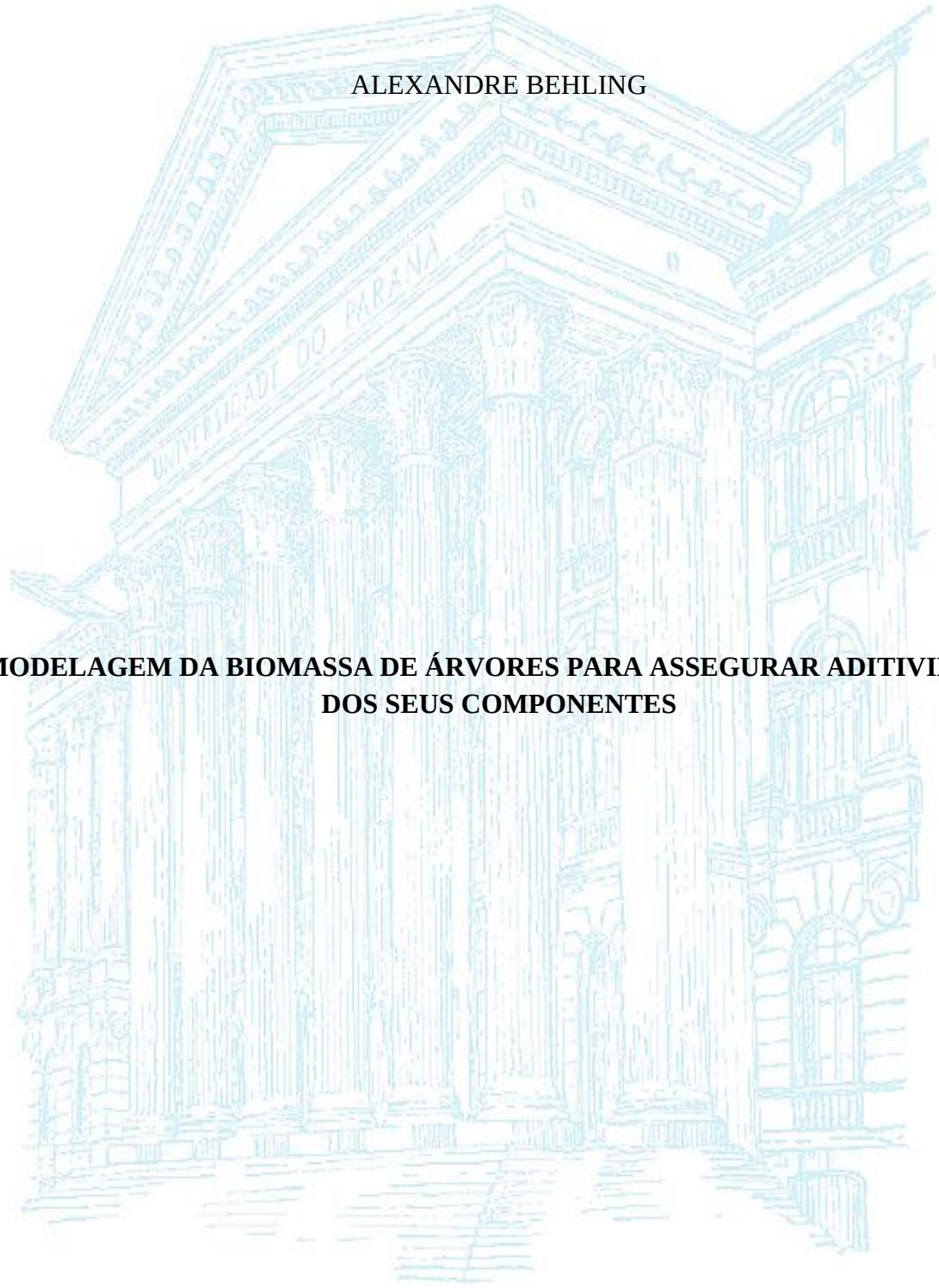
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALEXANDRE BEHLING



MODELAGEM DA BIOMASSA DE ÁRVORES PARA ASSEGURAR ADITIVIDADE DOS SEUS COMPONENTES

CURITIBA
2016

ALEXANDRE BEHLING

MODELAGEM DA BIOMASSA DE ÁRVORES PARA ASSEGURAR ADITIVIDADE DOS SEUS COMPONENTES

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Florestal, no Curso de Pós Graduação em Engenharia Florestal, Área de concentração de Manejo Florestal, Setor de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto

Co-orientador: Prof. Ph.D. Carlos Roberto Sanquetta

Co-orientador: Prof. Dr. Ana Paula Dalla Corte

CURITIBA
2016

Ficha catalográfica elaborada pela
Biblioteca de Ciências Florestais e da Madeira - UFPR

Behling, Alexandre
Modelagem da biomassa de árvores para assegurar aditividade dos seus componentes / Alexandre Behling. – Curitiba, 2016.
117 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto
Coorientadores: Prof. Dr. Carlos Roberto Sanquetta
Profª. Drª. Ana Paula Dalla Corte
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Agrárias, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal. Defesa: Curitiba, 12/09/2016.
Área de concentração: Manejo Florestal.

1. Biomassa. 2. Árvores. 3. Manejo florestal. 4. Teses. I. Péllico Netto, Sylvio. II. Sanquetta, Carlos Roberto. III. Dalla Corte, Ana Paula. IV. Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Agrárias. V. Título.

CDD – 634.9
CDU – 634.0.548

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS AGRÁRIAS
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA FLORESTAL
Código CAPES: 40001016015P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA FLORESTAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **ALEXANDRE BEHLING**, intitulada: "**MODELAGEM DA BIOMASSA DE ÁRVORES PARA ASSEGURAR ADITIVIDADE DOS SEUS COMPONENTES.**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovado.

Curitiba, 12 de Setembro de 2016.

SYLVIO PÉLLICO NETTO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

AURÉLIO LOURENÇO RODRIGUES
Avaliador Externo (AUT)

CARLOS ROBERTO SANQUETTA
Avaliador Interno (UFPR)

RAFAELO BALBINOT
Avaliador Externo (UFSM)

BRAULIO OTOMAR CARON
Avaliador Externo (UFSM)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO U.F.P.R. PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FLORESTAL MESTRADO DOUTORADO SETOR DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS

À minha afilhada Isabella (*In memoriam*).

Apesar de efêmero, mostraste o quão pequenos são os obstáculos.

BIOGRAFIA DO AUTOR

Alexandre Behling, filho de Bruno Behling e Lorena Behling, nasceu no município de Tucunduva no estado do Rio Grande do Sul, no dia 19 de fevereiro de 1987. Seus pais eram agricultores e residiam na localidade de Três Pedras, no município de Novo Machado. É o sexto entre seis filhos.

Sua vida estudantil iniciou na primeira série na Escola Estadual de Ensino Fundamental Roque Gonzales, em Três Pedras, no ano de 1994, e teve a oportunidade de aprender a ler e a escrever com a professora Cecília Fiut. Seus estudos foram continuados na Escola Estadual Ensino Fundamental Gonçalves Dias, na localidade de Barra Funda, também pertencente ao município de Novo Machado. Em 1999 sua família mudou-se para a bela e maravilhosa cidade de Tucunduva e, então, a conclusão do ensino médio foi realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental Princesa Isabel no ano de 2001.

Seguindo os passos de seu irmão Marcos, Alexandre ingressou na Escola Técnica Estadual Visconde de São Leopoldo, em 2002. Foi o pontapé inicial na área florestal, uma vez que se tratava de um curso técnico integrado ao ensino médio. Durante esse período também exerceu as atividades de jardineiro, garçom, secretário da cooperativa do curso técnico e líder de turma. Obteve a oportunidade de realizar um estágio nas áreas: viveiro florestal, pesquisa e inventário florestal, silvicultura e colheita florestal na empresa TANAGRO S.A., que exerce atividades silviculturais com a espécie acácia negra. Após a conclusão do estágio e também do curso Técnico Florestal deu início às atividades profissionais na mesma empresa, atuando como líder de equipe de silvicultura. Foi um período que possibilitou vivenciar grandes experiências que proporcionaram crescimento profissional e pessoal.

Em 2006 ingressou no ensino de nível superior no curso de Engenharia Florestal, na Universidade Federal de Santa Maria, campus Frederico Westphalen. No primeiro semestre iniciou o desenvolvimento de projetos de pesquisa junto ao Laboratório de Agroclimatologia, sob a orientação do professor Dr. Braulio Otomar Caron. Juntamente com outros professores e com a cooperação de vários colegas deu início a uma jornada de planejamento, instalação e condução de experimentos relacionados a sistemas agroflorestais, florestas energéticas e agrometeorologia, além da análise de dados e preparação de manuscritos. O período de graduação foi de integral dedicação à universidade e com o passar do tempo foi desenvolvendo atividades acadêmicas que mostravam indícios do caminho ao qual deveria seguir.

Os estudos foram continuados em 2012 ao ingressar no mestrado em Engenharia Florestal na Universidade Federal do Paraná, na linha de pesquisa de Manejo Florestal. Sob orientação do professor PhD. Carlos Roberto Sanquetta, desenvolveu várias pesquisas relacionadas às áreas de estatística, experimentação, agrometeorologia, florestas energéticas, biomassa e carbono.

Em 2014 ingressou no doutorado na mesma universidade e linha de pesquisa, produzindo estudos nas áreas de: matemática, estatística, experimentação, sistemas computacionais, biomassa e carbono, sob orientação do professor Dr. Sylvio Péllico Netto. Ainda durante seu doutoramento teve oportunidade de ministrar a disciplina Estatística e Experimentação Agrícola, na Universidade Federal do Paraná.

Durante sua trajetória da graduação até a conclusão de seu doutorado foi bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Teve oportunidade de trabalhar com vários pesquisadores, que sempre incentivaram à produção científica de artigos e livros. Suas pesquisas atuais estão voltadas ao desenvolvimento de técnicas para aperfeiçoar os estimadores de biomassa e volume em povoamentos florestais.

AGRADECIMENTOS

Deus, meu guia. Todos os desafios e alegrias vividas me tornam uma pessoa melhor a cada dia.

Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-graduação em Engenharia Florestal, pela oportunidade de estudo. Aos professores da pós-graduação, o meu obrigado pelos conhecimentos transmitidos.

Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, por mais uma vez me conceder uma bolsa de estudos e permitir a minha dedicação diária para com os projetos de pesquisas desenvolvidos.

À TANAGRO S.A. e *TANAC S.A.* fica o meu agradecimento por tantas oportunidades oferecidas (estágio durante o técnico florestal, coleta de dados no mestrado, doutorado) e por ter me oportunizado conhecer o primeiro doutor em Engenharia Florestal (Dr. Silas Mochiutti), o que certamente me fez criar um mundo de desafios. Estendo votos do diretor da empresa ao motorista dos colaboradores, pois todos sempre foram muito especiais comigo.

Professor Dr. Sylvio Péllico Netto, meu orientador. Simplesmente o pesquisador e professor mais brilhante que pude conhecer. Não é exagero enfatizar que é um dos maiores cientistas da história da Engenharia Florestal. Por todas as aulas de biometria, estatística, matemática, português e inglês em nossos produtivos encontros semanais nas sextas-feiras. Foi um privilégio ter sido seu orientado.

BIOFIX – Laboratório de Excelência em Pesquisas de Fixação de Carbono na Biomassa bem como os professores *PhD. Carlos Roberto Sanquetta* (co-orientador) e *Dr. Ana Paula Dalla Corte* (co-orientadora) por enriquecer minha formação, pelos desafios diários em busca de novos horizontes e por sempre terem me tratado com respeito e igualdade.

Há pessoas que cruzam nossas vidas e ali permanecem. Viram amigos, colegas ou até mesmo passam a serem incluídos como parte da família. Professor *Dr. Braulio Otomar Caron* é uma delas. O acolhimento no laboratório durante a graduação, os inúmeros trabalhos e projetos desenvolvidos fomentaram a minha caminhada e ideia em um dia poder me tornar também um professor de universidade. Obrigado.

Aos demais *professores* da Universidade Federal de Santa Maria, no campus Frederico Westphalen, que me propiciaram conhecimentos e foram determinantes em minha formação. Aos *amigos de jornada*, nos estudos, no laboratório e experimentos conduzidos, deixo aqui meu agradecimento especial.

Aos amigos de toda a vida, *Francis Albert Schneider e Marcos Roberto Bertó* bem como as pessoas que Curitiba me trouxe e que se tornaram grandes amigos: *Sérgio Costa, Guilherme Cadori, Alessandro Schneider, Aurélio Rodrigues, Jonathan Trautenmuller*. Aos *companheiros inestimáveis* de jornada do BIOFIX e Laboratório de Manejo Florestal de Nativas. Foi uma satisfação em conhecê-los e compartilhar momentos! Fica o meu apreço por todos vocês!

Professor *Dr. Dimas Agostinho da Silva*, pela amizade, oportunidades e excelentes conversas.

Professor *Dr. José Henrique Pedrosa-Macedo*, por me demonstrar como a vida é bela e como podemos ser feliz diariamente.

Aos *secretários* do Programa de Pós-graduação em Engenharia Florestal da Universidade Federal do Paraná por sempre terem dispensado preciosa atenção.

Juliana, meu amor. O seu apoio, companheirismo e dedicação propiciaram o êxito em cada etapa e alimentam a vontade de seguir em frente. Você é muito especial.

À minha família (pra lá de especial), por alegrar minha vida. Especialmente minha mãe *Lorena*, guerreira que criou seus seis filhos na ausência do pai e diante de muitas dificuldades. Esse espírito de luta me fez crescer e me fortalece em tudo que busco.

Ao seu *Jolberto Pedroso*, pela torcida e apoio à trajetória acadêmica.

À Dona *Cleni Pedroso*, cada gesto e orações visando meu bem estar contribuíram nessa conquista.

Aos queridos *Inês* e *Celso*, por domingos sempre alegres de descontração.

Aos professores *Dr. Andrew Merchant* (*University of Sydney*), *Dr. David Affleck* (*The University of Montana*), *Dr. Dehai Zhao* (*The University of Georgia*), *Jerome Vanclay* (*Southern Cross University*) e *Dr. Steve Kelley* (*North Carolina State University*) por me oferecem uma oportunidade de realizar um doutorado sanduíche, embora o projeto não tenha sido concretizado.

Quando olho para o passado vejo que muitas pessoas contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional e ainda continuam torcendo para que os projetos de minha vida se realizem. A todos fica minha gratidão. Contem comigo!

Acredita, porque sei,

tu encontrarás alguma coisa muito maior nas florestas que em livros.

Pedras e árvores te ensinarão aquilo o que não poderás aprender dos mestres.

São Bernardo de Clairveaux (1090-1153)

Extraído do livro do Técnico Florestal v. 1.

RESUMO

Neste trabalho é discutido o tema aditividade dos componentes da biomassa de árvores. Foram apresentados procedimentos para estabelecer sistemas de equações de biomassa aditivos, propriedade indispensável e que determina ser as estimativas de biomassa dos componentes equivalente à biomassa total. Para avaliar e discutir tal contexto várias indagações foram feitas, que estão apresentadas no texto, e que foram devidamente respondidas por meio de informações da literatura e pelas avaliações experimentais discutidas e avaliadas no conteúdo deste trabalho. Um experimento em florestas de *Acacia mearnsii* De Wild. (acácia negra) foi conduzido nos locais que concentram os plantios da espécie no estado do Rio Grande do Sul. Para tais condições foram ajustadas equações de biomassa total e para os componentes copa e fuste por meio de *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions* (WNSUR, estimador de sistemas de equações) e por meio de *generalized nonlinear least squares* (GNLS, estimador independente). Na análise do desempenho dos estimadores, especialmente no que se refere às estimativas de biomassa e das estatísticas de ajuste das equações, pode-se concluir a respeito da indiferença do emprego de equações ajustadas por meio dos estimadores independentes e de sistemas de equações. Por outro lado, essa conclusão diverge quando avaliada a consistência biológica e a eficiência dos estimadores. Estimar as equações de biomassa para os componentes e para a biomassa total independentemente não é realista, pois do ponto de vista biológico as estimativas de biomassa são inconsistentes, ou seja, não são aditivas. As estimativas de biomassa dos componentes e da biomassa total resultantes de equações ajustadas por meio de sistemas de equações viabilizaram intervalos de confiança menores em relação às equações ajustadas independentemente, sendo mais eficientes. O estimador WNSUR apresenta melhores propriedades biológicas e estatísticas para estimar equações alométricas de biomassa dos componentes e biomassa total quando comparado com a estimação independente, sendo o método que deve ser utilizado. Por fim, os exemplos apresentados na revisão da literatura são úteis para a compreensão dos princípios envolvidos e também para propósitos de difusão das técnicas.

Palavras-chave: Consistência biológica. Estimador eficiente. Derivação de pesos. Intervalo de confiança.

ABSTRACT

This study discusses the additivity of the components of tree biomass. Procedures have been presented to establish additive biomass equation systems, essential property to determine the estimated biomass of components equivalent to total biomass. To evaluate and discuss this context, several inquiries were made, which are presented in the text, which were duly answered by the literature information and by the experimental evaluations discussed in the content of this work. An experiment in forests of *Acacia mearnsii* De Wild. (black wattle) was conducted on sites that concentrate the plantations of the species in the state of Rio Grande do Sul. For such conditions, equations for total biomass, canopy and stem components were fitted by weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions (WNSUR, estimator of equation systems) and by generalized nonlinear least squares (GNLS, independent estimator). In the performance of the estimators' analysis, especially with regard to biomass estimates and fitted statistics of the equations, it can be concluded about the equivalence of using equations adjusted by means of independent estimators or by system of equations. Moreover, this conclusion diverges when evaluating the biological consistency and efficiency of estimators. Estimating the biomass equations of the components and the total biomass independently is not realistic, because biologically these biomass estimates are inconsistent, i.e. they are not additive. The biomass estimates resultant from components and from total biomass, when adjusting system of equations, turns possible getting smaller confidence intervals than using equations adjusted independently, what make them more efficient. The estimator WNSUR provides better biological properties and statistics to estimate biomass allometric equation of components and total biomass when compared to independent estimators, thus this should be the method to be used. Finally, the examples presented in the literature review are useful for understanding the principals involved and dissemination purposes of these techniques.

Keywords: Biological consistency. Efficient estimator. Derivation of weights. Confidence interval.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COORDENADAS CENTRAIS DAS UNIDADES AMOSTRAIS INSTALADAS EM POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.....47

TABELA 2 – GRUPO E SISTEMAS DE EQUAÇÕES ORGANIZADOS POR IDADE E MATURIDADE DOS POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.....50

TABELA 3 – INTERVALOS DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES (d E h) E NÚMERO DE INDIVÍDUOS (T) UTILIZADOS PARA O AJUSTE DE EQUAÇÕES DE BIOMASSA EM POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.....50

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA COM 1 E 8 ANOS NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL 44

FIGURA 2- ÁREA DE CULTIVO DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL, E DIVISÃO DESSA ÁREA EM TRÊS REGIÕES DENOMINADAS DE ENCRUZILHADA DO SUL, CRISTAL E PIRATINI 45

FIGURA 3 - POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL, NOS QUAIS FOI CONDUZIDA A PRESENTE PESQUISA. 46

FIGURA 4 - PLANTIOS DE ACÁCIA NEGRA EM ÁREA DE PRIMEIRA E SEGUNDA ROTAÇÃO NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL 46

FIGURA 5 - DETERMINAÇÃO DA BIOMASSA DA COPA E DO FUSTE DE ACÁCIA NEGRA EM PLANTIOS COMERCIAIS NO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL. 49

FIGURA 6 - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES PARA A BIOMASSA DOS COMPONENTES ESTIMADOS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i)$ E 2 $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ij})$. 62

FIGURA 7 - COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO AJUSTADO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA DE COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL ESTIMADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 E 2..... 63

FIGURA 8 - RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL OBSERVADOS E ESTIMADOS POR EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 64

FIGURA 9 - RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL OBSERVADOS E ESTIMADOS POR EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 2. 65

FIGURA 10 - RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL ESTIMADOS POR EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 E 2. 66

FIGURA 11 - NÃO ADITIVIDADE DAS ESTIMATIVAS ($\boldsymbol{NA}$) DE BIOMASSA DE COMPONENTES COM A BIOMASSA TOTAL ORIUNDA DE EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1, EM NÍVEL DE ÁRVORE 67

FIGURA 12 - NÃO ADITIVIDADE DAS ESTIMATIVAS ($\boldsymbol{NA}$) DE BIOMASSA DE COMPONENTES COM A BIOMASSA TOTAL ORIUNDA DE EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1, EM NÍVEL DE PARCELA E DA UNIDADE. 68

FIGURA 13 - PRECISÃO DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS VALORES ESTIMADOS DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL UTILIZANDO EQUAÇÕES AJUSTADAS POR ENGLS E WNSUR.. 69

FIGURA 14 - EFICIÊNCIA NO INTERVALO DE CONFIANÇA (EIC) PARA AS ESTIMATIVAS DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL POR MEIO DE EQUAÇÕES AJUSTADAS USANDO O PROCEDIMENTO 2... 70

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16
2 OBJETIVOS 20
3 MODELAGEM DOS COMPONENTES DA BIOMASSA EM ÁRVORES E SEUS ESTIMADORES DE REGRESSÃO 21
3.1 COMPONENTES DA BIOMASSA E ESTIMADORES DE REGRESSÃO 21
3.2 *SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS* 28
3.3 *NONLINEAR SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS* 34
3.4 DERIVAÇÃO DE PESOS E *WEIGHTED-NONLINEAR SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS* 36
3.5 ESTATÍSTICAS COMPLEMENTARES 39
3.6 PESQUISAS E APLICAÇÕES SOBRE *SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS* 42
4 MATERIAL E MÉTODOS 44
4.1 OBJETO DE ESTUDO: ESPÉCIE ACÁCIA NEGRA 44
4.2 AMOSTRAGEM DE POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA 45
4.3 ESTABELECIMENTO E CONDUÇÃO DOS POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA 46
4.4 ORIGEM DOS DADOS EXPERIMENTAIS 47
4.5 MENSURAÇÃO DAS VARIÁVEIS 48
4.5.1 Mensuração de variáveis oriundas da parcela 48
4.5.2 Mensuração de variáveis na subparcela 48
4.6 EQUAÇÕES DE BIOMASSA ACIMA DO SOLO 49
4.6.1 Equações de biomassa estimadas independentemente- Procedimento 1 50
4.6.2 Sistemas de equações de biomassa – Procedimento 2 51
4.7 DESEMPENHO, CONSISTÊNCIA BIOLÓGICA E EFICIÊNCIA DOS ESTIMADORES DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA 52
5 RESULTADOS 54
5.1 EQUAÇÕES DE BIOMASSA ESTIMADAS INDEPENDENTEMENTE – PROCEDIMENTO 1 54
5.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE BIOMASSA – PROCEDIMENTO 2 57
5.3 DESEMPENHO, CONSISTÊNCIA BIOLÓGICA E EFICIÊNCIA DOS ESTIMADORES DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA 62
5.3.1 Desempenho dos estimadores de equações de biomassa 62
5.3.2 Consistência biológica das equações de biomassa 67

5.3.3 Eficiência dos estimadores das equações de biomassa....68
6 DISCUSSÃO....71
6.1 EQUAÇÕES DE BIOMASSA ACIMA DO SOLO....71
6.1.1 Equações não lineares de biomassa....71
6.1.2 Modelagem da estrutura da variância....73
6.1.3 Equações de biomassa acima do solo para a espécie acácia negra....75
6.2 DESEMPENHO, CONSISTÊNCIA BIOLÓGICA E EFICIÊNCIA DOS ESTIMADORES DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA....78
6.2.1 Desempenho....78
6.2.2 Consistência biológica das equações de biomassa....79
6.2.3 Eficiência dos estimadores das equações de biomassa....81
6.3 IMPORTÂNCIA DE EQUAÇÕES ADITIVAS E DE MENOR VARIÂNCIA....83
7 CONCLUSÕES....89
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES....91
REFERÊNCIAS....92
APÊNDICES....103

1 INTRODUÇÃO

A biomassa florestal refere-se a toda massa vegetal existente na floresta ou apenas condizente à fração arbórea. A importância em quantificar a biomassa nas florestas é destacada por diversos pesquisadores no mundo e está associada aos cenários das mudanças climáticas (DIXON et al., 1994; HOUGHTON et al., 2000; FANG et al., 2001; HOUGHTON, 2005; KINDERMANN et al., 2008; KURZ et al., 2008; LINDNER et al., 2010; SANQUETTA et al., 2011; MANDAL et al., 2013; ALAM e NIZAMI, 2014), ao manejo das florestas (SNOWDON e BENSON, 1992; HOEN e SOLBER, 1994; STAPE, BINKLEY e RYAN, 2008; STUPAK et al., 2011; ROUTA, HELLOMÄKI e STRANDMAN, 2012) e ao uso desse recurso para diversos fins (SCHLAMADINGER e MARLAND, 1996; BERNDES, HOOGWIJK e BROEK, 2003; SHABANI, AKHTARI e SOWLATI, 2013).

Mensurar a biomassa de árvores é um processo laborioso e de alto custo em relação à outras variáveis biométricas na floresta. Por isso, tem sido usual o emprego de modelos empíricos que possibilitam estimar a biomassa a partir de variáveis dendrométricas, que são determinadas com simplicidade. Assim, a aplicação da modelagem viabiliza os inventários florestais de biomassa, uma vez que reduz essencialmente os custos. Além disso, não seria lógico e nem viável mensurar a massa de todas as árvores.

Dessa maneira, nos processamentos de inventário florestal são realizadas estimativas de biomassa e carbono em árvores vivas da unidade amostral. As estimativas são derivadas de equações de biomassa para árvores individuais, desenvolvidas para fornecer valores da biomassa total da árvore e de seus componentes: folhas, galhos, casca do fuste, fuste e raiz, a partir de informações do inventário florestal. Os resultados obtidos para a biomassa dos componentes e para a biomassa total são relevantes para modelos de crescimento e produção, quantificação dos estoques e, em especial, para os programas de bioenergia ou de fixação de carbono na biomassa.

Uma premissa básica deve estar envolvida na modelagem da biomassa: a aditividade. Essa corresponde à compatibilidade das estimativas de biomassa para os componentes da árvore (folhas, galhos, casca, fuste e raiz) com a biomassa total, ou seja, a soma da massa dos componentes deve ser igual à massa total. Assim, é essencial que as equações de componentes sejam aditivas, ou seja, que ocorra compatibilidade das estimativas da biomassa dos componentes com a biomassa total. Ao modelar a biomassa total e para os componentes, na maioria das vezes, os ajustes dos modelos são realizados de forma independente, ou seja, para

cada componente é realizado um ajuste sem considerar a interdependência que existe entre os componentes da árvore.

Ao utilizar essas equações, tem-se que as somas das biomassas dos componentes não produzirá o mesmo resultado que o obtido por meio da equação de biomassa total, não sendo consistente biologicamente. Conforme Chiyenda e Kozak (1984) é pouco realista considerar que os componentes de uma mesma árvore são independentes entre si. Portanto, ao modelar a biomassa, é necessário empregar estimadores que assegurem a aditividade das estimativas. A estimação de sistemas de equações, pode ser empregada para resolver o problema da falta de aditividade.

Nesse sentido, alguns pressupostos precisam ser definidos para assegurar acurácia na predição da biomassa florestal em larga escala. Genet et al. (2011) especificam que um bom conjunto de equações para tal propósito deve atender às seguintes características: *i*) consistência – referente à separação da biomassa total da árvore em componentes padrões, assegurando-se, entretanto, sua aditividade, *ii*) robustez – referente à composição de um sistema operativo que funcione corretamente para amplas variações na população amostral e com baixa sensibilidade ao processo de amostragem utilizado e às hipóteses formuladas e *iii*) acurácia.

Neste trabalho, serão tratadas apenas as características *i* e *iii*, a robustez não será tratada, pois o tema generalidade, importante para os inventários em larga escala, não foi incluído no seu escopo. Para esses propósitos, ao ajustar equações de biomassa total e biomassa dos componentes prestigia-se três aspectos fundamentais: desempenho das equações, consistência biológica das equações e eficiência dos estimadores das equações. O desempenho é relativo à qualidade das estimativas da biomassa, enquanto a consistência biológica refere-se à aditividade dos componentes com a biomassa total. Em relação à eficiência dos estimadores, prioriza-se aquele que resulta em menor variância das equações, o que determina menores intervalos de confiança da estimativa das variáveis dependentes, sendo, assim, mais eficientes.

Tomando-se as melhores equações, avaliadas por meio do desempenho, remanesce duas relevantes propriedades na modelagem da biomassa de componentes, pois não é satisfatório que as equações de biomassa sejam aditivas, mas o estimador das equações seja menos eficiente, ou vice-versa. Essas temáticas foram pesquisadas nos últimos 50 anos, destacando-se o pioneirismo dos pesquisadores Kozak (1970), Cunia (1979), Jacobs e Cunia (1980), Chiyenda e Kozak (1984), Cunia e Briggs (1984, 1985) e Reed e Green (1985) que apresentaram métodos para alcançar a aditividade das equações de biomassa e, adicionalmente, a revisão e disseminação desses procedimentos por Parresol (1999, 2001).

Parresol (1999) pesquisou três procedimentos para garantir a aditividade de equações lineares de biomassa e Parresol (2001) dois procedimentos para equações não lineares. Em suas pesquisas concluiu que o procedimento *seemingly unrelated regressions* (SUR) para funções lineares e *nonlinear seemingly unrelated regressions* (NSUR) para funções não lineares resultaram em estimadores mais eficientes para a biomassa dos componentes e para a biomassa total, sendo recomendada a aplicação desses procedimentos na modelagem de componentes. Tais trabalhos exerceram influência considerável na disseminação desse tipo de modelagem em diversas partes do mundo, embora no Brasil a aplicação se restringe aos trabalhos conduzidos por Sanquetta et al. (2014) e Sanquetta et al. (2015a).

A maneira comum de estabelecer equações de biomassa para os componentes e para a biomassa total é utilizar um estimador de uma única equação (estimador independente), sendo usada, assim, cada uma das equações para estimar, sucessivamente, as biomassas dos componentes e do total. Entretanto, isso tem sido um complicador quando avaliado a consistência biológica e a eficiência dos estimadores. Embora a aditividade possa ser resolvida tomando-se a biomassa total como a soma das massas dos componentes, remanesce a eficiência estatística, pois o estimador é menos eficiente quando comparado com a aplicação das regressões aparentemente não relacionadas (SUR e NSUR).

A aplicação das regressões aparentemente não relacionadas difere da modelagem restrita a uma variável dependente, porque tratam das estimativas dos parâmetros dos modelos de duas ou mais variáveis dependentes, conjuntamente em um sistema de equações. Especificamente, os estimadores SUR e NSUR consideram a correlação contemporânea entre as perturbações das diferentes equações estabelecidas, além das estimativas serem aditivas, são mais eficientes do que os métodos de uma única equação. Essas concepções são claramente evidenciadas nos trabalhos apresentados por Parresol (1999, 2001).

Os estimadores SUR e NSUR exigem um tratamento estatístico especial, portanto os estimadores apresentam propriedades especiais. *i*) Quais são essas propriedades? *ii*) Como são compostos esses estimadores? *iii*) Qual é o ganho em eficiência desses estimadores em relação aos estimadores de uma única equação? *iv*) Os estimadores de única equação produzem estimativas biologicamente consistentes? *v*) As estimativas da biomassa por sistema de equações equivalem-se àquelas produzidas por equações estimadas independentemente? *vi*) Os parâmetros estimados e as estatísticas que são utilizadas para avaliar a qualidade do ajuste são semelhantes para as equações ajustadas em sistemas e equações ajustadas independentemente?

Essas questões motivaram a apresentação deste trabalho. As soluções das duas primeiras são apresentadas na seção revisão da literatura, que incorporam os temas:

componentes da biomassa e estimadores de regressão, *seemingly unrelated regressions, nonlinear seemingly unrelated regressions,* derivação de pesos e *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions,* estatísticas para avaliar equações e, por fim, pesquisas realizadas sobre regressão aparentemente não relacionadas e aplicações na Ciência Florestal.

As demais questões arguidas no presente trabalho compõem as seguintes hipóteses, que foram testadas por meio da condução de um experimento em florestas de acácia negra:

i) "Considerando-se que as equações obtidas por meio do ajuste de única equação e de sistemas de equações são consistentes estatisticamente (sem tendenciosidade), então as estimativas de biomassa e as estatísticas de ajuste das equações (coeficiente de determinação e coeficiente de variação) obtidas por meio desses procedimentos não diferem entre si".

ii) "Dado os estimadores de sistemas de equações incluírem restrições para obtenção dos coeficientes nos seus ajustes, suas estimativas devem resultar em aditividade dos componentes, quando comparados com os estimadores obtidos em única equação, devendo, consequentemente, resultar em consistência biológica".

iii) "Dado os estimadores de sistemas de equações incluírem as correlações contemporâneas dos componentes da biomassa nos seus ajustes, suas estimativas devem resultar em menor variância, quando comparados com os estimadores obtidos em única equação, devendo, consequentemente, resultar em maior eficiência".

2 OBJETIVOS

i) Aplicar e discutir os procedimentos de sistemas de equações na modelagem de biomassa de componentes acima do solo em árvores de acácia negra para assegurar a consistência biológica e eficiência dos seus estimadores.

ii) Quantificar e avaliar a consistência biológica e a eficiência dos estimadores de única equação obtidos na modelagem de biomassa de componentes acima do solo em árvores de acácia negra.

iii) Avaliar e discutir o desempenho, consistência biológica e eficiência dos estimadores de regressão em equação única e em sistemas de equações na modelagem de biomassa de componentes acima do solo em árvores de acácia negra.

3 MODELAGEM DOS COMPONENTES DA BIOMASSA EM ÁRVORES E SEUS ESTIMADORES DE REGRESSÃO

Atualmente os mais importantes países do mundo estão investindo recursos financeiros para aprofundamento dos estudos de biomassa devido a grande importância que ela representa para os aspectos energéticos, mas sobretudo para a fixação de carbono como forma de contribuir para o cenário das mudanças no clima.

O Brasil, dada sua extensão territorial e a grande extensão de suas florestas tropicais não poderá estar ausente na procura de aprofundamentos sobre os estudos de avaliação de biomassa em todos os seus biomas.

O escopo que será abordado no presente trabalho, visa contribuir para explicitar avanços metodológicos já definidos e aplicados em outros países e, com certeza, permitirão assegurar uma avaliação de biomassa mais apropriada, principalmente quando tratados os aspectos de compatibilidade entre as estimativas da biomassa dos componentes com a biomassa total e com maior eficiência estatística.

3.1 COMPONENTES DA BIOMASSA E ESTIMADORES DE REGRESSÃO

West e Brown (2005) realçam que, embora a diversidade biológica seja surpreendente e complexa, muitos dos processos biológicos fundamentais se manifestam como uma forma extraordinariamente simples, quando equacionados em função de seu tamanho, independente da classe ou grupo taxonômico a ser considerado. Esse dimensionamento está associado ao tema alometria e, conforme Niklas (1994), segue um comportamento da lei de potência (*power-law*), definido em [1].

$$y = \alpha x^{\beta} \tag{1}$$

Em que:

y é alguma variável biológica quantificável.

α é uma constante de normalização.

x é a massa do organismo.

β é o expoente de escala.

Uma simplificação adicional é devida ao valor do expoente β assumir um conjunto limitado de valores, que são tipicamente múltiplos simples de $\frac{1}{4}$ (WEST et al., 1999). Muitas variáveis biológicas seguem essa escala, sendo foram apresentadas e discutidas por West et al. (1997, 1999), Enquist et al. (1998, 1999), Enquist e Niklas (2001), Enquist (2002), Niklas (2004), West e Brown (2004) e West e Brown (2005).

Huxley (1932) consolidou o tema alometria e realizou a formulação teórica sobre o crescimento e suas escalas. Ele assumiu que a taxa de crescimento de um órgão era simultaneamente proporcional a uma característica constante do próprio órgão(ξ), dada sua dimensão no momento (x) e para um fator geral, comum à todas as partes do organismo, representando os efeitos de sua idade e do ambiente (G). Tomando-se a dimensão do organismo como y com característica constante η, a taxa específica de crescimento do órgão e do organismo pode ser definida conforme [2], com solução das derivativas em [3].

$$\frac{dy}{dt} = \eta y G \text{ e } \frac{dx}{dt} = \xi x G \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\eta y G}{\xi x G} = \frac{\eta y}{\xi x} \tag{3}$$

A expressão definida em [3] possui solução conforme [4] e [5], explicando a origem do modelo apresentado em [1].

$$\frac{dy}{y} = \frac{\eta}{\xi}\frac{dx}{x}$$

$$\log y + C_1 = \frac{\eta}{\xi}\log x + C_2 \text{ e } \log y = \frac{\eta}{\xi}\log x + (C_2 - C_1) \tag{4}$$

Considerando $(C_2 - C_1)$ igual a $\log \propto$, então:

$$\log y = \frac{\eta}{\xi}\log x + \log \propto \tag{5}$$

Recompondo a função em sua forma original tem-se que:

$$y = \alpha x^{\beta}, \beta = \frac{\eta}{\xi}$$

Além das relações de crescimento e suas escalas, a alometria também está associada à como as propriedades de um organismo mudam com características relacionadas ao seu tamanho. Nesse contexto, Niklas (2004) define alometria como estudo de tamanho e suas consequências, conforme modelo em [6].

$$y = \alpha x^{\beta} \quad (6)$$

Em que:

y denota o tamanho de um componente do corpo (medida pela sua dimensão ou massa).

x é uma medida comparável do tamanho do organismo, excluindo-se o tamanho da parte do corpo de interesse.

α é a constante alométrica.

β é o expoente alométrico (escala).

O modelo apresentado em [6], com variáveis x e y redefinidas em [7], é uma das formas alométricas mais comuns para modelar a biomassa de árvores. Tomando-se a condição em que os erros de uma simples amostra de biomassa de árvores são aditivos, então pode ser utilizado o modelo em [7]. Embora esse modelo seja simples, tem sido frequentemente aplicado, especialmente valendo-se da variável diâmetro à altura do peito (d) como preditora, como pode ser constatado nos trabalhos de Brown et al. (1989), Brown (1997).

$$y_i = \alpha x_i^{\beta} + \varepsilon_i \quad (7)$$

Em que:

y_i é a biomassa total referente a i^{th} árvore amostrada, em kg.

x_i é o valor de uma característica referente a i^{th} árvore amostrada, definido pelo diâmetro à altura do peito (em cm).

α é a constante alométrica.

β é o expoente alométrico (escala).

ε_i é o termo referente a perturbação associada a i^{th} árvore amostrada, em kg.

Brown et al. (2004) destacam que o modelo "*power-law*" permitiu definir outros modelos para escalas alométricas na biologia. Assim, a forma básica do modelo em [7] pode ser estendida para outras formas para modelar a biomassa das árvores. Ao invés de usar X_i para representar o valor de apenas uma característica, pode-se ampliá-lo para que represente os valores de mais de uma característica, tais como: $d_i h_i$, $d_i^2 h_i$. Outras formas dos modelos alométricos compreendem as funções tradicionalmente empregadas na Ciência Florestal para várias variáveis dendrométricas d e h, que estão apresentadas no Apêndice 1.

No contexto da estimativa de biomassa de árvores, a alometria refere-se à equações matemáticas relacionadas à biomassa em função de características que são mais fáceis de serem medidas que a própria biomassa, tais como: diâmetro à altura do peito - d, altura da árvore - h,

densidade da madeira - ρ e diâmetro da copa - dc. É obvio que as equações devem ser baseadas em amostragem destrutivas (CHAVE et al., 2014), para depois serem aplicadas genericamente e, conforme pode ser constatado no trabalho desenvolvido por Chave et al. (2004), a qualidade desses modelos alométricos se apresenta como uma das mais importantes limitações na avaliação dos estoques de biomassa.

O método mais preciso para avaliar a biomassa de uma árvore é a pesagem dos componentes, mas isso implica em atividades onerosas e de alto custo, além do corte de árvores. Uma abordagem alternativa é o emprego de equações alométricas, ou seja, árvores medidas biometricamente são convertidas em valores de biomassa por meio de modelos alométricos empíricos (BROWN, 1997). Para isso, equações de biomassa precisam ser construídas, uma vez que as relações alométricas mudam, mesmo dentro de um mesmo indivíduo, ao longo de sua vida e nas condições de crescimento que são submetidos, conforme demonstrado em Niklas (1995). Existe uma extensa literatura a respeito do desenvolvimento e utilização dos modelos alométricos de biomassa, que foi revisada por Picard et al. (2012) e documentada na base de dados *GlobAllome-Tree database* (http://www.globallometree.org).

A avaliação da biomassa de árvores é realizada em função de suas partes, que são definidas pelos seus componentes biológicos, ou seja, pela diferenciação de seus órgãos. Assim, a biomassa total das árvores pode ser dividida em dois componentes principais: (*i*) biomassa acima do solo, que inclui fuste, galhos, folhas e frutos; (*ii*) biomassa abaixo do solo, que é frequentemente dividida em raízes grossas (maior que 2 mm de diâmetro) e finas (menor que 2 mm de diâmetro).

Para representar essa generalidade funcionalmente $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i$ denota os k^{th} componentes da biomassa de uma árvore e a biomassa total (y_{Total}) é definida como a soma das biomassas dos componentes, conforme está apresentado em [8].

$$y_{Total} = \sum_{i=1}^{k} y_i \tag{8}$$

A condição igualitária apresentada em [8] passa a ser uma restrição na modelagem da biomassa, observando-se que o procedimento mais comum empregado é a regressão linear e não linear. Conforme realça Parresol (2001), uma característica desejável das equações de regressão dos componentes da árvore é que as estimativas dos componentes sejam aditivas com a estimativa da biomassa total. Isso se denomina aditividade dos componentes da biomassa, tema central deste trabalho e de fundamental importância para estabelecer equações com eficiência estatística e consistência biológica. A aditividade das equações de biomassa é uma

propriedade indispensável, pois se os componentes da árvore são parte do todo, sendo assim, é lógico esperar que a estimativa das partes seja compatível com a estimativa do todo. Equações de biomassa não aditivas são biologicamente inconsistentes e, provavelmente, com menor eficiência estatística.

No modelo em [7], a biomassa foi definida em função de d. Entretanto, como já evidenciado, x em [7] pode conter mais de uma característica e essa condição também pode ser equivalente para y, de modo a denotar a biomassa total e os componentes da biomassa. Assim, tomando-se a restrição em [8], a biomassa total e dos componentes deve ser modelada conforme o sistema de equações em [9].

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \beta_1) + \varepsilon_1 \\ y_2 &= f_2(x_2, \beta_2) + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_k &= f_k(x_k, \beta_k) + \varepsilon_k \\ y_{total} &= y_1 + y_2 + \cdots + y_k + \varepsilon_{total} \end{aligned} \tag{9}$$

A condição apresentada em [9] assegura equações com consistência biológica, pois as estimativas das biomassas dos componentes são aditivas na biomassa total. A modelagem da biomassa utilizando procedimentos que asseguram a aditividade das equações foi desenvolvida principalmente nas décadas de 70 e 80, envolvendo pesquisadores que são referências mundiais na Ciência Florestal, tais como: Kozak (1970), Jacobs e Cunia (1980), Chiyenda e Kozak (1984), Cunia e Briggs (1984, 1985), e Reed e Green (1985), mencionando em seus trabalhos, principalmente os termos *additivity of components*, *harmonization of the regression function* e *forcing additivity*.

Kozak (1970) foi pioneiro ao apresentar equações lineares aditivas para componentes de biomassa, demonstrando um procedimento para assegurar a aditividade quando se toma as mesmas variáveis independentes e as mesmas funções para a biomassa dos componentes e para a biomassa total. A essência desse trabalho, além de apresentar a importância da condição aditiva das equações, foi elucidar os problemas estatísticos e o impacto potencial que as soluções para esses problemas poderiam ter. Esse trabalho foi mais tarde abordado por Chiyenda e Kozak (1984), em que os autores detalharam os procedimentos apontados e expandiram os resultados para os casos em que as funções para os componentes da biomassa e para a biomassa total não eram compostas pelas mesmas variáveis independentes.

Jacobs e Cunia (1980) apresentaram outro procedimento para harmonizar as estimativas de biomassa por segmento no fuste. Eles demonstraram a aplicação dos estimadores

least squares regression com variáveis *dummy* para harmonizar um conjunto de funções de regressão estimadoras da biomassa de seções no fuste (componentes) com a biomassa total do fuste.

Cunia e Briggs (1984) detalharam três procedimentos[1] – referentes às concepções realizadas por Chiyenda e Kozak (1984) e Jacobs e Cunia (1980) - para garantir a aditividade das equações de biomassa, discutiram as vantagens e desvantagens de cada procedimento e compararam as estimativas obtidas. Os três procedimentos não diferiram nas estimativas, mas divergiam na precisão das estimativas e nas condições para aplicação dos procedimentos. Os autores discutiram sobre a preferência do procedimento três, sugerindo a aplicação das equações ajustadas conjuntamente ao invés de estimar isoladamente cada equação.

O procedimento três foi apontado por Cunia e Briggs (1984) como uma extensão dos dois primeiros, de modo a utilizar regressão linear com emprego de variáveis *dummy* para ajustar o conjunto de funções de regressão. Nesse procedimento foram impostas as seguintes condições: (*i*) que cada função contenha suas próprias variáveis independentes, (*ii*) que cada regressão contenha sua própria função de peso e a regressão para o total é uma função de todas as variáveis independentes usadas, e (*iii*) a aditividade é assegurada pela imposição de restrições aos coeficientes.

A aplicação do estimador *generalized least squares* no procedimento 3 foi realizada em seguida também por Cunia e Briggs (1985). Isso foi proposto como uma alternativa ao estimador *ordinary weighted least squares*, a fim de considerar que os componentes da biomassa são mensurados na mesma árvore, ou seja, contemplar na modelagem a correlação contemporânea existente entre os componentes da biomassa. As estimativas de biomassa obtidas pelos dois estimadores foram semelhantes, mas os intervalos de predição obtidos por *generalized least squares* foram mais estreitos. Os autores mencionaram novamente a preferência por *generalized least squares*, conforme já concluído em Cunia e Briggs (1984). A denominação utilizada para o estimador foi *generalized least squares*, sendo equivalente a *joint-generalized least squares* ou ao modelo *seemingly unrelated regressions*, caracterizado pela estimação de sistema de equações.

Os procedimentos apresentados por Cunia e Briggs (1984) também foram abordados em outros trabalhos. Reed e Green (1985) estenderam o procedimento três para os casos de usos de modelos não lineares. Parresol (1999) realizou uma nova apresentação dos três

[1] Os procedimentos não serão apresentados detalhadamente.

procedimentos para assegurar a aditividade para as funções lineares e Parresol (2001) descreveu dois procedimentos para funções não lineares.

Parressol (1999) concluiu que o procedimento três, referente ao emprego de *seemingly unrelated regressions*, produziu estimadores mais eficientes para a biomassa dos componentes e para a biomassa total, sendo recomendada sua aplicação para o ajuste de funções lineares na modelagem de componentes. Isso também foi observado por Parresol (2001) quando se refere às funções não lineares para os componentes da biomassa e biomassa total estimada simultaneamente por *nonlinear seemingly unrelated regressions*.

A aplicação de *seemingly unrelated regressions* possibilita estimar um sistema de equações estatisticamente correlacionadas. Adicionalmente, permite considerar a existência de correlação contemporânea entre os resíduos das equações, o que resulta em menor variância das equações. Isso propricia estimadores mais eficientes, ou seja, estimadores com redução nos intervalos de confiança das estimativas das predições, comparativamente aos outros estimadores de equações. Chiyenda e Kozak (1984) enfatizam que é pouco realista considerar que os M componentes da biomassa de uma árvore são independentes entre si, portanto, os resíduos entre os componentes são correlacionados e essa correlação contemporânea deve ser considerada na modelagem da biomassa.

Os trabalhos desenvolvidos por Parresol (1999) e Parresol (2001) exerceram influência considerável na disseminação dos procedimentos que garantem a propriedade da aditividade em diversas localidades do mundo. Desde então, muitos pesquisadores têm aplicado *seemingly unrelated regressions* e *nonlinear seemingly unrelated regressions* para assegurar equações aditivas de biomassa, tais como: Návar et al. (2002), Carvalho e Parresol (2003), Bi et al. (2004), Lambert et al. (2005), Brandeis et al. (2006), António et al. (2007), Návar (2009), Bi et al. (2010), Menéndez-Miguélez et al. (2013), Li e Zhao (2013), Bi et al. (2015), Dong et al. (2014), Dong et al. (2015), MacFarlane (2015), Tesfaye et al. (2015), Zhao et al. (2015), Zheng et al. (2015), David et al. (2016), Poudel e Temesgen (2016). No Brasil ainda são escassas as aplicações, restringindo-se apenas aos trabalhos conduzidos por Sanquetta et al. (2014) e Sanquetta et al. (2015a).

3.2 *SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS*

Para modelar k componentes da biomassa faz sentido que sejam estabelecidas M equações, de forma a definir um sistema de equações em que elas são relacionadas entre si de alguma forma particular. Existem quatro tipos principais de sistemas de equações:

- *Seemingly unrelated equation system*
- *Simultaneous equation system*
- *Recursive equation system*
- *Block recursive system*

Neste trabalho será dada ênfase ao modelo de regressão aparentemente não relacionada para funções lineares (*seemingly unrelated regressions*) e não lineares (*nonlinear seemingly unrelated regressions*). Será também apresentado o caso não linear ponderado (*weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions*), de forma a assegurar a homoscedasticidade dos resíduos, condicionante facilmente ignorada na modelagem da biomassa de árvores.

Os demais sistemas tratam de outras aplicações também relevantes para a biometria florestal, porém serão aprofundados em outros trabalhos, principalmente no que se refere a modelagem de equações dependentes.

Para ilustrar, considere o seguinte sistema de equações que em sua própria natureza não é simultânea.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \beta_1) + \varepsilon_1 \\ y_2 &= f_2(x_2, \beta_2) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{10}$$

Adicionalmente, considere que as variáveis dependentes são tratadas como um grupo, porque elas apresentam uma relação conceitual próxima uma da outra. Fora isso, os dois modelos de regressão linear não apresentam exteriormente qualquer ligação um com o outro. Portanto, cada função é composta por diferentes variáveis dependentes e em cada uma delas as variáveis independentes não precisam ser as mesmas.

As duas equações aparentemente parecem não ser relacionadas e, assim, seria comum ajustá-las separadamente. Se fossem não relacionadas, seria próprio estimá-las independentemente. Entretanto, pode ser o caso que ocorra uma relação entre as equações devido à correlação entre os dois termos do erro. Se assim for, pode-se então obter um estimador mais eficiente estimando as duas equações em conjunto. Para tanto, é necessário compor um sistema de equações aparentemente não relacionadas, fazendo referência ao modelo *seemingly unrelated regressions* - SUR proposto por Zellner (1962).

Um conjunto de equações que contém uma estrutura de erro com covariância diferente de zero é denominado contemporaneamente correlacionado. Para considerar essas informações, dada pelas correlações contemporâneas, Zellner (1962) desenvolveu o modelo SUR. O método estima os parâmetros de todas as equações conjuntamente, de modo que cada equação pode conter informação fornecida pelas outras equações. Isso resulta em maior eficiência na estimativa dos parâmetros, porque a informação adicional é utilizada para descrever o sistema. Conforme Judge et al. (1988), o ganho em eficiência na estimação dos parâmetros é proporcional ao aumento da correlação entre os termos do erro das diferentes equações.

O modelo básico proposto Zellner (1962) também é abordado detalhadamente por Srivastava e Giles (1987), Fiebig (2001), Greene (2008), para M equações de regressão múltiplas, pode ser descrito conforme está apresentado em [11].

$$y_{ti} = \sum_{j=1}^{k_i} x_{tij}\, \beta_{ij} + \varepsilon_{ti} \tag{11}$$

Em que:

$t = 1,2, \dots, T;\ i = 1,2, \dots, M;\ j = 1,2, \dots, k_i$

y_{ti} é a t^{th} observação sobre a i^{th} dependente variável que é explicada pela i^{th} equação de regressão.

x_{tij} é a t^{th} observação sobre a j^{th} variável explanatória que compõem a i^{th} equação.

β_{ij} é o coeficiente associado a variável x_{tij}.

ε_{ti} é o t^{th} erro aleatório associado a i^{th} equação.

Essas M equações podem ser descritas alternativamente conforme está apresentado em [12].

$$y_i = X_i\, \beta_i + \varepsilon_i \tag{12}$$

Em que:

$i = 1,2, \dots, M$

y_i é um vetor $(T \cdot 1)$ com os elementos y_{ti}.

X_i é uma matriz cujas colunas representam as T observações sobre as variáveis explanatórias na i^{th} equação.

β_i é um vetor $(k_i \cdot 1)$ com os coeficientes β_{ij}.

ε_i é um vetor $(T \cdot 1)$ que contém os erros aleatórios.

Portanto, M equações podem ser apresentadas conforme está apresentado em [13].

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ou alternativamente conforme está apresentado em [14].

$$Y = X\,\beta + \varepsilon \quad (14)$$

Em que a ordem de Y é $(TM \cdot 1)$, X é $(TM \cdot k^*)$, β é $(k^* \cdot 1)$, ε é $(TM \cdot 1)$ e $k^* = \sum_i k_i$.

Esse é um caso especial do modelo SUR e trata-se de um modelo de regressão multivariado, em que:

- Cada equação é, por si só, uma regressão clássica.

- Os parâmetros podem ser estimados consistentemente, mas não eficientemente, por meio de *ordinary least squares.*

- Os parâmetros podem ser estimados de forma conjunta, eficientemente, por meio do modelo de regressão generalizado.

Cada uma das M equações deve ser tratada conforme as suposições do modelo clássico de regressão para $i = 1,2, \dots, M$, ou seja:

X_i é fixo, e com *rank* $(X_i) = k_i$ (15)

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T}\, X_i' X_i\right) = Q_{ii} \quad (16)$$

Em que: Q_{ii} é uma matriz não-singular com elementos fixos e finitos $(i = 1, \dots, M)$.

Os elementos do vetor dos erros, ε_i, devem seguir uma distribuição probabilística normal multivariada com média igual a zero [17], com matriz de covariância dada conforme está apresentado em [18].

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad (17)$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_i') = \sigma_{ii} I \quad (18)$$

Em que: σ_{ii} é a variância dos erros na i^{th}equação para cada observação da amostra, I é uma matriz identidade da ordem T, e $E(\cdot)$ refere-se à operação expectativa.

Considerando as interações entre as M equações no modelo, assume-se conjuntamente as condições apresentadas em [16] e [18]:

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T}\, X_i' X_j\right) = Q_{ij} \quad (19)$$

$$E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j'\right) = \sigma_{ij} I,\ i, j = 1, \dots, M \quad (20)$$

Em que: Q_{ij} é uma matriz não-singular com elementos fixos e finitos e σ_{ij} é a covariância entre os erros da i^{th}e j^{th} equação para cada observação da amostra.

As expressões apresentadas em [17], [18] e [20] podem ser escritas alternativamente conforme estão apresentados em [21] e [22].

$$E(\varepsilon) = 0 \tag{21}$$

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \cdots & \sigma_{1M}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \cdots & \sigma_{2M}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}I & \sigma_{M2}I & \cdots & \sigma_{MM}I \end{bmatrix} = \sum \otimes I = \Omega \tag{22}$$

Em que:

$\otimes$ é o produto de Kronecker.

Ω é uma matriz da ordem $(MT \cdot MT)$ e $\sum = (\sigma_{ij})$ e é uma matriz simétrica positiva definida, que contém as variâncias e covariâncias, com ordem $(M \cdot M)$.

A expressão $E(\varepsilon\varepsilon') = \sum \otimes I$ implica que:

- A variância de ε_{ti} seja constante para todo t.

- Covariância contemporânea entre ε_{ti}e $\varepsilon_{t^*j}(t \neq t^2)$ tal que seja diferente de zero para todas i e j.

Dadas as condições apresentadas em relação às suposições do modelo clássico de regressão, e com definição do modelo SUR em [13] ou [14], a solução de β é realizada por meio do estimador *generalized least squares* - GLS, porque resulta em estimadores mais eficientes, concepção claramente evidenciada em Zellner (1962) e Telser (1964). Isso quer dizer que ao invés de ajustar cada equação individualmente, prioriza-se por ajustar o sistema de equações de modo a considerar a correlação contemporânea. Para o modelo SUR o estimador GLS está definido em [23].

$$\beta = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}\, X'\Omega^{-1}y \tag{23}$$

O modelo em [23] tem um aspecto em particular. A matriz Ω, ao invés de ser composta por pesos como na forma tradicional da regressão ponderada, carrega os elementos da matriz dos distúrbios, conforme está apresentado em [24].

$$\Omega = \sum \otimes I \tag{24}$$

Em que $\sum$ é matriz de covariância, $\otimes$ é produto de Kronecker e I é uma matriz identidade da ordem T.

A matriz de covariância $(\sum)$ em [24], para t^{th} observações e de dimensão $(M \cdot M)$, está definida em [25].

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Em que: σ_{ij} é a covariância entre os distúrbios da i^{th}e j^{th} equação para cada observação da amostra.

O elemento Ω em [23] é definido pelo seu inverso, então [24] pode ser reescrito conforme está apresentado em [26].

$$\Omega^{-1} = \sum^{-1} \otimes I \tag{26}$$

Portanto, o estimador GLS para o modelo SUR em [23] pode ser redefinido conforme está apresentado em [27].

$$\beta = [X'(\sum^{-1} \otimes I)X]^{-1} X'(\sum^{-1} \otimes I)y \tag{27}$$

Em que:

$E(\hat{\beta}) = \beta$ e $V(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = [X'(\sum^{-1} \otimes I)X]^{-1}$

Se for expandido o produto de Kronecker em [27], têm-se a solução de [23] conforme está apresentado em [28].

$$\beta = \begin{bmatrix} \sigma_{11}X_1'X_1 & \sigma_{12}X_1'X_2 & \cdots & \sigma_{1M}X_1'X_M \\ \sigma_{21}X_2'X_1 & \sigma_{22}X_2'X_2 & \cdots & \sigma_{2M}X_2'X_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}X_M'X_1 & \sigma_{M2}X_M'X_2 & \cdots & \sigma_{MM}X_M'X_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{M} \sigma_{1j}X_1'y_j \\ \sum_{j=1}^{M} \sigma_{2j}X_2'y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{M} \sigma_{Mj}X_M'y_j \end{bmatrix} \tag{28}$$

O estimador em [28], obviamente, difere daquele de uma única equação, que para o caso dos modelos lineares seria ajustado por *ordinary least squares* – OLS. A diferença configura-se na simples ligação entre as equações, dada pelas suas correlações contemporâneas. Essa tênue diferença nos estimadores provoca alteração na eficiência das estimativas que, por sua vez, a torna dependente da correlação das perturbações. Isso reforça a importância da aplicação do modelo SUR na modelagem da biomassa, especialmente porque normalmente se trabalha com os componentes da biomassa e esses são correlacionados.

Embora tenha sido evidenciada a condição apropriada para aplicar o estimador em [23] para a modelagem da biomassa de árvores, sua aplicação ainda é dificultada, pois nesse caso apenas detém-se às informações, à priori, somente das variáveis: X e y. Isto é, o problema em [23] pressupõe conhecer Ω, condição necessária para estimar o modelo SUR empregando-se *generalized least squares*, embora seja possível aplicar outros estimadores para estimar os coeficientes sem que, para isso, necessite conhecer Ω.

É pouco provável que na modelagem da biomassa de árvores Ω seja conhecido à priori, mas existem maneiras de obtê-lo, como, por exemplo, por meio da aplicação dos estimadores *feasible generalized least squares*, conforme discussões realizadas por Zellner (1962) e Zellner e Huang (1962). Nesse caso, os resíduos são oriundos de estimadores de mínimos quadrados, isso é, pode-se aplicar *ordinary least squares* a cada uma das funções do sistema de equações para obter os estimadores de β e também os erros associados a cada equação, para então estimar consistentemente os elementos de $\sum$, conforme está apresentado em [29].

$$\hat{\sigma}_{ij} = s_{ij} = \frac{e_i' e_j}{T} \tag{29}$$

Theil (1971), Judge et al. (1985) e Srivastava e Giles (1987) destacam que os graus de liberdade em [29] devem ser corrigidos. Existem duas possibilidades para tanto, conforme [30] e [31], em que K_i e K_j são o número de parâmetros de cada equação i e j.

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\varepsilon_i' \varepsilon_j}{\left[(T - K_i)(T - K_j)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{30}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\varepsilon_i' \varepsilon_j}{T - max(K_i, K_j)} \tag{31}$$

Portanto, quando Ω é desconhecido, não é possível aplicar o estimador GLS para solução de β, devendo-se então se valer de *feasible generalized least squares* - FGLS. Assim, o estimador em [25] pode ser reescrito conforme [32], com matriz S definida em [33]. Note que FGLS é um caso particular de GLS, pois se diferencia apenas na estimativa de Ω, portanto, uma diferença conceitual. Neste trabalho, optou-se por manter a solução de β conforme [25], com nomenclatura do estimador de GLS e estimativa da matriz Ω, para seguir a mesma terminologia observada nos trabalhos sobre modelagem de biomassa.

$$\beta = [X'(S^{-1} \otimes I)X]^{-1} X'(S^{-1} \otimes I)y \tag{32}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1M} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{M1} & s_{M2} & \cdots & s_{MM} \end{bmatrix} \tag{33}$$

A discussão dos estimadores SUR tem levado em consideração três aspectos sobre sua eficiência. A primeira refere-se a: quanto mais elevada a correlação contemporânea do termo erro entre as equações maior será o ganho de eficiência empregando o estimador generalizado. O segundo aspecto é que se a correlação contemporânea for baixa, então blocos da matriz $\sum$ se aproximam de zero, e não há melhoria significativa por meio da aplicação SUR comparado à

utilização de OLS, quando estimadas as equações independentes. Por fim, se cada uma das equações do sistema possui as mesmas variáveis exógenas, então os estimadores SUR são equivalentes a OLS, embora existam exceções. Esses aspectos também são discutidos na seção 5 e 6, por meio dos resultados observados experimentalmente.

3.3 *NONLINEAR SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS*

Quando o sistema de equações é composto por funções não lineares passa-se a empregar a versão não linear do modelo SUR, denominada *nonlinear seemingly unrelated regressions* - NSUR. Gallant (1973), tomando as concepções propostas por Zellner (1962), desenvolveu a extensão do modelo SUR para as funções não lineares. A apresentação do modelo NSUR com aplicação para modelagem da biomassa de árvores é apresentada detalhadamente em Parresol (2001).

Toda a teoria abrangente em relação ao modelo SUR e as condições para aplicações, que foi apresentada na seção anterior, são também válidas para o modelo NSUR. Assim, apenas serão apresentados nesta seção os aspectos práticos para o ajuste de modelos não lineares.

Considere o sistema de equações em [34], tomando por conveniência genericamente os termos β e X.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\beta, X) + \varepsilon_1 \\ y_2 &= f_2(\beta, X) + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_M &= f_M(\beta, X) + \varepsilon_M \end{aligned} \tag{34}$$

Assim, têm-se M equações para serem estimadas com $t = 1, \dots, T$ observações, com K parâmetros nos modelos não lineares. Adicionalmente, um conjunto de T observações para cada j independente variável x_j, $j = 1, \dots, J$, podendo algumas ou todas aparecerem em cada função.

A solução de [34], se Ω é conhecido, será realizada utilizando-se *generalized nonlinear least squares* - GNLS, de forma a minimizar a soma de quadrados generalizada, conforme está apresentado em [35].

$$\varepsilon(\beta)'\Omega^{-1}\varepsilon(\beta) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sigma_{ij}[y_i - f_i(\beta, X)]'\left[y_j - f_j(\beta, X)\right] \tag{35}$$

Em que:

$\varepsilon(\beta)$ é um vetor $(MT \cdot 1)$ que contém os erros aleatórios do conjunto de equações.

$\Omega = \sum \otimes I$.

σ_{ij} é o ij^{th} elemento de $\sum^{-1}$.

Alternativamente, pode-se reescrever a solução de [34] conforme [36] e [37], utilizando-se GNLS para estimar o vetor β que minimiza a soma de quadrados dos resíduos.

$$S(\beta) = \varepsilon' \Omega^{-1} \varepsilon = [y - f(X, \beta)]' \Omega^{-1} [y - f(X, \beta)] \quad (36)$$

$$S(\beta) = \varepsilon' (\sum^{-1} \otimes I) \varepsilon = [y - f(X, \beta)]' (\sum^{-1} \otimes I) \, [y - f(X, \beta)] \quad (37)$$

Para completar o modelo NSUR é necessário estimar a matriz $\sum$, cujo valor i^{th} e j^{th} é dado por σ_{ij} - variância-covariância dos erros de cada equação i e j, em que $E[\varepsilon_i \varepsilon_j'] = \sigma_{ij} I$. Já foi detalhado que as variâncias e covariâncias são desconhecidas, mas podem ser estimadas. Do mesmo modo, a estimativa de σ_{ij} é realizada tomando os resíduos $[\varepsilon_i = y_i - f_i(X_i, \beta_i)]$ obtidos pelo ajustamento das funções independentemente também por meio da aplicação de GNLS, uma vez que os modelos são não lineares. Estimativas consistentes da matriz de variância-covariância podem ser calculadas conforme já apresentado em [30] ou [31].

Finalmente, a minimização da expressão em [37] é realizada empregando-se algoritmos iterativos por meio da forma geral em [38].

$$\beta_{n+l} = \beta_n \, l_n P_n \gamma_n \quad (38)$$

Em que:

$\gamma_n = \partial S(\beta) / \partial \beta|_\beta$ que corresponde ao vetor gradiente. Detalhes de γ_n estão descritos em Gallant (1987).

P_n= é uma matriz positiva definida conhecida da matriz de direção. Detalhes de P_n estão descritos em Judge et al. (1985).

l_n= é o comprimento do passo e é um número positivo. Detalhes de l_n estão descritos em Gallant (1987).

O processo da iteração inicia-se com valores iniciais de β_0 estipulados e prossegue $(n = 0, 1, 2, \dots)$ até atingir os critérios de convergência pré-definidos (por exemplo, $\gamma_n \approx 0$), ou que o número máximo de iterações pré-definidas seja atingido, situação em que se obtêm a falha de convergência.

A solução de P_n em [38] pode ser realizada utilizando o algoritmo Marquardt (1963), definido em [39]. Nesse algoritmo quando $\lambda_n \to 0$ a direção se aproxima do algoritmo de Gauss-Newton e quando $\lambda_n \to \infty$ do algoritmo gradiente descendente.

$$P_n = \left[F(\beta_n)' \, \Omega^{-1} \, F(\beta_n) + \lambda_n diag \left(F(\beta_n)' \, \Omega^{-1} \, F(\beta_n) \right) \right]^{-1} \quad (39)$$

Alternativamente, a solução de [37] pelo algoritmo Marquardt é resolvida conforme [40], com matriz de derivadas parciais dos resíduos referentes aos parâmetros - $(F(\beta))$ de ordem $(k \cdot MT)$- definida em [41].

$$\beta_{n+l} = \beta_n \, l_n \left[F(\beta_n)' \left(\widehat{\sum}^{-1} \otimes I\right) F(\beta_n) + \lambda_n diag \left(F(\beta_n)' \left(\widehat{\sum}^{-1} \otimes I\right) F(\beta_n) \right) \right]^{-1} \quad (40)$$

$$F(\beta)' = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \beta} = \left[\frac{\partial f_1'}{\partial \beta}, \frac{\partial f_2'}{\partial \beta}, \ldots, \frac{\partial f_M'}{\partial \beta} \right] \quad (41)$$

Quando é avaliado um valor particular para β, ou seja, β_l, $F(\beta)'$ definido em [41] é descrito como $F(\beta)_l'$. Se as funções no sistema de equações são compostas por diferentes conjuntos de parâmetros a serem estimados, então $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \beta}$ é uma matriz de bloco diagonal.

Quando o processo em [40] convergir se obtêm as estimativas generalizadas NSUR para β. Duas condições são necessárias para assegurar que as equações resultantes sejam eficientes: o vetor dos erros aleatórios - ε deve apresntar distribuição com média comum zero ($E[\varepsilon_i] = 0$) para cada uma das equações e variância constante ($E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma_{ij} I$). Quando essas condições não são asseguradas, implica-se na necessidade de empregar *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions*, o que é muito comum na modelagem da biomassa de árvores.

3.4 DERIVAÇÃO DE PESOS E *WEIGHTED-NONLINEAR SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS*

Frequentemente na modelagem da biomassa os resíduos estão distribuídos de maneira heterogênea em relação às variáveis aleatórias utilizadas nas funções, ou em relação à própria variável dependente, indicando que a variância não é constante, quando para aplicação do modelo SUR ou NSUR a condição ($E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma_{ij} I$) deve ser assegurada. Existem várias formas para detectar a heteroscedasticidade, destacando-se duas principais: *i*) construir um gráfico de resíduos ε_i em relação a X_i e y_i para verificar se ocorre algum padrão sistemático na distribuição dos resíduos, o que sugere a heteroscedasticidade dos erros; *ii*) aplicar testes estatísticos, como, por exemplo, o teste de White (1980).

As principais consequências da heterogeneidade da variância dos resíduos nos estimadores de mínimos quadrados se devem ao fato de que eles ainda não são enviesados, mas ineficientes, e as estimativas das variâncias são enviesadas, invalidando, por consequência, os testes de significância. De acordo com Greene (2008) a heteroscedasticidade não elimina as propriedades de não tendenciosidade e consistência dos estimadores de mínimos quadrados, entretanto deixam de ter a variância mínima ou de ser eficiente.

Harvey (1976) e Judge et al. (1988) demonstraram que a aplicação de *generalized least squares* resulta em parâmetros estimados eficientes, sendo uma solução para os casos em que a variância dos erros não é constante. Esse estimador para uma única função é definido em [42].

$$\beta = \left(X'\Psi\left(\hat{\theta}\right)^{-1}X\right)^{-1}X'\Psi\left(\hat{\theta}\right)^{-1}y \tag{42}$$

Em que:

$\Psi\left(\hat{\theta}\right)$ é uma matriz diagonal de pesos, que depende do número de parâmetros (P) denotada pelo vetor θ da ordem $(P \cdot 1)$

Parresol (2001) destaca que a dimensão de θ, e a especificação de Ψ a qual depende de θ, se baseia nas suposições que são feitas em relação ao erro. Parresol (1993) demonstra que muitas vezes a variância do erro é funcionalmente relacionada com uma ou mais variáveis do modelo. De acordo com Parresol (2001), assume-se que cada σ_t^2 é uma função exponencial das variáveis independentes multiplicadas pelo fator de escala σ^2, conforme definição em [43].

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2 = \sigma^2 e^{(g_t'\theta)},\ t = 1,2,\dots,T \tag{43}$$

Em que:

$g_t' = [g_{t1}, g_2, \dots, g_{tP}]$ é um vetor $(1 \cdot P)$ contendo as t^{th} observações das varáveis não estocásticas, sendo que g_s pode ser uma função idêntica ao modelo em questão.

$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P\ ]$ é um vetor $(P \cdot 1)$ dos parâmetros não conhecidos.

σ^2 = é o fator de escala.

Tomando-se a expressão em [43], a estrutura dos erros (matriz variância-covariância) pode ser escrita conforme [44], em que todos os elementos fora da diagonal principal equivalem a zero.

$$\sigma^2\Psi(\theta) = \sigma^2\begin{bmatrix} e^{(g_1'\theta)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(g_2'\theta)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{(g_T'\theta)} \end{bmatrix} \tag{44}$$

O vetor θ é desconhecido, entretanto Harvey (1976) demonstra que θ é estimado satisfatoriamente aplicando *ordinary least squares*, portanto a expressão [43] deve ser linearizada, sendo definida em [45]. Parresol (2001) sugere que o vetor g_t seja composto pelas próprias variáveis independentes que compõem os modelos envolvidos, tomando, como auxílio, a análise gráfica dos resíduos para revelar o vetor apropriado. Dessa maneira, o vetor também poderá conter variáveis transformadas que dependerão da tendência da distribuição dos resíduos em relação às variáveis que compõem o modelo.

$$\ln \varepsilon_t^2 = \ln \sigma^2 + g_t'\theta + v_t \quad (45)$$

Em que:

v_t é o erro associado ao modelo.

σ^2 é o termo constante ou intercepto.

Finalmente, pode-se construir a matriz dos pesos, definida em [46].

$$\Psi(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} e^{(g_1'\hat{\theta})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(g_2'\hat{\theta})} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & e^{(g_T'\hat{\theta})} \end{bmatrix} \quad (46)$$

A matriz dos pesos definida em [46] deve ser rescrita para o modelo NSUR, que considera a matriz de estrutura dos erros, denominado *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions* – WNSUR, bem como as expressões apresentadas na seção anterior.

Assim, tomando-se o modelo WNSUR, a matriz dos pesos é estimada em uma matriz bloco diagonal, conforme [47].

$$\Psi(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \Psi_1(\hat{\theta}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Psi_2(\hat{\theta}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \Psi_M(\hat{\theta}_M) \end{bmatrix} \quad (47)$$

Em que:

$\Psi(\hat{\theta})$= é a matriz dos pesos.

$\Psi_i(\hat{\theta}_i)$ = é a matriz dos pesos para a i^{th} equação, conforme definição em [48].

$$\Psi_i(\hat{\theta}_i) = \begin{bmatrix} e^{g_1'\hat{\theta}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{g_2'\hat{\theta}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & e^{g_T'\hat{\theta}} \end{bmatrix} \quad (48)$$

A solução do sistema de equações apresentada em [34], agora definida pelo modelo WNSUR, se Ω é conhecida, é também equacionada aplicando-se *generalized nonlinear least squares* de forma a minimizar a soma de quadrados generalizada, conforme está apresentado em [49].

$$S(\beta) = \varepsilon'\Delta'(\sum^{-1} \otimes I)\Delta'\varepsilon = [y - f(X,\beta)]'\Delta'(\sum^{-1} \otimes I)\,[y - f(X,\beta)] \quad (49)$$

Em que:

$\Delta = \sqrt{\Psi^{-1}}$

Os pressupostos para a solução de [49] são: (*i*) $E[\Delta_i \varepsilon_i] = 0$, a média dos resíduos ponderados para equação seja zero; (*ii*) $E[\Delta\varepsilon\varepsilon'\Delta'] = \sum \otimes I$, sendo $\sum$ uma matriz variância-

covariância ponderada da ordem $(M \cdot M)$ em que o valor i^{th} e j^{th} é dado por σ_{ij}- variância-covariância dos erros ponderados de cada equação i e j e $E\left[\Delta_i \varepsilon_i \varepsilon_j' \Delta_j'\right] = \sigma_{ij} I$.

Novamente, em princípio a matriz Ω $(\Omega = \sum \otimes I)$ é desconhecida, mas essa será estimada. No modelo WNSUR as variâncias-covariâncias que são elementos da matriz $\sum$ devem agora ser ponderadas, diferentemente do apresentado em [30] e [31]. Como já mencionado, a estimativa de σ_{ij} é efetuada tomando os resíduos $[\varepsilon_i = y_i - f_i(X_i, \beta_i)]$ obtidos pelo ajustamento das funções independentemente por meio da aplicação de GNLS. As estimativas consistentes da matriz de variância-covariância podem ser calculadas conforme está apresentada em [50].

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\varepsilon_i' \hat{\Delta}_i' \hat{\Delta}_j' \varepsilon_j}{\sqrt{(T - K_i)} \sqrt{\left(T - K_j\right)}} \tag{50}$$

Finalmente, a minimização da expressão em [49] é realizada empregando-se algoritmos iterativos por meio da forma geral, conforme já apresentado. A solução de [49], agora pelo algoritmo de Gauss-Newton é resolvida conforme está apresentado em [51], com matriz de derivadas parciais dos resíduos referentes aos parâmetros – $[F(\beta)]$ de ordem $(k \cdot MT)$. Quando o processo em [51] convergir, se obtêm as estimativas generalizadas WNSUR para β.

$$\beta_{n+l} = \beta_n \, l_n\left[F(\beta_n)' \, \hat{\Delta}'\left(\hat{\sum}^{-1} \otimes I\right) \hat{\Delta} F(\beta_n)\right]^{-1} F(\beta_n)' \, \hat{\Delta}'\left(\hat{\sum}^{-1} \otimes I\right)\hat{\Delta} \, [y - f(X, \beta_n)] \tag{51}$$

3.5 ESTATÍSTICAS COMPLEMENTARES

Existem várias estatísticas que podem ser aplicadas em análises à priori e a posteriori da estimativa de modelos por meio da análise de regressão, com objetivo de avaliar o tipo do estimador das equações a ser aplicado e as predições feitas a partir dessas equações. Essas estatísticas, em relação à aplicação das regressões aparentemente não relacionadas, compreendem: *i)* testes de correlação contemporânea, *ii)* estatísticas a respeito da qualidade dos ajustes das equações e *iii)* estatísticas referentes à eficiência nas estimativas das variáveis dependentes, observando-se as condições necessárias para a aplicação da análise de regressão.

A eficiência estatística das equações estimadas por meio da regressão aparentemente não relacionada depende da correlação contemporânea, pois se os elementos fora da diagonal principal da matriz $\sum$ não são diferentes de zero, prioriza-se por estimar as equações

individualmente, como já evidenciado. Isso denota uma interessante aplicação de testes sobre a correlação contemporânea, embora isso não seja primordial para a modelagem da biomassa, pois, teoricamente, conforme Chiyenda e Kozak (1984) enfatizam, é pouco realista considerar que os M componentes da biomassa de uma árvore sejam independentes entre si.

A prova estatística sobre a correlação contemporânea pode ser realizada por meio de três testes: *Wald*, *Likelihood ratio* e *Lagrange multiplier*, que estão descritos em Greene (2008), ou também por meio de outros testes que foram propostos por Dufour e Khalaf (2002). O multiplicador de Lagrange (LM) é o teste mais simples, mas não menos importante. Esse teste foi desenvolvido por Breusch e Pagan (1980) e têm como objetivo testar as hipóteses definidas em [52] sobre $\sum$.

$$H_0: \sigma_{ij} = 0$$
$$H_1: \text{pelo menos uma das covariâncias } ij \text{ é diferente de zero} \quad (52)$$

A estatística do multiplicador de Lagrange $\left(\lambda_{LM}\right)$ é definida em [53], em que γ refere-se as correlações contemporâneas obtidas por meio das equações estimadas independentemente e χ^2 a estatística Qui-quadrado.

$$\lambda_{LM} = T\sum_{i=2}^{M}\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}^2 \rightarrow \chi^2_{\frac{M(M-1)}{2}} \quad (53)$$

Após estimar as equações, procede-se o cálculo de estatísticas para avaliar a qualidade das predições, estando entre as principais: coeficiente de determinação, coeficiente de determinação ajustado, coeficiente de variação, *prediction sum of squares* - PRESS (WEISBERG, 1985; AITKIN et al., 1989), *Akaike's information criterion* - AIC (AKAIKE, 1973), *bayesian information criterion* – BIC (SCHWARZ, 1978), *Amemiya's prediction criterion* – APC (Amemiya, 1985) e *information complexity criterion* (BOZDOGAN, 2000). Dada a condição da aplicação das regressões aparentemente não relacionadas e também o caso ponderado das equações, deve-se observar as possíveis variações das formulações matemáticas dos critérios estatísticos.

Isso pode ser claramente evidenciado tomando-se a estatística coeficiente de determinação (R^2), definida em [54], para equações estimadas por meio do modelo *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions*, conforme sugerido em Steel et al. (1996). Discussões interessantes a respeito das estatísticas para avaliar a qualidade do ajuste em modelos de regressão multivariados foram realizadas por McElroy (1977), Buse (1979), Neudecker e Windmeijer (1991), Bedrick e Tsai (1994), Fujikoshi e Satoh (1997), Pan (2001), Gorobetz (2005), Jitthavech (2010).

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'\Psi(\hat{\theta})^{-1}\hat{\varepsilon}}{\left\{y - \left[\frac{vecdiag\left(\Psi(\hat{\theta})^{-1}\right)' y}{sum\left(vecdiag\left(\Psi(\hat{\theta})^{-1}\right)\right)}\right]\right\}' \Psi(\hat{\theta})^{-1} \left\{y - \left[\frac{vecdiag\left(\Psi(\hat{\theta})^{-1}\right)' y}{sum\left(vecdiag\left(\Psi(\hat{\theta})^{-1}\right)\right)}\right]\right\}} \quad (54)$$

Em que: $vecdiag$ é um vetor coluna composto pelos principais elementos da matriz e sum é a soma dos elementos da matriz.

Já foi enfatizado que a aplicação da regressão aparentemente não relacionada traz vários aspectos positivos na modelagem da biomassa arbórea, como, por exemplo: equações com consistência biológica e mais eficientes estatisticamente. A eficiência estatística está associada às predições das variáveis dependentes com menor variância, o que reduz os intervalos de confiança, comparativamente com outros estimadores de regressão. Isso realça o interesse em conhecer a variância do sistema de equações e também os intervalos de confiança gerados.

A variância do sistema *seemingly unrelated regressions* ou *nonlinear seemingly unrelated regressions* está definida em [55].

$$\sigma^2_{NSUR} = \frac{\varepsilon'(\sum^{-1} \otimes I)\varepsilon}{MT - K} \quad (55)$$

A variância para a i^{th} equação sobre a t^{th} estimativa - $\hat{y}_{it}$ é obtida conforme [56], com definição da matriz de variância-covariância dos parâmetros conforme está apresentado em [57].

$$\sigma^2_{\hat{y}_i} = f_i\,(\beta)'\sum_b f_i(\beta) \quad (56)$$

$$\sum_b = [F(\beta)'(\sum^{-1} \otimes I)\,F(\beta)]^{-1} \quad (57)$$

Em que:

f_i é um vetor linha para a i^{th} equação, pertencente a matriz de derivadas parciais $F(\beta)$.

O intervalo de confiança (IC) para um valor médio, a 95% de probabilidade em um teste bicaudal, é obtido conforme [58]. Ademais, um intervalo de predição (IP) com definição em [59].

$$IC\left[\hat{y}_i \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_i}}\right] = 1 - \alpha \quad (58)$$

$$IP\left[\hat{y}_{i(novo)} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_i} + \sigma^2_{NSUR}\sigma_{ii}}\right] = 1 - \alpha \quad (59)$$

Em que:

σ_{ii} é o $(i,i)^{th}$ elemento de $\sum$.

As definições apresentadas em [55] a [59] quando empregado *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions* devem incluir os pesos que são estimados. Nesse caso, a variância do sistema é calculada conforme está apresentado em [60].

$$\sigma^2_{NSUR} = \frac{\varepsilon' \hat{\Delta}' (\sum^{-1} \otimes I) \hat{\Delta} \varepsilon}{MT - K} \tag{60}$$

A variância para a i^{th} equação sobre a t^{th} estimativa - $\hat{y}_{it}$ é calculada conforme [61], com definição da matriz de variância-covariância dos parâmetros conforme está apresentado em [62].

$$\sigma^2_{\hat{y}_i} = f_i(\beta)' \widehat{\sum}_b f_i(\beta) \tag{61}$$

$$\widehat{\sum}_b = \left[F(\beta)' \hat{\Delta}' (\sum^{-1} \otimes I) \hat{\Delta} F(\beta) \right]^{-1} \tag{62}$$

Os intervalos de confiança e de predição para um valor médio, a 95% de probabilidade em um teste bicaudal, estão definidos em [63] e [64].

$$IC \left[\hat{y}_i \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_i}} \right] = 1 - \alpha \tag{63}$$

$$IP \left[\hat{y}_{i(novo)} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2_{\hat{y}_i} + \sigma^2_{NSUR} \sigma_{ii} \Psi_i(\hat{\theta}_i)} \right] = 1 - \alpha \tag{64}$$

3.6 PESQUISAS E APLICAÇÕES SOBRE *SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS*

A regressão aparentemente não relacionada teve origem a partir das concepções propostas por Zellner (1962). Tendo sua incontestável importância nas diferentes áreas da ciência, muitos trabalhos foram desenvolvidos a respeito do assunto e com diversas aplicações. Um destaque deve ser feito sobre como Zellner concebeu e propôs conceitualmente e algebricamente os estimadores. Em uma entrevista conduzida por Rossi (1989), foi realizada a seguinte pergunta:

> "*It would be fair to say that your work on the SUR model is one of the most frequently cited and used techniques in econometrics today. How did you get the idea for SUR?*"

Zellner respondeu:

> "*The origins essentially arose from my efforts to understand multivariate analysis; in particular, the multivariate regression model and other*

> *multivariate systems. As is usual when I try to seek understanding, I try to simplify problems. On a rainy night in Seattle in about 1956 or 1957, I somehow got the idea of algebraically writing a multivariate regression model in single equation form. When I figured out how to do that, everything fell into place because then many univariate results could be carried over to apply to the multivariate system and the analysis of the multivariate system is much simplified notationally, algebraically and, conceptually. I first applied the idea to the analysis of autocorrelated errors in multivariate regression in a 1961 IER paper, and I noticed in analyses of panel data, in contrast to the traditional regression model, that different matrices of independent variables appeared in each equation. On applying generalized least squares to the system, it turned out that the generalized lest-squares estimator differed from the equation-by-equation least-squares estimator. That was the tip-off that you could get some added precision in analyzing the equations jointly rather than one by one. The only fly in the ointment was that the generalized least squares estimator for the system involved the unknown covariance matrix of the error terms. However, by substituting a consistent estimate that provide a large-sample solution to the problem. Currently, Bayesian methods provide finite-sample solutions to SUR estimation, prediction, and testing problem*".

Em inúmeros trabalhos foi tratada a temática *seemingly unrelated regressions*, com abordagem de diversos tópicos, tais como: desenvolvimento dos estimadores, condições para aplicação, ganho em eficiência e estatísticas para avaliação das equações ajustadas. De fato, existe uma teoria abrangente a respeito do assunto, adicionada das mais diversas aplicações. A partir disso, optou-se por elencar uma lista[2] dos mais importantes trabalhos relacionados com *seemingly unrelated regressions*, além de aplicações realizadas na Ciência Florestal, excluindo-se os trabalhos que envolveram biomassa, pois já foram citados anteriormente. Espera-se que as referências listadas (APÊNDICE 2 e 3) sejam úteis para os biometristas, de modo que auxilie nos estudos, na compreensão e na extensão desse tema.

[22] As indicações bibliográficas de modo algum constituem uma lista completa, porém indicam um caminho para leituras suplementares e complementares dos assuntos que foram abordados nesse trabalho.

4 MATERIAL E MÉTODOS

4.1 OBJETO DE ESTUDO: ESPÉCIE ACÁCIA NEGRA

O objeto na presente pesquisa é a espécie acácia negra (*Acacia mearnsii* De Wild.) (FIGURA 1), que é originária da Austrália e pertence à família Fabaceae. O seu nome comum faz referência à coloração escura da casca e folhagem.

FIGURA 1 - POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA COM 1 E 8 ANOS NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.

No Brasil, a espécie foi introduzida no estado do Rio Grande do Sul por Alexandre Bleckmann em 1918, mas só a partir de 1940 iniciou-se a utilização comercial impulsionada pela empresa TANAC S.A. Desde então, a cultura da acácia negra passou a desempenhar um importante papel no setor florestal no estado do Rio Grande do Sul, onde se concentram exclusivamente os plantios, em uma área aproximada de 170 mil hectares.

A silvicultura da acácia negra é uma sólida atividade econômica e tem trazido benefícios e prosperidade a mais de 40 municípios e para aproximadamente 40 mil famílias (STEIN e TONIETTO, 1997; SCHNEIDER e TONINI, 2003). A maior parte dos plantios é conduzida em minifúndios, ou seja, por pequenos e médios produtores, que detém aproximadamente 60% das plantações.

A rotação se estende entre 7 a 10 anos, quando a floresta atinge a máxima produtividade concernente aos componentes madeira e à casca do fuste. A casca é matéria prima para a extração do tanino, o qual é a principal fonte em nível mundial (SIMON, 2005). A madeira é utilizada para vários usos, além do emprego tradicional para energia, é principalmente utilizada na fabricação de celulose e papel. Recentemente, passou-se a ter

interesse pela biomassa da copa da árvore com a finalidade de geração de energia. A produção de madeira aos oito anos é em média de 200 m^3 ha^{-1} e de casca na ordem de 16 t ha^{-1} (HIGA, 1996).

4.2 AMOSTRAGEM DE POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA

A condução da pesquisa em campo foi realizada durante os meses de junho e julho de 2014 em povoamentos comerciais de acácia negra (*Acacia mearnsii* de Wild.) situados nos locais que concentram os plantios da espécie no estado do Rio Grande do Sul. Optou-se por dividir esses locais em três regiões que foram denominadas: município de Cristal, Encruzilhada do Sul e Piratini (FIGURA 2). Essas regiões estão caracterizadas em relação clima e ao tipo de relevo e solo em Mochiutti (2007).

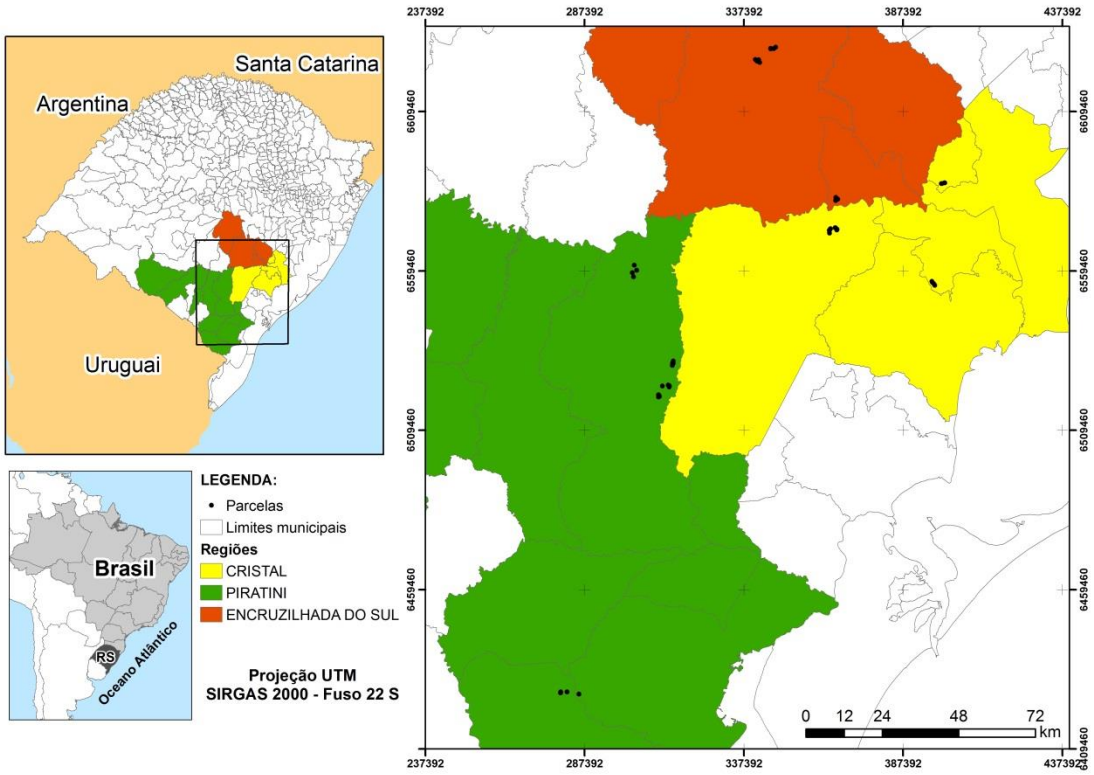


FIGURA 2 - ÁREA DE CULTIVO DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL, E DIVISÃO DESSA ÁREA EM TRÊS REGIÕES DENOMINADAS DE ENCRUZILHADA DO SUL, CRISTAL E PIRATINI.

Em cada região foram amostrados quatro povoamentos em uma sequência de idades após o plantio; de modo a abranger toda a rotação da cultura (10 anos). Em Cristal foram amostrados povoamentos com: 1,75, 2,75, 5,00 e 10,08 anos, em Encruzilhada do Sul com: 1,83; 3,08; 5,75 e 10,75 anos e em Piratini com: 1; 2,33; 5,25 e 9,83 anos (FIGURA 3).

Cristal

1,75 anos | 2,75 anos | 5 anos | 10,08 anos

Encruzilhada do Sul

1,83 anos | 3,08 anos | 5,75 anos | 10,75 anos

Piratini

1 ano | 2,33 anos | 5,25 anos | 9,83 anos

FIGURA 3 - POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL, NOS QUAIS FOI CONDUZIDA A PRESENTE PESQUISA.

4.3 ESTABELECIMENTO E CONDUÇÃO DOS POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA

Nas três regiões os plantios foram estabelecidos tanto em áreas novas (primeira rotação – Figura 4 A) como em áreas de reformas da plantação (segunda rotação – Figura 4 B). O preparo do solo foi realizado somente na linha de plantio (cultivo mínimo), com uma subsolagem com três hastes a 40 centímetros de profundidade e duas gradagens.

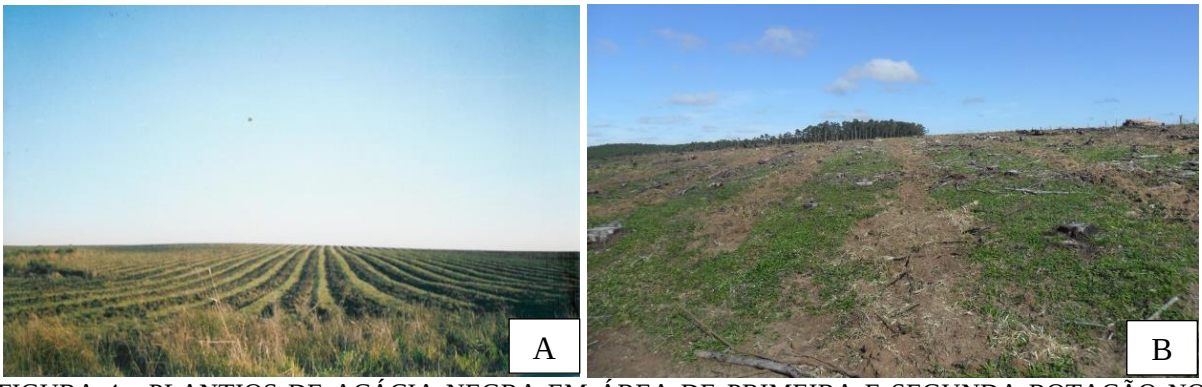


FIGURA 4 - PLANTIOS DE ACÁCIA NEGRA EM ÁREA DE PRIMEIRA E SEGUNDA ROTAÇÃO NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.

As mudas utilizadas no plantio foram produzidas a partir de sementes oriundas de pomares de sementes da empresa TANAC S.A. Os plantios foram realizados manualmente e durante essa operação foi adicionado 50 gramas de NPK (5-30-15) por muda. O espaçamento de plantio foi de 3 m entre linhas por 1,75 m entre plantas na linha.

Os plantios de acácia negra não carecem de maiores tratos culturais. A única atividade realizada foi a roçada das plantas daninhas com objetivo de diminuir a competição dessas com as plântulas de acácia negra durante os dois primeiros anos após o plantio. As roçadas foram realizadas mecanicamente com uso de trator e roçadeira agrícola.

4.4 ORIGEM DOS DADOS EXPERIMENTAIS

De maneira aleatória, em cada povoamento foram instaladas quatro parcelas circulares com diâmetro de 22,56 m (400 m²) e no centro de cada uma delas também uma subparcela de 10 m de diâmetro (78,54 m²). Tal procedimento foi realizado porque não seria possível mensurar todas as variáveis de todas as árvores na parcela em função do alto custo. Assim, optou-se por instalar uma subparcela de menor tamanho no interior da parcela, de modo a viabilizar as avaliações propostas sem prejudicar os objetivos da pesquisa.

Nas parcelas foram feitas avaliações das variáveis: diâmetro à altura do peito e altura total. Já na subparcela, todas as árvores em seu interior foram derrubadas e mensuradas quanto às seguintes características: diâmetro à altura do peito, altura total, biomassa do fuste e da copa.

Assim, o presente estudo envolveu a instalação de 48 parcelas temporárias, cujas coordenadas centrais dos povoamentos estão apresentadas na Tabela 1. Nelas foram mensurados 3.462 pares de diâmetro à altura do peito e altura total e 670 árvores quanto à biomassa do fuste e da copa.

TABELA 1 - COORDENADAS CENTRAIS DAS UNIDADES AMOSTRAIS INSTALADAS EM POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.

Cristal			Encruzilhada do Sul			Piratini		
I	S	O	I	S	O	I	S	O
1,75	30°58'23,8"	52°23'46,7"	1,83	30°29'54,6"	52°38'33,5"	1	32°16'09,6"	53°18'59,3"
2,75	30°58'26,7"	52°25'14,1"	3,08	30°53'16,1"	52°23'33,7"	2,33	31°26'25,1"	52°59'35,9"
5	30°50'49,1"	52°03'06,8"	5,75	31°05'23,7"	53°04'05,7"	5,25	31°21'05,4"	52°56'45,3"
10,08	31°07'26,1"	52°05'10,8"	10,75	30°27'35,8"	52°36'23,7"	9,83	31°24'46,5"	52°57'26,7"

Em que: I é a idade do povoamento, em anos, S é a coordenada sul e O é a coordenada oeste.

4.5 MENSURAÇÃO DAS VARIÁVEIS

4.5.1 Mensuração de variáveis oriundas da parcela

O objetivo da mensuração das variáveis na parcela foi obter o número de árvores vivas por hectare. Os valores dos pares de diâmetro à altura do peito e altura total objetivaram a quantificação dos estoques de biomassa dos componentes para a unidade de área hectare por meio de equações.

O diâmetro à altura do peito (d) foi mensurado utilizando uma fita dendrométrica e a altura total (h) com um hipsômetro (*Haglöf*). Árvores bifurcadas abaixo do diâmetro à altura do peito foram consideradas árvores individuais.

4.5.2 Mensuração de variáveis na subparcela

Todas as árvores dentro da subparcela foram derrubadas e avaliadas quanto às características descritas a seguir.

O diâmetro à altura do peito foi mensurado utilizando uma fita dendrométrica e a altura total com uma trena.

A mensuração da biomassa foi realizada para o componente do fuste (madeira do fuste + casca) e da copa (galhos vivos e mortos, folhas, flores e frutos), tomando as concepções definidas em Picard et al. (2012). Para cada árvore, esses componentes foram separados e pesados para a determinação da biomassa úmida com balança digital (*Portable Eletronic Scale*) com precisão de 5 g.

Para a determinação da biomassa seca da copa e do fuste foram retiradas amostras e imediatamente tomadas suas massas utilizando uma balança digital (*Hoyle*) com precisão de 1 g. As amostras da copa foram de aproximadamente 1.500 gramas e tomadas ao longo da copa da árvore nas posições 0%, 25%, 50%, 75% e 95% em relação ao comprimento total da copa (distância do primeiro galho, independentemente de estar vivo ou morto, até o ápice da copa). Para o fuste foram retirados 5 discos de 2 centímetros de espessura nas posições: 0%, 25%, 50%, 75% e 95% em relação à altura total (FIGURA 5).

FIGURA 5 - DETERMINAÇÃO DA BIOMASSA DA COPA E DO FUSTE DE ACÁCIA NEGRA EM PLANTIOS COMERCIAIS NO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.

As amostras foram secas em estufa de circulação e renovação de ar a 100°C e após a constatação de massa constante, por meio de sucessivas tomadas de massas, o material foi pesado com uma balança digital de precisão de 1 g. A biomassa seca foi obtida conforme [65].

$$B_m = \frac{MU_{mi}\, MS_{mi}}{MUA_{mi}} \tag{65}$$

Em que:
B_m é biomassa seca do m^{th} componente, fuste ou copa, em kg, para a t^{th} observação.
MU_{mi} é a massa fresca do m^{th} componente, fuste ou copa, em kg, para a t^{th} observação.
MS_i = massa seca da amostra do m^{th} componente, do fuste ou da copa, em kg, para a t^{th} observação.
MUA_i = massa fresca da amostra do m^{th} componente, do fuste ou da copa, em kg, para a t^{th} observação.

4.6 EQUAÇÕES DE BIOMASSA ACIMA DO SOLO

As equações de biomassa dos componentes e da biomassa total acima do solo foram propostas em relação à idade dos povoamentos, conforme definição na Tabela 2. Utilizou-se a

denominação grupo de equações para aquelas que foram estimadas de modo independente e de sistema de equações as estimadas conjuntamente.

TABELA 2 – GRUPO E SISTEMAS DE EQUAÇÕES ORGANIZADOS POR IDADE E MATURIDADE DOS POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.

Grupo de equações / Sistema de equações	Idade do povoamento (anos)	Idade do povoamento (qualitativa)
1	1	Muito jovem
2	1,75 – 1,83	Jovem
3	2,33 – 3,08	Média-inicial
4	5 – 5,75	Média-avançada
5	9,83 – 10,75	Madura

A alocação da biomassa nos componentes varia de acordo com a idade do povoamento, ou seja, quanto maior for a idade do povoamento, maior será a proporção de biomassa do fuste em relação a biomassa total e, ainda, essa proporção é afetada nas classes diamétricas e de alturas. Consequentemente deve-se separar em estratos tais composições nas diferentes idades. Considerando-se que as idades variam de 1 a 10,75 anos, a melhor divisão desses estratos não deveria incluir tamanhos de amplitude maior que dois anos, porque, dessa maneira, não seriam evidenciados os efeitos de tais proporções. Valendo-se dessas argumentações foram, consequentemente, identificados cinco estratos conforme já apresentados.

Os intervalos das variáveis independentes e o número de indivíduos (T) utilizados para o ajuste das equações estão definidos na Tabela 3.

TABELA 3 - INTERVALOS DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES (d E h) E NÚMERO DE INDIVÍDUOS (T) UTILIZADOS PARA O AJUSTE DE EQUAÇÕES DE BIOMASSA EM POVOAMENTOS DE ACÁCIA NEGRA NO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL.

Grupo de equações / Sistema de equações	T	d (cm)	h (m)
1	69	0,64 – 3,34	1,6 – 4,25
2	115	2,23 – 10,66	4,40 – 10,20
3	163	2,86 – 16,55	5,40 – 15,40
4	153	2,55 – 18,46	4,70 – 20,60
5	170	3,82 – 23,55	7,70 – 21,90

4.6.1 Equações de biomassa estimadas independentemente - Procedimento 1

A primeira etapa do processo da estimação independente das equações foi a avaliação dos modelos concorrentes, apresentados no Apêndice 1 para as variáveis de entrada d (em cm) e h (em m), para a biomassa da copa (y_C, em kg), biomassa do fuste (y_F, em kg) e biomassa total (y_{Total}, em kg).

Os modelos de natureza linear foram ajustados por *ordinary least squares* e os não lineares por *estimated generalized nonlinear least squares*, com definição dos estimadores apresentados em Greene (2008). O desempenho de cada modelo foi avaliado com base no coeficiente de determinação ajustado ($\bar{R}^2$) e coeficiente de variação (CV), conforme concepções apresentadas em Steel et al. (1996) e Greene (2008).

Os modelos de Schumacher-Hall (1933) e Spurr (1952) foram selecionados para expressar a alometria da biomassa dos componentes e biomassa total em função das características d e h, conforme definido em [66] e [67]. Os resultados do desempenho individual de cada modelo concorrente não foram apresentados, pois não constituiu o objetivo deste estudo.

Grupo de equações	Modelos	
1, 2 e 3	$\hat{y}_C = \beta_1 (d^2 h)^{\beta_2} + \varepsilon_C$ $\hat{y}_F = \beta_1 (d^2 h)^{\beta_2} + \varepsilon_F$ $\hat{y}_{Total} = \beta_1 (d^2 h)^{\beta_2} + \varepsilon_{Total}$	(66)
4 e 5	$\hat{y}_C = \beta_1 (d^2 h)^{\beta_2} + \varepsilon_C$ $\hat{y}_F = \beta_1 d^{\beta_2} h^{\beta_3} + \varepsilon_F$ $\hat{y}_{Total} = \beta_1 d^{\beta_2} h^{\beta_3} + \varepsilon_{Total}$	(67)

O teste de White (1980) foi aplicado para testar a hipótese da homogeneidade dos resíduos em cada equação, com 95% de probabilidade. Para os casos em que a hipótese foi rejeitada, foram obtidos pesos por meio da estrutura da variância, conforme definido na seção 3.4, seguido do novo ajuste da equação e aplicação do teste de White.

Foram também apresentadas as funções das derivadas parciais referente à matriz $F(\hat{\beta})$ e às matrizes variância – covariância de b_i (em que i refere-se ao coeficiente de cada equação), informações que são úteis para realizar inferências a respeito da estimação dos parâmetros e intervalos de confiança.

4.6.2 Sistemas de equações de biomassa – Procedimento 2

Os sistemas de equações de biomassa foram desenvolvidos para a biomassa total e dos componentes copa e fuste. Os modelos selecionados para os componentes foram aqueles definidos em [66] e [67]. O modelo para a biomassa total foi considerado em função das variáveis independentes de cada uma das funções do componente i. Assim, foram definidos os sistemas de equações conforme [68] e [69].

Sistema de equação	Modelos	
1	$\hat{y}_C = \beta_{11}\,(d^2h)^{\beta_{12}} + \varepsilon_C$	
2	$\hat{y}_F = \beta_{21}\,(d^2h)^{\beta_{22}} + \varepsilon_F$	(68)
3	$\hat{y}_{Total} = \beta_{11}\,(d^2h)^{\beta_{12}} + \beta_{21}\,(d^2h)^{\beta_{22}} + \varepsilon_{Total}$	
	$\hat{y}_C = \beta_{11}\,(d^2h)^{\beta_{12}} + \varepsilon_C$	
4	$\hat{y}_F = \beta_1\, d^{\beta_2}\, h^{\beta_3} + \varepsilon_F$	(69)
5	$\hat{y}_{Total} = \beta_{11}\,(d^2h)^{\beta_{12}} + \beta_1\, d^{\beta_2}\, h^{\beta_3} + \varepsilon_{Total}$	

Foi empregado o modelo *nonlinear seemingly unrelated regressions* para resolver os sistemas de equações definido em [68] e [69], sendo as estimativas dos parâmetros efetuadas no *software* SAS, conforme Apêndice 4.

O teste de White (1980) foi aplicado para testar a hipótese de homogeneidade dos resíduos para as equações dos componentes e para a equação do total, a 95% de probabilidade. Para os casos em que a hipótese foi rejeitada, foram utilizados os pesos obtidos na seção 4.6.1 e o sistema foi novamente ajustado por meio do estimador *weighted-nonlinear seemingly unrelated regressions*, conforme Apêndice 5, seguido da aplicação do teste de White. O desempenho de cada modelo foi avaliado com base no coeficiente de determinação ajustado ($\bar{R}^2$) e coeficiente de variação (CV), conforme concepções definidas em Steel et al. (1996).

Foram também apresentadas as funções das derivadas parciais referente à matriz $F(\hat{\beta})$, às matrizes variância – covariância de b_{ij} (onde i refere-se ao coeficiente entre as equações e j aos coeficientes de cada equação), à matriz variância-covariância dos resíduos e à matriz das correlações contemporâneas, informações que são úteis para realizar inferências a respeito da estimação dos parâmetros e intervalos de confiança.

4.7 DESEMPENHO, CONSISTÊNCIA BIOLÓGICA E EFICIÊNCIA DOS ESTIMADORES DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA

O desempenho das equações de biomassa total e dos componentes obtidas no procedimento 1 em 4.6.1 e no procedimento 2 em 4.6.2 foram comparadas em relação aos valores do coeficiente de determinação ajustado, do coeficiente de variação e dos coeficientes das equações estimados. Adicionalmente, foram realizadas estimativas de biomassa dos componentes e biomassa total utilizando os dados oriundos das parcelas, em nível de árvore e para a unidade de área hectare. Essas estimativas foram comparadas por meio de um teste de Qui-quadrado, sendo testada a hipótese da nulidade que os valores estimados por meio do

procedimento 1 são semelhantes aos estimados por meio do procedimento 2, a 95% de probabilidade.

A consistência biológica foi avaliada em relação à aditividade da biomassa dos componentes com a biomassa total, testada somente para as equações ajustadas por meio do procedimento 1 em 4.6.1. Tomando a expressão em [9], foi considerada estimavas de biomassa com consistência biológica se $\hat{y}_{Total} = \hat{y}_F + \hat{y}_C$. Se essa condição não foi satisfeita, ou seja, $\hat{y}_F + \hat{y}_C - \hat{y}_{Total} \neq 0$, então as estimativas de biomassa foram consideradas sem consistência biológica, sendo isso avaliado em nível de árvore, parcela e para a unidade de área hectare.

A eficiência dos estimadores das equações de biomassa ajustadas por meio do procedimento 1 e 2 foi avaliada em relação à precisão dos intervalos de confiança conforme [70]. Os intervalos de confiança foram calculados para todas as árvores oriundas das parcelas.

$$PIC_i = \frac{IC_i}{\hat{y}_i} \tag{70}$$

Em que:

PIC é a precisão do intervalo de confiança para a T^{th} observação do i^{th} componente.
IC é o intervalo de confiança para a T^{th} observação do i^{th} componente. Os intervalos de confiança para ENGLS foram calculados conforme Greene (2008) e para WNSUR conforme apresentado na seção 3.
$\hat{y}_i$ é o valor estimado para a T^{th} observação das variáveis preditoras.

5 RESULTADOS

5.1 EQUAÇÕES DE BIOMASSA ESTIMADAS INDEPENDENTEMENTE – PROCEDIMENTO 1

As equações ajustadas por meio do procedimento 1 e as estatísticas do ajuste estão apresentadas em [71] a [85].

		$\bar{R}^2$	CV	White	
Grupo 1	$\hat{y}_C = 0{,}215867\ (d^2h)^{0{,}445297}$	69,22%	22,11%	$3{,}03^{ns}$	(71)
	$\hat{y}_F = 0{,}178804\ (d^2h)^{0{,}500678}$	83,98%	16,13%	$10{,}01^{ns}$	(72)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}394430\ (d^2h)^{0{,}471904}$	81,19%	16,86%	$2{,}05^{ns}$	(73)
Grupo 2	$\hat{y}_C = 0{,}0328047\ (d^2h)^{0{,}826434}$	64,07%	31,51%	$1{,}71^{ns}$	(74)
	$\hat{y}_F = 0{,}044044\ (d^2h)^{0{,}865238}$	93,01%	12,39%	20,01*	(75)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}076076\ (d^2h)^{0{,}851425}$	89,32%	15,24%	15,02*	(76)
Grupo 3	$\hat{y}_C = 0{,}003603\ (d^2h)^{1{,}069797}$	89,81%	24,85%	42,03*	(77)
	$\hat{y}_F = 0{,}050802\ (d^2h)^{0{,}865626}$	95,41%	13,16%	56,05*	(78)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}046823\ (d^2h)^{0{,}91447}$	96,06%	12,80%	46,52*	(79)
Grupo 4	$\hat{y}_C = 0{,}008877\ (d^2h)^{0{,}926172}$	80,86%	29,46%	15,88*	(80)
	$\hat{y}_F = 0{,}058743\ d^{2{,}010837}\ h^{0{,}619744}$	95,22%	13,34%	17,04*	(81)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}081199\ d^{2{,}049068}\ h^{0{,}545591}$	95,50%	12,97%	22,04*	(82)
Grupo 5	$\hat{y}_C = 0{,}000143\ (d^2h)^{1{,}412016}$	84,32%	36,78%	30,63*	(83)
	$\hat{y}_F = 0{,}054107\ d^{1{,}955925}\ h^{0{,}743741}$	95,80%	13,30%	36,69*	(84)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}052754\ d^{2{,}178945}\ h^{0{,}606246}$	95,98%	13,70%	54,55*	(85)

A hipótese da nulidade em relação a homogeneidade dos resíduos foi rejeitada, conforme o teste de White, para as equações [75] a [85]. Assim, procedeu-se a obtenção dos pesos para a biomassa dos componentes e biomassa total por meio de estruturas de variância, que estão apresentadas em [86] a [100]. Para as demais equações, tendo sido aceita a hipótese de nulidade, optou-se por apresentar o peso igual a um.

Grupo 1	$y_c: \hat{\sigma}^2 = 1$	(86)
	$y_F: \hat{\sigma}^2 = 1$	(87)
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = 1$	(88)
Grupo 2	$y_c: \hat{\sigma}^2 = 1$	(89)
	$y_F: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{0{,}856511}$	(90)
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{0{,}485465}$	(91)

Grupo 3	$y_c: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{1,264866}$	(92)
	$y_F: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{1,334049}$	(93)
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{1,670747}$	(94)
Grupo 4	$y_c: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{0,945054}$	(95)
	$y_F: \hat{\sigma}^2 = d^{4,002528}\ h^{-0,716350}$	(96)
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = d^{3,539289}\ h^{0,052788}$	(97)
Grupo 5	$y_c: \hat{\sigma}^2 = (d^2h)^{1,236776}$	(98)
	$y_F: \hat{\sigma}^2 = d^{4,514350}\ h^{-0,595380}$	(99)
	$y_{Total}: \hat{\sigma}^2 = d^{4,786551}\ h^{-0,249140}$	(100)

As novas equações ajustadas, por meio do procedimento 1, adicionado de sua ponderação, e as estatísticas do ajuste estão apresentadas em [101] a [111]. Foi evidenciada a correção da heteroscedasticidade por meio da aplicação dos pesos, indicada pelo teste de White e também por meio da análise gráfica dos resíduos. Além disso, todos os coeficientes foram significativos a 95% resultantes da aplicação do teste *t*.

		$\bar{R}^2$	CV	White	
Grupo 2	$\hat{y}_F = 0{,}051673\ (d^2h)^{0,839463}$	92,94%	12,45%	13,02^{ns}	(101)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}086821\ (d^2h)^{0,830291}$	89,28%	15,27%	4,84^{ns}	(102)
Grupo 3	$\hat{y}_C = 0{,}003410\ (d^2h)^{1,077143}$	89,80%	24,86%	1,38^{ns}	(103)
	$\hat{y}_F = 0{,}039333\ (d^2h)^{0,900797}$	95,24%	13,39%	6,86^{ns}	(104)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}037582\ (d^2h)^{0,944718}$	95,94%	12,99%	1,67^{ns}	(105)
Grupo 4	$\hat{y}_C = 0{,}005891\ (d^2h)^{0,976956}$	80,70%	29,58%	6,97^{ns}	(106)
	$\hat{y}_F = 0{,}048390\ d^{2,033388}\ h^{0,667959}$	95,19%	13,34%	6,69^{ns}	(107)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}062245\ d^{2,102267}\ h^{0,591272}$	95,43%	13,58%	6,04^{ns}	(108)
Grupo 5	$\hat{y}_C = 0{,}000778\ (d^2h)^{1,214249}$	82,89%	38,42%	4,67^{ns}	(109)
	$\hat{y}_F = 0{,}039145\ d^{1,984245}\ h^{0,829223}$	95,73%	13,41%	8,58^{ns}	(110)
	$\hat{y}_{Total} = 0{,}057760\ d^{2,139698}\ h^{0,611213}$	95,95%	13,75%	4,84^{ns}	(111)

A aplicação das derivadas parciais referente à matriz $F(\hat{\beta})$, resultou nas funções apresentadas em [112] a [117].

Grupo 1, 2 e 3	$f(\hat{\beta})'_{y_c} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_2} \quad \hat{\beta}_1(d^2h)^{\hat{\beta}_2}\ln(d^2h)\right]$	(112)
	$f(\hat{\beta})'_{y_F} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_2} \quad \hat{\beta}_1(d^2h)^{\hat{\beta}_2}\ln(d^2h)\right]$	(113)
	$f(\hat{\beta})'_{y_{Total}} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_2} \quad \hat{\beta}_1(d^2h)^{\hat{\beta}_2}\ln(d^2h)\right]$	(114)

Grupo 4 e 5

$$f(\hat{\beta})'_{y_c} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_2} \quad \hat{\beta}_1(d^2h)^{\hat{\beta}_2}\ln(d^2h)\right] \tag{115}$$

$$f(\hat{\beta})'_{y_F} = \left[d^{\hat{\beta}_2}h^{\hat{\beta}_3} \quad \hat{\beta}_1 d^{\hat{\beta}_2}\ln(d)\, h^{\hat{\beta}_3} \quad \hat{\beta}_1 d^{\hat{\beta}_2}\ln h\, h^{\hat{\beta}_3}\right] \tag{116}$$

$$f(\hat{\beta})'_{y_{Total}} = \left[d^{\hat{\beta}_2}h^{\hat{\beta}_3} \quad \hat{\beta}_1 d^{\hat{\beta}_2}\ln(d)\, h^{\hat{\beta}_3} \quad \hat{\beta}_1 d^{\hat{\beta}_2}\ln h\, h^{\hat{\beta}_3}\right] \tag{117}$$

As matrizes variância – covariância de b_i (em que i refere-se ao coeficiente de cada equação) para cada grupo estão apresentadas em [118] a [132].

Grupo 1

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_C}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000690 & -0{,}001025 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}001025 & 0{,}001609 \end{array} \tag{118}$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_F}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000275 & -0{,}000484 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000484 & 0{,}000903 \end{array} \tag{119}$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_{Total}}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}001390 & -0{,}001125 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}001125 & 0{,}000959 \end{array} \tag{120}$$

Grupo 2

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_C}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000180 & -0{,}000866 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000866 & 0{,}004196 \end{array} \tag{121}$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_F}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000055 & -0{,}000172 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000172 & 0{,}000544 \end{array} \tag{122}$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_{Total}}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000277 & -0{,}000512 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000512 & 0{,}000950 \end{array} \tag{123}$$

Grupo 3

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_C}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 6{,}70\text{E-}07 & -0{,}000025 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000025 & 0{,}001007 \end{array} \tag{124}$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_F}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000014 & -0{,}000050 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000050 & 0{,}000180 \end{array} \tag{125}$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta_{y_{Total}}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000012 & -0{,}000044 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000044 & 0{,}000169 \end{array} \tag{126}$$

$$\widehat{\Sigma}_{\beta_{y_C}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000004 & -0{,}000091 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000091 & 0{,}001927 \end{array} \quad (127)$$

Grupo 4

$$\widehat{\Sigma}_{\beta_{y_F}} = \begin{array}{c|ccc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000105 & 0{,}000327 & -0{,}001069 \\ \hat{\beta}_2 & 0{,}000327 & 0{,}004601 & -0{,}006531 \\ \hat{\beta}_3 & -0{,}001069 & -0{,}006531 & 0{,}013762 \end{array} \quad (128)$$

$$\widehat{\Sigma}_{\beta_{y_{Total}}} = \begin{array}{c|ccc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}0001618 & 0{,}0003801 & -0{,}0012730 \\ \hat{\beta}_2 & 0{,}0003801 & 0{,}0044220 & -0{,}0061656 \\ \hat{\beta}_3 & -0{,}0012730 & -0{,}0061656 & 0{,}0128859 \end{array} \quad (129)$$

$$\widehat{\Sigma}_{\beta_{y_C}} = \begin{array}{c|cc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 & 1{,}02\text{E-}07 & -0{,}000016 \\ \hat{\beta}_2 & -0{,}000016 & 0{,}002387 \end{array} \quad (130)$$

Grupo 5

$$\widehat{\Sigma}_{\beta_{y_F}} = \begin{array}{c|ccc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000071 & 0{,}000361 & -0{,}000968 \\ \hat{\beta}_2 & 0{,}000361 & 0{,}004969 & -0{,}007768 \\ \hat{\beta}_3 & -0{,}000968 & -0{,}007768 & 0{,}015785 \end{array} \quad (131)$$

$$\widehat{\Sigma}_{\beta_{y_{Total}}} = \begin{array}{c|ccc} & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_1 & 0{,}000134 & 0{,}000512 & -0{,}001283 \\ \hat{\beta}_2 & 0{,}000512 & 0{,}005053 & -0{,}007720 \\ \hat{\beta}_3 & -0{,}001283 & -0{,}007720 & 0{,}014880 \end{array} \quad (132)$$

O comportamento dos coeficientes dos modelos ajustados são afetados basicamente pela distribuição dos efeitos de forma do fuste e densidade dos componentes. Salienta-se também que há influência do efeito de idade do povoamento. Uma explicação mais evidente de tais efeitos somente pode ser avaliada com uma análise de correlações entre tais coeficientes. Como para o ajuste das funções foi demandada apenas a utilização das matrizes de variância-covariância, então tal explicação não é facilmente detectada, mas pode ser resolvida transformando tal matriz em matriz de correlação.

5.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE BIOMASSA – PROCEDIMENTO 2

As equações ajustadas por meio do procedimento 2 e as estatísticas do ajuste estão apresentadas em [133] a [147].

		$\bar{R}^2$	CV	White	
Sistema 1	$\hat{y}_C = 0{,}205422\ (d^2h)^{0{,}459328}$	69,58%	21,98%	2,57^{ns}	(133)
	$\hat{y}_F = 0{,}17493\ (d^2h)^{0{,}506569}$	84,19%	16,03%	9,63^{ns}	(134)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	81,15%	16,88%	1,65^{ns}	(135)
Sistema 2	$\hat{y}_C = 0{,}033033\ (d^2h)^{0{,}827421}$	64,31%	31,40%	1,86^{ns}	(136)
	$\hat{y}_F = 0{,}043660\ (d^2h)^{0{,}867317}$	93,06%	12,34%	20,49*	(137)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	89,29%	15,26%	15,01*	(138)
Sistema 3	$\hat{y}_C = 0{,}003976\ (d^2h)^{1{,}056877}$	89,86%	24,79%	42,73*	(139)
	$\hat{y}_F = 0{,}051761\ (d^2h)^{0{,}863215}$	95,43%	13,12%	55,96*	(140)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	96,04%	12,82%	48,58*	(141)
Sistema 4	$\hat{y}_C = 0{,}008456\ (d^2h)^{0{,}931885}$	80,98%	29,37%	15,78*	(142)
	$\hat{y}_F = 0{,}087331\ d^{2{,}146802}\ h^{0{,}353867}$	95,07%	13,54%	19,98*	(143)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	95,50%	12,98%	24,58*	(144)
Sistema 5	$\hat{y}_C = 0{,}000059\ (d^2h)^{1{,}513338}$	84,10%	37,04%	26,18*	(145)
	$\hat{y}_F = 0{,}146367\ d^{2{,}013462}\ h^{0{,}350896}$	95,52%	13,74%	42,37*	(146)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	95,98%	13,69%	58,72*	(147)

Assim, como observado na seção 4.1, foi evidenciada a presença de heteroscedasticidade nas equações [137] a [147], indicada pela rejeição da hipótese de nulidade pelo teste de White. Assim, procedeu-se o novo ajuste das funções por meio de procedimento 2 adicionado dos pesos obtidos em [89] a [100]. As novas equações e as estatísticas do ajuste estão apresentadas em [148] a [159]. Foi evidenciada a correção da heteroscedasticidade por meio da aplicação dos pesos, indicada pelo teste de White e também por meio da análise gráfica dos resíduos. Todos os coeficientes ajustados foram significativos a 95% pela aplicação do teste *t*.

		$\bar{R}^2$	CV	White	
Sistema 2	$\hat{y}_C = 0{,}032844\ (d^2h)^{0{,}827296}$	64,37%	31,38%	1,77^{ns}	(148)
	$\hat{y}_F = 0{,}052046\ (d^2h)^{0{,}837992}$	92,99%	12,41%	11,93^{ns}	(149)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	89,29%	15,26%	4,78^{ns}	(150)
Sistema 3	$\hat{y}_C = 0{,}003320\ (d^2h)^{1{,}079325}$	89,84%	24,81%	1,28^{ns}	(151)
	$\hat{y}_F = 0{,}039548\ (d^2h)^{0{,}899084}$	95,31%	13,30%	6,06^{ns}	(152)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	95,97%	12,95%	1,62^{ns}	(153)
Sistema 4	$\hat{y}_C = 0{,}004438\ (d^2h)^{1{,}010899}$	80,58%	29,67%	6,33^{ns}	(154)
	$\hat{y}_F = 0{,}051517\ d^{1{,}979083}\ h^{0{,}692747}$	95,24%	13,32%	6,21^{ns}	(155)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	95,38%	13,15%	12,11^{ns}	(156)
Sistema 5	$\hat{y}_C = 0{,}001216\ (d^2h)^{1{,}165186}$	82,39%	38,98%	5,37^{ns}	(157)
	$\hat{y}_F = 0{,}053628\ d^{1{,}967389}\ h^{0{,}736520}$	95,84%	13,24%	6,63^{ns}	(158)
	$\hat{y}_{Total} = \hat{y}_C + \hat{y}_F$	95,86%	13,89%	9,15^{ns}	(159)

A aplicação das derivadas parciais referente à matriz $F(\beta)$, resultou nas funções apresentadas em [160] a [165].

Sistema 1, 2 e 3

$$f(\hat{\beta})'_{y_c} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}} \quad \hat{\beta}_{11}(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}}\ln(d^2h) \quad 0 \quad 0\right] \tag{160}$$

$$f(\hat{\beta})'_{y_F} = \left[0 \quad 0 \quad (d^2h)^{\hat{\beta}_{22}} \quad \hat{\beta}_{21}(d^2h)^{\hat{\beta}_{22}}\ln(d^2h)\right] \tag{161}$$

$$f(\hat{\beta})'_{y_{Total}} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}} \quad \hat{\beta}_{11}(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}}\ln(d^2h) \quad (d^2h)^{\hat{\beta}_{22}} \quad \hat{\beta}_{21}(d^2h)^{\hat{\beta}_{22}}\ln(d^2h)\right] \tag{162}$$

Sistema 4 e 5

$$f(\hat{\beta})'_{y_c} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}} \quad \hat{\beta}_{11}(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}}\ln(d^2h) \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] \tag{163}$$

$$f(\hat{\beta})'_{y_F} = \left[0 \quad 0 \quad d^{\hat{\beta}_{22}}h^{\hat{\beta}_{23}} \quad \hat{\beta}_{21}d^{\hat{\beta}_{22}}\ln(d)\,h^{\hat{\beta}_{23}} \quad \hat{\beta}_{21}d^{\hat{\beta}_{22}}\ln h\, h^{\hat{\beta}_{23}}\right] \tag{164}$$

$$f(\hat{\beta})'_{y_{Total}} = \left[(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}} \quad \hat{\beta}_{11}(d^2h)^{\hat{\beta}_{12}}\ln(d^2h) \quad d^{\hat{\beta}_{22}}h^{\hat{\beta}_{23}} \quad \hat{\beta}_{21}d^{\hat{\beta}_{22}}\ln(d)\,h^{\hat{\beta}_{23}} \quad \hat{\beta}_{21}d^{\hat{\beta}_{22}}\ln h\, h^{\hat{\beta}_{23}}\right] \tag{165}$$

As matrizes variância – covariância de b_{ij} (em que i refere-se ao coeficiente entre as equações e j aos coeficientes de cada equação) estão apresentadas em [167] a [171].

Sistema 1

$$\hat{\sum}_{\beta} = \begin{array}{c|cccc} & \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} & \hat{\beta}_{21} & \hat{\beta}_{22} \\ \hline \hat{\beta}_{11} & 0{,}000557 & -0{,}000880 & 0{,}000178 & -0{,}000328 \\ \hat{\beta}_{12} & -0{,}000880 & 0{,}001445 & -0{,}000279 & 0{,}000535 \\ \hat{\beta}_{21} & 0{,}000178 & -0{,}000279 & 0{,}000241 & -0{,}000442 \\ \hat{\beta}_{22} & -0{,}000328 & 0{,}000535 & -0{,}000442 & 0{,}000843 \end{array} \tag{167}$$

Sistema 2

$\widehat{\Sigma}_{\beta} =$

	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{22}$
$\hat{\beta}_{11}$	0,000086	-0,000408	0,000039	-0,000120
$\hat{\beta}_{12}$	-0,000408	0,001958	-0,000187	0,000582
$\hat{\beta}_{21}$	0,000039	-0,000187	0,000049	-0,000152
$\hat{\beta}_{22}$	-0,000120	0,000582	-0,000152	0,000476

(168)

Sistema 3

$\widehat{\Sigma}_{\beta} =$

	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{22}$
$\hat{\beta}_{11}$	3,9942E-07	-1,6400E-05	-7,0000E-07	2,5000E-06
$\hat{\beta}_{12}$	-1,6400E-05	6,7690E-04	2,8400E-05	-1,0330E-04
$\hat{\beta}_{21}$	-7,0000E-07	2,8400E-05	5,4000E-06	-1,9500E-05
$\hat{\beta}_{22}$	2,5000E-06	-1,0330E-04	-1,9500E-05	7,1900E-05

(169)

Sistema 4

$\widehat{\Sigma}_{\beta} =$

	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{22}$	$\hat{\beta}_{23}$
$\hat{\beta}_{11}$	7,21E-07	-2,03E-05	-4,00E-07	-9,70E-06	1,15E-05
$\hat{\beta}_{12}$	-2,03E-05	5,75E-04	1,19E-05	2,87E-04	-3,41E-04
$\hat{\beta}_{21}$	-4,00E-07	1,19E-05	8,95E-05	2,42E-04	-8,39E-04
$\hat{\beta}_{22}$	-9,70E-06	2,87E-04	2,42E-04	3,61E-03	-4,90E-03
$\hat{\beta}_{23}$	1,15E-05	-3,41E-04	-8,39E-04	-4,90E-03	1,02E-02

(170)

Sistema 5

$\widehat{\Sigma}_{\beta} =$

	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{22}$	$\hat{\beta}_{23}$
$\hat{\beta}_{11}$	1,06E-07	-1,03E-05	-6,00E-07	2,60E-06	1,40E-06
$\hat{\beta}_{12}$	-1,03E-05	1,01E-03	5,61E-05	-2,61E-04	-1,26E-04
$\hat{\beta}_{21}$	-6,00E-07	5,61E-05	7,75E-05	3,53E-04	-8,33E-04
$\hat{\beta}_{22}$	2,60E-06	-2,61E-04	3,53E-04	4,04E-03	-6,00E-03
$\hat{\beta}_{23}$	1,40E-06	-1,26E-04	-8,33E-04	-6,00E-03	1,10E-02

(171)

As matrizes variância-covariância dos resíduos para cada sistema estão apresentadas em [172] a [176].

Sistema 1

$\hat{\sigma}_{ij} =$

	y_C	y_F	y_{Total}
y_C	0,022979	0,008596	0,031834
y_F	0,008596	0,011403	0,020136
y_{Total}	0,031834	0,020136	0,052391

(172)

Sistema 2

$\hat{\sigma}_{ij} =$

	y_C	y_F	y_{Total}
y_C	2,185614	0,0219334	0,5900139
y_F	0,021933	0,0057081	0,0225064
y_{Total}	0,590014	0,0225064	0,2116364

(173)

Sistema 3

$\hat{\sigma}_{ij} =$

	y_C	y_F	y_{Total}
y_C	0,000381	0,000079	0,000122
y_F	0,000079	0,000516	0,000179
y_{Total}	0,000122	0,000179	0,000088

(174)

Sistema 4

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 0{,}007557 & 0{,}001336 & 0{,}004354 \\ y_F & 0{,}001336 & 0{,}013644 & 0{,}008933 \\ y_{Total} & 0{,}004354 & 0{,}008933 & 0{,}007540 \end{array} \quad (175)$$

Sistema 5

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 0{,}001230 & 0{,}000238 & 0{,}000628 \\ y_F & 0{,}000238 & 0{,}003585 & 0{,}001643 \\ y_{Total} & 0{,}000628 & 0{,}001643 & 0{,}000996 \end{array} \quad (176)$$

As matrizes das correlações contemporâneas estão apresentadas em [177] a [181].

Sistema 1

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 1{,}00000 & 0{,}53105 & 0{,}91749 \\ y_F & 0{,}53105 & 1{,}00000 & 0{,}82385 \\ y_{Total} & 0{,}91749 & 0{,}82385 & 1{,}00000 \end{array} \quad (177)$$

Sistema 2

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 1{,}000000 & 0{,}196369 & 0{,}867522 \\ y_F & 0{,}196366 & 1{,}000000 & 0{,}647538 \\ y_{Total} & 0{,}867522 & 0{,}647538 & 1{,}000000 \end{array} \quad (178)$$

Sistema 3

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 1{,}000000 & 0{,}178172 & 0{,}666279 \\ y_F & 0{,}178172 & 1{,}000000 & 0{,}840015 \\ y_{Total} & 0{,}666279 & 0{,}840015 & 1{,}000000 \end{array} \quad (179)$$

Sistema 4

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 1{,}000000 & 0{,}131589 & 0{,}576745 \\ y_F & 0{,}131589 & 1{,}000000 & 0{,}880677 \\ y_{Total} & 0{,}576745 & 0{,}880677 & 1{,}000000 \end{array} \quad (180)$$

Sistema 5

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{array}{r|ccc} & y_C & y_F & y_{Total} \\ y_C & 1{,}000000 & 0{,}113339 & 0{,}567384 \\ y_F & 0{,}113339 & 1{,}000000 & 0{,}869487 \\ y_{Total} & 0{,}567384 & 0{,}869487 & 1{,}000000 \end{array} \quad (181)$$

5.3 DESEMPENHO, CONSISTÊNCIA BIOLÓGICA E EFICIÊNCIA DOS ESTIMADORES DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA

5.3.1 Desempenho dos estimadores de equações de biomassa

A primeira hipótese delineada neste trabalho: "considerando-se que as equações obtidas por meio do ajuste de única equação e de sistemas de equações são consistentes estatisticamente (sem tendenciosidade), então as estimativas de biomassa e as estatísticas de ajuste das equações (coeficiente de determinação e coeficiente de variação) obtidas por meio desses procedimentos não diferem entre si", foi confirmada conforme resultados apresentados a seguir.

Os valores dos coeficientes das equações para a biomassa dos componentes estimados por meio do procedimento 1 $(\hat{\beta}_i)$ e por meio do procedimento 2 $(\hat{\beta}_{ij})$ apresentaram tendências similares de comportamento em relação ao grupo ou sistema de equações (Figura 6), embora houvessem diferenças nos valores dos coeficientes. As maiores diferenças (D) foram originadas nos coeficientes que expressam o intercepto das equações $(\hat{\beta}_1 \text{e } \hat{\beta}_{i1})$, que variaram de -56,30% a 24,66%. Nos demais coeficientes - $(\hat{\beta}_2 \text{e } \hat{\beta}_{i2})$ e $(\hat{\beta}_3 \text{e } \hat{\beta}_{i3})$- D variaram entre -3,71% a 11,18%.

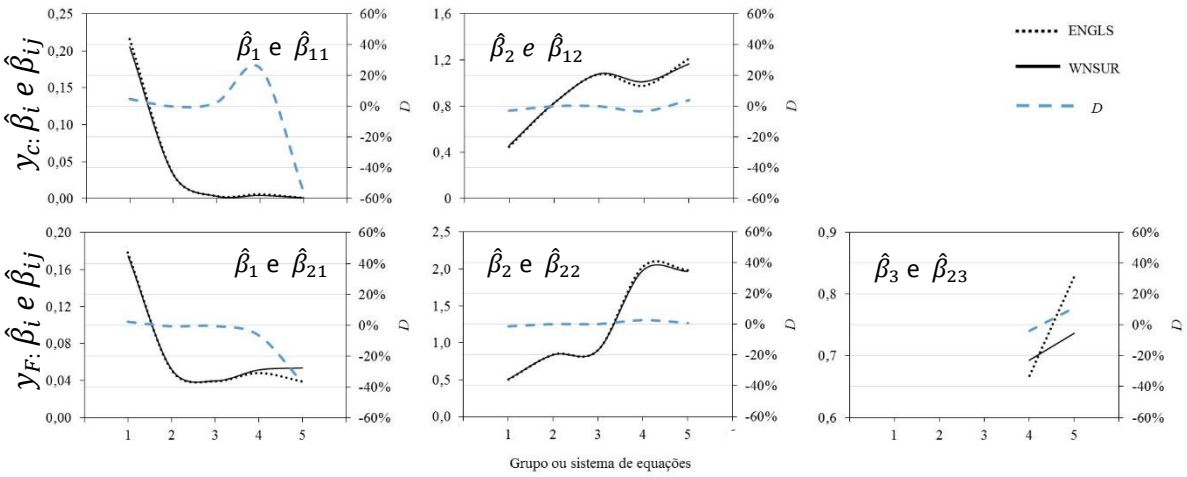


FIGURA 6 - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES PARA A BIOMASSA DOS COMPONENTES ESTIMADOS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 $(\hat{\beta}_i)$ E 2 $(\hat{\beta}_{ij})$.

Em que: $D = \frac{(\beta_i - \beta_{ij})}{\beta_i}$ 100, sendo j de $\hat{\beta}_{ij}$ correspondente a i de $\hat{\beta}_i$, expressa as diferenças percentuais dos coeficientes estimados por meio dos procedimentos1 e 2.

As estatísticas para a avaliação da qualidade do ajuste, $\bar{R}^2$ e CV, para as equações de biomassa dos componentes e biomassa total, ajustadas por meio do procedimento 1 e 2,

apresentaram tendências similares de comportamento em relação ao grupo ou sistema de equações, e também valores similares em relação a essas estatísticas (Figura 7). As diferenças para $\bar{R}^2$ $\left(D_{\bar{R}^2} = \frac{(\bar{R}^2_{ENGLS} - \bar{R}^2_{WNSUR})}{\bar{R}^2_{ENGLS}} 100\right)$ variaram entre -0,52% e 0,60%, enquanto que para CV $\left(D_{CV} = \frac{(CV_{ENGLS} - CV_{WNSUR})}{CV_{ENGLS}} 100\right)$ entre -1,46% e 3,17%.

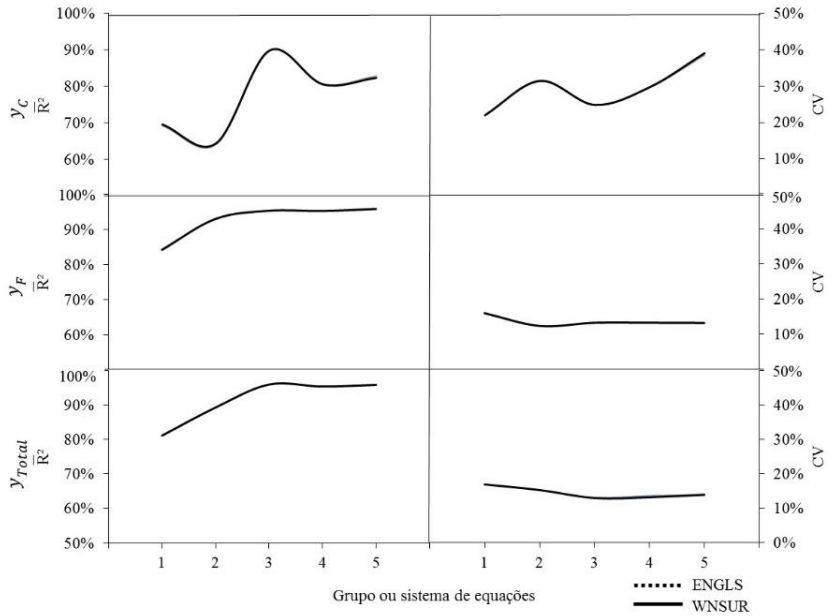


FIGURA 7 - COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO AJUSTADO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA DE COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL ESTIMADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 (ENGLS) E 2 (WNSUR).

A relação entre os valores observados e estimados por meio do procedimento 1 e 2 estão apresentados nas Figuras 8 e 9, respectivamente. Não foram observados desvios acentuados em relação aos valores estimados e observados.

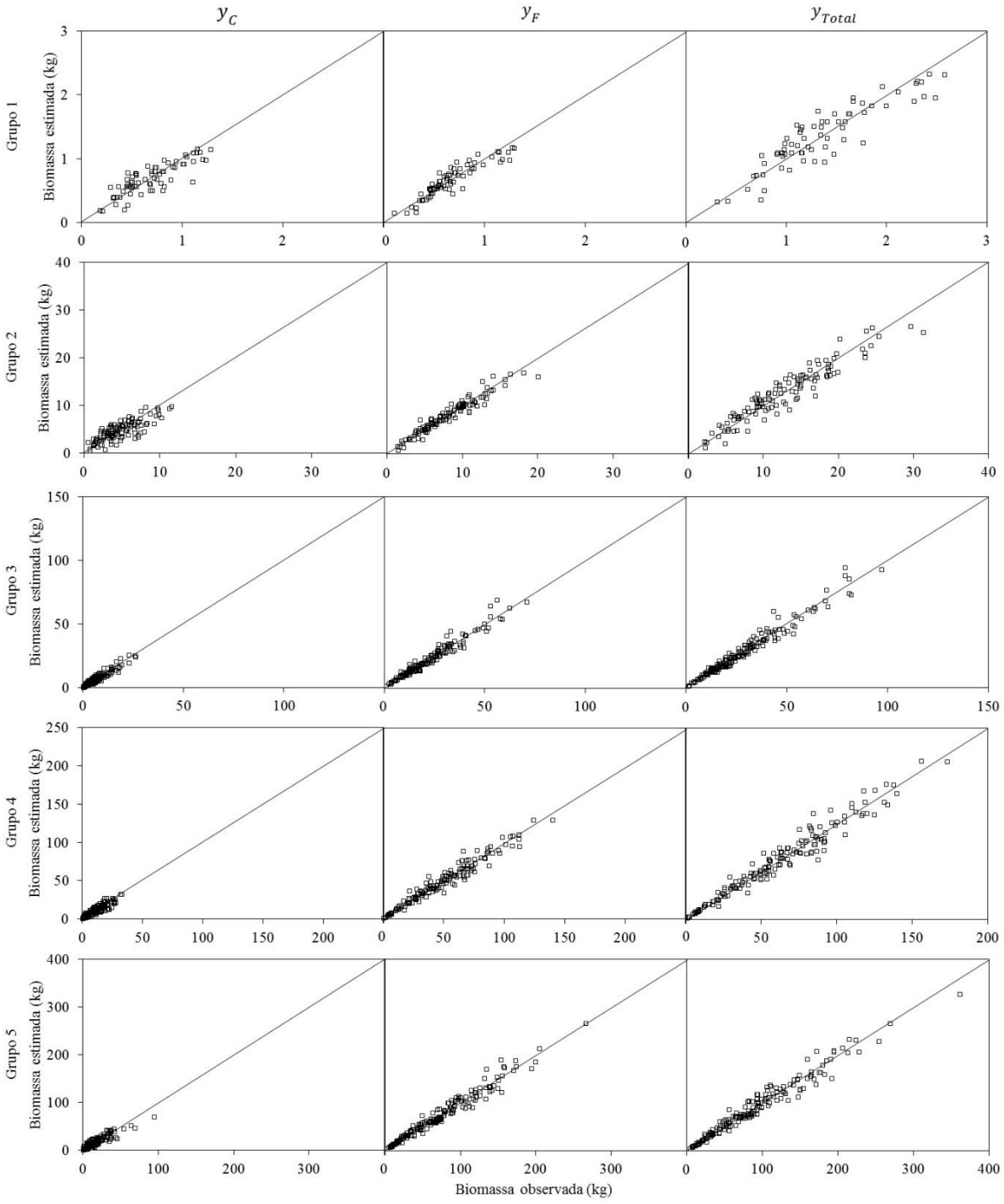


FIGURA 8 - RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL OBSERVADOS E ESTIMADOS POR EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1.

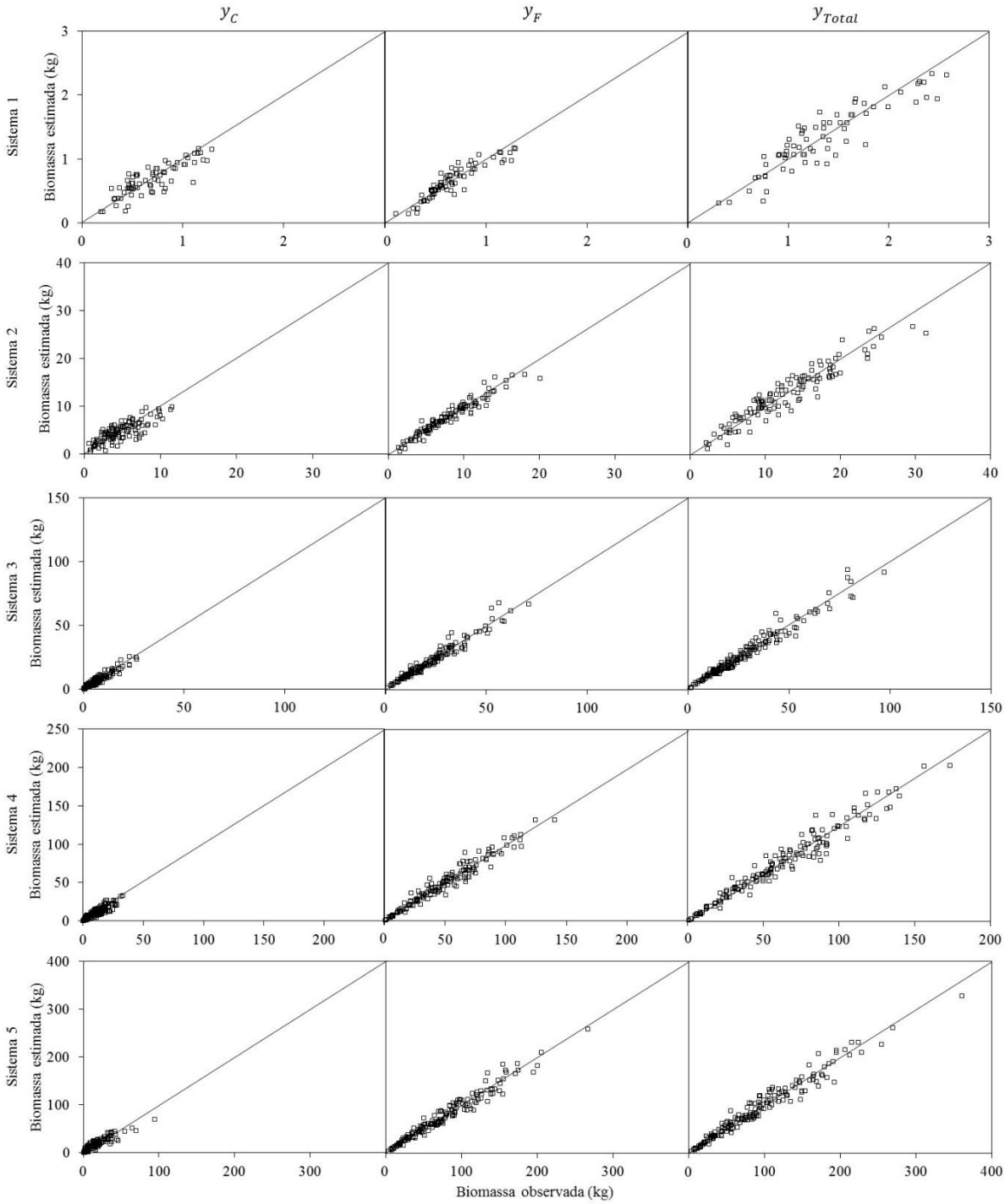


FIGURA 9 - RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL OBSERVADOS E ESTIMADOS POR EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 2.

As relações entre os valores de biomassa dos componentes e biomassa total estimados por equações ajustadas por meio dos procedimentos 1 e 2 estão apresentadas na Figura 10. Todos os testes de Qui-quadrado aplicados não foram significativos, ou seja, valores estimados pelas equações ajustadas por meio do procedimento 1 foram semelhantes aos estimados pelas equações ajustadas por meio do procedimento 2. Ruídos foram observados a partir do quarto

sistema ou grupo de equações, em que os modelos para a biomassa dos componentes foram diferentes.

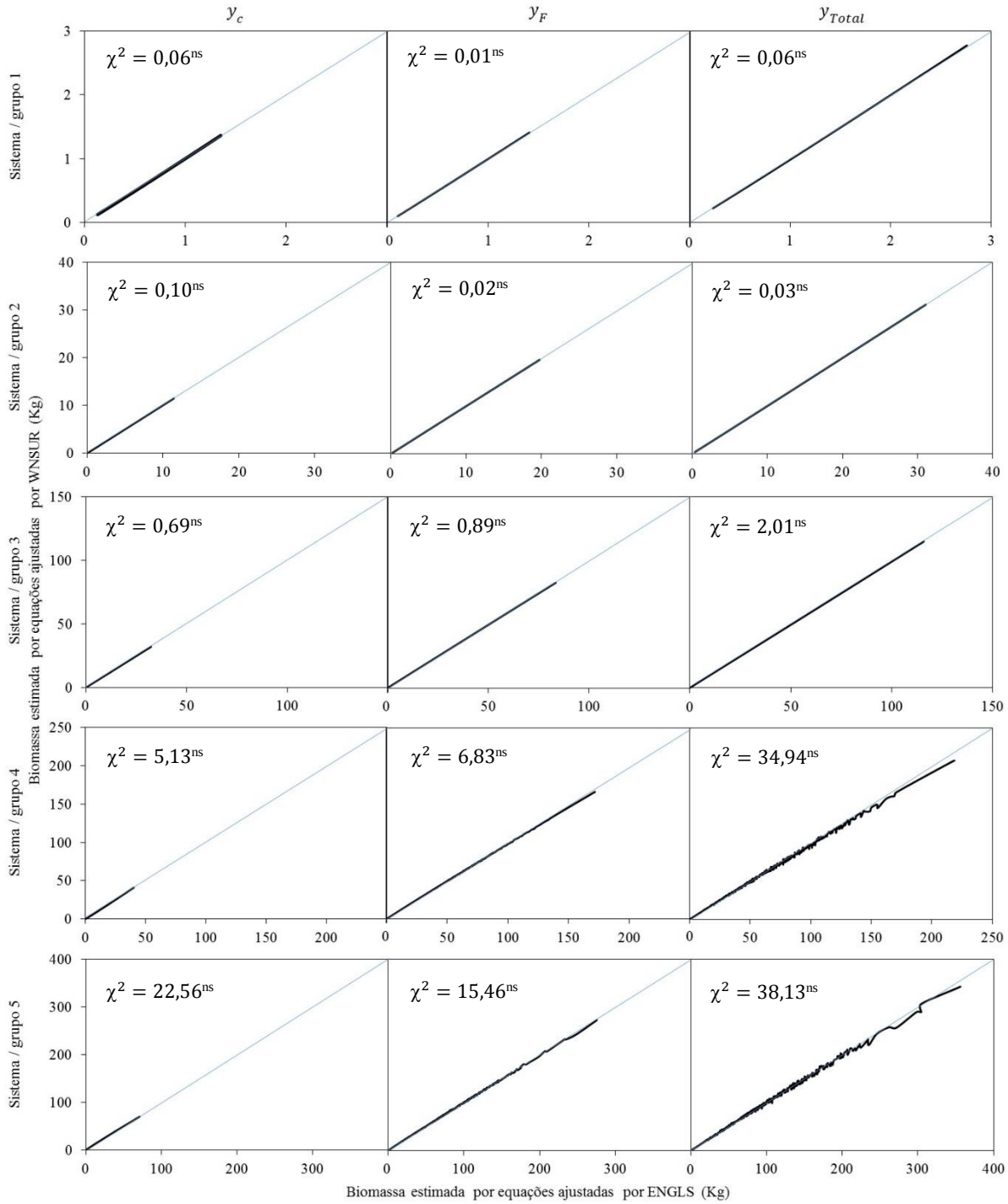


FIGURA 10 - RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL ESTIMADOS POR EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 (ENGLS) E 2 (WNSUR).

5.3.2 Consistência biológica das equações de biomassa

A condição de restrição da consistência biológica, ou seja, $\hat{y}_{Total} = \hat{y}_F + \hat{y}_C$, não foi observada apenas para as equações de biomassa dos componentes e biomassa total ajustadas por meio do procedimento 1, logicamente. Portanto, sendo $\hat{y}_F + \hat{y}_C - \hat{y}_{Total} \neq 0$, essas equações foram consideradas sem consistência biológica. A não aditividade dessas equações (NA) em nível de árvore está apresentada na Figura 11 em relação à variável d, em que foram observadas variações entre -19,47% a 9,19%.

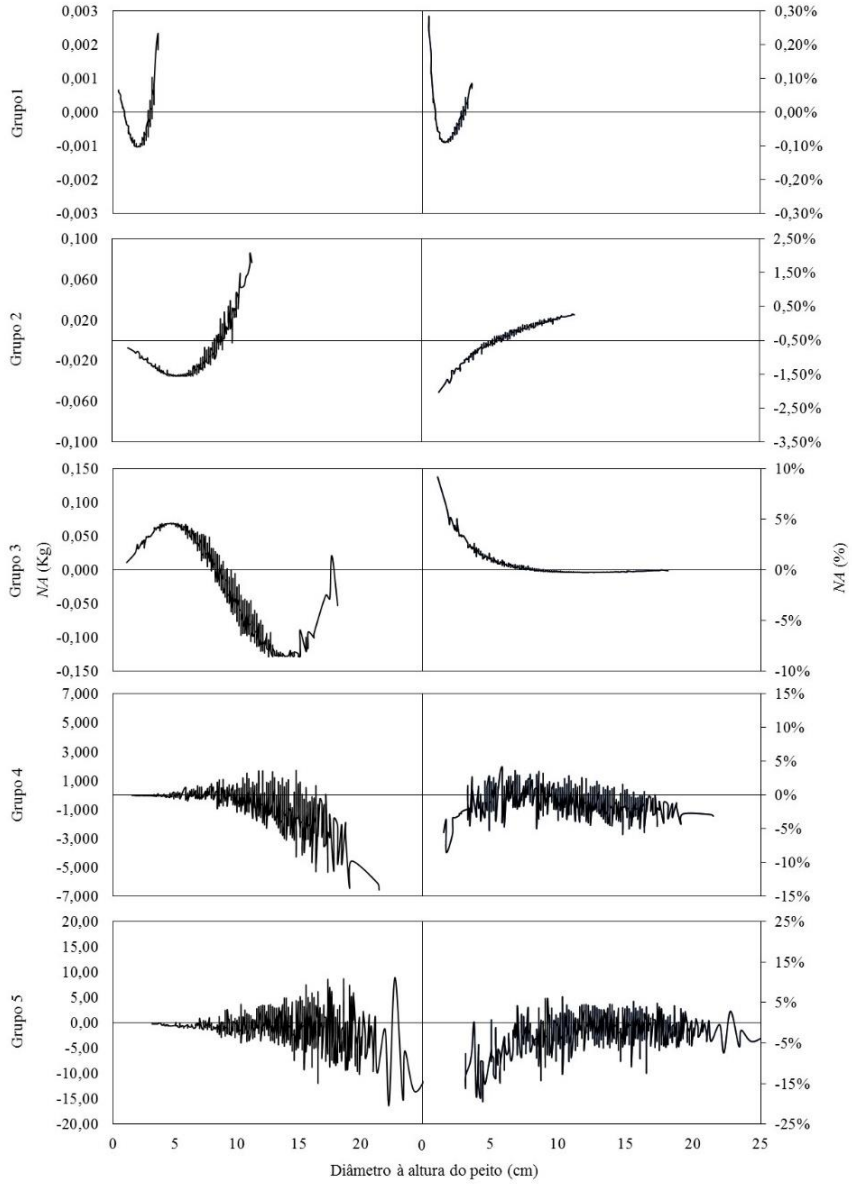


FIGURA 11 - NÃO ADITIVIDADE DAS ESTIMATIVAS (NA) DE BIOMASSA DE COMPONENTES COM A BIOMASSA TOTAL ORIUNDA DE EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1, EM NÍVEL DE ÁRVORE.

Em que: $NA_i = \hat{y}_{F_i} + \hat{y}_{C_i} - \hat{y}_{Total_i}$ em Kg, ou $NA_i = \frac{\left(\hat{y}_{F_i} + \hat{y}_{C_i} - \hat{y}_{Total_i}\right)}{\left(\hat{y}_{F_i} + \hat{y}_{C_i}\right)} 100$ em porcentagem, sendo i referente a i^{th} observação do grupo de equações.

A inconsistência biológica também foi observada em nível de parcela, em que a não aditividade das equações variou entre -4,09% a 2,22%. Do mesmo modo, para a unidade, com variações entre -0,97% e 0,05% (FIGURA 12).

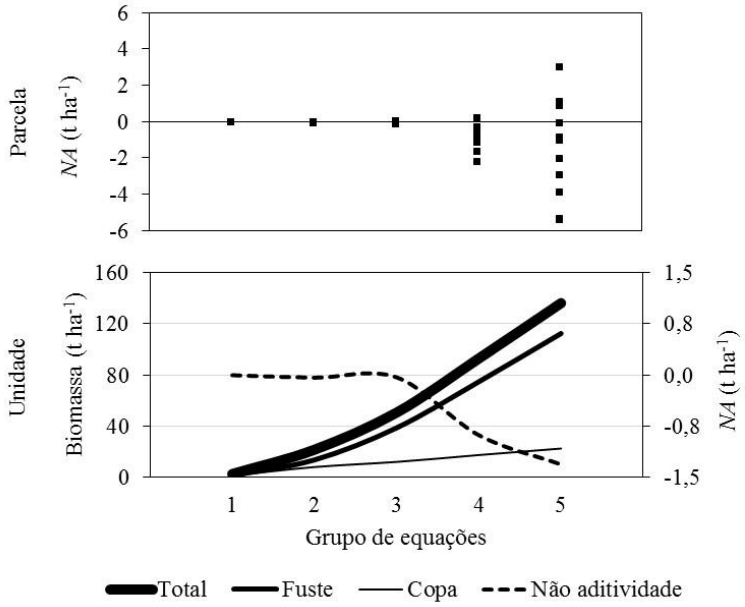


FIGURA 12 - NÃO ADITIVIDADE DAS ESTIMATIVAS (NA) DA BIOMASSA DOS COMPONENTES EM RELAÇÃO À BIOMASSA TOTAL ORIUNDA DE EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1, EM NÍVEL DE PARCELA E DA UNIDADE DE ÁREA HECTARE.
Em que: o cálculo para a parcela é dado por $NA_i = \hat{y}_{F_i} + \hat{y}_{C_i} - \hat{y}_{Total_i}$ em t ha^{-1}, sendo i referente à i^{th} parcela do grupo de equações, e para a unidade de área por $NA = \hat{y}_F + \hat{y}_C - \hat{y}_{Total}$, em t ha^{-1}.

Portanto, a segunda hipótese delineada neste trabalho - "dado os estimadores de sistemas de equações incluírem restrições para obtenção dos coeficientes nos seus ajustes, suas estimativas devem resultar em aditividade dos componentes, quando comparados com os estimadores obtidos em única equação, devendo, consequentemente, resultar em consistência biológica" - foi comprovada.

5.3.3 Eficiência dos estimadores das equações de biomassa

A precisão dos intervalos de confiança para os valores estimados de biomassa dos componentes e biomassa total, utilizando equações ajustadas por meio dos procedimentos 1 e 2, está apresentada na Figura 13. As precisões das estimativas utilizando as equações ajustadas por meio do procedimento 1 para o componente copa variaram entre 5,46% a 41,11%, para o componente fuste de 2,12% a 21,30% e para o total de 1,29% a 21,74%. Já para as equações ajustadas por meio do procedimento 2, as precisões para o componente copa variam entre 0,75% a 28,24%, para o componente fuste de 1,62% a 20,43% e para o total de 0,28% a 20,62%.

Os intervalos de confiança para os diversos grupos efetuados em relação a variável h e d^2h apresentam comportamentos similares, o que dispensa suas apresentações gráficas.

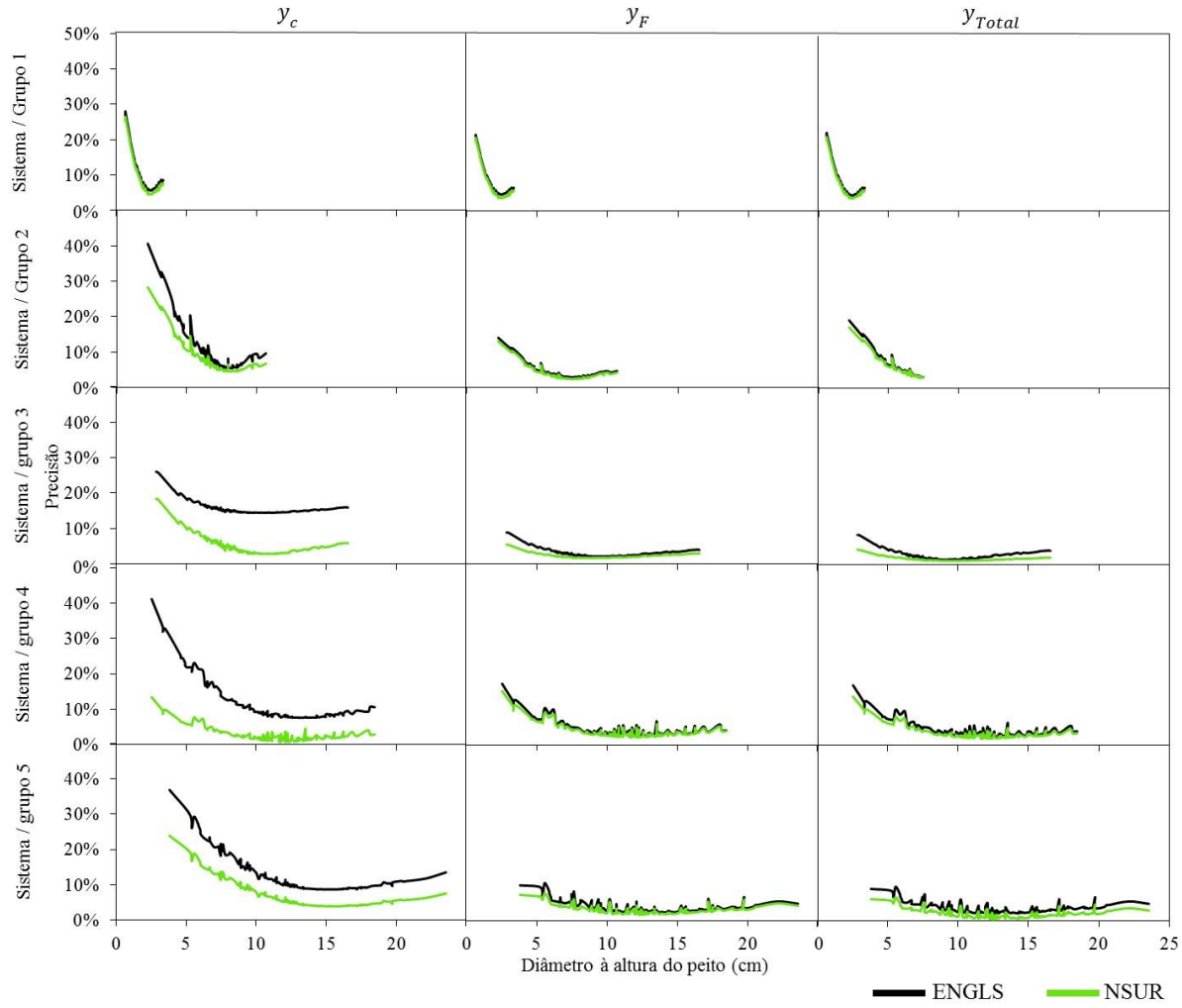


FIGURA 13 - PRECISÃO DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS VALORES ESTIMADOS DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL UTILIZANDO EQUAÇÕES AJUSTADAS POR MEIO DO PROCEDIMENTO 1 (ENGLS) E DO PROCEDIMENTO 2 (WNSUR).

As estimativas de biomassa dos componentes e da biomassa total usando-se as equações ajustadas por meio do procedimento 2 resultaram intervalos de confiança mais precisos, portanto, foram mais eficientes. As eficiências nos intervalos de confiança (EIC) variaram de 5,39% a 77,04% (FIGURA 14), dependendo do componente e do sistema de equações. Em média geral, EIC foram maiores para a biomassa do componente copa, seguida da biomassa total e do componente fuste, respectivamente de 51,64%, 27,79% e 15,98%.

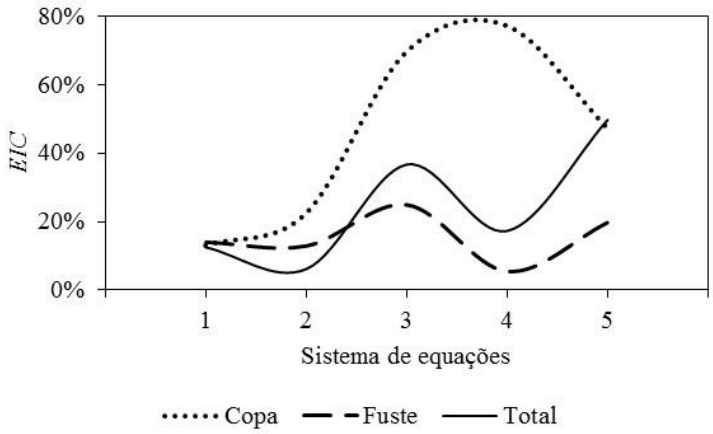


FIGURA 14 - EFICIÊNCIA NO INTERVALO DE CONFIANÇA (EIC) PARA AS ESTIMATIVAS DE BIOMASSA DOS COMPONENTES E BIOMASSA TOTAL UTILIZANDO EQUAÇÕES AJUSTADAS USANDO O PROCEDIMENTO 2.

Em que: $EIC_i = 1 - \frac{PIC_{WNSUR_i}}{PIC_{ENGLS_i}} 100$, em porcentagem, sendo PIC_{WNSUR_i} a média da precisão do intervalo de confiança para o i^{th} componente obtido por equações ajustadas por meio do procedimento 1 e PIC_{ENGLS_i} a média da precisão do intervalo de confiança para o i^{th} componente obtido por equações ajustadas por meio do procedimento 1.

Assim, a terceira hipótese delineada neste trabalho - "dado os estimadores de sistemas de equações incluírem as correlações contemporâneas dos componentes da biomassa nos seus ajustes, suas estimativas devem resultar em menor variância, quando comparados com os estimadores obtidos em única equação, devendo consequentemente resultar em maior eficiência" - foi comprovada.

6 DISCUSSÃO

6.1 EQUAÇÕES DE BIOMASSA ACIMA DO SOLO

6.1.1 Equações não lineares de biomassa

A biomassa dos componentes e biomassa total foi modelada por funções de biomassa de natureza não linear. O ajuste dessas funções requer métodos computacionais mais exigentes, embora sua implementação é facilitada pelo baixo custo operacional disponibilizado atualmente pelos computadores e também pelos *softwares* disponíveis. Portanto, o desenvolvimento de equações não lineares não é um fator limitante e traz determinados aspectos positivos que não são alcançados por meio de regressão linear, embora cuidados devem ser estabelecidos para assegurar funções apropriadas.

A abordagem por meio da linearização dos modelos é frequente nos trabalhos de biomassa, e na maioria das vezes, tem por objetivo estabilizar a variância residual, além da aplicação do método dos mínimos quadrados ordinários. Entretanto, o emprego das transformações, normalmente logarítmica, provocam um viés inerente à transformação utilizada nos dados em relação à escala aritmética original e sua correção é necessária quando é requerida a média das estimativas populacionais (SPRUGEL, 1983, SNOWDON, 1991). Vários métodos foram discutidos para corrigir o viés introduzido pela transformação logarítmica (FINNEY, 1941; MEYER, 1944; GOLDBERGER, 1968, BRADU e MUNDLAK, 1970, BASKERVILLE, 1972; BEAUCHAMP e OLSON, 1973, LEE, 1982, MILLER, 1984), embora, ainda, pode ser o caso em que as correções tendem a superestimar o verdadeiro viés, conforme pode ser observado nos trabalhos realizados por Madgwick e Satoo (1975) e Miller (1984).

Cienciala et al. (2006) compararam os resultados de abordagens de modelagem de biomassa de pinus por meio de regressão não linear e regressão com o modelo linearizado (com transformação dos dados para a escala logarítmica). Os autores evidenciaram que a média de biomassa estimada a partir da regressão não linear foi melhor que os resultados a partir da abordagem da regressão linearizada. Outras estatísticas da regressão- erro padrão da estimativa, quadrado médio do resíduo e coeficiente de determinação – produziram resultados um pouco melhores para as equações linearizadas com dois parâmetros, enquanto que a abordagem não linear resultou em melhores estatísticas para as equações mais complexas, que envolveram

quatro e cinco parâmetros. Aliás, as maiores diferenças nessas duas abordagens foram evidenciadas nos modelos com cinco parâmetros. O procedimento de regressão não linear resultou numa correspondência mais próxima, em comparação com o processo envolvendo a linearização e correção do erro.

Assim, neste trabalho a modelagem da biomassa foi realizada por meio de modelos em sua forma original (não linear), pelos seguintes motivos:

- As relações entre as variáveis dependentes e independentes são não lineares;

- A linearização dos modelos provoca um viés inerente à transformação utilizada nos dados em relação à escala aritmética original e sua correção é necessária, entrando a do viés nem sempre é assegurada;

- A aplicação dos modelos não lineares permite trabalhar com os valores originais e não implica na transformação dos dados, como ocorre nos casos de linearização dos modelos;

- Modelos não lineares demonstram-se superiores a modelos lineares.

Embora sejam evidenciados determinados aspectos positivos da abordagem não linear, ela também viabiliza alguns desafios em relação à linear. Muitas vezes, é necessário trabalhar sobre os critérios de convergência, para evitar a parada prematura das iterações e uma subsequente perda de precisão nos coeficientes. Isso exige maior experiência por parte do modelador quando comparada com a aplicação dos modelos lineares. Nesse sentido, discussões interessantes sobre ajuste de modelos não lineares estão apresentadas em Gallant (1975a, b, c), Milliken e Debruin (1978), Schnute (1982), Amemiya (1983), Ratkowsky (1983), Manski (1984), Meredith (1985), Gallant (1987), Bates e Watts (1988), Seber e Wild (1989), Ross (1990) e Mak (1983).

Na abordagem não linear, o primeiro desafio refere-se às estimativas dos parâmetros iniciais que devem ser especificados, podendo ser utilizada a experiência para defini-los ou, quando for possível, por meio de um vetor consistente de β. Nessa condição, as funções devem ser linearizadas e ajustadas por OLS para a obtenção dos valores iniciais, conforme realizado neste trabalho. Outras formas para estimar os valores inicias são descritas em Neter et al. (1985). O segundo desafio refere-se à escolha do algoritmo a ser empregado no processo de iteração, tais como: Gauss-Newton e de Marquardt. Parresol (2001) aplicou o algoritmo de Gauss-Newton na modelagem de biomassa de *Pinus elliottii* Engelm var. *elliottii*, já no presente trabalho foi aplicado o algoritmo e Marquardt, uma vez que o processo de convergência utilizando o algoritmo de Gauss-Newton resultou em falha, mesmo quando especificados alguns parâmetros referentes ao processo de convergência.

As falhas nos processos de convergência revelam outros desafios na abordagem não linear. De acordo com Parresol (2001) a falha na convergência pode ocorrer por várias razões, estando entre os principais motivos: matriz de derivadas parciais e matriz de direção podem ser singulares, indicando que o modelo pode ser superparametrizado; é possível que os parâmetros entrem em um espaço em que os argumentos logarítmicos e de raiz quadrada não sejam válidos, resultando em excessos de cálculos. Logicamente, esses problemas podem ser contornados pela escolha criteriosa dos modelos e o estabelecimento de diferentes vetores iniciais de β.

Ainda assim, outras dificuldades podem remanescer, ou seja, o método da iteração pode levar a passos que não melhoram as estimativas. Nesse caso, conforme destaca Parresol (2001), o comprimento do passo, l_n, deve ser controlado, de modo a modificar os valores iniciais, ou optar por outro método de iteração. O resultado do gradiente também deve ser levado em conta, pois pode causar pequenas mudanças nos valores da soma de quadrados dos resíduos e/ou pequenas mudanças nas estimativas dos parâmetros com sucessivas iterações, mas que ainda estão longe de ser a solução. Portanto, ao se deparar com falhas no processo de convergência, o modelador deve prestar atenção para esses detalhes discutidos.

6.1.2 Modelagem da estrutura da variância

A hipótese de homogeneidade dos resíduos foi rejeitada para as equações ajustadas a partir do segundo grupo ou sistema de equações. A presença de heteroscedasticidade dos resíduos é comum na modelagem da biomassa arbórea, tendo sido reportada por vários pesquisadores: Parresol (1999), Parresol (2001), Saint-André et al (2005), Basuki et al. (2009), Bi et al. (2010), Zeng et al. (2011), Blujdea et al. (2012), Zang e Tang (2012), Paré et al. (2013), Sileshi (2014), Wayson et al. (2015), Sanquetta et al. (2015) e Zhao et al. (2015). Cunia e Briggs (1984) destacam que é natural esperar que a variabilidade da biomassa das árvores de diâmetros menores seja menor do que a variabilidade da biomassa das árvores de diâmetros maiores, causando a variância inconstante nos distúrbios das equações de biomassa.

Isso, simplesmente, não deve ser ignorado ao ajustar equações por meio da análise de regressão. Conforme demonstra Furnival (1961), os resíduos devem ser distribuídos normalmente, independentemente e com variância constante. A variância constante é primordial na análise de regressão, pois afeta diretamente a validação de várias hipóteses que são testadas, conforme é demonstrado em Maddala (2001) e Greene (2008). As principais consequências da heterocedasticidade nos estimadores de mínimos quadrados são que os estimadores ainda não são enviesados, mas são ineficientes, isso é, os estimadores deixam de

ter a variância mínima, ou seja, deixam de ser os melhores estimadores lineares não tendenciosos (BLUE). Isso têm grande importância na modelagem da biomassa arbórea, uma vez que o erro da equação, representado pela variância, deve ser propagado juntamente com os erros das parcelas do inventário florestal, conforme apresentado em Cunia (1987). Portanto, propagar o erro das equações que não possuem variância mínima, significa superestimar os erros de amostragem de biomassa nos inventários florestais. Outra consequência da heteroscedasticidade refere-se aos testes *t* e F sobre as equações, que quando realizados sobre essa condição podem ser enganosos.

Nas condições de heteroscedasticidade dos resíduos podem ser aplicadas duas abordagens para o estabelecimento de sua variância constante. A primeira delas refere-se à aplicação da transformação logarítmica e a segunda pela ponderação da regressão, e são amplamente discutidas em Carrol e Ruppert (1988). Na ponderação da regressão, ao invés de utilizar simples pesos, tais como: d^{-1}, h^{-1} e $(d^2h)^{-1}$, a abordagem por meio da modelagem da estrutura da variância é mais apropriada, conforme evidenciado em diversos trabalhos, tais como: Gregoire e Walters (1988), Paressol (1993, 1999, 2001), Willians e Gregoire (1993) e Schreuder e Williams (1998).

A transformação logarítmica para correção da heteroscedasticidade é mais fácil e rápida, pois não necessita da modelagem da estrutura da variância, por outro lado, retrocede nos problemas já evidenciados que a transformação dos dados ocasiona. Frente à essas razões, é lógico optar por modelar a estrutura da variância ao invés de aplicar a transformação logarítmica ou até mesmo outra. Parresol (2001) também recomendou modelar a estrutura da variância do erro ao invés de utilizar a transformação logarítmica para correção da heteroscedasticidade dos dados de biomassa. Em sua pesquisa, foi evidenciado que as equações transformadas ou ponderadas para a biomassa do fuste e da casca resultaram em valores similares de erro padrão dos coeficientes e nas estatísticas utilizadas para a avaliação da qualidade do ajuste. Entretanto, para a biomassa da copa e biomassa total, as equações ponderadas resultaram em melhores estatísticas em termos do erro padrão dos coeficientes e dos intervalos de predição das estimativas. As equações transformadas resultaram em intervalos de predição um pouco mais elásticos, mas isso teria um impacto maior ao considerar o efeito cumulativo ao aplicar as equações para centenas ou milhares de árvores.

Por meio da estrutura da variância foram estabelecidos pesos e, as equações foram reajustadas. Isso permitiu estabilizar a variância, portanto as funções de peso propiciaram o alcance da homoscedasticidade dos resíduos, condição indispensável para a aplicação, especialmente, de verdadeiros intervalos de confiança e validação dos testes de hipóteses. Um

efeito rápido da obtenção da variância constante se detecta nos erros padrões dos coeficientes (embora os resultados não foram apresentados), os quais diminuíram consideravelmente em relação ao seu valor, o que também foi observado por Parresol (1999, 2001).

A correção da heteroscedasticidade dos resíduos pode ser aprimorada por meio de um processo iterativo, apesar de que, muitas vezes, a melhoria da estimativa da variância mínima não seja observada. Nesse processo, as equações são ajustadas inicialmente com $\Psi(\hat{\theta}) = 1$, ou seja, sem pesos. Após os resíduos serem calculados, os pesos serão estabelecidos. As equações serão novamente ajustadas, agora com ponderação, os resíduos serão novamente calculados, serão estabelecidos novos pesos e as equações serão novamente ajustadas. Isso será repetido para C ciclos.

Neste trabalho, não foi observada uma melhoria das estatísticas, em especial do erro padrão dos coeficientes, ao empregar $C = 2$ ou $C = 3$, resultados também observados por Parresol (2001). Portanto, os pesos apresentados são referentes à $C = 1$. Uma discussão oportuna sobre o número de ciclos C é apresentada em Goldberger (1964) e Matloff et al. (1984), em que foram realizadas simulações e demonstrado que a primeira iteração geralmente é melhor. Carroll e Ruppert (1988) também realizaram simulações e recomendaram $C = 2$.

6.1.3 Equações de biomassa individual seca acima do solo para a espécie acácia negra

Os coeficientes de variação para as equações do componente copa foram maiores quando comparados com as equações dos componentes fuste e total, pois, naturalmente, a biomassa da copa (formada pela composição da biomassa da folhagem e dos galhos) apresenta mais variação em relação às variáveis independentes, devido à várias origens. Poorter et al. (2012) apresentaram uma discussão muito interessante sobre a alocação de biomassa de folhas, caules e raízes. Os autores discutem sobre o padrão de variação desses componentes e como ele é influenciado pelo ambiente de crescimento, tamanho da planta, história evolutiva e da concorrência. Como é de conhecimento, os padrões evolutivos das plantas seguem uma dinâmica influenciada pelas condições ambientais e, como, consequência isso reflete nas proporções entre os componentes das árvores, bem como na sua alometria, ou seja, o componente copa não se mantém com a mesma proporção em relação ao fuste no que concerne os estimadores de biomassa.

Os coeficientes de determinação ajustado e de variação resultantes das equações ajustadas por meio dos procedimentos 1 e 2 estão dentro do limite do que foi obtido em outros trabalhos conduzidos para a espécie acácia negra. Coeficientes de determinação maiores que

80% para as equações de biomassa de acácia negra têm sido frequentemente relatados na literatura, com abordagens realizadas por diversos pesquisadores, tais como: Dudley e Fownes (1992), Carbonera Pereira et al. (1997), Caldeira (1998), Barichello et al. (2005), Saidelles (2005), Mochiutti (2007), Caldeira et al. (2011) e Sanquetta et al. (2014).

Os valores dos coeficientes estimados de equações de biomassa de componentes, obtidos por meio dos procedimentos 1 e 2, induziram à estreitas relações com os grupos ou sistemas de equações, que foram determinados em função da idade do povoamento (Figura 6). Tal concepção também foi evidenciada por Williams et al. (2003) ao perceberem que a alometria dos componentes não era a mesma para povoamentos da mesma espécie com diferentes idades. Afirmaram, assim, que a idade do povoamento influencia as relações entre a biomassa e as variáveis que expressam as dimensões da árvore, tais como d e h, assim como discutido por Niklas (1995).

Saint-André et al. (2005) também observaram que os parâmetros estimados dos modelos de biomassa variaram claramente com a idade do povoamento. Os autores destacam que esse não é um resultado apenas de uma mudança da maturidade das árvores, mas sim um efeito combinado da idade da árvore e da sua posição sociológica. Os autores argumentam que duas árvores com as mesmas dimensões em relação a d e h, mas com diferentes idades, apresentam diferenças quanto à sua ocupação na posição sociológica. Nesse caso, a árvore mais jovem pode ser dominante, enquanto a árvore mais velha provavelmente é suprimida. Assim, ambos os efeitos: idade e posição sociológica causam um aumento da biomassa do fuste para a árvore mais antiga, porque a densidade da madeira aumenta conforme a idade do povoamento e o fator de forma, razão entre o volume do fuste e d^2h, que é maior para árvores dominadas. Por outro lado, ambos os efeitos tendem a diminuir a biomassa de folhas e galhos vivos para a árvore velha e suprimida, porque as folhas são alocadas nas partes extremas (periferia) da copa. Ademais, porque a altura da copa é fortemente reduzida em relação à sua posição sociológica.

Acrescenta-se, ainda, o efeito da alocação dos componentes da biomassa, que varia com a idade do povoamento, o que também é uma característica comum. Neste estudo, a proporção de biomassa do fuste aumentou a partir da floresta muito jovem para a madura, enquanto a proporção de biomassa da copa diminuiu. Portanto, o desenvolvimento das equações de biomassa por faixa de idade pode trazer benefícios aos gestores florestais ao avaliar os estoques de biomassa por componente. Outra possibilidade, frente à consideração da correlação temporal evidenciada sobre as equações, é a de modelá-las para prover ganho de eficiência nas estimativas, conforme é discutido em Gregorie et al. (1995).

Os coeficientes do intercepto e os coeficientes exponenciais das equações foram todos significativos. Valores do intercepto foram maiores para os grupos ou sistemas de equações ajustados para os povoamentos mais jovens, enquanto que para os povoamentos mais velhos os coeficientes foram menores. Já para os coeficientes angulares essa relação foi inversa (FIGURA 6). Essa relação de proporção inversa (FIGURA 6) entre o intercepto com os coeficientes angulares das equações também foi observada por Fehrmann e Kleinn (2006), Zianis (2008), Zapata-Cuartas et al. (2012) e Sileshi (2014), sendo amplamente discutida por Pilli et al. (2006).

A dependência dos coeficientes das equações de biomassa em relação às idades dos povoamentos é uma questão chave para discutir a generalização das equações de biomassa de acácia negra. A generalização das equações - quando a temática é relativa a inventários regionais, estaduais e nacionais – ganha muita importância e tem como principal objetivo compor equações para várias espécies, sítios e idades. A generalização facilita as condições para aplicações das equações, tendo em vista as menores restrições, especialmente devido à questão regionalista das amostragens e também em relação às idades das árvores. Nesse cenário, são claras as possibilidades de generalizar as equações de biomassa, no presente caso, de modo a excluir a estratificação por idade. Embora essa temática seja importante, não foi abordada neste trabalho, optando-se por definir equações em relação às idades dos povoamentos florestais.

As equações apresentadas destinam-se à aplicação em inventários de biomassa para os povoamentos de acácia negra, tendo sido oriundas dos principais locais de cultivo no estado do Rio Grande do Sul e cobrem uma ampla gama de idades de povoamentos. Foram incluídas informações adicionais a respeito das matriz de variância-covariância dos coeficientes e dos resíduos. Assim, essas equações são úteis para inventários de biomassa dos componentes e biomassa total, essencialmente as equações ajustadas por sistemas de equações via o procedimento 2, pelos motivos que serão expostos na seção 5.2.

Embora não tenha sido abordado neste trabalho, pois o objetivo foi enfatizar os aspectos da consistência biológica e eficiência dos estimadores de equações de componentes, as equações de biomassa e os resultados de predição de biomassa podem ser melhorados por meio do emprego de outras técnicas e a própria adaptação dos modelos alométricos. Por exemplo, a aproximação de funções por meio das técnicas que englobam a inteligência artificial (SANQUETTA et al. 2015b), adição de outras variáveis preditoras no modelo, tais como: idade do povoamento, índice de sítio, densidade e a aplicação de outras técnicas para o ajuste dos modelos.

6.2 DESEMPENHO, CONSISTÊNCIA BIOLÓGICA E EFICIÊNCIA DOS ESTIMADORES DAS EQUAÇÕES DE BIOMASSA

Neste trabalho, foram apresentados sistemas e grupos de equações baseadas nas variáveis: d, h e d^2h. As equações ajustadas foram avaliadas quanto ao seu desempenho, consistência biológica e eficiência dos estimadores, que são discutidos a seguir.

6.2.1 Desempenho dos estimadores das equações de biomassa

As estatísticas para a avaliação da qualidade do ajuste, $\bar{R}^2$ e CV, foram similares em relação ao método de ajuste das equações. Algumas estatísticas produzidas pelas equações ajustadas por meio do procedimento 2 conduziram a uma pequena melhora e outras não. Isso é um efeito direto da flexibilidade do estimador para atender à condição de aditividade dos componentes, tendo sido também observado por Reed e Green (1985). Mesmo que isso ocorra não prejudica as predições, uma vez que as estimativas de biomassa dos componentes e da biomassa total obtidas pelos sistemas ou grupos de equações não diferiram entre si, conforme provado por meio do teste de Qui-quadrado (FIGURA 10).

Os sistemas e grupos de equações 1, 2 e 3 foram definidos pelos mesmos regressores para as funções dos componentes e isso resultou em valores similares para os coeficientes ajustados. Isso é um caso especial, em que as estimativas dos coeficientes por meio do sistema de equações ou individualmente são equivalentes. Greene (2008) demonstra essa condição em uma abordagem comparativa do estimador *generalized least squares* (equivalente às regressões aparentemente não relacionadas) com *ordinary least squares* (equivalente às equações ajustadas independentemente). Nessa condição, assumindo que $X_i = X_j = X$, então, $X_i'X_J = X'X$ para todo i e j em [182].

$$\hat{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}\,X'\Omega^{-1}y = [X'(\sum^{-1} \otimes I)X]^{-1}\,X'(\sum^{-1} \otimes I)y \qquad (182)$$

A inversa da matriz do lado direito torna-se, por consequência, $(\sum^{-1} \otimes X'X)^{-1}$. Valendo-se das propriedades do produto de Kronecker, em que $(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$, sendo A de dimensão $K \cdot L$ e B de $m \cdot n$, $(\sum^{-1} \otimes X'X)^{-1}$ equivale a $[\sum \otimes (X'X)^{-1}]$. Ainda, no lado direito da expressão em [182], cada termo $X_i'y_j$ equivale a $X'y_i$, que por sua vez é equivalente a $X'Xb_j$. Com esses resultados, após a eliminação dos valores comuns de $X'X$, a estimativa de β é definida em [183].

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X'X)^{-1} & \sigma_{12}(X'X)^{-1} & \cdots & \sigma_{1M}(X'X)^{-1} \\ \sigma_{21}(X'X)^{-1} & \sigma_{22}(X'X)^{-1} & \cdots & \sigma_{2M}(X'X)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}(X'X)^{-1} & \sigma_{M2}(X'X)^{-1} & \cdots & \sigma_{MM}(X'X)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X'X)\sum_{l=1}^{M}\sigma_{1l}b_l \\ (X'X)\sum_{l=1}^{M}\sigma_{2l}b_l \\ \vdots \\ (X'X)\sum_{l=1}^{M}\sigma_{Ml}b_l \end{bmatrix} \quad (183)$$

Tomando-se o primeiro subvetor para estimativa de β, após a multiplicação e cancelamento da matriz momento, $\hat{\beta}_1$ é definido em [184].

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{j=1}^{M}\sigma_{1j}\sum_{l=1}^{M}\sigma_{jl}b_l = b_1\left(\sum_{j=1}^{M}\sigma_{1j}\sigma_{j1}\right) + b_2\left(\sum_{j=1}^{M}\sigma_{1j}\sigma_{j2}\right) + \cdots + b_M\left(\sum_{j=1}^{M}\sigma_{1j}\sigma_{jM}\right) \quad (184)$$

Os termos entre parênteses são elementos da primeira linha de $\sum\sum^{-1} = I$, assim, o resultado final corresponde a $\hat{\beta}_1 = b_1$, ou seja, $\hat{\beta}_i = b_i$, o que determinaria que o estimador mais eficiente seria o de única equação. Entretanto, em alguns casos especiais, como é o caso da modelagem dos componentes da biomassa, esses resultados gerais são comprometidos, uma vez que existem restrições sobre β que pode ser dentro das equações ou entre as equações. Tal orientação indica que dada a condição das equações serem compostas pelos mesmos regressores, mas devido as restrições que são impostas sobre os coeficientes das equações dos componentes para que sejam aditivas, os coeficientes tenderão para similaridade, mesmo que o ganho em eficiência pelo sistema de equações ainda prevalecerá (conforme abordagem realizada a seguir).

Por meio da análise do desempenho dos estimadores, especialmente no que se refere às estimativas de biomassa e das estatísticas de ajuste das equações, pode-se concluir a respeito da indiferença do emprego de equações ajustadas por meio dos procedimentos 1 e 2. Por outro lado, essa conclusão diverge quando avaliada a consistência biológica e a eficiência dos estimadores.

6.2.2 Consistência biológica das equações de biomassa

Considerando que a consistência estatística dos estimadores se torna maior à medida que se aumenta a intensidade amostral, tal realidade também pode ser aprimorada valendo-se de técnicas estatísticas e computacionais para a obtenção das relações alométricas. Em outras palavras, essa consistência torna-se mais aprimorada quanto mais próximos estão os estimadores alométricos dos valores reais da população. Se a modelagem estatística consegue

aproximar os estimadores dos valores reais da população (o que é propiciado pelos estimadores de mínimos quadrados), mas que também asseguram um sistema aditivo das partes do organismo com o seu todo, são, consequentemente, biologicamente consistentes, daí a nominação proposta de consistência biológica.

A condição da consistência biológica, dada pela restrição que os resultados das biomassas dos componentes devem se adicionar para se igualar ao resultado da biomassa total, não foi atendida para as equações ajustadas por meio do procedimento 1. A não aditividade (NA) foi observada em nível de árvore, parcela, assumindo valores positivos e negativos, e também para a unidade. Após várias abordagens realizadas nos últimos 50 anos, que incluem os trabalhos desenvolvidos por Kozak (1970) até Sanquetta et al. (2015), realça-se a importância de estabelecer equações aditivas de biomassa. A falta de aditividade é uma propriedade indesejável, pois propaga a inconsistência biológica desde o nível de árvore até nas estimativas para o povoamento como um todo, afetando as estimativas nos inventários florestais de biomassa.

A inconsistência biológica, em termos percentuais, foi maior em nível de árvore. Nessa condição, os valores de NA positivos e negativos não se anulam, resultando em inconsistência relativas maiores do que quando comparado em nível de parcela ou em nível da unidade. Não foram observadas tendências definidas para a falta de aditividade em relação às variáveis independentes, apresentada na Figura 11 somente em ralação à variável d.

A inconsistência biológica na forma absoluta ou relativa, em nível de árvore, foi maior nos grupos de equações 4 e 5, ou seja, nos povoamentos mais velhos, estando relacionado com a composição dos modelos para a biomassa dos componentes e biomassa total. Os modelos propostos para a biomassa dos componentes e biomassa total para os grupos de equações 1, 2 e 3 foram os mesmos, já para os grupos de equações 4 e 5 os modelos propostos para a biomassa da copa e do fuste foram diferentes. A falta de aditividade só não foi ainda maior porque o modelo usado para a biomassa total foi o mesmo que para a biomassa do fuste.

A não aditividade foi menor em termos percentuais ao nível de parcela. Nessa condição, tem-se que a biomassa de um componente ou biomassa total ($\hat{y}_i$) para a h^{th} parcela corresponde a soma da biomassa estimada para T^{th} árvores. Assim, ao realizar a soma das T árvores, os valores positivos e negativos que pode assumir NA em nível de árvore se anulam. Essa convergência não tende para zero devido à combinação da distribuição probabilística das variáveis independentes na parcela com a aleatoriedade da NA em nível de árvore.

Do mesmo modo, isso também ocorre quando tomada a média das parcelas para compor o estimador de biomassa para a unidade. Para essa condição, a inconsistência biológica para os 5 grupos de equações variou entre -0,05% e -0,97%, o que equivale -0,001 $t\ ha^{-1}$ a -1,31$t\ ha^{-1}$. Embora a inconsistência biológica diminui à medida que os estimadores de biomassa são calculados por unidade, ainda remanesce e torna-se considerável quando o estimador é extrapolado para toda a área do povoamento. Além do mais, é mais grave quando os inventários de biomassa são realizados para grandes áreas, por exemplo, nos inventários de biomassa em nível regional, estadual e nacional.

As equações ajustadas independentemente geram resultados inconsistentes biologicamente, o que implica que os modelos de componentes de biomassa e para a biomassa total devam ser estimados por meio de sistemas de equações. A maioria das equações desenvolvidas para a espécie acácia negra, também para outras espécies nas florestas brasileiras, foram ajustadas independentemente. Portanto, essas equações não apresentam consistência biológica e deve-se tomar determinadas precauções antes de simplesmente utilizá-las.

Uma alternativa para aproveitar as centenas de equações de biomassa que foram desenvolvidas sem considerar o princípio da aditividade é definir a biomassa total como a soma das massas dos componentes. Nesse caso, como também é de interesse conhecer a variância da biomassa total $\left(\sigma^2_{\hat{y}_{Total}}\right)$ para estabelecer intervalos de confiança, ela pode ser obtida em função das variâncias dos componentes e das covariâncias das estimativas. Embora, recai-se em valores de variância que tendem ser maiores, pois são dependentes das variâncias de cada componente $\left(\sigma^2_{\hat{y}_i}\right)$ e das covariâncias entre as estimativas $\left(cov\left(\hat{y}_i, \hat{y}_j\right)\right)$, conforme definido em [185]. Essa abordagem é apresentada em Parresol (1999; 2001) e Sanquetta et al. (2015a), e recomenda-se que seja aplicada para as equações de biomassa que não são aditivas.

$$\sigma^2_{\hat{y}_{Total}} = \sum_{i=1}^{k} \sigma^2_{\hat{y}_i} + 2 \sum \sum cov\left(\hat{y}_i, \hat{y}_j\right) \tag{185}$$

6.2.3 Eficiência dos estimadores das equações de biomassa

Hipoteticamente tendo sido resolvida a inconsistência biológica das equações independentemente estimadas (tomando-se a recomendação já referenciada), e sabendo-se da ligeira diferença no desempenho entre os estimadores independentes e dos sistemas de equações para os componentes, poder-se-ia concluir mais uma vez sobre a não diferença das equações ajustadas logicamente por meio dos procedimentos 1 e 2. Entretanto, em uma terceira análise,

que considera a eficiência dos estimadores, ou seja, por aquele que resulta na variância mínima, as equações ajustadas por meio do procedimento 2 são mais eficientes. Essa superioridade, tanto para a biomassa dos componentes como para biomassa total, é incontestável, uma vez que produzirá estimativas com variâncias menores, ou seja, com intervalos de confiança mais estreitos, por considerar a correlação que existe entre os componentes da árvore. Conforme destacam Zellner (1962) e Zellner e Huang (1961), o ganho em eficiência ocorre quando os termos dos distúrbios das diferentes equações estão correlacionados. Portanto, é provável que isso sempre ocorrerá em se tratando da biomassa das árvores.

Para aos sistemas de equações ajustados via o procedimento 2 foram apresentadas as matrizes de correlação contemporâneas. Por meio delas foi possível demonstrar as correlações que ocorrem entre os componentes medidos na mesma árvore, ou seja, a dependência existente entre os componentes da biomassa. Essas correlações são as que determinarão os ganhos em eficiência devido à aplicação das regressões aparentemente não relacionadas.

Chiyenda e Kozak (1984) enfatizam não realista considerar que os componentes da árvore sejam independentes, ou que os resíduos $\varepsilon_i = 1, \ldots, k$ dos componentes não sejam correlacionados, uma vez que a mesma árvore fornece valores para mais de um componente da biomassa. Ao considerar essas correlações, as equações ajustadas por meio do procedimento 2 propiciarão estimativas com menor variância, ou seja, a resultante que determina a maior eficiência do estimador. Assim, se uma determinada estimativa de biomassa resulta em menor variância, consequentemente seu intervalo de confiança também é menor e, logo, a estimativa é mais precisa. Adicionalmente, a existência das correlações contemporâneas possibilita obter os melhores estimadores não enviesados para as equações dos componentes e para a equação do total. Portanto, torna-se plausível concluir que esse estimador deve ser utilizado para estabelecer equações de biomassa dos componentes e total.

As estimativas de biomassa dos componentes e da biomassa total resultantes de equações ajustadas por meio do procedimento 2 viabilizaram intervalos de confiança menores em relação às equações ajustadas por meio do procedimento 1, que foi comprovado por meio da análise da precisão dos intervalos de confiança. Isso demonstra que a estratégia mais eficiente para ajustar equações de biomassa é por meio dos sistemas de equações aparentemente não relacionados. Essas percepções também são conclusivas nos trabalhos conduzidos por Parresol (1999; 2001), Sanquetta et al. (2015a) e Zhao et al. (2015).

Os valores dos coeficientes que expressam os interceptos das equações $\left(\hat{\beta}_1 \text{e } \hat{\beta}_{i1}\right)$ induziram à estreitas relações com o método de ajuste, principalmente no que se refere aos erros

padrões dos coeficientes, uma vez que as equações ajustadas por meio do procedimento 2 resultaram em erros padrões menores quando comparado aos obtidos pelas equações ajustadas por meio do procedimento 1. Isso é um efeito direto da consideração das correlações contemporâneas no procedimento 2, o que foi claramente evidenciado por Parresol (1999; 2001).

A eficiência proporcionada pelo procedimento 2 se alterou nas florestas, denominadas de muito jovem até madura. Isso é uma consequência do crescimento biológico das plantas, uma vez que a alocação dos componentes da biomassa em função de sua idade é alterada, e, portanto, determina diferentes correlações contemporâneas e, consequentemente, diferentes precisões nas estimativas. Nesse sentido, um aspecto que denota especial atenção é aquele concernente ao componente copa.

Por meio das matrizes de correlação contemporânea é observado que as correlações da copa com a biomassa do fuste e total, estimadas em uma mesma árvore, diminuem a partir da floresta muito jovem para a madura. O contrário foi observado para o fuste em relação à biomassa total, refletindo, assim, o efeito da alocação dos componentes da biomassa ao longo dos estágios de crescimento da floresta. Embora a correlação do componente copa com os demais componentes diminua ao longo dos anos, ela ainda deve ser considerada, pois será um elemento importante para que as estimativas desse componente sejam mais precisas. Pela sua natureza, a copa é um componente difícil de ser modelado, então, utilizar um estimador que resulte em estimativas mais precisas é fundamental, especialmente porque esse componente ganha importância nas florestas maduras, uma vez que é matéria prima para produção de energia. Tais resultados reafirmam a importância da aplicação do procedimento 2.

6.3 IMPORTÂNCIA DE EQUAÇÕES ADITIVAS E DE MENOR VARIÂNCIA

Em concordância com a análise do desempenho das equações, da consistência biológica e da eficiência estatística, indubitavelmente conclui-se que as equações ajustadas por meio do procedimento 2 são as que devem ser empregadas, pois propiciam estimativas acuradas para a biomassa dos componentes, para a biomassa total e para a biomassa da copa, com a principal característica de elas serem obtidas com menor variância.

O emprego do procedimento 2 resulta em equações estatisticamente correlacionadas, definitivamente que se relacionam por meio das perturbações contemporâneas das equações – o que origina a nomenclatura: equações aparentemente não relacionadas. A inclusão das

correlações contemporâneas entre as biomassas dos componentes e biomassa total, no ajuste dos sistemas de equações por meio desse procedimento, resultaram em intervalos de confiança mais precisos, evidenciando, assim, uma de suas mais importantes propriedades, a eficiência. As equações ajustadas por meio do procedimento 1 não levam em conta as correlações contemporâneas, o que prejudica a eficiência desse estimador.

Quanto é essa eficiência? Tal questão é merecedora de atenção, pois é ela que justifica a importância do emprego do procedimento 2. Neste trabalho as eficiências nos intervalos de confiança (*EIC*) variaram de 5,39% a 77,04%, dependendo do componente e do sistema de equações, portanto um resultado que deve ser considerado relevante. Zellner (1962) e Dwivedi e Srivastava (1978) analisaram essa questão detalhadamente, observando as condições para haver o ganho em eficiência dos estimadores de regressão aparentemente não relacionadas em comparação ao estimador de única equação. Os autores evidenciaram que a principal condição para haver ganho em eficiência se deve à existência de correlação entre os resíduos das equações, uma vez que, quanto mais forte ela for, maior é o ganho em eficiência dos estimadores de regressão aparentemente não relacionada, quando comparado ao estimador de única equação.

Outra propriedade importante dos sistemas de equações ajustados por meio do procedimento 2 é a aditividade das equações, característica desejável e fundamental na modelagem de biomassa de árvores. A aditividade nas estimativas de biomassa tem sido recomendada por vários pesquisadores: Kozak (1970), Chiyenda e Kozak (1984), Cunia e Briggs (1984), Paressol (1999; 2001), Carvalho e Parresol (2003), Sanquetta et al. (2015a), Zhao et al. (2015) e Affleck e Aranda (2016). Neste trabalho, a aditividades dos componentes para compor a biomassa total foi garantida utilizando o procedimento 2 e, tendo sido estabelecido um modelo para cada componente da biomassa e o modelo da biomassa total foi definido em relação às variáveis que compuseram as funções dos componentes.

Existem outras especificações de modelos e métodos de estimativas para forçar a aditividade dos componentes da biomassa para compor a biomassa total para funções lineares e não lineares, conforme abordagens que foram realizadas por Kozak (1970), Jacobs e Cunia (1980), Chiyenda e Kozak (1984), Cunia e Briggs (1984, 1985), Reed e Green (1985), Paressol (1999; 2001), Carvalho e Paressol (2003), Sanquetta et al. (2015a). Nesse contexto, Parresol (2001) destaca: *I almost unilaterally recommend the joint-generalized least squares approach for both linear or nonlinear modeling of biomass equations systems.* Essa afirmação é devida aos seguintes aspectos:

- Uma vez que os componentes da biomassa não são independentes, eles serão contemporaneamente correlacionados.

- A abordagem por meio de regressão aparentemente não relacionada permite contabilizar essas correlações para estabelecer equações com menores variâncias.

- A intensidade da correlação contemporânea é o que determina os valores de variância das equações. Assim, quanto maior for essa correlação, menor será a variância, portanto, maior será o ganho em eficiência sobre os intervalos de confiança dos coeficientes e das estimativas.

A estrutura dos modelos apresentados no procedimento 2 foi utilizada para garantir a propriedade da aditividade para modelos não lineares de biomassa. O sistema proposto garantiu equações aditivas e, por meio da inclusão da estrutura da variância do erro no ajuste das funções, estimativas mínimas de variância. A estrutura dos sistemas de equações apresentada é similar àquela proposta por Parresol (2001). Nesse caso, as estimativas de biomassa dos componentes e biomassa total estão asseguradas pelos seguintes aspectos:

- Cada componente é expresso por uma função, considerada a melhor por meio do processo da escolha dos modelos concorrentes.

- O modelo para a biomassa total é uma função das variáveis independentes que compõem os componentes, resultando em aditividade.

- Cada equação de biomassa, para os componentes ou total, apresenta sua própria função de peso, de modo a garantir estimativas com variâncias mínimas.

Além da aditividade de biomassa, é importante assegurar que as funções resultantes tenham sido ajustadas pela condição que propiciem estimativa de variância mínima. Experimentalmente, a heteroscedasticidade dos resíduos em cada uma das equações de biomassa se agravou à medida que a floresta foi envelhecendo. De fato, esse resultado não é surpreendente, pois na condição da floresta madura os desvios da biomassa em relação à sua média aumentam das classes menores para as maiores. Isso permite que seja ressaltada a importância da correção da heteroscedasticidade, dado os efeitos sobre as estimativas das equações de biomassa.

Para contornar a heteroscedasticidade dos resíduos foi estabelecida uma função de peso para cada componente da biomassa, de modo a modelar a estrutura da variância residual. Por meio dessas funções foram calculados pesos, o que permitiu estabilizar a variância das perturbações, o que proporcionou condições para que o estimador ponderado resultasse em equações com variância mínima e menores intervalos de confiança. Esses resultados evidenciam a importância de realizar a modelagem da estrutura do erro, fundamentalmente, de

modo a assegurar estimativas confiáveis de cada um dos componentes da biomassa e também para a biomassa total com variância mínima.

Estimativas aditivas e eficientes de biomassa dos componentes e da biomassa total são pré-requisitos nos inventários de biomassa. Assim, a abordagem apresentada neste trabalho para o ajuste de funções de biomassa, por meio do procedimento 2, demonstrou-se apropriado, pelas seguintes razões:

- Desempenho: estimativas de biomassa e estatísticas do ajuste da equação similares ao método que maximiza a qualidade da equação ajustada independentemente.

- Consistência biológica: as equações de biomassa dos componentes são aditivas para compor a equação de biomassa total.

- Eficiência estatística: estimativas de biomassa e coeficientes com menor variância, portanto mais eficientes.

Por meio das estimativas das equações, empregando o procedimento 2, foi possível estimar sistemas de equações estatisticamente correlacionados e, por meio da inclusão das correlações contemporâneas no ajuste, obteve-se equações com menor variância, o que propiciou obter estimativas dos parâmetros mais eficientes e intervalos de estimativas mais confiáveis. A consideração da aditividade dos sistemas de equações assegurou a consistência biológica das estimativas de biomassa dos componentes e da biomassa total.

Devido à menor variância, os sistemas de equações ajustados por meio do procedimento 2 propiciaram estimativas mais acuradas, uma vez que os intervalos de confiança foram menores. Isso também foi evidenciado por Parresol (1999, 2001), que demonstrou a superioridade da eficiência estatística e consistência biológica das equações ajustadas por regressões aparentemente não relacionadas, respectivamente para funções lineares e não lineares. Isso permite uma importante aplicação nas estimativas de biomassa nos inventários florestais, uma vez que devem ser propagados os erros na segunda fase no erro amostral da primeira fase.

Tomando as concepções de Cunia (1987), os inventários florestais de biomassa são realizados em duas fases. Na primeira fase, uma amostra relativamente grande de árvores é selecionada e medida em relação às variáveis: d, h, entre outras, em unidades amostrais estabelecidas. Essas árvores não são mensuradas quanto à sua biomassa. Na segunda fase, uma amostra relativamente pequena de árvores é selecionada e é mensurada a biomassa e as mesmas variáveis tomadas na primeira fase. Assim, as árvores na segunda fase são utilizadas para estimar as funções de biomassa, geralmente por meio de análise de regressão. As equações

ajustadas são aplicadas às árvores da primeira fase para calcular o estoque médio de biomassa na unidade de área.

Portanto, o erro no inventário florestal de biomassa possui dois componentes: *i*) o primeiro devido ao erro aleatório da seleção das unidades amostrais na primeira fase e *ii*) o segundo componente está associado à amostra da segunda fase, ou seja, com o erro da equação de biomassa. Esses dois componentes constituem o erro de amostragem da biomassa, definido em [186], que pode ser expresso pela sua variância, conforme está apresentado em [187].

$$w = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \cdots + \beta_m z_m = \beta z \quad (186)$$

$$S_{ww} = \beta' S_{zz} \beta + z' S_{\beta\beta} z \quad (187)$$

Em que:

w é o erro de amostragem devido à primeira e segunda fase do inventário florestal de biomassa.

z é um vetor das estatísticas calculadas a partir dos dados de amostragem na primeira fase.

β são os coeficientes das equações ajustadas na segunda fase.

S_{ww} é a variância dos componentes do erro devido à primeira e segunda fase do inventário florestal de biomassa.

S_{zz} e $S_{\beta\beta}$ são matrizes variância-covariância de z e β, respectivamente.

Logo, se as equações ajustadas por meio do procedimento 2 resultam em menor variância, torna-se compreensível aceitar que esse menor erro também se propagará nas estimativas da unidade, resultando em estimativas mais precisas quando comparado com as equações ajustadas por ENGLS. Nesse sentido, é reforçada a importância de inserir a estrutura do erro no ajuste das equações de biomassa para que se possa estabelecer estimativas eficientes e intervalos de confiança válidos. Portanto, essas concepções reforçam a importância do emprego do procedimento 2 para estabelecer equações de biomassa.

Parresol (2001) enfatiza que a propriedade da aditividade assegura funções de regressões que são consistentes uma com a outra, uma vez que se um componente da árvore é parte do outro componente, é lógico esperar que as estimativas das partes não excedam o todo. Essa propriedade determinou a consistência das equações ajustadas por meio do procedimento 2 para os exemplos apresentados, em que a biomassa total acima do solo foi dividida em dois componentes: biomassa do fuste e biomassa da copa. Esses dois componentes podem ser subdivididos, por exemplo, a biomassa do fuste (y_F) em: biomassa de madeira (y_M) e biomassa da casca (y_B) e a biomassa da copa (y_C) em: biomassa da folhagem (y_A) e dos galhos (y_G). Nessa nova condição, a propriedade da aditividade deve ser mantida não só para a biomassa

total como para a biomassa da copa e do fuste, presumindo-se inferir que se um componente é definido como a soma de dois subcomponentes, as equações de regressão também devem ser aditivas. Essa condição é ilustrada em [188].

$$
\begin{aligned}
&\hat{y}_A = \beta_{11}\, d^{\beta_{12}} + \varepsilon_C \\
&\hat{y}_G = \beta_{21}\, d^{\beta_{22}} h^{\beta_{23}} + \varepsilon_G \\
&\hat{y}_C = \beta_{11}\, d^{\beta_{12}} + \beta_{21}\, d^{\beta_{22}} h^{\beta_{23}} + \varepsilon_C \\
&\hat{y}_B = \beta_{31}\, (d^2 h)^{\beta_{32}} + \varepsilon_B \\
&\hat{y}_M = \beta_{41}\, d^{\beta_{42}} h^{\beta_{43}} + \varepsilon_M \\
&\hat{y}_F = \beta_{31}\, (d^2 h)^{\beta_{32}} + \beta_{41}\, d^{\beta_{42}} h^{\beta_{43}} + \varepsilon_F \\
&\hat{y}_{Total} = \beta_{11}\, d^{\beta_{12}} + \beta_{21}\, d^{\beta_{22}} h^{\beta_{23}} + \beta_{31}\, (d^2 h)^{\beta_{32}} + \beta_{41}\, d^{\beta_{42}} h^{\beta_{43}} + \varepsilon_{Total}
\end{aligned}
\tag{188}
$$

Nesse novo cenário o procedimento 2 requer que os modelos de biomassa da copa e biomassa do fuste sejam uma combinação dos modelos de seus subcomponentes, isso impõem restrições sobre os parâmetros entre os modelos dos subcomponentes e dos componentes de modo a manter a propriedade da aditividade. Assim, as restrições expressas em [188] garantem que as estimativas de biomassa da folhagem e dos galhos se adicionem para compor a biomassa da copa, que as estimativas de biomassa da casca do fuste e da madeira se adicionem para compor a biomassa do fuste e que as estimativas dos componentes se adicionem compor a biomassa total. Assim, conforme Parresol (2001), essa propriedade pode ser aplicada à qualquer quantidade que seja desagregada em um sistema lógico de componentes.

7 CONCLUSÕES

Todas as hipóteses formuladas neste trabalho foram devidamente confirmadas.

A utilização de equações não-lineares é apropriada, pois apresentaram na condução do presente trabalho melhores desempenhos que as equações lineares.

i) Desempenho das equações

O procedimento definido pela aplicação do modelo de regressão aparentemente não relacionada não conduziu à variações destacáveis nas estatísticas de ajustes das equações, quando comparado com aquelas estimadas independentemente. Portanto, pode-se concluir que tal diferença não se expressa também nas estimativas de biomassa para os componentes e biomassa total.

ii) Consistência biológica das equações

Estimar as equações de biomassa para os componentes e para a biomassa total independentemente não é realista, pois do ponto de vista biológico as estimativas de biomassa são inconsistentes, ou seja, não são aditivas.

Uma propriedade efetiva no ajuste de equações por meio do modelo de regressão aparentemente não relacionada é a aditividade, isto é, as estimativas de biomassa dos componentes se adicionam para compor a biomassa total.

iii) Eficiência dos estimadores das equações

Os componentes da biomassa e a biomassa total são correlacionados, portanto essa correlação deve ser considerada na modelagem da biomassa de árvores.

Uma propriedade efetiva da estimação de equações por meio do modelo de regressão aparentemente não relacionada é levar em consideração a correlação entre os componentes da biomassa, de modo que as equações resultantes produzam estimativas com menor variância. Portanto, do ponto de vista estatístico são mais eficientes quando comparadas com as equações estimadas independentemente.

Além da aditividade, a menor variância obtida nas estimativas ganha importância valendo-se da concepção que o erro das equações deve ser extrapolado para a unidade juntamente com o erro de amostragem devido às parcelas. Isso também ressalta a importância de inserir a estrutura da variância dos resíduos de modo a ponderar as equações, tal que possa atingir a variância residual constante e garantir estimativas de variância mínima.

Estimar as equações da biomassa dos componentes e biomassa total isoladamente, significa desconsiderar as suas interdependências, resultando em equações que propiciarão estimativas com maior variância, portanto, menos eficientes.

iiii) Sistemas de equações

O modelo de regressão aparentemente não relacionado apresenta melhores propriedades biológicas e estatísticas para estimar equações alométricas de biomassa dos componentes e biomassa total, quando comparado com a estimação independente. Portanto, é o método que deve ser utilizado.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

i) Pesquisas futuras

- A temática desenvolvida no presente trabalho, que realça a importância de equações acuradas, com consistência biológica e eficiência estatística também pode ser ampliada para outras temas biométricos de interesse na Engenharia Florestal, tais como: funções volumétricas, funções de afilamento, densidade do povoamento e análise econômica dos sortimentos da floresta.
- Neste trabalho as equações foram propostas em relação à idade dos povoamentos florestais. Entretanto, isso pode ser aprimorado por meio da temática generalização das equações, que pode ser explorada em trabalhos futuros.

ii) Não aditividade dos componentes

- Em equações desenvolvidas para componentes e para o todo, cujas estimativas não se equivalem, é interessante valer-se da soma dos componentes para compor a estimativa do seu todo. Isso evita a falta de atividade.

iii) Inventários florestais

- A modelagem estatística utilizada no presente trabalho demonstrou que os estimadores de biomassa de componentes e total apresentaram melhor consistência biológica e eficiência estatística, devendo, portanto, ser considerada quando se inclui tais estimadores no escopo dos inventários florestais em geral.

REFERÊNCIAS

AFFLECK, D.L.R.; DIÉGUEZ-ARANDA, U. Additive nonlinear biomass equations: a likelihood-based approach. **Forest Science**, v. 62, n. 2, p. 129-140, 2016.

AITKIN, M., ANDERSON, D., FRANCIS, B. AND HINDE, J. **Statistical Modelling in GLIM**. Oxford Statistical Science Series 4, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1989 374 p.

AKAIKE, H. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle. In: Petrov, B.N.; Csaki, F. (eds.). **Second International Symposium on Information Theory**. Budapest: Akademiai Kiado, 1973. p. 267-281.

ALAM, K.; NIZAMI, S. Assessing biomass expansion factor of birch tree *Betula utilis* D. DON. **Open Journal of Forestry**, n. 4, p. 181-190, 2014.

AMEMIYA, T. Non-linear regression models. In: Z. Griliches & M.D. Intriligator (eds.). **Handbook of Econometrics**, v I. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1983. p. 333-389

AMEMIYA, T. **Advanced econometrics.** Massachusetts: Harvard University Press, 1985. 504 p.

ANTÓNIO, N.; TOMÉ, M.; TOMÉ, J. SOARES, P.; FONTES, L. Effect of tree, stand, and site variables on the allometry of *Eucalyptus globulus* tree biomass. **Candian Journal of Forest Research**, v. 37, p. 895-906, 2007.

BARICHELLO, L.R.; SCHUMACHER, M.V.; VOGEL, M.L.M. Quantificação da biomassa de *Acacia mearnsii* De Wild na região sul do Brasil. **Ciência Florestal**, v. 15, n. 2, p. 129-135, 2005.

BASKERVILLE, G.L. Use of logarithmic regression in the estimation of plant biomass. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 2, p. 49-53, 1972.

BASUKI, T.M.; VAN LAAKE, P.E.; SKIDMORE, A.K.; HUSSIN, Y.A. Allometric equations for estimating the above-ground biomass in tropical lowland *Dipterocarp* forest. **Forest Ecology and Management**, v. 257, p. 1684-1694, 2009.

BATES, D.M.; WATTS, D.G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley & Sons, 1988. 90p.

BEAUCHAMP, J.J; OLSON, J.S. Corrections for bias in regression estimates after logarithmic transformation. **Ecology**, v. 54, p. 1403-1407, 1973.

BEDRICK, E.J.; TSAI, C.L. Model selection for multivariate regression in small samples. **Biometrics**, v. 50, n. 1, p. 226-231, 1994.

BERNDES, G.; HOOGWIJK, M; BROEK, R. The contribution of biomass in the future global energy supply: a review of 17 studies. **Biomass and Bionergy**, v. 25, n. 1. p. 1-28, 2003.

BI, H.; LONG, Y.; TURNER, J.; LEI, Y.; SNOWDON, P.; LI, Y.; HARPER, R.; ZERIHUN, A.; XIMENES, F. Additive prediction of aboveground biomass for *Pinus radiata* (D. Don) plantations. **Forest Ecology and Management**, v. 259, p. 2301-2314, 2010.

BI, H.; LONG, Y.; TURNER, J.; LEI, Y.; SNOWDON, P.; LI, Y.; HARPER, R.; ZERIHUN, A.; XIMENES. F. Additive prediction of aboveground biomass for *Pinus radiata* (D. Don) plantations. **Forest Ecology and Management**, v. 259, p. 2301-2314, 2010.

BI, H.; MURPHY, S.; VOLKOVA, L.; WESTON, C.; FAIRMAN, T.; LI, Y.; LAW, R.; NORRIS, J.; LEI, X.; CACCAMO, G. Additive biomass equations based on complete weighing of sample trees for open eucalypt forest species in south-eastern Australia. **Forest Ecology and Management**, v. 349, p. 106-121, 2015.

BI, H.; TURNER, J.; LAMBERT, M. Additive biomass equations for native eucalypt forest trees of temperate Australia. **Trees**, v. 18, p. 467-479, 2004.

BLUJDEA, V.N.B.; PILLI, R.; CIUVAT, L.; ABRUDAN, I.V. Allometric biomass equations for young broadleaved trees in plantations in Romania. **Forest Ecology and Management**, v. 264, p. 172-184, 2012.

BOZDOGAN, H. Akaike's information criterion and recent developments in information complexity. **Journal of Mathematical Psychology**, v. 44, n. 1, p. 62-91, 2000.

BRADU, D. MUNDLAK, Y. Estimation in log-normal linear models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 65, p. 198-221, 1970.

BRANDEIS, T.J.; DELANEY, M; PARRESOL, B.R.; ROYER, L. Development of equations for predicting Puerto Rican subtropical dry forest biomass and volume. **Forest Ecology and Management**, v. 233, p. 133-142, 2006.

BREUSCH, T.; PAGAN, A. The LM test and its applications to model specification in Econometrics. **Review of Economic Studies**, v. 47, p. 239-254, 1980.

BROWN, J.H.; GILLOOLY, J.F.; ALLEN, A.P.; SAVAGE, V.M.; WEST, G.B. Toward a metabolic theory of ecology. **Ecology**, v. 85, n. 7, p. 1771-1789, 2004.

BROWN, S. Estimating biomass and biomass change of tropical forests: a primer. **FAO Forestry Paper** 134, Rome, pp 55, 1997.

BROWN, S.; GILLESPIE, A.J.R.; LUGO, A.E. Biomass estimation methods for tropical forest with applications to forest inventory data. **Forest Science**, v. 35, n. 4, p. 881-902, 1989.

BUSE, A. Goodness-of-fit in the seemingly unrelated regressions model: A generalization. **Journal of Econometrics**, v. 10, n. 1, p. 109-113, 1979.

CALDEIRA, M.V.W. **Quantificação da biomassa e do conteúdo de nutrientes em diferentes procedências de Acácia-negra (*Acacia mearnsii* De Wild).** 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 1998.

CALDEIRA, M.V.W.; SAIDELLES, F.L.F.; SCHUMACHER, M.V.; GODINHO, T.O. Biomassa de povoamento de *Acacia mearnsii* De Wild., Rio Grande do Sul, Brasil. **Scientia Forestalis**, v. 39, n. 90, p. 133-141, 2011.

CARBONERA PEREIRA, J.; SCHUMACHER, M.V.; HOPPE, J.M.; CALDEIRA, M.V.W.; SANTOS, E.M. Produção de biomassa em um povoamento de *Acacia mearnsii* De Wild. no Estado do Rio Grande do Sul. **Revista Árvore**, v. 21, n. 4, p. 521-526, 1997.

CARROLL, R.J.; RUPPERT, D. **Transformation and weighting in regression**. New York: Chapman & Hall, 1988. 249 p.

CARVALHO, J.P.; PARRESOL, B.R. Additivity in tree biomass components of Pyrenean oak (*Quercus pyrenaica* Willd.). **Forest Ecology and Management**, v. 179, p. 269-276, 2003.

CHAVE, J.; CONDIT, R.; AGUILAR, S.; HERNANDEZ, A.; LAO, S.; PEREZ, R. Error propagation and scaling for tropical forest biomass estimates. **Philosophical Transactions of the Royal Society B**, v. 359, p. 409-420, 2004.

CHAVE, J.; RÉJOU-MÉCHAIN, M.; BÚRQUEZ, A.; CHIFDUMAYO, E.; COLGAN, M.S.; DELITTI, W.B.C.; DUQUE, A.; EID, T.; FEARNSIDE, P.M.; GOODMAN, R.C.; HENRY, M.; MARTÍNEZ-YRÍZAR, A.; MUGASHA, W.A.; MULLER-LANDAU, H.; MENCUCCINI, M.; NELSON, B.W.; NGOMANDA, A.; NOGUERIA, E.M.; ORTIZ-MALAVASSI, E.; PÉLISSIER, R.; PLONTON, P.; RYAN, C.M.; SALDARRIAGA, J.G.; VIEILLEDENT, G. Improved allometric models to estimate the aboveground biomass of tropical trees. **Global Change Biology**, v. 20, p. 3177-3190, 2014

CHIYENDA, S.S.; KOZAK, A. Additivity of component biomass regression equations when the underlying model is linear. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 14, p. 441-446, 1984.

CIENCIALA, E.; CERNÝ, M.; TATARINOV, F.; APLTAUER, J. Biomass functions applicable to scots pine. **Trees**, v. 20, p. 483-495, 2006.

CUNIA, T. On tree biomass tables and regression: some statistical comments. In: FRAYERN, W.E. (ed). Forest resource inventories. **Workshop proceedings**. 2. Colorado, Colorado State University, 1979. p. 629-642.

CUNIA, T. Error of forest inventory estimates: its main components. In: WHARTON, E.H.; CUNIA, T. Estimating tree biomass regressions and their error. **Proceedings of the workshop on tree biomass regression functions and their contribution to the error of forest inventory estimates**. USDA: For. Serv. Gen., 1987. p. 1-13.

CUNIA, T.; BRIGGS, R.D. Forcing additivity of biomass tables: use of the generalized least squares method. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 15, p. 23-28, 1985.

CUNIA, T.; BRIGGS, R.D. Forcing additivity of biomass tables—some empirical results. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 14, p. 376-384, 1984.

DIXON, R.K.; BROWN, S.; HOUGHTON, R.A.; SOLOMON, A.M.; TREXLER, M.C.; WISNIEWSKI, J. Carbon pools and flux of global forest ecosystems. **Science**, n. 263, p. 185-190, 1994.

DONG, L.; ZHANG, L.; Li, F. A compatible system of biomass equations for three conifer species in Northeast, China. **Forest Ecology and Management**, v. 329, p. 306-317, 2014.

DONG, L.; ZHANG, L.; Li, F. A three-step proportional weighting system of nonlinear biomass equations. **Forest Science**, v. 61, n. 1, p. 35-45, 2015.

DUDLEY, N.S.; FOWNES, J.H. Preliminary biomass equations for eight species of fast-growing tropical trees. **Journal of Tropical Forest Science**, v. 5, n. 1, p. 68-73, 1992.

DUFOUR, J.M.; KHALAF, L. Exact tests for contemporaneous correlation of disturbances in seemingly unrelated regressions. **Journal of Econometrics**, v. 106, n.1, p. 143-170, 2002.

DWIVEDI, T.D.; Srivastava, V.K. Optimality of least squares in the seemingly unrelated regression equation model. **Journal of Econometrics**, v. 7, p. 391-395, 1978.

ENQUIST, B.J. Universal scaling in tree and vascular plant allometry: toward a general quantitative theory linking plant form and function from cells to ecosystems. **Tree Physiology**, v. 22, p. 1045-1064, 2002.

ENQUIST, B.J.; NIKLAS, K.J. Invariant scaling relations across tree-dominated communities. **Nature**, v. 410, p. 655-660, 2001.

ENQUIST, B.J.; WEST, G.B.; CHARNOV, E.L.; BROWN, J.H. Allometric scaling of production and life-history variation in vascular plants. **Nature**, v. 401, p. 907-911, 1999.

ENQUIST, B.J.; WEST, J.H.; WEST, G.B. Allometric scaling of plant energetics and population density. **Nature**, v. 395, p. 163-165, 1998.

FANG, J.; CHEN, A.; PENG, C.; ZHAO, S.; CI, L. Changes in forest biomass carbon storage in China between 1949 and 1998. **Science**, v. 292, p. 2320-2322, 2001.

FEHRMANN, L.; KLEINN, C. General considerations about the use of allometric equations for biomass estimation on the example of Norway spruce in central Europe. **Forest Ecology and Management**, v. 236, p. 412-421, 2006.

FIEBIG, D. G. Seemingly Unrelated Regression. In Baltagi, B. (eds). **A Companion to Theoretical Econometrics.** Backwell Publishers. 2001, p. 101-121.

FINNEY, D.J. On the distribution of a variate whose logarithm is normally distributed. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 7, n.2, p. 155-161, 1941.

FUJIKOSHI, Y.; SATOH, K. modified AIC and C_p in multivariate linear regression. **Biometrika**, v. 84, p. 707-716, 1997.

FURNIVAL, G.M. An index for comparing equations used in constructing volume tables. **Forest Science**, v. 7, p. 337-341, 1961.

GALLANT, A.R. **Inference for nonlinear models**. Institute of Statistics Mimeograph Series (No. 875). Raleigh, NC: North Carolina State University. 1975a

GALLANT, A.R. Nonlinear regression. **The American Statistician**, v. 29, n. 2, p. 73–81. 1975b

GALLANT, A.R. Nonlinear statistical models. New York: John Wiley & Sons, 1987.

GALLANT, A.R. **Seemingly unrelated nonlinear regressions**. Raleigh: Institute of Statistics. Mimeograph Series No. 900, 1973.

GALLANT, A.R. Testing a subset of the parameters of a nonlinear regression model. **Journal of the American Statistical Association**, v. 70, p. 927–932, 1975c

GENET, A.; WERNSDÖRFER, H.; JONARD, M.; PRETZSCH, H.; RAUCH, M.; PONETTE, Q.; NYS, C.; LEGOUT, A.; RANGER, J.; VALLET, P.; SAINT-ANDRÉ, L. Ontogeny partly explains the apparent heterogeneity of published biomass equations for *Fagus sylvatica* in central Europe. **Forest Ecology and Management**, v. 261, n. 7, p. 1188-1202, 2011.

GOLDBERGER, A.S. **Econometric theory.** New York: John Wiley & Sons, 1964. 399p.

GOLDBERGER, A.S. The interpretation and estimation of Cobb-Douglas functions. **Econometrica**, v. 36, p. 464-472, 1968.

GOROBETZ, A. The optimal prediction simultaneous equation selection. **Economic Bulletin**, v. 3, p. 1-8, 2005.

GREENE, W.H. **Econometric analysis.** Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2008. 1178p.

GREGOIRE, T.G.; WALTERS, D.K. Composite vector estimators derived by weighting inversely proportional to variance. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 18, n. 2, p. 282-284, 1988.

GREGORIE, T.G.; SCHABENBERGER, O.; BARRET, J.P. Linear modelling of irregularly spaced, unbalanced, longitudinal data from permanent-plot measurements. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 25, p. 137-156, 1995.

HARVEY, A.C. Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity. **Econometrica**, v. 44, p. 461-465, 1976.

HIGA, A.R. **Projeto acácia-negra**. Colombo: Embrapa, n.º1 (1), 11 de dezembro de 1996. 2p.

HOEN, H.F.; BIRGER, S. Potential and economic efficiency of carbon sequestration in forest biomass trough silvicultural management. **Forest Science**, v. 40, n. 3, p. 429-451, 1994.

HOUGHTON, R.A. Aboveground forest biomass and the global carbon balance. **Global Chance Biology,** v. 11, n. 6, p. 945-958, 2005.

HOUGHTON, R.A.; SKOLE, D.L. NOBRE, C.A.; HACKLER, J.L.; LAWRENCE, K.T.; CHOMENTOWSKI, W.H. Annual fluxes of carbon from deforestation and regrowth in the Brazilian Amazon. **Nature**, n. 403, p. 301-304, 2000.

HUXLEY, J.S. **Problems of relative growth**. London: Methuen & Co., Ltd.. 1932. 276p.

JACOBS, M.W.; CUNIA, T. Use of dummy variables to harmonize tree biomass tables. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 10, p. 483-490, 1980.

JITTHAVECH, J. A goodness-of-fit measure for a system-of-equation model. **Songklanakarin Journal of Science and Technology**, v. 32, n. 5, p. 519-525. (2010).

JUDGE, G.G.; HILL, R.C.; GRIFFITHS, W.E.; LÜTKEPOHL, H.; LEE, T.C. **Introduction to the theory and practice of econometrics.** New York: John Wiley and Sons, 1988. 1024p.

JUDGE, G.; GRIFFITHS, W.; HILL, C.; LEE, T. **The theory and practice of econometrics**. New York: John Wiley and Sons, 1985. 1019p.

KINDERMANN, E.G.; MCCALLUM, I.; FRITZ, S.; OBERSTEINER, M. A Global forest growing stock, biomass and carbon map based on FAO statistics. **Silva Fennica**, v. 42, n. 2, p. 387-396, 2008.

KOZAK, A. Methods of ensuring additivity of biomass components by regression analysis. **The Forestry Chronicle**, v. 46, n. 5, p. 402-404, 1970.

KURZ, W.A.; DYMOND, C.C.; STINSON, G.; RAMPLEY, G.J.; NEILSON, E.T.; CARROL, A.L.; EBATA, T.; SAFRANYIK, L. Mountain pine beetle and forest carbon feedback to climate change. **Nature**, n. 452, p. 987-990, 2008.

LAMBERT, M.C.; UNG, C.H.; RAULIER, F. Canadian national tree aboveground biomass equations. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 35, p. 1996-2018, 2005.

LEE, C.Y. Comparison of two correction methods for the bias due to the logarithmic transformation in the estimation of biomass. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 12, p. 326-331, 1982.

LI, H.; ZHAO, P. Improving the accuracy of tree-level aboveground biomass equations with height classification at a large regional scale. **Forest Ecology and Management**, v. 289, p. 153-163, 2015.

LINDNER, M.; MAROSCHEK, M.; NETHERER, A.K.; BARBATI, A.; GARCIA-GONZALO, J.; SEIDI, R.; DELZON, S. CORONA, P.; KOLSTRÖM, M.; LEXER, M.J.; MARCHETTI, M. Climate change impacts, adaptive capacity, and vulnerability of European forest ecosystems. **Forest Ecology and Manaement**, v. 259, n. 4, p. 698-709, 2010.

MacFARLANE, D.W. A generalized tree component biomass model derived from principles of variable allometry. **Forest Ecology and Management**, v. 354, p. 43-55, 2015.

MADDALA, G. S. **Introduction to econometrics**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 2001. 345p.

MADGWICK, H.A.I.; SATOO, T. On estimating the above-ground weights of tree stands. **Ecology**, v. 56, p. 1446-1450, 1975, 1975.

MAK, T.K. Solving non-linear estimation equations. **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, v. 55, n. 4, p. 945–955, 1993.

MANDAL, R.A.; YADAV, B.K.V.; YADAV, K.K.; DUTTA, I.C.; HAQUE, S.M. Development of Allometric equation for biomass estimation of *Eucalyptus camaldulensis*: A study from Sagarnath Forest, Nepal. **International Journal of Biodiversity and Ecosystems**, n. 1, v. 1, p. 1-7, 2013.

MANSKI, C.F. Adaptive estimation of non-linear regression models. **Econometric Reviews**, v. 3, n. 2, p. 145–194, 1984.

MARQUARDT, D.W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 431-441, 1963.

MATLOFF, N.; ROSE, R.; TAI, R. A comparison of two methods for estimating optimal weights in regression analysis. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 19, p. 265-274, 1984.

McELROY, M.B. Goodness of fit for seemingly unrelated regressions: Glahn's $R^2_{y.x}$ and Hooper's $\bar{r}^2$. **Journal of Econometrics**, v. 6, n.3, p. 381-387, 1977.

MENÉNDEZ-MIGUÉLEZ, M.; CANGA, E.; BARRIO-ANTA, M.; MAJADA, J.; ÁLVAREZ-ÁLVAREZ, P. A three level system for estimating the biomass of *Castanea sativa* Mill. coppice stands in north-west Spain. **Forest Ecology and Management**, v. 291, p. 417-426, 2013.

MEREDITH, M.P. **Initial parameter estimates for nonlinear regression models**. Biometrics Unit Paper No. BU-887-M. New York: Cornell University, 1985. 22p.

MEYER, H.A. A correction for a systematic error occurring in the application of the logarithmic volume equation. **Pennsylvania State Forest Scheme Research**, v. 42, p. 905-912, 1942.

MILLER, D.M. Reducing transformation bias in curve fitting. **The American Statistician**, v. 38, n. 2, p. 124-126, 1984.

MILLIKEN, G.A.; DeBRUIN, R.L. A procedure to test hypotheses for nonlinear model. **Communications in Statistics–Theory and Methods**, v. 7, n. 1, p. 65–79, 1978.

MOCHIUTTI, S. **Produtividade e sustentabilidade de plantações de acácia-negra (*Acacia mearnsii* De Wild.) no Rio Grande do Sul.** 270 f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2007.

NÁVAR, J. Biomass component equations for Latin American species and groups of species. **Annals of Forest Science**, v. 66, 208p., 2009.

NÁVAR, J.; MÉNDEZ, E.; DALE, V. Estimating stand biomass in the Tamaulipan thornscrub of northeastern Mexico. **Annals of Forest Science**, v. 59, p. 813-821, 2002.

NETER, J.; WASSERMAN, W.; KUTNER, M.H. **Applied linear statistical models**. 2 ed. Homewood: Richard D. Irwin Inc., 1985. 1127p.

NEUDECKER, H.; WINDMEIJER, F.A.G. R^2 in seemingly unrelated regression equations. **Statistica Neerlandica**, v. 45, n. 4, p. 405-411, 1991.

NIKLAS, K.J. **Plant allometry:** the scaling of form and process. Chicago: University of Chicago Press, 1994. 412p.

NIKLAS, K.J. Plant allometry: is there a grand unifying theory? **Biological Reviews**, v. 79, p. 871-889, 2004.

NIKLAS, K.J. Size-dependent allometry of tree height, diameter and trunk-taper. **Annals of Botany**, v. 75, p. 217-227, 1995.

PAN, W. Akaike's information criterion in generalized estimating equations. **Biometrics**, v. 57, n. 1, p. 110-125, 2001.

PARÉ, D.; BERNIER, P.; LAFLEUR, B.; TITUS, B.D.; THIFFAULT, E.; MAYNARD, D.G.; GUO, X. Estimating stand-scale biomass, nutrient contents, and associated uncertainties for tree species of Canadian forests. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 43, p. 599-608, 2013.

PARRESOL, B.R. Additivity of nonlinear biomass equations. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 31, p. 865-878, 2001.

PARRESOL, B.R. Assessing tree and stand biomass: a review with examples and critical comparisons. **Forest Science**, v. 45, p. 573-593, 1999.

PARRESOL, B.R. Modeling multiplicative error variance: an example predicting tree diameter from stump dimensions in baldcypress. **Forest Science**, v. 39, n. 4, p. 670-679, 1993.

PICARD, N.; SAINT-ANDRÉ, L.; HENRY, M**. Manual for building tree volume and biomass allometric equations: from field measurement to prediction**. Rome e Montpellier: Food and Agricultural Organization of the Unites Nations and Centre de Coopération Internationale en Recherche Agronomique pour le Développement, 2012. 215p.

PILLI, P.; ANFODILLO, T.; CARRER, M.; Towards a functional and simplified allometry for estimating forest biomass. **Forest Ecology and Management**, v. 237, p. 583-593, 2006.

POORTER, H.; NIKLAS, K.J.; REICH, P.B.; OLCKSYN, J.; POOT, P.; MOMMER, L. Biomass allocation to leaves, stems and roots: meta-analyses of interspecific variation and environmental control. **New Phytologist**, v. 193, p. 30-50, 2012.

POUDEL, K.P.; TEMESGEN, H. Methods for estimating aboveground biomass and its components for Douglas-fir and lodgepole pine trees. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 46, p. 77-87, 2016.

RATKOWSKY, D.A. **Nonlinear regression modeling:** a unified practical approach. New York: Marcel Dekker, 1983. 288p.

REED, D.D.; GREEN, E.J. A method of forcing additivity of biomass tables when using nonlinear models. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 15, p. 1184-1187, 1985.

ROSS, G.L.S. **Non-linear estimation**. New York: Springer-Verlag, 1990. 189 p.

ROSSI, P.E. The interview professor Arnold Zellner. **Econometric Theory**, v. 5, p. 287-317, 1989.

ROUTA, J.; HELLOMÄKI, S.; STRANDMAN, H. Effects of forest management on total biomass production and CO_2 emissions from use of energy biomass of Norway Spruce and Scots Pine. **BioEnergy Research**, v. 5, n. 3, p. 733-747, 2012.

SAIDELLES, F.L.F. **Determinação da biomassa e altura de amostragem para a quantificação de nutrientes em *Acacia mearnsii* De Wild.** 97 f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2005.

SAINT-ANDRÉ, L.; M'BOU, A.T.; MABIALA, A.; MOUVONDY, W.; JOURDAN, C.; ROUPSARD, O.; DELEPORTE, P.; HAMEL, O.; NOUVELLON, Y. Age-related equations for above – and below – ground biomass of a *Eucalyptus* hybrid in Congo. **Forest Ecology and Management**, v. 205, p. 199-214, 2005.

SANQUETTA, C.R.; BEHLING, A.; CORTE, A.P.D.; PÉLLICO NETTO, S.; SCHIKOWSKI, A.B.; AMARAL, M. Simultaneous estimation as alternative to independent modeling of tree biomass. **Annals of Forest Science**, v. 72, n. 8, p. 1099-1112, 2015a.

SANQUETTA, C.R.; BEHLING, A.; CORTE, A.P.; SIMON, A.; PSCHEIDT, H.; RUZZA, M.S.; MOCHIUTTI, S. Estoques de biomassa e carbono em povoamentos de acácia negra em diferentes idades no Rio Grande do Sul. **Scientia Forestalis**, v. 42, n. 103, p. 361-370, 2014.

SANQUETTA, C.R.; CORTE, A.P.D.; SILVA, F. da. Biomass expansion factor and root-to-shoot ratio for Pinus in Brazil. **Carbon Balance and Management**, v. 6, n. 6, p. 1-8, 2011.

SANQUETTA, C.R.; WOJCIECHOWSKI, J.; CORTE, A.P.D.; BEHLING, A.; PÉLLICO NETTO, S.; RODRIGUES, A.L.; SANQUETTA, M.I. Comparison of data mining and allometric model in estimation of tree biomass. **BMC Bioinformatics**, v. 16, n. 247, p. 1-9, 2015b.

SCHNUTE, J. **A manual for easy nonlinear parameter estimation in fishery research with interactive microcomputer programs**. No. 1140. Canada: Canadian Technical Report of Fisheries and Aquatic Sciences, Government of Canada Fisheries and Oceans. 1982. 115p.

SCHLAMADINGER, B; MARLAND, G. The role of forest and bioenergy strategies in the global carbon cycle. **Biomass and Bionergy**, v.10, n. 5, p. 275-300, 1996.

SCHREUDER, H.T.; WILLIAMS, M.S. **Weighted linear regression using D^2H and D^2 as the independent variables.** RMRS-RP-6. USDA: Forest Service Research. 1998. 10p.

SCHNEIDER, P.R.; TONINI, H. Utilização de variáveis dummy em equações de volume para *Acacia mearnsii* de Wild. **Ciência Florestal**, v. 13, n. 2, p. 121-129, 2003.

SCHUMACHER, F.X.; HALL, F.S Logarithmic expression of timber-tree volume. **Journal of Agricultural Research**, v. 47, n. 9, p. 719-734, 1933.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensions of a model. **Annals of Statistics**, v.6, p.461-464. 1978.

SEBER, G.A.F.; WILD, C.J. Nonlinear regression. New York: John Wiley & Sons, 1989. 768p.

SILESHI, G.W. A critical review of forest biomass estimation models, common mistakes and corrective measures. **Forest Ecology and Management**, v. 329, p. 237-254, 2014.

SIMON, A. A. A cadeia produtiva da acácia-negra, aspectos econômicos, sociais e ambientais. In: STROHSCHOEN, A.G.; REMPEL, C. **Reflorestamento e recuperação ambiental**: Ambiente e tecnologia: o desenvolvimento sustentável em foco. Lajeado: Univates, 2005. p. 149-166.

SHABANI, N.; AKHTARI, S.; SOWLATI, T. Value chain optimization of forest for bioenergy production: a review. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 23, p. 299-311, 2013.

SNOWDON, P. Ratio methods for estimating forest biomass. **New Zealand Journal of Forest Science**, v. 22, n. 1, p. 54-62, 1992.

SNOWDON, P.; BENSON, M. Effects of combinations of irrigation and fertilization on growth and above-ground biomass production of *Pinus radiata*. **Forest Ecology and Management**, v. 52, p. 87-116, 1992.

SPRUGEL, D.G. Correcting for bias in log-transformed allometric equations. **Ecology**, v. 64, n. 1, p. 209-210, 1983.

SPURR, S.H. **Forest inventory**. New York: The Ronald Press Company, 1952. 476 p.

SRIVASTAVA, V.K.; GILES, D.E.A. **Seemingly Unrelated Regression Equations Models**. Estimation and Inference. New York: Marcel Decker, 1987. 374 p.

STAPE, J.L.; BINKLEY, D.; RYAN, M.G. Production and carbon allocation in a clonal *Eucalyptus* plantation with water and nutrient manipulations. **Forest ecology and Management**, v. 255, p. 920-930, 2008.

STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.H, DICKEY, D.A. Principles and procedures of statistics: a biometrical approach. 3 rd. New York: McGraw-Hill, 1996. 672p.

STEIN, P. P.; TONIETTO, L. Black Watle Silviculture in Brazil. In: BROWN, A.G.; KO, H.C. (Ed.). **Black Wattle and its Utilisation**. Barton: RIRDC, 1997. p. 78-82.

STUPAK, I.; LATTIMORE, B.; TITUS, B.D.; SMITH, T. Criteria and indicators for sustainable forest fuel production and harvesting: A review of current standards for sustainable forest management. **Biomass and Bioenergy**, v. 35, n. 8, p. 3287-3308, 2011.

TELSER, L.G. Iterative estimation of a set of linear regression equations. **Journal of the American Statistical Association**, v. 59, n. 307, p. 845-862, 1964.

TESFAYE, M.A.; BRAVO-OVIEDO, A.; BRAVO, F.; RUIZ-PEINALDO, R. Aboveground biomass equations for sustainable production of fuelwood in a native dry tropical afro-montane forest of Ethiopia. **Annals of Forest Science**, doi: 10.1007/s13595-015-0533-2, 2015.

THEIL, H. **Principles of Econometrics**. New York: John Wiley and Sons, 1971. 736p.

WAYSON, C.A.; JOHNSON, K.D.; COLE, J.A.; OLGUÍN, M.I.; CARILHO, O.I.; BIRDSEY, R.A. Estimating uncertainty of allometric biomass equations with incomplete fit error information using a pseudo-data approach: methods. **Annals of Forest Science**, v. 72, p. 825-834, 2015.

WEISBERG, S. **Applied Linear Regression**, 2nd. ed. Wiley, N.Y., 1985. 324 p.

WEST, G.B.; BROWN, J.H. ENQUIST, B.J. A general model for the origin of allometry scaling laws in biology. **Science**, v. 276, p. 122-126, 1997.

WEST, G.B.; BROWN, J.H. ENQUIST, B.J. The fourth dimension of life: fractal geometry and allometric scaling of organisms. **Science**, v. 284, p. 167-169, 1999.

WEST, G.B.; BROWN, J.H. Life's universal scaling laws. **Physics Today**, v. 57, p. 36-42, 2004.

WEST, G.B.; BROWN, J.H. The origin of allometric scaling laws in biology from genomes to ecosystems: towards a quantitative unifying theory of biological structure and organization. **The Journal of Experimental Biology**, v. 208, p. 1575-1592, 2005.

WHITE, H. A heteroskedasticity consistent covariance matrix estimator and a direct test of heteroskedasticity. **Econometria**, v. 48, pp. 817-838, 1980.

WILLIAMS, C.J.; LEPAGE, B.A.; VAN, D.R.; TANGE, T.; IKEDA, H.; ANDO, M.; KUSAKABE, T.; TSUZUKI, H.; SWEDA, T. Structure, allometry, and biomass of plantations *Metasequoia glyptostroboides* in Japan. **Forest Ecology and Management**, v. 189, n. 1-3, p. 287-301, 2003.

WILLIANS, M.S.; GREGOIRE, T.G. Estimating weights when fitting linear regression models for tree volume. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 23, p. 1725-1731, 1993.

ZANG, W.S.; Tang, S.Z. Modeling compatible single-tree aboveground biomass equations for masson pine (*Pinus massoniana*) in southern China. **Journal of Forestry Research**, v. 23, n. 4, p. 593-598, 2012.

ZAPATA-CUARTAS, M. SIERRA, C.; ALLEMAN, L. Probability distribution of allometric coefficients and Bayesian estimation of aboveground tree biomass. **Forest Ecology and Management**, v. 277, p. 173-179, 2012.

ZELLNER, A. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. **Journal of the American Statistical Association**, v. 57, n. 298, p. 348-368, 1962.

ZELLNER, A.; HUANG, D.S. Further properties of efficient estimators for seemingly unrelated regression equations. **International Economic Review**, v. 3, n. 3, p. 300- 313, 1962.

ZENG, W.S.; ZHANG, H.R.; TANG, S.Z. Using the dummy variable model approach to construct compatible single-tree biomass equations at different scales – a case study for masson pine (*Pinus massoniana*) in southern China. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 41, p. 1547-1554, 2011.

ZHAO, D.; KANE, M.; MARKEWITZ, D.; TESKEY, R.; CLUTTER, M. Additive tree biomass equations for mid-rotation loblolly pine plantations. **Forest Science**, v. 61, n. 4, p. 613-623, 2015.

ZHENG, C.; MASON, E.G.; JIA, L.; WEI, S.; SUN, S.; DUAN, J. A single-tree additive biomass model of *Quercus variabilis* Blume forest in North China. **Trees**, v. 29, n. 3, p. 705-716, 2015.

ZIANIS, D. Predicting mean aboveground forest biomass and its associated variance. **Forest Ecology and Management**, v. 256, p. 1400-1407, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE 1- Sumarização de funções volumétricas por inclusão de variáveis (x), autor e ano de publicação, frequentemente empregadas para modelar a biomassa 104

APÊNDICE 2 - Abordagens sobre *seemingly unrelated regressions models* ……...105

APÊNDICE 3 - Abordagens de *seemingly unrelated regressions* na Ciência Florestal 111

APÊNDICE 4 - Código SAS para o procedimento 2 – NSUR 115

APÊNDICE 5 - Código SAS para o procedimento 2 – WNSUR 116

APÊNDICE 1 – Sumarização de funções volumétricas por inclusão de variáveis (x), autor e ano de publicação, frequentemente empregadas para modelar a biomassa (y).

x	Autor	Função	Ano
d	Kopetzki	$y = \beta_0 + \beta_1 d^2$	1899
	Gehrhardt	$y = \beta_0 + \beta_1 g$	1901
	Berkhout	$y = \beta_1 d^{\beta_2}$	1920
	Meyer, H	$y = \beta_1 d + \beta_2 d^2$	1944
	Hohenadl-Krenn	$y = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2$	1944
	Hummel	$y = \beta_0 + \beta_1 \log d$	1955
	Brenac	$y = \beta_0 + \beta_1 \log d + \beta_2 d^{-1}$	1977
d, h	Schumacher- Hall	$y = \beta_0 d^{\beta_1} h^{\beta_2}$	1933
	Dwight	$y = \beta_0 + \beta_1 \log d + (3 - \beta_1) \log h$	1937
	Meyer	$y = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_3 dh + \beta_4 (d^2 h) + \beta_5 h$	1938
	Meyer	$y = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_3 dh + \beta_4 (d^2 h)$	1938
	Näslund	$y = \beta_1 (d^2 h) + \beta_2 d^2 + \beta_3 (dh^2) + \beta_4 (h^2)$	1940
	Stoate	$y = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 (d^2 h) + \beta_3 h$	1945
	Näslund	$y = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 (d^2 h) + \beta_3 (h^2) + \beta_4 (dh^2)$	1947
	Spurr	$y = \beta_1 (d^2 h)$	1952
	Spurr	$y = \beta_0 (d^2 h)^{\beta_1}$	1952
	Takata	$y = (d^2 h) \left(\beta_0 + \beta_1 d\right)^{-1}$	1957
	Honer	$y = d^2 \left(\beta_0 + \beta_1 h^{-1}\right)^{-1}$	1965
	Prodan	$\log y = \beta_0 + \beta_1 \log d + \beta_2 log^2 d + \beta_3 \log h + \beta_4 log^2 h$	1965
	Ogaia	$y = d^2 \left(\beta_0 d + \beta_1 h^{-1}\right)$	1968
	Péllico Netto	$y = h \left(\beta_0 + \beta_1 d + \beta_1 d^2\right)$	1979

Em que: d= diâmetro à altura do peito (em cm), h= altura total (em m) e g= área transversal (em m^2)

APÊNDICE 2 – Abordagens sobre *seemingly unrelated regressions models*

1. AMEMIYA, T. The estimation of the variances in a variance-components model. **International Economic Review**, v. 12, p. 1-13, 1971.

2. ANSELIN, L. A test for spatial autocorrelation in seemingly unrelated regressions. **Economics Letters**, v. 28, n. 4, p. 335-341, 1988.

3. AVERY, R.B. Error components and seemingly unrelated regressions. **Econometrica**, v. 45, n. 1, p. 199-209, 1977.

4. BALTAGI, B.H. On seemingly unrelated regressions with error components. **Econometrica**, v. 48, n. 6, p. 1547-1551, 1980.

5. BALTAGI, B.H. The efficiency of OLS in a seemingly unrelated regressions model. **Econometric Theory**, n. 4. p. 536-537, 1988.

6. BALTAGI, B.H. Trace minimization of singular systems with cross-equation restrictions. **Econometric Theory**, v. 9, p. 314–315, 1993.

7. BALTAGI, B.; GARVIN, S.; KERMAN, S. Further Monte Carlo evidence on seemingly unrelated regressions with unequal number of observations. **Annales D'Economie et de Statistique**, v. 14, p. 103–115, 1989.

8. BARTELS, R.; FIEBIG, D.G. A simple characterization of seemingly unrelated regressions models in which OLS is BLUE. **The American Statistician**, v. 45, n. 2, p. 137-140, 1991.

9. BERNDT, E.R.; SAVIN, N.E. Estimation and hypothesis testing in singular equation systems with autoregressive disturbances. **Econometrica**, v. 43, p. 937–95, 1975.

10. BINKLEY, J.K.; NELSON, C.H. A note on the efficiency of seemingly unrelated regression. **The American Statistician**, v. 42, n. 2, p. 137-139, 1988.

11. BUSE, A. Goodness-of-fit in the seemingly unrelated regressions model: A generalization. **Journal of Econometrics**, v. 10, n. 1, pp. 109-113, 1979.

12. BREUSCH, T.S. Useful invariance results for generalized regression models. **Journal of Econometrics**, v. 13, p. 327–340, 1980.

13. CARROLL, R.J.; MIDTHUNE, D.; FREEDMAN, L.S.; KIPNIS, V. Seemingly unrelated measurement error models, with application to nutritional epidemiology. **Biometrics**, v. 62, p. 75-84, 2006.

14. CHOW, G.C. Tests of equality between sets of coefficient in two linear regressions. **Econometrica**, n. 28, p. 591-605, 1960.

15. CONNIFFE, D. Estimating regression equations with common explanatory variables but unequal numbers of observations. **Journal of Econometrics**, v. 27, p. 179-196, 1985.

16. CONNIFFE, D. A note on seemingly unrelated regressions. **Econometrica**, v. 50, n. 1, p. 229-233, 1982a.

17. CONNIFFE, D. Covariance analysis and seemingly unrelated regressions. **The American Statistician**, v. 36, n. 3, p. 169-171, 1982b.

18. CONNIFFE, D. Testing the assumptions of seemingly unrelated regressions. **The Review of Economics and Statistics**, v. 64, n. 1, p. 172-174, 1982c.

19. DUFOUR, J.; KHALAF, L. Exact tests for contemporaneous correlation of disturbances in seemingly unrelated regressions. **Journal of Econometrics**, v. 106, n. 1, pp. 143-170, 2002.

20. DUFOUR, J.M.; KHALAF, L. Simulation based finite and large sample tests in multivariate regressions. **Journal of Econometrics**, v. 111, n. 2, p. 303–322, 2002b.

21. DUFOUR, J.M.; KHALAF, L. Finite sample tests in seemingly unrelated regressions. In: GILES, D.E.A. (ed). **Computer-aided econometrics**. New York: Marcel Dekker, 2001. p. 11-35.

22. DWIVEDI, T.D. AND SRIVASTAVA, V.K. Optimality of least squares in the seemingly unrelated regression equation model. **Journal of Econometrics**, v. 7, p. 391-395, 1978.

23. FIEBIG, D. G. Seemingly Unrelated Regression. In BALTAGI, B. (ed). **A companion to theoretical econometrics.** Backwell Publishers, 2001. p. 101-121.

24. FIEBIG, D.G.; HIM, J.H. Estimation and inference in SUR models when the number of equations is large. **Econometric Reviews**, p. 105-130, 2000.

25. FITZMAURICE, G.M.; LAIRD, N.M. Regression models for mixed discrete and continuous responses with potentially missing values. **Biometrics**, v. 53, p. 110-122, 1997.

26. FOSCHI, P.; BESLEY, D.; KONTOGHIORGHES, E.J. A comparative study algorithm for solving seemingly unrelated regressions models. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 44, n.1-2, p. 3-35, 2003.

27. GALLANT, A.R.; HOLLY, A. Statistical inference in an implicit, nonlinear, simultaneous equation model in the context of maximum likelihood estimation. **Econometrica,** v. 48, p. 697-720, 1980.

28. GALLANT, A.R.; JORGENSON, D. Statistical inference for a system of simultaneous, non-linear, implicit equations in the context of instrumental variable estimation. **Journal of Econometrics**, v. 11, p. 275-302, 1979.

29. GALLANT, A.R. Seemingly unrelated nonlinear regressions. **Journal of Econometrics**, v. 3, p. 35-50, 1975.

30. GUILKEY, D.K.; SCHMIDT, P. Estimation of seemingly unrelated regressions with vector autoregressive errors. **Journal of the American Statistical Association**, v. 68, p. 642-647, 1973.

31. GUPTA, A.K.; ROHATGI, V.K. Estimation of covariance from unbalanced data. **Sankhyã: The Indian Journal of Statistics**, Series B, v. 44, n. 2, p. 143-153, 1982.

32. HARVEY, A.C.; PHILLIPS, G.D.A. Testing for contemporaneous correlation of disturbances in systems of regression equations. **Bulletin of Economic Research**, v. 34, n. 2, p. 79–81, 1982.

33. HAMILTON, D.C.; KNOP, O. Combining non-linear regressions that have unequal error variances and some parameters in common. **Applied Statistics**, v. 47, n. 2, p. 173- 185, 1998.

34. HENNINGSEN, A.; HAMANN, J.D. systemfit: A package for estimating systems of simultaneous equations in R. **Journal of Statistical Software**, v. 23, n. 4, p. 1 - 40, 2007.

35. HOLGERSSON, H.E.T.; SHUKUR, G. Some aspects of non-normality tests in systems of regression equations. **Communications in Statistics, Simulation and Computation**, v. 30, n. 2, p. 291–310, 2001.

36. HWANG, H. Estimation of a linear SUR model with unequal numbers of observations. **Review of Economics and Statistics**, n. 72, p. 1255-1294, 1990.

37. IM, E. Unequal numbers of observations and partial efficiency gain. **Economics Letters**, n. 46, p. 291-294, 1994.

38. JUDGE, G.G.; GRIFFITHS, W.E.; HILL, R.C.; LÜTKEPOHL, H. **The Theory and Practice of Econometrics.** New York: Wiley.

39. JUDGE, G.G.; HILL, R.C.; GRIFFITHS, W.E.; LÜTKEPOHL, H. **Introduction to the theory and practice of econometrics**, 2nd ed. New York: Wiley, 1988.

40. KAKWANI, N.C. The unbiasedness of Zellner's seemingly unrelated regression equations estimators. **Journal of the American Statistical Association**, v. 62, n. 317, p. 141-142, 1967.

41. KAKWANI, N.C. A note on the efficiency of the Zelliner's seemingly unrelated regressions estimator. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 26, n.1, p. 361-362, 1974.

42. KARIYA, T. Bounds for the covariance matrices of Zellner's estimator in the SUR model and the 2SAE in a heteroscedastic model. **Journal of the American Statistical Association**, v. 76, n. 376, p. 975-979, 1981.

43. KARIYA, T. Tests for the independence between two seemingly unrelated regression equations. **The annals of Statistics**, v. 9, n.2, p. 381-30, 1981.

44. KIVIET, J.F.; PHILLIPS, G.D.A.; SCHIPP, B. The bias of OLS, GLS and ZEF in dynamic seemingly unrelated regression models. **Journal of Econometrics**, v. 69, p. 241–266, 1995.

45. KING, G. A seemingly unrelated Poisson regression model. **Sociological Methods Research**, v. 17, n. 3, p. 235-255, 1989.

46. KMENTA, J.; GILBERT, R.F. Small sample properties of alternative estimators of seemingly unrelated regressions. **Journal of the American Statistical Association**, v. 63, n. 324, p. 1180-1200, 1968.

47. KMENTA, J.; GILBERT, R.F. Estimation of seemingly unrelated regressions with autoregressive disturbances. **Journal of the American Statistical Association**, v. 65, n. 329, p. 186-197, 1970.

48. KUNITOMO, N. A note on the efficiency of Zellner's estimator for the case of two seemingly unrelated regression. **Economic Studies Quarterly**, v. 28, p. 73–77, 1977.

49. KURATA, H. On the efficiencies of several generalized least squares estimators in a seemingly unrelated regression model and a heteroscedastic model. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 70, p. 86–94, 1999.

50. LIU, A. Efficient estimation of two seemingly unrelated regression equations. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 82, p. 445–456, 2002.

51. MAESHIRO, A. New evidence on the small properties of estimators of SUR models with autocorrelated disturbances. **Journal of Econometrics**, v. 12, p. 177-187, 1980.

52. MANDY, D.M.; MARTINS-FILHO, C. Seemingly unrelated regressions under additive heteroscedasticity: Theory and share equation applications. **Journal of Econometrics**, v. 58, n. 3, pp. 315-346, 1993.

53. MARK, N.; OGAKI, M. SUL, D. Dynamic seemingly unrelated cointegrating regressions, **Review of Economic Studies**, v. 72, p. 797-820, 2005.

54. McELROY, M.B. Goodness of fit for seemingly unrelated regressions. **Journal of Econometrics**, v. 6, p. 381-387, 1977.

55. MEHTA, J.S.; SWAMY, P.A.V.B. Further evidence on the relative efficiencies of Zellner's seemingly unrelated regressions estimator. **Journal of the American Statistical Association**, v. 71, n. 355, p. 634-639, 1976.

56. MOON, H.R.; PERRON, P. Efficient Estimation of SUR cointegration regression model and testing for purchasing power parity. **Econometric Reviews**, v. 23, p. 293-323, 2004.

57. NG, V.M. Robust bayesian inference for seemingly unrelated regressions with elliptical errors. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 83, p. 409–414, 2002.

58. OBERHOFER, W.; KMENTA, J. A general procedure for obtaining maximum likelihood estimates in generalized regression models. **Econometrica**, v. 42, p. 579–590, 1974.

59. PARKS, R.W. Efficient estimation of a system of regression equations when disturbances are both serially and contemporaneously correlated. **Journal of the American Statistical Association**, v. 62, n. 318, p. 500-509, 1967.

60. PERCY, D.F. Prediction for seemingly unrelated regressions. **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, v. 54, n. 1, p. 243-252, 1962.

61. PERCY, D.F. Zellner's influence on multivariate linear models. In BERRY, D.A.; CHALONER, K.M.; GEWEKE, K.K. (eds.). **Bayesian Analysis in statistics and econometrics:** essays in honor of Arnold Zellner. New York: John Wiley and Sons, 1996. p. 203-214.

62. PHILLIPS, P.C.B. An approximation to the finite sample distribution of Zellner's SURE, **Journal of Econometrics**, v. 6, p. 147-164, 1977.

63. PHILLIPS, P.C.B. The exact distribution of the SUR estimator. **Econometrica**, v. 53, p. 745– 756, 1985.

64. PRUCHA, I.R. On the asymptotic efficiency of feasible Aitken estimators for seemingly unrelated regression models with error components. **Econometrica,** v. 52, n. 1, p. 203-207, 1984.

65. RAO, P.; GRILICHES, Z. Small-sample properties of several two-stage regression methods in the context of auto-correlated errors. **Journal of the American Statistical Association,** v. 64, n. 325, p. 253-272, 1969.

66. REVANKAR, N.S. Some finite sample results in the context of two seemingly unrelated regression equations. **Journal of the American Statistical Association**, v. 69, n. 345, p. 187-190, 1974.

67. REVANKAR, N.S. Use of restricted residuals in SUR systems: some finite sample results. **Journal of the American Statistical Association**, v. 71, n. 353, p. 183-188, 1976.

68. ROCHON, J. Supplementing the intent-to-treat analysis: accounting for covariates observed post-randomization in clinical trials. **Journal of the American Statistical Association**, v. 90, n. 429, p. 292-300, 1995.

69. ROCHON, J. Accounting for covariates observed post randomization for discrete and continuous repeated measures data. **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, v. 58, n. 1, p. 205-219, 1996a.

70. ROCHON, J. Analyzing bivariate repeated measures for discrete and continuous outcome variables. **Biometrics**, v. 52, n. 2, p. 740-750, 1996b.

71. ROCKE, D.M. Bootstrap Bartlett adjustment in seemingly unrelated regression. **Journal of the American Statistical Association**, v. 84, n. 406, p. 598-601, 1989.

72. SCHMIDT, P. Estimation of seemingly unrelated regressions with unequal numbers of observations. **Journal of Econometrics**, v. 5, p. 365-377, 1977.

73. SHIBA, T.; TSURUMI, H. Bayesian and non-Bayesian tests of independence in seemingly unrelated regressions. **International Economic Review**, v. 29, p. 377–389, 1988.

74. SCHMIDT, P. A note on the estimation of seemingly unrelated regression systems. **Journal of Econometrics**, v. 7, p. 259-261, 1978.

75. SEAKS, T.G. The computation of test statistics for multivariate regression models in event studies. **Economics Letters**, v. 33, n. 2, p. 141-145, 1990.

76. SENTANA, E. Estimation of a triangular, seemingly unrelated, regression system by ols. **Econometric Theory**, v. 13, p. 463, 1997.

77. SINGH, B.; ULLAH, A. Estimation of seemingly unrelated regressions with random coefficients. **Journal of the American Statistical Association**, v. 69, n. 345, p. 191-195, 1974.

78. SMITH, M.; KOHN, R. Nonparametric seemingly unrelated regression. **Journal of Econometrics**, v. 98, p. 257-282, 2000.

79. SRIVASTAVA, V. K.; MAEKAWA, K. Efficiency properties of feasible generalized least squares estimators in SURE models under non-normal disturbances. **Journal of Econometrics**, v. 66, p. 99-121, 1995.

80. SRIVASTAVA, V.K.; DWIVEDI, T.D. Estimation of seemingly unrelated regression equations: a brief survey. **Journal of Econometrics**, v. 10, p. 15-32, 1979.

81. SRIVASTAVA, V.K., GILES, D.E.A. **Seemingly unrelated regression equations models:** estimation and inference. New York: Marcel Dekker, 1987.

82. STANEK, E.J.III. Choosing a pretest-posttest analysis. **The American Statistician**, v. 42, n. 3, p. 178-183, 1988.

83. STANEK, E.J.III; KOCH, G.G. The equivalence of parameter estimates from growth curve models and seemingly unrelated regression models. **The American Statistician**, v. 39, n. 2, p. 149-152, 1985.

84. STEEL, M.F. Posterior analysis of restricted seemingly unrelated regression equation models: A recursive analytical approach. **Econometric Reviews**, n. 11, p. 129-142, 1992.

85. TAKADA, H.; ULLAH, A.; CHEN, Y.M. Estimation of the seemingly unrelated regression model when the error covariance is singular. **Journal of Applied Statistics**, v. 22, n. 4, p. 517-530, 1995.

86. TELSER, L.G. Iterative estimation of a set of linear regression equations. **Journal of the American Statistical Association**, v. 59, n. 307, p. 845-862, 1964.

87. VAN DEUSEN, P.C. Simultaneous estimation with a squared error loss function. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 18, p. 1093-1096, 1988.

88. VERBYLA, A.P. Analysis of repeated measures designs with changing covariates. **Biometrika**, v. 75, n. 1, p. 172-174, 1988.

89. VINOD, H.D.; ULLAH, A. **Recent advances in regression methods.** New York: Marcel Dekker, 1981.

90. WANG, G.H.K.; FULLER, W.A. Estimators for a simultaneous equation model with lagged endogenous variables and autocorrelated error. **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, v. 11, n. 2, p. 123-142, 1982.

91. WILSON, B.K. Simultaneity and its impact on ecological regression applications. **Biometrics**, v. 41, p. 435-445, 1985.

92. ZELLNER, A. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. **Journal of the American Statistical Association**, v. 57, n. 298, p. 348-368, 1962.

93. ZELLNER, A. Estimators for seemingly unrelated regression equations: some exact finite sample results. **Journal of the American Statistical Association**, v. 58, n. 304, p. 977-992, 1963.

94. ZELLNER, A.; HUANG, D.S. Further properties of efficient estimators for seemingly unrelated regression equations. **International Economic Review**, v. 3, n. 3, p. 300- 313, 1962.

95. ZELLNER, A. BAUWENS, L.; VAN DIJK, H.K. Bayesian specification analysis and estimation of simultaneous equation models using Monte Carlo Methods. **Journal of Econometrics**, v, 38, p. 39-72, 1988.

96. ZELLNER, A.; ANDO, T. A direct Monte Carlo approach for Bayesian analysis of the seemingly unrelated regression model. **Journal of Econometrics**, v. 159, n. 1, p. 33-45, 2010.

APÊNDICE 3 – Abordagens de *seemingly unrelated regressions* na Ciência Florestal

1. ALIG, R.J. Econometric analysis of the factors influencing forest acreage trends in the Southeast. **Forest Science**, v. 32, n.11, p. 119-134, 1986.

2. ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G.; ZINGG, A.; GADOW, K. Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. **Annals of Forest Science**, v. 67, n. 3, p. 307, 2010.

3. BORDERS, B.E. Systems of equations in forest stand modeling. **Forest Science**, v. 35, n. 2, p. 548-556, 1989.

4. BORDERS, B.E.; BAILEY, R.L. A compatible system of growth and yield equations for slash pine fitted with restricted three-stage least squares. **Forest Science**, v. 32, n. 1, p. 185-201, 1986.

5. CAO, Q.V. Incorporating whole-stand and individual-tree models in a stand-table projection system. **Forest Science**, v. 53, n. 1, p. 45-49, 2007.

6. CAO, Q.V. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, v. 50, n. 5, p. 682-685, 2004.

7. CRESCENTE-CAMPO, F. SOARES, P., TOMÉ, M.; DIÉGUEZ-ARANDA, U. Modelling annual individual-tree growth and mortality of Scots pine with data obtained at irregular measurement intervals and containing missing observations. **Forest Ecology and Management**, v. 260, n. 11, p. 1965-1974, 2010.

8. DYER, M.E.; BURKHART, H.E. Compatible crown ratio and crown height models. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 16, n. 6, p. 572-574, 1987.

9. EERIKÄINEN, K. A multivariate linear mixed-effects model for the generalization of sample tree heights and crown ratios in the Finnish National Forest Inventory. **Forest Science**, v. 55, n. 6, p. 480-493, 2009.

10. FANG, B.E; BAILEY, L. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. **Forest Science**, v. 46, n. 1, p. 1-12, 2000.

11. FANG, Z.; BAILEY, R.L.; SCHIVER, B.D. A multivariate simultaneous prediction system for stand growth and yielf with fized and random effects. **Forest Science**, n. 47, n. 4, p. 550-562, 2001.

12. FERGUSON, I.S.; LEECH, J.W. Generalized least squares estimation of yield functions. **Forest Science**, v. 24, n. 1, p. 27-42, 1978.

13. FU, L.; WANG, G, BI, H.; TANG, S.; SONG, X. Comparison of seemingly unrelated regressions with error-in-variable models for developing a system of nonlinear additive biomass equations. **Trees**, p. 1-19, 2015.

14. HASENAUER, H.; MONSERUD, R.A.; GREGOIRE, T.G. Using simultaneous regression techinques with individual-tree growth models. **Forest Science**, v. 44, n.1, p. 87-95, 1998.

15. HEVIA, A.; CAO, Q.V.; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G.; RUIZ-GONZÁLEZ, A.D.; GADOW, K.V. Compatibility of whole-stand and individual-tree models using composite estimators and disaggregation. **Forest Ecology and Management**, v. 348, p. 46-56, 2015.

16. HUANG, S.; TITUS, S.J. Estimating a system of nonlinear simultaneous individual tree modl for white spruce in boreal mixed-species stands. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 29, n. 11, p. 1805-1811, 1999.

17. JORDAN, L.; BERENHAUT, K.; SOUTER, R.; DANIELS, R.F. Parsimonious and completely taper, total, and merchantable volume models. **Forest Science**, v. 51, n. 6, p. 578-584, 2005.

18. JUNTTILA, V.; MALTAMO, M.; KAURANNE, T. Sparse Bayesian estimation of forest stand characteristics from airborne laser scanning. **Forest Science**, v. 54, n. 5, p. 543-552, 2008.

19. KANGAS, A.; MALTAMO, M. Percentile based basal area diameter distribution models for Scots pine, Norway spruce and birch species. **Silva Fennica**, v. 34, n. 4, p. 371–380, 2000.

20. LeMAY, V.M. MSLS: a linear least squares technique for fitting a simultaneous system of equation with a generalized error. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 20, n. 12, p. 1830-1839, 1990.

21. LESKINEN, P.; MIINA, J. MEHTÄTALO, L.; KANGAS, A. Model correlation in stochastic forest simulators – A case of multilevel multivariate model for seedling establishment. **Ecological Modelling**, v. 220, n. 4, p. 545-555, 2009.

22. LIU, C.; ZHANG, S.Y.; CLOUTIER, A.; RYCABEL, T. Modeling lumber bending stiffness and strength in natural black spruce stands using stand and tree characteristics. **Forest Ecology and Management**, v. 242, n. 2-3, p. 648-655, 2007.

23. LYNCH, T.B.; MURPHY, P.A. A compatible height prediction and projection system for individual trees in natural, even-aged shortleaf pine stands. **Forest Science**, v. 41, n. 1, p. 194-209, 1995.

24. LYNCH, T.B. Compatible estimation of components of forest growth from remeasured point samples with restricted generalized least squares. **Forest Science**, v. 41, n. 3, p. 611-628, 1995.

25. MALTAMO, M.; PEUHKURINEN, J.; MALINEN, J.; VAUHKONEN, J.; PACKALÉN, P.; TOKOLA, T. Predicting tree attributes and quality characteristics of Scots pine using airborne laser scanning data. **Silva Fennica**, v. 43, n. 3, p. 507–521, 2009.

26. MICHIE, B.R.; BUONGIORNO, J. Estimation of a matrix model of forest growth form re-measured permanent plots. **Forest Ecology and Management**, v. 8, n. 2, p. 127-135, 1984.

27. MURPHY, P.A. A nonlinear timber yield equation system for loblolly pine. **Forest Science**, v. 29, n. 3, p. 582-591, 1983.

28. NEWTON, P.F.; LEI, Y.; ZHANG, S.Y. Stand-level diameter distribution yield model for black spruce plantations. **Forest Ecology and Management**, v. 2009, n. 3, p. 181-192, 2005.

29. NIQUIDET, K. Equity pricing in the forest sector: evidence from North American stock markets. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 40, n. 5, p. 943-952, 2010.

30. NORD-LARSEN, T.; JOHANNSEN, V.K. A state-space approach to stand growth modelling of European beech. **Annals of Forest Science**, v. 64, n. 4, p. 365-374, 2007.

31. NUNES, L.; TOME´, J; MARGARIDA, T. Prediction of annual tree growth and survival for thinned and unthinned even-aged maritime pine stands in Portugal from data with different time measurement intervals. **Forest Ecology and Management**, v. 262, n. 8, p. 1491-1499, 2011.

32. NUNIFU, T.K. Compatible diameter and height increment model for lodgepole pine, trembling aspen, and white spruce. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 39, n. 1, p. 180-192, 2009.

33. PLANK, N.R.V.; MacFARLANE, D.W. Modelling vertical allocation of tree stem and branch volume for hardwoods. **Forestry**, v. 87, p. 459-469, 2014.

34. QIN, J.; CAO, Q. Using disaggregation to link individual-tree and whole-stand growth models. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 36, n. 4, p. 953-960, 2006.

35. QUIN, J.; CAO, QV.; BLOUIN, D.C. Projection of a diameter distribution through time. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 37, n. 1, p. 188-194, 2007.

36. RAO, V.N.; ZHANG, D.; PRESTEMON, J.; WEAR, D. Softwood lumber products in the United States: substitutes, complements or unrelated. **Forest Science**, v. 50, n. 4, p. 416-426, 2004.

37. ROSE, C.E.JR.; LYNCH, T.B. Estimating parameters for tree basal area growth with a system of equations and seemingly unrelated regressions. **Forest Ecology and Management**, v. 148, n. 1-3, p. 51-61, 2001.

38. SATTLER, D.F.; LeMAY, V. A system of nonlinear simultaneous equations for crown length and crown radius for the forest dynamics model SORTIE-ND. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 41, n. 8, p. 1567-1576, 2011.

39. SIIPILEHTO, J. Linear prediction application for modelling the relationships between a large numbers of stand characteristics of Norway spruce stands. **Silva Fennica**, v. 40, n. 3, p. 517–530, 2006.

40. SIIPILEHTO, J.; SARKKOLA, S.; MEHTÄTALO, L. Comparing regression estimation techniques when predicting diameter distributions of Scots pine on drained peatlands. **Silva Fennica**, v. 41, n. 2, p. 333–349, 2007.

41. STIER, J.C. Implications of fator substitution, economies of scale, and technological change for the cost of production in the United States pulp and paper industry. **Forest Science**, v. 31, n. 4, p. 803-812, 1985.

42. ZAKRZEWSKI, W.T.; MacFARLANE, D.W. Regional stem profile model for cross-border comparisons of harvested red pine (*Pinus resinosa* Ait.) in Ontario and Michigan. **Forest Science**, v. 52, n. 4, p. 468-475, 2006.

43. ZHANG, S.; AMATEIS, R.L.; BURKHART, H.E. Constraining individual tree diameter increment and survival models for loblolly pine plantations. **Forest Science**, v. 43, n. 3, p. 414-423, 1997.

44. ZHANG, X.; DUAN, A.; CAO, Q.V.; ZHANG, J. The application of Bayesian model averaging in compatibility of stand basal area for even-aged plantations in Southern China. **Forest science**, v. 60, n. 4, p. 645-651, 2014.

45. ZHANG, X.; LEI, Y. A linkage among whole-stand model, individual-tree model and diameter-distribution model. **Journal of Forest Science**, v. 56, n. 2, p. 600-608, 2010.

APÊNDICE 4 – CÓDIGO SAS PARA O PROCEDIMENTO 2 – NSUR

```
Proc model
Method=Mquardt
Maxiter=32000;
yc = b11 * (d2h)**b12;
yf = b21 * (d**b22)*(h**b23);
ytotal = (b11 * (d2h)**b12)+(b21 * (d**b22)*(h**b23));


Fit yc yf ytotal / itsur;
run;
```

APÊNDICE 5 – CÓDIGO SAS PARA O PROCEDIMENTO 2 – WNSUR

```
*Equações ajustadas independentemente*;

proc model data = ex;
parms b11 b12 b13;
yf = b11*d**b12*h**b13;
fit yf start = (b11 = 0.0 b12 = 0.0 b13 = 0.0)/ white out = resyf;
run;

proc model data = ex;
parms b11 b12;
yc = b11*d2h**b12;
fit yc start = (b11 = 0.0 b12 = 0.0)/ white out = resyc;
run;

proc model data = ex;
parms b11 b12 b13;
ytotal = b11*d**b12*h**b13;
fit ytotal start = (b11 = 0.0 b12 = 0.0 b13 = 0.0)/ white out = resytotal;
run;


*Estrutura da variância*;

data pesoyf;
set resyf;
lresyf = log((yf**2));
ld = log(d);
lh = log(h);
run;
proc reg data = pesoyf;
model lresyf = ld lh;
run;

data pesoyc;
set resyc;
lresyc = log((yc**2));
ld2h = log(d2h);
run;
proc reg data = pesoyc;
model lresyc = ld2h;
run;


data pesoytotal;
set resytotal;
lresytotal = log((ytotal**2));
ld = log(d);
lh = log(h);
run;
proc reg data = pesoytotal;
model lresytotal = ld lh;
run;
```

```
*WNSUR*;
proc model
Method=Mquardt
Maxiter=32000
data = ex;
var fuste copa total d h ddh;
parms b11 b12 b13 b21 b22;

yf = b11*d**b12*h**b13;
resid.yf = resid.yf * (1/sqrt((d**1*h**1)));

yc = b21*d2h**b22;
resid.yc = resid.yc * (1/sqrt((d2h**1)));

ytotal = b11*d**b12*h**b13+b21*d2h**b22;
resid.ytotal = resid.ytotal * (1/sqrt((d**1*h**1)));

fit yf yc ytotal
start = (b11=0.0 b12=0.0 b13=0.0 b21=0.0 b22=0.0) / itsur;

run;
quit;
```