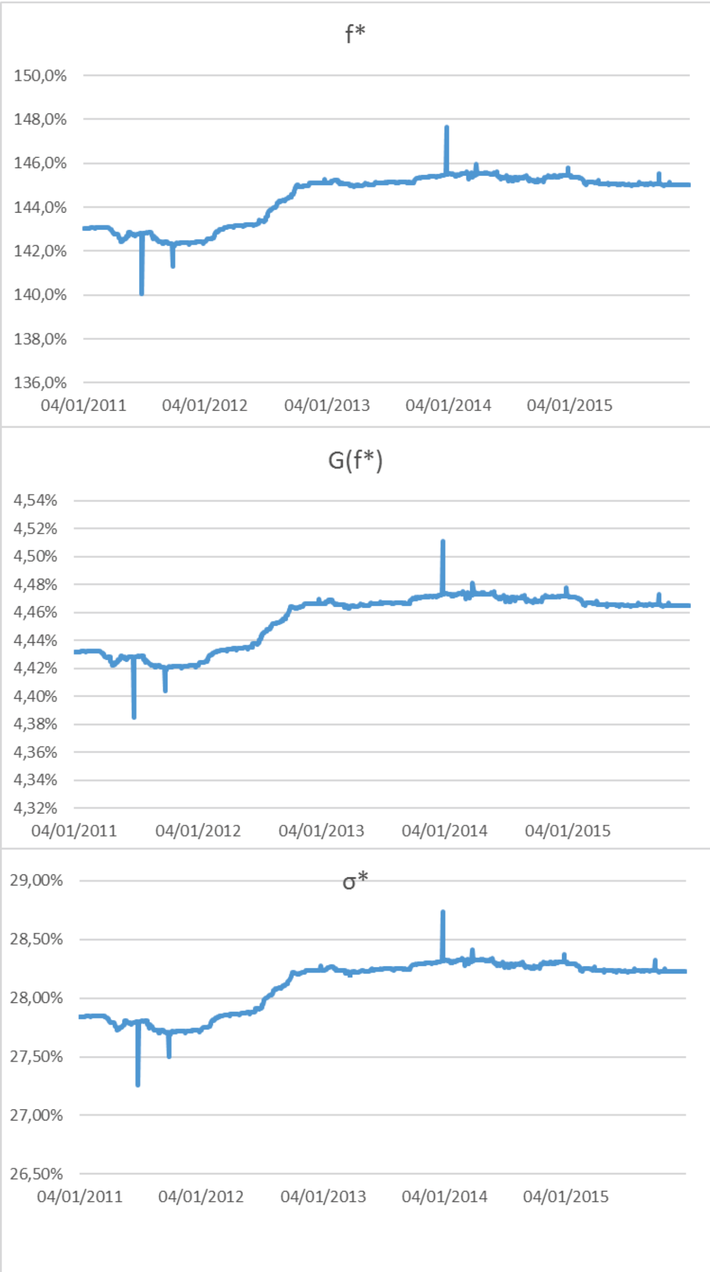
O último teste será feito com o índice FTSE 100, índice representativo da London Stock Exchange, a bolsa britânica. Composta pelas 100 maiores empresas, por valor de mercado da LSE, ponderadas por seu valor de mercado, compreende cerca de 81% da capitalização de mercado de toda a LSE. (FTSE, 2016).

O período de cálculo vai de 03 de janeiro de 1995 a 31 de dezembro de 2010, 16 anos e o período de teste de 03 de janeiro de 2011 a 31 de dezembro de 2015, 5 anos. O mesmo dos anteriores. Os parâmetros obtidos no período de cálculo foram:

$$Ret = 4{,}08\%$$
$$\sigma = 19{,}46\%$$
$$\mu = 5{,}97\%$$

Os valores de f^*, $G(f^*)$ e σ^* calculados foram:

GRÁFICO 12



FONTE: O autor.

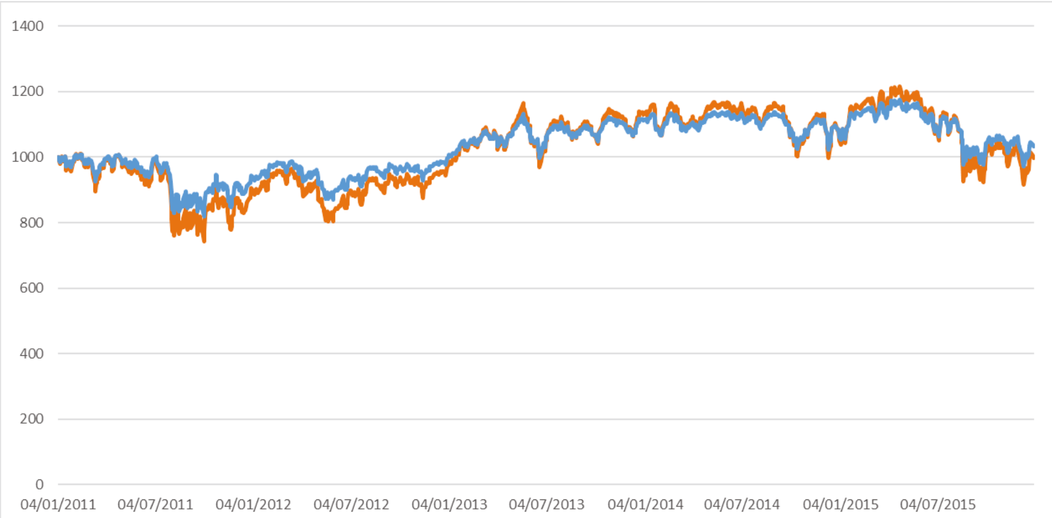
Os resultados encontrados no backtest foram:

TABELA 3

FTSE100	Ativo	Kelly
G(.)	0,75%	-0,03%
σ	15,62%	22,51%
μ	1,97%	2,50%

FONTE: O autor.

GRÁFICO 13 – VALORES DO PORTFÓLIO AO LONGO DO TEMPO, NORMATIZADO EM 1000 NO DIA 04/01/2011.



FONTE: O autor.
LEGENDA: Em azul, investindo puramente no ativo. Em laranja, usando a estratégia de Kelly.

O caso do FTSE 100 foi muito parecido com o do IBOVESPA onde o parâmetro verdadeiro de μ no período foi inferior que o projetado e a estratégia de Kelly teve uma performace inferior que o benchmark.

4 CONCLUSÕES

Do ponto de vista teórico, para o investidor que deseja maximizar seu retorno no longo prazo, o Critério de Kelly é a melhor estratégia para decidir quanto do capital será investido no ativo, ou portfólio de ativos, de risco e quanto no ativo livre de risco. Demonstramos que com essa estratégia, na média, ele obterá o maior retorno possível sem, teoricamente, ir a falência, apesar poder obter retornos negativos consideráveis.

Outra vantagem desse modelo é a sua simplicidade de cálculo, limitada a uma álgebra simples. Sua aplicação prática também é simplificada, sendo necessário transacionar apenas um ou dois ativos, o que diminui os custos de corretagem, de spread e minimiza riscos de liquidez

Apesar do modelo aplicado ao mercado financeiro ter pressupostos relevantes e que podem não ser compatíveis com a realidade, são os mesmos de outros modelos como o de Média-Variância de Markowitz, com a vantagem em relação a esse de utilizar um parâmetro incerto a menos, a correlação entre ativos, um parâmetro notadamente instável (Taleb, 1997), diminuindo o risco de modelo e o risco de parâmetros. Ou seja, o Critério de Kelly é mais robusto que o modelo de Média-Variância.

O Critério de Kelly também é mais abrangente que outros modelos. Esse trabalho focou apenas no buy-and-hold, aquele que compra os ativos para mantê-los no longo prazo, mas ele pode ser usado por uma infinidade de estratégias como long-short, arbitragem estatística, análise técnica ou qualquer outra estratégia que o investidor acredita ter um retorno positivo e que possa ser obtido os parâmetros necessários.

Quando entramos nos testes históricos, podemos identificar seus problemas no mundo real. Um problema comum nos modelos e estratégias do mercado financeiro é de não haver qualquer garantia de que dados passados possam prever o futuro, por mais que um parâmetro tenha se mantido igual em todo o passado, ele pode mudar. Vemos que esses parâmetros também não são estáveis no tempo. Em momentos de grande volatilidade onde o investidor que tivesse utilizado uma volatilidade menor que a real como parâmetro, ele incorreria em perdas ou ganhos inferiores aos esperados, por outro lado em momentos de baixa volatilidade, com a entrada do parâmetro de volatilidade menor que a real, o investidor estaria investindo menos do que deveiria no ativo de risco, tendo retornos inferiores aos permitidos pelo modelo.

Por estarmos trabalhando com uma variável estocástica, mesmo que os parâmetros sejam estáveis no longo prazo, no curto prazo os parâmetros estimados podem ser diferentes, fazendo a estratégia ter uma performance inferior à prevista. Como foi o caso do teste do S&P 500, onde a estratégia começou se saindo pior, até conseguir ultrapassar o ativo sozinho. Como a superioridade da estratégia é assintótica com o tempo, é necessario que o investidor esteja disposto a manter o Critério por longos períodos para poder usufruir das vantagens, lembrando que ainda assim existe a possiblidade de alcançar uma performance inferior.

No entanto, quando aplicado na pratica seguindo a metodologia desse trabalho, fica um pouco dúbil a vantagem de se utilizar o Kelly, ainda mais se lembrarmos que não foram levados em contas os custos transacionais. Deixo, então sugestões de pesquisas futuras que podem ser feitas para tentar aprimorar sua aplicação:

Ao relaxar a hipótese de estabilidade dos parâmetros no modelo Browniano Geométrico, podemos aceitar que parâmetros variando no tempo e utilizar métodos para estimá-los continuamente, como o GARCH (Engel, 2001) e a volatilidade implícita das opções para o parametro σ e métodos bayesianos e opiniões do investidor para estimação do retorno e μ. Se tais métodos realmente tiverem maiores capacidade de previsão, espera-se que se usados no Critério produzam resultados melhores e mais próximos das expectativas.

Em finanças, quando um investidor deseja não correr um determinado risco ele faz o *hedge* de sua posição, ou seja, assume outros investivementos que sejam impactados contrariamente por esse risco de forma que no total seu portfólio não seja, ou seja pouco, afetado por esse risco específico. A mudança no valor de um portfólio resultado em mudanças na volatilidade é conhecido como *vega*, portfólios com *vega* positivos ganham com uma maior volatilidade, opções *out of the money* são um exemplo. Como o Critério é prejudicado por aumentos não esperados na volatilidade talvez seja possível utilizar de forma dinâmica opções *out of the money* para mitigar ou diminuir esse risco.

Para o leitor interessado, só encontrei um único trabalho que expande o modelo para portfólios multivariados (com vários ativos de risco). Escrito por Nekrasov (2014), apresenta um modelo de solução fechada para aplicação do Critério de Kelly para vários ativos e soluções algorítmicas para Kelly fracionário e com restrições.

Talvez seja uma mudança de paradigma esperando para acontecer ou apenas mais um modelo no ecossistema das finanças quantitativas. Pela ausência de pesquisa nesse tema no Brasil e falta de testes empíricos na litereatura geral, achei interessante introduzir esse tema no país analisando dados reais.

REFERÊNCIAS

BACHELIER, Louis. Louis Bachelier's theory of speculation: the origins of modern finance. Princeton University Press, 2011.

BACHELLIER, Louis. Theory of speculation. The random character of stock market prices, 1900.

BCB. Dados Diarios. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/htms/selic/selicdiarios.asp>. Acesso em 01 nov. 2016

BM&FBovespa. Metodologia do Índice Bovespa. 2015 Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/indices/indices-amplos/indice-bovespa-ibovespa.htm>. Acesso em 04 nov. 2016)

DAVIS, Mark HA. Louis Bachelier's "Theory of Speculation". Imperial College, 1993. (http://f-origin.hypotheses.org/wp-content/blogs.dir/1596/files/2014/12/Mark-Davis-Talk.pdf).

DURRETT, Rick. Probability: theory and examples. Cambridge university press, 2010.

EINSTEIN, Albert. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Annalen der physik, v. 322, n. 8, p. 549-560, 1905.

ELTON, Edwin J. et al. Modern portfolio theory and investment analysis. John Wiley & Sons, 2009.

Federal Reserve Bank of St. Louis. Effective Federal Funds Rate. Disponível em: <https://https://fred.stlouisfed.org/series/FEDFUNDS>. Acesso em 01 nov. 2016b

Federal Reserve Bank of St. Louis. Overnight London Interbank Offered Rate (LIBOR), based on British Pound©. Disponível em: <https://fred.stlouisfed.org/series/GBPONTD156N>. Acesso em 01 nov. 2016a

FTSE Russel. FTSE 100 Index. 2016. Disponível em: <http://www.ftse.com/Analytics/FactSheets/temp/90390136-9fdd-4372-a777-cb0295af16e7.pdf>. Acesso em 04 de nov. 2016

http://www.moneychimp.com/features/market_cagr.htm Acesso em 27/10/2016

HULL, John C. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall, 1992.

HULL, John. C. Options, Futures, and Other Derivative Securities. 1993.

Investopedia. Standard & Poor's 500 Index - S&P 500.Disponível em: <http://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>. Acesso em 04 nov. 2016)

KAHNEMAN, Daniel. Rápido e devagar: duas formas de pensar. Editora Objetiva, 2012.

KELLY, John. A new interpretation of information rate. IRE Transactions on Information Theory, v. 2, n. 3, p. 185-189, 1956.

Knibbs, Kate. The Hustler Origins of Wearable Computers. Disponível em: <http://gizmodo.com/casinos-and-con-men-the-hustler-origins-of-wearable-co-1718085809>. Acesso em 09 dez. 2016

MACLEAN, Leonard C.; THORP, Edward O.; ZIEMBA, William T. Long-term capital growth: the good and bad properties of the Kelly and fractional Kelly capital growth criteria. Quantitative Finance, v. 10, n. 7, p. 681-687, 2010.

MACLEAN, Leonard C.; ZIEMBA, William T. Growth versus security tradeoffs indynamic investment analysis. Annals of Operations Research, v. 85, p. 193-225, 1999.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. The journal of finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

NEKRASOV, Vasily. Kelly Criterion for Multivariate Portfolios: A Model-Free Approach. Available at SSRN 2259133, 2014.

OKSENDAL, Bernt. Stochastic differential equations: an introduction with applications. Springer Science & Business Media, 2013.

POUNDSTONE, William. Fortune's Formula: The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and wall street. Macmillan, 2010.

ROSS, Sheldon M. Introduction to probability models. Academic press, 2014.

S&P Global. Equity S&P 500. 2016. Disponível em: <http://www.spindices.com/idsenhancedfactsheet/file.pdf?calcFrequency=M&force_download=true&hostIdentifier=48190c8c-42c4-46af-8d1a-0cd5db894797&indexId=340>. Acesso em 04 de nov. 2016

SAMUELSON, Paul A. The “fallacy” of maximizing the geometric mean in long sequences of investing or gambling. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 68, n. 10, p. 2493-2496, 1971.

SAMUELSON, Paul A. Why we should not make mean log of wealth big though years to act are long. Journal of Banking & Finance, v. 3, n. 4, p. 305-307, 1979.

TALEB, Nassim. Dynamic hedging: managing vanilla and exotic options. John Wiley & Sons, 1997.

Terminal Bloomberg - Multiplos Acessos

THORP, Edward O. The Kelly criterion in blackjack, sports betting and the stock market. Handbook of asset and liability management, v. 1, p. 385, 2006.

THORP, Edward O.; KASSOUF, Sheen T. Beat the market. New York: Random, 1967.

WIENER, Norbert. Differential-Space. Journal of Mathematics and Physics, v. 2, n. 1, p. 131-174, 1923.

Ziemba, William T. Luck of the draw. Wilmott Magazine, 2001

APÊNDICE 1

- Simulando o Movimento Browniano Geométrico no Excel

Para gerarmos uma série que siga o GBM partiremos da função que define tal movimento:

$$S_t = S_{t-1}e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

Onde S_{t-1} e S_t são respectivamente os valores nos tempos t e t-1. μ e σ são drift e volatilidade, t é o intervalo de tempo. E W_t, um processo de Wiener:

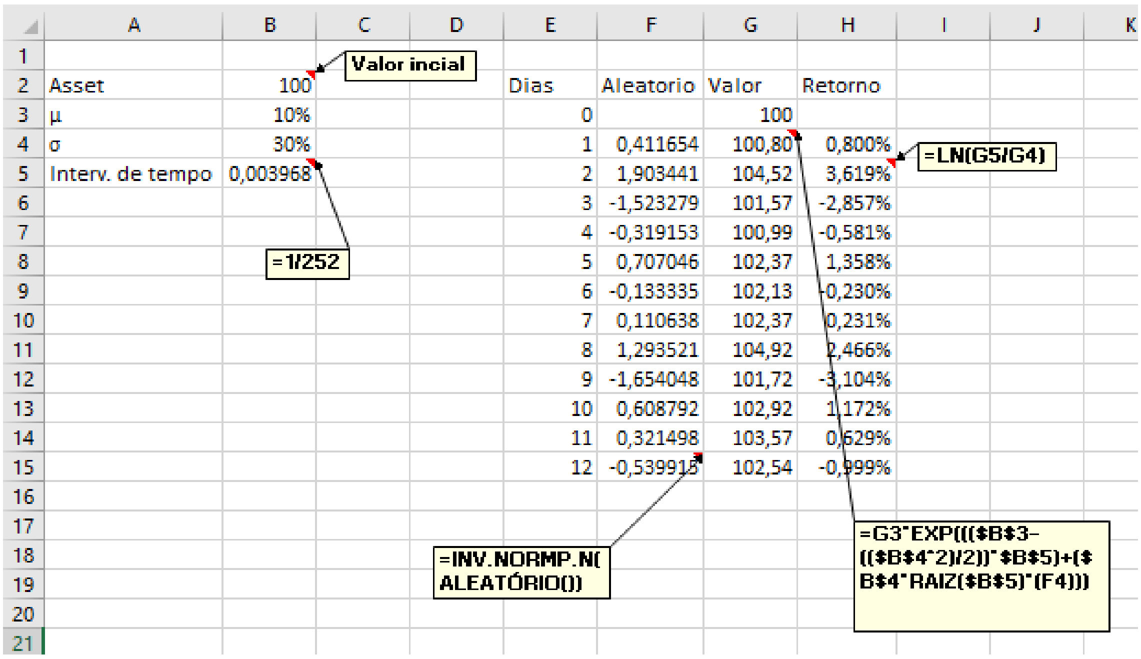
$$W_t = \varepsilon\sqrt{t}$$

Onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal com média 0 e desvio padrão igual a 1.

Como simularemos dia a dia e temos os parâmetros anuais, t é igual a 1/252 (0,003968). Para gerarmos números aleatórios com distribuição normal padrão, usaremos a duas funções juntas, “=INV.NORMP.N(ALEATÓRIO())”.

Temos então:

FIGURA 1



	A	B	E	F	G	H
1						
2	Asset	100	Dias	Aleatorio	Valor	Retorno
3	µ	10%	0		100	
4	σ	30%	1	0,411654	100,80	0,800%
5	Interv. de tempo	0,003968	2	1,903441	104,52	3,619%
6			3	-1,523279	101,57	-2,857%
7			4	-0,319153	100,99	-0,581%
8			5	0,707046	102,37	1,358%
9			6	-0,133335	102,13	-0,230%
10			7	0,110638	102,37	0,231%
11			8	1,293521	104,92	2,466%
12			9	-1,654048	101,72	-3,104%
13			10	0,608792	102,92	1,172%
14			11	0,321498	103,57	0,629%
15			12	-0,539915	102,54	-0,999%

FONTE: O autor.

- Simulando o Critério de Kelly com balanceamento diário no Excel

Simular a aplicação do Critério é um processo simples. Segue um processo iterativo com os seguintes passos:

1. Partir de um capital inicial.
2. Dividir entre o ativo de risco e o ativo livre de risco, segundo o Critério.
3. Aplicar o retorno do ativo na parte do ativo de risco.
4. Aplicar a taxa de juros de um dia na parte do ativo livre de risco.
5. Somar as duas partes.
6. Voltar para o item 1.

No Excel teremos:

FIGURA 2

	A	B	C	E	F	H	I	J	K	L
1	Asset	100								
2	μ	10%								
3	σ	30%						Portfolio		
4		Juros	f*	Ativo	Retorno	Ativo Risco	Ativo livre	Total	Ativo Risco	Ativo livre
5	0	5,00%	55,56%	R$ 100,00				R$ 100,00	R$ 55,56	R$ 44,44
6	1	5,10%	54,44%	R$ 98,91	-1,10%	R$ 54,95	R$ 44,45	R$ 99,40	R$ 54,12	R$ 45,28
7	2	5,20%	53,33%	R$ 100,01	1,10%	R$ 54,72	R$ 45,29	R$ 100,01	R$ 53,34	R$ 46,67
8	3	5,30%	52,22%	R$ 98,64	-1,38%	R$ 52,61	R$ 46,68	R$ 99,29	R$ 51,85	R$ 47,44
9	4	5,20%	53,33%	R$ 98,31	-0,33%	R$ 51,68	R$ 47,45	R$ 99,13	R$ 52,87	R$ 46,26
10	5	5,00%	55,56%	R$ 97,99	-0,33%	R$ 52,69	R$ 46,27	R$ 98,97	R$ 54,98	R$ 43,98
11	6	4,80%	57,78%	R$ 98,33	0,35%	R$ 55,17	R$ 43,99	R$ 99,17	R$ 57,30	R$ 41,87
12	7	4,60%	60,00%	R$ 97,63	-0,72%	R$ 56,89	R$ 41,88	R$ 98,77	R$ 59,26	R$ 39,51
13	8	4,50%	61,11%	R$ 100,51	2,91%	R$ 61,01	R$ 39,51	R$ 100,52	R$ 61,43	R$ 39,09
14	9	4,50%	61,11%	R$ 99,87	-0,64%	R$ 61,04	R$ 39,10	R$ 100,13	R$ 61,19	R$ 38,94
15	10	4,60%	60,00%	R$ 100,06	0,20%	R$ 61,31	R$ 38,95	R$ 100,26	R$ 60,16	R$ 40,10
16	11	4,80%	57,78%	R$ 99,35	-0,71%	R$ 59,73	R$ 40,11	R$ 99,84	R$ 57,69	R$ 42,16
17	12	4,90%	56,67%	R$ 97,72	-1,65%	R$ 56,74	R$ 42,16	R$ 98,91	R$ 56,05	R$ 42,86

=(B2-B17)/(B3^2)

=LN(E17/E16)

=K16*EXP(F17)

=L16*EXP(B17/252)

=SOMA(H17:I17)

Valor do portfolio no tempo

=J17*C17

=J17-K17

FONTE: O autor.