

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - SETOR DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA - PPGMNE

THAMARA PETROLI

**CONDICIONAMENTO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES
OBTIDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS NA DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2016

THAMARA PETROLI

**CONDICIONAMENTO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES
OBTIDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS NA DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia”, área de concentração em Programação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2016

Petroli, Thamara

Condicionamento do problema de autovalores obtido do método de elementos finitos generalizados na dinâmica de estruturas / Thamara Petroli. – Curitiba, 2016.

108 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Marcos Arndt

Coorientador: Roberto Dalledone Machado

Bibliografia: p. 101-106

1. Método dos elementos finitos. 2. Teoria dos reticulados. 3. Autovalores. I. Arndt, Marcos. II. Machado, Roberto Dalledone. III. Título.

CDD 621

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de THAMARA PETROLI, intitulada: "CONDICIONAMENTO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES OBTIDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA DINÂMICA DE ESTRUTURAS", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 06 de Junho de 2016.



Prof MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Prof ANDRE JACOMEL TORII



Prof JUCÉLIO TOMAS PEREIRA

AGRADECIMENTOS

- À Deus, que está acima de tudo.
- Aos meus pais, Nelcy Maria Favaretto Petroli e Edy Jaime Petroli, pelo apoio, incentivo e suporte emocional.
- A minha irmã, Liamara Petroli pelo apoio e incentivo.
- À todos os professores que contribuíram com a minha formação.
- Ao professor Marcos Arndt, pelo apoio, atenção, confiança, conselhos, paciência, que se mostrou muito prestativo e atencioso em todos os momentos que precisei de sua orientação, tanto profissional, quanto emocional tornando-se indispensável para a conclusão desse trabalho.
- Ao professor Roberto Machado Dalledone, pela orientação, apoio e confiança.
- A todos os meus amigos, pelo apoio prestado e que tiveram alguma participação de forma direta ou indireta na elaboração deste trabalho.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo incentivo financeiro.

RESUMO

Sabe-se que o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma importante ferramenta utilizada na análise dinâmica de estruturas, principalmente pelos bons resultados apresentados. O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), é uma extensão do MEF, que tem por característica trabalhar com espaços de aproximações locais, que consistem em funções, não necessariamente polinomiais, que apresentam informações sobre a solução da equação diferencial a ser resolvida. Ao aplicar métodos numéricos na análise de vibrações livres de estruturas, a solução numérica recai em um problema de autovalores e autovetores generalizado. Mesmo o MEFG apresentando excelentes resultados para o problema de autovalores generalizado com soluções mais precisas do que os refinamentos h e p do MEF, em alguns casos, obtém-se autovalores negativos, dependendo da precisão empregada nas rotinas computacionais. Sendo assim, este trabalho propõe uma análise da sensibilidade gerada pela construção numérica das matrizes de massa e rigidez do MEFG para o caso de vibração livre de barra e viga de Euler Bernoulli. São aplicados também outros métodos de enriquecimento e comparados os resultados, a fim de verificar se o número de condição da matriz de massa, pode ser empregado como uma medida de sensibilidade do método numérico utilizado.

Palavras-chave: Condicionamento. Problema de Autovalores Generalizado. Método dos Elementos Finitos Generalizados. Análise dinâmica.

ABSTRACT

It is known that the Finite Element Method (FEM) is an important tool used in the dynamic analysis of structures, mainly by the good results presented. The Generalized Finite Element Method (GFEM) is an extension of the FEM whose feature work spaces with local approaches, consisting of functions, not necessarily polynomial, which present information about the solution of the differential equation to be solved. By applying numerical methods in the analysis of free vibrations of structures, the problem is reduced to numerical solution of a generalized eigenvalue problem. Even GFEM showing excellent results for generalized eigenvalue problem and more accurated solutions than h and p FEM refinements, in some cases, negative eigenvalues are obtained, depending on the precision used in computer routines. Thus, this work proposes a sensitivity analysis generated by the numerical construction of the mass and stiffness matrices of GFEM in case of free vibration bar and Euler Bernoulli beam problems. Other enrichment approaches were also applied comparing the results in order to verify that the condition number of mass matrix can be employed as a measure of sensitivity of the used numerical method.

Keywords: Conditioning. Generalized Eigenvalue Problem. Generalized Finite Element Method. Dynamic Analysis.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|--|----|
| FIGURA 1 | – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MC PARA BARRAS E $1 \leq r \leq 3$ | 45 |
| FIGURA 2 | – POLINÔMIOS DE LOBATTO PARA $0 \leq k \leq 10$ | 46 |
| FIGURA 3 | – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MC PARA VIGA E $1 \leq r \leq 3$ | 48 |
| FIGURA 4 | – POLINÔMIOS DE BARDELL PARA $1 \leq k \leq 10$ | 49 |
| FIGURA 5 | – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS P-FOURIER PARA $1 \leq r \leq 3$ | 50 |
| FIGURA 6 | – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS - PROPOSTA DE ARNDT (2009) | 52 |
| FIGURA 7 | – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS - PROPOSTA DE WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) 53 | 53 |
| FIGURA 8 | – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MEFG PARA VIGA E $J = 1, 2$ | 54 |
| FIGURA 9 | – MEFG (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA | 57 |
| FIGURA 10 | – MEFG (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 57 |
| FIGURA 11 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA | 57 |
| FIGURA 12 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 58 |
| FIGURA 13 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA | 58 |
| FIGURA 14 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGI- DEZ | 58 |
| FIGURA 15 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA | 59 |
| FIGURA 16 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 59 |
| FIGURA 17 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA | 59 |
| FIGURA 18 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 60 |
| FIGURA 19 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBA- ÇÃO MATRIZ DE MASSA | 60 |
| FIGURA 20 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBA- ÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 60 |
| FIGURA 21 | – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBA- ÇÃO MATRIZ DE MASSA | 61 |
| FIGURA 22 | – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBA- ÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 61 |
| FIGURA 23 | – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA | 61 |
| FIGURA 24 | – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ | 62 |
| FIGURA 25 | – MEFG (BARRA): 100 DÍGITOS | 62 |
| FIGURA 26 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA): 100 DÍGITOS | 63 |
| FIGURA 27 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA): 100 DÍGITOS | 63 |
| FIGURA 28 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA): 100 DÍGITOS | 63 |
| FIGURA 29 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS | 64 |
| FIGURA 30 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS | 64 |

| | | |
|-----------|---|----|
| FIGURA 31 | – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS . | 64 |
| FIGURA 32 | – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS | 65 |
| FIGURA 33 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) | 66 |
| FIGURA 34 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015)(BARRA) | 67 |
| FIGURA 35 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - P-HIERÁRQUICO (BARRA) | 67 |
| FIGURA 36 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) | 68 |
| FIGURA 37 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 69 |
| FIGURA 38 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 69 |
| FIGURA 39 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 70 |
| FIGURA 40 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 71 |
| FIGURA 41 | – BARRA FIXA-LIVRE | 71 |
| FIGURA 42 | – VIGA ENGASTADA | 72 |
| FIGURA 43 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 73 |
| FIGURA 44 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 74 |
| FIGURA 45 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 74 |
| FIGURA 46 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 75 |
| FIGURA 47 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 76 |
| FIGURA 48 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 76 |
| FIGURA 49 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 77 |
| FIGURA 50 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 78 |
| FIGURA 51 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 78 |
| FIGURA 52 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 79 |
| FIGURA 53 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 80 |
| FIGURA 54 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 80 |
| FIGURA 55 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 81 |
| FIGURA 56 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 82 |

| | | |
|-----------|--|----|
| FIGURA 57 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 82 |
| FIGURA 58 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 83 |
| FIGURA 59 | – BARRA FIXA-FIXA | 83 |
| FIGURA 60 | – VIGA BIAPOIADA | 84 |
| FIGURA 61 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 84 |
| FIGURA 62 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 85 |
| FIGURA 63 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 86 |
| FIGURA 64 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 86 |
| FIGURA 65 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 87 |
| FIGURA 66 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 88 |
| FIGURA 67 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 89 |
| FIGURA 68 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 90 |
| FIGURA 69 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 90 |
| FIGURA 70 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF G (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 91 |
| FIGURA 71 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 92 |
| FIGURA 72 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 92 |
| FIGURA 73 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 93 |
| FIGURA 74 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 94 |
| FIGURA 75 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 94 |
| FIGURA 76 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 95 |
| FIGURA 77 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA BARRA | 96 |
| FIGURA 78 | – NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA VIGA DE EULER BERNOULLI | 96 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----------|--|----|
| TABELA 1 | – MEFG (BARRA) | 66 |
| TABELA 2 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015)(BARRA) | 66 |
| TABELA 3 | – P-HIERÁRQUICO (BARRA) | 67 |
| TABELA 4 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA) | 68 |
| TABELA 5 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 68 |
| TABELA 6 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 69 |
| TABELA 7 | – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 70 |
| TABELA 8 | – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) | 70 |
| TABELA 9 | – MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 72 |
| TABELA 10 | – MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 73 |
| TABELA 11 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA .. | 74 |
| TABELA 12 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ . | 75 |
| TABELA 13 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 75 |
| TABELA 14 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 76 |
| TABELA 15 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 77 |
| TABELA 16 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 77 |
| TABELA 17 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 78 |
| TABELA 18 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 79 |
| TABELA 19 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 79 |
| TABELA 20 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 80 |
| TABELA 21 | – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 81 |
| TABELA 22 | – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGI- DEZ | 81 |
| TABELA 23 | – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 82 |
| TABELA 24 | – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 83 |
| TABELA 25 | – MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 84 |
| TABELA 26 | – MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 85 |
| TABELA 27 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA .. | 85 |
| TABELA 28 | – MEFG WEINHARDT <i>et al.</i> (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ . | 86 |
| TABELA 29 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 87 |
| TABELA 30 | – MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 87 |
| TABELA 31 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA | 88 |
| TABELA 32 | – MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 89 |
| TABELA 33 | – MEFG (VIGA) - MATRIZ DE MASSA | 90 |
| TABELA 34 | – MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 91 |
| TABELA 35 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 91 |
| TABELA 36 | – MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE | |

| | |
|--|----|
| RIGIDEZ | 92 |
| TABELA 37 – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 93 |
| TABELA 38 – MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGI- DEZ | 93 |
| TABELA 39 – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA | 94 |
| TABELA 40 – MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ | 95 |

LISTA DE SIGLAS

- MEF - Método dos Elementos Finitos
- MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizados
- MPU - Método da Partição da Unidade
- MC - Método Composto
- MMA - Método dos Modos Admissíveis

LISTA DE SÍMBOLOS

- A - matriz $n \times n$
- A^T - matriz transposta
- \bar{A} - matriz complexa conjugada
- A^H - matriz hermitiana $n \times n$
- A^{-1} - matriz inversa
- $A = A(x)$ - área de seção transversal
- B - matriz $n \times n$
- $B(u, v), F(u, v)$ - operador bilinear
- C_i - matriz companheira
- C^0 - espaço de funções que têm a primeira derivada contínua
- $E = E(x)$ - módulo de elasticidade
- H^h - espaço de aproximação n-dimensional
- I, Id - matriz identidade
- $I = I(x)$ - momento de inércia da área
- J - matriz Jacobiana
- K - matriz de rigidez
- L - matriz triangular superior
- L^* - matriz ortogonal à matriz L
- M - matriz de massa consistente
- N^T - vetor transposto que contém as funções de forma lineares do MEF

- $\mathcal{O}(\delta)$ - resto do polinômio de Taylor de primeira ordem
- $\mathcal{O}(\delta)^2$ - resto do polinômio de Taylor de segunda ordem
- P_m - polinômio de grau m
- X, Y - subespaços
- c - vetor de graus de liberdade de campo
- f - função real
- f' - derivada de primeira ordem da função f
- l - comprimento
- $p = p(x, t)$ - função força
- q - vetor de graus de liberdade nodais do elemento do MEF
- \mathbf{x} - autovetor
- $u(x, t)$ - função de deslocamentos axiais
- u_h - solução aproximada para o campo de deslocamentos
- u_{MEF} - componente do MEF no campo de deslocamentos
- u_{ENRIQ} - componente de enriquecimento no campo de deslocamentos
- $v(x), w(x)$ - funções teste
- \mathbb{C} - corpo dos complexos
- $\mathbb{C}^{n \times n}$ - corpo das matrizes complexas quadradas n -dimensionais
- \mathbb{F} - corpo
- $\mathbb{F}^{n \times n}$ - corpo das matrizes quadradas n -dimensionais
- \mathbb{R} - corpo dos reais
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ - corpo das matrizes reais quadradas n -dimensionais
- \mathbb{N} - corpo dos naturais
- λ - autovalor, parâmetro de acoplamento espaço tempo

- δ - erro
- $|\cdot|$ - norma euclidiana
- ρ - massa específica
- Ω - domínio
- ϕ_j - funções de base globais
- Φ - vetor das funções enriquecedoras

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 17 |
| 1.1 | OBJETIVOS | 18 |
| 1.1.1 | Objetivo Geral | 18 |
| 1.1.2 | Objetivos Específicos | 18 |
| 1.2 | RELEVÂNCIA DO TRABALHO | 19 |
| 1.3 | ESTRUTURA DO TRABALHO | 19 |
| 2 | REVISÃO DA LITERATURA | 20 |
| 2.1 | DO MEF AO MEFG | 20 |
| 2.2 | NÚMERO DE CONDIÇÃO E SENSIBILIDADE | 23 |
| 3 | ÁLGEBRA LINEAR | 27 |
| 3.1 | DEFINIÇÕES | 27 |
| 3.1.1 | Autovalores e autovetores | 27 |
| 3.1.2 | Subespaços invariantes | 28 |
| 3.1.3 | Matrizes Hermitianas | 29 |
| 3.2 | POLINÔMIOS MATRICIAIS | 31 |
| 3.2.1 | Matriz Companheira | 32 |
| 3.3 | MEDIDA DE CONDICIONAMENTO | 35 |
| 3.3.1 | Número de condição de sistemas de equações lineares | 37 |
| 4 | PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE | 39 |
| 4.1 | FORMA MATEMÁTICA | 39 |
| 4.1.1 | Barra | 39 |
| 4.1.2 | Viga Euler Bernoulli | 40 |
| 4.2 | MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) | 42 |
| 4.3 | MÉTODOS ENRIQUECIDOS | 43 |
| 4.3.1 | Métodos Enriquecidos para Barra | 44 |
| 4.3.1.1 | Método Composto | 45 |
| 4.3.1.2 | Refinamento Hierárquico do MEF - Polinômios de Lobatto | 45 |
| 4.3.2 | Métodos Enriquecidos para Viga de Euler Bernoulli | 47 |
| 4.3.2.1 | Método Composto | 47 |
| 4.3.2.2 | Elemento de viga de Bardell | 49 |
| 4.3.2.3 | Método dos Elementos Finitos p-Fourier | 50 |
| 4.4 | MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG) | 50 |
| 4.4.1 | Elemento finito de Barra | 51 |
| 4.4.2 | Elemento finito de Viga | 53 |
| 5 | ANÁLISE DE SENSIBILIDADE | 55 |
| 5.1 | PERTURBAÇÃO NUMÉRICA DAS MATRIZES | 56 |
| 5.2 | NÚMEROS DE CONDIÇÃO | 65 |
| 5.2.1 | Condição de contorno 1 | 71 |
| 5.2.2 | Condição de contorno 2 | 83 |
| 6 | CONCLUSÕES | 98 |
| | REFERÊNCIAS | 100 |

| | | |
|----------|------------------------------------|------------|
| 7 | POLINÔMIOS DE LOBATTO | 106 |
| 8 | POLINÔMIOS DE BARDELL | 107 |

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico aproximado largamente utilizado na análise estrutural, tanto para problemas estáticos como para problemas dinâmicos. O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é uma extensão do MEF visando obter melhores resultados para problemas com descontinuidades, singularidades ou outras situações onde o MEF necessita de uma malha mais refinada. O MEFG é baseado nas ideias do Método da Partição da Unidade (MPU), desenvolvido por Melenk e Babuska (1996).

No MPU, a base do subespaço de aproximações locais é constituída de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem informações disponíveis a priori sobre a solução da equação diferencial governante (MELENK; BABUSKA, 1996), garantindo uma boa aproximação local e global. A ideia de utilizar funções trigonométricas como base do subespaço vem crescendo ao longo dos anos, como nos trabalhos de Leung e Chan (1998), Zeng (1998-b) e Arndt (2009). Arndt (2009) aplica o MPU num conjunto específico de funções trigonométricas, gerando refinamentos h , p e adaptativo do MEFG para análise dinâmica de estruturas do tipo reticulado.

Por ser um método aproximado, as soluções obtidas podem apresentar erros de aproximação. Na aplicação proposta por Arndt (2009), encontram-se casos de sensibilidade da solução do problema apesar dos bons resultados. Verifica-se que os ajustes feitos na precisão empregada nos cálculos computacionais para determinação das matrizes de massa e rigidez por integração numérica, ou na solução do problema de autovalores, afetam a precisão e a convergência do MEFG. Leung *et al.* (2004) empregam, sem justificativa ou comprovação matemática, o número de condição da matriz de massa como uma medida dessa sensibilidade ao comparar o Método dos Elementos Finitos p -Fourier e o refinamento p -hierárquico do MEF.

Pode-se, certamente, afirmar que o número de condição de uma matriz A $\kappa(A)$, está diretamente ligado aos autovalores da mesma, já que por definição ele é a razão entre o maior e o menor autovalores da matriz A (COOK *et al.*, 2002). Logo, este número serve para medir o condicionamento de uma matriz. Quanto mais próximo da unidade, $\kappa(A) = 1$, maior a estabilidade do método utilizado (COOK *et al.*, 2002), ou ainda pode-se dizer que o problema é *bem condicionado*. Ainda é possível definir, de forma mais geral para o caso de sistemas de equa-

ções, que um problema é bem condicionado se pequenas perturbações nos dados de entrada resultam em pequenas perturbações nos resultados, ou dados de saída; caso contrário o problema é dito *mal condicionado*, esta mesma definição em algumas áreas de estudo da Mecânica Computacional é também conhecida como estabilidade do método. Considerando o fato que o problema de autovalores é um caso particular da teoria sobre polinômios matriciais, a questão de sensibilidade é um tópico ainda bastante discutido na literatura, como em Ford (2015).

Sendo assim este trabalho faz uma discussão sobre a análise do condicionamento e sensibilidade do problema de autovalores generalizado, gerado pela equação $Ax = \lambda Bx$, do MEFG. Segundo Stewart (1990), se uma matriz é hermitiana, e recebe uma perturbação, então haverá um incremento nos seus autovalores. Então no contexto da análise dinâmica, o estudo e análise das aproximações das matrizes de massa e rigidez é necessário, para descobrir até que ponto as perturbações geradas pelas aproximações do método de construção dessas matrizes podem influenciar no desempenho e precisão do MEFG na análise dinâmica de estruturas.

Os principais trabalhos que motivaram este estudo foram Arndt (2009), na parte da aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados para barras e vigas de Euler Bernoulli; e Tisseur (2000), Tisseur e Meerbergen (2001) que tratam da sensibilidade do problema generalizado de autovalores e a sua aplicação em problemas de vibração livre.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise do condicionamento, sensibilidade e perturbação do problema de autovalores generalizado, decorrente da aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados e outros métodos enriquecidos.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir o objetivo geral pretende-se:

- Fazer um levantamento sobre o número de condição e sensibilidade de problemas de autovalores generalizados.
- Calcular o número de condição para o problema gerado pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados e outros métodos enriquecidos.

- Analisar a perturbação gerada pelas aproximações numéricas das matrizes de massa e rigidez.

1.2 RELEVÂNCIA DO TRABALHO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados, além de ser muito usado apresenta excelentes resultados. Entretanto, a precisão empregada nos cálculos computacionais para determinar as matrizes de massa e rigidez através da integração numérica afetam a precisão e a convergência do método, causando grande sensibilidade ao problema. Assim, a investigação dos fatores que influenciam a sensibilidade do problema é imprescindível para estudo de formas mais estáveis do MEFG para aplicação na análise dinâmica de estruturas.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 trata de uma breve revisão da literatura sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), seguido do problema de autovalores generalizados e algumas aplicações/estudos. O capítulo 3 contém a formulação matemática do problema de autovalores generalizados. No capítulo 4 apresentam-se brevemente o Método dos Elementos Finitos Generalizados e alguns Métodos Enriquecidos. No capítulo 5 são apresentados alguns resultados numéricos. Por fim, no capítulo 6 apresentam-se as conclusões do trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 DO MEF AO MEFG

Na maioria dos problemas matemáticos relacionados a Engenharia, a resolução analítica oferece grandes dificuldades como, por exemplo, um grande conjunto de equações diferenciais com condições de contorno a serem solucionadas. Assim, uma alternativa não é a obtenção de solução analítica, e sim utilizar um método aproximado que substitui os infinitos graus de liberdade do modelo contínuo por um número finito de parâmetros a serem determinados, ou graus de liberdade de um modelo aproximado (SORIANO, 2009).

Antes do aparecimento do Método dos Elementos Finitos (MEF), a análise dos meios contínuos era realizada pela resolução direta dos sistemas de equações de derivadas parciais, tendo em conta as condições de fronteira, através das séries de Fourier (CARVALHO, 2010), por exemplo. Devido à complexidade para resolver as equações, o Método das Diferenças Finitas surgiu, permitindo utilizar aproximações no lugar das derivadas exatas. Com o aperfeiçoamento na solução de sistema das equações, o Método dos Elementos Finitos passou a existir, por volta dos anos 40 e 50 e, conseqüentemente, o Método dos Elementos de Contorno e diversos outros métodos foram desenvolvidos.

O MEF surgiu como uma evolução da análise matricial de modelos reticulados (SORIANO; LIMA, 2003). As primeiras aplicações do MEF foram concebidas na indústria aeronáutica britânica. Já nos anos 60, as aplicações na literatura se estenderam para problemas de eletromagnetismo. No final dos anos 80, início dos anos 90, devido ao desenvolvimento dos computadores pessoais, o MEF difundiu-se, pois a utilização desta ferramenta tecnológica facilita a aplicação do método, uma vez que, uma grande quantidade de cálculos é necessária para a resolução dos sistemas de equações lineares (SORIANO, 2009).

A principal ideia do MEF baseia-se em estudar o comportamento de cada elemento isolado, para depois acoplar estes elementos e então fazer o estudo global do sistema. Assim, no MEF o domínio de definição do modelo matemático é dividido em um número finito de subdomínios, interligados por um número finito de nós (ou pontos nodais), arestas e faces (SORIANO; LIMA, 2003); e então uma aproximação da solução local é feita para cada subdo-

mínio. Essa aproximação é dada por um arranjo de elementos finitos, constituindo uma malha, que deve ser pré-definida e com objetivo de estabelecer uma relação entre os nós.

Apesar do método ser robusto e muito prático, na aplicação em problemas que envolvam de alguma maneira mecânica dos sólidos, onde é mais popular, Torres (2008) mostra algumas limitações do método, tais como:

- quando manipulando grandes deformações, uma considerável precisão é perdida em virtude de distorções dos elementos;
- aproximações com malhas adaptativas têm sido propostas para manipulação destes tipos de problemas via MEF, situações estas em que o domínio do problema é remalhado em passos durante o processo de solução para prevenir distorções severas dos elementos e permitir que linhas nodais permaneçam coincidentes com os contornos das descontinuidades.

Essas limitações, aparentemente ligadas à geração das malhas, acabam encarecendo o custo computacional do método, motivando a busca por novas alternativas. Assim, em ordem cronológica, o Método dos Elementos Difusos, Método das Diferenças Finitas Generalizado e Método dos Mínimos Quadrados foram ganhando seu espaço na literatura (SORIANO, 2009).

O próximo método a ganhar destaque foi o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Ele foi inspirado no trabalho de Melenk e Babuska (1996) e outros trabalhos publicados posteriormente. O conceito principal é gerar espaços de aproximações fazendo uma combinação de um conjunto de funções quaisquer (desde que sejam linearmente independentes), multiplicando-as com as funções de base de uma Partição da Unidade. Essa combinação é chamada de enriquecimento.

A utilização das funções da Partição da Unidade, sobre a malha de elementos finitos, e o enriquecimento destas funções pelo mesmo esquema do método das nuvens-*hp*, justifica a interpretação de que o MEFG seja uma forma não convencional do MEF, que estabelece uma ligação entre o MEF e os métodos sem malha.

Essa estratégia permite que as aproximações locais tendam a ser flexíveis quanto a escolha do conjunto de funções enriquecedoras. Tal enriquecimento pode ser polinomial ou não, e a escolha depende do tipo de problema a ser modelado.

O método aplica-se à obtenção de soluções aproximadas de problemas de valor de contorno transformados em forma fraca por um Método de Resíduos Ponderados, Método de Galerkin por exemplo. Em problemas estáticos lineares, a aplicação da função aproximadora

gera um sistema de equações lineares onde as incógnitas são os valores nodais. Como o sistema pode ser escrito de forma matricial, a matriz gerada, chamada de matriz de rigidez, é dada pelos coeficientes do sistema.

A utilização deste método apresenta uma certa vantagem: o emprego das funções de forma do MEF como funções da partição da unidade. Esta vantagem, juntamente com o enriquecimento polinomial evita problemas relacionados com a integração numérica geralmente encontrados nos métodos sem malha (BARROS, 2002).

Com o desenvolvimento de estratégias para a melhoria dos métodos aproximados, o seu campo de aplicações se expande em diversas áreas, como por exemplo a acústica (HARARI, 2006), eletromagnetismo (LU; SHANKER, 2007), nanotecnologia (SCOTTI, 2007), mecânica da fratura (YAZID *et al.*, 2009), transferência de calor (ARAGÓN *et al.*, 2010), entre outras.

Consequentemente, novos métodos foram surgindo baseados no enriquecimento das funções de forma do MEF, como o Método Composto (MC), Método de Modos Admissíveis (MMA) e o Método dos Elementos Finitos p-Fourier. O Método Composto foi apresentado por Zeng (1998-b). Este método é obtido com a combinação do MEF juntamente com as funções não polinomiais relacionadas as soluções analíticas do problema.

Já o Método de Modos Admissíveis, foi proposto por Engels (1992) e Ganesan e Engels (1992). Uma de suas principais vantagens é a alta taxa de convergência. Este método propõe a expansão do espaço de aproximação de deslocamentos do MEF, com a combinação de dois modos: modos estáticos e modos admissíveis. O modo estático é formado pelas funções de forma polinomiais do MEF, já o modo admissível é formado por funções que representem de maneira analítica ou aproximada modos de vibrar do elemento analisado com extremidades vinculadas.

O Método dos Elementos Finitos p-Fourier proposto por Leung e Chan (1998), faz uso de termos da série de Fourier, e a sua justificativa parte do bom comportamento das séries, em comparação com o mau condicionamento apresentado por polinômios de grau mais elevado. Este método usa funções de enriquecimento baseadas nas séries de Fourier, de modo a serem nulas nos nós de cada elemento; assim como no MC e no MMA.

Esses métodos têm por objetivo aprimorar os problemas de aproximação em análise dinâmica. Como Bel *et al.* (2005) que apresentaram uma aplicação do Método da Partição da Unidade ao problema de vibração forçada em placas; da qual obtiveram uma boa acurácia e redução do tempo computacional, apesar das dificuldades encontradas em relação a busca da convergência e os erros de aproximação.

Com o objetivo de utilizar o MEFG como uma nova abordagem para obter melhores resultados do que o MEF na análise dinâmica de estruturas, Arndt *et al.* (2008), Arndt (2009) e Arndt *et al.* (2010) propõem novas formas de refinamentos p e adaptativo para o MEFG. Por exemplo, Arndt *et al.* (2008) apresentam um novo conjunto de funções de enriquecimento para o MEFG. Comparando os resultados obtidos com aqueles obtidos pelo Método Composto, que foi apresentado por Zeng (1998-b), verificou-se que o MEFG proposto obteve resultados superiores. Posteriormente, em Arndt (2009), pode-se constatar que as taxas de convergência para as aproximações das frequências naturais são maiores no MEFG do que no MEF polinomial.

Nos últimos anos, algumas versões do MEFG têm sido desenvolvidas e aplicadas com sucesso na análise dinâmica de estruturas, como nos trabalhos apresentados por Torii *et al.* (2015) e Weinhardt *et al.* (2015), que apresentam modificações nas funções apresentadas em Arndt (2009). Verifica-se, portanto, que vários autores mostram o quanto o MEFG por ser eficiente quando se trata de encontrar a solução numérica para problemas de vibrações livres. Entretanto, ao aplicar métodos numéricos na análise de vibrações livres de estruturas, o problema se reduz à solução numérica de um problema de autovalores e autovetores generalizado. Para resolver esse tipo de problema, existem vários algoritmos para encontrar os autovalores, mas verifica-se que os resultados desses algoritmos são muito sensíveis à precisão empregada nas aproximações numéricas utilizadas na determinação das matrizes de massa e rigidez. Autores como Hughes (1987), Demmel (1997), Parlett (1998), Quarteroni *et al.* (2007), entre outros, apresentam algoritmos para a solução deste problema.

As definições de sensibilidade e perturbação de um problema numérico estão diretamente ligadas, assim como o condicionamento do sistema. Assim, não há como abordar apenas um desses assuntos, que acabaram obtendo uma atenção especial pelos pesquisadores na últimas décadas. Por exemplo, Li (2012) utiliza uma interessante abordagem na análise do número de condição, investigando o comportamento assintótico dos números de condição para a matriz de rigidez e massa no MEFG do problema de autovalores generalizado. Nesse trabalho, o número de condição é relacionado com a dimensão do espaço de aproximação. O autor conclui que o número de condição está rigorosamente ligado à escolha da partição da unidade. Mais tarde, Li *et al.* (2013) investigam a influência do número de condição quando o sistema apresenta distintos e repetidos autovalores.

2.2 NÚMERO DE CONDIÇÃO E SENSIBILIDADE

Há tempos que o conceito de sensibilidade vem sendo discutido, assim como o uso do número de condição, definido como o quociente entre o maior e o menor autovalor de uma

matriz A , $\kappa(A) = \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$. O número de condição é utilizado como ferramenta quantitativa para descobrir se um problema de autovalor e autovetor padrão é ou não sensível as condições impostas. Wilkinson (1965) introduziu o número de condição de uma matriz A , fazendo uma discussão sobre sua sensibilidade e perturbação gerada pelos algoritmos utilizados para encontrar os autovalores a direita e a esquerda. Wilkinson também usa a abordagem da matriz companheira, para determinar o condicionamento relacionado aos autovalores a esquerda. Ele também introduz o condicionamento de um sistema linear, deixando clara a importância da relação entre o condicionamento do sistema e a sua solução. Faz também uma relação entre um problema de autovalor generalizado e um problema padrão.

Dois anos depois, Smith (1967) publicou uma expressão explícita do número de condição utilizando matrizes reduzidas à forma canônica de Jordan, onde ele se deparou com a dificuldade na análise numérica no caso de autovalores repetidos. A título de curiosidade, a alternativa utilizada para encontrar os autovalores foi através do determinante de Gram. No ano seguinte, Martin e Wilkinson (1968) discutiram o número de condição reduzido à forma padrão, $Ax = \lambda x$, verificando que o problema generalizado com matrizes simétricas e o problema padrão são equivalentes a menos de uma decomposição, haja vista que deve-se tomar cuidado com a inversão da matriz, pois ela pode causar perturbações nos autovalores. Ainda neste ano, Clint e Jennings (1968) desenvolvem um algoritmo com o objetivo de encontrar autovalores e autovetores reais de maneira iterativa; este processo baseou-se nos trabalhos que Wilkinson desenvolvia até então, onde os autovalores eram encontrados a partir da redução da matriz em uma matriz triangular. Considerando o problema generalizado, $Ax = \lambda Bx$, com matrizes Hermitianas, Stewart (1969) discute como encontrar os autovetores utilizando um método iterativo para fazer a decomposição em matrizes ortogonais.

Com as ferramentas para a decomposição de matrizes desenvolvidas nos últimos anos, o assunto sobre a sensibilidade dos problemas de autovalores começa a ser amplamente discutido, assim como os conceitos de bem e mal condicionados, decorrentes da perturbação que os métodos de decomposição de matrizes geram afetando o problema.

Ruhe (1970-a) abre uma discussão sobre propriedades de matrizes de problemas de autovalores com mal condicionamento, considerando o fato que a matriz apresenta múltiplos autovalores e estes são próximos entre si. A. Ruhe, no mesmo ano, lança mais um trabalho, Ruhe (1970-b), onde limita a perturbação gerada nos autovalores e o subespaço dos autovetores. Esses limites podem ser utilizados tanto para obter os limites de erros a posteriori em um conjunto de autovalores próprios e, também, para autovetores, quanto para estabelecer quando essas quantidades dependem dos elementos da matriz de uma maneira numericamente estável.

Wilkinson e Reinsch (1971) fazem uma série de discussões sobre como decompor matrizes, considerando inúmeros casos e, a partir de então, algumas aplicações de algoritmos são feitas. O interessante é que este trabalho considera o caso do problema de autovalores generalizado $Ax = \lambda Bx$, e uma das hipóteses considerada é quando a matriz B é simétrica. Sob essas condições mostram que é possível decompor a matriz B de maneira a recair em um problema padrão $Ax = \lambda x$.

Nos anos seguintes, Stewart (1971) e Wilkinson (1972), usaram o número de condição para limitar o domínio do espectro, e isto é possível pois, para as matrizes Hermitianas o subespaço invariante correspondente a um conjunto de valores próprios é insensível a estas perturbações (STEWART, 1971). Wilkinson (1972) usa essa abordagem como justificativa do mal condicionamento do sistema, com matrizes que possuem autovalores múltiplos.

Pensando numa nova perspectiva, Stewart (1973) descreve uma técnica para delimitar erro e perturbação do problema de autovalor generalizado e outros casos; aplicou-se um método iterativo que foi usado na construção de estimadores de perturbação que possam ser limitados.

Em uma tentativa de determinar quando um problema de autovalor é bem condicionado, levando em consideração quando a matriz A é "defeituosa", isto é, quando a matriz reduzida a forma canônica de Jordan não é estritamente diagonal, Golub e Wilkinson (1976) utilizam a ideia de redução à forma canônica de Jordan, para calcular o condicionamento nas bases (usualmente ortonormais) dos espaços invariantes.

Obviamente, quando se está trabalhando com espaços, a teoria de sensibilidade ou perturbação, depende de uma norma adequada ao espaço que se está considerando. Hager (1984) estima o número de condição utilizando outras normas, em particular dando enfoque a norma l_1 e l_∞ , pois geralmente quando calcula-se o número de condição, definido mais adiante neste trabalho também como sendo $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, a norma euclidiana é a mais utilizada. Mesmo fazendo uso de outra abordagem para calcular o número de condição, o autor se depara com os mesmos problemas encontrados quando se utiliza a norma euclidiana, calcular a componente $\|A^{-1}\|$, mesmo utilizando as relações de equivalência entre as normas oferecidas pela análise funcional.

No mesmo ano, Bunse-Gerstner (1984) abordam o problema de autovalores generalizado com matrizes simétricas e com a matriz B semi-positiva definida, reduzindo as matrizes para matrizes diagonais e preservando as propriedades do problema (fazendo uso do algoritmo QR). Teoricamente, a análise do número de condição foi ganhando sua importância com o decorrer dos anos, sendo estudada por autores como Schock (1986), Loan (1987), Renegar (1994), Dedieu (1997), entre outros.

O número de condição fornece uma estimativa de quão sensível o problema pode ser, implicando que existe perturbação na solução e na inversão da matriz, é o que Higham (1995) afirma, mostrando o comportamento do número de condição com suas determinadas restrições para o problema de autovalores padrão. Como a inversão da matriz é um fator influenciador, outra abordagem é testada, onde os algoritmos para a decomposição de matrizes são avaliados, levando-se em consideração a convergência do método, onde foram comparados alguns algoritmos e levando em consideração a perturbação gerada, (STEWART, 1993).

Mais recentemente, Tisseur (2000) utiliza a abordagem de polinômio matricial, já que um problema de autovalores generalizado nada mais é do que um caso particular deste, para fazer uma estimativa de erro e calcular o número de condição do polinômio. Uma outra alternativa, é trabalhar com polinômios quadráticos, como é possível encontrar nos trabalhos de Tisseur e Meerbergen (2001), e Papathanasiou e Psarrakos (2010) de maneira que essa abordagem pode ser aplicada em problemas de vibração livre com amortecimento. Papathanasiou e Psarrakos (2010), além de utilizarem a abordagem do polinômio quadrático, empregam o conceito de matriz companheira, para calcular os autovalores e autovetores, além da análise do número de condição nos casos em que os autovalores são simples e repetidos. Essa abordagem permitiu aplicações em vibração livre, no caso de sistemas com amortecimento (LI *et al.*, 2013), e em elementos finitos (LI, 2012; SUAREZ *et al.*, 2015).

O tema condicionamento de problemas de autovalores e autovetores, ou de uma certa matriz, vem sendo objeto de estudo há tempos e, com os recentes trabalhos sobre problemas de autovalores aplicados em problemas quadráticos de vibração livre, é possível também aplicar ao caso sem amortecimento. Mas, inicialmente, deve-se entender em que momento do processo na aplicação do MEF e MEFG estão localizadas as perturbações, para então poder fazer um estudo sobre o condicionamento (e se é possível aplicar um dos métodos já estudados).

3 ÁLGEBRA LINEAR

Este capítulo tem por objetivo explorar propriedades da álgebra linear relacionadas ao problema de autovalor generalizado, $Ax = \lambda Bx$, e do seu caso particular o problema padrão, $Ax = \lambda x$, tais como autovalores, autovetores, subespaços, entre outros. Pretende-se assim verificar que estes problemas de autovalores podem ser considerados como um caso particular de polinômios matriciais.

3.1 DEFINIÇÕES

3.1.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, e $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ um corpo real ou complexo. O espaço de matrizes com n linhas e m colunas é denotado por $\mathbb{F}^{n \times m}$. Sejam $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Börn e Mehl (2012) definem λ um *autovalor* de A , se existe um vetor $x \in \mathbb{F}^n - \{0\}$ tal que a equação

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

seja resolvida. O vetor x é chamado de *autovetor* de A para o autovalor λ . O par (λ, x) que consiste em um autovalor e o correspondente autovetor é chamado de *auto-par*. E o conjunto

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \lambda \text{ é um autovalor de } A\} \quad (2)$$

é chamado de *espectro* de A .

Na literatura, encontra-se a definição de autovalores e autovetores de várias maneiras, todas análogas à definição anterior, sendo uma delas através da matriz transposta, como indicado por Börn e Mehl (2012):

$$A^T y = \lambda y \quad (3)$$

onde os autovalores são encontrados através da equação:

$$\det(A^T - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

e, por propriedades de álgebra linear, tem-se que o determinante da matriz e a sua correspon-

dente transposta, tem por característica obter os mesmos autovalores. Sendo assim a equação (3) pode ser reescrita da forma

$$y^T A = \lambda y^T. \quad (5)$$

Nesse caso, y é chamado de *autovetor à esquerda* de A , seguindo que x seria o *autovetor à direita* de A , com a propriedade de que estes são ortogonais:

$$x^T y = 0 \quad (6)$$

Salienta-se que, até agora, o caso considerado foi do problema padrão, $Ax = \lambda x$. Já para o caso generalizado, $Ax = \lambda Bx$, apesar de não ser muito diferente, Bai *et al.* (2000) definem os autovalores através da solução da equação:

$$\det(\lambda B - A) = 0 \quad (7)$$

E, como anteriormente, se é possível determinar autovetores à esquerda e à direita para o problema padrão, então existem autovetores à direita e à esquerda para o problema generalizado: Seja x um vetor não nulo satisfazendo $Ax = \lambda Bx$, então x é um *autovetor à direita*. Se x^* satisfaz $x^*A = \lambda x^*B$, então ele é chamado de *autovetor à esquerda*.

É conveniente introduzir as definições que serão de grande uso: Sejam λ_i 's autovalores da matriz A , então:

- Se $\lambda_i > 0 \forall i$, então A é *definida positiva*;
- Se $\lambda_i \geq 0 \forall i$, então A é chamada de *semi-definida positiva*;
- Se $\lambda_i < 0 \forall i$, então A é *definida negativa*;
- Se $\lambda_i \leq 0 \forall i$, então A é *semi-definida negativa*;
- A matriz A é *indefinida* quando existem autovalores positivos e negativos.

3.1.2 SUBESPAÇOS INVARIANTES

Um subespaço nada mais é do que um corpo \mathbb{F} não vazio o qual é fechado para soma de vetores e a multiplicação por escalar. Quando os subespaços são subespaços de matrizes, geralmente trata-se dos corpos $\mathbb{C}^{n \times n}$ e $\mathbb{R}^{n \times n}$ (WATKINS, 2007).

Um *subespaço invariante* X de A satisfaz a propriedade:

$$Ax \in X \quad \forall x \in X \quad (8)$$

que pode ser denotado por $AX \subseteq X$, este conceito pode ser encontrado facilmente em livros de álgebra linear, como em Börn e Mehl (2012).

Um exemplo simples de subespaço invariante é o espaço dos autovetores de uma matriz, assim como o espaço gerado por um único autovetor.

Proposição 01 Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, seja X um subespaço k -dimensional de F^n tal que $S \subset \mathbb{F}^{n \times k}$ matriz onde $X = \text{Img}(S)$. Então:

- X é um subespaço sobre A se, e somente se, existe uma matriz $B \in \mathbb{F}^{k \times k}$ tal que

$$AS = SB \quad (9)$$

- Se a equação (9) é válida, então todo autovalor de B é autovalor de A . Se v é um autovetor de B , através do autovalor λ , então Sv é autovetor de A com autovalor λ .
- Se a equação (9) é válida e as colunas de S são ortonormais, então $B = S^T AS$.

A prova desta proposição pode ser encontrada em Börn e Mehl (2012). Os autovalores relacionados a equação (9) são chamados de autovalores de A associados ao espaço invariante X . Uma das principais vantagens de se trabalhar com espaços de matrizes invariantes é que eles preservam as características dos operadores.

3.1.3 MATRIZES HERMITIANAS

Define-se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz Hermitiana se

$$\bar{A}^T = A \quad (10)$$

onde \bar{A} é a matriz conjugada de A ; ou seja, se B é a matriz conjugada de A , então $b_{ij} = \bar{a}_{ij} \quad \forall a_{ij} \in \mathbb{C}$. Para o caso real, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, define-se A uma matriz Hermitiana quando $A = A^T$, isto é, a matriz A é simétrica (também podendo ser chamada de auto-adjunta). Na literatura geralmente \bar{A}^T é denotada por A^H , como em Wilkinson (1965). Essa notação é adotado para este trabalho. Algumas propriedades das matrizes Hermitianas: sejam A, B, C matrizes Hermitianas e x um vetor. Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A^H)^H = A \\ (x^H)^H = x \\ (ABC)^H = C^H B^H A^H \end{array} \right. \quad (11)$$

Outra propriedade das matrizes Hermitianas extremamente importante, é que seus au-

tovalores são reais, e a verificação é simples: se

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x^H Ax = \lambda x^H x \quad (12)$$

onde $x^H x$ é real e positivo para elementos não nulos (WILKINSON, 1965). Sendo assim, se A é Hermitiana:

$$(xAx^H)^H = x^H A^H x^{HH} = x^H Ax \quad (13)$$

pelas propriedades de conjugação complexa, ($\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$ e $\overline{\bar{a}} = a$); e como $x^H Ax$ é um escalar, isto significa que é real, conseqüentemente, λ é real. No caso de matrizes reais, sabe-se que os autovalores são reais implicando que seus autovetores são reais. Entretanto os autovetores de matrizes Hermitianas geralmente são complexos. Se for considerado o problema padrão $Ax = \lambda x$ com A matriz Hermitiana, segue que:

$$A^H x = \lambda x \Leftrightarrow A^T \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (14)$$

onde \bar{x} é a conjugação complexa ($x = a + ib \Rightarrow \bar{x} = a - ib$). Como já mencionado, os autovetores de matrizes Hermitianas geralmente são complexos e o seu conjugado coincide com o próprio autovetor, ou seja, $x_i = \bar{x}_i$. Pelas propriedades de matrizes Hermitianas, no caso de ter autovalores distintos, seus respectivos autovetores satisfazem:

$$x_i^H x_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (15)$$

tomando a norma dos autovetores segue que

$$x_i^H x_i = 1 \quad (16)$$

Logo os autovetores são ortonormais. Conseqüentemente, se for considerada a matriz X formada pelos autovetores de A , então

$$X^H X = I \Leftrightarrow X^H = X^{-1} \quad (17)$$

As matrizes que satisfazem essa propriedade, são chamadas de *matrizes unitárias*. E se elas forem reais, são chamadas de *matrizes ortogonais*.

Suponha X e Q matrizes unitárias. Se a matriz for real, como visto anteriormente, ela é uma matriz ortogonal. Seja $B = X^H A X$, Bai *et al.* (2000) afirmam que B é *unitariamente (ortogonalmente) equivalente* a A ; e X é uma *transformação unitária (ortogonal) equivalente*. Se a matriz A for Hermitiana, então B também será Hermitiana e elas tem os mesmos autovalores. De uma maneira análoga, se y é um autovetor de B , então $x = Qy$ é o autovetor original da matriz A , onde Q é uma matriz unitária.

Agora considerando o caso do problema generalizado de autovalores: seja X uma matriz não singular, i.e. $\det(X) \neq 0$. Sejam $\hat{A} = X^H A X$ e $\hat{B} = X^H B X$, Bai *et al.* (2000) afirmam que $\hat{A} - \lambda \hat{B}$ é congruente a $A - \lambda B$, e denomina-se X uma *transformação congruente*. E ainda, se A e B são matrizes Hermitianas, e B é definida positiva, então \hat{A} e \hat{B} tem as mesmas propriedades que A e B . Além disso, $\hat{A} - \lambda \hat{B}$ e $A - \lambda B$ tem os mesmos autovalores, e se x é autovetor de $A - \lambda B$, tal que $Ax = \lambda Bx$, então $\hat{x} = X^{-1}x$ é autovetor de $\hat{A} - \lambda \hat{B}$.

Essas propriedades apresentadas garantem que a menos de um operador agindo em matrizes Hermitianas, pode-se recair em um caso mais simples, para encontrar os autovalores e autovetores das matrizes. Pode-se ainda garantir que é possível transformar um problema de autovalor generalizado, $Ax = \lambda Bx$, em um problema padrão, $Ax = \lambda x$. Se as matrizes A e B são Hermitianas e B é definida positiva, então pode-se decompor B como produto de matrizes não singulares, $B = LL^*$, através da Decomposição de Cholesky, por exemplo. Assim o problema se transforma em:

$$(L^{-1}A(L^*)^{-1})\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (18)$$

Como os espaços do domínio são invariantes (GOLUB; LOAN, 2012), as propriedades são preservadas após a transformação, isto é, os autovalores são os mesmos; e se \bar{x} é autovetor da equação (18), então $x = (L^*)^{-1}\bar{x}$ satisfaz o problema generalizado.

Um problema de autovalor generalizado, pode ser bem condicionado ou mal condicionado. Quando a matriz A é Hermitiana e trata-se de um problema padrão, então este é um problema bem condicionado (BAI *et al.*, 2000). A situação muda completamente quando o problema é generalizado, que em geral é mal condicionado, principalmente quando as matrizes não são Hermitianas (BAZÁN, 2003).

Portanto, quando um problema de autovalores generalizado tem as matrizes A e B Hermitianas e B é definida positiva; então este é um problema bem condicionado, porque pode ser reduzido a um problema padrão, com mesmos autovalores e que por sua vez é bem condicionado.

3.2 POLINÔMIOS MATRICIAIS

A teoria de polinômios matriciais nada mais é do que uma generalização de equações do tipo $(A - \lambda I)x = 0$. Assim esta seção mostra algumas definições e propriedades importantes sobre tal assunto. Segundo Börn e Mehl (2012), um polinômio matricial é definido por

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^m t^k A_k \quad (19)$$

onde $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, onde os coeficientes são as matrizes $A_k \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e $A_k \neq 0$ (matriz nula). Se P é um polinômio matricial $n \times n$ sobre um corpo \mathbb{F} de ordem m , então um *problema de autovalor polinomial* é definido como

$$P_m(\lambda)x = 0 \quad (20)$$

onde $\lambda \in \mathbb{F}$ e $x \in \mathbb{F}^n$. Na literatura ele também pode ser encontrado como λ -matriz, ou seja, $P_m(\lambda)$ é uma matriz quadrada cujas entradas são polinômios escalares de grau menor ou igual a m . Se A_m é a matriz identidade, então P_m é chamado de polinômio mônico. Encontrar escalares $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\det(P(\lambda)) = 0$, é uma das principais dificuldades encontradas nesses problemas. Um exemplo de que essa não é uma tarefa muito simples é o polinômio: $I\lambda^2 + A_0$, já que o Teorema Fundamental da Álgebra não garante a sua existência (BAZÁN, 2003).

Os escalares λ são chamados de *autovalores do polinômio matricial*. Então, a cada autovalor λ associa-se um vetor $x \in \mathbb{F}^n$, $x \neq 0$, tal que

$$P_m(\lambda)x = 0 \quad (21)$$

chamado *autovetor à direita* de $P_m(\lambda)$ e $\{\lambda, x\}$ é chamado de *auto-par*. De maneira análoga, *autovetor à esquerda* de $P_m(\lambda)$, é um vetor $y \in \mathbb{F}^n$, $y \neq 0$ tal que

$$y^H P_m(\lambda) = 0 \quad (22)$$

O problema de encontrar os auto-pares do polinômio matricial é conhecido como problema de autovalores polinomial matricial. Observando-se que se $m = 1$ e $n > 1$, o problema de autovalor matricial acima recai em um *problema de autovalor generalizado* da forma $Ax = \lambda Bx$, e que se $B = I$ este é um *problema de autovalor padrão*.

3.2.1 MATRIZ COMPANHEIRA

O uso de polinômios matriciais pode ser conveniente quando trata-se do problema de autovalores, pois este pode ser reduzido a um problema generalizado com matrizes de ordem mn ; onde para cada polinômio matricial mônico pode-se associar uma *matriz companheira* em blocos definida como:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{m-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

onde as matrizes A_i são os coeficientes dos polinômio matricial mônico associado.

Segundo Bazán (2003), a justificativa para essa associação, é que se (λ, x) é auto-par de $P_m(\lambda)$, e se $\hat{x} \in \mathbb{C}^{mn}$ é autovetor definido por:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \\ \vdots \\ \lambda^{m-2}x \\ \lambda^{m-1}x \end{bmatrix} \quad (24)$$

então (λ, \hat{x}) é auto-par de C_1 . De fato,

$$C_1 \hat{x} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda^2 x \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} x \\ \sum_{k=1}^m A_{k-1} \lambda^{k-1} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda^2 x \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} x \\ \lambda^m x \end{bmatrix} = \lambda \hat{x} \quad (25)$$

sendo assim, os autovalores de $P_m(\lambda)$ podem ser calculados a partir da abordagem da matriz companheira, utilizando-se métodos numéricos para o problema de autovalor padrão, o que se apresenta como uma maneira simples para a solução do problema de autovalores. O polinômio linear $C_1 - \lambda I$ é chamado de *linearização* de $P_m(\lambda)$.

De maneira análoga, uma outra linearização do polinômio $P_m(\lambda)$ pode ser obtida através da matriz companheira definida por:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & -A_1 \\ 0 & I & \cdots & 0 & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & -A_{m-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Da qual, suponha que (λ, \hat{x}) seja auto-par de C_2 , e decompondo \hat{x} em blocos, tal que:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad (27)$$

para $x_k \in \mathbb{C}^n, \forall k$, segue:

$$C_2 \hat{x} = \lambda \hat{x} \Leftrightarrow \begin{cases} -A_0 x_m & = & \lambda x_1 \\ x_1 - A_1 x_m & = & \lambda x_2 \\ & \vdots & \\ x_{m-2} - A_{m-2} x_m & = & \lambda x_{m-1} \\ x_{m-1} - A_{m-1} x_m & = & \lambda x_m \end{cases} \quad (28)$$

Esta última equação garante que $x_m \neq 0$, para que \hat{x} não seja o vetor nulo. Com algumas manipulações simples, \hat{x} pode ser reescrito como:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 + A_2 \lambda + \dots + A_{m-1} \lambda^{m-2} + \lambda^{m-1}) x_m \\ (A_2 \lambda + \dots + A_{m-1} \lambda^{m-3} + \lambda^{m-2}) x_m \\ \vdots \\ (A_{m-1} + \lambda) x_m \\ x_m \end{bmatrix} \quad (29)$$

Assim, a equação (28) combinada com x_1 da equação (29), garante que $P_m(\lambda)x_m = 0$; isto é, x_m é autovetor à direita de P_m , e (λ, \hat{x}) é auto-par de C_2 .

A linearização quando $P_m(\lambda)$ não é um polinômio mônico também é possível; primeiramente considere o caso de que A_m não seja singular. Então basta tomar $\hat{A}_k = A_m^{-1} A_k$, para $k = 1, \dots, m-1$; e assim as duas linearizações descritas anteriormente podem ser aplicadas. Agora quando A_m é singular, o problema de autovalores polinomial matricial pode ser resolvido através da equação $Ax = \lambda Bx$, de maneira que as matrizes A e B possam ser escritas utilizando as definições de matriz companheira, (BAZÁN, 2003) da forma:

$$A - \lambda B = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{m-1} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Obviamente que os auto-pares são da forma (λ, \hat{x}) , com \hat{x} dado da forma da equação (24) e que os escalares λ são os autovalores de $P_m(\lambda)$. Pode-se definir a matriz companheira de

um polinômio $P_m(\lambda)$ de ordem $nm \times nm$ como:

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ -A_m^{-1}A_0 & -A_m^{-1}A_1 & \cdots & -A_m^{-1}A_{m-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

É notável que todo o algoritmo tem seu custo tanto computacional quanto de precisão, podendo gerar o mal condicionamento no problema. Uma das maneiras mais eficientes de resolver o problema de autovalores é através da decomposição obtida utilizando as matrizes ortogonais, que para o caso de matrizes Hermitianas é possível como comentado anteriormente. A abordagem mais utilizada para fazer a decomposição é a Decomposição de Schur Generalizada, que tem por objetivo fornecer os autovalores do problema de autovalor generalizado.

Teorema 1[Decomposição de Schur Generalizada] Seja $P(\lambda) = A - \lambda B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então existem matrizes ortogonais Q e Z , e matrizes triangulares superiores T e S , tais que

$$Q^H A Z = T \text{ e } Q^H B Z = S$$

Além disso, se para algum k , $t_{kk} = s_{kk} = 0$, então $\Lambda(P(\lambda)) = \mathbb{C}$, caso contrário

$$\Lambda(P(\lambda)) = \left\{ \frac{t_{ii}}{s_{ii}}, s_{ii} \neq 0 \right\}$$

onde $\Lambda(P(\lambda))$ é o espectro de $P(\lambda)$. Esse teorema e sua demonstração podem ser encontrados em Golub e Loan (2012).

3.3 MEDIDA DE CONDICIONAMENTO

É desejável ter um número que defina a condição de uma matriz com respeito ao problema computacional, e este é chamado de *número de condição*. A ideia é medir o quanto as mudanças nos dados afetam a solução. Visto que os autovalores podem ser encontrados de várias maneiras a questão que surge então é: como medir o condicionamento de um problema. Além do mais, pode-se encontrar diferenças nos autovalores devido ao algoritmo utilizado na sua determinação.

De um ponto de vista teórico, pode-se idealizar o problema tratado como uma função $f : X \rightarrow Y$, onde X, Y são espaços normados. Assim, para cada $x \in X$, $\exists y \in Y$, tal que $y = f(x)$.

Levando-se em consideração o caso real, para $X = Y = \mathbb{R}$, segue pela aproximação de Taylor que uma perturbação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + \mathcal{O}(\delta x)^2 \quad (32)$$

desde que f seja diferenciável. Como a variação de $|\delta y|$ está relacionada com a $|f'(x)|$, pode-se reescrever a expressão acima como:

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{xf'(x)}{f(x)} \cdot \frac{\delta x}{x} + \mathcal{O}(\delta x) \quad (33)$$

ou seja, a variação relativa de y , devido aos erros em x depende de $\left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$.

Com isso, define-se o *número de condição*, κ , para o caso real, como

$$\kappa(f)(x) = \begin{cases} |f'(x)|, & \text{para erros absolutos} \\ \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|, & \text{para erros relativos} \end{cases} \quad (34)$$

Este número permite medir o condicionamento do problema. De maneira análoga, quando toma-se $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$, para m, n arbitrários, a função F é dada como $f_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, n$ onde

$$y = f(x) \Leftrightarrow y_j = f_j(x_1, \dots, x_m) \quad (35)$$

Agora, seja $\delta y_j = f_j(x + \delta x) - f_j(x)$. Pelo teorema de Taylor tem-se

$$\delta y_j = f_j(x + \delta x) - f_j(x) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \delta x_i \quad (36)$$

No que segue,

$$|\delta y_j| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \right| |\delta x_i| \leq \max_i |\delta x_i| \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \right| \leq \max_i |\delta x_i| \max_j \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \right|. \quad (37)$$

Tomando a norma infinito, segue que

$$\|\delta y\|_\infty \leq \|\delta x\|_\infty \|Jf\|_\infty \quad (38)$$

onde Jf é a matriz Jacobiana de f , δx e δy são as perturbações geradas pela aproximação de Taylor. Bazán (2003) alerta que a definição do número de condição acima, pode superestimar ou subestimar a sensibilidade do problema. Dessa forma, para os casos como o descrito acima,

define-se do número de condição como

$$\kappa(f_j)(x_i) = \frac{\left| x_i \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \right|}{|f_j|} \quad (39)$$

Claramente, esta definição gera uma matriz de números de condição para cada variação i, j . Dessa forma para obter um número de condição global, basta tomar a norma desta matriz, o que é abordado adiante.

3.3.1 NÚMERO DE CONDIÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz, e um vetor b , considerando que o sistema de equações lineares é de primeira ordem, $Ax = b$, tem-se $x = f(b) = A^{-1}b$, onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consequentemente verifica-se que a Jacobiana de Bazán (2003), nesse caso, é dada por $Jf(b) = A^{-1}$.

Dessa maneira, segue que, pelos resultados anteriores, o *número de condição da matriz* A , denotado por $\kappa(A)$, é dado por (BAZÁN, 2003):

$$\kappa(f)(b) = \frac{\|b\| \|A^{-1}\|}{\|x\|} = \frac{\|b\| \|A^{-1}\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \quad (40)$$

onde usualmente a norma utilizada é a Euclidiana. Note-se que a definição acima pode ser sensível a perturbações caso $\|A^{-1}\|$ seja grande, por isso é imposto um limite, por uma cota superior.

Definição 1: O número $\|A\| \|A^{-1}\|$ é conhecido como *número de condição* da matriz A , e denotado por $\kappa(A)$.

A definição acima é utilizada por diversos autores, como Bazán (2003) e Ford (2015). Nitidamente, o número de condição satisfaz algumas propriedades que são:

Teorema 2: Seja A uma matriz não-singular, então:

1. $\kappa(A) \geq 1$ para qualquer p-norma.
2. $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$, para qualquer constante $\alpha \neq 0$.
3. Seja A uma matriz ortonormal, então $\kappa(A) = 1$ se, e somente se, $A^T A = \alpha I$, para $\alpha \neq 0$.
4. $\kappa(A^T A) = (\kappa(A))^2$.
5. $\kappa(A) = \kappa(A^T)$ e $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$, (norma 1 e infinito).

$$6. \kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B).$$

$$7. \kappa(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \text{ onde } \lambda_{max} \text{ e } \lambda_{min} \text{ são, respectivamente, o maior e menor autovalores da matriz } A.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em Ford (2015). Muitos autores como Cook *et al.* (2002), Leung e Zhu (2004), Saad (2011) e Wilkinson (1965) adotam como definição do número de condição o item 7 do teorema anterior.

A propriedade item 1 do teorema, afirma a estabilidade que Shang (2014) define como sendo o bom condicionamento de uma matriz, $\kappa(A) = 1$, e esta definição é adotada por diversos autores, pois conclui-se que quanto maior o número de condição mais sensível a matriz será.

Diferentemente de outros autores, Papathanasiou e Psarrakos (2010) definem o número de condição de um autovalor simples, fazendo uso da abordagem da matriz companheira, como sendo:

$$\kappa(C_p, \lambda_0) = \frac{\|\chi_0\| \|\psi_0\|}{|\overline{\psi_0} \chi_0|} \quad (41)$$

onde $\chi_0, \psi_0 \in \mathbb{C}^n$ são os autovetores à esquerda e à direita, respectivamente; λ_0 é um autovalor simples, e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana do vetor. E assim, o número de condição, para o caso de polinômios matriciais será

$$\kappa(P, \lambda_0) = \frac{w(|\lambda_0|)}{\|\chi_0\| \|\psi_0\|} \kappa(C_p, \lambda_0) \quad (42)$$

para $w(\lambda) = w_m \lambda^m + w_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + w_0$ uma função peso sobre a perturbação gerada sobre o autovalor λ_0 . Para o caso de autovalores múltiplos, o número de condição é definido como

$$\kappa(P, \lambda_0) = w(|\lambda_0|) \|\hat{X} \hat{Y}\| \quad (43)$$

onde \hat{X}, \hat{Y} são as matrizes dos autovalores à direita e esquerda respectivamente.

Pode-se perceber que, com as ferramentas expostas até agora, não há uma maneira específica para calcular o número de condição para problemas de autovalores generalizado. A alternativa consiste em enquadrar o problema em uma das alternativas propostas anteriormente.

4 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE

Este capítulo tem por objetivo apresentar conceitos sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF), Métodos Enriquecidos e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), para solução dos problemas de vibração livre de barras e vigas de Euler Bernoulli.

4.1 FORMA MATEMÁTICA

Esta seção está direcionada para apresentar a forma fraca de Galerkin dos problemas de vibração livre de barras e vigas de Euler Bernoulli.

4.1.1 BARRA

Inicialmente, considere-se uma barra ou eixo de comprimento l e área transversal A , com a hipótese de que as seções transversais planas e normais ao eixo continuam planas após a deformação, e o material tem comportamento linear, elástico e homogêneo. Assim, a equação diferencial governante para o problema dinâmico, é dada por

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x, t) \quad \forall x \in \Omega = [0, l] \quad (44)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ρ é a massa específica, p é a força axial aplicada, t é o tempo, a função $u(x, t)$ são os deslocamentos axiais e o domínio do problema é $\Omega = [0, l]$.

Para obter a forma fraca, a abordagem utilizada é fazer uso das funções testes, como abordado em Arndt (2009). Assim, multiplicando a equação acima por uma função teste $v(x)$ e integrando no domínio, segue

$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v d\Omega = \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega - \int_{\Omega} p(x, t) v d\Omega \quad \forall x \in \Omega = [0, l] \quad (45)$$

Integrando por partes e particularizando o problema para o caso de vibração livre, onde

$p(x, t) = 0$, segue que

$$\rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx - \left(v EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_0^l + EA \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0 \quad (46)$$

De acordo com Arndt (2009), a vibração livre de uma barra uniforme transforma-se em um problema de autovalores na forma variacional: encontrar um par (λ, u) com $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo as condições de contorno e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$EA \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - E \left(vA \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^l - \rho \lambda A \int_{\Omega} u v dx = 0 \quad (47)$$

para funções testes admissíveis $v \in H^1(0, l)$ e $\lambda = \omega^2$ parâmetro de acoplamento espaço-tempo. De maneira simplificada, é possível reescrever o problema como: encontrar (λ, u) com $u \in H^1(0, l)$ satisfazendo as equações de contorno $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$B(u, v) = \lambda F(u, v) \quad \forall v \in H^1(0, l) \quad (48)$$

onde $B : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbb{R}$ e $F : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbb{R}$ são formas bilineares. Considerando as condições de contorno clássicas:

$$\begin{aligned} u(0) = 0 \text{ e } u(l) = 0 \\ EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \text{ e } EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

segue que qualquer que seja a combinação das condições de contorno, o segundo termo da equação 47 se anula, e então as formas bilineares B e F são dadas por:

$$\begin{aligned} B(u, v) &= EA \int_0^l \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \\ F(u, v) &= \rho A \int_0^l u v dx \end{aligned} \quad (50)$$

4.1.2 VIGA EULER BERNOULLI

A viga de Euler Bernoulli é uma viga reta com deformação lateral, na qual deve-se considerar que existe uma linha reta que depois da deformação da peça não sofre tração e nem compressão, denominada linha neutra; as seções planas e perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares após a deformação; o material é elástico, linear e homogêneo; as tensões normais nas direções transversais são desprezadas e a inércia rotacional da viga é desconsiderada. Com as hipóteses impostas, a equação que rege o problema é dada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = p(x, t) \quad (51)$$

onde $A = A(x)$ é a área da seção transversal variável; $I = I(x)$ é o momento de inércia da seção, $E = E(x)$ é o módulo de elasticidade, ρ é a densidade de massa, a função $p(x, t)$ é a força transversal aplicada por unidade de comprimento, t é o tempo e $\Omega(0, l)$ é o domínio em questão, e $v = v(x, t)$ é a solução que satisfaz as condições iniciais e de contorno.

Para encontrar a forma fraca do problema dado, a estratégia utilizada é multiplicar a equação 51 a uma função teste $w(x)$, integrando o domínio e considerando E, I, A e ρ constantes, sendo assim:

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} w d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w d\Omega = \int_{\Omega} p(x, t) w dx \quad (52)$$

Integrando por partes duas vezes e particularizando o problema para o caso do problema de vibração livre de viga reta de Euler Bernoulli, onde $p(x, t) = 0$, tem-se

$$wEI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x} \right) \Big|_0^l - \frac{\partial w}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_0^l + EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + A\rho \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx = 0 \quad (53)$$

Logo, a vibração livre de uma viga uniforme transforma-se em um problema de autovalores na forma variacional: encontrar um par (λ, v) com $v \in H^2(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que (ARNDT, 2009):

$$wEI \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_0^l - \frac{dw}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_0^l + EI \int_{\Omega} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \lambda \rho A \int_{\Omega} v w dx = 0 \quad (54)$$

Podendo ser reescrita como:

$$B(v, w) = \lambda F(v, w) \quad \forall w \in H^2(0, l) \quad (55)$$

onde $B : H^2 \times H^2 \mapsto \mathbb{R}$ e $F : H^2 \times H^2 \mapsto \mathbb{R}$ são formas bilineares e $\lambda \in \mathbb{R}$. Considerando as condições de contorno clássicas

$$\begin{aligned} v(0, t) = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ v(l, t) = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

então qualquer que seja a combinação das condições de contorno, tem-se que as formas biline-

ares são dadas como:

$$\begin{aligned} B(v, w) &= EI \int_0^l \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \\ F(v, w) &= \rho A \int_0^l v w dx \end{aligned} \quad (57)$$

4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

A análise de modelos matemáticos requer o uso de métodos numéricos, entre os quais se inclui o MEF. Esse método foi desenvolvido para a análise de meios contínuos, possibilitando nos dias de hoje, a análise da maior parte dos sistemas físicos dos quais trata a Engenharia (SORIANO; LIMA, 2003).

O MEF é baseado na discretização do domínio definido pelo modelo matemático, o qual é dividido em um número finito de subdomínios, ou elementos finitos, para assim gerar as aproximações locais.

Segundo Reddy (1986), a aplicação do MEF se baseia na transformação de um problema de valor de contorno, dado pelo conjunto de equações diferenciais e as condições de contorno do problema, denominado de forma forte, em um problema equivalente, obtido por métodos como por exemplo o Método de Resíduos Ponderados (SILVA, 2015). Esse novo problema equivalente é denominada forma fraca de Galerkin. Como mencionado anteriormente, na aplicação do MEF, para problemas de vibração livre, a forma varacional do problema torna-se um problema de autovalores na forma: “encontre o par (λ, u) com $u \in H^1(0, l)$ satisfazendo as condições de contorno e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$B(u, w) = \lambda F(u, w) \quad (58)$$

onde $\forall w \in H$ são funções admissíveis; e $B : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ e $F : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ são formas bilineares, para espaços U, V .

A função de aproximação por elementos finitos, que corresponde à solução do problema variacional no subespaço de aproximação, equação (58), pode ser reescrita como: encontrar $u_h \in H^h(0, l)$ e $\lambda_h \in \mathbb{R}$ tal que

$$B(u_h, w_h) = \lambda_h F(u_h, w_h), \quad \forall w_h \in H^h, \quad (59)$$

onde a solução aproximada discreta é dada por

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x), \quad (60)$$

onde u_h é definida num subespaço n -dimensional, as ϕ_j 's são funções de base globais do subespaço H^h e u_j são os graus de liberdade. Sendo u_h uma solução aproximada, quando aplicada a equação (58) acaba transformando-se num sistema de equações que pode ser escrito matricialmente como

$$Ku_h = \lambda_h Mu_h \quad (61)$$

onde K é a matriz de rigidez, M é a matriz de massa, λ_h está relacionada às frequências naturais ω_h ; que são obtidas pela relação $\omega_h = \sqrt{\lambda_h}$, e os vetores u_h correspondem aos modos de vibração livre.

As matrizes de massa e rigidez tem como propriedade serem Hermitianas, pela construção do método (HUGHES, 1987). Vale ressaltar que esses conceitos valem para todos os métodos que serão apresentados posteriormente, e seus elementos são descritos pelas equações abaixo:

- No caso de barra:

$$K = [k_{ij}] = \int_{\Omega} EA \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} d\Omega \quad (62)$$

$$M = [m_{ij}] = \int_{\Omega} \rho A \psi_i \psi_j d\Omega \quad (63)$$

- No caso da viga de Euler-Bernoulli:

$$K = [k_{ij}] = \int_{\Omega} EI \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} d\Omega \quad (64)$$

$$M = [m_{ij}] = \int_{\Omega} \rho A \psi_i \psi_j d\Omega \quad (65)$$

onde E é módulo de elasticidade longitudinal, A a área da seção transversal, I o momento de inércia em relação ao eixo de flexão, ρ é a massa específica, as ψ 's são funções de interpolação e Ω o domínio do problema. A escolha das funções de interpolação depende do método aproximado a ser empregado. Este trabalho apresentará os métodos utilizados adiante, assim como o domínio empregado.

4.3 MÉTODOS ENRIQUECIDOS

O enriquecimento das aproximações tem por objetivo obter respostas melhores sem a necessidade do emprego de discretizações muito refinadas (NIRSCHL, 2005). Na literatura,

geralmente as funções enriquecedoras são dadas por polinômios, os quais são contínuos (sendo pelo menos de classe C^0). Isto se deve ao fato da simplicidade de gerar polinômios que satisfazem as condições de contorno e trabalhar com os mesmos. Segundo Torii (2012), é possível fazer aproximações por polinômios de forma contínua, e a justificativa vem do teorema da aproximação de Weierstrass para o caso real: “O conjunto W de todos os polinômios com coeficientes reais é denso no espaço real $C[a, b]$. Portanto, para todo $x \in C[a, b]$ e um dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio p tal que $|x(t) - p(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a, b]$.”

O teorema acima também pode ser aplicado para o caso de funções trigonométricas, com o auxílio da teoria das Séries de Fourier. Desse modo é possível fazer aproximações através de funções polinomiais e trigonométricas.

A aproximação da solução proposta pelos métodos enriquecidos no domínio do elemento mestre, pode ser definido como:

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} \quad (66)$$

onde u_{MEF} é a parcela da solução do MEF baseada nos graus de liberdade nodais e u_{ENRIQ} é a parcela decorrente do enriquecimento do campo de deslocamentos baseado nos graus de liberdade de campo.

4.3.1 MÉTODOS ENRIQUECIDOS PARA BARRA

Levando em consideração que neste trabalho, está sendo considerado um elemento de barra reta uniforme composto por dois nós e um grau de liberdade por nó, e fazendo uso de funções de forma do MEF convencional, através da adição de outras funções de enriquecimento, a solução aproximada no domínio em questão pode ser definida como

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} = \mathbf{N}^T \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{c} \quad (67)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= [\psi_1 \quad \psi_2] \\ \mathbf{q}^T &= [u_1 \quad u_2] \\ \Phi^T &= [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_r \quad \dots \quad F_n] \\ \mathbf{c}^T &= [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \end{aligned} \quad (68)$$

sendo que \mathbf{q} corresponde ao vetor de graus de liberdade nodais do elemento do MEF convencional, \mathbf{N} o vetor que contém as funções de forma lineares do MEF, Φ o vetor das funções enriquecedoras e \mathbf{c} o vetor de graus de liberdade de campo.

4.3.1.1 MÉTODO COMPOSTO

O Método Composto (MC) foi proposto por Zeng (1998-b), utilizando as funções enriquecedoras na forma geral

$$F_r(\xi) = \text{sen}(\beta_r \xi), \quad r = 1, 2, \dots \quad (69)$$

onde $\xi = \frac{x}{l}$, $\beta_r = r\pi$ e l o comprimento da barra. Zeng (1998-b) afirma que este método apresenta bons resultados para problemas em dinâmica de estruturas, já que o seu esforço computacional é baixo. A figura 1 apresenta o comportamento das funções F_r .

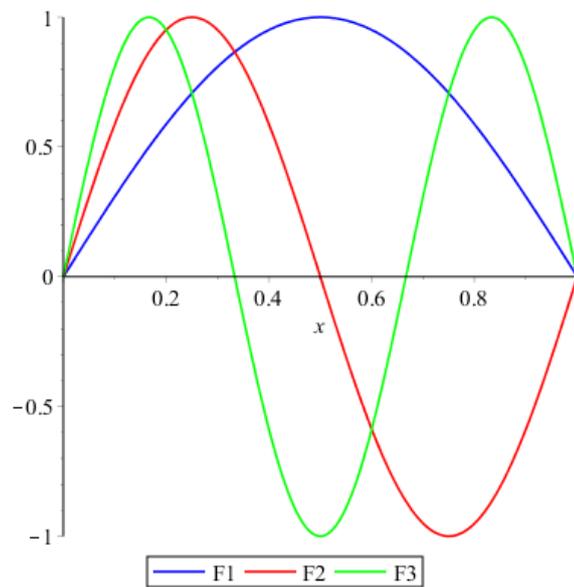


Figura 1- FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MC PARA BARRAS E $1 \leq r \leq 3$

4.3.1.2 REFINAMENTO HIERÁRQUICO DO MEF - POLINÔMIOS DE LOBATTO

Este método é obtido a partir da integração dos polinômios de Legendre e pode ser encontrado com mais detalhes em Solín *et al.* (2004). No caso de um domínio $\Omega = [-1, 1]$, os polinômios de Lobatto têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{1-x}{2}; \\ l_1(x) &= \frac{1+x}{2}; \\ l_k(x) &= \frac{1}{\|L_{k-1}\|_2} \int_{-1}^x L_{k-1}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad 2 \leq k \end{aligned} \quad (70)$$

onde $\|L_{k-1}\|_2 = \int_{-1}^1 L_{k-1}^2(x) dx = \sqrt{\frac{2}{(2k-1)}}$. Pelas propriedades dos polinômios de Legendre tem-se:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1; \\ L_1(x) &= x; \\ L_k(x) &= \frac{2k-1}{k}xL_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k}L_{k-2}(x) \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (71)$$

A figura 2 mostra os 10 primeiros polinômios de Lobatto, cujas equações se encontram no Anexo A . Pode-se observar que, para ordem maior que 2, eles são nulos nos extremos do intervalo $[-1, 1]$ facilitando a introdução das condições de contorno.

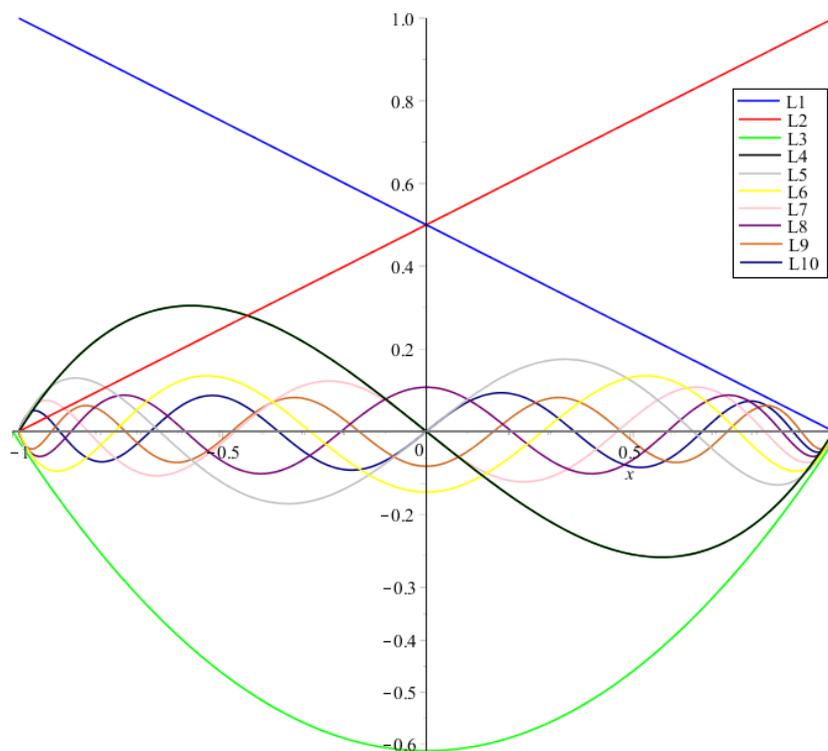


Figura 2- POLINÔMIOS DE LOBATTO PARA $0 \leq k \leq 10$

O polinômios de Lobatto $l_i(x)$, como são obtidos utilizando os polinômios de Legendre $L_j(x)$, carregam a propriedade de serem dois a dois ortogonais, em relação à norma dada pelo operador bilinear B da forma fraca do problema abordado (TORII, 2012). Conseqüentemente, a matriz de rigidez é uma matriz quase diagonal, na forma

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Além do mais, Torii (2012) afirma que para o caso unidimensional as matrizes de massa e rigidez são bem condicionadas. O que não se pode garantir para o caso bidimensional, por exemplo, já que as características podem não se manter.

4.3.2 MÉTODOS ENRIQUECIDOS PARA VIGA DE EULER BERNOULLI

Considerando que o elemento de viga reta uniforme possui dois graus de liberdade por nó, deslocamento e rotação, e fazendo uso de funções de forma do MEF convencional, e da adição de outras funções enriquecedoras, a solução aproximada no domínio em questão pode ser definida como

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} = \mathbf{N}^T \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{c}, \quad (73)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4], \\ \mathbf{q}^T &= [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2], \\ \Phi^T &= [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_r \quad \dots \quad F_n], \\ \mathbf{c}^T &= [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n], \end{aligned} \quad (74)$$

sendo que \mathbf{q} corresponde ao vetor de graus de liberdade nodais do elemento do MEF convencional, \mathbf{N} é o vetor que contém as funções de forma cúbicas do MEF ψ_i , Φ o vetor das funções enriquecedoras F_j e \mathbf{c} o vetor de graus de liberdade de campo.

4.3.2.1 MÉTODO COMPOSTO

Este método foi proposto por Zeng (1998-a), fazendo uso das funções enriquecedoras, no domínio $\Omega = [0, 1]$:

$$F_r = \frac{\sin(\lambda_r \xi) - \sinh(\lambda_r \xi)}{\cos(\lambda_r) - \cosh(\lambda_r)} [\cos(\lambda_r \xi) - \cosh(\lambda_r \xi)] \quad (75)$$

para $r = 1, 2, \dots$, e λ_r origina-se da solução da equação:

$$\cos(\lambda_r)\cosh(\lambda_r) - 1 = 0 \quad (76)$$

Devido a dificuldade de aproximações das raízes da equação (76), Zeng (1998-a) sugere a seguinte aproximação das raízes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 4.730041 \\ \lambda_2 = 7.853205 \\ \lambda_3 = 10.995608 \\ \lambda_4 = 14.137165 \\ \vdots \\ \lambda_r = (r + 0.5)\pi, \quad r \geq 4 \end{array} \right. \quad (77)$$

Na figura 3 apresenta-se a plotagem das funções enriquecedoras F_r para as três primeiras raízes λ_r .

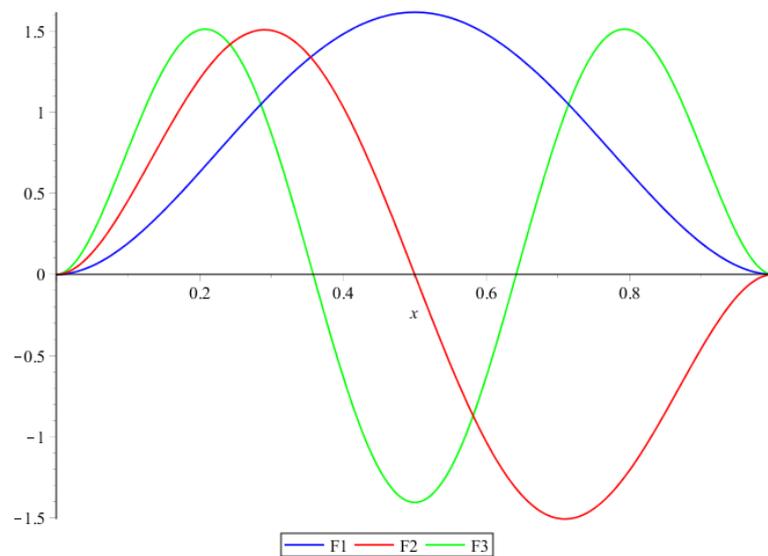


Figura 3- FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MC PARA VIGA E $1 \leq r \leq 3$

Nos trabalhos Zeng (1998-a) e Zeng (1998-b), a aplicação do Método Composto gera matrizes de massa e rigidez simétricas, com as entradas da diagonal das matrizes sempre positivas. Além disso, a matriz de rigidez é semi-definida positiva, e se torna definida positiva, após a eliminação dos movimentos de corpo rígido.

4.3.2.2 ELEMENTO DE VIGA DE BARDELL

Este método, proposto por Bardell (1991), utiliza um conjunto de funções de forma composto pelos quatro primeiros polinômios cúbicos de Hermite do MEF e por polinômios que derivam dos polinômios de Legendre da forma de Rodrigues, no domínio $\Omega = [-1, 1]$, e são dados por:

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{(-1)^n (2r-2n-7)!!}{2^n n! (r-2n-1)!} \xi^{r-2n-1}, \quad (78)$$

para $r!! = r(r-2)(r-4)\dots(2 \text{ ou } 1)$; $0!! = (-1)!! = 1$; $r \geq 4$ e $\frac{(r-1)}{2}$ denota a parte inteira desta operação. Os polinômios cúbicos de Hermite, para o domínio $\Omega = [-1, 1]$, são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{\xi^3}{4} \\ H_2(\xi) = \frac{1}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)L \\ H_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{\xi^3}{4} \\ H_4(\xi) = \frac{1}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)L \end{array} \right. \quad (79)$$

onde l determina o comprimento da viga. A figura 4 mostra os 10 primeiros polinômios de Bardell, cujas equações se encontram no Anexo B, no domínio $\Omega = [-1, 1]$.

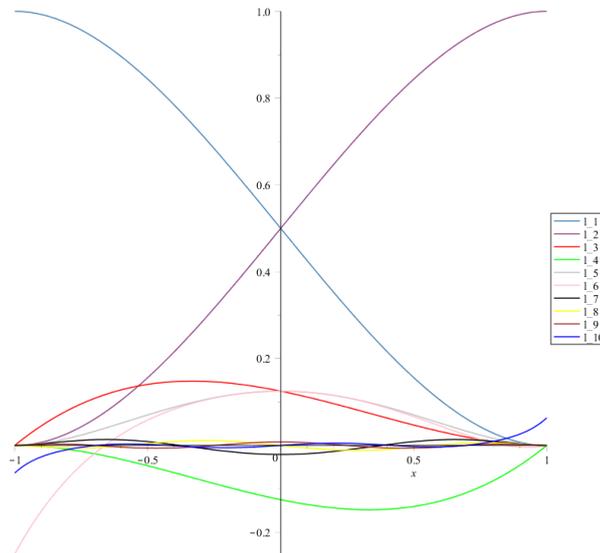


Figura 4- POLINÔMIOS DE BARDELL PARA $1 \leq k \leq 10$

4.3.2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS P-FOURIER

Este método foi proposto por Leung e Chan (1998) e utiliza as funções enriquecedoras, no domínio $\Omega = [0, 1]$, dadas por:

$$F_r = (\xi - \xi^2) \text{sen}(r\pi\xi) \quad (80)$$

A figura 5 apresenta as funções F_r para os três primeiros índices.

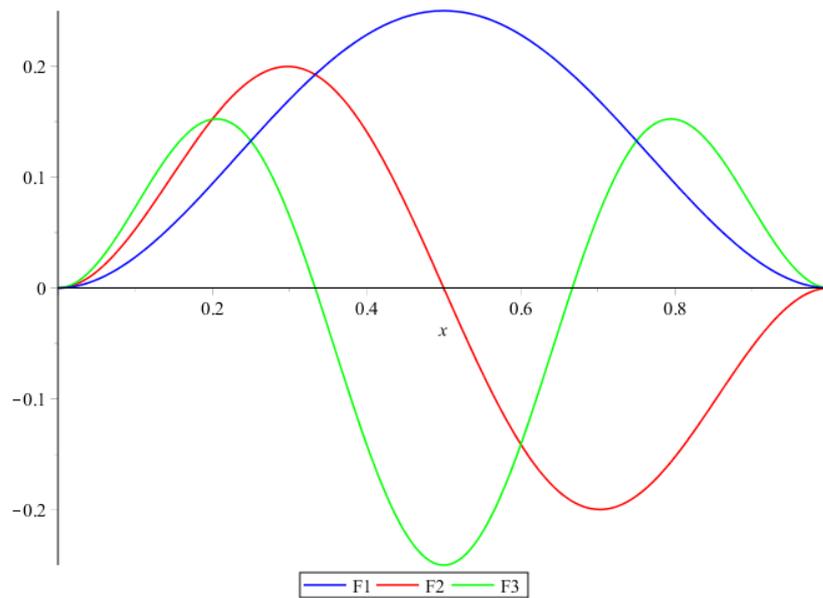


Figura 5- FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS P-FOURIER PARA $1 \leq r \leq 3$

A ideia da escolha dessas funções de enriquecimento é baseada na série de Fourier, já que estas são de fácil integração. Leung e Chan (1998) afirmam que funções polinomiais são mal condicionadas, já que a diferença numérica mesmo pequena pode ser significativa. Ou seja, pequenas variações nos dados de entrada causam grandes variações nos dados de saída, o que motiva o uso das funções de Fourier, pois elas eliminam o mal condicionamento polinomial e acabam sendo ortogonais.

4.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG)

O MEFG surgiu a partir do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade (MPU), apresentado inicialmente por Melenk e Babuska (1996), e serviu como fundamento para o desenvolvimento de outros métodos de solução de problemas de valor de contorno. A

estratégia do MEFG pode empregar as funções de forma do MEF como funções partição da unidade no MPU (SHANG, 2014).

As funções de aproximação, além de representarem uma boa aproximação local, devem ser densas no conjunto de soluções da equação diferencial a ser resolvida. Como a escolha não é única, então ela depende de aspectos como custo da construção das matrizes e otimalidade do sistema.

O MPU permite construir um espaço de aproximação com a regularidade desejada, independente dos espaços de aproximação locais, preservando as propriedades destes espaços. A aproximação da solução proposta pelo MEFG no domínio do elemento mestre pode ser escrito como combinação das componentes (ARNDT *et al.*, 2014):

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} \quad (81)$$

onde u_{MEF} é a componente do MEF baseada nos graus de liberdade nodais e u_{ENRIQ} é a componente de enriquecimento gerada pela partição da unidade e baseada nos graus de liberdade de campo, como nos outros métodos enriquecidos.

Para este trabalho utilizaram-se as funções propostas por Arndt (2009) e Weinhardt *et al.* (2015) para o caso da barra, as quais foram aplicadas no problema de vibração livre e apresentaram bons resultados. Além disso, este método garante que as matrizes de massa e rigidez sejam Hermitianas, como apresentado em Arndt (2009); e a matriz de massa é definida positiva conforme Inman (1996), Bathe *et al.* (1986).

4.4.1 ELEMENTO FINITO DE BARRA

A abordagem utilizada neste trabalho foi fazer uso das propostas de Arndt (2009) e Weinhardt *et al.* (2015), onde as funções enriquecedoras utilizadas foram as trigonométricas.

Como já mencionado, a aproximação da solução é composta por duas parcelas (MEF + enriquecimento), onde a parcela de enriquecimento é baseada na partição da unidade, sendo:

$$u_{MEF}(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) u_i \quad (82)$$

para as funções partição da unidade dadas por:

$$\begin{cases} \eta_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \\ \eta_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad (83)$$

com o domínio considerado $\Omega = (-1, 1)$.

O enriquecimento trigonométrico reproduz alguns modos de vibração fundamentais na estrutura, permitindo uma grande acurácia dos resultados obtidos. Assim, a aproximação trigonométrica do MEEG pode ser posta como

$$u_{ENRIQ}(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[\sum_{j=1}^{n_l} (\gamma_j(\xi)a_{ij} + \varphi_{ij}(\xi)b_{ij}) \right], \quad (84)$$

onde a_{ij} e b_{ij} são os graus de liberdade de campo.

As funções de enriquecimento baseadas em Arndt (2009) e Torii *et al.* (2015), para o domínio em questão, são:

$$\begin{cases} \gamma_{1j} = \text{sen}(\beta_j(1 + \xi)) \\ \gamma_{2j} = \text{sen}(\beta_j(\xi - 1)) \\ \varphi_{1j} = \cos(\beta_j(1 + \xi)) - 1 \\ \varphi_{2j} = \cos(\beta_j(\xi - 1)) - 1 \end{cases} \quad (85)$$

para $j = 1, 2, \dots, n_l$, sendo n_l o número de níveis de enriquecimento, e o parâmetro é dado por $\beta_j = \frac{3}{4}\pi j$.

A figura 6 mostra as funções de enriquecimento para $\beta = \frac{3}{4}\pi$.

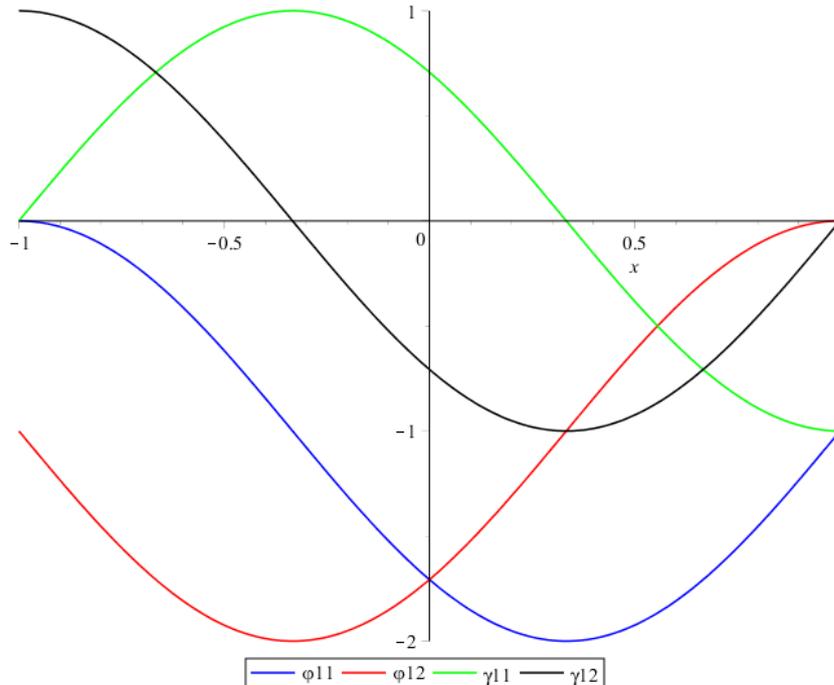


Figura 6- FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS - PROPOSTA DE ARNDT (2009)

Weinhardt *et al.* (2015) propõe outro parâmetro: $\beta_j = (2j - \frac{5}{4})\pi$; inspirado pelos trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012), que também apresenta bons resultados. A figura 7 apresenta as funções enriquecedoras para $\beta = \frac{11}{4}\pi$.

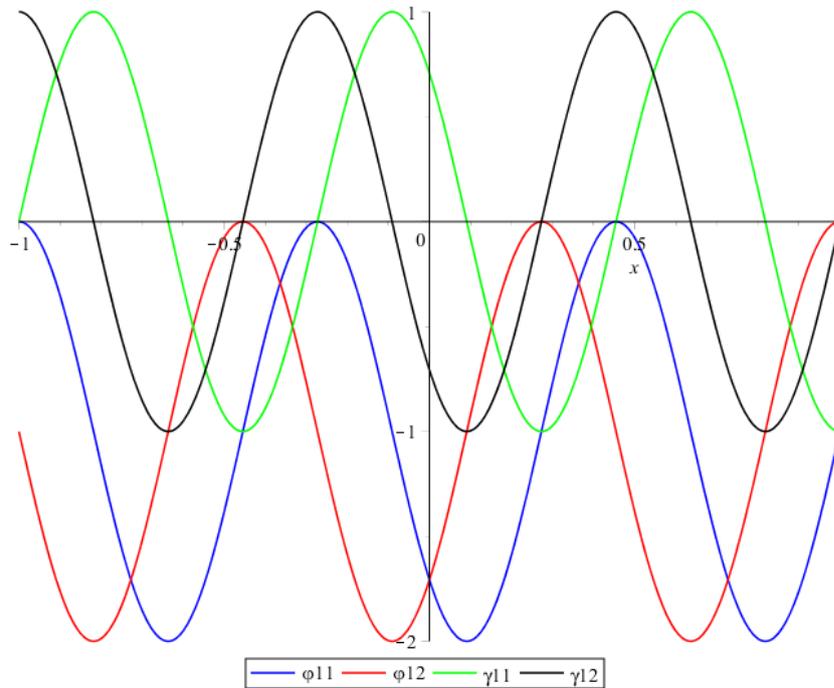


Figura 7- FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS - PROPOSTA DE WEINHARDT *et al.* (2015)

Para $j = 1$, esta proposta de enriquecimento coincide com a proposta sugerida por Arndt (2009), por isso a escolha de $j = 2$ nas funções da figura 7.

4.4.2 ELEMENTO FINITO DE VIGA

O elemento de viga do MEFG consiste nos polinômios cúbicos de Hermite do MEF, dados pela equação (79), as funções de enriquecimento são obtidas das funções partição da unidade da equação (83), e funções enriquecedoras são baseadas nas funções trigonométricas utilizadas no Método dos Modos Admissíveis(MMA) (ARNDT, 2009); assim:

$$u(\xi) = u_{MEF}(\xi) + u_{ENRIQ}(\xi) \quad (86)$$

onde

$$u_{MEF}(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi)(\phi_{1i}(\xi)v_i + \phi_{2i}(\xi)\theta_i) \quad (87)$$

$$u_{ENRIQ}(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i \left[\sum_{j=1}^{n_l} \gamma_j(\xi) a_{ij} \right] \quad (88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{11} = 1 - \frac{\xi + \xi^2}{2} \\ \phi_{12} = \frac{\xi - \xi^2}{2} + 1 \\ \phi_{21} = \frac{1 - \xi^2}{4} \\ \phi_{22} = \frac{\xi^2 - 1}{4} \end{array} \right. \quad (89)$$

para v_i , θ_i e a_{ij} graus de liberdade.

Com as funções de enriquecimento no domínio $\Omega = [-1, 1]$:

$$\gamma_j(\xi) = \cos \left[\frac{(j-1)\pi(\xi+1)}{2} \right] - \cos \left[\frac{(j+1)\pi(\xi+1)}{2} \right] \quad (90)$$

para $j = 1, 2, \dots, n_l$, sendo n_l o número de níveis de enriquecimento. A figura 8 apresenta o comportamento das funções γ .

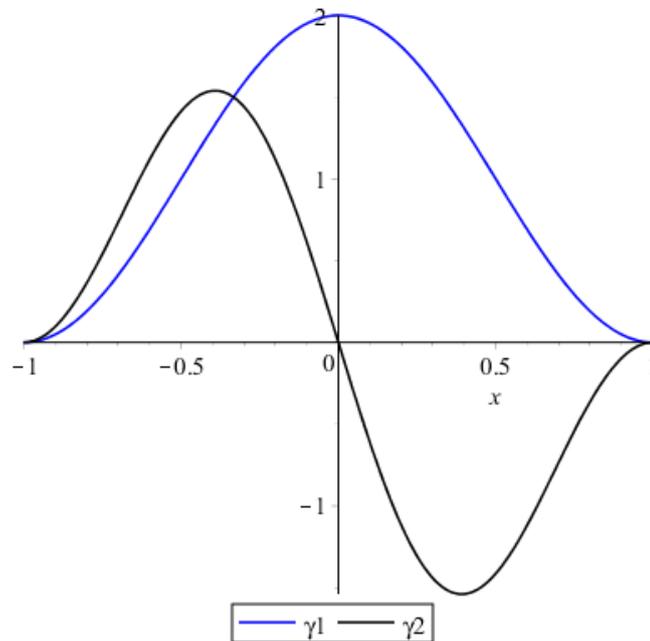


Figura 8- FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO MEEG PARA VIGA E J = 1, 2

5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Este capítulo visa a aplicação da teoria apresentada nesse trabalho. Como visto anteriormente no capítulo 3, o bom condicionamento é garantido quando pequenas perturbações nos dados de entrada geram pequenas perturbações nos dados de saída, vale lembrar que em métodos numéricos, este conceito também é utilizado como definição de estabilidade. Além do mais, se as matrizes do problema de autovalores generalizado $Ax = \lambda Bx$ são Hermitianas e B é definida positiva, então é possível transformar essa equação em um problema de autovalor padrão, que é bem condicionado. Esse fato pode ser aplicado para o problema de vibração livre, apresentado no capítulo 4, já que por construção do método garante-se que a matriz de massa é Hermitianas e definida positiva, entretanto a matriz de rigidez, apesar de ser Hermitiana, esta só será definida positiva após a introdução das condições de contorno (INMAN, 1996; BATHE *et al.*, 1986). Logo pode-se concluir que o problema de autovalores e autovetores deveria ser bem condicionado.

Busca-se então analisar a sensibilidade do problema de autovalores quanto às matrizes de massa e rigidez construídas pelos métodos apresentados no capítulo 4, para barra e viga de Euler Bernoulli. Pretende-se também verificar a existência de alguma correlação dessa sensibilidade com o número de condição das matrizes.

Para a análise de perturbação foi feita uma comparação entre as formas analíticas (integração exata) e numérica (integração numérica) das matrizes de massa e rigidez, onde o tipo de erro analisado é o erro absoluto dado por:

$$e = |x - y| \quad (91)$$

sendo x o valor aproximado de cada elemento da matriz e y o valor analítico.

Os métodos analisados neste trabalho foram implementados através do software Maple. Para a integração analítica foram utilizadas as funções oferecidas pelo próprio software. E para a aproximação numérica, foi utilizado o método da quadratura de Gauss com dez pontos de integração no intervalo.

O cálculo do número de condição das matrizes na forma numérica foi efetuado através

de uma função que o próprio software oferece, utilizando a abordagem dada pela equação (40):
 $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$

5.1 PERTURBAÇÃO NUMÉRICA DAS MATRIZES

A primeira análise realizada, teve por objetivo verificar a perturbação derivada da construção das matrizes de massa e rigidez pelo método escolhido. Por esse motivo duas hipóteses foram levantadas:

- Quão distante estão as matrizes geradas pela aproximação numérica e exata?
- O fato de serem definidas positivas influencia nas aproximações?

Para isso variou-se o número de dígitos significativos (precisão) para a aproximação numérica das matrizes de massa e rigidez, calculando-se o erro absoluto das aproximações em relação aos valores exatos (analíticos). Também fixou-se em cinco o número de níveis de enriquecimento ($n_l = 5$) para análise.

Vale a pena ressaltar que a montagem das matrizes do método GFEM nesse trabalho (tanto para barra quanto para viga de Euler Bernoulli) não foi realizada da maneira tradicional, onde os novos níveis são acrescentados no final da matriz (últimas linhas e últimas colunas). Essa outra maneira de construção apenas foi utilizada para melhor visualização das imagens geradas que estão a seguir; os novos níveis de enriquecimento foram acrescentados no centro da matriz, expandindo a matriz de dentro para fora. As matrizes dos outros métodos, foram construídas da maneira clássica.

Nas figuras 9 a 24, opta-se por utilizar a escala de tons de cinza para a análise, onde os maiores erros estão concentrados nas cores claras e, conseqüentemente, as cores escuras indicam os menores erros. A escolha das imagens baseou-se no critério de comparação entre quando as matrizes são e não são definidas-positivas (se as matrizes não são definidas positivas elas são indefinidas) ou estão perto de se tornarem. Por exemplo, na figura 9, a matriz de massa numérica gerada com 19 dígitos é indefinida, assim como a matriz com 20 dígitos. Entretanto a matriz com 22 dígitos é definida positiva, ou seja apenas a terceira figura é definida positiva. Essa escolha tem por objetivo ressaltar a importância da hipótese das matrizes serem definidas positivas pois, como pode-se perceber, os erros estabilizam após as matrizes satisfazerem essa hipótese, por isso as diferença da escala numérica de cada matriz gerada. As matrizes foram geradas para esta primeira análise sem a consideração das condições de contorno.

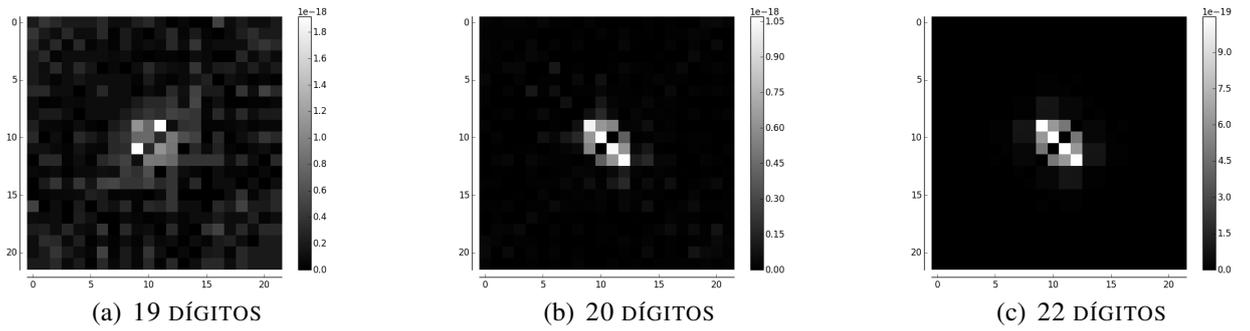


Figura 9- MEFG (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

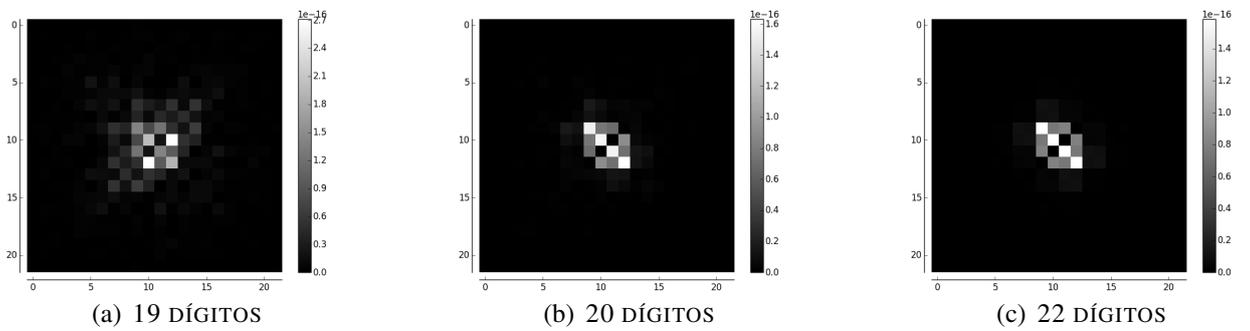


Figura 10- MEFG (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

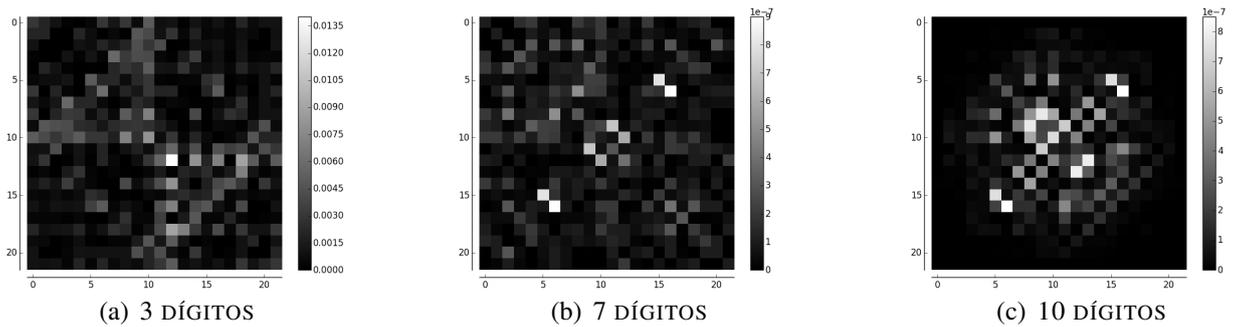


Figura 11- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

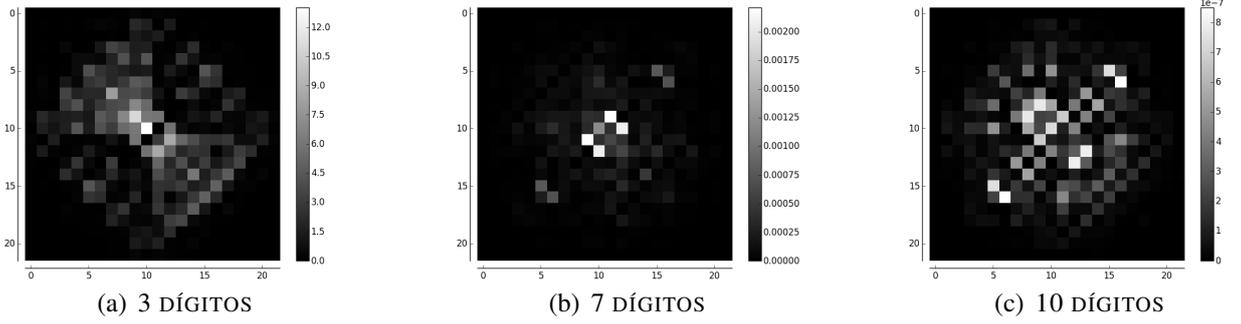


Figura 12- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

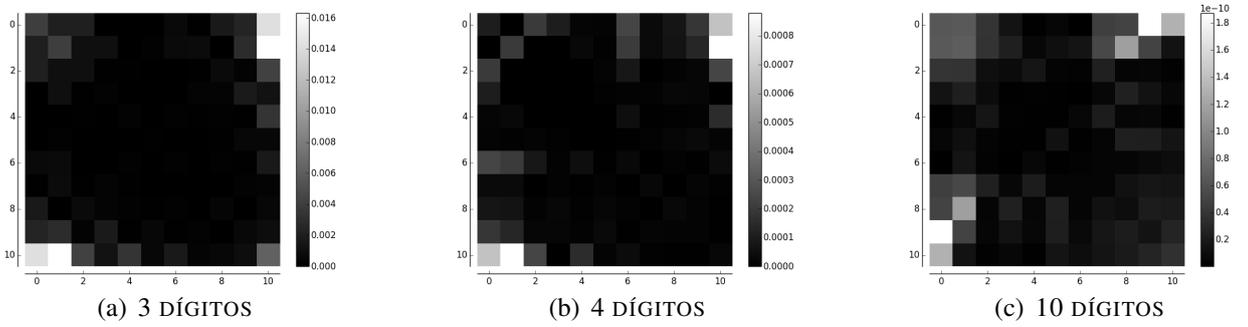


Figura 13- MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

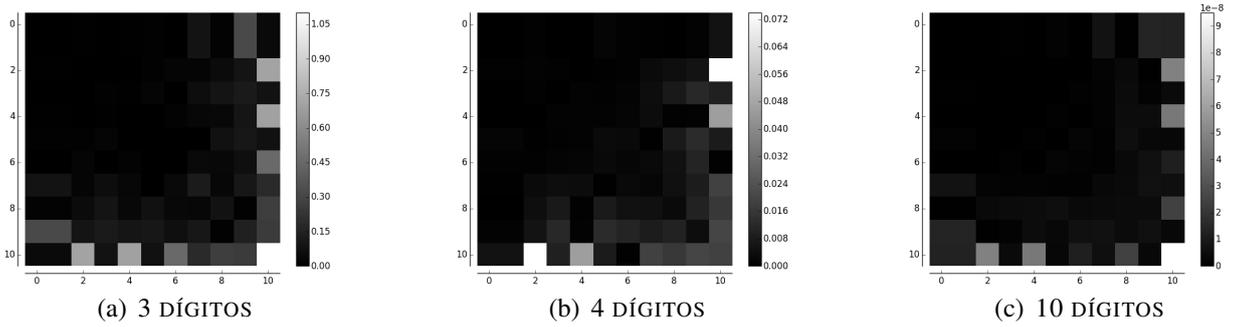


Figura 14- MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

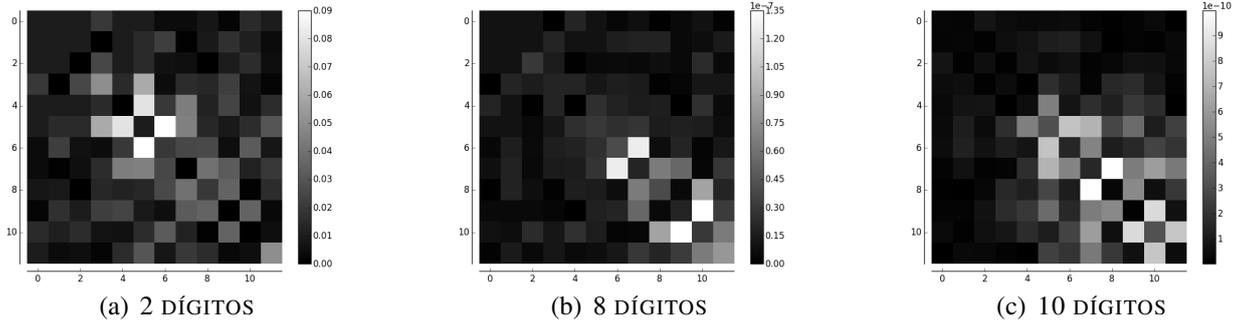


Figura 15- MÉTODO COMPOSTO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

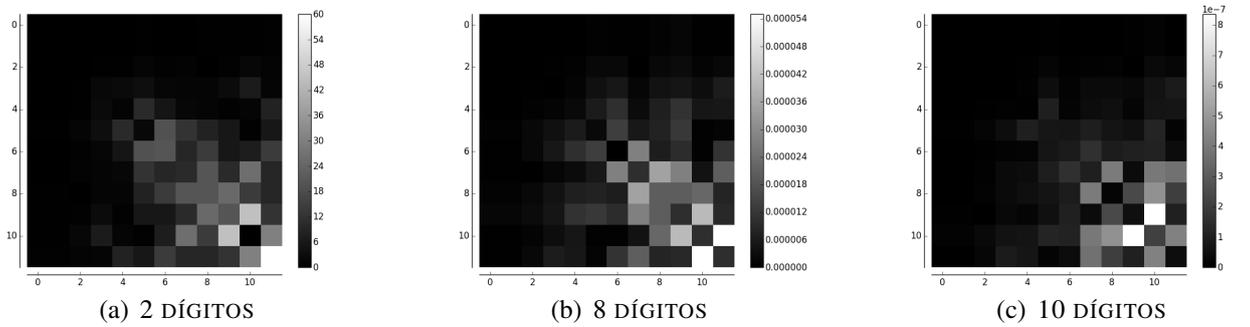


Figura 16- MÉTODO COMPOSTO (BARRA): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

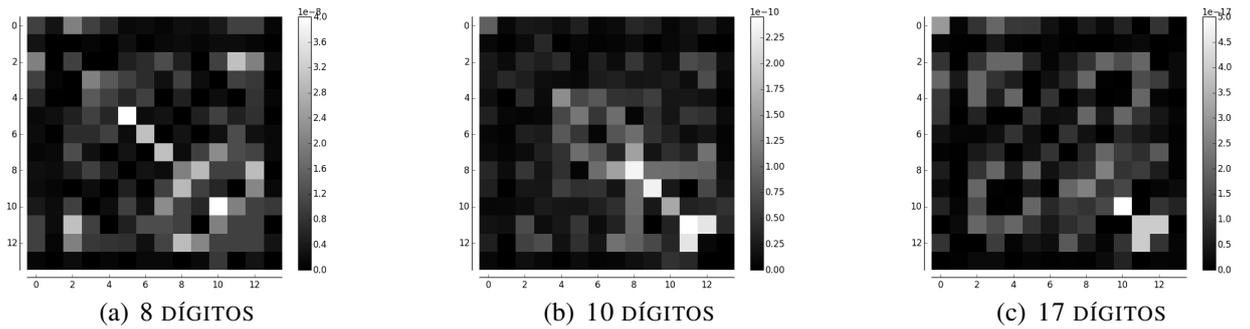


Figura 17- MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

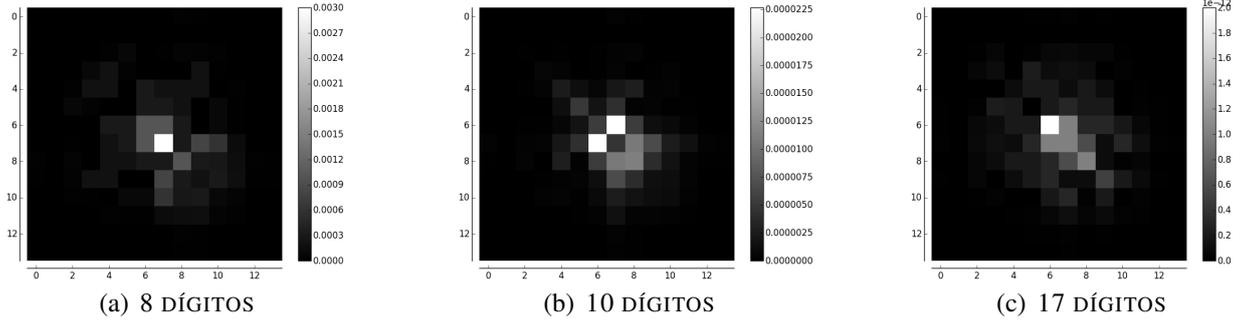


Figura 18- MEF G (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

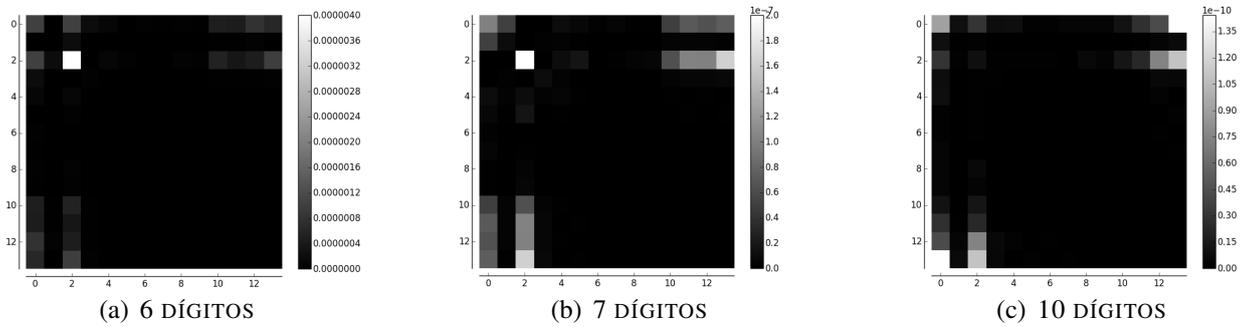


Figura 19- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

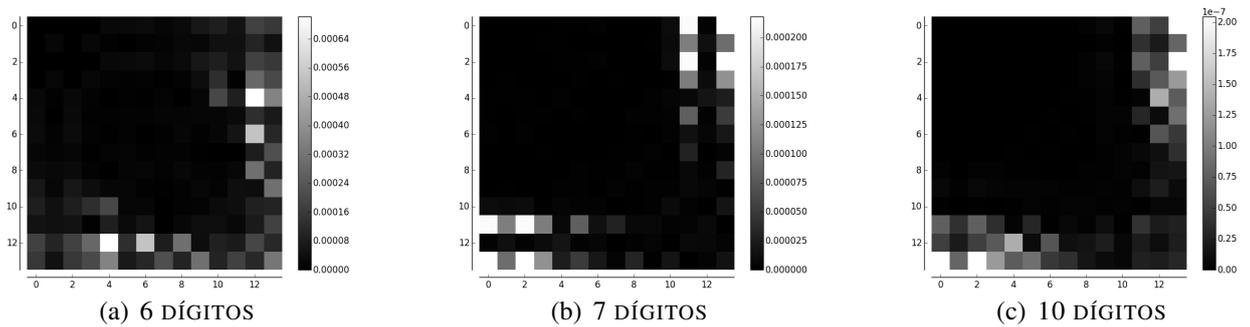


Figura 20- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

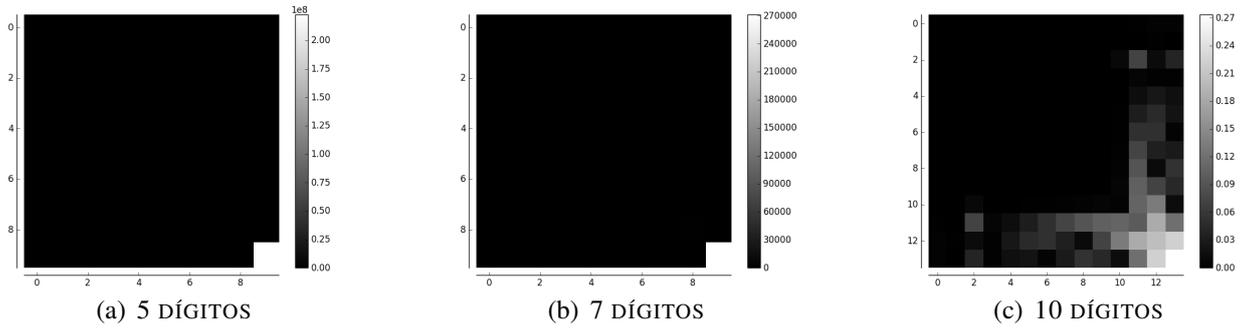


Figura 21- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

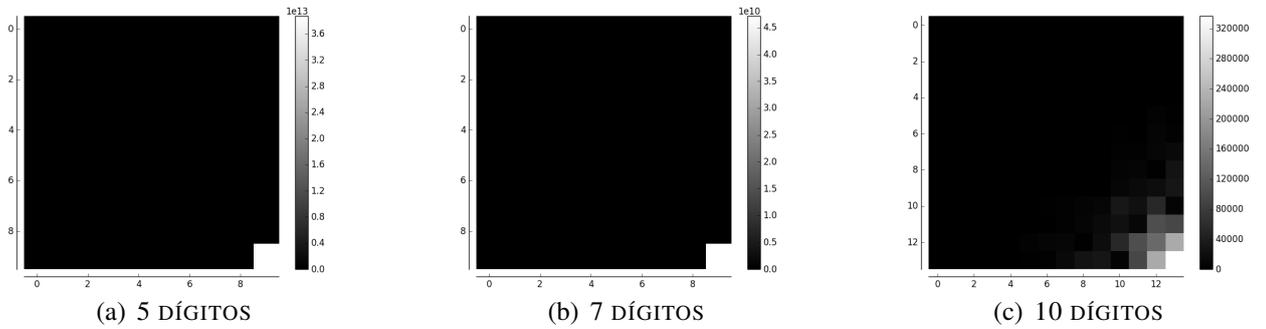


Figura 22- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

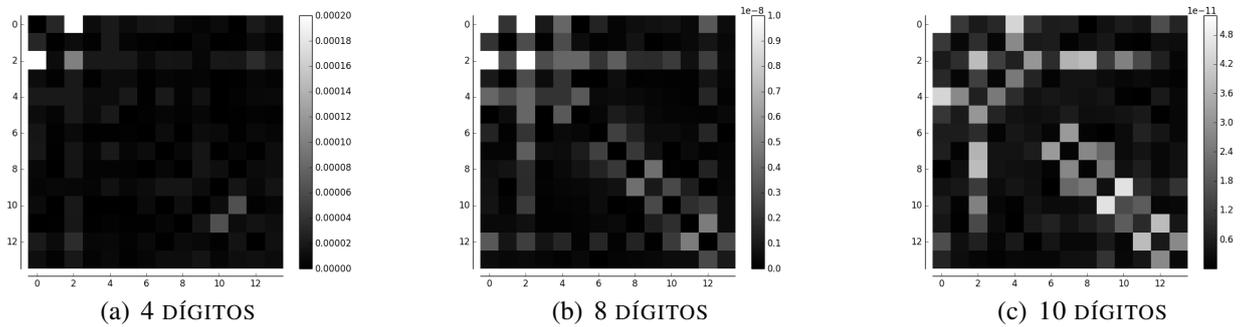


Figura 23- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE MASSA

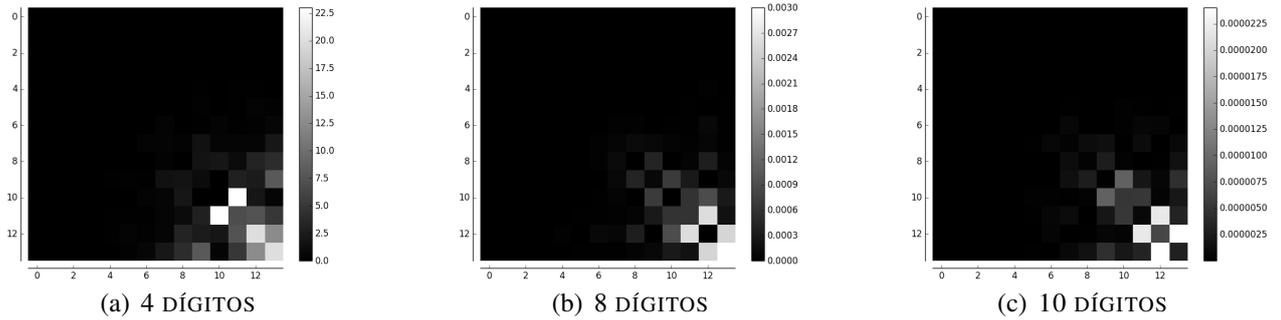


Figura 24- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): PERTURBAÇÃO MATRIZ DE RIGIDEZ

Nos resultados obtidos nota-se, que apesar de existirem erros de aproximação, estes são pequenos e os erros mais altos concentram-se nas regiões onde localizam-se os níveis de enriquecimento mais altos (centro no caso do GFEM e últimas linhas e colunas nos demais casos). Verifica-se também que conforme o número de dígitos significativos cresce, os erros vão diminuindo e os erros mais altos continuam concentrados onde estão os níveis de enriquecimento mais altos. Entretanto, essas observações não valem para o MC, devido a grande sensibilidade nas matrizes analíticas.

A título de curiosidade, nas figuras 25 a 32 estão algumas representações dos erros para 100 dígitos significativos. O intuito da apresentação destes resultados consiste apenas em ressaltar a localização dos erros mais altos, e que estes vão decrescendo de acordo com o crescimento do número de dígitos significativos empregados no cálculo das matrizes.

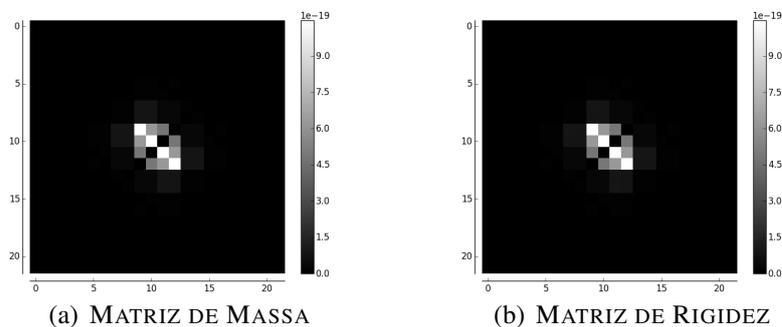


Figura 25- MEFG (BARRA): 100 DÍGITOS

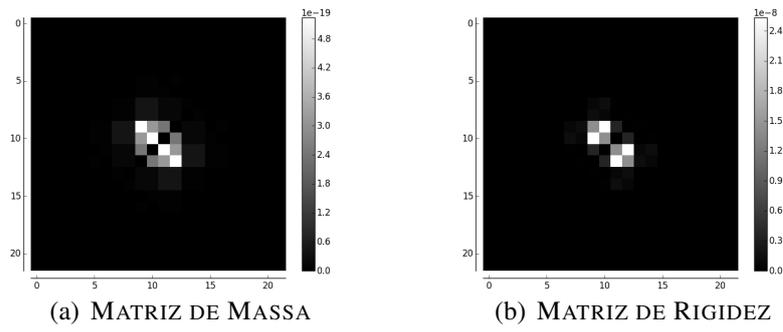


Figura 26- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA): 100 DÍGITOS

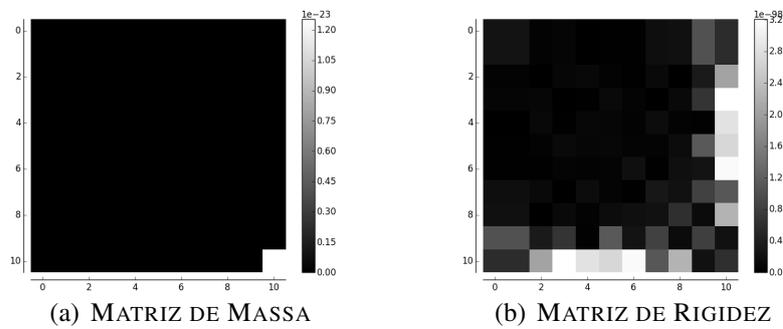


Figura 27- MEF p-HIERÁRQUICO (BARRA): 100 DÍGITOS

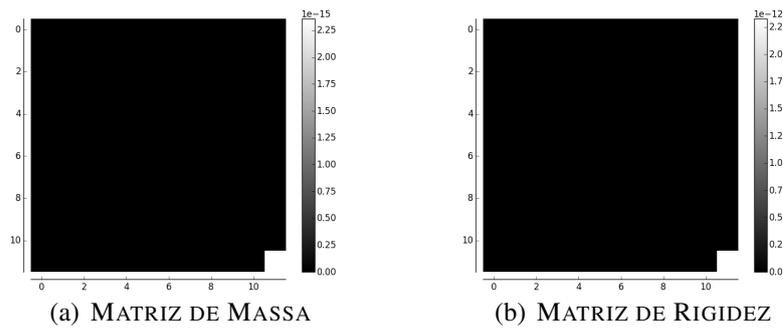


Figura 28- MÉTODO COMPOSTO (BARRA): 100 DÍGITOS

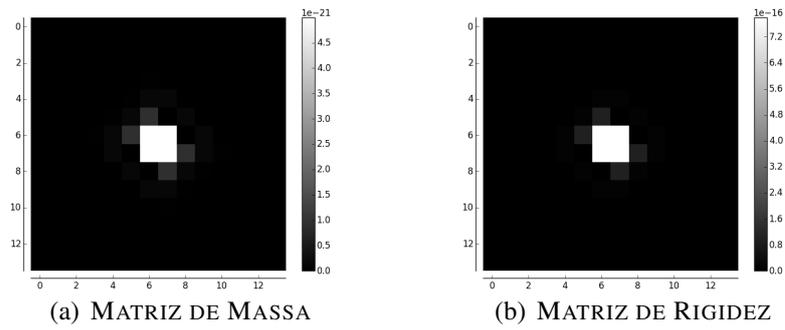


Figura 29- MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS

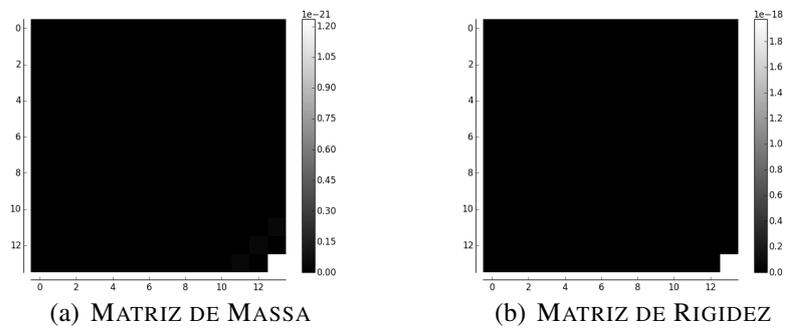


Figura 30- MEF p-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS

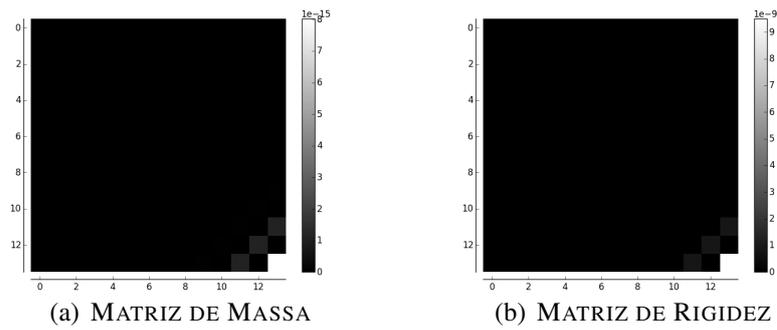


Figura 31- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS

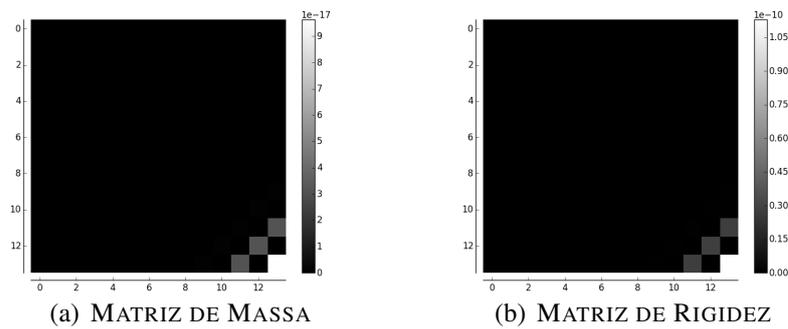


Figura 32- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI): 100 DÍGITOS

5.2 NÚMEROS DE CONDIÇÃO

Levando-se em consideração a sugestão de Leung e Zhu (2004) de avaliar o número de condição da matriz de massa e tendo em vista os resultados da seção anterior e levando em consideração a perturbação gerada, a segunda parte deste capítulo visa observar quando a matriz de massa torna-se definida positiva e qual a ordem do número de condição dessa matriz obtida numericamente (integração numérica).

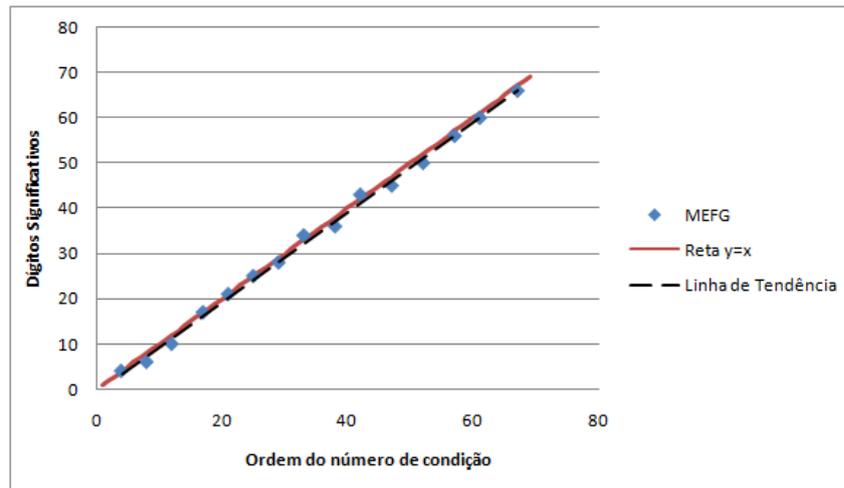
Esta análise baseou-se no argumento de que o problema de autovalores generalizado, $Ax = \lambda Bx$, pode ser reduzido a um problema padrão, que é bem condicionado, quando a matriz B , que no problema de vibração livre é a matriz de massa, é definida positiva.

Os resultados a seguir mostram a precisão a partir da qual a matriz de massa M se estabiliza como definida-positiva e a ordem do número de condição correspondente, variando-se o número de níveis de enriquecimento do método. Devido à singularidade da matriz de rigidez para este exemplo, não foram realizados testes numéricos. Os resultados são apresentados em forma de tabela (tabela 1 a 8), relacionando o número de níveis com o número de dígitos necessários para que a matriz de massa seja definida positiva e a ordem do número de condição dessa matriz. Em seguida são apresentados graficamente (figuras 33 a 40) a relação entre o número de dígitos significativos versus a ordem do número de condição. Ao contrário das tabelas que apresentam os resultados para até 10 níveis de enriquecimento, as figuras apresentam dados com até 15 níveis de enriquecimento, visando encontrar um padrão para esta relação.

Tabela 1- MEFG (BARRA)

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 4 | 6 | 10 | 17 | 21 | 25 | 28 | 34 | 36 | 43 |
| Ordem do número de condição | 10 ⁴ | 10 ⁸ | 10 ¹² | 10 ¹⁷ | 10 ²¹ | 10 ²⁵ | 10 ²⁹ | 10 ³³ | 10 ³⁸ | 10 ⁴² |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 33- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA)****Tabela 2- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015)(BARRA)**

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 7 | 8 | 8 |
| Ordem do número de condição | 10 ⁴ | 10 ⁵ | 10 ⁶ | 10 ⁷ | 10 ⁷ | 10 ⁷ | 10 ⁸ | 10 ⁸ | 10 ⁸ | 10 ⁸ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

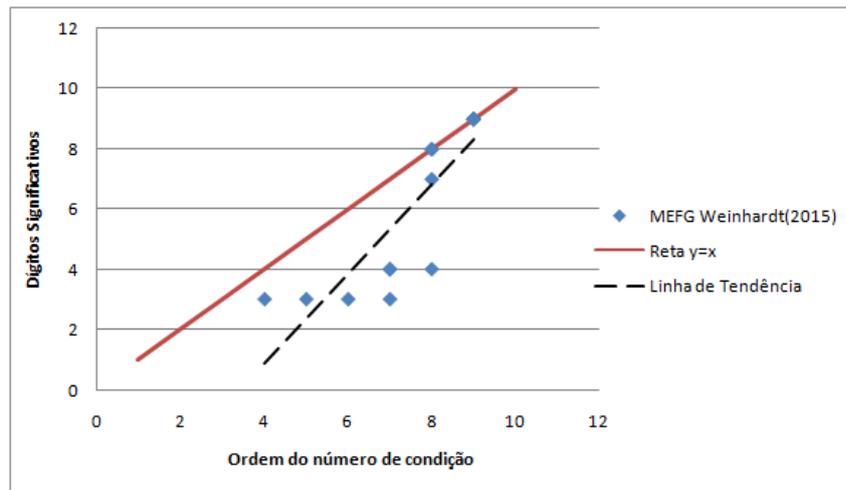


Figura 34- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT *et al.* (2015)(BARRA)

Tabela 3- P-HIERÁRQUICO (BARRA)

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^2 | 10^3 | 10^3 | 10^4 | 10^4 | 10^4 | 10^4 | 10^4 | 10^5 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

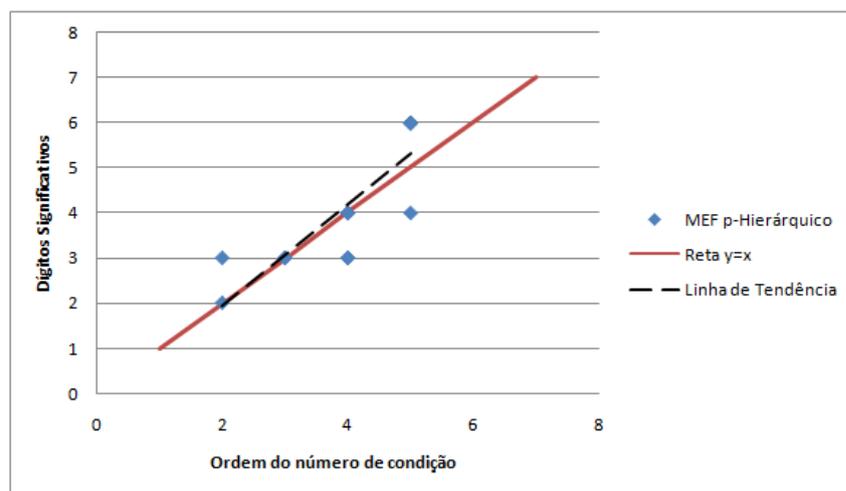


Figura 35- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - P-HIERÁRQUICO (BARRA)

Tabela 4- MÉTODO COMPOSTO (BARRA)

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Ordem do número de condição | 10 | 10 | 10 ² |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

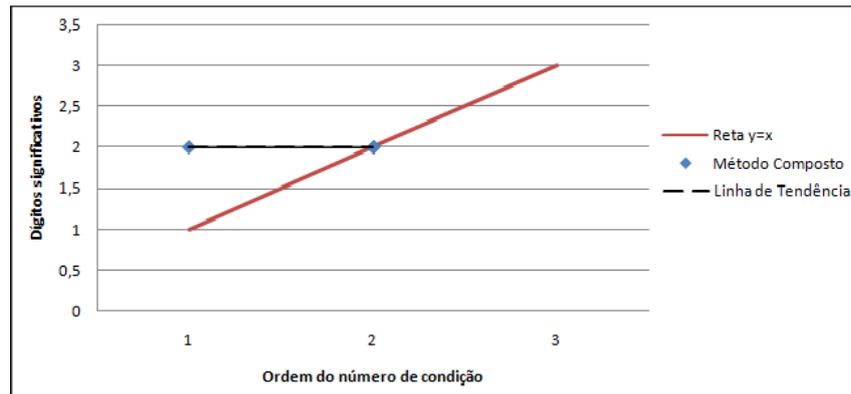


Figura 36- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA)

Tabela 5- MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI)

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 11 | 14 | 16 | 17 |
| Ordem do número de condição | 10 ³ | 10 ⁵ | 10 ⁶ | 10 ⁸ | 10 ⁹ | 10 ¹¹ | 10 ¹² | 10 ¹⁴ | 10 ¹⁵ | 10 ¹⁷ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

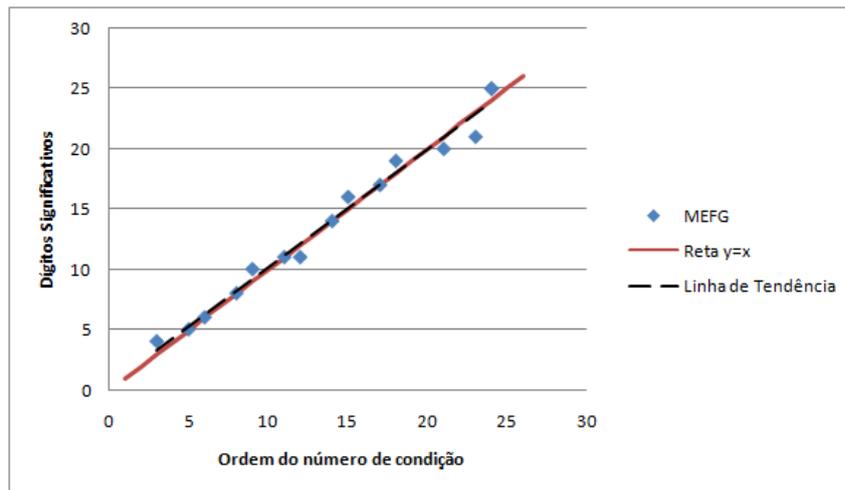


Figura 37- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Tabela 6- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI)

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| Número de dígitos significativos ^a | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| Ordem do número de condição | 10^3 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^9 | 10^9 | 10^{10} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

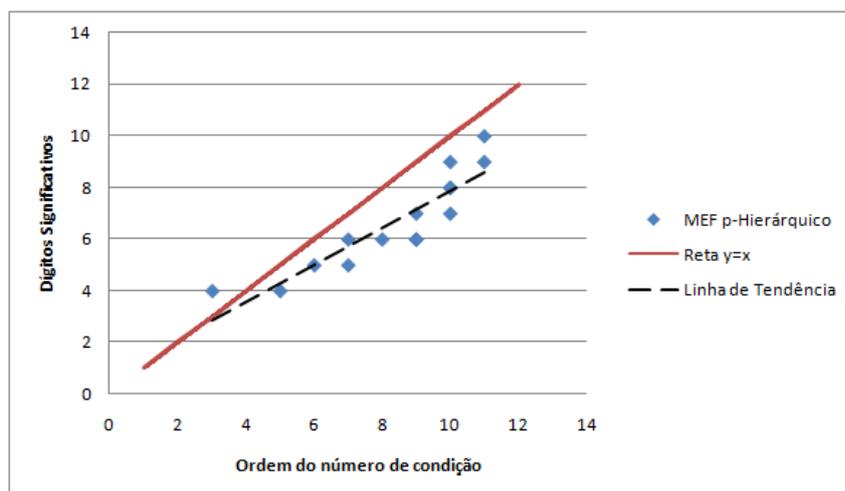


Figura 38- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Tabela 7- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI)

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 4 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Ordem do número de condição | 10^3 | 10^5 | 10^5 | 10^5 | 10^6 | 10^6 | 10^6 | 10^6 | 10^6 | 10^6 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

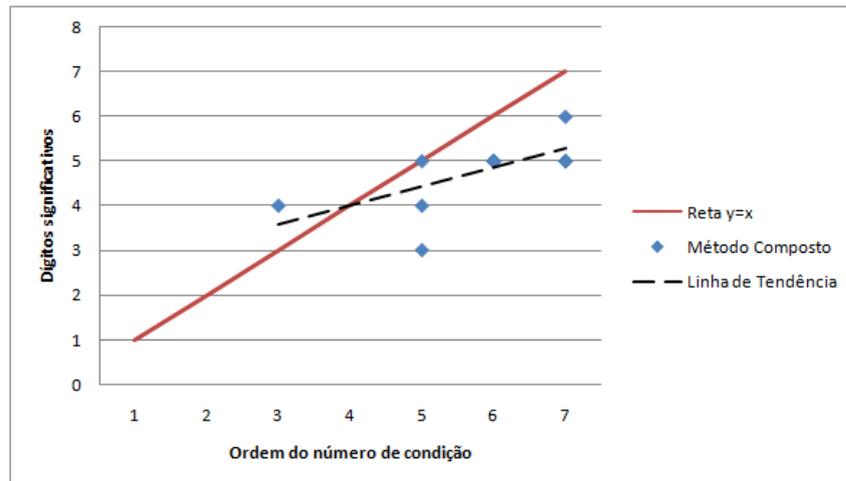


Figura 39- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Tabela 8- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI)

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^4 | 10^5 | 10^5 | 10^5 | 10^5 | 10^6 | 10^6 | 10^6 | 10^6 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

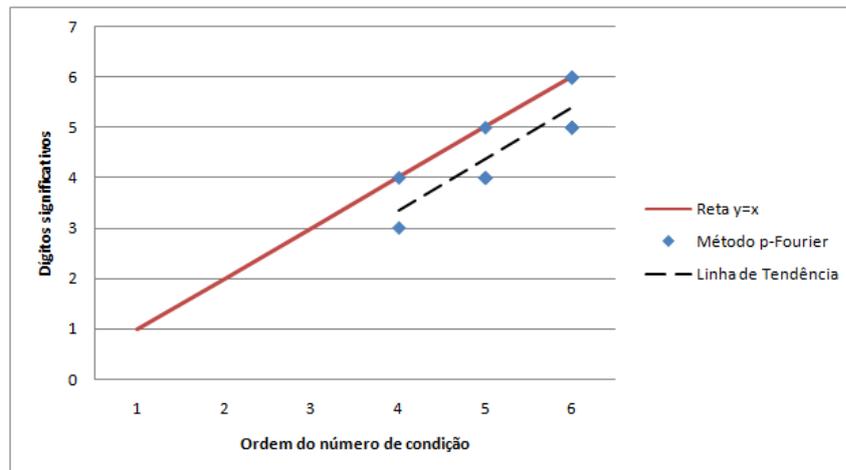


Figura 40- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI)

Nota-se que a potência da ordem do número de condição se aproxima da precisão necessária (número de dígitos significativos) para que a matriz M torne-se definida positiva para MEFG, MEF p-hierárquico e p-Fourier. Essa correlação não se mostrou adequada para o Método Composto. Por exemplo, para o MEFG aplicado na barra, tomando 6 níveis de enriquecimento a matriz é definida positiva a partir de 25 dígitos de precisão e a ordem do número de condição é 10^{25} . Para este segundo grupo de resultados, vale ressaltar que também não foram consideradas condições de contorno no problema. Cabe ainda verificar se a correlação permanece ao se considerarem as condições de contorno do problema.

5.2.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO 1

Para esta análise de dados, incluíram-se condições de contorno aos problemas. Foram analisadas uma barra fixa-livre (figura 41) e uma viga engastada (figura 42).

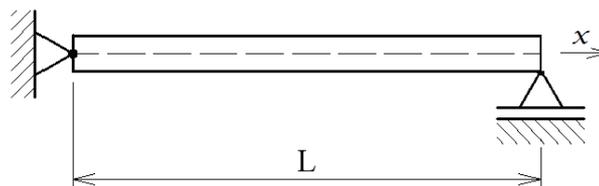


Figura 41- BARRA FIXA-LIVRE

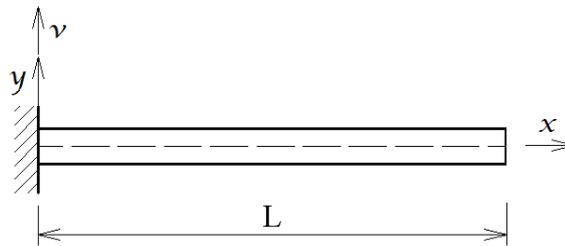


Figura 42- VIGA ENGASTADA

Quando se atribui condição de contorno, a análise dos resultados confirma a relação mencionada anteriormente. Ou seja, a existência de uma correlação entre o número de condição e o número de dígitos significativos, igualmente para a matriz de rigidez, como se pode ver nos exemplos seguintes.

As figuras 43 a 58, estão relacionadas às tabelas 9 a 24, e apresentam dados com até 10 níveis de enriquecimento. Nota-se que diferentemente do problema que não apresenta condições de contorno, para este caso a matriz de rigidez apresenta número de condição; possibilitando a análise da relação mencionada anteriormente.

Tabela 9- MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de dígitos significativos ^a | 5 | 8 | 10 | 17 | 21 | 24 | 28 | 34 | 35 | 40 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^8 | 10^{12} | 10^{15} | 10^{21} | 10^{25} | 10^{29} | 10^{33} | 10^{38} | 10^{42} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

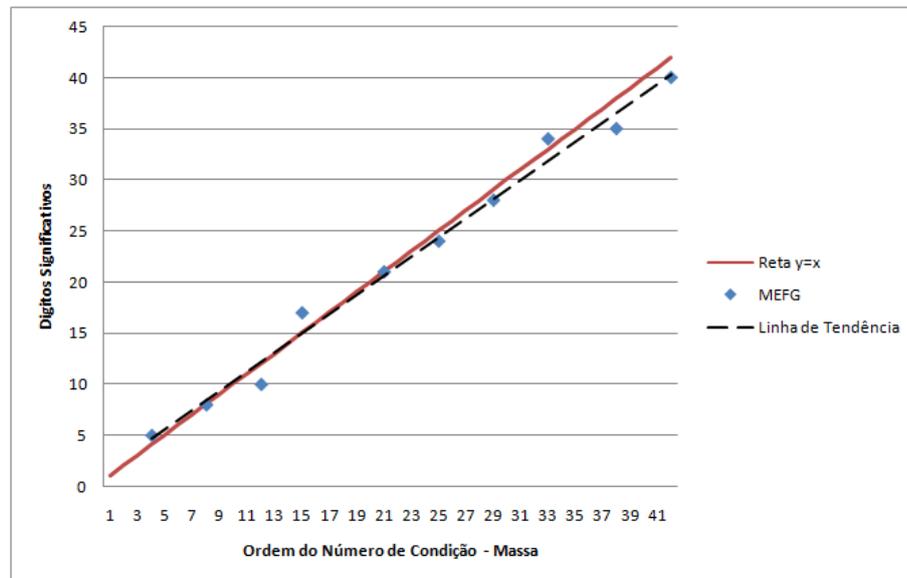


Figura 43- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 10- MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 7 | 9 | 14 | 18 | 23 | 26 | 33 | 34 | 40 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^6 | 10^{10} | 10^{17} | 10^{19} | 10^{23} | 10^{27} | 10^{31} | 10^{36} | 10^{40} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

Nota-se que nas tabelas 9 e 10, a matriz de massa têm sempre um número maior de dígitos significativos do que a matriz de rigidez.

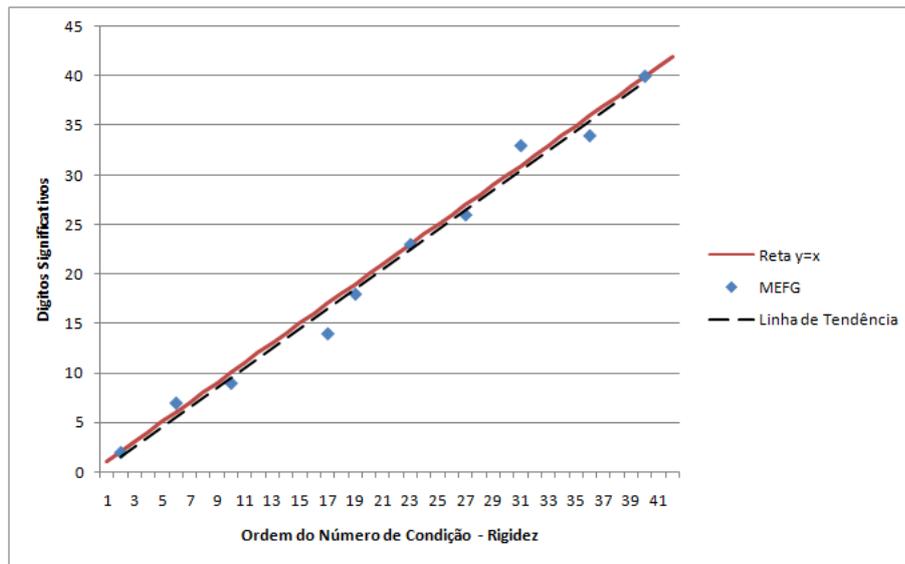


Figura 44- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 11- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^5 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | 10^7 | 10^7 | 10^8 | 10^8 | 10^8 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

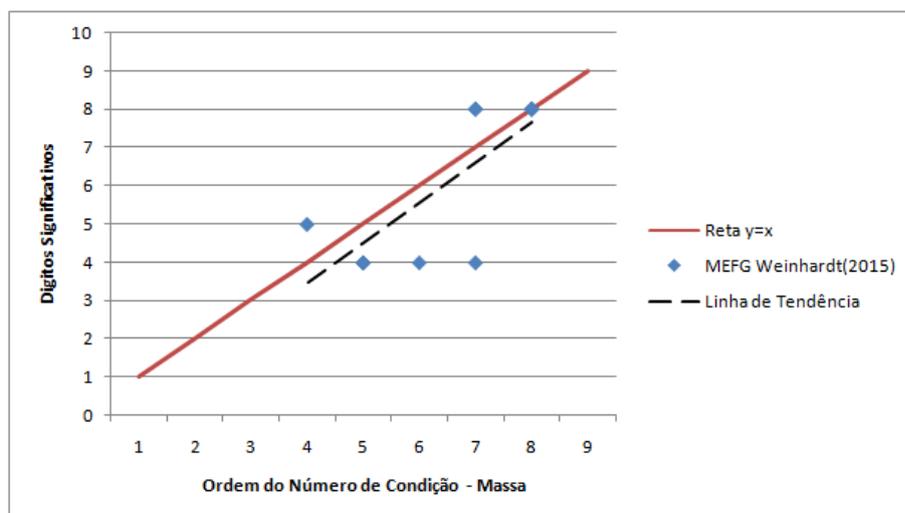
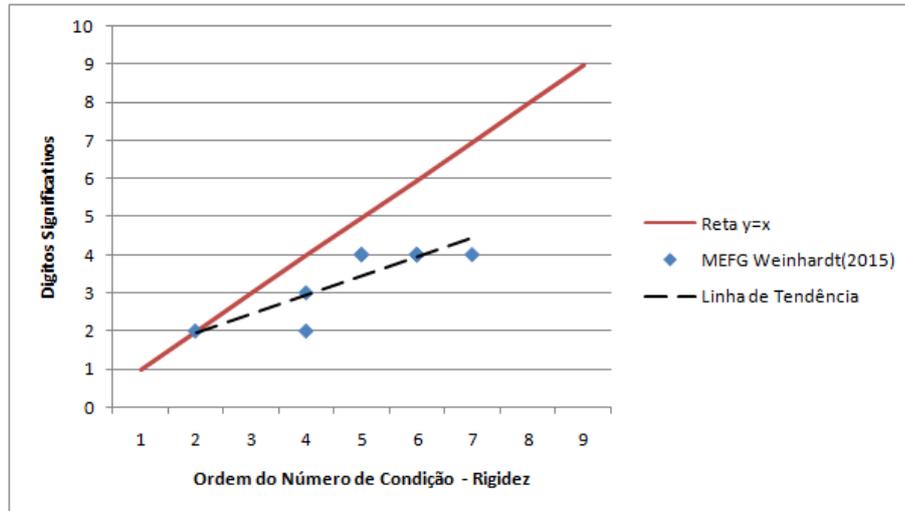


Figura 45- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 12- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Ordem do número de condição | 10 ² | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁵ | 10 ⁵ | 10 ⁶ | 10 ⁶ | 10 ⁶ | 10 ⁶ | 10 ⁷ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 46- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ****Tabela 13- MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA**

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| Ordem do número de condição | 10 ¹ | 10 ² | 10 ² | 10 ³ | 10 ³ | 10 ³ | 10 ³ | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁴ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

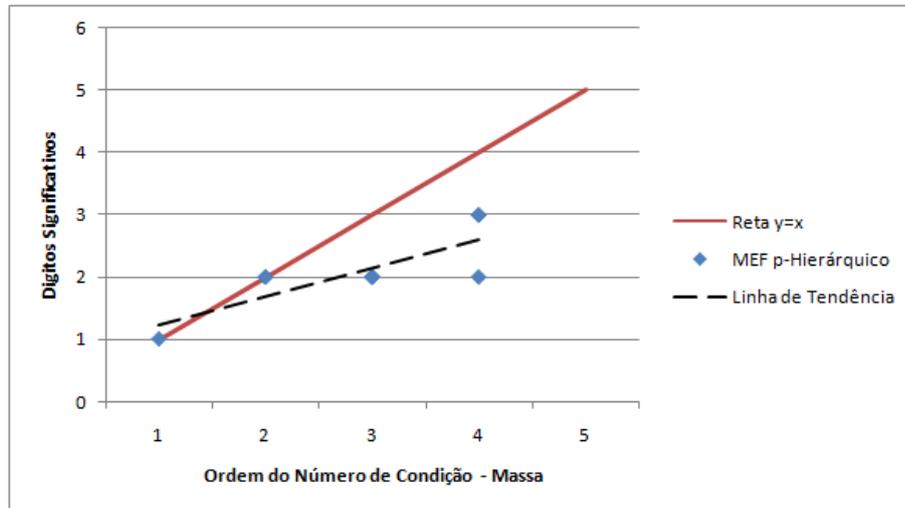


Figura 47- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 14- MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 6 |
| Ordem do número de condição | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

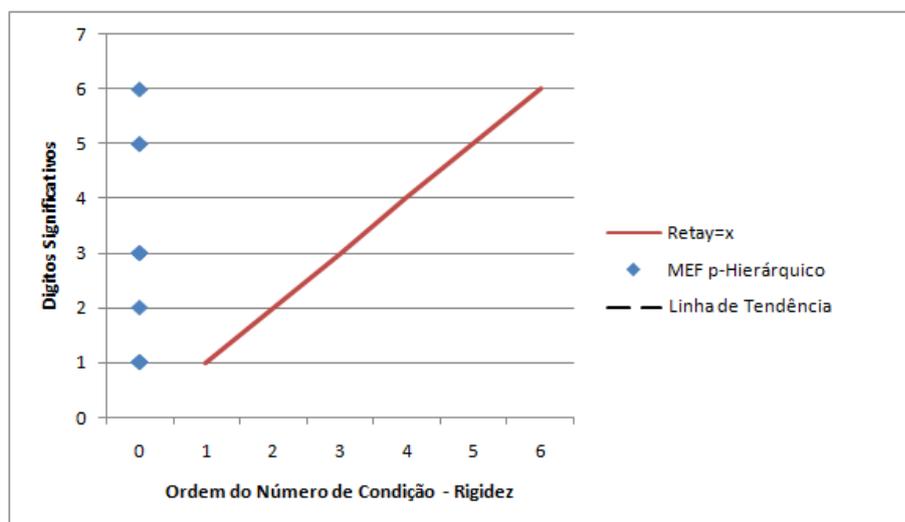


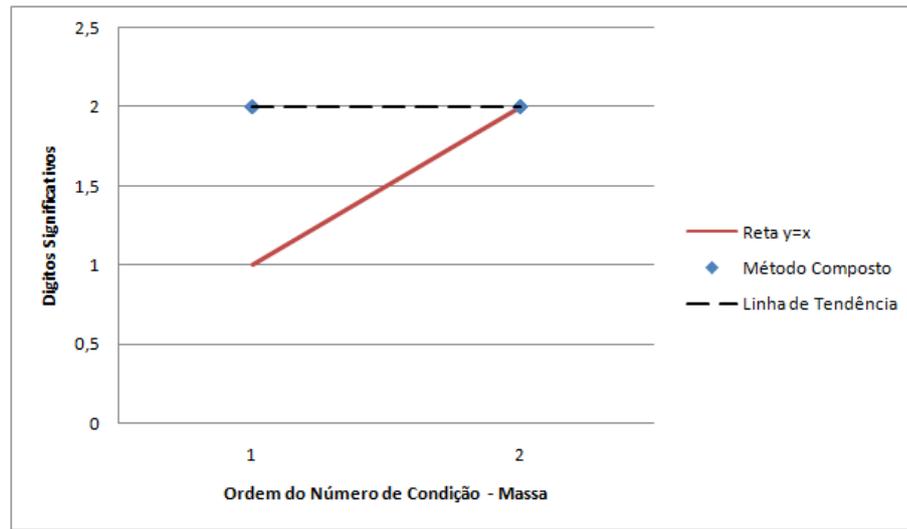
Figura 48- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Observe que a matriz de Rigidez do MEF p-Hierárquico (figura 48) é bem condicionada para os 10 primeiros níveis, ou seja $\kappa(K) = 1$.

Tabela 15- MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Ordem do número de condição | 10 ¹ | 10 ¹ | 10 ¹ | 10 ¹ | 10 ² |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 49- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA****Tabela 16- MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ**

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Ordem do número de condição | 10 ¹ | 10 ¹ | 10 ¹ | 10 ² | 10 ² | 10 ² | 10 ² | 10 ³ | 10 ³ | 10 ³ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

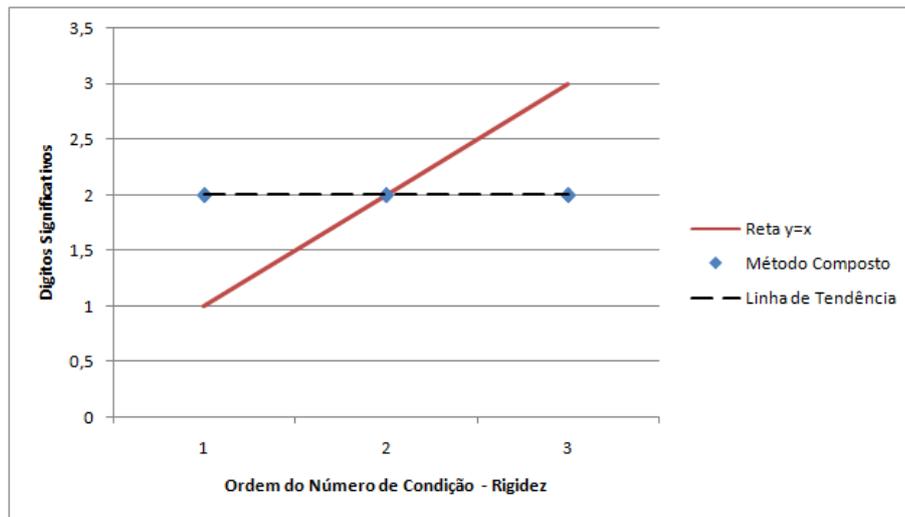


Figura 50- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 17- MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 5 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 11 | 14 | 17 |
| Ordem do número de condição | 10^3 | 10^4 | 10^6 | 10^7 | 10^9 | 10^{10} | 10^{12} | 10^{13} | 10^{15} | 10^{17} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

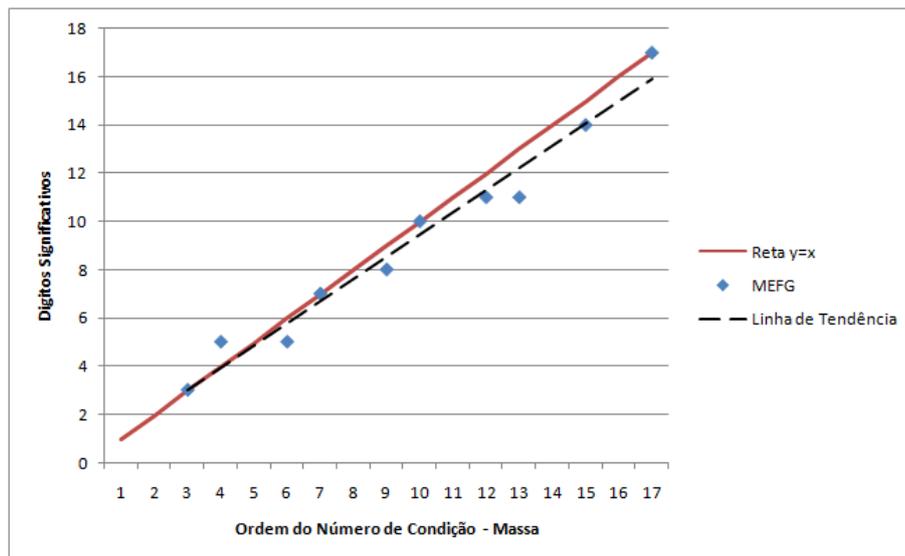
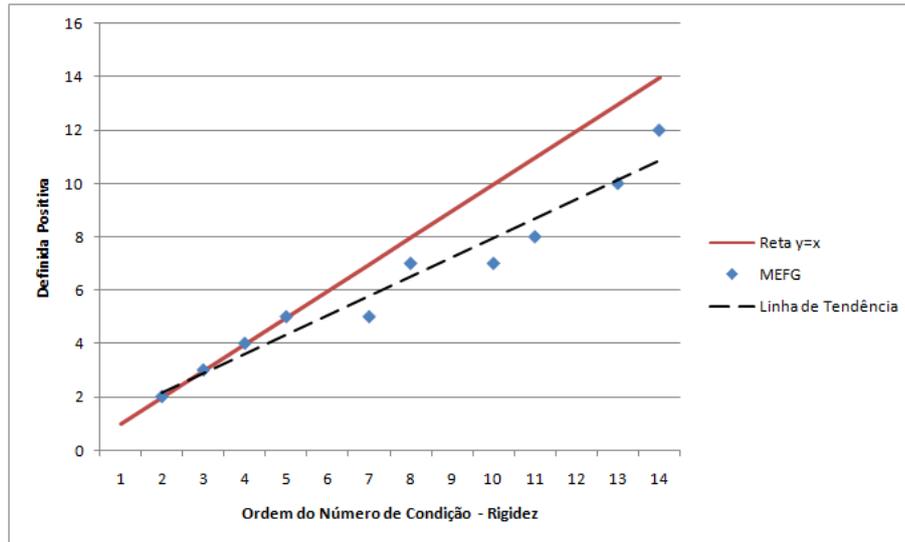


Figura 51- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 18- MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 7 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^7 | 10^8 | 10^{10} | 10^{11} | 10^{13} | 10^{14} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 52- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ****Tabela 19- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA**

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | 10^7 | 10^8 | 10^8 | 10^9 | 10^9 | 10^9 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

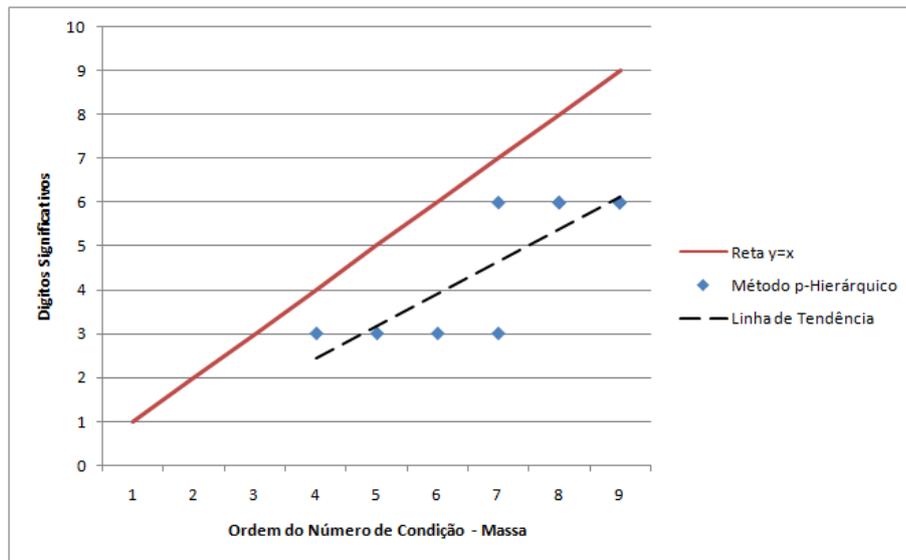


Figura 53- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 20- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Ordem do número de condição | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^1 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

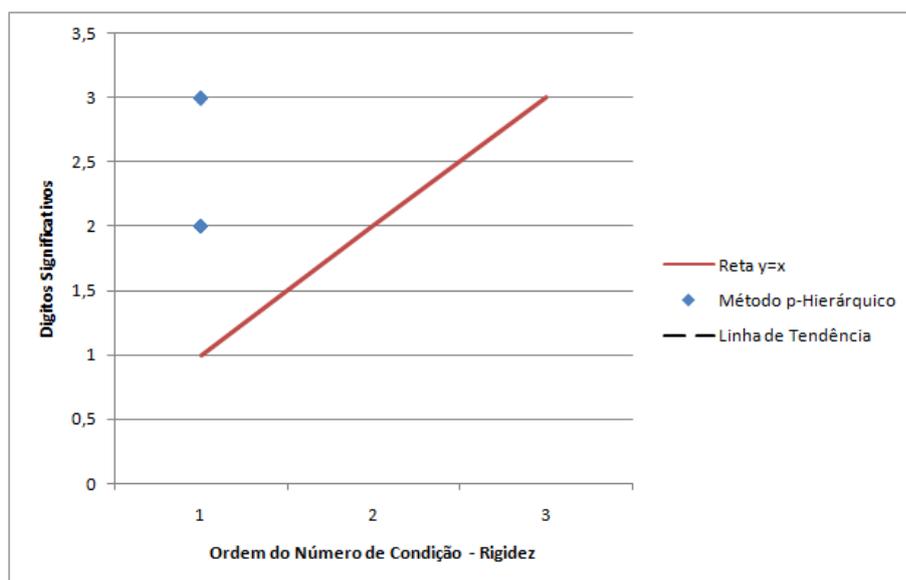
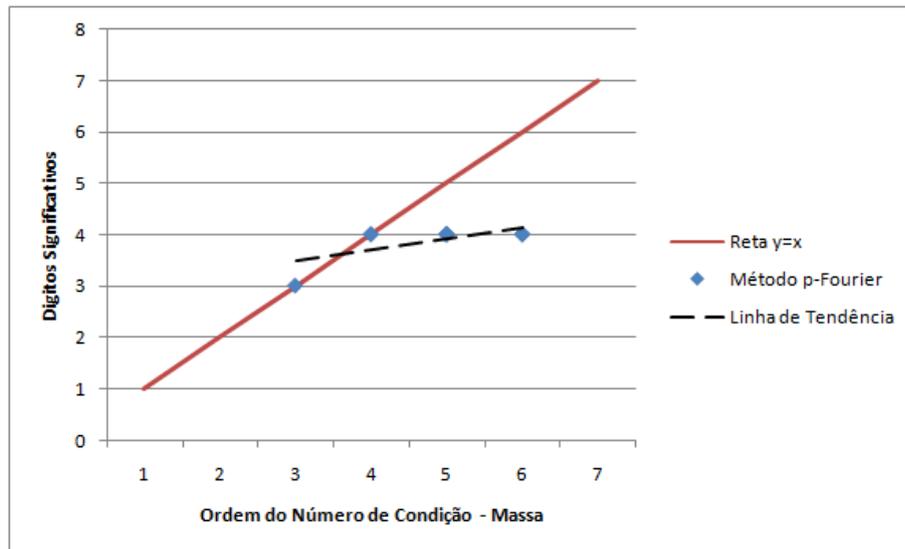


Figura 54- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 21- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Ordem do número de condição | 10 ³ | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁵ | 10 ⁵ | 10 ⁵ | 10 ⁵ | 10 ⁶ | 10 ⁶ | 10 ⁶ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 55- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA****Tabela 22- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ**

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Ordem do número de condição | 10 ¹ | 10 ³ | 10 ³ | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁵ | 10 ⁵ | 10 ⁵ | 10 ⁵ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

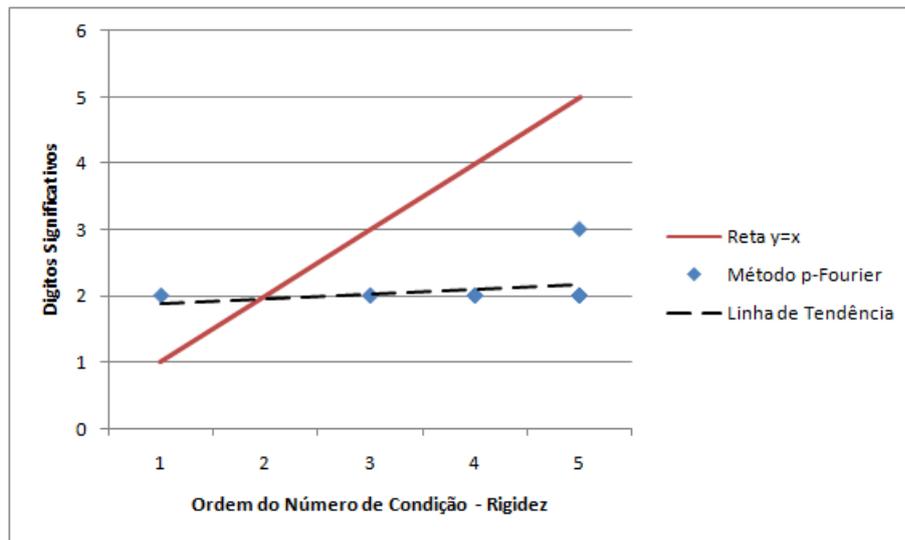


Figura 56- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 23- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de dígitos significativos ^a | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Ordem do número de condição | 10 ³ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

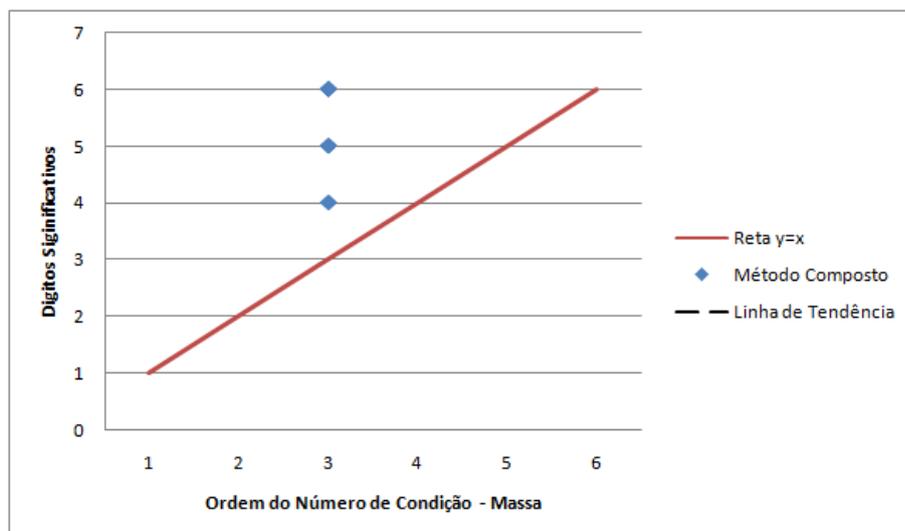
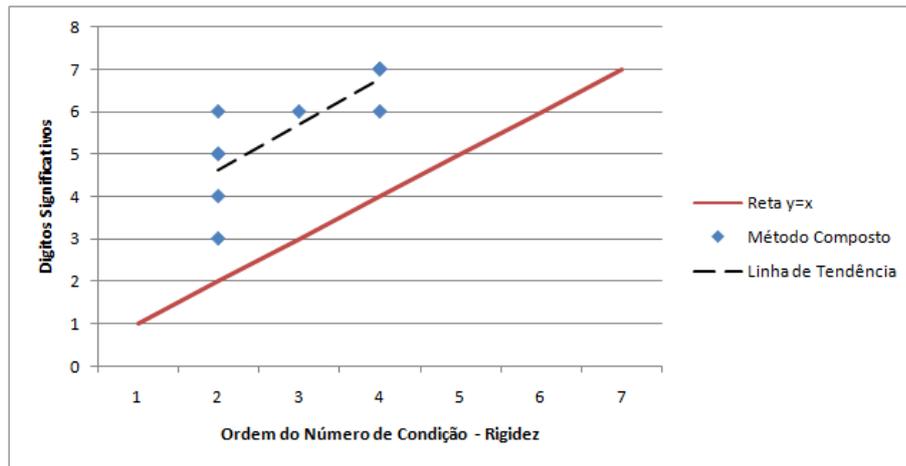


Figura 57- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 24- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^4 | 10^4 | 10^4 |

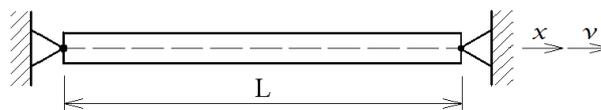
^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 58- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ**

Nota-se que para o Método Composto, a relação entre o número de condição e os dígitos significativos para que a matriz se torne definida positiva, não é válida, mas é aceitável para os demais métodos. E para este caso no qual foram consideradas condições de contorno, esta relação como observado vale tanto para a matriz de massa quanto para rigidez.

5.2.2 CONDIÇÃO DE CONTORNO 2

Para esta última análise foi imposta uma segunda condição de contorno, onde considerou-se o caso de barra fixa-fixa (figura 59) e viga biapoiada (figura 60).

**Figura 59- BARRA FIXA-FIXA**

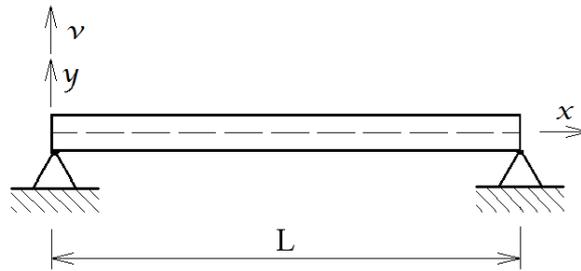


Figura 60- VIGA BIAPOIADA

As figuras 61 a 76 abaixo, relacionadas com suas respectivas tabelas, apresentam dados com até 10 níveis de enriquecimento. Como anteriormente, diferente do problema que não apresenta condições de contorno, para este caso a matriz de rigidez apresenta número de condição; possibilitando uma análise sobre o número de condição como realizado anteriormente.

Tabela 25- MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de dígitos significativos ^a | 5 | 8 | 10 | 17 | 21 | 24 | 28 | 34 | 35 | 40 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^8 | 10^{12} | 10^{15} | 10^{21} | 10^{25} | 10^{29} | 10^{33} | 10^{38} | 10^{42} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

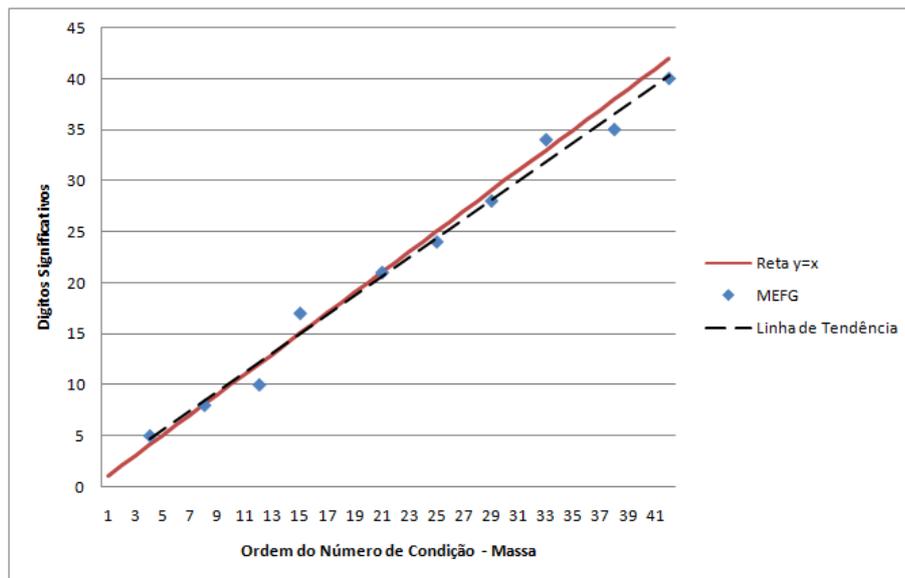


Figura 61- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 26- MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 7 | 9 | 14 | 18 | 23 | 26 | 33 | 34 | 40 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^7 | 10^9 | 10^{14} | 10^{18} | 10^{23} | 10^{26} | 10^{33} | 10^{34} | 10^{40} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

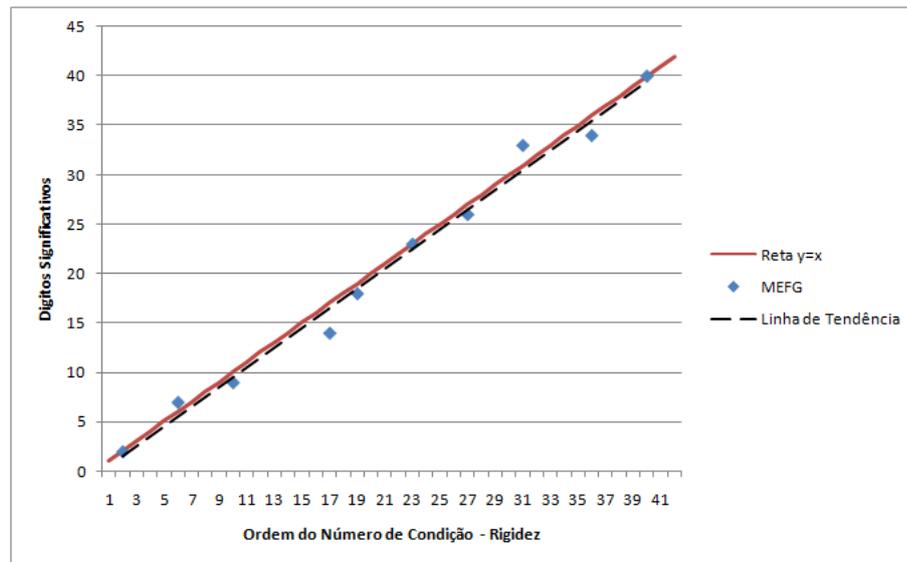


Figura 62- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 27- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^5 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | 10^7 | 10^7 | 10^8 | 10^8 | 10^8 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

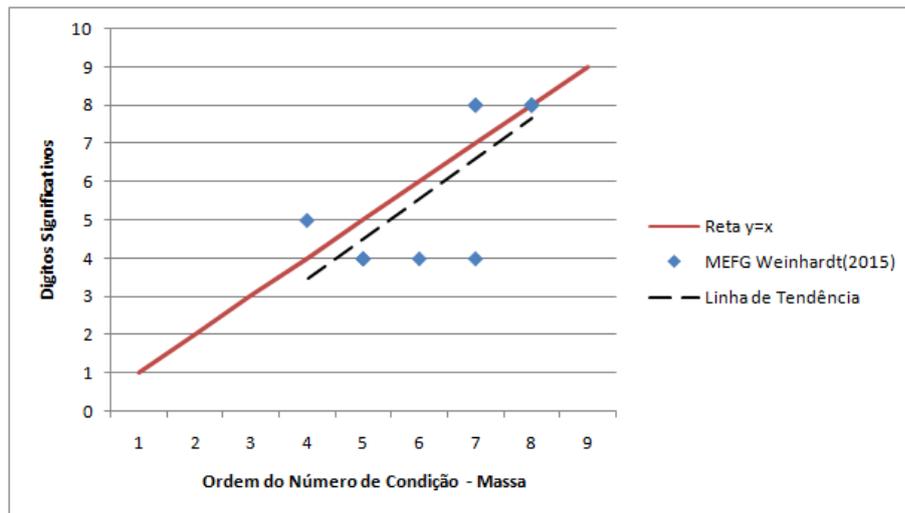


Figura 63- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 28- MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^4 | 10^4 | 10^5 | 10^5 | 10^6 | 10^6 | 10^6 | 10^6 | 10^7 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

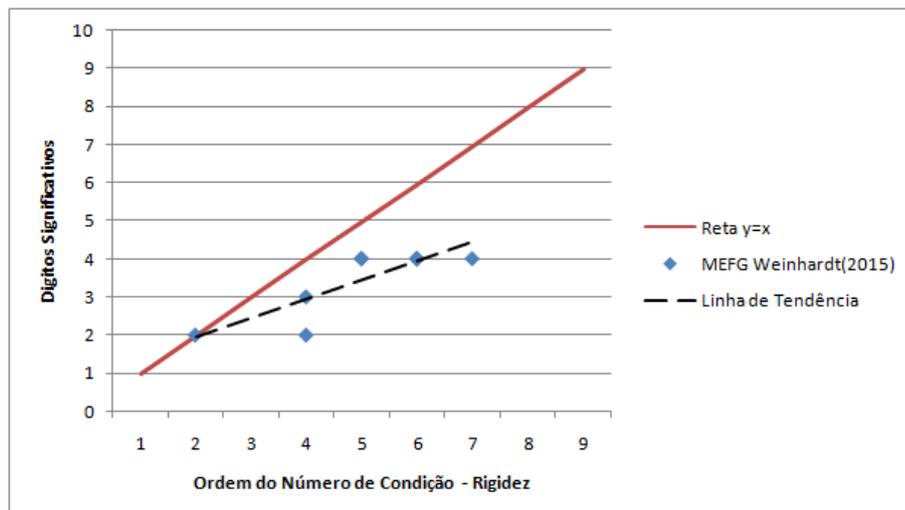
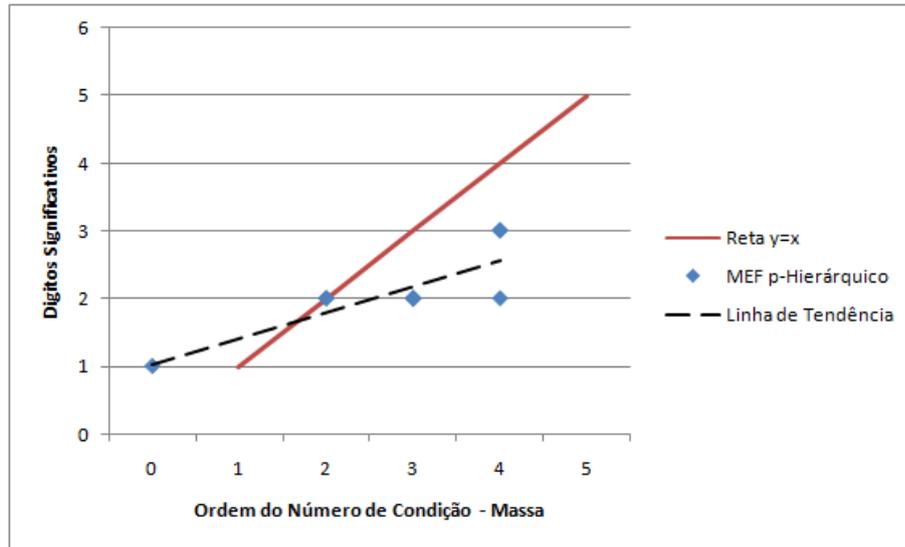


Figura 64- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG WEINHARDT *et al.* (2015) (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 29- MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| Ordem do número de condição | 10 ⁰ | 10 ² | 10 ² | 10 ³ | 10 ³ | 10 ³ | 10 ³ | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁴ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 65- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA****Tabela 30- MEF P-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ**

| | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 6 |
| Ordem do número de condição | 10 ⁰ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

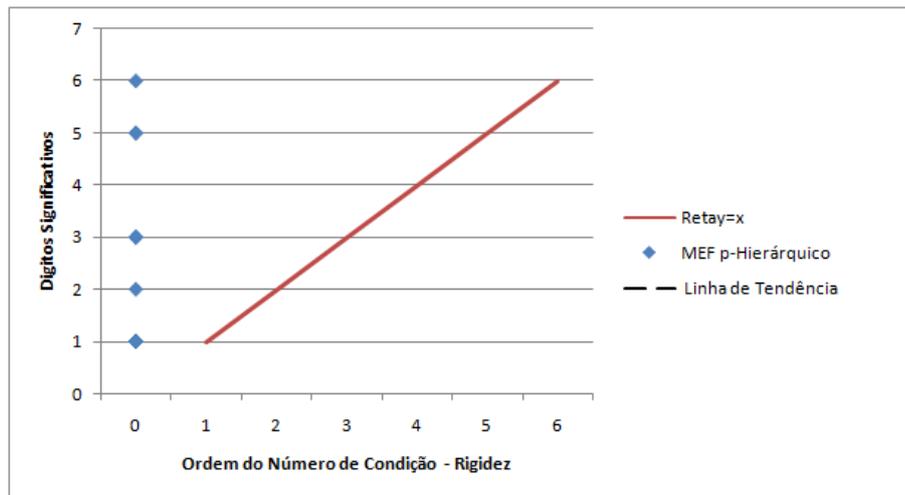


Figura 66- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF p-HIERÁRQUICO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Observe que a matriz de Rigidez do MEF p-Hierárquico, figura 66, nesse exemplo é bem condicionada para os 10 primeiros níveis e a matriz de Massa, figura 65, é bem condicionada apenas para o primeiro nível, ou seja $\kappa(M) = 1$.

Tabela 31- MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Ordem do número de condição | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^0 | 10^1 | 10^1 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

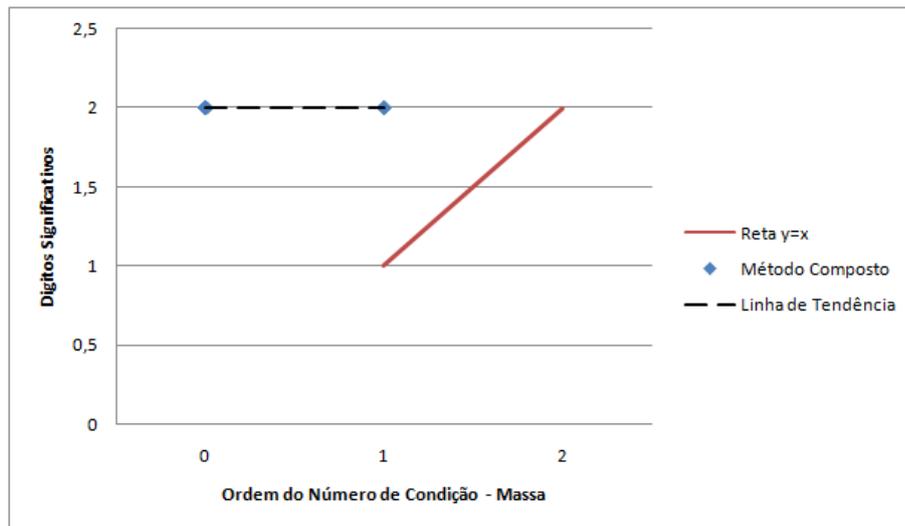


Figura 67- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE MASSA

Observe que a matriz de Massa do Método Composto, figura 67, para esse exemplo é bem condicionada apenas para os oito primeiros níveis, ou seja $\kappa(K) = 1$.

Tabela 32- MÉTODO COMPOSTO (BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Ordem do número de condição | 10^1 | 10^1 | 10^1 | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^3 | 10^3 | 10^3 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

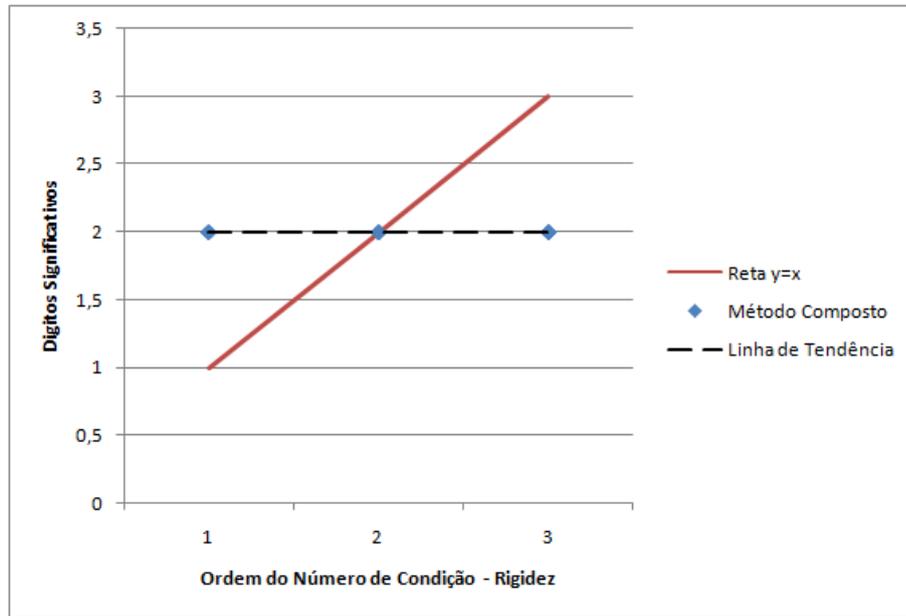


Figura 68- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO(BARRA) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 33- MEFG (VIGA) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 5 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 11 | 14 | 17 |
| Ordem do número de condição | 10 ³ | 10 ⁴ | 10 ⁶ | 10 ⁷ | 10 ⁹ | 10 ¹⁰ | 10 ¹² | 10 ¹³ | 10 ¹⁵ | 10 ¹⁷ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

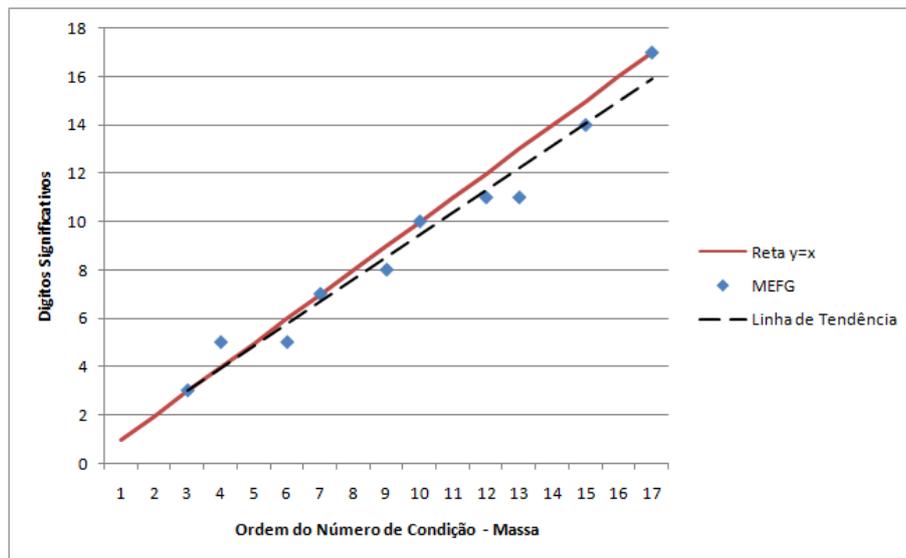
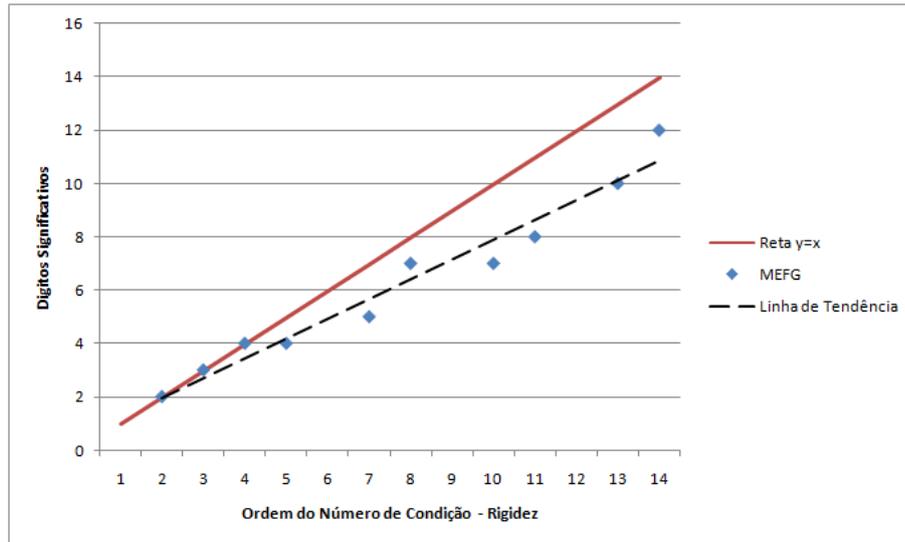


Figura 69- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 34- MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 7 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^7 | 10^8 | 10^{10} | 10^{11} | 10^{13} | 10^{14} |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 70- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEFG (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ****Tabela 35- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA**

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Ordem do número de condição | 10^4 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | 10^7 | 10^8 | 10^8 | 10^9 | 10^9 | 10^9 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

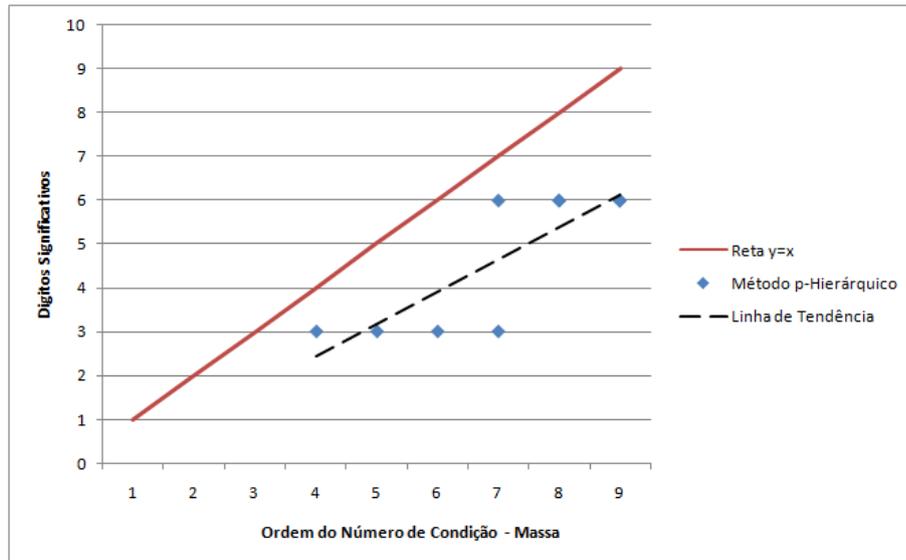


Figura 71- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 36- MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Ordem do número de condição | 10 ¹ |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

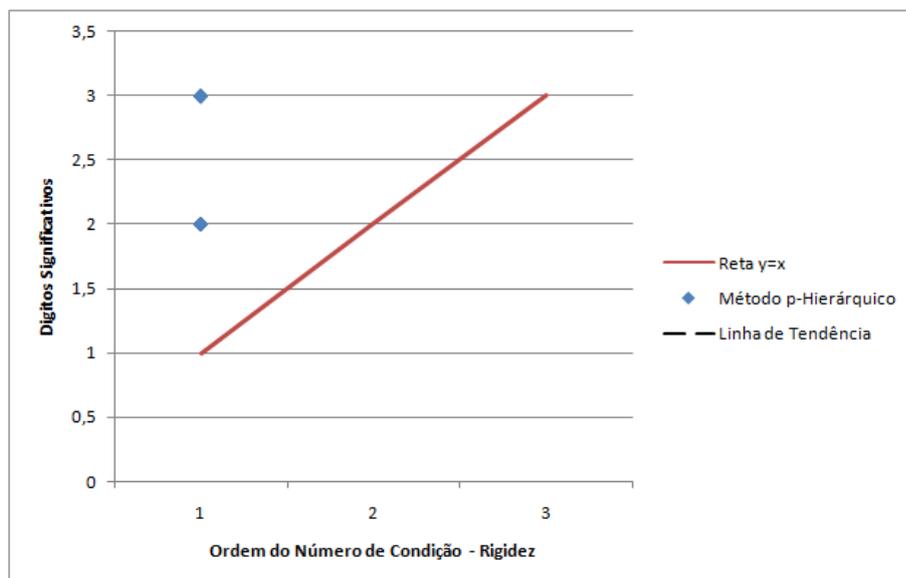
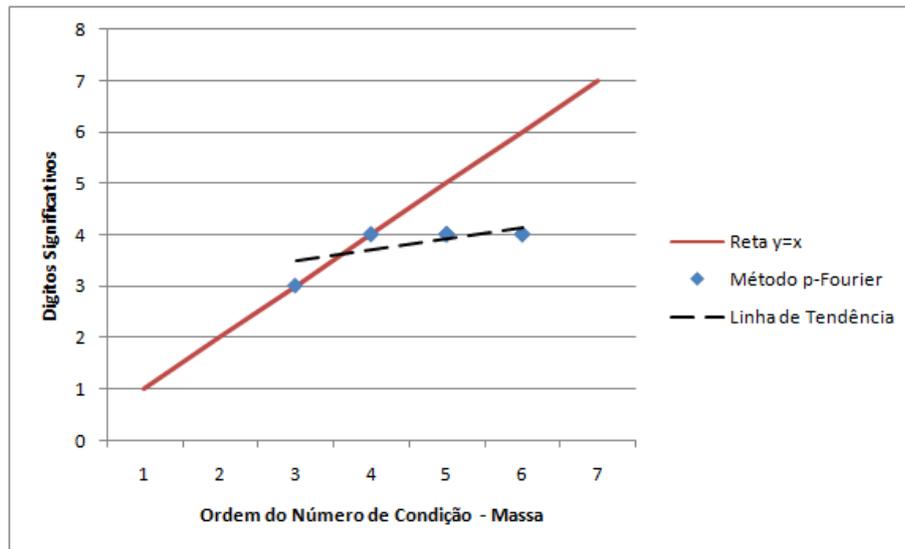


Figura 72- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-HIERÁRQUICO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 37- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Ordem do número de condição | 10^3 | 10^4 | 10^4 | 10^5 | 10^5 | 10^5 | 10^5 | 10^6 | 10^6 | 10^6 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 73- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA****Tabela 38- MEF P-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ**

| | | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de dígitos significativos ^a | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| Ordem do número de condição | 10^1 | 10^3 | 10^3 | 10^4 | 10^4 | 10^4 | 10^5 | 10^5 | 10^5 | 10^5 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

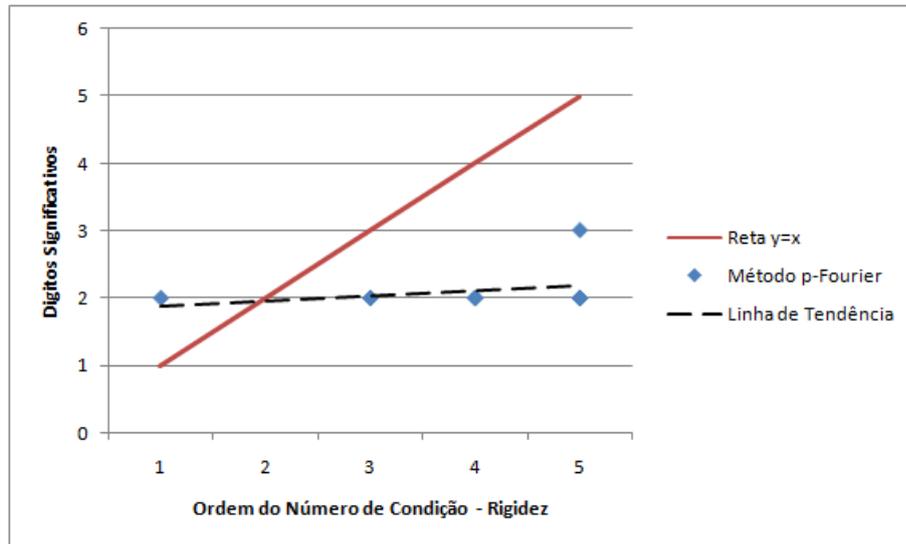


Figura 74- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MEF p-FOURIER (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tabela 39- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Ordem do número de condição | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

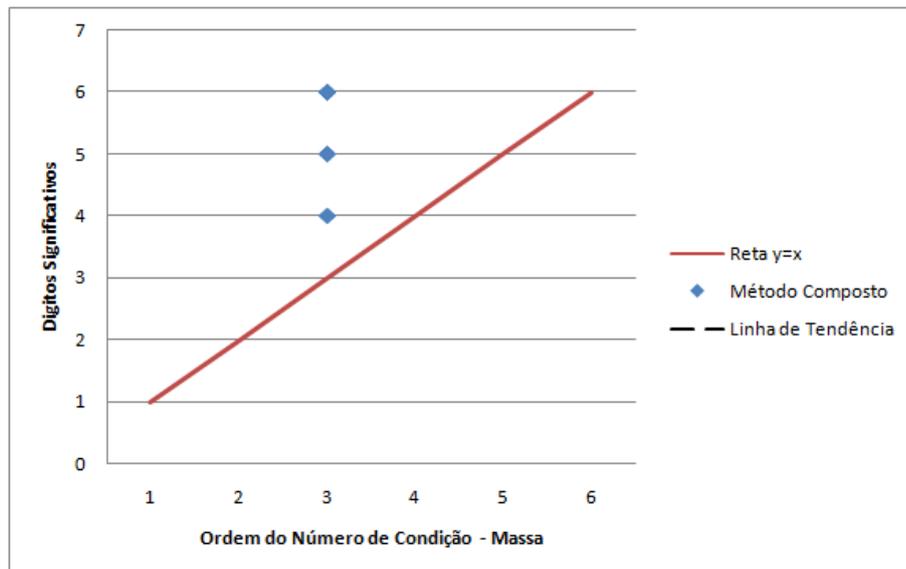
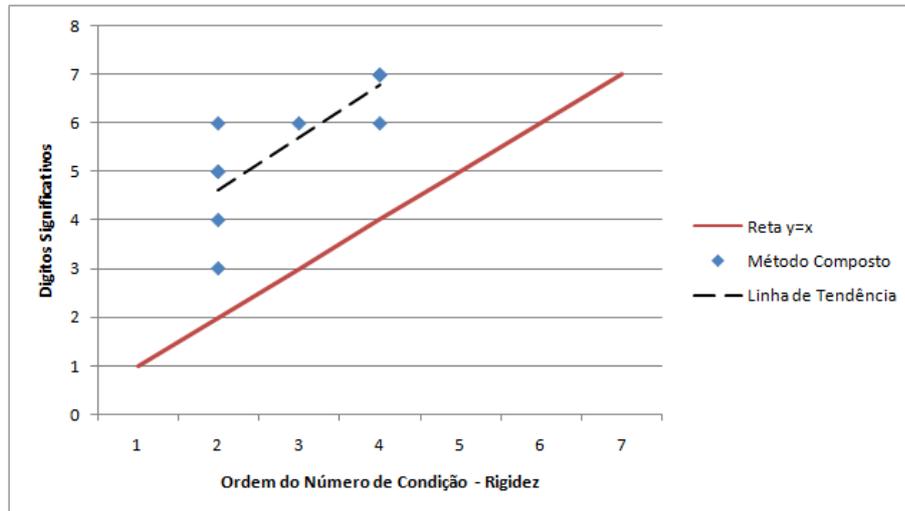


Figura 75- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE MASSA

Tabela 40- MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ

| Número de Níveis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Número de dígitos significativos ^a | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| Ordem do número de condição | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^4 | 10^4 | 10^4 |

^a Para que a matriz se torne definida positiva.

**Figura 76- NÚMERO DE CONDIÇÃO × DÍGITOS SIGNIFICATIVOS - MÉTODO COMPOSTO (VIGA DE EULER BERNOULLI) - MATRIZ DE RIGIDEZ**

Pelos resultados apresentados até então, observa-se que as matrizes geradas numericamente apresentam perturbação, mas esta é pequena, quando comparada às matrizes geradas analiticamente e, conforme o aumento do número de dígitos, essa perturbação concentra-se apenas nos níveis mais altos de enriquecimento. Sendo assim, pela definição apresentada de condicionamento das matrizes, elas seriam bem-condicionadas, entretanto o número de condição calculado, para a maioria dos casos, informa que as matrizes são mal condicionadas.

Percebe-se também uma correlação entre o número de dígitos significativos, para que a matriz de massa torne-se definida positiva e a ordem do número de condição, e esta correlação vale para a maioria métodos testados neste trabalho, não valendo para o Método Composto quando impostas condição de contorno. Portanto, quando observa-se a ordem do número de condição sabe-se que, com alguma aproximação razoável, a partir deste número de dígitos significativos a matriz em questão é definida-positiva.

Nas figuras 77 e 78, estão os gráficos com o desempenho do número de condição da matriz de massa de todos os métodos para os 10 primeiros níveis com 100 dígitos significativos em relação ao número total de graus de liberdade, utilizou-se o método da quadratura de Gaus

com dez pontos de integração para obter a aproximação numérica; e não foram considerados condições de contorno no problema.

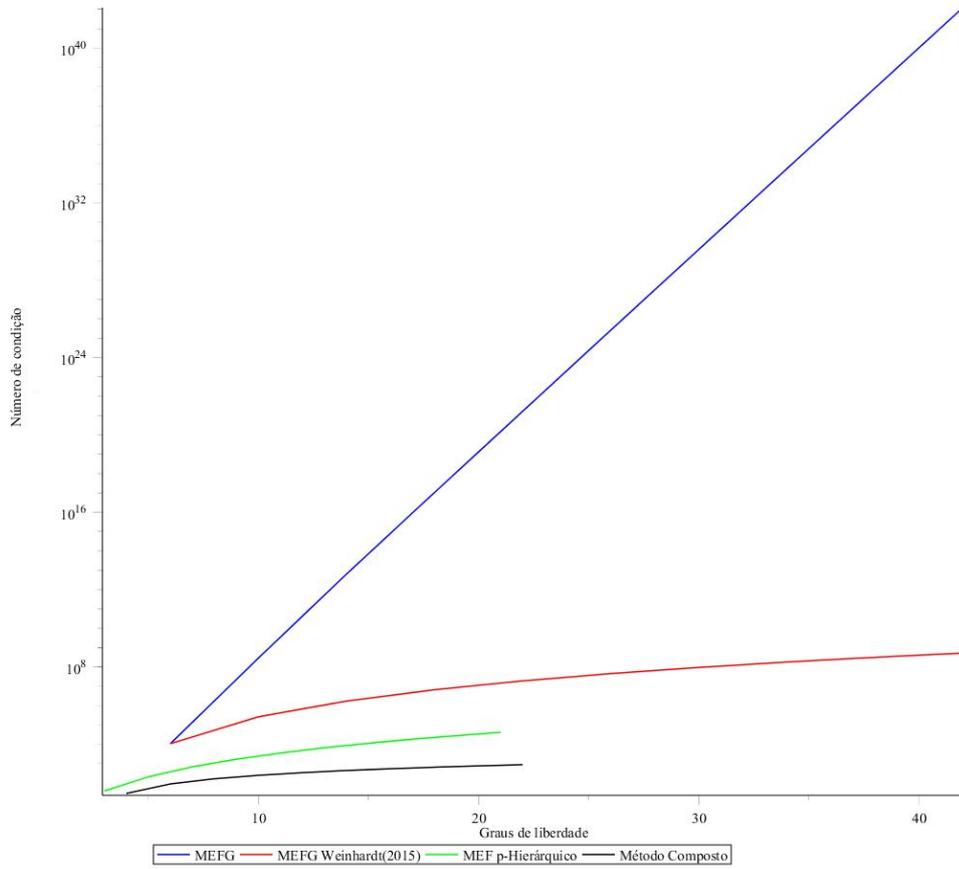


Figura 77- NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA BARRA

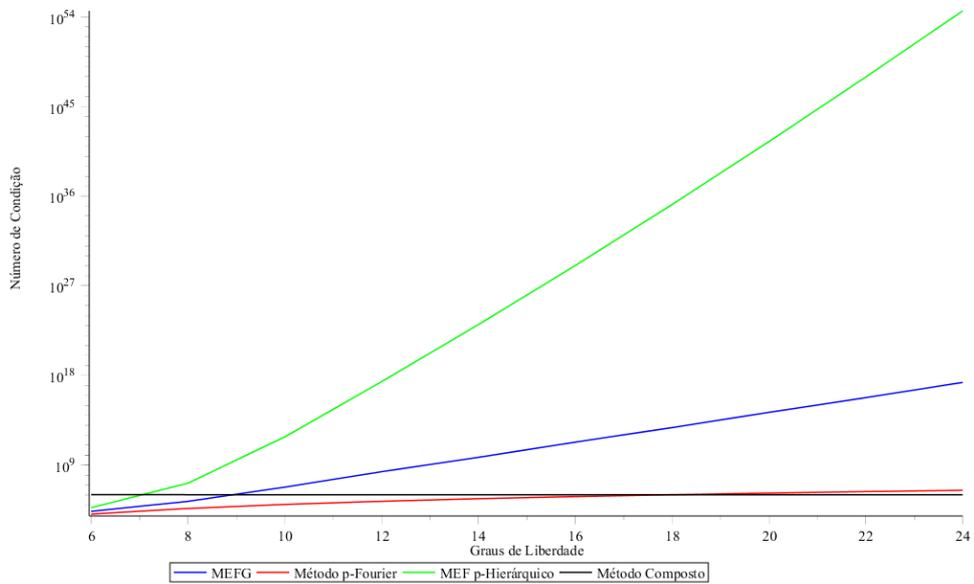


Figura 78- NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA VIGA DE EULER BERNOULLI

Nota-se que para o caso da barra o Método Composto é o mais estável. Entretanto para o caso da viga de Euler Bernoulli, nos primeiros graus de liberdade o Método dos Elementos Finitos p-Fourier é o mais estável, mas conforme o crescimento dos graus de liberdade o Método Composto volta a ser o mais estável, dentre os métodos avaliados. A comparação do número de condição permite avaliar a estabilidade do método empregado.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo geral fazer uma análise do condicionamento, sensibilidade e perturbação do problema de autovalores generalizado produzido pela aplicação de métodos aproximados na análise de vibração livre de barras e vigas de Euler Bernoulli. Para isso primeiramente foi realizado um levantamento sobre a teoria matemática relacionada ao problema de autovalor generalizado, $Ax - \lambda Bx = 0$, no qual a principal descoberta foi que se a matriz B é definida positiva então esta matriz pode ser decomposta como produto de matrizes não singulares, transformando o problema de autovalor generalizado em um problema padrão, que é um problema bem condicionado conforme Bazán (2003). Apesar disso, o problema de autovalor generalizado de vibração livre ainda apresenta sensibilidade quanto à precisão empregada na construção numérica das matrizes. Essa sensibilidade está diretamente ligada com os erros de aproximação gerados pelos métodos aproximados, utilizados para resolução do problema de vibração livre, na construção das matrizes de massa e rigidez, que por fim provocam perturbações nos autovalores.

Feito um levantamento de como as matrizes são construídas por alguns métodos enriquecidos, e levando em consideração que o problema que está sendo considerado é bem condicionado, ou deveria ser, algumas questões foram levantadas como o quanto as matrizes geradas pelas aproximações numéricas são diferentes das exatas. Para responder essas questões uma análise de erro foi feita sobre as matrizes. A estimativa de erro utilizada foi a de erro absoluto, pois o objetivo desta análise foi apenas averiguar se as matrizes que foram geradas pelas aproximações numéricas estavam sendo perturbadas e o quanto estavam sendo. Constatou-se que as matrizes estavam sendo perturbadas, entretanto as perturbações são pequenas quando comparadas as matrizes geradas pela aproximações com as matrizes exatas. E quando as matrizes estão sob as hipóteses de bom condicionamento ou seja, são definidas positivas, esta perturbação torna-se praticamente insignificante.

Considerando o estudo realizado até então uma segunda investigação foi efetuada, onde observou-se uma correlação direta entre a potência da ordem do número de condição da matriz de massa e a quantidade de dígitos significativos (precisão) necessária para que a matriz de massa torne-se numericamente definida positiva, ou seja, quando a mesma satisfaz as hipóteses

para o bom condicionamento. Quando considerado o exemplo onde não há condições de contorno, pode-se observar que essa correlação é válida para os todos métodos estudados, entretanto quando impostas condições de contorno o Método Composto não a satisfaz; para o MEFG a correlação é muito boa e para os Métodos p-hierárquico, p-Fourier e MEFG-Weinhardt pode ser considerada como uma boa aproximação para o limite superior da precisão necessária; sendo assim pode-se dizer que a correlação é válida quando considerados uma aproximação aceitável.

Logo, conclui-se que a ordem de grandeza do número de condição da matriz de massa pode ser utilizado para estimar a precisão necessária na construção da matriz de massa e portanto ser também empregada na comparação de estabilidade de diferentes propostas de funções de enriquecimento para análises de vibração livre de barras e vigas de Euler Bernoulli.

Visando todos os resultados apresentados, sugerem-se futuros trabalhos com o objetivo de explorar profundamente ainda mais esse tema, como por exemplo:

- A utilização de diferentes algoritmos para obter o número de condição com a menor perturbação possível e, assim, averiguar se a correlação permanece.
- No caso do MEFG, utilizar diferentes enriquecimentos, e verificar qual o mais estável e se a correlação permanece.
- Verificar para outros casos, como por exemplo pórticos, placas, entre outros.

REFERÊNCIAS

- ARAGÓN, A. M.; DUARTE, C. A.; GAUBELLE, P. H. Generalized finite element enrichment functions for discontinuous gradient fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 82, p. 242–268, 2010.
- ARNDT, M. **O Método Dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado À Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; NATUME, P. M. Generalized Finite Element Method Using Bessel Functions in Vibration Analysis. **CILAMCE 2014 Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, p. 14, 2014.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. Generalized Finite Element for Vibration Analysis of Bars and Trusses. **XXIX CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2008.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. Comparative Analysis of the Adaptive Generalized Finite Element Method and the Finite Element Method for Free Vibration of Bars. **Mecânica Computacional**, XXIX, p. 15–18, 2010.
- BAI, Z. *et al.* **Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. ISBN 978-0-89871-471-5. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898719581>>.
- BARDELL, N. S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, n. 2, p. 263–289, 1991. ISSN 0022460X.
- BARROS, F. B. **Métodos sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas**. 222 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2002.
- BATHE, K.; BERGAN, P.; WUNDERLICH, W. **Finite Element Methods for Nonlinear Problems: Proceedings of the Europe-US Symposium The Norwegian Institute of Technology, Trondheim Norway, August 12–16, 1985**. Springer Berlin Heidelberg, 1986. ISBN 9783540162261. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q41zmwEACAAJ>>.
- BAZÁN, F. S. V. **Autovalores de Polinômios Matriciais : Sensibilidade, Computação e Aplicação**. [S.l.: s.n.], 2003. ISBN 85-244-0206-7.
- BEL, E. D.; VILLON, P.; BOUILLARD, P. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 9, p. 1105–1126, 2005. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1202>>.

BÖRN, S.; MEHL, C. **Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems**. [S.l.]: De Gruyter Graduate Lectures, 2012. ISBN 978-3-11-025033-6.

BUNSE-GERSTNER, A. An algorithm for the symmetric generalized eigenvalue problem. **Linear Algebra and its Applications**, v. 58, n. 1984, p. 43–68, apr 1984. ISSN 00243795. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0024379584902039>>.

CARVALHO, N. M. V. D. **Cálculo automático de estruturas. Análise estrutural de pórticos planos utilizando o método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2010.

CLINT, M.; JENNINGS, A. The evaluation of eigenvalues and eigenvectors of real symmetric matrices by simultaneous iteration. **The Computer Journal**, v. 13, n. 1, p. 76–80, jan 1968. ISSN 0010-4620. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/15003161> <http://comjnl.oupjournals.org/cgi/doi/10.1093/comjnl/13.1.76>>.

COOK, R. D. *et al.* **Concept and Applications of Finite Element Analysis**. Madison: John Wiley & Sons, 2002. 733 p. ISBN 978-0-471-35605-9.

DEDIEU, J.-P. Condition operators, condition numbers, and condition number theorem for the generalized eigenvalue problem. **Linear Algebra And Its Applications**, v. 4, p. 1–24, 1997.

DEMME, J. W. **Applied Numerical Linear Algebra**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. 1–432 p. ISBN 0898713897.

ENGELS, R. Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 114, n. 1, p. 3–9, 1992.

FORD, W. **Numerical Linear Algebra with Applications - Using Matlab**. [S.l.]: Elsevier Inc., 2015. 605 p. ISBN 9780123944351.

GANESAN, N.; ENGELS, R. Hierarchical Bernoulli-Euler beam finite elements. **Computers & structures**, Elsevier, v. 43, n. 2, p. 297–304, 1992.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix Computations**. [S.l.]: JHU Press, 2012. 1–721 p. ISBN 0801854148.

GOLUB, G. H.; WILKINSON, J. H. Ill-Conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form. **SIAM Review**, v. 18, n. 4, p. 578–619, oct 1976. ISSN 0036-1445. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1018113>>.

HAGER, W. W. Condition estimates. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v. 5, n. 2, p. 311–316, jun 1984. ISSN 0196-5204. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0905023>>.

HARARI, I. A survey of finite element methods for time-harmonic acoustics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 195, n. 13, p. 1594–1607, 2006.

HIGHAM, D. Condition numbers and their condition numbers. **Linear Algebra and its Applications**, v. 213, n. 1995, p. 193–213, 1995. ISSN 00243795. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(93\)00066-9](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(93)00066-9)>.

- HUGHES, T. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. [s.n.], 1987. 2000 p. ISBN 013317025X. Disponível em: <<http://www.philadelphia.edu.jo/newlibrary/pdf/file20308887f6494c29957a6610d0476b4c.pdf>>.
- INMAN, D. J. **Engineering vibration**. [S.l.]: New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- LEUNG, A.; CHAN, J. Fourier p-Element for the Analysis of Beams and Plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212(1), p. 179–185, 1998.
- LEUNG, A. *et al.* Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, n. 1-2, p. 67–81, mar 2004. ISSN 0022460X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X03002633>>.
- LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B. Fourier p-elements for curved beam vibrations. **Thin-Walled Structures**, v. 42, n. 1, p. 39–57, 2004. ISSN 02638231.
- LI, H. A note on the conditioning of a class of generalized finite element methods. **Applied Numerical Mathematics**, Elsevier B.V., v. 62, n. 6, p. 754–766, jun 2012. ISSN 01689274. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2011.05.004> <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927411000870>>.
- LI, L. *et al.* Eigensensitivity analysis of damped systems with distinct and repeated eigenvalues. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 72, p. 21–34, 2013. ISSN 0168874X.
- LOAN, C. V. On estimating the condition of eigenvalues and eigenvectors. **Linear Algebra and its Applications**, v. 88-89, p. 715–732, apr 1987. ISSN 00243795. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0024379587901315>>.
- LU, C.; SHANKER, B. Generalized finite element method for vector electromagnetic problems. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 55, n. 5, p. 1369–1381, 2007.
- MARTIN, R. S.; WILKINSON, J. H. Reduction of the symmetric eigenproblem $Ax = \lambda Bx$ and related problems to standard form. **Numerische Mathematik**, v. 11, n. 2, p. 99–110, feb 1968. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02165306>>.
- MELENK, J.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, 1996. ISSN 00457825.
- NIRSCHL, G. C. **Método dos Elementos Finitos e Técnicas de Enriquecimento da Aproximação Aplicados à Análise de Tubos Cilíndricos e Cascas Esféricas**. 1–103 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2005.
- PAPATHANASIOU, N.; PSARRAKOS, P. On condition numbers of polynomial eigenvalue problems. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier Inc., v. 216, n. 4, p. 1194–1205, 2010. ISSN 00963003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2010.02.011>>.
- PARLETT, B. N. **The Symmetric Eigenvalue Problem**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. ISBN 978-0-89871-402-9. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611971163>>.
- QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics**. [s.n.], 2007. ISBN 0939-2475. Disponível em: <<http://www.amazon.com/dp/3540346589>>.

REDDY, B. D. **Functional Analysis and Boundary-Value Problems: An Introductory Treatment**. [S.l.: s.n.], 1986. 173 p. ISSN 0036-1445. ISBN 0-582-98826-8.

RENEGAR, J. Is it possible to know a problem instance is ill-posed? **Journal of Complexity**, v. 10, n. 1, p. 1–56, mar 1994. ISSN 0885064X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0885064X84710016>> <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0885064X84710016>>.

RUHE, A. Properties of a matrix with a very ill-conditioned eigenproblem. **Numerische Mathematik**, v. 15, n. 1, p. 57–60, may 1970-a. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02165660>>.

RUHE, A. Perturbation bounds for means of eigenvalues and invariant subspaces. **Bit**, v. 10, n. 3, p. 343–354, 1970–b. ISSN 0006-3835. Disponível em: <<http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF01934203>>.

SAAD, Y. **Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. ISBN 978-1-61197-072-2. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611970739>>.

SCHOCK, E. What are the proper condition numbers of discretized ill-posed problems? **Linear Algebra and its Applications**, v. 81, p. 129–136, 1986. ISSN 00243795.

SCOTTI, M. **O Problema Quadrático de Autovalor em Vibrações e Nanotecnologia**. 109 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande de Sul, 2007.

SHANG, H. Y. **Análise Dinâmica Elastoplástica de Problemas da Mecânica de Sólidos via Métodos Enriquecidos de Elementos Finitos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2014.

SILVA, J. D. **Análise de Estimadores de Erro a Posteriori Aplicados ao Método dos Elementos Finitos Utilizando Refino H-Adaptativo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2015.

SMITH, R. A. The condition numbers of the matrix eigenvalue problem. **Numerische Mathematik**, v. 10, n. 3, p. 232–240, oct 1967. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02162166>>.

SOLÍN, P.; SEGETH, K.; DOLEZEL, I. **Higher-Order Finite Element Methods**. [S.l.]: CRC Press, 2004. ISBN 158488438-X.

SORIANO, H. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2009. ISBN 9788573938807.

SORIANO, H.; LIMA, S. D. S. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. [S.l.]: EDUSP, 2003. ISBN 9788531407307.

STEWART, G. W. Accelerating the orthogonal iteration for the eigenvectors of a Hermitian matrix. **Numerische Mathematik**, v. 13, n. 4, p. 362–376, 1969. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02165413>>.

STEWART, G. W. Error bounds for approximate invariant subspaces of closed linear operators. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 8, n. 4, p. 796–808, dec 1971. ISSN 0036-1429. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0708073>>.

STEWART, G. W. Error and perturbation bounds for subspaces associated with certain eigenvalue problems. **SIAM Review**, v. 15, n. 4, p. 727–764, oct 1973. ISSN 0036-1445. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1015095>>.

STEWART, G. W. **Matrix Perturbation Theory**. [S.l.: s.n.], 1990.

STEWART, G. W. On the perturbation of LU, Cholesky, and QR factorizations. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 14, n. 4, p. 1141–1145, oct 1993. ISSN 0895-4798. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0614078>>.

SUAREZ, O. A. G. D. *et al.* On the numerical determination of eigenvalues/eigenvectors using a high regularity finite element method. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier Inc., v. 39, n. 1, p. 396–413, 2015. ISSN 0307904X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0307904X14002959>>.

TISSEUR, F. Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems. **Linear Algebra and its Applications**, v. 309, n. 1-3, p. 339–361, apr 2000. ISSN 00243795. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0024379599000634>>.

TISSEUR, F.; MEERBERGEN, K. The Quadratic Eigenvalue Problem. **SIAM Review**, v. 43, n. 2, p. 235–286, jan 2001. ISSN 0036-1445. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S0036144500381988>>.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. **Engineering Computations**, v. 32, n. 6, p. 1779–1801, aug 2015. ISSN 0264-4401. Disponível em: <<http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/EC-07-2014-0144>>.

TORRES, D. A. F. **Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Placas Laminadas Compostas Inteligentes**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

WATKINS, D. S. **The Matrix Eigenvalue Problem**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 1–451 p. ISBN 9780898716412.

WEINHARDT, P. D. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento. **CILAMCE 2015 Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015.

WILKINSON, J. H. **The Algebraic Eigenvalue Problem**. [S.l.: s.n.], 1965. ISBN 0-19-8534418-3.

WILKINSON, J. H. Note on matrices with a very ill-conditioned eigenproblem. **Numerische Mathematik**, v. 19, n. 2, p. 176–178, 1972. ISSN 0029599X.

WILKINSON, J. H.; REINSCH, C. **Handbook for Automatic Computation**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1971. ISBN 978-3-642-86942-6. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-86940-2>>.

YAZID, A.; ABDELKADER, N.; ABDELMADJID, H. A state-of-the-art review of the x-fem for computational fracture mechanics. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 33, n. 12, p. 4269–4282, 2009.

ZENG, P. Composite Element Method for Vibration Analysis of Structure, Part II: C1 Element (Beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659–696, 1998–a. ISSN 0022460X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X98918545>>.

ZENG, P. Composite Element Method for Vibration Analysis of Structure, Part I: Principle and C0 Element (Bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 619–658, 1998–b. ISSN 0022460X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X98918533>>.

7 POLINÔMIOS DE LOBATTO

Abaixo estão os polinômios de Lobatto para o domínio $\Omega = [-1, 1]$ e para $0 \leq k \leq 10$.

$$\begin{aligned}
 l_0(x) &= \frac{1-x}{2}, \\
 l_1(x) &= \frac{x+1}{2}, \\
 l_2(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - 1), \\
 l_3(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (x^2 - 1)x, \\
 l_4(x) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{2}} (x^2 - 1)(5x^2 - 1), \\
 l_5(x) &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (x^2 - 1)(7x^2 - 3)x, \\
 l_6(x) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{11}{2}} (x^2 - 1)(21x^4 - 14x^2 + 1), \\
 l_7(x) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{13}{2}} (x^2 - 1)(33x^4 - 30x^2 + 5)x, \\
 l_8(x) &= \frac{1}{128} \sqrt{\frac{15}{2}} (x^2 - 1)(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5), \\
 l_9(x) &= \frac{1}{128} \sqrt{\frac{17}{2}} (x^2 - 1)(715x^6 - 1001x^4 + 385x^2 - 35)x, \\
 l_{10}(x) &= \frac{1}{256} \sqrt{\frac{19}{2}} (x^2 - 1)(2431x^8 - 4004x^6 + 2002x^4 - 308x^2 + 7).
 \end{aligned} \tag{92}$$

8 POLINÔMIOS DE BARDELL

Abaixo estão os polinômios de Bardell para o domínio $\Omega = [-1, 1]$ e para $0 \leq k \leq 10$.

$$\begin{aligned}
 l_1(x) &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}, \\
 l_2(x) &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}, \\
 l_3(x) &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}, \\
 l_4(x) &= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}, \\
 l_5(x) &= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}, \\
 l_6(x) &= \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x, \\
 l_7(x) &= \frac{7}{48}x^6 - \frac{5}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{48}, \\
 l_8(x) &= \frac{3}{16}x^7 - \frac{16}{21}x^5 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{1}{16}x, \\
 l_9(x) &= \frac{16}{33}x^8 - \frac{21}{32}x^6 + \frac{35}{64}x^4 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{1}{128}, \\
 l_{10}(x) &= \frac{128}{143}x^9 - \frac{32}{33}x^7 + \frac{64}{63}x^5 - \frac{32}{96}x^3 + \frac{128}{5}x.
 \end{aligned} \tag{93}$$