

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

HOLISSES BELLON

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NO DOMÍNIO
APLICADO À PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS COM O EMPREGO
DE SUBREGIÕES

CURITIBA

2016

HOLISSES BELLON

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NO DOMÍNIO
APLICADO À PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS COM O EMPREGO
DE SUBREGIÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Métodos Numéricos pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia do Setor de Tecnologia / Setor de Ciências Exatas, Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer

CURITIBA

2016

B447f

Bellon, Holisses.

Formulação do método dos elementos de contorno no domínio aplicado à propagação de ondas unidimensionais com o emprego de subregiões / Holisses Bellon; orientador: José Antonio Marques Carrer. - Curitiba, 2016.

48 f.

Referências: p. 44-46.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Paraná – UFPR, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Curitiba, 2016.

1. Método de Elementos de Contorno. 2. Equação de Onda 3. Ondas (Propagação). I. Carrer, José Antonio Marques. II. Título.

CDD 530.124

Catálogo na Fonte

Bibliotecária: Vanessa Gabriele de Araújo CRB 14/1498



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA
Código CAPES: 40001016030P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **HOLISSES BELLON**, intitulada: "**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO NO DOMÍNIO APLICADO À PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS COM O EMPREGO DE SUBREGIÕES**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 10 de Março de 2016.

Prof JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof JOSÉ ANTONIO FONTES SANTIAGO (UFRJ)

Prof LUIZ ALKIMIN DE LACERDA (UFPR)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer principalmente a minha mãe pelo carinho e amor recebido por todos esses anos.

A Poliana por todo companheirismo nos momentos de dificuldade e pela ajuda na formatação e ilustração de figuras da dissertação.

Gostaria também de agradecer a professores e colegas do PPGMNE que me ajudaram em todo curso de mestrado, mas gostaria de agradecer principalmente ao professor Jose Antonio Carrer por ter me aceito como seu orientando e pela paciência em toda construção do trabalho, se mostrando um excelente orientador.

RESUMO

O presente trabalho baseia-se na formulação do Método dos Elementos de Contorno para a solução de problemas de propagação de ondas unidimensionais em domínios com diferentes características físicas, utilizando uma solução fundamental independente do tempo. A técnica de subregiões foi utilizada, cada subdomínio tratado como uma subregião. Como o problema é unidimensional, o domínio é constituído por um intervalo único e o contorno por dois nós. A formulação foi validada através da comparação dos resultados com os obtidos pelo Método das Diferenças.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Subregiões, Ondas Unidimensionais.

ABSTRACT

The present work is based on the development of the Boundary Element Method to solve the problem of one-dimensional wave propagation in domains with different physical characteristics. The subregions technique was implemented, thus to each subdomain corresponding a subregion. Since the problem is one-dimensional, the domain consists of a single interval and the boundary is constituted only by the two boundary nodes. The results furnished by the proposed formulation were compared with those from the Finite Difference Method.

Key-words: Boundary Element Method, Subregions, Wave Unidimensional.

LISTA DE SÍMBOLOS

C	Velocidade de propagação da onda
Ω	Domínio do problema
Γ_u	Contorno com $u = \hat{u}$
Γ_p	Contorno em $p = \hat{p}$
N	Normal ao contorno na direção x
$u(x;t)$	Potencial / Deslocamento
$p(x;t)$	Fluxo = Reação no apoio da barra
L	Limite superior / Comprimento do domínio
\bar{w} e $\bar{\bar{w}}$	Funções de ponderação
X	Ponto campo
T	Tempo
ξ	Ponto fonte
$r x - \xi $	Distância entre o ponto fonte e ponto campo
$u_0(x)$	Deslocamento inicial
$v_0(x)$	Velocidade inicial
I_u e I_v	Integrais de domínio
A	Seção transversal
E	Módulo de elasticidade
T_x	Tensão
F	Força resultante
F_1 e F_2	Forças de tensão nas extremidades da corda
Θ	Ângulo entre a corda e a horizontal
δ	Delta de Dirac

LISTAS DE SIGLAS

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEC-D	Método dos Elementos de Contorno de Domínio
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
EDP	Equação Diferencial Parcial

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	09
1.1	OBJETIVOS.....	12
1.2	ORGANIZAÇÃO.....	13
1.3	MODELO MATEMÁTICO.....	13
1.4	REFERENCIAL TEÓRICO.....	16
2	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA.....	18
2.1	MÉTODO HOUBOLT.....	22
2.2	PARAMETRIZAÇÃO DO MEC-D.....	23
2.4	SUB-REGIÕES.....	24
3	RESULTADOS.....	26
3.1	BARRA HOMOGÊNEA.....	26
3.2	BARRAS HETEROGÊNEAS.....	35
3.2.1	Barra Heterogênea com duas sub-regiões.....	35
3.2.2	Barra Heterogênea com três sub-regiões.....	39
4	CONCLUSÃO.....	43
	REFERÊNCIAS.....	44
	APÊNDICE.....	47

1 INTRODUÇÃO

Os métodos empregados para a solução de um problema podem ser experimentais, analíticos ou numéricos. Cada método possui vantagens e desvantagens sobre os demais, dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo. De acordo com MARCHI (2001), podem ser elencadas as principais características de cada método, conforme segue abaixo.

As principais características dos **Métodos experimentais** são:

- Trabalhar com o fenômeno real;
- Resolver cada problema com base em um “experimento”, sendo este realizado em laboratório ou em campo e
- Empregar equipamentos para medir as grandezas de interesse.

Outro tipo de método para a resolução de um problema é o **Método Analítico**, cujas principais características são:

- Trabalhar com a representação matemática do fenômeno real;
- Obter as soluções com o emprego de “papel e lápis”;
- As soluções analíticas são contínuas sobre o domínio de cálculo e
- Aplicam-se geralmente a problemas com equações, geometria e condições de contorno e condições iniciais simples.

Por fim abordam-se as principais características dos **Métodos numéricos**, que são:

- Trabalhar com a representação matemática do fenômeno real;
- Obter as soluções numéricas com o emprego de computador e sem pontos específicos do domínio de cálculo;
- Aplicam-se geralmente a problemas com equações, geometria e condições de contorno e iniciais mais gerais e mais complexas do que os problemas resolvidos analiticamente e

- Não se aplicam a problemas onde não existem modelos matemáticos.

Pode-se esquematizar a solução de um problema com o diagrama abaixo MARCHI (2001):

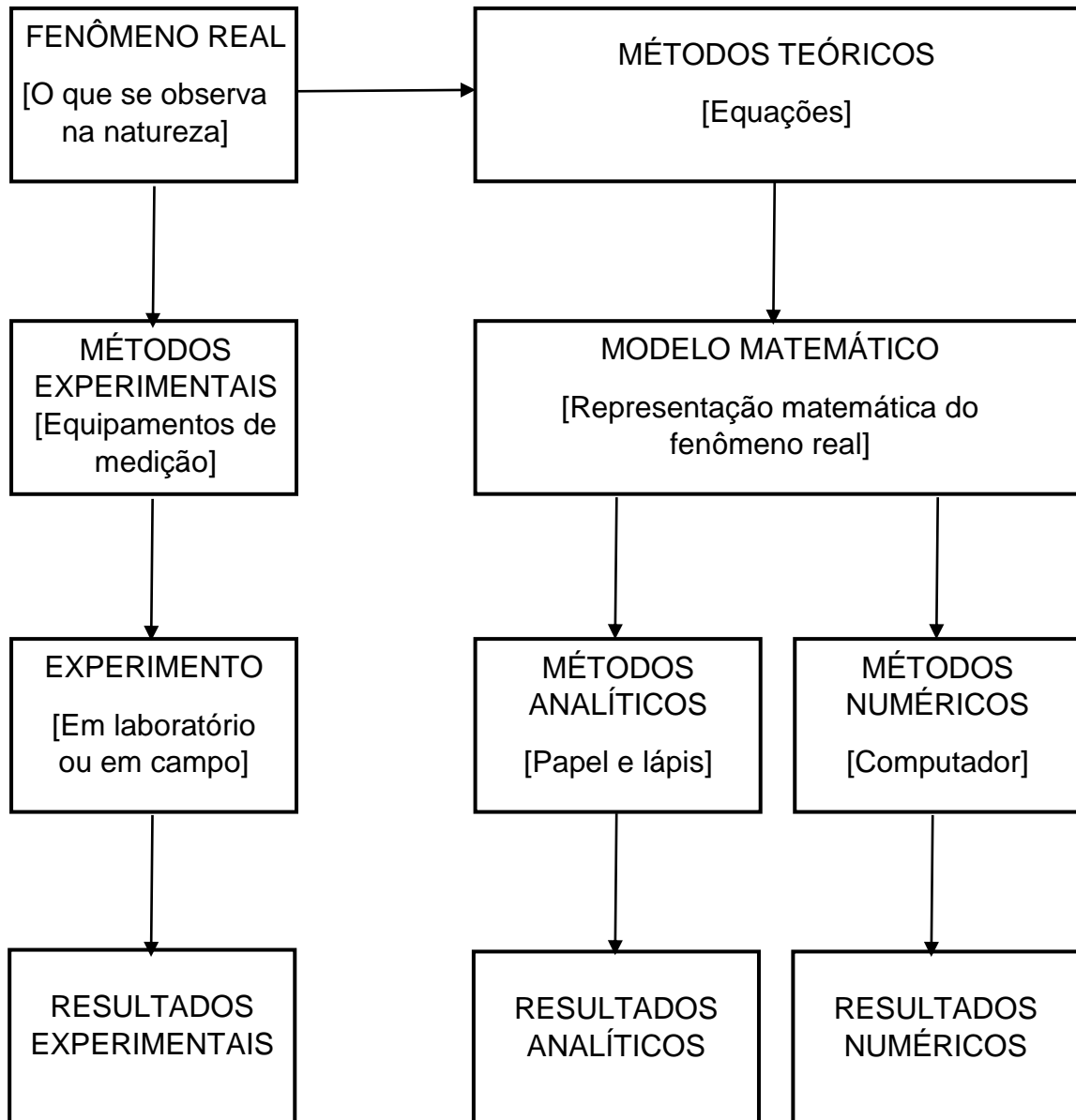


FIGURA1.1: Método de soluções de problemas. FONTE: Marchi (2001).

Utilizando métodos numéricos, pode-se realizar simulações numéricas para diversos tipos de problema. Em engenharia, as quais já ocupam uma posição de destaque no cenário de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias.

Havendo um crescente interesse, tanto no meio acadêmico como no meio industrial pela modelagem de fenômenos físicos, associado ao crescimento da tecnologia da informática, foi desencadeada nas últimas décadas uma enorme procura pelas técnicas de simulação. Fazendo uso de métodos numéricos, obtêm-se soluções aproximadas para a equação diferencial que se deseja resolver. A característica comum dos métodos numéricos é discretizar o problema contínuo, ou seja, o conjunto infinito de números que representa uma função, ou funções desconhecidas, é substituído por um conjunto finito de parâmetros desconhecidos, encontrados através de uma solução algébrica obtida geralmente da resolução de um sistema de equações do tipo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.1)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz não singular, \mathbf{b} é um vetor independente e \mathbf{x} é vetor de parâmetros desconhecidos. Dentre os métodos mais conhecidos destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Os três primeiros são métodos de domínio, isto é, a discretização é feita ao longo de todo o domínio. Já o Método dos Elementos de Contorno, como o próprio nome diz, envolve, em princípio, apenas a discretização do contorno da região em estudo. Observa-se, porém, que há formulações do MEC nas quais o domínio também é discretizado. A presente dissertação é baseada na última dessas formulações, denominada MEC-D, onde a letra D refere-se ao domínio e que será discutida mais detalhadamente na próxima seção.

Recentemente tem ampliado os estudos dos Métodos sem Malha, como formas alternativas aos métodos tradicionais que usam malhas supracitadas, podendo ser aplicadas diretamente da formulação forte ou nas formulações fracas, não sendo mais necessário o emprego das conectividades dos elementos.

Como exemplo, seja a barra unidimensional ilustrada nas FIGURAS 1.2 e 1.3 e a barra bidimensional das FIGURAS 1.4 e 1.5, onde foram comparadas a discretização do método dos elementos de contorno com uma discretização de métodos de domínio.



FIGURA 1.2: Discretização pelo método dos elementos de contorno de uma barra unidimensional (2 nós).

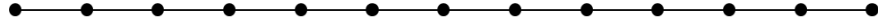


FIGURA 1.3: Discretização por um método de domínio de uma barra unidimensional (n nós).

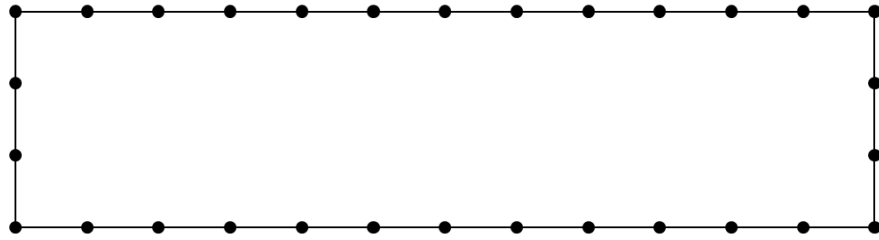


FIGURA 1.4: Discretização de um domínio bidimensional pelo método dos elementos de contorno.

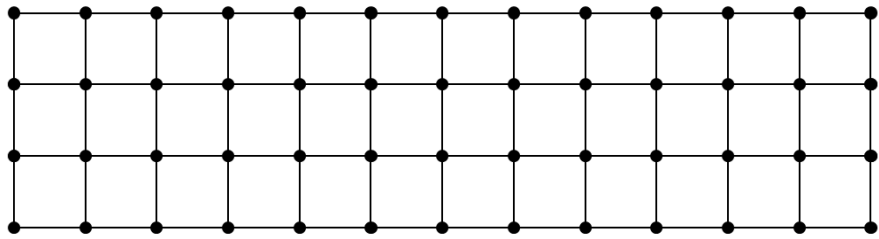


FIGURA 1.5: Discretização por um método de domínio para um domínio bidimensional.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho está centrado no desenvolvimento de uma formulação do MEC, denominada MEC-D, para análise do problema de propagação de ondas escalares em meios unidimensionais constituídos por materiais com diferentes características físicas. A solução do problema emprega a técnica de sub-regiões. Uma formulação baseada no Método das Diferenças Finitas também foi desenvolvida, no intuito de comparar os resultados obtidos pelos dois métodos numéricos, uma vez que não há soluções analíticas disponíveis (até onde é do conhecimento do autor).

1.2 ORGANIZAÇÃO

Na seção 2 apresenta-se a formulação MEC-D correspondente ao problema da onda escalar, além dos conceitos relativos à técnica de sub-regiões.

Na seção 3 são apresentados exemplos utilizando uma barra unidimensional de comprimento L . São testadas diferentes condições de contorno e condições iniciais. Os resultados obtidos no contorno e nos pontos internos são comparados com soluções analíticas, correspondentes aos casos de materiais homogêneos, e com soluções do MDF para os casos de meios constituídos por diferentes materiais, como mencionado acima

Na seção 4 são feitas as considerações finais.

1.3 MODELO MATEMÁTICO

A equação da onda é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem importante, pois tem aplicação em diversas áreas como a acústica, eletromagnetismo e dinâmica dos fluidos. O problema da equação da onda unidimensional teve início com o estudo do problema da corda vibrante e pode ser aplicado em diversos problemas em engenharia, como o ensaio de integridade de vigas, usualmente conhecido como P.I.T., que é um ensaio não destrutivo de fundações profundas e que tem sido utilizado para avaliar qualitativamente a integridade do fuste de estacas moldadas em relação a eventuais anomalias construtivas, tais como: falhas de concretagem, trincas, rupturas, alargamento de seção, além da velocidade de propagação da onda no material (PARIZOTTO, 2013). A seguir apresenta-se uma dedução da equação da onda escalar utilizando-se uma barra localizada ao longo do eixo x .

Considere uma barra com seção transversal de área A , com módulo de elasticidade longitudinal E e massa específica ρ (NAKAO, 1981). Considere, também,

um elemento dx da barra; as tensões x e $x+dx$ são, respectivamente, T_x e $T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$. Conforme a FIGURA 1.6.

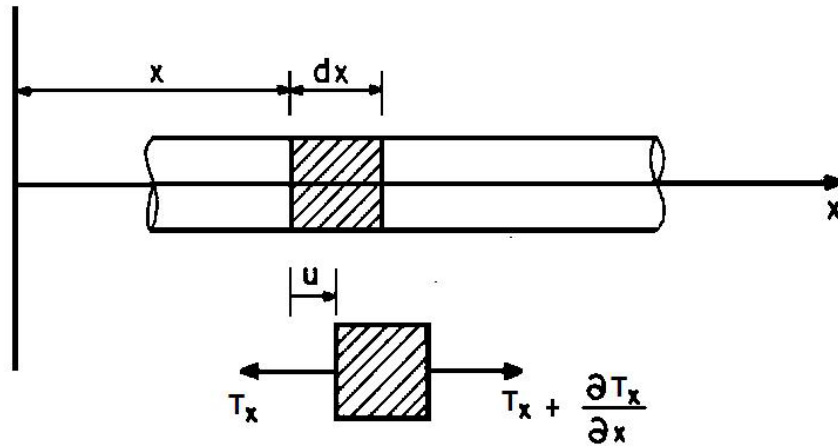


FIGURA 1.6: Tensões numa Barra. FONTE: Costa (2013)

A força da direção x é:

$$F_x = -T_x A + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) A = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx A \quad (1.2)$$

De acordo com a equação de equilíbrio dinâmico, desconsiderando a força e o volume, pode-se escrever:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

A tensão T_x pode ser escrita como equação constitutiva:

$$T_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

Derivando a equação (1.4) em relação à x e igualando o resultado à equação (1.3), obtém-se para uma barra homogênea:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{E}{\rho}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

onde $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ é a velocidade de propagação de onda.

A equação (1.7) possui as seguintes condições de contorno:

- Essenciais ou de Dirichlet:

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t) \text{ em } \Gamma_u \quad (1.8)$$

- Naturais ou de Neumann:

$$q(x, t) = \frac{du(x, t)}{dn(x)} = \hat{q}(x, t) \text{ em } \Gamma_p \quad (1.9)$$

Note-se que o contorno Γ do problema é: $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$:

As condições iniciais, definidas no domínio Ω , são:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.10)$$

$$\dot{u}(x, 0) = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) \quad (1.11)$$

1.4 REFERÊNCIAL TEÓRICO

Os primeiros trabalhos com a técnica computacional do MEC surgiram no início dos anos 60. “As equações de Fredholm foram utilizadas por Jaswon e Symm para resolver problemas da teoria do potencial bidimensional”, KATSIKADELIS (2004). Os autores trabalharam na representação da equação integral de Kirchoff, considerando que a representação matemática parte do princípio de que cada ponto em uma frente de onda primária pode ser considerado como fonte de uma onda esférica secundária, e que qualquer frente de onda secundária pode ser considerada como a envolvente das ondas esféricas geradas pelas fontes pontuais contidas na frente de onda primária; este é o princípio de Huygens.

O primeiro artigo do MEC foi publicado no Brasil na década de 70, ver Telles, Mansur, Halbritter (1978). Em 1983, Mansur (MANSUR,1983) desenvolveu uma formulação para o problema de propagação de ondas bidimensionais, utilizando a solução fundamental dependente do tempo. Esta formulação pode ser denominada MEC-DT, com DT significando Domínio do Tempo (COSTA, 2013).

Para superar o alto custo computacional exigido para calcular as integrais de convolução no tempo que aparecem nas equações integrais da formulação, foram propostos trabalhos baseados no truncamento da integral: (DEMIREL; WANG, 1987), (MANSUR; SILVA, 1992), (SOARES-JR; MANSUR, 2004), (CARRER; MANSUR, 2006).

De maneira alternativa, ao invés de utilizar a formulação MEC-DT, pode-se usar uma solução fundamental do problema estático. A equação integral básica do MEC, neste caso, apresenta uma integral de domínio constituída pela solução fundamental multiplicada pela derivada segunda em relação ao tempo do potencial. Neste caso a formulação é chamada de MEC-D, (CARRER; MANSUR, 2004), (HATZIGEORGIOU; BESKOS, 2002).

O processo de marcha no tempo desempenha, portanto, um papel fundamental no sucesso da formulação. O método de Houbolt (HOUBOLT, 1950) tem sido empregado com sucesso e será adotado no presente trabalho.

Em CARRER e COSTA (2015) o problema de propagação de ondas escalares em meios homogêneos é resolvido com o emprego das duas formulações, MEC-D E MEC-DT, possibilitando uma comparação entre os resultados.

2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

A formulação do MEC pode ser obtida, ou desenvolvida, a partir do método dos resíduos ponderados (BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984), (ZIENKIEWICZ & MORGAN, 1983). Admitindo que uma solução aproximada da equação 1.5 gera erros, ou resíduos, tanto no domínio quanto no contorno do problema, a sentença de resíduos ponderados pode ser escrita como: (note que, na expressão abaixo, admite-se condição de contorno essencial em $x=0$ e condição de contorno natural em $x=L$; entretanto, uma expressão final geral independe das condições de contorno do problema)

$$\int_0^L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u^* dx + (\hat{u} - \bar{u})w|_{x=0} + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \bar{w}|_{x=L} = 0 \quad (2.1)$$

A função de ponderação u^* é conhecida como a solução fundamental do problema de potencial, obtida através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u(\xi, x)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \quad (2.2)$$

onde $\delta(x - \xi)$ é o delta de Dirac.

A função $u^* = u^*(\xi, x)$ representa, portanto, o efeito no ponto x , denominado ponto campo, de um delta de Dirac aplicado em um ponto ξ , denotado ponto fonte. Nota-se que a solução fundamental é independente do tempo, embora o problema estudado apresente o tempo como variável independente.

Integrando por partes duas vezes a integral com o integrando $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^*$, pode-se escrever:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} u dx \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.1) tem-se:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} u dx + u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx + (u - \hat{u})w|_{x=0} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \bar{w}|_{x=L} = 0 \quad (2.4)$$

As funções de ponderação w e \bar{w} são escolhidas convenientemente, de modo que não sejam introduzidas aproximações para u em $x = 0$ e para $\frac{\partial u}{\partial x}$ em $x = L$. Seguindo esse raciocínio, adota-se:

$$w = -\frac{\partial u^*}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\bar{w} = -u^* \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.4), obtém-se:

$$u(\xi) = u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=L} - \hat{u} \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{x=0} - u^* \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=L} + u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (2.7)$$

Fazendo $\frac{\partial u^*}{\partial x} = q^*$, $\frac{\partial u}{\partial x} = q$, e também levando em consideração que uma expressão similar é obtida com outras condições de contorno, como mencionado anteriormente, a equação (2.7) é reescrita como:

$$u(\xi) = q^* u \Big|_{x=L} - q^* u \Big|_{x=0} - q u^* \Big|_{x=L} + q u^* \Big|_{x=0} + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (2.8)$$

A integral de domínio, cujo integrando é formado pelo produto do termo da derivada de segunda ordem no tempo da variável u com a solução fundamental é mantida na formulação. Por isso, a formulação é denominada MEC-D, onde a letra D faz alusão a essa integral de domínio. O emprego da solução fundamental dependente do tempo gera equações que apresentam integrais de domínio restritas somente à região com condições iniciais não nulas [COSTA (2013); MANSUR,(1983)].

Nos problemas em duas e em três dimensões as condições de contorno naturais envolvem a derivada de u na direção da normal exterior ao domínio. Assim sendo, as condições $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ serão substituídas por $\frac{\partial u}{\partial n}$ e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$.

Como $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n}$, para $x = L$ tem-se $\frac{\partial x}{\partial n} = 1$ e, conseqüentemente, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Para $x = 0$, $\frac{\partial x}{\partial n} = -1$ e $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$. A mesma observação vale para a derivada de u^* em relação à n .

Assim, admitindo que, agora, $q = \frac{du}{dn}$ e $q^* = \frac{du^*}{dn}$, a equação 2.8 é reescrita como:

$$u(\xi) = q^*u|_{x=L} + q^*u|_{x=0} - qu^*|_{x=L} - qu^*|_{x=0} + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (2.9)$$

A solução fundamental tem a seguinte expressão:

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x-\xi|}{2} \quad (2.10)$$

A partir de (2.10), pode-se encontrar a expressão para $q^*(\xi, x) = \frac{du^*(\xi, x)}{dn}$ como segue:

1° caso: $x = L$.

Neste caso, $x > \xi$ e $\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{1}{2}$; como $\frac{dx}{dn} = 1$, tem-se $q^* = \frac{1}{2}$.

2° caso: $x = 0$.

Neste caso, $x < \xi$ e $\frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2}$; como $\frac{dx}{dn} = -1$, $q^* = \frac{1}{2}$.

Na forma matricial o problema é descrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & 0 \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \{q_{n+1}^c\} + \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^c \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^d \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Os índices superiores representam a localização dos pontos: **c** representa os nós do contorno e **d** representa os pontos internos. Nas sub-matrizes, o primeiro índice superior corresponde à posição do ponto fonte e o segundo, à posição do ponto campo.

Os índices inferiores referem-se ao tempo da análise. Os coeficientes das sub-matrizes \mathbf{H}^{cc} , \mathbf{H}^{dc} , \mathbf{G}^{cc} , \mathbf{G}^{dc} são obtidos diretamente da equação (2.4).

Os coeficientes das sub-matrizes \mathbf{M}^{cc} , \mathbf{M}^{cd} , \mathbf{M}^{dc} , \mathbf{M}^{dd} são calculados analiticamente.

Para o cálculo da integral de domínio na equação (2.7) o domínio do problema é dividido em subdomínios, ou células, nas quais admite-se que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ varia linearmente. Para uma célula definida por $x_i \leq x \leq x_j$, pode-se escrever:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} u^* [\phi_i \quad \phi_j] dx \quad (2.12)$$

onde:
$$\phi_i = \frac{x_j - x}{\Delta x} \text{ e } \phi_j = \frac{x - x_i}{\Delta x} \quad (2.13)$$

e: $\Delta x = x_j - x_i$.

Para $x \geq \xi$, tem-se:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{x - \xi}{2} \right) \left(\frac{x_j - x}{\Delta x} \right) \quad \left(\frac{x - \xi}{2} \right) \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \right] dx \quad (2.14)$$

ou:

$$\int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{xx_j - x^2 - \xi x_j + \xi x}{2\Delta x} \right) \quad \left(\frac{-xx_i + x^2 + \xi x_i - \xi x}{2\Delta x} \right) \right] dx = [\Omega_i \quad \Omega_j] \quad (2.15)$$

com:

$$\Omega_i = \frac{1}{12\Delta x} [x_j^3 - 3\xi x_j^2 - 3x_i^2 x_j + 2x_i^3 + 6\xi x_i x_j - 3\xi x_i^2] \quad (2.16)$$

$$\Omega_j = \frac{1}{12\Delta x} [2x_j^3 - 3\xi x_j^2 - 3x_j^2 x_i + x_i^3 + 6\xi x_i x_j - 3\xi x_i^2] \quad (2.17)$$

Para $x \leq \xi$ tem-se:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{-x+\xi}{2} \right) \left(\frac{x_j-x}{\Delta x} \right) \left(\frac{-x+\xi}{2} \right) \left(\frac{x-x_i}{\Delta x} \right) \right] dx \quad (2.18)$$

ou:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{-xx_j+x^2+\xi x_j-\xi x}{2\Delta x} \right) \left(\frac{xx_i-x^2-\xi x_i+\xi x}{2\Delta x} \right) \right] dx = [\Omega_i \quad \Omega_j] \quad (2.19)$$

com:

$$\Omega_i = -\frac{1}{12\Delta x} [x_j^3 - 3\xi x_j^2 - 3x_i^2 x_j + 2x_i^3 + 6\xi x_i x_j - 3\xi x_i^2] \quad (2.20)$$

$$\Omega_j = -\frac{1}{12\Delta x} [2x_j^3 - 3\xi x_j^2 - 3x_j^2 x_i + x_i^3 + 6\xi x_i x_j - 3\xi x_i^2] \quad (2.21)$$

2.1 MÉTODO Houbolt

As aproximações para a aceleração podem ser feitas pelo método de Houbolt nas formulações do Método dos Elementos de Contorno. O método de Houbolt (1950), é obtido por derivação dos polinômios cúbicos de Lagrange e tem sido utilizado em formulações MEC-D com bastante sucesso (CARRER & MANSUR, 2004).

As aproximações para a velocidade e para a aceleração são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{1}{16\Delta t} (11u_{n+1} - 18u_n + 9u_{n-1} + 2u_{n-2}) \quad (2.22)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2u_{n+1} - 5u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}) \quad (2.23)$$

Substituindo a equação (2.23) na equação (2.21), o sistema de equações pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} (c\Delta t)^2 \mathbf{H}^{cc} - 2\mathbf{M}^{cc} & -2\mathbf{M}^{cd} \\ (c\Delta t)^2 \mathbf{H}^{dc} - 2\mathbf{M}^{dc} & c\Delta t)^2 \mathbf{I} - 2\mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{n+1}^b \\ u_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (c\Delta t)^2 \mathbf{G}^{cc} \\ (c\Delta t)^2 \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \{q_{n+1}^c\} + \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{db} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5u_n^c + 4u_{n-1}^c - u_{n-2}^c \\ -5u_n^d + 4u_{n-1}^d - u_{n-2}^d \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

A partir da equação (2.24), nota-se que o sistema de equações final apresenta como incógnitas os valores de q_{n+1}^c em Γ_u , de u_{n+1}^c em Γ_q e de u_{n+1}^d em Ω .

O último termo à direita na equação (2.24) contribui apenas para a formação do vetor independente.

2.2 PARAMETRIZAÇÃO DO MEC-D

A escolha do intervalo de tempo Δt , de acordo com MANSUR (1983), desempenha um papel muito importante em problemas transientes. Um parâmetro adimensional semelhante ao apresentado por MANSUR (1983) foi definido para a escolha do intervalo de tempo e se relaciona com a velocidade de onda e com tamanho ΔL da menor célula de acordo com a expressão abaixo:

$$\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta L} \quad (2.25)$$

Para a formulação MEC-D, um valor recomendado para β foi definido empiricamente, para os problemas unidimensionais tratados aqui; este valor é: $\beta = 0,32$. Outra recomendação básica para o problema estudado requer que:

$$c\Delta t < \Delta L \quad (2.26)$$

2.3 SUBREGIÕES

A seguir será descrita a técnica de subregiões utilizada para análise envolvendo domínios constituídos por diferentes materiais. Basicamente, nos nós que separam diferentes subregiões, condições de equilíbrio e de compatibilidade devem ser atendidas (SANTIAGO, 1987). Para a condição de equilíbrio, supondo que o nó comum é o m -ésimo, pode-se escrever:

$$q_m^E = -q_m^D \quad (2.27)$$

O superíndice E designa a região à esquerda e o superíndice D a região à direita do nó m . A condição de compatibilidade escreve-se como:

$$u_m^E = u_m^D \quad (2.28)$$

Assim, para exemplificar, considere-se o problema de uma barra constituída por dois materiais, caracterizados por c_1 e c_2 e sujeita, por exemplo, às condições de contorno $u|_{x=0} = 0$ e $q|_{x=L} = \bar{q}$. A primeira região (com $c = c_1$) foi discretizada com o emprego de n_1 células; a segunda, com o emprego de n_2 células (ver FIGURA 3.1).

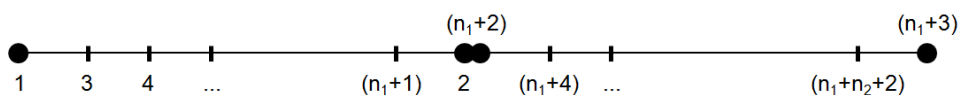


FIGURA 2.1: Domínio com duas subregiões:

Nota-se, a partir da FIGURA 2.1, que os nós do contorno da primeira subregião são os nós de números 1 e 2. Com o emprego de n_1 células, o último ponto interno é o de número $(n_1 + 1)$. Para a segunda subregião, os nós de contorno são os nós $(n_1 + 2)$ e $(n_1 + 3)$; com emprego n_2 células, o último ponto interno contém é o de domínio $(n_1 + n_2 + 2)$. Se forem utilizadas mais subregiões, a numeração seguiria uma seqüência similar à apresentada na FIGURA 2.1. A solução de problemas com três ou mais subregiões segue procedimento análogo.

Para o caso de subregiões, considere-se a maior velocidade de propagação c_n , considere-se c_{n-1} como a segunda maior velocidade de propagação e assim sucessivamente. Logo, pela equação 2.26:

$$c_1\Delta t < c_2\Delta t < \dots c_{n-1}\Delta t < c_n\Delta t < \Delta L \quad (2.29)$$

3 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos, com o objetivo de validar a formulação MEC-D. Adotou-se uma discretização temporal conforme a equação 2.25.

Alguns resultados do MEC-D para o caso homogêneo podem ser comparados com as soluções analíticas; veja-se, por exemplo, o livro texto de Stephenson (STEPHENSON, 1970).

Para os casos heterogêneos, os resultados são comparados com os obtidos com o Método das Diferenças Finitas, no qual se utiliza uma discretização de 300 pontos no domínio.

3.1 BARRA HOMOGENEA

Embora a barra seja homogênea, isto é, constituída por um único material e apresentando, conseqüentemente, uma única velocidade de propagação, pode-se utilizar as técnicas de sub-regiões para calcular q nos pontos internos selecionados.

Inicialmente, considerou-se uma barra de comprimento $L = 2$, discretizada com o emprego de 32 células; conseqüentemente, $\Delta L = \frac{2}{32}$ e $\Delta t = 0,01$. Adotam-se condições de contorno dadas pelas equações 3.1 e 3.2 a seguir:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.1)$$

$$q(L, t) = 1 \quad (3.2)$$

e com as condições iniciais nulas, isto é;

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{u}(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (3.4)$$

Esse problema será referido como problema 1.

A variação dos deslocamentos no ponto $u(L)$ ao longo do tempo está apresentado na FIGURA 3.1. Os resultados correspondentes a $q(0)$ estão apresentados na FIGURA 3.2 e os resultados correspondentes a $q\left(\frac{L}{2}\right)$ estão apresentados na FIGURA 3.3.

A solução analítica para o problema é dada por:

$$u(x, t) = x + \frac{8L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right] \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi X}{2L}\right] \quad (3.5)$$

Para a solução analítica correspondente a $\frac{du}{dn}$ em $x=0$ basta calcular a derivada da equação (3.5) como segue:

$$q = \frac{du}{dn} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dn}$$

$$q(0, t) = -\left(1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right]\right) \quad (3.6)$$

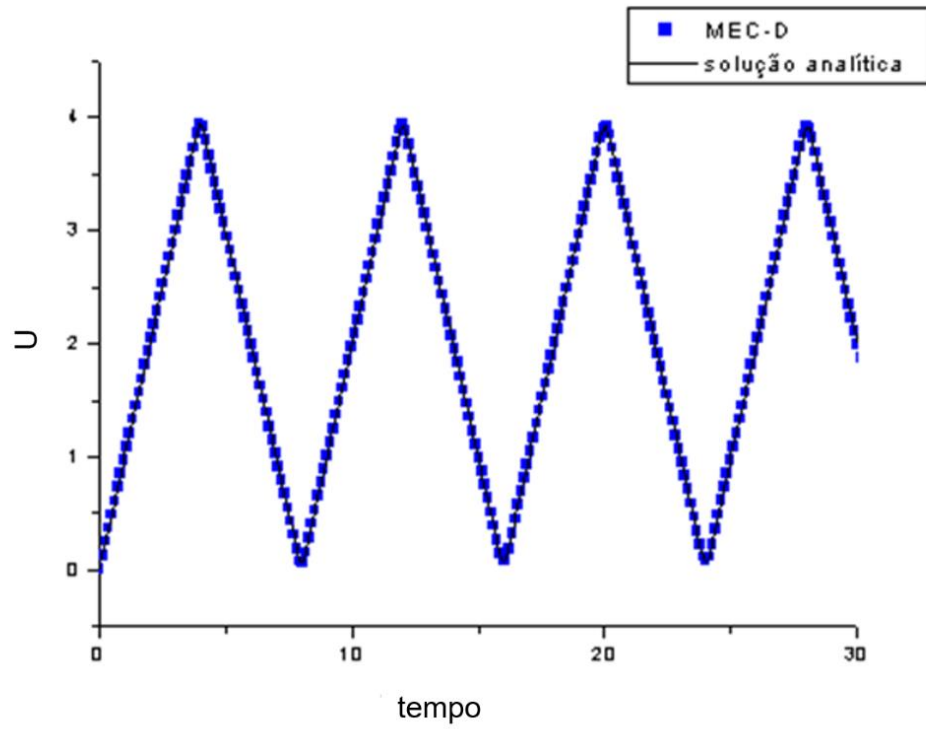


FIGURA 3.1: Problema 1:deslocamentos no ponto $x=L$.

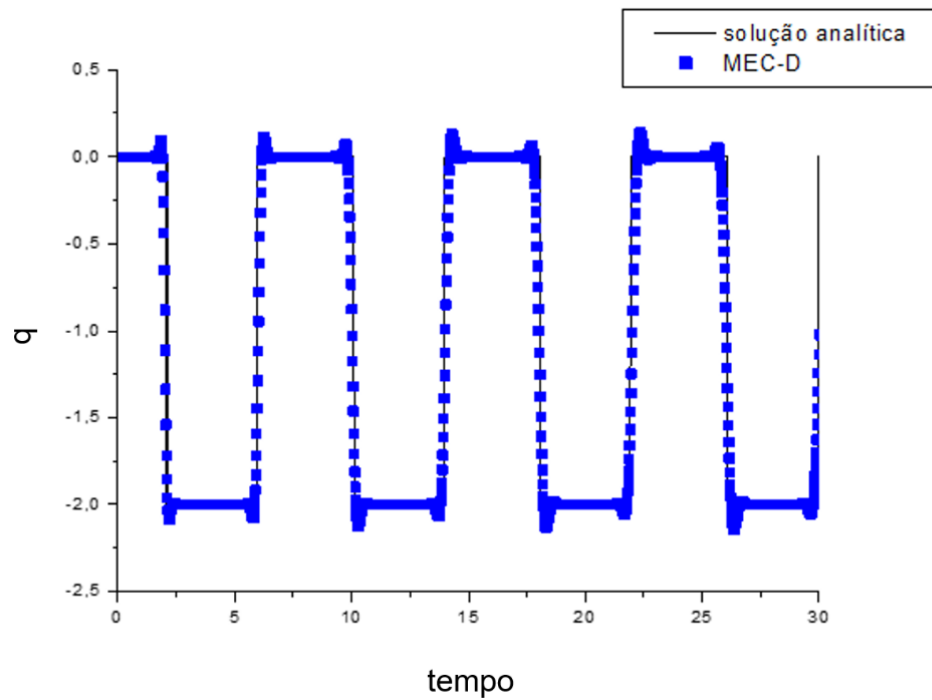


FIGURA 3.2: Problema 1: $\frac{du}{dn}$ em $x=0$.

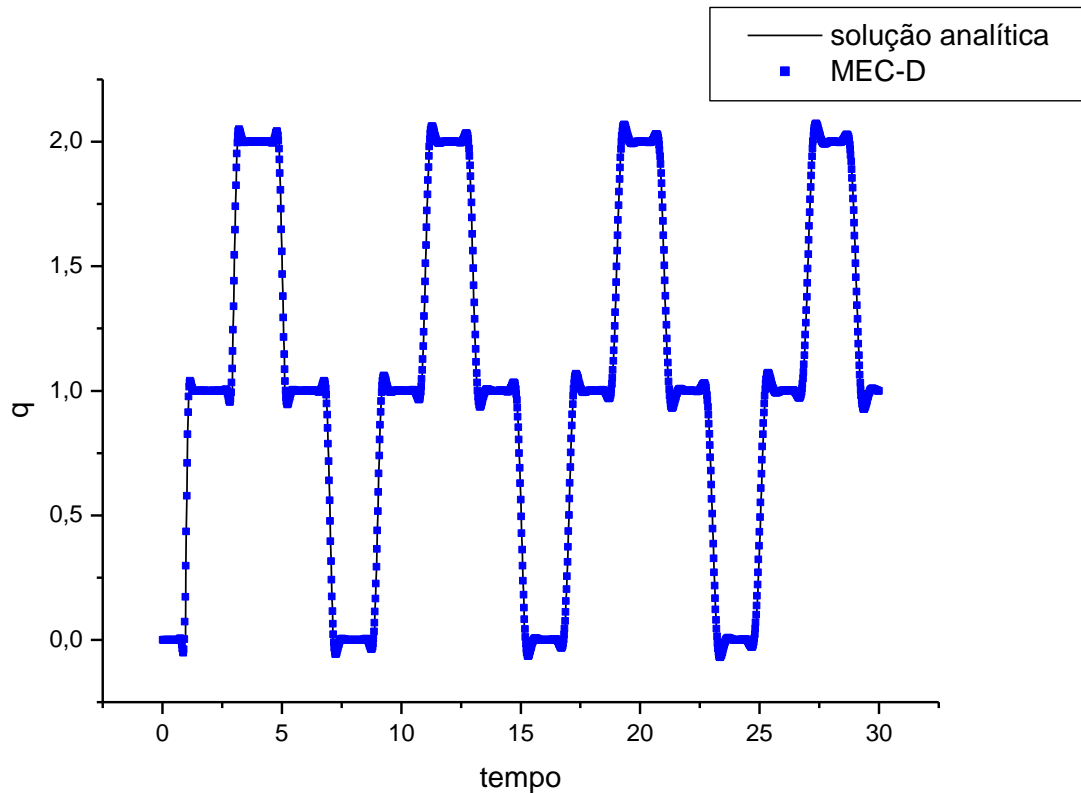


FIGURA 3.3: Problema 1: resultados para du/dn em $x=L/2$.

Os resultados correspondentes a $q(0)$ e a $q(L/2)$ apresentam descontinuidades, isto é, saltos, que são razoavelmente bem reproduzidas pela formulação MEC-D. Os resultados apresentam boa concordância com a solução analítica. Pode-se observar que, apesar da discretização utilizada possuir poucas células no domínio, houve boa concordância com a solução analítica. As condições de contorno são aplicadas nos nós 1 e 19 da barra. A primeira sub-região é composta pelos nós 1,2,3.....17 a segunda pelos nós 18,19,20..... .Os nós de interface entre as sub-regiões são: 2 e 18 que ligam a primeira e segunda sub-regiões.

Seguindo o mesmo raciocínio, foram estudados mais dois casos: o primeiro apresenta a barra com um campo de velocidade inicial e o segundo, a barra com um campo de deslocamento inicial.

Para a barra homogênea com velocidade inicial prescrita as condições de contorno são:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.7)$$

$$q(L, t) = 0 \quad (3.8)$$

As condições iniciais, agora, são dadas por:

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.9)$$

$$v(x, 0) = 1 \quad (3.10)$$

Esse problema será referido como problema 2.

A solução analítica para este caso é escrita abaixo:

$$u(x, t) = \frac{8LV}{c\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi cx}{2L} \right] \quad (3.11)$$

Sendo V a velocidade inicial prescrita. Os resultados para este exemplo estão representados pelas FIGURAS 3.4, 3.5 e 3.6.

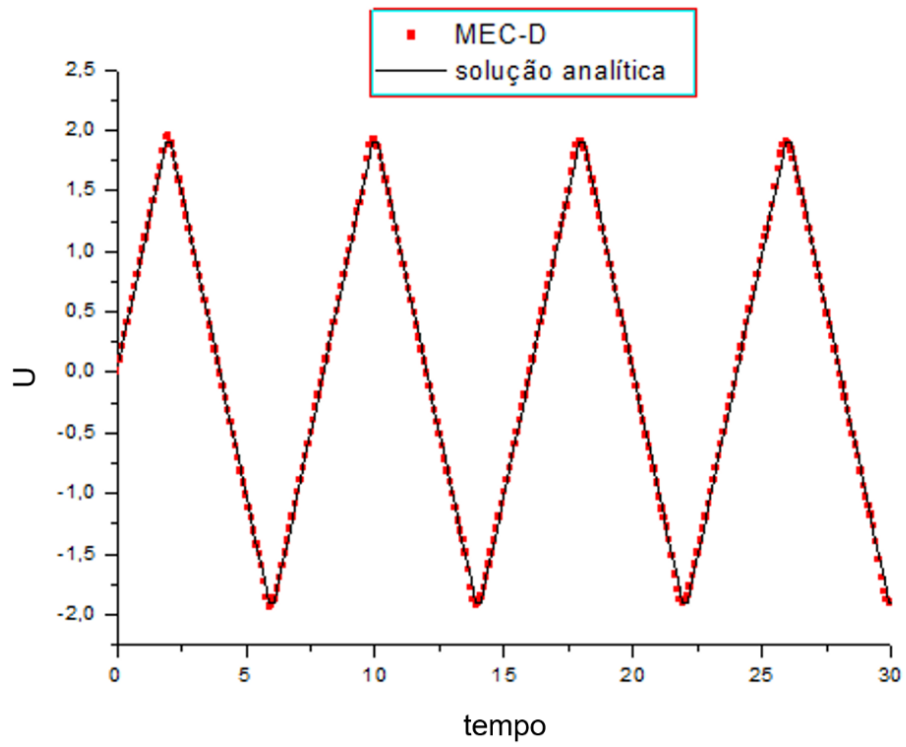


FIGURA 3.4: Problema 2:deslocamentos em $x=L$.

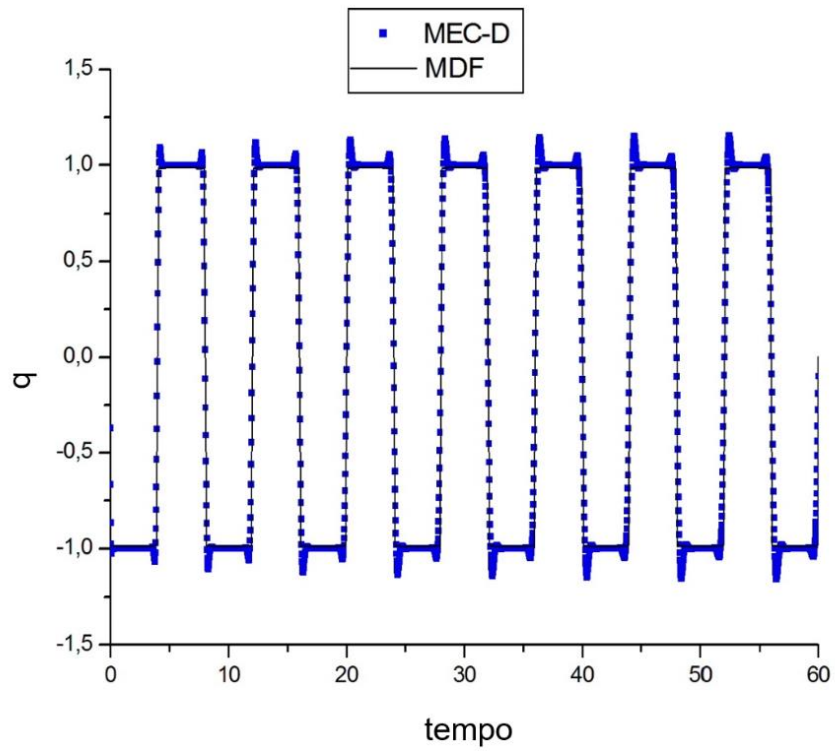


FIGURA3. 5: Problema 2: $\frac{du}{dn}$ em $x=0$.

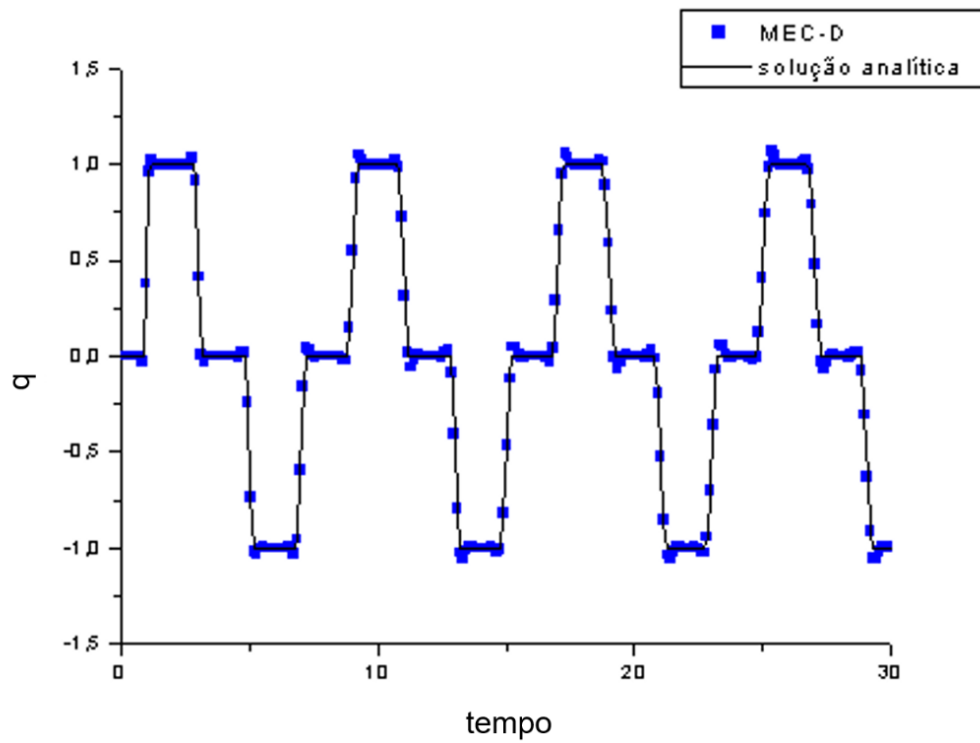


FIGURA 3.6: Problema 2: resultados para du/dn em $x=L/2$.

No próximo exemplo, tem-se um campo de deslocamento inicial prescrito. As condições de contorno são as mesmas do exemplo anterior:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.12)$$

$$q(L, t) = 0 \quad (3.13)$$

As condições iniciais agora são:

$$u(x, 0) = -x \quad (3.14)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (3.15)$$

Esse problema será referido como problema 3. A solução analítica para o problema é dada por:

$$u(x, t) = \frac{8LU}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right] \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi X}{2L}\right] \quad (3.16)$$

Sendo $U = u_0(L)$. Os resultados correspondentes a $u(L, t)$, $q(0, t)$ e $q(\frac{L}{2}, t)$ estão apresentados nas figuras 3.7, 3.8 e 3.9.

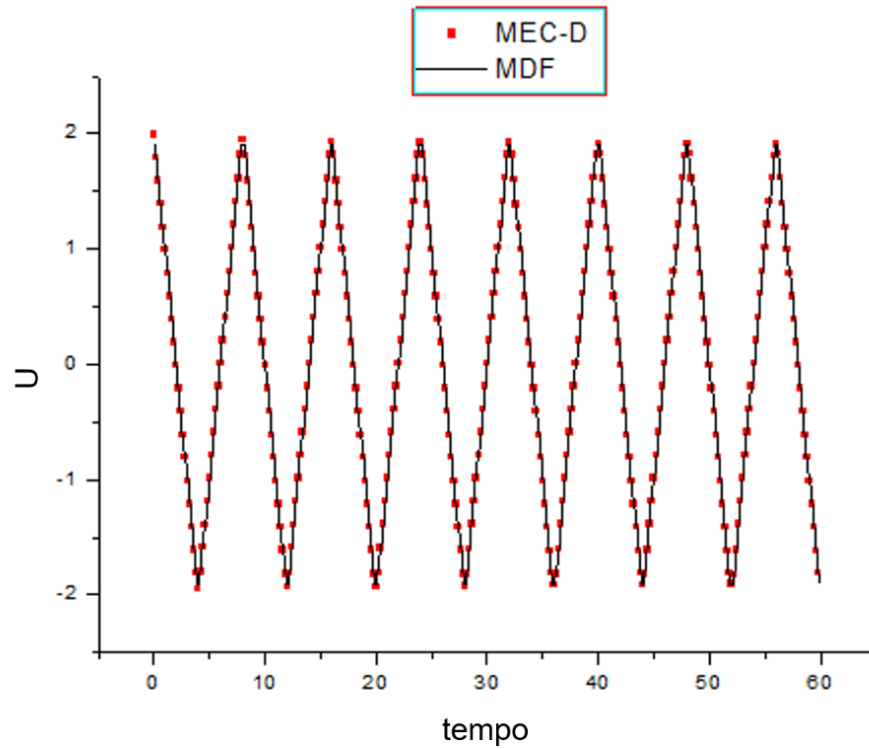


FIGURA 3.7: Problema 3: deslocamentos em $x=L$.

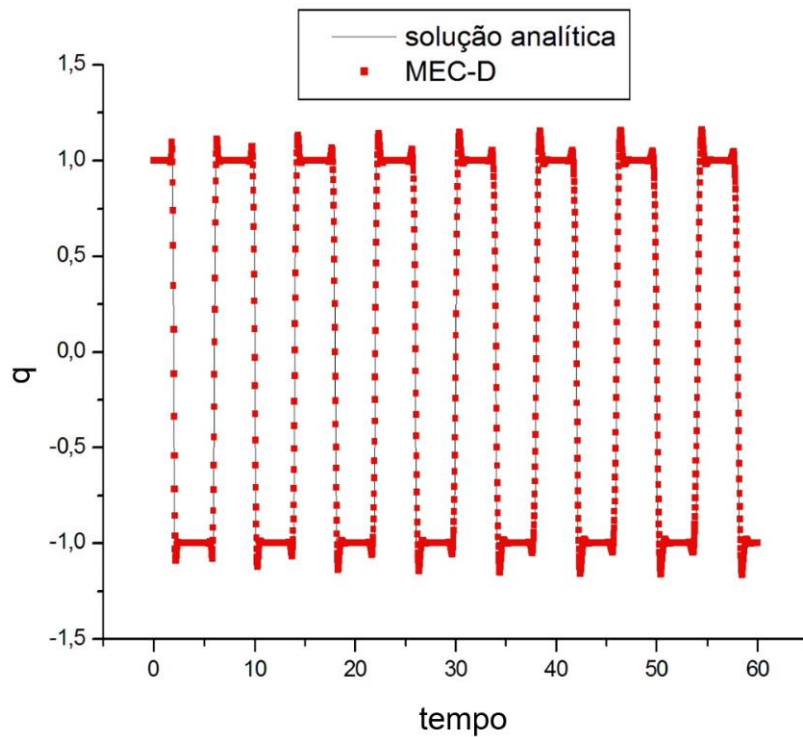
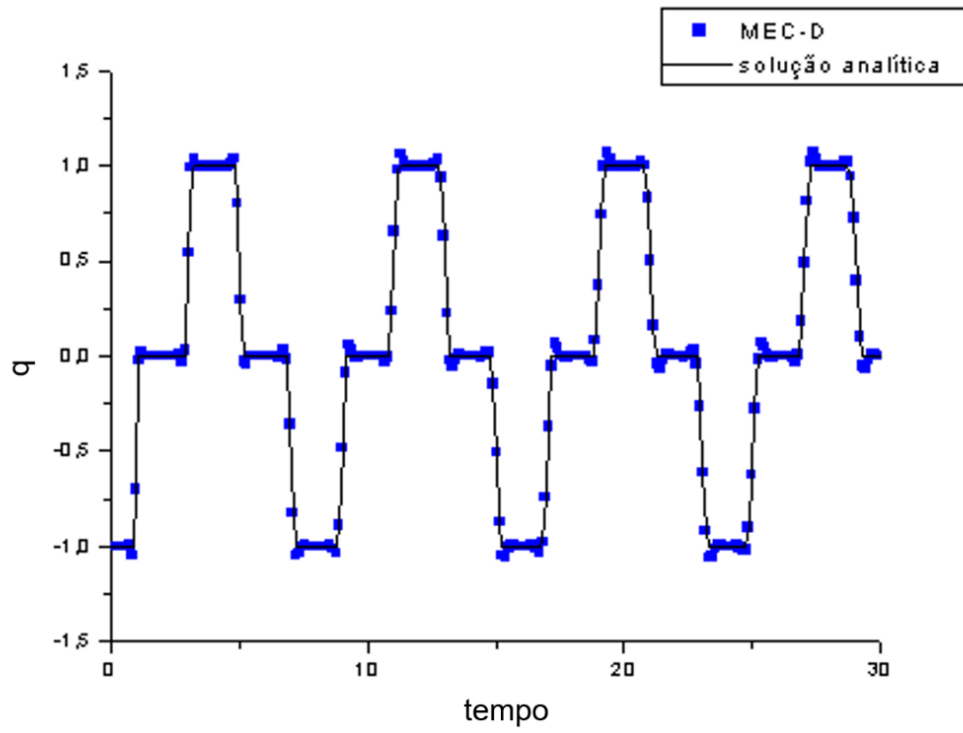


FIGURA 3.8: Problema 3: $\frac{du}{dn}$ em $x=0$.

FIGURA 3.9: Problema 3: resultados para du/dn em $x=L/2$

3.2 BARRA HETEROGÊNEA

Neste exemplo desconhece-se solução analítica, pelo menos até onde é do conhecimento do autor do trabalho. Portanto, os resultados obtidos são comparados com os apresentados do MDF (uma descrição sucinta d MDF foi incluída no apêndice). As condições de contorno adotadas foram:

$$u(0, t) = 0 \quad (3.18)$$

$$q(L, t) = 1 \quad (3.19)$$

Também foram consideradas os casos com condições de contorno e condições iniciais dadas pelas equações (3.7)-(3.10) e (3.12)-(3.15).

3.2.1 Barra Heterogênea com Duas Sub-Regiões

Este exemplo está ilustrado esquematicamente pela FIGURA 3.10; ambas as subregiões possuem comprimento unitário.



FIGURA (3.10): Barra com duas sub-regiões: na primeira subregião ($0 \leq x \leq L/2$) $c=2$; na segunda sub-região ($L/2 \leq x \leq L$) $c=1$.

A discretização adotada foi igual para os próximos exemplos: trinta células no domínio para o MEC, sendo quinze para cada subregião, e trezentos pontos para o MDF, sendo cento e cinquenta pontos para cada subregião. Adota-se $t = 30$ s como tempo final, discretizado com três mil passos de tempo no MDF; para o MEC, foi utilizado o critério apresentado na seção 2 desta dissertação. Os deslocamentos nos pontos médios de cada célula são apresentados na figura (3.11), na mesma

seqüência apresentada anteriormente, com os deslocamentos na extremidade livre, em $x=2$.

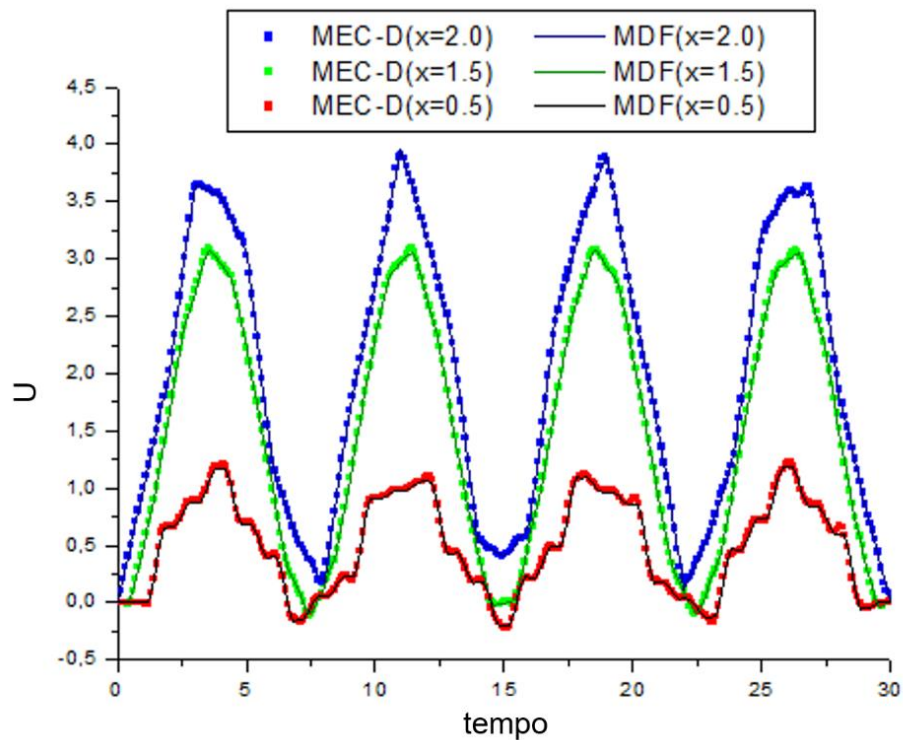


FIGURA 3.11: Problema 1: deslocamentos dos pontos médios de cada subregião e da extremidade livre da barra.

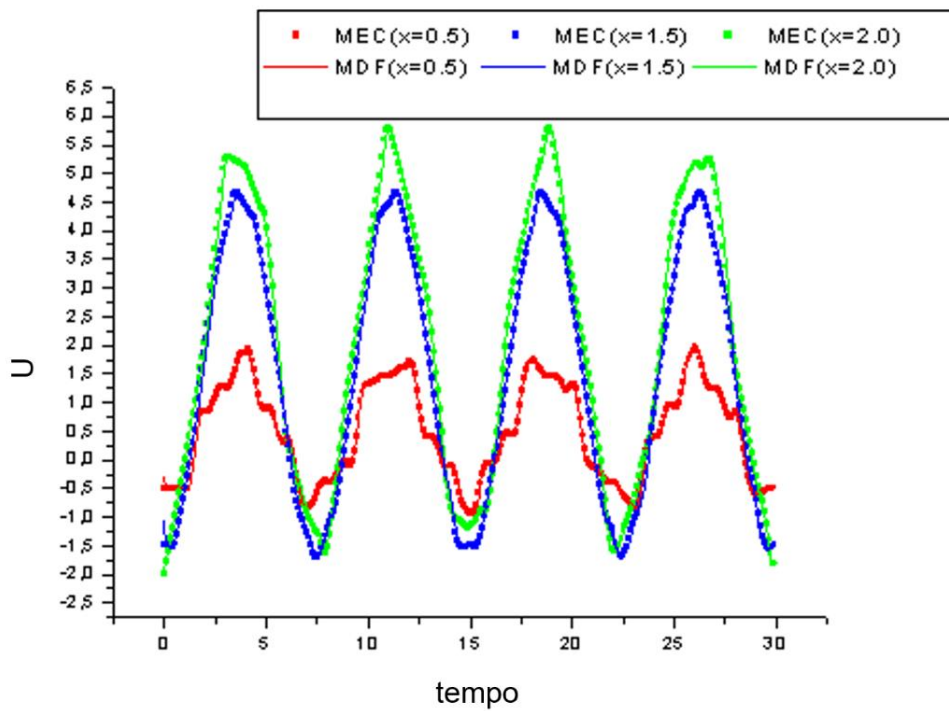


FIGURA 3.12: Problema 2: deslocamentos dos pontos médios de cada subregião e da extremidade livre da barra.

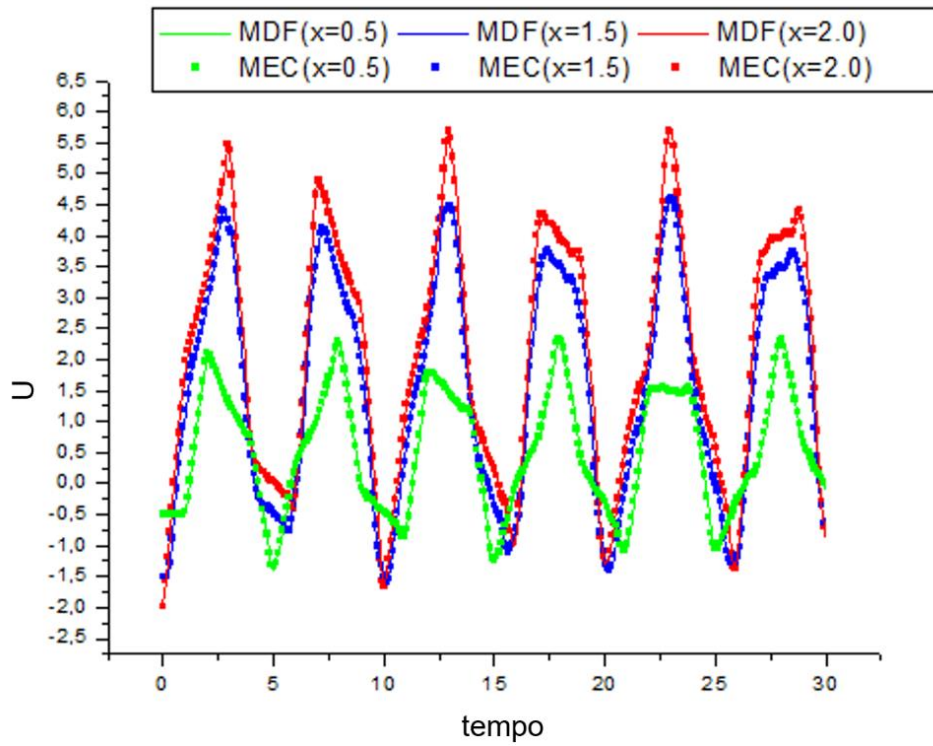


FIGURA 3.13: Problema 3: deslocamentos dos pontos médios de cada subregião e da extremidade livre da barra.

Os gráficos para o ponto da interface são representados a seguir:

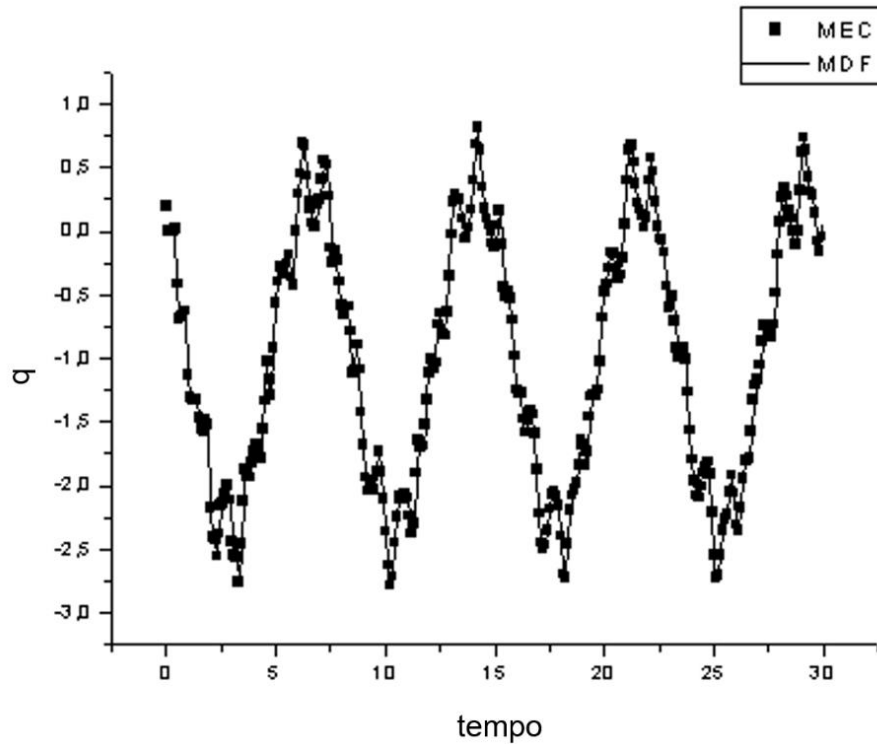


FIGURA 3.14: Problema 1: resultados para du/dn em $x=L/2$.

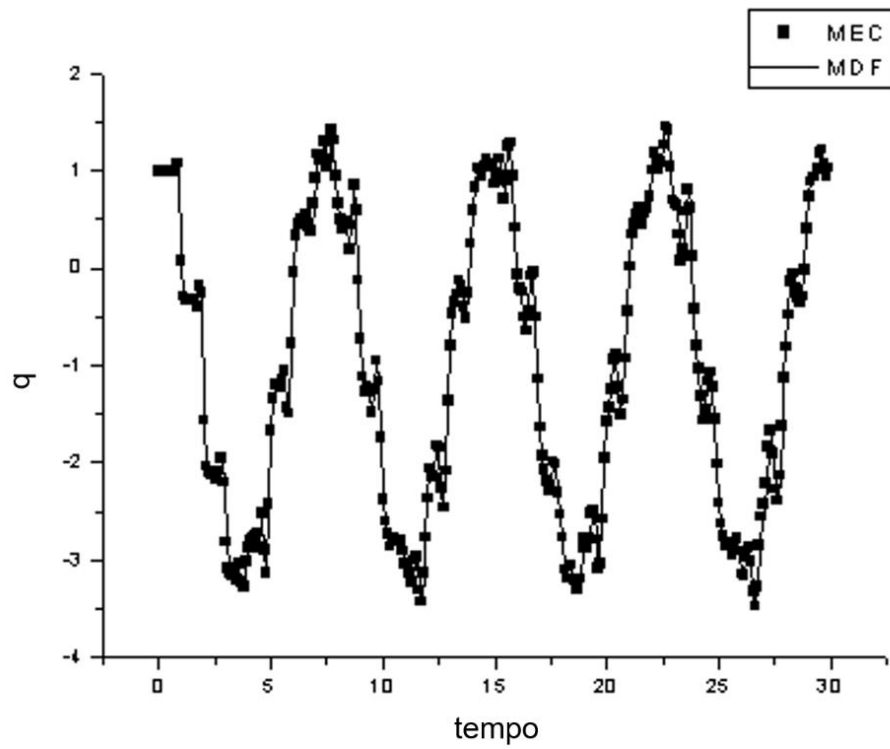


FIGURA 3.15: Problema 2: resultados para du/dn em $x=L/2$.

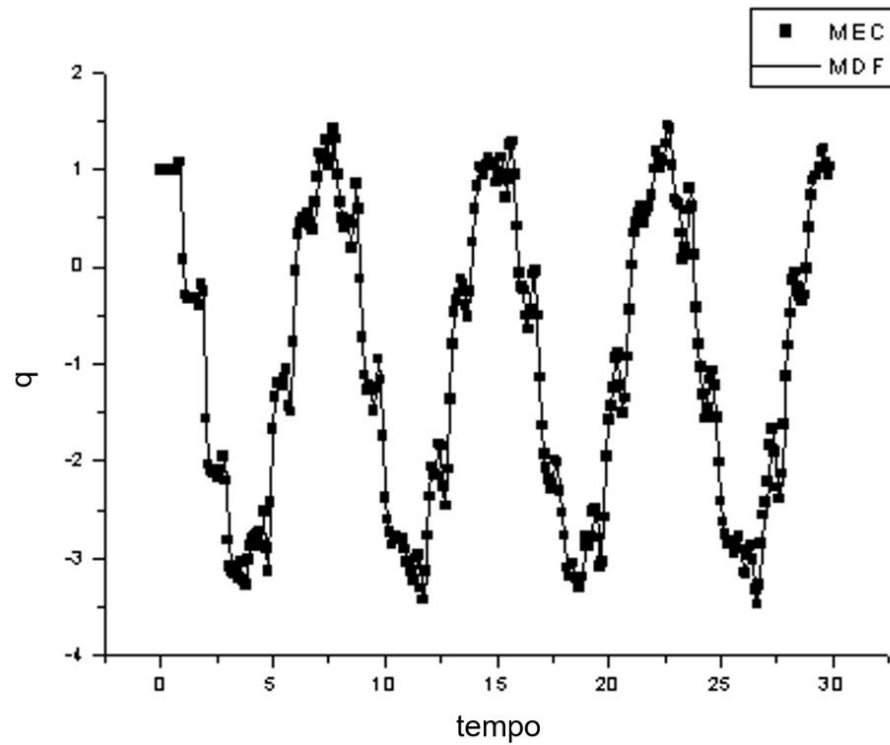


FIGURA 3.16: Problema 3: resultados para du/dn em $x=L/2$.

3.2.2 Barra Heterogênea com Três Sub-Regiões

Este exemplo está ilustrado esquematicamente pela FIGURA 3.17. Todas as subregiões representadas possuem comprimento igual a um.

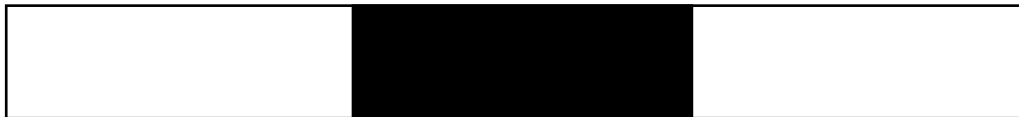


FIGURA 3.17: Barra com três sub-regiões: na primeira subregião ($0 \leq x \leq L/3$) $c=1$; na segunda sub-região ($L/3 \leq x \leq 2L/3$) $c=2$; . na segunda sub-região ($2L/3 \leq x \leq L$) $c=1$.

Adotou-se a mesma discretização para todos os exemplos. Para o MEC foram utilizadas dez células para cada sub-região; para o MDF foram utilizados trezentos pontos no domínio, igualmente espaçados, o que resulta em cem pontos para cada sub-região.

A análise novamente foi efetuada até $t = 30$ s, com três mil passos de tempo no MDF; para o MEC, utiliza-se o critério apresentado na seção 2 desta dissertação.

Os gráficos dos deslocamentos nos pontos médios de cada subregião estão apresentados na FIGURA 3.18, para o problema 1. Na FIGURA 3.19, estão apresentados os resultados correspondentes ao problema 2, enquanto que na FIGURA 3.20 estão apresentados os resultados correspondentes ao problema 3.

Observa-se uma boa concordância entre os resultados provenientes do MEC e os provenientes do MDF.

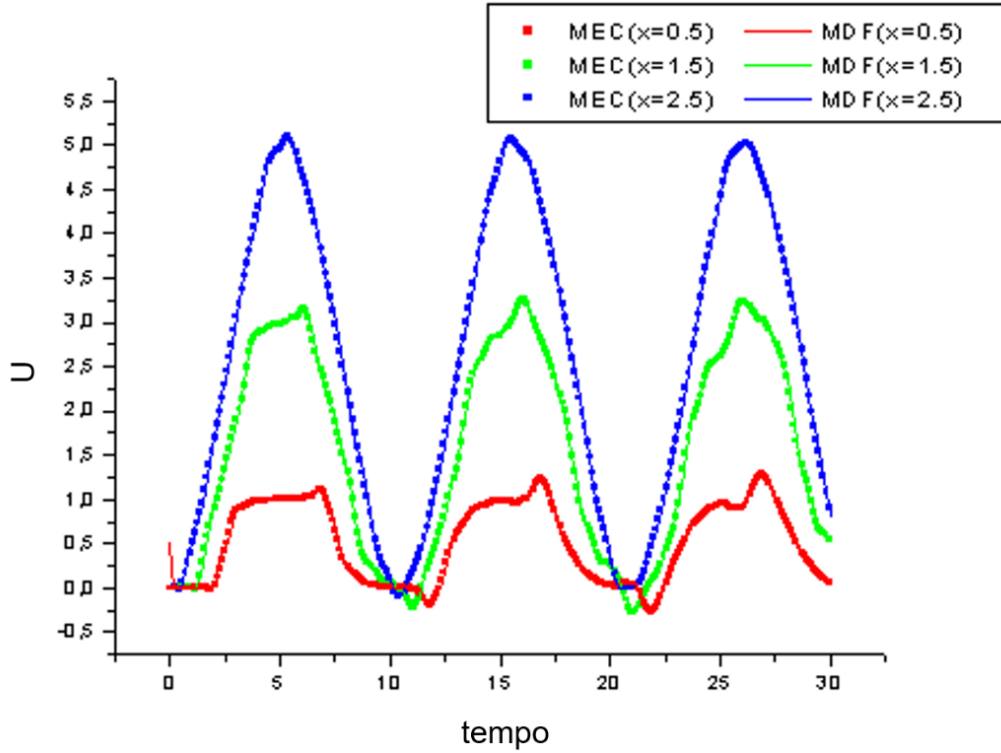


FIGURA 3.18: Problema 1: deslocamentos dos pontos médios de cada subregião.

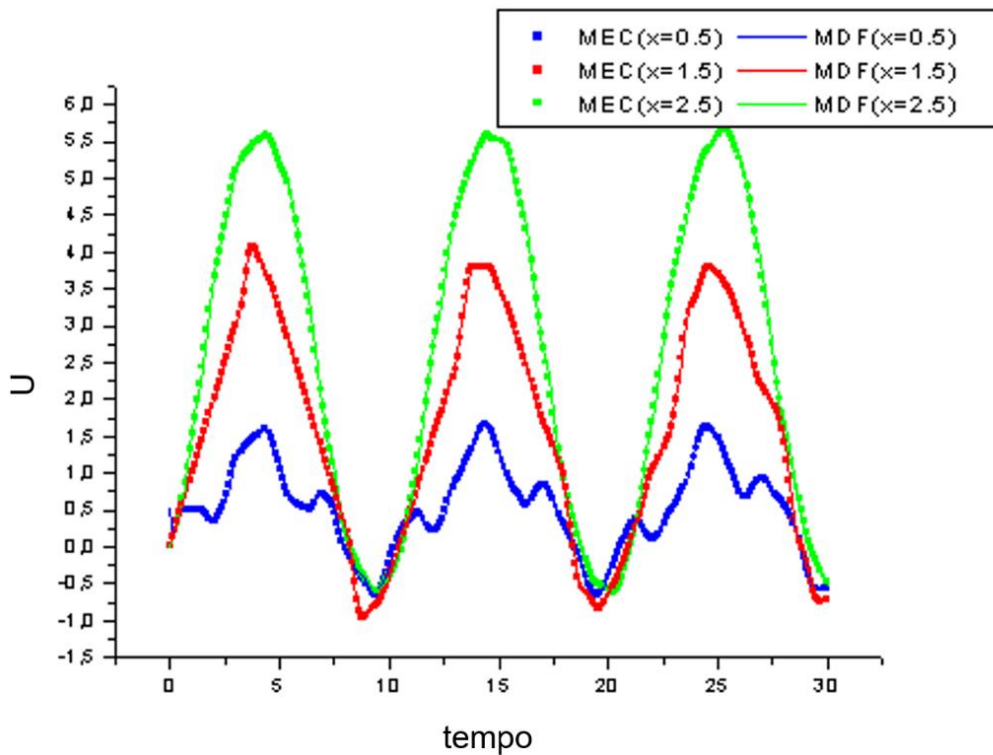


FIGURA 3.19: Problema 2: deslocamentos dos pontos médios de cada subregião.

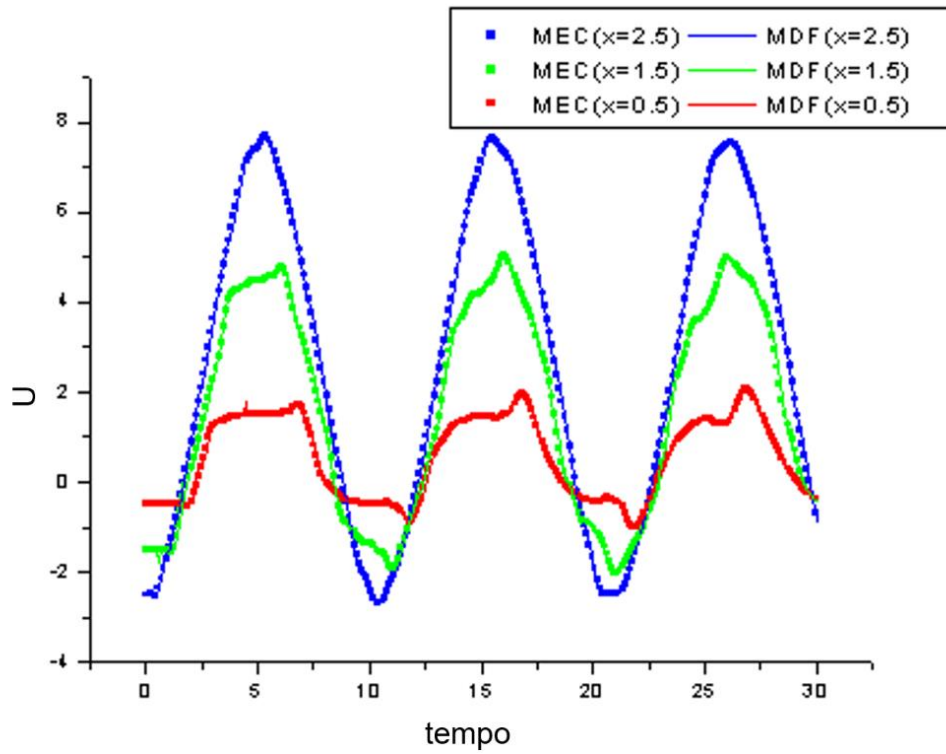


FIGURA 3.20: Problema 3: deslocamentos dos pontos médios de cada subregião.

A seguir, nas FIGURAS (3.12)-(3.14), são apresentados resultados para du/dn no nó de interface entre a primeira e a segunda subregião.

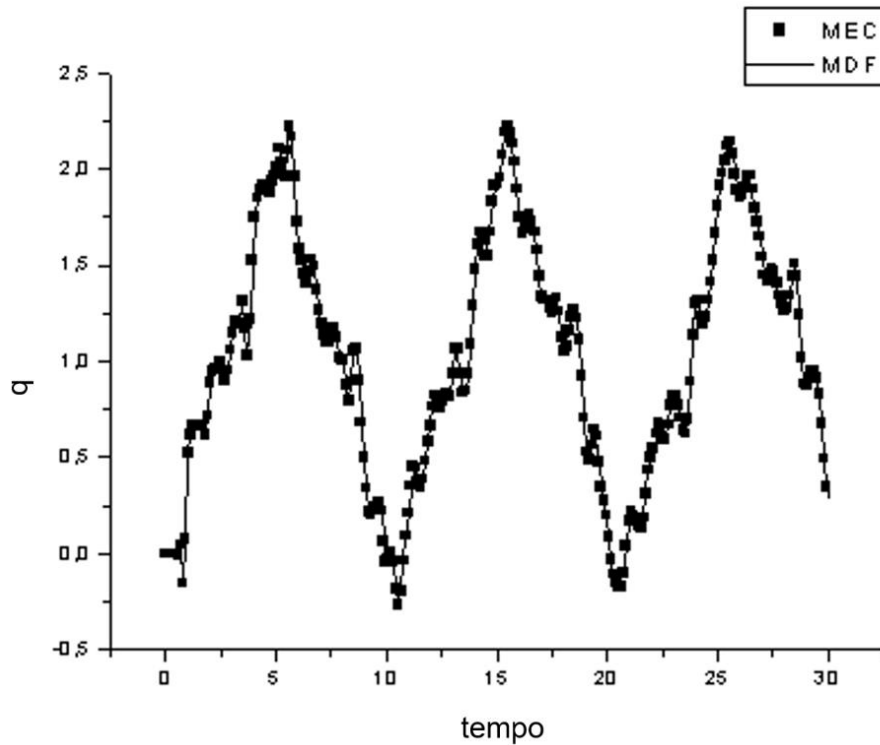


FIGURA 3.21: Problema 1: resultados para du/dn em $x=L/3$.

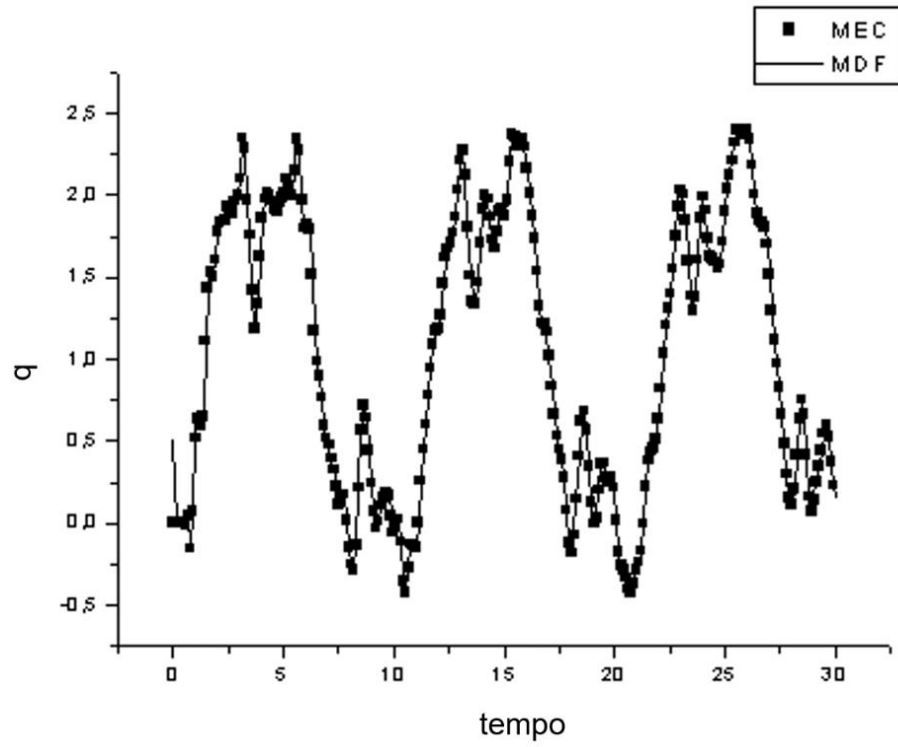


FIGURA 3.22: Problema 2: resultados para du/dn em $x=L/3$.

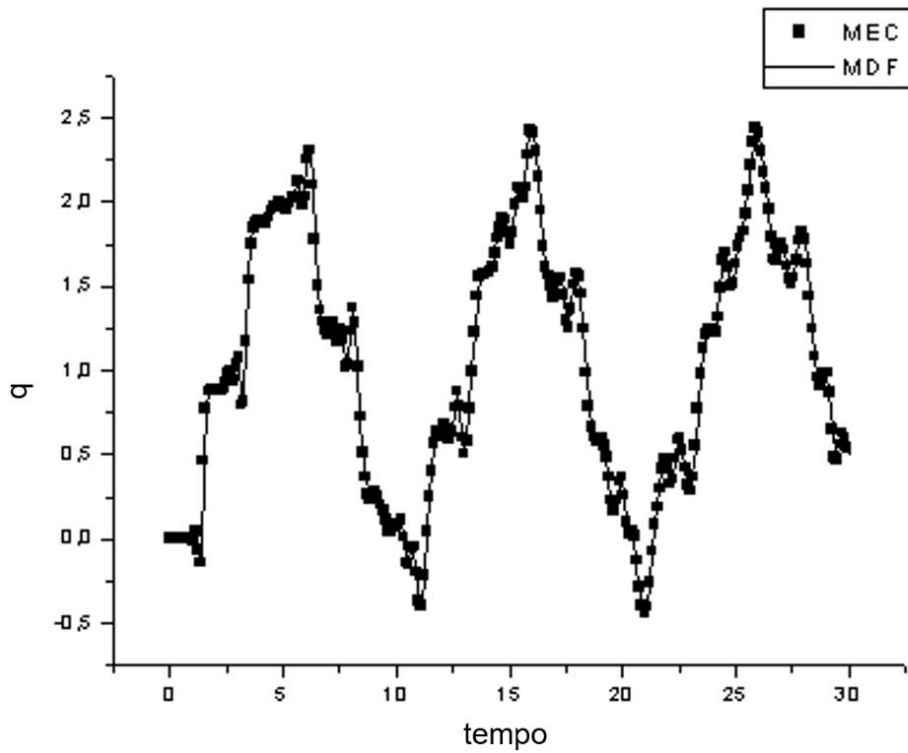


FIGURA 3.23: Problema 3: resultados para du/dn em $x=L/3$.

4 CONCLUSÕES

O Método dos Elementos de Contorno possui uma base matemática bem estabelecida e, para uma determinada classe de problemas, entre os quais o problema estudado nesta dissertação, torna-se a escolha mais adequada.

A principal contribuição deste trabalho foi aplicar o MEC-D para solucionar problemas nos quais o domínio é constituído por materiais diferentes. A solução empregou a técnica das sub-regiões e os resultados foram bastante satisfatórios. Para problemas com domínios constituídos por um único material, o emprego das sub-regiões é interessante, pois permite calcular du/dn nos nós de interface.

Como trabalhos futuros podem ser mencionados o desenvolvimento de formulações que empreguem soluções fundamentais dependentes do tempo, tanto para problemas unidimensionais quanto para problemas bidimensionais. Outro estudo interessante diz respeito à escolha de esquemas de avanço no tempo alternativos ao adotado neste trabalho. Além disso, um estudo relativo ao critério de estabilidade, isto é, referente à escolha do intervalo de tempo também requer atenção e poderia substituir o procedimento empírico adotado aqui.

REFERÊNCIAS

ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**, Volume 2. Chippenham: John Wiley & Sons, 2002.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1996.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1989.

CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Alternative Time-Marching Schemes for Elastodynamic Analysis with Domain Boundary Element Method Formulation**. *Comput. Mech.*, n. 34, p. 387-399, 2004.

CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Solution of the Two-Dimensional Scalar Wave Equation by the Time Domain Time-Dependent Boundary Element Method: Lagrange Truncation Strategy in Time Integration**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n. 23, p. 263-278, 2006.

CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Scalar Wave Equation by the Boundary Element Method: a D-BEM Approach with Constant Time-Weighting Functions**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 81, p. 1281–1297, 2010.

COSTA, V.L.R., 2013, “**Propagação de ondas unidimensionais por meio da formulação dependente do tempo do método dos elementos de contorno**”, Dissertação de Mestrado em Métodos numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Carrer, J. A. M.; COSTA, V. L. . **Boundary element method formulations for the solution of the scalar wave equation in one-dimensional problems**. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 37, p. 959-971, 2015.

- DEMIREL, V.; WANG, S. **Efficient Boundary Element Method for Two-Dimensional Transient Wave Propagation Problems**. Appl. Math Model, n. 11, p. 411-416, 1987.
- HATZIGEORGIU, G. D.; BESKOS, D. E. **Dynamic Elastoplastic Analysis of 3D Structures by the Domain/Boundary Element Method Formulation**. Comput. Struct., n. 80, p. 339-347, 2002.
- HATZIGEORGIU, G. D.; BESKOS, D. E. **Dynamic Elastoplastic Analysis of 3D Structures by the Domain/Boundary Element Method Formulation**. Comput. Struct., n. 80, p. 339-347, 2002.
- HOUBOLT, J. C. **A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic**, Aircraft. J. Aeronaut Sci., n. 17, p. 540–550, 1950.
- KATSIKADELIS, J.T. **Boundary Element, Theory and Applications**. Elsevier, 2004.
- MANSUR, W. J.; SILVA, W. de L. **Efficient Time Truncation in Two-Dimensional BEM Analysis of Transient Wave Propagation Problems**. Earthquake Eng. Estruct. Dyn., n. 21, p. 51-63, 1992.
- MARCHI, C. H., 2001, “**Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**”, Tese Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- PARIZOTTO, R., 2013, “**TESTE DE INTEGRIDADE EM ESTACAS: PIT - UM ENSAIO NÃO DESTRUTIVO**”, Anais do 11º Encontro Científico Cultural Interinstitucional.
- SANTIAGO, J. A. F.,. “**Implementação do Método dos elementos de Contorno para elasticidade bidimensional com o uso de microcomputadores**”, dissertação

de mestrado em engenharia civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1987.

SOARES-JR., D.; MANSUR, W. J. **Compression of Time Generated Matrices in Two-Dimensional Time Domain Elastodynamic BEM Analysis.** Int. J. Numer. Methods Eng., n. 61, p. 1209-1218, 2004.

STEPHENSON, G. **An Introduction to Partial Differential Equations for Sciences Students.** London: Longman, 1970.

ZIENKIEWICZ O.C.; MORGAN,K. **Finite Elements & Approximation.** John Wiley & Sons, Inc, New York, 1983

APÊNDICE

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA PELO MDF

Utilizando diferenças centrais para calcular as derivadas podemos expressar a equação (1.7) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (B.2)$$

$$\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (B.3)$$

Chamando $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x} c$, temos e isolando u_i^{k+1} a equação acima fica na seguinte forma:

$$u_i^{k+1} = (\mu^2)(u_{i+1}^k) - 2(1 - \mu)u_i^k + \mu^2 u_{i-1}^k - (u_i^{k-1}) \quad (B.5)$$

Valores que ficam de fora do domínio, tanto no tempo quanto no espaço, são determinadas utilizando as condições iniciais e as condições de contorno, respectivamente.

Em problemas que apresentam meios constituídos por materiais diferentes a equação (B.5) é aplicada, nos nós de interface, considerando cada meio separadamente; em seguida, é calculada a média aritmética dos valores de u_i^{k+1} .