

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PEDRO MOTTA NUNES

**DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS  
MODAIS OPERACIONAIS USANDO O MÉTODO DE SUBESPAÇO**

CURITIBA

2015

PEDRO MOTTA NUNES

**DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS  
MODAIS OPERACIONAIS USANDO O MÉTODO DE SUBESPAÇO**

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Heraldo Nélio Cambraia

CURITIBA

2015

---

N972d

Nunes, Pedro Motta

Desenvolvimento de métodos de identificação de parâmetros modais operacionais usando o método de subespaço/ Pedro Motta Nunes. – Curitiba, 2015.

92 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2015.

Orientador: Heraldo Nélio Cambraia .

Bibliografia: p. 82-86.

1. Análise modal. 2. Estimativa de parâmetro. 3. Algoritmos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Cambraia, Heraldo Nélio. III. Título.

CDD: 624.17

---

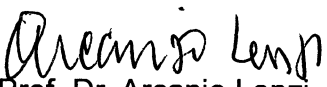
## TERMO DE APROVAÇÃO

PEDRO MOTTA NUNES

DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO O  
MÉTODO DE SUBESPAÇO PARA DADOS DE ENTRADA E SAÍDA  
E DADOS APENAS DE SAÍDA

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Arcanjo Lenzi  
UFSC

  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Paula Carvalho da Silva  
UTFPR

  
Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes  
UFPR

Curitiba, 02 de junho de 2015.

## **AGRADECIMENTOS**

“Em tudo dai graças, porque esta é a vontade de Deus em Cristo Jesus para convosco.” (1 Tessalonicenses 5:18)

Agradeço a Deus, agradeço a minha família, agradeço aos amigos e claro, agradeço ao meu orientador e também amigo.

## RESUMO

A análise do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas consiste em um ramo importante da engenharia. A análise modal experimental (AME) trata do problema da caracterização do comportamento dinâmico estrutural. Basicamente, são calculados os seguintes parâmetros modais: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração natural usando dados experimentais. Estes dados experimentais são oriundos das entradas e saídas medidas em pontos específicos sobre a estrutura. Os tipos de dados que são comumente usados em AME são do tipo função de resposta impulsiva e dados de entrada e saída. Este trabalho propõe o desenvolvimento de um algoritmo que utiliza dados de entrada e saída, como também um algoritmo que utiliza apenas dados de saída, pois algumas vezes a medição da excitação se torna inviável quando não impossível de ser obtida. Esta técnica é conhecida com análise modal operacional (OMA, do inglês *operational modal analysis*). As aplicações mais comuns dessa abordagem OMA são por exemplo, estruturas civis como pontes, edifícios, guindastes, motores a combustão interna, rotores, etc. Estas estruturas possuem em comum a dificuldade de se medir os dados de entrada.

O principal objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento e implementação computacional de técnicas de identificação paramétrica no domínio do tempo, orientadas a subespaços, para dados de entrada e saída, bem como, para dados apenas de saída.

Palavras-chave: Análise modal experimental. Análise modal operacional. Identificação paramétrica. Técnicas orientadas a Subespaço.

## **ABSTRACT**

The analysis of the dynamic behavior of mechanical structures is an important branch of engineering. The experimental modal analysis (AME) addresses the problem of characterizing the structural dynamics. Basically, the modal parameters calculated are: natural frequency, damping factor and natural vibration modes using experimental data. These experimental data comes from inputs and outputs measures at specific points on the structure. Data types that are commonly used in AME are of the impulse response function and input and output data. This paper proposes the development of an algorithm that uses input and output data, as well as an algorithm that uses only output data, since sometimes the excitement measurement becomes impractical if not impossible to obtain. This technique is known as operational modal analysis (OMA). The most common applications of OMA approach are, for example, civil structures such as bridges, buildings, cranes, internal combustion engines, rotors, etc. These structures have in common the difficulty of measuring the input data. The main objective of this work is the development and computational implementation of techniques of parametric identification in time domain, oriented to subspaces, for input and output data as well as for output data only.

**Keywords:** Experimental modal analysis, operational modal analysis, parametric Identification, oriented Subspace techniques.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - PÓRTICO BIDIMENSIONAL .....	49
FIGURA 2 - PÓRTICO DIVIDIDO EM 14 ELEMENTOS COM 15 NÓS .....	50
FIGURA 3 - ELEMENTO PÓRTICO COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE .....	51
FIGURA 4 - PÓRTICO E SUAS RESPECTIVAS COORDENADAS GENERALIZADAS .....	51
FIGURA 5 - FORÇA DE ENTRADA E COODENADAS DE SAÍDA.....	52
FIGURA 6 - MODOS DE VIBRAR EXATOS ASSOCIADOS COM SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS .....	54
FIGURA 7 - VALORES SINGULARES DA MATRIZ $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ .....	56
FIGURA 8 - VALORES SINGULARES DE $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ .....	58
FIGURA 9 - VALORES SINGULARES DE $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ .....	59
FIGURA 10 - MODOS DE VIBRAR IDENTIFICADOS COM RUÍDO NO SINAL DE ENTRADA ( $N=24$ ) .....	61
FIGURA 11 - ESTRUTURA DO TIPO PÓRTICO BIDIMENSIONAL.....	62
FIGURA 12 - PÓRTICO E SUAS RESPECTIVAS COORDENADAS GENERALIZADAS .....	62
FIGURA 13 - FORÇA DE ENTRADA E COODENADAS DE SAÍDA.....	63
FIGURA 14 - VALORES SINGULARES DE $\mathbf{T}^r$ .....	64
FIGURA 15 - FRF'S $H_{11}(f)$ , $H_{21}(f)$ , $H_{31}(f)$ E $H_{41}(f)$ .....	65
FIGURA 16 - SISTEMA COM 6 GRAUS DE LIBERDADE.....	66
FIGURA 17 - MODOS DE VIBRAR EXATOS DO SISTEMA MECÂNICO COM 1 GRAU DE LIBERDADE.....	67
FIGURA 18 - FRF'S DO SISTEMA MASSA-MOLA DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE .....	69
FIGURA 19 - VALORES SINGULARES DE $\mathbf{T}^r$ .....	70
FIGURA 20 - MODOS DE VIBRAÇÃO IDENTIFICADOS .....	71
FIGURA 21 - VALORES SINGULARES DE $\mathbf{T}^r$ .....	72
FIGURA 22 - MODOS DE VIBRAR IDENTIFICADOS DO SISTEMA .....	74
FIGURA 23 - VALORES SINGULARES DE $\mathbf{T}^r$ .....	75

FIGURA 24 - OS MODOS DE VIBRAR DO SISTEMA.....	76
FIGURA 25 - VALORES SINGULARES DA MATRIZ H.....	77

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – FREQUÊNCIAS NATURAIS EXATAS.....	53
TABELA 2 - FREQUÊNCIAS NATURAIS E COORDENADAS DO PRIMEIROS SEIS MODOS.....	53
TABELA 3 – FATORES DE AMORTECIMENTO .....	57
TABELA 4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS EXATAS E IDENTIFICADAS COM RUÍDO INCLUSO .....	60
TABELA 5 - FREQUÊNCIAS NATURAIS E FATORES DE AMORTECIMENTO (N=24) .....	60
TABELA 6 - FREQUÊNCIAS NATURAIS EXATAS E SUAS COORDENADAS GENERALIZADAS DOS MODOS .....	63
TABELA 7 – FREQUÊNCIAS NATURAIS IDENTIFICADAS PARA DIFERENTES ORDENS N DO SISTEMA .....	65
TABELA 8 - FREQUÊNCIAS EXATAS DO SISTEMA MECÂNICO COM 6 GRAUS DE LIBERDADE .....	67
TABELA 9 – FREQUÊNCIAS IDENTIFICADAS PARA DIFERENTES ORDENS (N) DO SISTEMA .....	71
TABELA 10 – FATORES DE AMORTECIMENTO .....	72
TABELA 11 – FREQUÊNCIAS NATURAIS IDENTIFICADAS COM AMORTECIMENTO .....	73
TABELA 12 – FATORES DE AMORTECIMENTO IDENTIFICADOS PARA ORDEM N=12.....	73
TABELA 13 – FREQUÊNCIAS NATURAIS IDENTIFICADAS COM RUÍDO.....	76
TABELA 14 – FATORES DE AMORTECIMENTO IDENTIFICADOS .....	76
TABELA 15 – FREQUÊNCIAS NATURAIS EXATAS E IDENTIFICADAS .....	78

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>7</b>
1.1	IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS E SUA CLASSIFICAÇÃO .....	7
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
1.2.1	Métodos tradicionais .....	11
1.2.2	Métodos de Subespaços .....	13
1.2.3	Métodos Operacionais.....	13
1.3	MOTIVAÇÃO, OBJETIVOS, CONTRIBUIÇÕES E ORGANIZAÇÃO DOTRABALHO .....	16
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES COM PARÂMETROS INVARIANTES NO TEMPO.....</b>	<b>17</b>
2.1	MODELAGEM MATEMÁTICA PARA TEMPO CONTÍNUO.....	17
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA PARA TEMPO DISCRETO.....	21
2.3	RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS MODAIS DE SISTEMAS MODELADOS PARA TEMPO CONTÍNUO E DISCRETO.....	23
2.3.1	RELAÇÃO ENTRADA-SAÍDA DE SISTEMAS LIT.....	24
2.4	PORTE OBSERVÁVEL DA RESPOSTA DO SISTEMA.....	26
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA .....</b>	<b>28</b>
3.1	REALIZAÇÃO DO MODELO NA FORMA DE ESTADO USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA .....	28
3.2	ESTIMATIVA DE PARÂMETROS MODAIS USANDO MÉTODO DE SUB-ESPAÇOS.....	31
3.2.1	Realização para dados de entrada saída livres de ruído .....	32
3.2.2	Realização para dados de entrada saída considerando ruído nos dados de saída .....	33
3.2.3	Algoritmo para identificação de parâmetros modais .....	33
<b>4</b>	<b>MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA .....</b>	<b>35</b>
4.1	IDENTIFICAÇÕES PARAMÉTRICA USANDO O MODELO ARMA.....	35
4.2	IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA USANDO O MODELO DE ESTADO (Algoritmo 1) .....	39

<b>4.3</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA USANDO O MODELO DE ESTADO (Algoritmo 2)</b> .....	<b>43</b>
4.3.1	Realização do sistema usando apenas dados de saída para o algoritmo 2 .....	45
4.3.2	Identificação dos parâmetros modais usando o método de subespaço para o algoritmo 2 .....	47
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	<b>49</b>
<b>5.1</b>	<b>GERAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA E SAÍDA DE UM PÓRTICO USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>49</b>
<b>5.2</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA PARA O PÓRTICO SEM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO</b> .....	<b>55</b>
<b>5.3</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA PARA O PÓRTICO COM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO</b> .....	<b>57</b>
<b>5.4</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA PARA O PÓRTICO COM AMORTECIMENTO E RUÍDO</b> .....	<b>58</b>
<b>5.5</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O PÓRTICO SEM AMORTECIMENTO E SEM RUÍDO USANDO O ALGORITMO 2</b> .....	<b>61</b>
<b>5.6</b>	<b>GERAÇÃO DE DADOS PARA O SISTEMA ESTRUTURAL DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE</b> .....	<b>66</b>
<b>5.7</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O SISTEMA MASSA-MOLA SEM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO USANDO O ALGORITMO 2</b> .....	<b>68</b>
<b>5.8</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O SISTEMA MASSA MOLA COM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO USANDO O ALGORITMO 2</b> .....	<b>72</b>
<b>5.9</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O SISTEMA MASSA MOLA COM AMORTECIMENTO E RUÍDO NA SAÍDA USANDO O ALGORITMO 2</b> .....	<b>74</b>
<b>5.10</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DOS PARAMETROS MODAIS SEM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO USANDO O ALGORITMO 1</b> .....	<b>77</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>80</b>
<b>6.1</b>	<b>CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO</b> .....	<b>80</b>
<b>6.2</b>	<b>SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS</b> .....	<b>81</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>82</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é apresentado um relato conciso das principais características de alguns métodos de identificação de sistemas dinâmicos lineares com parâmetros invariantes no tempo, sua classificação, a revisão bibliográfica, os objetivos e a motivação do presente trabalho. Mais especificamente, os parâmetros modais que serão identificados neste trabalho podem servir, por exemplo, como referência para análise dinâmica-estrutural usando o método de elementos finitos (*updating modal*), simulação, controle, detecção de falhas, avaliação da segurança e integridade estrutural de sistemas mecânicos.

### 1.1 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS E SUA CLASSIFICAÇÃO

A identificação de sistemas dinâmicos aborda o problema de ajuste de modelos matemáticos a partir de uma quantidade de dados experimentais. De maneira geral, o procedimento básico para a realização da identificação de sistemas dinâmicos consiste no cumprimento das seguintes etapas, conforme Ljung (1999) e Söderström e Stoica (1989):

- i) Definição dos dados experimentais mais adequados para extrair a maior quantidade de informação possível a do sistema que está sendo identificado. É importante nesta etapa, delimitar o processo em estudo, definindo o que é a parte do processo e quais são as variáveis a serem medidas. Também é importante considerar a aplicação de técnicas de análise de sinais tais como filtragem, truncamento e escolha adequada da taxas de amostragem, como se vê em Bendat e Piersol (1986) e Newland (1975). Neste trabalho, os dados experimentais usados são obtidos a partir de simulação numérica de testes modais.
- ii) Definição de um conjunto de modelos matemáticos adequados para o problema. A escolha da estrutura do modelo a ser utilizado é uma tarefa fundamental na formulação do problema de identificação. Esta escolha influencia o tipo de problema a ser resolvido, bem como o esforço computacional e a precisão da identificação final dos parâmetros. Este procedimento é conhecido como modelagem matemática. Neste trabalho, são considerados os modelos matemáticos obtidos de equações de diferenças e, principalmente, equações na forma de estado. Um sistema dinâmico representado na forma de estado é aquele descrito por um conjunto de equações de diferenças ou equações diferenciais de primeira ordem.
- iii) Escolha e aplicação do modelo mais apropriado dentro deste conjunto de modelos. Formalmente, a aplicação de um método de identificação consiste em um mapeamento de um conjunto de dados experimentais para um conjunto de parâmetros a ser determinado. Uma tarefa importante nesta etapa consiste na determinação da ordem do modelo apropriado.

iv) Validação do modelo matemático escolhido. Uma vez cumprida a tarefa de identificação do sistema dinâmico, é importante verificar se o modelo obtido representa suficientemente bem os dados experimentais de acordo com o critério especificado, ou seja, a verificação do sucesso do ajuste. Em análise de sistemas dinâmicos, a identificação e a modelagem caminham juntas. O modelo é a base para a identificação e a identificação pode ser vista como uma espécie de validação do modelo dinâmico. Neste trabalho a validação do método desenvolvido consiste na comparação entre os parâmetros verdadeiros do sistema com os identificados.

A análise modal experimental (AME) envolve uma grande quantidade de diferentes áreas de pesquisa em dinâmica estrutural como: correlação modal e atualização modal, testes modais, sub-estruturação modal, modificação modal e análise modal não linear, como se vê em Maia et al. (1997). A identificação de parâmetros modais é fundamental em AME por sua importância econômica e tecnológica, diante da necessidade da caracterização do comportamento dinâmico de estruturas, avaliação de desempenho e detecção de falhas, ou ainda na calibração e refinamento de modelos de elementos finitos.

A identificação de parâmetros modais é considerada como um dos ramos do chamado problema inverso definido por Berman (1984), um processo no qual os dados de entrada e saída são usados na determinação de modelos matemáticos representativos das características dinâmicas do sistema. O propósito da identificação de parâmetros modais consiste, portanto, na estimativa de propriedades dinâmicas do sistema tais como: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos próprios de vibração natural do sistema.

Segundo Maia et al. (1997), nas últimas décadas, devido aos grandes desenvolvimentos na tecnologia dos computadores e dos sistemas de aquisição de dados, e devido às atuais necessidades das comunidades de controle, detecção de falhas e avaliação da integridade estrutural de sistemas mecânicos (JUANG, 1997), a identificação de parâmetros modais desempenha um papel importante na área de projeto mecânico.

Os métodos de identificação de parâmetros modais podem ser classificados como:

i) Paramétricos e não paramétricos: No caso das técnicas de identificação paramétricas, utiliza-se explicitamente um conjunto de parâmetros com significado físico na representação do modelo matemático. O cálculo dos parâmetros do modelo é realizado através da aplicação de algum critério de otimização. Os métodos de otimização mais usuais são os dos mínimos quadrados (LS, do termo em inglês *least squares*), da máxima verossimilhança (ML, *maximum likelihood*), as variáveis instrumentais e outras técnicas usando otimização não linear como apresentadas em Ljung (1999) e Söderström e Stoica (1989) como, por exemplo, a que usa a estimativa do erro de predição (PE, *predictor error*). No caso das técnicas não paramétricas, como apresentadas em Bendat e Piersol (1986) e Newland (1975), os dados experimentais sofrem processamento

numérico que independe, a priori, do prévio conhecimento do sistema físico em estudo.

- ii) Domínios do tempo e da frequência: Os métodos de identificação são classificados ainda quanto ao domínio no qual os dados são tratados numericamente – domínio do tempo ou da frequência. As técnicas de identificação no domínio da frequência são mais antigas e utilizam as chamadas funções de resposta em frequência (FRF) na formulação do modelo. As estimativas das FRF's são calculadas, basicamente, a partir da razão das transformadas discretas de Fourier dos sinais de saída e de entrada. Estas técnicas tornaram-se atraentes para o processamento de dados em microcomputadores desde a formulação da transformada rápida de Fourier (FFT, *fast Fourier transform*) desenvolvida por Cooley e Tukey (1965). Algumas técnicas de processamento de sinais no domínio da frequência podem ser encontradas em Bendat e Piersol (1986), Newland (1975) e Maia et al. (1997). Uma dificuldade na utilização dos métodos no domínio da frequência é a presença de erros devido às influências de vazamento, proveniente do efeito de truncamento dos dados, que causam distorções nas estimativas das FRF's. Segundo Red Horse et al. (1994), estes erros se agravam mais nos picos de ressonância, no caso de sistemas pouco amortecidos com pouca resolução em frequência. Além disso, os métodos em frequência apresentam restrições na identificação de parâmetros modais para sistemas que apresentam grandes razões de amortecimento e frequências naturais muito próximas, especialmente se associados com dados contaminados com ruído, como se vê em Gontier, Smail e Gautier (1993). Alternativamente, há algumas décadas tem-se um grande interesse na aplicação dos métodos no domínio do tempo, ao contrário dos tradicionais métodos do domínio da frequência.

As técnicas no domínio do tempo consistem basicamente em encontrar os parâmetros de uma equação de diferenças ou da forma de estado, com aquelas apresentados, por exemplo, em Ljung (1999) e Söderström e Stoica (1989). Os parâmetros modais são posteriormente calculados usando os parâmetros desses modelos matemáticos.

A utilização dos métodos baseados diretamente nos dados de entrada e saída do sistema resulta na eliminação dos efeitos de vazamento provenientes da aplicação da transformada discreta de Fourier. A literatura mostra que os métodos do domínio do tempo tendem a fornecer melhores resultados quando uma grande quantidade de frequências ou uma alta densidade modal está presente nos dados experimentais.

Finalmente, a escolha de um método de identificação no domínio do tempo ou da frequência, em geral, é orientada em termos do conhecimento prévio de determinadas características do sistema como também das informações requeridas pelo processo de identificação. Estes métodos possuem suas vantagens e desvantagens. Não devem, no entanto, ser visto como alternativas distintas de identificação, mas sim como complementares, sempre que possível.

- iii) Tipos de dados experimentais: Os dados experimentais obtidos como matéria prima para a identificação de sistemas dinâmicos podem ser do

tipo função resposta impulsiva (FRI), entrada-saída ou dados apenas de saída.

- iv) Quanto ao número de modos analisados: O método de identificação é classificado como de um único grau de liberdade quando permitir analisar um único modo de vibrar do sistema de cada vez. O método é chamado múltiplos graus de liberdade quando vários modos de vibrar do sistema são analisados simultaneamente. Os métodos de identificação do domínio do tempo são todos do tipo múltiplos graus de liberdade, enquanto os métodos no domínio da frequência podem ser de um ou múltiplos graus de liberdade Maia et al. (1997)
- v) Quanto ao número de entradas e saídas: Os dados experimentais são obtidos da medição da excitação e da correspondente resposta em diversos pontos da estrutura em um determinado instante. Alguns métodos de identificação são formulados de tal maneira que podem ser aplicados apenas para um único par de dados de excitação e resposta, sendo chamados SISO (*single input single output*). Outros métodos são formulados de modo a permitir utilizar amostras de dados experimentais com simultâneas entradas e saídas. Estes métodos são chamados MISO (*multiple input single output*) ou MIMO (*multiple input multiple output*). Os métodos MISO ou MIMO são chamados também de métodos globais (MAIA et al. ,1997).

A crescente popularidade da utilização dos métodos MIMO em AME deve-se às algumas razões apontadas por Cambraia (2009) e Kurka e Cambraia (2009):

- i) Aplicação de múltiplas entradas permite a distribuição de energia de excitação mais uniforme ao longo da estrutura.
- ii) A aquisição simultânea dos dados de entrada e saída minimiza as diferenças que aparecem como consequência da restrição da invariância no tempo do modelo matemático de equilíbrio de forças do sistema.
- iii) A redundância das informações, que resulta da aquisição múltipla dos sinais dinâmicos de resposta, se reflete beneficemente na estimação dos parâmetros modais, especialmente para sistemas de grande porte com modos acoplados e frequências naturais muito próximas.
- vi) Recursivos e não recursivos: Os métodos recursivos, por suas características de economia de processamento numérico, são utilizados na identificação de sistemas que apresentam características não estacionárias ou em aplicações em tempo real, como se vê em Ljung (1999) e Söderström e Stoica (1989). A identificação não recursiva ocorre quando uma grande quantidade de dados é coletada do sistema e, em seguida, é pós-processada. Normalmente, os algoritmos não recursivos

forneem parâmetros calculados com uma maior precisão, visto que, com uma grande quantidade de dados, a identificação pode ser repetida várias vezes utilizando-se diferentes métodos.

Este trabalho trata, portanto, do desenvolvimento de métodos paramétricos de identificação de parâmetros modais, múltiplos graus de liberdade, não recursivos, implementados no domínio do tempo, usando dados de entrada e saída ou dados apenas das saídas, formulados para o caso MIMO usando modelos na forma de estado puramente linear com parâmetros invariantes no tempo.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção apresenta uma revisão bibliográfica a respeito do tema a ser desenvolvido neste trabalho. São discutidas as principais características dos métodos de identificação mais tradicionais em análise modal, bem como os métodos de subespaços e operacionais (ou aqueles que usam somente dados de saída).

### 1.2.1 Métodos tradicionais

A análise de sistemas dinâmicos no domínio do tempo até a década de 80 abrange uma grande quantidade de aplicações em diversas áreas do conhecimento científico como apresentado em Cambraia (2009) e outras referências contidas neste trabalho, tais como: na modelagem de processos estocásticos, na teoria de previsão econômica, na teoria de filtros digitais e processamento de sinais, em controle digital, e de maior interesse deste trabalho, na análise modal teórica e experimental.

As técnicas de identificação modal no domínio do tempo começaram a ser difundidas na década de 70 por Cole (1973), que desenvolveu um método de análise de vibrações utilizando uma função chamada *Randomdec*. Ibrahim e Mikulcik (1976) e Ibrahim (1977) desenvolveram o chamado *Ibrahim Time Domain Method* (ITD). Ibrahim (1979) associou a função *Randomdec* ao método ITD resultando na *Randomdec Time Domain Technique*. Brown et al. (1979) desenvolveram os algoritmos de exponenciais complexas usando o método de mínimos quadrados para o cálculo dos coeficientes auto regressivos do modelo para a metodologia SISO.

Na década de 80 incluem-se os algoritmos no domínio do tempo tais como o *Polyrefence Complex Exponential Method* desenvolvido por Vold e Rocklin (1982) e Vold et al. (1982), o *Time Domain Direct Parameter Method* desenvolvido por Leuridan (1984) como extensão do método de exponenciais complexas para a metodologia MIMO, e o método *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) desenvolvido por Juang e Pappa (1985), Longman (1985) e Juang (1989).

Na segunda metade da década de 80 e na década de 90, surgiram vários trabalhos visando a comparação e à unificação dos algoritmos de identificação modal, principalmente os implementados no domínio do tempo. Os pesquisadores Leuridan, Brown e Allemang (1986) procuraram sintetizar a formulação de alguns métodos de identificação no domínio do tempo, enquanto Juang (1987) apresenta a relação entre alguns métodos de realização de sistemas lineares em AME tanto no

domínio do tempo como no domínio da frequência. Nota-se que o termo realização de sistemas é usado na teoria de controle referindo-se ao processo de ajustar um modelo matemático (em geral, uma representação em espaço de estado) a partir de dados experimentais.

Cooper (1989) apresenta um trabalho comparando vários métodos de identificação no domínio do tempo, em uma análise teórica suportada por estudo estatístico com resultados apresentados em forma de simulação numérica, onde os dados são corrompidos por ruído branco. Estes métodos são apresentados por Cooper (1990) em testes experimentais em aeronáutica, comparando os diferentes resultados de métodos baseados em otimização por mínimos quadrados no domínio do tempo. Pesquisadores como Juang, Cooper e Wright (1988) e Cooper e Wright (1991) sintetizam os métodos *Polyreference* e ITD em uma abordagem clássica de mínimos quadrados utilizando o conceito da chamada matriz de correlação.

Allemang, Brown e Fladung (1994) apresentam um trabalho enfatizando a importância da comparação destes diversos algoritmos utilizados na identificação modal, visando contrastar as características numéricas entres eles. Neste trabalho, os autores reformulam alguns algoritmos usando uma estrutura matemática comum entre eles em termos de polinômios matriciais.

Juang (1997) relaciona importantes trabalhos discutindo aspectos comuns entre alguns algoritmos recentes de identificação no domínio do tempo usando dados de entrada/saída baseados na matriz de informação. Além disso, outros trabalhos podem ser citados como Juang et al. (1988) que propuseram um método de identificação usando a teoria de filtros de Kalman, Fassois (2001) e Florakis, Fassois e Hemes (2001) que estudaram os métodos ARX e ARMAX para o caso MIMO.

A influência do ruído, sempre presente em dados experimentais, sobre a qualidade da identificação paramétrica é bastante difícil de ser contornada. A maioria dos algoritmos de identificação modal utiliza o método de mínimos quadrados como parte integrante de sua formulação. Entretanto, é sabido que para dados contaminados com ruído, a utilização da otimização por mínimos quadrados produz estimativas distorcidas dos parâmetros modais, principalmente dos fatores de amortecimento e dos resíduos modais. Para minimizar este problema costuma-se adotar uma sobredeterminação da ordem dos modelos de identificação. Este procedimento introduz modos computacionais, sem significado físico, que não pertencem ao sistema e, portanto, devem ser separados numa etapa posterior do processo de identificação.

Uma alternativa para obter melhores estimativas dos parâmetros modais para o caso de dados com ruído consiste na utilização de modelos de média móvel, como o ARMA, para o caso da identificação usando dados das FRI's, ou o ARMAX, para o caso de dados de entradas e saídas, usando estimadores do tipo máxima verossimilhança como descritos em Reinsel, Basu e Yap (1992). Entretanto, estes métodos requerem elevado custo computacional, tornando-os de difícil aplicação, principalmente para o caso MIMO.

Uma boa quantidade destes métodos tradicionais de identificação de parâmetros modais podem ser encontrados em Maia et al. (1997).

### 1.2.2 Métodos de Subespaços

Outra possibilidade para a melhoria da qualidade das estimativas dos parâmetros modais consiste na utilização dos chamados métodos de subespaços, como abordado em Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst (1993), Viberg (1995), Viberg e Ottersten (1994) e Kurka e Cambraia (2009).

Os métodos de subespaços oferecem uma maneira numericamente versátil para ajustar um modelo matemático linear e com parâmetros invariantes no tempo na forma de estado a partir de dados experimentais. Possuem um custo computacional menor e são mais simples de serem implementados, comparados aos métodos usando otimização não linear, pois usam apenas técnicas da álgebra linear, tais como, redução de *rank* via decomposição em valores singulares (SVD) e solução de equações algébricas lineares por mínimos quadrados.

Estes métodos tiveram suas origens na teoria da realização de modelos lineares na forma de estado (HOTELLING et al, 1970, VIBERG, 1995), e se popularizaram a partir da segunda metade da década de 70 com o surgimento dos primeiros algoritmos para o cálculo da SVD (KUNG, 1979). Basicamente, a maior parte dos métodos de subespaços tem muito em comum com os algoritmos de realização propostos por Ho e Kalman (1966). Mais especificamente, estes métodos envolvem a estimativa de uma matriz de observabilidade estendida através de uma operação de redução de *rank* sobre uma matriz formada a partir dos dados experimentais (FRI's, entrada e saída ou apenas saída), cuja estrutura é imposta pelo modelo na forma de estado, usando SVD. Uma vez estimada a matriz de observabilidade estendida do sistema, as matrizes de estado e de influência da saída são calculadas usando uma propriedade de invariância ao deslocamento da matriz de observabilidade. Essas matrizes são, por sua vez, usadas para a identificação dos parâmetros modais do sistema.

As várias técnicas de identificação na forma de estado se diferem pela maneira que a matriz de observabilidade estendida é estimada. Além disso, é importante observar que os métodos de subespaços, podem ser implementados tanto para dados do tipo FRI's, entrada-saída ou para dados apenas de saída.

### 1.2.3 Métodos Operacionais

Muitas vezes as condições operacionais de estruturas complexas podem ser muito diferentes das condições ideais em que são realizados os testes modais em laboratório.

A análise modal operacional (OMA, *operational modal analysis*), como pode ser visto nos artigos do Mevel, Basseville e Goursat (2002), Lardies (2009) e Lardies e Minh-NgiTa (2010), utiliza apenas os dados das saídas do sistema para identificar seus parâmetros. São testes modais cuja entrada ou excitação é desconhecida e, portanto, não pode ser medida. Este tipo de entrada é muitas vezes referida como excitação ambiente, como ocorre, por exemplo, quando o vento excita uma estrutura civil. Entretanto, esse tipo de entrada é, muitas vezes, assumida ser do tipo Gaussiana branca, possuindo uma grande quantidade de componentes espectrais na faixa de frequências a ser analisada.

Embora a OMA trate com dados experimentais apenas da saída, a literatura aponta certas vantagens na utilização deste tipo de abordagem, tais como facilidade em sua utilização e demanda de menor de tempo de teste por não usar excitação

artificial e nem as condições de contorno ideais construídas em testes de laboratório (LARDIES, 2010). Este método tem despertado interesse nas áreas das engenharias mecânica e civil, por suas aplicações em grandes estruturas (MEVEL, BASSEVILLE E GOURSAT, 2002; LARDIES, 2009; LARDIES e MINH-NGITA, 2010), tais como máquinas rotativas e turbinas sujeitas às excitações turbulentas, estruturas aeronáuticas e testes em túneis de vento, plataformas *off-shore* e construções civis sujeitas ao vento e tráfego, fricção em rolamentos, etc.

Hermans e Auweraer (1999) apresentaram um trabalho muito importante, onde são discutidos alguns aspectos teóricos e práticos a respeito dos métodos de identificação tipo OMA, incluindo as técnicas *peak-picking* (MAIA et al., 1997) aplicadas aos autoespectros e espectros cruzados das medições de entrada e saída, e ajustes de modelos autorregressivos e de métodos de subespaços. Aplicações industriais como em suspensão automotiva, *flutter* de aeronaves e pontes sujeitas à excitação ambiente, também são mencionadas.

Mevel et al. (2002) aplicaram OMA para detecção de falhas em estruturas mecânicas e civis. Neste trabalho, são usados métodos de subespaços na identificação dos parâmetros estruturais em uma abordagem multivariável, enfatizando a identificação de frequências naturais, fatores de amortecimento e dos modos de vibração natural. A análise de falhas é realizada aplicando um teste estatístico do tipo  $\chi^2$  que resulta em uma análise de sensibilidade dos resíduos obtidos a partir das incertezas dos parâmetros modais identificados para diferentes condições de entrada, que são assumidas não estacionárias e que não podem ser medidas.

Campel (2003), apresenta um trabalho interessante sobre monitoramento de falhas em sistemas mecânicos em condições operacionais, usando uma abordagem multidimensional. Neste trabalho, é construída uma matriz de observação de sintomas, obtida de dados de medições experimentais, de onde podem ser extraídas informações para o monitoramento da condição de falha do sistema. Do ponto de vista algébrico, é determinado o chamado espaço ortogonal de falhas generalizado, que é obtido através da aplicação de sucessivas operações de redução de *rank* sobre o chamado espaço de sintomas, normalmente não ortogonal, usando SVD. Embora esta referência não esteja associada com a OMA, o uso do procedimento de redução de *rank* via SVD chama bastante atenção. Outro trabalho sobre esse assunto é apresentado por Campel (2008).

Lu e Law (2006) desenvolveram um método de identificação paramétrica de sistemas lineares e da força de entrada a partir de dados apenas da saída. São estudadas forças do tipo impulsiva e senoidal. O método é baseado na sensibilidade da resposta dinâmica da estrutura com relação aos parâmetros. Uma grande quantidade de artigos sobre métodos de detecção de falhas, da década de 90, é apresentada neste trabalho.

Reynders e Roeck (2007) desenvolveram um método de identificação de parâmetros de sistema dinâmicos lineares com parâmetros invariantes no tempo orientado a subespaço, combinando os efeitos determinísticos e estocásticos na modelagem na forma de espaço, tanto para as variáveis de estado, bem como para as saídas observadas do sistema. Nessa referência os autores chamam atenção para o problema da falta de conteúdo espectral na entrada do tipo operacional, resultando na identificação de apenas uma quantidade limitada de modos de vibração. Importantes aspectos teóricos relacionados com a modelagem matemática são apresentados.

Zaghbani e Songmene (2009) estudaram o monitoramento da estabilidade de operações de máquinas ferramentas que funcionam a altas velocidades usando OMA. Tal estabilidade de operações determina a confiabilidade da máquina e a qualidade da peça a ser produzida. O monitoramento é realizado através da análise espectral de testes de impacto para diferentes configurações da máquina ferramenta, onde os parâmetros modais (frequências naturais e fatores de amortecimento) calculados para rotação de zero RPM são comparados com os parâmetros obtidos em outras rotações de serviço. As medições são realizadas em sobre-pontos fixos da máquina. Numericamente, o ajuste dos dados foi obtido por dois procedimentos distintos, o ajuste de um modelo ARMA e uma técnica de mínimos quadrados de exponenciais complexas, cujos resultados foram bem similares segundo os autores. Este trabalho demonstra como OMA pode ser explorado na indústria mecânica.

Rainieri e Fabbrocino (2009) propuseram um método OMA de identificação automatizado, ou seja, um algoritmo que realiza a análise modal *on-line*, sem a interferência de um analista, para o monitoramento das condições de integridade estrutural em estruturas civis. Este método é do tipo não paramétrico e implementado no domínio da frequência. Uma grande quantidade de referências é apresentada nesse artigo que dizem respeito à questão do estado da arte sobre métodos de identificação automatizados.

Vu et al. (2012) apresentam um trabalho relacionado com análise modal e OMA automatizada usando análise espectral válida para multi-sensores. Algebricamente, os parâmetros são estimados através do ajuste por mínimos quadrados sobre um modelo autorregressivo. A identificação da ordem do modelo, frequência natural e fatores de amortecimento são apresentados. Além disso, um teste de laboratório é conduzido usando uma placa engastada e um teste modal operacional é realizado em um grande gerador de energia elétrica visando o monitoramento de sua integridade estrutural. Nota-se que este método é também não paramétrico e não são determinados os modos próprios de vibração natural dos sistemas mecânicos analisados.

Um trabalho muito interessante que trata da realização da OMA em monumentos antigos de Portugal foi publicado por Ramos (2010). Nesse trabalho a integridade estrutural é monitorada como parte de um processo que ajuda na preservação de construções históricas. São usados dados de vibrações, temperatura e umidade relativa. A OMA é usada para estimar os parâmetros modais seguido de uma análise estatística para avaliar as influências do meio sobre a resposta dinâmica. São apresentados os modos de vibração naturais obtidos via OMA e os modos de vibração obtidos pelo método de elementos finitos.

Lardies (2010) apresenta dois métodos distintos de identificação de parâmetros modais do tipo OMA implementados no domínio do tempo. Um deles é baseado no ajuste do modelo autoregressivo com média móvel (ARMAV, *autoregressive moving average vector*) por mínimos quadrados e o outro modelado em termos de espaço de estado. Nessa referência, apresentam-se as formulações desses métodos destacando a equivalência entre eles no que diz respeito aos resultados obtidos na identificação de parâmetros modais. Basicamente, esses métodos contam com a aplicação de SVD sobre uma matriz de estrutura Hankel, formada pela covariância dos dados de saída.

Lardies e Ta (2010) propõem também um método de identificação de parâmetros modais em estruturas que utilizam cabos de aço suspensos (como, por exemplo, pontes e guindastes), usando apenas os dados experimentais de saída,

implementados nos domínios do tempo e tempo-frequência. O método de identificação OMA implementado domínios tempo-frequência é justificado pelo uso da transformação *wavelet*. Nessa referência, são apresentadas duas aplicações em cabos suspensos.

### 1.3 MOTIVAÇÃO, OBJETIVOS, CONTRIBUIÇÕES E ORGANIZAÇÃO DOTRABALHO

A principal motivação do presente trabalho consiste no cumprimento dos seguintes itens:

- i) Desenvolvimento de códigos computacionais aplicados na análise modal usando dados de entrada e saída e dados apenas da saída.
- ii) Comparação da qualidade da identificação de parâmetros modais usando técnicas descritas no item anterior.
- iii) Possibilitar, posteriormente, em próximas contribuições, o desenvolvimento de técnicas para aplicação em monitoramento de integridade estrutural e análise de falhas usando OMA como discutido na revisão bibliográfica apresentada na seção anterior.

O objetivo do trabalho consiste, portanto, no desenvolvimento de algoritmos de identificação de parâmetros modais, baseado na modelagem de estado linear com parâmetros invariantes no tempo, orientado a subespaços. A qualidade de identificação dos parâmetros modais será demonstrada por meio de testes usando dados obtidos de simulação computacional.

Espera-se que este trabalho contribua na verificação da qualidade da identificação de parâmetros modais via OMA, em comparação com os obtidos usando dados de entrada e saída. Além disso, espera-se também que o trabalho sirva como subsídio e motivação para posteriores aplicações em outras técnicas de análise de falhas e monitoramento de integridade estrutural.

O presente trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 2, é apresentada a modelagem matemática para sistemas mecânicos lineares com parâmetros invariantes no tempo, que será usada para a formulação e cálculo dos parâmetros modais de sistemas estruturais. No capítulo 3, é apresentado um método de identificação de parâmetros modais usando dados de entrada e saída. No capítulo 4, um método de identificação de parâmetros modais para dados apenas da entrada é apresentado. No capítulo 5, são apresentados resultados da identificação modal de sistemas estruturais para dados de entrada e saída e para dados apenas de saída. Finalmente, as conclusões e sugestões para futuros trabalhos a partir deste estudo são apresentadas no capítulo 6. No apêndice A, é apresentada uma revisão dos conceitos básicos da álgebra linear tais como, solução de problema de mínimos quadrados, SVD e cálculo da pseudo-inversa de uma matriz retangular.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS LINEARES COM PARÂMETROS INVARIANTES NO TEMPO

Este capítulo apresenta elementos sobre a modelagem matemática usada na análise modal experimental (AME). São apresentadas as modelagens de sistemas mecânicos lineares a parâmetros concentrados e invariantes no tempo, válidas para tempo contínuo, para descrever o problema da dinâmica estrutural; e para tempo discreto, para obter a observação das variáveis que serão usadas como matéria prima para os métodos de identificação de parâmetros modais.

Como o mecanismo de dissipação de energia usado na presente modelagem é do tipo viscoso não necessariamente proporcional e os métodos de identificação paramétricas tratados neste trabalho são do tipo de subespaços, é necessário que o modelo seja descrito na forma de estado.

### 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA TEMPO CONTÍNUO

A dinâmica de sistemas mecânicos evolui em tempo contínuo na natureza. Um sistema mecânico linear a parâmetros concentrados e invariantes no tempo (LIT), com  $f$  graus de liberdade, pode ser modelado, em tempo contínuo, pela seguinte equação diferencial ordinária (MAIA et al., 1997):

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

onde  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  e  $\bar{\mathbf{K}}$ , são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, todas de dimensão  $f \times f$ . Os vetores  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{f}(t)$ , ambos de dimensão  $f \times 1$ , denotam, respectivamente, as coordenadas generalizadas do sistema mecânico e as forças externas que atuam sobre o mesmo. Deve-se observar, entretanto, que o vetor  $\mathbf{f}(t)$  pode conter algumas componentes nulas.

Definindo-se:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

como o vetor de estado de dimensão  $n \times 1$ , onde  $n = 2f$ , a equação (2.1) pode ser expressa de maneira equivalente na forma de estado como,

$$\bar{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (2.3)$$

Com as matrizes definidas da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  são matrizes reais e simétricas de dimensão  $n \times n$ ,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  é um vetor de dimensão  $n \times 1$  e  $\mathbf{0}$  denota vetor e matrizes nulas de dimensões apropriadas.

O comportamento próprio do sistema mecânico acima pode ser definido através de um conjunto de parâmetros modais, tais como: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos naturais de vibração. Matematicamente, tal comportamento próprio pode ser descrito através da análise da solução do problema de vibração livre, dada por:

$$\bar{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

A solução do problema linear com parâmetros invariantes no tempo acima é assumida como

$$\mathbf{x}(t) = \Psi e^{\lambda t} \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  é um escalar complexo e  $\Psi$  é um vetor complexo de dimensão  $n \times 1$ .

Substituindo a Equação (2.6) em (2.5), obtém-se o seguinte:

$$(\lambda \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}})\Psi e^{\lambda t} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Como o termo escalar  $e^{\lambda t}$ , da equação acima, não é zero, resulta então que

$$(\lambda \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}})\Psi = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

O objetivo agora consiste na determinação do termo escalar  $\lambda$  e do vetor  $\Psi$ , partes integrantes da solução do problema livre dada pela Equação (2.6). A solução trivial do sistema de equações algébricas lineares descrito pela Equação (2.8) leva a  $\Psi = \mathbf{0}$ . Entretanto, esta solução  $\Psi = \mathbf{0}$  não interessa, pois anularia a solução  $\mathbf{x}(t) = \Psi e^{\lambda t}$ . Então, para evitar tal solução trivial, impõe-se que:

$$\det(\lambda \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) = 0 \quad (2.9)$$

Onde o termo  $\det(\cdot)$  denota determinante de uma matriz.

A Equação (2.8) representa um problema de autovalor da matriz  $-\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ , sendo que as constantes complexas  $\lambda$  são os autovalores e o vetor  $\Psi$  os autovetores de  $-\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ . A Equação (2.9) leva ao chamado polinômio característico cujas raízes são os autovalores de  $-\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ .

É possível mostrar que, para o caso de vibração de um sistema mecânico sub-amortecido, os autovalores de  $-\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$  se apresentam em pares conjugados (MAIA et al., 1997), como

$$\lambda_j, \lambda_{j+1} = -\omega_{n_j} \xi_j \pm i \omega_{n_j} \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad j = 1: f \quad (2.10)$$

Onde  $\omega_{n_j}$  e  $\xi_j$  denotam, respectivamente, a frequência natural e o fator de amortecimento associado ao  $j$ -ésimo modo sub-amortecido do sistema mecânico. Neste capítulo, considera-se que os autovalores sejam todos distintos.

Com base na Equações (2.2) e (2.6), as expressões de  $\mathbf{q}(t)$  e  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  podem ser escritas como,

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\varphi} e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \lambda \boldsymbol{\varphi} e^{\lambda t} \quad (2.11)$$

sendo  $\boldsymbol{\varphi}$  um vetor de dimensão  $f \times 1$ . Portanto, os autovetores  $\boldsymbol{\Psi}_j$ , do problema descrito pela Equação (2.8), possuem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Psi}_j = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_j \\ \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j \end{Bmatrix} \quad j = 1:n \quad (2.12)$$

Define-se matriz modal  $\boldsymbol{\Psi}$ , de dimensão  $n \times n$ , como a matriz cujas  $n$  colunas são representadas pelos  $n$  autovetores  $\boldsymbol{\Psi}_j$  da matriz  $-\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ , de modo que:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\Psi}_n] = \left[ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \lambda_1 \boldsymbol{\varphi}_1 \end{Bmatrix} \quad \dots \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_n \\ \lambda_n \boldsymbol{\varphi}_n \end{Bmatrix} \right] \quad (2.13)$$

É possível mostrar também que a matriz modal  $\boldsymbol{\Psi}$  possui as seguintes propriedades de ortogonalidade (MAIA et al., 1997),

$$\boldsymbol{\Psi}^T \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}_{n \times n} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Psi}^T \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\Psi} = -\boldsymbol{\Lambda} \quad (2.14)$$

onde:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda^* \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi}^* \\ \boldsymbol{\Phi} \lambda & \boldsymbol{\Phi}^* \lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

são ambas matrizes de dimensão  $n \times n$  (o símbolo “\*” denota conjugação complexa), e sendo que as matrizes,

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}[\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_f] \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Phi} = [\{\boldsymbol{\varphi}_1\} \quad \dots \quad \{\boldsymbol{\varphi}_f\}] \quad (2.16)$$

ambas de dimensão  $f \times f$  contém, respectivamente, os  $f$  autovalores (ou polos do sistema modelado em tempo contínuo)  $\lambda_j$  e os  $f$  modos de vibração naturais  $\{\boldsymbol{\varphi}_j\}$  associados do sistema mecânico descrito pela Equação (2.1).

Para os propósitos de identificação de parâmetros modais, é conveniente representar o sistema mecânico descrito pela Equação (2.3) na seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{E} \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{F} = -\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \quad (2.18)$$

A matriz  $\mathbf{F}$ , de dimensão  $n \times n$ , é chamada de matriz de estado para tempo contínuo e fornece uma descrição completa do sistema mecânico modelado em tempo contínuo, pois, segundo a Equação (2.17), a variável de estado  $\mathbf{x}(t)$  é conectada com sua variação temporal  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  através da matriz  $\mathbf{F}$ .

Como  $\mathbf{F} = -\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$ , como mostra a Equação (2.18), as matrizes  $\mathbf{\Lambda}$  e  $\mathbf{\Psi}$  são formadas, respectivamente, pelos autovalores e autovetores da matriz do sistema  $\mathbf{F}$ , sendo válida, portanto, a seguinte diagonalização da matriz  $\mathbf{F}$  como

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Psi}^{-1} \quad (2.19)$$

A solução  $\mathbf{x}(t)$  da Equação (2.17), para dois instantes distintos  $t_1$  e  $t_2$ , é dada pela seguinte equação (LUENBERGER, 1979),

$$\mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{F}(t_2-t_1)}\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{F}(t_2-\tau)}\mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}(\tau)d\tau \quad (2.20)$$

Além disso, para sistemas LIT, o termo

$$e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}t + \frac{\mathbf{F}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{F}^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{F}^k t^k}{k!} + \dots \quad (2.21)$$

que representa uma série formada de infinitas parcelas, que pode ser facilmente calculada usando as matrizes  $\mathbf{\Lambda}$  e  $\mathbf{\Psi}$  como (LUENBERGER, 1979),

$$e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{\Psi}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{\Psi}^{-1} \quad (2.22)$$

Portanto, a equação (2.20) pode ser reescrita em termos das matrizes  $\mathbf{\Lambda}$  e  $\mathbf{\Psi}$  como:

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{\Psi}e^{\mathbf{\Lambda}(t_2-t_1)}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{\Psi}e^{\mathbf{\Lambda}(t_2-\tau)}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA TEMPO DISCRETO

Os dados experimentais de vibração são, em geral, amostrados em instantes discretos, igualmente espaçados, por um intervalo de tempo  $\Delta t$ . A modelagem matemática feita na seção anterior, entretanto, foi desenvolvida para tempo contínuo. Para passar a informação da modelagem em tempo contínuo para tempo discreto usa-se a chamada discretização de ordem zero, que consiste em manter a função de entrada  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  da Equação (2.17) constante durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Matematicamente, definindo-se

$$t_1 = k\Delta t \quad \text{e} \quad t_2 = (k+1)\Delta t \quad (2.24)$$

como dois instantes consecutivos separados de um intervalo de tempo  $\Delta t$ , tem-se que:

$$u(t_1) = u(k\Delta t) \quad \text{para} \quad k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t \quad (2.25)$$

Substituindo a Equação (2.25) em (2.20) para os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , obtém-se o seguinte:

$$\mathbf{x}([k+1]\Delta t) = e^{\mathbf{F}\Delta t} \mathbf{x}(k\Delta t) + \int_{t_1=k\Delta t}^{t_2=(k+1)\Delta t} e^{\mathbf{F}((k+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{E} \bar{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

Como o termo  $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$  é assumido ser constante durante o intervalo de discretização  $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$  e vale  $u(k\Delta t)$ , a equação (2.26) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x}((k+1)\Delta t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k\Delta t) + \bar{\mathbf{B}}_d \bar{\mathbf{u}}(k\Delta t) \quad (2.27)$$

Ou ainda, definindo-se o termo  $k = k\Delta t$ , a Equação (2.27) acima torna-se:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \bar{\mathbf{B}}_d \bar{u}[k] \quad (2.28)$$

Onde:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\Delta t} \quad (2.29)$$

e

$$\bar{\mathbf{B}}_d = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{A}((k+1)\Delta t - \tau) \mathbf{E} d\tau \quad (2.30)$$

são matrizes ambas de dimensão  $n \times n$  chamadas, respectivamente, matriz de estado do sistema e matriz de influência da entrada para tempo discreto.

Considerando que a matriz  $\mathbf{E}$  é constante e fazendo a mudança de variável do tipo  $\rho = (k+1)\Delta t - \tau$  com  $d\rho = -d\tau$ , tem-se que  $\rho = \Delta t$  para  $\tau = k\Delta t$  e  $\rho = 0$  para  $\tau = (k+1)\Delta t$ . Substituindo estes termos na matriz  $\bar{\mathbf{B}}_d$  da Equação (2.30) obtém-se o seguinte:

$$\bar{\mathbf{B}}_d = \left[ -\int_{\Delta t}^0 \mathbf{A}(\rho) d\rho \right] \mathbf{E} = \left[ \int_0^{\Delta t} \mathbf{A}(\rho) d\rho \right] \mathbf{E} = \left[ \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{F}\rho} d\rho \right] \mathbf{E} \quad (2.31)$$

Considerando que  $\int_0^t e^{a\rho} d\rho = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$ , tem-se, então, por analogia, que a equação (2.31) pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{B}}_d = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{E} \quad (2.32)$$

A parte homogênea para o sistema dinâmico descrito pela Equação (2.28) é:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] \quad (2.33)$$

Cuja solução é assumida possuir a forma,

$$\mathbf{x}[k] = \boldsymbol{\Psi} z^k \quad (2.34)$$

onde  $z$  é uma constante complexa e  $\boldsymbol{\Psi}$  é um vetor complexo de dimensão  $n \times 1$ .

Substituindo a Equação (2.34) em (2.33), obtém-se:

$$\boldsymbol{\Psi} z^{k+1} = \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} z^k \quad (2.35)$$

Que leva ao seguinte problema de autovalor

$$(z \mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (2.36)$$

Sendo que este problema de autovalor tem solução não trivial se e somente se a equação polinomial característica for obtida da seguinte forma:

$$\det(z \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.37)$$

Assim, as  $n$  raízes do polinômio característico, obtido da Equação (2.37), são os  $n$  autovalores  $z_j$  da matriz  $\mathbf{A}$ , sendo que para cada autovalor existe um autovetor  $\boldsymbol{\Psi}_j$  correspondente, com  $j=1:n$ .

A matriz modal complexa  $\boldsymbol{\Psi}$  é obtida amostrando todos os  $n$  autovetores

$$\Psi = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \dots \quad \Psi_n] \quad (2.38)$$

Esta matriz transforma a matriz  $\mathbf{A}$  em uma matriz diagonal  $\mathbf{Z} = \text{diag}[z_1 \quad \dots \quad z_n]$ , que contém os  $n$  autovalores como:

$$\Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi = \mathbf{Z} \quad j = 1:n \quad (2.39)$$

ou

$$\mathbf{A} = \Psi \mathbf{Z} \Psi^{-1} \quad (2.40)$$

A solução da Equação (2.28) para dois instantes distintos  $k_1$  e  $k_2$  é dada pela seguinte equação (LUENBERGER, 1979):

$$\mathbf{x}(k_2) = \Psi \mathbf{Z}^{(k_2-k_1)} \Psi^{-1} \mathbf{x}(k_1) + \sum_{l=0}^{k_2-1} \Psi \mathbf{Z}^{k-l-1} \Psi^{-1} \bar{\mathbf{B}}_d(l) \bar{\mathbf{u}}(l) \quad (2.41)$$

### 2.3 RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS MODAIS DE SISTEMAS MODELADOS PARA TEMPO CONTÍNUO E DISCRETO

Neste momento, é necessário estabelecer uma relação entre os autovalores calculados das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$ , ou seja, do sistema mecânico modelado em tempo discreto e em tempo contínuo.

A Equação (2.29) ajuda a estabelecer tal relação. Assim, os  $n$  autovalores do sistema  $z_j$  e  $\lambda_j$ , modelado em tempos discreto e contínuo, respectivamente, são relacionados por

$$z_j = e^{\lambda_j \Delta t} \quad j = 1:n \quad (2.42)$$

Entretanto, os autovetores, que representam os modos de vibração, para ambas as modelagens, são equivalentes, pois cada modo de vibrar do sistema mecânico independe do tipo de modelagem usada – se tempo contínuo ou tempo discreto.

Usando as Equações (2.10) e (2.42), os parâmetros modais do sistema mecânico descrito pela Equação (2.1) são determinados por:

$$\lambda_j = \frac{\ln(z_j)}{\Delta t} \quad (2.43)$$

$$\omega_j = |\lambda_j| \quad \text{em rad/s} \quad (2.44)$$

$$f_j = \frac{|\lambda_j|}{2\pi} \quad \text{em Hz} \quad (2.45)$$

$$\zeta_j = \frac{-\Re(\lambda_j)}{|\lambda_j|} \quad (2.46)$$

Onde  $\ln(\cdot)$  denota logaritmo natural e  $j = 1:n$ .

### 2.3.1 RELAÇÃO ENTRADA-SAÍDA DE SISTEMAS LIT

A relação entrada-saída de sistemas LIT para tempo contínuo, pode ser obtida através da solução de  $x(t)$  da Equação (2.23) para a condição inicial  $x(0) = 0$  como:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \Psi e^{\Lambda(t-\tau)} \Psi^{-1} \mathbf{E} \bar{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

Onde os termos entrada e saída aqui são descritos, respectivamente, pelo termo força  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  e pelo vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$ .

Usando as condições de ortogonalidade da matriz modal  $\Psi^T \bar{\mathbf{A}} \Psi = \mathbf{I}_{n \times n}$ , dada pela Equação (2.14), e o fato de que  $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}}^{-1}$  e  $\mathbf{F} = \Psi \Lambda \Psi^{-1}$ , conforme mostram as Equações (2.2) e (2.3), tem-se que,

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} = \left( \Psi^{-T} \mathbf{I}_{n \times n} \Psi^{-1} \right)^{-1} = \Psi \Psi^T \quad (2.48)$$

Substituindo o termo  $\mathbf{E}$  obtido da Equação (2.48) na Equação (2.47), obtém-se que:

$$x(t) = \int_0^t \Psi e^{\Lambda(t-\tau)} \Psi^T \bar{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \bar{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

onde o termo

$$\mathbf{H}(t) = \Psi e^{\Lambda t} \Psi^T \quad (2.50)$$

é uma função matricial de dimensão  $n \times n$ .

A Equação (2.49) estabelece que o vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$  pode ser expresso através da integral de convolução entre a função matricial  $\mathbf{H}(t)$  e a entrada  $\bar{\mathbf{u}}(t)$ . Além disso, a função  $\mathbf{H}(t)$  é o núcleo desta integral de convolução e representa fisicamente uma matriz de funções de respostas impulsivas (FRI)'s como:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{\Psi} e^{\Lambda t} \mathbf{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}(t) & \cdots & \mathbf{h}_{1n}(t) \\ \mathbf{h}_{21}(t) & \cdots & \mathbf{h}_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{h}_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

sendo que o  $ij$ -ésimo elemento  $h_{ij}(t)$  de  $\mathbf{H}(t)$  representa a resposta na saída  $i$ , no instante  $t$ , devido a ação de uma força do tipo impulso unitário aplicada na entrada  $j$ .

Além disso, usando a Equação (2.15), pode-se escrever o seguinte:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{\Psi} e^{\Lambda t} \mathbf{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Phi}^* \\ \mathbf{\Phi}\lambda & \mathbf{\Phi}^*\lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^* t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Phi}\lambda \\ \mathbf{\Phi}^* & \mathbf{\Phi}^*\lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Agora, desenvolvendo a Equação (2.52) como

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{11} & \cdots & \mathbf{\Phi}_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Phi}_{f1} & \cdots & \mathbf{\Phi}_{ff} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{11}^* & \cdots & \mathbf{\Phi}_{1f}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Phi}_{f1}^* & \cdots & \mathbf{\Phi}_{ff}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{\Phi}_{11} & \cdots & \lambda_f \mathbf{\Phi}_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{\Phi}_{f1} & \cdots & \lambda_f \mathbf{\Phi}_{ff} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1^* \mathbf{\Phi}_{11}^* & \cdots & \lambda_f^* \mathbf{\Phi}_{1f}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^* \mathbf{\Phi}_{f1}^* & \cdots & \lambda_f^* \mathbf{\Phi}_{ff}^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_f t} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} e^{\lambda_1^* t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_f^* t} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{11} & \cdots & \mathbf{\Phi}_{f1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Phi}_{1f} & \cdots & \mathbf{\Phi}_{ff} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{\Phi}_{11} & \cdots & \lambda_1 \mathbf{\Phi}_{f1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_f \mathbf{\Phi}_{1f} & \cdots & \lambda_f \mathbf{\Phi}_{ff} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{11}^* & \cdots & \mathbf{\Phi}_{f1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Phi}_{1f}^* & \cdots & \mathbf{\Phi}_{ff}^* \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1^* \mathbf{\Phi}_{11}^* & \cdots & \lambda_1^* \mathbf{\Phi}_{f1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_f^* \mathbf{\Phi}_{1f}^* & \cdots & \lambda_f^* \mathbf{\Phi}_{ff}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

obtem-se as expressões das FRI's individuais  $h_{ij}(t)$ 's como:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^f \left[ \mathbf{\Phi}_{i(k)} \mathbf{\Phi}_{j(k)} e^{\lambda_k t} + \mathbf{\Phi}_{i(k)}^* \mathbf{\Phi}_{j(k)}^* e^{\lambda_k^* t} \right] \quad (2.54)$$

Definindo-se o termo resíduo como:

$$r_{ij(k)} = \Phi_{i(k)} \Psi_{j(k)} \quad (2.55)$$

tem-se que a equação (2.54) pode ser escrita como

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^f \left[ r_{ij(k)} e^{\lambda_k t} + r_{ij(k)}^* e^{\lambda_k^* t} \right] \quad (2.56)$$

## 2.4 PARTE OBSERVÁVEL DA RESPOSTA DO SISTEMA

Nota-se que o vetor de entradas  $\bar{\mathbf{u}}(t)$ , de dimensão  $n \times 1$ , da Equação (2.3), pode conter elementos nulos. Define-se agora o vetor  $\mathbf{u}(t)$ , de dimensão  $m \times 1$ , como o vetor formado apenas pelas  $m$  entradas não nulas que atuam sobre o sistema mecânico. A relação entre os vetores  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  ( $t$ ) pode ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{G} \mathbf{u}(t) \quad (2.57)$$

onde  $\mathbf{G}$  é uma matriz de dimensão  $n \times m$ .

Com esta definição do vetor  $\mathbf{u}(t)$ , a Eq. (2.18), para tempo contínuo, pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{u}(t) \quad (2.58)$$

A Equação (2.58) representa, portanto, o modelo matemático de um sistema mecânico LIT descrito na forma de estado incluindo apenas as entradas não nulas que atuam sobre o mesmo, para tempo contínuo. Com base na Eq. (2.28), a modelagem equivalente para tempo discreto é:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{G} u[k] \quad (2.59)$$

ou

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} u[k] \quad (2.60)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_d \mathbf{G} \quad (2.61)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz de dimensão  $n \times n$ , chamada de matriz de estado para tempo discreto e  $\mathbf{B}$  é uma matriz de dimensão  $n \times m$ , chamada de matriz de influência da entrada.

A resposta ou saída do sistema modelado na forma de estado pode ser obtida por meio da observação de uma quantidade de  $l$  variáveis armazenadas em um vetor  $\mathbf{y}(t)$ , de dimensão  $l \times 1$ , definido como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (2.62)$$

onde  $\mathbf{C}$  é chamada de matriz de influência da saída e possui dimensão  $l \times n$ . A Equação (2.61) é chamada de equação de observação do sistema, indicando qual a parte do vetor de estado do sistema  $\mathbf{x}(t)$  que é realmente observada.

Equivalentemente, o vetor de saída para modelagem matemática do sistema mecânico para tempo discreto é denotada por  $\mathbf{y}(k\Delta t)$  e definido como da mesma forma que para tempo contínuo como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \quad (2.63)$$

Com base na presente discussão, o modo de vibração  $\Phi_j$ , que é a parte observada do autovetor  $\Psi_j$ , é então obtida pelas Equações (2.51) ou (2.52), como

$$\Phi_j = \mathbf{C} \Psi_j \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.64)$$

Para o desenvolvimento dos métodos de identificação paramétrica desenvolvidos neste trabalho, o vetor de saída descrito pela Equação (2.63) poderá ainda ser escrito como:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (2.65)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz de dimensão  $l \times m$ , chamada matriz de transmissão direta da entrada sobre a saída.

### 3 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA

Este capítulo apresenta a formulação de um método de identificação paramétrica para sistemas lineares com parâmetros invariantes no tempo orientado a subespaços para dados de entrada e saída. Esse método é implementado no domínio do tempo, válido para múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) e conta apenas com o uso de operações básicas da álgebra linear, o que o torna bastante simples, versátil e computacionalmente econômico.

#### 3.1 REALIZAÇÃO DO MODELO NA FORMA DE ESTADO USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA

Um sistema dinâmico linear e invariante no tempo pode ser modelado da forma de estado como:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{x}(k)$  é o vetor de estado de dimensão  $n \times 1$ ,  $\mathbf{u}(k)$  é o vetor força ou das  $m$  entradas que atuam sobre o sistema, de dimensão  $m \times 1$ , e  $\mathbf{y}(k)$  é o vetor de observação das  $l$  variáveis observadas do sistema de dimensão  $l \times 1$ . As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são, respectivamente, a matriz de estado do sistema de dimensão  $n \times n$ , a matriz de influência da entrada sobre as variáveis de estado de dimensão  $n \times m$ , a matriz de influência da saída de dimensão  $l \times n$ , e a matriz de transmissão direta sobre a saída de dimensão  $l \times m$ .

A teoria clássica de realização de sistemas dinâmicos lineares trata com o problema de ajustar um modelo de estado de ordem mínima a um conjunto de dados obtidos das FRI's. Entretanto, esse conceito pode ser estendido para o problema de identificação usando dados de entrada e saída (VIBERG, 1995). Um modelo na forma de estado possui ordem mínima se a dimensão  $n$  do vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$  for mínima, isto é, se não existir nenhuma outra realização possível de ordem inferior a  $n$ .

Esta seção apresenta o problema de realização para dados de entrada e saída. O objetivo é, portanto, apresentar uma formulação apropriada para o cálculo das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  das Equações (3.1) e (3.2), a partir de uma sequência de dados de entrada e saída. Essas matrizes serão posteriormente usadas para estimar os parâmetros modais  $\lambda_j$  e  $\phi_j$  de sistemas mecânicos, como mostrado no capítulo 2 deste trabalho.

É possível mostrar que as sequências de variáveis de entrada e saída  $\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k)$  e  $\mathbf{x}(k)$  que satisfazem as equações (3.1) e (3.2), levam, após algumas manipulações algébricas, a seguinte importante relação matricial:

$$\mathbf{Y}_h = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_h \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{Y}_h$  e  $\mathbf{U}_h$  são, respectivamente, matrizes de estrutura Hankel para  $i$ -blocos de linhas e  $j$ -blocos de colunas, contendo, respectivamente, os vetores de saídas  $\mathbf{y}(k)$  e os vetores de entradas  $\mathbf{u}(k)$  com dimensões, respectivamente, iguais a  $il \times j$  e  $im \times j$ . Essas matrizes são definidas como:

$$\mathbf{Y}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+j-1) \\ \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+j) \\ \mathbf{y}(k+2) & \mathbf{y}(k+3) & \cdots & \mathbf{y}(k+j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(k+i-1) & \mathbf{y}(k+i) & \cdots & \mathbf{y}(k+i+j-2) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{U}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k+1) & \cdots & \mathbf{u}(k+j-1) \\ \mathbf{u}(k+1) & \mathbf{u}(k+2) & \cdots & \mathbf{u}(k+j) \\ \mathbf{u}(k+2) & \mathbf{u}(k+3) & \cdots & \mathbf{u}(k+j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}(k+i-1) & \mathbf{u}(k+i) & \cdots & \mathbf{u}(k+i+j-2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{X}$  é uma matriz de dimensão  $n \times j$ , que contém consecutivamente os vetores de estado definidos como:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(k+1) \quad \mathbf{x}(k+2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(k+j-1)] \quad (3.6)$$

Para tanto, são definidas  $\mathbf{\Gamma}_i$ , a matriz de observabilidade do sistema, de dimensão  $il \times n$  formada pela matriz de estado  $\mathbf{A}$  e pela matriz de influência da saída  $\mathbf{C}$  como:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e  $\mathbf{H}_i$ , uma matriz triangular inferior de estrutura Toeplitz e de dimensão  $il \times im$  como:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-4}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

O cálculo das matrizes de estado  $\mathbf{A}$  e da influência da saída  $\mathbf{C}$  é feito usando uma importante propriedade de invariância ao deslocamento da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ , que, segundo a Equação (3.7), é definida como,

$$\Gamma_i^{(2)} = \Gamma_i^{(1)} \mathbf{A} \quad (3.9)$$

onde as sub-matrizes  $\Gamma_i^{(1)}$  and  $\Gamma_i^{(2)}$  são definidas como

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i^{(1)} \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \Gamma_i^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Assumindo que a realização seja de ordem mínima  $n$ , implica que a matriz de observabilidade  $\Gamma_i$  possui *rank* completo  $n$ . Então, a matriz de estado  $\mathbf{A}$  pode ser calculada usando a Equação (3.9) por

$$\mathbf{A} = \Gamma_i^{(1)+} \Gamma_i^{(2)} \quad (3.11)$$

onde o símbolo “+” denota a pseudo inversa de Moore-Penrose da sub-matriz  $\Gamma_i^{(1)}$ , como apresentado no Apêndice A deste trabalho.

Finalmente, a matriz  $C$  pode ser calculada tomando-se o primeiro bloco de linhas da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ , conforme mostra a equação (3.7).

A próxima seção mostra uma forma numericamente viável para obtenção de uma estimativa da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$  a partir dos dados de entrada e saída.

### 3.2 ESTIMATIVA DE PARÂMETROS MODAIS USANDO MÉTODO DE SUB-ESPAÇOS

Esta seção apresenta um algoritmo para identificação de parâmetros modais usando o método de sub-espacos para dados de entrada e saída. O método de sub-espacos pode ser definido aqui como uma técnica para obter uma estimativa da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ , a partir de um procedimento de redução de *rank* das matrizes formadas pelos dados de entrada e saída  $U_h$  e  $Y_h$ , usando SVD (singular value decomposition). A partir dessa versão estendida da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$  estimam-se as matrizes de estado  $A$  e de influência da saída  $C$ , que são usadas na identificação dos parâmetros modais do sistema mecânico em análise. Além disso, a SVD permite o cálculo da ordem mínima  $n$  do modelo.

É assumindo aqui que a entrada  $u(k)$  possui energia suficiente para excitar todos os modos do sistema durante o experimento de identificação, i.e., o sistema possui excitação persistente (SÖDERSTRÖM e STOICA, 1989). Um sinal de entrada do tipo ruído branco satisfaz tal exigência.

Considerando, portanto, que a entrada seja um ruído, isso implica que a matriz formada pelos dados de entrada  $U_h$ , conforme a Equação (3.5), é de *rank* completo igual a  $im$ , considerando que  $j > (il, im)$ . Aplicando a SVD na matriz  $U_h$ , de dimensão  $im \times j$ , resulta em

$$U_h = Q \begin{bmatrix} S & \mathbf{0}_{j_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde as matrizes  $Q$  e  $S$  possuem a mesma dimensão  $im \times im$ . A matriz  $\mathbf{0}_{j_0}$  possui dimensão  $im \times j_0$ , sendo que  $j_0 = j - im > im$ . As matrizes  $V_1$  e  $V_2$  possuem dimensões, respectivamente, iguais a  $j \times im$  e  $j \times j_0$ .

Da Equação (3.12) entende-se que a matriz  $\mathbf{Q}$  gera o espaço coluna de  $\mathbf{U}_h$ , enquanto as matrizes  $\mathbf{V}_1$  and  $\mathbf{V}_2$  geram, respectivamente, o espaço linha e o núcleo de  $\mathbf{U}_h$ .

Pós multiplicando a Equação (3.3) por  $\mathbf{V}_2$  resulta em

$$\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2 = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} \mathbf{V}_2 + \mathbf{H}_t \mathbf{U}_h \mathbf{V}_2 \quad (3.13)$$

Como a matriz  $\mathbf{V}_2$  gera o núcleo de  $\mathbf{U}_h$ , implica que  $\mathbf{H}_t \mathbf{U}_h \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$ , o que reduz a Equação (3.13) acima à seguinte expressão:

$$\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2 = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} \mathbf{V}_2 \quad (3.14)$$

sendo que a matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$  possui dimensão  $il \times j_0$ , considerando que  $j_0 = j - im > il$ .

### 3.2.1 Realização para dados de entrada saída livres de ruído

Para o caso ideal, onde os dados de entrada e saída são livres de ruído, o *rank* das matrizes  $\mathbf{\Gamma}_i$  e  $\mathbf{V}_2^T \mathbf{X}^T$  é igual a  $n$ , da ordem do sistema dinâmico modelado pela Equação (3.1). Isso implica que o produto  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$  da Equação (3.14) também possua *rank* igual a  $n$ . Além disso, as  $n$  colunas das matrizes  $\mathbf{\Gamma}_i$  e  $\mathbf{V}_2^T \mathbf{X}^T$  geram, respectivamente, o espaço coluna e o espaço linha da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ .

O espaço coluna de  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$  pode representar, portanto uma versão estendida da matriz de observabilidade  $\mathbf{\Gamma}_i$ , denotada por  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$ , possuindo, portanto, todas as características dinâmicas e analíticas de  $\mathbf{\Gamma}_i$ , incluindo a propriedade de invariância ao deslocamento discutida na seção anterior. Isso permite a estimativa das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  do sistema a ser identificado, conforme as Equações (2.26) e (2.27).

### 3.2.2 Realização para dados de entrada saída considerando ruído nos dados de saída

Para uma situação mais realista, onde os dados de saída são contaminados por ruído, a matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$  possui *rank* completo igual a  $il$ , sendo que  $il > n$ . Entretanto, uma estimativa do espaço coluna da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ , de *rank*  $n$ , pode ser calculada usando SVD como

$$\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_s & \hat{\mathbf{Q}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_s^T \\ \hat{\mathbf{V}}_n^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^T + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{V}}_n^T \quad (3.15)$$

onde as matrizes  $\hat{\mathbf{Q}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{S}}_s$  and  $\hat{\mathbf{V}}_s$  possuem dimensões, respectivamente, iguais a  $il \times n$ ,  $n \times n$  e  $j_0 \times n$ . Nota-se que para o caso dos dados livres de ruído  $\hat{\mathbf{S}}_n = 0$ .

As  $n$  colunas da matriz  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  geram o espaço coluna de uma aproximação de ordem  $n$  da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2 \cong \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^T$  de *rank* reduzido, obtida a partir da SVD truncada na ordem  $n$  da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ , como descrito na Equação (3.15). Essas colunas contém também os  $n$  principais valores singulares da matriz diagonal  $\hat{\mathbf{S}}_s$ .

Na prática, a ordem mínima  $n$  do sistema dinâmico pode ser identificada através da inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ . Além disso, uma estimativa de uma versão estendida da matriz de observabilidade  $\mathbf{\Gamma}_i$ , denotada por  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$ , é obtida através do procedimento de redução de *rank* usando SVD discutido acima, como:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Algoritmo para identificação de parâmetros modais

O algoritmo para identificação de parâmetros modais baseado no presente método de subespaços pode ser resumido como:

- i) estimativa da ordem mínima  $n$  do modelo do sistema dinâmico através da inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ , como mostra a Equação (3.15), para uma escolha apropriada do número de colunas  $j > (il, im)$ , para ambas as matrizes de dados de entrada  $\mathbf{U}_h$  e de saída  $\mathbf{Y}_h$ , conforme as Equações (3.4) e (3.5);

- ii) estimativa da matriz de observabilidade estendida  $\hat{\Gamma}_i$  usando a Eqs. (3.15) e (3.16) e o calculo da matriz de estado  $\mathbf{A}$  usando a propriedade de invariância ao deslocamento de  $\hat{\Gamma}_i$ , de acordo com a Equação (3.11);
- iii) estimativa dos autovalores  $z_j$  e autovetores  $\Psi_j$  da matriz de estado  $\mathbf{A}$ , para  $j = 1, \dots, n$ ;
- iv) cálculo dos  $n$  autovalores  $\lambda_j$  do sistema pela equação  $\lambda_j = \log(z_j)/\Delta t$ . Sendo que as frequências naturais e os fatores de amortecimento são identificados pelas equações  $\omega_j = |\lambda_j|$  e  $\xi_j = -\text{Re}al(\lambda_j)/|\lambda_j|$ ;
- v) finalmente, a determinação da matriz  $\mathbf{C}$ , obtida através do primeiro bloco de linhas da matriz  $\hat{\Gamma}_i$ , e os modos de vibrar  $\varphi_j$  são estimados pela equação  $\varphi_j = \mathbf{C} \Psi_j$ . como mostrado no capítulo 2 deste trabalho.

## 4 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA

Este capítulo apresenta a formulação de três métodos de identificação modal de sistemas lineares com parâmetros invariantes no tempo, orientados a subespaços, para dados apenas de saída. Esses métodos, assim como o método para múltiplas entradas e múltiplas saídas, apresentado no capítulo anterior, são implementados no domínio do tempo, válidos para múltiplas saídas e contam apenas com o uso de operações básicas da álgebra linear, tais como pseudo inversa de Moore-Penrose e a redução de *rank* usando SVD.

A seção 4.1 apresenta um algoritmo baseado em um modelo linear com parâmetros invariantes no tempo do tipo ARMA. A seção 4.2 apresenta um algoritmo baseado em um modelo usando formulação de estado sem considerar saídas de referência. A seção 4.3 apresenta um algoritmo baseado na formulação de estado, porém, usando saídas de referência.

### 4.1 IDENTIFICAÇÕES PARAMÉTRICA USANDO O MODELO ARMA

O modelo auto-regressivo com média móvel (ARMA) pode ser usado para descrever o comportamento dinâmico de uma variável  $\mathbf{y}(k)$  e um processo aleatório multivariado  $\{\mathbf{y}(k)\}$ , em tempo discreto, através da seguinte equação de diferenças (LARDIES, 2010):

$$\mathbf{y}(k+f) - \sum_{j=1}^f \boldsymbol{\alpha}_j \mathbf{y}(k+f-j) = \sum_{j=1}^f \boldsymbol{\beta}_j \mathbf{e}(k+f-j) \quad (4.1)$$

onde o lado esquerdo da Equação (4.1) representa a parte auto-regressiva (AR) do modelo e o lado direito a parte de média móvel (MA). A parte AR está relacionada com a dinâmica do processo que é observado ou medido pela variável  $\mathbf{y}(k)$ , enquanto que a parte MA está relacionada com as incertezas da medição de  $\mathbf{y}(k)$ .

A variável  $\mathbf{y}(k)$  da Equação (4.1) é um vetor de dimensão  $l \times 1$  que representa as  $l$  medições simultâneas das saídas obtidas de um sistema estrutural de interesse, enquanto  $f$  denota a ordem do modelo,  $\boldsymbol{\alpha}_j$ 's são as matrizes dos parâmetros da parte AR do modelo ARMA de dimensão  $l \times l$ ,  $\mathbf{e}(k)$  é um vetor de dimensão  $l \times 1$  que representa um processo aleatório Gaussiano branco não observável usado para modelar as incertezas contidas nas medições do processo  $\{\mathbf{y}(k)\}$  e  $\boldsymbol{\beta}_j$ 's são as matrizes dos parâmetros da parte MA do modelo ARMA, e possuem dimensão  $l \times l$ .

Tomando um conjunto de  $f$  observações para a variável  $\mathbf{y}(k)$ , com base na equação (4.1), pode-se escrever uma forma matricial bem mais conveniente para os propósitos de identificação paramétrica, qual seja:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{y}(k+1) \\
\mathbf{y}(k+2) &= \mathbf{y}(k+2) \\
&\vdots \\
\mathbf{y}(k+f-1) &= \mathbf{y}(k+f-1) \\
\mathbf{y}(k+f) &= \sum_{j=1}^f \boldsymbol{\alpha}_j \mathbf{y}(k+f-j) + \sum_{j=1}^f \boldsymbol{\beta}_j \mathbf{e}(k+f-j)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ou, representada matricialmente

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+f) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\alpha}_f & \boldsymbol{\alpha}_{f-1} & \boldsymbol{\alpha}_{f-2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+f-1) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}_f & \boldsymbol{\beta}_{f-1} & \boldsymbol{\beta}_{f-2} & \cdots & \boldsymbol{\beta}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}(k) \\ \mathbf{e}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{e}(k+f-1) \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

onde as matrizes  $\boldsymbol{\alpha}_j$ 's e  $\boldsymbol{\beta}_j$ 's dos parâmetros do modelo aparecem como elementos das matrizes

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\alpha}_f & \boldsymbol{\alpha}_{f-1} & \boldsymbol{\alpha}_{f-2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}_f & \boldsymbol{\beta}_{f-1} & \boldsymbol{\beta}_{f-2} & \cdots & \boldsymbol{\beta}_1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

sendo que ambas as matrizes  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  possuem dimensão  $lf \times lf$ .

Fisicamente, a matriz  $\boldsymbol{\alpha}$ , que é chamada matriz companheira, contém toda a informação a respeito da dinâmica do sistema a ser identificado, enquanto a matriz  $\boldsymbol{\beta}$  possui informação apenas das incertezas da medição das variáveis dinâmicas descritas pelo vetor  $\mathbf{y}(k)$ . Para sistemas estruturais, os autovalores da matriz  $\boldsymbol{\alpha}$  contém informações a respeito das frequências naturais e dos fatores de amortecimento, enquanto que os modos de vibração naturais são obtidos a partir dos autovetores de  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Para realização do sistema, definem-se os vetores,

$$\mathbf{y}_{fut}(k) = [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{y}^T(k+1) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^T(k+f-1)]^T \tag{4.6}$$

e

$$\mathbf{y}_{pas}(k) = [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{y}^T(k-1) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^T(k-p+1)]^T \quad (4.7)$$

como sendo os vetores contendo, respectivamente, as  $f$  amostras futuras de  $\mathbf{y}(k)$  e as  $p$  amostras passadas de  $\mathbf{y}(k)$ . As dimensões de  $\mathbf{y}_{fut}(k)$  e  $\mathbf{y}_{pas}(k)$  são, respectivamente,  $lf \times 1$  e  $lp \times 1$ .

Da mesma forma, define-se um vetor, de dimensão  $lf \times 1$ , contendo as  $f$  amostras futuras das incertezas  $e(k)$  como:

$$\mathbf{e}_{fut}(k) = [e^T(k) \quad e^T(k+1) \quad \cdots \quad e^T(k+f-1)]^T \quad (4.8)$$

Ainda com base na Equação (4.3), pode-se escrever o seguinte:

$$\mathbf{y}_{fut}(k+1) = \alpha \mathbf{y}_{fut}(k) + \beta \mathbf{e}_{fut}(k) \quad (4.9)$$

Agora, considerando os processos aleatórios descritos pelas variáveis  $\mathbf{y}(k)$  e  $e(k)$ , pós-multiplicando a Equação (4.9) por  $\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)$  e tomando a média, obtém-se o seguinte:

$$E[\mathbf{y}_{fut}(k+1)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] = \alpha E[\mathbf{y}_{fut}(k)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] + \beta E[\mathbf{e}_{fut}(k)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] \quad (4.10)$$

Assumindo que os processos aleatórios  $\{\mathbf{y}(k)\}$  e  $\{e(k)\}$  sejam independentes, isto é, não correlacionados, a quantidade

$$E[\mathbf{e}_{fut}(k)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

o que reduz a Equação (4.10) à seguinte forma,

$$E[\mathbf{y}_{fut}(k+1)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] = \alpha E[\mathbf{y}_{fut}(k)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] \quad (4.12)$$

Desenvolvendo o termo do lado esquerdo da Equação (4.12) e usando as Eqs. (4.6)-(4.8), obtém-se

$$E[\mathbf{y}_{fut}(k+1)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] = E \left[ \begin{array}{c} \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+f) \end{array} \right] \left\{ \mathbf{y}(k-1) \quad \mathbf{y}(k-2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}(k-p) \right\} \quad (4.13)$$

ou

$$E[\mathbf{y}_{fut}(k+1)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] = E \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}(k-1) & \mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}(k-2) & \cdots & \mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}(k-p) \\ \mathbf{y}(k+2)\mathbf{y}(k-1) & \mathbf{y}(k+2)\mathbf{y}(k-2) & \cdots & \mathbf{y}(k+2)\mathbf{y}(k-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(k+f)\mathbf{y}(k-1) & \mathbf{y}(k+f)\mathbf{y}(k-2) & \cdots & \mathbf{y}(k+f)\mathbf{y}(k-p) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$E[\mathbf{y}_{fut}(k+1)\mathbf{y}_{pas}^T(k-1)] = E \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{1+p} \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \cdots & \mathbf{R}_{2+p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{f+1} & \mathbf{R}_{f+2} & \cdots & \mathbf{R}_{f+p} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

O lado esquerdo da Equação (4.12) representa, portanto, uma matriz de estrutura Hankel-blocos, de dimensão  $lf \times lp$ , formada pelas matrizes de covariância  $\mathbf{R}_i$  de dimensão  $f \times p$ , denotada por  $\mathbf{H}_{(2)}$ , ou seja,

$$\mathbf{H}_{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{1+p} \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \cdots & \mathbf{R}_{2+p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{f+1} & \mathbf{R}_{f+2} & \cdots & \mathbf{R}_{f+p} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Da mesma forma, desenvolvendo o termo do lado direito da Equação (4.12) obtém-se a seguinte matriz de estrutura Hankel-bloco

$$\mathbf{H}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_f & \mathbf{R}_{f+1} & \cdots & \mathbf{R}_{f+p-1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

de dimensão  $lf \times lp$ .

Dessa forma a equação (12) pode ser escrita de forma mais compacta como:

$$\mathbf{H}_{(2)} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}_{(1)} \quad (4.18)$$

A equação (4.18) permite a determinação da matriz dos parâmetros AR  $\boldsymbol{\alpha}$ . Considerando que as matrizes  $\mathbf{H}_{(1)}$  e  $\mathbf{H}_{(2)}$  possuam *rank* completo, a matriz  $\boldsymbol{\alpha}$  pode ser calculada usando a pseudo-inversa de Moore-Penrose, conforme apresentado no Apêndice A, como

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}_{(2)} \mathbf{H}_{(1)}^T (\mathbf{H}_{(1)} \mathbf{H}_{(1)}^T)^{-1} \quad (4.19)$$

A matriz  $\alpha$  tem dimensão  $lf \times lf$ , e  $lf \gg n$ . As  $n$  frequências naturais, os  $n$  fatores de amortecimento e os  $n$  modos de vibração natural são obtidos dos autovalores e autovetores da matriz  $\alpha$ . Entretanto, devido ao fato de  $lf \gg n$  serão identificados  $lf - n$  modos computacionais que não possuem nenhuma informação a respeito da dinâmica do sistema mecânico a ser identificado. Esses modos computacionais devem ser, portando, separados dos modos verdadeiros do sistema uma maneira de se fazer esta separação a partir da matriz companheira  $\alpha$  é, como Lardies (2010) sugere, determinar  $\alpha$  usando SVD aplicado à matriz  $\mathbf{H}_{(1)}$ .

#### 4.2 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA USANDO O MODELO DE ESTADO (Algoritmo 1)

Outra maneira de se representar um sistema vibratório linear com parâmetros invariantes no tempo, válida para dados apenas de saída, consiste no uso do modelo estocástico na forma de estado para tempo discreto, como (LARDIES, 2010)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (4.20)$$

onde,  $\mathbf{x}(k)$  representa o vetor de estado de dimensão  $n \times 1$ ,  $\mathbf{A}$  é a matriz de estado do sistema de dimensão  $n \times n$ ,  $\mathbf{u}(k)$  representa o vetor de incertezas a respeito da magnitude do vetor de estado do sistema e de dimensão  $n \times 1$ ,  $\mathbf{y}(k)$  o vetor das  $l$  saídas observadas do sistema de dimensão  $l \times 1$ ,  $\mathbf{C}$  é a matriz de influência da saída de dimensão onde  $l \times n$  e  $\mathbf{v}(k)$  é o vetor de incerteza das observações  $\mathbf{y}(k)$ , de dimensão  $l \times 1$ .

Os processos  $\{\mathbf{u}(k)\}$  e  $\{\mathbf{v}(k)\}$  são assumidos serem do tipo ruído branco Gaussiano, com média zero, ou seja:

$$E[\mathbf{u}(k)] = 0 \quad (4.21)$$

$$E[\mathbf{v}(k)] = 0 \quad (4.22)$$

$$E[\mathbf{u}(k+i) \mathbf{u}^T(k)] = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

e

$$E[\mathbf{v}(k+i) \mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

para  $i \neq 0$ .

Além disso, assume-se que os processos  $\{u(k)\}$  e  $\{v(k)\}$  sejam independentes do processo definido pelo vetor de estado do sistema  $\{\mathbf{x}(k)\}$ . Dessa forma, as matrizes de auto-covariância e covariância-cruzada, abaixo, expostos são da seguinte forma:

$$E[x(k)u^T(k)] = 0 \quad (4.25)$$

$$E[\mathbf{x}(k)\mathbf{v}^T(k)] = 0 \quad (4.26)$$

Para implementação deste método de identificação de parâmetros modais usando dados apenas da saída, é necessário definir a seguinte matriz de auto-covariância  $R_i$  dos dados de saída, de dimensão  $l \times l$ , como:

$$\mathbf{R}_i = E[\mathbf{y}(k+i)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad (4.27)$$

sendo  $\mathbf{G}$  a matriz de covariância cruzada entre os processos  $\{\mathbf{x}(k)\}$  e  $\{\mathbf{y}(k)\}$ , de dimensão  $n \times l$ , definida como

$$\mathbf{G} = E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] \quad (4.28)$$

A Equação (4.27) pode ser verificada considerando primeiramente o *lag*  $i = 1$

Usando a Equação (4.20), obtém-se o seguinte:

$$\mathbf{R}_1 = E[\mathbf{y}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] = E[\{\mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1)\}\mathbf{y}^T(k)] \quad (4.29)$$

Considerando ainda que os processos  $\{\mathbf{y}(k)\}$  e  $\{\mathbf{v}(k)\}$  sejam independentes, implica que, na Equação (4.29) acima,  $E[\mathbf{v}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{0}$ , de onde se obtém o seguinte:

$$\mathbf{R}_1 = E[\mathbf{C}\mathbf{x}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{C} \underbrace{E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{y}^T(k)]}_{\mathbf{G}} = \mathbf{C}\mathbf{G} \quad (4.30)$$

Agora, considerando o *lag*  $i = 2$ :

$$\mathbf{R}_2 = E[\mathbf{y}(k+2)\mathbf{y}^T(k)] = E[\{\mathbf{C}\mathbf{x}(k+2) + \mathbf{v}(k+2)\}\mathbf{y}^T(k)] \quad (4.31)$$

ou

$$\mathbf{R}_2 = E[\{\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{C}\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{v}(k+2)\}\mathbf{y}^T(k)] \quad (4.32)$$

Considerando que os processos  $\{\mathbf{v}(k)\}$ ,  $\{\mathbf{u}(k)\}$  e  $\{\mathbf{y}(k)\}$  sejam independentes, implica que  $E[\mathbf{u}(k+1)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{0}$  e  $E[\mathbf{v}(k+2)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{0}$ , de onde se obtém que:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{C} \mathbf{A} E \left[ \underbrace{\mathbf{x}(k+1) \mathbf{y}^T(k)}_{\mathbf{G}} \right] = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{G} \quad (4.33)$$

Da mesma forma, para o *lag*  $i=3$ , usando o mesmo procedimento acima, com as mesmas considerações de independência estocástica dos processos  $\{\mathbf{v}(k)\}$ ,  $\{\mathbf{u}(k)\}$  e  $\{\mathbf{y}(k)\}$ , obtém-se o seguinte:

$$R_3 = E[y(k+3)y^T(k)] = E[\{Cx(k+3) + v(k+3)\}y^T(k)] \quad (4.34)$$

ou

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{C} E[\mathbf{x}(k+3) \mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{C} E[\{\mathbf{A} \mathbf{x}(k+2) + \mathbf{u}(k+2)\} \mathbf{y}^T(k)] \quad (4.35)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 &= \mathbf{C} E[\{\mathbf{A} \{\mathbf{A} \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{u}(k+1)\} + \mathbf{u}(k+2)\} \mathbf{y}^T(k)] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{A}^2 E[\mathbf{x}(k+1) \mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Prosseguindo sucessivamente, para diversos *lags*  $i$ , obtém-se a verificação da equação (4.27).

Para realização do sistema mecânico usando dados apenas de saída, de maneira análoga ao Capítulo 3, define-se agora uma matriz  $\mathbf{H}$  de estrutura Hankel blocos formada por  $i+j-1$  matrizes de auto covariância  $\mathbf{R}_i$  dos dados de saída como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{i+1} & \cdots & \mathbf{R}_{i+j-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

de dimensão  $li \times lj$ .

Usando a Equação (4.27), pode-se escrever o seguinte:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{i+1} & \cdots & \mathbf{R}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{G} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}^j \mathbf{G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}^{i+j-2} \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

ou ainda

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{i+1} & \cdots & \mathbf{R}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} [\mathbf{G} \quad \mathbf{AG} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{G}] \quad (4.39)$$

A Equação (4.39) acima mostra que a matriz  $\mathbf{H}$  é resultante do produto da matriz de observabilidade do sistema  $\Gamma_i$  por outra matriz  $\Lambda$  que depende também da matriz de estado do sistema  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{G}$ , tal que,

$$\mathbf{H} = \Gamma_i \Lambda \quad (4.40)$$

onde a matriz  $\mathbf{H}$  das auto covariâncias de saída possui dimensão  $li \times lj$ , a matriz  $\Gamma_i$  é a matriz de observabilidade de dimensão  $li \times n$  e  $\Lambda$  é uma matriz de dimensão  $n \times lj$ .

Para a estimativa da matriz de estado  $\mathbf{A}$  e da matriz de influência da saída  $\mathbf{C}$ , usa-se a propriedade de invariância ao deslocamento da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ , que conforme visto no Capítulo 3, é expressa por

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i^{(1)} \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \Gamma_i^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

sendo que

$$\Gamma_i^{(2)} = \Gamma_i^{(1)} \mathbf{A} \quad (4.42)$$

Assumindo o sistema como de ordem mínima igual a  $n$ , implica que a matriz de observabilidade  $\Gamma_i$  possui *rank* completo  $n$  e, com isso, a matriz de estado  $\mathbf{A}$  pode então ser calculada utilizando a pseudo-inversa de Moore-Penrose, conforme apresentado no Apêndice A, de modo que:

$$\mathbf{A} = \Gamma_i^{(1)+} \Gamma_i^{(2)} \quad (4.43)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  pode ser calculada tomando-se o primeiro bloco de linhas da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ .

Para o caso ideal onde os dados de saída são livres de ruído, ambas a matriz  $\Gamma_i$  e  $\Lambda$  possuem *rank* igual a  $n$ , que também é a ordem do sistema dinâmico a ser identificado.

Entretanto, para casos reais, ou seja, onde os dados de saída estão contaminados com ruído, a matriz de covariância  $\mathbf{H}$ , de dimensão  $li \times lj$ , possui *rank* completo maior que  $n$ . A estimativa da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ , neste caso, é

obtida adotando-se um procedimento de redução de *rank* sobre a matriz de covariância de dados  $\mathbf{H}$  usando SVD, a saber:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_s & \hat{\mathbf{Q}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_s^T \\ \hat{\mathbf{V}}_n^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^T + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{V}}_n^T \quad (4.44)$$

onde as matrizes  $\hat{\mathbf{Q}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{S}}_s$  e  $\hat{\mathbf{V}}_s$  possuem dimensão, respectivamente,  $li \times n$ ,  $n \times n$  e  $n \times lj$ .

As  $n$  colunas da matriz  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  geram o espaço coluna de ordem  $n$  da matriz  $\mathbf{H}$ , e tais colunas contém também os  $n$  principais vetores singulares correspondentes aos  $n$  principais valores singulares da matriz diagonal  $\hat{\mathbf{S}}_s$ .

A ordem  $n$  do sistema dinâmico pode ser estimada através do número de valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{H}$ . Assim, uma estimativa da matriz de observabilidade estendida, denotado por  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$ , pode ser obtida de maneira análoga à descrita no capítulo 3, como:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s^{1/2} \quad (4.45)$$

O algoritmo usado para a identificação dos parâmetros modais a partir da estimativa da matriz de observabilidade estendida  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$  também pode ser o mesmo descrito no capítulo 3.

### 4.3 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA USANDO O MODELO DE ESTADO (Algoritmo 2)

Seja o modelo estocástico na forma de estado para tempo discreto descrito pela Equação (4.20), qual seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Os processos de ruído  $\mathbf{w}[k]$  e  $\mathbf{v}[k]$  são ambos assumidos como um processo gaussiano branco e estacionário de média zero com as matrizes de covariância definidas como:

$$E \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{w}[k] \\ \mathbf{v}[k] \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{w}^T[j] & \mathbf{v}^T[j] \end{Bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \delta[k-j] \quad (4.47)$$

onde  $E[\cdot]$  denota a média estatística e  $\delta[k-j]$  a função delta de Dirac.

Para simplificar o desenvolvimento na formulação do presente algoritmo de identificação, seguem então algumas definições e considerações (Peeters e Roek, 1999). O vetor de estado do sistema é assumido como um processo estocástico  $\{\mathbf{x}[k]\}$  com uma matriz de covariância  $\Sigma$  de dimensão  $n \times n$ , definida como

$$E[\mathbf{x}[k] \cdot \mathbf{x}^T[k]] = \Sigma \quad (4.48)$$

sendo assumido como ser um processo independente dos processos  $\{\mathbf{w}[k]\}$  e  $\{\mathbf{v}[k]\}$ , isto é:

$$E[\mathbf{x}[k] \cdot \mathbf{w}^T[k]] = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad E[\mathbf{x}[k] \cdot \mathbf{v}^T[k]] = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

Pós-multiplicando a primeira linha da equação (4.46) por  $\mathbf{x}^T[k+1]$  e tomando a média dos valores conduz a seguinte equação:

$$\Sigma = E[(\mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k]) \cdot (\mathbf{x}^T[k]\mathbf{A}^T + \mathbf{w}^T[k])] \quad (4.50)$$

Em termos de matrizes de covariâncias, definidas acima pela equação (4.47)-(4.49), a Equação (4.50) acima pode ser escrita como:

$$\Sigma = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (4.51)$$

Agora, as matrizes de covariância cruzada e autocovariância dos processos de saídas  $\mathbf{y}[k]$  são definidas como:

$$\mathbf{G} = E[\mathbf{x}[k+1] \cdot \mathbf{y}^T[k]] = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \quad (4.52)$$

e

$$\Lambda_i = E[\mathbf{y}[k+i] \cdot \mathbf{y}^T[k]] \quad (4.53)$$

onde a matriz  $\mathbf{G}$  possui dimensão  $n \times l$  e a matriz  $\Lambda_i$ , de dimensão  $l \times l$ , é válida para um *lag*  $i$  arbitrário.

Com uma manipulação algébrica na matriz  $\Lambda_i$ , da equação (4.53), como feito na seção anterior, para uma quantidade de *lags*  $i \geq 1$ , usando as equações (4.48)-(4.52), permite mostrar que a matriz  $\Lambda_i$  assume a seguinte forma:

$$\Lambda_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad (4.54)$$

A equação (4.54) fornece a relação entre as matrizes do sistema  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$ , com as matrizes de autocovariância  $\Lambda_i$ . Essa relação é importante para estabelecer o presente algoritmo de realização de espaço de estado para sistemas somente de saída, como discutido na próxima seção.

#### 4.3.1 Realização do sistema usando apenas dados de saída para o algoritmo 2

O sistema de realização para dados apenas de saída consiste na determinação das matrizes de estado  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$ , do modelo dado pela equação (4.46). Esta seção apresenta a formulação básica para o cálculo destas matrizes, que serão usadas posteriormente para a estimação dos parâmetros modais.

Neste tipo de identificação torna-se necessário definir uma coordenada de referência para calcular os modos de vibrar do sistema. Então, o vetor de saída  $\mathbf{y}[k]$ , com dimensão  $l \times 1$ , é definido como:

$$\mathbf{y}[k] = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_r[k] \\ \mathbf{y}_s[k] \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

onde  $\mathbf{y}_r(k)$  é um vetor de dimensão  $r \times 1$  contendo  $r$  saídas de referências enquanto  $\mathbf{y}_s[k]$  representa um vetor de dimensão  $(l-r) \times 1$  como um vetor que representa o restante da quantidade de informação do vetor de saída  $\mathbf{y}[k]$ .

A relação entre  $\mathbf{y}_r[k]$  e  $\mathbf{y}[k]$  é definida pela seguinte relação

$$\mathbf{y}_r[k] = \mathbf{L}\mathbf{y}[k] \quad (4.56)$$

onde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (l-r)} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

é uma matriz de dimensão  $r \times l$ , sendo  $\mathbf{I}_r$  uma matriz de identificação  $r \times r$ .

A matriz de covariância entre o vetor de referência  $\mathbf{y}_r[k]$ , o vetor de estado  $\mathbf{x}[k]$  e os processos de saída  $\{\mathbf{y}[k]\}$  são definidos, respectivamente como:

$$\mathbf{G}^r = E[\mathbf{x}[k+1]\mathbf{y}_r^T[k]] = \mathbf{G}\mathbf{L}^T \quad (4.58)$$

e

$$\mathbf{\Lambda}_i^r = E[\mathbf{y}[k+i]\mathbf{y}_r^T[k]] = \mathbf{\Lambda}_i\mathbf{L}^T \quad (4.59)$$

As matrizes  $\mathbf{\Lambda}_i^r$  e  $\mathbf{G}^r$ , com dimensões, respectivamente, iguais a  $l \times r$  e  $n \times r$ , são relacionadas analogamente a equação (4.54) como:

$$\mathbf{\Lambda}_i^r = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}^r \quad (4.60)$$

Para uma quantidade de  $2i+j-2$  amostras, onde  $i$  e  $j$  são as quantidades de linhas e colunas dos blocos dos dados de saída, como mostrado abaixo, são os

que definem as matrizes de bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_r$  e  $\mathbf{Y}$ , com dimensões respectivamente de,  $ir \times j$  e  $il \times j$ , como:

$$\mathbf{Y}_r = \left( \frac{1}{\sqrt{j}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r[0] & \mathbf{y}_r[1] & \cdots & \mathbf{y}_r[j-1] \\ \mathbf{y}_r[1] & \mathbf{y}_r[2] & \cdots & \mathbf{y}_r[j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_r[i-1] & \mathbf{y}_r[i] & \cdots & \mathbf{y}_r[i+j-2] \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{Y} = \left( \frac{1}{\sqrt{j}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}[i] & \mathbf{y}[i+1] & \cdots & \mathbf{y}_r[i+j-1] \\ \mathbf{y}[i+1] & \mathbf{y}[i+2] & \cdots & \mathbf{y}[i+j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}[2i-1] & \mathbf{y}[2i] & \cdots & \mathbf{y}[2i+j-2] \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

A matriz de covariância de bloco-Toeplitz defasada, de dimensão  $il \times ir$ , formada pelas matrizes  $\Lambda_i^r$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{T}^r = \mathbf{Y} \mathbf{Y}_r^T = \begin{bmatrix} \Lambda_i^r & \Lambda_{i-1}^r & \cdots & \Lambda_1^r \\ \Lambda_{i+1}^r & \Lambda_i^r & \cdots & \Lambda_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i-1}^r & \Lambda_{2i-2}^r & \cdots & \Lambda_i^r \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

O lado direito da equação (4.63) pode ser facilmente verificado a partir de manipulação simples usando as equações (4.58)-(4.62). Além disso, usando a equação (4.59), também se pode verificar que:

$$\mathbf{T}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}^r & \mathbf{A}^{i-2} \mathbf{G}^r & \cdots & \mathbf{A} \mathbf{G}^r & \mathbf{G}^r \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_i \tilde{\Lambda}_i^r \quad (4.64)$$

onde  $\tilde{\Lambda}_i^r$  é uma matriz de dimensão  $n \times ir$  e  $\mathbf{\Gamma}_i$  é a matriz de observabilidade, de dimensão  $il \times n$ , formada pela matriz de estado  $\mathbf{A}$  e também pela matriz de influência das saídas  $\mathbf{C}$  como:

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

A matriz de observabilidade  $\Gamma_i$  possui a propriedade de invariância ao deslocamento, qual seja:

$$\Gamma_i^{(2)} = \Gamma_i^{(1)} \mathbf{A} \quad (4.66)$$

onde as sub-matrizes  $\Gamma_i^{(1)}$  e  $\Gamma_i^{(2)}$  são definidas como :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i^{(1)} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \Gamma_i^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Assumindo que para a realização da identificação a ordem do sistema precisa ser mínima, ou seja,  $n$ , a matriz  $\Gamma_i$  possui rank completo  $n$ . Assim, a matriz de estado  $\mathbf{A}$  pode então ser estimada usando a equação (4.68), de modo que:

$$\mathbf{A} = \Gamma_i^{\Gamma_i^{(1)+} \Gamma_i^{(2)}} \quad (4.68)$$

onde o simbolo “+” denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose e a matriz  $\mathbf{C}$  é obtida a partir do primeiro bloco de linhas da também matriz  $\Gamma_i$ .

#### 4.3.2 Identificação dos parâmetros modais usando o método de subespaço para o algoritmo 2

O espaço coluna do produto das matrizes  $\mathbf{T}^r = \Gamma_i \tilde{\Lambda}_i^r$ , dado pela equação (4.64), está contido no espaço coluna de  $\Gamma_i$ . O espaço linha de  $\mathbf{T}^r$  também está contido no espaço linha de  $\Lambda_i^r$ .

Assumindo que  $(li, ri) \geq n$ , o espaço coluna do produto das matrizes  $\mathbf{T}^r = \Gamma_i \tilde{\Lambda}_i^r$  é gerado pela  $n$  colunas da matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ . O espaço linha de  $\mathbf{T}^r$  é gerado pelas  $n$  linhas da matriz  $\Lambda_i^r$ .

O *rank* de ambas matrizes  $\Gamma_i$  e  $\Lambda_i^r$  são  $n$ , que também é a ordem mínima do sistema. Isto faz com que o produto  $\mathbf{T}^r = \Gamma_i \tilde{\Lambda}_i^r$  também tenha ordem  $n$ .

Então, o espaço coluna da matriz de covariância defasada  $\mathbf{T}^r$  tem a mesma estrutura de invariância ao deslocamento como em  $\Gamma_i$ , demonstrada na equação (4.66), a qual permite calcular a matriz de estado  $\mathbf{A}$ .

A afirmação acima é baseada na hipótese de que os dados de saída são livres de ruído. Mas para casos mais reais, onde os dados de saída são contaminados com ruído, a matriz  $\mathbf{T}^r$  possui *rank* completo maior que a ordem mínima  $n$  do sistema dinâmico a ser identificado. Entretanto, o espaço coluna de *rank*  $n$  da matriz  $\mathbf{T}^r$  pode ser calculado a partir de um procedimento de redução de *rank* usando a SVD, como

$$\mathbf{T}^r = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_s & \hat{\mathbf{Q}}_n \\ \hat{\mathbf{S}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_s^T \\ \hat{\mathbf{V}}_n^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^T + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{V}}_n^T \quad (4.69)$$

onde as matrizes  $\hat{\mathbf{Q}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{S}}_s$  e  $\hat{\mathbf{V}}_s$  tem dimensões  $il \times n$ ,  $n \times n$  e  $ir \times n$ , respectivamente. Note-se que a condição  $\hat{\mathbf{S}}_n = 0$  também pode ser verificada na ausência de ruído.

As  $n$  colunas da matriz  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  geram o espaço coluna da matriz

$$\hat{\mathbf{T}}^r = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^T \quad (4.70)$$

já com o *rank* reduzido.

Tal coluna da matriz  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  contém também os  $n$  principais vetores singulares correspondentes aos  $n$  principais valores singulares da diagonal da matriz  $\hat{\mathbf{S}}_s$ .

Na prática, a ordem  $n$  do sistema dinâmico pode ser inspecionada através dos principais valores singulares da matriz  $\mathbf{T}^r$ . Uma estimativa da matriz de observabilidade estendida, denotada por  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$ , é considerada como:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s^{1/2} \quad (4.71)$$

O algoritmo usado para identificação dos parâmetros modais a partir da estimativa da matriz de observabilidade estendida  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$  também pode ser o mesmo descrito no capítulo 3.

## 5 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados das aplicações dos métodos de identificação paramétrica apresentados nos capítulos anteriores, usando dados obtidos por simulação numérica de uma estrutura do tipo pórtico bidimensional e de um sistema massa-mola-amortecedor de seis graus de liberdade.

São apresentados os resultados obtidos da identificação de parâmetros modais usando dados de entrada e saída bem como para dados apenas da saída.

### 5.1 GERAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA E SAÍDA DE UM PÓRTICO USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Os dados de entrada e saída que são usados para avaliar a eficiência dos métodos de identificação apresentados no presente trabalho são obtidos de uma estrutura do tipo pórtico bidimensional, mostrada na Figura (1), sendo que suas matrizes de massa e rigidez são calculadas através do método de elementos finitos.

As características dimensionais dessa estrutura são as seguintes: comprimento  $L = 240$  polegadas, rigidez  $EI = 2,952 \times 10^{10} \text{ lb} \cdot \text{pol}^2$ , massa por unidade  $\gamma = 0,013 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 / \text{pol}^2$  e o raio de giração  $r = 7,47 \text{ pol}$ .

Esta estrutura do tipo pórtico é dividida em 14 elementos, sendo 4 destes para cada viga lateral e 6 para a viga na horizontal e um total de 15 nós, como mostra a Figura (2).

Figura 1 - Pórtico bidimensional

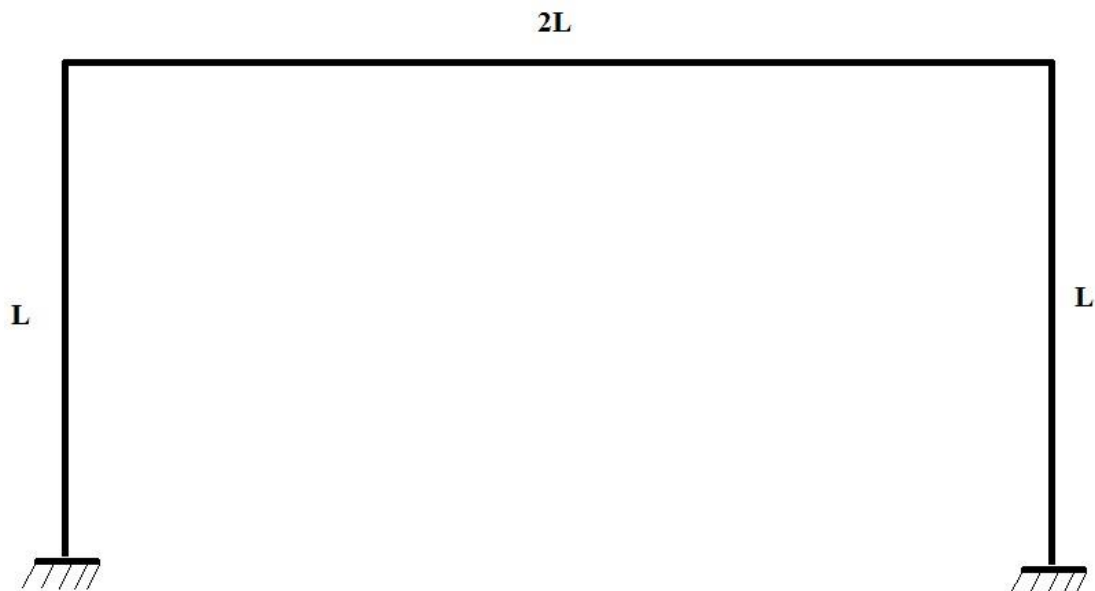
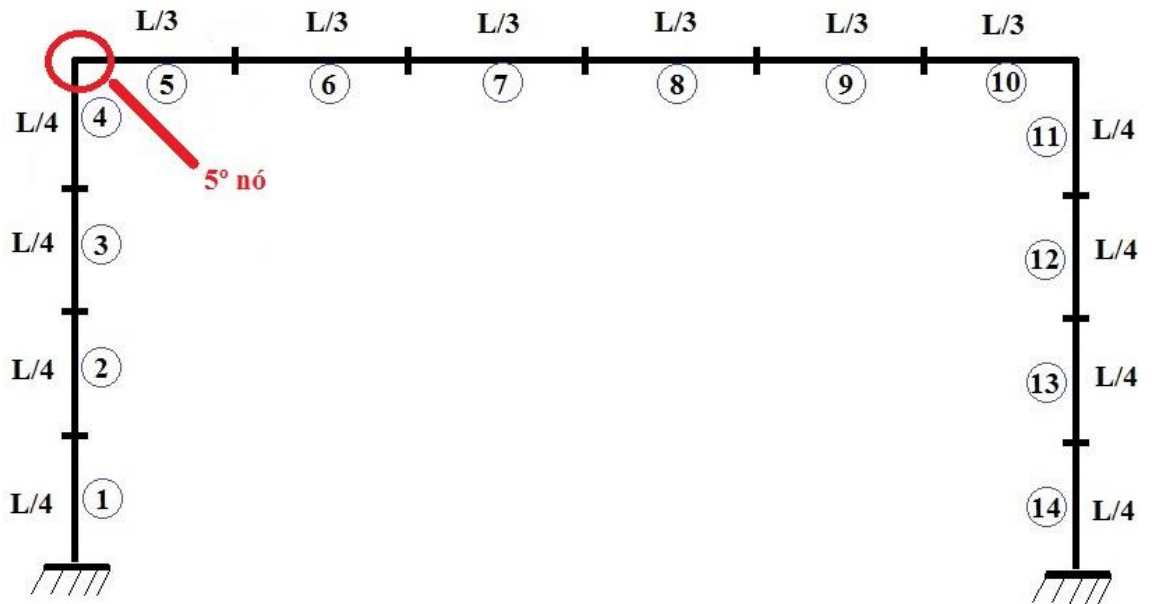


Figura 2 - Pórtico dividido em 14 elementos com 15 nós



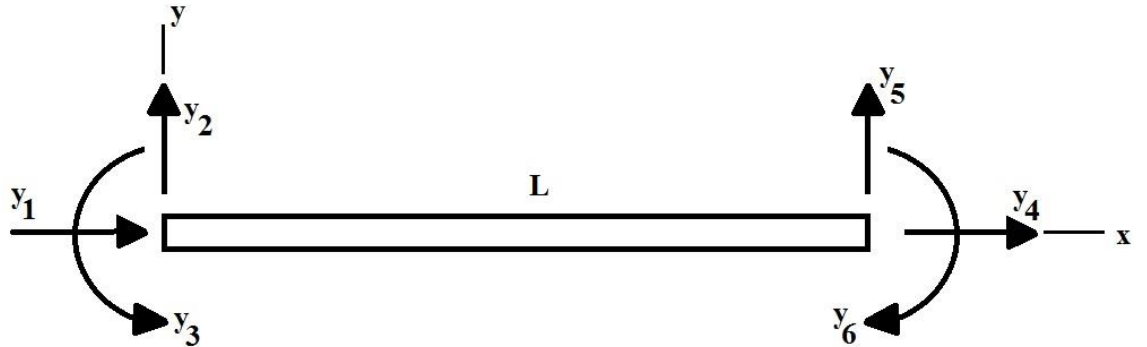
O tipo de elemento finito usado na obtenção das matrizes de massa e rigidez globais usadas nas simulações é mostrado na Figura (3). Trata-se de um elemento finito do tipo pórtico com seis graus de liberdade, cujas matrizes elementares locais de massa e rigidez são as seguintes:

$$[m]_e = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

e

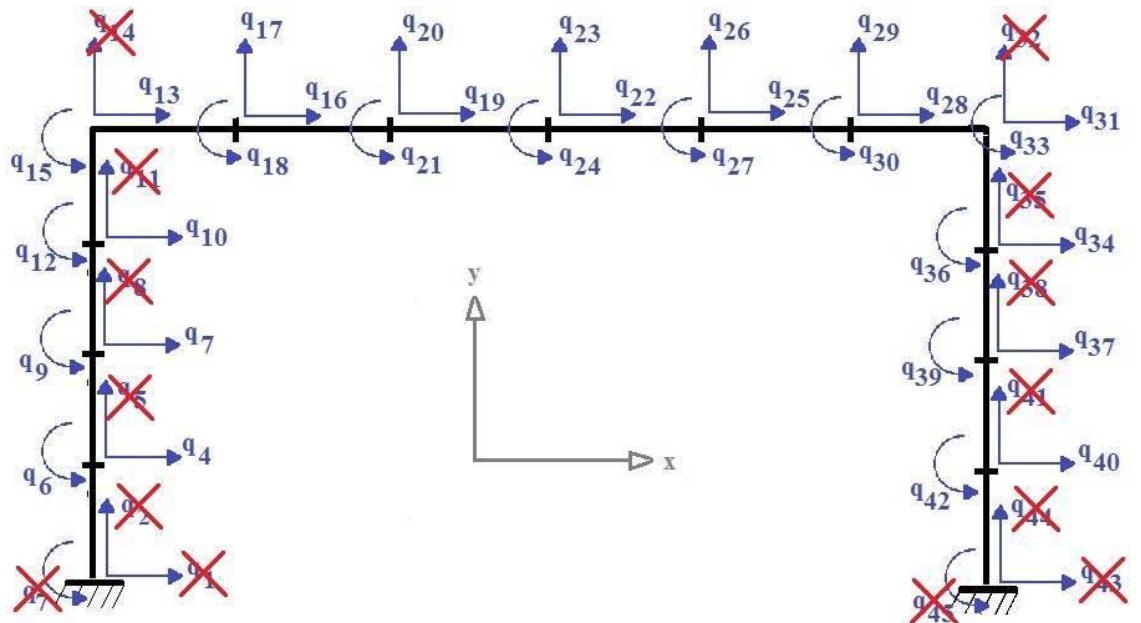
$$[k]_e = \begin{bmatrix} \left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{l}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Figura 3 - Elemento p3rtico com seis graus de liberdade



As 45 coordenadas generalizadas, denotadas por  $q_i$ , adotadas na descri333o das posi333es globais da estrutura s3o mostradas na Figura (4). Devido aos dois v3nculos da estrutura serem do tipo engates, as coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, q_3, q_{43}, q_{44}$  e  $q_{45}$  s3o nulas. Al3m disso, assumindo que n3o h3 deform333o na dire333o y nas vigas verticais, as coordenadas generalizadas  $q_5, q_8, q_{11}, q_{14}, q_{32}, q_{35}, q_{38}$  e  $q_{41}$  tamb3m s3o consideradas nulas. Essas coordenadas generalizadas consideradas nulas est3o marcadas com um X na cor vermelha.

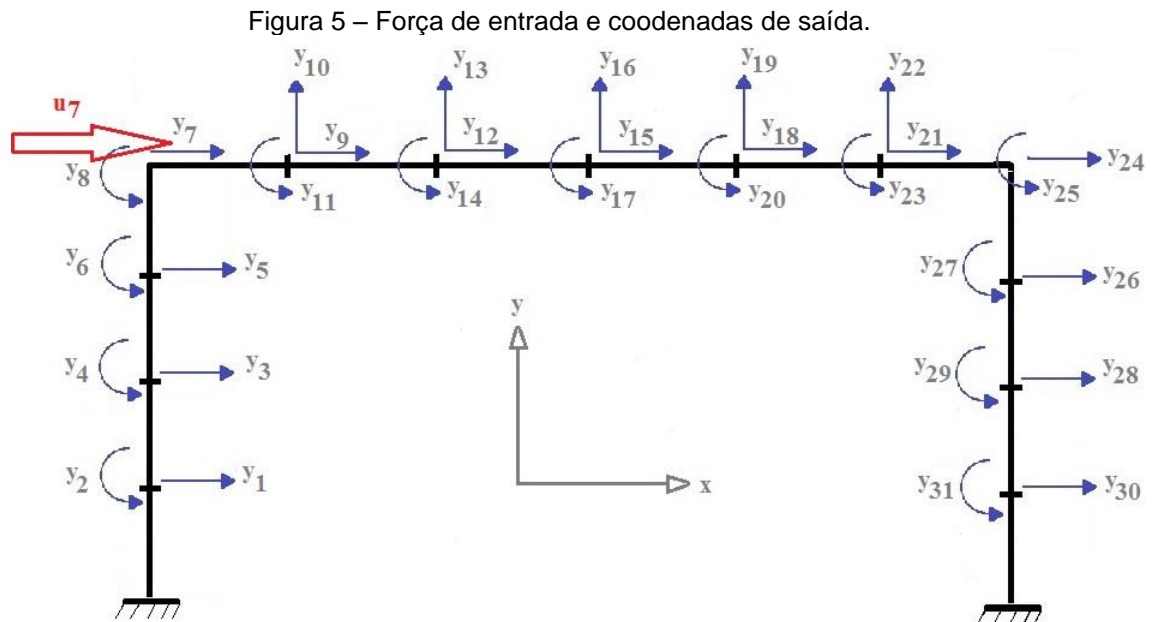
Figura 4 – P3rtico e suas respectivas coordenadas generalizadas



Com base na discussão anterior, as coordenadas de saída ou observáveis da estrutura, denotadas por  $y_i$ , são, portanto, as seguintes:

$$\begin{aligned} y_1 = q_4, \quad y_2 = q_6, \quad y_3 = q_7, \quad y_4 = q_9, \quad y_5 = q_{10}, \quad y_6 = q_{12}, \quad y_7 = q_{13}, \quad y_8 = q_{15}, \quad y_9 = q_{16}, \\ y_{10} = q_{17}, \quad y_{11} = q_{18}, \quad y_{12} = q_{19}, \quad y_{13} = q_{20}, \quad y_{14} = q_{21}, \quad y_{15} = q_{22}, \quad y_{16} = q_{23}, \quad y_{17} = q_{24}, \\ y_{18} = q_{25}, \quad y_{19} = q_{26}, \quad y_{20} = q_{27}, \quad y_{21} = q_{28}, \quad y_{22} = q_{29}, \quad y_{23} = q_{30}, \quad y_{24} = q_{31}, \quad y_{25} = q_{33}, \\ y_{26} = q_{34}, \quad y_{27} = q_{36}, \quad y_{28} = q_{37}, \quad y_{29} = q_{39}, \quad y_{30} = q_{40}, \quad y_{31} = q_{42} \end{aligned}$$

Como mostra a Figura (5). A Figura (5) mostra também a posição adotada para a força de entrada, denotada por  $u_7$ . Ela está no nó 5, atuando na direção da coordenada de saída  $y_7$ .



As matrizes globais de massa e de rigidez da estrutura referentes aos seus 31 deslocamentos  $y_i$  são calculadas pelo método dos elementos finitos, resultando 31 frequências naturais, mostradas na Tabela (1).

Da teoria dos modos de sistemas lineares com parâmetros invariantes no tempo, tem-se que o movimento de um sistema linear é composto de uma superposição de seus modos. Tem-se ainda que a energia necessária para excitar um determinado modo é proporcional ao quadrado de sua frequência natural associada. Dessa forma, serão considerados nesta seção apenas os primeiros seis primeiros modos de vibração natural do pórtico.

As 6 primeiras dessas frequências naturais com seus respectivos modos de vibração natural normalizados estão apresentadas na Tabela (2). Esses 6 primeiros modos de vibração estão mostrados na Figura (6). Além disso, é importante observar que a máxima frequência natural obtida neste teste é de 2727,6 Hz.

Tabela 1 – Frequências naturais exatas

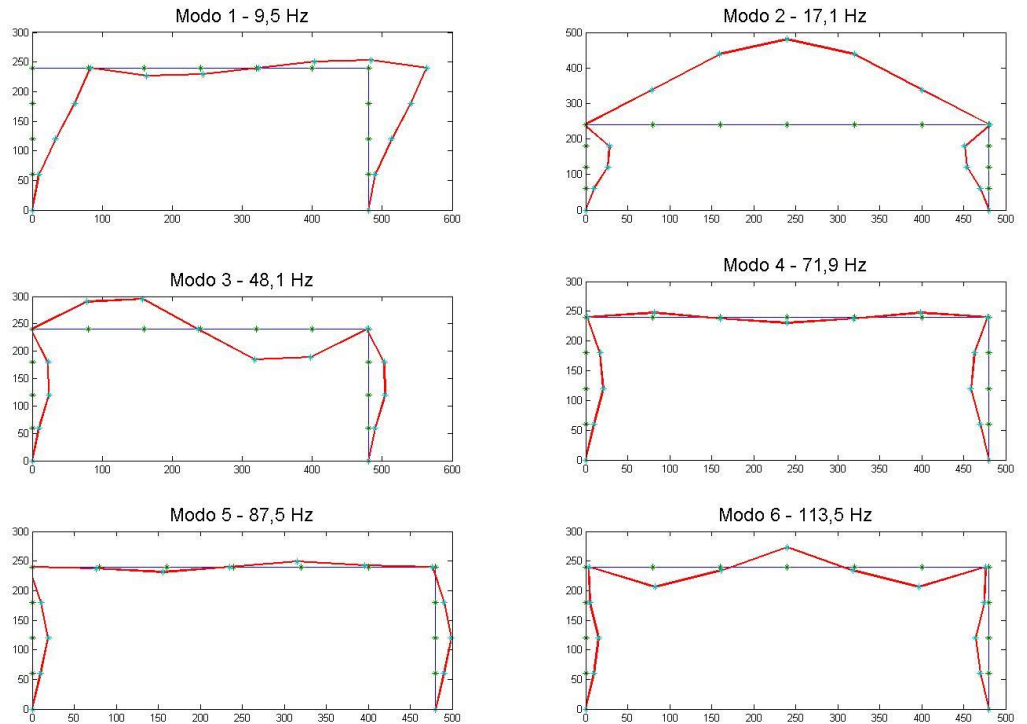
<b>Frequências naturais exatas (Hz)</b>		<b>Frequências naturais exatas (Hz)</b>	
<b>1</b>	9,5392	<b>17</b>	650,25
<b>2</b>	17,132	<b>18</b>	787,64
<b>3</b>	48,062	<b>19</b>	864,94
<b>4</b>	71,831	<b>20</b>	907,85
<b>5</b>	87,454	<b>21</b>	1023,6
<b>6</b>	113,52	<b>22</b>	1146,2
<b>7</b>	177,77	<b>23</b>	1162,1
<b>8</b>	180,53	<b>24</b>	1304,1
<b>9</b>	240,28	<b>25</b>	1417,1
<b>10</b>	245,74	<b>26</b>	1543,2
<b>11</b>	301,92	<b>27</b>	1678,4
<b>12</b>	388,76	<b>28</b>	1976,1
<b>13</b>	434,73	<b>29</b>	2020,8
<b>14</b>	465,00	<b>30</b>	2725,1
<b>15</b>	526,65	<b>31</b>	2727,6
<b>16</b>	616,58		

Tabela 2 - Frequências naturais e coordenadas dos primeiros modos

$y_i$	<b>Frequências naturais exatas (Hertz)</b>					
	<b>9,5</b>	<b>17,1</b>	<b>48,1</b>	<b>71,9</b>	<b>87,5</b>	<b>113,5</b>
<b>y1</b>	10000	10000	10000	10000	10000	10000
<b>y2</b>	-306	-275,61	-263,49	-249,97	-236,95	-217,89
<b>y3</b>	33486	26226	23869	21405	18960	15817
<b>y4</b>	-450	-209,45	-143,77	-79,244	-12,466	62,2
<b>y5</b>	60921	28690	22485	17145	10618	5293,9
<b>y6</b>	-440	178,5	212,02	206,86	255,34	209,72
<b>y7</b>	83468	-1015,5	2193,6	1920,7	-3734,9	3949,1
<b>y8</b>	-291	857,97	602,52	233,53	139,39	-290,66
<b>y9</b>	83586	678,04	2276,2	315,5	4262,7	819,8

<b>y10</b>	-13127	97636	50530	7792,8	-2627,7	-33981
<b>y11</b>	-52	1404,5	468,54	-39,55	-127,31	-171,57
<b>y12</b>	83657	-339,33	-2326,3	668,39	-4589,7	1467,8
<b>y13</b>	-10622	198820	55231	-2180,6	-8942	-5910,9
<b>y14</b>	99	989,34	-381,89	-160,99	15,508	715,84
<b>y15</b>	83680	1,0E-08	-2343	-6,8E-11	-4700,4	3,1E-11
<b>y16</b>	0	240440	3,4E-10	-9960,7	-1,4E-10	32819
<b>y17</b>	150	-5,0E-11	-855,66	1,1E-11	166,63	4,5E-12
<b>y18</b>	83657	339,33	-2326,3	-668,39	-4589,7	-1467,8
<b>y19</b>	10622	198820	-55231	-2180,6	8942	-5910,9
<b>y20</b>	99	-989,34	-381,89	160,99	15,508	-715,84
<b>y21</b>	83586	678,04	-2276,2	-1315,5	-4262,7	-2819,8
<b>y22</b>	13127	97636	-50530	7792,8	2627,7	-33981
<b>y23</b>	-52	-1404,5	468,54	39,55	-127,31	171,57
<b>y24</b>	83468	1015,5	-2193,6	-1920,7	-3734,9	-3949,1
<b>y25</b>	-291	-857,97	602,52	-233,53	139,39	290,66
<b>y26</b>	60921	-28690	22485	-17145	10618	-5293,9
<b>y27</b>	-440	-178,5	212,02	-206,86	255,34	-209,72
<b>y28</b>	33486	-26226	23869	-21405	18960	-15817
<b>y29</b>	-450	209,45	-143,77	79,244	-12,466	-62,2
<b>y30</b>	10000	-10000	10000	-10000	10000	-10000
<b>y31</b>	-306	275,61	-263,49	249,97	-236,95	217,89

Figura 6 - Modos de vibrar exatos associados com suas frequências naturais



Uma vez que as matrizes de massa  $\bar{\mathbf{M}}$  e rigidez  $\bar{\mathbf{K}}$  do sistema tenham sido calculadas por elementos finitos e a matriz de amortecimento  $\bar{\mathbf{C}}$  adotada, pode-se montar as matrizes  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  conforme a Equação (2.4) do capítulo 2 deste trabalho.

Com base no capítulo 2 do presente trabalho, as saídas observáveis da estrutura são, então, calculadas através da seguinte soma de convolução:

$$y_i(k) = \sum_{\tau=0}^{N_p-1} h_{i7}(\tau) u_7(k-\tau) \quad i=1, \dots, 31 \quad (5.3)$$

onde  $h_{i7}(k)$  e  $u_7(k)$ , são, respectivamente, as versões em tempo discreto das FRI's calculadas conforme Eq. (2.56) do capítulo 2 e da força de entrada do tipo ruído branco Gaussiano aplicado na direção da coordenada  $y_7(k)$ .

## 5.2 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA PARA O PÓRTICO SEM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO

Esta seção apresenta os resultados da aplicação do método de identificação para dados de entrada e saídas, descrito no capítulo 3, do presente trabalho. O sistema mecânico estrutural considerado é o pórtico bidimensional apresentado na seção anterior.

Os dados de entrada são representados por uma força aleatória ruído branco de distribuição de probabilidade Gaussiana branca de média zero e amplitude igual a 5N, atuando no nó 5 na direção da coordenada  $y_7(k)$ , como mostra a Figura (5).

Os 31 dados de saída são simultaneamente calculados usando a soma de convolução descrita pela Equação (5.3). Tem-se, portanto, uma simulação de um teste modal do tipo SIMO para 1 única entrada e 31 saídas. É importante observar que nenhum tipo de ruído foi adicionado nos processos de entrada e saída.

A quantidade de dados adotada para cada processo de entrada e saída desta simulação é de 250 pontos. Tais processos são discretizados em intervalos de tempo uniformes usando um intervalo de discretização  $\Delta t = 0,00018$  segundos, o que resultou na frequência máxima  $f_{\max} = 1/2 \Delta t = 1/(2)0,00018 = 2777,8$  Hz.

Para uma quantidade adotada de  $i = 20$  blocos de linhas e  $j = 230$  blocos de colunas, as matrizes de estrutura bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_h$  e  $\mathbf{U}_h$  representadas pelas Equações (4.20) e (4.21), do capítulo 4, possuem dimensões, respectivamente, iguais a  $620 \times 230$  e  $20 \times 230$ . Dessa forma, a dimensão da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2 = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} \mathbf{V}_2$  da equação (4.30) é  $620 \times 210$ .

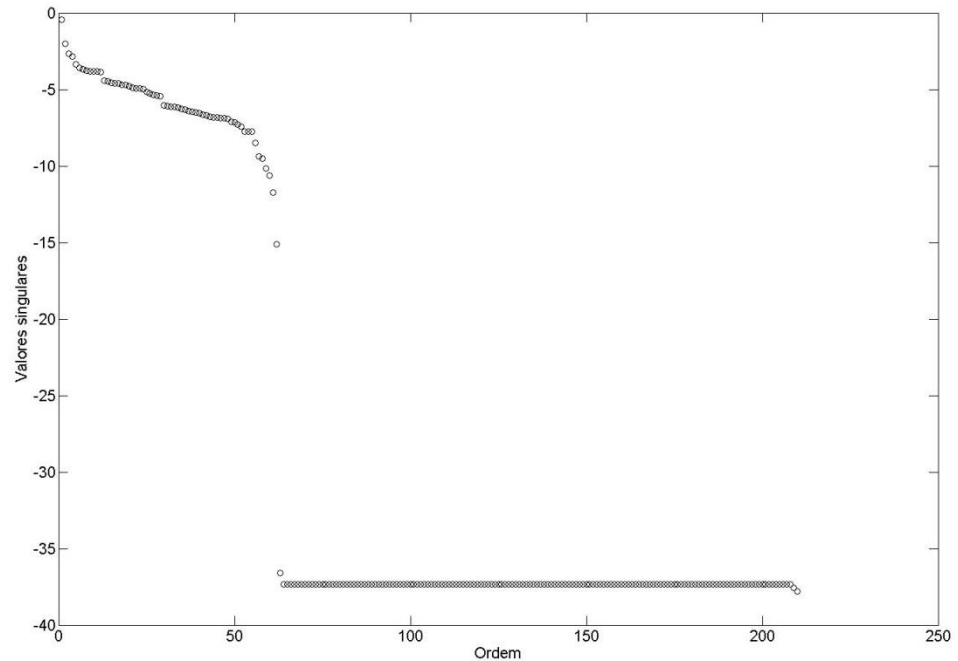
Com base nos valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ , mostrados na Figura (7), a ordem mínima do modelo  $n$  é identificada como  $n = 62$ .

A matriz de observabilidade estendida  $\hat{\Gamma}_i$ , conforme a equação (4.32) do capítulo 4, possui dimensão igual a  $620 \times 62$ .

O cálculo da matriz de estado  $\mathbf{A}$  e da matriz de influência da saída  $\mathbf{C}$  são estimadas conforme o algoritmo de identificação apresentado na seção 4.2.3 do capítulo 4.

Finalmente, com base no algoritmo de identificação dos parâmetros modais apresentado no capítulo 4, verifica-se que para este teste modal, usando dados obtidos de um pórtico bidimensional sem amortecimento e sem adição de qualquer tipo de ruído nos dados de entrada e saída, os resultados dos parâmetros modais identificados são exatamente iguais aos parâmetros exatos apresentados na seção anterior. Isso é válido para todos os 31 modos do sistema estrutural em análise, incluindo as 31 frequências naturais e os 31 modos de vibração naturais associados.

Figura 7 - Valores +singulares da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$



### 5.3 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA PARA O PÓRTICO COM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO

Esta seção apresenta os resultados da aplicação do método de identificação para dados de entrada e saídas para a estrutura do tipo pórtico bidimensional considerando que o mecanismo de dissipação de energia do sistema estrutural seja do tipo viscoso e proporcional. Assim, a matriz de amortecimento  $\bar{C}$  é calculada como:

$$\bar{C} = 0,02 \bar{M} + 0,0001 \bar{K} \quad (5.4)$$

sendo que as matrizes de massa  $\bar{M}$  e rigidez  $\bar{K}$  são aquelas geradas pelo método de elementos finitos, conforme apresentado na seção 5.1.

Os 31 fatores de amortecimento exatos para cada modo são apresentados na Tabela (3).

Tabela 3 – Fatores de amortecimento

<b>Fatores de amortecimento (<math>\xi</math>)</b>			
<b>1</b>	0,0031637	<b>17</b>	0,20428
<b>2</b>	0,0054752	<b>18</b>	0,24744
<b>3</b>	0,015132	<b>19</b>	0,27173
<b>4</b>	0,022588	<b>20</b>	0,28521
<b>5</b>	0,027493	<b>21</b>	0,32158
<b>6</b>	0,035678	<b>22</b>	0,36009
<b>7</b>	0,055855	<b>23</b>	0,36508
<b>8</b>	0,056724	<b>24</b>	0,40968
<b>9</b>	0,075494	<b>25</b>	0,44521
<b>10</b>	0,077207	<b>26</b>	0,48481
<b>11</b>	0,094856	<b>27</b>	0,52727
<b>12</b>	0,12214	<b>28</b>	0,62082
<b>13</b>	0,13658	<b>29</b>	0,63485
<b>14</b>	0,14609	<b>30</b>	0,85613
<b>15</b>	0,16546	<b>31</b>	0,85692
<b>16</b>	0,19371		

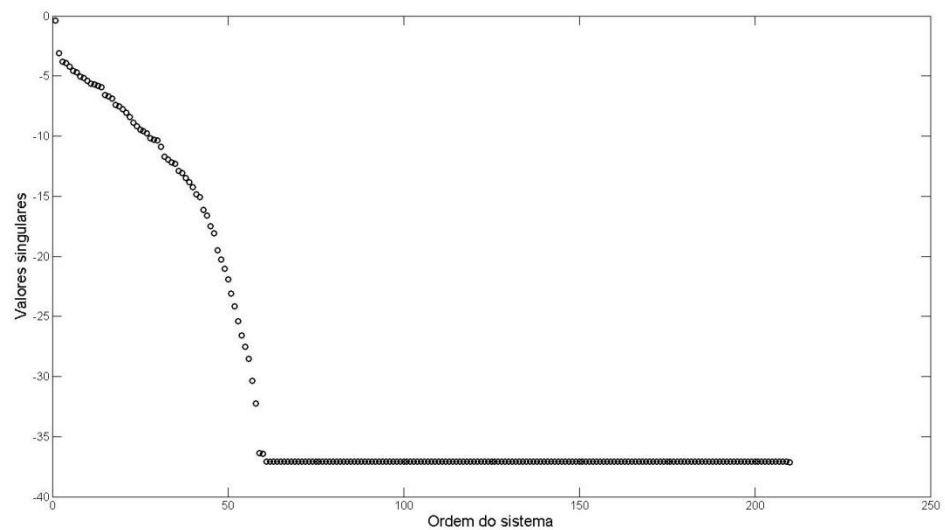
O método de identificação dos parâmetros modais usado nesta seção é o mesmo usado na seção 5.2.

A quantidade de dados adotada para cada processo de entrada e saída usada neste teste é de 250 pontos, usando o mesmo intervalo de discretização  $\Delta t = 0.00018$  segundos, o que resulta na mesma frequência máxima  $f_{\max} = 1/2 \Delta t = 1/(2)0,0018 = 2777,8$  Hz.

Para uma quantidade de  $i = 20$  blocos de linhas e  $j = 230$  blocos de colunas, as matrizes de estrutura bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_h$  e  $\mathbf{U}_h$  representadas pelas Equações (4.20) e (4.21), possuem dimensões, respectivamente, iguais a  $620 \times 230$  e  $20 \times 230$ . Dessa forma, a dimensão da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2 = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} \mathbf{V}_2$  da equação (4.30) possui dimensão de  $620 \times 210$ .

Com base nos valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$ , apresentados na Figura (8), a ordem mínima do modelo  $n$  é identificada como  $n = 62$ .

Figura 8 - Valores singulares de  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$



Neste teste, a identificação das frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar normalizados associados resultam em valores exatamente iguais aos exatos.

Nota-se que, quando se considera amortecimento viscoso na modelagem matemática do sistema estrutural, os modos de vibração normalizados são complexos. Entretanto, como o tipo de amortecimento adotado neste teste é proporcional, os modos normalizados identificados são reais e exatamente iguais aos exatos mostrados na Figura (6).

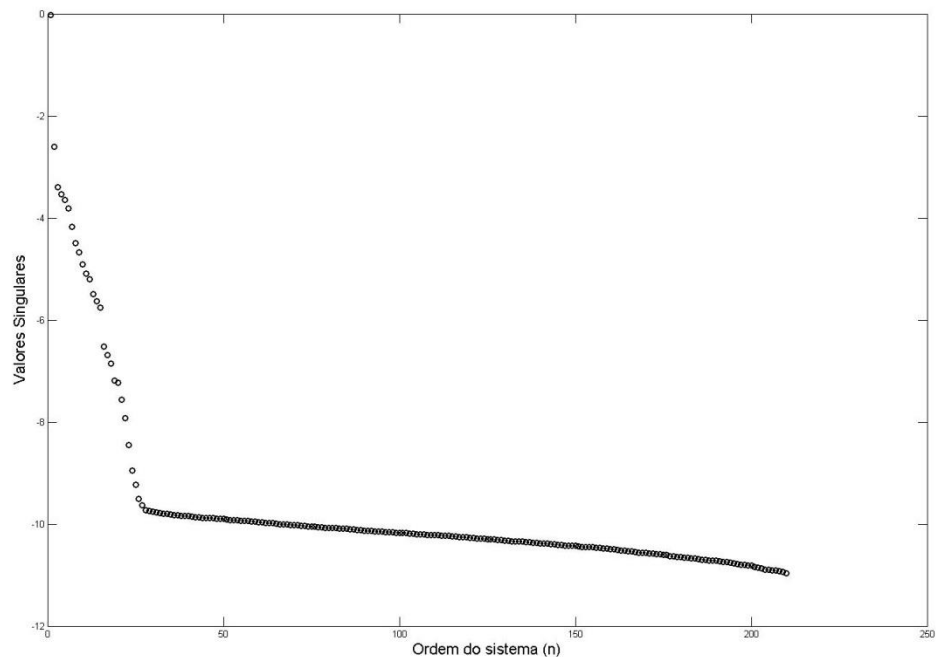
#### 5.4 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA PARA O PÓRTICO COM AMORTECIMENTO E RUÍDO

Nesta seção, além de considerar a matriz de amortecimento  $\bar{\mathbf{C}}$  para a simulação dos dados de saída, como na seção 5.3 anterior, foi adicionado um sinal do tipo ruído branco gaussiano nos sinais de saída  $y_i(k)$ ,  $i=1:31$ , com uma

amplitude de 0,0000015, resultando uma relação ruído/sinal  $NSR = \sqrt{\mathbf{e}(k)^T \mathbf{e}(k)} / \sqrt{\mathbf{y}(k)^T \mathbf{y}(k)}$  média de aproximadamente 7%, sendo que os termos  $e(k)$  e  $y_i(k)$  denotam, respectivamente, os sinais de ruído e saída.

Adotando os mesmos valores de blocos para as matrizes Hankel dos dados de entrada e saída  $\mathbf{Y}_h$  e  $\mathbf{U}_h$  e o mesmo procedimento de identificação adotado nas seções 5.2 e 5.3, a estimativa da ordem mínima do sistema  $n$  resulta, neste teste, em  $n = 24$ , como mostra a Figura (9).

Figura 9 - Valores singulares de  $\mathbf{Y}_h \mathbf{V}_2$



Assim, foram estimados os parâmetros modais do sistema adotando vários valores de ordem mínima do modelo  $n$ . Os valores adotados para ordem mínima  $n$  são os seguintes: 20, 22, 24, 26, 28 e 30.

As frequências naturais e fatores de amortecimento identificados são mostrados nas Tabelas (4) e (5). Com base na repetição das frequências naturais, as correspondentes aos 6 primeiros modos identificados são destacados em cor vermelha na tabela (5).

Os fatores de amortecimento correspondentes aos seis primeiro modos relacionados ao valor de ordem mínima  $n=24$  são mostrados na tabela (6). Além disso, os modos de vibração natural relacionados a estes 6 primeiros modos são apresentados na Figura 10.

É importante notar que neste teste, incluindo ruído nos dados de saída, a frequência natural relacionada ao segundo modo exato de 17,132 Hz não foi identificada pelo presente método.

Nota-se também que os modos de vibrar identificados mostrados na Figura (10), usando a estimativa da ordem mínima  $n = 24$ , apresentam semelhança muito

boa com os modos exatos do pórtico apresentados na Figura (6). Além disso, é importante observar que os modos de vibrar para outras diversas ordens mínimas consideradas neste teste também apresentam bons resultados.

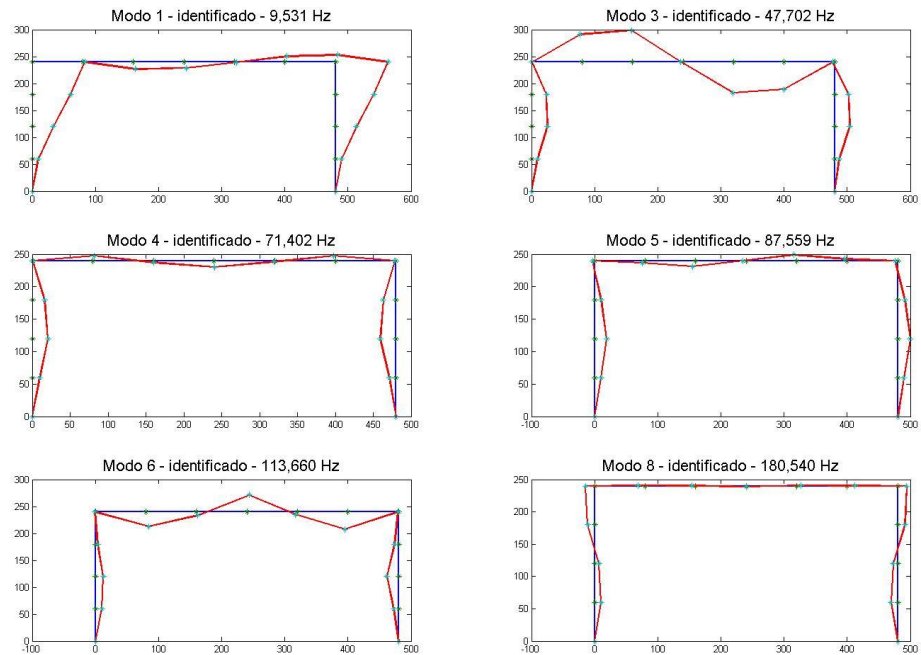
Tabela 4 – Frequências naturais exatas e identificadas com adição de ruído

	Frequências naturais exatas (Hz)	Frequências identificadas (Hz)					
		n=30	n=28	n=26	n=24	n=22	n=20
1	9,5392	9,517	9,4353	9,5117	9,5311	9,5484	9,5559
2	17,132						
3	48,062	48,44	46,401	46,807	46,702	45,395	49,424
4	71,831	71,18	71,568	73,713	71,402	69,9	
5	87,454	87,35	87,335	87,699	87,559	86,602	84,247
6	113,52	113,1	113,68	113,56	113,66	112,87	112,75
7	177,77						
8	180,53	180,5	180,51	180,51	180,54	180,52	180,51
9	240,28						
10	245,74	245,5	245,51	245,6	245,33	245,8	245,81
-				262,73			
11	301,92	302,0	301,17	301,96	302,19	303,1	302,26
12	388,76	389,0	386,93	388,73	389,32	392,44	390,61
-			408,41				
13	434,73						
14	465						
-				497,34			
15	526,65	539,8					
-		555,5	545,34	6319	589,67	579,51	610,93
-		581,6	59,54	946,97	592,65	612,82	841,86
-		655,9	1048,4		804,71		
-		1013,	1788,6				

Tabela 5 - Frequências naturais e fatores de amortecimento ( $n=24$ )

Modos	Frequências naturais		Fatores de amortecimento	
	Exatas	Identificadas	Exatas	Identificados
1	9,5392	9,5311	0,0031637	0,005
2	17,132	-	0,0054752	0,005
3	48,062	46,702	0,015132	0,0293
4	71,831	71,402	0,022588	0,0293
5	87,454	87,559	0,027493	0,0357
6	113,52	113,66	0,035678	0,0357

Figura 10 - Modos de vibrar identificados com ruído no sinal de entrada ( $n=24$ )



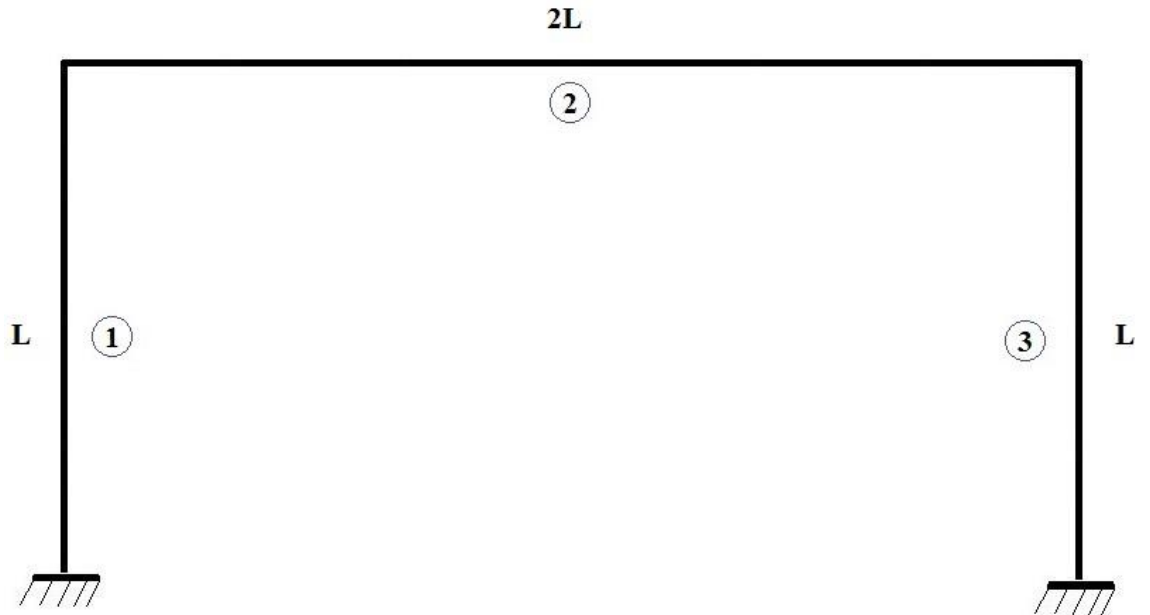
## 5.5 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O PÓRTICO SEM AMORTECIMENTO E SEM RUÍDO USANDO O ALGORITMO 2

A identificação dos parâmetros modais para o pórtico bidimensional de 31 graus de liberdade usando os algoritmos de identificação para dados apenas de saída não produziram bons resultados. Nota-se que foram melhor identificadas apenas algumas poucas frequências naturais, especialmente as de magnitudes mais alta. Os fatores de amortecimento e modos de vibração natural também não foram bem identificados.

Assim, para tentar entender a razão disto, foi realizado outra simulação para a mesma estrutura do tipo pórtico bidimensional, considerado nas seções anteriores, porém usando uma quantidade bem menor de elementos na geração de dados, como mostra a Figura (11).

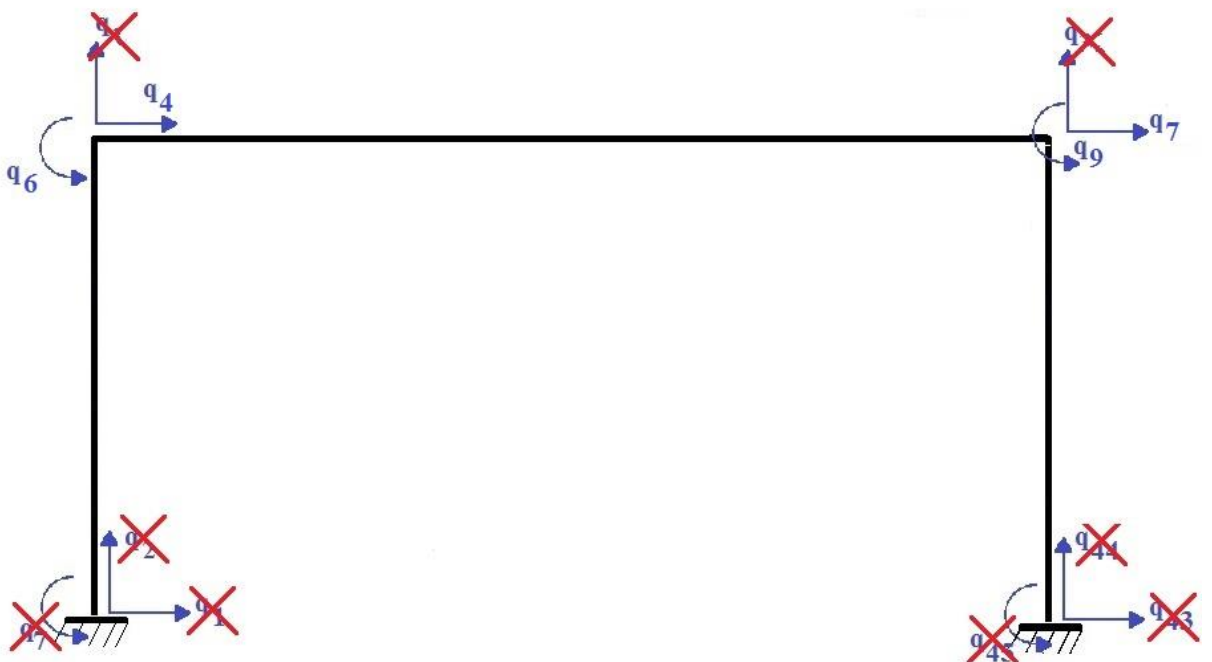
A Figura (11) representa a mesma estrutura de pórtico utilizada nas seções anteriores, porém aqui a estrutura foi dividido em apenas 3 elementos e 4 nós.

Figura 11 - Estrutura do tipo pórtico bidimensional



A Figura (12) mostra as 12 coordenadas generalizadas  $q_i$ , sendo que devido aos dois vínculos da estrutura serem do tipo engaste, as coordenadas  $q_1, q_2, q_3, q_{10}, q_{11}$  e  $q_{12}$  são nulas. Além disso, assumindo que não há nenhuma deformação na direção  $y$  nas vigas verticais, as coordenadas generalizadas  $q_5, q_8$  também são consideradas nulas. Essas coordenadas generalizadas consideradas nulas estão marcadas com um X na cor vermelha.

Figura 12 - Pórtico e suas respectivas coordenadas generalizadas



Com base na discussão anterior, as coordenadas de saída ou observáveis da estrutura  $y_i$ , são as seguintes:  $y_1 = q_4$ ,  $y_2 = q_6$ ,  $y_3 = q_7$ ,  $y_4 = q_9$  como mostra a Figura (13). A Figura (13) mostra também a posição adotada para a força de entrada, denotada por  $u_1$ . Ela está na direção de  $y_1$ , atuando no segundo nó.

Figura 13 - Força de entrada e coordenadas de saída.



O tipo de elemento usado para essa discretização do pórtico é o mesmo da Figura (3) da seção 5.1. As matrizes globais de massa e de rigidez da estrutura referentes aos 4 deslocamentos  $y_i$  são calculadas pelo método dos elementos finitos, resultando em 4 frequências naturais, que são apresentadas na Tabela (6).

A Tabela (8) apresenta também os valores dos modos de vibração naturais normalizados relacionados com estes 4 deslocamentos observáveis  $y_i$  da estrutura. É importante salientar que, neste teste, a máxima frequência natural obtida neste teste é de 166,66 Hertz.

Tabela 6 - Frequências naturais exatas e suas coordenadas generalizadas dos modos

$y_i$	Frequências naturais exatas (Hertz)			
	9,5	24,6	65,9	162,2
<b>y4</b>	10000	10000	10000	10000
<b>y6</b>	-34,822	-10181	-1940,8	-14,458
<b>y7</b>	10000	-10000	10000	-10000
<b>y9</b>	-34,822	10181	-1940,8	14,458

As saídas observáveis da estrutura são então calculadas através da seguinte soma de convolução:

$$y_i(k) = \sum_{\tau=0}^{N_p-1} h_{i1}(\tau) u_1(k-\tau) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (5.5)$$

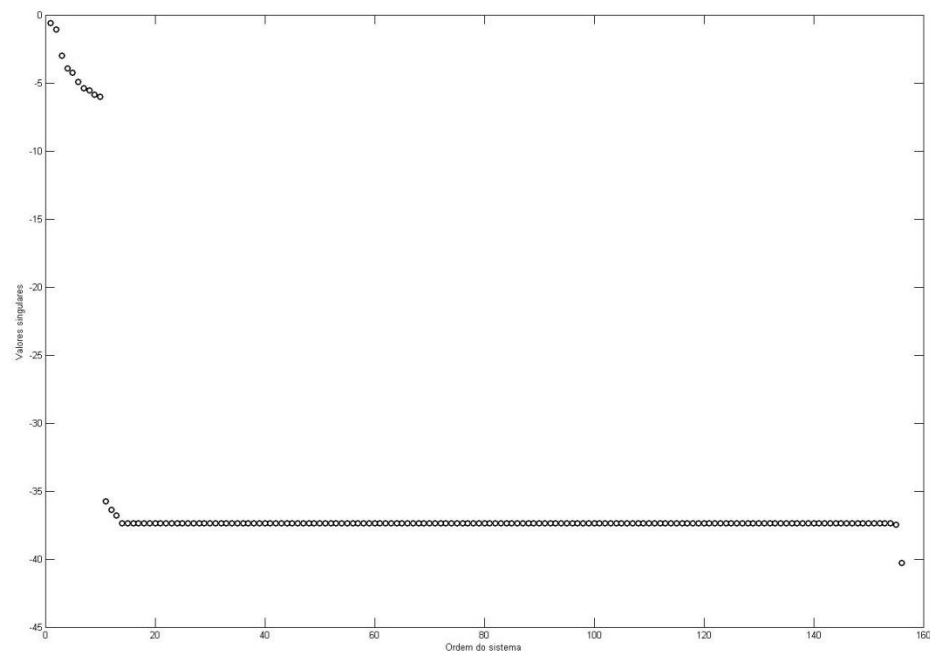
onde  $h_{i1}(k)$  e  $u_1(k)$ , são, respectivamente, as versões em tempo discreto das FRI's calculadas conforme Eq. (2.56) do capítulo 2 e a força de entrada do tipo ruído branco Gaussiano aplicado no nó 2, na direção da coordenada  $y_1(k)$ .

Usando o algoritmo 2 do capítulo 4, a quantidade de dados para cada processo de saídas usada neste teste é de 400 pontos, usando um intervalo de discretização constante de  $\Delta t = 0,003$  segundos, o que resulta na frequência máxima  $f_{\max} = 1/2 \Delta t = 1/(2)0,003 = 166,66$  Hz.

Para uma quantidade adotada de  $i = 10$  blocos de linhas e  $j = 156$  blocos de colunas, as matrizes de estrutura bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_r$  e  $\mathbf{Y}$ , representada pelas Equações (4.61) e (4.62), do capítulo 4, possuem dimensões, respectivamente,  $156 \times 10$  e  $940 \times 10$ . Dessa forma, a dimensão da matriz de covariância  $\mathbf{T}^r$  da Equação (4.63) é  $940 \times 156$ .

Com base nos valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{T}^r$ , apresentados na Figura (14), a ordem mínima do modelo  $n$  é identificada como  $n = 10$ .

Figura 14 – Valores singulares de  $\mathbf{T}^r$



O cálculo da matriz de estado  $\mathbf{A}$  e da matriz de influencia da saída  $\mathbf{C}$  se dá conforme o algoritmo de identificação apresentado na seção 4.3, do capítulo 4.

Para diferentes valores de ordem  $n$ , foram identificadas as frequências naturais apresentadas na tabela (7). Nota-se a falta de qualidade da identificação das frequências naturais, mesmo neste modelo reduzido da estrutura.

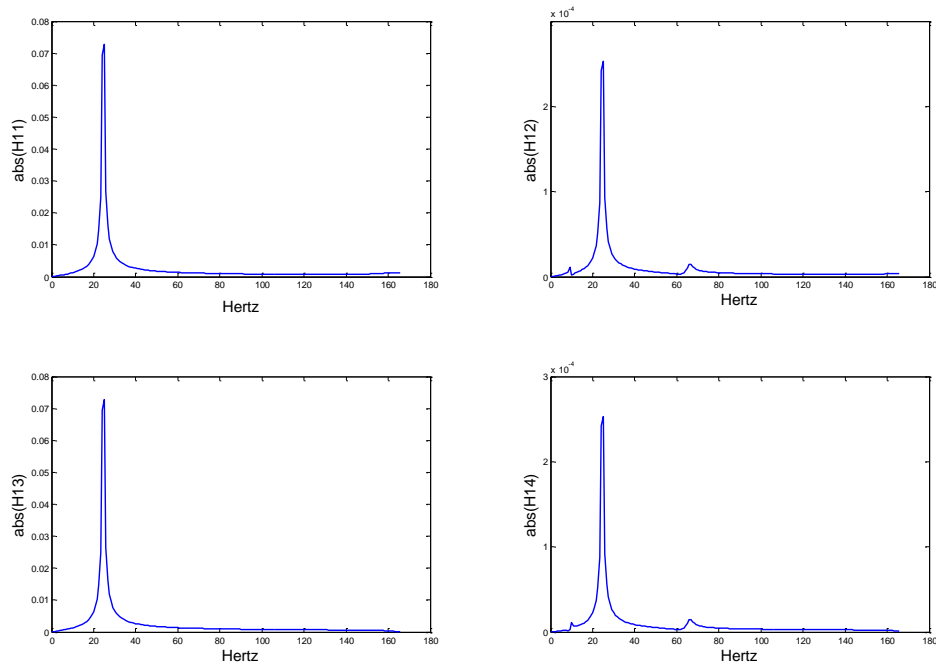
Essa falha de qualidade na identificação das frequências naturais desta estrutura pode ser explicada analisando os valores absolutos das FRF's  $H_{11}(f)$ ,

$H_{21}(f)$ ,  $H_{31}(f)$  e  $H_{41}(f)$ , mostradas na Figura (15). Observa-se que a frequência natural predominante, que possui a maior magnitude, é a de 24,6 Hz.

Tabela 7 – Frequências naturais identificadas para diferentes ordens  $n$  do sistema

Frequências naturais exatas (Hz)	Frequências naturais Identificadas (Hz)				
	n=12	n=10	n=8	n=6	n=4
9,551					
24,5909	24,356	24,5628	24,1416	24,5944	24,4594
-	40,651	43,4872	35,9916	40,906	
65,88					
-	74,386	75,9766	78,428		
-	112,67	113,0458			
162,2198	161,98	162,2158	162,5517	166,6679	166,724
-	263,99				

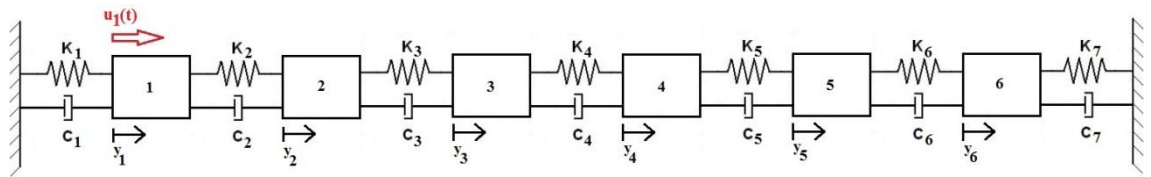
Figura 15 - - FRF's  $H_{11}(f)$ ,  $H_{21}(f)$ ,  $H_{31}(f)$  e  $H_{41}(f)$



## 5.6 GERAÇÃO DE DADOS PARA O SISTEMA ESTRUTURAL DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE

Os testes modais para o pórtico da seção 5.5, usando os algoritmos que consideram apenas dados de saída, falharam. Dessa forma, outro tipo de sistema estrutural, do tipo massa-mola-amortecedor com seis graus de liberdade, como mostra a Figura (16), é considerado para a validação da identificação paramétrica dos algoritmos para dados apenas de saída.

Figura 16 – Sistema com 6 graus de liberdade



As matrizes de massa  $\bar{\mathbf{M}}$ , rigidez  $\bar{\mathbf{K}}$  e amortecimento  $\bar{\mathbf{C}}$  do sistema são as seguintes,

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & (k_4 + k_5) & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & (k_5 + k_6) & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & (k_6 + k_7) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

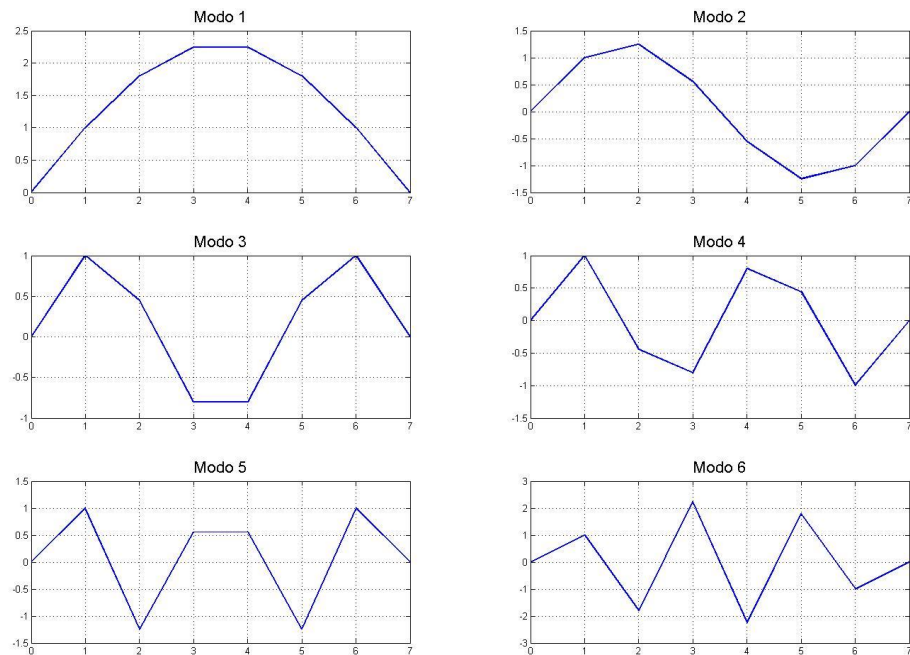
$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & (c_4 + c_5) & -c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & (c_5 + c_6) & -c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & (c_6 + c_7) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Usando um procedimento de geração de dados idêntico ao da seção 5.1, as frequências naturais obtidas para este sistema estrutural são mostradas na Tabela (8), usando  $m_1 = m_2 = \dots = m_6 = 0,1 \text{ kg}$  e  $k_1 = k_2 = \dots = k_6 = 250 \text{ N/m}$ . Os modos de vibração natural normalizados para o caso sem amortecimento são apresentados Figura (17).

Tabela 8 - Frequências exatas do sistema mecânico com 6 graus de liberdade

Frequências naturais exatas (Hz)	3,5415	6,9055	9,9231	12,443	14,339	15,516
----------------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Figura 17 – Modos de vibrar exatos do sistema mecânico com 6 graus de liberdade



As saídas observáveis  $y_i(k)$  da estrutura são então calculadas através da seguinte soma de convolução:

$$y_i(k) = \sum_{\tau=0}^{N_p-1} h_{i1}(\tau) u_1(k-\tau) \quad i=1, \dots, 6 \quad (5.9)$$

onde  $h_{i1}(k)$  e  $u_1(k)$ , são, respectivamente, as versões em tempo discreto das FRI's calculadas conforme a equação (2.56) do capítulo 2 e da força de entrada do tipo ruído branco Gaussiano aplicada na direção da coordenada  $y_1(k)$

### 5.7 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O SISTEMA MASSA-MOLA SEM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO USANDO O ALGORITMO 2

Esta seção apresenta os resultados da aplicação do método de identificação apenas para dados de saída, descrito na seção 4.3 (algoritmo 2).

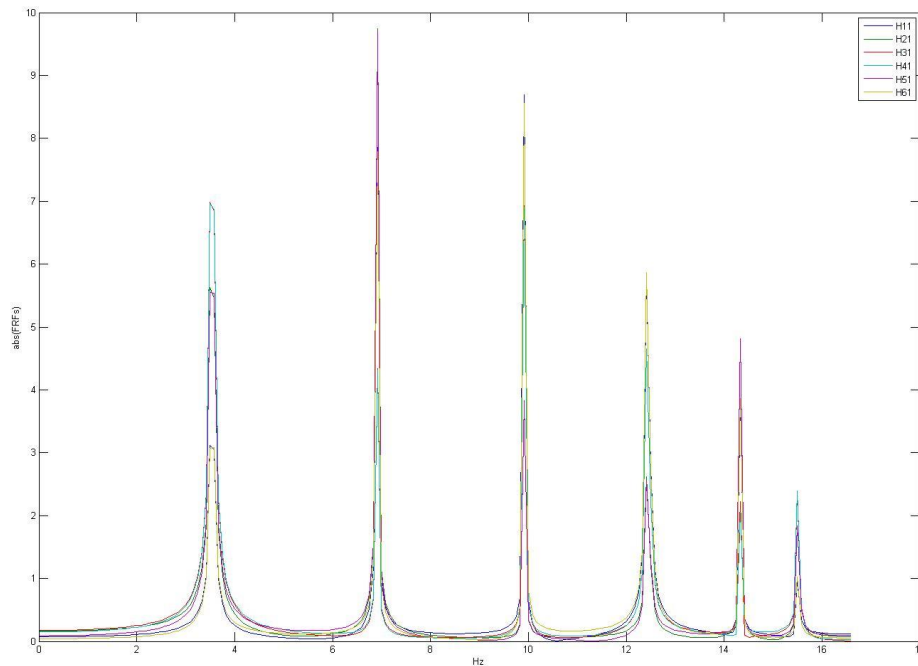
As 6 saídas do sistema são calculados simultaneamente usando a soma de convolução dada pela Equação (5.9). Tem-se, portanto, uma simulação de um teste modal do tipo SIMO para uma única entrada e 6 saídas. Neste teste nenhum tipo de ruído foi adicionado nos processos de entrada e saída.

A quantidade de dados para cada processo de entrada e saídas desta simulação é de 400 pontos usando um intervalo de discretização constante de  $\Delta t = 0,03$  segundo, resultando em uma frequência máxima de Nyquist

$$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2(0,03)} = 16,66 \text{ Hz.}$$

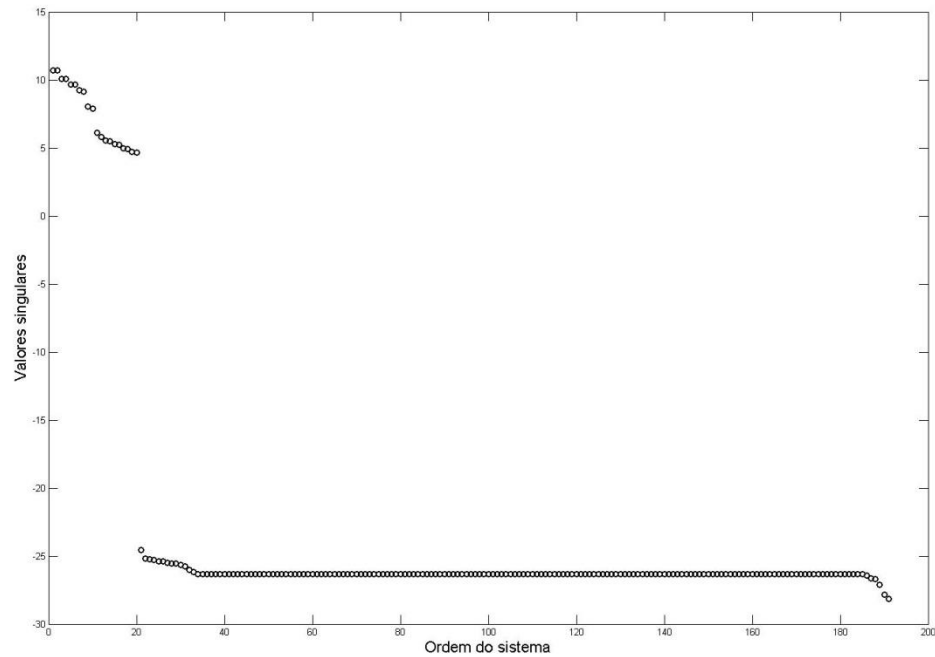
As curvas dos valores absolutos das 6 FRF's  $H_{11}(f)$ ,  $H_{21}(f)$ ,  $H_{31}(f)$ ,  $H_{41}(f)$ ,  $H_{51}(f)$  e  $H_{61}(f)$  do sistema são mostradas na Figura (18) abaixo.

Figura 18 - FRF's do sistema massa-mola de seis graus de liberdade



Para uma quantidade adotada de  $i = 191$  blocos de linhas e  $j = 20$  blocos de colunas, as matrizes de estrutura bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_r$  e  $\mathbf{Y}$ , representada pelas Equações (4.61) e (4.62) do capítulo 4, possuem dimensões, respectivamente, iguais a  $191 \times 20$  e  $1140 \times 20$ . Dessa forma, a dimensão da matriz de covariância  $\mathbf{T}^r$  da Equação (4.63) é  $1140 \times 191$ .

Com base nos valores singulares mais significativos da matriz de covariância  $\mathbf{T}^r$ , apresentados na Figura (19), a ordem mínima do modelo  $n$  é identificada como  $n = 20$ .

Figura 19 - Valores singulares de  $\mathbf{T}^r$ 

O cálculo da matriz de estado  $\mathbf{A}$  e da matriz de influência da saída  $\mathbf{C}$  e dos parâmetros modais se dá conforme o algoritmo de identificação apresentado no capítulo 4.

Para diferentes valores de ordens mínimas  $n$  em torno de  $n=20$ , foram identificadas as frequências naturais apresentadas na Tabela (9). As frequências naturais são identificadas baseadas na sua repetição para as diversas ordens  $n$ , sendo que as identificadas são destacadas na cor vermelha e as computacionais na cor preta.

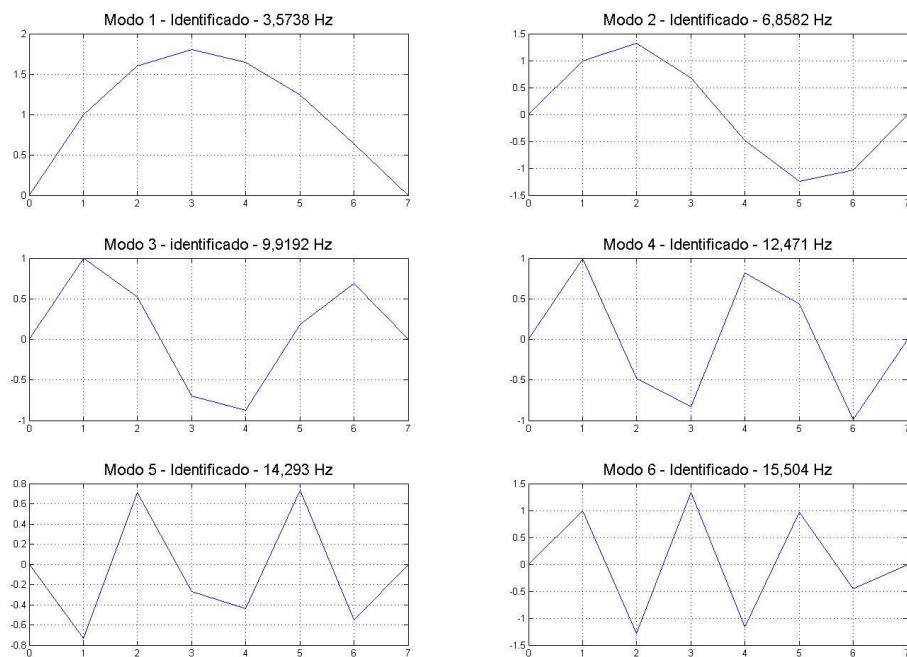
Usando o valor da ordem  $n=12$ , os modos de vibração normalizados identificados são apresentados na Figura (20).

Nota-se, neste teste, a excelente qualidade da identificação das frequências naturais e modos de vibração naturais.

Tabela 9 – Frequências identificadas para diferentes ordens (n) do sistema

Modos	Frequências exatas (Hz)	Frequências Identificadas (Hz)			
		n=24	n=20	n=16	n=12
-			1,4615		
-		1,3884	3,092		
<b>1</b>	<b>3,5415</b>	<b>3,5332</b>	<b>3,5434</b>	<b>3,5378</b>	<b>3,5738</b>
-				3,9561	
-		6,7056	5,9321		
<b>2</b>	<b>6,9055</b>	<b>6,8887</b>	<b>6,9215</b>	<b>6,8989</b>	<b>6,8582</b>
-		9,5369	9,7361		
<b>3</b>	<b>9,9231</b>	<b>9,9263</b>	<b>9,8754</b>	<b>9,9165</b>	<b>9,9112</b>
-				10,915	
<b>4</b>	<b>12,443</b>	<b>12,43</b>	<b>12,436</b>	<b>12,415</b>	<b>12,471</b>
<b>5</b>	<b>14,339</b>	<b>14,295</b>	<b>14,329</b>	<b>14,293</b>	<b>14,293</b>
<b>6</b>	<b>15,516</b>	<b>15,54</b>	<b>15,569</b>	<b>15,511</b>	<b>15,504</b>
-		19,223			
-		19,827			

Figura 20 - Modos de vibração identificados



## 5.8 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O SISTEMA MASSA MOLA COM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO USANDO O ALGORITMO 2

Esta seção apresenta os resultados da aplicação do método de identificação para dados de saídas descrito no capítulo 4, na seção 4.3, para a estrutura do tipo massa-mola-amortecedor, considerando amortecimento do tipo viscoso e proporcional dado por:

$$\bar{\mathbf{C}} = 0,02 \bar{\mathbf{M}} + 0,0001 \bar{\mathbf{K}} \quad (5.10)$$

sendo que as matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e de rigidez  $\mathbf{K}$  são aquelas calculadas pelas equações (5.6), (5.7) e (5.8), conforme apresentado na seção 5.6.

Os 6 fatores de amortecimento exatos correspondentes a cada modo do sistema são apresentados na Tabela (10).

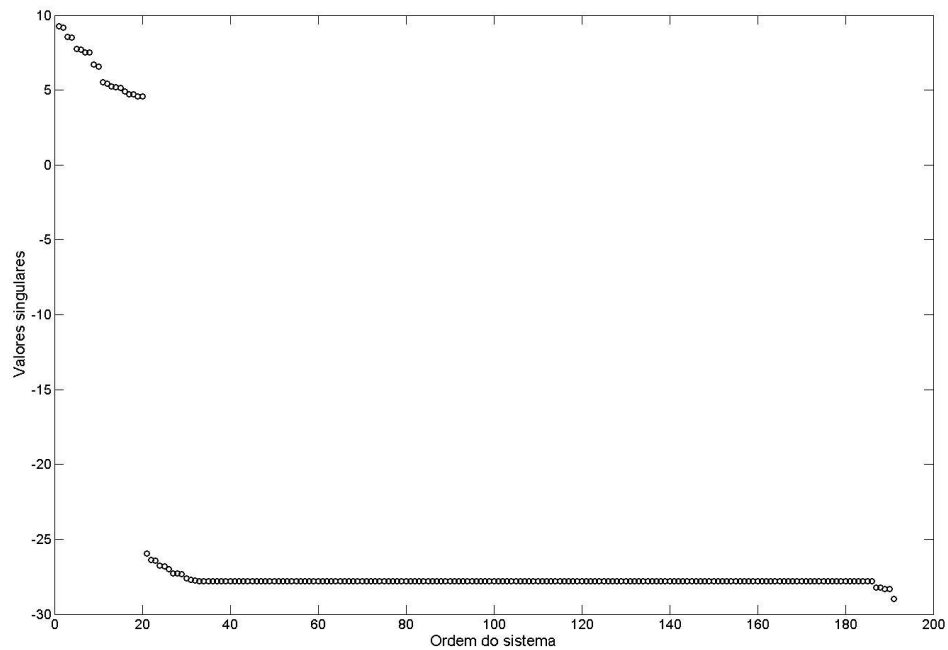
Tabela 10 – Fatores de amortecimento

Modos	Fatores de amortecimento exatos ( $\xi$ )
1	0,0012
2	0,0023
3	0,0034
4	0,0042
5	0,0049
6	0,0053

A quantidade de dados para cada processo de entrada e saídas deste neste teste é de 400 pontos usando um intervalo de discretização constante de  $\Delta t = 0,03$  segundos, o que resulta na frequência máxima de  $f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2(0,03)} = 16,66$  Hz.

Para a quantidade adotada de  $i = 191$  blocos de linhas e  $j = 20$  blocos de colunas, as matrizes de estrutura bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_r$  e  $\mathbf{Y}$  e a matriz de covariância  $\mathbf{T}^r$  possuem dimensão  $1140 \times 191$ .

Os valores singulares de  $\mathbf{T}^r$  estão apresentados na Figura (21), e a ordem mínima do modelo é identificada como  $n = 20$ .



Para diferentes valores de ordens mínimas do modelo em torno de  $n=20$ , são identificadas as frequências naturais, apresentadas na Tabela (11). Os fatores de amortecimento identificados para a ordem mínima  $n=12$  são mostrados na Tabela (12).

Tabela 11 – Frequências naturais identificadas com amortecimento

Modos	Frequências exatas (Hz)	Frequências Identificadas (Hz)			
		n=24	n=20	n=16	n=12
-		1,2673	0,5295		
-		3,4778	2,9226		
1	3,5415	3,5495	3,54	3,5436	3,5389
-			4,9181		
-		6,6347	5,805		
2	6,9055	6,9044	6,8575	6,9156	6,8987
-		9,7724	9,2689	7,3474	
-				9,4939	
3	9,9231	9,9262	9,9005	9,8879	9,9127
4	12,443	12,441	12,469	12,427	12,459
-		13,957			
5	14,339	14,318	14,334	14,358	14,37
6	15,516	15,524	15,512	15,616	15,442
-		17,038			

Tabela 12 – Fatores de amortecimento identificados para ordem  $n=12$

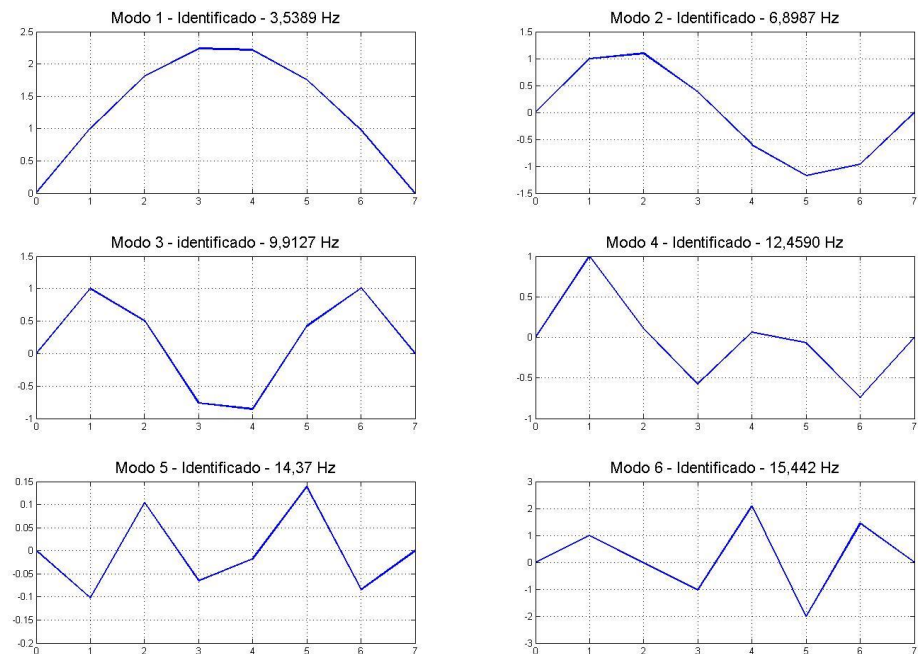
Fatores de amortecimento	Fatores de amortecimento
--------------------------	--------------------------

exatos ( $\xi$ )	identificados ( $\xi$ )
0,0012	0,0022
0,0023	0,005
0,0034	0,0023
0,0042	0,0006
0,0049	0,0001
0,0053	0,2787

Os modos de vibração naturais normalizados, para a ordem mínima  $n=12$ , são mostrados na Figura (22).

Nota-se novamente a boa qualidade na identificação das frequências naturais e, de modo geral, dos modos de vibração natural usando o algoritmo 2 da seção 4.3. Já os fatores de amortecimento, mostraram-se discrepantes, como pode ser visto pela diferença de ordem de grandeza.

Figura 22 – Modos de vibrar identificados do sistema

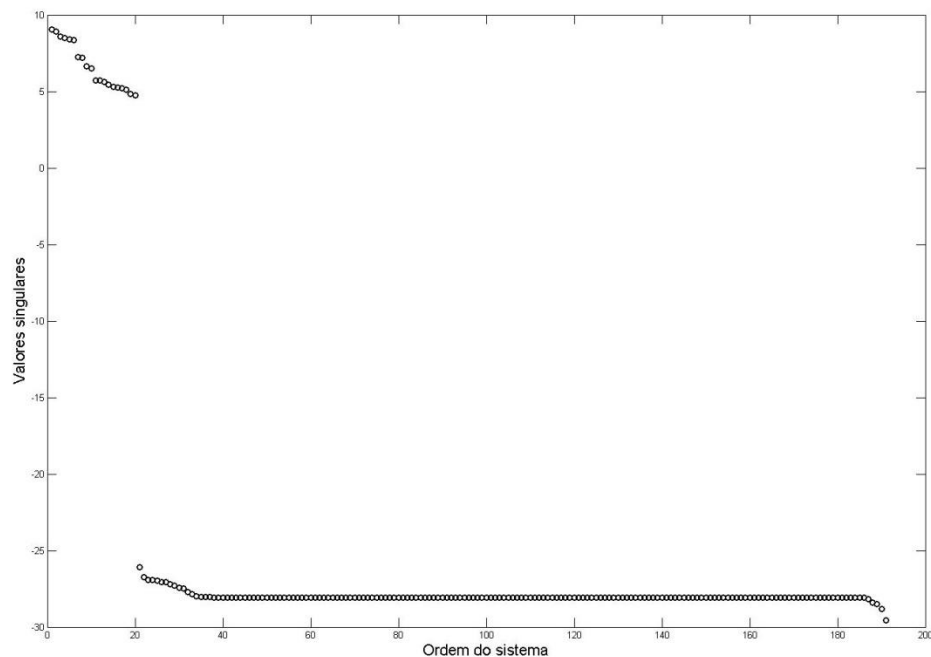


## 5.9 IDENTIFICAÇÃO MODAL USANDO DADOS APENAS DE SAÍDA PARA O SISTEMA MASSA MOLA COM AMORTECIMENTO E RUÍDO NA SAÍDA USANDO O ALGORITMO 2

Nesta seção, além de considerar a matriz de amortecimento  $\bar{\mathbf{C}}$  para a simulação dos dados de saída, como na seção 5.8 anterior, foi adicionado um sinal do tipo ruído branco Gaussiano nos sinais de saída  $y_i(k)$ ,  $i=1:6$ , com uma amplitude de 0,35, resultando uma relação ruído/sinal  $NSR = \sqrt{\mathbf{e}(k)^T \mathbf{e}(k)} / \sqrt{\mathbf{y}(k)^T \mathbf{y}(k)}$  média de aproximadamente 8%.

Adotando os mesmos valores de blocos para as matrizes estrutura bloco-Hankel  $\mathbf{Y}_r$  e  $\mathbf{Y}$ , e o mesmo procedimento de identificação empregado nas seções 5.7 e 5.8, a estimativa da ordem mínima do modelo  $n$  baseada nos principais valores singulares de  $\mathbf{T}^r$ , de dimensão igual a  $1140 \times 191$ , resulta em  $n=20$ , como mostra a Figura (23).

Figura 23 – Valores singulares de  $\mathbf{T}^r$



Assim, são identificados os parâmetros modais do sistema adotando diferentes valores ( $n$ 's) para a ordem mínima do sistema em torno de  $n=20$ .

As frequências naturais identificadas para diversos valores de  $n$  são mostrados na Tabela (13). Com base na repetição das estimativas de frequências naturais, os primeiros 6 modos identificados são destacados na cor vermelha. Os demais valores da tabela (13) são frequências puramente computacionais.

Os 6 fatores de amortecimento para o valor da ordem mínima do modelo  $n=12$  são mostradas na tabela (14). Já os 6 modos de vibração natural normalizados são mostrados na Figura (24).

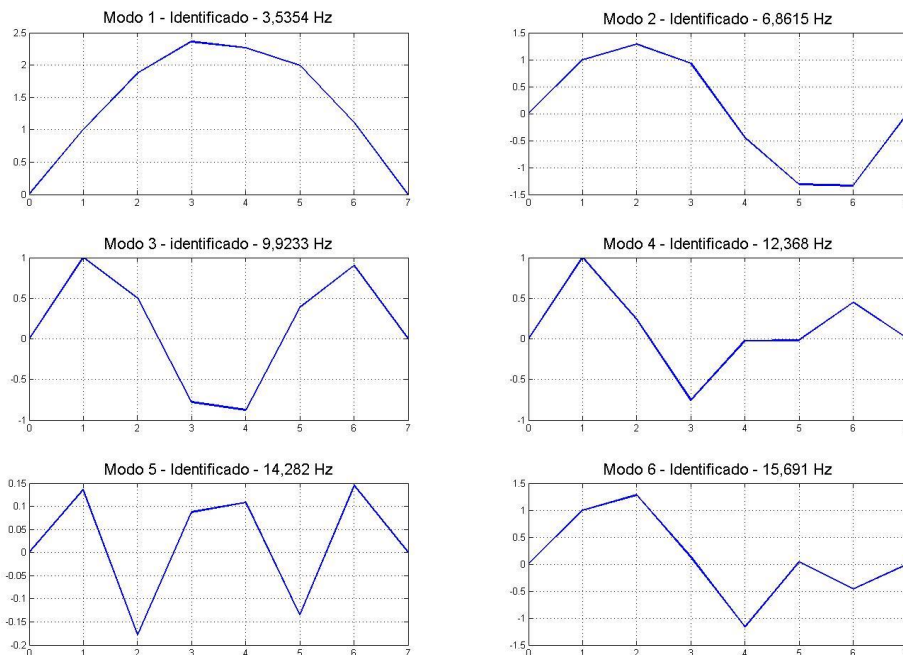
Tabela 13 – Frequências naturais identificadas com ruído

Modos	Frequências exatas (Hz)	Frequências Identificadas (Hz)			
		n=24	n=20	n=16	n=12
-		0,6599			
-		2,753	1,9091		
1		3,5172	2,882	3,0492	
-	<b>3,5415</b>	<b>3,5301</b>	<b>3,5535</b>	<b>3,5394</b>	<b>3,5354</b>
-		5,7614			
2			6,4729		
-	<b>6,9055</b>	<b>6,879</b>	<b>6,9383</b>	<b>6,8965</b>	<b>6,8615</b>
3		9,6591	9,3308	8,667	
4	<b>9,9231</b>	<b>9,9274</b>	<b>9,9257</b>	<b>9,9575</b>	<b>9,9233</b>
-				12,407	
5	<b>12,443</b>	<b>12,412</b>	<b>12,519</b>	<b>12,458</b>	<b>12,368</b>
6		12,66			
-		14,313			
-	<b>14,339</b>	<b>14,316</b>	<b>14,237</b>	<b>14,417</b>	<b>14,282</b>
-	<b>15,516</b>	<b>15,473</b>	<b>15,536</b>		<b>15,691</b>

Tabela 14 – Fatores de amortecimento identificados

Fatores de amortecimento exatos ( $\xi$ )	Fatores de amortecimento identificados ( $\xi$ )
0,0012	0,000054
0,0023	0,0003528
0,0034	0,0021868
0,0042	0,0041965
0,0049	0,0014936
0,0053	0,58722

Figura 24 – Os modos de vibrar do sistema



## 5.10 IDENTIFICAÇÃO DOS PARAMETROS MODAIS SEM AMORTECIMENTO E LIVRE DE RUÍDO USANDO O ALGORITMO 1

Nesta seção, é abordado outro tipo de processo de identificação modal apresentado no capítulo 4, na seção 4.2, usando os dados simulados do sistema massa-mola da seção 5.6.

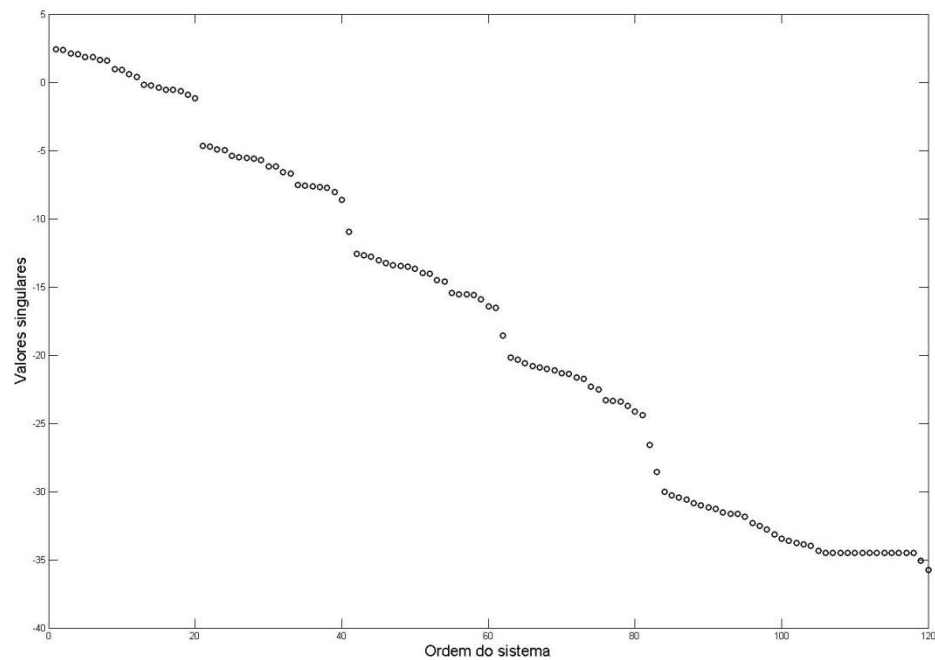
A quantidade de dados para cada processo de entrada e saídas usadas nesta simulação é de 400 pontos usando um intervalo de discretização constante de  $\Delta t = 0,03$  segundos, o que resulta na frequência máxima  $f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2(0,03)} = 16,66$  Hz.

Para a quantidade adotada de  $i = 20$  blocos de linhas e  $j = 156$  blocos de colunas, usando a matriz de auto covariância  $R_i$ , da equação (4.27), de dimensão  $6 \times 6$ , tem-se que a matriz  $\mathbf{H}$  de estrutura Hankel, representada pela Equação (4.37), possui dimensão de  $120 \times 936$ .

Com base nos valores singulares mais significativos da matriz  $\mathbf{H}$ , apresentados na Figura (25), a ordem mínima do modelo  $n$  é identificada como  $n = 20$ .

É interessante notar a dificuldade na identificação da ordem mínima do modelo usando o algoritmo 1, quando comparado com o algoritmo 2 para identificação modal usando dados apenas da saída.

Figura 25 – Valores singulares da matriz  $\mathbf{H}$



A matriz de observabilidade  $\Gamma_i$ , conforme a equação (4.41), do capítulo 4, possui dimensão igual a  $120 \times 20$ .

O cálculo da matriz de estado  $\mathbf{A}$  é estimada conforme o algoritmo de identificação apresentado na equação (4.43), do capítulo 4.

Com base no algoritmo de identificação dos parâmetros modais apresentado no capítulo 4, verifica-se que para esta simulação de teste modal, usando dados obtidos de um sistema massa mola sem amortecimento e sem adição de qualquer tipo de ruído, os resultados dos parâmetros modais identificados são os apresentados na Tabela (15), para diferentes ordens  $n$ 's do sistema.

Tabela 15 – Frequências naturais exatas e identificadas

Modos	Frequências naturais Exatas (Hz)	Frequências naturais identificadas			
		n=24	n=20	n=16	n=12
-		0,9227			
-		3,436	1,0757	2,7085	
<b>1</b>	<b>3,5415</b>	<b>3,626</b>	<b>3,5613</b>	<b>3,556</b>	<b>3,5426</b>
-		6,0561	4,3199		
<b>2</b>	<b>6,9055</b>	<b>6,8524</b>	<b>6,8615</b>	<b>6,8946</b>	<b>6,921</b>
-		7,0473	8,7316	7,3721	
-			8,7643		
<b>3</b>	<b>9,9231</b>	<b>9,4762</b>	<b>9,946</b>	<b>9,9074</b>	<b>9,9319</b>
-		10,057			
<b>4</b>	<b>12,443</b>	<b>12,458</b>	<b>12,458</b>	<b>12,411</b>	<b>12,467</b>
-		13,107			
<b>5</b>	<b>14,339</b>	<b>14,374</b>	<b>14,338</b>	<b>14,317</b>	<b>14,006</b>
<b>6</b>	<b>15,516</b>	<b>15,549</b>	<b>15,558</b>	<b>15,521</b>	<b>15,494</b>

Nota-se que o uso deste algoritmo para identificação de parâmetros modais usando dados apenas de saída, baseado na seção 4.2 (algoritmo 1), produz bons resultados na identificação das frequências naturais. Entretanto, a identificação dos modos de vibração natural já não apresenta boa qualidade. Esta característica se repete para testes realizados incluindo amortecimento e ruído nos dados da saída.

## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho trata do desenvolvimento de algoritmos de identificação de parâmetros modais, para dados de entrada e saída e usando dados somente de saída, baseado no método de subespaços. O método de subespaços conta apenas com o uso de operações básicas da álgebra linear, especialmente a redução de *rank* de matrizes de dados usando SVD.

Os parâmetros modais identificados neste trabalho são: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos naturais normalizados de vibração. Já os dados usados para validar a qualidade da identificação dos parâmetros foram obtidos via simulação numérica de estruturas de parâmetros concentrados, lineares e invariantes no tempo.

Com base nos resultados obtidos nos testes realizados no capítulo 5 do presente trabalho, conclui-se o seguinte:

- i) O melhor desempenho obtido na identificação dos parâmetros modais foi obtido pelo algoritmo que usa dados de entrada e saída.
- ii) No que diz respeito aos algoritmos que usam dados apenas de saída, o algoritmo (2), descrito na seção 4.3, produz melhores resultados que o algoritmo 1 da seção 4.2. Acredita-se que o motivo para esse melhor desempenho se deva ao uso de valores de um vetor de saída de referência, usado no algoritmo 2.
- iii) O efeito do ruído somado aos dados de saída para o método que utiliza dados de entrada e saída faz diminuir a precisão dos parâmetros identificados, especialmente fatores e amortecimento e os modos de vibração natural. Neste trabalho não foi considerado a questão do efeito do ruído somado aos dados de saída para o método apenas de saída.
- iv) Também não foi considerado o efeito do ruído somado aos dados de entrada para todos os métodos apresentados neste trabalho. Este efeito não é comumente discutido na literatura estudada para o desenvolvimento deste trabalho.

### 6.1 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Este trabalho apresenta contribuições nos seguintes aspectos:

- i) Desenvolvimento de algoritmos para o *software* Matlab, orientados a subespaço vetorial, tanto usando dados de entrada e saída, como também apenas para dados de saída.
- ii) Avaliação do desempenho dos algoritmos desenvolvidos.

## 6.2 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Pode-se ainda, com base nos estudos da revisão bibliográfica bem como na própria implantação dos algoritmos de identificação modal apresentados no presente trabalho, sugerir os seguintes temas para futuras pesquisas:

- i) Uso destes algoritmos de identificação em dados reais de vibração estrutural;
- ii) Desenvolvimento de técnicas de identificação baseadas nos método de máxima verossimilhança;
- iii) Desenvolvimento de técnicas de detecção de falhas e integridade estrutural baseado em OMA.

## 7 REFERÊNCIAS

ALLEMANG, R.J., BROWN, D.L. e FLADUNG, W., **Modal Parameter Estimation: An Unified Matrix Polynomial Approach**, Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, HA, pp. 501-514, 1994.

BENDAT, J.S. e PIERSOL, A.G., **Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis**, Jonh Willey & Sons, 1980.

BERMAN, A., **System Identification of Structural Dynamics Models: Theoretical and Practical Bounds**, AIAA SDM Conference, Paper 84-0929, pp. 123-128, 1984.

BOX, G.E.P. e JENKINS, G.M., **Time Series Analysis Forecasting and Control**, San Francisco, Holden-Day, 1971.

BROWN, D.L., ALLEMANG, R.J., ZIMMERMAN R.D. e MERGREAY, M., **Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis**, SAE Paper Number 790221, SAE Transaction, Vol. 88, pp. 828 – 846, 1979.

CAMBRAIA, H.N e Kurka P.R.G. DINAME. **Time Domain Multivariable subspace - Based Method for Modal Parameters identification using Impulse Excitation**, São Paulo, 2011.

■ CAMBRAIA, Heraldo Nélio. **Técnicas de Identificação Modal Multivariável orientada a subespaço**. 2003. 160 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – UNICAMP. São Paulo

CAMBRAIA, Heraldo Nélio; KURKA, Paulo Roberto Gardel. DINAME. **Time Domain Multivariable Subspace-based Method For Modal Parameters Identification**, Angra dos Reis, p.1-10, 06 mar. 2009. Anual.

CHATFIELD, C., **The Analysis of Time Series: Theory and Practice**, London, Chapman and Hall, 1975.

COOLEY, J.W. e TUKEY, J.W., **An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series**, Mathematics and Computation, Vol. 19, pp. 297 – 301, 1965.

COLE, H. A. JR. **On Line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures**, NASA CR-2205, 1973.

COOPER, J.E. e WRIGHT, J.R., **Data Correlation in Matrix Methods for Modal Identification**, Proceeding of the 9th International Modal Analysis Conference, Florence, Italy, pp. 1427 – 1432, 1991.

COOPER, J.E., **Comparasion of Some Time Domain System Identification Techniques Using Approximate Data Correlations**, International Analytical and Experimental Journal of Modal Analysis, Vol. 4, No. 1, pp. 51 – 57, 1989.

COOPER, J.E., **Comparison of Modal Parameter Estimation Techniques on Aircraft Structural Data, Mechanical System and Signal Processing**, Vol. 4, No. 2, pp. 157 – 172, 1990.

FASSOIS, S.D., **MIMO LMS – ARMAX Identification of Vibrating Structures – Part I – The Method**, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 15, No. 4, pp. 723 – 735, 2001.

FLORAKIS, A., FASSOIS, S.D. e HEMES, F.M., **MIMO LMS ARMAX Identification of Vibrating Structures. Part II – A Critical Assessment**, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 15, No. 4, pp. 737 – 758, 2001.

FRANKLIN, G.F. e POWELL, J.D., **Digital Control of Dynamic Systems**, Addison Wesley Publishing Company, 1980.

GONTIER, C., SMAIL, M. e GAUTIER, P.E., **A Time Domain Method for the Identification of Dynamic Parameter of Structures**, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7, No. 1, pp. 45 – 56, 1993.

HOTELLING, HO e KALMAN. **Efficient construction of linear state variable models from input/output functions**. Regelungstechnik, vol. 14, pg. 545-548.

IBRAHIM, S.R. e MIKULCIK, E.C. **A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from Free Responses**, The Shock and Vibrations Bulletin, Vol. 47, No. 4, pp. 183-198, 1977.

IBRAHIM, S.R. e MIKULCIK, E.C. **The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses**, The Shock and Vibrations Bulletin, Vol. 46, pp. 187-196, 1976.

IBRAHIM, S.R., **Application of Random Time Series Analysis to Dynamic Flight Measurements**, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 49, No. 2, pp. 165-170, 1979.

JUANG, J.N. e PAPPA, R.S., **An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Modal Reduction**, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 5, pp. 620-627, 1985.

JUANG, J.N., COOPER, J.E. e WRIGHT, J.R., **An Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlation (ERA/DC) for Modal Parameter Identification**, Control Theory and Advanced Technology, Vol. 4, No. 1, pp. 5-14, 1988.

JUANG, J.N., **Mathematical Correlation of Modal Parameter Identification Methods via System Realization Theory**, International Analytical

and Experimental Journal of Modal Analysis, Vol.1, No. 2, pp. 1-18, 1987.

JUANG, J.N., **Unification of Several System Realization Algorithms**, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 1, pp. 67 – 73, 1997.

Kung S. Y., **A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition**, in 12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computation (Asilomar, CA), Novembro de 1979, pag. 705-714

KUO, B.C., **Digital Control System**, New York, Holt, Rinehart and Wiston, 1980.

Kurka, P.R.G e CAMBRAIA, H.N., **Application of a Multivariable Input-output Subspace Identification Technique in Structural Analysis**, Journal of Sound and Vibration. Vol. 312, pg. 461-475, 2008.

LARDIES J., MINH-Ngi Ta. **Modal parameter identification of stay cables from output-only measurements**, 2010, Elsevier, 2010.

LARDIES J., **Modal parameter identification based on ARMAV and state–space approaches**, 2010

LEURIDAN, J. M., BROWN, D.L. e ALLEMANG, R.J., **Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis: An Unifying Approach**, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, Vol. 108, pp. 1-8, January, 1986.

LEURIDAN, J.M., **Some Direct Parameter Modal Identification Methods Applicable for Multiple Input Modal Analysis**, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati, 1984.

LJUNG, L., **System Identification: Theory for the User**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

LONGMAN, R., JUANG, J.N., **Recursive Forms of Eigenystem Realization Algorithm for System Identification**, AIAA, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.. 12, No. 5, pp. 647 – 652, 1989.

LU Z.R., LAW S.S., **Identification of system parameters and input force from output only**, Elsevier, 2006.

LUENBERGER, D.G., **Introdution to Dynamic System: Theory, Models, and Applications**, Jonh Wiley & Sons, 1979.

M.L James et al (Org.). **Vibration of mechanical and structural systems with microcomputer applications**. 2. ed. New York City: Harper Collins College Publishers, 1993.

MAIA, SILVA, HE, LIEVEN, LIN, SKINGLE, TO e URGUEIRA. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. SRP, 1997. 468 p.

MAKRIDAKIS, S. e WHEELWRIGTH, S.C., **Forecasting – Methods and Applications**, New York, John Wiley & Sons, 1978.

MEVEL L., BASSEVILLE M., GOURSAT M. **Stochastic subspace-bases structural identification and damage detection application to the steel-quake benchmark**, Elsevier, 2002.

NEWLAND, D.E., **Random Vibrations, Spectral and Wavelets Analysis**, Longman Scientific and Technical, Essex, England, 1993.

OPPENHEIM, A. e SCHAFER, R.W., **Digital Signal Processing**, New Jersey, Prentice Hall, 1975.

PEETERS B., DE ROECK G., HERMANS L., WAUTERS T., KRAMER C., SMET C.A.M, **Comparison of system identification methods using operational**

PELED, A. e LIU, B., **Digital Signal Processing – Theory, Design, and Implementation**, New York, John Wiley & Sons, 1976.

RABINER, L.R. e GOLD, B., **Theory and Application of Digital Signal Processing**, Prentice Hall, 1975.

RAINIERI C., FABBROCINO G. **Automated output-only dynamic identification of civil engineering structures**, Elsevier, 2009.

RED HORSE, J.R., ALVIN, K.F., MIGNOLET, M.P. e ROBERTSON, A. N., **An Investigation of Three Major Time-Series Data Analysis Techniques**, Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Dearborn, MI, pp. 1600 – 1607, 1996.

REINSEL, G.C., BASU, S. e YAP, S.F., **Maximum Likelihood Estimation in Multivariate Autorregressive Moving Average Model from a Generalized Least Squares Viewpoint**, Journal of Time Series Analysis, Vol. 13, No. 2, pp. 133-145, 1992.

SÖDERSTRÖM, T. e STOICA, P., **System Identification**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

VAN DER VEEN, A.J., DEPRETTERE, E.F. e SWINDLEHURST, A.L., **Subspace Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition**, Proceeding of the IEEE, Vol. 81, No. 9, 1993.

VIBERG, M., **Subspace – Based Methods for Identification of Linear Time-Invariant System**, Automatica, Vol. 31, No. 12, pp. 1835 – 1851, 1995.

VIBERG, M. e OTTERSTEN, B., **Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting**, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, No. 5, pp. 1110-1121, 1991.

VOLD, H., KURDRAT, J., ROCKLIN, T. e RUSSELL, R., **A Multi Input Modal Estimation Algorithm for Mini Computers**, SAE Transactions, Vol. 91, No. 1, pp. 815 – 821, 1982.

VOLD, H., ROCKLIN, T., **The Numerical Implementation of a Multi Input Modal Estimation Algorithm for Mini Computers**, Proceedings of the International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, pp. 542 – 548, 1982.

VU V.H., THOMAS M., LAFLEUR F. e MARCOUILLER L. **Towards an automatic spectral and modal identification from operational modal analysis**, Elsevier, 2012.

ZAGHBANI, I.; SONGMENE, V.. **Estimation of machine-tool dynamic parameters during machining operation through operational modal analysis**. International Journal Of Machine Tools And Manufacture, [s.l.], v. 49, n. 12-13, p.947-957, out. 2009.

## APÊNDICE A - BASE MATEMÁTICA

Neste apêndice são apresentados alguns conceitos básicos sobre álgebra linear que serão usados ao longo desse trabalho, tais como: definições e teoremas da álgebra linear, subespaços vetoriais associados com matrizes, decomposição em valores singulares (SVD), o problema de mínimos quadrados (LS) e a pseudo-inversa (BILL JACOB 1995, VAN DER VEEN et al., 1993 e GILBERT STRANG, 1980).

### DEFINIÇÕES BÁSICAS

*Definição 1 – Rank de uma matriz.*

O *rank* de uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$ , denotado por  $rank(X)$ , é definido como o número máximo de vetores-linha (não nulos) ou vetores-coluna (não nulos) linearmente independentes de  $\mathbf{X}$ .

*Definição 2 – Ortogonalidade de uma matriz.*

Uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $n \times n$  é chamada ortogonal se  $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$  ou  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}$ .

*Teorema 1 – Uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $n \times n$  é ortogonal se e apenas se suas colunas (ou linhas) formam uma base ortonormal para o espaço Euclidiano  $\mathfrak{R}^n$ .*

*Uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$  cujas colunas são ortonormais, implica que  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}$ .*

*Definição 3– Subespaços associados com matrizes.*

Suponha uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$ . O subespaço do  $\mathfrak{R}^n$  gerado pelas linhas de  $\mathbf{X}$  é chamado *espaço linha (EL)* de  $\mathbf{X}$ . O subespaço do  $\mathfrak{R}^m$  gerado pelas colunas de  $\mathbf{X}$  é chamado *espaço coluna (EC)* de  $\mathbf{X}$ . O subespaço do  $\mathfrak{R}^n$  de todas as soluções de  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{0}$  é chamado *espaço nulo (EN)* de  $\mathbf{X}$ .

*Definição 4 – Nulidade de uma matriz.*

A nulidade de uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$ , denotada por  $nul(\mathbf{X})$ , é a dimensão do (EN) de  $\mathbf{X}$ .

*Teorema 2 – Teorema da dimensão.*

Seja  $\mathbf{X}$  uma matriz de dimensão  $m \times n$  com  $rank(\mathbf{X}) = r$ . Então,  $rank(\mathbf{X}) + nul(\mathbf{X}) = n$ .

*Teorema 3 – Dimensão dos subespaços associados com matrizes*

Seja uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$  com  $rank(\mathbf{X}) = r$ . A dimensão do (EL) de  $\mathbf{X}$  e do (EC) de  $\mathbf{X}$  é igual ao  $rank(X) = r$  e a dimensão do (EN) de  $\mathbf{X}$  é  $nul(\mathbf{X}) = n - rank(\mathbf{X})$ .

**Definição 5 – Complemento ortogonal.**

Suponha que  $S$  seja um subespaço do  $\mathfrak{R}^n$ . O complemento ortogonal de  $S$ , denotado por  $S^\perp$ , é definido como  $S^\perp = \{v \in \mathfrak{R}^n, \langle v, u \rangle = 0 \text{ para todo } u \in S\}$ , onde o termo  $\langle v, u \rangle$  significa produto escalar.

Seja uma matriz  $X$  de dimensão  $m \times n$  com  $\text{rank}(X) = r$ , o  $(EM)$  de  $X$  é o complemento ortogonal do  $(EL)$  de  $X$ . O espaço complementar do  $(EC)$  de  $X$ , denotado como,  $(EC)^\perp$  possui dimensão  $m - r$ .

Os subespaços definidos acima para uma matriz  $X$  também estão presentes em uma transformação linear representada por  $X$ .

**Definição 6 – Transformação linear.**

Uma transformação linear do domínio  $\mathfrak{R}^n$  para o espaço de chegada  $\mathfrak{R}^m$  é uma função  $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  que satisfaz as seguintes condições: (i) se  $u$  e  $v \in \mathfrak{R}^n$ , então  $T(u + v) = T(u) + T(v)$  e (ii) se  $v \in \mathfrak{R}^n$  e  $k \in \mathfrak{R}$ , então  $T(kv) = kT(v)$ .

**Teorema 4 – Representação de uma transformação linear por uma matriz.**

Seja  $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  é uma transformação linear. Então existe uma única matriz  $X$  de dimensão  $m \times n$  tal que  $T = X$ . A matriz  $X$  possui a característica que  $T(v) = Xv$  para todo  $v \in \mathfrak{R}^n$ .

**Definição 7 – Imagem e núcleo de uma transformação linear.**

Seja  $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  uma transformação linear. Então,

i) A imagem de  $T$ , denotada por  $Im(T)$ , é definido por,

$$Im(T) = \{T(v) \in \mathfrak{R}^m, v \in \mathfrak{R}^n\}$$

ii) O núcleo de  $T$ , denotado por  $N(T)$ , é definido por,

$$N(T) = \{v \in \mathfrak{R}^n, T(v) = \mathbf{0}\}$$

Seja  $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  uma transformação linear. Então, o  $N(T)$  é um subespaço do  $\mathfrak{R}^n$  e a  $Im(T)$  é um subespaço do  $\mathfrak{R}^m$ .

**Definição 8 – Rank e nulidade de uma transformação linear.**

Seja uma transformação linear  $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ . A dimensão da  $Im(T)$  é o  $\text{rank}(T)$  e a dimensão do  $N(T)$  é a  $\text{nul}(T)$ .

**Teorema 5 –** Seja uma matriz  $X$  de dimensão  $m \times n$  que representa a transformação linear  $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ . Então,

i) O  $N(T)$  é o conjunto de soluções  $a \in \mathfrak{R}^n$  do problema  $Xa = \mathbf{0}$  e  $\text{nul}(T) = \text{nul}(X)$ . O  $N(T)$  é o espaço nulo de  $X$ , isto é,  $N(T) = EN(X)$ ,

ii) A  $Im(T)$  é o espaço coluna de  $X$ , isto é,  $im(T) = EC(X)$  e  $\text{rank}(T) = \text{rank}(X)$  e

iii) (Teorema da dimensão): a soma do  $\text{rank}$  de  $T$  mais a nulidade de  $T$  é igual a dimensão do espaço de partida  $n$ , isto é,  $\text{rank}(T) + \text{nul}(T) = n$ .

**Definição 9** – Complementos ortogonais de uma transformação linear.

O subespaço complemento ortogonal do  $N(\mathbf{T})$  é o  $EL(\mathbf{X})$  e possui dimensão igual ao  $rank(\mathbf{X})$ . O subespaço complemento ortogonal do  $EC(\mathbf{T})$  é o  $EC^\perp(\mathbf{X})$  e possui dimensão igual a  $m - r$ .

A Figura (1) ilustra, geometricamente, o conceito acima a respeito dos subespaços presentes em uma transformação linear  $T$ . Esse conceito será bastante usado neste trabalho.

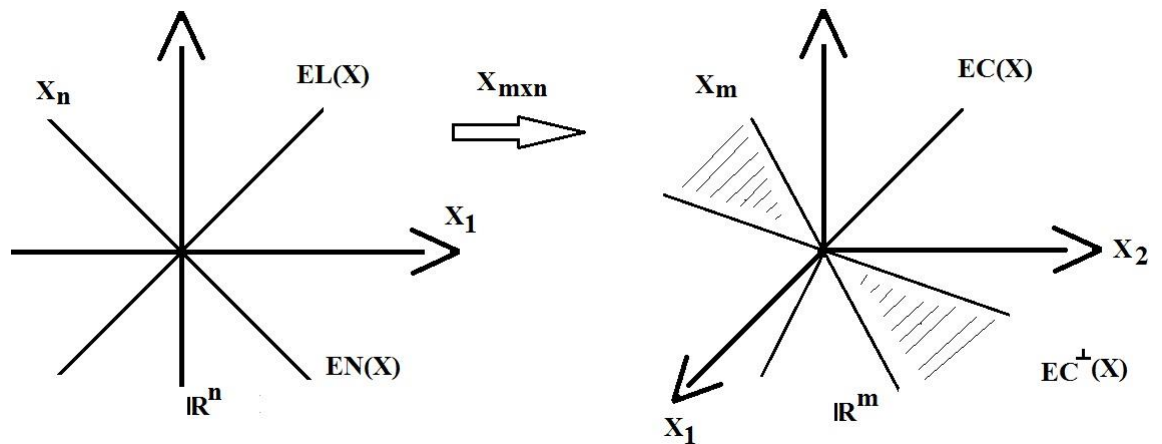


Figura (1) – Subespaços vectoriais de uma transformação linear

**Definição 10** – Subespaços para o produto de duas matrizes  $\mathbf{XY}$ .

Os subespaços associados com o produto de duas matrizes respeitam as seguintes relações,

- i) o  $EN(\mathbf{XY})$  contém o  $EN(\mathbf{Y})$ ,
- ii) o  $EC(\mathbf{XY})$  está contido no  $EC(\mathbf{X})$ ,
- iii) o  $EC^\perp(\mathbf{XY})$  contém o  $EN(\mathbf{X})$  e
- iv) o  $EL(\mathbf{XY})$  está contido no  $EL(\mathbf{Y})$ .

**Corolário 1** – Seja  $\mathbf{X}$  uma matriz de dimensão  $m \times n$  com  $rank\ n$ . Então a matriz  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  de dimensão  $n \times n$  é inversível.

**Definição 11** – Projeção ortogonal.

Seja  $S$  um subespaço do  $\mathfrak{R}^n$ , o operador de projeção ortogonal de um vetor  $w \in \mathfrak{R}^n$  sobre  $S$ , denotado por  $\Pi_S(w): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , é uma função definida como  $\Pi_S(w) = v$  tal que  $w = v + v'$  onde  $v \in S$  e  $v' \in S^\perp$ .

**Definição 12** – Solução de mínimos quadrados (LS).

Seja uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$ , o vetor  $a \in \mathfrak{R}^n$  é uma solução de mínimos quadrados para o sistema de equações algébricas lineares  $\mathbf{Xa} = \mathbf{b}$  se a distância  $\|\mathbf{Xa} - \mathbf{b}\| = (\langle \mathbf{Xa} - \mathbf{b}, \mathbf{Xa} - \mathbf{b} \rangle)^{\frac{1}{2}}$  no  $\mathfrak{R}^m$  é mínima dentre todas as possíveis escolhas de  $\mathbf{a}$ . É importante notar que o sistema de equações algébricas lineares  $\mathbf{Xa} = \mathbf{b}$  acima pode ser inconsistente, isto é, o vetor  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m$  pode não estar sobre o  $EC(\mathbf{X})$ .

Considerando  $\mathbf{X}$  uma matriz  $m \times n$  e que se esteja procurando uma solução de mínimos quadrados para o problema  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . Observa-se que para qualquer  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  o vetor  $\mathbf{X}\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  é um elemento do  $EC(\mathbf{X})$ . Isso significa que a solução de mínimos quadrados para  $\mathbf{a}$  corresponde aos pontos  $\mathbf{X}\mathbf{a} \in EC(\mathbf{X})$  para os quais a distância entre  $\mathbf{X}\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  é mínima. Em outras palavras, o vetor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  pode ser calculado como  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \Pi_{EC(\mathbf{X})}(\mathbf{b})$ , como mostra a Figura (2).

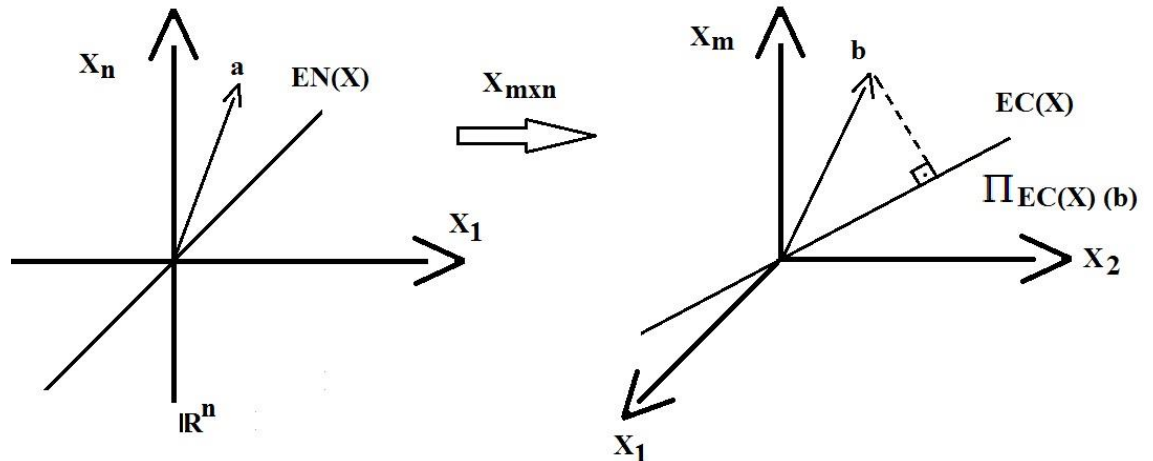


Figura (2) – Interpretação geométrica do problema de mínimos quadrados

**Teorema 6** – Seja o problema  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , possivelmente inconsistente. Então  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  possui uma solução de mínimos quadrados, e todas suas soluções de mínimos quadrados são as soluções para o problema consistente  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \Pi_{EC(\mathbf{X})}(\mathbf{b})$ .

**Teorema 7** – Se uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$  com  $rank(\mathbf{X}) = n$ , então a solução de mínimos quadrados para o sistema  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  possui solução única igual a  $\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{b} = (\mathbf{X})^+ \mathbf{X}^T \mathbf{b}$ , onde o termo  $(\mathbf{X})^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  denota Moore-Penrose pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{X}$ .

**Definição 13** – Pseudo-inversa usando SVD.

Seja uma matriz  $\mathbf{X}$  de dimensão  $m \times n$  com  $rank(\mathbf{X}) = r \leq \min(m, n)$ . Em geral, como  $\mathbf{X}$  pode ser *rank* deficiente ou não quadrada, a inversa de  $\mathbf{X}$  não existe. Isto é, não é possível encontrar um vetor  $\mathbf{a}$  para um dado vetor  $\mathbf{b}$ , tal que  $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . A matriz Moore-Penrose pseudo-inversa de  $\mathbf{X}$ , denotada por  $\mathbf{X}^+$  com dimensão  $n \times m$  é definida usando a forma econômica da SVD de  $\mathbf{X}$ , como,

$$\mathbf{X}^+ = \hat{\mathbf{V}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^T \quad (1)$$

A seguir será apresentado o conceito sobre SVD.

## DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

Seja  $\mathbf{X}$  uma matriz de elementos reais, dimensão  $m \times n$  de *rank*  $r$  e com  $r \leq m \leq n$ . A SVD de  $\mathbf{X}$  é obtida como, (VAN DER VEEN et AL., 1993)

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp \hat{\Sigma}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \quad (2)$$

onde  $\Sigma$  é uma matriz de dimensão  $m \times n$  que contém os valores singulares de  $\mathbf{X}$  e são, por conveniência, ordenados na ordem decrescente como,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_m = 0, \quad (3)$$

e o sobre-índice  $T$  denota transposição. A matriz diagonal  $\hat{\Sigma}$ , de dimensão  $r \times r$ , contém os  $r$  primeiros valores singulares não nulos de  $\mathbf{X}$ , enquanto que a matriz diagonal  $\hat{\Sigma}^\perp$ , de dimensão  $(m-r) \times (n-r)$ , contém os outros  $m-r$  valores singulares nulos de  $\mathbf{X}$ .

A matriz  $\mathbf{U}$ , de dimensão  $m \times m$ , é formada de maneira tal que suas colunas são os autovetores da matriz de covariância  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  e são chamados vetores singulares à esquerda de  $\mathbf{X}$ . As matrizes  $\hat{\mathbf{U}}$ , associada com os valores singulares não nulos de  $\Sigma$ , e  $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ , associada com os valores singulares nulos de  $\Sigma$ , possuem dimensões, respectivamente, iguais a  $m \times r$  e  $m \times (m-r)$ . As matrizes  $\mathbf{U}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\hat{\mathbf{U}}^\perp$  possuem as seguintes propriedades de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{I}_m \\ \mathbf{U} \mathbf{U}^T &= \mathbf{I}_m \\ \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{I}_r \\ (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \hat{\mathbf{U}}^\perp &= \mathbf{I}_{m-r} \\ \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}}^\perp &= \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T &= \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\mathbf{I}$  denota matriz identidade.

A matriz  $\mathbf{V}$ , de dimensão  $n \times n$ , é formada de maneira tal que suas colunas são os autovetores da matriz de informação  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  e são chamados vetores singulares à direita de  $\mathbf{X}$ . As matrizes  $\hat{\mathbf{V}}$ , relacionada com os valores singulares não nulos de  $\Sigma$ , e  $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ , relacionada com os valores singulares nulos de  $\Sigma$ , possuem dimensão, respectivamente, iguais a  $n \times r$  e  $n \times (n-r)$ . As matrizes  $\mathbf{V}$ ,  $\hat{\mathbf{V}}$  e  $\hat{\mathbf{V}}^\perp$  possuem as seguintes propriedades de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_n \\ \mathbf{V} \mathbf{V}^T &= \mathbf{I}_n \\ \hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{I}_r \\ (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{I}_{n-r} \\ \hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{V}}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T &= \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (5)$$

Com base nas Equações (4) e (5) e no *Teorema 1* observa-se que as matrizes  $\hat{\mathbf{U}}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ ,  $\hat{\mathbf{V}}$  e  $\hat{\mathbf{V}}^\perp$  da Equação (2) são ortogonais e portanto formam bases ortogonormais para subespaços vetoriais dos espaços  $\mathfrak{R}^m$  e  $\mathfrak{R}^n$ , respectivamente. A SVD de matrizes é uma ferramenta matemática robusta para determinar as bases destes subespaços.

Considerando  $\mathbf{X}$  como a matriz que define uma transformação linear  $\mathbf{T}_X$  entre dois espaços Euclidianos  $\mathfrak{R}^n$  e  $\mathfrak{R}^m$ , é possível mostrar que:

- i) as  $r$  colunas da matriz  $\hat{\mathbf{U}}$  de dimensão  $m \times r$  correspondentes aos valores singulares não nulos de  $\Sigma$  formam o  $EC(\mathbf{X})$ ,
- ii) as  $(m-r)$  colunas da matriz  $\hat{\mathbf{U}}^\perp$  de dimensão  $m \times (m-r)$  formam o  $EC^\perp(\mathbf{X})$ ,
- iii) as  $r$  colunas de  $\hat{\mathbf{V}}$  de dimensão  $n \times r$  correspondentes aos valores singulares não nulos de  $\Sigma$  formam o espaço linha de  $\mathbf{X}$  denotado por  $EL(\mathbf{X})$  e
- iv) as  $(n-r)$  colunas de  $\hat{\mathbf{V}}^\perp$  de dimensão  $n \times (n-r)$  correspondentes aos valores singulares nulos de  $\Sigma$  formam o  $N(\mathbf{X})$ .

Finalmente, considerando que os  $(m-r)$  valores singulares da matriz  $\Sigma$  são nulos, com base na Equação (2) é usual escrever SVD de  $\mathbf{X}$  de forma mais compacta como,

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T \quad (6)$$

Esta forma acima da DVS de  $\mathbf{X}$  dada pela Equação (6) é chamada de forma de tamanho econômico da SVD de  $\mathbf{X}$ .

