

RICARDO SCHUMACHER

**Identificação de sistemas via bases de funções
racionais e métodos iterativos baseados em
variáveis instrumentais**

Curitiba

2017

RICARDO SCHUMACHER

Identificação de sistemas via bases de funções racionais e métodos iterativos baseados em variáveis instrumentais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Sistemas de Energia, Departamento de Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira

Curitiba

2017

S392i

Schumacher, Ricardo

Identificação de sistemas via bases de funções racionais e métodos iterativos baseados em variáveis instrumentais / Ricardo Schumacher. – Curitiba, 2017.

134 f ; il. color : 30 cm.

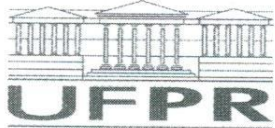
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2017.

Orientador: Gustavo Henrique da Costa Oliveira .

Bibliografia: p. 131-134.

1. Sistemas de energia elétrica. 2. Variáveis (Matemática). 3. Funções (Matemática). Métodos iterativos (Matemática). I. Universidade Federal do Paraná. II. Oliveira, Gustavo Henrique da Costa. III. Título.

CDD: 621.31



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor TECNOLOGIA
Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA ELÉTRICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA ELÉTRICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **RICARDO SCHUMACHER** intitulada: **Identificação de sistemas via bases de funções racionais e métodos iterativos baseados em variáveis instrumentais**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua

APROVAÇÃO

Curitiba, 21 de Fevereiro de 2017.

GUSTAVO HENRIQUE DA COSTA OLIVEIRA
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

ROMAN KUIAVA
Avaliador Interno (UFPR)

GIDEON VILLAR LEANDRO
Avaliador Interno (UFPR)

LUCIA VALÉRIA RAMOS DE ARRUDA
Avaliador Externo (UFPR)

À Jennifer

Agradecimentos

À Deus, por me confortar nos momentos difíceis.

Ao professor Gustavo Henrique da Costa Oliveira, pela orientação, confiança e motivação.

Aos demais professores e funcionários da Universidade Federal do Paraná (UFPR) que durante a minha graduação e pós-graduação, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal.

À Jennifer, aos meus pais Diniz e Maria José e ao meu irmão Klaus.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

Resumo

A identificação de sistemas está presente em diversas áreas da engenharia onde um modelo matemático altamente preciso é exigido. Embora diferentes tipos de estruturas de modelo possam ser usadas para identificação de sistemas lineares invariantes no tempo (OE, ARX, BJ, ARMAX, por exemplo), o caso particular que considera a utilização de bases de funções racionais (BFR) tem sido bastante investigado nos últimos anos. Modelos baseados em BFRs podem ser considerados como uma representação alternativa para a estrutura OE convencional e são essencialmente constituídos pela combinação linear de funções racionais de uma determinada base. As seguintes bases são aqui estudadas: funções do tipo polo-resíduo, funções ortonormais de Takenaka-Malmquist e funções de frequência localizada. Neste trabalho é proposto um método unificado para construção dessas bases no espaço de estados. Além disso, um novo conjunto de funções de frequência localizada para o caso de polos complexos conjugados é também proposto. Com relação à estimação dos parâmetros do modelo, este trabalho considera diferentes técnicas para identificação em ambos os domínios: tempo e frequência. No domínio do tempo, esta pesquisa propõe um novo procedimento baseado nas iterações de Steiglitz-McBride. Tal proposta é então estendida usando variáveis instrumentais. No domínio da frequência, uma formulação equivalente baseada em variáveis instrumentais e nas iterações de Sanathanan-Koerner é também proposta. Com base nos estudos de caso avaliados, é possível concluir que a utilização das funções ortonormais de Takenaka-Malmquist resulta em modelos precisos ao mesmo tempo em que o algoritmo de identificação se mantém com matrizes melhor condicionadas numericamente. Ressalta-se que um desses estudos de caso trata da modelagem de um sistema de potência implementado no *software* EMTP-RV, enquanto outro estudo de caso considera ainda dados reais extraídos de um transformador de potência.

Palavras-chave: identificação de sistemas. bases de funções racionais. variáveis instrumentais. iterações de Sanathanan-Koerner. iterações de Steiglitz-McBride.

Abstract

System identification is present in several areas of engineering where a highly accurate mathematical model is required. Although many different types of model structures may be used for linear time invariant system identification (OE, ARX, BJ, ARMAX, for instance), the particular case of using rational basis functions (RBF) has been intensively investigated in recent years. RBF-based models can be considered as an alternative output-error (OE) representation and are essentially composed by a linear combination of rational functions that belong to a certain basis. The following bases are here studied: pole-residue type functions, Takenaka-Malmquist orthonormal functions and frequency localizing functions. In this work it is proposed a unifying method for constructing such bases by using state-space realizations. Moreover, a new set of frequency localizing functions for the case of complex conjugate poles is also proposed. Concerning the estimation of the model parameters, this work addresses (different) techniques for both time and frequency domain identification. In the time domain, this research proposes a novel procedure based on the Steiglitz-McBride iteration. Such proposal is then extended by using instrumental variables. In the frequency domain, an equivalent instrumental variable formulation based on the Sanathanan-Koerner iteration is also proposed. Based on the case studies evaluated, it is possible to conclude that the use of Takenaka-Malmquist orthonormal functions results in accurate models at the same time the identification algorithm remains with matrices that are better numerically-conditioned. It is noteworthy that one of these case studies deals with the modeling of a power system implemented in the EMTP-RV environment, whereas another case study considers actual data extracted from a power transformer.

Keywords: system identification. rational basis functions. instrumental variables. Sanathanan-Koerner iterations. Steiglitz-McBride iterations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de resposta ao impulso que tende à zero com o tempo.	34
Figura 2 – Conexão em cascata dos n filtros de primeira ordem $L(\alpha, a_i)$	39
Figura 3 – Filtro $L(\alpha, a_i)$ representado na forma de espaço de estados.	40
Figura 4 – Algoritmo resumido referente as iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs.	81
Figura 5 – Sistema de 3ª Ordem: Dados de estimação.	87
Figura 6 – Polos iniciais em $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$	87
Figura 7 – Modelos de 3ª ordem com polos iniciais $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$: EQM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	88
Figura 8 – Modelos de 3ª ordem com polos iniciais $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$: Condicionamento numérico (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	89
Figura 9 – Modelos de 3ª ordem com polos iniciais $\{0; 0; 0\}$: EQM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	89
Figura 10 – Sistema Braço Robótico: EQM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	90
Figura 11 – Sistema Braço Robótico: Condicionamento numérico (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	91
Figura 12 – Sistema Braço Robótico: Saídas dos modelos SM e SM-BFO para os dados de validação.	92
Figura 13 – Sistema de Potência Monofásico.	92
Figura 14 – Resposta do Sistema de Potência Monofásico quando este é alimentado por um degrau unitário de tensão (curva superior) ou por um degrau unitário de corrente (curva inferior).	93
Figura 15 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de tensão: EQM e condicionamento numérico na última iteração do processo de estimação dos modelos.	93

Figura 16 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de tensão: Saídas dos modelos SM-VI e SM-BFO-VI considerando modelos de ordem 25.	94
Figura 17 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de corrente: EQM e condicionamento numérico na última iteração do processo de estimação dos modelos.	95
Figura 18 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de corrente: Saídas dos modelos SM e SM-BFO considerando modelos de ordem 25.	95
Figura 19 – Algoritmo resumido referente as iterações de Sanathanan-Koerner aplicadas a modelos formados por BFRs.	114
Figura 20 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano filtrado: EAQPM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	121
Figura 21 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano filtrado: Resposta em frequência do sistema e dos modelos.	121
Figura 22 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano filtrado: Condicionamento numérico (por iteração) no processo de estimação dos modelos.	122
Figura 23 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano: Resposta em frequência do sistema e dos modelos.	123
Figura 24 – Sistema Transformador de Potência: EAQPM e condicionamento numérico na última iteração do processo de estimação dos modelos	124
Figura 25 – Sistema Transformador de Potência: Resposta em frequência do sistema e dos modelos SK-VI, SK-BFO-VI e SK-BFFL-VI considerando modelos de ordem 10.	125

Lista de abreviaturas e siglas

ARMAX	Estrutura de modelo auto-regressivo de média móvel com entradas exógenas, do inglês, <i>AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs</i>
ARX	Estrutura de modelo auto-regressivo com entradas exógenas, do inglês, <i>AutoRegressive with eXogenous inputs</i>
BJ	Estrutura de modelo do tipo B ox J enkins
BFR	B ase de F unções R acionais
EAQPM	E rro A bsoluto Q uadrático P onderado M édio
EQM	E rro Q uadrático M édio
FIR	Resposta finita ao impulso, do inglês, <i>Finite Impulse Response</i>
MEP	M étodos de E rro de P revisão
OE	Estrutura de modelo do tipo erro na saída, do inglês, <i>Output Erro</i>
SIN	S istema I nterligado N acional

Lista de símbolos

$U(\alpha)$	Entrada escalar de um sistema linear invariante no tempo.
$Y(\alpha)$	Saída escalar de um sistema linear invariante no tempo.
$G(\alpha)$	Função de transferência de um dado sistema linear invariante no tempo não perturbado.
α	Define se a representação do sistema é dada no tempo contínuo ($\alpha = s$) ou no tempo discreto ($\alpha = z$).
n	Número de funções racionais usadas no modelo. n também define a ordem do modelo BFR.
$\Phi_i(\alpha)$	i -ésima função racional do modelo.
$\bar{\Phi}_i(\alpha)$	i -ésima função racional simplificada do modelo.
a_i	i -ésimo polo que parametriza o conjunto de funções racionais $\{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1}^n$.
\mathbf{a}	Conjunto de polos que parametriza as funções racionais do modelo, ou seja, $\{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1}^n$.
\mathbf{A}	Matriz de estado com dimensão $n \times n$.
\mathbf{B}	Matriz de entrada com dimensão $n \times 1$.
\mathbf{C}	Matriz de saída com dimensão $1 \times n$.
\mathbf{D}	Matriz de transmissão direta com dimensão 1×1 .
$\mathbf{X}(\alpha)$	Vetor de estados com dimensão $n \times 1$.
\mathbf{I}	Matriz identidade com dimensão $n \times n$.
\mathcal{S}	Representa um dado sistema linear invariante no tempo.

$u_0(k)$	Entrada escalar de um sistema linear invariante no tempo representado no tempo discreto.
$y_0(k)$	Saída escalar de um sistema linear invariante no tempo representado no tempo discreto.
$v(k)$	Perturbação não controlável (ruído) presente na saída medida $y_0(k)$.
q	Operador avanço.
θ	Vetor de parâmetros que define a estrutura de modelo $G(\cdot, \theta)$.
$G(\cdot, \theta)$	Estrutura de modelo formada pela razão entre dois polinômios.
D_G	Conjunto de modelos obtido variando-se θ na estrutura $G(\cdot, \theta)$.
D_θ	Conjunto formado por todos os valores possíveis para θ .
θ^*	Vetor de parâmetros capaz de minimizar a função objetivo $V(\theta)$.
N	Número de amostras do conjunto de dados.
$V(\theta)$	Função objetivo cujo valor mínimo é obtido quando $\theta = \theta^*$.
$\hat{\theta}$	Valor estimado para θ^* .
t	Iteração atual do processo iterativo.
$\hat{\theta}^{(t)}$	Valor estimado para θ^* na iteração t (usando a formulação iterativa padrão).
$\hat{\theta}_{VI}^{(t)}$	Valor estimado para θ^* na iteração t (usando a formulação iterativa baseada em variáveis instrumentais).
λ	Vetor de parâmetros que define a estrutura de modelo BFR $G(\cdot, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})$.
$G(\cdot, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})$	Estrutura de modelo formada pelo conjunto de funções racionais $\{\Phi_i(\cdot, \mathbf{a}^{\text{esp}})\}$.
D_λ	Conjunto formado por todos os valores possíveis para λ .

λ^*	Vetor de parâmetros capaz de minimizar a função objetivo $V(\lambda)$.
$V(\lambda)$	Função objetivo cujo valor mínimo é obtido quando $\lambda = \lambda^*$.
$\hat{\lambda}^{(t)}$	Valor estimado para λ^* na iteração t (usando a formulação iterativa baseada em BFRs).
$\hat{\lambda}_{VI}^{(t)}$	Valor estimado para λ^* na iteração t (usando a formulação iterativa baseada em BFRs e variáveis instrumentais).

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Modelos formados por bases de funções racionais (BFRs)	24
1.2	Estimação iterativa de parâmetros nos domínios do tempo e frequência	27
1.3	Objetivo geral e contribuições da pesquisa	29
1.4	Estrutura do trabalho	31
2	BASES DE FUNÇÕES RACIONAIS	33
2.1	Introdução	33
2.2	Metodologia unificada para construção de BFRs	38
2.2.1	Resumo	44
2.3	Obtendo BFRs conhecidas a partir da metodologia unificada	46
2.3.1	Bases no tempo discreto ($\alpha = z$)	46
2.3.1.1	Funções do tipo polo-resíduo	46
2.3.1.2	Funções ortonormais de Takenaka-Malmquist	51
2.3.2	Bases no tempo contínuo ($\alpha = s$)	54
2.3.2.1	Funções do tipo polo-resíduo	54
2.3.2.2	Funções ortonormais de Takenaka-Malmquist	55
2.3.2.3	Funções de frequência localizada	61
2.4	Considerações finais do capítulo	65
3	IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	67
3.1	Definição do problema de identificação	67
3.2	As iterações de Steiglitz-McBride para identificação no domínio do tempo	70
3.2.1	Formulação usando variáveis instrumentais	72
3.3	Procedimento iterativo usando BFRs	75

3.3.1	Formulação usando variáveis instrumentais	81
3.3.1.1	Cálculo aproximado do vetor de instrumentos $\mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{VI}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$	84
3.4	Testes e análise dos resultados	85
3.4.1	Estudo de caso 1: Sistema de 3ª Ordem	86
3.4.2	Estudo de caso 2: Braço Robótico	90
3.4.3	Estudo de caso 3: Sistema de Potência Monofásico	91
3.5	Considerações finais do capítulo	96
3.6	Apêndice do Capítulo - Modelos em espaço de estados resultantes .	97
4	IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	99
4.1	Definição do problema de identificação	99
4.2	As iterações de Sanathanan-Koerner para identificação no domínio da frequência	102
4.2.1	Formulação usando variáveis instrumentais	105
4.3	Procedimento iterativo usando BFRs	108
4.3.1	Formulação usando variáveis instrumentais	113
4.3.1.1	Cálculo aproximado do vetor de instrumentos $\mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{VI}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$	117
4.4	Testes e análise dos resultados	118
4.4.1	Estudo de caso 4: Sistema de 5ª Ordem	119
4.4.2	Estudo de caso 5: Transformador de potência	123
4.5	Considerações finais do capítulo	125
5	CONCLUSÕES	127
5.1	Trabalhos futuros	128
	REFERÊNCIAS	131

1 Introdução

A obtenção de modelos faz parte da vida humana há milhares de anos. Quando uma criança aprende a andar, por exemplo, seu cérebro desenvolve um modelo mental capaz de relacionar noções de equilíbrio, distância e coordenação motora. Ainda que a natureza dos modelos varie bastante, em diversas circunstâncias cotidianas o interesse está voltado para obtenção de modelos matemáticos que buscam descrever o comportamento dinâmico de sistemas.

Dessa maneira, em diversas áreas da engenharia exige-se modelos matemáticos que representem um determinado processo físico. Tais modelos podem ser aplicados, por exemplo, no projeto e implementação de novos processos, na compreensão de processos já existentes, no projeto de sistemas de controle e em estudos envolvendo estabilidade de sistemas (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999; ÅSTRÖM, 1996; KUNDUR, 1994). Ao mesmo tempo em que modelos mais precisos são exigidos por diversas aplicações, o aumento da capacidade de processamento dos computadores nas últimas décadas tem permitido que algoritmos cada vez mais complexos para obtenção de modelos matemáticos sejam construídos e simulados.

Existem, em princípio, duas maneiras para se construir modelos matemáticos: a modelagem física e a identificação de sistemas (AGUIRRE, 2007; LJUNG; GLAD, 1994). Na modelagem física, também denominada de modelagem caixa branca, modelos matemáticos são obtidos fazendo-se uso do conhecimento acerca das leis físicas que descrevem o processo. O modelo para um motor de corrente contínua, por exemplo, pode ser obtido utilizando-se princípios de mecânica clássica e eletricidade. Por outro lado, a identificação de sistemas, também conhecida por modelagem caixa preta ou cinza, desempenha um papel fundamental em casos onde se tem pouco (caixa cinza) ou nenhum (caixa preta) conhecimento sobre os fenômenos físicos envolvidos no processo, porém, dados de entrada e saída do processo estão disponíveis para medição. Dessa forma, pode-se dizer que a identificação de sistemas está baseada na experimentação, visando assim construir modelos matemáticos a partir de

dados extraídos do processo.

Uma forma de se classificar os métodos de identificação de sistemas consiste em dividi-los em (i) identificação no domínio do tempo, quando o conjunto de dados é composto por uma sequência de amostras discretizadas no tempo, e (ii) identificação no domínio da frequência, quando o conjunto de dados é composto por uma sequência de amostras discretizadas na frequência. A extração desses dados pode ocorrer de forma direta em ambos os domínios, através de uma análise temporal transitória ou através da medição da resposta em frequência do sistema. Contudo, pode-se também levar os dados de um domínio para o outro utilizando, por exemplo, identificação não-paramétrica ou a transformada (direta/inversa) de Fourier (LJUNG, 1999).

Uma vez que o conjunto de dados (no domínio do tempo ou frequência) encontra-se disponível, uma estrutura de modelo composta por parâmetros precisa ser definida, onde esses parâmetros são então cuidadosamente estimados de tal forma que a resposta do modelo torne-se suficientemente próxima da resposta real do processo físico. Por um lado, a estimação desses modelos a partir de dados no domínio da frequência pode ser aplicada, por exemplo, na análise das interações existentes entre transformadores elétricos e o sistema elétrico de potência. Em contrapartida, modelos obtidos a partir de dados no domínio do tempo podem ser diretamente aplicados na análise da resposta temporal transitória desses equipamentos.

Vale ainda ressaltar que a presente pesquisa encontra-se especialmente focada no desenvolvimento de algoritmos de identificação baseados em estruturas de modelos formadas por bases de funções racionais (BFRs).

1.1 Modelos formados por bases de funções racionais (BFRs)

Na identificação de sistemas lineares invariantes no tempo, existem diversas estruturas de modelos, como por exemplo, estruturas OE, ARX, BJ e ARMAX, cujas propriedades já encontram-se bem consolidadas na literatura (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999; VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994). Todavia, especialmente nas últimas

décadas, representações alternativas têm chamado a atenção da comunidade científica. Fundamentalmente, buscam-se estruturas que resultem em algoritmos de identificação:

- de fácil implementação computacional;
- capazes de estimar modelos rapidamente;
- confiáveis sob o ponto de vista de condicionamento numérico das matrizes envolvidas no processo de estimação dos modelos;
- capazes de estimar modelos precisos, ou seja, modelos que representam fielmente a resposta dinâmica do processo.

Buscando satisfazer essas especificações, estruturas de modelos formadas por BFRs aparecem como fortes candidatas (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016; SCHUMACHER; OLIVEIRA; MITCHELL, 2015; VOORHOEVE *et al.*, 2014; DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007; HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005; GRIVET-TALOCIA, 2003; GUSTAVSEN, 2002). Modelos formados por BFRs podem ser considerados como uma representação alternativa para a estrutura OE convencional e são essencialmente constituídos pela combinação linear de funções de uma determinada base. Assim, o conjunto de parâmetros do modelo que deve ser estimado é composto pela soma entre o conjunto de polos que parametriza essas funções racionais e o conjunto de coeficientes que multiplica cada uma das funções.

Na prática, nem todo algoritmo de identificação via BFRs é capaz de satisfazer as especificações citadas anteriormente. Na realidade, para que isso ocorra, um dos aspectos que devem ser considerados é a escolha da base de funções que compõe a estrutura de modelo.

Os modelos de resposta finita ao impulso (ou FIR, do inglês, *Finite Impulse Response*) podem ser classificados como modelos BFRs e, nesse contexto, constituem uma das bases de funções mais utilizadas (HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005). No entanto, essas funções não permitem a introdução de dinâmicas (polos) no

modelo e, sendo assim, uma grande quantidade de parâmetros no modelo é geralmente necessária para se obter uma aproximação satisfatória da resposta real do processo físico.

Em contrapartida, bases de funções mais generalizadas, como por exemplo, as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (que generalizam as funções FIR, além das chamadas funções de Laguerre e Kautz), possibilitam uma maior flexibilização e adaptação dos modelos, resultando em uma possível redução no número de parâmetros necessários para uma aproximação igualmente satisfatória (OLIVEIRA *et al.*, 2012; OLIVEIRA *et al.*, 2011; HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005). Além disso, a característica de ortonormalidade dessas funções está geralmente associada à melhoria do condicionamento numérico do algoritmo de identificação (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016; DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007). Entretanto, bases de funções racionais não-ortonormais compostas por exemplo, por funções do tipo polo-resíduo (GUSTAVSEN, 2002) ou por funções de frequência localizada (SCHUMACHER; OLIVEIRA; MITCHELL, 2015; WELSH; ROJAS, 2007; WELSH; GOODWIN, 2003), são também bastante utilizadas na identificação de sistemas via BFRs. Em especial, as funções de frequência localizada foram propostas com o intuito de, ao se perder a propriedade de ortonormalidade das funções, se chegar a uma expressão analítica que limita o condicionamento numérico do problema (WELSH; GOODWIN, 2003). Todavia, por serem definidas apenas para polos reais, essas funções acabam apresentando dificuldades na identificação de sistemas com modos de resposta oscilatórios.

Uma vez que a base racional foi escolhida, a descrição da estrutura de modelo no espaço de estados pode apresentar vantagens no que diz respeito a facilidade com que o algoritmo de identificação pode ser implementado (DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007; GUSTAVSEN, 2002). Além disso, a obtenção direta de modelos na forma de espaço de estados pode ser interessante em diversas aplicações (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016). Apesar dessas vantagens, existem diferentes metodologias para construção de BFRs conhecidas e, em princípio, cada base exige a aplicação de uma metodologia diferente para se obter uma representação correspondente no espaço de estados.

1.2 Estimação iterativa de parâmetros nos domínios do tempo e frequência

Considerando que a base de funções que compõe a estrutura foi selecionada e sua respectiva representação no espaço de estados foi construída, o próximo passo no processo de identificação consiste em estimar os coeficientes e os polos do modelo (HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005). Essencialmente, se a ordem do modelo e o conjunto de polos que parametriza a base são bem escolhidos, um modelo que aproxima precisamente a resposta do processo real pode ser encontrado estimando-se seus coeficientes, por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados linear. Entretanto, a maior dificuldade relacionada a identificação via BFRs reside justamente no fato de que, mesmo na identificação usando modelos dinâmicos lineares, o problema de otimização associado à estimação desses polos é, em princípio, não-linear em relação à essas variáveis (uma vez que os polos aparecem também no denominador das funções racionais).

Buscando resolver essa questão, técnicas de otimização não-linear podem ser usadas para estimação dos parâmetros (polos e coeficientes) do modelo. Em (REGINATO, 2008) e (REGINATO; OLIVEIRA, 2007), técnicas baseadas na otimização por nuvem de partículas são exploradas e, em (MAESTRELLI, 2010), é deduzida uma expressão analítica para o gradiente da função objetivo a ser minimizada. Contudo, técnicas de otimização não-linear podem apresentar uma convergência lenta em termos de tempo computacional, inviabilizando assim sua implementação prática em casos onde uma atualização rápida do modelo é necessária.

Por outro lado, existem métodos iterativos capazes de estimar modelos precisos rapidamente, tornando o problema de otimização originalmente não-linear em uma sequência de problemas de otimização lineares. Nesses casos, assume-se um modelo com denominador fixo a cada iteração, onde uma nova estimativa para seus polos e coeficientes é então obtida pelo método dos mínimos quadrados linear. Além disso, esses métodos apresentam estratégias eficazes e bem consolidadas na literatura no que diz respeito a seleção de suas respectivas condições (estimativas) iniciais (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016).

Com modelos representados pela razão entre dois polinômios em s , o primeiro método iterativo que surgiu nesse contexto foi proposto por [Sanathanan e Koerner \(1963\)](#), para identificação no domínio da frequência. Entretanto, somente em 1999, as iterações de Sanathanan-Koerner (como também são chamadas) passaram a ser aplicadas na estimação de modelos formados por BFRs, mais especificamente, na estimação de modelos formados por funções do tipo polo-resíduo (frações parciais), para aproximação da resposta de transformadores elétricos ([GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999](#)). Pouco tempo depois, com o propósito de melhorar o condicionamento numérico das matrizes presentes no processo iterativo, [Deschrijver, Haegeman e Dhaene \(2007\)](#) propuseram também a utilização das funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Versões no domínio z das técnicas propostas por [Gustavsen e Semlyen \(1999\)](#) e [Deschrijver, Haegeman e Dhaene \(2007\)](#) podem ser encontradas em ([NOURI; ACHAR; NAKHLA, 2010](#)), ([WONG; LEI, 2008](#)) e ([MEKONNEN; SCHUTT-AINÉ, 2007](#)).

Por outro lado, o método iterativo proposto por [Sanathanan e Koerner \(1963\)](#) possui uma formulação equivalente no domínio do tempo discreto, proposta por [Steiglitz e McBride \(1965\)](#). As iterações de Steiglitz-McBride têm sido amplamente utilizadas na aproximação de respostas de sistemas no domínio do tempo, onde os modelos são representados pela razão entre dois polinômios em q , sendo q o operador avanço ([ROJAS; TÓTH; HJALMARSSON, 2014](#); [LEI; WONG, 2012](#)). Nesse contexto, apesar do evidente sucesso na aplicação das iterações de Sanathanan-Koerner para identificação via BFRs no domínio da frequência, aplicações das iterações de Steiglitz-McBride para identificação via BFRs no domínio do tempo permanecem ainda pouco exploradas. Na realidade, as técnicas de identificação propostas em ([UBOLLI; GUSTAVSEN, 2011](#)), ([LEI; WONG, 2008](#)) e ([GRIVET-TALOCIA, 2003](#)) parecem ser as únicas abordagens presentes na literatura que utilizam essas iterações e bases racionais para identificação no domínio do tempo. Entretanto, tais técnicas são aplicáveis apenas para modelos formados por funções do tipo polo-resíduo e, em alguns casos, exigem ainda métodos de integração numérica para aproximação dos sinais presentes na função objetivo.

Existe ainda uma outra questão importante relacionada à estimação de parâmetros

baseada nas iterações de Steiglitz-McBride e Sanathanan-Koerner. Essa questão diz respeito à classificação da solução encontrada pelo processo iterativo. Conforme investigado em (WHITFIELD, 1987) e em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988), as soluções encontradas utilizando-se os métodos de Steiglitz-McBride e Sanathanan-Koerner não são, garantidamente, mínimos locais da função objetivo a ser minimizada. Buscando resolver esse problema, Van den Hof e Douma (2008) reformularam esses dois métodos utilizando o conceito de variáveis instrumentais. Desse modo, alterando-se o critério de minimização do problema de otimização, pode-se garantir que um ótimo local é obtido após a convergência do processo iterativo. Recentemente, Voorhoeve *et al.* (2014) aplicaram a reformulação das iterações de Sanathanan-Koerner proposta por Van den Hof e Douma (2008) para identificação (no domínio da frequência) de modelos formados por funções do tipo polo-resíduo. Uma outra proposta baseada em variáveis instrumentais foi também investigada em (BEYGI; DOUNAVIS, 2012).

Entretanto, abordagens unificadas que permitem a utilização de outras bases racionais, como por exemplo, as funções ortonormais de Takenaka-Malquist, ainda não foram propostas. Do mesmo modo, a aplicação de variáveis instrumentais no contexto de identificação via BFRs no domínio do tempo permanece também inexplorada.

1.3 Objetivo geral e contribuições da pesquisa

Esta pesquisa tem por objetivo geral formular novos algoritmos de identificação que visam a melhoria da aproximação, taxa de convergência e condicionamento numérico na estimação iterativa de modelos formados por BFRs.

Para tanto, com base nas considerações apresentadas nas seções anteriores, esta pesquisa se propõe a realizar as seguintes contribuições:

- C.1 Formulação de uma metodologia unificada para construção de BFRs no espaço de estados. O termo “unificada” é empregado com o objetivo de enfatizar que a metodologia proposta pode ser aplicada da mesma forma para diferentes BFRs, que podem estar definidas tanto em tempo contínuo como no tempo discreto.

C.2 Com base na definição das funções racionais de frequência localizada proposta por [Welsh e Goodwin \(2003\)](#) para polos reais, definir um novo conjunto de funções racionais para o caso de polos complexos conjugados. Desse modo, sistemas compostos também por modos oscilatórios de resposta podem ser melhor aproximados por essa nova base de funções. Além disso, a aplicação das iterações de Sanathanan-Koerner para seleção iterativa dos polos torna-se possível, uma vez que tanto polos reais quanto polos complexos podem ser incorporados no modelo. O desenvolvimento referente a essa contribuição é também detalhadamente apresentado em ([SCHUMACHER; OLIVEIRA; MITCHELL, 2015](#));

C.3 (a) Desenvolver uma nova abordagem baseada em BFRs para aproximação de respostas de sistemas no domínio do tempo, visando melhorar o condicionamento numérico das matrizes presentes no algoritmo de identificação. Baseando-se na aplicação das iterações de Steiglitz-McBride para seleção dos polos das funções racionais, essa nova abordagem será diretamente comparada com técnicas propostas anteriormente. Parte dos desenvolvimentos aqui apresentados pode ser encontrada em ([SCHUMACHER; OLIVEIRA, 2015](#)) e em ([SCHUMACHER; OLIVEIRA, 2016b](#));

(b) Estender a abordagem proposta no item C.3 (a) usando o conceito de variáveis instrumentais. Assim, após a convergência do processo iterativo, a solução do problema é garantidamente um ótimo local da função objetivo a ser minimizada. Uma prévia desse desenvolvimento pode ser encontrada em ([SCHUMACHER; OLIVEIRA, 2016a](#));

C.4 Desenvolver uma nova abordagem, similar à abordagem proposta em C.3 (b), para aproximação de respostas de sistemas no domínio da frequência, buscando generalizar o método baseado em variáveis instrumentais proposto por [Voorhoeve et al. \(2014\)](#), que utiliza exclusivamente modelos formados por funções do tipo polo-resíduo.

Ainda que este trabalho trate apenas de sistemas lineares invariantes no tempo, parte dos desenvolvimentos aqui considerados podem ser adaptados para identificação via

BFRs de sistemas não-lineares. Nesse contexto, uma contribuição (que não será abordada ao longo deste texto) foi publicada em (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2015), onde as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist foram aplicadas na modelagem comportamental de amplificadores de potência de rádio frequência.

1.4 Estrutura do trabalho

Capítulo 2: Bases de funções racionais

Neste capítulo, primeiramente a representação de sistemas lineares invariantes no tempo em termos de BFRs é apresentada no espaço de estados. Em seguida, é proposta uma metodologia unificada que permite a obtenção das BFRs mais utilizadas no contexto de identificação de sistemas (contribuição C.1).

O potencial dessa metodologia unificada é então explorado construindo-se inicialmente a base de funções do tipo polo-resíduo e a base de funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Posteriormente, em meio à construção da base de funções de frequência localizada proposta por Welsh e Goodwin (2003) para polos reais, define-se um conjunto alternativo de funções racionais para o caso de polos complexos conjugados (contribuição C.2).

Capítulo 3: Identificação no domínio do tempo

Inicialmente, neste capítulo, o problema de identificação com dados no domínio do tempo é definido e as iterações de Steiglitz-McBride são apresentadas. Em seguida, propõe-se a aplicação dessas iterações para estimação de modelos formados por BFRs (contribuição C.3 (a)). A proposta é então estendida utilizando-se o conceito de variáveis instrumentais (contribuição C.3 (b)). Por fim, três estudos de caso são utilizados para se comparar as técnicas propostas neste trabalho com técnicas propostas anteriormente. Ressalta-se ainda que um desses estudos de caso leva em conta dados adquiridos através da simulação (no *software* EMTP-RV) de um sistema de potência monofásico composto por um cabo subterrâneo e três linhas de transmissão.

Capítulo 4: Identificação no domínio da frequência

Este capítulo segue, em linhas gerais, a abordagem apresentada no Capítulo 3. Para tanto, o problema de identificação com dados no domínio da frequência é definido e as iterações de Sanathanan-Koerner são apresentadas. Em seguida, aplicam-se essas iterações para estimação de modelos formados por BFRs. Propõe-se então uma abordagem baseada em variáveis instrumentais e BFRs que generaliza o método proposto por Voorhoeve *et al.* (2014) (contribuição C.4). Por fim, dois estudos de caso são utilizados para se comparar as técnicas propostas neste trabalho com técnicas propostas anteriormente. Ressalta-se ainda que um desses estudos de caso leva em conta dados adquiridos através da medição em campo de um transformador de potência trifásico.

Capítulo 5: Conclusões

Neste capítulo são destacadas as conclusões finais deste documento.

2 Bases de funções racionais

O presente capítulo tem por objetivo principal unificar o processo de construção das BFRs mais utilizadas no contexto de identificação de sistemas. Para tanto, a representação de sistemas lineares invariantes no tempo em termos de BFRs é inicialmente apresentada no espaço de estados e, em seguida, uma metodologia unificada para construção dessas bases é proposta (contribuição C.1). O potencial dessa metodologia unificada é então explorado construindo-se inicialmente a base de funções do tipo polo-resíduo e a base de funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Posteriormente, tendo como ponto de partida a construção da base de funções de frequência localizada proposta por [Welsh e Goodwin \(2003\)](#) para polos reais, define-se um conjunto genérico de funções racionais que visa considerar também o caso de polos complexos conjugados (contribuição C.2).

Vale ainda ressaltar que essas bases e suas respectivas representações no espaço de estados são aplicáveis tanto na identificação no domínio do tempo quanto na identificação no domínio da frequência. Desse modo, o presente capítulo tem seus conceitos diretamente aplicados nos Capítulos 3 e 4 deste trabalho.

2.1 Introdução

Sistemas lineares invariantes no tempo, não perturbados, com uma entrada escalar $U(\alpha)$ e uma saída escalar $Y(\alpha)$, podem ser representados pela expressão ([AGUIRRE, 2007](#); [LJUNG, 1999](#); [VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994](#))

$$Y(\alpha) = G(\alpha)U(\alpha), \quad (2.1)$$

onde α define se a representação do sistema G é dada no tempo contínuo ($\alpha = s$) ou no tempo discreto ($\alpha = z$). Em ambos os domínios, a função de transferência $G(\alpha)$ pode ser

expressa pela razão entre dois polinômios:

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \frac{b_0 + b_1\alpha^{-1} + b_2\alpha^{-2} + \dots}{1 + f_1\alpha^{-1} + f_2\alpha^{-2} + \dots}, \\ &= \frac{B(\alpha)}{F(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Apesar da representação em (2.2) ser bastante usada, uma estrutura alternativa para representação de $G(\alpha)$ baseia-se na expansão dos coeficientes da resposta ao impulso do sistema em termos de BFRs. Para sistemas causais cujas respostas ao impulso tendem à zero com o tempo (veja um exemplo na Figura 1), $G(\alpha)$ pode ser reescrita da seguinte forma¹ (DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007; HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005; GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999):

$$G(\alpha) = r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(\alpha), \quad (2.3)$$

tal que a relação entrada-saída do sistema é dada por

$$Y(\alpha) = \left(r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(\alpha) \right) U(\alpha). \quad (2.4)$$

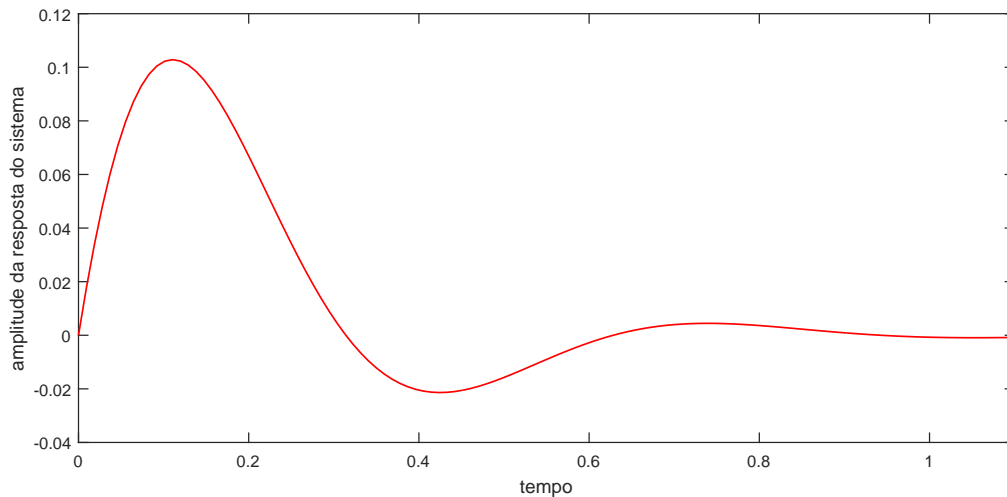


Figura 1 – Exemplo de resposta ao impulso que tende à zero com o tempo.

Em (2.3) e (2.4), r_0 e $\{r_i\}$ são os coeficientes da expansão, $\{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1}^n$ é uma série de funções racionais e n é a ordem de truncamento do sistema. Neste capítulo, será considerado

¹ É interessante observar que a decomposição de $G(\alpha)$ em frações parciais (representação bastante utilizada em diversos estudos envolvendo sistemas dinâmicos lineares) é o caso particular para o qual cada função racional da base é dada por $\Phi_i(\alpha) = \frac{1}{\alpha - a_i}$.

que n é suficientemente grande de tal forma que todos os efeitos de memória do sistema são considerados em (2.3). Já as funções racionais $\{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1}^n$ dependem da BFR utilizada e são completamente parametrizadas por um conjunto de polos dado por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T.$$

Na representação de sistemas lineares, a resposta finita ao impulso definida no domínio do tempo discreto ($\alpha = z$) por $\Phi_i(z) = z^{-i}$, vista sob o enfoque de bases racionais, pode ser considerada como uma das bases mais utilizadas. No entanto, modelos representados por essa base não permitem a introdução de conhecimento prévio acerca das dinâmicas do sistema, uma vez que os polos do modelo ficam condicionados a assumir valores nulos, pois $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Dessa forma, uma aproximação satisfatória do processo físico pode exigir uma grande quantidade de parâmetros no modelo.

Fundamentalmente, bases de funções mais generalizadas (como por exemplo, as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist) possibilitam uma maior flexibilização e adaptação dos modelos, uma vez que o conjunto de polos em \mathbf{a} é livre para assumir diferentes valores. Dessa forma, se \mathbf{a} é bem escolhido, a quantidade de coeficientes (n) necessária para representação de $G(\alpha)$ tende a ser menor. Nesse contexto, bases de funções ortonormais são também conhecidas por melhorar o condicionamento numérico das matrizes presentes no processo de estimação de parâmetros dos modelos (DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007).

Em ambos os domínios (tempo contínuo e discreto), conforme será visto nos Capítulos 3 e 4 deste trabalho, a representação de $G(\alpha)$ na forma de espaço de estados é útil na análise e construção de BFRs, e facilita a implementação de algoritmos de estimação de parâmetros dos modelos. Dessa forma, considera-se a função de transferência $G(\alpha)$ na seguinte realização em espaço de estados:

$$\alpha \mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{A} \mathbf{X}(\alpha) + \mathbf{B} U(\alpha), \quad (2.5)$$

$$Y(\alpha) = \mathbf{C} \mathbf{X}(\alpha) + \mathbf{D} U(\alpha), \quad (2.6)$$

onde \mathbf{A} tem dimensão $n \times n$, \mathbf{B} tem dimensão $n \times 1$, \mathbf{C} tem dimensão $1 \times n$ e \mathbf{D} tem

dimensão 1×1 . Isolando-se o vetor de estados $\mathbf{X}(\alpha)$ na equação de estado (2.5), tem-se ainda

$$\mathbf{X}(\alpha) = (\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(\alpha), \quad (2.7)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $n \times n$. Dessa forma, substituindo-se (2.7) na Equação de saída (2.6), a função de transferência $G(\alpha)$ pode ser recuperada a partir da expressão

$$G(\alpha) = \frac{Y(\alpha)}{U(\alpha)} = \mathbf{C}(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2.8)$$

Assim, se o objetivo é estimar modelos que possam ser representados como em (2.4), ou seja, a partir de uma certa BFR definida pelo conjunto de funções $\{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1}^n$, pode-se definir $\mathbf{X}(\alpha)$ como sendo um vetor de estados contendo as saídas das n funções $\Phi_i(\alpha)$ para a entrada $U(\alpha)$, ou seja,

$$\frac{\mathbf{X}(\alpha)}{U(\alpha)} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\alpha) & \Phi_2(\alpha) & \cdots & \Phi_n(\alpha) \end{bmatrix}^T. \quad (2.9)$$

Definindo-se os estados dessa forma, o vetor \mathbf{C} e o escalar \mathbf{D} ficam condicionados a assumir os seguintes valores

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = r_0. \quad (2.10)$$

Finalmente, pode-se verificar que a representação de $G(\alpha)$ através de BFRs e sua realização no espaço de estados correspondente estão relacionadas entre si conforme segue

$$G(\alpha) = r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{A}\mathbf{X}(\alpha) + \mathbf{B}U(\alpha), \\ Y(\alpha) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \mathbf{X}(\alpha) + r_0 U(\alpha), \end{cases} \quad (2.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\alpha) &= (\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(\alpha), \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1(\alpha) & \Phi_2(\alpha) & \cdots & \Phi_n(\alpha) \end{bmatrix}^T U(\alpha), \\ &\alpha = s \text{ ou } z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

As Equações (2.11) e (2.12) são equações importantes do presente capítulo e, com base nelas, a importância da construção de diferentes BFRs pode ser destacada.

Primeiramente, observa-se na Equação (2.12) que a operação $(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ determina o conjunto de funções racionais da base, ou seja, $\{\Phi_i(\alpha)\}_{i=1}^n$. Assim, torna-se evidente que a escolha da base de funções a ser utilizada depende somente do par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) que, por sua vez, depende apenas do conjunto de polos \mathbf{a} .

Como exemplo do problema de obtenção dessas matrizes, considera-se que um dado sistema em tempo discreto $G(z)$ como em (2.3) é representado pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005), ou seja, pelas funções

$$\Phi_i(z) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - a_j^* z}{z - a_j} \right) \frac{\sqrt{1 - |a_i|^2}}{z - a_i}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

onde $(\cdot)^*$ denota o complexo conjugado transposto e $\prod_{j=1}^0 (\cdot) := 1$. Então, para que $G(z)$ possa ser representada pela realização em (2.11), as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} devem ser definidas de tal forma que (2.12) seja satisfeita:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z), \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1(z) & \Phi_2(z) & \dots & \Phi_n(z) \end{bmatrix}^T U(z). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Entretanto, é difícil inferir sobre o par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) que satisfaz (2.14) apenas observando a série de funções definida em (2.13). Dessa forma, motiva-se a necessidade de se ter uma metodologia para construção dessas matrizes, metodologia esta que seja unificada e que possa ser aplicada, da mesma maneira, para obtenção de diferentes BFRs conhecidas.

Na próxima seção, propõe-se uma metodologia unificada (baseada em quatro etapas) para construção das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} . O termo “unificada” vem do fato de que essa nova metodologia pode ser aplicada em ambos os domínios z e s , sem nenhum tipo de modificação. Além disso, essa metodologia pode ser considerada como uma generalização das metodologias não-unificadas apresentadas em (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016), (DESCRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007), (HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005) e (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999).

2.2 Metodologia unificada para construção de BFRs

Define-se, como hipótese inicial, que uma BFR pode ser escrita como uma série de funções racionais decomposta conforme segue:

$$\Phi_i(\alpha) = K(a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) R(\alpha, a_i), \quad (2.15)$$

onde $\{L(\alpha, a_i)\}$ e $\{R(\alpha, a_i)\}$ são filtros de primeira ordem e $\{K(a_i)\}$ são constantes que dependem apenas dos polos presentes no conjunto de polos \mathbf{a} . Conforme será visto na seção 2.3 deste trabalho, a hipótese dada pela Equação (2.15) é válida para as bases de funções racionais mais utilizadas no contexto de identificação de sistemas. Tais bases são: funções do tipo polo-resíduo, funções ortonormais de Takenaka-Malmquist e funções de frequência localizada (WELSH; ROJAS, 2007; DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007; GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999).

Inicialmente, é conveniente desconsiderar o termo $K(a_i)$ presente em cada função racional $\Phi_i(\alpha)$, o que leva a uma versão simplificada das funções,

$$\bar{\Phi}_i(\alpha) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) R(\alpha, a_i), \quad (2.16)$$

tal que

$$\Phi_i(\alpha) = K(a_i) \bar{\Phi}_i(\alpha).$$

Considera-se então que as funções racionais simplificadas em (2.16) podem ser representadas por uma equação de estado da seguinte forma:

$$\alpha \bar{\mathbf{X}}(\alpha) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{X}}(\alpha) + \bar{\mathbf{B}} U(\alpha), \quad (2.17)$$

que, de maneira similar à Equação (2.12), tem seus estados definidos por

$$\bar{\mathbf{X}}(\alpha) = (\alpha \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}} U(\alpha), \quad (2.18)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(\alpha) & \bar{\Phi}_2(\alpha) & \cdots & \bar{\Phi}_n(\alpha) \end{bmatrix}^T U(\alpha). \quad (2.19)$$

Ressalta-se que o par de matrizes $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ é determinado a partir de $L(\alpha, a_i)$ e $R(\alpha, a_i)$.

Com essas definições, a relação entrada-saída do sistema $G(\alpha)$ em (2.11) pode ser reescrita como sendo

$$\begin{cases} \alpha \bar{\mathbf{X}}(\alpha) &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{X}}(\alpha) + \bar{\mathbf{B}}U(\alpha), \\ Y(\alpha) &= \mathbf{C} \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}(\alpha) + r_0 U(\alpha), \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K(a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K(a_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & K(a_n) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Definindo-se ainda a transformação de estados: $\mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}(\alpha) = \mathbf{X}(\alpha) \Rightarrow \bar{\mathbf{X}}(\alpha) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}(\alpha)$, tem-se que

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}(\alpha) &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}(\alpha) + \bar{\mathbf{B}}U(\alpha), \\ Y(\alpha) &= \mathbf{C} \mathbf{X}(\alpha) + r_0 U(\alpha), \end{cases} \quad (2.22)$$

e, finalmente, multiplicando-se ambos os lados da equação de estado em (2.22) por \mathbf{K} , a representação desejada em (2.11) é novamente obtida:

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{X}(\alpha) &= \mathbf{A} \mathbf{X}(\alpha) + \mathbf{B}U(\alpha), \\ Y(\alpha) &= \mathbf{C} \mathbf{X}(\alpha) + r_0 U(\alpha), \end{cases}$$

sendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{K}^{-1}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.23)$$

Assim, pode-se concluir que o problema de se encontrar o par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) para a representação desejada do sistema G em (2.11) está diretamente relacionado (pela Equação (2.23)) ao problema de se encontrar as matrizes \mathbf{K} , $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ para uma dada BFR. \mathbf{K} já encontra-se definida em (2.21), entretanto, o problema permanece sem solução uma vez que as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ não foram ainda definidas. Para resolver esse problema, propõe-se a seguir um procedimento baseado na conexão em cascata dos n filtros $L(\alpha, a_i)$ presentes nas funções $\Phi_i(\alpha)$ em (2.15). Tal conexão em cascata é ilustrada pela Figura 2.

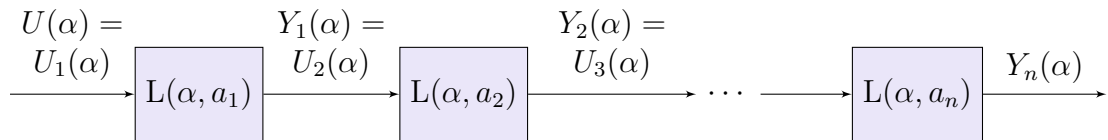


Figura 2 – Conexão em cascata dos n filtros de primeira ordem $L(\alpha, a_i)$.

Primeiramente, com base na Figura 2, percebe-se que o fato da conexão ser série implica que a entrada $U_i(\alpha)$ de cada filtro pode ser decomposta conforme segue:

$$U_i(\alpha) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) U(\alpha). \quad (2.24)$$

Considera-se então que cada um desses filtros possui uma realização em espaço de estados dada por (ver Figura 3)

$$\begin{cases} \alpha \bar{X}_i(\alpha) &= \bar{A}_i \bar{X}_i(\alpha) + \bar{B}_i U_i(\alpha), \\ Y_i(\alpha) &= \bar{C}_i \bar{X}_i(\alpha) + \bar{D}_i U_i(\alpha). \end{cases} \quad (2.25)$$

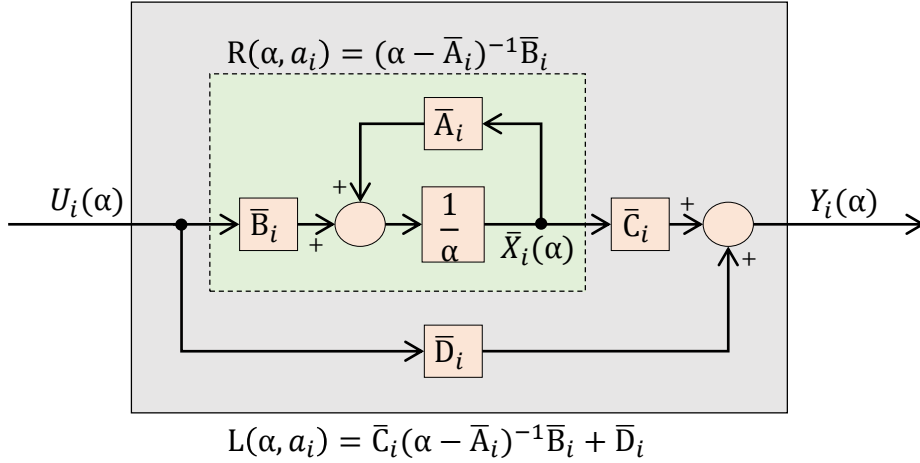


Figura 3 – Filtro $L(\alpha, a_i)$ representado na forma de espaço de estados.

Dessa forma, se o estado $\bar{X}_i(\alpha)$ da realização de cada filtro $L(\alpha, a_i)$ é definido por²

$$\bar{X}_i(\alpha) = (\alpha - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i U_i(\alpha), \quad (2.26)$$

$$= R(\alpha, a_i) U_i(\alpha), \quad (2.27)$$

$$= R(\alpha, a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) U(\alpha), \quad (2.28)$$

$$= \bar{\Phi}_i(\alpha) U(\alpha), \quad (2.29)$$

ou seja, tal que \bar{A}_i e \bar{B}_i satisfazem a condição $\frac{\bar{B}_i}{\alpha - \bar{A}_i} = R(\alpha, a_i)$, então a realização resultante da conexão em cascata dos n filtros $L(\alpha, a_i)$ terá os estados:

² Note que a Figura 3 já leva em conta esta definição.

$$\bar{\mathbf{X}}(\alpha) = (\alpha \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}} U(\alpha), \quad (2.30)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(\alpha) & \bar{\Phi}_2(\alpha) & \cdots & \bar{\Phi}_n(\alpha) \end{bmatrix}^T U(\alpha), \quad (2.31)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{X}_1(\alpha) & \bar{X}_2(\alpha) & \cdots & \bar{X}_n(\alpha) \end{bmatrix}^T, \quad (2.32)$$

e pode, portanto, ser representada pelas equações:

$$\alpha \bar{\mathbf{X}}(\alpha) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{X}}(\alpha) + \bar{\mathbf{B}} U(\alpha), \quad (2.33)$$

$$Y_n(\alpha) = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}}(\alpha) + \bar{\mathbf{D}} U(\alpha), \quad (2.34)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{B}_2 \bar{C}_1 & \bar{A}_2 & \cdots & 0 \\ \bar{B}_3 \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{B}_3 \bar{C}_2 & \cdots & 0 \\ \bar{B}_4 \bar{D}_3 \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{B}_4 \bar{D}_3 \bar{C}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{B}_n \bar{D}_{n-1} \cdots \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{B}_n \bar{D}_{n-1} \cdots \bar{D}_3 \bar{C}_2 & \cdots & \bar{A}_n \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \bar{D}_1 \\ \bar{B}_3 \bar{D}_2 \bar{D}_1 \\ \bar{B}_4 \bar{D}_3 \bar{D}_2 \bar{D}_1 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \bar{D}_{n-1} \cdots \bar{D}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{D}_n \cdots \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{D}_n \cdots \bar{D}_3 \bar{C}_2 & \cdots & \bar{C}_n \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{D}_1 \cdots \bar{D}_n. \quad (2.38)$$

Esta afirmação pode ser fundamentada com base no seguinte teorema:

Teorema 2.1. (*HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005*) Considere dois filtros $H_1(\alpha)$ e $H_2(\alpha)$ com vetores de estados $x_1(\alpha)$ e $x_2(\alpha)$, respectivamente. A conexão em cascata (série) $H_1(\alpha)H_2(\alpha)$ terá então o vetor de estados:

$$x(\alpha) = \begin{bmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Prova: Sejam as respectivas realizações em espaço de estados de $H_1(\alpha)$ e $H_2(\alpha)$ dadas por:

$$\begin{cases} \alpha x_1(\alpha) = A_1 x_1(\alpha) + B_1 u_1(\alpha), \\ y_1(\alpha) = C_1 x_1(\alpha) + D_1 u_1(\alpha), \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \alpha x_2(\alpha) = A_2 x_2(\alpha) + B_2 u_2(\alpha), \\ y_2(\alpha) = C_2 x_2(\alpha) + D_2 u_2(\alpha). \end{cases} \quad (2.40)$$

Logo, se $H_1(\alpha)$ e $H_2(\alpha)$ estão conectados em série, $y_1(\alpha) = u_2(\alpha)$. Assim, é possível substituir a equação de saída da primeira realização nas duas equações que definem a segunda realização. Agrupando-se então os estados, é possível escrever a realização resultante:

$$\begin{cases} \alpha \begin{bmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u(\alpha), \\ y_2(\alpha) = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \end{bmatrix} + D_2 D_1 u(\alpha), \end{cases} \quad (2.41)$$

onde $u(\alpha) = u_1(\alpha)$ e $\mathbf{0}$ é uma matriz preenchida por zeros e com dimensões apropriadas.

Seguindo a linha de pensamento apresentada nesta prova, é possível desenvolver um teorema que leva em conta a conexão série de n filtros. A prova para tal teorema seria também “construtiva”, e as matrizes da realização resultante seriam dadas conforme mostram as equações de (2.35) a (2.38) (desconsiderando-se, obviamente, os traços presentes em cima dos elementos dessas matrizes).

Com base nos desenvolvimentos apresentados até agora nesta seção, é possível concluir que o problema de se encontrar o par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) do sistema G em (2.11) se resume em construir as matrizes $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{B}}$ a partir das expressões em (2.35) e (2.36) e, em

seguida, realizar as operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}$ (definidas em (2.23)), onde \mathbf{K} é dado pela Equação (2.21).³

Entretanto, vale ressaltar que os elementos das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são calculados em função das quádruplas $(\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\mathbf{B}}_i, \bar{\mathbf{C}}_i, \bar{\mathbf{D}}_i)$, sendo que cada quádrupla deve satisfazer duas condições. Conforme mostrado, a primeira condição é:

$$\frac{\bar{\mathbf{B}}_i}{(\alpha - \bar{\mathbf{A}}_i)} = \mathbf{R}(\alpha, a_i), \quad (2.42)$$

para que o estado $\bar{\mathbf{X}}_i(\alpha)$ seja dado por $\bar{\mathbf{X}}_i(\alpha) = \bar{\Phi}_i(\alpha)U(\alpha)$. A segunda condição é:

$$\frac{Y_i(\alpha)}{U_i(\alpha)} = \bar{\mathbf{C}}_i(\alpha - \bar{\mathbf{A}}_i)^{-1}\bar{\mathbf{B}}_i + \bar{\mathbf{D}}_i, \quad (2.43)$$

$$= \bar{\mathbf{C}}_i\mathbf{R}(\alpha, a_i) + \bar{\mathbf{D}}_i, \quad (2.44)$$

$$= \mathbf{L}(\alpha, a_i), \quad (2.45)$$

para que $(\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\mathbf{B}}_i, \bar{\mathbf{C}}_i, \bar{\mathbf{D}}_i)$ seja de fato uma realização do filtro de primeira ordem $\mathbf{L}(\alpha, a_i)$. Note-se que esta segunda condição já leva em conta que a primeira condição também é satisfeita.

Pela forma com que o par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é construído, pode-se perceber que essas matrizes serão reais com dimensões $n \times n$ e $n \times 1$, respectivamente, se todos os polos do conjunto $\{a_i\}_{i=1}^n$ forem reais. Por outro lado, se pelo menos dois desses polos compõem um par complexo conjugado, ou seja, $a_i^* = a_{i+1}$, a matriz \mathbf{A} terá elementos que pertencem ao conjunto dos números complexos. Isto significa que os estados do modelo serão, em princípio, sinais que assumem também valores complexos ao longo do tempo.

Para que a matriz \mathbf{A} apresente sempre valores reais mesmo nos casos em que a_{i+1} e a_i formam um par complexo conjugado de polos, uma modificação nas funções racionais em (2.15) precisa ser realizada. Em geral, se a_{i+1} e a_i compõem um par complexo conjugado, então as funções $\Phi_i(\alpha)$ e $\Phi_{i+1}(\alpha)$ em (2.15) são substituídas por funções racionais com uma forma genérica:

³ Note-se que a construção de $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{D}}$ em (2.37) e (2.38) não precisa ser realizada uma vez que a equação de saída em (2.34) não é utilizada.

$$\begin{cases} \Phi_i(\alpha) &= K(a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) M(\alpha, a_i), \\ \Phi_{i+1}(\alpha) &= K(a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) N(\alpha, a_i), \end{cases} \quad (2.46)$$

onde $M(\alpha, a_i)$ e $N(\alpha, a_i)$ são filtros de segunda ordem com polos em a_i e $a_{i+1} = a_i^*$. Tais filtros possuem uma característica estritamente própria e diferem entre si devido a definição dada para os seus respectivos ganhos e zeros.

Para que as funções $\Phi_i(\alpha)$ e $\Phi_{i+1}(\alpha)$ possam de fato ser definidas aos pares (como mostra a Equação 2.46), os filtros de primeira ordem $L(\alpha, a_i)$ e $L(\alpha, a_{i+1})$ da Figura 2 devem ser agrupados em um único filtro de segunda ordem $L(\alpha, a_i)L(\alpha, a_{i+1})$. Isto implica que as quádruplas $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$ e $(\bar{A}_{i+1}, \bar{B}_{i+1}, \bar{C}_{i+1}, \bar{D}_{i+1})$ em (2.35) e (2.36) devem ser substituídas pela única quádrupla:

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{D}_i$$

onde seus elementos são encontrados satisfazendo-se agora as condições

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i(\alpha) \\ \bar{X}_{i+1}(\alpha) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \bar{A}_i \right)^{-1} \bar{B}_i U_i(\alpha) = \begin{bmatrix} M(\alpha, a_i) \\ N(\alpha, a_i) \end{bmatrix} U_i(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i(\alpha) \\ \bar{\Phi}_{i+1}(\alpha) \end{bmatrix} U(\alpha), \quad (2.47)$$

e

$$\frac{Y_i(\alpha)}{U_i(\alpha)} = \bar{C}_i \begin{bmatrix} M(\alpha, a_i) \\ N(\alpha, a_i) \end{bmatrix} + \bar{D}_i = L(\alpha, a_i)L(\alpha, a_{i+1}). \quad (2.48)$$

2.2.1 Resumo

Baseando-se nos desenvolvimentos apresentados na seção 2.2, a metodologia definida pelas quatro etapas a seguir pode ser utilizada para construção das matrizes **A** e **B**:

1. Para uma dada base composta pelas funções racionais $\{\Phi_i(\alpha)\}$, $i = 1, \dots, n$, definem-se $K(a_i)$, $L(\alpha, a_i)$ e $R(\alpha, a_i)$ tal que

$$\Phi_i(\alpha) = K(a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) R(\alpha, a_i).$$

2. Encontram-se os elementos \bar{A}_i , \bar{B}_i , \bar{C}_i e \bar{D}_i que satisfazem as condições

$$\frac{\bar{B}_i}{\alpha - \bar{A}_i} = R(\alpha, a_i) \quad \text{e} \quad \bar{C}_i R(\alpha, a_i) + \bar{D}_i = L(\alpha, a_i). \quad (2.49)$$

Se $\Phi_i(\alpha)$ e $\Phi_{i+1}(\alpha)$ são definidas diferentemente no caso de polos complexos conjugados ($a_i^* = a_{i+1}$) tal que

$$\begin{cases} \Phi_i(\alpha) &= K(a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) M(\alpha, a_i), \\ \Phi_{i+1}(\alpha) &= K(a_i) \left(\prod_{j=1}^{i-1} L(\alpha, a_j) \right) N(\alpha, a_i), \end{cases}$$

então, as quádruplas $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$ e $(\bar{A}_{i+1}, \bar{B}_{i+1}, \bar{C}_{i+1}, \bar{D}_{i+1})$ obtidas satisfazendo-se (2.49) são substituídas por uma única quádrupla $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$, onde

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{D}_i$$

são encontradas satisfazendo-se as condições:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{(\alpha - A_{22})B_1 + A_{12}B_2}{(\alpha - A_{11})(\alpha - A_{22}) - A_{12}A_{21}} \\ \frac{(\alpha - A_{11})B_2 + A_{21}B_1}{(\alpha - A_{11})(\alpha - A_{22}) - A_{12}A_{21}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M(\alpha, a_i) \\ N(\alpha, a_i) \end{bmatrix}, \\ C_1 M(\alpha, a_i) + C_2 N(\alpha, a_i) + \bar{D}_i &= L(\alpha, a_i)L(\alpha, a_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

3. Constroem-se as matrizes

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{B}_2 \bar{C}_1 & \bar{A}_2 & \cdots & 0 \\ \bar{B}_3 \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{B}_3 \bar{C}_2 & \cdots & 0 \\ \bar{B}_4 \bar{D}_3 \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{B}_4 \bar{D}_3 \bar{C}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{B}_n \bar{D}_{n-1} \cdots \bar{D}_2 \bar{C}_1 & \bar{B}_n \bar{D}_{n-1} \cdots \bar{D}_3 \bar{C}_2 & \cdots & \bar{A}_n \end{bmatrix} \text{ e } \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \bar{D}_1 \\ \bar{B}_3 \bar{D}_2 \bar{D}_1 \\ \bar{B}_4 \bar{D}_3 \bar{D}_2 \bar{D}_1 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \bar{D}_{n-1} \cdots \bar{D}_1 \end{bmatrix},$$

segundo-se as definições para $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$ feitas na etapa 2.

4. Obtêm-se as matrizes desejadas $\mathbf{A} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}$, onde $\mathbf{K} = \text{diag}(K(a_i))$.

Como pode ser observado, as etapas 1 e 2 da metodologia proposta não precisam ser necessariamente implementadas computacionalmente, uma vez que uma análise matemática

pode resolver o problema para uma determinada BFR. Entretanto, as etapas 3 e 4 devem ser geralmente implementadas. Na realidade, conforme será visto na próxima seção, para algumas bases é possível definir o conjunto $\{K(a_i)\}$ de tal forma que a construção das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ da etapa 3 seja simplificada. Para algumas BFRs define-se ainda $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, o que implica diretamente que $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}$.

2.3 Obtendo BFRs conhecidas a partir da metodologia unificada

O principal objetivo desta seção é aplicar a metodologia proposta na seção anterior para construção, nos domínios z e s , das BFRs mais utilizadas no contexto de identificação de sistemas. Tais bases são:

- Funções do tipo polo-resíduo
- Funções ortonormais de Takenaka-Malmquist
- Funções de frequência localizada

Conforme será visto, as funções do tipo polo-resíduo são definidas de maneira similar tanto no tempo contínuo quanto no tempo discreto. As funções ortonormais de Takenaka-Malmquist, por sua vez, possuem uma definição diferente em cada domínio. Já as funções de frequência localizada são definidas apenas no tempo contínuo.

2.3.1 Bases no tempo discreto ($\alpha = z$)

2.3.1.1 Funções do tipo polo-resíduo

No caso da base de funções do tipo polo-resíduo, cada função racional $\Phi_i(z)$ é definida por

$$\Phi_i(z) = \frac{1}{z - a_i}. \quad (2.51)$$

Assim, com base na etapa 1 da seção 2.2.1 (seção que resume a aplicação da metodologia proposta), define-se:

$$\mathbf{K}(a_i) = 1; \quad \mathbf{L}(z, a_i) = 1; \quad \mathbf{R}(z, a_i) = \frac{1}{z - a_i}. \quad (2.52)$$

Logo, pela etapa 2 da seção 2.2.1, pode-se verificar que o conjunto de elementos $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$ e \bar{D}_i que satisfaz as condições impostas em (2.49) é dado por

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Como $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ neste caso, então, pelas etapas 3 e 4 da seção 2.2.1 as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da representação do sistema no espaço de estados são obtidas como sendo:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

tal que

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z) = \left[\frac{1}{z - a_1} \quad \frac{1}{z - a_2} \quad \cdots \quad \frac{1}{z - a_n} \right]^T U(z). \quad (2.55)$$

Por outro lado, para que a matriz \mathbf{A} apresente valores reais no caso em que a_i e a_{i+1} compõem um par complexo conjugado de polos, ou seja, $a_i^* = a_{i+1}$, as funções racionais $\Phi_i(z)$ e $\Phi_{i+1}(z)$ em (2.51) são substituídas pelas funções:

$$\begin{cases} \Phi_i(z) &= \frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{z - a_{i+1}}, \\ \Phi_{i+1}(z) &= \frac{j}{z - a_i} - \frac{j}{z - a_{i+1}}, \end{cases} \quad (2.56)$$

sendo, portanto,

$$\begin{cases} \mathbf{M}(z, a_i) &= \frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{z - a_{i+1}} = \frac{2z - 2\Re(a_i)}{z^2 - 2z\Re(a_i) + |a_i|^2}, \\ \mathbf{N}(z, a_i) &= \frac{j}{z - a_i} - \frac{j}{z - a_{i+1}} = \frac{-2\Im(a_i)}{z^2 - 2z\Re(a_i) + |a_i|^2}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Assim, se a_i e a_{i+1} formam um par complexo conjugado, então as quádruplas $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$ e $(\bar{A}_{i+1}, \bar{B}_{i+1}, \bar{C}_{i+1}, \bar{D}_{i+1})$ em (2.53) devem ser substituídas na construção em cascata pela única quádrupla (obtida satisfazendo-se as condições em (2.50)) dada por

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_i & \overline{B}_i \\ \overline{C}_i & \overline{D}_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \Re(a_i) & \Im(a_i) & 2 \\ -\Im(a_i) & \Re(a_i) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.58)$$

Para esta base isto pode ser feito de uma forma mais direta simplesmente substituindo-se as submatrizes $\begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_{i+1} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} em (2.54) por

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(a_i) & \Im(a_i) \\ -\Im(a_i) & \Re(a_i) \end{bmatrix} \quad \widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Antes de prosseguir para os exemplos desta seção, mostra-se agora com detalhes como a definição da quádrupla $(\overline{A}_i, \overline{B}_i, \overline{C}_i, \overline{D}_i)$ em (2.58) pode ser obtida satisfazendo-se as condições em (2.50).

O primeiro passo consiste em comparar os numeradores da primeira expressão em (2.50),

$$\alpha B_1 - A_{22}B_1 + A_{12}B_2 = \text{num}(M(\alpha, a_i)), \quad (2.60)$$

$$\alpha B_2 - A_{11}B_2 + A_{21}B_1 = \text{num}(N(\alpha, a_i)), \quad (2.61)$$

onde $\text{num}(M(\alpha, a_i))$ e $\text{num}(N(\alpha, a_i))$ denotam os numeradores de $M(\alpha, a_i)$ e $N(\alpha, a_i)$, respectivamente. Aplicando as Equações (2.60) e (2.61) para as funções racionais em (2.57), tem-se:

$$zB_1 - A_{22}B_1 + A_{12}B_2 = 2z - 2\Re(a_i) \quad (2.62)$$

$$zB_2 - A_{11}B_2 + A_{21}B_1 = -2\Im(a_i) \quad (2.63)$$

Obviamente, B_1 e B_2 devem satisfazer

$$B_1 = 2 \quad (2.64)$$

$$B_2 = 0 \quad (2.65)$$

Substituindo este resultado nas expressões em (2.62) e (2.63), tem-se também

$$A_{22} = \Re(a_i) \quad (2.66)$$

$$A_{21} = -\Im(a_i) \quad (2.67)$$

Por outro lado, os elementos A_{11} e A_{12} da matriz \bar{A}_i são obtidos comparando-se os denominadores da primeira expressão em (2.50), ou seja, comparando-se:⁴

$$\alpha^2 - \alpha(A_{11} + A_{22}) - A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} = \text{den}(M(\alpha, a_i)), \quad (2.68)$$

$$= \text{den}(N(\alpha, a_i)), \quad (2.69)$$

que resulta, neste caso, nas duas equações:

$$A_{11} + A_{22} = 2\Re(a_i) \quad (2.70)$$

$$-A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} = |a_i|^2 \quad (2.71)$$

Assim, com base nos valores já obtidos em (2.66) e (2.67), é possível se chegar em

$$A_{11} = \Re(a_i) \quad (2.72)$$

$$A_{12} = \Im(a_i) \quad (2.73)$$

Neste momento, as matrizes \bar{A}_i e \bar{B}_i já foram determinadas. \bar{C}_i e \bar{D}_i são então obtidas a partir da segunda expressão em (2.50) como sendo:

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\bar{D}_i = 1 \quad (2.75)$$

Exemplo 2.1. Seja um sistema de segunda ordem representado por funções do tipo polo-resíduo, com polos $\{a_1, a_2\} \in \mathfrak{R}$. As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são então obtidas como sendo

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

⁴ $\text{den}(M(\alpha, a_i))$ e $\text{den}(N(\alpha, a_i))$ denotam os denominadores de $M(\alpha, a_i)$ e $N(\alpha, a_i)$, respectivamente.

Isto implica diretamente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{bmatrix} U(z), \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{z - a_1} \\ \frac{1}{z - a_2} \end{bmatrix} U(z). \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Seja um sistema de terceira ordem representado por funções do tipo polo-resíduo, com polos $a_1^* = a_2$ e $a_3 \in \mathfrak{R}$. As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são então obtidas como sendo

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(a_1) & \Im(a_1) & 0 \\ -\Im(a_1) & \Re(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Isto implica diretamente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \\ \Phi_3(z) \end{bmatrix} U(z), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} \\ \frac{j}{z - a_1} - \frac{j}{z - a_2} \\ \frac{1}{z - a_3} \end{bmatrix} U(z). \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Considere que um determinado sistema G é decomposto por funções do tipo polo-resíduo (frações parciais) conforme segue:

$$G(z) = \frac{1}{z - 0,3} + \frac{2}{z - 0,2} + \frac{3}{z - 0,1} + 4. \quad (2.78)$$

Assumindo-se agora $a_1 = 0,3$, $a_2 = 0,2$ e $a_3 = 0,1$, a representação de G na forma de espaço de estados é então dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} z \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z), \\ \\ Y(z) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} + [4] U(z), \end{array} \right. \quad (2.79)$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(z) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \\ \Phi_3(z) \end{bmatrix} U(z), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z - 0,3} \\ \frac{1}{z - 0,2} \\ \frac{1}{z - 0,1} \end{bmatrix} U(z). \end{aligned}$$

2.3.1.2 Funções ortonormais de Takenaka-Malmquist

As funções ortonormais de Takenaka-Malmquist são definidas no domínio z por (HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005):

$$\Phi_i(z) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - a_j^* z}{z - a_j} \right) \frac{\sqrt{1 - |a_i|^2}}{z - a_i}. \quad (2.80)$$

Essas funções são bastante conhecidas por generalizar, a princípio, as bases de Laguerre e FIR. A base FIR onde $\{\Phi_i(z)\} = z^{-i}$, por exemplo, pode ser facilmente obtida alocando-se o conjunto de polos $\{a_i\}$ para a origem, ou seja, fazendo-se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Alternativamente, as funções ortonormais de Laguerre são obtidas quando todas as funções $\{\Phi_i(z)\}$ em (2.80) são parametrizadas por uma única dinâmica real $\{a_i\} = a$.

Definindo-se na etapa 1 da seção 2.2.1 (seção que resume a aplicação da metodologia proposta),

$$K(a_i) = 1; \quad L(z, a_i) = \frac{1 - a_i^* z}{z - a_i}; \quad R(z, a_i) = \frac{\sqrt{1 - |a_i|^2}}{z - a_i}, \quad (2.81)$$

a quádrupla que irá satisfazer as condições impostas em (2.49) é então dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & \sqrt{1 - |a_i|^2} \\ \sqrt{1 - |a_i|^2} & -a_i^* \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Caso a_i e a_{i+1} formem um par complexo conjugado, as funções $\Phi_i(z)$ e $\Phi_{i+1}(z)$ em (2.80) podem ser substituídas pelas funções ortonormais dadas por:

$$\begin{cases} \Phi_i(z) &= \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - a_j^* z}{z - a_j} \right) \frac{\sqrt{1 - c_i^2} (z - b_i)}{(z - a_i)(z - a_{i+1})} \\ \Phi_{i+1}(z) &= \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - a_j^* z}{z - a_j} \right) \frac{\sqrt{1 - c_i^2} \sqrt{1 - b_i^2}}{(z - a_i)(z - a_{i+1})} \end{cases} \quad (2.83)$$

onde

$$b_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{1 + a_i a_{i+1}} = \frac{2\Re(a_i)}{1 + |a_i|^2}; \quad c_i = -a_i a_{i+1} = -|a_i|^2. \quad (2.84)$$

Dessa forma, se diz que as funções de Takenaka-Malmquist também generalizam as funções (a dois parâmetros) de Kautz, obtidas quando um único par complexo conjugado de polos $a_1^* = a_2$ parametriza o conjunto de funções $\{\Phi_i(z)\}$ em (2.83), ou seja, quando essas funções são completamente parametrizadas pelos dois parâmetros reais $\{b_i\} = b$ e $\{c_i\} = c$ (NINNESS; GUSTAFSSON, 1997).

Pela metodologia unificada da seção anterior, como

$$\begin{cases} M(z, a_i) &= \frac{\sqrt{1 - c_i^2} (z - b_i)}{(z - a_i)(z - a_{i+1})}, \\ N(z, a_i) &= \frac{\sqrt{1 - c_i^2} \sqrt{1 - b_i^2}}{(z - a_i)(z - a_{i+1})}, \end{cases} \quad (2.85)$$

e

$$\begin{aligned} L(\alpha, a_i)L(\alpha, a_{i+1}) &= \left(\frac{1 - a_i^* z}{z - a_i} \right) \left(\frac{1 - a_{i+1}^* z}{z - a_{i+1}} \right) \\ &= \frac{-c_i z^2 + b_i(c_i - 1)z + 1}{z^2 + b_i(c_i - 1)z - c_i}, \end{aligned}$$

isto implica que, se a_i e a_{i+1} formam um par complexo conjugado, então as quádruplas $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$ e $(\bar{A}_{i+1}, \bar{B}_{i+1}, \bar{C}_{i+1}, \bar{D}_{i+1})$ em (2.82) devem ser substituídas na construção em cascata pela única quádrupla (obtida satisfazendo-se as condições em (2.50)) dada por⁵

⁵ Os passos para dedução dos valores desta quádrupla são similares aos passos já realizados para as funções do tipo polo-resíduo na seção 2.3.1.1. Tal procedimento é deixado como exercício para a BFR desta seção.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -b_i c_i & c_i \sqrt{1 - b_i^2} & \sqrt{1 - c_i^2} \\ \sqrt{1 - b_i^2} & b_i & 0 \\ \hline -b_i \sqrt{1 - c_i^2} & \sqrt{1 - b_i^2} \sqrt{1 - c_i^2} & -c_i \end{array} \right]. \quad (2.86)$$

Infelizmente, para essa base de funções a construção das matrizes $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}$ não é simplificada devido a própria definição das quádruplas em (2.82) e (2.86). Portanto, a montagem em cascata dessas matrizes na etapa 3 da seção 2.2.1 precisa ser implementada computacionalmente respeitando-se a possível existência de pares complexos conjugados de polos.

Exemplo 2.4. Seja um sistema de segunda ordem representado pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (no tempo discreto), com polos $\{a_1, a_2\} \in \mathfrak{R}$. Logo, as quádruplas

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \sqrt{1 - |a_1|^2} \\ \sqrt{1 - |a_1|^2} & -a_1^* \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & \sqrt{1 - |a_2|^2} \\ \sqrt{1 - |a_2|^2} & -a_2^* \end{bmatrix}$$

devem ser aplicadas na construção dada pelas Equações (2.35) e (2.36) tal que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ \sqrt{1 - |a_2|^2} \sqrt{1 - |a_1|^2} & a_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \sqrt{1 - |a_1|^2} \\ -a_1^* \sqrt{1 - |a_2|^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto implica diretamente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(z) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{bmatrix} U(z), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1 - |a_1|^2}}{z - a_1} \\ \left(\frac{1 - a_1^* z}{z - a_1} \right) \frac{\sqrt{1 - |a_2|^2}}{z - a_2} \end{bmatrix} U(z). \end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Seja um sistema de terceira ordem representado pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (no tempo discreto), com polos $a_1^* = a_2$ e $a_3 \in \mathfrak{R}$. Logo, as quádruplas

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -b_1 c_1 & c_1 \sqrt{1-b_1^2} & \sqrt{1-c_1^2} \\ \sqrt{1-b_1^2} & b_1 & 0 \\ \hline -b_1 \sqrt{1-c_1^2} & \sqrt{1-b_1^2} \sqrt{1-c_1^2} & -c_1 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_3 & \bar{B}_3 \\ \bar{C}_3 & \bar{D}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} a_3 & \sqrt{1-|a_3|^2} \\ \sqrt{1-|a_3|^2} & -a_3^* \end{array} \right]$$

devem ser aplicadas na construção dada pelas Equações (2.35) e (2.36) tal que:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -b_1 c_1 & c_1 \sqrt{1-b_1^2} & 0 \\ \sqrt{1-b_1^2} & b_1 & 0 \\ -b_1 \sqrt{1-c_1^2} \sqrt{1-|a_3|^2} & \sqrt{1-b_1^2} \sqrt{1-c_1^2} \sqrt{1-|a_3|^2} & a_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-c_1^2} \\ 0 \\ -c_1 \sqrt{1-|a_3|^2} \end{bmatrix},$$

sendo $b_1 = \frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 a_2}$ e $c_1 = -a_1 a_2$. Isto implica diretamente que:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \\ \Phi_3(z) \end{bmatrix} U(z),$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1-c_1^2}(z-b_1)}{z^2 + b_1(c_1-1)z - c_1} \\ \frac{\sqrt{1-c_1^2}\sqrt{1-b_1^2}}{z^2 + b_1(c_1-1)z - c_1} \\ \frac{\sqrt{1-|a_3|^2}}{z-a_3} \left(\frac{-c_1 z^2 + b_1(c_1-1)z + 1}{z^2 + b_1(c_1-1)z - c_1} \right) \end{bmatrix} U(z).$$

2.3.2 Bases no tempo contínuo ($\alpha = s$)

2.3.2.1 Funções do tipo polo-resíduo

No tempo contínuo as funções do tipo polo-resíduo são definidas da seguinte maneira,

$$\Phi_i(s) = \frac{1}{s - a_i}. \quad (2.87)$$

Assim como no domínio z , no caso em que a_i e a_{i+1} compõem um par complexo conjugado de polos, as funções

$$\begin{cases} \Phi_i(s) &= \frac{1}{s - a_i} + \frac{1}{s - a_{i+1}} \\ \Phi_{i+1}(s) &= \frac{j}{s - a_i} - \frac{j}{s - a_{i+1}} \end{cases} \quad (2.88)$$

podem ser utilizadas ao invés das funções racionais $\Phi_i(s)$ e $\Phi_{i+1}(s)$ definidas em (2.87).

Como pode ser visto, a definição da base de funções do tipo polo-resíduo em (2.87) e (2.88) é similar ao realizado no tempo discreto. Portanto, o processo de construção no tempo contínuo das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} é idêntico ao processo de construção apresentado para o tempo discreto e, portanto, não será repetido nesta seção. Ressalta-se ainda que a técnica *Vector Fitting* tradicional (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999) encontra-se baseada em modelos formados pelas funções racionais definidas em (2.87) e (2.88).

2.3.2.2 Funções ortonormais de Takenaka-Malmquist

As funções ortonormais de Takenaka-Malmquist são definidas no domínio s por:

$$\Phi_i(s) = \sqrt{2\Re(-a_i)} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{s + a_j^*}{s - a_j} \right) \frac{1}{s - a_i}. \quad (2.89)$$

Com base na etapa 1 da seção 2.2.1 (seção que resume a aplicação da metodologia proposta), define-se então:

$$\mathbf{K}(a_i) = \sqrt{2\Re(-a_i)}; \quad \mathbf{L}(s, a_i) = \frac{s + a_i^*}{s - a_i}; \quad \mathbf{R}(s, a_i) = \frac{1}{s - a_i}; \quad (2.90)$$

Assim, pela etapa 2 da seção 2.2.1, o conjunto de elementos $\bar{\mathbf{A}}_i$, $\bar{\mathbf{B}}_i$, $\bar{\mathbf{C}}_i$ e $\bar{\mathbf{D}}_i$ que satisfaz as condições impostas em (2.49) é dado por

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_i \\ \bar{\mathbf{C}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 2\Re(a_i) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Isto implica diretamente que

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\Re(a_1) & a_2 & \cdots & 0 \\ 2\Re(a_1) & 2\Re(a_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\Re(a_1) & 2\Re(a_2) & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Por outro lado, para que a matriz \mathbf{A} apresente valores reais no caso em que a_i e a_{i+1} compõem um par complexo conjugado de polos, as funções $\Phi_i(s)$ e $\Phi_{i+1}(s)$ em (2.89) são substituídas pelas funções ortonormais (DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007):

$$\begin{cases} \Phi_i(s) &= \sqrt{2\Re(-a_i)} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{s + a_j^*}{s - a_j} \right) \frac{s - |a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})}, \\ \Phi_{i+1}(s) &= \sqrt{2\Re(-a_{i+1})} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{s + a_j^*}{s - a_j} \right) \frac{s + |a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})}, \end{cases} \quad (2.93)$$

onde, portanto,

$$\begin{cases} \mathbf{M}(s, a_i) &= \frac{s - |a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})} = \frac{s - |a_i|}{s^2 - 2s\Re(a_i) + |a_i|^2}, \\ \mathbf{N}(s, a_i) &= \frac{s + |a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})} = \frac{s + |a_i|}{s^2 - 2s\Re(a_i) + |a_i|^2}. \end{cases} \quad (2.94)$$

Dessa forma, se a_i e a_{i+1} formam um par complexo conjugado, então as quádruplas $(\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\mathbf{B}}_i, \bar{\mathbf{C}}_i, \bar{\mathbf{D}}_i)$ e $(\bar{\mathbf{A}}_{i+1}, \bar{\mathbf{B}}_{i+1}, \bar{\mathbf{C}}_{i+1}, \bar{\mathbf{D}}_{i+1})$ em (2.91) devem ser substituídas na construção em cascata pela única quádrupla (obtida satisfazendo-se as condições em (2.50)) dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_i \\ \bar{\mathbf{C}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \Re(a_i) & -|a_i| + \Re(a_i) & 1 \\ |a_i| + \Re(a_i) & \Re(a_i) & 1 \\ \hline 2\Re(a_i) & 2\Re(a_i) & 1 \end{array} \right]. \quad (2.95)$$

Para esta base isto pode ser feito de uma maneira mais direta simplesmente substituindo-se

a submatriz $\begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 2\Re(a_i) & a_{i+1} \end{bmatrix}$ da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ em (2.92) por

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(a_i) & -|a_i| + \Re(a_i) \\ |a_i| + \Re(a_i) & \Re(a_i) \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

O par de matrizes desejadas (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é então obtido realizando-se as operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\overline{\mathbf{B}}$, sendo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\Re(-a_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{2\Re(-a_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{2\Re(-a_n)} \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Ressalta-se ainda que a técnica *Orthonormal Vector Fitting* (DESCRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007) encontra-se baseada em modelos formados pela BFR apresentada nesta seção.

Antes de prosseguir para os exemplos desta seção, mostra-se agora com detalhes como a definição da quádrupla $(\overline{A}_i, \overline{B}_i, \overline{C}_i, \overline{D}_i)$ em (2.95) pode ser obtida satisfazendo-se as condições em (2.50).

Similarmente à análise realizada para as funções do tipo polo-resíduo, o primeiro passo consiste em comparar os numeradores da primeira expressão em (2.50),

$$\alpha B_1 - A_{22}B_1 + A_{12}B_2 = \text{num}(M(\alpha, a_i)), \quad (2.98)$$

$$\alpha B_2 - A_{11}B_2 + A_{21}B_1 = \text{num}(N(\alpha, a_i)), \quad (2.99)$$

Aplicando-se então as Equações (2.98) e (2.99) para as funções racionais em (2.94), tem-se:

$$sB_1 - A_{22}B_1 + A_{12}B_2 = s - |a_i|, \quad (2.100)$$

$$sB_2 - A_{11}B_2 + A_{21}B_1 = s + |a_i|. \quad (2.101)$$

Obviamente, B_1 e B_2 devem satisfazer

$$B_1 = 1 \quad (2.102)$$

$$B_2 = 1 \quad (2.103)$$

Substituindo este resultado nas expressões em (2.100) e (2.101), tem-se agora

$$-A_{22} + A_{12} = -|a_i| \quad (2.104)$$

$$-A_{11} + A_{21} = |a_i| \quad (2.105)$$

O sistema de equações lineares acima possui duas equações e quatro incógnitas. As outras duas equações necessárias para se compor um sistema de solução única são obtidas comparando-se os denominadores da primeira expressão em (2.50), ou seja, comparando-se:

$$\alpha^2 - \alpha(A_{11} + A_{22}) - A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} = \text{den}(M(\alpha, a_i)), \quad (2.106)$$

$$= \text{den}(N(\alpha, a_i)), \quad (2.107)$$

que resulta, neste caso, nas duas equações adicionais:

$$A_{11} + A_{22} = 2\Re(a_i) \quad (2.108)$$

$$-A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} = |a_i|^2 \quad (2.109)$$

As expressões acima, em conjunto com as expressões em (2.104) e (2.105) formam um sistema de equações lineares com uma única solução possível. Tal solução pode ser encontrada combinando-se a Equação (2.109) com as Equações (2.104) e (2.105), de forma a se chegar em

$$-A_{12} + A_{11} = |a_i| \quad (2.110)$$

Usando-se então (2.104) e (2.110), tem-se

$$A_{11} = A_{22} \quad (2.111)$$

Logo, por (2.108),

$$A_{11} = \Re(a_i) \quad (2.112)$$

$$A_{22} = \Re(a_i) \quad (2.113)$$

Por (2.104) e (2.105), obtém-se também

$$A_{12} = -|a_i| + \Re(a_i) \quad (2.114)$$

$$A_{21} = |a_i| + \Re(a_i) \quad (2.115)$$

Neste momento, as matrizes \bar{A}_i e \bar{B}_i já foram determinadas. Agora, a partir de algumas manipulações matemáticas, é possível obter \bar{C}_i e \bar{D}_i a partir da segunda expressão em (2.50) como sendo:

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Re(a_i) & 2\Re(a_i) \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

$$\bar{D}_i = 1 \quad (2.117)$$

Exemplo 2.6. Seja um sistema de segunda ordem representado pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (no tempo contínuo), com polos $\{a_1, a_2\} \in \Re$. Logo, as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são obtidas como sendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 2\Re(a_1) & a_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}U(s) &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(s) \\ \bar{\Phi}_2(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s - a_1} \\ \left(\frac{s + a_1^*}{s - a_1}\right) \frac{1}{s - a_2} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Uma vez que as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\Re(-a_1)} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\Re(-a_2)} \end{bmatrix}$ são construídas, o par de matrizes desejadas (\mathbf{A}, \mathbf{B}) pode ser obtido realizando-se as operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2\Re(-a_1)} \frac{1}{s - a_1} \\ \sqrt{2\Re(-a_2)} \left(\frac{s + a_1^*}{s - a_1}\right) \frac{1}{s - a_2} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Exemplo 2.7. Seja G um sistema de terceira ordem representado pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (no tempo contínuo), com polos $a_1 \in \Re$ e $a_2^* = a_3$. As matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são então obtidas como sendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 2\Re(a_1) & \Re(a_2) & -|a_2| + \Re(a_2) \\ 2\Re(a_1) & |a_2| + \Re(a_2) & \Re(a_2) \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}U(s) &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(s) \\ \bar{\Phi}_2(s) \\ \bar{\Phi}_3(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s - a_1} \\ \left(\frac{s + a_1^*}{s - a_1}\right) \frac{s - |a_2|}{(s - a_2)(s - a_3)} \\ \left(\frac{s + a_1^*}{s - a_1}\right) \frac{s + |a_2|}{(s - a_2)(s - a_3)} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Uma vez que as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\Re(-a_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\Re(-a_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\Re(-a_3)} \end{bmatrix}$ são construídas, o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) pode ser obtido realizando-se as operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \\ \Phi_3(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2\Re(-a_1)} \frac{1}{s - a_1} \\ \sqrt{2\Re(-a_2)} \left(\frac{s + a_1^*}{s - a_1}\right) \frac{s - |a_2|}{(s - a_2)(s - a_3)} \\ \sqrt{2\Re(-a_3)} \left(\frac{s + a_1^*}{s - a_1}\right) \frac{s + |a_2|}{(s - a_2)(s - a_3)} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Assumindo agora $a_1 = -2$, $a_2 = -2 + j200$ e $a_3 = -2 - j200$, a representação de $G(s)$ é então dada por:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \\
&= r_0 + \sum_{i=1}^3 r_i \Phi_i(s), \\
&= r_0 + 2r_1 \frac{1}{s+2} + 2r_2 \left(\frac{s-2}{s+2} \right) \frac{s - \sqrt{(2^2 + 200^2)}}{(s+2-j200)(s+2+j200)} \\
&\quad + 2r_3 \left(\frac{s-2}{s+2} \right) \frac{s + \sqrt{(2^2 + 200^2)}}{(s+2-j200)(s+2+j200)}.
\end{aligned}$$

2.3.2.3 Funções de frequência localizada

As funções de frequência localizada foram propostas para polos reais por [Welsh e Rojas \(2007\)](#) e são definidas no tempo contínuo por

$$\Phi_i(s) = |a_i| \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{s}{s-a_j} \right) \frac{1}{s-a_i}. \quad (2.118)$$

Definindo-se na etapa 1 da metodologia unificada de construção,

$$\mathbf{K}(a_i) = |a_i|; \quad \mathbf{L}(s, a_i) = \frac{s}{s-a_i}; \quad \mathbf{R}(s, a_i) = \frac{1}{s-a_i}; \quad (2.119)$$

a quádrupla que irá satisfazer as condições impostas em (2.49) é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_i \\ \bar{\mathbf{C}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ a_i & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

Diferentemente das outras BFRs já apresentadas neste capítulo, tal base não apresenta, em princípio, um conjunto alternativo de funções para o caso em que a_i e a_{i+1} formam um par complexo conjugado. Dessa forma, modelos formados por essas funções apresentam dificuldades na modelagem de sistemas mal amortecidos se a matriz \mathbf{A} é condicionada a assumir apenas valores reais.

Propõe-se então neste trabalho o novo conjunto de funções racionais dado pela Equação (2.121) para o caso em que a_i e a_{i+1} formam um par complexo conjugado de polos.⁶ Com esse novo conjunto de funções sistemas mal amortecidos podem ser melhor

⁶ Um outro conjunto de funções para o caso de pares complexos conjugados também foi recentemente proposto em ([VOORHOEVE et al., 2014](#)).

modelados ao mesmo tempo em que os elementos da matriz \mathbf{A} são mantidos dentro do conjunto dos números reais. No Capítulo 4 deste trabalho ou em (SCHUMACHER; OLIVEIRA; MITCHELL, 2015) mostra-se ainda como as iterações de Sanathanan-Koerner podem ser utilizadas para seleção dos polos de modelos formados por essa nova base de funções.

$$\begin{cases} \Phi_i(s) &= |a_i| \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{s}{s - a_j} \right) \frac{-|a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})} \\ \Phi_{i+1}(s) &= |a_{i+1}| \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{s}{s - a_j} \right) \frac{s + |a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})} \end{cases} \quad (2.121)$$

Seguindo a metodologia unificada de construção, como

$$\begin{cases} M(s, a_i) &= \frac{-|a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})} = \frac{-|a_i|}{s^2 - 2s\Re(a_i) + |a_i|^2}, \\ N(s, a_i) &= \frac{s + |a_i|}{(s - a_i)(s - a_{i+1})} = \frac{s + |a_i|}{s^2 - 2s\Re(a_i) + |a_i|^2}, \end{cases} \quad (2.122)$$

isto implica que, se a_i e a_{i+1} formam um par complexo conjugado, então as quádruplas $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i)$ e $(\bar{A}_{i+1}, \bar{B}_{i+1}, \bar{C}_{i+1}, \bar{D}_{i+1})$ em (2.120) devem ser substituídas na construção em cascata pela única quádrupla (obtida satisfazendo-se as condições em (2.50)) dada por⁷

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -|a_i| & -|a_i| & 0 \\ 2|a_i| + 2\Re(a_i) & |a_i| + 2\Re(a_i) & 1 \\ \hline |a_i| + 2\Re(a_i) & 2\Re(a_i) & 1 \end{array} \right]. \quad (2.123)$$

Para esta base de funções a construção das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ também não pode ser simplificada devido a própria definição da quádrupla em (2.123). Portanto, a montagem em cascata dessas matrizes na etapa 3 precisa ser implementada computacionalmente respeitando-se a possível existência de pares complexos conjugados de polos.

Por fim, as matrizes desejadas são então obtidas a partir das operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}$ onde

⁷ Os passos para dedução dos valores desta quádrupla são similares aos passos já realizados para as funções do tipo polo-resíduo na seção 2.3.1.1 e para as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist na seção 2.3.2.2. Tal procedimento é deixado como exercício para a BFR desta seção.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} |a_1| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |a_2| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |a_n| \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

Exemplo 2.8. Seja um sistema de terceira ordem representado pelas funções de frequência localizada, com polos $\{a_1, a_2, a_3\} \in \mathfrak{R}$. Logo, as quádruplas

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{D}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_2 & \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \bar{\mathbf{D}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_3 & \bar{\mathbf{B}}_3 \\ \bar{\mathbf{C}}_3 & \bar{\mathbf{D}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ a_3 & 1 \end{bmatrix}$$

devem ser aplicadas na construção dada pelas Equações (2.35) e (2.36) tal que:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}U(s) &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(s) \\ \bar{\Phi}_2(s) \\ \bar{\Phi}_3(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-a_1} \\ \left(\frac{s}{s-a_1}\right)\frac{1}{s-a_2} \\ \left(\frac{s}{s-a_1}\right)\left(\frac{s}{s-a_2}\right)\frac{1}{s-a_3} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Uma vez que as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} |a_1| & 0 & 0 \\ 0 & |a_2| & 0 \\ 0 & 0 & |a_3| \end{bmatrix}$ são construídas, o par desejado (\mathbf{A}, \mathbf{B}) pode ser obtido realizando-se as operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \\ \Phi_3(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} |a_1| \frac{1}{s - a_1} \\ |a_2| \left(\frac{s}{s - a_1}\right) \frac{1}{s - a_2} \\ |a_3| \left(\frac{s}{s - a_1}\right) \left(\frac{s}{s - a_2}\right) \frac{1}{s - a_3} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Exemplo 2.9. Seja um sistema de terceira ordem representado pelas funções de frequência localizada, com polos $a_1^* = a_2$ e $a_3 \in \mathfrak{R}$. Logo, as quádruplas

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{D}}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -|a_1| & -|a_1| & 0 \\ 2|a_1| + 2\Re(a_1) & |a_1| + 2\Re(a_1) & 1 \\ |a_1| + 2\Re(a_1) & 2\Re(a_1) & 1 \end{array} \right] \text{ e } \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_3 & \bar{\mathbf{B}}_3 \\ \bar{\mathbf{C}}_3 & \bar{\mathbf{D}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ a_3 & 1 \end{bmatrix}$$

devem ser aplicadas na construção dada pelas Equações (2.35) e (2.36) tal que:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -|a_1| & -|a_1| & 0 \\ 2|a_1| + 2\Re(a_1) & |a_1| + 2\Re(a_1) & 0 \\ |a_1| + 2\Re(a_1) & 2\Re(a_1) & a_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}U(s) &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(s) \\ \bar{\Phi}_2(s) \\ \bar{\Phi}_3(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-|a_1|}{(s - a_1)(s - a_2)} \\ \frac{s + |a_1|}{(s - a_1)(s - a_2)} \\ \left(\frac{s}{s - a_1}\right) \left(\frac{s}{s - a_2}\right) \frac{1}{s - a_3} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

Uma vez que as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} |a_1| & 0 & 0 \\ 0 & |a_2| & 0 \\ 0 & 0 & |a_3| \end{bmatrix}$ são construídas, o par de matrizes

desejadas (\mathbf{A}, \mathbf{B}) pode ser obtido realizando-se as operações $\mathbf{A} = \mathbf{K}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{K}^{-1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{K}\overline{\mathbf{B}}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \\ \Phi_3(s) \end{bmatrix} U(s), \\ &= \begin{bmatrix} |a_1| \frac{-|a_1|}{(s-a_1)(s-a_2)} \\ |a_2| \frac{s+|a_1|}{(s-a_1)(s-a_2)} \\ |a_3| \left(\frac{s}{s-a_1}\right) \left(\frac{s}{s-a_2}\right) \frac{1}{s-a_3} \end{bmatrix} U(s). \end{aligned}$$

2.4 Considerações finais do capítulo

Neste capítulo, inicialmente a representação de sistemas lineares invariantes no tempo em termos de BFRs foi apresentada no espaço de estados. Em seguida, foi proposta uma metodologia unificada que permite a obtenção das BFRs mais utilizadas no contexto de identificação de sistemas. Por fim, em meio à construção da base de funções de frequência localizada proposta por [Welsh e Goodwin \(2003\)](#) para polos reais, definiu-se um conjunto alternativo de funções racionais para o caso de polos complexos conjugados.

3 Identificação no domínio do tempo

Neste capítulo, inicialmente o problema de identificação de sistemas lineares no domínio do tempo é revisto. Em seguida, é apresentado o método iterativo de Steiglitz-McBride e sua formulação usando variáveis instrumentais. Baseando-se no conceito dessas iterações para seleção de polos de modelos formados por BFRs, um novo algoritmo de identificação é então desenvolvido (contribuição C.3 (a)). A extensão deste algoritmo usando variáveis instrumentais é também apresentada (contribuição C.3 (b)). Essa formulação baseada em variáveis instrumentais garante que um ótimo local seja obtido após a convergência do processo iterativo. Conforme será visto nos estudos de caso (onde um deles considera a simulação de um sistema de potência monofásico no *software* EMTP-RV), os algoritmos analisados apresentam melhor condicionamento numérico quando funções ortonormais são utilizadas como BFRs. Tal melhoria de condicionamento numérico é também observada quando modelos de ordem mais elevada são utilizados.

3.1 Definição do problema de identificação

No domínio do tempo discreto, a relação entre a entrada escalar $u_0(k)$ e a saída escalar $y_0(k)$ de um sistema linear invariante no tempo \mathcal{S} pode ser representada pela função de transferência $G_0(q)$ da seguinte forma (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999; VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994):

$$\mathcal{S} : y_0(k) = G_0(q)u_0(k) + v(k), \quad (3.1)$$

onde $v(k)$ representa a perturbação não controlável (ruído) presente na saída medida do sistema e q denota o operador avanço que, quando aplicado a um sinal genérico $f(k)$, satisfaz $q^i f(k) = f(k+i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

O problema de se encontrar um modelo $G(q)$ que seja o mais próximo possível de $G_0(q)$ é o desafio de identificação tratado neste capítulo. Com esse desafio em mente,

frequentemente define-se uma estrutura de modelo $G(q, \theta)$ na forma de função de transferência racional (AGUIRRE, 2007; HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005; LJUNG, 1999; VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994), ou seja, dada pela razão entre dois polinômios em q , conforme mostra a Equação (3.2).

$$\begin{aligned} G(q, \theta) &= \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}}, \\ &= \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Note-se que $G(q, \theta)$ não representa mais um único modelo, mas todo um conjunto de modelos D_G obtido variando-se o vetor de parâmetros θ ,

$$\theta = \left[b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad f_1 \quad \dots \quad f_{n_f} \right]^T \in D_\theta. \quad (3.3)$$

Em (3.3), D_θ representa o conjunto formado por todos os valores possíveis para θ . Uma definição mais formal no que diz respeito a modelos, conjunto de modelos e estruturas de modelos pode ser encontrada em (LJUNG, 1999).

Dada essa estrutura $G(q, \theta)$, o desafio agora se reduz a encontrar um determinado $\theta^* \in D_\theta$, capaz de tornar o modelo $G(q, \theta^*) \in D_G$ suficientemente próximo do sistema $G_0(q)$. Tratando esse problema no contexto de identificação de sistemas no domínio do tempo, θ^* é encontrado a partir da definição de um critério de minimização que, por sua vez, baseia-se num conjunto de amostras discretizadas (medidas ou simuladas) do sistema \mathcal{S} , $\{ u_0(k), y_0(k) \}$, $k = 1, \dots, N$. Tal critério de minimização tem por objetivo aproximar a saída modelada $y(k, \theta) = G(q, \theta)u_0(k)$ da saída do sistema $y_0(k)$, isso para $k = 1, \dots, N$. Dessa forma, geralmente define-se θ^* como sendo o vetor de parâmetros capaz de minimizar o erro quadrático médio (EQM) entre $y(k, \theta)$ e $y_0(k)$, ou seja,¹

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in D_\theta} V(\theta), \quad (3.4)$$

sendo $V(\theta)$ a função objetivo definida por:

¹ Esta formulação está baseada no que está definido na literatura como métodos de erro de previsão (MEP). Mais sobre MEP pode ser encontrado em (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999; VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994).

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_0(k) - y(k, \theta))^2, \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(y_0(k) - \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)} u_0(k) \right)^2. \quad (3.6)$$

Como pode ser visto, encontrar θ^* a partir da minimização de $V(\theta)$ constitui um problema originalmente não-linear na variável θ , uma vez que os parâmetros $\{f_i\}$ aparecem no denominador da função de transferência. Assim, técnicas de otimização que buscam resolver essa questão são capazes de fornecer apenas uma estimativa (“boa” ou “ruim”) para θ^* .

Com base nas informações já apresentadas, uma definição mais formal para o problema de identificação no domínio do tempo pode ser estabelecida: *O problema de identificação no domínio do tempo consiste em, dado um conjunto de amostras do sistema \mathcal{S} , $\{y_0(k), u_0(k)\}$, $k = 1, \dots, N$, encontrar um modelo $G(q, \hat{\theta}) \in D_G$, onde $\hat{\theta} \in D_\theta$ corresponde a um determinado valor de θ que busca satisfazer o critério de minimização dado pela Equação (3.4).*

Assim, para um dado modelo $G(q, \hat{\theta})$, o valor da função $V(\theta)$ pode ser usado como uma métrica para se inferir sobre a aproximação de $G(q, \hat{\theta})$ em relação ao sistema $G_0(q)$, uma vez que $V(\hat{\theta})$ representa o EQM entre a saída medida (ou simulada) $y_0(k)$ e a saída do modelo dada por $y(k, \hat{\theta})$. A definição do EQM desempenha também um papel fundamental quando se deseja comparar a aproximação entre dois ou mais modelos. Um modelo é dito aqui ser mais preciso em relação aos demais caso seu EQM seja menor. Também é possível observar pela Equação (3.5) que para um dado modelo $G(q, \hat{\theta})$, se seu respectivo EQM for nulo, então a saída estimada do modelo $y(k, \hat{\theta})$ corresponde exatamente a saída medida $y_0(k)$ para cada amostra discretizada $k = 1, \dots, N$.

Ressalta-se ainda que o vetor de parâmetros $\hat{\theta} \in D_\theta$ é uma estimativa para θ^* (sendo $\hat{\theta} = \theta^*$ a “melhor” estimativa possível para uma dada estrutura $G(q, \theta)$). Esta estimativa pode ser encontrada utilizando-se diferentes técnicas de otimização não-linear. Contudo, técnicas de otimização não-linear podem apresentar uma convergência lenta em

termos de tempo computacional, inviabilizando assim as suas implementações práticas em casos onde uma atualização rápida do modelo é necessária.

Por outro lado, existem métodos iterativos capazes de transformar o problema originalmente não-linear em (3.6) em uma sequência de problemas lineares de otimização que são resolvidos iterativamente, usando por exemplo, o método dos mínimos quadrados linear. No contexto de identificação de sistemas discretos, o procedimento iterativo proposto por [Steiglitz e McBride \(1965\)](#) representa uma alternativa numericamente eficaz e computacionalmente rápida para estimação do modelo $G(q, \hat{\theta}) = B(q, \hat{\theta})/F(q, \hat{\theta})$, onde os polos de $G(q, \hat{\theta})$ (raízes de $F(q, \hat{\theta})$) são conhecidos a cada iteração e subsequentemente realocados.

3.2 As iterações de Steiglitz-McBride para identificação no domínio do tempo

As iterações de Steiglitz-McBride constituem uma poderosa ferramenta para se estimar os parâmetros $\{b_i\}$ e $\{f_i\}$ de uma função de transferência $G(q, \theta)$, que busca por sua vez se aproximar da função de transferência “real” $G_0(q)$ de um sistema linear. Essa abordagem iterativa é equivalente ao procedimento iterativo proposto por [Sanathanan e Koerner \(1963\)](#) no tempo contínuo.

Para definir o método proposto por [Steiglitz e McBride \(1965\)](#), inicialmente reescreve-se o critério de minimização em (3.6) conforme segue

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(F(q, \theta) \frac{1}{F(q, \theta)} y_0(k) - B(q, \theta) \frac{1}{F(q, \theta)} u_0(k) \right)^2. \quad (3.7)$$

Em seguida, a fim de tornar o problema de minimização linear em seus parâmetros $\{f_i\}$ e $\{b_i\}$, assume-se que o denominador $F(q, \theta)$ é sempre conhecido a partir da iteração anterior, de tal forma que um problema de otimização linear na forma

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(F(q, \theta) \frac{1}{F(q, \hat{\theta}^{(t-1)})} y_0(k) - B(q, \theta) \frac{1}{F(q, \hat{\theta}^{(t-1)})} u_0(k) \right)^2 \quad (3.8)$$

é resolvido a cada iteração t . Assim, θ^* é estimado iterativamente pelo método dos mínimos quadrados linear.

A solução analítica para (3.8) pode ser encontrada substituindo-se

$$F(q, \theta) = 1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}, \quad (3.9)$$

$$B(q, \theta) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}, \quad (3.10)$$

e definindo-se

$$y_F(k) = \frac{1}{F(q, \hat{\theta}^{(t-1)})} y_0(k), \quad (3.11)$$

$$u_F(k) = \frac{1}{F(q, \hat{\theta}^{(t-1)})} u_0(k). \quad (3.12)$$

Assim, (3.8) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(y_F(k) - \varphi^T(k, \hat{\theta}^{(t-1)}) \theta \right)^2, \quad (3.13)$$

sendo

$$\varphi(k, \hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} u_F(k-1) \\ \vdots \\ u_F(k-n_b) \\ -y_F(k-1) \\ \vdots \\ -y_F(k-n_f) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Para

$$\Upsilon(\hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1, \hat{\theta}^{(t-1)}) \\ \varphi^T(2, \hat{\theta}^{(t-1)}) \\ \vdots \\ \varphi^T(N, \hat{\theta}^{(t-1)}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_F = \begin{bmatrix} y_F(1) \\ y_F(2) \\ \vdots \\ y_F(N) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

tem-se ainda que

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \left(\mathbf{y}_F - \Upsilon(\hat{\theta}^{(t-1)}) \theta \right)^T \left(\mathbf{y}_F - \Upsilon(\hat{\theta}^{(t-1)}) \theta \right). \quad (3.16)$$

Por fim, fazendo-se a derivada da função a ser minimizada a cada iteração e igualando-se essa derivada a zero, tem-se que a solução analítica para o método de Steiglitz-McBride é dada por:

$$\hat{\theta}^{(t)} = [\Upsilon^T(\hat{\theta}^{(t-1)})\Upsilon(\hat{\theta}^{(t-1)})]^{-1} \Upsilon^T(\hat{\theta}^{(t-1)})\mathbf{y}_F. \quad (3.17)$$

O processo de estimação do modelo $G(q, \hat{\theta})$ por esse método se resume assim em resolver (3.17) iterativamente. Para tanto, a matriz $\Upsilon(\hat{\theta}^{(t-1)})$ deve ser construída a cada iteração e depende apenas do conjunto de coeficientes $\{f_i\}$ estimado na iteração anterior.

Na primeira iteração ($t = 1$), pode-se fazer $\{f_i\} = 0 \Rightarrow F(q, \theta^{(0)}) = 1$. Entretanto, se existe um conhecimento prévio aproximado acerca dos polos do sistema, pode-se calcular os coeficientes $\{f_i\}$ do polinômio $F(q, \theta^{(0)})$ considerando-se que esse polinômio possui raízes iguais a este conjunto aproximado de polos.

Vale ainda ressaltar que os problemas (3.7) e (3.8) não são necessariamente iguais, uma vez que (3.7) busca minimizar $\sum \varepsilon^2(k, \theta)$ enquanto em (3.8) minimiza-se a função objetivo modificada $\sum \left(\frac{F(q, \theta)}{F(q, \hat{\theta}^{(t-1)})} \varepsilon(k, \theta) \right)^2$. Dessa forma, mesmo após a convergência do processo iterativo, não pode-se garantir que $\hat{\theta}^{(t)}$ é um mínimo local da função objetivo original $V(\theta)$, ou ainda, que $\hat{\theta}^{(t)} = \theta^*$. Esta observação é enfatizada em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988). Outros diversos estudos que discutem aspectos de convergência local ou global das iterações de Steiglitz-McBride podem ser encontrados em (REGALIA, 1999; REGALIA; MBOUP; ASHARI, 1997; REGALIA; MBOUP, 1996; FAN; NAYERI, 1990; STOICA; SÖDERSTRÖM, 1981).

3.2.1 Formulação usando variáveis instrumentais

O objetivo desta seção é, baseando-se em variáveis instrumentais, reformular o método de Steiglitz-McBride a fim de garantir que a solução encontrada pelo processo iterativo é de fato um ótimo local da função objetivo $V(\theta)$ definida em (3.5). Para tanto, se $\hat{\theta}$ é um mínimo local de $V(\theta)$, então ele necessariamente satisfaz $\left. \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \mathbf{0}$, ou ainda, pela regra da cadeia:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{s}(k, \hat{\theta}) \left(F(q, \hat{\theta}) \frac{1}{F(q, \hat{\theta})} y_0(k) - B(q, \hat{\theta}) \frac{1}{F(q, \hat{\theta})} u_0(k) \right) = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

sendo $\mathbf{s}(k, \theta)$ o vetor de instrumentos definido por (VAN DEN HOF; DOUMA, 2008)

$$\mathbf{s}(k, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} y(k, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} G(q, \theta) u_0(k). \quad (3.19)$$

Como pode ser observado, o problema de se encontrar $\hat{\theta}$ a partir da expressão em (3.18) é também não-linear em relação a essas variáveis. Buscando resolver esse problema de maneira similar ao realizado no método tradicional de Steiglitz-McBride (Equação (3.8)), Van den Hof e Douma (2008) propuseram o seguinte processo iterativo de regressão por variáveis instrumentais:

$$\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} = \text{sol}_{\theta \in D_\theta} \left\{ \sum_{k=1}^N \mathbf{s}(k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \left(F(q, \theta) \frac{1}{F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})} y_0(k) - B(q, \theta) \frac{1}{F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})} u_0(k) \right) = \mathbf{0} \right\}. \quad (3.20)$$

onde

$$\mathbf{s}(k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) = \frac{\partial}{\partial \theta} G(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) u_0(k) = \begin{bmatrix} u_{\text{F}}(k-1) \\ \vdots \\ u_{\text{F}}(k-n_b) \\ -G(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) u_{\text{F}}(k-1) \\ \vdots \\ -G(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) u_{\text{F}}(k-n_f) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial b_j} G(q, \theta) u_0(k) = \frac{1}{F(q, \theta)} u_0(k-j) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial f_j} G(q, \theta) u_0(k) = -\frac{B(q, \theta)}{F^2(q, \theta)} u_0(k-j). \quad (3.22)$$

A expressão (3.20) implica que, a cada iteração, $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)}$ deve satisfazer (baseando-se na notação já introduzida neste capítulo)

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{s}(k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \left(y_{\text{F}}(k) - \varphi^{\text{T}}(k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} \right) = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

ou ainda, na forma matricial equivalente,

$$\mathbf{S}^{\text{T}}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \left[\mathbf{y}_{\text{F}} - \Upsilon(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} \right] = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

onde

$$\mathbf{S}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T(1, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{s}^T(N, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Por fim, isolando-se o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)}$ em (3.24) tem-se que a solução analítica para o método de Steiglitz-McBride formulado usando o conceito de variáveis instrumentais é dada por:

$$\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} = [\mathbf{S}^T(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})\Upsilon(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})]^{-1} \mathbf{S}^T(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})\mathbf{y}_F. \quad (3.26)$$

Comparando-se essa solução com a solução tradicional em (3.17), é possível observar que elas são diferentes entre si uma vez que a formulação usando variáveis instrumentais requer também a construção da matriz $\mathbf{S}(\hat{\theta}_{\text{IV}}^{(t-1)})$. Uma outra diferença entre esses algoritmos diz respeito às características das suas soluções. Conforme mencionado em (VAN DEN HOF; DOUMA, 2008), utilizando-se essa formulação baseada em variáveis instrumentais é possível garantir que um ótimo local é obtido após a convergência do processo iterativo. Tal proposição é confirmada a seguir.

Assumindo que $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)}$ converge para um vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{\text{VI}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c)} = \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c+1)} = \hat{\theta}_{\text{VI}}$ ou ainda

$$F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c+1)}) = F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c)}) = F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}). \quad (3.27)$$

Portanto, na iteração $t = c + 1$ a Equação (3.20) pode ser reescrita como sendo

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{s}(k, \hat{\theta}_{\text{VI}}) \left(F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}) \frac{1}{F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}})} y_0(k) - B(q, \hat{\theta}_{\text{VI}}) \frac{1}{F(q, \hat{\theta}_{\text{VI}})} u_0(k) \right) = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Esta expressão coincide com a condição de otimalidade local imposta em (3.18), o que implica que $\hat{\theta}_{\text{VI}}$ é de fato um ótimo local de $V(\theta)$.

Por outro lado, apesar do uso de variáveis instrumentais garantir, em caso de convergência, um ótimo local da função objetivo, esta formulação é conhecida por apresentar um maior condicionamento numérico em relação à sua respectiva formulação tradicional (VOORHOEVE *et al.*, 2014). Isto significa que o condicionamento numérico da matriz

$\mathbf{S}^T(\hat{\theta}_{VI}^{(t-1)})\Upsilon(\hat{\theta}_{VI}^{(t-1)})$ em (3.26) pode ser elevado, tornando a inversão dessa matriz uma tarefa difícil mesmo para *softwares* como o MATLAB. Schoukens, Pintelon e Rolain (2012) mostram ainda que condicionamentos numéricos elevados em algoritmos de identificação podem levar a modelos imprecisos.

Na próxima seção deste trabalho, um novo algoritmo iterativo de identificação baseado nas iterações de Steiglitz-McBride é desenvolvido. Esse algoritmo utiliza modelos formados por BFRs e uma descrição no espaço de estados. Conforme será visto, a utilização das funções ortonormais de Takenaka-Malmquist como BFRs permite a obtenção de um algoritmo melhor condicionado numericamente.

3.3 Procedimento iterativo usando BFRs

Algoritmos baseados em BFRs têm sido amplamente utilizados durante os últimos anos especialmente para identificação no domínio da frequência (VOORHOEVE *et al.*, 2014; NOURI; ACHAR; NAKHLA, 2010; MAESTRELLI, 2010; REGINATO, 2008; DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007; GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999). Neste contexto, a técnica proposta por Gustavsen e Semlyen (1999) passou a ser bastante conhecida como *Vector Fitting* e utiliza as iterações de Sanathanan-Koerner (similares às iterações de Steiglitz-McBride, mas no tempo contínuo) para identificação de modelos formados pela base de funções do tipo polo-resíduo. A extensão da técnica *Vector Fitting* para identificação de modelos formados pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist, conhecida como *Orthonormal Vector Fitting*, foi proposta por Deschrijver, Haegeman e Dhaene (2007) com o objetivo de reduzir o condicionamento numérico das matrizes presentes na estimação de parâmetros dos modelos.

Por outro lado, abordagens no domínio do tempo que utilizam essas iterações (Sanathanan-Koerner ou Steiglitz-McBride) para identificação de modelos formados por BFRs permanecem ainda pouco exploradas. Na realidade, as técnicas de identificação propostas em (UBOLLI; GUSTAVSEN, 2011), (LEI; WONG, 2008) e (GRIVET-TALOCIA, 2003) parecem ser as únicas abordagens presentes na literatura que utilizam bases racionais

para identificação no domínio do tempo. No entanto, tais técnicas são aplicáveis apenas para modelos formados por funções do tipo polo-resíduo e, em alguns casos, exigem ainda métodos de integração numérica para aproximação dos sinais presentes na função objetivo.

De maneira similar ao realizado por [Deschrijver, Haegeman e Dhaene \(2007\)](#) no domínio da frequência, será considerado nesta seção uma estrutura de modelo genérica no tempo discreto dada por:

$$G(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{B(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}, \quad (3.29)$$

$$= \frac{B(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})/\hat{F}(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})/\hat{F}(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})}. \quad (3.30)$$

Em (3.30), $\{r_i\}$ e $\{\tilde{r}_i\}$ representam um conjunto de coeficientes a ser estimado e compõem o vetor de parâmetros λ definido por

$$\lambda = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n & \tilde{r}_1 & \cdots & \tilde{r}_n \end{bmatrix}^T \in D_\lambda. \quad (3.31)$$

Além disso, n denota a ordem do modelo e \mathbf{a}^{esp} representa um conjunto pré-especificado de n polos que caracterizam completamente as funções racionais $\{\Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})\}$. Considera-se que todos os polos pertencem ao círculo unitário $|z| < 1$. Em (3.31), D_λ representa o conjunto formado por todos os valores possíveis para λ .

O objetivo inicial é encontrar uma aproximação na forma de funções racionais para $G_0(q)$ do sistema \mathcal{S} em (3.1), tal que a saída $y_0(k)$ possa ser aproximada da seguinte forma:

$$y_0(k) \approx y(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = G(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})u_0(k), \quad (3.32)$$

ou, equivalentemente,

$$y_0(k) \approx \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})u_0(k) - \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})y_0(k). \quad (3.33)$$

Tendo como base os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 2, é possível descrever esta relação por uma estrutura em espaço de estado dada por

$$\tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B} u_0(k), \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{B} y_0(k), \quad (3.35)$$

$$y_0(k) \approx \mathbf{r} \tilde{\mathbf{u}}(k) - \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{y}}(k), \quad (3.36)$$

onde

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 & \cdots & \tilde{r}_n \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Para que essa representação seja possível, note-se que as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} (que dependem exclusivamente da BFR utilizada e do conjunto de polos \mathbf{a}^{esp}) devem ser construídas de tal forma que

$$(q\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Phi_1(q, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \\ \vdots \\ \Phi_n(q, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

De acordo com a definição feita para o problema de identificação no domínio do tempo, no caso de modelos formados por BFRs, λ é estimado a partir de um conjunto de amostras no domínio do tempo do sistema \mathcal{S} , $\{u_0(k), y_0(k)\}$, $k = 1, \dots, N$ minimizando-se:

$$V(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}), \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_0(k) - y(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}))^2, \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})} y_0(k) - \frac{B(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})} u_0(k) \right)^2. \quad (3.41)$$

O valor de λ que minimiza $V(\lambda)$ é denotado por

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in D_\lambda} V(\lambda). \quad (3.42)$$

Assim, o problema de otimização que busca estimar λ^* é originalmente não-linear em relação às suas variáveis, uma vez que o vetor de parâmetros λ aparece no denominador de $V(\lambda)$. Para resolver essa questão, propõe-se o processo baseado nas iterações de Steiglitz-McBride dado por

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \arg \min_{\lambda \in D_\lambda} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} y_0(k) - \frac{B(q, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} u_0(k) \right)^2, \quad (3.43)$$

ou equivalentemente,

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \arg \min_{\lambda \in D_\lambda} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) \right) y_0(k) - \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) u_0(k) \right)^2. \quad (3.44)$$

Em (3.44), $\hat{\lambda}^{(t)}$ é a estimativa para λ^* obtida na iteração t e $\mathbf{a}^{(t)}$ representa o conjunto pré-especificado de polos para o qual $\hat{\lambda}^{(t)}$ é calculado.

Buscando-se fazer a sequência de problemas lineares definida em (3.43) próxima ao problema originalmente não-linear em (3.41), $\mathbf{a}^{(t)}$ pode ser especificado de forma a satisfazer

$$\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)}) = F(q, \hat{\lambda}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)}). \quad (3.45)$$

Tal equivalência é obtida fazendo-se com que as raízes desses dois polinômios sejam iguais, isto é, fazendo-se (veja (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016) para uma prova geral)

$$\mathbf{a}^{(t)} = \text{autovalores}(\mathbf{A}^{(t-1)} - \mathbf{B}^{(t-1)} \tilde{\mathbf{r}}^{(t-1)}). \quad (3.46)$$

A expressão em (3.46) sugere que o conjunto de polos a ser usado na iteração t seja igual ao conjunto de zeros da função de transferência $F(q, \hat{\lambda}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)}) / \hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t-1)})$ obtida na iteração $t - 1$. Polos instáveis (caso eles ocorram em (3.46)) podem ser realocados de volta para a região estável ($|z| < 1$) invertendo-se seus respectivos módulos.

Assumindo ainda que $\hat{\lambda}^{(t)}$ e $\mathbf{a}^{(t)}$ convergem para $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mathbf{a}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\lambda}^{(c)} = \hat{\lambda}^{(c+1)} = \hat{\lambda}$ e $\mathbf{a}^{(c)} = \mathbf{a}^{(c+1)} = \hat{\mathbf{a}}$ e, portanto, pela Equação (3.45)

$$\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(q, \hat{\lambda}^{(c)}, \mathbf{a}^{(c)}) = F(q, \hat{\lambda}^{(c+1)}, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(q, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{F}(q, \hat{\mathbf{a}}). \quad (3.47)$$

Isto significa que ao se realocar os polos dessa forma, o algoritmo fornece (após a convergência) um modelo racional simplificado na forma

$$G(q, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{B(q, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})}{F(q, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})}, \quad (3.48)$$

$$= \frac{B(q, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})}{\hat{F}(q, \hat{\mathbf{a}})} = \sum_{i=1}^n \hat{r}_i \Phi_i(q, \hat{\mathbf{a}}), \quad (3.49)$$

cuja relação entrada-saída pode ser descrita no espaço de estados por

$$\tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \hat{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \hat{\mathbf{B}} u_0(k), \quad (3.50)$$

$$y(k, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & \cdots & \hat{r}_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k). \quad (3.51)$$

A seguir, mostra-se como $\hat{\lambda}^{(t)}$ pode ser calculado a cada iteração. Reescrevendo-se (3.44) conforme segue

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \arg \min_{\lambda \in D_\lambda} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_0(k) - \mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)})\lambda)^2, \quad (3.52)$$

com

$$\mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^T(k) & -\tilde{\mathbf{y}}^T(k) \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

a solução analítica para as iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs pode ser calculada por

$$\hat{\lambda}^{(t)} = [\mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)})\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})]^{-1} \mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)})\mathbf{y}, \quad (3.54)$$

sendo

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^T(1, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \mathbf{m}^T(N, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0(1) \\ \vdots \\ y_0(N) \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Assim, o processo de estimação do modelo simplificado $G(q, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})$ em (3.49) se resume em resolver (3.54) iterativamente. Para tanto, a matriz $\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})$ deve ser construída a cada iteração e depende apenas do conjunto de polos $\mathbf{a}^{(t)}$ obtido a partir da Equação (3.46). Caso não exista nenhum conhecimento prévio aproximado acerca dos polos do sistema na primeira iteração ($t = 1$), pode-se fazer $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{0}$.

Como pode ser observado, a estrutura em espaço de estados em (3.34), (3.35) e (3.36) apresenta um papel fundamental neste algoritmo, isto é, tanto na realocação de polos em (3.46) quanto no cálculo dos elementos $\mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)})$ presentes na matriz $\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})$. Tais elementos podem ser calculados a partir da utilização recursiva das equações de estado em (3.34) e (3.35). Além disso, o modelo simplificado obtido após a convergência do processo iterativo é também fruto dessa estrutura em espaço de estados.

Vale ainda ressaltar que, durante qualquer iteração do processo, um modelo simplificado como em (3.49) pode ser obtido fazendo-se $\mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)}) = \tilde{\mathbf{u}}^T(k)$ diretamente em (3.54). Isto pode ser usado por exemplo para se monitorar, a cada iteração, o EQM do modelo associado ao conjunto de polos $\mathbf{a}^{(t)}$.

O fluxograma da Figura 4 resume como o algoritmo iterativo baseado em BFRs proposto nesta seção pode ser implementado. Como pode ser percebido por este fluxograma, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da estrutura em espaço de estados determinam a base de funções usada no modelo. Isso também pode ser verificado pela Equação (3.38). Lembra-se ainda que a construção dessas matrizes para a base de funções do tipo polo-resíduo e para as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (definidas no tempo discreto) é detalhadamente investigada no Capítulo 2 deste documento. Note-se que a ordem do modelo n é definida ao se escolher o conjunto de n polos iniciais que compõem o vetor $\mathbf{a}^{(1)}$.

Conforme será mostrado nos resultados deste trabalho, a escolha da BFR utilizada no modelo pode influenciar diretamente na convergência do processo iterativo, assim como o próprio conjunto de polos iniciais $\mathbf{a}^{(1)}$.

Ao término das iterações, o conjunto de polos $\mathbf{a}^{(N_{\text{it}}+1)}$ que irá parametrizar as funções racionais do modelo é obtido, onde N_{it} denota o número de iterações utilizado. Consequentemente, a equação de estado

$$\tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \mathbf{A}^{(N_{\text{it}}+1)} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{B}^{(N_{\text{it}}+1)} u_0(k)$$

é também conhecida. Os coeficientes de um modelo simplificado final como em (3.49) podem então ser estimados a partir da solução $\mathbf{r} = [\mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(N_{\text{it}}+1)})\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(N_{\text{it}}+1)})]^{-1} \mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(N_{\text{it}}+1)})\mathbf{y}$, onde $\mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(N_{\text{it}}+1)})$ é agora construída fazendo-se $\mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(N_{\text{it}}+1)}) = \tilde{\mathbf{u}}^T(k)$.

Para finalizar esta seção, ressalta-se ainda que os problemas de otimização (3.41) e (3.43) apresentados nesta seção não são necessariamente iguais, uma vez que em (3.41) busca-se minimizar $\sum \varepsilon^2(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})$ enquanto em (3.43) minimiza-se $\sum \left(\frac{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} \varepsilon(k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)}) \right)^2$. Dessa forma, assim como no método tradicional de Steiglitz-McBride, não é possível garantir que $\hat{\lambda}$ é um mínimo local da função objetivo original $V(\lambda)$, ou ainda, que $\hat{\lambda} = \lambda^*$.

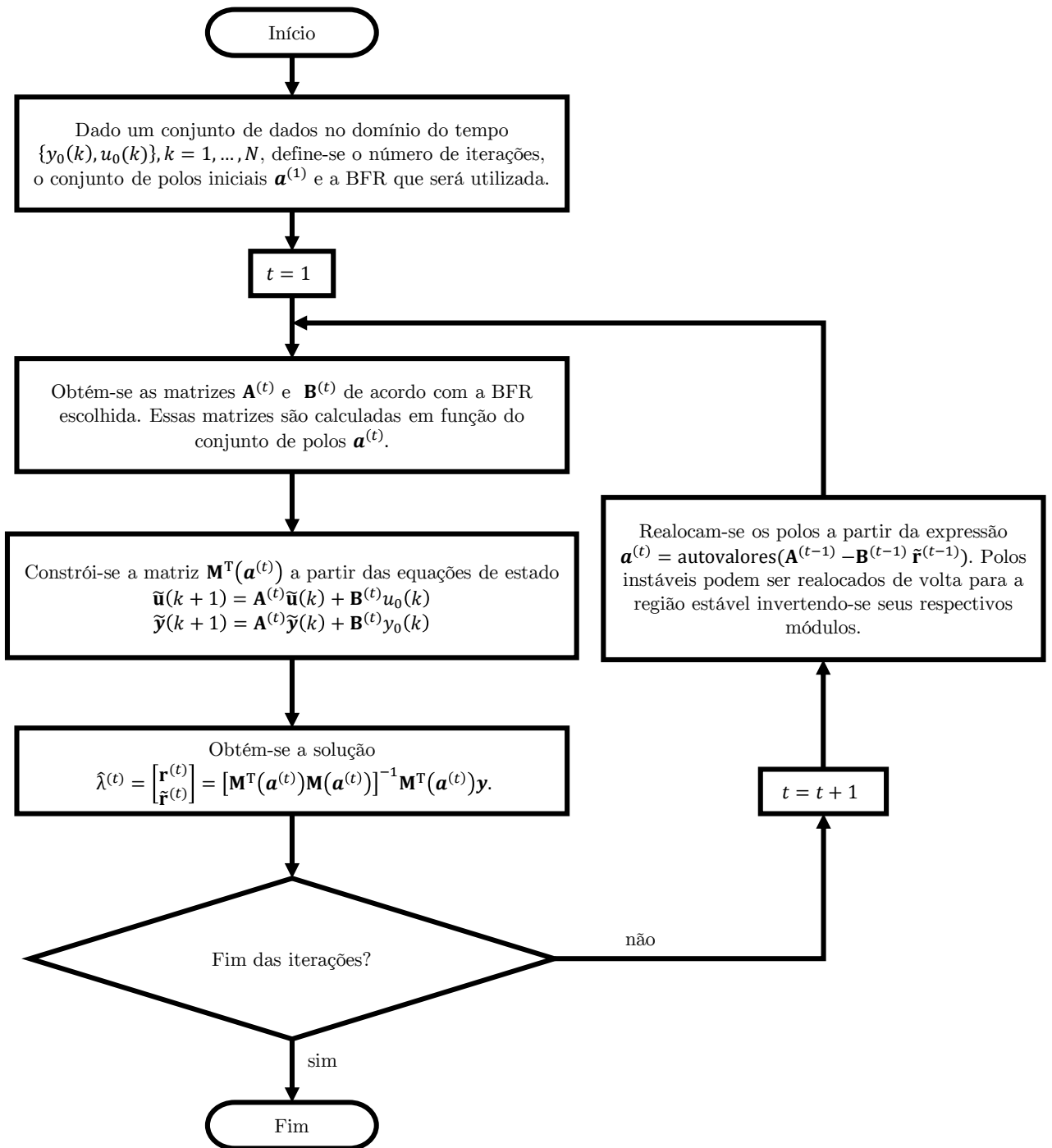


Figura 4 – Algoritmo resumido referente às iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs.

3.3.1 Formulação usando variáveis instrumentais

O objetivo desta seção é, baseando-se em variáveis instrumentais, reformular o método baseado em BFRs da seção anterior a fim de garantir que a solução encontrada pelo processo iterativo é de fato um ótimo local da função objetivo $V(\lambda)$ definida em

(3.41). Para tanto, se $\hat{\lambda}$ é um mínimo local de $V(\lambda)$, então ele necessariamente satisfaz

$$\left. \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \mathbf{0}, \text{ ou ainda, pela regra da cadeia:} \quad (3.56)$$

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{p}(k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \left(\frac{F(q, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(q, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})} y_0(k) - \frac{B(q, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(q, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})} u_0(k) \right) = \mathbf{0},$$

sendo $\mathbf{p}(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})$ o vetor de instrumentos definido por

$$\mathbf{p}(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} G(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) u_0(k). \quad (3.57)$$

Ao término desta seção discute-se em mais detalhes como os termos $\mathbf{p}(k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})$ podem ser calculados.

É possível observar pela expressão em (3.56) que o problema de se encontrar $\hat{\lambda}$ é também não-linear em relação a essas variáveis. Buscando resolver esse problema de maneira similar ao realizado no método baseado em BFRs da seção anterior (Equação (3.43)), propõe-se o seguinte processo iterativo de regressão por variáveis instrumentais:

$$\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = \text{sol}_{\lambda \in D_\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^N \mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \left(\frac{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} y_0(k) - \frac{B(q, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(t)})} u_0(k) \right) = \mathbf{0} \right\}. \quad (3.58)$$

Esta expressão implica que, a cada iteração, $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}$ deve satisfazer (baseando-se na notação já introduzida neste capítulo)

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \left(y_0(k) - \mathbf{m}^T(k, \mathbf{a}^{(t)}) \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} \right) = \mathbf{0}, \quad (3.59)$$

ou ainda, na forma matricial equivalente,

$$\mathbf{P}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) [\mathbf{y} - \mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)}) \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}] = \mathbf{0}, \quad (3.60)$$

onde

$$\mathbf{P}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(1, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(N, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Por fim, isolando-se o vetor de parâmetros $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}$ em (3.60), tem-se que a solução analítica para as iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs e formuladas usando o conceito de variáveis instrumentais é dada por:

$$\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = \left[\mathbf{P}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)}) \right]^{-1} \mathbf{P}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{y}. \quad (3.62)$$

Comparando-se essa solução com a solução tradicional proposta em (3.54), é possível observar que elas são diferentes entre si uma vez que a formulação usando variáveis instrumentais requer também a construção da matriz $\mathbf{P}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$. Assim como no método de Steiglitz-McBride formulado usando variáveis instrumentais, é possível garantir que se as iterações acima convergem, então um ótimo local da função objetivo $V(\lambda)$ é obtido. Tal proposição é confirmada a seguir.

Assumindo que a realocação de polos ocorra de acordo com as Equações (3.45) e (3.46) e que, além disso, $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}$ e $\mathbf{a}^{(t)}$ convergem para $\hat{\lambda}_{\text{VI}}$ e $\hat{\mathbf{a}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c)} = \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c+1)} = \hat{\lambda}_{\text{VI}}$ e $\mathbf{a}^{(c)} = \mathbf{a}^{(c+1)} = \hat{\mathbf{a}}$ e, portanto, pela Equação (3.45)

$$\hat{F}(q, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c)}, \mathbf{a}^{(c)}) = F(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c+1)}, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{F}(q, \hat{\mathbf{a}}). \quad (3.63)$$

Dessa forma, na iteração $t = c + 1$ a Equação (3.58) pode ser reescrita como sendo

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}}) \left(\frac{F(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})}{F(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})} y_0(k) - \frac{B(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})}{F(q, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})} u_0(k) \right) = \mathbf{0}. \quad (3.64)$$

Esta expressão coincide com a condição de otimalidade local imposta em (3.56), o que implica que $\hat{\lambda}_{\text{VI}}$ é de fato um ótimo local de $V(\lambda)$.

Conforme será mostrado nos resultados da próxima seção deste trabalho, este algoritmo baseado em BFRs e variáveis instrumentais tende a apresentar matrizes melhor condicionadas numericamente em relação ao método de Steiglitz-McBride formulado usando variáveis instrumentais, isto considerando que as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist sejam usadas como BFR. Entretanto, justamente por se tratar de um algoritmo baseado em variáveis instrumentais, o condicionamento numérico da matriz $\mathbf{P}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})$ em (3.62) pode ainda assim ser significativamente elevado (especialmente nas primeiras iterações).

Uma vez que a formulação tradicional da técnica baseada em BFRs (cujo resumo é dado pelo fluxograma da Figura 4) apresenta matrizes melhor condicionadas numericamente,

pode-se usar esse algoritmo durante as primeiras iterações do processo (duas ou três, por exemplo) e, só então, partir para a formulação usando variáveis instrumentais (cuja solução é dada pela Equação (3.62)) fazendo-se $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)} = \hat{\lambda}^{(t-1)}$. Isto significa que, após as primeiras iterações, a solução tradicional $\hat{\lambda}^{(t)} = [\mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)})\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})]^{-1} \mathbf{M}^T(\mathbf{a}^{(t)})\mathbf{y}$ no fluxograma da Figura 4 é substituída pela solução usando variáveis instrumentais dada por $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = [\mathbf{P}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})\mathbf{M}(\mathbf{a}^{(t)})]^{-1} \mathbf{P}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})\mathbf{y}$.

3.3.1.1 Cálculo aproximado do vetor de instrumentos $\mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$

Nesta seção mostra-se como os termos $\mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ podem ser aproximados de modo a simplificar a montagem da matriz $\mathbf{P}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$. De acordo com a definição realizada em (3.57),

$$\mathbf{p}(k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} G(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) u_0(k) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})} \right) u_0(k). \quad (3.65)$$

Dessa forma, existem dois tipos possíveis de derivada de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial r_j} G(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})} \Phi_j(q, \mathbf{a}^{\text{esp}}), \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_j} G(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{-\sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})\right)^2} \Phi_j(q, \mathbf{a}^{\text{esp}}). \quad (3.67)$$

Com base nas expressões acima, pode-se notar que o cálculo da matriz $\mathbf{P}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ é bastante custoso computacionalmente, uma vez que ambas as equações devem ser calculadas para $i = 1, \dots, n$ e, também, para $k = 1, \dots, N$. Neste trabalho, a aproximação

$$\frac{F(q, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{\hat{F}(q, \mathbf{a}^{\text{esp}})} = 1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(q, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \approx 1 \quad (3.68)$$

é aplicada nas Equações (3.66) e (3.67). Com essa aproximação, o problema de se calcular $\mathbf{P}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ pode ser substancialmente simplificado uma vez que o vetor de instrumentos $\mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ pode ser aproximado por:

$$\mathbf{p}(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k) \\ -\sum_{i=1}^n r_i^{(t-1)} \Phi_i(q, \mathbf{a}^{(t)}) \tilde{\mathbf{u}}(k) \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Vale ainda ressaltar que esta aproximação não altera as conclusões feitas em relação à convergência do processo iterativo uma vez que, pela Equação (3.63), a aproximação imposta em (3.68) torna-se uma igualdade quando o algoritmo converge.

3.4 Testes e análise dos resultados

Nesta seção as técnicas baseadas em BFRs (propostas na seção 3.3 deste documento) são comparadas com o método de Steiglitz-McBride através de três estudos de caso. No primeiro estudo de caso (Estudo de caso 1: Sistema de 3ª Ordem), um sistema de 3ª ordem com ruído na saída será usado para avaliar, em termos de EQM e condicionamento numérico, o impacto da utilização (ou não) de variáveis instrumentais, isso levando-se em conta dois conjuntos de polos iniciais diferentes para os modelos. No segundo estudo de caso (Estudo de caso 2: Braço Robótico), por sua vez, será considerado a identificação de um braço robótico cujos dados (coletados em laboratório) encontram-se disponíveis em (DE MOOR, 2015). Por fim, no terceiro estudo de caso (Estudo de caso 3: Sistema de Potência Monofásico), considera-se a identificação de um sistema de potência monofásico composto por um cabo subterrâneo e três linhas de transmissão. Para este caso, modelos de ordem mais elevada são também considerados.

A seguinte notação para as técnicas será adotada:

- SM: método tradicional de **Steiglitz-McBride**;
- SM-VI: método de **Steiglitz-McBride** formulado usando o conceito de **variáveis instrumentais**;
- SM-BPR: iterações de **Steiglitz-McBride** aplicadas a modelos formados por BFRs.
Base utilizada: funções do tipo polo-resíduo;

- SM-BPR-VI: iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs. Base utilizada: funções do tipo polo-resíduo. Formulação usando o conceito de variáveis instrumentais;
- SM-BFO: iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs. Base utilizada: funções ortonormais de Takanaka-Malmquist definidas para o tempo discreto;
- SM-BFO-VI: iterações de Steiglitz-McBride aplicadas a modelos formados por BFRs. Base utilizada: funções ortonormais de Takanaka-Malmquist definidas para o tempo discreto. Formulação usando o conceito de variáveis instrumentais.

3.4.1 Estudo de caso 1: Sistema de 3ª Ordem

Para este primeiro estudo de caso, será considerada uma adaptação do exercício 67 proposto em (SCHOUKENS; PINTELO; ROLAIN, 2012). O sistema de terceira ordem a ser identificado é definido por

$$G_0(q) = \frac{0,1389 + 0,4166q^{-1} + 0,4166q^{-2} + 0,1389q^{-3}}{1 + 0,4218q^{-1} + 0,2499q^{-2} - 0,5609q^{-3}}. \quad (3.70)$$

Para se gerar o conjunto de dados de estimação, considera-se que a entrada $u_0(k)$ é uma sequência (com 1000 amostras) distribuída uniformemente no intervalo $[-\varsigma, \varsigma]$, sendo $\varsigma = 2,5$. A saída $y_0(k)$, por sua vez, é corrompida por um ruído $v(k)$ colorido (veja a Equação (3.1)). Especificamente, considera-se $v(k) = H_0(q)e(k)$, sendo $H_0(q)$ o filtro

$$H_0(q) = \frac{0,1080 + 0,2160q^{-1} + 0,1080q^{-2}}{1 - 0,8799q^{-1} + 0,3119q^{-2}},$$

e $e(k)$ uma sequência aleatória obtida a partir de uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $0,6^2$. A Figura 5 mostra, considerando um período de amostragem de 1s, o conjunto de dados de estimação resultante.

O principal objetivo deste estudo de caso é investigar como as técnicas propostas anteriormente (SM e SM-VI) e as técnicas propostas neste trabalho (SM-BPR, SM-BPR-VI, SM-BFO e SM-BFO-VI) se comportam na identificação de $G_0(q)$. No processo de estimação dos modelos, são utilizadas 25 iterações e modelos de terceira ordem ($n = n_b = n_f = 3$).

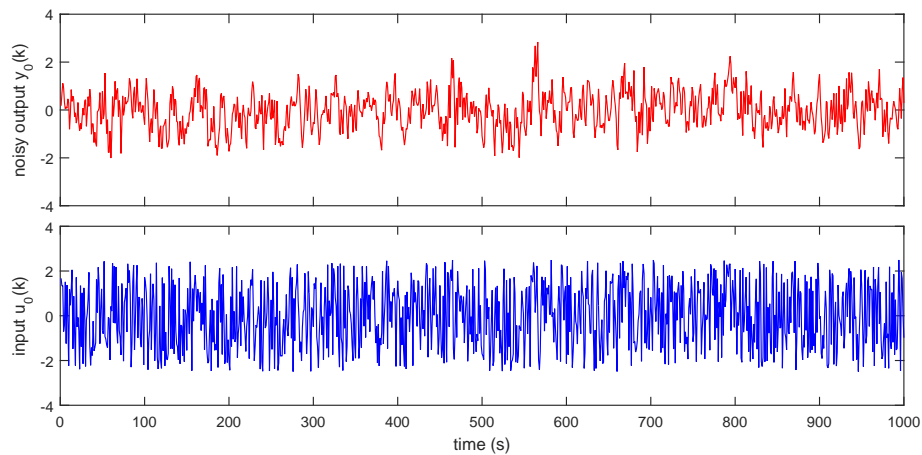


Figura 5 – Sistema de 3^a Ordem: Dados de estimação.

Em um primeiro momento, os polos iniciais que compõem o modelo são selecionados como sendo $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$, ou seja, próximos à circunferência de raio unitário (veja também na Figura 6). Esta estratégia para seleção de polos iniciais é também utilizada em (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016).

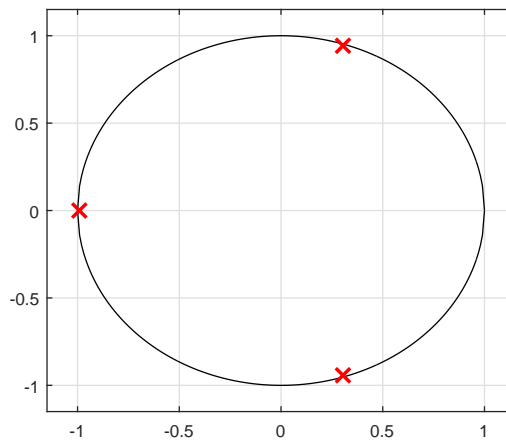


Figura 6 – Polos iniciais em $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$.

A Figura 7 mostra, para este caso, os EQMs obtidos para cada modelo durante o processo de realocação iterativa dos seus polos. Analisando-se a Figura 7 é possível perceber que as técnicas baseadas em variáveis instrumentais apresentam modelos com uma maior precisão quando comparados com a formulação tradicional das respectivas técnicas. Tais resultados estão de acordo com os apontamentos feitos em Van den Hof e Douma (2008), que justificam a utilização de variáveis instrumentais no contexto de

identificação de sistemas quando estes apresentam um sinal de ruído aditivo filtrado na saída. Ao término das iterações (em $t = 25$), as técnicas tradicionais levaram a modelos com polos em $\{0,6406; 0,9842 + 0,1716j; 0,9842 - 0,1716j\}$, enquanto as técnicas baseadas em variáveis instrumentais levaram a modelos com polos em $\{0,6439; -0,5196 + 0,7932j; -0,5196 - 0,7932j\}$. Note-se a proximidade entre os polos de $G_0(q)$ em (3.70), isto é, $\{0,6228; -0,5223 + 0,7923j; -0,5223 - 0,7923j\}$, e os polos obtidos usando variáveis instrumentais. Os modelos em espaço de estados resultantes (para cada técnica baseada em BFRs aplicada) encontram-se no apêndice deste capítulo (Seção 3.6).

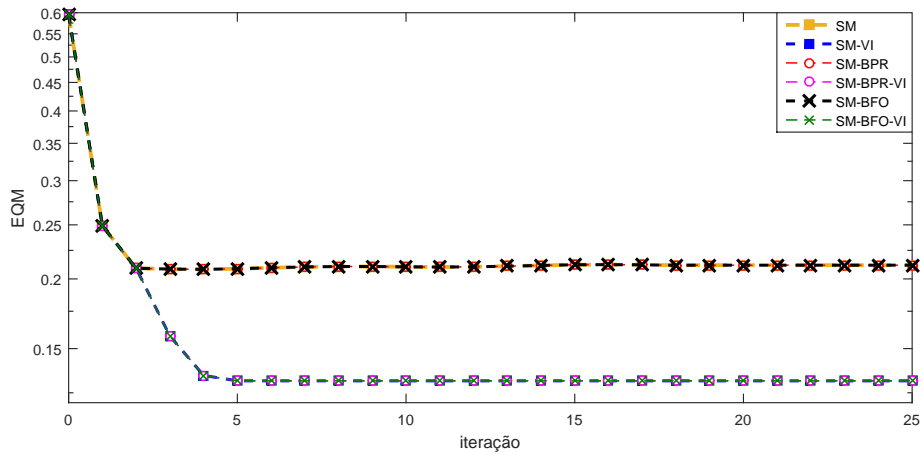


Figura 7 – Modelos de 3ª ordem com polos iniciais $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$: EQM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

Já a Figura 8 mostra o condicionamento numérico² (por iteração) de cada uma das técnicas testadas. É possível perceber a partir dessa figura que as técnicas baseadas em bases de funções ortonormais (SM-BFO e SM-BFO-VI) apresentam vantagens significativas (em termos de condicionamento numérico) quando comparadas com as técnicas propostas anteriormente (SM e SM-VI, respectivamente).

Agora, a identificação de $G_0(q)$ será avaliada considerando que os polos iniciais do modelo encontram-se na origem do plano complexo, ou seja, em $\{0; 0; 0\}$. O objetivo é mostrar que a seleção dos polos iniciais não é, em princípio, um ponto crítico das técnicas

² Todas as técnicas aqui avaliadas possuem uma solução iterativa genérica do tipo $x = (\mathbf{A}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{c}$ (veja, por exemplo, as soluções em (3.17), (3.26), (3.54) e (3.62)). Neste trabalho, é considerado o condicionamento numérico da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$, que nada mais é do que a razão entre o maior e o menor valor singular desta matriz. Em diversas ocasiões, uma matriz é dita “bem condicionada numericamente” caso seu condicionamento seja próximo de 1.

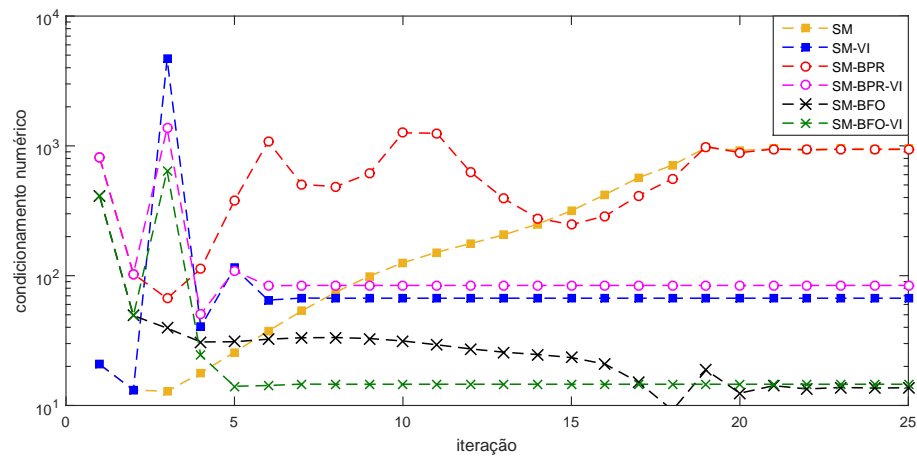


Figura 8 – Modelos de 3ª ordem com polos iniciais $\{-0,99; 0,3059 + 0,9415j; 0,3059 - 0,9415j\}$: Condicionamento numérico (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

avaliadas.

A Figura 9 mostra os EQMs obtidos para este segundo caso. Mais uma vez, é possível perceber que as técnicas baseadas em variáveis instrumentais apresentam modelos com uma maior precisão quando comparados com a formulação tradicional das respectivas técnicas. Além disso, pode-se notar pela Figura 9 que as técnicas baseadas em variáveis instrumentais convergem com um menor número de iterações.

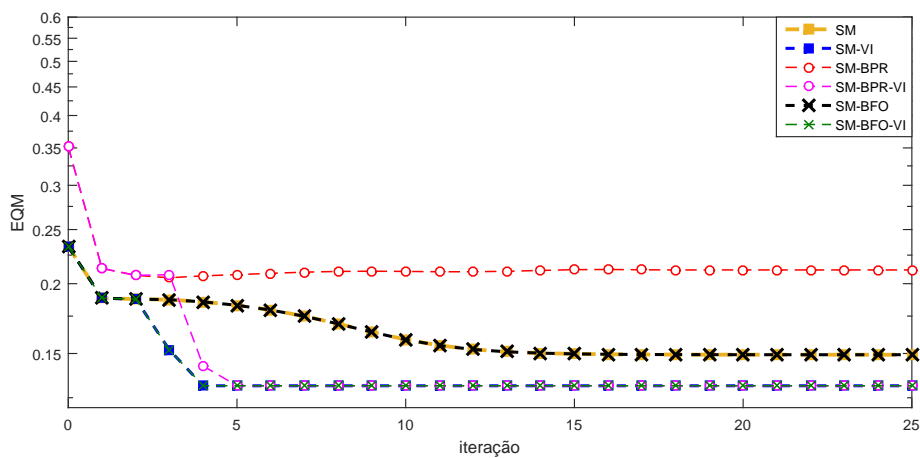


Figura 9 – Modelos de 3ª ordem com polos iniciais $\{0; 0; 0\}$: EQM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

3.4.2 Estudo de caso 2: Braço Robótico

Este exemplo trata da identificação de um braço robótico instalado num motor elétrico. Os dados (disponibilizados de forma *online* pela base de dados DaISy (DE MOOR, 2015)) foram coletados a partir da medição da aceleração do braço robótico devido ao torque de reação (em relação ao solo) na estrutura. O período de amostragem, denotado por T_s , não é fornecido pela base de dados e, portanto, considera-se um valor normalizado de $T_s = 1s$.

De um total de 1024 medições (torque-aceleração), as primeiras 512 amostras são escolhidas para formar o conjunto de dados de estimação, enquanto a outra metade é usada para validação dos modelos. Neste exemplo, são consideradas dez iterações no processo de estimação e modelos de segunda ordem ($n = n_b = n_f = 2$) com polos iniciais arbitrariamente escolhidos em $\{0,6065; 0,6065\}$.

A Figura 10 mostra os EQMs obtidos para cada modelo durante o processo de realocação iterativa dos polos. Em todos os casos é obtido um EQM final de estimação de 0,0049. A partir da Figura 10 é possível visualizar que as técnicas SM-BPR e SM-BPR-VI convergem após as demais técnicas. Todos os modelos apresentam, após a convergência, polos em $\{0,6967 \pm j0,7116\}$.

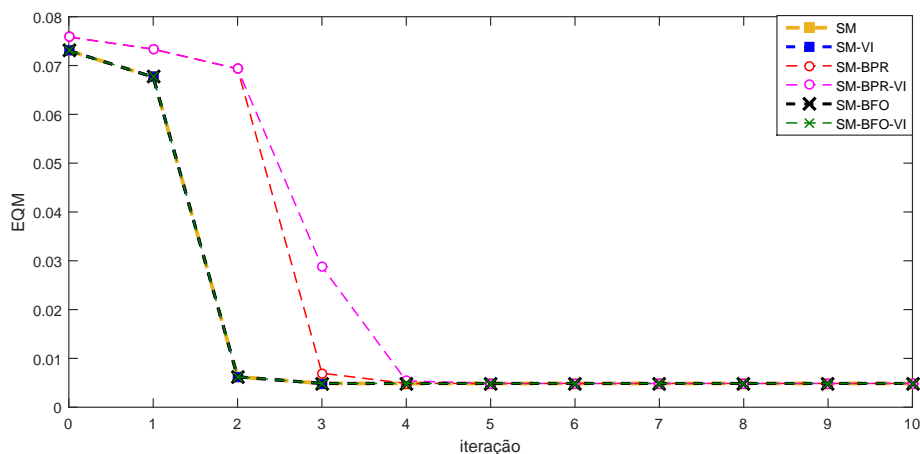


Figura 10 – Sistema Braço Robótico: EQM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

Já a Figura 11 mostra o condicionamento numérico (por iteração) de cada uma das técnicas testadas. Assim como no estudo de caso 1 é possível observar que as técnicas

baseadas em bases de funções ortonormais (SM-BFO e SM-BFO-VI) apresentam vantagens significativas (em termos de condicionamento numérico) quando comparadas com as técnicas propostas anteriormente (SM e SM-VI, respectivamente). Já as técnicas SM-BPR e SM-BPR-VI apresentam uma forte instabilidade numérica na primeira iteração (condicionamento numérico maior que 10^5 em $t = 1$). Além disso, é possível observar que as técnicas baseadas em variáveis instrumentais apresentam um condicionamento numérico maior em relação à formulação tradicional das respectivas técnicas.

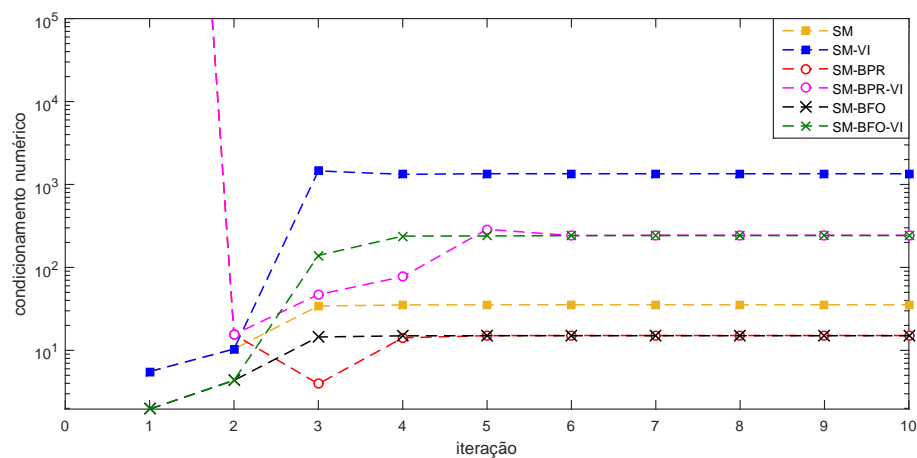


Figura 11 – Sistema Braço Robótico: Condicionamento numérico (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

As saídas dos modelos são agora comparadas frente aos dados de validação. Todos os modelos apresentam para os dados de validação um EQM de 0,0052. A Figura 12 mostra as saídas dos modelos SM e SM-BFO. Como pode ser percebido, ambos os modelos adequam-se à saída medida.

3.4.3 Estudo de caso 3: Sistema de Potência Monofásico

Este estudo de caso considera o sistema de potência monofásico da Figura 13. Tal sistema foi também estudado em (UBOLLI; GUSTAVSEN, 2011) e é composto por um cabo subterrâneo de 5km (comprimento) e três linhas de transmissão idênticas de 10km (comprimento). A geometria e os demais dados referentes às linhas de transmissão e ao cabo subterrâneo podem ser encontrados em (RAMIREZ, 2009).

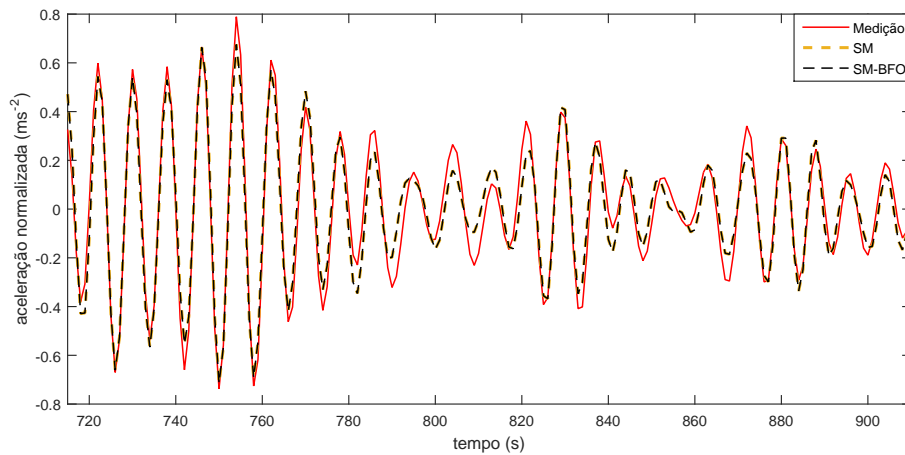


Figura 12 – Sistema Braço Robótico: Saídas dos modelos SM e SM-BFO para os dados de validação.

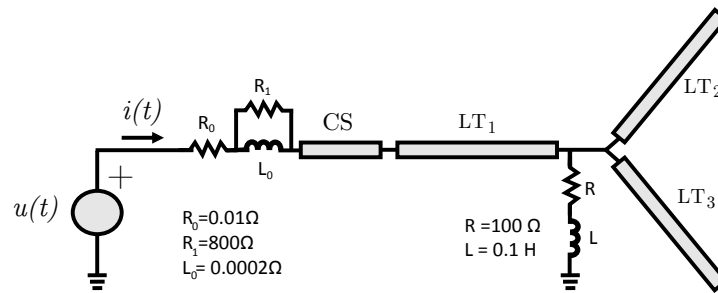


Figura 13 – Sistema de Potência Monofásico.

A identificação desse sistema é avaliada para duas situações diferentes: em um primeiro momento, considera-se a sua resposta de corrente $i(t)$ devido a um degrau unitário de tensão $u(t)$ e, em um segundo momento, considera-se a sua resposta de tensão $u(t)$ devido a um degrau unitário de corrente $i(t)$. A Figura 14 mostra a resposta (saída) do sistema para esses dois casos. Tais respostas foram obtidas simulando-se a rede elétrica da Figura 13 como um “sistema equivalente dependente de frequência” no *software* EMTP-RV³, com um período de amostragem de $1 \mu\text{s}$.

Para a estimação dos modelos, são consideradas apenas as primeiras 1000 amostras de excitação e resposta do sistema, que correspondem ao primeiro 1ms de $u(t)$ e $i(t)$. Vale ainda ressaltar que o principal objetivo deste estudo de caso é investigar como (e quanto) o condicionamento numérico das diferentes técnicas (SM, SM-VI, SM-BPR, SM-BPR-VI,

³ <<http://emtp-software.com/>>

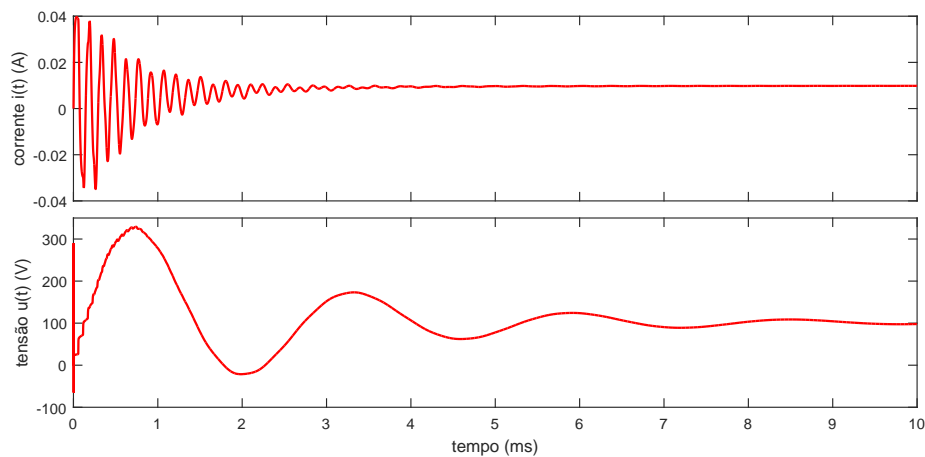


Figura 14 – Resposta do Sistema de Potência Monofásico quando este é alimentado por um degrau unitário de tensão (curva superior) ou por um degrau unitário de corrente (curva inferior).

SM-BFO, SM-BFO-VI) impacta na precisão dos modelos quando esses apresentam uma ordem elevada.

A Figura 15 mostra o EQM e o condicionamento numérico obtido na última iteração para caso em que o sistema é alimentado por um degrau unitário de tensão. É possível perceber que existe uma tendência de diminuição do EQM a medida que modelos de maior ordem são utilizados. Por outro lado, também pode-se observar que o aumento no número de parâmetros do modelo está relacionado ao aumento do condicionamento numérico no processo de estimação.

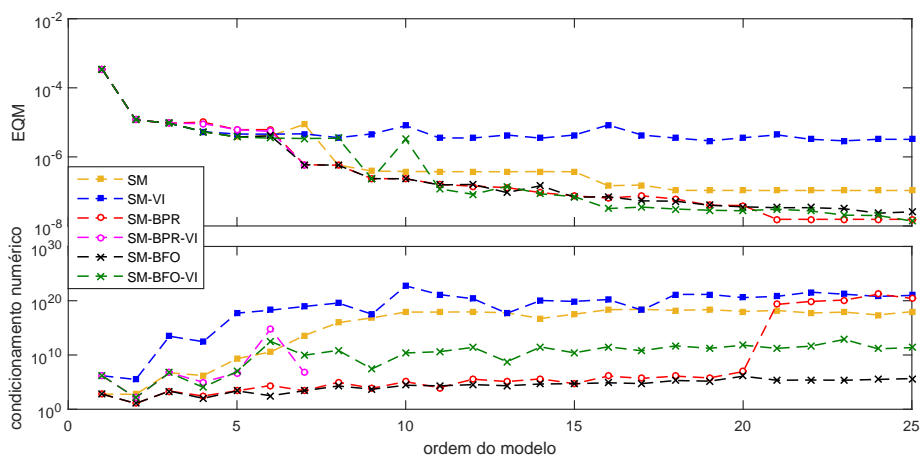


Figura 15 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de tensão: EQM e condicionamento numérico na última iteração do processo de estimação dos modelos.

Analisando-se o comportamento de cada uma das curvas, pode-se concluir que as técnicas propostas neste trabalho (SM-BFO e SM-BFO-VI) tendem a apresentar um menor condicionamento numérico em modelos de maior ordem. Dentre essas duas técnicas, os modelos SM-BFO-VI apresentam uma precisão maior (menor EQM) para diversos valores de n . Em contrapartida, as técnicas propostas anteriormente (SM e SM-VI) apresentam em geral uma precisão menor e um condicionamento numérico maior no processo de estimação. Em especial, é possível perceber que neste caso a precisão dos modelos SM-VI é afetada pelo alto condicionamento numérico da respectiva técnica. Essa perda de precisão do modelo devido ao alto condicionamento numérico pode ser também visualizada na Figura 16, que compara as saídas dos modelos SM-BFO-VI e SM-VI para $n = 25$. Ressalta-se ainda que a técnica SM-BPR-VI teve a sua rotina computacional interrompida (pelo MATLAB) para $n > 7$, isso devido à sua instabilidade numérica durante o processo iterativo.

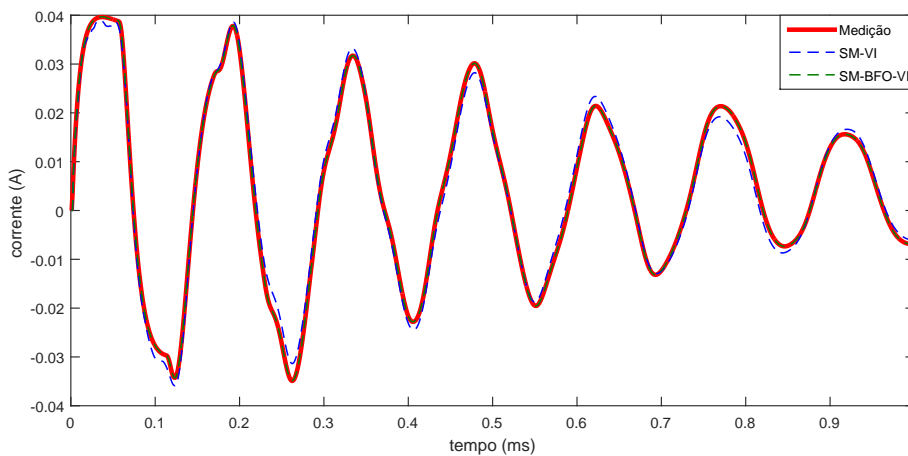


Figura 16 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de tensão: Saídas dos modelos SM-VI e SM-BFO-VI considerando modelos de ordem 25.

Agora as técnicas são usadas para identificar a resposta do sistema quando este é alimentado por um degrau unitário de corrente. A Figura 17 mostra os resultados obtidos para esse caso. É possível perceber que, assim como no caso anterior, as técnicas propostas neste trabalho (SM-BFO e SM-BFO-VI) são menos susceptíveis a condicionamentos numéricos elevados em modelos de maior ordem. Entretanto, para este caso os modelos SM-BFO-VI apresentam uma precisão maior (menor EQM) apenas para alguns valores de n . Ainda assim, as técnicas propostas anteriormente (SM e SM-VI) apresentam, em geral,

um condicionamento numérico maior e uma precisão menor no processo de estimação. Ressalta-se ainda que a técnica SM-BPR-VI teve, neste caso, sua rotina computacional interrompida (pelo MATLAB) para $n > 6$, isso devido novamente à sua instabilidade numérica durante o processo iterativo.

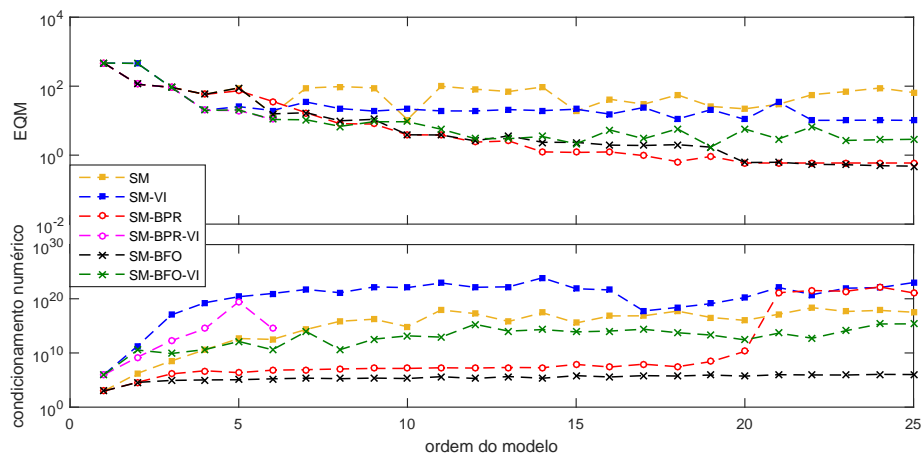


Figura 17 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de corrente: EQM e condicionamento numérico na última iteração do processo de estimação dos modelos.

Por fim, a Figura 18 compara a saída dos modelos SM-BFO e SM para $n = 25$. É possível visualizar a partir desta figura que o modelo SM-BFO é mais preciso do que o modelo SM especialmente nos instantes iniciais do transitório de tensão.

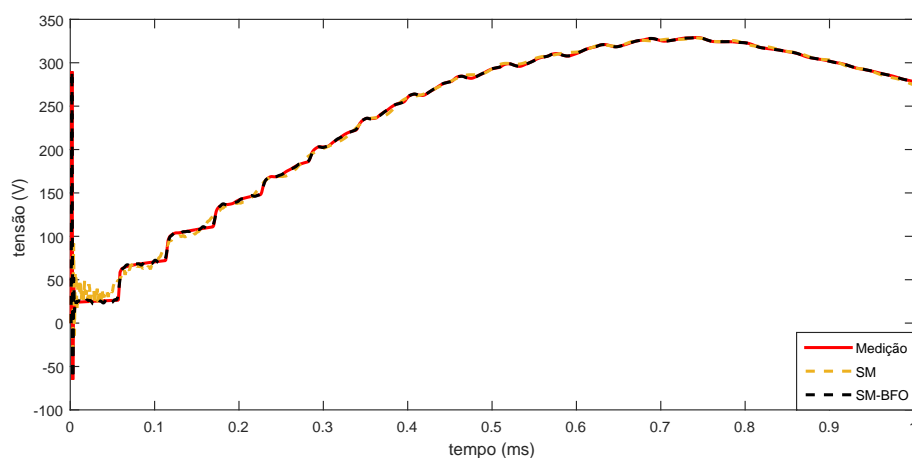


Figura 18 – Sistema de Potência Monofásico alimentado por um degrau unitário de corrente: Saídas dos modelos SM e SM-BFO considerando modelos de ordem 25.

3.5 Considerações finais do capítulo

A partir dos estudos de caso apresentados neste capítulo, foi possível perceber que algoritmos de identificação baseados em BFRs podem apresentar vantagens (em termos de precisão e condicionamento numérico) quando comparados ao método de Steiglitz-McBride que, por sua vez, baseia-se numa descrição na forma de função de transferência para os modelos. Além disso, o procedimento iterativo usando BFRs garante a obtenção direta de modelos na forma de espaço de estados.

Dentre as formulações tradicionais avaliadas, pode-se destacar a técnica baseada em funções ortonormais: SM-BFO. Pelos resultados apresentados na seção anterior, observou-se que essa técnica resulta em modelos precisos ao mesmo tempo em que o algoritmo de identificação se mantém com um menor condicionamento numérico (mesmo para modelos de ordem mais elevada). Apesar das técnicas SM e SK-BPR terem apresentado, em alguns casos, modelos igualmente ou mais precisos em relação aos modelos produzidos pela técnica SM-BFO, tais técnicas resultam em algoritmos pior condicionados numericamente. Na realidade, em apenas alguns casos do Estudo de caso 3: Sistema de Potência Monofásico a técnica SM-BPR (baseada em funções do tipo polo-resíduo) foi capaz de gerar modelos mais precisos em relação à técnica SM-BFO.

Por outro lado, a partir dos resultados obtidos também foi possível observar que as formulações baseadas em variáveis instrumentais podem resultar em modelos mais precisos em relação às formulações tradicionais (especialmente para casos com ruído aditivo filtrado na saída). Nestes casos, a utilização de bases de funções ortonormais (que resulta, neste caso, na técnica SM-BFO-VI) está, mais uma vez, associada à melhoria do condicionamento numérico do algoritmo de identificação. Ainda assim, a utilização de variáveis instrumentais resultou, em geral, em algoritmos com um maior condicionamento numérico quando comparados à formulação tradicional das respectivas técnicas.

Também pôde-se notar que as técnicas baseadas em funções do tipo-resíduo (SM-BPR e SM-BPR-VI) tendem a convergir após as demais técnicas e resultam num maior condicionamento numérico nas primeiras iterações. Especificamente no estudo de caso 3,

observou-se também um alto condicionamento numérico na última iteração da técnica SM-BPR, para $n > 20$. A técnica SM-BPR-VI, por sua vez, chegou a apresentar uma interrupção da rotina computacional (implementada no MATLAB) devido a instabilidades numéricas (isso para modelos com $n > 7$).

3.6 Apêndice do Capítulo - Modelos em espaço de estados resultantes

Esta seção apresenta os modelos em espaço de estados obtidos no estudo de caso 1 (Sistema de 3ª Ordem), isso considerando polos iniciais em $\{-0,99; 0,3059+0,9415j; 0,3059-0,9415j\}$.

Modelo resultante obtido a partir da técnica SM-BPR:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0,6406 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9842 & 0,1716 \\ 0 & -0,1716 & 0,9842 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_0(k), \\ y(k, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 0,3356 & -0,0013 & -0,0008 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k). \end{cases} \quad (3.71)$$

Modelo resultante obtido a partir da técnica SM-BPR-VI:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \begin{bmatrix} -0,5196 & 0,7932 & 0 \\ -0,7932 & -0,5196 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6439 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_0(k), \\ y(k, \hat{\lambda}_{VI}, \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 0,0283 & -0,0436 & 0,3013 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k). \end{cases} \quad (3.72)$$

Modelo resultante obtido a partir da técnica SM-BFO:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0,6406 & 0 & 0 \\ 0,0485 & 0,9832 & -0,1714 \\ 0 & 0,1717 & 0,9851 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \begin{bmatrix} 0,7679 \\ -0,0405 \\ 0 \end{bmatrix} u_0(k), \\ y(k, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 0,4329 & -0,0131 & 0,0476 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k). \end{cases} \quad (3.73)$$

Modelo resultante obtido a partir da técnica SM-BFO-VI:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.4920 & -0.7526 & 0 \\ 0.8370 & -0.5472 & 0 \\ 0.1832 & 0.2803 & 0.6439 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \begin{bmatrix} 0.4376 \\ 0 \\ 0.6880 \end{bmatrix} u_0(k), \\ y(k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 0.2168 & 0.2195 & 0.3824 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k). \end{array} \right. \quad (3.74)$$

4 Identificação no domínio da frequência

Este capítulo segue, em linhas gerais, a abordagem apresentada no Capítulo 3. Para tanto, o problema de identificação de sistemas lineares no domínio da frequência é inicialmente revisto. Em seguida, é apresentado o método iterativo de Sanathanan-Koerner e sua possível formulação usando variáveis instrumentais. A aplicação dessas iterações para estimação de modelos formados por BFRs é também apresentada. Propõe-se então uma abordagem usando variáveis instrumentais e BFRs que generaliza o método proposto por Voorhoeve *et al.* (2014) (contribuição C.4). Essa formulação baseada em variáveis instrumentais garante que um ótimo local seja obtido após a convergência do processo iterativo. Conforme será visto nos estudos de caso (onde um deles considera dados adquiridos através da medição em campo de um transformador de potência), os algoritmos analisados apresentam melhor condicionamento numérico quando funções ortonormais são utilizadas como BFRs. Tal melhoria de condicionamento numérico é também observada quando modelos de ordem mais elevada são utilizados.

4.1 Definição do problema de identificação

No domínio do tempo contínuo de Laplace (domínio $s = j\omega$) a relação entre a entrada escalar $U_0(s)$ e a saída escalar $Y_0(s)$ de um sistema linear invariante no tempo \mathcal{S} pode ser representada pela função de transferência $G_0(s)$ da seguinte forma¹ (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999; VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994):

$$\mathcal{S} : Y_0(s) = G_0(s)U_0(s) + V(s), \quad (4.1)$$

onde $V(s)$ representa a perturbação não controlável (ruído) presente na saída do sistema.

¹ Todos os algoritmos para identificação no domínio da frequência deste capítulo encontram-se representados no domínio do tempo contínuo $s = j\omega$. Entretanto, vale ressaltar que todos os desenvolvimentos aqui apresentados podem ser facilmente estendidos também para o domínio do tempo discreto substituindo-se $s = j\omega$ por $z = e^{j2\pi\omega/\omega_s}$, onde ω_s denota a frequência de amostragem em rad/s.

O problema de se encontrar um modelo $G(s)$ que seja o mais próximo possível de $G_0(s)$ é o desafio de identificação tratado neste capítulo. Com esse desafio em mente, frequentemente define-se uma estrutura de modelo $G(s, \theta)$ na forma de função de transferência racional (AGUIRRE, 2007; HEUBERGER; VAN DEN HOF; WAHLBERG, 2005; LJUNG, 1999; VAN DEN BOSCH; VAN DER KLAUW, 1994), ou seja, dada pela razão entre dois polinômios em s , conforme mostra a Equação (4.2).

$$\begin{aligned} G(s, \theta) &= \frac{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + \dots + b_{n_b} s^{-n_b}}{1 + f_1 s^{-1} + f_2 s^{-2} + \dots + f_{n_f} s^{-n_f}}, \\ &= \frac{B(s, \theta)}{F(s, \theta)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note-se que $G(s, \theta)$ não representa um único modelo, mas todo um conjunto de modelos D_G obtido variando-se o vetor de parâmetros θ ,

$$\theta = \left[b_0 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad f_1 \quad \dots \quad f_{n_f} \right]^T \in D_\theta. \quad (4.3)$$

Em (4.3), D_θ representa o conjunto formado por todos os valores possíveis para θ . Uma definição mais formal no que diz respeito à modelos, conjunto de modelos e estruturas de modelos pode ser encontrada em (LJUNG, 1999).

Dada essa estrutura $G(s, \theta)$, o desafio agora se reduz a encontrar um determinado $\theta^* \in D_\theta$, capaz de tornar o modelo $G(s, \theta^*) \in D_G$ suficientemente próximo do sistema $G_0(s)$. Tratando esse problema no contexto de identificação no domínio da frequência, θ^* é encontrado a partir da definição de um critério de minimização que, por sua vez, baseia-se num conjunto de amostras discretizadas de resposta em frequência (medidas ou simuladas) do sistema \mathcal{S} , $\{ G'_0(s_k), s_k \}$, $k = 1, \dots, N$, onde² (SCHOUKENS; PINTELON; ROLAIN, 2012)

$$G'_0(s_k) = \frac{Y_0(s_k)}{U_0(s_k)} = G_0(s_k) + \frac{V(s_k)}{U_0(s_k)}. \quad (4.4)$$

O critério de minimização tem por objetivo aproximar a resposta em frequência modelada $G(s_k, \theta)$ da resposta em frequência (medida ou simulada) $G'_0(s_k)$, isso para $k = 1, \dots, N$. Dessa forma, geralmente define-se θ^* como sendo o vetor de parâmetros do modelo capaz

² Ressalta-se ainda que, pela Equação 4.4, a resposta em frequência utilizada para estimação do modelo $G(s_k, \hat{\theta})$ coincide com a resposta em frequência exata do sistema $G_0(s_k)$ apenas se o ruído aditivo $V(s_k)$ for nulo.

de minimizar o erro absoluto quadrático ponderado médio (EAQPM) entre $G(s_k, \theta)$ e $G'_0(s_k)$, ou seja,

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in D_\theta} V(\theta), \quad (4.5)$$

sendo $V(\theta)$ a função objetivo definida por:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |E_W(s_k, \theta)|^2, \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |W(s_k) (G'_0(s_k) - G(s_k, \theta))|^2, \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| W(s_k) \left(G'_0(s_k) - \frac{B(s_k, \theta)}{F(s_k, \theta)} \right) \right|^2, \quad (4.8)$$

e $W(s_k)$ uma função de ponderação previamente definida pelo projetista.

Como pode ser visto, encontrar θ^* a partir da minimização de $V(\theta)$ constitui um problema originalmente não-linear na variável θ , uma vez que os parâmetros $\{f_i\}$ aparecem no denominador da função de transferência. Assim, técnicas de otimização que buscam resolver essa questão são capazes de fornecer apenas uma estimativa (“boa” ou “ruim”) para θ^* .

Com base nas informações já apresentadas, uma definição mais formal para o problema de identificação no domínio da frequência pode ser estabelecida: *O problema de identificação no domínio da frequência consiste em, dado um conjunto de amostras de resposta em frequência do sistema \mathcal{S} , $\{G'_0(s_k), s_k\}, k = 1, \dots, N$, encontrar um modelo $G(s, \hat{\theta}) \in D_G$, onde $\hat{\theta} \in D_\theta$ corresponde a um determinado valor de θ que busca satisfazer o critério de minimização imposto pela Equação (4.5).*

Assim, para um dado modelo $G(s, \hat{\theta})$, o valor da função $V(\theta)$ pode ser usado como uma métrica para se inferir sobre a aproximação de $G(s, \hat{\theta})$ em relação ao sistema $G_0(s)$, uma vez que $V(\hat{\theta})$ representa o EAQPM entre o conjunto de amostras de resposta em frequência do sistema $\{G'_0(s_k)\}$ e do modelo $\{G(s_k, \hat{\theta})\}$. A definição do EAQPM desempenha também um papel fundamental quando se deseja comparar a aproximação entre dois ou mais modelos. Um modelo é dito aqui ser mais preciso em relação aos demais caso seu EAQPM seja menor. Também é possível observar pela Equação (4.6) que para um

dado modelo $G(s, \hat{\theta})$, se seu respectivo EAQPM for nulo, então a resposta em frequência estimada do modelo $G(s_k, \hat{\theta})$ corresponde exatamente a resposta em frequência medida $G'_0(s_k)$ para cada amostra discretizada $k = 1, \dots, N$.

Ressalta-se ainda que o vetor de parâmetros $\hat{\theta} \in D_\theta$ do modelo é uma estimativa para θ^* (sendo $\hat{\theta} = \theta^*$ a “melhor” estimativa possível para uma dada estrutura $G(s, \theta)$). Esta estimativa pode ser encontrada utilizando-se diferentes técnicas de otimização não-linear. Contudo, técnicas de otimização não-linear podem apresentar uma convergência lenta em termos de tempo computacional, inviabilizando assim as suas implementações práticas em casos onde uma atualização rápida do modelo é necessária.

Por outro lado, existem métodos iterativos capazes de transformar o problema originalmente não-linear em (4.8) em uma sequência de problemas lineares de otimização que são resolvidos iterativamente, por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados linear. No contexto de identificação de sistemas contínuos, o procedimento iterativo proposto por [Sanathanan e Koerner \(1963\)](#) representa uma alternativa computacionalmente rápida para estimação do modelo $G(s, \hat{\theta}) = B(s, \hat{\theta})/F(s, \hat{\theta})$, onde os polos de $G(s, \hat{\theta})$ (raízes de $F(s, \hat{\theta})$) são conhecidos a cada iteração e subsequentemente realocados.

4.2 As iterações de Sanathanan-Koerner para identificação no domínio da frequência

As iterações de Sanathanan-Koerner constituem uma poderosa ferramenta para se estimar os coeficientes $\{b_i\}$ e $\{f_i\}$ de uma função de transferência $G(s, \theta)$, que busca por sua vez se aproximar da função de transferência “real” $G_0(s)$ de um sistema linear. Essa abordagem iterativa é equivalente ao procedimento iterativo proposto por [Steiglitz e McBride \(1965\)](#) no tempo discreto.

Para definir o método proposto por [Sanathanan e Koerner \(1963\)](#), inicialmente reescreve-se o critério de minimização em (4.8) conforme segue

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| F(s_k, \theta) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \theta)} G'_0(s_k) - B(s_k, \theta) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \theta)} \right|^2. \quad (4.9)$$

Em seguida, a fim de tornar o problema de minimização linear em seus parâmetros $\{f_i\}$ e $\{b_i\}$, assume-se que o denominador $F(s, \theta)$ é sempre conhecido a partir da iteração anterior, de tal forma que um problema de otimização linear na forma

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| F(s_k, \theta) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)})} G'_0(s_k) - B(s_k, \theta) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)})} \right|^2 \quad (4.10)$$

é resolvido a cada iteração t . Assim, θ^* pode ser estimado iterativamente pelo método dos mínimos quadrados linear.

A solução analítica para (4.10) pode ser encontrada substituindo-se

$$F(s_k, \theta) = 1 + f_1 s_k^{-1} + f_2 s_k^{-2} + \dots + f_{n_f} s_k^{-n_f}, \quad (4.11)$$

$$B(s_k, \theta) = b_0 + b_1 s_k^{-1} + b_2 s_k^{-2} + \dots + b_{n_b} s_k^{-n_b}, \quad (4.12)$$

e definindo-se

$$G_F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)}) = \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)})} G'_0(s_k). \quad (4.13)$$

Assim, (4.10) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| G_F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)}) - \gamma^T(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)}) \theta \right|^2, \quad (4.14)$$

sendo

$$\gamma(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)}) = \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)})} \begin{bmatrix} 1 \\ s_k^{-1} \\ \vdots \\ s_k^{-n_b} \\ -G'_0(s_k) s_k^{-1} \\ \vdots \\ -G'_0(s_k) s_k^{-n_f} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Para

$$\Gamma(\hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} \gamma^T(s_1, \hat{\theta}^{(t-1)}) \\ \gamma^T(s_2, \hat{\theta}^{(t-1)}) \\ \vdots \\ \gamma^T(s_N, \hat{\theta}^{(t-1)}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_F(\hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} G_F(s_1, \hat{\theta}^{(t-1)}) \\ G_F(s_2, \hat{\theta}^{(t-1)}) \\ \vdots \\ G_F(s_N, \hat{\theta}^{(t-1)}) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

tem-se ainda que a Equação (4.14) pode ser reescrita na forma matricial equivalente

$$\hat{\theta}^{(t)} = \arg \min_{\theta \in D_\theta} \frac{1}{N} \left(\overline{\mathbf{G}}_F(\hat{\theta}^{(t-1)}) - \overline{\Gamma}(\hat{\theta}^{(t-1)})\theta \right)^T \left(\overline{\mathbf{G}}_F(\hat{\theta}^{(t-1)}) - \overline{\Gamma}(\hat{\theta}^{(t-1)})\theta \right), \quad (4.17)$$

sendo

$$\overline{\Gamma}(\hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} \Re\{\Gamma(\hat{\theta}^{(t-1)})\} \\ \Im\{\Gamma(\hat{\theta}^{(t-1)})\} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{G}}_F(\hat{\theta}^{(t-1)}) = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{G}_F(\hat{\theta}^{(t-1)})\} \\ \Im\{\mathbf{G}_F(\hat{\theta}^{(t-1)})\} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Perceba-se que as matrizes complexas $\Gamma(\hat{\theta}^{(t-1)})$ e $\mathbf{G}_F(\hat{\theta}^{(t-1)})$ foram transformadas nas matrizes reais $\overline{\Gamma}(\hat{\theta}^{(t-1)})$ e $\overline{\mathbf{G}}_F(\hat{\theta}^{(t-1)})$ para que os elementos do vetor de parâmetros $\hat{\theta}^{(t)}$ sejam sempre reais. Por fim, fazendo-se a derivada da função a ser minimizada a cada iteração (Equação (4.17)) e igualando-se essa derivada a zero, tem-se que a solução analítica para o método de Sanathanan-Koerner é dada por:

$$\hat{\theta}^{(t)} = \left[\overline{\Gamma}^T(\hat{\theta}^{(t-1)})\overline{\Gamma}(\hat{\theta}^{(t-1)}) \right]^{-1} \overline{\Gamma}^T(\hat{\theta}^{(t-1)})\overline{\mathbf{G}}_F(\hat{\theta}^{(t-1)}). \quad (4.19)$$

O processo de estimação do modelo $G(s, \hat{\theta})$ por esse método se resume assim em resolver (4.19) iterativamente. Para tanto, as matrizes $\overline{\Gamma}(\hat{\theta}^{(t-1)})$ e $\overline{\mathbf{G}}_F(\hat{\theta}^{(t-1)})$ devem ser construídas a cada iteração e dependem apenas do conjunto de coeficientes $\{f_i\}$ estimado na iteração anterior.

Na primeira iteração ($t = 1$), pode-se fazer $\{f_i\} = 0 \Rightarrow F(s, \theta^{(0)}) = 1$. Entretanto, se existe um conhecimento prévio aproximado acerca dos polos do sistema, pode-se calcular os coeficientes $\{f_i\}$ do polinômio $F(s, \theta^{(0)})$ considerando-se que esse polinômio possui raízes iguais a este conjunto aproximado de polos.

Vale ainda ressaltar que os problemas (4.9) e (4.10) não são necessariamente iguais, uma vez que (4.9) busca minimizar $\sum |E_W(s_k, \theta)|^2$ enquanto (4.10) minimiza a função objetivo modificada $\sum \left| \frac{F(s_k, \theta)}{F(s_k, \hat{\theta}^{(t-1)})} E_W(s_k, \theta) \right|^2$. Dessa forma, mesmo após a convergência do processo iterativo, não pode-se garantir que $\hat{\theta}^{(t)}$ é um mínimo local da função objetivo original $V(\theta)$, ou ainda, que $\hat{\theta}^{(t)} = \theta^*$.

4.2.1 Formulação usando variáveis instrumentais

O objetivo desta seção é, baseando-se em variáveis instrumentais, reformular o método de Sanathanan-Koerner a fim de garantir que a solução encontrada pelo processo iterativo é de fato um ótimo local da função objetivo original $V(\theta)$ definida em (4.6). Para tanto, se $\hat{\theta}$ é um mínimo local de $V(\theta)$, então ele necessariamente satisfaz $\left. \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \mathbf{0}$, ou ainda, pela regra da cadeia:

$$\sum_{k=1}^N -2\Re \left\{ \left[\mathbf{k}^T(s_k, \hat{\theta}) \right]^* W(s_k) \left(F(s_k, \hat{\theta}) \frac{1}{F(s_k, \hat{\theta})} G'_0(s_k) - B(s_k, \hat{\theta}) \frac{1}{F(s_k, \hat{\theta})} \right) \right\} = \mathbf{0}, \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{k}(k, \theta)$ é o vetor de instrumentos definido por (VOORHOEVE *et al.*, 2014; VAN DEN HOF; DOUMA, 2008)

$$\mathbf{k}(s, \theta) = W(s) \frac{\partial G(s, \theta)}{\partial \theta}. \quad (4.21)$$

Como pode ser observado, o problema de se encontrar $\hat{\theta}$ a partir da expressão em (4.20) é também não-linear em relação a essas variáveis. Buscando resolver esse problema de maneira similar ao realizado na seção anterior (Equação (4.10)), o seguinte processo iterativo de regressão por variáveis instrumentais pode ser utilizado (VAN DEN HOF; DOUMA, 2008):

$$\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} = \text{sol}_{\theta \in D_\theta} \left\{ \sum_{k=1}^N \Re \left\{ \left[\mathbf{k}^T(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \right]^* \times \left(F(s_k, \theta) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})} G'_0(s_k) - B(s_k, \theta) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})} \right) \right\} = \mathbf{0} \right\}, \quad (4.22)$$

onde

$$\mathbf{k}(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) = W(s_k) \frac{\partial G(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})}{\partial \theta} = \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})} \begin{bmatrix} 1 \\ s_k^{-1} \\ \vdots \\ s_k^{-n_b} \\ -G(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) s_k^{-1} \\ \vdots \\ -G(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) s_k^{-n_f} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial b_j} G(s, \theta) = \frac{1}{F(s, \theta)} s^{-j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial f_j} G(s, \theta) = -\frac{B(s, \theta)}{F^2(s, \theta)} s^{-j}. \quad (4.24)$$

A expressão (4.22) implica que, a cada iteração, o vetor de parâmetros do modelo $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)}$ deve satisfazer (baseando-se na notação já introduzida neste capítulo)

$$\sum_{k=1}^N \Re \left\{ \left[\mathbf{k}^T(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \right]^* \left(G_{\text{F}}(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) - \gamma^T(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} \right) \right\} = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Conforme mostram [Van den Hof e Douma \(2008\)](#), este problema é equivalente ao problema:

$$\sum_{k=1}^N \left[\begin{array}{c} \Re \{ \mathbf{k}(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \\ \Im \{ \mathbf{k}(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \Re \{ G_{\text{F}}(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \\ \Im \{ G_{\text{F}}(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \Re \{ \gamma^T(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \\ \Im \{ \gamma^T(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \end{array} \right] \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Definindo-se então,

$$\bar{\mathbf{K}}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) = \left[\begin{array}{c} \Re \{ \mathbf{K}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \\ \Im \{ \mathbf{K}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \} \end{array} \right], \quad (4.27)$$

onde

$$\mathbf{K}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{k}(s_1, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) & \mathbf{k}(s_2, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) & \cdots & \mathbf{k}(s_N, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \end{array} \right], \quad (4.28)$$

torna-se possível reescrever a Equação (4.26) na forma matricial equivalente:

$$\bar{\mathbf{K}}^T(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \left[\bar{\mathbf{G}}_{\text{F}}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) - \bar{\Gamma}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} \right] = \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

Por fim, isolando-se o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)}$ em (4.29), tem-se que a solução analítica para o método de Sanathanan-Koerner formulado usando o conceito de variáveis instrumentais é dada por:

$$\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)} = \left[\bar{\mathbf{K}}^T(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \bar{\Gamma}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \right]^{-1} \bar{\mathbf{K}}^T(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}) \bar{\mathbf{G}}_{\text{F}}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)}). \quad (4.30)$$

Comparando-se essa solução com a solução tradicional em (4.19) é possível observar que elas são diferentes entre si uma vez que a formulação usando variáveis instrumentais

requer também a construção da matriz $\overline{\mathbf{K}}(\hat{\theta}_{\text{IV}}^{(t-1)})$. Uma outra diferença entre esses algoritmos diz respeito às características das suas soluções. Conforme mencionado em (VAN DEN HOF; DOUMA, 2008), utilizando-se essa formulação baseada em variáveis instrumentais é possível garantir que um ótimo local é obtido após a convergência do processo iterativo. Tal proposição é confirmada a seguir.

Assumindo que $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t)}$ converge para um vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{\text{VI}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c)} = \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c+1)} = \hat{\theta}_{\text{VI}}$ ou ainda

$$F(s, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c+1)}) = F(s, \hat{\theta}_{\text{VI}}^{(c)}) = F(s, \hat{\theta}_{\text{VI}}). \quad (4.31)$$

Portanto, na iteração $t = c + 1$ a Equação (4.22) pode ser reescrita como sendo

$$\sum_{k=1}^N \Re \left\{ \left[\mathbf{k}^T(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}) \right]^* \left(F(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}})} G'_0(s_k) - B(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}}) \frac{W(s_k)}{F(s_k, \hat{\theta}_{\text{VI}})} \right) \right\} = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

Esta expressão coincide com a condição de otimalidade local imposta em (4.20), o que implica que $\hat{\theta}_{\text{VI}}$ é de fato um ótimo local de $V(\theta)$.

Por outro lado, apesar do uso de variáveis instrumentais garantir, em caso de convergência, um ótimo local da função objetivo, esta formulação é conhecida por apresentar um maior condicionamento numérico em relação à sua respectiva formulação tradicional (VOORHOEVE *et al.*, 2014). Isto significa que o condicionamento numérico da matriz $\overline{\mathbf{K}}^T(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})\overline{\Gamma}(\hat{\theta}_{\text{VI}}^{(t-1)})$ em (4.30) pode ser elevado, tornando a inversão dessa matriz uma tarefa difícil mesmo para *softwares* como o MATLAB. Schoukens, Pintelon e Rolain (2012) mostram ainda que condicionamentos numéricos elevados em algoritmos de identificação podem levar a modelos imprecisos.

Na próxima seção deste trabalho, é apresentado um algoritmo alternativo de identificação que utiliza modelos formados por BFRs e uma descrição no espaço de estados. Tal algoritmo encontra-se baseado nas iterações de Sanathanan-Koerner apresentadas nesta seção e generaliza as técnicas propostas em (SCHUMACHER; OLIVEIRA; MITCHELL, 2015), (DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007) e (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999). Conforme será visto, a utilização das funções ortonormais de Takenaka-Malmquist como BFRs permite a obtenção de um algoritmo melhor condicionado numericamente.

4.3 Procedimento iterativo usando BFRs

Algoritmos baseados em BFRs têm sido amplamente utilizados durante os últimos anos especialmente para identificação no domínio da frequência (VOORHOEVE *et al.*, 2014; NOURI; ACHAR; NAKHLA, 2010; MAESTRELLI, 2010; REGINATO, 2008; DESCHRIJVER; HAEGEMAN; DHAENE, 2007; GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999). Neste contexto, a técnica proposta por Gustavsen e Semlyen (1999) passou a ser bastante conhecida como *Vector Fitting* e utiliza as iterações de Sanathanan-Koerner para identificação de modelos formados pela base de funções do tipo polo-resíduo. A extensão da técnica *Vector Fitting* para identificação de modelos formados pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist, conhecida como *Orthonormal Vector Fitting*, foi proposta por Deschrijver, Haegeman e Dhaene (2007) com o objetivo de reduzir o condicionamento numérico das matrizes presentes na estimação de parâmetros do modelo.

De maneira similar ao realizado por Deschrijver, Haegeman e Dhaene (2007), será considerado nesta seção uma estrutura de modelo genérica dada por:

$$G(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{B(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}, \quad (4.33)$$

$$= \frac{B(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})/\hat{F}(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})/\hat{F}(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})} = \frac{r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})}. \quad (4.34)$$

Em (4.34), r_0 , $\{r_i\}$ e $\{\tilde{r}_i\}$ representam um conjunto de coeficientes a ser estimado e compõem o vetor de parâmetros λ definido por

$$\lambda = \left[r_0 \quad \cdots \quad r_n \quad \tilde{r}_1 \quad \cdots \quad \tilde{r}_n \right]^T \in D_\lambda. \quad (4.35)$$

Além disso, n denota a ordem do modelo e \mathbf{a}^{esp} representa um conjunto pré-especificado de n polos que caracterizam completamente as funções racionais $\{\Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})\}$. Considera-se que todos os polos pertencem ao semi-plano esquerdo do plano complexo. Em (4.35), D_λ representa o conjunto formado por todos os valores possíveis para λ .

O objetivo inicial é encontrar uma aproximação na forma de funções racionais para $G_0(s)$ do sistema \mathcal{S} em (4.1), tal que a saída $Y_0(s)$ possa ser aproximada da seguinte forma:

$$Y_0(s) \approx G(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})U_0(s), \quad (4.36)$$

ou, equivalentemente,

$$Y_0(s) \approx \left(r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \right) U_0(s) - \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}) Y_0(s). \quad (4.37)$$

Tendo como base os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 2, é possível descrever esta relação por uma estrutura em espaço de estado dada por

$$s\tilde{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}(s) + \mathbf{B} U_0(s), \quad (4.38)$$

$$s\tilde{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Y}}(s) + \mathbf{B} Y_0(s), \quad (4.39)$$

$$Y_0(s) \approx \mathbf{r} \tilde{\mathbf{U}}(s) - \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{Y}}(s) + r_0 U_0(s), \quad (4.40)$$

onde

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 & \cdots & \tilde{r}_n \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

Para que essa representação seja possível, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} (que dependem exclusivamente da BFR utilizada e do conjunto de polos \mathbf{a}^{esp}) devem ser construídas de tal forma que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Phi_1(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \\ \vdots \\ \Phi_n(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

De acordo com a definição feita para o problema de identificação no domínio da frequência, no caso de modelos formados por BFRs, λ é estimado a partir de um conjunto de amostras de resposta em frequência $\{ G'_0(s_k), s_k \}, k = 1, \dots, N$ minimizando-se:

$$V(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |E_W(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})|^2, \quad (4.43)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |W(s_k) (G'_0(s_k) - G(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}))|^2, \quad (4.44)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| W(s_k) \left(\frac{F(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})} G'_0(s_k) - \frac{B(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})} \right) \right|^2. \quad (4.45)$$

O valor de λ que minimiza $V(\lambda)$ é denotado por

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in D_\lambda} V(\lambda). \quad (4.46)$$

Assim, o problema de otimização que busca estimar λ^* é originalmente não-linear em relação às suas variáveis, uma vez que o vetor de parâmetros λ aparece também no denominador de $V(\lambda)$. Para resolver essa questão, o seguinte processo baseado nas iterações de Sanathanan-Koerner pode ser utilizado (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999):

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \arg \min_{\lambda} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| W(s_k) \left(\frac{F(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(s_k, \mathbf{a}^{(t)})} G'_0(s_k) - \frac{B(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(s_k, \mathbf{a}^{(t)})} \right) \right|^2, \quad (4.47)$$

ou equivalentemente,

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \arg \min_{\lambda \in D_{\lambda}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| W(s_k) \left(\left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \right) G'_0(s_k) - \left(r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \right) \right) \right|^2. \quad (4.48)$$

Em (4.48), $\hat{\lambda}^{(t)}$ é a estimativa para λ^* obtida na iteração t e $\mathbf{a}^{(t)}$ representa o conjunto pré-especificado de polos para o qual $\hat{\lambda}^{(t)}$ é calculado.

Buscando-se fazer a seqüência de problemas lineares definida em (4.47) próxima ao problema originalmente não-linear em (4.45), $\mathbf{a}^{(t)}$ pode ser especificado de forma a satisfazer

$$\hat{F}(s, \mathbf{a}^{(t)}) = F(s, \hat{\lambda}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)}). \quad (4.49)$$

Tal equivalência é obtida fazendo-se com que as raízes desses dois polinômios sejam iguais, isto é, fazendo-se (veja (GRIVET-TALOCIA; GUSTAVSEN, 2016) para uma prova geral)

$$\mathbf{a}^{(t)} = \text{autovalores}(\mathbf{A}^{(t-1)} - \mathbf{B}^{(t-1)} \tilde{\mathbf{r}}^{(t-1)}). \quad (4.50)$$

A expressão em (4.50) sugere que o conjunto de polos a ser usado na iteração t seja igual ao conjunto de zeros da função de transferência $F(s, \hat{\lambda}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t-1)})/\hat{F}(s, \mathbf{a}^{(t-1)})$ obtida na iteração $t - 1$. Polos instáveis podem ser realocados de volta para a região estável (semi-plano esquerdo do plano complexo) fazendo com que suas respectivas partes reais sejam negativas.

Assumindo ainda que $\hat{\lambda}^{(t)}$ e $\mathbf{a}^{(t)}$ convergem para $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mathbf{a}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\lambda}^{(c)} = \hat{\lambda}^{(c+1)} = \hat{\lambda}$ e $\mathbf{a}^{(c)} = \mathbf{a}^{(c+1)} = \hat{\mathbf{a}}$ e, portanto, pela Equação (4.49)

$$\hat{F}(s, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(s, \hat{\lambda}^{(c)}, \mathbf{a}^{(c)}) = F(s, \hat{\lambda}^{(c+1)}, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{F}(s, \hat{\mathbf{a}}). \quad (4.51)$$

Isto significa que ao se realocar os polos dessa forma, o algoritmo fornece (após a convergência) um modelo racional simplificado na forma

$$G(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{B(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})}{F(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})}, \quad (4.52)$$

$$= \frac{B(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})}{\hat{F}(s, \hat{\mathbf{a}})} = \hat{r}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{r}_i \Phi_i(s, \hat{\mathbf{a}}), \quad (4.53)$$

cuja relação entrada-saída pode ser descrita no espaço de estados por

$$s\tilde{\mathbf{U}}(s) = \hat{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}}(s) + \hat{\mathbf{B}} U_0(s), \quad (4.54)$$

$$Y(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & \cdots & \hat{r}_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}(s) + \hat{r}_0 U_0(s). \quad (4.55)$$

A seguir, é mostrado como $\hat{\lambda}^{(t)}$ pode ser calculado a cada iteração. Reescreve-se inicialmente (4.48) conforme segue

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \arg \min_{\lambda \in D_\lambda} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| G_W(s_k) - \mathbf{d}^T(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \lambda \right|^2, \quad (4.56)$$

com

$$G_W(s_k) = W(s_k) G'_0(s_k), \quad (4.57)$$

$$\mathbf{d}(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) = W(s_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \Phi_1(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \Phi_n(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \\ -\Phi_1(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) G'_0(s_k) \\ \vdots \\ -\Phi_n(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) G'_0(s_k) \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Definindo-se então

$$\mathbf{D}(\mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T(s_1, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \mathbf{d}^T(s_N, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_W = \begin{bmatrix} G_W(s_1) \\ \vdots \\ G_W(s_N) \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

a solução analítica para as iterações de Sanathanan-Koerner aplicadas a modelos formados por BFRs pode ser calculada por

$$\hat{\lambda}^{(t)} = \left[\overline{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(t)}) \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)}) \right]^{-1} \overline{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(t)}) \overline{\mathbf{G}}_W, \quad (4.60)$$

sendo

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{D}(\mathbf{a}^{(t)})\} \\ \Im\{\mathbf{D}(\mathbf{a}^{(t)})\} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{G}}_W = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{G}_W\} \\ \Im\{\mathbf{G}_W\} \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Assim, o processo de estimação do modelo simplificado $G(s, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{a}})$ em (4.53) se resume em resolver (4.60) iterativamente. Para tanto, a matriz $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)})$ deve ser construída a cada iteração e depende apenas do conjunto de polos $\mathbf{a}^{(t)}$ obtido a partir da Equação (4.50). Caso não exista nenhum conhecimento prévio aproximado acerca dos polos do sistema na primeira iteração ($t = 1$), pode-se fazer $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{0}$.

Como pode ser observado, a estrutura em espaço de estados em (4.38), (4.39) e (4.40) apresenta um papel fundamental neste algoritmo, isto é, tanto na realocação de polos em (4.50) quanto no cálculo dos elementos $\mathbf{d}(s_k, \mathbf{a}^{(t)})$ presentes na matriz $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)})$. Tais elementos podem ser obtidos utilizando-se a operação $(s_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ definida em (4.42) para se calcular o valor de cada função $\Phi_i(s_k, \mathbf{a}^{(t)})$ para cada valor de frequência ω_k . Além disso, o modelo simplificado obtido após a convergência do processo iterativo é também fruto da estrutura em espaço de estados já mencionada.

Vale ainda ressaltar que, durante qualquer iteração do processo, um modelo simplificado como em (4.53) pode ser obtido fazendo-se

$$\mathbf{d}^T(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) = W(s_k) \begin{bmatrix} 1 & \Phi_1(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) & \cdots & \Phi_n(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix}$$

diretamente em (4.60). Isto pode ser usado por exemplo para se monitorar, a cada iteração, o EAQPM do modelo associado ao conjunto de polos $\mathbf{a}^{(t)}$.

O fluxograma da Figura 19 resume como o algoritmo iterativo baseado em BFRs apresentado nesta seção pode ser implementado. Como pode ser percebido por este fluxograma, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da estrutura em espaço de estados determinam a base de funções usada no modelo. Isso também pode ser verificado pela Equação (4.42). Lembra-se ainda que a construção dessas matrizes para funções do tipo polo-resíduo, funções

ortonormais de Takenaka-Malmquist e funções de frequência localizada (definidas no tempo contínuo) é detalhadamente investigada no Capítulo 2 deste documento. Note-se que a ordem do modelo n é definida ao se escolher o conjunto de n polos iniciais que compõem o vetor $\mathbf{a}^{(1)}$.

Conforme será mostrado nos resultados deste trabalho, a escolha da BFR utilizada no modelo pode influenciar diretamente na convergência do processo iterativo, assim como o próprio conjunto de polos iniciais $\mathbf{a}^{(1)}$.

Ao término das iterações, o conjunto de polos $\mathbf{a}^{(N_{it}+1)}$ que irá parametrizar as funções racionais do modelo é obtido, onde N_{it} denota o número de iterações utilizado. Conseqüentemente, a equação de estado

$$s\tilde{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{A}^{(N_{it}+1)} \tilde{\mathbf{U}}(s) + \mathbf{B}^{(N_{it}+1)} U_0(s)$$

é também conhecida. Os coeficientes de um modelo simplificado final como em (4.53) podem então ser estimados a partir da solução $\begin{bmatrix} r_0 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(N_{it}+1)})\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(N_{it}+1)})]^{-1} \bar{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(N_{it}+1)})\bar{\mathbf{G}}_W$, onde $\bar{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(N_{it}+1)})$ é agora construída fazendo-se

$$\mathbf{d}^T(s_k, \mathbf{a}^{(N_{it}+1)}) = W(s_k) \begin{bmatrix} 1 & \Phi_1(s_k, \mathbf{a}^{(N_{it}+1)}) & \dots & \Phi_n(s_k, \mathbf{a}^{(N_{it}+1)}) \end{bmatrix}.$$

Para finalizar esta seção, ressalta-se ainda que os problemas de otimização (4.45) e (4.47) não são necessariamente iguais, uma vez que em (4.45) busca-se minimizar $\sum |E_W(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{esp})|^2$ enquanto em (4.47) minimiza-se $\sum \left| \frac{F(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(s_k, \mathbf{a}^{(t)})} E_W(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)}) \right|^2$. Dessa forma, assim como no método tradicional de Sanathanan-Koerner, não é possível garantir que $\hat{\lambda}$ é um mínimo local da função objetivo original $V(\lambda)$, ou ainda, que $\hat{\lambda} = \lambda^*$.

4.3.1 Formulação usando variáveis instrumentais

O objetivo desta seção é, baseando-se em variáveis instrumentais, reformular o método baseado em BFRs da seção anterior a fim de garantir que a solução encontrada pelo processo iterativo é de fato um ótimo local da função objetivo $V(\lambda)$ definida em (4.45). Para tanto, se $\hat{\lambda}$ é um mínimo local de $V(\lambda)$, então ele necessariamente satisfaz $\left. \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \mathbf{0}$, ou ainda, pela regra da cadeia:

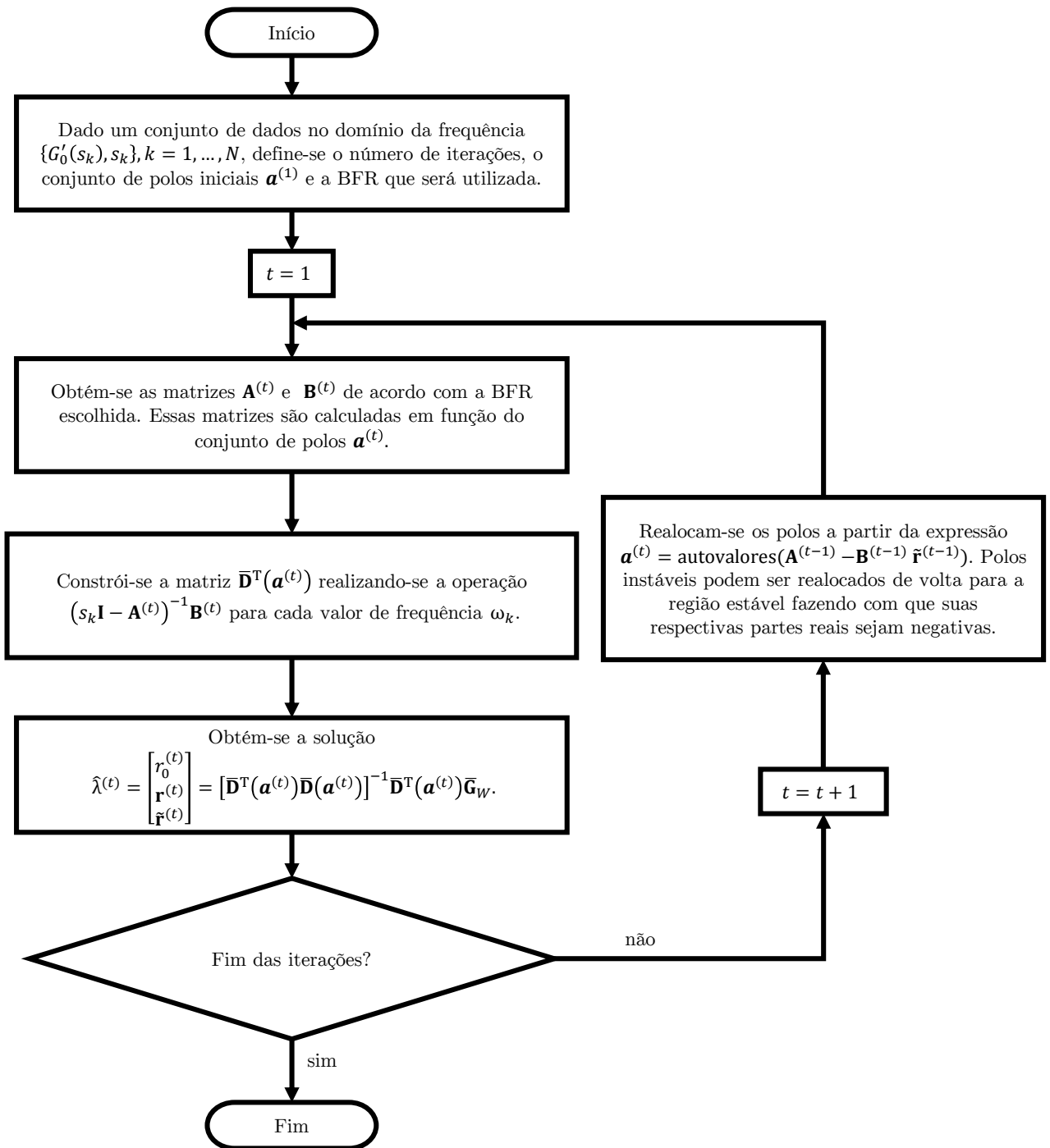


Figura 19 – Algoritmo resumido referente as iterações de Sanathanan-Koerner aplicadas a modelos formados por BFRs.

$$\sum_{k=1}^N -2\Re \left\{ \left[\mathbf{f}^T(s_k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \right]^* W(s_k) \left(\frac{F(s_k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(s_k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})} G'_0(s_k) - \frac{B(s_k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{F(s_k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})} \right) \right\} = \mathbf{0}, \quad (4.62)$$

sendo $\mathbf{f}(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})$ o vetor de instrumentos definido por

$$\mathbf{f}(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = W(s) \frac{\partial}{\partial \lambda} G(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}). \quad (4.63)$$

Ao término desta seção discute-se em mais detalhes como os termos $\mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}, \mathbf{a}^{\text{esp}})$ podem ser calculados.

É possível observar pela expressão em (4.62) que o problema de se encontrar $\hat{\lambda}$ é também não-linear em relação a essas variáveis. Buscando resolver esse problema de maneira similar ao realizado no método baseado em BFRs da seção anterior (Equação (4.47)), propõe-se o seguinte processo iterativo de regressão por variáveis instrumentais:

$$\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = \text{sol}_{\lambda \in D_\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^N \Re \left\{ \left[\mathbf{f}^T(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \right]^* W(s_k) \times \left(\frac{F(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(s_k, \mathbf{a}^{(t)})} G'_0(s_k) - \frac{B(s_k, \lambda, \mathbf{a}^{(t)})}{\hat{F}(s_k, \mathbf{a}^{(t)})} \right) \right\} = \mathbf{0} \right\}. \quad (4.64)$$

Esta expressão implica que, a cada iteração, $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}$ deve satisfazer (baseando-se na notação já introduzida neste capítulo)

$$\sum_{k=1}^N \Re \left\{ \left[\mathbf{f}^T(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \right]^* \left(G_W(s_k) - \mathbf{d}^T(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} \right) \right\} = \mathbf{0}. \quad (4.65)$$

Tal expressão equivale a

$$\sum_{k=1}^N \left[\begin{array}{c} \Re \{ \mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \} \\ \Im \{ \mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \Re \{ G_W(s_k) \} \\ \Im \{ G_W(s_k) \} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \Re \{ \mathbf{d}^T(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \} \\ \Im \{ \mathbf{d}^T(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \} \end{array} \right] \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = \mathbf{0}, \quad (4.66)$$

Definindo-se ainda

$$\mathbf{F}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(s_1, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^T(s_N, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

e, em seguida,

$$\bar{\mathbf{F}}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) = \begin{bmatrix} \Re \{ \mathbf{F}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \} \\ \Im \{ \mathbf{F}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \} \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

torna-se possível reescrever a Equação (4.66) na forma matricial equivalente:

$$\bar{\mathbf{F}}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \left[\bar{\mathbf{G}}_W - \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)}) \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} \right] = \mathbf{0}. \quad (4.69)$$

Por fim, isolando-se o vetor de parâmetros $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}$ em (4.69) tem-se que a solução analítica para as iterações de Sanathanan-koerner aplicadas a modelos formados por BFRs e formuladas usando o conceito de variáveis instrumentais é dada por:

$$\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = \left[\bar{\mathbf{F}}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)}) \right]^{-1} \bar{\mathbf{F}}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \bar{\mathbf{G}}_W. \quad (4.70)$$

Comparando-se essa solução com a solução tradicional em (4.60), é possível observar que elas diferem entre si uma vez que a formulação usando variáveis instrumentais requer também a construção da matriz $\bar{\mathbf{F}}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$. Assim como no método de Sanathanan-Koerner formulado usando variáveis instrumentais, é possível garantir que se as iterações acima convergem, então um ótimo local da função objetivo $V(\lambda)$ é obtido. Tal proposição é confirmada a seguir.

Assumindo que a realocação de polos ocorra de acordo com as Equações (4.49) e (4.50) e que, além disso, $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)}$ e $\mathbf{a}^{(t)}$ convergem para $\hat{\lambda}_{\text{VI}}$ e $\hat{\mathbf{a}}$ na iteração $t = c$, então $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c)} = \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c+1)} = \hat{\lambda}_{\text{VI}}$ e $\mathbf{a}^{(c)} = \mathbf{a}^{(c+1)} = \hat{\mathbf{a}}$ e, portanto, pela Equação (4.49)

$$\hat{F}(s, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(s, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c)}, \mathbf{a}^{(c)}) = F(s, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(c+1)}, \mathbf{a}^{(c+1)}) = F(s, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{F}(s, \hat{\mathbf{a}}). \quad (4.71)$$

Dessa forma, na iteração $t = c + 1$ a Equação (4.64) pode ser reescrita como sendo

$$\sum_{k=1}^N \Re \left\{ \left[\mathbf{f}^T(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}}) \right]^* W(s_k) \left(\frac{F(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})}{F(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})} G'_0(s_k) - \frac{B(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})}{F(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}, \hat{\mathbf{a}})} \right) \right\} = \mathbf{0}. \quad (4.72)$$

Esta expressão coincide com a condição de otimalidade local imposta em (4.62), o que implica que $\hat{\lambda}_{\text{VI}}$ é de fato um ótimo local de $V(\lambda)$.

Conforme será mostrado nos resultados da próxima seção deste trabalho, este algoritmo baseado em BFRs e variáveis instrumentais tende a ter um menor condicionamento numérico em relação ao método de Sanathanan-Koerner formulado usando variáveis instrumentais, isto considerando que as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist sejam usadas como BFR. Entretanto, justamente por se tratar de um algoritmo baseado em variáveis instrumentais, o condicionamento numérico da matriz $\bar{\mathbf{F}}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)})$ em (4.70) pode ainda assim ser significativamente elevado (especialmente nas primeiras iterações).

Uma vez que a formulação tradicional da técnica baseada em BFRs (cujo resumo é dado pelo fluxograma da Figura 19) apresenta matrizes melhor condicionadas numericamente, pode-se usar esse algoritmo durante as primeiras iterações do processo (duas ou três, por exemplo) e, só então, partir para a formulação usando variáveis instrumentais (cuja solução é dada pela Equação (4.70)) fazendo-se $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)} = \hat{\lambda}^{(t-1)}$. Isto significa que, após as primeiras iterações, a solução tradicional $\hat{\lambda}^{(t)} = [\bar{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(t)})\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)})]^{-1} \bar{\mathbf{D}}^T(\mathbf{a}^{(t)})\bar{\mathbf{G}}_W$ no fluxograma da Figura 19 é substituída pela solução usando variáveis instrumentais dada por $\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t)} = [\bar{\mathbf{F}}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{(t)})]^{-1} \bar{\mathbf{F}}^T(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})\bar{\mathbf{G}}_W$.

4.3.1.1 Cálculo aproximado do vetor de instrumentos $\mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$

Nesta seção mostra-se como os termos $\mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ podem ser aproximados de modo a simplificar a montagem da matriz $\bar{\mathbf{F}}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$. De acordo com a definição realizada em (4.63),

$$\mathbf{f}(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = W(s) \frac{\partial}{\partial \lambda} G(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = W(s) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})} \right). \quad (4.73)$$

Dessa forma, existem dois tipos possíveis de derivada de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial r_j} G(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})}, & j = 0 \\ \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})} \Phi_j(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}), & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_j} G(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}}) = \frac{-\left(r_0 + \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})\right)}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})\right)^2} \Phi_j(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}). \quad (4.75)$$

Com base nas expressões acima, pode-se notar que o cálculo da matriz $\bar{\mathbf{F}}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ pode ser bastante custoso computacionalmente, uma vez que ambas as equações devem ser calculadas para $i = 1, \dots, n$ e, também, para $k = 1, \dots, N$. Neste trabalho, a aproximação

$$\frac{F(s, \lambda, \mathbf{a}^{\text{esp}})}{\hat{F}(s, \mathbf{a}^{\text{esp}})} = 1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i \Phi_i(s, \mathbf{a}^{\text{esp}}) \approx 1 \quad (4.76)$$

é aplicada nas Equações (4.74) e (4.75). Com essa aproximação, o problema de se calcular $\bar{\mathbf{F}}(\hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ pode ser substancialmente simplificado uma vez que o vetor de instrumentos $\mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)})$ pode ser aproximado por:

$$\mathbf{f}(s_k, \hat{\lambda}_{\text{VI}}^{(t-1)}, \mathbf{a}^{(t)}) \approx W(s_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \Phi_1(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ \Phi_n(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \\ - \left(r_0^{(t-1)} + \sum_{i=1}^n r_i^{(t-1)} \Phi_i(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \right) \Phi_1(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \\ \vdots \\ - \left(r_0^{(t-1)} + \sum_{i=1}^n r_i^{(t-1)} \Phi_i(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \right) \Phi_n(s_k, \mathbf{a}^{(t)}) \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Vale ainda ressaltar que esta aproximação não altera as conclusões feitas em relação à convergência do processo iterativo uma vez que, pela Equação (4.71), a aproximação imposta em (4.76) torna-se uma igualdade quando o algoritmo converge.

4.4 Testes e análise dos resultados

Nesta seção as vantagens de se aplicar as técnicas baseadas em BFRs e variáveis instrumentais (propostas na seção 4.3 deste documento) são exploradas através de dois estudos de caso. No primeiro estudo de caso (Estudo de caso 4: Sistema de 5ª Ordem), um sistema de 5ª ordem é usado para se avaliar, em termos de EAQPM e condicionamento numérico, o impacto da utilização (ou não) de variáveis instrumentais, isso levando-se em conta duas definições diferentes para o ruído $V_U(s)$ (ruído adicionado à resposta em frequência exata do sistema). Já no segundo estudo de caso (Estudo de caso 5: Transformador de Potência), considera-se a identificação da resposta em frequência extraída de um dos terminais de alta tensão de um transformador de potência trifásico. Para este caso, modelos de ordem mais elevada são também considerados.

A seguinte notação para as técnicas será adotada:

- SK: método tradicional de Sanathanan-Koerner;

- SK-VI: método de **Sanathanan-Koerner** formulado usando o conceito de **variáveis instrumentais**;
- SK-BPR: iterações de **Sanathanan-Koerner** aplicadas a modelos formados por BFRs. **Base utilizada: funções do tipo polo-resíduo**;
- SK-BPR-VI: iterações de **Sanathanan-Koerner** aplicadas a modelos formados por BFRs. **Base utilizada: funções do tipo polo-resíduo**. Formulação usando o conceito de **variáveis instrumentais**;
- SK-BFO: iterações de **Sanathanan-Koerner** aplicadas a modelos formados por BFRs. **Base utilizada: funções ortonormais de Takanaka-Malmquist** definidas para o tempo contínuo;
- SK-BFO-VI: iterações de **Sanathanan-Koerner** aplicadas a modelos formados por BFRs. **Base utilizada: funções ortonormais de Takanaka-Malmquist** definidas para o tempo contínuo. Formulação usando o conceito de **variáveis instrumentais**;
- SK-BFFL: iterações de **Sanathanan-Koerner** aplicadas a modelos formados por BFRs. **Base utilizada: funções de frequência localizada**;
- SK-BFFL-VI: iterações de **Sanathanan-Koerner** aplicadas a modelos formados por BFRs. **Base utilizada: funções de frequência localizada**. Formulação usando o conceito de **variáveis instrumentais**;

Nos estudos de caso a seguir, não se levará em conta o efeito de ponderação dos elementos da função objetivo, ou seja, será considerado $W(s_k) = 1$ para $k = 1, \dots, N$.

4.4.1 Estudo de caso 4: Sistema de 5^a Ordem

Este estudo de caso leva em conta a identificação do sistema de quinta ordem definido por ([SCHUMACHER; OLIVEIRA; MITCHELL, 2015](#))

$$G_0(s) = \frac{(s^2 + 0,1s + 15)(s^2 + 0,1s + 30)}{(s + 1)(s^2 + 0,1s + 5)(s^2 + 0,1s + 20)}. \quad (4.78)$$

Considera-se então um conjunto de 500 amostras de resposta em frequência do sistema $G_0(s_k = j\omega_k)$ espaçadas logaritmicamente entre $\omega_1 = 1$ e $\omega_{500} = 10$ rad/s. Por fim, os dados de estimação são formados pelo conjunto de amostras $\{ G'_0(s_k), s_k \}, k = 1, \dots, 500$ onde

$$G'_0(s_k) = G_0(s_k) + V_U(s_k), \quad (4.79)$$

e $V_U(s_k)$ representa o ruído aditivo presente na resposta em frequência $G'_0(s_k)$. No processo de estimação, são utilizadas vinte iterações e modelos de quinta ordem ($n = n_b = n_f = 5$) com polos iniciais em $\{-5; -5; -5; -5; -5\}$.

O principal objetivo deste estudo de caso é investigar como as técnicas propostas anteriormente (SK, SK-VI, SK-BPR, SK-BPR-VI e SK-BFO) e as técnicas propostas neste trabalho (SK-BFO-VI, SK-BFFL e SK-BFFL-VI) se comportam na identificação de $G_0(s)$, levando-se em conta duas definições diferentes para o ruído $V_U(s)$.

Em um primeiro momento, considera-se que $V_U(s)$ é um sinal com distribuição Gaussiana filtrado. Especificamente, faz-se $V_U(s_k) = H_0(s_k)E(s_k)$, sendo $E(s_k)$ definido por duas sequências aleatórias $E_R(s_k)$ e $E_I(s_k)$ com distribuição Gaussiana de média 0 e desvio padrão 0,1 tal que $E(s_k) = E_R(s_k) + jE_I(s_k)$. Considera-se ainda como filtro $H_0(s)$ a própria função de transferência do sistema $G_0(s)$, ou seja, $H_0(s) = G_0(s)$. A Figura 20 mostra, para este caso, os EAQPMs obtidos para cada modelo durante o processo de realocação iterativa dos polos.

Analisando-se a Figura 20 é possível perceber que, no caso em que o ruído presente na resposta em frequência do sistema consiste no sinal $E(s_k)$ filtrado por $H_0(s_k)$, as técnicas baseadas em variáveis instrumentais apresentam modelos com uma maior precisão quando comparadas com a formulação tradicional das respectivas técnicas. Para uma melhor visualização dessa diferença de precisão, a Figura 21 compara a resposta em frequência estimada (na iteração $t = 20$) dos modelos. A partir desta figura pode-se observar que as diferenças de EAQPMs da Figura 20 entre as técnicas tradicionais e as técnicas baseadas em variáveis instrumentais representam uma imprecisão considerável na resposta em frequência estimada especialmente no intervalo entre 3,5 e 6 rad/s. Vale ainda

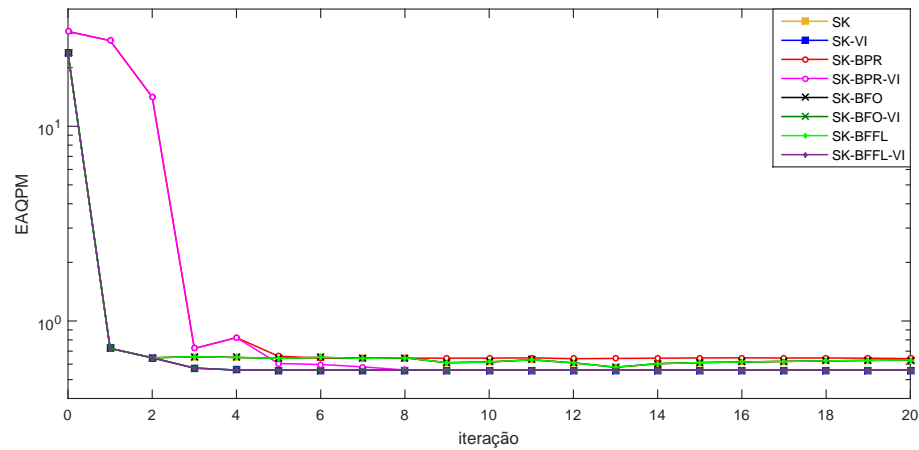


Figura 20 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano filtrado: EAQPM (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

ressaltar que tais resultados estão de acordo com os apontamentos feitos em [Van den Hof e Douma \(2008\)](#), que justificam a utilização de variáveis instrumentais no contexto de identificação de sistemas quando estes apresentam um sinal de ruído aditivo filtrado.

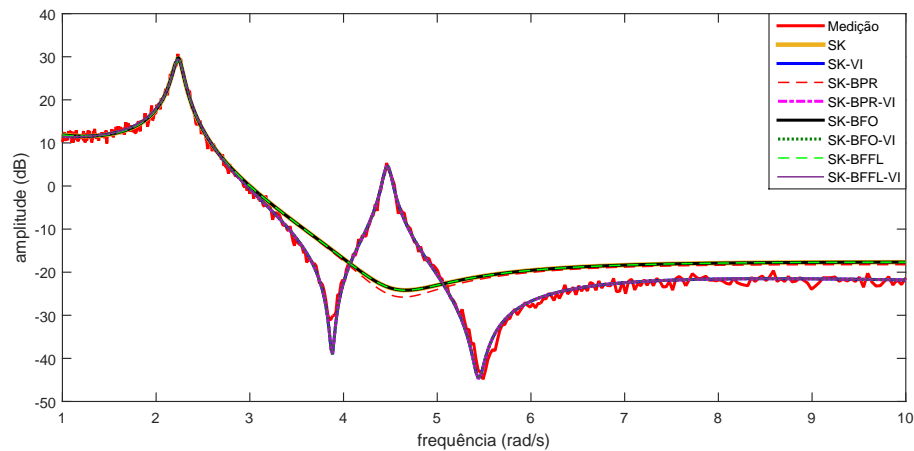


Figura 21 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano filtrado: Resposta em frequência do sistema e dos modelos.

Já a Figura 22 mostra o condicionamento numérico³ (por iteração) de cada uma das técnicas testadas. É possível perceber a partir dessa figura que, assim como nos estudos de caso do Capítulo 3 (Identificação no domínio do tempo), as técnicas baseadas em

³ Todas as técnicas aqui avaliadas possuem uma solução iterativa genérica do tipo $x = (\mathbf{A}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{c}$ (veja, por exemplo, as soluções em (4.19), (4.30), (4.60) e (4.70)). Neste trabalho, é considerado o condicionamento numérico da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$, que nada mais é do que a razão entre o maior e o menor valor singular desta matriz. Em diversas ocasiões, uma matriz é dita “bem condicionada numericamente” caso seu condicionamento seja próximo de 1.

bases de funções ortonormais (SK-BFO e SK-BFO-VI) apresentam vantagens significativas (em termos de condicionamento numérico) quando comparadas com as demais técnicas. Também é possível perceber que as técnicas baseadas em variáveis instrumentais apresentam um condicionamento numérico maior em relação à formulação tradicional das respectivas técnicas. Além disso, as técnicas SK-BPR e SK-BPR-VI (baseadas em funções do tipo polo-resíduo) apresentam uma forte instabilidade numérica nas primeiras iterações (condicionamento numérico maior que 10^{15} para $t < 5$).

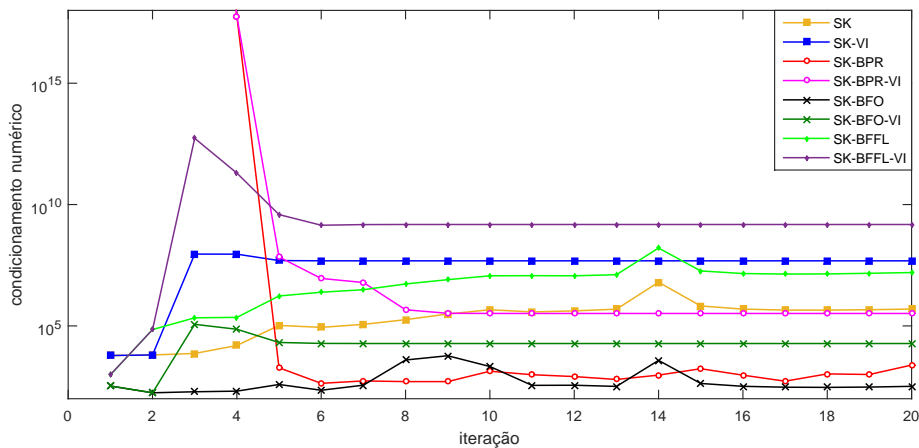


Figura 22 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano filtrado: Condicionamento numérico (por iteração) no processo de estimação dos modelos.

Agora será avaliado o caso em que o ruído presente na resposta em frequência do sistema é o próprio sinal com distribuição Gaussiana $E(s_k)$, ou seja, $V_U(s_k) = E(s_k)$. a Figura 23 compara a resposta em frequência estimada (na iteração $t = 20$) dos modelos para este caso. A partir dessa figura pode-se observar que, diferentemente do caso em que o sinal de ruído $V_U(s_k)$ consiste no sinal $E(s_k)$ filtrado por $H_0(s_k)$ (ver Figura 21), as técnicas baseadas em variáveis instrumentais apresentam neste caso modelos com uma precisão bastante parecida com a precisão dos modelos obtidos pela formulação tradicional das respectivas técnicas. Uma exceção a essa afirmação ocorre quando as técnicas SK-BPR e SK-BPR-VI são comparadas, uma vez que a formulação tradicional (SK-BPR) apresenta uma notável imprecisão na resposta em frequência estimada.

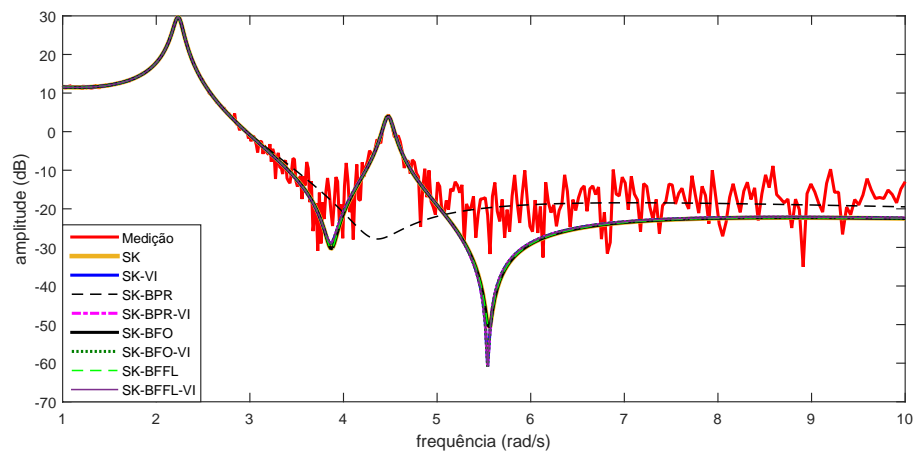


Figura 23 – Sistema de 5ª ordem com sinal de ruído Gaussiano: Resposta em frequência do sistema e dos modelos.

4.4.2 Estudo de caso 5: Transformador de potência

Este estudo de caso considera a identificação de um transformador de potência trifásico. Tal transformador (500/345-13,8 kV, 133 MVA) pertence ao Sistema Interligado Nacional (SIN) e encontra-se localizado na subestação de Jaguará (município de Rifaina), próximo à usina hidrelétrica de Jaguará. A resposta em frequência extraída (em campo) do transformador refere-se a impedância própria de um dos seus terminais de alta tensão.

O principal objetivo deste estudo de caso é investigar como (e quanto) o condicionamento numérico das diferentes técnicas (SK, SK-VI, SK-BPR, SK-BPR-VI, SK-BFO, SK-BFO-VI, SK-BFFL, SK-BFFL-VI) impacta na identificação deste sistema quando os modelos apresentam uma ordem elevada. Para a estimação são utilizadas vinte iterações. Na primeira iteração, os polos iniciais são selecionados como em (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1999), ou seja, fazendo-se:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{\beta}{100} + j\beta, \\ a_{i+1} &= -\frac{\beta}{100} - j\beta, \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde as partes imaginárias β são encontradas dividindo-se logaritmicamente o intervalo $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ no qual a resposta em frequência $\{G'_0(s_k)\}$ foi medida.

A Figura 24 mostra, para diferentes valores de n , o EAQPM e o condicionamento numérico obtidos na última iteração do processo iterativo. É possível perceber que existe uma tendência de diminuição do EAQPM a medida com que modelos de maior ordem

são utilizados. Por outro lado, também pode-se observar que o aumento no número de parâmetros do modelo está relacionado ao aumento do condicionamento numérico.

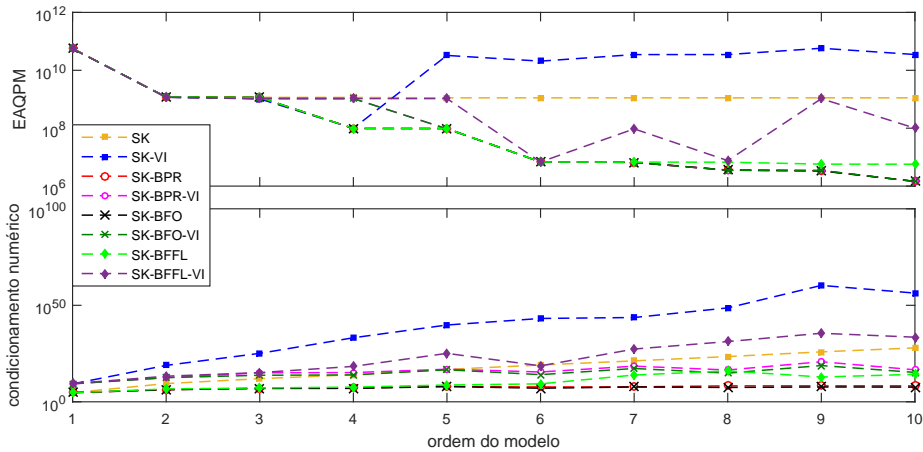


Figura 24 – Sistema Transformador de Potência: EAQPM e condicionamento numérico na última iteração do processo de estimação dos modelos

Analisando-se o comportamento de cada uma das curvas, pode-se concluir que as técnicas baseadas em funções ortonormais (SK-BFO e SK-BFO-VI) são menos susceptíveis a condicionamentos numéricos elevados em modelos de maior ordem. Em contrapartida, as técnicas propostas anteriormente (SK e SK-VI) apresentam em geral uma precisão menor e um condicionamento numérico maior. Nesse sentido, é possível associar que a precisão dos modelos SK-VI é afetada pelo alto condicionamento numérico dessa técnica. Essa perda de precisão devido ao alto condicionamento numérico pode ser também visualizada na Figura 25, que compara a resposta em frequência estimada dos modelos SK-VI, SK-BFO-VI e SK-BFFL-VI para $n = 10$.

Embora as técnicas SK-BPR e SK-BPR-VI (baseadas em funções do tipo polo-resíduo) apresentam, na Figura 24, um condicionamento numérico aparentemente comparável com o condicionamento numérico das técnicas SK-BFO e SK-BFO-VI (baseadas em funções ortonormais), não pode-se esquecer que um condicionamento numérico elevado nas técnicas baseadas em funções do tipo polo-resíduo aparece principalmente nas primeiras iterações (conforme verificado, por exemplo, na Figura 22 do estudo de caso 4).

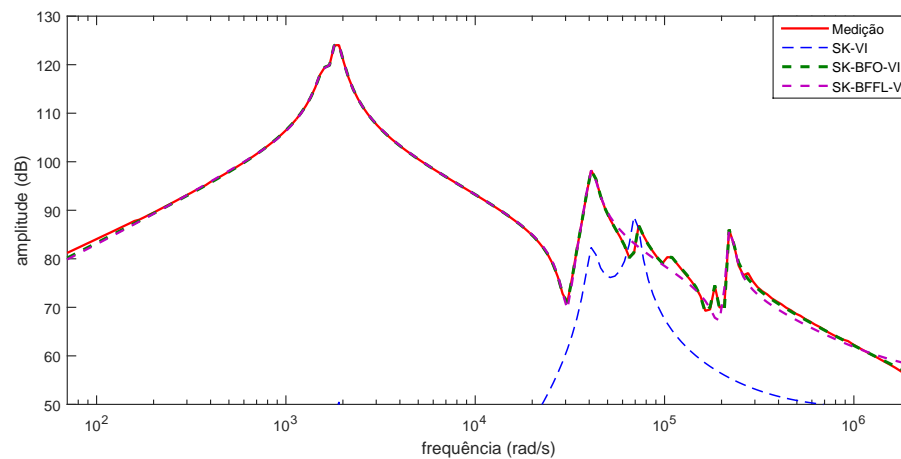


Figura 25 – Sistema Transformador de Potência: Resposta em frequência do sistema e dos modelos SK-VI, SK-BFO-VI e SK-BFFL-VI considerando modelos de ordem 10.

4.5 Considerações finais do capítulo

A partir dos estudos de caso apresentados neste capítulo, foi possível perceber que algoritmos de identificação baseados em BFRs podem apresentar vantagens (em termos de precisão e condicionamento numérico) quando comparados ao método tradicional de Sanathanan-Koerner que, por sua vez, baseia-se em modelos descritos na forma de função de transferência. Além disso, o procedimento iterativo usando BFRs garante a obtenção direta de modelos na forma de espaço de estados.

Dentre as formulações tradicionais avaliadas, pode-se destacar a técnica baseada em funções ortonormais: SK-BFO. Pelos resultados apresentados na seção anterior, observou-se que essa técnica resulta em modelos precisos ao mesmo tempo em que o algoritmo de identificação se mantém com matrizes melhor condicionadas numericamente (mesmo para modelos de ordem mais elevada). Apesar das técnicas SK, SK-BPR e SK-BFFL terem apresentado, em alguns casos, modelos igualmente precisos em relação aos modelos produzidos pela técnica SK-BFO, tais técnicas resultam em algoritmos pior condicionados numericamente.

A partir dos resultados obtidos também foi possível observar que as formulações baseadas em variáveis instrumentais podem resultar em modelos mais precisos em relação às formulações tradicionais (especialmente para casos com ruído Gaussiano filtrado). Nestes

casos, a utilização de bases de funções ortonormais (que resulta, neste caso, na técnica SK-BFO-VI) está, mais uma vez, associada à melhoria do condicionamento numérico no algoritmo de identificação. Ainda assim, a utilização de variáveis instrumentais resultou, em geral, em algoritmos pior condicionados numericamente quando comparados à formulação tradicional das respectivas técnicas.

Também pôde-se notar que as técnicas baseadas em funções do tipo-resíduo (SK-BPR e SK-BPR-VI) apresentam um elevado condicionamento numérico nas primeiras iterações do processo de realocação de polos do modelo. Além disso, essas duas técnicas tendem a convergir após as demais técnicas.

Por fim, vale ressaltar que as conclusões deste capítulo (Identificação no domínio da frequência) são bastante similares às conclusões apresentadas no capítulo anterior (Identificação no domínio do tempo).

5 Conclusões

A presente pesquisa teve por objetivo geral explorar e promover a utilização de BFRs no contexto de identificação de sistemas lineares invariantes no tempo. Para tanto, foram definidas estruturas de modelos formadas essencialmente pela combinação linear de funções racionais de uma determinada base. As seguintes bases foram consideradas: funções do tipo polo-resíduo, as funções ortonormais de Takenaka-Malmquist e as funções de frequência localizada. Uma metodologia unificada para construção dessas bases foi proposta no Capítulo 2 deste documento. Neste capítulo, foi definido ainda um novo conjunto de funções de frequência localizada para o caso de pares complexos conjugados de polos, uma vez que a formulação previamente proposta por [Welsh e Goodwin \(2003\)](#) considera apenas a existência de polos reais.

No Capítulo 3, que trata da identificação de sistemas no domínio do tempo, foi proposta a aplicação das iterações de Steiglitz-McBride para estimação de modelos formados por BFRs. A proposta foi então estendida utilizando-se o conceito de variáveis instrumentais. O uso de variáveis instrumentais é interessante uma vez que elas garantem, no caso de convergência do processo iterativo de realocação de polos do modelo, que a solução encontrada é de fato um ótimo local da função objetivo a ser minimizada. Já no Capítulo 4, que trata da identificação de sistemas no domínio da frequência, a principal contribuição foi generalizar a utilização de BFRs e variáveis instrumentais no contexto de identificação via iterações de Sanathanan-Koerner.

Conforme observado nos fluxogramas dos Capítulos 3 e 4 deste trabalho, a representação de BFRs no espaço de estados (apresentada no Capítulo 2) facilita a implementação do algoritmo de identificação e garante que modelos sejam obtidos diretamente na forma de espaço de estados. Comparando-se esses dois fluxogramas, observa-se ainda que, apesar da definição das matrizes envolvidas no processo de estimação do vetor de parâmetros λ ser diferente em cada domínio (tempo e frequência), ambos os algoritmos apresentam diversas similaridades.

Com base nos resultados apresentados nos Capítulos 3 e 4, foi possível concluir que a utilização das funções ortonormais de Takenaka-Malmquist resulta em modelos precisos para o sistema ao mesmo tempo em que o algoritmo se mantém com matrizes melhor condicionadas numericamente (e isso ocorre mesmo para modelos de ordem mais elevada). Na realidade, as demais técnicas resultaram em algoritmos pior condicionados numericamente e, em apenas alguns casos do Estudo de caso 3: Sistema de Potência Monofásico, a técnica SM-BPR (baseada em funções do tipo polo-resíduo) foi capaz de gerar modelos mais precisos em relação às técnicas baseadas nas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist. Entretanto, ressalta-se que as funções do tipo polo-resíduo resultaram em algoritmos possivelmente instáveis em termos de condicionamento numérico.

Pelos resultados também notou-se que a formulação baseada em variáveis instrumentais pode resultar em modelos mais precisos em relação à formulação tradicional das respectivas técnicas. Entretanto, a utilização de variáveis instrumentais e BFRs tornou necessária a realização de uma aproximação do vetor de instrumentos para que o processo iterativo fosse simplificado. Mesmo com esta simplificação, foi observado que tais algoritmos exigem um tempo maior de processamento computacional, já que uma matriz adicional deve ser construída em relação às técnicas tradicionais. Além disso, as técnicas baseadas em variáveis instrumentais resultaram em algoritmos de identificação pior condicionados numericamente.

5.1 Trabalhos futuros

A seguir, são listadas as perspectivas de trabalhos futuros.

- Estender as formulações usando BFRs e variáveis instrumentais para a identificação de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas;
- Utilizar os mínimos quadrados regularizado, totais e recursivo na estimação de modelos formados por BFRs;

-
- Adaptar as formulações propostas neste trabalho ao contexto de identificação usando funções racionais fracionárias;
 - Comparar o desempenho das técnicas propostas neste trabalho com outras técnicas de otimização não-linear presentes na literatura.

Referências

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. 3. ed. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 23, 24, 33, 67, 68, 99 e 100.

ÅSTRÖM, K. J. *Computer-Controlled Systems*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado na página 23.

BEYGI, A.; DOUNAVIS, A. An instrumental variable vector-fitting approach for noisy frequency responses. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 60, n. 9, p. 2702–2712, 2012. Citado na página 29.

DE MOOR, B. L. R. *DaISy: Database for the Identification of Systems*. Belgium, 2015. Visitado em 02/09/2015. Base de dados usada: *Data from a flexible robot arm*, seção *Mechanical Systems*, code 96-009. Disponível em: <http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/>. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 90.

DESCHRIJVER, D.; HAEGEMAN, B.; DHAENE, T. Orthonormal Vector Fitting: A robust macromodeling tool for rational approximation of frequency domain responses. *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, v. 30, n. 2, p. 216–225, 2007. Citado 13 vezes nas páginas 25, 26, 28, 34, 35, 37, 38, 56, 57, 75, 76, 107 e 108.

FAN, H.; NAYERI, M. On reduced order identification; revisiting “on some system identification techniques for adaptive filtering”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 37, n. 9, p. 1144–1151, 1990. Citado na página 72.

GRIVET-TALOCIA, S. Package macromodeling via time-domain Vector Fitting. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, v. 13, n. 11, p. 472–474, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 75.

GRIVET-TALOCIA, S.; GUSTAVSEN, B. *Passive Macromodeling: Theory and Applications*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc., 2016. Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 27, 37, 78, 87 e 110.

GUSTAVSEN, B. Computer code for rational approximation of frequency dependent admittance matrices. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 17, n. 4, p. 1093–1098, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 14, n. 3, p. 1052–1061, 1999. Citado 10 vezes nas páginas 28, 34, 37, 38, 55, 75, 107, 108, 110 e 123.

HEUBERGER, P. S. C.; VAN DEN HOF, P. M. J.; WAHLBERG, B. *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*. London: Springer-Verlag, 2005. Citado 9 vezes nas páginas 25, 26, 27, 34, 37, 42, 51, 68 e 100.

KUNDUR, P. *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill, 1994. Citado na página 23.

LEI, C.; WONG, N. Efficient linear macromodeling via discrete-time time-domain vector fitting. In: *21st International Conference on VLSI Design*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 469–474. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 75.

LEI, C.; WONG, N. WISE: warped impulse structure estimation for time-domain linear macromodeling. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, v. 2, n. 1, p. 131–139, 2012. Citado na página 28.

LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. Citado 7 vezes nas páginas 23, 24, 33, 67, 68, 99 e 100.

LJUNG, L.; GLAD, T. *Modeling of Dynamic Systems*. New Jersey: Prentice Hall, 1994. Citado na página 23.

MAESTRELLI, R. *Funções ortonormais em tempo contínuo com seleção ótima das dinâmicas do modelo na identificação de sistemas no domínio da frequência*. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 27, 75 e 108.

MEKONNEN, Y. S.; SCHUTT-AINÉ, J. E. Broadband macromodeling of sampled frequency data using z-domain vector-fitting method. In: *IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 45 – 48. Citado na página 28.

NINNESS, B.; GUSTAFSSON, F. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 4, p. 515 – 521, 1997. Citado na página 52.

NOURI, B.; ACHAR, R.; NAKHLA, M. S. z-domain orthonormal basis functions for physical system identifications. *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, v. 33, n. 1, p. 293 – 307, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 28, 75 e 108.

OLIVEIRA, G. H. C.; DA ROSA, A.; CAMPELLO, R. J. G. B.; MACHADO, J. B.; AMARAL, W. C. An introduction to models based on laguerre, kautz and other related orthonormal functions – Part I: linear and uncertain models. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, v. 14, n. 1/2, p. 121–132, 2011. Citado na página 26.

OLIVEIRA, G. H. C.; DA ROSA, A.; CAMPELLO, R. J. G. B.; MACHADO, J. B.; AMARAL, W. C. An introduction to models based on laguerre, kautz and other related orthonormal functions – Part II: non-linear models. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, v. 16, n. 1, p. 1–14, 2012. Citado na página 26.

RAMIREZ, A. Vector fitting-based calculation of frequency-dependent network equivalents by frequency partitioning and model-order reduction. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 24, n. 1, p. 410–415, 2009. Citado na página 91.

REGALIA, P. A. Comments on “a weighted least squares method for the design of stable 1-D and 2-D IIR digital filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 7, p. 2063–2065, 1999. Citado na página 72.

REGALIA, P. A.; MBOUP, M. Undermoleled adaptive filtering: An *a priori* error bound for the steiglitz-mcbride method. *IEEE Transactions on Analog Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, v. 43, n. 2, p. 105–116, 1996. Citado na página 72.

REGALIA, P. A.; MBOUP, M.; ASHARI, M. On the existence of stationary points for the steiglitz-mcbride algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 11, p. 1592–1596, 1997. Citado na página 72.

REGINATO, B. C. *Ambiente computacional para identificação de sistemas nos domínios do tempo e da frequência usando bases de funções ortonormais generalizadas*. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 27, 75 e 108.

REGINATO, B. C.; OLIVEIRA, G. H. C. On selecting the MIMO generalized orthonormal basis functions poles by using particle swarm optimization. In: *2007 European Control Conference*. Kos, Grécia: [s.n.], 2007. p. 5182–5188. Citado na página 27.

ROJAS, C. R.; TÓTH, R.; HJALMARSSON, H. Sparse estimation of polynomial and ratio dynamical models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 59, n. 11, p. 2962–2977, 2014. Citado na página 28.

SANATHANAN, C. K.; KOERNER, J. Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 8, n. 1, p. 56–58, 1963. Citado 3 vezes nas páginas 28, 70 e 102.

SCHOUKENS, J.; PINTELON, R.; ROLAIN, Y. *Mastering System Identification in 100 Exercises*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc., 2012. Citado 4 vezes nas páginas 75, 86, 100 e 107.

SCHUMACHER, R.; LIMA, E. G.; OLIVEIRA, G. H. C. RF power amplifier behavioral modeling based on Takenaka-Malmquist-Volterra series. *Circuits, Systems and Signal Processing, accepted*, 2015. Citado na página 31.

SCHUMACHER, R.; OLIVEIRA, G. H. C. Uma nova abordagem *Vector Fitting* para identificação de sistemas com dados no domínio do tempo. In: *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2015)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 283–288. Citado na página 30.

SCHUMACHER, R.; OLIVEIRA, G. H. C. Formulação iterativa baseada em variáveis instrumentais e bases de funções racionais para identificação de sistemas no domínio do tempo. In: *XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 653–658. Citado na página 30.

SCHUMACHER, R.; OLIVEIRA, G. H. C. Método relaxado para identificação de sistemas com dados no domínio do tempo e bases de funções racionais. In: *XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 659–664. Citado na página 30.

SCHUMACHER, R.; OLIVEIRA, G. H. C.; MITCHELL, S. D. An iterative approach for selecting poles on complex frequency localizing basis function-based models. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 26, n. 4, p. 380–389, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 30, 62, 107 e 119.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. On some system identification techniques for adaptive filtering. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 35, n. 4, p. 457–461, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 72.

STEIGLITZ, K.; MCBRIDE, L. E. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 10, n. 4, p. 461–464, 1965. Citado 3 vezes nas páginas 28, 70 e 102.

- STOICA, P.; SÖDERSTRÖM, T. The steiglitz-mcbride identification algorithm revisited - convergence analysis and accuracy aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 3, p. 712–717, 1981. Citado na página 72.
- UBOLLI, A.; GUSTAVSEN, B. Comparison of methods for rational approximation of simulated time-domain responses: ARMA, ZD-VF, and TD-VF. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 26, n. 1, p. 279–288, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 28, 75 e 91.
- VAN DEN BOSCH, P. P. J.; VAN DER KLAUW, A. C. *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*. 1. ed. Florida: CRC Press, 1994. Citado 6 vezes nas páginas 24, 33, 67, 68, 99 e 100.
- VAN DEN HOF, P. M. J.; DOUMA, S. G. Technical report nr. 09-018, *An IV-based iterative linear regression algorithm with optimal output error properties*. 2008. Visitado em 02/09/2015. Disponível em: <http://www.pvandenhof.nl/Reportfiles/StM2OE_Report.pdf>. Citado 8 vezes nas páginas 29, 73, 74, 87, 105, 106, 107 e 121.
- VOORHOEVE, R.; OOMEN, T.; VAN HERPEN, R.; STEINBUCH, M. On numerically reliable frequency-domain system identification: new connections and a comparison of methods. In: *Preprints of the 19th World Congress: The International Federation of Automatic Control*. South Africa: [s.n.], 2014. Citado 11 vezes nas páginas 25, 29, 30, 32, 61, 74, 75, 99, 105, 107 e 108.
- WELSH, J. S.; GOODWIN, G. C. Frequency localising basis functions for wide-band identification. In: *Proceedings of the 2003 European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 6 vezes nas páginas 26, 30, 31, 33, 65 e 127.
- WELSH, J. S.; ROJAS, C. R. Frequency localising basis functions for wide-band identification: A condition number bound for output error systems. In: *Proceedings of the 2007 European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado 3 vezes nas páginas 26, 38 e 61.
- WHITFIELD, A. H. Asymptotic behaviour of transfer function synthesis methods. *International Journal of Control*, v. 45, n. 3, p. 1083–1092, 1987. Citado na página 29.
- WONG, N.; LEI, C. IIR approximation of FIR filters via discrete-time vector fitting. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 56, n. 3, p. 1296–1302, 2008. Citado na página 28.