

HANS-ULRICH PILCHOWSKI

TÓPICOS DE OTIMIZAÇÃO
APLICADOS À GEODÉSIA

Tese apresentada ao curso de pós-graduação em ciências geodésicas da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em ciências.

Curitiba, 23 de maio de 1976.

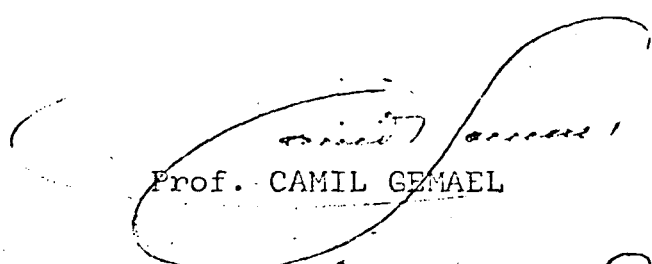
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS

¶ Parecer final da Banca Examinadora da Prova de Defesa de Tese do Pós-Graduando HANS-ULRICH PILCHOWSKI.

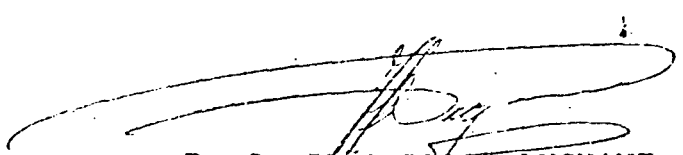
Na Defesa de Tese, realizada no dia dois de agosto de um mil novecentos e setenta e seis, a Tese do candidato ao título de Mestre em Ciências, Licenciado em Física, Hans-Ulrich Pilchowski, intitulada, "TÓPICOS DE OTIMIZAÇÃO APLICADOS À GEODÉSIA", foi aprovada por unanimidade, tendo sido concedido ao candidato o prazo regulamentar de três meses para a apresentação da redação final com as sugestões e emendas propostas pela Banca.

Os signatários da presente, membros da Banca Examinadora, receberam um exemplar da Tese em sua versão definitiva, constatando cada um, após a leitura da mesma, que as indicações da Banca foram atendidas sendo de parecer que o candidato está em condições de receber o título de MESTRE EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS.

Curitiba, 8 de novembro de 1976


Prof. CAMIL GEMAEI


Prof. FERNANDO HATSCHBACH


Prof. JOÃO-BOSCO LUGNANI

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Camil Gemael, coordenador do curso de pós -
graduação em ciências geodésicas da Universidade Federal
do Paraná, por seu apoio e incentivo.

Aos amigos e colegas que colaboraram direta ou indi-
retamente na elaboração desta tese.

À minha esposa por seu apoio, incentivo e compreen-
são.

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais por seu apoio fi-
nanceiro.

S I N O P S E

Os métodos de triangulação geodésica admitem a utilização de diversas técnicas para minimizar os erros a eles inerentes. O presente trabalho trata de esclarecer alguns tópicos da otimização utilizados com esta finalidade em medidas geodésicas. Deduz-se a elipse padrão, apresentando - se sua proveniência, utilidades e relação com a teoria da rigidez das figuras. Obtém-se a curva pedal desta elipse, esclarecendo sua finalidade prática. Finalmente, é introduzido o tensor de erro, e a partir deste deduzem-se algumas propriedades das curvas padrão.

S U M M A R Y

The geodetic methods of triangulation permit us to use different technics to minimize the errors in which they inherent. This work shows some optimisation technics available for geodetic measurement. We point out the geometric origin of the standard ellipse; its qualities and relationship with the strength of figures. We deal up with the pedal curve of the ellipse to clarify its practical purpose. At last we introduce the error tensor which shows us the properties of the standard ellipse and its pedal curve.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Beim Verfahren Geodätischer Triangulationen wird der Aufwand verschiedener Messtechniken geduldet, um die Fehler die jedem Verfahren eigentümlich sind zu minimieren. Diese Arbeit sucht einige Punkte jener Optimierungstechniken, welche zu diesem Zweck in Geodätischen Vermessungen angewandt werden, klar zu machen. Wir weisen die Geometrische Begründung der Fehlerellipse nach, auch Ihre Eigenschaften und Ihr Zusammenhang mit der **Stärke** von Figuren werden bewiesen. Wir handeln auch von der Fusspunktkurve der Ellipse, und Ihre Praktische Verwertung wird ausführlich erklärt. Schliesslich führen wir den Allgemeinen Fehlertensor ein, mit seiner Hilfe beweisen wir einige Eigenschaften der Fehlerellipse und Ihrer Fusspunktkurve.

C O N T E Ú D O

AGRADECIMENTO.....	I
SINÓPSE.....	II
SUMMARY.....	III
ZUSAMMENFASSUNG.....	IV
I - INTRODUÇÃO.....	1
II - CURVAS PADRÃO.....	4
1 - introdução.....	4
2 - variância.....	4
3 - covariância.....	7
4 - elipse de erro.....	10
5 - elipse padrão.....	15
6 - podária padrão.....	21
III - RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE DE RIGIDEZ E AS CUR- VAS PADRÃO RELATIVAS.....	26
1 - introdução.....	26
2 - lei de propagação da variância.....	27
3 - elipse padrão relativa.....	30
4 - elipse padrão relativa para um triângulo.....	33
5 - coeficiente de rigidez para um triângulo.....	38
6 - matriz de coeficientes de pesos das coordena- das de um triângulo.....	42
7 - relação entre o coeficiente de rigidez e as curvas padrão relativas.....	57

IV - TENSOR DE ERRO E SUAS PROPRIEDADES.....	61
1 - introdução.....	61
2 - tensor de erro.....	62
3 - interpretação do tensor de erro.....	67
4 - áreas máxima e mínima para a elipse de erro.....	70
5 - invariância da área da podária referente á e- lipse de erro.....	76
V - COMPLEMENTAÇÃO E TÓPICOS DE OTIMIZAÇÃO.....	78
1 - introdução.....	78
2 - elipsóide padrão.....	78
3 - alguns conceitos utilizados em otimização.....	84
VI - CONCLUSÃO.....	90
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	96

C A P Í T U L O I

I N T R O D U Ç Ã O

A geodésia, como outras ciências que dependem de medidas, utiliza diversos instrumentos para minimizar os erros inerentes a cada método de medidas, pois cada um deles introduz diversos erros nas medidas. É necessário que o geodesista, não sómente minimize estes erros através de ajustamento, mas procure evitar que os mesmos sejam cometidos, ou que ao menos sejam em menor número e tão pequenos quanto possível. A otimização é a ciência que estuda os métodos que conduzem a estas medidas de melhor precisão, isto é, a medidas ótimas. O geodesista deve fazer uso desta ciência para obter resultados ótimos. O presente trabalho dedica-se a alguns instrumentos idealizados pela teoria da otimização aplicáveis à geodésia.

O instrumento da otimização de redes geodésicas mais antigo e até os dias de hoje mais usado é o coeficiente de rigidez. Atualmente, os geodesistas passaram a utilizar muito a elipse padrão. Esta elipse já é conhecida desde a metade do século passado por alguns poucos geodesistas e mesmo usada em algumas ciências experimentais, desde aquela época. Mas apenas na última década ela está sendo a

plicada na geodésia prática.

A elipse padrão não é ainda um instrumento que possibilite a obtenção de todas as informações necessárias a uma boa visualização das tendências da propagação do erro em uma determinada direção na rede ou poligonal geodésica. Para que esta deficiência seja suprida, usa-se juntamente com a elipse padrão a sua curva pedal, neste trabalho denominada de podária padrão. A podária padrão é a peça que completa as informações sobre a distribuição dos erros a partir da distribuição das **variâncias**, não fornecidas por sua elipse geradora. Existem ainda outros instrumentos da teoria da otimização utilizáveis na geodésia, dos quais abordaremos o tensor de erro. Este trabalho apresenta a dedução de algumas relações e propriedades dos elementos anteriormente citados. Entre estes encontra-se o relacionamento existente entre as curvas padrão e a rigidez das figuras. A partir do tensor de erro são deduzidas algumas propriedades aplicáveis às curvas citadas. Existem vários outros instrumentos que podem ser úteis aos geodestas. Para o estudo de tais instrumentos aplicados à geodésia, ou mais informações sobre as curvas padrão e o tensor de erro, reportamos o leitor a nomes como SCHOEPS, ALLMAN, KUBÁČEK, PREUSS e outros autores citados no texto ou na bibliografia.

É proveitoso esclarecer que a otimização aplicada à

geodésia tem três finalidades primordiais:

- a - Fazer uma análise do esquema do trabalho a ser realizado no campo. Isto pode ser feito a partir de dados iniciais e medidas provisórias. Terminado este estudo crítico, introduzem-se melhorias no esquema de forma que levem a uma situação de erro tal que o esquema produza resultados ótimos.
- b - Permitir que o geodesta tome conhecimento das fraquezas e erros existentes em triangulações antigas.
- c - Introduzir melhorias nas redes antigas, citadas no item anterior, em função das falhas nelas descobertas.

O principal intuito deste trabalho é auxiliar a divulgação da otimização entre os geodestas e apresentar alguns aspectos novos da mesma.

C A P Í T U L O II

C U R V A P A D R ã O

2.1 - INTRODUÇÃO:

Este capítulo apresenta duas curvas padrão necessárias à teoria da otimização. Tais curvas são: a elipse padrão, a qual decorre da elipse de erro; e a podária padrão, que é a curva pedal ou podária da elipse padrão em relação a seu centro de simetria. Tanto a elipse quanto a podária padrão são instrumentos muito utilizados na otimização aplicada à geodésia. Mostra também algumas noções de outros elementos utilizados no estudo destas curvas, tais como varriância, covariância, etc. A elipse padrão é o elemento mais utilizado da otimização, entretanto, este instrumento é encontrado muitas vezes isolado, aplicado a problemas de forma que não se percebe sua identificação como parte da teoria da otimização.

2.2 - VARIÂNCIA:

Seja S um espaço amostral n -dimensional contínuo, no qual são definidas as variáveis aleatórias x_i e a função $f(x_i)$ com densidade de probabilidade $F(x_1 \dots x_m)$. Neste ca-

so a "esperança matemática" é definida (HAMILTON, 1964) por:

$$\langle f(x_i) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i) F(x_1 \dots x_m) dx_1 \dots dx_m, \quad (\text{II.1})$$

onde $i=1 \dots n$ e $n \leq m$, daqui em diante vamos considerar sempre $n = m$.

Alertamos o leitor, que as expressões matemáticas, utilizadas neste trabalho, retiradas das publicações referenciadas, se encontram na notação própria do autor.

Sempre que $f(x_i) = x_i x_j$, a esperança matemática $\langle f(x_i) \rangle$ será denominada segundo momento da distribuição M_2 , descrita pela expressão:

$$M_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x_i x_j F(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (\text{II.2})$$

Se μ_i representa a média dos x_i , $(x_i - \mu_i)$ será o desvio da distribuição; quando $i = j$ em (II.2) resultará o segundo momento de uma só variável $\langle x_i^2 \rangle$.

DEFINIÇÃO: Variância $\sigma_{x_i}^2$ da variável aleatória x_i , definida no espaço amostral contínuo n -dimensional S , é o segundo momento do desvio da distribuição $\langle (x_i - \mu_i) \rangle$ desta variável, isto é:

$$\sigma_{x_i}^2 \equiv \langle (x_i - \mu_i)^2 \rangle$$

ou

$$\sigma_{x_i}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)^2 F(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (\text{II.3})$$

O primeiro momento da distribuição $\langle x_i \rangle$ é expresso:

$$\langle x_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i F(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (\text{II.4})$$

observa-se que $\langle x_i \rangle$ é a média de x_i , donde $\langle x_i \rangle = \mu_i$. Ao substituir (II.4) em (II.3) resulta:

$$\sigma_{x_i}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \langle x_i \rangle)^2 F(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$\sigma_{x_i}^2 = \langle x_i^2 \rangle - 2\langle x_i \rangle \langle x_i \rangle + \langle x_i \rangle^2,$$

$$\sigma_{x_i}^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2,$$

$$\sigma_{x_i}^2 = \langle x_i^2 \rangle - \mu_i^2. \quad (\text{II.5})$$

Quando a distribuição está **contida** num espaço amostral tri-dimensional é costume escrever $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$.

Então a (II.5) é escrita como abaixo:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \langle x^2 \rangle - \mu_x^2 \\ \sigma_y^2 &= \langle y^2 \rangle - \mu_y^2 \\ \sigma_z^2 &= \langle z^2 \rangle - \mu_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6})$$

2.3 - COVARIÂNCIA:

É possível existir certa correlação entre as variáveis x_i e x_j quando $i \neq j$ no espaço amostral contínuo n -dimensional S . Conseqüentemente, é necessário definir uma função equivalente à variância que seja válida para o presente caso. Esta função é denominada covariância.

DEFINIÇÃO: Covariância entre duas variáveis aleatórias x_i e x_j p/ $i \neq j$ e $i, j = 1 \dots n$, definidas em um espaço n -dimensional S , é o segundo momento dos desvios da distribuição, $(x_i - \mu_i)$ e $(x_j - \mu_j)$, isto é:

$$\sigma_{x_i x_j} \equiv \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle, \quad (\text{II.7})$$

ou

$$\sigma_{x_i x_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) F(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

São dois os casos a considerar:

a) As componentes são dependentes entre si:

$$\sigma_{x_i x_j} = \langle x_i x_j \rangle + \mu_i \mu_j - \mu_i \langle x_j \rangle - \mu_j \langle x_i \rangle,$$

$$\sigma_{x_i x_j} = \langle x_i x_j \rangle + \mu_i \mu_j - \mu_i \mu_j - \mu_j \mu_i,$$

$$\sigma_{x_i x_j} = \langle x_i x_j \rangle - \mu_i \mu_j,$$

onde denominamos de componentes os x_i , μ_i , $\sigma_{x_i x_j}$, etc., obtidos para cada direção i do espaço \mathbb{R}^n . É importante frisar que $\sigma_{x_i x_j} = \sigma_{x_j x_i}$ (GEMMEL, 1974).

Tratando-se de um espaço tri-dimensional a igualdade de terá o seguinte aspecto:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1 x_2} &= \langle x_1 x_2 \rangle - \mu_1 \mu_2 \\ \sigma_{x_1 x_3} &= \langle x_1 x_3 \rangle - \mu_1 \mu_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.9})$$

$$\sigma_{x_2 x_3} = \langle x_2 x_3 \rangle - \mu_2 \mu_3 \quad (\text{II.9})$$

b) As componentes são independentes entre si:

Como as variáveis são independentes, suas esperanças matemáticas também o são, isto proporciona:

$$\langle x_i x_j \rangle = \mu_i \mu_j, \quad (\text{II.10})$$

substituindo (II.10) em (II.8) resulta $\sigma_{x_i x_j} = 0$.

É oportuno definir o "coeficiente de correlação"

$$\rho_{x_i x_j} = \frac{\sigma_{x_i x_j}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}, \quad (\text{II.11})$$

onde $-1 \leq \rho_{x_i x_j} \leq 1$.

Quando x_i e x_j são linearmente dependentes, resulta:

$$|\sigma_{x_i x_j}| = |\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}| \rightarrow |\rho_{x_i x_j}| = 1.$$

Quando x_i e x_j forem independentes entre si:

$$\sigma_{x_i x_j} = 0 \rightarrow \rho_{x_i x_j} = 0^*$$

Quando x_i e x_j possuem uma dependência qualquer não linear, obtemos:

* $\rho_{x_i x_j} = 0$ não implica na independência dos x_i e x_j .

$$|\sigma_{x_i x_j}| \neq |\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}| \quad \rightarrow \quad 0 \leq |\rho_{x_i x_j}| < 1.$$

2.4 - ELIPSE DE ERRO:

Pode-se obter a elipse de erro a partir da função densidade de probabilidade $F(x_1 \dots x_n)$, de uma distribuição normal, que é definida por:

$$\begin{aligned}
 F(x_1 \dots x_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n (\sigma_{x_1}^2 \dots \sigma_{x_n}^2 + (n-1)(\sigma_{x_1 x_2} \dots \sigma_{x_{n-1} x_n} \dots))}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 \dots \sigma_{x_{n-1} x_n}^2 - \sigma_{x_1 x_2} \dots \sigma_{x_{n-2} x_{n-1}} \sigma_{x_n}^2}{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 \dots \sigma_{x_{n-1} x_n}^2} \right] \\
 &\quad \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2} \right]^2 + \dots + \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_{x_i}^2} \right]^2 + \\
 &\quad + \dots + \left[\frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_{x_i}^2} - \frac{(x_n - \mu_n)^2}{\sigma_{x_n}^2} \right]^2 + \dots + \\
 &\quad + \dots + \left[\frac{(x_{n-1} - \mu_{n-1})^2}{\sigma_{x_{n-1}}^2} - \frac{(x_n - \mu_n)^2}{\sigma_{x_n}^2} \right]^2 \left. \right]. \quad (II.12)
 \end{aligned}$$

No presente caso, faz-se necessário conhecer $F(x_1 \dots x_n)$ quan

do $n = 2$, isto é:

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho_{x_1x_2}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{x_1x_2}^2)} \cdot \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\left[\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{x_1}\cdot\sigma_{x_2}}\right]\rho_{x_1x_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2} \right)\right]. \quad (\text{II.13})$$

Geometricamente, $F(x_1, x_2)$ será considerado como um eixo normal ao plano x_1x_2 então $G[F(x_1, x_2), x_1, x_2] = 0$ representa uma superfície no espaço tridimensional como a representa a fig.II.1.

Sobre os planos $x_1, F(x_1, x_2)$ e $x_2, F(x_1, x_2)$ estão representados respectivamente as curvas normais de Gauss $F(x_1)$ e $F(x_2)$, como mostra a fig.II.2.

A secção da superfície $G[F(x_1, x_2), x_1, x_2]$ por planos paralelos ao plano x_1x_2 representam circunferências de HELMERT-MAXWELL-BOLTZMANN quando $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}$ (GRAFAREND, 1972).

No caso de $\sigma_{x_1} \neq \sigma_{x_2}$ as equações abaixo representarão elipses. Este é o caso que mais nos interessa por ora.

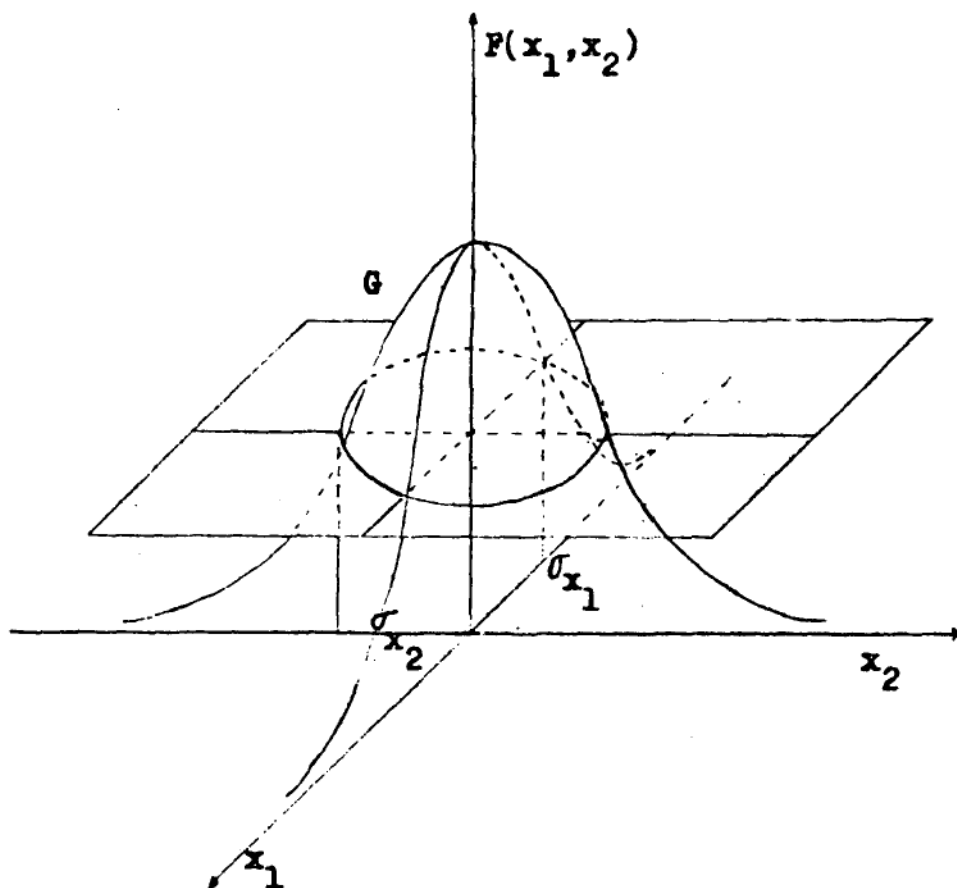


FIG.II.1 - Elipse de erro obtida a partir do corte da superfície gaussiana.

Quando a superfície G é interceptada por um plano específico, a função $F(x_1, x_2)$ será constante, isto é, $F(x_1, x_2) = k$, donde, fazendo o plano passar pelos pontos de inflexão:

$$k(2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho_{x_1x_2}^2}) = \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{x_1x_2}^2)}\right]$$

$$\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\rho_{x_1x_2}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2}\right] \quad (\text{II.14})$$

$$k_1 = \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_{x_1x_2}^2)}\right] \cdot \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\rho_{x_1x_2}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2}\right] \quad (\text{II.15})$$

$$k_2 = \log k_1 = \frac{-1}{2(1-\rho_{x_1x_2}^2)} \cdot \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\rho_{x_1x_2}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2}\right]$$

$$c^2 = \frac{1}{\sigma_{x_1}^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 - \sigma_{x_1 x_2}^2} \cdot \left[(x_1 - \mu_1)^2 \sigma_{x_2}^2 - \right. \\ \left. - 2(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \sigma_{x_1 x_2} + (x_2 - \mu_2)^2 \sigma_{x_1}^2 \right] \quad (\text{II.16})$$

No ajustamento são bem conhecidas as relações entre as variâncias e os coeficientes de peso (GEMANI, 1974):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_i}^2 &= Q_{x_i x_i} \sigma^2 \\ \sigma_{x_i x_j} &= Q_{x_i x_j} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.17})$$

onde σ^2 é a variância generalizada. Substituindo as (II.17) em (II.16) obtém-se:

$$\frac{1}{(Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2}^2)} \cdot \left[(x_1 - \mu_1)^2 Q_{x_2 x_2} - 2(x_1 - \mu_1) \cdot \right. \\ \left. \cdot (x_2 - \mu_2) Q_{x_1 x_2} + (x_2 - \mu_2)^2 Q_{x_1 x_1} \right] = c^2 \sigma^2. \quad (\text{II.18})$$

Tendo em vista ser possível obter mais de um con -

junto x_1 , x_2 e C para o qual a elipse será de mesmas dimensões e diferindo apenas na localização de seu centro, pode-se escrever a equação da elipse da forma abaixo:

$$\frac{1}{Q_{x_1x_1}Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2} \cdot \left[Q_{x_2x_2}x_1^2 - 2Q_{x_1x_2}x_1x_2 + Q_{x_1x_1}x_2^2 \right] = C^2\sigma^2, \quad (\text{II.19})$$

pois o centro pode ser trasladado.

Sempre que $C^2 = 1$, a elipse é denominada de "standard ellipse" por (RICHARDUS, 1966), e sua equação é escrita como abaixo:

$$\frac{1}{Q_{x_1x_1}Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2} \cdot \left[Q_{x_2x_2}x_1^2 - 2Q_{x_1x_2}x_1x_2 + Q_{x_1x_1}x_2^2 \right] = \sigma^2, \quad (\text{II.20})$$

sendo esta equação válida tanto para a elipse de erro quanto para a elipse padrão, a qual será abordada a seguir.

2.5 - ELIPSE PADRÃO:

Denomina-se elipse padrão a elipse de erro ótima, i. e., aquela que tiver como eixos maior e menor as variâncias máxima e mínima, respectivamente. Ao ser tomada uma situação de erro, não é possível conhecer a priori a direção de maior erro, na medida de um novo ponto de uma rede geodésica. Portanto, existem inúmeras elipses de erro, das quais apenas uma é a elipse padrão, e esta será aquela que tiver maior e menor eixo respectivamente. Problema que pode ser resolvido através de uma rotação de eixos, em que o ângulo de rotação será a incógnita a partir da qual extrair-se-há a função.

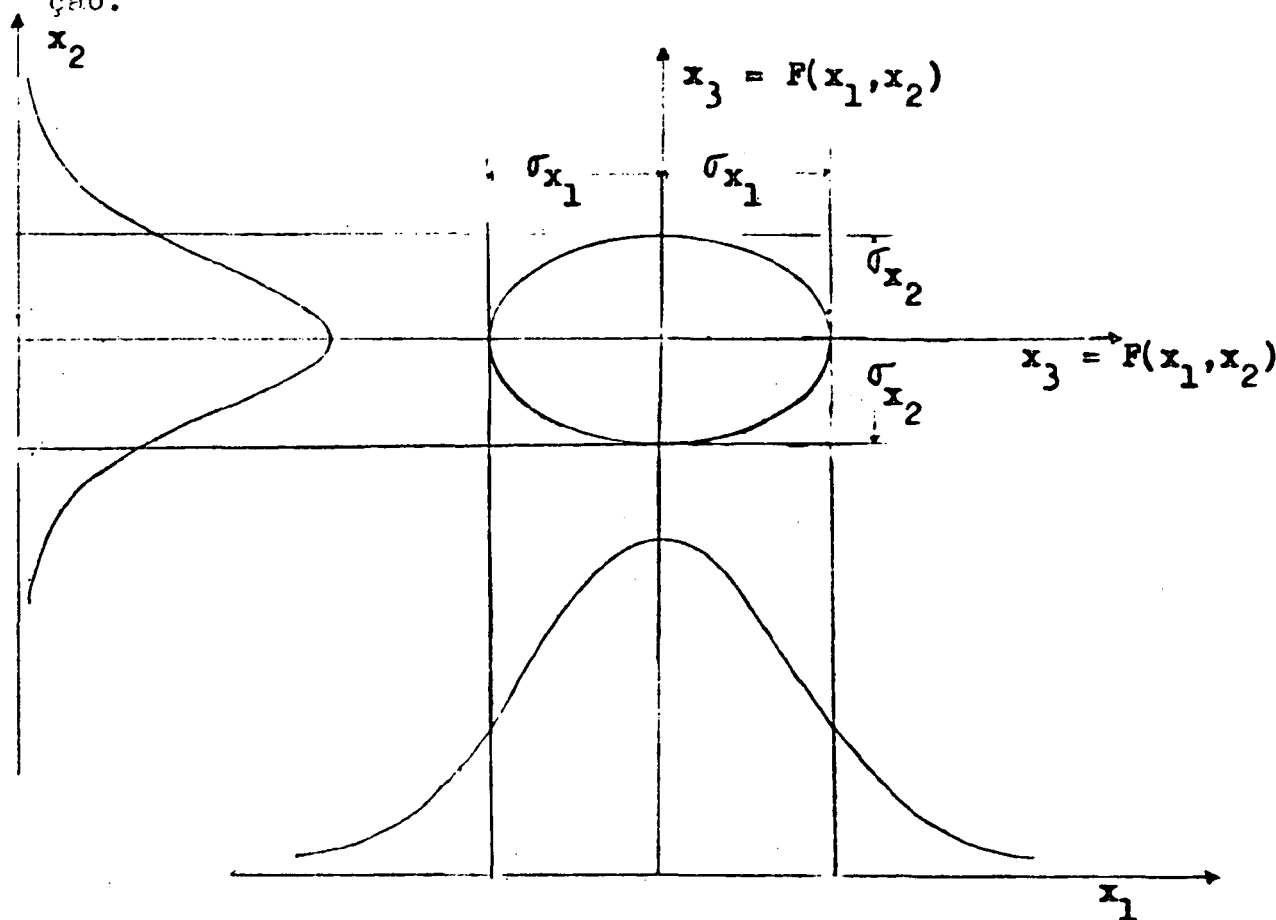


FIG. II.2 - Projeção de G sobre os planos x_1x_3 e x_2x_3 .

A rotação será feita aplicando-se as seguintes relações (HIRVONEN, 1970):

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ y_2 &= x_2 \cos t - x_1 \sin t \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.21})$$

A (II.20) foi dada em função dos Q_{xx} . Faz-se necessário conhecer a relação existente entre os Q_{xx} e os Q_{yy} , em função de t , que representa a direção na qual está o maior erro. A relação entre os Q_{xx} e os Q_{yy} é (GEMAEL, 1974):

$$\begin{bmatrix} Q_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^T$$

onde $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$ é o Jacobiano da transformação.

Desta transformação resultam:

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{y_1 y_1} &= Q_{x_1 x_1} \cos^2 t + Q_{x_2 x_2} \sin^2 t + 2Q_{x_1 x_2} \sin t \cos t \\ Q_{y_2 y_2} &= Q_{x_1 x_1} \sin^2 t + Q_{x_2 x_2} \cos^2 t - 2Q_{x_1 x_2} \sin t \cos t \\ Q_{y_1 y_2} &= (Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1}) \sin t \cos t + \\ &\quad + 2Q_{x_1 x_2} (\cos^2 t - \sin^2 t). \end{aligned} \right. \quad (\text{II.23})$$

Ao tomar uma das (II.23), por exemplo a primeira, e derivando-a em função de t , obtém-se:

$$\frac{d^2 y_1 y_1}{dt^2} = - (Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2}) \text{sen} 2t + 2Q_{x_1 x_2} \text{cos} 2t = 0 \quad (\text{II.24})$$

que foi anulada com a finalidade de cumprir a condição de extremo.

Da equação (II.24) são retiradas as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \text{tg} 2t &= \frac{2Q_{x_1 x_2}}{Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2}} \\ \text{sen} 2t &= \frac{2Q_{x_1 x_2}}{\pm \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}} \\ \text{cos} 2t &= \frac{Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2}}{\pm \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

A primeira das equações (II.25) tem como raízes (SILVA,1974):

$$t = t_0 \quad \text{ou} \quad t = t_0 + \frac{\pi}{2}$$

pois $\text{tg}2t = \text{tg}(t + \pi)$.

A derivada segunda da (II.23) indicará o máximo ou mínimo:

$$\frac{d^2 Q_{y_1 y_1}}{dt^2} = -2(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2}) \cos 2t - 4Q_{x_1 x_2} \text{sen} 2t. \quad (\text{II.26})$$

Substituindo as duas expressões restantes da (II.25) na (II.26), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_{y_1 y_1}}{dt^2} = & -2(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2}) \left(\frac{Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2}}{\pm \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}} \right) - \\ & - 4Q_{x_1 x_2} \left(\frac{2Q_{x_1 x_2}}{\pm \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}} \right) \quad (\text{II.27}) \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{d^2 Q_{y_1 y_1}}{dt^2} = + \left\{ - \left[\frac{2(Q_{x_1 x_2} - Q_{x_2 x_2})^2 + 8Q_{x_1 x_2}^2}{\sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}} \right] \right\}. \quad (\text{II.28})$$

Verifica-se a (II.28) ser < 0 para o sinal $+$ que implica em máximo e ser > 0 para o sinal $-$ que implica em mínimo. Utilizando algumas transformações trigonométricas nas primeiras duas expressões das (II.23), além da substituição das primeiras duas das expressões (II.25) nas mesmas, resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{y_1 y_1} &= \frac{1}{2} (Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} + \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}) \\ Q_{y_2 y_2} &= \frac{1}{2} (Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} - \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.29})$$

Foi provado acima o sinal positivo indicar o máximo e o sinal negativo indicar o mínimo, o que nos leva a escrever as (II.29) na forma:

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{y_1 y_1} &= \frac{1}{2} (Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} + \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}) \\ Q_{y_2 y_2} &= \frac{1}{2} (Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} - \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2}) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.30})$$

Os Q_{yy} diferem apenas da constante σ^{-2} dos eixos da

elipse padrão.

2.6 - PODÁRIA PADRÃO:

É denominada podária padrão a podária da elipse padrão em relação a seu centro de simetria.

DEFINIÇÃO: Chama-se podária de uma elipse, com respeito a seu centro, ao lugar geométrico das intersecções das tangentes à elipse e das normais às tangentes passantes pelo seu centro.

Para encontrar a equação da podária, resolve-se o sistema formado pelas equações das normais às tangentes passantes pelo centro da elipse, e das tangentes, para um ponto qualquer sobre a elipse.

Afim de facilitar o presente desenvolvimento será utilizada a notação seguinte:

$$a = \frac{Q_{x_2 x_2}}{Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2}^2} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{Q_{x_1 x_2}}{Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2}^2} \\
 b &= \frac{Q_{x_1 x_1}}{Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2}^2} \\
 r &= -\sigma^2.
 \end{aligned}
 \tag{II.31}$$

Então a equação da elipse (II.20) pode ser escrita sob a forma canônica (PASTOR, 1955):

$$ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2 + r = 0. \tag{II.32}$$

A reta tangente à elipse em um ponto qualquer (x_1^0, x_2^0) é determinada através da resolução do sistema formado pela equação (II.32) e a equação de uma reta genérica.

$$x_2 = x_2^0 + m(x_1 - x_1^0).$$

A solução do sistema resulta no coeficiente angular m .

$$ax_1^2 + 2hx_1 \left[x_2^0 + m(x_1 - x_1^0) \right] + \\ + b \left[x_2^0 + m(x_1 - x_1^0) \right]^2 + r = 0 \quad (\text{II.33})$$

Derivando a equação acima em função de x_1 e fazendo $x_1 = x_1^0$, tem-se:

$$m = - \frac{ax_1^0 + hx_2^0}{hx_1^0 + bx_2^0}. \quad (\text{II.34})$$

Substituindo a (II.34) na (II.33) obtém-se:

$$(ax_1 + hx_2)x_1^0 + (hx_1 + bx_2)x_2^0 - r = 0, \quad (\text{II.35})$$

que é tangente à curva em (x_1^0, x_2^0) .

Para obter a equação da normal à tangente que passa pelo referido ponto, m deve ser substituído por $-\frac{1}{m}$ e $P(x_1^0, x_2^0)$ por $C(x_1^1, x_2^1)$ que é o centro da elipse, na (II.33) resulta:

$$(hx_1 - ax_2)x_1^0 + (bx_1 - hx_2)x_2^0 = 0. \quad (\text{II.36})$$

Faz-se necessário lembrar que $x_1^1 = 0$ e $x_2^1 = 0$, razão pela qual foi obtido o resultado acima.

Ao introduzir o ponto $P(x_1^0, x_2^0)$ na equação da elipse, que deve satisfazer a mesma, resulta:

$$a(x_1^0)^2 + 2hx_1^0x_2^0 + b(x_2^0)^2 + r = 0. \quad (\text{II.37})$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas (II.35) e (II.36), resulta:

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 &= \frac{r(bx_1 - hx_2)}{(ab - h^2)(x_1^2 + x_2^2)} \\ x_2^0 &= \frac{r(ax_2 - hx_1)}{(ab - h^2)(x_1^2 + x_2^2)} \end{aligned} \right| \quad (\text{II.38})$$

Após substituíremos (II.38) na (II.37), tem-se finalmente a equação da nodária padrão:

$$bx_1^2 - 2hx_1x_2 + ax_2^2 = \frac{(ab - h^2)}{r}(x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (\text{II.39})$$

Introduzindo as (II.31) na (II.39) a equação da nodária padrão, em função dos coeficientes de pesos, será:

$$Q_{x_1x_1}x_1^2 - 2Q_{x_1x_2}x_1x_2 + Q_{x_2x_2}x_2^2 = \frac{1}{\sigma^2}(x_1^2 + x_2^2)^2. \quad (\text{II.40})$$

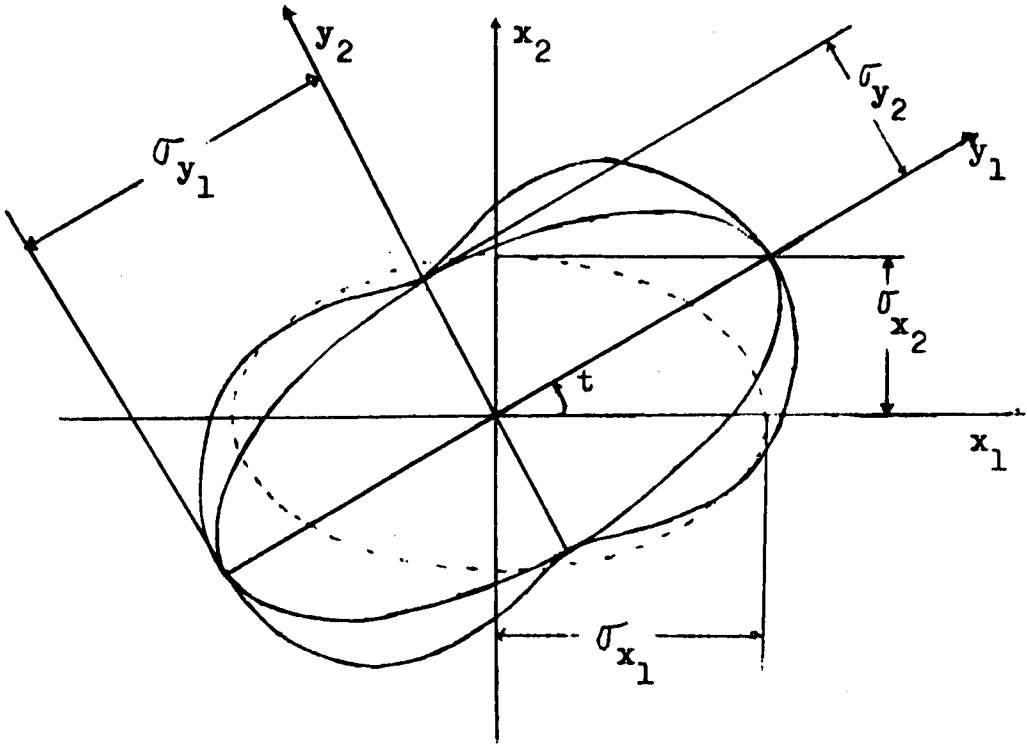


FIG.II.3 - Elipse de erro, elipse e podária padrão.

C A P Í T U L O I I I

RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE DE RIGIDEZ E AS CURVAS PADRÃO
RELATIVAS

3.1 - INTRODUÇÃO:

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar e xistir uma relação entre o coeficiente de rigidez e a elipse padrão. O primeiro é utilizado já há muito tempo em geodésia, ao passo que a elipse padrão somente nos dias atuais está sendo introduzida na geodésia prática, apesar de já encontrarmos os primeiros trabalhos sobre a mesma, em trabalhos sobre geodésia, na metade do século passado, como de A.Bravais em 1846 e de Helmert em 1872. Uma vez obtida a expressão que relaciona o coeficiente de rigidez e as curvas padrão, observar-se-há que através desta relação será mais fácil obter a elipse padrão relativa, do que por meio dos coeficientes de peso, já que os pesos raramente são conhecidos a priori. A elipse é denominada absoluta para um ponto e relativa quando se trata da correlação entre dois pontos ou mais. A elipse padrão relativa de um trecho de uma triangulação tem o mesmo significado que a precisão média deste trecho.

3.2 - LEI DE PROPAGACÃO DA VARIÂNCIA:

No parágrafo 2.2 vimos que o desvio de uma distribuição é dado por $(x_i - \mu_i)$. Desenvolvendo o quadrado do mesmo, isto é, $(x_i - \mu_i)^2$ por Taylor, escreve-se:

$$(x_i - \mu_i)^2 = g(\mu_i) + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial x_n} dx_n + R_n, \quad (\text{III.1})$$

onde R_n são os termos de ordem superior.

Foi demonstrado anteriormente (2.2) que $\sigma_{x_i}^2 = \langle (x_i - \mu_i)^2 \rangle$ que segundo dedução apresentada por Gauss (BJERHAMMAR, 1973), é expressa da seguinte forma:

$$\sigma_{x_i}^2 = \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \right]^2 \sigma_{y_1}^2 + \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \right]^2 \sigma_{y_2}^2 + \dots + \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_n} \right]^2 \sigma_{y_n}^2 + 2 \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \sigma_{y_1 y_2} + \dots$$

$$+ \dots + 2 \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_{n-1}} \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_n} \sigma_{y_{n-1}y_n} + \text{Rm} \quad (\text{III.2})$$

onde os termos de ordem superior são negligenciáveis.

Para $n = 3$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_i}^2 &= \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \right]^2 \sigma_{y_1}^2 + \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \right]^2 \sigma_{y_2}^2 + \\ &+ \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_3} \right]^2 \sigma_{y_3}^2 + 2 \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \sigma_{y_1 y_2} + \\ &+ 2 \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_3} \sigma_{y_1 y_3} + 2 \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \cdot \\ &\cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_3} \sigma_{y_2 y_3}. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Quando extraímos a raiz quadrada de ambos os membros desta igualdade, resulta:

$$\sigma_{x_i} = \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \sigma_{y_1} + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \sigma_{y_2} + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_3} \sigma_{y_3}. \quad (\text{III.4})$$

Da equação (II.17) resulta:

$$\sigma_{x_i} = \frac{1}{Q^2_{x_i x_i}} \sigma, \quad (\text{III.5})$$

que substituída em (III.4), dá:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q^2_{x_i x_i}} &= \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \frac{1}{Q^2_{y_1 y_1}} \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \frac{1}{Q^2_{y_2 y_2}} \\ &+ \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_3} \frac{1}{Q^2_{y_3 y_3}}. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Por analogia encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q^2_{x_i x_j}} &= \left| \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_1} \right|^{\frac{1}{2}} \sigma_{y_1} + \left| \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_2} \right|^{\frac{1}{2}} \sigma_{y_2} + \left| \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_3} \right|^{\frac{1}{2}} \sigma_{y_3}, \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{1}{Q^2_{x_i x_j}} = \left| \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_1} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Q^2_{y_1 y_1}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\partial(x_1 - \mu_1)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_2} \right]^2 \cdot \frac{1}{Q_{y_2 y_2}} + \\
& + \left[\frac{\partial(x_1 - \mu_1)}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_3} \right]^2 \cdot \frac{1}{Q_{y_3 y_3}} . \quad (III.8)
\end{aligned}$$

As igualdades (III.6) e (III.8) representam a lei da propagação das variâncias expressa em função dos coeficientes de peso, que derivam diretamente das (III.5) e (III.7), as quais representam a lei da propagação das variâncias.

3.3 - ELIPSE PADRÃO RELATIVA:

A elipse padrão relativa indica a precisão relativa entre dois pontos de uma triangulação ou uma poligonal. E pode-se estender este conceito para um trajeto desta triangulação ou poligonal. Neste caso ela será interpretada como precisão média.

Sejam,

$$\Delta x_1 = x_1^1 - x_1^0 \quad (III.9)$$

$$\Delta x_2 = x_2^1 - x_2^0, \quad (\text{III.9})$$

donde obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\Delta x_1 \Delta x_1} &= Q_{x_1^1} - Q_{x_1^0} \\ Q_{\Delta x_2 \Delta x_2} &= Q_{x_2^1} - Q_{x_2^0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.10})$$

em função das (III.9) e (III.10) pode-se obter facilmente as equações da elipse padrão relativa e de sua correspondente podária padrão. Neste caso a podária também é denominada de podária padrão relativa. As equações da elipse e da podária são dadas pelas expressões abaixo, respectivamente:

$$\frac{1}{Q_{\Delta x_1 \Delta x_1} Q_{\Delta x_2 \Delta x_2} - Q_{\Delta x_1 \Delta x_2}^2} (Q_{\Delta x_2 \Delta x_2} \Delta x_1^2 - 2Q_{\Delta x_1 \Delta x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + Q_{\Delta x_1 \Delta x_1} \Delta x_2^2) = \sigma^2 \quad (\text{III.11})$$

e

$$\begin{aligned} & Q_{\Delta x_1 \Delta x_1} \Delta x_1^2 - 2Q_{\Delta x_1 \Delta x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + Q_{\Delta x_2 \Delta x_2} \Delta x_2^2 = \\ & = \frac{1}{\sigma^2} (\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2)^2. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Para um trecho da triangulação ou poligonal, podemos tomar as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon x_1 &= \Delta x_1^1 + \Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_1^n \\ \varepsilon x_2 &= \Delta x_2^1 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_2^n \end{aligned} \right| \quad (\text{III.13})$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1^i &= x_1^{i+1} - x_1^i \\ \Delta x_2^i &= x_2^{i+1} - x_2^i \end{aligned} \right| \quad (\text{III.14})$$

E tem-se então:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_1} &= Q_{\Delta x_1^1} + Q_{\Delta x_1^2} + \dots + Q_{\Delta x_1^n} \\ Q_{\varepsilon x_2 \varepsilon x_2} &= Q_{\Delta x_2^1} + Q_{\Delta x_2^2} + \dots + Q_{\Delta x_2^n} \end{aligned} \right| \quad (\text{III.15})$$

De maneira que podemos escrever a equação da elipse padrão relativa e a podária relativa para um trecho de uma triangulação como se segue:

$$\frac{1}{Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_1} Q_{\varepsilon x_2 \varepsilon x_2} - Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_2}^2} (Q_{\varepsilon x_2 \varepsilon x_2} (\varepsilon x_1)^2 - 2Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_2} (\varepsilon x_1)(\varepsilon x_2) + Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_1} (\varepsilon x_2)^2) = \sigma^2. \quad (\text{III.16})$$

e

$$Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_1} (\varepsilon x_1)^2 - 2Q_{\varepsilon x_1 \varepsilon x_2} (\varepsilon x_1)(\varepsilon x_2) + Q_{\varepsilon x_2 \varepsilon x_2} (\varepsilon x_2)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left[(\varepsilon x_1)^2 + (\varepsilon x_2)^2 \right]^2. \quad (\text{III.17})$$

3.4 - ELIPSE PADRÃO RELATIVA PARA UM TRIÂNGULO:

Seja um triângulo, componente de uma rede de triangulação, como mostra a figura abaixo:

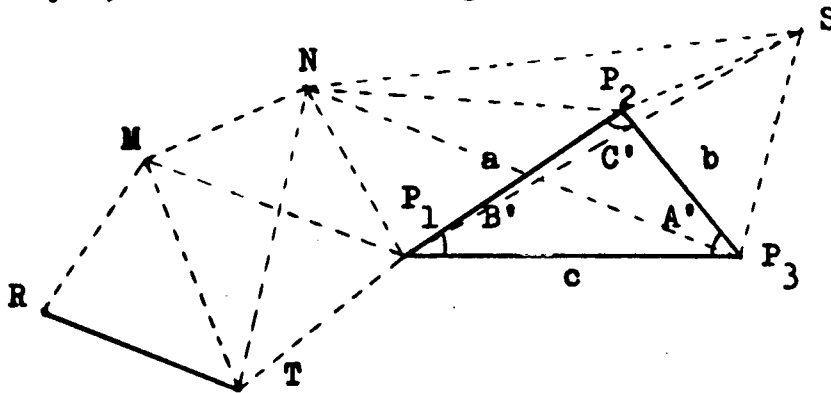


FIG.III.1 - Triângulo componente de uma rede de triangulação.

Da FIG.III.1 pode ser deduzido, que:

$$a = \frac{c \cdot \text{sen}A'}{\text{sen}C'} , \quad (\text{III.18})$$

onde C' pode ser substituído por $\left[180^\circ - (A' + B')\right]$, resultando:

$$a = \frac{c \cdot \text{sen}A'}{\text{sen}(A' + B')} . \quad (\text{III.19})$$

Derivando parcialmente a expressão acima obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial A'} = - \frac{c \cdot \text{sen}A' \cos(A' + B') - c \cdot \cos A' \text{sen}(A' + B')}{\text{sen}^2(A' + B')} \\ \frac{\partial a}{\partial C'} = - \frac{c \cdot \text{sen}A' \cos(A' + B')}{\text{sen}^2(A' + B')} , \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

elevando-se estas ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a}{\partial A'}\right)^2 &= \frac{c^2 \cdot \text{sen}^2 A' \cos^2(A' + B')}{\text{sen}^4(A' + B')} - \\ &- \frac{2c^2 \cdot \text{sen}A' \cos A' \text{sen}(A' + B') \cdot \cos(A' + B')}{\text{sen}^4(A' + B')} + \\ &+ \frac{c^2 \cdot \cos^2 A' \text{sen}^2(A' + B')}{\text{sen}^4(A' + B')} . \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial c'}\right)^2 = \frac{c^2 \cdot \text{sen}^2 A' \cos^2 (A' + B')}{\text{sen}^4 (A' + B')} \quad (III.21)$$

Substituindo as (III.20) em (III.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{aa}^2} = & - \frac{c \cdot \text{sen} A' \cos (A' + B') - c \cdot \cos A' \text{sen} (A' + B')}{\text{sen}^2 (A' + B')} Q_{A'A'}^{\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{c \cdot \text{sen} A' \cos (A' + B')}{\text{sen}^2 (A' + B')} Q_{B'B'}^{\frac{1}{2}} + (0) Q_{C'C'}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (III.22)$$

se c for substituído de maneira que o único lado que apareça na equação seja a , disto resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{aa}^2} = & a(\cotg A' Q_{A'A'}^{\frac{1}{2}} - \cotg (A' + B') Q_{A'A'}^{\frac{1}{2}} - \\ & - \cotg (A' + B') Q_{B'B'}^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Q_{aa}^2} = a(\cotg A' Q_{A'A'}^{\frac{1}{2}} - \cotg C' Q_{C'C'}^{\frac{1}{2}}). \quad (III.23)$$

Elevando-se a expressão (III.23) ao quadrado, obtém-se o coeficiente da meso:

$$Q_{aa} = a^2(\cotg^2 A' Q_{A'A'} + \cotg^2 C' Q_{C'C'} -$$

$$- 2\cotg A' \cotg C' Q_{A',C'}). \quad (\text{III.24})$$

Da mesma maneira podemos obter Q_{bb} e Q_{cc} :

$$Q_{bb} = b^2 (\cotg^2 B' Q_{B',B'} + \cotg^2 A' Q_{A',A'} - \\ - 2\cotg B' \cotg A' Q_{A',B'}) \quad (\text{III.25})$$

$$Q_{cc} = c^2 (\cotg^2 C' Q_{C',C'} + \cotg^2 B' Q_{B',B'} - \\ - 2\cotg C' \cotg B' Q_{B',C'}) \quad (\text{III.26})$$

Quando calculamos Q_{aa} a partir de sua relação com b teremos a expressão abaixo:

$$Q_{aa} = a^2 (\cotg^2 A' Q_{A',A'} + \cotg^2 B' Q_{B',B'} - \\ - 2\cotg A' \cotg B' Q_{A',B'}). \quad (\text{III.27})$$

Então a partir das (III.25) e (III.27) temos a seguinte relação:

$$Q_{ab} = a (\cotg A' Q_{A',A'}^{\frac{1}{2}} - \cotg B' Q_{B',B'}^{\frac{1}{2}}).$$

$$b(\cotg B' Q_{B',B'}^{\frac{1}{2}} - \cotg A' Q_{A',A'}^{\frac{1}{2}}),$$

donde,

$$Q_{ab} = -ab(\cotg^2 A' Q_{A',A'} + \cotg^2 B' Q_{B',B'} - 2\cotg A' \cotg B' Q_{A',B'}), \quad (\text{III.28})$$

analogamente,

$$Q_{ac} = -ac(\cotg^2 A' Q_{A',A'} + \cotg^2 C' Q_{C',C'} - 2\cotg A' \cotg C' Q_{A',C'}) \quad (\text{III.29})$$

$$Q_{bc} = -bc(\cotg^2 B' Q_{B',B'} + \cotg^2 C' Q_{C',C'} - 2\cotg B' \cotg C' Q_{B',C'}). \quad (\text{III.30})$$

Finalmente, a elipse padrão relativa para o triângulo considerado será dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{Q_{aa}Q_{bb} - Q_{ab}^2} (Q_{bb}x_2^2 - 2Q_{ab}x_2y_2 + Q_{aa}y_2^2) = \sigma^2, \quad (\text{III.31})$$

consequentemente, a podária padrão correspondente será representada pela equação:

$$Q_{aa}x_2^2 - 2Q_{ab}x_2y_2 + Q_{bb}y_2^2 = \frac{1}{\sigma^2}(x_2^2 + y_2^2)^2 \quad (\text{III.32})$$

3.5 COEFICIENTE DE RIGIDEZ PARA UM TRIÂNGULO:

Ao medirmos uma rede geodésica, obtemos os triângulos que a constituem, como triângulos esféricos. Mostra-se na fig. III.2 a transformação do triângulo esférico para o triângulo plano utilizando o teorema de Legendre.

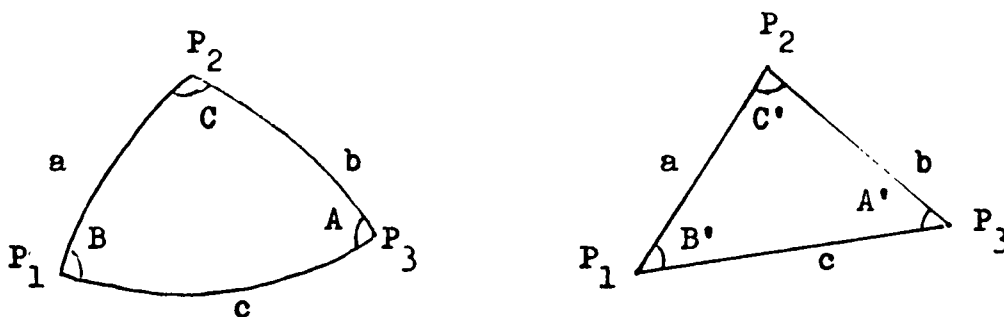


FIG. III.2 - Passagem de um triângulo esférico para um triângulo plano (utilizando o Teorema de Legendre).

A formula da propagação dos erros é dada pela expressão (MATTOS,1947):

$$M_{A'} = m \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial A} \right)^2 + \left(\frac{\partial A'}{\partial B} \right)^2 + \left(\frac{\partial A'}{\partial C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.33})$$

onde $M_{A'}$ é o erro médio quadrático a posteriori e m o erro médio a priori. Sendo a expressão (III.33) relativa ao ponto P_1 da FIG.III.2 e a expressão da transformação de um ângulo do triângulo esférico para o plano, por Legendre, é (GE - MAEL,1971):

$$A' = A - \frac{A + B + C - 180^\circ}{3}. \quad (\text{III.34})$$

Para ser possível entrar na (III.33) calculam-se as derivadas parciais da (III.34), isto é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A'}{\partial A} &= \frac{2}{3} \\ \frac{\partial A'}{\partial B} &= -\frac{1}{3} \\ \frac{\partial A'}{\partial C} &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.35})$$

e a (III.33) fica:

$$M_{A'} = \pm m \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (\text{III.36})$$

O cálculo do erro médio quadrático de um lado, por exemplo do lado "a" da FIG.III.2, será feito pela expressão:

$$M_a = \pm m \left[\left(\frac{\partial a}{\partial A} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.37})$$

mas

$$a = c \cdot \frac{\text{sen}A'}{\text{sen}C'}$$

e A' , C' são funções de A, B e C , oque implica que a (III.37) é dada por:

$$M_a = \pm m \left[\left[\frac{\partial a}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial A} + \frac{\partial a}{\partial C'} \frac{\partial C'}{\partial A} \right]^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial B} + \frac{\partial a}{\partial C'} \frac{\partial C'}{\partial B} \right]^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial C} + \frac{\partial a}{\partial C'} \frac{\partial C'}{\partial C} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.38})$$

Substituindo os valores das derivadas parciais, obtém-se:

$$M_a = \pm am \left[\frac{2}{3} \left[\cotg^2 A' + \cotg A' \cotg C' + \cotg^2 C' \right] \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.39})$$

onde m é expresso em partes do raio médio, donde:

$$m = m'' \text{sen} l'' . \quad (\text{III.40})$$

Desenvolvendo o $\log(\text{sen}(x - \Delta x))$ por Taylor, temos (MATOS, 1947):

$$\delta_{x_1} = \gamma \text{sen} l'' \cot g x_1 , \quad (\text{III.41})$$

onde γ é o módulo dos logaritmos neperianos, e δ_{x_1} é a diferença tabular para o $\log \text{sen} l''$. Substituindo (III.40) em (III.39) e multiplicando ambos os lados por $\gamma \text{sen} l''$, obtém-se:

$$M''_a \text{sen} l'' \gamma = \pm a m'' \text{sen} l'' \left[\frac{2}{3} (\gamma)^2 \text{sen}^2 l'' (\cot g^2 A' + \cot g^2 C' + \cot g A' \cot g C') \right]^{\frac{1}{2}} ,$$

isto implica em:

$$M''_a = \pm \frac{m'' a}{\gamma} \left[\frac{2}{3} (\delta_{A'}^2 + \delta_{A'} \delta_{C'} + \delta_{C'}^2) \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{III.42})$$

Reescrevendo a (III.42) de maneira mais conveniente para nosso objetivo, temos:

$$M''_a = \pm \frac{a}{\gamma^m} \sqrt{\frac{2}{3} R_1} , \quad (\text{III.43})$$

onde:

$$R_1 = (\delta_A^2 + \delta_A \delta_C + \delta_C^2). \quad (\text{III.44})$$

Quando o mesmo processo é utilizado para um polígono no plano qualquer, a (III.43) tem o seguinte aspecto:

$$M_a'' = \pm \frac{a}{\gamma} m'' \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{D - C}{C} \sum_{i=1}^n R_i},$$

e se considerarmos uma sequência de n polígonos, de uma rede geodésica, teremos:

$$M'' = \pm \frac{L}{\gamma} m'' \sqrt{\frac{2}{3} R}, \quad (\text{III.45})$$

onde

$$R = \frac{D - C}{C} \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{III.46})$$

é denominado de coeficiente de rigidez, L é a soma dos lados considerados, D representa o número de novas direções de cada figura e C o número de equações de condição. Conclui-se facilmente que a (III.44) representa o coeficiente de rigidez para apenas um triângulo.

3.6 - MATRIZ DOS COEFICIENTES DE PESOS DAS COORDENADAS DE UM TRIÂNGULO:

A matriz dos coeficientes de peso é dada por:

$$\left[Q_x \right] = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sigma_x \right], \quad (\text{III.47})$$

onde $\left[\sigma_x \right]$ é a matriz variância-covariância.

Para obter a matriz dos coeficientes de pesos $\left[Q_{x_i x_j} \right]$ de um polígono plano qualquer, em função de seus n ângulos A_i^o , primeiramente é necessário linearizar as n funções, não lineares, através das quais são dados os ângulos A_i^o ajustados.

$$\left. \begin{array}{l} A_1^o = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ A_2^o = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ A_n^o = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{array} \right\} \quad (\text{III.48})$$

isto é,

$$A_i^o = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ para } i = 1 \dots n.$$

Linearizando por Taylor temos:

$$A_i^o = f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) + (x_1 - x_1^o) \frac{\partial f_i}{\partial x_1} +$$

$$+ (x_2 - x_2') \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + (x_n - x_n') \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \quad (\text{III.49})$$

isto é,

$$A_i' = \beta_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \quad (\text{III.50})$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_i &= f_i(x_1', x_2', \dots, x_n') + x_1' \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \\ &+ x_2' \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + x_n' \frac{\partial f_i}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Mas $A_i' = A_i + E_i$, onde A_i são os ângulos não ajustados e os E_i as correções mais prováveis. Podemos obter os E_i como segue:

$$\begin{aligned} A_i' + E_i &= \beta_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \\ E_i &= \beta_i - A_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \\ E_i &= \nu_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

onde $\beta_i - A_i = \nu_i$.

Das equações (III.52) podem ser deduzidas as equações:

$$\bar{y}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} E_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} E_n, \quad (\text{III.53})$$

onde $\bar{y}_i = \nu_i + \sum_{i=1}^n x_i = \nu_i + [x]$.

O somatório $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} E_i E_j$ será representado da seguinte maneira: $[pEE]$, onde os "p" representam os pesos adotados para as observações. Quando procuramos obter $[pEE] = \text{mínimo}$, podemos utilizar o método de Lagrange (RICHARDUS, 1966):

$$\begin{aligned} F = [pEE] - 2K_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} E_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} E_n \right) - \\ - 2K_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} E_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} E_n \right) - \dots - \\ - \dots - 2K_n \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} E_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} E_n \right), \quad (\text{III.54}) \end{aligned}$$

onde os K_1, K_2, \dots, K_n são coeficientes desconhecidos diferen

são obtidos a partir dos $Q_{x_i x_j}$ e das equações (III.60). Portanto, são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 K_1 = \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right]_{\xi_1} + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right]_{\xi_2} + \dots + \left[q \frac{\partial f_n}{\partial x_r} \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \right]_{\xi_n} \\
 K_2 = \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]_{\xi_1} + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]_{\xi_2} + \dots + \left[q \frac{\partial f_n}{\partial x_r} \frac{\partial f_2}{\partial x_r} \right]_{\xi_n} \\
 \dots\dots\dots(III.62) \\
 K_n = \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right]_{\xi_1} + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right]_{\xi_2} + \dots + \left[q \frac{\partial f_n}{\partial x_r} \frac{\partial f_n}{\partial x_r} \right]_{\xi_n}
 \end{array} \right.$$

Das (III.58) e das (III.60), conclui-se facilmente que:

$$[pEE] = K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2 + \dots + K_n \xi_n. \quad (III.63)$$

Aplicando a lei da propagação das variâncias sobre E_i e E_j se $f_i(x)$ for $(x_i - \mu_i)$, temos:

$$\sigma_{E_i E_j} = \frac{[pEE]}{n},$$

então,

$$Q_{E_i E_j} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{[pEE]}{n}. \quad (\text{III.64})$$

Na sequência, vamos aplicar a teoria vista neste capítulo ao caso de um triângulo. Para o triângulo de ângulos A, B e C podemos escrever uma função linear F qualquer:

$$F = L_0 + L_1 A + L_2 B + L_3 C, \quad (\text{III.65})$$

para $L_0 = a_0 + b_0 + c_0$ e onde os L_i são parâmetros arbitrários. Caso um dos L_i for igual a 1 e os outros forem considerados nulos, pode-se escrever: $F = A$ para $i = 1$, por exemplo. Uma vez que $\sigma_A^2 = Q_{AA} \sigma^2$, onde é necessário calcular Q_{AA} .

Mas,

$$A' + B' + C' = (A + E_{A'}) + (B + E_{B'}) + (C + E_{C'}). \quad (\text{III.66})$$

Utilizando as (III.58) nas (III.66), resultam:

$$\left. \begin{aligned} E_{A'} &= q_{A'A'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} K_{C'} \right) \\ E_{B'} &= q_{B'B'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} K_{C'} \right) \\ E_{C'} &= q_{C'C'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} K_{C'} \right). \end{aligned} \right\} (\text{III.67})$$

Substituindo estas nas (III.66) e (III.65) sucessivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 F = & L_0 + L_1 A' + L_1 q_{A'A'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} K_{C'} \right) + \\
 & + L_2 B' + L_2 q_{B'B'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} K_{C'} \right) + \\
 & + L_3 C' + L_3 q_{C'C'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} K_{C'} \right).
 \end{aligned}
 \tag{III.68}$$

E aplicando as (III.59) , encontramos:

$$\xi_A = - \left(a_0 + q_{A'A'} \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] \right),$$

após sua substituição nas (III.60) pode-se escrever:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] K_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} \right] K_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] K_{C'} + \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] q_{A'A'} + a_0 = 0 \\
 & \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} \right] K_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] K_{B'} +
 \end{aligned} \right\} \tag{III.69}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] K_{C'} + \left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] q_{B'B'} + b_0 = 0 \\
 & \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \right] K_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \right] K_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] K_{C'} + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] q_{C'C'} + c_0 = 0.
 \end{aligned} \quad (III.69)$$

Multiplicando cada uma destas por um coeficiente auxiliar S_i e somando as com a (III.68), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 F = & L_0 + L_1 A' + L_2 B' + L_3 C' + (L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} + \\
 & + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}}) K_{A'} + (L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} + \\
 & + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}}) K_{B'} + (L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} + \\
 & + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}}) K_{C'} + \left(q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right) S_{A'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} + \\
 & + \left(\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} K_{B'} + \left(\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \right. \\
& + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \left. \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} \right) K_{C'} + \\
& + \left(\left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] q_{A'A'} + a_0 \right) S_{A'} + \left(\left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] q_{B'B'} + b_0 \right) S_{B'} + \\
& + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] q_{C'C'} + c_0 \right) S_{C'}. \tag{III.70}
\end{aligned}$$

Esta função é transformada de forma tal que dela resulta a função de observação mais uma constante. Os S_i são escolhidos de uma maneira que os K_i sejam todos nulos, disto resulta que:

$$\left. \begin{aligned}
& \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{B'} + \\
& + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{C'} + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} L \right] = 0 \\
& \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \\
& + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{C'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} L \right] = 0
\end{aligned} \right| \tag{III.71}$$

$$\begin{aligned}
& \left[{}^q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{A'} + \left[{}^q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{B'} + \\
& + \left[{}^q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} + \left[{}^q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} L \right] = 0.
\end{aligned} \tag{III.71}$$

E então conclue-se que:

$$\begin{aligned}
F = L_0 + L_1 A' + L_2 B' + L_3 C' + & \left(\left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] q_{A'A'} + a_0 \right) S_{A'} + \\
+ & \left(\left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] q_{B'B'} + b_0 \right) S_{B'} + \left(\left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] q_{C'C'} + c_0 \right) S_{C'} ,
\end{aligned}$$

ou então:

$$\begin{aligned}
F = (L_0 + a_0 S_{A'} + b_0 S_{B'} + c_0 S_{C'}) + \\
(L_1 + \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'}) q_{A'A'} + (L_2 + \left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'}) q_{B'B'} + \\
+ (L_3 + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'}) q_{C'C'} .
\end{aligned} \tag{III.72}$$

Aplicando as regras da propagação das variâncias, temos:

$$Q_{FF} = \left[L_i + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] S_i \right]^2 q_{ii}, \quad p/i = A', B', C' \tag{III.73}$$

a qual, transformada adequadamente, é escrita:

$$\begin{aligned}
Q_{FF} &= q_{A'A'} L_1 L_1 + q_{B'B'} L_2 L_2 + q_{C'C'} L_3 L_3 + \\
&+ (L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}}) S_{A'} + \\
&+ (L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}}) S_{B'} + \\
&+ (L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}}) S_{C'} .
\end{aligned}
\tag{III.74}$$

Substituindo a (III.71) na (III.74) temos de acordo com a (III.72):

$$\begin{aligned}
F = A &= (L_1 + \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'}) q_{A'A'} + (L_2 + \left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'}) q_{B'B'} + \\
&+ (L_3 + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'}) q_{C'C'} ,
\end{aligned}
\tag{III.75}$$

onde $L_1 = 1$ e $L_2 = L_3 = 0$;

então de acordo com a (III.71), temos:

$$\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} = - \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} L \right] ,
\tag{III.76}$$

isto é, $3S_{A'} = -1 \rightarrow S_{A'} = -\frac{1}{3}$.

E conseqüentemente $[qLL] = q_{A'A'} L_1 L_1 = 1$,

donde,

$$Q_{FF} = Q_{A'A'} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad (\text{III.77})$$

e por analogia concluimos que: $Q_{B'B'} = Q_{C'C'} = \frac{2}{3}$.

Ao voltarmos à (III.73) e nesta substituímos Q_{FF} por Q_{FG} , onde G é referente a uma função linear análoga à função F, podemos escrever:

$$Q_{FG} = \left\{ L_i + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] S_i \right\} \cdot \left\{ m_j + \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right] S_j \right\} \cdot q_{ij}, \quad (\text{III.78})$$

para $i, j = A', B', C'$ e $i \neq j$.

Utilizando a mesma sequência seguida anteriormente para calcular Q_{FF} , podemos escrever:

$$S_{A'} = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad [qLm] = 0, \quad (\text{III.79})$$

consequentemente:

$$Q_{FG} = Q_{AB} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Analogamente encontramos:

$$Q_{AC} = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad Q_{BC} = -\frac{1}{3}.$$

Podemos finalmente escrever a matriz dos coeficienu

tes de peso de um triângulo. Lembramos que $Q_{ij} = Q_{ji}$.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.80})$$

3.7 - RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE DE RIGIDEZ E A CURVAS PARABÓLICA RELATIVA:

Empregando os valores obtidos na (III.80) e nas (III.27) teremos:

$$Q_{aa} = a^2 \left(\frac{2}{3} \cotg^2 A' + \frac{2}{3} \cotg^2 B' - 2 \left(-\frac{1}{3} \right) \cotg A' \cotg B' \right),$$

para generalizar a expressão, introduzimos o coeficiente de correlação ρ na mesma;

$$Q_{aa} = \frac{2a^2}{3\rho^2} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B'), \quad (\text{III.81})$$

$$(Q_{aa})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{2}{3} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B') \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.82})$$

Introduzindo a (III.81) na (II.17), resulta:

$$\sigma_a^2 = \frac{2a^2\sigma^2}{3f^2} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B'). \quad (\text{III.83})$$

Aplicando, sobre a equação acima, o mesmo método utilizado na obtenção da equação (III.42), podemos escrever a (III.83) como segue:

$$\sigma_a^2 = \frac{2a^2\sigma^2}{3f^2\gamma^2} (\delta_{A'}^2 + \delta_{B'}^2 + \delta_{A'}\delta_{B'}). \quad (\text{III.84})$$

Voltando à (III.46), dada por:

$$R_a = \frac{D-C}{C} \sum_{i=1}^n (\delta_{A_i'}^2 + \delta_{B_i'}^2 + \delta_{A_i'}\delta_{B_i'}),$$

e substituindo sua expressão, para um triângulo, verificamos que:

$$R_a = (\delta_{A'}^2 + \delta_{B'}^2 + \delta_{A'}\delta_{B'}),$$

donde,

$$R_a = R_1. \quad (\text{III.85})$$

O resultado acima, implica em:

$$\sigma_a^2 = \frac{2a^2 \sigma^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_1. \quad (\text{III.86})$$

Então, de acordo com a (III.81) temos:

$$Q_{aa} = \frac{2a^2}{3\beta^2 \gamma^2} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B'), \quad (\text{III.87})$$

a qual é escrita da seguinte forma:

$$Q_{aa} = \frac{2a^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_a \quad \text{e} \quad Q_{bb} = \frac{2b^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_b. \quad (\text{III.88})$$

Conseqüentemente, a equação da elipse padrão relativa, quando substituimos a (III.87) pelas (III.88) é escrita:

$$\frac{1}{\frac{2a^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_a + \frac{2b^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_b + \frac{4a^2 b^2}{9\beta^4 \gamma^4} R_a R_b} \left(\frac{2b^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_b x_1^2 - \frac{4a^2 b^2}{9\beta^4 \gamma^4} \sqrt{R_a R_b} x_1 x_2 + \frac{2a^2}{3\beta^2 \gamma^2} R_a x_2^2 \right) = \sigma^2, \quad (\text{III.89})$$

isto é,

$$b^2 R_b x_1^2 - 2ab \sqrt{R_a R_b} x_1 x_2 + a^2 R_a x_2^2 = \frac{2a^2 b^2}{3\gamma^2} \sqrt{R_a R_b} \sigma^2, \quad (\text{III.90})$$

que é a equação da elipse padrão relativa em função do coeficiente de rigidez.

A partir da (III.90) obtém-se:

$$a^2 R_a x_1^2 - 2ab \sqrt{R_a R_b} x_1 x_2 + b^2 R_b x_2^2 = \frac{3\beta^2 \gamma^2}{2\sigma^2} (x_1^2 + x_2^2)^2, \quad (\text{III.91})$$

que é a equação da podária padrão relativa em função dos coeficientes de rigidez de um triângulo.

As expressões (III.90) e (III.91) demonstram nitidamente que o já há muito conhecido coeficiente de rigidez está diretamente ligado à teoria da otimização e às curvas padrão.

C A P Í T U L O I V

TENSOR DE ERRO E SUAS PROPRIEDADES

4.1 - INTRODUÇÃO:

Este capítulo introduz o tensor de erro e apresenta algumas consequências, que decorrem da aplicação de suas propriedades. Fundamentalmente, é possível afirmar que a matriz variância-covariância é um tensor de segunda ordem; para que isto seja verdadeiro, naturalmente devem ser satisfeitas algumas condições.

Demonstramos neste capítulo que a área máxima para a elipse de erro corresponde a elipse padrão e que sua área mínima corresponde a um círculo, que pode ser identificado como a situação ideal para uma medida. Demonstra-se, também, que a podária padrão tem área igual à podária referente a elipse de erro, pois esta é invariante. Estes resultados são obtidos a partir de propriedades do tensor de erro. Aliás, elas podem ser consideradas como válidas para a matriz variância-covariância, mesmo quando não se identificar com o tensor de erro.

4.2 - TENSOR DE ERRO:

Considerando um sistema euclidiano tri-dimensional, e fixando neste sistema um vértice de uma triangulação, a posição deste é influenciada pelo tempo, fato não levado em consideração nos capítulos anteriores. Resulta disto que a função densidade de probabilidade agora também é função do tempo. Razão pela qual a matriz variância-covariância também depende do tempo, donde podemos escrever:

$$\vec{F} = \vec{F}(x_1, \dots, x_n, t)$$

e

$$\vec{\sigma}_{x_i x_j} = \vec{\sigma}_{x_i x_j}(t). \quad (\text{IV.1})$$

Tendo em vista tratar-se de geodésia, as grandezas a serem medidas são distâncias, ângulos, etc. Se considerarmos o processo como estacionário, as $\vec{\sigma}_{x_i x_j}(t_s)$ serão iguais para qualquer s , neste caso $s = 1, 2, \dots, m$. Escreve-se:

$$\vec{\sigma}_{x_i x_j}(t) = \sum_{i, j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} F(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \quad (\text{IV.2})$$

Onde u_x é o desvio da distribuição definida no parágrafo 3.2.

Multiplicando a densidade de probabilidade $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ pelo elemento $dv = dx_1 dx_2 \dots dx_n$,

$$d\bar{V} = \bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dv, \quad (\text{IV.3})$$

e substituindo $d\bar{V}$ em (II.7), temos:

$$\bar{\sigma}_{x_i x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) d\bar{V} \quad (\text{IV.4})$$

que tem a mesma forma (GRAFAREND, 1967) que o tensor de inércia utilizado em mecânica. Disto é possível deduzir-se que a matriz variância-covariância é um tensor de segunda ordem, quando satisfeitas as condições citadas. Para provarmos que esta grandeza é um tensor, é suficiente demonstrar que a mesma se transforma segundo a lei de transformação para tensores de segunda ordem (STEDILE & SILVA, 1974):

$$\bar{\sigma}_{x_i x_j} = a_{x_i}^{x_h} a_{x_j}^{x_k} \bar{\sigma}_{x_h x_k}, \quad (\text{IV.5})$$

onde utilizamos a convenção de soma de Einstein.

Da álgebra sabemos que x_h e μ_h podem ser representados sob a forma:

$$\left. \begin{aligned} x_{h'} &= \sum_{i=1}^n a_{ih'} x_i + b_{h'} \\ \mu_{h'} &= \sum_{i=1}^n a_{ih'} \mu_i + b_{h'} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.6})$$

que são escritas tensorialmente da maneira como se segue:

$$\left. \begin{aligned} x_{h'} &= a_{h'}^i x_i + b_{h'} \\ \mu_{h'} &= a_{h'}^i \mu_i + b_{h'} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.7})$$

Então podemos escrever:

$$(x_{h'} - \mu_{h'})(x_{k'} - \mu_{k'})$$

isto é,

$$u_{x_{h'}} u_{x_{k'}} = a_{h'}^i a_{k'}^j u_{x_i} u_{x_j}$$

Diferenciando a primeira ex]

$$dx_{h'} = a_{h'}^i dx_i$$

Porém, tendo em vista estarmos trabalhando em um espaço eu-

clidiano, isto é, os $dx_{h'}$, são ortogonais aos $dx_{k'}$, , implica que os $a_{h'}^i = 1$, donde se conclui que:

$$dx_{h'} = dx_i .$$

Consequentemente, temos:

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n = dx_{1'} dx_{2'} \dots dx_{n'} . \quad (IV.9)$$

Da definição da densidade de probabilidade, conclui-se que: para uma transformação onde o tempo é uma variável discreta, isto é, $t = T_{k'h'}$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{F}(x_{1'}, x_{2'}, \dots, x_{n'}) . \quad (IV.10)$$

Onde $T_{k'h'}$ assume os valores 1 se $k' = h'$ e $x(t)$ se $k' \neq h'$, condição imposta para que a densidade de probabilidade seja a mesma para os dois sistemas.

É necessário buscar da teoria da probabilidade o seguinte conceito: Sempre que a densidade de probabilidade for tomada para todo o espaço, ela é igual a (um) 1, independente do sistema de referência utilizado. Então se a igualdade (IV.10) for satisfeita, pode-se escrever:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(x_1, \dots, x_n) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(x_{1'}, \dots, x_{n'}) dv' = 1. \quad (IV.11)$$

Esta expressão pode ser escrita dependente do tempo. Contudo que $h' = k'$, isto é, que nos dois sistemas a densidade de

probabilidade seja considerada no mesmo instante. Isto é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) d\vec{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(x_1, \dots, x_n, t) d\vec{v} = 1. \quad (\text{IV.12})$$

Das expressões (IV.3), (IV.8) e (IV.12) conclui-se que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{x_h} u_{x_k} d\vec{v} = a_{x_h}^{x_i} a_{x_k}^{x_j} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{x_i} u_{x_j} d\vec{v}. \quad (\text{IV.13})$$

Isto prova que a integral acima é um tensor de segunda ordem, o qual é denominado tensor de erro. Portanto, no espaço tridimensional, escreve-se:

$$\vec{\sigma}_{x_i x_j}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{x_i}(t) u_{x_j}(t) \vec{F}(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (\text{IV.14})$$

isto é,

$$\vec{\sigma}_{x_i x_j}(t) = \begin{vmatrix} \sigma_{x_1 x_1}(t) & \sigma_{x_1 x_2}(t) & \sigma_{x_1 x_3}(t) \\ \sigma_{x_2 x_1}(t) & \sigma_{x_2 x_2}(t) & \sigma_{x_2 x_3}(t) \\ \sigma_{x_3 x_1}(t) & \sigma_{x_3 x_2}(t) & \sigma_{x_3 x_3}(t) \end{vmatrix}, \quad (\text{IV.15})$$

onde $\sigma_{x_i x_i} = \sigma_{x_i}^2$ e $\sigma_{x_i x_j} = \frac{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}{\int_{x_i x_j}}$.

4.3 - INTERPRETAÇÃO DO TENSOR DE ERRO:

Como vimos no parágrafo anterior, a matriz variância-covariância quando dependente do tempo é um tensor de segunda ordem. Ao passar de um sistema de coordenadas (S) para um sistema de coordenadas (S'), empregando a lei geral de transformação de tensores, torna possível a aplicação do sistema fundamental de invariantes de Hilbert, para tensores de segunda ordem, à matriz variância-covariância (GRAFAREND, 1971). No espaço euclidiano n-dimensional as invariantes fundamentais são:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{1!} \delta_{ij} \sigma_{ij} \\
 I_2 &= \frac{1}{2!} \delta_{ijh'k'} \sigma_{ij} \sigma_{h'k'} \\
 I_3 &= \frac{1}{3!} \delta_{ijh'k'r''s''} \sigma_{ij} \sigma_{h'k'} \sigma_{r''s''} \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_n &= \frac{1}{n!} \delta_{ij\dots m^*n^*} \sigma_{ij\dots\dots} \sigma_{m^*n^*}
 \end{aligned}
 \tag{IV.16}$$

O $\delta_{ijh'k'r''s''\dots m^*n^*}$ é o delta de Krönicker generalizado ,

oque pode ser encontrado em (LELONG-FERRAND,1963). Os I_n são invariantes para qualquer transformação. É proveitoso lembrar: que $\sigma_{x_i x_j} = \beta_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}$ e quando x_i e x_j são linearmente dependentes, temos $|\beta_{x_i x_j}| = 1$, ao passo que para x_i e x_j linearmente independentes resulta $|\beta_{x_i x_j}| \neq 1$. É evidente, e verifica-se experimentalmente que no espaço tri-dimensional a coordenada x_3 , correspondente à altitude h , e as coordenadas x_1 e x_2 , correspondentes às coordenadas geográficas são linearmente independentes, isto é, $|\beta_{x_1 x_3}| \neq 1$ e $|\beta_{x_2 x_3}| \neq 1$.

Então as (IV.16), no espaço euclidiano tri-dimensional, assumem a forma que se segue:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 \\
 I_2 &= \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_3}^2 + \sigma_{x_2}^2 \sigma_{x_3}^2 - \\
 &\quad - \sigma_{x_1 x_2}^2 \left[\left(\frac{\sigma_{x_1 x_3}}{\beta_{x_1 x_3}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_{x_2 x_3}}{\beta_{x_2 x_3}} \right)^2 \right]
 \end{aligned}
 \quad (IV.17)$$

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 \sigma_{x_3}^2 + 2 \left(\frac{\sigma_{x_1 x_2} \sigma_{x_1 x_3} \sigma_{x_2 x_3}}{\rho_{x_1 x_3} \rho_{x_2 x_3}} \right) - \\
 & - \sigma_{x_3}^2 \sigma_{x_1 x_2}^2 - \sigma_{x_1}^2 \left(\frac{\sigma_{x_2 x_3}}{\rho_{x_2 x_3}} \right)^2 - \sigma_{x_2}^2 \left(\frac{\sigma_{x_1 x_3}}{\rho_{x_1 x_3}} \right)^2. \quad (IV.17)
 \end{aligned}$$

Estudando as (IV.15) e (IV.17) detalhadamente, conclue-se que as (IV.17) podem ser reescritas, como abaixo:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr } \vec{\sigma}_{x_i x_j} \\
 I_2 &= \text{tr adj } \vec{\sigma}_{x_i x_j} \\
 I_3 &= \det \vec{\sigma}_{x_i x_j} \cdot
 \end{aligned} \right\} \quad (IV.18)$$

No espaço euclidiano bi-dimensional tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr } \vec{\sigma}_{x_i x_j} = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 \cdot \\
 I_2 &= \det \vec{\sigma}_{x_i x_j} = \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 - \sigma_{x_1 x_2}^2
 \end{aligned} \right\} \quad (IV.19)$$

Recordamos que $Q_{x_i x_j} = \frac{\sigma_{x_i x_j}}{\sigma^2}$ e $Q_{x_i x_i} = \frac{\sigma_{x_i}^2}{\sigma^2}$, o que possibilita reescrevermos as (IV.19), como abaixo:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma^2 (Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2}) \\ I_2 &= \sigma^4 (Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2}^2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.20})$$

4.4 - ÁREAS MÁXIMA E MÍNIMA PARA A ELIPSE DE ERRO:

A elipse de erro é dada pela equação (II.20), isto é:

$$Q_{x_2 x_2} x_1^2 - 2Q_{x_1 x_2} x_1 x_2 + Q_{x_1 x_1} x_2^2 = \sigma^2 (Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2}^2). \quad (\text{IV.21})$$

Para obtê-la em função de suas coordenadas polares, faz-se:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.22})$$

Em consequência a equação da elipse é escrita como segue:

$$\begin{aligned}
 & Q_{x_2x_2} r^2 \cos^2 \psi - 2Q_{x_1x_2} r^2 \cos \psi \sin \psi + Q_{x_1x_1} r^2 \sin^2 \psi = \\
 & = \sigma^2 (Q_{x_1x_1} Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2). \quad (\text{IV.23})
 \end{aligned}$$

Da (IV.22) pode-se obter "r", isto é:

$$r = \pm \left[\frac{\sigma^2 (Q_{x_1x_1} Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2)}{(Q_{x_2x_2} \cos^2 \psi - 2Q_{x_1x_2} \cos \psi \sin \psi + Q_{x_1x_1} \sin^2 \psi)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{IV.24})$$

então a área "S" da elipse de erro será expressa como segue:

$$S_{ee} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r r dr d\psi, \quad (\text{IV.25})$$

integrando-se temos:

$$S_{ee} = \frac{4\sigma^2 (Q_{x_1x_1} Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2)}{Q_{x_1x_2}}, \quad (\text{IV.26})$$

e a expressão final para a área genérica da elipse de erro, é dada por:

$$S_{ee} = \frac{4I_2}{\sigma^2 Q_{x_1x_2}}. \quad (\text{IV.27})$$

Isto significa que a área da elipse de erro não é constante, pois $Q_{x_1x_2}$ depende dos eixos da mesma.

Já que a área da elipse é variável, a mesma deve assumir um máximo e um mínimo. Estes podem ser determinados em função das relações entre os eixos da elipse e sua orientação. Para fazer este estudo derivamos a expressão de sua área em função a um ângulo t de rotação. Vimos da (II.23) que após a rotação de um ângulo t nas direções dos eixos, temos:

$$Q_{y_1 y_2} = (Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1}) \text{sen} t \text{cos} t + 2Q_{x_1 x_2} (\text{cos}^2 t - \text{sen}^2 t)$$

isto é,

$$Q_{y_1 y_2} = \frac{1}{2} (Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1}) \text{sen} 2t + 2Q_{x_1 x_2} \text{cos} 2t. \quad (\text{IV.28})$$

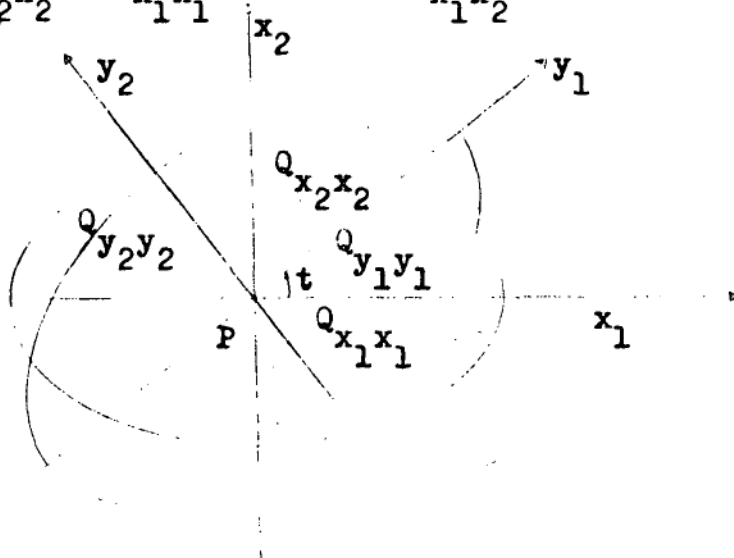


FIG.IV.1 - Duas elipses de erro para um ponto tem áreas diferentes.

Com a finalidade de obter um extremo da função derivamos (IV.28) e a anulamos:

$$\frac{d^Q y_1 y_2}{dt} = (Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1}) \cos 2t - 4Q_{x_1 x_2} \operatorname{sen} 2t = 0 \quad (\text{IV.29})$$

desta equação obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2t &= \frac{Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1}}{4Q_{x_1 x_2}}, \\ \operatorname{sen} 2t &= \frac{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1})}{\pm \sqrt{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1})^2 + (4Q_{x_1 x_2})^2}}, \\ \operatorname{cos} 2t &= \frac{4Q_{x_1 x_2}}{\pm \sqrt{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1})^2 + (4Q_{x_1 x_2})^2}} \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Afim de obter-se o máximo ou mínimo da função deriva-se a (IV.28) uma segunda vez, e obtém-se:

$$\frac{d^2(Q_{y_1 y_2})}{dt^2} = - \left[2(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_1}) \operatorname{sen} 2t + 8Q_{x_1 x_2} \operatorname{cos} 2t \right]. \quad (\text{IV.31})$$

Substituindo as (IV.30) na (IV.31), temos:

$$\frac{d^2(Q_{y_1y_2})}{dt^2} = - \frac{2 \left[(Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_1})^2 - (4Q_{x_1x_1})^2 \right]}{\left| \pm \sqrt{(Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_1})^2 + (4Q_{x_1x_2})^2} \right|}. \quad (\text{IV.32})$$

Onde tomamos o valor da raiz em módulo por estarmos tratando de uma área.

Para sabermos se $\frac{d^2 Q_{y_1y_2}}{dt^2}$ é maior ou menor que zero

ro devemos considerar casos particulares.

a - Se os eixos da elipse forem iguais, isto é, quando a elipse recai em uma circunferência, a (IV.32) será positiva, pois:

$$\frac{d^2(Q_{y_1y_2})}{dt^2} = 8 > 0. \text{ Este resultado mostra que a área é mínima}$$

ma para este caso, isto é, para a circunferência.

b - Para o caso da elipse padrão, isto é, quando temos $Q_{y_1y_1}$ máximo e $Q_{y_2y_2}$ mínimo, é fácil concluir que o valor numéri-

co em módulo para a (IV.32) será o maior possível. Mas não é possível provar que a derivada segunda é positiva, portanto não provamos que se trata de um extremo. Mas podemos prová-lo de outra maneira.

c - Uma vez que $Q_{x_1 x_2}^2 = \rho_{x_1 x_2}^2 Q_{x_1 x_1} Q_{x_2 x_2}$, temos:

$$S_{ee} = S_{ep} = \frac{4 \sigma^2 I_2}{\int_{x_1 x_2} \frac{1}{Q_{x_1 x_1}^2} \frac{1}{Q_{x_2 x_2}^2}} \quad (\text{IV.33})$$

Quando cresce a diferença entre $Q_{x_1 x_1}^{\frac{1}{2}}$ e $Q_{x_2 x_2}^{\frac{1}{2}}$, decresce o pro-

duto $Q_{x_1 x_1}^{\frac{1}{2}} \cdot Q_{x_2 x_2}^{\frac{1}{2}}$. Podemos então concluir que para a elipse padrão, a área é máxima, isto é, a elipse de erro de maior área é a elipse padrão.

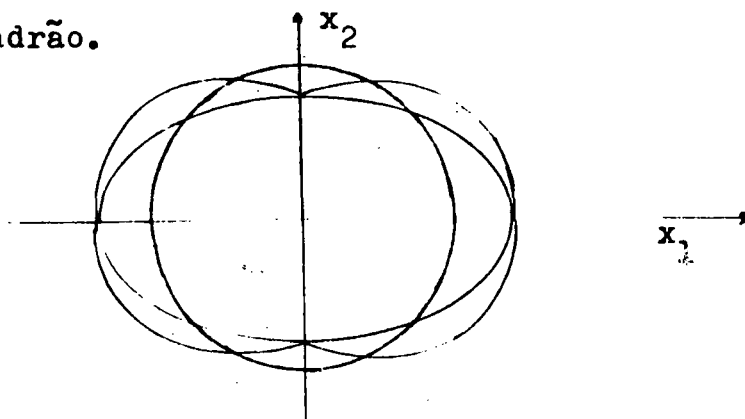


FIG. IV.2 - A área máxima para a elipse de erro é dada pela elipse padrão e a mínima por uma circunferência.

4.5 - INVARIÂNCIA DA ÁREA DA PODÁRIA REFERENTE À ELIPSE
DE ERRO:

A equação da podária para a elipse de erro é dada pela equação:

$$Q_{x_1 x_1} x_1^2 - 2Q_{x_1 x_2} x_1 x_2 + Q_{x_2 x_2} x_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} (x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (\text{IV.34})$$

Para escrever a equação desta podária em função de coordenadas polares, usa-se:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p \cos \psi \\ x_2 &= p \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.35})$$

donde a (IV.34) em função das mesmas pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} Q_{x_1 x_1} p^2 \cos^2 \psi - 2Q_{x_1 x_2} p^2 \cos \psi \sin \psi + Q_{x_2 x_2} p^2 \sin^2 \psi &= \\ = \frac{1}{\sigma^2} (p^2 \cos^2 \psi + p^2 \sin^2 \psi)^2 &\quad (\text{IV.36}) \end{aligned}$$

Da (IV.36) obtemos p , que é dado por:

$$p = \frac{1}{2} \left[\sigma^2 (Q_{x_1 x_1} \cos^2 \varphi - 2Q_{x_1 x_2} \cos \varphi \sin \varphi + Q_{x_2 x_2} \sin^2 \varphi) \right] \quad (\text{IV.37})$$

Do cálculo integral e diferencial sabemos que a área para esta figura plana pode ser obtida pela expressão:

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^p p \, dp \, d\varphi \quad (\text{IV.38})$$

A solução desta integral é:

$$S = \frac{\sigma^2 \pi}{2} (Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2}) \quad (\text{IV.39})$$

Substituindo a primeira expressão das (IV.20) na (IV.39), resulta:

$$S = \frac{\pi I_1}{2} \quad (\text{IV.40})$$

A expressão (IV.40) mostra que a área da podária referente à elipse de erro é invariante. Neste caso, a área da podária padrão é igual a da podária referente à elipse de erro, sendo portanto invariante em relação a qualquer transformação de coordenadas.

C A P Í T U L O V

COMPLEMENTAÇÃO E TÓPICOS DE OTIMIZAÇÃO

5.1 - INTRODUÇÃO:

Este capítulo foi escrito com o intuito de complementar o que foi feito até aqui. Sua finalidade é esclarecer alguns pontos que ficaram em aberto nos capítulos anteriores, ou que não foram citados, apesar de fazerem parte dos assuntos abordados. O que será útil para dar uma noção geral sobre problemas a serem enfrentados no uso prático da otimização.

5.2 - ELIPSÓIDE PADRÃO:

Até aqui dedicamos nos mais às elipses de erro e padrão. Agora vamos falar brevemente sobre o aspecto tridimensional da questão, isto é, o elipsóide. Denominamos de elipsóide de erro a generalização para o espaço tridimensional da elipse de erro, que é dada por uma equação do tipo:

$$\frac{x_1^2}{Q_{y_1 y_1}^2} + \frac{x_2^2}{Q_{y_2 y_2}^2} + \frac{x_3^2}{Q_{y_3 y_3}^2} = 1. \quad (V.1)$$

As coordenadas dos extremos dos eixos serão dados por $(\pm Q_{y_1 y_1}, 0, 0)$, $(0, \pm Q_{y_2 y_2}, 0)$ e $(0, 0, \pm Q_{y_3 y_3})$ como mostra a FIG.V.1. Quando $x_3 = 0$ teremos uma elipse de erro sobre o plano $x_1 x_2$ relativas às coordenadas planas, isto é, a elipse da qual tratamos nos capítulos anteriores. Se fizermos $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, obteremos uma elipse sobre o plano $x_2 x_3$ ou $x_1 x_3$ respectivamente.

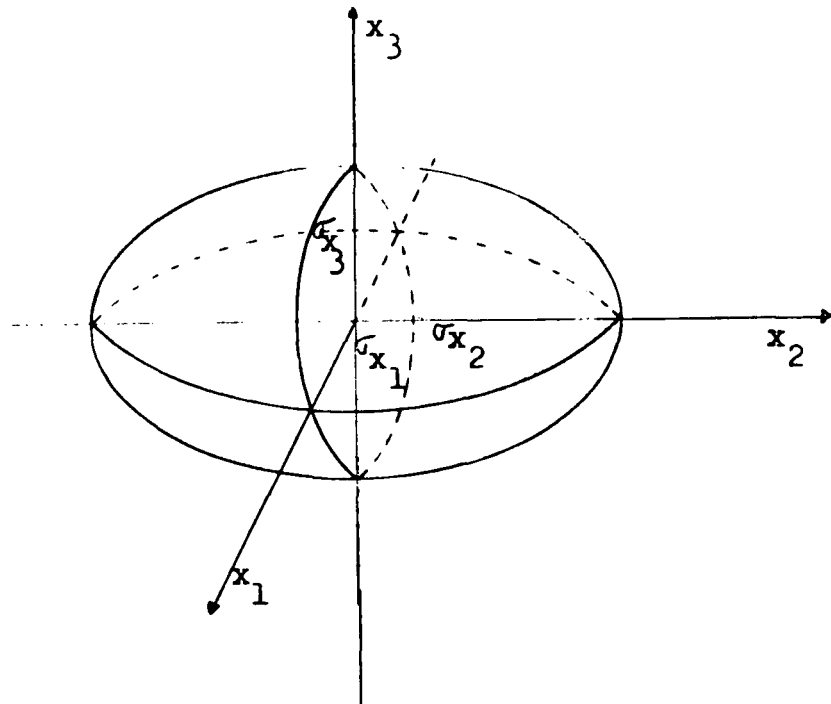


FIG.V.1 - O elipsóide de erro.

Tais elipses serão elipses de erro de x_1 e x_2 em relação a x_3 respectivamente. A partir destas elipses podemos obter os semi-eixos $Q_{x_1x_1}$, $Q_{x_2x_2}$ e $Q_{x_3x_3}$ do elipsóide de erro. No caso de utilizarmos as três elipse padrão, obtém-se os semi-eixos de um elipsóide que denominamos padrão. Porém, o elipsóide padrão será possível apenas no caso dos coeficientes de correlação $\rho_{x_1x_2}$, $\rho_{x_1x_3}$, $\rho_{x_2x_3}$ serem iguais entre si e iguais a 1. Isto, porque, em caso contrário, os novos planos z_1z_2 , z_1z_3 e z_2z_3 não serão ortogonais entre si. Supondo a condição:

$$\rho_{x_1x_2} = \rho_{x_1x_3} = \rho_{x_2x_3} = 1,$$

satisfeita, vamos obter os eixos deste elipsóide.

Os semi-eixos do elipsóide padrão serão obtidos a partir das fórmulas (II.29), da seguinte maneira:

para $x_3 = 0$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{y_1y_1} = \frac{1}{2} \left[Q_{x_1x_1} + Q_{x_2x_2} + \sqrt{(Q_{x_1x_1} - Q_{x_2x_2})^2 + 4Q_{x_1x_2}^2} \right] \\ Q_{y_2y_2} = \frac{1}{2} \left[Q_{x_1x_1} + Q_{x_2x_2} - \sqrt{(Q_{x_1x_1} - Q_{x_2x_2})^2 + 4Q_{x_1x_2}^2} \right] \end{array} \right. \quad (V.2)$$

para $x_1 = 0$, temos:

$$\left. \begin{aligned} Q_{y_1' y_1'} &= \frac{1}{2} \left[Q_{x_2 x_2} + Q_{x_3 x_3} + \sqrt{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_2 x_3}^2} \right] \\ Q_{y_2' y_2'} &= \frac{1}{2} \left[Q_{x_2 x_2} + Q_{x_3 x_3} - \sqrt{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_2 x_3}^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (V.3)$$

para $x_2 = 0$, temos:

$$\left. \begin{aligned} Q_{y_1'' y_1''} &= \frac{1}{2} \left[Q_{x_1 x_1} + Q_{x_3 x_3} + \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_1 x_3}^2} \right] \\ Q_{y_2'' y_2''} &= \frac{1}{2} \left[Q_{x_1 x_1} + Q_{x_3 x_3} - \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_1 x_3}^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (V.4)$$

A partir das (V.2), (V.3) e (V.4) é possível deduzir que:

$$\left. \begin{aligned} Q_{z_1 z_1} &= Q_{y_1 y_1} = Q_{y_1'' y_1''} \\ Q_{z_2 z_2} &= Q_{y_2 y_2} = Q_{y_1' y_1'} \end{aligned} \right\} \quad (V.5)$$

$$Q_{z_3 z_3} = Q_{y_2 y_2} = Q_{y_2'' y_2''} \quad (V.5)$$

Relacionando as (V.2), (V.3) e (V.4) com as (V.5), podemos obter as equações dos semi-eixos do elipsóide padrão, que são dados por:

$$\begin{aligned}
 Q_{z_1 z_1} &= \frac{1}{4} \left[2Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} + Q_{x_3 x_3} + \right. \\
 &\quad + \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2} + \\
 &\quad \left. + \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_1 x_3}^2} \right] \\
 Q_{z_2 z_2} &= \frac{1}{4} \left[Q_{x_1 x_1} + 2Q_{x_2 x_2} + Q_{x_3 x_3} + \right. \\
 &\quad + \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4Q_{x_1 x_2}^2} - \\
 &\quad \left. - \sqrt{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_2 x_3}^2} \right] \\
 Q_{z_3 z_3} &= \frac{1}{4} \left[Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} + 2Q_{x_3 x_3} - \right. \\
 &\quad - \sqrt{(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_1 x_3}^2} - \\
 &\quad \left. - \sqrt{(Q_{x_2 x_2} - Q_{x_3 x_3})^2 + 4Q_{x_2 x_3}^2} \right].
 \end{aligned} \quad (V.6)$$

Obtido o elipsóide padrão, é possível obter-se uma superfície pedal em relação a seu centro de simetria, a qual é análoga à podária padrão no espaço bi-dimensional.

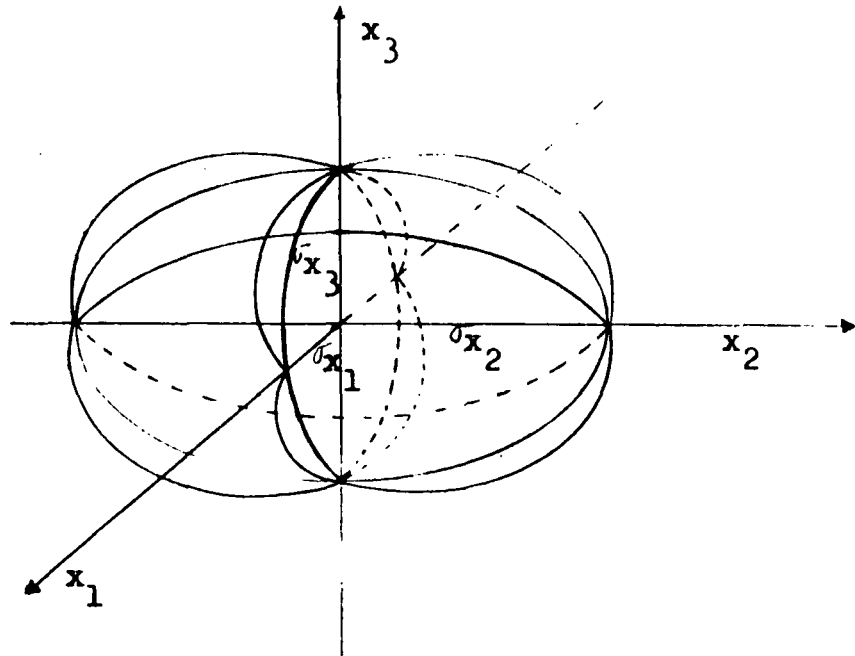


FIG.V.2. - O elipsóide padrão e sua respectiva superfície pedal.

Segundo o que foi dito no parágrafo 4.3, conclui-se que, na prática, quase sempre $\rho_{x_1 x_3} \neq \rho_{x_1 x_2}$ e $\rho_{x_2 x_3} \neq \rho_{x_1 x_2}$. Neste caso, as condições impostas para obter o elipsóide pa

drão não serão satisfeitas. Apenas será possível obter o elipsóide de erro e sua correspondente superfície pedal. É evidente que a partir destas superfícies não é possível encontrar o resultado desejado, isto é, a direção na qual há maior erro no espaço tridimensional. Isto torna claro que, na prática, as superfícies de erro não tem muito interesse, apesar de sua análise sempre implicar em resultados interessantes. Propomos, então, que seja utilizado um estudo de cada uma das elipses e podárias padrão separadamente.

5.3 - ALGUNS CONCEITOS UTILIZADOS EM OTIMIZAÇÃO:

Consideremos útil dar alguns conceitos mais empregados em otimização.

- Denomina-se situação de erro isótropa aquela para a qual a elipse de erro estiver reduzida a uma circunferência.
- Denomina-se situação de erro homogênea aquela em que, para uma distribuição de pontos, as elipses padrão encontradas para ela forem iguais entre si e tiverem todas a mesma orientação.
- Naturalmente a situação de erro não isótropa é denominada de anisótropa e a situação de erro não homogênea é denominada de heterogênea.

Estes dois conceitos nos proporcionam a possibilidade de quatro situações de erro diferentes para uma rede de triangulação geodésica, que serão:

- Rede anisótropa heterogênea, é aquela cuja distribuição de erro aparentemente não possui normalidade nenhuma, afora o crescimento do erro ao longo da rede.

- Rede anisótropa homogênea, é aquela onde a distribuição de erro para cada ponto é igual à distribuição de erro de cada um dos outros pontos da rede, mas com uma distribuição para cada ponto não isotrópica.

- Rede isotrópica heterogênea, é aquela onde a distribuição de erro é isotrópica para cada ponto, mas com distribuições diferentes para cada um deles.

- Rede isotrópica homogênea, é aquela que possui uma distribuição de erro para cada ponto igual à distribuição de todos os outros pontos, além de ser isotrópica em cada um deles. Estas quatro situações de erro serão mostradas respectivamente nas figuras V.3, V.4, V.5 e V.6.

- Um tensor de segunda ordem admite inúmeras invariantes rotacionais. Cada invariante é uma combinação linear dos componentes do tensor, que são obtidos por multiplicação, alternância e contração de índices.

- É possível calcular cada invariante de um sistema de inva

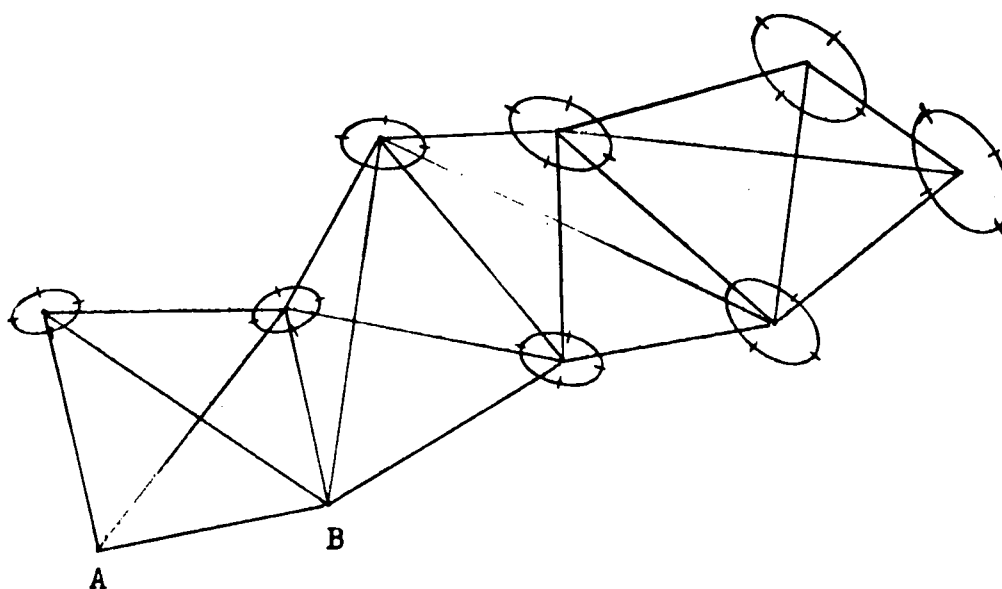


FIG.V.3 - Rede anisótropa heterogênea.

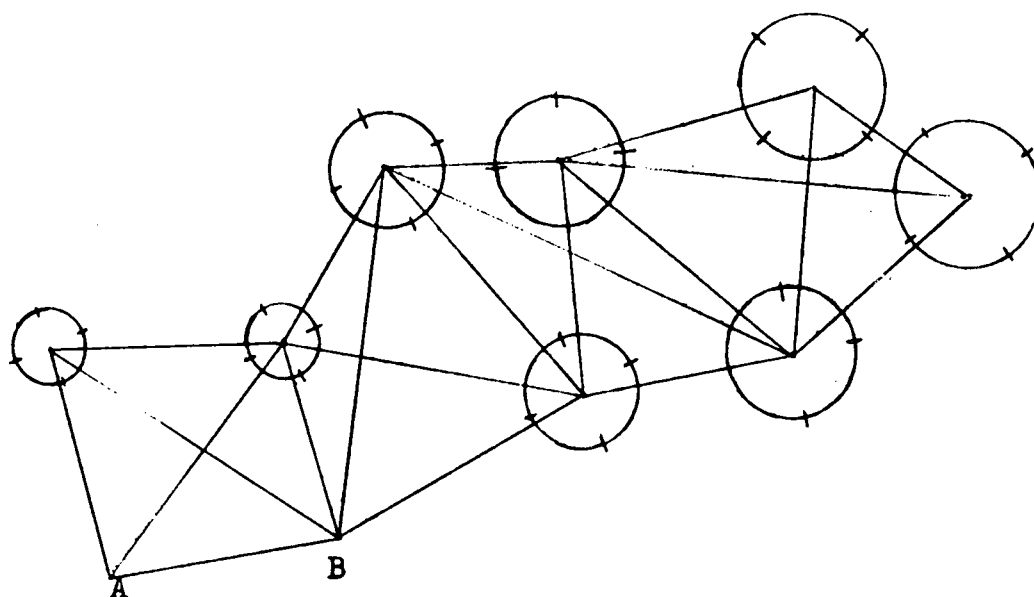


FIG.V.4 - Rede isótropa heterogênea.

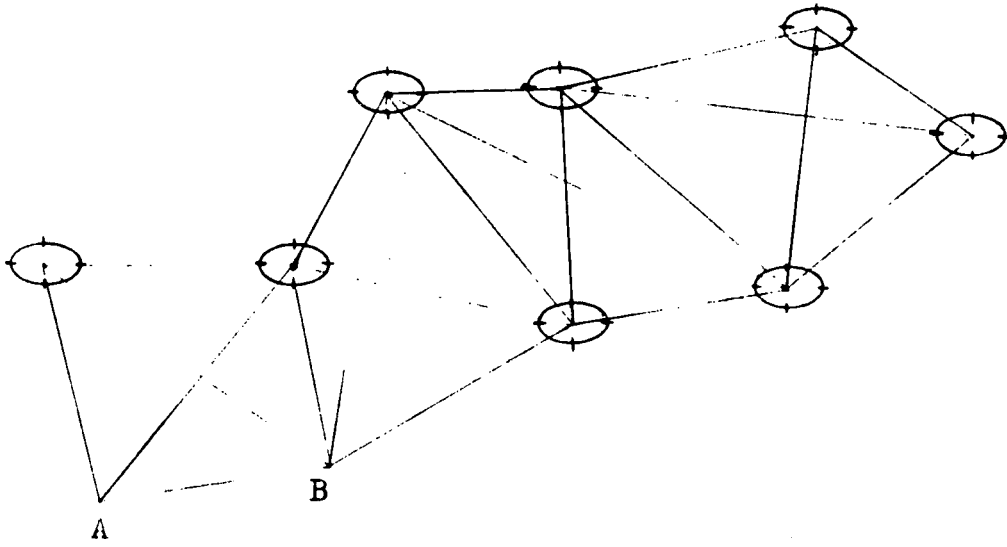


FIG.V.5 - Rede anisótropa homogênea.

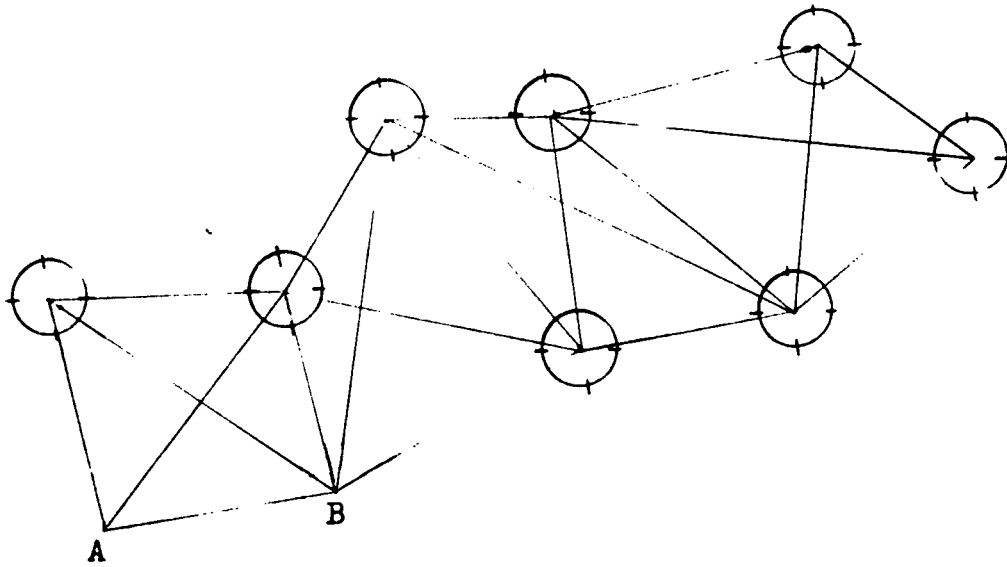


FIG.V.6 - Rede Isótropa homogênea.

riantes a partir de algumas invariantes fundamentais finitas.

- As invariantes fundamentais de um sistema de invariantes formam a base de Hilbert.

- Um tensor de segunda ordem tem o mesmo número de invariantes fundamentais que o número de dimensões do espaço euclidiano considerado.

- Denomina-se $\sqrt{I_1}$ e $\sqrt{I_n}$ de erro pontual de Helmert e de erro pontual de Werkmeister respectivamente (GRAFAREND, 1972).

Queremos ainda anotar que atualmente são utilizadas e aplicadas na otimização as seguintes teorias: teoria dos grupos, análise espectral, teoria dos invariantes, estatística, Cibernética e outras já citadas ou de menor importância.

A elipse padrão depende das coordenadas (x_i, y_i) , das linhas ao longo das quais são feitas as observações, da matriz variância-covariância e da variância generalizada σ^2 . Isto implica em que a elipse de erro pode ser calculada sem qualquer conhecimento das coordenadas ajustadas dos pontos da rede ou dos valores atuais das observações.

Desejamos esclarecer que este último parágrafo tem a finalidade principal de computar alguns conceitos pouco a cessíveis, mas utilizados com frequência e sempre considera dos como conhecidos pelo leitor, na literatura especializada.

C A P Í T U L O VI

C O N C L U S ã O

A elipse de erro foi deduzida de maneira a mostrar claramente sua proveniência e validade geométrica. A seguir vimos a dedução da elipse padrão que, por definição, é aquela que tem como semi-eixos os desvios padrão máximo e mínimo respectivamente. A primeira conclusão a ser tirada é existir uma infinidade de elipses de erro. Cada uma destas elipses dá as variâncias nas direções de seus eixos, segundo a respectiva orientação. Conclue-se também que existe apenas uma elipse padrão que é aquela onde a orientação de seus eixos maior e menor indicam a maior ou menor propagação dos erros, respectivamente. Obtivemos a podária padrão, que corresponde ao lugar geométrico da distribuição dos coeficientes de peso, isto é, das variâncias sobre o plano. Pode-se concluir que esta figura que colima todas as elipses de erro e padrão, pois cada segmento que liga um ponto de sua curva a seu centro de simetria representa o semi-eixo de uma das infinitas elipses. Se a elipse padrão nos dá a distribuição do erro sobre o plano. Lembramos que a obtenção da podária padrão é possível apenas a partir da elipse padrão,

oque justifica sua existência, isto é, sua obtenção.

Um aspecto importante da elipse padrão, é ser possível obtê-la mesmo antes de terminados os trabalhos de campo. Outro aspecto, é que sua obtenção gráfica, em alguns pontos da rede, é de maior uso prático que os resultados numéricos. A obtenção gráfica da podária padrão completa o quadro geral, o qual mostra a tendência dos erros cometidos, podendo demonstrar a existência de erros sistemáticos. O resultado gráfico também mostra tendências em escala e azimute na rede em geral. Entretanto, será o resultado numérico que dirá se foi obtida a precisão desejada ou não. Estas informações são muito úteis na decisão de quais mudanças devem ser efetuadas na rede proposta, para obtermos um resultado ótimo. Elipses de alguns pontos igualmente distribuídos ao longo da rede servem para mostrar sua deterioração. A observação detalhada das curvas padrão resultantes ajuda a seleção de uma rede ótima. Quando a rede possui medidas mal determinadas, o efeito de observações adicionais pode ser analisado por seu efeito sobre as curvas padrão. A precisão da otimização depende da precisão das variâncias e covariâncias das observações.

Tratamos também da elipse padrão relativa, isto é, da elipse que relaciona os erros de uma ou mais linhas da

rede geodésica, ou de uma poligonal. Obtivemos, então, uma noção do erro cometido nas medidas que relacionam dois pontos, isto é, nas linhas que levam ao novo ponto, enquanto a elipse padrão absoluta dá uma noção do erro final na localização de um ponto propriamente dito. A seguir, vimos a dedução da elipse padrão relativa, sua respectiva podária e o coeficiente de rigidez de um triângulo. Pode-se concluir, a partir destas deduções, que existe uma relação direta entre o coeficiente de rigidez e as curvas padrão. Por meio desta relação torna-se possível a obtenção da elipse padrão relativa e sua podária, a partir dos coeficientes de rigidez, que são de obtenção mais rápida e fácil do que os coeficientes de peso. Como os coeficientes de peso estão diretamente ligados aos pesos, através da elipse padrão relativa calculada por meio do coeficiente de rigidez, pode-se obter uma boa noção dos pesos a serem adotados para o cálculo das variâncias e covariâncias. Outra vantagem que mostra o relacionamento citado, é ser possível efetuar o gráfico da elipse padrão relativa ainda no campo de maneira bastante rápida.

Introduzimos também o tensor de erro, que é identificado como tensor de segunda ordem. Na prática este tensor corresponde à matriz variância-covariância. A principal vantagem possível de tirar disto, é que podemos fazer a matriz

variância-covariância coincidir com o tensor de erro, portanto esta tem as mesmas propriedades de um tensor de segunda ordem. A partir destas, podemos provar que a elipse padrão é a elipse de erro de maior área, e que, quando a elipse de erro decai para uma circunferência, sua área é mínima; que a área das podárias correspondentes a qualquer elipse de erro é invariante. Vimos que, quando temos uma rede ótima, as elipses padrão se reduzem a circunferências, isto é, suas áreas são mínimas. Então, na prática, deve-se escolher a rede de forma tal que seja possível obrigar a área correspondente a cada equação de elipse ser mínima, o que implica numa melhor determinação para cada ponto da rede. Se for possível obter circunferências de mesmo raio para todos os pontos da rede, ter-se-há a rede ótima. Mas, isto não é possível na prática, razão pela qual alguns estudiosos deste assunto dividem as redes em diversos tipos ou graus de ótimas. Ainda citamos os casos tridimensionais, isto é, o elipsóide de erro e sua correspondente superfície pedal. Para estas superfícies alcança-se o caso padrão apenas em um caso muito particular. Para este caso poderíamos obter uma distribuição dos coeficientes de peso no espaço tridimensional, e por conseguinte a distribuição das variâncias. Como na prática este caso particular dificilmente acontece, vemos que o elipsóide padrão e sua superfície pedal correspondente não é muito útil.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ALLMAN, J.S. The condition method in the adjustment of large networks. The canadian surveyor, 28(5):670-7, dec 1974.
- ALLMAN, J.S. & HOAR, G.J. Optimisation of geodetic networks. Survey review, 22(167):11-22, jan 1973.
- BAUMANN, E. Die Anwendung Statistischer Methoden bei der Untersuchung Geodätischer Netze. Deutsche geodätische kommission, série C(175):1-82, 1972.
- GRAFAREND, E.W. Die Genauigkeit eines Punktes im Raum. Zeitschrift für Vermessungswesen, 93(3):107-11, mär 1968.
- GRAFAREND, E.W. Optimisation of geodetic networks. Bollettino di geodesia e scienze affine, 33(4):351-407, ott 1974.
- GRAFAREND, E.W. & HARLAND, P. Optimales Desing Geodätischer Netze I. Deutsche geodätische kommission, série A(74):1-38, 1973.
- HELMERT, F.R. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. ed. Leipzig-Berlin, Tenbuer, 1907 p.293-327.

HERZOG, H. Zur Optimierung Geodätischer Beobachtungen. Deutsche geodätische kommission, série C(180):1-63, 1972.

KUBÁČEK, L. On the stochastic relations between the points of a geodetic network. Studia geophysica et geodaetica, 18(1): 19-32, 1974.

LICHNOROWICZ, A. Elementos de cálculo tensorial. 3. ed. Madrid, Aguilar, 1972 267p.

PREUSS, H. D. Numerisch-photogrammetrische messung Geologischer Trennflächen. Deutsche geodätische kommission, série C (201):1-100, 1974.

SCHOEPS, D. Fehlerteoretische untersuchung zur komischen Triangulation. Deutsche akademie der wissenschaft zu Berlin, (26):1-70, 1969.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BJERHAMMAR, A. Theory of errors and generalized matrix inverses. Amsterdam, Elsevier, 1973 420p.

GEMAEL, C. Geodésia elementar. Curitiba, D.A.E.D. 1959 262p.

GEMAEL, C. Geodésia I (notas complementares). Curitiba, I.G.U.F.P., 1971 73p.

GEMAEL, C. Elipse e elipsoide dos erros. Curitiba. I.G.U.F.P., 1974 33p.

GRAFAREND, E.W. Allgemeiner Fehlertensor bei a priori und a posteriori Korrelationen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 92(5):157-65, mai 1967.

GRAFAREND, E.W. Mittlere Punktfehler und Vorwärtseinschneiden. Zeitschrift für Vermessungswesen, 96(2):41-54, feb 1971.

GRAFAREND, E.W. Genauigkeitsmessungen Geodätischer Netze. Deutsche geodätische Kommission, série A(73):1-38, 1972.

HAMILTON, W.C. Statistics in physical science. New York, Ronald, 1964 230p.

HIRVONEN, R. A. Adjustment by least squares in geodesy and photogrametry. Helsinki, 1970 p.165-78.

LELONG-FERRAND, J. Geometrie differentielle. Paris, Masson 1963 251p.

MATTOS, A. H. de. Rigidez das figuras. Anais hidrográficos, 12: 35-45, 1945/46.

PASTOR, J. R.; SANTALÓ, L. A.; BALANZAT, M. Geometria analítica. Buenos Aires, Kapeluz, 1955 p.91-169.

RICHARDUS, P. Project surveying. Amsterdam, North-Holland, 1966 467p.

SILVA, W. C. C. da. Geometria diferencial aplicada à geodésia. São José dos Campos, I.N.P.E., 1975 79p.

STEDILE, E. A. B. & SILVA, W. C. C. da. Elementos de cálculo ten-sorial e de geometria diferencial. Curitiba, I.G.U.F.P., 1974 116p.