UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SUELLEN RODRIGUES DE OLIVEIRA MAZZOLLI

OLHARES PARA O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA: FORMADORES E PROFESSORES TÊM A PALAVRA

CURITIBA
2016

SUELLEN RODRIGUES DE OLIVEIRA MAZZOLLI

OLHARES PARA O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA: FORMADORES E PROFESSORES TÊM A PALAVRA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e em Matemática ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkouski

CURITIBA
2016

M477o Mazzolli, Suellen Rodrigues de Oliveira
Olhares para o papel das demonstrações em matemática: formadores e professores têm a palavra / Suellen Rodrigues de Oliveira Mazzolli. – Curitiba, 2016.
145 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, 2016.

Orientador: Emerson Rolkouski .
Bibliografia: p. 135-137.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores – Formação. 3. Prática de Ensino. 4. Demonstrações na Educação. I. Universidade Federal do Paraná. II.Rolkouski, Emerson. III. Título.

CDD: 510.7

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PARECER

Defesa de Dissertação de **SUELLEN RODRIGUES DE OLIVEIRA MAZZOLLI,** intitulada **"OLHARES PARA O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA: FORMADORES E PROFESSORES TÊM A PALAVRA",** para obtenção do Título de Mestra em Educação em Ciências e em Matemática.

De acordo com o Protocolo aprovado pelo Colegiado do Programa, a Banca Examinadora composta pelos professores abaixo-assinados arguiu, nesta data, a candidata acima citada. Procedida à arguição, a Banca Examinadora é de Parecer que a candidata está **apta ao Título** de **MESTRA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA**, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
Prof. Dr. Emerson Rolkouski (orientador)		Aprovado
Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos		Aprovado
Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna		Aprovado

Curitiba, 16 de Junho de 2016.

Prof. Dr. Emerson Rolkouski
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Educação em Ciências e em Matemática.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
Coordenação de Pós-Graduação

Para Solange Rodrigues de Oliveira com todo meu amor, admiração e respeito!

AGRADECIMENTOS

Após muito tempo de estudo e reflexão, mais uma etapa em minha jornada acadêmica e profissional se encerra. É chegada a hora de agradecer aos que de alguma forma contribuíram para que este projeto se realizasse:

Agradeço a Deus pela graça de poder existir.

Minha amada mãe Solange por sempre acreditar no meu potencial, meu irmão Diogo pela ajuda e por “pegar no meu pé” e meu esposo Diego por ser tão amável, generoso e compreensivo.

Aos companheiros da turma de 2012 do PPGECM: Nelem, Lucila, Rosane, Sheila, Diego, Brunna, Henrique, Alessandra, Luciane e Alex (*in memorian*): com vocês aprendi que “seres-humanos-com-amigos” vão muito além! Agradeço também aos colegas de 2015 por me receberem tão bem: vocês são uns “abençoados!”

Meus sinceros agradecimentos aos professores da linha de Educação Matemática do PPGECM pelas reflexões proporcionadas e Antonyhella, secretária do programa, por sua simpatia e disponibilidade.

Muito obrigada aos membros das bancas de qualificação e defesa Professores Carlos Roberto Vianna e João Ricardo Viola dos Santos pelo aceite, disponibilidade e valiosas sugestões.

Aos Professores e Formadores entrevistados que gentilmente participaram desta pesquisa: sem vocês nada disso seria possível.

Obrigada: Nelem por ser minha parceira de estudos, pela torcida e pelo gravador: “Deus que ajudão!” E querida amiga Tallyssa pela amizade e “*help”* com a língua inglesa.

E por fim, agradeço ao responsável por me apresentar à Educação Matemática: meu “mentor”, Professor Emerson Rolkouski. Obrigada pela orientação, paciência infinita, “puxões de orelha”, confiança e por sempre acreditar em mim, mesmo quando nem eu mesma acreditava.

Muito obrigada a todos!!

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo compreender as visões do Formador de professores de Matemática e do Professor de Matemática da Educação Básica em relação ao papel das demonstrações em dois contextos: (1) para a formação do professor de Matemática; e, (2) na sala de aula de Matemática. Formulou-se como questão de pesquisa a seguinte indagação: Qual o papel das demonstrações na formação de professores de Matemática, na visão do Formador de professores e na visão do Professor de Matemática da Educação Básica? Para a realização deste estudo, buscou-se evidenciar o olhar de alguns dos pesquisadores em Educação Matemática que se dedicaram a estudar o papel do uso das demonstrações nos contextos da formação inicial, sala de aula e na própria Matemática. Em seguida voltou-se o olhar para as Diretrizes Curriculares Nacionais a fim de investigar o que tal documento sugere ou menciona sobre demonstrações nos cursos de Licenciatura em Matemática. Posteriormente olhou-se para os Documentos Oficiais para a Educação Básica (Parâmetros Curriculares Nacionais e Diretrizes Curriculares Estaduais) com o objetivo de evidenciar o que é sugerido em relação ao trabalho com as demonstrações nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Após estes levantamentos elaborou-se um roteiro com questões pertinentes ao tema para que se pudesse entrevistar os Formadores e os Professores de Matemática. Foram entrevistados três Formadores, sendo um da área da Matemática Pura, um da Matemática Aplicada e um da Educação Matemática; e, três Professores que atuam em salas de aula da Educação Básica na rede Estadual do Paraná.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação de Professores de Matemática. Demonstrações.

ABSTRACT

This research aims to understand the beliefs of Mathematics' teacher educators (professors for teacher training) and Mathematics teachers in Basic Education classrooms regarding the role of proof in two contexts: (1) teacher training in Mathematics; and, (2) in the Mathematics classroom. The question we tried to answer in this paper was: What is the role of proof in the Mathematics' teacher training, according to the professor of Mathematics' future teachers and to the Mathematics' teacher in Basic Education? For this study, we aimed to highlight the position of some of the researchers in Mathematics Education who have devoted themselves to studying the role of the use of proof in the contexts of initial training, in the classroom, and in Mathematics itself. Afterwards, we analyzed the National Curriculum Guidelines in order to investigate what this document suggests or mentions about proof for Graduation courses in Mathematics. Hereafter, we discussed the Official Documents for primary Education (National Curriculum Parameters and State Curriculum Guidelines) trying to point out what is suggested in relation to working with proof in the final years of Elementary School and in High School. After raising these issues, guideline questions regarding the theme were formulated to interview professors in teacher training and also Mathematics' teachers. Three professors were interviewed, which were: one from the Pure Mathematics' area, one from Applied Mathematics and one from Mathematics Education; and, three teachers who work in Basic Education classrooms in the state of Parana.

Keywords: Mathematics Education. Mathematics' teacher training. Proof.

Quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém, não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que aprender. Vê-se o que o professor faz, e, então, faz-se a mesma coisa. (Irineu Bicudo, 2002).

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, meu desempenho escolar estava acima da média, especialmente em Matemática. Além disso, frequentemente auxiliava meus colegas, que apresentavam dificuldades, a entenderem os tópicos desta disciplina. Tal facilidade acabou direcionando a escolha da profissão: a princípio meu desejo era cursar alguma Engenharia, talvez a Civil, mas o “medo” de não conseguir ultrapassar a concorrência acirrada do vestibular e o fato de já fazer estágio remunerado em uma escola privada[1] levaram-me a optar pelo curso de Matemática.

Ingressei em 2006 no curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Neste mesmo ano passava a vigorar uma nova estrutura curricular: até 2005 o currículo era anual e, a partir de então, tornava-se semestral. O processo seletivo também havia mudado: ao invés de duas passou a ter três fases. Atualmente, o vestibular da UFPR é constituído por duas fases: a primeira composta por questões objetivas de conhecimentos gerais e Língua Estrangeira Moderna; e a segunda fase (realizada apenas pelos que passarem na primeira) é de Produção de Texto. Dependendo do curso, o vestibulando, na segunda fase, faz prova discursiva de alguma disciplina específica (exemplo: para Engenharia Civil geralmente a prova específica é de Física e de Matemática) ou ainda de habilidade específica que é o caso de, por exemplo, Arquitetura. Já a terceira fase, que entrou em vigor no vestibular 2006 (realizado em 2005) ocorre somente para os cursos de Matemática, Matemática Industrial e Estatística. Essa fase do Processo Seletivo Estendido (PSE), o vestibulando cursa duas disciplinas (Geometria Analítica e Funções) e para tornar-se realmente aluno da UFPR deve ser aprovado nestas disciplinas e estar entre os 44 primeiros colocados no seu turno.

As mudanças curriculares no curso de Matemática da UFPR, como aponta Souza[2] (2008, p. 27), vinham sido discutidas desde meados de 2004, em reuniões compostas por professores dos departamentos responsáveis pelas disciplinas do curso tais como: Matemática; Teoria e Prática de Ensino; Planejamento e

---

1 Comecei a estagiar nesta escola quando ainda cursava o Ensino Médio. Por não ter feito o curso de Formação de Docentes (Magistério) não ministrava aulas.

2 SOUSA, J. R. **Processo Seletivo na UFPR: um mergulho na experiência do curso de Matemática.** 205 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008. Disponível em <http://www.ppge.ufpr.br/teses/D08_souza.pdf>. Acesso em 18/03/2012.

Administração Escolar; e Expressão Gráfica[3]; além de contarem com a presença de representantes discentes. As modificações não se deram apenas no que tange aos períodos do curso (de anual para semestral), houve também a preocupação em buscar estratégias que diminuíssem a evasão do curso (o que justifica a terceira fase) e em rever as disciplinas que compunham os currículos das modalidades ofertadas na instituição (Licenciatura e Bacharelado). Nesse sentido algumas disciplinas foram retiradas do currículo, por exemplo, “Programação”; outras foram incluídas, tal como “Geometria Dinâmica”; e outras foram divididas. No caso da Licenciatura em Matemática a disciplina “Análise I”, por exemplo, que era anual, passou a ser ministrada em dois semestres tendo como disciplinas equivalentes “Fundamentos de Análise” e “Análise na Reta”. Outro exemplo de alteração na grade curricular é a disciplina “Álgebra B”, que originou duas disciplinas: “Teoria de Grupos” e “Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas”. No currículo antigo aquela era obrigatória apenas para a modalidade Bacharelado e, após a adequação ao novo currículo, estas últimas passaram a ser obrigatórias também para a Licenciatura. Ademais, os graduandos egressos a partir de 2006 devem, conforme a nova grade[4], cumprir 200h de Atividades Formativas e apresentar um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Com a aprovação no PSE, oficialmente “caloura” da instituição, e, além disso, estar matriculada nas duas modalidades do curso[5], a vida acadêmica transcorria bem, até antão não havia encontrado maiores dificuldades. Foi então, que a história começou a mudar: no 2º semestre do curso (primeiro após terceira fase) cursava quatro disciplinas: “Cálculo I”, “Álgebra Linear I”, “Complementos de Matemática” e “Fundamentos de Geometria”. Naquele momento comecei a ver que as coisas não eram exatamente como eu imaginava, mesmo gostando bastante de “descobrir” este lado desconhecido da Matemática. Dificuldades? Sim. As primeiras notas baixas me desestabilizaram, mas não impediram o desejo de seguir em frente.

---

[3] Em novembro de 2008 o “Departamento de Desenho” (DDES) passou a chamar-se “Departamento de Expressão Gráfica" (DEGRAF) com o objetivo de modernizar o nome e adequar-se às resoluções vigentes que tratam das principais áreas de conhecimento das disciplinas do departamento. Mais informações em: <http://www.degraf.ufpr.br/historico.htm>.

[4] Nos Anexos é possível conferir na íntegra a grade curricular antiga (1993-2005) e a vigente (2006) do curso de Matemática da UFPR.

[5] Na UFPR o curso de Matemática é ofertado em duas modalidades: Licenciatura e Bacharelado. O graduando pode optar por cursar uma das duas e concluir o curso em 4 anos, cursar as duas simultaneamente e concluir o curso em 5 anos, ou ainda cursar uma e pedir permanência na universidade para cursar a outra. Ao prestar o vestibular opta-se por Licenciatura e Bacharelado que é oferecida no turno da tarde ou Licenciatura no turno da noite.

O semestre seguinte, como era de se prever, exigiu muito mais estudo, principalmente quando entrou em cena a disciplina de “Teoria de Números” e com ela suas “demonstrações módulo-m”. Até então, as demonstrações não haviam me assustado, pois, ao cursar “Complementos de Matemática”, conteúdos da ementa, como lógica, tabelas verdades, as reduções ao absurdo, dentre outras, causavam sobre mim grande curiosidade.

Os semestres foram passando e as disciplinas em que eu sentia maior dificuldade eram as que tinham como produto as demonstrações: todas do Departamento de Matemática. Foi então que comecei a pensar que este curso não era para mim. Repensando melhor minhas escolhas optei por cursar somente Licenciatura, visto que nesta grade eu estava melhor e pelo menos nas disciplinas ofertadas pelo Departamento de Educação e pelo Departamento de Expressão Gráfica[6] conseguia compreender o que deveria ser feito, onde se pretendia chegar e como resolver exercícios, trabalhos e provas. Além disso, continuava trabalhando na mesma escola que trabalhava quando ingressei na universidade, a partir de 2008 como professora de Informática; o que acabou pesando na decisão de seguir na carreira docente. No entanto, para concluir o curso de Licenciatura em Matemática, ainda precisava vencer o desafio: passar nas disciplinas obrigatórias que faltavam.

As maiores dificuldades que eu tive foram em “Fundamentos de Análise”, “Análise na Reta” e em “Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas”. Nas duas primeiras nas quais o mantra “axioma, teorema, corolário” constituíam 100% do programa, o problema consistia em “demonstrar de forma aceitável aos olhos do docente”. Ademais, a mudança de professor de um semestre para o outro e a consequente diferença de trabalho, livro-texto e estilo de avaliação, foram agravantes. Já a última, esta sim, foi a que mais contribuiu para as reflexões geradoras deste estudo.

Sem dúvida “Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas” foi, dentre todas as disciplinas do curso, meu maior obstáculo. Nas três vezes em que cursei a referida disciplina, a história era sempre a mesma: “O conteúdo eu compreendo, só não sei como fazer a demonstração”. Houve um determinado período que restava apenas esta dependência para que eu finalmente pudesse colar grau. E com isso a pressão aumentava ainda mais, porém, nenhuma demonstração “surgia” na prova. A cada

[6] O Degraf (Departamento de Expressão Gráfica) é responsável por disciplinas tais como Desenho Geométrico I, Geometria Dinâmica e Geometria no Ensino.

aula, a cada semana, a cada demonstração não compreendida, a cada exercício não esclarecido e a cada prova não condizente com os conteúdos ministrados, somente uma indagação surgia: qual a contribuição desta disciplina para minha atuação docente?

Esta motivação, aliada ao interesse em investigar sobre formação inicial de professores de Matemática e o desejo de prosseguir com meus estudos na área de Educação Matemática, fomentaram a elaboração de um projeto de pesquisa para tentar ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da UFPR.

O interesse pela Formação de Professores de Matemática como área de pesquisa manifestou-se ainda na graduação, em 2009, ao integrar o Grupo de Estudos em Educação Matemática – projeto de Extensão Universitária, coordenado pelo Prof. Dr. Emerson Rolkouski juntamente com o Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna, tomei conhecimento de artigos de pesquisadores da área de Educação Matemática.

Com o intuito de aprofundar a pesquisa já realizada e ainda tomando como base a pesquisa de Moreira e David (2005) foi elaborado e apresentado, para a seleção do PPGECM, um projeto que versava sobre as contribuições da disciplina “Geometria Euclidianas e Não Euclidianas” para a formação inicial do professor de Matemática com vistas à docência na Educação Básica. Pretendia-se investigar se a maneira como tal disciplina vinha sendo abordada contribuía significativamente para a futura ação docente do Licenciando em Matemática. Tinha-se por hipótese que a forma axiomática e abstrata de abordagem não apresentava relação com a futura atuação profissional do Licenciado em Matemática tendo em vista a docência.

Com a aprovação no Exame de Seleção do PPGECM, iniciaram-se as conversas com o orientador e o aprofundamento das pesquisas que acabaram por redirecionar o foco de estudo e dar nova forma ao que havia sido proposto, de modo que se chegou à percepção de que o cerne do projeto inicial era a demonstração. Portanto, ao invés de investigar as contribuições de uma disciplina em específico, como se desejava fazer, optou-se por enxergar a Licenciatura em Matemática como um todo, investigando o papel das demonstrações na formação inicial de professores de Matemática.

Em um curso de Matemática, independente da habilitação, o graduando constantemente depara-se com demonstrações de teoremas, corolários e afins. Mas, demonstrar por quê? Qual a função da demonstração? Qual o papel da demonstração na formação docente? Estes questionamentos, juntamente com as vivências descritas anteriormente, somados às reflexões motivadas pelas discussões com o orientador, culminaram na seguinte indagação: **Qual o papel das demonstrações, na formação de professores de Matemática, na visão do Formador de professores e na visão do Professor de Matemática da Educação Básica?**

Tendo este problema como questão de investigação do presente estudo, objetiva-se compreender as visões do Professor de Matemática da Educação Básica e do Formador de professores de Matemática[7] em relação ao papel que o uso das demonstrações desempenha em dois contextos: (1) para a formação do professor de Matemática; e, (2) na sala de aula de Matemática da Educação Básica.

Para a realização deste estudo, primeiramente buscou-se evidenciar o olhar de alguns dos pesquisadores em Educação Matemática que se dedicaram a estudar o papel do uso das demonstrações nos contextos da formação inicial, sala de aula e na própria Matemática. Em seguida realizou-se uma busca nas Diretrizes Curriculares Nacionais a fim de investigar o que tal documento sugere ou menciona sobre demonstrações nos cursos de Licenciatura em Matemática. Posteriormente voltou-se o olhar aos Documentos Oficiais para a Educação Básica (Parâmetros Curriculares Nacionais e Diretrizes Curriculares Estaduais) com o objetivo de evidenciar o que é sugerido em relação ao trabalho com as demonstrações nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Na sequência realizou-se entrevista com três Formadores, sendo um da área da Matemática Pura, outro da Matemática Aplicada e um da Educação Matemática, e três Professores de Matemática que atuam em salas de aula da Educação Básica na rede Estadual de Educação do Paraná.

O presente estudo foi estruturado da seguinte maneira: o capítulo “Revisão da Literatura” é dedicado à fundamentação teórica, evidenciando o olhar dos pesquisadores, em Educação Matemática, que foram consultados. No capítulo seguinte “As demonstrações nos Documentos Oficiais” apresenta-se o que os Documentos Oficiais para a Licenciatura e para a Educação Básica sugerem no que tange ao trabalho com as demonstrações na formação do professor e no ensino da Matemática na escola. Na sequência tem-se o capítulo “Metodologia e apresentação

---

[7] Daqui em diante denomina-se “Professor” o professor que leciona Matemática na Educação Básica; e, “Formador” o professor que atua na graduação como formador de professores de Matemática.

dos dados”, destinado a apresentar a metodologia adotada para a produção dos dados, caracterizar os colaboradores da pesquisa e exibir os dados coletados nas entrevistas com os Professores e com os Formadores. No capítulo “Análise dos dados” é feita a descrição do preparo dos dados para a análise e uma discussão sobre os resultados observados. O último capítulo, “Considerações Finais”, finaliza o estudo recapitulando o que foi feito e apontando sugestões para novas pesquisas.

2 REVISÃO DA LITERATURA

> Deposita a sua fé na demonstração rigorosa; acredita que a diferença entre uma demonstração correta e uma demonstração incorreta é inconfundível e decisiva. A pior condenação que consegue imaginar é dizer de um estudante: “Ele nem sabe o que é uma demonstração”. É, porém, incapaz de oferecer uma explicação coerente sobre o que significa rigor, ou sobre o que torna rigorosa uma demonstração. (DAVIS; HERSH, 1995).

O presente capítulo tem por objetivo evidenciar um pouco do estudo dos pesquisadores consultados acerca do papel das demonstrações no que tange ao trabalho do Matemático, na formação de Professores de Matemática e na Educação Básica.

O Matemático Ideal, segundo Davis e Hersh (1995, p.49), não é aquele perfeito – sem defeitos ou limitações – mas sim, o mais típico. Estes autores tentaram construir um retrato “improvavelmente puro” do Matemático, de tal modo que se pudesse evidenciar os aspectos paradoxais e problemáticos do papel deste profissional. As demonstrações, por exemplo, são umas das contradições que cercam a prática não só do Matemático, mas também do Professor de Matemática: muito se fala sobre demonstrar sem, no entanto, se saber ao certo o que vem a ser demonstrar.

O termo demonstração é utilizado em muitos contextos e em diversas ciências. Todos, bem ou mal, têm um significado para o que vem a ser uma demonstração. Por tratar-se de uma pesquisa na área de Educação Matemática, restringe-se o presente estudo à demonstração em Matemática. Apesar de tal restrição, não se garante objetividade que responda à indagação: “O que é demonstração?”. Davis e Hersh (1995) consideram que essa objetividade aproxima-se mais da utopia do que da realidade.

Em Matemática os termos demonstrar, provar e argumentar são, por diversas vezes, utilizados como sinônimos. Eles realmente significam a mesma coisa? Garnica (1995) afirma que tanto no jargão matemático quanto no significado léxico as palavras **prova** e **demonstração** são tidas como sinônimas:

> [...] é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras. (GARNICA, 1995, p. 10).

Dentro da Matemática, concebida como ciência formal (acadêmica), há a Lógica que com o seu instrumental nos dá, segundo Garnica (1995), condições suficientes para que se defina com clareza a noção de demonstração:

> [...] uma **demonstração** em S (um sistema formal, pensado como uma linguagem, um conjunto de sinais e um conjunto de regras para a manipulação de sinais) é uma sequência finita não vazia de sentenças de S tal que cada uma delas é um axioma ou uma consequência imediata, por regras de inferências admitidas em S, de duas sentenças anteriores na sequência. (GARNICA, 1995, p. 11, grifo no original).

Portanto, dada esta definição tem-se que um **teorema de S** é uma "sentença A de S tal que existe uma demonstração em S onde A é a última sentença da sequência." (GARNICA, 1995, p. 11).

A importância da prova rigorosa para o "fazer em Matemática", segundo Garnica (1995, p.11), pode ser atestada pelo discurso e a atividade presentes no cotidiano da prática científica da Matemática, que reconhecem a demonstração (ou prova rigorosa, ou prova) como "elemento central no desenvolvimento do que se conhece por Matemática". Apesar deste reconhecimento da importância da demonstração e de esforços para tentar se aproximar de uma definição para o termo, concordando com Garnica (1995), observo que existem conflitos que permeiam a noção acerca da natureza da demonstração. Conceituar o termo "demonstração" em matemática é uma tarefa não muito simples, pois as questões referentes à subjetividade da concepção do ato de demonstrar são construídas ao longo de toda a vida acadêmica do matemático. Além disso, as práticas profissionais somadas às concepções construídas ao longo de sua formação influenciam diretamente na conceituação que este profissional fará para o termo "demonstrar". De modo que enquanto para alguns "demonstrar" relaciona-se com o ato de "provar através de dispositivos lógicos e rigorosos" para outros pode se remeter ao ato de "justificar", sem usar necessariamente regras e rigor matemático. Penso que independente da definição que o Educador Matemático, o Matemático Puro ou Aplicado têm, todos eles acreditam que a demonstração é muito importante para o "fazer matemática".

Antes de partirmos para uma discussão mais aprofundada sobre a demonstração nos contextos por nós pesquisados – formação de professores e na Educação Básica – teceremos um breve percurso histórico acerca do desenvolvimento do conceito de demonstração.

Historicamente as demonstrações e o método dedutivo foram os responsáveis na tarefa pela "pela busca da 'verdade' na Matemática". Para Domingues (2002) muitos dos grandes avanços que a Matemática sofreu ao longo do tempo tiveram de ser "precedidos por progressos concomitantes nos métodos de demonstração." (p. 55). A procura pela verdade segundo Tarski[8] (1969), citado por Domingues (2002), pode ser considerada como a essência da atividade científica. Logo, tal busca seria a essência da atividade do matemático.

Mas o que é a "verdade matemática"? Para tentar responder esta questão Domingues (2002) lembra que as noções de verdadeiro e falso, na Matemática, estão relacionadas às proposições. Segundo ele, provavelmente a mais antiga tentativa de explanar estas noções deve-se a Aristóteles e sua Metafísica – também conhecida como formulação clássica ou semântica – que deixa a desejar por não encerrar em si mesma um critério para definir se uma dada afirmação é verdadeira ou falsa.

Domingues (2002) garante que é necessário encontrar critérios parciais específicos que possibilitem estabelecer a falsidade ou a veracidade do maior número possível de proposições. Critérios esses diferentes nas ciências empíricas e nas dedutivas, sendo que nestas últimas, especialmente na Matemática, eles inserem-se no método axiomático-dedutivo fundamentando-se na ideia de demonstração.

Entre os povos antigos, no caso da Matemática babilônica e egípcia, por exemplo, o desenvolvimento da Matemática se deu sem se valer de tal método. Segundo Domingues (2002), os historiadores concordam que nenhuma delas baseou-se em estruturas axiomáticas que pudessem garantir a validade dos procedimentos práticos que a compunham. Nesses povos, o critério de confiabilidade utilizado era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam. O que, para este pesquisador, também pode ser tomado como ideia de verdade matemática.

Domingues (2002) aponta que o caminho que levou ao método axiomático em Matemática, apesar de ser pouco conhecido, é longo e possui ligação com o desenvolvimento matemático grego. Costuma-se atribuir a Tales de Mileto (600 a. C.) a primeira demonstração na história da Matemática (DAVIS; HERSH, 1995), isto é, a formulação sistemática de propriedades gerais para figuras geométricas.

[8] TARSKI, A. Truth and Proof. **Scientific American.** n. 220, p. 63-70, 75-77, 1969.

Acredita-se, no entanto, que suas afirmações já eram conhecidas por outros povos, por exemplo, os egípcios.

Pitágoras de Samos (580 a. C.) e sua escola, também deixaram contribuições para a Matemática. Domingues (2002) relata que segundo o *Sumario Eudemiano* a escola pitagórica teria sido responsável pela “criação da matemática pura, movida por razões intelectuais e na esteira do estudo de problemas abstratos”. (p. 57). O que se pode admitir, tendo em vista o pouco que se conhece com certeza a respeito desta escola, é que seus membros se limitaram a estabelecer resultados a partir de casos particulares, tanto na Aritmética quanto na Geometria. Por volta dos anos 400 a. C., época dos últimos pitagóricos, é que se desencadearam nos trabalhos da irmandade, raciocínios para estabelecer e deduzir outras propriedades de certos tópicos da Geometria.

A queda da escola pode ter sido ocasionada, ou acelerada, devido aos Números Irracionais. Pela filosofia pitagórica todos os fenômenos do Universo poderiam ser explicados em termos de Números Inteiros Positivos, os únicos que eles consideravam. Logo, esta tese era coerente com a crença de que duas grandezas quaisquer, de mesma espécie, sempre seriam comensuráveis. Todavia, no século V a. C. o pitagórico Hipaso de Metaponto demonstrou que esta crença era falsa. Como ele demonstrou isto não se sabe. Aristóteles (séc. IV a. C.) afirmava que foi por redução ao absurdo e até apresentava uma demonstração, utilizando este método, de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis. Para Domingues (2002) esta poderia ter sido a demonstração que encontrada por Hipaso.

Com este tipo de resultado nota-se que para o desenvolvimento da Matemática a ideia de se utilizar encadeamentos de propriedades articuladas por intermédio de raciocínios lógicos já era uma realidade nessa época. Foi então que por volta dos anos 300 a. C. Euclides, em *Os Elementos,* apresentou um método axiomático que pode ter sido fundamentado pela lógica aristotélica. O modelo dedutivo de Euclides consiste em admitir um número pequeno de verdades (axiomas) e a partir destas verificam-se, através das demonstrações, outras afirmações (teoremas).

Até finais do século XIX, as demonstrações mantinham um grande caráter material que visavam ao convencimento do outro sobre a verdade de uma proposição. No entanto, tornou-se necessário submeter a noção de demonstração a uma profunda análise, com o intuito de reduzir o recurso, não mais à evidências materiais e sim à evidências intuitivas. De modo que o conceito clássico de demonstração não resistiu. O matemático G. Frege (1848-1925) foi um dos que contribuíram para a reformulação da ideia de demonstração. Com ele, o conceito de *demonstração formal* ficou sintetizado da seguinte maneira:

> [...] a construção de uma sequência de proposições tal que: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na sequência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. (TARSKI[9], 1969, *apud* DOMINGUES, 2002, p. 61).

Arsac[10] (1988) e Barbin[11] (1988), como aponta Mello (1999), concordam que ao longo da história, as demonstrações evoluíram conforme três etapas, a saber:

> (1) A gênese com os gregos no séc V a.C.: a demonstração é a **ordem da convicção** num debate contraditório.
> (2) A primeira modificação no séc XVII: a demonstração tem como objetivo **esclarecer antes de convencer**, e os métodos de descoberta fazendo um papel central.
> (3) A segunda modificação no séc. XIX: o retorno ao rigor e a aparição do **formalismo**, isto é, o surgimento de uma nova concepção de objetos matemáticos. (MELLO, 1999, p. 30, grifo nosso).

A segunda etapa, para Mello (1999), coincide com o ponto de vista dos gregos, pois, a demonstração aqui tem o intuito de esclarecer e convencer. Esta etapa é oposta à primeira devido ao fato de que na primeira o esclarecer não precede o convencer.

Já a terceira etapa é caracterizada pelo formalismo e rigor. O primeiro matemático, como relata Domingues (2002), que teria realizado um trabalho em geometria, tendo como fundamento esta nova axiomática, foi M. Pasch (1843-1931). Em *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1ª ed. 1882), Pasch – diferentemente de Euclides – lançou mão de apenas alguns conceitos primitivos e, dos axiomas, fez apenas enunciados formais.

No entanto, dentre as tentativas de nova axiomatização para a Geometria Euclidiana, a melhor sucedida foi a de David Hilbert (1852-1943). Em *Fundamentos da Geometria* (1899), Hilbert assume três conceitos como primitivos: ponto, reta e

---

9 *Id.*

10 ARSAC, G. Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation em France. **Recherches em didactique des Mathématiques,** vol. 9, n. 3. p.247-280, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988.

11 BARBIN, E. La démontration mathématique: significations epistemologiques et questions didactiques. **Bulletin de l'APMEP,** n. 366, 1988.

plano. Em seguida define relações mútuas entre eles através de axiomas. Nesta etapa e nas demonstrações nenhuma intuição poderia ser utilizada, o que, de certo modo, representava um “afastamento da tradição aristotélica grega na qual os axiomas simplesmente exprimiam fatos ‘óbvios’ acerca de conceitos já ‘conhecidos’ intuitivamente”. (DOMINGUES, 2002, p. 63).

Com o êxito na axiomatização da Geometria Euclidiana, Hilbert decide por fazer o mesmo com outras áreas da Matemática, tornando-se assim o líder do formalismo, que foi um movimento filosófico que objetivava transformar a Matemática na ciência das deduções formais, o que pressupunha livrá-la de qualquer ligação material. Além dele, outras duas correntes filosóficas, opostas entre si e opostas ao formalismo de Hilbert, que pretendiam fundamentar a Matemática, emergiram: **intuicionismo** e **logicismo**. A primeira teve precursores L.E.J. Brouwer (1881-1966) e Hermann Weyl (1885-1955) e, em linhas gerais, pretendia desenvolver toda a Matemática apenas por métodos construtivos finitos baseados nos números naturais (dados intuitivamente). Enquanto que a última, tinha por intuito reduzir detalhadamente toda Matemática à lógica e seus precursores foram Dedekind (1831-1916), Frege (1848-1925), Peano (1858-1932).

Em meados dos anos de 1920, Hilbert e sua escola criam a chamada “teoria da demonstração” que, de acordo com Domingues (2002), era um método que possuía como objetivo estabelecer a consistência de qualquer sistema formal.

A axiomatização oriunda do movimento de formalização da ciência possui, para Mocrosky, Baumann e Mondini (2009), dois pólos: de um lado proporciona economia de raciocínio, pois trata de “conceitos já negociados intelectualmente e uma rede de sequências pragmáticas” (p. 1184); e, do outro, pode trazer um fazer mecanizado e aparentemente sem sentido.

Demonstração formal segundo Tarski (1991, p. 114) seria a aplicação de regras de demonstração aos axiomas obtendo-se novas sentenças. Em seguida aplica-se as mesmas regras a novas sentenças ou simultaneamente ao conjunto de novas sentenças e axiomas, obtendo outras sentenças. Continua-se o processo, e, se após um número finito de passos, tivermos chegado à sentença dada, diremos que a sentença foi demonstrada formalmente.

O que se fez até o momento, foi um breve percurso histórico a fim de situar o leitor no que tange ao desenvolvimento do conceito de demonstrações. Ressalta-se que o assunto não foi esgotado, pois pretendeu-se mostrar um percurso apoiado nos pesquisadores consultados, o que não representa a totalidade de pesquisas sobre o tema. Além disso, o foco deste estudo é outro, logo, não nos aprofundaremos em tais questões.

Posto isso, retomamos nossa discussão sobre a necessidade de demonstrar. A dificuldade para compreender tal necessidade, como aponta De Villiers (2001), é um dos maiores problemas no ensino da demonstração. A importância da prova (ou prova rigorosa, ou demonstração) para "o fazer" em Matemática pode ser percebida em atividades e discursos cotidianos da prática científica da Matemática onde a prova rigorosa é reconhecida como "elemento central no desenvolvimento do que se conhece por Matemática" (GARNICA, 1995, p. 11). No entanto conflitos sobre a natureza da demonstração tem se mostrado marcado por "nítidas posições controversas" (GARNICA, 1995, p. 11) que fomentam o debate sobre tais noções. Além disso, os objetivos de uma demonstração matemática são abordados de maneiras diferentes.

Na literatura Matemática, como afirma Garnica, especificamente na Lógica, há o cuidado de tratar o problema da prova do modo tradicionalmente aceito: "um mecanismo definido formalmente cujas raízes não necessitam de investigação e cujos frutos compõem a conhecida produção científica em Matemática" (GARNICA, 1995, p. 11). Questões sobre a natureza das demonstrações têm sido discutidas mais vezes nos campos da Filosofia da Matemática ou da Filosofia da Lógica, porém, a prova continua sendo concebida do modo usual: **convencer, validar, verificar.**

Já na Educação Matemática, de acordo com Garnica (1995), o termo demonstração ou prova vem sempre seguido de um adjetivo como, por exemplo, rigorosa. A necessidade ou não deste dependerá muito dos aspectos que se foca. Para matemáticos ditos "puros" uma prova é por si só rigorosa, sem haver a necessidade de especificar ou chamá-la de prova rigorosa. Para outros matemáticos o termo "rigorosa" estabeleceria a diferença entre os diversos tipos de prova possíveis daquelas herdadas diretamente do programa de Euclides em *Os Elementos*.

Há outros autores, como por exemplo, os que seguem Balacheff, que partem de uma explicação mais minuciosa dos termos, buscando elementos etimológicos, para então fazer a distinção entre prova e demonstração. Garnica[12] (2010) aponta

---

[12] Artigo publicado originalmente em: GARNICA, A. V. M. Da literatura sobre a prova rigorosa em

que para Balacheff prova é “uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento podendo ser debatida, refutada ou aceita” (p. 71). Enquanto que uma demonstração seria um tipo particular de prova, utilizada no interior da comunidade Matemática, que só é aceita se adota um conjunto de enunciados válidos e organizados segundo determinadas regras, sendo que um enunciado ou é dado como verdadeiro ou é deduzido a partir do precedente utilizando-se deduções válidas e pré-fixadas da Lógica.

Garnica (1995) conclui, através da revisão bibliográfica feita, que as demonstrações são importantes para o “fazer matemático”. Afirma ainda que os matemáticos puros além de considerarem demonstração e prova como sinônimas acreditam que a atividade de demonstrar é intrínseca à Matemática.

A demonstração, tradicionalmente, era vista em relação à verificação da correção das afirmações matemáticas. Neste sentido elas eram usadas para **eliminar as dúvidas**, pessoais ou dos céticos. Tal ideia de objetivo para a demonstração, segundo De Villiers (2001), dominou de forma unilateral a prática de ensino e boa parte das discussões e investigações referentes ao ensino das demonstrações. Este autor cita Hanna e Volmink como exemplos de pesquisadores que parecem definir demonstração em termos da função de verificação:

> Uma demonstração é um argumento necessário para validar uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente. (HANNA[13],1989, p. 20 apud DE VILLIERS, 2001, p. 31, grifo do autor).

> Porque é que nos preocupamos em demonstrar teoremas? Defendo aqui que a resposta é: para que possamos convencer pessoas (incluindo nós próprios)... podemos encarar a demonstração como um argumento suficiente para convencer um céptico razoável. (VOLMINK[14], 1990 apud DE VILLIERS, 2001, p. 31, grifo do autor).

A validação de conceitos e ideias matemáticas não é a única possibilidade para as demonstrações. Thurston (1994) considera, por exemplo, que a demonstração matemática é uma atividade interligada à construção da própria matemática servindo para trazer **entendimento e compreensão**. Enquanto Hanna e Jahnke (1996) elencam as seguintes funções para a demonstração:

- **Verificar** conferindo o estatuto de verdade de uma sentença;

Educação Matemática: um levantamento. In: ***Quadrante***: Revista Teórica e de Investigação. Lisboa, v. 5, n. 1, p. 29- 60, ago. 1996. Associação de Professores de Matemática (APM).

[13] HANNA, G. More than formal proof. **For the Learning of Mathematics.** 9(1), p. 20-23, 1989.

[14] VOLMINK, J. D. **The Nature and Role of Proof in Mathematics Education.** Pytagoras, 23, 7-10, 1990.

- **Explicar** esclarecendo o porquê da sentença ser verdadeira;
- **Sistematizar** organizando vários resultados dentro de um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas;
- **Propiciar a descoberta** possibilitando a criação de novos resultados;
- **Propiciar a comunicação** possibilitando a transmissão de conhecimento matemático.

De Villiers (2001), ampliando o estudo de Bell[15] (1976 *apud* DE VILLIERS, 2001), apresenta o seguinte modelo para o que a demonstração pode assumir:

- **Verificação:** convencimento (próprio e dos outros) em relação à veracidade de uma afirmação;
- **Explicação:** compreensão do motivo pelo qual uma afirmação é verdadeira;
- **Sistematização:** organização de resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas;
- **Descoberta:** a tentativa de se demonstrar uma conjectura pode levar a novos resultados (descoberta de teorias e conjecturas);
- **Comunicação:** comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade (entre matemáticos profissionais, entre professores e entre os estudantes);
- **Desafio intelectual:** satisfação pessoal pelo êxito na construção de uma demonstração.

O papel e os significados das definições e das demonstrações são uma das distinções importantes entre o que Moreira e David (2010) chamam de Matemática Acadêmica e Matemática Escolar[16]. Ainda que em ambos os campos se faça necessário bem caracterizar os respectivos objetos, validar afirmações a eles referidas e explicar os motivos pelos quais determinados fatos são aceitos como verdadeiros enquanto que outros não, a "formulação das definições e das provas e o papel que desempenham em cada um dos contextos são, todavia, bastante

---

15 BELL, A. W. **A study of pupils proof-explanations in Mathematical situations.** Educacional Studies in Mathematics, 7, 23-40, 1976.

16 Os autores usam as expressões *Matemática Científica* e *Matemática Acadêmica* como sinônimas que se referem à Matemática como um "corpo científico de conhecimentos" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20) produzido pela prática do matemático, sendo esta caracterizada pela produção de conhecimentos de fronteira. Já a *Matemática Escolar* é aquela que se refere ao conjunto de saberes associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. E esta, por sua vez, tem ligação direta com a prática do professor de Matemática da Escola Básica.

diferentes.” (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 23).

Na primeira, tem-se que devido à sua estrutura axiomática, todas as provas se desenvolvem com base nas definições e teoremas definidos previamente. Neste contexto exige-se que as definições sejam precisamente formuladas, pois ambiguidades na caracterização de um objeto matemático podem ocasionar contradições na teoria. Moreira e David (2010) apontam ainda que as demonstrações rigorosas e as definições formais são, na Matemática Acadêmica, elementos importantes tanto durante o processo de conformação, quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada. Conformação, segundo estes autores, é o momento em que a comunidade avalia e eventualmente aceita um novo resultado, garantindo assim, sua incorporação ao conjunto dos resultados que são tidos como válidos.

No contexto da Matemática Escolar, por sua vez, encontram-se dois elementos fundamentais que, segundo Moreira e David (2010) modificam significativamente o papel das definições e provas: (1) A “validade” dos resultados matemáticos que serão debatidos no processo de escolarização básica já está garantida, em princípio, pela própria Matemática Acadêmica, portanto, não é colocada em dúvida; (2) A aprendizagem, ou seja, o desenvolvimento de uma prática pedagógica que objetive a compreensão do fato e a construção de justificativas que possibilitem ao aluno utilizá-lo de maneira conveniente e coerente na sua vida seja ela escolar ou extraescolar.

Moreira e David (2010) consideram que existe uma diferença significativa entre ordenar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de definições, postulados e conceitos primitivos de uma teoria; e, no contexto escolar, promover o desenvolvimento de uma profunda convicção a respeito da validade desse resultado. Citam como exemplo, a demonstração, matematicamente correta, do fato de que não há número inteiro entre 0 e 1:

> [...] para a Matemática Escolar não faz nem sentido argumentar: qualquer tipo de argumentação teria que **pressupor a aceitação, sem provas, de afirmações mais complexas e menos evidentes do que a própria tese a ser provada.** No entanto, para a Matemática Acadêmica, a demonstração faz sentido: entre outros objetivos possíveis, ela **explicita para o futuro matemático em processo de formação essa espécie de “suspensão da certeza”** a que devem ser submetidos todos os enunciados – até um como esse, impensável de se colocar em dúvida dentro da cultura escolar – para que se processe rigorosamente esse tipo de organização lógica da Matemática Científica, que é axiomática. (MOREIRA, DAVID; 2010, p. 24, grifo nosso).

Os autores afirmam também que o julgamento da validade e a própria elaboração das argumentações, no caso da Matemática Escolar, passam por considerações de cunho didático-pedagógico bem como pelo desenvolvimento de formas de convencimento próprias da comunidade escolar. Acreditam que na Matemática Escolar a “prova dedutiva e rigorosa não é a única forma aceitável de demonstração.” (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 27). Entendem que as justificativas mais “livres”, isto é, menos formais, podem levar a uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas que estão em discussão. Citam como exemplo o uso de dobraduras em papel para a verificação de certos fatos da Geometria: justificativas assim são mais próximas da elaboração dos alunos, podendo constituir argumentações mais convincentes, dentro da comunidade escolar, do que as demonstrações formais.

Assim como os autores, acredito que no contexto escolar, ou Matemática Escolar, a demonstração como é abordada em um curso universitário de Matemática, com rigor e uso de procedimentos lógicos e dedutivos, não é a única maneira aceitável de demonstração. Penso que quando se trata do ensino de demonstrações, mais do que a demonstração em si, devemos pensar em outras “formas” de demonstrar que “antecedem” a demonstração propriamente dita, como, por exemplo: investigação, argumentação e justificação.

Moreira e David (2010) alertam que as demonstrações do tipo “menos formais” não são isentas de questionamentos e de complicações dentro do trabalho pedagógico na Educação Básica. Algumas das dificuldades a serem contornadas seriam:

> - a possibilidade de estímulo a um relaxamento exagerado de modo a se fazer despercebida a utilização de circularidade lógica (algumas vezes mais evidente, outras vezes sutil) nos raciocínios empregados nas justificativas;
> - a possibilidade de promoção de uma compreensão equivocada do papel da necessidade da validação dos resultados e das sentenças matemáticas no contexto da educação escolar básica (numa direção que levada ao extremo, se traduziria nos seguinte termos: “basta eu acreditar para ser considerado verdadeiro”);
> - a possibilidade de reforçar certas concepções inadequadas (***misconceptions***) do aluno, as quais podem eventualmente funcionar como obstáculo ao desenvolvimento do processo de aprendizagem da Matemática Escolar. (MOREIRA, DAVID; 2010, p. 27, grifo no original).

Ainda pensando nas demonstrações no âmbito da escola, tem-se o trabalho de Hanna (1990, p. 6) que distingue a demonstração formal da demonstração aceitável, ambas no contexto escolar:

- **Demonstração formal:** é a demonstração como conceito teórico da lógica formal que pode ser considerado como ideal. A prática matemática apenas se aproxima neste contexto;
- **Demonstração aceitável:** é aquela como conceito normativo que define o que é aceitável para matemáticos profissionais;
- **O ensino da demonstração:** a demonstração como atividade matemática escolar servindo para esclarecer ideias que valem a pena os alunos conhecerem.

Em se tratando do ensino de demonstrações em Matemática tem-se o estudo de Boavida (2001). Uma boa demonstração, segundo esta pesquisadora, é aquela que **além de convencer, explica e faz avançar na compreensão de um problema, ideia ou resultado matemático** (BOAVIDA, 2001, p. 11)**.** Afirma ainda que a atividade de produzir uma demonstração, bem como a sensibilidade ao seu interesse e a comunicação clara e correta das ideias matemáticas envolvidas, têm mais importância do que o formato final da demonstração.

Boavida (2001) relata que em Portugal, até pouco tempo, o ensino das demonstrações encontrava-se basicamente relacionado com o ensino de Geometria e de Aritmética. Iniciava-se tal ensino no 3º ano do ciclo básico[17], pois conforme as ideias de Piaget este seria o estágio em que os alunos atingem as operações formais. Quem fazia as demonstrações eram, em boa parte do tempo, os professores e aos alunos restava seguir as demonstrações apresentadas pelo professor ou as demonstrações exibidas nos livros, além de ser capaz de reproduzí-las quando necessário. As demonstrações reproduzidas pelos alunos serviam, segundo Boavida (2001, p. 11), para provar o seu saber e não para validar enunciados matemáticos, já que estes já haviam sido validados. Isto é, a observação, experimentação e formulação de conjecturas eram inexistentes:

> Tudo se passava como se não houvesse gênese de demonstração, como se de repente, por volta dos treze anos, se revelasse aos alunos que só a demonstração, em matemática, é portadora de certezas e se obrigassem a entrar num jogo novo de que tinham que aceitar as regras e onde os critérios de verdade e validade eram diferentes dos que tinham utilizado até aí. Era como se os alunos tivessem que se submeter a uma racionalidade nova virando as costas à realidade que até aí lhes tinha sido útil e lhes tinha permitido lidar com a Matemática. Assim sendo, não é de estranhar que para muitos a aprendizagem da demonstração tenha constituído (e continue

[17] O ciclo básico de ensino em Portugal é dividido em três ciclos: o 1º ciclo vai do 1º ao 4º ano; o 2º ciclo inclui 5º e 6º ano; e, o 3º ciclo que compreende do 7º ao 9º ano.

> a constituir) uma fonte importante de insucesso e uma atividade em que não encontravam grande sentido (BOAVIDA, 2001, p. 12).

Boavida (2001, p. 12) garante que ainda é possível encontrar traços dessa herança nas práticas escolares, apesar das orientações curriculares atuais procurarem questionar tal situação e apontarem caminhos diferentes para o ensino e aprendizagem da demonstração. Penso que não só em Portugal, como afirma a autora, mas também no Brasil, que as práticas escolares relacionadas ao ensino e aprendizagem de demonstrações estão fortemente ligadas à reprodução de conceitos apontados em livros didáticos e não na observação, experimentação e formulação de conjecturas, como sugerem os Documentos Oficiais para o Ensino Básico.

Quando consideramos as demonstrações sob um ponto de vista educativo, talvez o seu papel fundamental seja o de “promover a compreensão” (BOAVIDA, 2001, p. 13). O formato final de uma demonstração, para a pesquisadora, deve subordinar-se às possibilidades de compreensão e ser adequado ao nível de escolaridade e contexto de ensino. Acredita também que para o aluno é importante que as demonstrações constituam um instrumento para fazer matemática e não um objeto matemático a ser estudado. Afirma ainda que a demonstração ganha sentido e relevância quando os alunos sentem necessidade de fazê-la.

Segundo Boavida (2001), ao se falar sobre o ensino de demonstração, somos conduzidos a outras atividades matemáticas intimamente relacionadas com a atividade de demonstrar, tais como: **explorar, investigar, conjecturar e argumentar.** Aponta que tais atividades, diferentemente do que acontecia há alguns anos, são valorizadas nos currículos de Matemática. Salienta ainda que a ênfase em tais atividades bem como ao raciocínio indutivo que lhes é associado, não significa a diminuição da importância de outra atividade matemática fundamental: a atividade de demonstrar. De acordo com a autora, o que se defende é a importância de que os alunos possam, de forma articulada, experimentar atividades de investigação, formulação de conjecturas, argumentação e demonstração.

O trabalho que o aluno desenvolve nas fases de exploração e teste de uma conjectura é, frequentemente, motivador para a produção da demonstração dessa conjectura e, neste contexto, Boavida (2001, p. 14) aponta que o grande desafio para o professor é o de aproveitar tal entusiasmo. Não se trata de tornar a atividade de formulação de conjecturas subordinada à possibilidade de demonstração, pode acontecer do aluno formular uma conjectura que ele não seja capaz de demonstrar com os conhecimentos matemáticos que possui no momento. Isto, como salienta a pesquisadora, tem em si, valor educativo, além de proporcionar aos alunos um maior aprofundamento da compreensão sobre o trabalho dos Matemáticos.

Boavida (2001) acredita que a aprendizagem da demonstração é um percurso. Para ela a construção, pelos alunos, de uma ideia cada vez mais correta do que é uma demonstração, desenvolve-se ao longo dos anos de escolaridade, de modo que restringir a aprendizagem de demonstrações apenas aos anos finais do Ensino Básico, por considerar que os alunos mais velhos já atingiram a maturidade lógica necessária para compreender: definições abstratas, distinguir hipótese de tese, axioma, teorema e corolário, e ainda distinguir condições suficientes de necessárias, não parece ser o caminho mais adequado para que os alunos possam aprender a demonstrar e sintam a necessidade e gosto por tal atividade.

Com essas discussões apresentadas observei que os pesquisadores consultados concordam em dois aspectos: (1) trabalhar com demonstrações é importante, independente do nível de ensino em que se atua; (2) as demonstrações têm papeis diferentes dependendo do contexto em que são abordadas.

No próximo capítulo procuro compreender como as demonstrações são abordadas nos Documentos Oficiais para o curso de Matemática e na sala de aula.

3 AS DEMONSTRAÇÕES NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo, procuro evidenciar o que os Documentos Oficiais sugerem no que tange ao trabalho com demonstrações, tanto na Licenciatura quanto na Educação Básica. Na primeira seção faço uma discussão sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Licenciatura em Matemática com o intuito de buscar o papel das demonstrações na formação de professores de Matemática. Já na segunda, foco meu olhar para a Educação Básica destacando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (DCEs).

3.1 O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O parecer CNE[18]/CES[19] 1302/2001 estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Segundo o documento os cursos de Licenciatura em Matemática têm por objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica.

Ressaltam ainda que devido à expansão das aplicações da Matemática em outras áreas nas últimas décadas como, por exemplo, nas Ciências Econômicas, Biológicas, Humanas e Sociais, e, também pela longa história de intercâmbio com a Física e com as Engenharias, as habilidades e competências (tais como: raciocínio lógico, postura crítica e capacidade de resolver problemas) que o matemático adquire ao longo da formação o tornam capaz de atuar fora do ambiente acadêmico. Logo, o profissional graduado em Matemática é capaz de ocupar posições no mercado de trabalho em áreas onde o raciocínio abstrato é ferramenta indispensável. Assim, o documento sugere que os programas de graduação devem ser bastante flexíveis para contemplar esse grande campo de interesses.

Ainda segundo as diretrizes, é desejado que o Licenciado em Matemática tenha as seguintes características:

- visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;

---

18 CNE: Conselho Nacional de Educação.
19 CES: Câmara de Educação Superior.

> - visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania;
> - visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina. (BRASIL, 2001).

O currículo do curso de Matemática, tanto no Bacharelado quanto na Licenciatura, deve ser elaborado, segundo as DCNs (BRASIL, 2001), de modo a desenvolver habilidades e competências, a saber:

- Capacidade de expressar-se, escrita e oralmente, com clareza e precisão;
- Capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas;
- Capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento;
- Capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares;
- Habilidade para identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, fazendo uso do rigor lógico-científico na análise da situação;
- Fazer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;
- Educação abrangente para o entendimento do impacto das soluções encontradas em um contexto social e global;
- Conhecer questões contemporâneas;
- Participar de programas de formação continuada;
- Realizar estudos de pós-graduação;
- Trabalhar a Matemática com outros campos de saber.

Em relação às habilidades e competências próprias para o Educador Matemático, as diretrizes sugerem que o Licenciado em Matemática deverá ter capacidade de:

> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;
> b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
> c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;
> d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
> e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;
> f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica. (BRASIL, 2001).

Quanto à estrutura curricular dos cursos de Matemática, as DCNs apontam que os conteúdos deverão contemplar em sua composição, dois aspectos:

> a) partir das representações que os alunos possuem dos conceitos matemáticos e dos processos escolares para organizar o desenvolvimento das abordagens durante o curso;
> b) construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno. (BRASIL, 2001).

Em relação aos conteúdos curriculares, o documento aponta que o curso na modalidade licenciatura deve conter os seguintes conteúdos, comuns à todos os cursos de Licenciatura em Matemática: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Devendo ainda incluir:

> a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise;
> b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;
> c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (BRASIL, 2001).

O que se pôde observar ao estudar as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, é que em momento algum o termo “demonstração” é utilizado. O mesmo vale para como se poderia abordar tópicos referentes às demonstrações na graduação em Matemática. No entanto, notou-se que as DCNs sugerem que o licenciado em Matemática deve ter como competência e habilidade, capacidade de expressar-se com clareza e precisão e desenvolver o raciocínio lógico, postura crítica e capacidade de resolver problemas. O que, em nosso entendimento, é o “combustível” para a produção de uma demonstração.

Observou-se também que as Instituições de Ensino Superior (IES) são autônomas para elaborar o currículo da graduação em Matemática respeitando o perfil do profissional que deseja formar, bem como as legislações pertinentes. Porém, o documento deixa bem explícito que o **objetivo** de um curso de **Licenciatura** em Matemática é o de **formar professores para a Educação Básica.**

Além disso, as Diretrizes Nacionais apontam que o licenciado necessita ter conhecimento específico da área de formação, no caso a Matemática, aliado aos conhecimentos pedagógicos.

3.2 O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Quando se trata do papel das demonstrações na Educação Básica temos alguns Documentos Oficiais que nos orientam para o trabalho em sala de aula. Neste estudo tomaremos dois deles como base: (1) em âmbito nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais (DCNs); (2) na esfera estadual, as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCEs). O primeiro é um dos documentos que rege e orienta os currículos das escolas de todo o país, enquanto que o segundo, embasado no primeiro e outros materiais, é direcionados às escolas do Estado do Paraná.

Neste estudo não olhamos as Diretrizes Curriculares Municipais (DCMs) da cidade de Curitiba, pois as entrevistas seriam realizadas somente como professores que atuassem na Rede Estadual de Ensino, por este motivo paramos nosso estudo nas diretrizes estaduais.

3.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Nesta seção pretendo evidenciar o que os PCNs sugerem no que tange ao trabalho com demonstrações na educação básica. Optei, a fim de organização, subdividir a seção nos dois níveis de ensino considerados: anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

3.2.1.1 Ensino Fundamental (anos finais)

Dentre os objetivos gerais para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental[20] (6º ao 9º ano) tem-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais o seguinte:

> [...] comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. (BRASIL, 1998, p. 48).

O ensino de Matemática, segundo o documento, deve garantir o

---

[20] Os níveis de ensino, quando os PCNs foram escritos, eram nomeados por séries. As séries, agora anos, finais do Ensino Fundamental eram: 5ª e 6ª séries (terceiro ciclo); e, 7ª e 8ª séries (quarto ciclo). Na atual nomenclatura o terceiro ciclo é composto pelos 6º e 7º anos, ao passo que o quarto ciclo é constituído pelos 8º e 9º anos.

desenvolvimento de capacidades tais como: “[...] argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa.” (BRASIL, 1998, p. 56).

No terceiro ciclo (6º e 7º anos) os PCNs sugerem que é importante estimular os alunos a construírem e analisarem diferentes processos de resolução de situações-problema e compará-los, pois, ao se desenvolver a capacidade de buscar soluções pode-se favorecer que o aluno passe a “reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis.” (BRASIL, 1998, p. 70). No documento ressalta-se ainda que a argumentação é fortemente ligada à capacidade de justificar uma afirmação e para tal é importante produzir uma explicação e saber justificá-la. De modo que um argumento será aceito se estiver “sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos.” (BRASIL, 1998, p. 70). No documento afirma-se também que uma argumentação não é uma demonstração:

> A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração. (BRASIL, 1998, p. 70).

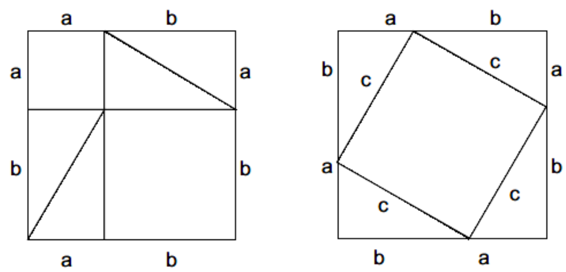
Porém, se por um lado a prática da argumentação atua naturalmente no plano das discussões, onde é possível defender diferentes pontos de vista, por outro, ela pode ser um caminho que leva à demonstração. Neste sentido, os parâmetros sugerem que é desejável, no terceiro ciclo, que se trabalhe para desenvolver a argumentação de tal maneira que os alunos não se satisfaçam somente produzindo respostas às afirmações, mas adotem atitude de sempre tentar justificá-las. Assim, no quarto ciclo pode-se avançar com o trabalho a fim de que o aluno reconheça a “importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.” (BRASIL, 1998, p. 71).

O quarto ciclo (8º e 9º anos) do Ensino Fundamental, como apontam os Parâmetros, dá continuidade a este trabalho de busca da construção de argumentos plausíveis iniciado nos ciclos anteriores e em todos os blocos de conteúdos. Segundo eles a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações, mesmo que a argumentação e a demonstração utilizem frequentemente os mesmos conectivos lógicos, há “exigências formais para uma demonstração em Matemática que não podem estar presentes numa argumentação.” (BRASIL, 1998, p. 86). As argumentações produzidas serão refinadas gradativamente, com a assimilação de princípios da lógica formal, o que possibilita as demonstrações. Neste ciclo, portanto, inicia-se um trabalho com algumas demonstrações com o intuito de mostrar seu significado e sua força. Apesar disso os PCNs ressaltam que não é desejável abandonar as verificações empíricas, porque estas permitem a produção de conjecturas e a ampliação do grau de compreensão dos conceitos envolvidos.

Na seção destinada às Orientações Didáticas para terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental o termo “argumentar”, bem como suas derivações, são encontrados com frequência, o que nos leva a entender que para os parâmetros a argumentação é tida como importante nesta etapa da escolarização. O maior destaque para a ação de argumentar e, consequentemente demonstrar, é dado no bloco “Espaço e Forma”: a Geometria é “um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações.” (BRASIL, 1998, p. 122). Além disso, afirmam que as atividades de Geometria são muito propícias para que professor e aluno construam um caminho, a partir de experiências concretas, que leve à compreensão da importância e necessidade da prova para dar legitimidade às hipóteses levantadas.

No caso do Teorema de Pitágoras, por exemplo, pode-se propor ao aluno uma atividade com o uso de materiais concretos ou até mesmo com a mediação de desenhos:

> O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (ver figura). Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi “provado”. (BRASIL, 1998, p. 126).



Apesar do grande convencimento que experimentos concretos, aos moldes do citado acima, podem causar aos alunos, os parâmetros reforçam que estes não constituem uma prova matemática. Tais experiências, segundo o Documento, podem ser aceitas como provas no terceiro ciclo, enquanto que no quarto elas devem funcionar como desencadeadoras de conjecturas e processos que conduzam às justificativas mais formais.

3.2.1.2 Ensino Médio

A Matemática no Ensino Médio, como apontam os PCN+ (2002b), deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação dos jovens, contribuindo assim, para a construção de uma visão de mundo para "ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional". (BRASIL, 2002b, p. 111).

Para o Documento, a Matemática – nesta etapa de escolaridade – coloca-se como ciência, indo além de seu caráter instrumental, com características próprias de investigação e de linguagem e adquirindo uma importante função integradora junto às demais Ciências da Natureza[21].

A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, elencou três grandes competências como metas a serem alcançadas durante essa etapa da escolaridade:

> - **representação e comunicação**, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> - **investigação e compreensão**, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> - **contextualização** das ciências no âmbito **sócio-cultural**, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2002b, p. 113, grifo nosso).

Os PCN+ especificam dentro do âmbito da Matemática, o que se espera do aluno em cada uma das competências (representação e comunicação; investigação e compreensão; e, contextualização sócio-cultural).

Como nosso objetivo é evidenciar o quê os PCN+ sugerem no que tange ao trabalho com demonstrações, olharemos para as três competências dadas

---

[21] Ciências Naturais ou Ciências da Natureza é o bloco composto pelas disciplinas de Biologia, Química, Física e Matemática. Elas foram agrupadas na mesma área de conhecimento, pois são ciências que têm em comum "a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos." (BRASIL, 2002b, p. 23).

procurando elementos relacionados à prova, argumentação, justificativa e demonstração. Somente na competência “Representação e Comunicação” encontramos referência a algo que nos parece ter relação com demonstração. Segundo o documento, espera-se que o aluno desenvolva a habilidade de reconhecer e utilizar de modo coerente a linguagem matemática, bem como, redigir resumos e justificar raciocínios, e ainda, sistematizar ideias sobre dado tema matemático.

A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, logo o aluno precisa interagir com seus colegas e professor de tal modo a explicitar, para si e para os outros, o que pensa e as dificuldades que encontra. Além disso, “alunos que não falam sobre matemática e não têm a oportunidade de produzir seus próprios textos nessa linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nessa área.” (BRASIL, 2002b, p. 120).

Os conteúdos a serem trabalhados ao longo das séries do Ensino Médio estão alocados em três eixos ou *temas estruturadores* e estes, por sua vez, são divididos em unidades temáticas. Os temas são:

- Álgebra: Números e Funções;
- Geometria e Medidas;
- Análise de Dados.

As demonstrações aparecem apenas em “Geometria e Medidas”. Nele os PCN+ sugerem que para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de levar o aluno a conhecer um sistema dedutivo, “analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.” (p. 124).

O documento ressalta ainda que:

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é “verdade” em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente. (BRASIL, 2002b, p. 124).

Na unidade temática “Geometria Espacial” sugere-se que o aluno desenvolva as habilidades e competências para compreender o significado de postulados ou teoremas e axiomas, e reconhecer o valor de demonstrações percebendo a Matemática como “ciência com forma específica para validar resultados.” (BRASIL, 2002b, p. 125).

Em síntese, notou-se que o termo “demonstração”, propriamente dito, pouco apareceu nos PCNs e PCN+. Já as ações ligadas ao ato de demonstrar, tais como: intuição, dedução, formulação de hipóteses, argumentação, justificação de raciocínios e sistematização de ideias são algumas das sugestões dos documentos para o trabalho com demonstrações na Matemática Escolar. Sendo a Geometria o “campo fértil” para atividades investigativas que possam gerar demonstrações.

3.2.2 Diretrizes Curriculares Estaduais (DCEs)

Nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, a Educação Matemática é assumida como “campo de estudos que possibilita ao professor balizar sua ação docente, fundamentado numa ação crítica que conceba a Matemática como atividade humana em construção.” (PARANÁ, 2008, p. 48). Pela Educação Matemática “almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias.” (PARANÁ, 2008, p. 48).

Diferentemente dos PCNs que trata apenas do Ensino Fundamental, abordando o Ensino Médio em outro documento (PCN+), as DCEs estabelece orientações tanto para os anos finais do Ensino Fundamental, quanto para o Ensino Médio, no mesmo documento.

Os conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica da rede pública estadual, de maneira similar ao que é feito nos PCN+, são alocados em eixos. Aqui os denominados “conteúdos estruturantes”, são divididos em cinco grupos:

- Números e Álgebra;
- Grandezas e Medidas;
- Geometrias;
- Funções;
- Tratamento da Informação.

Somente no conteúdo estruturante “Geometrias” que as demonstrações aparecem. Segundo o documento, no Ensino Médio os conceitos de geometria plana e espacial devem ser aprofundados em um nível mais complexo de abstração.

Nesse nível de ensino, os alunos realizam análises dos elementos que estruturam a geometria euclidiana, através da representação algébrica, ou seja, a geometria analítica plana. Neste caso, é imprescindível o estudo das distâncias entre pontos, retas e circunferências; equações da reta, do plano e da circunferência; cálculos de área de figuras geométricas no plano e estudo de posições.

Assim, é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, além de conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos (PARANÁ, 2008, p. 56).

As abordagens das Geometrias: fractal, hiperbólica e elíptica; não se encerram, unicamente, nos conteúdos aqui elencados. Desde que explore conceitos básicos, o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens. Para as DCEs (PARANÁ, 2008), os conceitos destes conteúdos são fundamentais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico.

A valorização de definições, as abordagens de enunciados e as demonstrações de seus resultados são inerentes ao conhecimento geométrico. Tais práticas devem favorecer a compreensão do objeto e não reduzir-se apenas às demonstrações geométricas em seus aspectos formais. (PARANÁ, 2008, p. 57).

Nas DCEs do Estado do Paraná encontra-se referência às demonstrações na seção denominada “Encaminhamentos Metodológicos”. Segundo as diretrizes, os conteúdos propostos devem ser abordados por intermédio de tendências metodológicas da Educação Matemática, pois estas fundamentam a prática docente. Nas Diretrizes elencam-se e tecem-se breves considerações sobre as seguintes tendências:

- Resolução de Problemas;
- Modelagem Matemática;
- Mídias Tecnológicas;
- Etnomatemática;
- História da Matemática;
- Investigações Matemáticas.

As demonstrações ganham visibilidade na seção “Investigações Matemáticas”. De acordo com o documento, a prática pedagógica de investigações tem sido recomendada por diversos estudiosos, pois contribui para uma melhor compreensão da Matemática. Ressaltam ainda que “as investigações matemáticas (semelhantes às realizadas pelos matemáticos)” (PARANÁ, 2008, p. 67) podem ser motivadas através da resolução de simples exercícios.

Como em uma investigação matemática os problemas propostos são abertos, uma mesma situação pode ter distintos objetos de investigação por diferentes grupos de alunos. Neste ambiente investigativo a solução e as respostas dos alunos, sejam elas corretas ou incorretas, não são conhecidas e nem esperadas pelo professor. Na investigação matemática o aluno é convidado a “agir como um matemático, não apenas porque é solicitado a propor questões, mas, principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando” (PARANÁ, 2008, p. 67). Deste modo as investigações matemáticas, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira[22] (2006, p. 10 *apud* PARANÁ, 2008, p. 67) envolvem naturalmente: conceitos, procedimentos e representações matemáticas. No entanto, para eles, o que mais caracteriza as investigações matemáticas é este estilo conjectura-teste-demonstração.

Em síntese, notou-se que as diretrizes estaduais apontam para que o ensino de Matemática na escola possibilite aos alunos, análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias. Para alcançar este objetivo a investigação matemática seria uma tendência que proporciona estas ações. E o eixo de Geometrias, assim como nos PCN+, parece ser o que mais pode contribuir para as ações que conduzem às demonstrações.

---

[22] PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

4 METODOLOGIA E APRESENTAÇÃO DOS DADOS

O papel das demonstrações, na formação inicial de professores de Matemática; e, na sala de aula de Matemática da Educação Básica são os aspectos centrais desta investigação. Para tal busca-se evidenciar o olhar que Formadores e Professores possuem a respeito destas questões, constituindo dados a partir de entrevistas com Formadores e Professores.

Neste capítulo caracterizo os colaboradores desta pesquisa, bem como os procedimentos adotados para a produção e tratamento inicial dos dados. Além disso, apresento as entrevistas na íntegra, para que o leitor possa apreciar a fala dos entrevistados por completo.

Os dados serão tratados tendo como inspiração os procedimentos da Análise de Conteúdo. O *modus operandis* para este tratamento dos dados caberá ao capítulo de Análise dos Dados.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DOS COLABORADORES

Neste estudo entrevistei seis profissionais, sendo três Formadores de Professores e três Professores da Educação Básica. Nesta seção relato como elaboramos o perfil dos entrevistados, fazendo uma caracterização dos colaboradores[23] da pesquisa.

No início do estudo já sabia que desejava entrevistar professores e formadores. Mas quais critérios utilizar para escolhê-los? Em um primeiro momento, tomamos por referência a Universidade Federal do Paraná, por motivos de conveniência e conhecimento do funcionamento do curso de Matemática e da estrutura curricular. Optamos por entrevistar Professores e Formadores ligados à UFPR, ou seja, Professores que tivessem graduação nesta universidade e Formadores atuantes nela. Nosso campo foi reduzido, porém ainda era muito grande. Optamos então por delimitar um pouco mais: Professores formados há pelo menos cinco anos e Formadores que lecionassem na UFPR há pelo menos cinco anos.

[23] Em alguns momentos usarei a palavra “colaborador” no sentido de “contribuir”. Os colaboradores desta pesquisa, ao aceitarem participar, trouxeram suas contribuições para o estudo.

Isto ainda não reduzia suficientemente o campo de pesquisa. Pensamos então no perfil que poderia ser uma representação dos professores paranaenses, e chegamos ao seguinte: com pós-graduação e trabalhando em dois padrões[24]. Além disso, decidiu-se que selecionaríamos professores atuantes em escolas que tivessem tanto Ensino Fundamental quanto Médio, administrados pela Rede Estadual de Ensino Básico do Estado do Paraná. Portanto, os Professores entrevistados deveriam ter o seguinte "perfil": pós-graduados, licenciados em Matemática pela UFPR, há mais de cinco anos, com dois padrões de trabalho (40h semanais), lecionando em colégios estaduais.

Já os Formadores que seriam entrevistados deveriam, portanto, satisfazer o seguinte "perfil": lecionando para o curso de Licenciatura em Matemática da UFPR e atuando nesta instituição há pelo menos cinco anos. Tendo em vista a diversidade de formações desses profissionais, seria possível entrevistar um Matemático Puro, um Matemático Aplicado e um Educador Matemático.

Decidido os requisitos para nossos colaboradores, comecei a criar estratégias de busca para selecionar possíveis profissionais para nosso estudo.

Para encontrar os Formadores, primeiro fiz uma busca no *site* do Departamento de Matemática[25]. Em seguida escolhi três formadores que se enquadravam no perfil estabelecido, e entrei em contato com eles através do *email* fornecido na página do Departamento. O contato inicial, o convite e o agendamento da entrevista foram todos realizados por *email*.

Os formadores entrevistados, aqui denominados Formador α, Formador β e Formador γ, foram escolhidos por enquadrarem-se no perfil idealizado e por terem aceitado colaborar com a pesquisa. O Formador α é Matemático Puro, graduou-se na UFPR e leciona nesta instituição desde final de 1995. Já o Formador β é um Matemático Aplicado, graduou-se na Unicamp e leciona na Federal desde 2004. O Formador γ graduou-se em Matemática pela Universidad Nacional de Ingeniería (Lima-Peru, 1982) e tem por formação a área de Lógica, enquadrando-se mais na Matemática Pura, no entanto, como ele mesmo aponta durante a entrevista, aproximou-se muito da Educação Matemática, sendo este um dos motivos pelos quais optei por entrevistá-lo: ter a visão de um Educador Matemático. O Formador γ leciona na UFPR desde 1993.

---

[24] Um padrão de trabalho, nas escolas Estaduais, corresponde à 20h de trabalho que pode ser cumprida em um turno (manhã, tarde ou noite) ou ainda fracionada entre os turnos.

[25] Disponível em <www.mat.ufpr.br>. Acesso em: 08/09/2012.

Para encontrar os possíveis Professores para este estudo, precisava reduzir ainda mais o campo de pesquisa. Então, escolhi dois colégios estaduais que tivessem o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Na sequência, fiz uma busca no *site* Dia a Dia Educação[26] a fim de encontrar os nomes dos professores de Matemática que nelas atuam. Em seguida entrei em contato com os colégios escolhidos para solicitar autorização para conversar com os professores de Matemática e saber se algum deles atendia aos requisitos que faltavas (formados pela UFPR há mais de cinco anos).

Os professores entrevistados, aqui denominados Professor X, Professor Y e Professora Z, foram escolhidos por enquadrarem-se no perfil proposto e por aceitarem colaborar com a pesquisa. O Professor X e a Professora Z atuam na mesma instituição de ensino (colégio localizado na região do bairro Tarumã, em Curitiba), mas em turnos diferentes, enquanto que o Professor Y leciona em um colégio do município de Pinhais. O Professor X formou-se em 2000 e leciona desde o 2º ano da faculdade, o Professor Y formou-se em 1994 e leciona desde o 1º ano da faculdade e a Professora Z formou-se em 1975 e também atua em sala de aula desde o 1º ano da faculdade.

Após a caracterização dos colaboradores da pesquisa, relatarei como as entrevistas foram realizadas.

4.2 CONSTITUIÇÃO DOS DADOS

As seis entrevistas foram gravadas em áudio, mediante a autorização dos entrevistados, dada após a assinatura da carta de cessão (modelo disponível no Anexo 6). Todas realizadas em dias diferentes e em locais que fossem mais viáveis para os colaboradores: cada Formador foi entrevistado em seu próprio gabinete, situado no terceiro andar do Prédio de Administração do campus Centro Politécnico da UFPR; os Professores X e Z concederam as entrevistas no colégio em que trabalham; e, o Professor Y foi entrevistado em sua residência.

Iniciei a conversa relatando um pouco da minha formação inicial, seguida de breve relato sobre minha pesquisa, procurando não mencionar a palavra “demonstrações” para que suas respostas não fossem previamente pensadas.

---

[26] Disponível em <www.diaadiaeducacao.gov.br>. Acesso em 01/09/2012.

Depois solicitei que o entrevistado relatasse brevemente sua trajetória até a docência no Ensino Superior, no caso dos Formadores, ou até a sala de aula da Educação Básica, no caso dos Professores.

Elenquei algumas perguntas norteadoras para que não perdesse o foco da entrevista. Conforme os colaboradores desenvolviam sua fala, aproveitava para ir inserindo meus questionamentos relacionados ao tema desta pesquisa. O roteiro[27] de entrevista para os Formadores continha as seguintes questões:

1) Qual o papel das demonstrações para você? Essa importância/papel que você dá às demonstrações enquadra-se mais para o Matemático ou para o Professor de Matemática?
2) Você acredita que na Escola Básica é possível trabalhar com demonstração? É possível? É viável trabalhar com demonstrações nesta etapa de ensino?
3) Como o professor poderia trabalhar com demonstrações em sala de aula?
4) Você acredita que o modo como as demonstrações são abordadas no curso de formação de professores de Matemática motiva o futuro docente a trabalhar com demonstrações em sala de aula? O que você pensa sobre?

Para a entrevista com os Professores também foi elaborado um roteiro de entrevista. As questões elencadas foram as seguintes:

1) Qual o papel das demonstrações para a sua formação como Professor de Matemática? Você considera que elas foram importantes?
2) Você consegue fazer relações entre as demonstrações que viu durante a graduação e os conteúdos que tem que ensinar?
3) Você acha viável ou razoável trabalhar com demonstrações com seus alunos? Como você faz isso no seu dia-a-dia, na sua prática de sala de aula?

Após a realização das entrevistas os dados foram tratados. Este tratamento será explicado na próxima seção.

[27] O roteiro de entrevista foi elaborado após o levantamento dos dados teóricos (Olhar da Literatura e Documentos Oficiais) e conversas com o orientador deste estudo.

4.3 TRATAMENTO DOS DADOS

Findada as entrevistas, o passo seguinte é o que chamamos de degravação ou transcrição dos áudios, ou seja, passa-se para o papel a fala do depoente da maneira pela qual ela foi narrada. Nesta etapa os vícios de linguagem, marcas de oralidade, repetições e hesitações, próprias da fala, são mantidas na escrita.

A segunda etapa do tratamento inicial dos dados é a textualização. Em uma textualização as marcas e vícios de linguagem, bem como as hesitações e repetições, são retiradas do texto mantendo-se o “tom” do depoente, isto é, não se pode alterar o sentido do que foi dito, apenas reescrever o que foi falado tornando o texto mais “limpo” e de fácil entendimento. Na textualização das entrevistas dos Formadores e Professores optei por incorporar os questionamentos realizados, constituindo um texto mais homogêneo e de leitura fluente.

Estes dados serão novamente tratados, para que se possa realizar a análise deles. Os procedimentos do preparo para análise e suas consequências (dados tratados e discussão dos resultados) serão explicados no capítulo 5.

4.4 FORMADORES E PROFESSORES TÊM A PALAVRA

Nesta seção apresento, na íntegra, a textualização das seis entrevistas realizadas. Agora os Formadores e os Professores têm a palavra:

4.4.1 Formador α

É para começar do começo? Bem no começo? Eu nasci... [risos]. Quando decidi ser professor? Foi antes de entrar na graduação. Quando eu tinha uns 14 ou 15 anos, eu vou contar a história, será que vai dar tempo? Eu tinha uns 14 ou 15 anos e resolvi trabalhar, ate dá pra ignorar isso depois, fui trabalhar de *Office Boy.* Trabalhava muito e ganhava mal. Minha mãe é professora e minha irmã estava se formando professora. Daí minha mãe falou: “Olha, professor não ganha tão bem assim, mas ganha mais do que você está ganhando”. Bem mais! Na época o salário era muito melhor. Então foi por dinheiro. Não foi nenhum motivo nobre assim:

“Pensar na educação”, “Mudar o mundo!”, “Ideias inovadoras”, não foi nada disso. Eu queria ganhar mais!

Estava ganhando mal, trabalhando muito e ganhando mal, daí eu perguntei “Como que eu faço?”. Ela disse: “Bom você pode começar fazendo o Magistério”. Eu tinha 14 anos e fui fazer magistério. Fazer o magistério foi a coisa mais divertida que eu já fiz até hoje. Numa sala com “duzentas” meninas e eu de homem, eu não precisava fazer os trabalhos, as coisas todas. Foi um período maravilhoso [risos].

Nessa época trabalhei num programa do governo que tinha reforço escolar no contraturno. Acabei dando aula, substituindo uma professora por um ou dois meses, para a 3ª série primária. Foi legal, mas é muito trabalhoso. Nossa! Professor do Ensino Primário tinha que ganhar o dobro do que ganha ou mais! Trabalham muito, se dedicam muito mesmo! É incrível! Então foi indo, gostei disso, acabei fazendo magistério e quando eu estava terminando tinha que fazer o vestibular. No cursinho gostei de Matemática, de Geometria Analítica, e vim cair na Matemática.

Terminando o curso de Matemática tinha opções. Durante a graduação já comecei a dar aula num colégio particular que tinha no centro, o colégio acabou fechando.

Fui me interessando cada vez mais por Matemática – eu me dava bem nas disciplinas – e gostava de Análise, todo mundo reprovava e eu passei tranquilo. Então um professor me convidou pra fazer Iniciação Científica com ele, na época fazer Iniciação Científica e ganhar bolsa era uma coisa, né? Não era qualquer um que conseguia. Aí eu me achei “o máximo”, o “rei da cocada”. E ganhei essa bolsa, fazia Iniciação Científica, Curso de Verão... e descobri que tinha um tal de mestrado. Fui fazer. Estava no meio do mestrado quando abriu concurso aqui para a UFPR. Quando eu entrei aqui não tinha nem mestrado ainda. Fiz o concurso, entrei aqui, terminei o mestrado e fui para o doutorado. Fui seguindo. Caminho normal né?

Comecei a trabalhar aqui, pra você ter uma ideia eu fiz a graduação de 90 a 93. Quatro anos: 90, 91, 92 e 93 [marcando nos dedos]. Quatro anos normais. Não era nenhum aluno excepcional, assim, que vá muito bem. Reprovei em algumas matérias, fui bem em outras. Nas matérias de Matemática ia bem, nas outras passava, peguei final... Não era expoente da turma, nunca. Já em 95 comecei a dar aula aqui, final de 95 fui contratado: teve o concurso, dei sorte, fiz, passei. Foi indo e chegamos aos dias de hoje. Então os meus motivos para fazer o Mestrado era ser professor do Ensino Superior e ser melhor remunerado. Doutor ganha bem mais.

Vou fazer doutorado! Eu não tenho nenhum motivo nobre para dizer assim: “fui ser professor por tal motivo”. Era para ganhar mais. E se hoje me disserem que se eu fizer um curso, lá não sei aonde, para ganhar 20% a mais, eu vou fazer esse curso. Eu vou! Essa é a minha motivação. Tem que ter alguma né? Tem gente que tem motivação de saber mais Matemática, estudar, resolver grandes problemas, ter um teorema com o seu nome, mas eu tenho um pouco de vergonha de falar isso: Eu só quero ganhar mais dinheiro [risos]. Não conta isso pra ninguém, não vai por esse negócio no trabalho, vão pensar mal de mim.

Minha formação é mais para a Matemática Pura, me identifiquei bastante. Dei aula para os cursos de Engenharia em 96 e 97 e retornei em 2001 e 2002. Não gostei de dar aula para eles justamente por isso, porque eles querem saber pra quê vai servir aquilo, e quando você dá aula para os alunos da Matemática eles querem saber a Matemática porque eles têm que saber, acham interessante ou porque tem que passar naquilo, mas eles não querem saber para quê serve. A questão é a Matemática pela Matemática. É disso que eu gosto: a Matemática pela Matemática. Os problemas que eu estudo, que eu pesquiso, são totalmente teóricos de Equações Diferenciais. Se pensar um pouquinho quem sabe acha uma aplicação, um modelo em algum lugar, mas não me interessa nada saber o motivo. Eu gosto da Matemática Pura mesmo, da Matemática pela Matemática.

Para mim a demonstração tem duas coisas importantes: tem aquela história de que a Matemática tem os fundamentos, que tudo tem que estar demonstrado pra fazer sentido, mas as demonstrações são o que fazem você realmente entender o porquê daquelas coisas funcionarem. Então quando eu faço uma conjectura, penso num problema, por exemplo, começo a mexer com alguns números: “ah somando isso mais isso dá aquele outro”, “somando dois números desse tipo dá um de outro tipo”, “somando os n primeiros Números Naturais dá n(n+1) divido por...”, você fica tentando descobrir para quando que aquilo serve, se funciona ou não funciona. Tenta encontrar exemplo, contra exemplo e chega em um ponto que parece que está funcionando sempre, então tem que de alguma maneira generalizar. Garantir que isso vai funcionar sempre. Então o papel da demonstração, para mim, é garantir que aquele resultado funcione. Em que condições que aquele resultado funciona, se eu preciso acrescentar mais alguma hipótese, ou se eu posso retirar alguma coisa, ou se tem que enunciar de outra maneira, tentar generalizar. É eu querer entender quando aquilo funciona, por que funciona, quando falha... é isso.

As demonstrações com esse papel servem para qualquer pessoa. Porque você tem duas atitudes frente à Matemática: você pode simplesmente aceitar. Por exemplo, para resolver a equação do 2º grau você faz $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ou você acredita que aquela é a fórmula, ou tenta entender por que tem que ser aquela fórmula. Então é uma questão de atitude. Se você simplesmente aceita a Matemática do jeito que ela é, se te dizem assim: “Pra resolver esse problema tem essa receita de bolo. É assim que faz!” você não vai ver utilidade nenhuma na demonstração. Agora se você quer saber: “Bom, por que é essa a fórmula?”, “Por que é assim que faz?”. Só faz sentido se for através de uma demonstração. A demonstração cumpre o seu papel aí. E quando eu falo demonstração é no sentido mais genérico possível, assim, não é só a demonstração formal, rigorosa, limpa, bonitinha. É você fazer um caso, fazer outro, tentar generalizar, fazer. Não precisa resolver o problema necessariamente em todas as situações, mas uma situação em que você se convença de que aquilo funciona em alguns casos. É buscar argumentos para entender. Faz parte do processo de aprendizagem e compreensão do problema.

Quando se passa para a Educação Básica [pausa]. Eu acho que assim, Matemática é um bem Cultural da Humanidade. Vem sendo construída, já mostrou ser útil e está crescendo. Quanto mais cresce, mais se mostra útil, mais o pessoal consegue utilizar algum conhecimento. Então você não pode privar as pessoas de ter acesso a esse conhecimento. A escola não pode privar ninguém de ter né? As pessoas se interessam sei lá, por Física, para saber do Universo, o tamanho do Universo, o tamanho do átomo, o quântium, super colisor de átomos lá que tá rodando e vai causar um mini-buraco negro... e as pessoas falam disso e isso aí é um patrimônio da Física e foi sendo construído. Tem patrimônio da Matemática também, e se você não der ferramentas, pelo menos mostrar que existe um caminho, eu não sei como fazer isso.

Dei um pouquinho de aula lá para o Ensino Fundamental, para o Ensino Médio e para criancinha, mas eu não tinha a consciência que eu tenho hoje. Não sei se eu teria capacidade, mesmo com a consciência que eu tenho hoje, se eu teria a capacidade pra ensinar para eles, ou pior, conseguir motivar um grupo a se interessar por esse assunto. Mas acho que faz parte da escola dar esse acesso, pelo menos dar condições de que os alunos consigam, sei lá, vislumbrar algo disso né? Agora escolher, tem que escolher um assunto, e não é uma coisa que dê pra fazer em toda a parte. No ensino de Matemática, vou falar besteira – quando vou falar de ensino sempre falo besteira – o ensino de Matemática tem várias funções. A pessoa tem que aprender a Matemática, por exemplo, para usar no dia-a-dia, é uma função dela. Talvez seja a mais útil de todas para 90% da população, mas ela tem outras funções e, se você não contar um pouquinho daquilo, se a pessoa não tiver a chance de ver uma demonstração, ver que a Matemática é "você raciocinando em cima", é conseguir tirar conclusões, chegar a uma fórmula.

Já ouvi professores falando de experiências que fizeram tipo, aquela história, tinha um professor na época aqui, há alguns anos atrás, não sei se você já ouviu falar: Durval? Esse é um professor antigo, se aposentou em 94, 95, por aí. Já tinha nascido né? [risos] Tá, ok! Esse professor falou que fez uma experiência com uma turma, era um professor assim excepcional, que ele conseguiu motivar uma turma e começou com essa história de ensinar quadrados. Daí deixava o pessoal reduzir, completava quadrados. Não sei como ele fazia isso numa 7ª, 8ª série – era professor do Positivo e acho que atualmente é coordenador pedagógico de Matemática no Colégio Positivo – então, diz que ele motivou uma turma de 20 a 30 alunos. Uns quatro ou cinco conseguiram deduzir a Fórmula de Bháskara completando quadrado. São alunos que efetivamente entenderam, compreenderam e acabaram fazendo a demonstração de um fato. Eles chegaram numa fórmula. É lógico que isso é muito exclusivo, né? São poucos alunos que fazem isso. Se é viável? Eu acho que deve ser feito alguma coisa. Tem muita coisa que se faz na escola e não é totalmente viável para todo mundo. Não sei, não respondi tua pergunta. Fiquei assim divagando, divagando...

Então, falando desse jeito dá a impressão que vai chegar num momento que assim: "Ahh! Tem que fazer um negócio de demonstração, então eu vou fazer da equação do segundo grau e tá bom!" Não, eu acho que a demonstração num sentido mais amplo: de você entender os resultados. De fazer uma construção até chegar, que tenha justificativas. Pode ser aí, pode ser em Geometria. Têm vários momentos que você pode deduzir expressões, pode perguntar se isso vale ou não vale, por que essa fórmula vale quando $b^2 - 4ac$ é positivo, o que acontece? Obrigar o aluno a pensar um pouco. Obrigar parece forçado, não é uma boa palavra. Estimular, dar oportunidade, possibilitar. Se ele vai aproveitar? Isso é outra história. Mas eu acho que tem que ser dada a condição. Eu tentaria fazer, se eu fosse dar aula no Ensino Fundamental, eu tentaria. Provavelmente ficaria decepcionado né? Eu fico decepcionado aqui na graduação: os alunos gostam de Matemática, são caras que se propõem a estudar Matemática. Eu proponho um problema e na aula seguinte dos 40 que estão na sala dois ou três fizeram. A maioria nem pensou, “não teve tempo”. Tudo bem. Desculpa.

Em relação à como as demonstrações deveriam ser abordadas na formação dos professores para que se possibilitasse o trabalho com os alunos do Ensino Fundamental, ou ainda, se a forma como isto é trabalhado aqui na Federal motiva o docente, o futuro Professor de Matemática, a trabalhar com demonstração em sala de aula? Eu não tenho elementos suficientes pra responder essa pergunta que você fez. Acho que em relação às disciplinas que leciono, duas matérias que basicamente me especializei: “Fundamentos da Matemática” que ensina a fazer demonstração; e, da metade lá pro final do curso “Fundamentos de Análise na Reta” que é o fechamento, que é fazer e escrever, fazer demonstração mesmo. Eu acho que na formação dos professores... bom essa é uma opinião pessoal, minha, como que eles vão usar isso depois eu não sei. Eu não sei te dizer assim “como ensinar demonstração” ou “como é passar a demonstração pros alunos aqui da graduação, no curso de formação de professores de tal modo que eles possam fazer algo lá na frente”. Isso eu não sei responder. O que eu acredito é assim: a demonstração na graduação – antes eu respondi o que era para mim – além do que é a demonstração em si, em Matemática, que é aquela quantidade de argumentos lógicos, tal, que garante a validade de um resultado, um enunciado, eu acho que na formação dos alunos, não vou dizer de professores, na formação dos alunos que frequentam Licenciatura eu entendo que é importante.

A Matemática tem uma linguagem própria, tem uma maneira de apresentar os problemas, de enunciar os problemas, de demonstrar, e isso faz parte daquele tal do Patrimônio Cultural que a gente tem da Matemática. É uma maneira própria de escrever. E ela veio sendo construída assim, desde a época de Euclides, tem 3000 anos, e isso já se comprovou ser eficiente, então, é mandatório para os alunos saberem, entenderem esse código. O que eu espero de um aluno que termina o curso de Licenciatura em Matemática é que ele tenha condições de pegar um texto matemático e ler. Não que ele pegue um artigo científico, por que um artigo científico depende de muitos pré-requisitos, mas que ele tenha condições de ler um enunciado, com épsilons, com deltas, com sequências convergindo, Álgebra, qualquer outro assunto... ou artigo, mesmo na Revista do Professor de Matemática, que ele tenha condições de ler aquele artigo, entender as definições, saber o que é um lema, o que é um teorema, uma proposição. Por que aquilo é verdadeiro? Vamos ver a demonstração, o que aquilo garante? Fazer uns exemplos, ler um enunciado, penso em alguns exemplos, contra exemplos, pra ver quando que aquilo é verdadeiro ou falso, me convencer, leio, faço, redijo uma demonstração... é nesse sentido que eu entendo. Com a estrutura que existe no texto matemático, onde as demonstrações desempenham um papel fundamental de garantir que aqueles dados são verdadeiros, um Matemático tem que ter condições de pegar um texto do nível dele, se ele é Licenciado em Matemática pegar qualquer texto de nível de graduação, ou Ensino Médio, ou Fundamental, ler aquilo; e mesmo que seja um texto mais avançado – como são aqueles textos do PROFMAT[28]**,** que o pessoal se quebra e não consegue fazer os exercícios, têm uma dificuldade incrível, reprova um monte de gente nas provas – então tem que estar em condições de pelo menos ler estes textos e redigir uma demonstração.

Saber não só ler, mas também se precisar, redigir um texto. Se ele descobriu um resultado, pensou em alguma coisa, como que ele vai convencer um colega, ou trazer um resultado, ou tentar escrever um artigo? Tem que ter contato com o padrão formal da língua, ser alfabetizado dessa forma. Para mim é fundamental. Eu acho que esse papel a Federal cumpre. Pode dizer assim: “Ah a Federal” sei lá, “o curso de Licenciatura em Matemática da Federal é muito teórico” ou “dedica pouco tempo à formação do professor” em, por exemplo, Didática e Metodologia, mas é assim. Eu acho que essa parte da demonstração, com esse papel, não como o cara vai usar isso depois lá na sala de aula, mas com esse papel eu acho que forma. Eu acho que os alunos formados que saem daqui têm condições de ler algum texto e obter informações a partir dele. Não sei se produzir textos, mas eu espero que você como Matemática formada pegue lá um artigo de uma revista do Professor de Matemática e tenha condições de ler, se aquilo te interessou. Não que vá ser fácil, mas que você tenha trabalho, você tenha condições, saiba onde procurar. Viu algo parecido, “puxa essa definição eu não lembro”, vou pegar um livro de Álgebra, um livro de Aritmética onde que eu vi que tem uma definição, entendo lá, depois venho entender aqui.

Então quer dizer, se você tem esse interesse está aberta a porta. Estão abertas as portas pra você ir atrás daquilo. Quando, sei lá, você faz o Ensino Médio você estuda Matemática, Química, Física, História, Geografia... e você escolheu

---

[28] O PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) é um curso semipresencial, com oferta nacional, coordenado pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). Mais informações sobre o PROFMAT disponíveis em <http://www.profmat-sbm.org.br>.

Matemática. Não quer dizer que Geografia não seja importante para você, ou História, ou Literatura, por exemplo. Tudo é importante! E tudo isso faz quem você é hoje. Suas escolhas acontecem pelas oportunidades que você teve. Então se a pessoa escolheu fazer Matemática ela tem que ter essa oportunidade de ter esse contato. Eu fiz Licenciatura, eu gostei disso e fui atrás. Acabei fazendo umas disciplinas de Bacharelado, mas não fiz Bacharelado, mas eu me interessei por isso, eu tive essa oportunidade. Alguns colegas meus acharam a pior coisa do mundo, horrível aquilo, tal. Mas tenho certeza que mesmo para eles foi útil, justamente nesse sentido: é oportunidade.

Não posso dizer assim: “Um monte de porcaria e ‘coisarada’ de Geografia que eu estudei não me serve pra nada! Eu nunca vou pra África! Por que eu tenho que ficar sabendo do Deserto do Saara, Namíbia e não sei o que?”. Não tem como dizer isso, né? E agora, eu sendo Matemático não faz sentido dizer assim. Posso não gostar de alguma coisa – eu não gosto de Álgebra, não gosto de Teoria de Grupos – e é uma opção só minha, mas eu sei que aquilo é importante, têm pessoas que gostam desse trabalho, já precisei de resultados daquela área. Não respondi nada do que você perguntou, mas tem a ver? Então a moral da história: não sei como o pessoal vai usar isso em sala de aula, transportar isso daqui para a sala de aula. Talvez a forma de raciocinar. Talvez seja isso. Da forma de tentar conduzir, de tentar entender o raciocínio da criança, do menininho de 11,12,13,14 anos, que gosta de *video-game*... Que quer tudo pronto. Daí você fazer tentar raciocinar para descobrir algo novo, pra quê? Não sei. Se bem que não é tudo pronto assim, nos jogos têm que descobrir, têm desafios né? Dá a impressão que transformar a Matemática em um jogo seria uma coisa legal, só não sei quais deveriam ser as regras. Matemática é um jogo né? Você tem uma porção de regras para seguir para chegar aos resultados. O problema é que tem um “cara lá em cima”, o Professor, dizendo assim: “Você não chegou ao resultado certo: Reprova! Faz de novo!”

Não sei se ajudei muito.

4.4.2 Formador β

Minha formação em nível de graduação, mestrado e doutorado, é na Unicamp sendo a graduação Bacharelado em Matemática Aplicada Computacional;

e, mestrado e doutorado em Matemática Aplicada. No mestrado trabalhei com Equações Diferenciais Parciais, sob orientação do Prof. José Luiz Boldrini e no doutorado foi Biomatemática, com orientação dos professores Wilson Ferreira e Yuri Dimitrov Bozhkov. Trabalho com docência desde o ano 2000, quando peguei minha primeira turma em estágio docente. Trabalhei com duas turmas em estágio docente, e depois retornei a dar aula em 2003, no final do doutorado. Contando esse tempo contínuo tenho 11 anos de trabalho em sala de aula, só que contando mais esse ano de docência, docência para valer, eu tenho 12 anos de docência na Universidade.

Com Licenciatura em Matemática trabalho desde 2003. Na Universidade do Estado de Mato Grosso, somente com turmas de Licenciatura em Matemática, durante um ano. Eu acho que trabalhei lá com umas três ou quatro turmas diferentes de Licenciatura em Matemática, alunos de 3º e 4º ano. Na Universidade Estadual de Santa Cruz, na Bahia, trabalhei durante um semestre com uma turma de calouros do curso de Licenciatura, numa disciplina que é correspondente ao curso de Funções aqui na UFPR. Comecei a trabalhar com Licenciatura, aqui na UFPR, não estou lembrado exatamente, mas vou arriscar que foi em 2007, no curso de Funções mesmo. Então faz um pouco mais de oito anos que trabalho com licenciatura.

Atualmente o meu trabalho está muito associado mesmo ao ensino. Não estou fazendo pesquisa no momento. Eu percebo que os professores veem Matemática de uma forma, assim, muito simplista, né? Até mesmo certos alunos da própria universidade, coisa que me espanta um pouco, porque as pessoas buscam muito a Matemática de execução de tarefas. Você executa, calcula, faz a conta e ponto final, ao passo que, na minha visão de trabalho, eu vejo a demonstração como uma forma de você ter entendimento em nível um pouco mais elevado sobre o termo em si, porque a própria demonstração explica o porquê que determinadas coisas funcionam, porque determinado cálculo que, feito corretamente, conduz à resposta certa, por exemplo. Então, no meu trabalho, eu vejo a demonstração como uma forma de você entender a Matemática em outro nível de compreensão, além daquela parte de execução automática de tarefas, de cálculos... fica mais ou menos por aí.

Não vejo muita diferenciação no papel da demonstração para o Matemático e para o Professor de Matemática da Escola Básica, porque, repare, o licenciado tem atribuições de bacharel, pelo que me consta, então eu acho que o teor de conteúdo que Matemáticos devem ter, quando as matérias são exclusivamente de Matemática, devem ser os mesmos. Primeiro, pela atribuição que o diploma exerce:

o licenciado tem atribuições de bacharel. O Licenciado em Matemática vai fazer um mestrado, por exemplo. E segundo, eu não acho assim que deva haver uma diferenciação, levando-se em conta a atual situação da qualidade que os alunos estão chegando na universidade, em termos matemáticos. Não sei se você sabe que teve uma pesquisa aí de um instituto, que foi contratado pelo Inep [Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira], o Pisa[29], em que, entre 45 países que estão registrados lá, o Brasil obteve uma nota na 38ª posição. Então, nesse sentido, acho que a formação, a capacitação em Matemática, dos professores de Matemática, tem que ser a mais exigente e a mais abrangente possível. O nível de compreensão acima daquele que é visto em sala de aula, ou que pode ser visto em sala de aula, eu acho desejável, pois acredito piamente no seguinte fato: acredito que você tendo mais domínio no assunto, você explica ele de uma maneira mais completa e mais segura para as pessoas. Uma coisa que eu tenho experiência, por exemplo, porque trabalho muitos anos já no PROFMAT, que é o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, e depoimentos de alunos do curso dizem que a partir do momento em que eles entendem as demonstrações dos resultados entendem como eles podem ser aplicados de uma forma mais profunda, dão a eles mais segurança, e, portanto, aumenta a qualidade do ensino na sala de aula. Então, por isso, eu acho que a Matemática que um bacharel e um licenciado devem ter não devem ter muita diferença não. Ainda mais nas disciplinas comuns. Porque há disciplinas de Matemática que bachareis não veem, isso já é uma outra história, mas as disciplinas comuns, como Cálculo, por exemplo, tem que ser vistas no mesmo nível de dificuldade, no mesmo nível de exigência. Porque é uma exigência da sociedade que bate à porta, que, por exemplo, são disciplinas básicas, né, estão tendo problema de aprovação de alunos, candidatos a serem professores de Matemática. Essa é a minha opinião.

O papel das demonstrações em relação às séries fundamentais? Você está

[29] O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, pois esta é a faixa de idade correspondente ao término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O programa é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e no Brasil é coordenado pelo Inep. O Pisa tem por objetivo produzir indicadores educacionais que contribuam para a discussão da qualidade e melhoria do ensino básico nos países participantes. As avaliações ocorrem a cada três anos e envolvem três áreas do conhecimento: Leitura, Matemática e Ciências. Em 2009 o foco foi em Leitura, em 2012 foi Matemática e em 2015 será em Ciências. Informações em: <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>. Acesso em: 20/03/2014.

falando até o Ensino Médio? Olha, eu não posso te dar uma informação muito precisa porque eu nunca trabalhei, nem de perto, com o Ensino Básico. O que estou tendo agora de experiência com Ensino Básico é explicar dever de casa para minha filha de 5 anos de idade. E quanto a nível Médio eu tenho alguma experiência, porque naquela época lá, eu já ajudava as pessoas, então, já tive um contato assim, uma preocupação em ajudar as pessoas a entender Matemática, né? Aí, você pergunta, como é que demonstrações poderiam ser aplicadas ali, né? Uma boa pergunta! Isso é uma boa pergunta, porque aparecem muitas dificuldades, né? Vocês que trabalham com nível Médio e Fundamental têm muito mais dificuldade do que nós temos aqui no nível superior, porque já recebemos as pessoas que passaram por um processo de aprendizado de 12 anos [9 anos do Fundamental somados aos 3 do Ensino Médio]. Ao passo que lá, esse processo de aprendizado ainda está sendo feito, né? Então, olhe, eu não tenho informação a respeito. Não tenho como contribuir nesse aspecto, pela minha inexperiência no assunto. Nível Médio, demonstrações... não sei se é de uma forma muito diferente do que é visto aqui, com utilizações de exemplos, né? Exemplos básicos, particulares e, depois, apresentação da teoria, de uma forma mais abstrata, para que as pessoas entendam que, por exemplo, você faz uma demonstração na qual você está tratando de um determinado tema. Primeiro em casos específicos e depois mostra que essa situação pode ser utilizada em um caso mais geral. Mas, assim, formas metodológicas de aplicação de demonstração, isso eu deixo para os Educadores Matemáticos. Eu sou bacharel. Não tenho experiência nenhuma no assunto. Mas na minha visão leiga é o que eu costumo fazer com meus alunos, quando não estão acostumados com demonstração, que é primeiro ver casos particulares e isso motivá-los a ver que a demonstração é uma unificadora de raciocínios. Dados os casos particulares, uso o mesmo raciocínio de uma forma mais abstrata. Mas, eu não poderia ajudar muita coisa, além disso, por causa da minha inexperiência.

Olha Suellen, uma coisa que sempre faço que você deve ter verificado, é trabalhar com muita honestidade. Apresento a Matemática como ela é! E essa história de motivação é uma coisa muito complicada pelo seguinte, às vezes, por exemplo, no PSE[30], há muita desilusão com a Matemática, pois, até determinado ponto, as pessoas trabalham com Matemática de uma forma muito mecânica e às

[30] Processo Seletivo Estendido (PSE) é a terceira fase do vestibular da UFPR que ocorre somente para os cursos de Matemática, Matemática Industrial e Estatística. Para uma explicação de como este processo funciona, voltar ao primeiro capítulo desta pesquisa.

vezes ilógica, o que faz com que tenham além de despreparo, aversão, porque a Matemática não é transmitida com sentido. Então eu tento mostrar para meus alunos que a graça da Matemática, como ela é, é que ela dispõe de lógica, de sentido. Você tem início, meio e fim. E o meio é a demonstração. Tento preparar meus alunos para que façam com que Matemática tenha sentido e que seja útil para as pessoas. Uma coisa que tenha lógica, tenha sentido e que os cálculos que são treinados pelas pessoas lá, que realmente funcionem. E por que as coisas realmente funcionam? Para que ela [Matemática] se torne mais atraente, não no sentido que as pessoas gostem ou tenham paixão por ela, mas que tenham confiança para usá-la. Então, a minha visão de trabalho é essa, com honestidade, né? Mas a motivação para que as pessoas expliquem Matemática melhor, isso está muito associado se as pessoas realmente gostam de Matemática. E é uma coisa que eu posso te falar com uma experiência, pelo menos, na minha forma de trabalhar, é o seguinte: pelo fato de eu trabalhar de uma forma muito honesta, de duas, uma: ou as pessoas se desiludem e vão embora [risos], ou as pessoas se confirmam como: “É isso que eu quero!”. E eu costumo, com toda modéstia, ser referência para algumas pessoas que me consideram um bom professor: “Ah quero fazer desse jeito!”. Isso é o tipo de coisa que me deixa mais motivado para trabalhar. Só que trabalhar para a motivação crescer? Eu nunca tive esse tipo de preocupação! A minha preocupação é com a honestidade! Eu trabalho explicando a Matemática, do meu ponto de vista, ou como acho que ela é, como acho que ela tem que ser vista. Mas aí, se a pessoa se motiva ou não, isso é algo muito pessoal, né? Eu deixo para cada um decidir, não influencio. É uma influência mais indireta.

Eu vejo que as demonstrações são extremamente importantes para a formação, tanto do bacharel quanto do licenciado. Elas não diferem nas disciplinas comuns, não vejo diferença. Elas indicam, o que eu tinha dito, indicam o conhecimento de determinado assunto, em nível diferente. Porque, em média, abstração é uma coisa que é importante. É um treinamento mental importante, no sentido de que, quanto mais treinamento você tem, mais segurança você tem para trabalhar com o objeto. E para ensinar Matemática você tem que ter uma certa familiaridade com o assunto. Sabe, eu temo muito as políticas governamentais que tem sido feitas, no sentido de retirar conteúdos matemáticos da licenciatura, né? É que podem ser adaptados, né? Em disciplinas assim mais específicas e tal, só que retirar o conteúdo matemático e a sua profundidade, eu acho complicado. Por exemplo, em uma disciplina de Análise Combinatória, acho extremamente complicada trabalharem muito com a ideia, por exemplo, de fórmulas para combinações, permutações e arranjos como se fossem os raciocínios mais importantes que existem na análise combinatória, sendo que o básico em análise combinatória são os princípios aditivo e multiplicativo. Tanto é que as fórmulas de arranjos simples, permutações simples e combinações simples, são consequências de quê? Primeiro, da teoria correspondente: o que é uma combinação simples? O que é uma permutação simples? E a sua quantidade, num conjunto para definição, é uma consequência do princípio multiplicativo. Portanto, o que acontece, a partir do momento em que você tenha esse tipo de coisa fundamentada, você explica análise combinatória mais naturalmente. Eu não vejo assim! Eu vejo que, trabalhar Matemática, mesmo em disciplinas específicas, com um rigor, com conceitos bem definidos, ajuda que o profissional explique esses conceitos de uma maneira mais segura. Eu sou muito adepto do seguinte: quando você explica com segurança, você torna as pessoas também um pouco mais seguras e confiantes no que está sendo passado. Se você trabalha com insegurança, se você não entende direito do que está falando, você transmite desconfiança para as pessoas e o aprendizado fica comprometido. Isso aí eu tenho de experiência própria! Tive professores “picaretas”, em que eu não sentia confiança. Então ia estudar sozinho. Isso é uma coisa muito importante! Você não consegue enganar aluno! Não se consegue enganar aluno, assim, dizendo que você tem conhecimento do assunto que você não tem! Veja por exemplo, eu dou aula de Cálculo para Geólogos e em um capítulo de funções específicas que tem importância em geofísica eu até brinquei com eles: “Olha, gente, eu vou dar uma aula tendo por base o que está no livro e nos meus ‘grandes conhecimentos de geologia’ baseados no *Discovery Chanel* e no *History Chanel*” [risos]. O que eu acho também é o seguinte, que é aquela coisa que está associada a quê? Honestidade! Ou seja, eu sou um total leigo em geologia, mas estou com muita boa vontade para explicar Matemática. Acredito que honestidade e embasamento teórico bem fundamentado são determinantes. Tenho essa opinião a respeito. Não sei se eu respondi a sua pergunta... a gente começa a falar, né? Aí eu fico divagando. Pode cortar. Como já assinei o papel pode cortar à vontade, tá bom Emerson? Um abraço!

Não, tive experiência com Ensino Médio, de uma forma, assim, usual, que nem você teve, por exemplo. Mas, pensando na minha formação, como aluno de

Ensino Médio, e agora com a minha visão de professor universitário, como eu acho que se poderia trabalhar com demonstrações com os alunos do Ensino Médio? Como eu imagino que poderia ser? Bom, isso é uma coisa que é complicada para eu responder, porque eu não sei como as coisas andam atualmente. Na minha época, eu tenho uma lembrança boa de que, por exemplo, a fórmula do valor numérico do ângulo inscrito em uma circunferência era demonstrada em livros. Eu não sei como é atualmente. Você que tem mais contato com o Nível Médio. A fórmula do ângulo inscrito é demonstrada?

A teoria da demonstração, dependendo do contexto que você tenha, ela pode ser interessante, porque pode ser observada sob pontos de vista diferentes, em contextos diferentes, sabe? Acho interessante quando você estimula o sensorial e as conexões com outras áreas. Por exemplo, você estava falando de Teorema de Pitágoras. Existe uma demonstração básica do Teorema de Pitágoras que é baseada em semelhanças de triângulos: pega um triângulo retângulo, baixa uma altura e obtém três triângulos semelhantes ali. Por semelhança de triângulos você acaba obtendo o Teorema de Pitágoras. Só que, você já deve saber nesse nível, que o Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado de diversas maneiras, né? Não sei se você já viu aquela demonstração que tem um quadrado? Você tem um quadrado, e o que é que você faz? Quadrado de lado “a+b”. Aí você vai picotando ele: “a+b”, “a+b”, “a+b”, “a+b” e você consegue construir outro quadrado, dentro do primeiro, cujo lado dele é hipotenusa de quatro triângulos retângulos iguais. E aí você acaba utilizando a ideia de áreas de figuras, por exemplo, para deduzir o Teorema de Pitágoras, por exemplo. Acho que poderia ser uma alternativa, às vezes, né? Você apresentar a teoria sob ótica diferente. Por exemplo, a fórmula de Bháskara. A fórmula de Bháskara está baseada em quê? Primeiro aquela história de você utilizar produtos notáveis. Eu acho interessante, quando acontece no curso de Funções, é quando eu explico fórmula de Bháskara. Uma parcela significativa de alunos não gostam de usar a fórmula de Bháskara. As pessoas gostam de resolver equações de segundo grau daquele jeito que eu faço que é completar quadrados, né? Então, às vezes, é você utilizar a associação de ideias com outros conceitos que à primeira vista não tem nada a ver com o assunto, auxiliam na compreensão da teoria em outro nível, dão mais destreza para as pessoas, né? Não sei. Essa é uma experiência particular com pessoas que têm um interesse comum aqui, né? Que é aprender Matemática em um nível mais avançado. Eu não sei se isso aí serviria para alguém que está no 2º ano do Ensino Médio e quer fazer vestibular para Direito, entendeu? Não sei como seria com pessoas que têm interesses diferentes. Estou tendo uma experiência bem particular com alunos que não têm assim, muito interesse com Matemática. Os alunos de Geologia, né? E foi uma coisa que eu falei para eles “estou pisando em ovos”, pois é uma experiência diferente. Não tenho esse tipo de experiência. Só que esse é o tipo de estratégia que pode ser tentada né? Relacionar com outras áreas, fazer demonstrações alternativas, na qual você não tem muita técnica envolvida, mas que você trabalha com o intuitivo. A ideia de área é intuitiva. O produto notável é algo que à primeira vista para as pessoas, até mesmo pra mim, é uma coisa bacana de se fazer conta, mas só que é uma coisa que a princípio era inútil. Uma coisa que está associada a quê? Ensinar as pessoas a terem destreza com cálculos. Quer ver outro exemplo que eu acho interessante? Tive até uma discussão com um aluno meu de TCC [Trabalho de Conclusão de Curso], Binômio de Newton. Binômio de Newton você tem dois tipos de demonstração: a primeira, por Indução Finita. Lembra, de Fundamentos de Matemática? Você vai, né, para “n=1”... ótimo! Aí você supõe que é válido para “n”, e aí você faz o $(x+y)^{n+1}$ como sendo $(x+y)^n \cdot (x+y)$, substitui o $(x+y)^n$ pela fórmula, né? E distribui, usa a relaçãozinha de Stifel, para juntar os caras comuns ali e PUM! Forma uma “p(n+1)”. Isso aí é o tipo de coisa que é impraticável, porque envolve, o quê? Um conceito, que é o de princípio de Indução Finita. E o Princípio de Indução Finita, como sendo o terceiro axioma de Peano é uma coisa muito abstrata, porque envolve uma familiaridade com o conceito de infinito. Nas primeiras vezes que você explica o que é infinito isso deixa as pessoas muito confusas. Só que, por exemplo, se você pega a outra demonstração do Binômio de Newton, aquela que envolve análise combinatória... (x+y), (x+y), (x+y), (x+y), ..., (x+y). Daqueles “n” fatores, tá, escolha “i xisis” e “n – i ípsilons” de quantas maneiras você pode fazer isso? Aí, entra o quê? A conexão com outro conceito, que de repente, pode ser bem explorado, em um determinado momento, e que pode auxiliar na demonstração do Binômio de Newton, que é o quê? Combinação Simples. Por que você pode fazer o que ali? Uma Combinação Simples, para você escolher quantos “xisis” têm, né? Você tem “n” xisis, escolha “i”. Combinação de “n, i a i”... os outros “y” já estão escolhidos já porque você não escolheu os “xisis” lá, nas “n – i ípsilons” restantes, você tem que escolher y né? Então, você pode fundamentar conceitos para que fiquem claros outros. Só que o problema em Análise Combinatória, é você explicar a conceituação básica, né? Porque as pessoas não têm essa noção importante de que tem esses princípios básicos, que tem que ser explorados em determinado nível, para que outros fiquem seguramente explicados. Então, a bola de neve que vai ao contrário. A bola de neve do “anti-conhecimento”. Só que também é tão difícil você falar isso pra quem não sabe ler direito, né? Não é verdade? Formular um problema. É só formular um problema que as pessoas têm um nível de leitura, assim, baixo. Uma coisa que eu me lembro do Ensino Médio, tem níveis de leitura, né? Tem aquele nível de leitura lá que minha filha está fazendo. Que é juntar as letrinhas para compor as palavras; tem outro nível de leitura, que uma vez que você entende as palavras você entende um contexto; e tem, de repente, nível de leitura maior, na qual você tem uma coisa que está escrita ali, né? Você entende o que está escrito, só que de repente está associada a uma metáfora, ou duas, ou três... se você não tem esse tipo de coisa, um determinado nível, mesmo que seja aquele nível básico, que é do entendimento de palavras em uma frase, como que você vai explicar uma situação assim: “tenho 5 bolas azuis e 3 vermelhas. De quantas maneiras posso tirar 2?”. Então, voltando ao assunto, acho que a inserção de teorias de demonstração, de explicações sobre o que está acontecendo, pode ser explorada via utilização de conceitos que foram trabalhados anteriormente, né? Para que a Matemática se construa. O conhecimento construtivo. É o que faz a Matemática atraente para as pessoas que trabalham com ela, direta ou indiretamente, né? É algo útil que é resultado de consequências. Onde, a partir do momento em que você constroi o raciocínio, você constroi outro em cima e assim vai. O problema é o alicerce. Se o alicerce não é bom... tudo rui! Acho que é esse tipo de coisa que acontece atualmente, né? Trigésimo oitavo lugar, né? [fazendo menção ao resultado do PISA, citado anteriormente por ele].

Eu não sei se eu respondi, porque às vezes eu fico divagando, né? E desculpa por não te ajudar muito em termos de Nível Fundamental, cara! Porque, Nível Fundamental é coisa muito mais delicada. Acho o Nível Fundamental muito básico, muito importante. Eu sou, assim, adepto de uma resposta, por exemplo, eu não sei se você lembra daquele candidato do PRONA, o Enéas Carneiro, careca e barbudo? Era uma pessoa de extrema direita, né? Eu não gostava de muitas ideias que ele expunha, mas teve uma vez que ele foi responder perguntas em um noticiário e aí para descontrair – acho que estava em época de Copa América, ou de Copa do Mundo, ou de Campeonato Brasileiro – o apresentador fez uma pergunta para ele sobre futebol. Foi uma das poucas vezes que eu gostei daquilo que ele falou! Ele começou a rir, né, simpaticamente, e respondeu o seguinte: “Olha, eu tenho um bom hábito de não opinar sobre aquilo que não conheço!” Principalmente sobre Ensino Fundamental! Eu lembro até hoje das professoras de meu Ensino Fundamental, faz jus ao nome! Então, não vou me arriscar a dar opiniões sobre uma coisa que é muito importante. Não é desmerecimento, muito pelo contrário, é desmerecimento de minha parte! Porque a ideia do abstrato, ali, é muito difícil de trabalhar, né? Porque se trabalha muito com concreto, né? Repare, por exemplo, eu estava em um determinado dia com minha esposa, cortando um monte de letrinhas “A”, “B”, “C”, “D”... então, repare o seguinte, aquilo lá o que é? Você está muito no concreto. O abstrato não faz muita parte da vida da criança, assim, em termos de aprendizado. Então, Matemática, nesse nível, é muito construtivo, né? É muito associado a objeto: “1” [apontando para a mesa], “1” [apontando para a cadeira] ou “1” [apontando para a caneta] só que pra você sair do “1”, do “1” e do “1” [apontando novamente os objetos citados anteriormente] e ir para o “1” a ideia geral do “1”, sem estar associada ou presa a objeto, assim, é o tipo de coisa que aconteceu na minha vida de uma forma que eu não sei explicar direito, né? Aconteceu, e isso eu devo aos profissionais do assunto! Desculpa por eu não poder te ajudar, tá?

Sabe, estou falando demais aqui e de repente não falei nada! Mas, de repente, se tiver alguma coisinha ou outra que você quiser explorar em outro momento, quiser passar e-mail, alguma coisa, estou à disposição. Foi um prazer ajudar!

4.4.3 Formador γ

Já que o assunto principal é demonstração, acho que tenho alguma coisa a falar pela minha própria formação. Eu ingressei na graduação no curso de Matemática, tanto no Bacharelado quanto no Mestrado e Doutorado. Nos três cursos minha área foi Matemática. Agora vou explicar como cheguei à Educação Matemática e que isso tem a ver com demonstração. Na minha formação matemática, foi muito legal no meio do curso ter a oportunidade de fazer uma disciplina em lógica, que era optativa, não era frequente onde eu estudei. Alguns cursos têm como obrigatória; outros só têm como optativa. Aqui, por sinal, no nosso curso, quando eu ingressei na UFPR como professor em 1994, havia uma forte tendência do curso de lógica no currículo, mas era por uma iniciativa e preferência de alguns professores. Na época havia essa tendência, depois vou falar outra vez sobre isso. Mas eu tive a oportunidade de fazer uma disciplina em lógica. A partir daí, comecei a gostar da lógica, em relação à Matemática, não porque a lógica me ensinasse a demonstrar, mas a lógica, em conjugação com a Matemática, me reforçou uma forma de pensamento futuro. Podemos colocar a lógica como uma área dentro da Matemática e também é uma área dentro da Filosofia, mas por outros motivos. A lógica, como uma área Matemática, foi minha área de preferência, inclusive para estudos avançados. Meu Mestrado foi feito na Unicamp, Campinas, e meu Doutorado também foi feito lá e a área de pesquisa foi justamente "Lógica Matemática", assuntos ligados à lógica matemática. Então esse assunto foi forte desde a minha graduação. Por que isso tem a ver com demonstração? Porque o conceito de demonstração, à rigor, tem a ver com lógica, porque uma demonstração é uma sequência lógica de raciocínios, de argumentos, que conduzem a demonstrar justamente alguma proposição, alguma verdade, e desse ponto de vista, o conceito de demonstração deve ser entendido como um pouco restrito, ou seja, a demonstração é o procedimento lógico de chegar a uma verdade. A palavra "lógica" está aí muito forte! Mas, em Matemática, e na própria lógica, existem outras formas de argumentação que não são demonstrativas, e essas outras formas envolvem outros tipos de raciocínio, como um raciocínio indutivo, um raciocínio por analogias, um raciocínio de outros tipos, que não são exatamente lógicos, e esses outros tipos também são importantes na compreensão e para chegar à verdade matemática, só que não tem aquele rigor que a lógica exige.

A palavra "rigor", aliás, vem de "regra". Rigor é seguir regras, então a lógica, para fazer uma demonstração de algo matemático, tem que seguir certas regras. Não são regras do tipo "receitas". É um raciocínio que a gente já aprende a fazer sem ter que lembrar receita, mas que deve seguir certas regras, outras formas de raciocínio que não são lógicos não conduzem a uma demonstração lógica nesse sentido. Então, o conceito de demonstração, eu acho, que deveria ser entendido mesmo em um sentido razoavelmente restrito, ligado à lógica, mas quando se fala de demonstração, no geral, se envolvem muitos tipos de raciocínio que não são lógicos. Como eu já falei, são de tipos indutivos, de tipos analógicos, são raciocínios que não há regras implícitas a eles, como por exemplo, induzir uma afirmação em base a fatos anteriores, você induz, não deduz, você induz que algo deve ser verdadeiro, porque esse algo já aconteceu anteriormente, um certo número de vezes, então você tende a pensar que também acontecerá no futuro. Esse tipo de raciocínio não é dedutivo, é indutivo: você induz uma verdade. Então, esse tipo de raciocínio não tem regras lógicas, restritas, mas é um raciocínio válido e é uma forma de aprender matemática. Só que, para efeito do que o matemático chama de "deter o conhecimento matemático sistematizado, consolidado", aí a demonstração já é o papel final, digamos, de juiz. A demonstração lógica. Estou falando sobre o papel final de juiz. Isso é verdade porque a lógica já determinou que não pode ser de outra maneira.

Outros tipos de raciocínios que não são lógicos são às vezes questionáveis, às vezes refutáveis, aí entram uma série de ferramentas, digo, outros mecanismos de raciocínios, como fazer conjecturas, refutar uma hipótese, formular outra hipótese, substituir argumentações por outras mais plausíveis. Aí não entra a palavra "verdade", mas entra mais a palavra "plausividade". Algo é verdade, do ponto de vista lógico, mas algo é verossímil, por exemplo, do ponto de vista menos lógico. Então, não deixa de ser uma verdade, mas uma verdade que pode ser questionada, então esses tipos de raciocínio são válidos em Matemática. Só que o que se chama "demonstração" é aquele que está mais ligado à lógica. Por isso que é delicado pensar até onde a palavra "demonstração" deve ser objeto de pesquisa, e em que nível. De repente na escola a palavra "demonstração", tal como eu a entendo aqui, não seja o conveniente para essa pesquisa. De repente, se você quer levar o tipo de raciocínio que se faz na escola, para o aluno aprender matemática, ou para o professor ensinar a pensar sobre matemática ao aluno, de repente ao invés de usar a palavra "demonstração" pode usar "argumentações matemáticas". Não sei se é a mais idônea, mas é outra diferente, porque a demonstração, em minha opinião, não deve ser confundida com outros tipos de argumentações e isso não é tão amplo assim! É claro que a matemática, a rigor, se entende como aquela ciência por excelência demonstrativa, ou seja, qualquer coisa que seja aceita com legitimidade em matemática, só pode ser aceita depois de demonstração lógica. Mas, sem ter uma demonstração lógica pode-se fazer uma argumentação sobre matemática, discorrer sobre matemática, aprender sobre matemática e, inclusive, alimentar a intuição sobre a matemática. Outro fator que a matemática usa fortemente é a intuição.

A intuição matemática não é algo que nasce com a gente, é algo que se constroi com o tempo. Um fenômeno matemático, que antes não era familiar para nós, depois de certo estudo, vira uma coisa familiar. Então, isso é a intuição matemática que vai se construindo, se alimentando. E isso não é de caráter demonstrativo. Aprender coisas por intuição não é uma demonstração, é uma forma de chegar a um conceito matemático sem passar pelo crivo da demonstração. Agora, como eu digo, a demonstração é a última palavra, mas ao ponto de vista mais da própria ciência matemática. Para aceitar algo matematicamente tem que estar demonstrado. Esse é o sentido lógico!

Então, minha formação foi muito no sentido da lógica mesmo. Em certo sentido, justamente por aprender mais lógica dentro de minha área de matemática é que me permite ver melhor aquilo que não é lógico e que também é matemática. Então, a matemática não se reduz à lógica, não se reduz à demonstração. Então, minha formação me levou a isso! Eu tive a oportunidade de fazer uma pesquisa já no mestrado e no doutorado, em tema de matemática, mas usando fortemente ferramentas da lógica.

Sobre a importância das demonstrações? Certo. A demonstração é muito importante! Porque é a última palavra sobre uma ideia matemática, do ponto de vista do matemático, não do educador matemático. Ou seja, para ela ser aceita como matemática verdadeira tem que ser demonstrada. Ora, para efeito do ensino da matemática, a demonstração não deve ser a última palavra! A demonstração é um tipo de argumentação. Como já falei, há vários tipos de argumentação. Então, eu acho que os alunos devem aprender, e eu insisto muito nisso, a pensar matematicamente. E nesse aprender a pensar matematicamente, significa aprender a argumentar de diversas formas sobre a matemática, entre elas, a demonstração. Não unicamente a demonstração. E, talvez, para nível escolar, o mais importante seja primeiro aprender outros tipos de argumentações. Por isso eu acho que o regimento que está sendo colocado, à nível escolar, onde se pede aprender a conjecturar, aprender a argumentar, aprender a refutar, essas coisas, são completamente válidas. É talvez o processo mais natural de aprender a argumentar. E sabendo argumentar, no geral, em todas as suas faces, o pessoal aprenderá depois a demonstrar, porque a demonstração é um tipo de argumentação que exige certas regras. Mas é uma consequência, a nível escolar acho que não vai ser o mais importante.

As demonstrações na formação do Professor de Matemática? Eu acho que sim: ele deve saber! Sou da opinião que o Professor de Matemática tem que saber. Não com o rigor de um matemático profissional, que vai utilizar para aplicar a Matemática em outro contexto, em situações mais avançadas, não! Mas o professor deve saber, deve chegar a esse nível, porque a Matemática, como eu digo, e insisto nisso, a Matemática não é um conhecimento sistematizado, não deve ser considerada apenas como um conhecimento sistematizado, a Matemática deve ser considerada mais como uma forma de pensar. Pensamento matemático. E o pensamento matemático tem várias etapas! Talvez a última etapa de rigor no pensamento é a demonstração. O professor deve atingir esse nível de argumentação. Mas não com a finalidade, digamos, de saber mais de Matemática, mas de saber pensar melhor matematicamente sobre as coisas. Ter uma nova argumentação. O professor deve ser capaz disso, porque ele tem condições mentais de atingir esse nível. Agora, depende de como os Professores Formadores ensinam essas coisas, porque, muitas vezes, vão para o campo das pesquisas... Enfim, não abordam, não enfatizam esse aspecto do pensamento matemático. Inclusive, esse pensamento matemático de demonstração se pode fazer com conteúdos razoavelmente elementares. Não tem que atingir um conteúdo avançado em Matemática para aprender a pensar matematicamente. Então, eu acho que o professor deve aprender demonstração! Deve aprender a demonstrar em situações elementares de conteúdos. Aprender a demonstrar não significa saber muito de matemática e sim saber pensar matematicamente.

Esse pensar matematicamente tem muitas formas de pensamentos, de argumentações, de situações... e a demonstração é uma delas, e talvez a etapa final. Sou da opinião que ninguém vai aprender matemática aprendendo primeiro a demonstrar. Não se aprende matemática aprendendo a demonstrar, né? Tem que ir por etapas, e isso tem também a ver com a idade, obviamente! Uma criança pequena não tem a capacidade de fazer argumentações mais complexas do que aquelas primárias, de conjecturar... essas situações são etapas etárias. Também tem os níveis de abstração, tudo isso está envolvido.

Tenho bastante experiência em ensino de disciplinas para licenciatura em Matemática, porque minha formação é de Matemática! Então eu já trabalhei com a licenciatura em diversas oportunidades e diversas disciplinas. E sempre tento dar um enfoque que possa ser feito para ambas as situações, para bachareis e para licenciados, porque o bacharel também precisa aprender a argumentar em sua ciência. Ele vai, claro, aprender a argumentar com conteúdos avançados, mas o licenciado deve aprender a argumentar com conteúdos elementares. Então a questão é a diferença de conteúdo, talvez. De nível de conteúdo, mas enquanto forma e raciocínio, ambos precisam da mesma coisa. Então, em termo de demonstração, ainda insistimos com essa palavra, sem considerar, ou considerando todas as suas palavras conexas, ligadas à argumentação, ambos precisam do mesmo nível de tratamento. Repito, acho que o licenciado, de repente, deve fazer isso com conteúdos mais elementares, enquanto que o bacharel pode fazê-lo com conteúdos mais avançados, mas não há diferença no tipo de argumentação.

Deixa só eu complementar sobre a minha formação. Acho que minha passagem pela lógica me permitiu chegar à Educação Matemática pelo seguinte caminho: eu gostei muito de lógica na Matemática desde a graduação. Mas a lógica, como eu te falei, tem tanto a relação com a Matemática quanto relação com a filosofia, porque a lógica é, pensada em um termo muito simples, o estudo do raciocínio humano. Não é certamente isso, mas podemos entender primariamente assim. Então, desse ponto de vista, tem muita conexão com Filosofia, porque Filosofia é raciocínio, é reflexão... Os problemas filosóficos da lógica são muitos conexos com a própria lógica. Agora, uma vez que a lógica me conduziu à filosofia, principalmente à Filosofia da Matemática, isso me trouxe à Educação Matemática aqui na UFPR, por uma casualidade, porque meu ingresso na pós-graduação em Educação Matemática, já não como área, mas sim como instituição. Meu ingresso na pós-graduação em Educação Matemática, aqui na UFPR, foi justamente porque, em algum momento no ano de 1997, se não me engano, no Mestrado de Educação Matemática, precisava de um professor que desse uma disciplina de Filosofia da Matemática, para o pessoal do mestrado, e me convidaram para esse feito. E aí foi que fui me envolvendo com assunto de educação matemática, fui confeccionando já um projeto próprio, ligado à Educação Matemática, e aqui estou! Mas sempre com essa visão de manter um “pé” na matemática, ou seja, o educador matemático tem que pensar como um professor. Um educador matemático é um professor de matemática. Um professor de matemática tem que saber raciocinar matematicamente, tem que saber pensar matematicamente. Porque a Matemática é uma forma de pensamento, não é saber mais Matemática, não é saber mais algoritmos, mais fórmulas. Tem que saber pensar matematicamente e esse pensar matematicamente é uma gama de formas de argumentações diferentes que, entre elas, está a demonstração, que é a última etapa, já falamos, mas que para um matemático é a palavra final sobre o que é válido matematicamente. Mas para um estudante de matemática, que vai aplicar em outra situação, para um aluno pequeno... enfim, para outros casos, não se precisa desse nível de rigor para aceitar: um engenheiro, hoje, usa matemática. Ele não sabe demonstrar, nem precisa demonstrar, a menos que queira, digamos, confeccionar métodos novos dentro de sua engenharia, mas um engenheiro, que é usuário da matemática, não precisa saber demonstrar, mas precisa saber como os conceitos que ele está utilizando foram desenvolvidos, como se concatenaram, como se formaram. Isto está envolvido na forma de pensar matematicamente sobre o problema de engenharia. Então a forma de pensar, ou seja, eu incluiria a demonstração em um conceito mais amplo: a argumentação matemática.

De nada! Eu disse algumas coisas radicais, mas espero ter ajudado na reflexão.

4.4.4 Professor X

Ingressei na Universidade Federal do Paraná em 1996 e me formei em 2000. Comecei a lecionar a partir do segundo ano de faculdade. Ainda na graduação participei do PROLICEN[31] com a Professora Florinda Miyaoka e o Professor Carlos Henrique dos Santos. Foram dois anos bem proveitosos, nos quais aprendi muita coisa. Sempre tive a visão de que a Universidade Federal ainda precisa melhorar em alguns pontos com relação à docência: como você vai enfrentar o dia a dia da sala de aula. Fui muito bem preparado para ser bacharel, doutor, mestre... enfim, pesquisador.

Acredito que a universidade ainda peca pelo aspecto da docência. Infelizmente esse é o fato. E a realidade da escola é dura, principalmente a questão disciplinar. No dia da minha formatura, conversei com um dos professores e ele disse: “O que você achou da Universidade?”. Respondi: “Professor eu adorei, só existia o fato de nós não enfrentarmos a realidade da escola.” Quando terminei a

---

[31] Programa das Licenciaturas (PROLICEN) era um programa do MEC que foi substituído pelo atual LICENCIAR.

faculdade já dava aula há três anos e a partir disso eu realmente comecei a indagar alguns problemas que a universidade traz. Falta aí um pouquinho da realidade: mas eles criam realmente uma pessoa que trabalha muito com fatos, com a questão das demonstrações, dos assuntos matemáticos... mas, ainda pecou por um detalhe: você tem que passar o assunto para o aluno, no entanto tem que trazer a coisa de uma forma diferente. Nós somos muito cobrados dentro da escola para apresentar uma Matemática criativa, do dia-a-dia dos alunos, uma Matemática legal, instigadora e hoje infelizmente você ainda trabalha com esse conflito de situações.

Sobre as demonstrações, bom, quando fazia o curso universitário dizia: “Pra quê isso meu Deus!”. E hoje, como professor, mostrar o sentido daquela prática matemática no nosso dia-a-dia... claro, mostrar de alguma forma. Então você começa, por exemplo, demonstrando a distância entre dois pontos num plano cartesiano, mostrando no triângulo retângulo, no Teorema de Pitágoras, fazendo o posicionamento dos pontos nas coordenadas do ponto A e do ponto B e, a partir dali, os alunos começam a entender o porquê das fórmulas, o que seriam as propriedades que nós usamos, porque que as fórmulas existem em si. E alguns alunos ainda entram em conflito. Eu prefiro fazer o desenho e interpretá-lo, pois basta mostrar alguns exemplos e eles já conseguem perceber que aquela fórmula tinha uma certa importância, e essa fórmula saiu do Teorema de Pitágoras.

Então, essa relação, quando nós percebemos que o aluno chegou ao entendimento, é a parte mais importante. É aí que você vê que realmente as demonstrações que nós tivemos na universidade e muitos teoremas em que às vezes você pensava “Nossa isso não vai levar à absolutamente nada!” são importantes. E os alunos perguntam muito: “Professor, onde eu vou utilizar isso na minha vida?”.

Acho que deveríamos ter duas matérias na universidade: uma delas que tratasse da indisciplina na escola, que é uma questão pedagógica né; e a outra é em relação ao currículo escolar, os motivadores para você começar um assunto. Lembro-me que o Professor José Carlos Cifuentes Vásquez começava a aula com uma “motivação” e eu dizia assim “Motivação? Eu tô muito motivado né?” Mas era bem legal e eu sigo isso: qual é a motivação para a minha aula? Eu tiro isso pra todas as aulas. Claro que hoje nós estamos trabalhando com uma geração *videogame, internet,* celular... e é difícil encontrar alguma coisa que os motive. Ainda hoje eu ouvi uma entrevista de uma professora na TV e ela deixou bem claro que "a

Matemática é chata". Eu disse não, não é que a Matemática é chata, ela é incompreendida. Até meu Histórico Escolar diria que eu sou meio “herege da Matemática”, poderíamos usar assim, porque eu quanto aluno do Ensino Básico reprovei em Matemática. A partir do momento que eu tomei gosto pela coisa, foi. Tanto que eu encarei um curso de Matemática... que nós sabemos que o índice de desistência é tão grande, até para os novos princípios[32].

Considero que as demonstrações foram extremamente importantes para a minha formação. Consigo fazer relações entre as demonstrações que vi lá e as coisas que tenho que ensinar. Até as novas tecnologias né, quando eu falo, por exemplo, de distância entre pontos. Inicialmente a pergunta é onde se utilizam a distância entre pontos no nosso dia-a-dia? Na localização de pontos, por exemplo: o aparelhinho que nós temos dentro do carro chamado GPS, ele não surgiu por “Obra Divina”, houve uma pesquisa e essa pesquisa foi feita baseada em fatos e em cálculos matemáticos, e aí entrou a eletrônica.

Para utilizar as demonstrações em sala de aula eu parto primeiro da realidade do aluno. Tento buscar algum gancho na realidade de cada um. Voltando aquele fato ali do plano cartesiano, mostrar exatamente qual a importância de você pesquisar distância entre dois pontos dentro de um plano cartesiano. E depois de ter passado por esse e por aquele assunto, começar a explicar, a partir disso, como que é criada esta distância entre pontos matematicamente, né? Nas coordenadas cartesianas. E mostrar exatamente isso dentro do Teorema de Pitágoras. Daí você tem que retomar isso: aonde que se utiliza o Teorema de Pitágoras? Eu dou aula para alunos do 3º ano do Ensino Médio, se eu falo um pouco sobre o Teorema de Pitágoras eles vão dizer “Nossa eu já esqueci tudo isso!”. Daí você começa a falar um pouquinho sobre Álgebra... então, cada aula torna-se uma revisão gigantesca de Matemática. E ela tem realmente essa importância de mostrar, fazer com que o aluno perceba a importância daquela equação, por exemplo, que é uma das coisas mais importantes e que se inicia lá no 7º ano. Então no período que eles estão lá no 7º ano eles começam a perceber a importância da abstração. E iniciam a abstração lá no 5º ano e no 6º ano de uma maneira muito mais leve, mas no 7º ano a abstração já aparece de uma forma mais pesada.

[32] Aqui o Professor faz menção à nova forma de egresso ao curso de Matemática da UFPR. Como já relatado no primeiro capítulo deste estudo, o vestibular para Matemática, Matemática e Estatística conta com uma 3ª fase, visando justamente minimizar o número de evasão durante o decorrer da graduação.

Eu não chego a usar o termo “demonstração” para eles. Eu não coloco isso a partir de uma demonstração, de uma formalização. Não, eu não uso esse termo. Até porque não cobro demonstrações. Inclusive caiu lá no Provão[33], que existia, que existe ainda, né? Lembro-me bem que caiu a demonstração da Fórmula de Bháskara e eu disse “Jesus, eu não me lembro dessa demonstração e eu fiz tantas vezes”. E depois como professor a gente começa a fazer, a querer explicar para os alunos e eles: “Professor o que é isso?”. E eu digo: “Bom pessoal, eu só tô fazendo isso aqui pra chegar numa fórmula que possa nos auxiliar em resolver a Equação do 2º grau”. Alguns livros ainda utilizam isso, mas até o próprio material didático já meio que deixou de lado essa questão da demonstração. Aí a gente vê que existe uma parte dos matemáticos que ainda dão muito valor para esta questão, e existe uma grande parte que não dá valor. E até no meio de uma demonstração a gente começa a ver o leque de opções que uma pessoa começa a criar quando ela sabe demonstrar: ela consegue pensar a Matemática, desenvolver a Matemática de uma forma mais hábil. Com uma habilidade muito maior. Então, por exemplo, você vai mostrar lá que uma equação, uma raiz no primeiro membro e um valor, um número natural, no segundo membro: você pode elevar os dois membros ao quadrado. Este tipo de habilidade só as demonstrações nos ajudam a ter. A pessoa que não faz demonstração, só sabe fazer a aplicação, começa a ter um pouquinho mais de problema. Claro, isso a um nível, eu digo, a um nível de aluno né, pensando só como aluno, mas, como professor, eu acho que sem a demonstração ele vai ficar com falhas no embasamento teórico.

A forma como as demonstrações foram trabalhadas em minha formação inicial contribuíram, principalmente na Geometria. A média de idade dos meus alunos é de 11, 12 anos e eu tenho muitas demonstrações para explicar o motivo pelo qual aquela fórmula que nós temos, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um polígono né, você mostra essa soma dos ângulos internos, mas não é do nada, você não parte da fórmula, você parte da decomposição do polígono a partir de um vértice: traçando todas as diagonais você chega a uma conclusão. Então, é a partir disso que nós chegamos à fórmula. Então eu tento fazer com que o aluno chegue à fórmula, e não fornecer essa fórmula.

---

[33] De acordo com o portal do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), o Exame Nacional de Cursos (ENC-Provão) foi um exame aplicado aos formandos, no período de 1996 a 2003, com o objetivo de avaliar os cursos de graduação. Atualmente é chamado de Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade).

Não coloco de uma forma muito, assim, como é que eu posso dizer... Não utilizo aquela forma mais “burocrática” de colocar a demonstração, formalizada: “Vamos demonstrar que o triângulo tal é semelhante ao triângulo tal.” Utilizo de uma forma mais simples. Mostro uma argumentação pra eles. Mas é todo assunto, como eu disse, prefiro que eles cheguem à conclusão de, entende? E não passar a eles a informação. Fazer com que eles comecem a buscar. Porque na verdade só informar, informar, informar, fica muito fácil! E estamos numa geração que quer tudo pronto. É geração do *Google:* digita a palavra e aparece a resposta ou aparece tudo o que fala sobre aquela palavra, e na Matemática não é diferente, o que eles querem exatamente é fazer o exemplo. Eles querem que o exemplo que o professor passou, caia na prova. Exatamente aquele exemplo. Se o professor pedir a ideia é capaz de não saberem fazer. Entende? É como em um exercício de Análise Combinatória, você pode estar explicando, fazendo lá vários exercícios que envolvam a fórmula e tal... e chega lá, no momento da prova, você coloca uma situação-problema, e eles não têm esse olhar de como podemos interpretar isso nas combinações. Então, sempre fazer com que o aluno busque a ideia. Claro, a gente tem que auxiliar de alguma forma.

Lembro-me que em Geometria Analítica, a Professora Florinda Miyaoka fazia estas demonstrações e eu era muito atento a isso, mas realmente as demonstrações meio que se perdem no decorrer do tempo... Eu acabava focando mais nos exercícios do que propriamente nas demonstrações. Tanto que a matéria que eu mais tinha dúvida era a de Análise, inclusive o professor Ademir foi o meu professor de Análise, e eu sempre argumentava com ele. E eu dizia assim: “Professor eu quero saber como que eu vou fazer” e como eu já dava aula eu questionava como que de repente nós poderíamos mostrar isso dentro de algum contexto do nosso dia-a-dia. E nós sabíamos que a intenção do Professor Ademir com aquela matéria era a da pesquisa em si, o avançar, e não só ficar ali na parte da Licenciatura.

Aquela demonstração lá: inviável pra esse ambiente da sala de aula. Eu não conseguia observar isso. Tanto que alguns conteúdos de Matemática que existiam antigamente, por exemplo, nós falávamos de Integrais e Derivadas em nível Médio, hoje Integrais e Derivadas só são vistas lá no nível Universitário. Então veja como passou. Alguns conteúdos foram remanejados para o nível Universitário, para o nível específico, porque há muita argumentação. Eu acho que vai acontecer futuramente, não sei em quanto tempo, mas Números Complexos, por exemplo, vai ser algo que provavelmente será remanejado lá para o nível Universitário também. Não sei, posso estar errado, mas a tendência parece que é isso. Porque eles não conseguem observar uma aplicação básica sobre os Números Complexos. Eu, por exemplo, busco algumas informações, troco umas ideias com os professores de Física. Então eles mostram lá um sistema, né, com resistores e algumas situações assim. Mas nada que eu possa aplicar. Eu precisaria da ajuda de um engenheiro para mostrar o sistema para eles, aonde nós podemos mostrar essa questão da utilização dos Números Complexos. Mas claro falta material. Você pode buscar bastante informação, mas eu acho que a Matemática está mudando. Eu como aluno do Fundamental e Médio, percebi a Matemática muito fechada. Era sempre aquele tipo “Calcule” pronto e acabou. Hoje você tem que ter um motivo para aquele cálculo. Os professores passavam exatamente aquela situação, hoje eu tenho que mostrar pra quê, entende? Então a missão agora é de você mostrar pra quê serve cada conteúdo. Isso realmente é o grande desafio do professor de Matemática atual. O professor de Matemática atual tem que ter esse hábito de pesquisar de onde vem cada conteúdo. Eu acho que a universidade poderia ajudar nisso de alguma maneira, ainda na formação inicial.

Quando eu era aluno, não falo agora... como eu saí fazem “só” 13 anos da Universidade, muita coisa deve ter avançado, com certeza. Mas, eu acho que o nosso curso tinha o nome de Licenciatura só de fachada, né? Hoje o olhar é bem diferente. Então, nós somos cobrados na escola de uma forma muito firme: “Você tem que fazer algo instigante porque se não o seu aluno será um aluno desanimado, desmotivado com relação à Matemática”, “Por isso que ele não gosta de Matemática...”, “Por isso que o desempenho dele não é bom...”. A culpa é do professor que não sabe buscar o interesse do aluno para aquela disciplina. Então você tem que fazer um malabarismo: busca, traz informação, pesquisa, troca ideia, tenta de alguma forma. Não percebia essa vontade nos meus professores enquanto eu era aluno no Ensino Fundamental. Mas é como eu disse: a constante evolução da Matemática fez com que os professores se mexessem. Não ficassem só naquela zona de conforto. Então essa é uma das situações.

As demonstrações, nas minhas aulas, servem pra mostrar o “por que das coisas”, principalmente das fórmulas. Mostrar por que elas foram criadas. Então, voltando àquela fórmula da distância entre dois pontos. Ela é uma fórmula que teoricamente o aluno observa e já começa a se assustar. Eles olham: “Nossa que fórmula gigante! Pra quê uma coisa dessa?”. Principalmente quando você começa com um exemplo de distância entre dois pontos, e eu já fiz essa experiência utilizando um mapa. Peguei um mapa de Curitiba e olhei a escala. Fizemos ali um plano cartesiano: o eixo x das abscissas e o eixo y das ordenadas. Coloquei ali no meio e fiz, com elásticos, pra mostrar a distância entre esses dois pontos. E até colocamos isso no Excel com uma fórmula. E dava a distância, em linha reta, lógico, entre os dois pontos. Ali que eles começaram a verificar que aquela fórmula que tinha no Excel, que eles só jogavam as coordenadas de cada um dos pontos que eles escolhiam, mostrava a distância em linha reta. Então eles faziam muito assim: a distância da escola até a minha casa, a distância da minha casa até o trabalho... então eles começavam a perceber isso, e perceber que a distância real era outra. Mas, lógico daí vem a explicação: “Vejam não é um segmento... não é a distância entre dois pontos em um segmento de reta... existem curvas aí e aí nós temos que seguir isso, os caminhos das ruas.”

Agora, é importante a demonstração? Com certeza. Eu acho que é necessário, mas não pode se tornar essencial. Se você começar a trabalhar só a demonstração como algo que tem que ser cobrado e que “se não souber a demonstração você não vai saber”, você perderá alunos pelo desinteresse.

Eu acho que isso, o desinteresse, ele aumenta à medida que vai passando o nível, que o tempo vai passando para os alunos. Eles possuem um certo interesse por algumas demonstrações eu percebo isso. Então, no 6º ano, você fala sobre as Regras de Divisibilidade: “como que você sabe essas regras?” Então ali eles mostram interesse. Chega até o 8º, 9º ano você trabalha alguns conteúdos eles olham e “Tá, e daí?”. Você vai falar sobre Fórmula de Bháskara, se você não trouxer algo convincente pra eles, eles já vão desistir de cara. Eu percebo essa desistência, essa, de repente, falta de vontade de buscar a informação. Eles realmente não têm muita vontade de buscar a informação. Em um de 30 alunos, tem uns dois que buscam bastante. Nós tínhamos um aluno aqui, o ano passado, até encontrei ele agora pouco, foi aluno do 3º ano, mas ele era um menino quase autodidata. Então ele pesquisava os conteúdos de Matemática e de Física sozinho. Buscava por livros: “Óh professor estou estudando, além desse nosso conteúdo, estou estudando outro conteúdo”. Isso aí é uma raridade: encontrar um aluno com essa força de vontade é uma raridade, numa realidade de escola pública. E o resultado: ele passou em Engenharia Mecânica na UTFPR e está fazendo. Isso faz com que realmente olhemos a situação de uma forma mais esperançosa. Tem alguém ali, um ou outro, que você consegue atingir, que consegue ter essa visão de que o estudo vale a pena. Acho que o nosso trabalho está sendo de convencimento: nós não estamos só tentando explicar Matemática, tem que convencer por quê estudar Matemática. Essa é a parte mais complicada, ter que convencer: “Olha, é importante pra sua vida”. Quando você fala sobre operações de números inteiros e regras de sinais e “Olha pessoal depois de visto tudo isso, daria para criarmos uma regra que envolvesse números positivos e números negativos. Adição?” Daí eles mesmos buscam essas regras, conseguem criar essas regras. Isso é legal, sabe. Mas a partir do momento que você tem que convencer o cidadão de que é legal, “Vamos pensar?” e ele olha para a calculadora e “Professor, pra quê se nós temos calculadora?” E eu disse “Mas olha, calculadora não é o objeto que vai fazer com que você pense sobre essa situação. Ela vai te auxiliar em um cálculo mais difícil ou não, mas isso você poderia ter feito num papel, de uma maneira ou outra”. Acredito que tem muito a avançar, mas nós estamos no caminho certo. Está muito longe do que eu acho que nós poderíamos fazer, em relação a outros países do mundo.

Eu vejo que nós somos bem cobrados e cobrados. Mais até do que Português, pois de acordo com os últimos índices aí, a disciplina de Português tem atingido valores satisfatórios. Agora Matemática está muito além do que os outros países atingiram, por exemplo. Então quando temos um caso ou outro de um brasileiro que conseguiu nas Olimpíadas de Matemática, um destaque, são exceções. E nós temos institutos de Matemática... o IMPA [Instituto de Matemática Pura e Aplicada], se for pensar nas universidades Unicamp. Temos aí institutos que são muito bons, os melhores do mundo, mas agora, veja bem a situação... se nós continuarmos assim, o número de pesquisadores vai diminuir bastante. Como os professores sempre argumentam aqui “Nossa! Será que nós vamos ter teóricos?”, “Quantos teóricos vão sair das escolas?”. Se nós estamos na geração do consumismo, do imediatismo, da geração *funk...* eu respeito isso, acho que cada um tem a sua cultura, mas abdicar da cultura geral, do conhecimento humano, como alguns fazem... é o que realmente me deixa mais triste, mas, me dá força. Ao mesmo tempo em que me deixa triste me dá força para lutar por uma educação melhor. É esse o objetivo né?

Mas então é isso!

4.4.5 Professor Y

Então, a minha graduação é pela Federal e me formei em quatro anos. Fiz pós-graduação também na Federal e vários cursos de especialização que o Estado oferecia. Curso de extensão, eu tenho alguns também, feitos lá na Federal e também no Cefet[34]. Na minha formação, é isso! Eu me formei em 1994, se eu não me engano e sempre lecionei Matemática. Durante a graduação já estava em sala de aula, a partir do 2º ano, porque eu tinha Licenciatura Curta em Ciências, que eu fiz no interior do Paraná e quando eu mudei para cá resolvi fazer Matemática completa. Leciono há 25 anos.

Sobre o papel das demonstrações em minha formação? Assim, quando eu terminava de entender o processo inteiro – o começo do processo era uma tortura e o restante era sofri – mas quando entendia o processo no todo, realmente, dava uma firmeza, dava uma segurança no entendimento da matéria. Então, me passava segurança, depois que eu conhecia o processo inteiro, mas no começo, para iniciar, era bastante tenebroso. Acredito que a demonstração fortaleceu a minha base de conhecimento, fortaleceu sim. Por mais que seja tenebrosa, como eu disse, ou muito trabalhosa. Eu sofria muito porque nunca tinha feito um exercício de demonstração. Não conhecia nem acompanhando pelos livros. Então, para mim, foi um negócio muito diferente. Sofria bastante para fazer as demonstrações. Mas depois de ter feito um ciclo completo, eu senti que a base ficava fortalecida.

O papel da demonstração para o professor de matemática, que dá aula pro Ensino Básico é totalmente diferente do papel da demonstração para o Matemático, principalmente em relação à linguagem. A linguagem de um Matemático para a Matemática não tem muita coisa a ver com a de um Professor para um aluno. Se para um cara que resolveu estudar Matemática, para lecionar, já teve toda essa dificuldade que eu falei no início, né, imagina um aluno que ainda não tem nada definido, imagina ele novinho... Então, a demonstração feita por um Matemático e por um Professor de Matemática é diferente. Acho que um professor de Matemática usa mais comparações, então, a fala deve ter muita comparação para poder chegar na linguagem apropriada.

Trabalho bem pouco com demonstrações com meus alunos. Não por não

[34] Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), antigo Cefet (Centro Federal de Educação Tecnológica).

conhecer, é que às vezes diante de uma situação tão adversa, você vê que não convém usar como recurso metodológico uma demonstração nas turmas que temos hoje. Temos poucos alunos interessados e um ambiente que não vai propiciar um aluno a acompanhar a demonstração. Então, quando dá certo, é mais uma “mostração” do que uma demonstração.

Quando eu uso demonstração em sala de aula é para provar mesmo, porque em muitos casos não tem algo que dê um sentido prático para o aluno. Quando tem, ótimo! E quando você não consegue? As vezes aquilo que você está falando é utilizado em coisas que ele ainda não viu, daí ele não entende, né? Então, resta a linguagem matemática para provar que realmente aquilo que se fala é aquilo que se ouve, mas geralmente, assim, a resposta não é muito boa não! São poucos os alunos que conseguem enxergar, entender uma demonstração até o final.

Não acho que seja pouco viável trabalhar com demonstrações na Escola Básica. Você tem que sentir a turma e o momento, né? Compensa? Essa turma está em um nível que vai acompanhar uma demonstração? Então, aquelas muito simples, muito básicas, sim: tem que fazer! Agora aquelas um pouquinho mais trabalhosas, em muitas situações, não. Não vale a pena! E, em muitas situações, nem para dizer de onde veio a fórmula a gente não consegue. Já tentei, por experiência própria mesmo, mas você precisa de um aluno queira entender aquilo e de um grupo que colabore também. Então, se você tem dois alunos querendo saber de onde vem aquilo e outro grupo não colaborando, fica difícil. Nós não temos um ambiente propício para trabalhar com demonstrações. Com crianças até o 9º ano, até mesmo no segundo grau [Ensino Médio]: o segundo grau, que eles não acompanham, e até o 9º ano eles não colaboram mesmo.

A forma como as demonstrações foram abordadas em minha formação contribuíram mais para o meu conhecimento do que para a utilização em sala de aula. Eu acho assim, como é uma Licenciatura – eu não lembro de todo o currículo, porque faz tempo que eu me formei – mas acredito que tinha que, não exageradamente, mas tinha que levar em conta que precisa ser trabalhado como fazer isso lá com os alunos reais. Não ficar imaginando um aluno “irreal”, que não existe, uma turma “irreal”... uma turma “ideal”. Na minha época e ainda hoje – esses dias eu estava tentando entrar no mestrado – a fala, o discurso, é muito em cima de uma situação irreal, que não é aquilo que a gente vê. Inclusive eu vi colegas lá no mestrado, desistindo. Não encontraram o que procuravam. Então, eles falavam, assim, que era muito diferente a realidade que é desenvolvida, as ideias de uma faculdade com o que nós temos hoje. Então, teve esse problema sim.

Hoje, diante da realidade, funciona mais você tentar contextualizar o que você está falando do que demonstrar o que você está falando. Por exemplo, você vai falar de circunferência e centro. Esses dias eu usei um carro que estava com o som bem alto lá no portão do colégio. Eu usei uma motivação: o carro, o som muito alto em uma hora errada, é o centro de uma circunferência. Pra onde que eu vou andar que eu consigo ouvir aquele som? Eu posso andar para lá, para lá, em todos os lados, mas será que eu posso andar 50km e eu vou ouvir o som dali? Vai se misturar e não vai chegar no meu ouvido. Então tem um certo raio, que daí vai dar para ouvir o som de forma clara. Então, isso é uma circunferência. Eu não demonstrei raio e essas coisas assim. Daí, quem está ouvindo o som é o ponto que está no interior da circunferência. Quem não está ouvindo bem, está fora da circunferência, né? Se fosse possível uma linha limite, um círculo limite, onde aqui dá para ouvir, mas pra lá não, ele estaria na circunferência. Eu tento contextualizar. Eu não demonstro usando palavras, não dá certo. Eu contextualizo, eu tento justificar aquilo. É pegar algo lá fora e tentar ajustar a modelos matemáticos. Modelagem Matemática. A Modelagem Matemática, assim, falando em linguagem, funciona mais do que você demonstrar para o aluno. Agora, eu, enquanto professor, demonstrar me ensinou bastante, apesar de ai meu Deus! Não lembro mais nada! Você sabia que eu fui tentar Mestrado em Matemática lá naquele PROFMAT**,** não deu mais pra mim? É o que eu falo: “Gente, começou a estudar, não para! Senão você vai esquecer tudo!”. Porque você vai ter que voltar a estudar tudo aquilo. A gente esquece! Você olha, assim, é familiar “nossa, eu estudei isso!”, “Olha, eu lembro que eu fazia exercício disso!”, mas e como fazer? Você tem que fazer um nivelamento bem forte.

De nada, disponha! Bom trabalho para você!

4.4.6 Professora Z

Posso começar? Bom, acho que eu entrei em 70, 71 e me formei em 75. Isso, eu entrei antes da Reforma 5.692[35]. E daí no primeiro ano eu repeti em

---

[35] A Lei nº 5.692,11 de agosto de 1971, trata das diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus.

algumas matérias e daí eu fui fazer depois junto com a reforma.

Então houve uma mudança muito grande na Universidade. Mas, a teoria, os professores eram os mesmos. Tive muita dificuldade, pois fiz magistério. E na época, quando eu fiz magistério – no Instituto de Educação Professor Erasmo Pilotto – a formação que eu tenho como professora foi a que tive no Instituto. E daí quando eu resolvi fazer Matemática, nunca na vida, durante a parte do magistério, tive Matemática. Nada! Nem a Matemática de 1ª a 4ª série [hoje 1º ao 5º ano]. Não tinha. A gente tinha algumas aulas práticas e provavelmente algumas aulas de 1ª a 4ª, mas não me lembro disso. Só que eu sempre tive professores excelentes em Matemática, alguns eram até meus ídolos. A minha base em Matemática foi muito boa. Lembro que quando eu decidi fazer Matemática tive que estudar muito. Fiz seis meses de cursinho e a minha mãe me falou: “Olha se você entrar na Federal você faz faculdade, se não você vai ter que trabalhar para pagar teu estudo.” Daí estudava feito louca! Foram seis meses assim. Então quando eu comecei a fazer Matemática, as minhas dificuldades para demonstrar todas aquelas fórmulas... o estudo que tinha, para mim era um inferno! Era muito mais difícil.

Tive a ajuda de grandes professores/colegas que hoje são Doutores, Pós-Doutores em Matemática. A Celia Finck e a Tânia Bassoi elas são Doutoras em Educação Matemática. A gente estudava muito em grupo e isso me ajudou muito. Mas as minhas dificuldades durante o curso foram medonhas. Eu já trabalhava, por que minha família não tinha condições e eu tinha que trabalhar e estudar: muito, muito, muito. Mesmo assim eu amei! Eu acho que a formação que eu tive na Federal foi excelente. Tive professores – agora eu vou falar o que eu não devo – tive professores excelentes, ele nem está mais lá, mas era uma assumidade, mas a gente não entendia nada do que ele dizia, pois ficava virado para o quadro. Não se entendia o que ele falava, mas era uma assumidade.

Quando me formei, eu já trabalhava, estava atuando inclusive no Instituto de Educação, fui convidada para substituir uma professora que havia me dado aula. Trabalhei lá acho que uns oito anos. Minha primeira aula foi de Estatística para o magistério. Tinha 18 anos, mais ou menos, e alunos bem mais velhos do que eu e os funcionários do Instituto me mandavam pra dentro da sala, porque eu com esse meu tamanho, achavam que era aluna.

Dei um pouco de aula de Estatística e depois aula de Física, que eu não tinha noção do que era: estudava dia e noite para poder dar aula. Então esses cinco primeiros anos de magistério foram uma luta grande na parte profissional, até porque nessa época eu já era casada, tinha filhos. E pó conta de algumas dificuldades da vida demorei para fazer uma pós-graduação. A Celia e a Tânia me chamaram várias vezes: “Vamos estudar juntas?”, “Vamos fazer um trabalho junto e tal”. Uma das minhas filhas nasceu com um problema nos órgãos e eu tive que dar prioridade. Em 1990 fui fazer uma especialização na Tuiuti: Especialização em Educação Infantil. Não cheguei a terminar. Foi uma coisa bem chata, desagradável. A professora que me orientando não aceitava certas coisas da Matemática, ela queria que fosse feito do jeito dela e eu não concordava, então não concluí a especialização. Depois disso fiquei um período sem estudar, só fazia esses cursos do Estado. Daí lá por 96/97 fui morar em Londrina. Fiz uma especialização na UEL [Universidade Estadual de Londrina] com a Regina Buriasco, Regina Pavanello, Magna Pires... e todo um pessoal “estrela” mesmo, de primeira linha! Eu acho até que na Federal nunca me atraiu conviver com eles [pesquisadores/professores]. Lá em Londrina não. Quando eu cheguei a acolhida era outra... muito, muito diferente.

Nos 10 anos que morei em Londrina eu sempre estava dentro da UEL fazendo alguma coisa: fiz o curso de especialização primeiro, depois fiz duas disciplinas do mestrado deles, uma delas com a Buriasco e outra com o Álvaro – não lembro o sobrenome dele – na parte de Ciências... excelente, excelente! Um cara muito bom! Voltei para Curitiba e na UFPR cursei duas disciplinas também do mestrado: uma com a Ana Liblik e a outra com a Adriana Luz. A Adriana foi minha orientadora no PDE[36].

Fiz o PDE quando voltei de Londrina. Participei em 2007 da primeira turma que teve. Foi uma experiência muito agradável. Já estava me preparando para aposentar e tinha que ficar mais dois anos, aí fui fazer a prova: “se eu passar eu faço!”. Passei. Foi uma prova muito inteligente com 30 questões. Havia 160 vagas em Matemática e não foram preenchidas. Uma pessoa acertou 25 questões e a maioria acertou 19, 18 que era o mínimo. Mas a prova era muito inteligente, bem

[36] O Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), segundo o *site* Dia a Dia Educação, é uma política pública de Estado regulamentado pela Lei Complementar nº 130 de 14 de julho de 2010. Tem por objetivo proporcionar aos professores da rede pública estadual subsídios teórico-metodológicos para o desenvolvimento de ações educacionais sistematizadas, e que resultem em redimensionamento de sua prática. Podem participar do PDE professores do Quadro Próprio do Magistério (QPM) que se encontram no nível II, classe 8 a 11, da tabela de vencimentos do plano de carreira. Ao professor ingressante no PDE é garantido o direito, no primeiro ano, a afastamento remunerado de 100% de sua carga horária efetiva e de 25% no segundo ano do programa. Informações disponíveis em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20>. Acesso em: 28/04/2014.

elaborada. Quando comecei nos dispensaram um ano para estudo. Foi uma surpresa bem agradável! O grupo de Matemática aqui em Curitiba, sete ou oito professores, estudava junto. De uma a três vezes por semana tínhamos um grupo de discussão e estávamos sempre dentro da Universidade. O Emerson Rolkouski era um dos orientadores e, inclusive, fiz uma disciplina com ele. De Geometria... Geometria no Ensino? Lembro que ele ensinou a gente a usar o Geogebra... "Geometria Dinâmica", isso! Muito 10! Muito bom! Fiz uma disciplina com a Adriana, que era a minha orientadora, e uma com a Ana Maria Liblik. Daí que eu me encantei, a Ana é muito boa também! Acho que o PDE foi uma experiência única na minha vida. Bom, eu tinha mais dois anos de trabalho para cumprir por conta do PDE. Quando eu entrei no PDE já tinha 28 anos de carreira no Estado, só não me aposentei porque lá atrás quando eu assumi o padrão – chamavam de concurso, mas não era concurso, eu me inscrevi só – era do regime RDT, um Regime Diferenciado de Trabalho, acho que hoje em dia nem existe mais professor com isso, atuando. E o que era esse RDT? Nós trabalhávamos já com oito horas de Hora Atividade[37]. Durante a minha vida eu trabalhei esta quantidade de Hora Atividade. Isso foi uma conquista minha lá atrás que a classe só conseguiu agora, quando eu estava me aposentando que ela foi incluída. Daí eu não me aposentei antes porque eu teria que ser assim: 50% era integral e 50% era parcial, aí eu resolvi ficar e já que eu estava no PDE, fui ficando. Com isso, houve um acréscimo significativo da 1ª para a 4ª classe[38] que a gente sobe. Eu tinha 25% de quinquênios, cada ano que eu fiquei eu ganhei mais 5% e quando eu completei os 30 anos eu estava terminando o PDE. Tinha três licenças vencidas, aí em cada ano eu tirei uma... então eu usufruí da minha vida profissional nesse fim. E hoje eu acho que o meu salário é um dos únicos assim no Estado. E daí por conta disso, por conta dessas licenças, eu fiquei mais dois anos e fui para a 7ª classe e daí eu acabei ficando mais dois anos porque eu iria, eu vou esse ano, para a 10ª classe, para daí me aposentar com um "salarião". Eu até posso te dizer, mas não aqui [risos].

Uma coisa assim, que eu acho: hoje a minha aula é excelente – metida assim [risos] – mas eu acho excelente. Hoje eu vejo o ensino de outra maneira, de

---

[37] A Hora Atividade é um tempo reservado ao Professor, em exercício de docência, para estudos, avaliação e planejamento, realizado preferencialmente de forma coletiva.

[38] As "classes" e "níveis" que a Professora Z se refere fazem parte do Plano de Carreira dos Professores conforme a Lei Complementar 103/2004 publicada em 15/03/2004. Para mais informações: <http://www.appsindicato.org.br/Include/Paginas/plano-carreira.aspx> e <http://www.portaldoservidor.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=642>. Ambos acessados em 28/04/2014.

outra forma. Tem algumas turmas que eu não consigo aquilo que eu quero, é meio difícil, tem algumas turmas mais difíceis assim: é, o aluno que chega aqui e acha que não tem a necessidade de estudar. Ele não consegue ver que ele é o que mais precisa estudar. Eu tive isso de casa, da minha mãe, não muito do meu pai. Meu pai tinha mais estudo que ela, ele estudou na “sem-vergonhice”, ela não, teve que parar por condições financeiras mesmo, então o estudo valia muito para ela. Então foi ela que mais me incentivou. Não sei se ela incentivava ou se ela exigia [risos], mas foi ela. Nunca disse: “Você vai!” Mas ela dizia: “Você deve ir. Por esse, por esse e por esse motivo.” Então acho que foi ela sim que me incentivou a estudar.

Quando comecei a lecionar Matemática eu achava que quem não soubesse Matemática não podia passar nunca! Deus o livre! Hoje eu não vejo mais assim. Me sinto com mais carinho, com mais paciência. Minha visão é outra. A parte humana existe. Antes eu era bem Matemática. Um parênteses: eu era bem “Universidade Federal do Paraná” [risos]. Eu consegui ver a “matemática humana”, esse lado mais humano da Matemática, lá em Londrina. Lendo muito Ubiratan Dambrósio que é a minha paixão de vida. Eu acho que estou chegando ao fim, com prazer! Não vejo assim como alguns colegas meus: “Ah eu não aguento mais!” Realmente tem dias que eu quero “enforcar” um. Ontem mesmo, como eu te falei, surtei naquele 2º ano do Ensino Médio. Nossa, surtei! Conscientemente. Porque você está explicando uma coisa seríssima, importante – eu estava dando aula de Trigonometria – eu havia dito para eles “Vou começar do básico! Tragam uma folha quadriculada.” Ninguém trouxe. “Pelo menos uns três ou quatro compassos.” Ninguém trouxe. E eu não achava os compassos daqui do Laboratório. E você veja, vou te mostrar daqui a pouco, que rico que esse Laboratório é, ele é maravilhoso mas não é usado! Maravilhoso! O material que a gente tem aqui, alguns professores amariam ter! Gostariam muito! Pena que está na mão errada... quer dizer, é verdade que é Física e Matemática juntos [o Laboratório é para as duas disciplinas citadas], e agora virou um pouco de depósito porque não é muito usado, eles acham que podem usar e vão guardando as coisas. Não é muito usado, mas é usado! Se têm professores que usam, tem que respeitar! Então, não significa que eu surtei assim “Ahhhh!” Fiquei irritada. Eu estava lá, primeiro uma aluna veio e me disse: “Professora eu vim do SESI e lá a professora dava tudo isso já numa folhinha prontinha”. Eu falei: “Olha você já me disse várias vezes isso, eu até concordo. Até acho que para alguns deveria dar a folhinha prontinha ‘mastigadinha’ só que aqui dentro da sala tem pelo menos uns 50% de vocês que não tem noção do que é circunferência, círculo, raio, ângulo... nada! Nunca tiveram na vida!" Então eu comecei do básico para mostrar o que é a circunferência, porque ela foi dividida em 360º, como é que se faz, como é que eles mediam a distância da Terra até o Sol, contei a história das pirâmides que o Tales mediu... e claro que para alguns fica chato, pois fica repetitivo, mas é necessário. Inclusive, acho que ali eu briguei antes, mas eu havia me planejado para pedir para eles olharem no celular qual é a medida do raio da Terra... sabe, assim, para que eles pesquisassem, já que estavam com a "coisa" na mão: usar ali. Sempre eu tenho uma coisa assim que aparece no meio para pedir para alguém pesquisar... E daí, primeiro que a menina me disse isso, eu parei, falei que ia fazer "assim, assim, assado", explicar o porquê eu iria fazer passo a passo e eu falei que gostaria que todo mundo colaborasse! "E quem está com vontade de conversar, porque já sabe mesmo ou porque não quer, acha chato, eu vou dar licença e nós vamos até ali na Orientadora para que realmente saia da sala se vão conversar... se não, aguarda um pouquinho e deixa todo mundo entender!" Eu comecei a explicar, duas meninas levantaram: uma para jogar o lixo e outra para buscar o material dela lá atrás... daí eu briguei muito. E talvez eu tenha brigado, porque um dia antes havíamos ido a uma palestra, não era palestra, era um depoimento, uma apresentação do Pibid[39] – eles têm estagiários do Pibid em Química – e daí os jovens estavam ali explicando o que é o Pibid, para quê ele serve, por quê eles estão aqui e tal. Tinha umas quatro turmas juntas e a que mais tumultuou foi essa. Já estava chateada com eles. A coisa vem vindo, vem se arrastando... Tem dois alunos que fazem tudo, conversam mais que o "homem da cobra", mas fazem tudo; tem três alunos que vieram do SESI que acham que sabem tudo; e tem uns quatro alunos que não tem noção de Matemática: eu pergunto "e esse 2^3 quanto que deu? Cadê o resultado disso?" E eles não sabem o que é! E daí claro, quando acontece uma coisa dessas, eu não gritei, não me alterei, mas eu fiquei muito brava. Eles viram que em um determinado momento eu estava perdendo a voz de tão brava... Porque eu acho assim, não quero que eles venham para cá mudos, Matemática tem a necessidade de fazer juntos, mas que participem, que conversem, que façam, conversem mais um pouquinho, perguntem, vá lá na frente e faz. Que façam! Que

[39] O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) tem por objetivo antecipar o vínculo entre os futuros docentes e as salas de aula da rede pública. O Pibid oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos presenciais que se dediquem ao estágio nas escolas públicas e que, quando graduados, se comprometam com em atuar na rede pública. Maiores informações em <http://portal.mec.gov.br/pibid>. Acesso em: 10/01/2016.

participem!

Sobre o papel das demonstrações em minha formação? Fui aluna da Florinda Miyaoka na época que ela estava começando. Então ela exigia da gente que as demonstrações tivessem o ponto e a vírgula do jeito que estava lá. Eu já te falei da minha dificuldade, então aquilo era terrível pra mim. Eu até demorei para terminar a faculdade. A disciplina em que eu reprovei, foi por isso, tinha que demonstrar ponto por ponto, vírgula por vírgula. Eu não sabia, era muito complexo para mim. Eu até entendia, porque a gente estudava junto, mas não consigo decorar as coisas. Eu fui pegando. Não tive capacidade para "decoreba", então aquilo era muito difícil, daí eu fiz três vezes Álgebra I com a Florinda, aí atrasei minha graduação. Eu me lembro [risos], que eu roguei uma praga nela: "Tomara que ela case e tenha uns 20 japonesinhos" [risos]. Depois de alguns anos, fizemos um jantar e ela estava junto. Até falei isso pra ela, e ela disse que praga nela não pega [risos]. Hoje eu tenho o maior respeito por ela. Só consegui terminar porque ela foi fazer doutorado em Brasília e entrou outro professor. Eu consegui terminar, mas foi difícil.

A gente tinha muita demonstração em Cálculo. Era com o Joseph. Acho que já deve ter morrido há muito tempo, ele era bem velhinho. Bem velhinho não, provavelmente ele tinha a idade que eu tenho hoje [risos], só que eu tinha 17 anos quando entrei na faculdade e achava ele bem velhinho [risos]. Mas assim, era uma pessoa maravilhosa. Era um alemão e tinha um sotaque... não preciso falar mais nada! Então, nesses aspectos a Celia – não só ela, eu cito a Celia e a Tânia porque hoje elas têm título – mas era um grupo grande e nós estudávamos juntos, um ajudava o outro. Eu só era ajudada, mas era sempre uma colaboração total. Era um grupo muito unido, tanto que a gente ficou anos e anos sempre se encontrando. Algumas sumiram, outras se encontram até hoje. Foi um período de muito estudo.

E as demonstrações, que eu lembro, eram estudadas em Álgebra – que eu tinha toda dificuldade do mundo – e em Cálculo, que era mais fácil. Não que era mais fácil, mas o Joseph compreendia se eu demonstrasse com alguma coisa faltando. Ele entendia, ele questionava: "O que você quis dizer com isso? O que era isso?". Então foi mais fácil. Agora se eu tive em Física? Ou em outras disciplinas? Acho que não eram nada assim de demonstração. As demonstrações que eu lembro, talvez por ter sido minha dificuldade, eram em Álgebra e em Cálculo.

Se eu acho que essas demonstrações que estudei durante minha formação foram importantes para minha atuação na escola? Eu acho que não. Até porque depois quando eu comecei a trabalhar eu tive que estudar muito, talvez até se eu tivesse compreensão das demonstrações, talvez até entendesse melhor. Por isso eu acho que hoje minha aula é diferente porque hoje, por exemplo, quando eu tenho que ensinar aquele “basiquinho” da Álgebra, digamos que lá para o 7º ano, eu começo pelo básico, do básico mesmo: usando balança; que não é “passar pra lá” se eu estou tirando daqui, eu tiro do outro lado também. O que eu faço no 1º membro, também tenho que fazer no 2º membro: acrescentando, dividindo... Tanto que no Ensino Médio, eu sempre faço a divisão dos dois lados. E a primeira coisa que eu faço em qualquer série que eu entro eu exijo, é fundamental, ninguém pode me perguntar se “menos com menos é mais”: não existe essa palavra “com” aí no meio. Eles são proibidos de falar “com”. E daí mostro para eles o porquê. Isso vem de uma demonstração, uma questão de lógica lá atrás... E a gente, como professor tem o hábito de passar pra eles “menos com menos é mais”. Então eu exijo que eles falem “menos vezes menos é mais”, “menos dividido por menos” e tudo mais. Porque eles sabem a regra e sabem que isso só serve para a multiplicação. E quando eles estão somando eu exijo que eles digam “se eu tenho se eu tenho”, “se eu gastei e se eu gastei”, “se eu perdi e se eu perdi”... que pensem assim. E nas aulas até é engraçado, se alguém pergunta “com” sempre tem um que pega e fala como que é. Então eu acho que por isso a minha aula hoje é melhor: porque eu tenho mais uma noção de demonstração. Mas não acho que ela foi importante na minha formação. Talvez se eu tivesse prestado mais atenção naquelas demonstrações [risos], porque eu fazia como aluna: pra passar.

Para o Matemático, eu acho que as demonstrações têm sim um papel fundamental. Até mesmo em alguns casos nossos aqui do ensino ela é fundamental: tem até algumas coisas que a gente faz meio que na prática. Quando você pede para um aluno pôr a fórmula geral lá: ele repete, repete, repete e chega a conclusão de que se aquele número for um número qualquer, é assim que ele resolve, pra demonstração. Então eu acho que nesse sentido é necessário que o professor tenha esse conhecimento para poder passar isso. Mas pelo menos que eu me lembre, lá no início da minha formação, eu tive muito pouco. Se tive muito, eu não prestei atenção, só prestei atenção nessas duas disciplinas que eram base, pesadas. E depois eu tinha aula, só de, não sei o que eles estudam hoje, mas eu tinha aula de Álgebra, Cálculo, Física, um pouco de Desenho, muito pouco, e tinha mais uma disciplina que eu não lembro qual que era... Análise depois do Cálculo, Cálculo e

Análise eram tudo com o Joseph. Nós tivemos os quatro anos com o Joseph. E as matérias de Educação eram no 2º ou 3º ano. Em Prática de Docência eu fui péssima, não vou nem citar.

Se é possível trabalhar com demonstração na educação básica? Eu acho que é difícil. Talvez até fique mais claro, mas eu acho que é difícil. Porque eu tenho, alguns alunos brilhantes, bons. Mas assim, de cada turma de trinta alunos, que é um pouco menos de trinta que a gente tem dentro de sala, mas digamos que de cada trinta alunos que a gente tem, aproximadamente cinco sabem o que estão fazendo, que você pode dar qualquer resolução de problema que eles fazem. Têm outros cinco que não tem noção, tenho 9°ano, tem cinco nessa turma que não têm noção do que é “dois mais dois”, que não sabem o que é “dois ao quadrado”, que não sabem nada! O resto da turma, menos ainda. Não sabem o que é uma soma, não sabem nada, nada! Subtração então, “Deus o livre!” Número decimal? Nem pensar! Fração? Nem pensar! Não existe mmc, sabe, mesmo que seja para colocar, sabe aqueles jogos que nós colocamos, que: “eles se encontram de tempos em tempos”, então, não sabem! E os outros vinte: você precisa ver lá da base para que eles possam entender alguma coisa. Então, demonstração, com eles, sem chance.

Por exemplo, conhecer a Geometria, é raríssimo que venham com noção de geometria, que consigam enxergar o que é um quadrado. Eu estava agora, aqui, em uma sala de 3° ano, eu peguei um material, eu vou te mostrar o material que eles estavam fazendo cálculos da Geometria Espacial [Professora Z levanta, abre um armário e começa a mostrar as caixas de materiais que a escola possui para o ensino de Matemática, tais como: sólidos geométricos, régua de frações, compassos e transferidores]. Qual é a escola que tem esse material? [mostrando os sólidos de Platão transparentes]. Então, eu queria a área da base e área total, dessa figura e dessa figura [mostrando os sólidos], mas eu trouxe pra poder riscar e mostrei que era esse o sólido que “a gente queria”. E coloquei os dois, para mostrar até a questão da altura [comparando as alturas dos sólidos]. É rico! Qual escola que tem isso?! E, tinha cinco mesas com alunos e só em uma que saiu! E isso porque nessa mesa tem duas meninas que vão fazer vestibular para engenharia. Eles são, esses alunos, uma turma excelente. São meus alunos pela quarta vez, eles foram meus alunos na 5ª série, 6ª série, 2º ano e agora estão no 3º ano comigo. E eu sei o que sabem e o que não sabem. Já tiveram Geometria, e cada vez que eu passo eles lembram. Eu saí meio triste porque demorou pra sair! Era pra fazer e me entregar e eles não conseguiram! Eu tive que explicar inteirinho o exercício no quadro, o passo a passo, o que eles tinham que fazer para me entregar. Eu acho isso muito difícil, sabe, porque você não tem continuidade, porque como é que você vai resgatar cinco alunos que não sabem nada e como é que você vai soltar atividade extra para cinco alunos que sabem muito? Complica! Um aluno, esses dias que me falou: “Professora deixa que a gente faça no quadro os exercícios, quem sabe a gente resolvendo ajuda, você enxerga os erros”. Não sei, vou tentar!

A demonstração no Ensino Básico eu não acho que seja “sem chance” de se trabalhar, mas acho que não é fundamental. No Ensino Básico não seria como a gente faz na faculdade. Eu acho que a demonstração é válida, como eu te falei, quando você faz, por exemplo: numa questão de potência você chegar à conclusão de porque aquela base se repete, mostrar porque que é tantas vezes; e depois em alguma questão lá que ele perceba e chegue a conclusão que essa é a fórmula; numa questão de progressões é fácil de entender. Pra explicar, justificar. É que ele chegue à conclusão de que realmente é aquilo. Como demonstração daí é válido, que o aluno vá fazendo e chegue a essa conclusão. Porque daí ele enxerga. Na hora que ele conclui ele entende, ele expõe. Aí cada um expõe de uma forma.

Acho que é válido, mas pra exigir só demonstração, acho que – pode ser que eu esteja enganada – mas acho mais difícil, o trabalho é mais difícil. Digamos assim que a gente pegasse uma turma de 1°ano como experimento. No 1º ano ele vai, desde o primeiro passo dele, ele vai fazer sempre demonstrações, demonstrações... Aí vai chegar um momento que ele faz sozinho, isso sem dúvida nenhuma. Agora tem um grupo muito grande de alunos que têm todas as dificuldades e que não vai conseguir chegar. Porque a grande dificuldade do professor é deixar uma turma mais ou menos nivelada, que todos entendam. O ideal é que todo mundo saia daquele conteúdo entendendo, pelo menos 50% daquilo. E eu acho que com a demonstração é muito difícil. Pode ser até que eu esteja enganada. Eu uso demonstração em alguns casos, mas não essa demonstração que agente faz: x, y, z e tal. Mas a demonstração pra chegar à conclusão daquilo. Como é que chega lá.

As demonstrações em minha formação não contribuíram para eu utilizar em sala. Eu acho que eu nem tive.

Como eu acho que deveria ser feito na graduação, na formação inicial, o que poderia ser feito no trabalho com demonstrações que motivasse o professor a usar isso em sala de aula? Como que de repente o professor do ensino superior poderia fazer pra trabalhar as demonstrações para o licenciando em matemática, não para o bacharel em matemática? Não tenho noção Suellen! De que forma né? Eu acho que a gente tem que sair da graduação sabendo o porque dessa demonstração, de onde que saiu, o que é, inclusive naquelas questões de lógica que eu só fiz lá em Londrina. Acho que eu tive também um pouco de lógica na graduação, mas eu não lembro. O que eu pude entender foi lá em Londrina. Até porque a Márcia, que deu aula pra gente foi, no mestrado, orientanda do Ubiratan. Nada mais, nada menos que o Ubiratan! Então eu acho assim, aquela questão do porque que "menos vezes menos fica positivo" essa justificativa, talvez se a gente fizesse a demonstração, talvez eles até entendessem isso. Mas, por exemplo, várias vezes eu tentei demonstrar a equação de Bháskara e a aula foi um fracasso! Era um caos, sabe? Porque eles não entendem: "Mas porque isso? O que é isso? O que significa? De onde que sai?". E eu já tentei antes, durante e depois da explicação, justificar porque aparece essa equação de Bháskara. Mas tenho certeza absoluta de que quem participou daquilo não sabe nada! [risos]. Ou eu que não soube passar, entendeu? Também tem esse aspecto. Então, não sei te dizer realmente, se seria diferente. Não tenho mais tempo para experimentar isso [risos].

Na formação do professor as demonstrações são importantes? Claro! Sem dúvida nenhuma! Precisa, porque tem professor que não tem noção do que está fazendo. Sabe fazer, mas não tem noção de onde que surgiu, por que surgiu... É muito interessante isso, uma coisa assim que houve lá em Londrina: tive uma aluna que participou das Olimpíadas de Matemática e um dos vereadores da região resolveu dar uma bolsa para todos aqueles que atingiram uma nota máxima lá, na 2ª fase, até não me lembro exatamente como que funcionou essa classificação, e essa menina ganhou uma dessas bolsas. Ela passou um ano fazendo pesquisa e estudo junto com a CNPq. Ela fez isso no 2º ano, a prova foi no 1º ano, daí ela participou da pesquisa no 2º ano e 3º ano. Ela que ajudava: ela que fazia, ela que explicava... E daí quando fez vestibular de Direito, ela fazia muita lógica, ela ficou, parece-me que em 7º lugar. E o vestibular na UEL é bem pesado, tanto Medicina quanto Direito. Essa menina terminou a faculdade e foi convidada a fazer um curso fora e ficou fora estudando, estudando até terminar... E graças a Matemática: essa questão de lógica, da pesquisa que ela participou. E ela sempre dizia "Nossa professora! Que coisa boa que a Matemática foi na minha vida!". Ela morava meio perto de onde a gente trabalhava e de vez em quando estava lá. Era uma menina brilhante! Ah... quando terminou a faculdade foi laureada, porque sempre foi a melhor aluna da sala. E ela sempre dizia que foi graças a Matemática. E daí lá, as pesquisas eram todas em demonstração. Então ela tinha conhecimento básico, ela tinha noção do que ela estava fazendo, ela sabia o que ela tinha que fazer. Ela mesma justificava que foi fundamental na vida dela. E ela seguiu outra área, completamente diferente, mas ela tinha a lógica! Ajudou muito na argumentação. Isso foi há uns 15 anos, mais ou menos. Já faz uns 7 anos que eu estou em Curitiba e nunca mais falei com ela, mas eu tenho certeza que até 7 anos atrás ela estava sempre bem.

Espero que eu tenha ajudado!

5 ANÁLISE DOS DADOS

> DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA – se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei. (BICUDO, 2002).

Um dos movimentos mais importantes do estudo, após as pesquisas bibliográficas e a realização das entrevistas, é a análise dos dados. Neste capítulo pretendo descrever o processo metodológico utilizado no preparo das entrevistas para a análise, apresentar os dados já tratados e em seguida discutir os resultados observados.

Primeiramente fiz a transcrição[40] das entrevistas, da maneira pela qual elas foram narradas, incluindo vícios de linguagens e momentos de formulação das frases – hesitações e recomeços – comuns à fala. Em seguida os depoimentos foram textualizados com o objetivo de apresentar as informações de maneira mais clara e compreensível. Para tanto foi necessário eliminar excessivas marcas de oralidade sem alterar a ideia de cada depoimento.

Após o preparo dos dados iniciei a pré-análise dos depoimentos, realizando leituras exaustivas a fim “mergulhar completamente” nas informações obtidas. Neste ponto pude notar que em todas as entrevistas além do tema “demonstrações” – objeto desta pesquisa – três grandes grupos interrelacionados se sobressaiam: as demonstrações para o Matemático, para o Professor de Matemática e na sala de aula da Educação Básica. Estes grupos apareceram nos depoimentos devido às perguntas norteadoras realizadas aos depoentes no momento da entrevista. Logo, era de se esperar que tais pontos ganhassem destaque, justamente por se tratarem dos objetivos do presente estudo. Assim, as falas dos entrevistados foram divididas em três relações de análise: (1) As demonstrações e o Matemático; (2) As demonstrações e o Professor de Matemática; e, (3) As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica.

Na primeira relação os depoimentos dos Formadores α, β, γ e dos Professores X, Y, Z referem-se ao papel das demonstrações para o Matemático. Na segunda relação as afirmações remetem ao papel das demonstrações para o Professor de Matemática que atua na Educação Básica e na última as falas tratam do papel das demonstrações na sala de aula da Educação Básica.

---

[40] No capítulo 4 explico o que entendo por transcrever e textualizar. E também apresento, na íntegra, a textualização de cada uma das entrevistas realizadas.

O passo seguinte foi realizar recortes nas falas dos depoentes separando-as de acordo com as relações estabelecidas. Procurei observar o que os dados produzidos tinham para me dizer, ou seja, busquei frases e palavras que se destacassem nos depoimentos dos Formadores e dos Professores. Neste processo optei por literalmente “recortar e colar” as falas agrupando-as em cada relação.

Em seguida iniciei a categorização. Segundo Bardin (2011, p. 146), categorizar é a ação de classificar, por diferenciação e reagrupamento, os elementos que constituem um conjunto. As categorias são classes que reúnem um grupo de elementos sob um título genérico. Esse agrupamento é feito considerando as características comuns dos elementos. Para fazer minha categorização utilizei lápis de cor para colorir as palavras/frases comuns, dentro de cada relação, com as mesmas cores. Tal procedimento foi um facilitador para elencar as categorias, pois elas emergiram dos depoimentos de forma muito natural. As cores foram responsáveis por isso: ajudaram a deixar mais visíveis as informações que se repetiam e a quantidade de vezes que apareciam, tanto considerando a relação como um todo ou apenas olhando para as falas de cada depoente, dentro da relação de análise.

Muitas categorias apareceram. Elenquei todas elas e organizei uma legenda para que entender do que cada cor se tratava. As fotos a seguir ilustram o trabalho que foi realizado:

FIGURA 1 – AS DEMONSTRAÇÕES E O MATEMÁTICO
FONTE: A autora (2016)

FIGURA 2 – AS DEMONSTRAÇÕES E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA
FONTE: A autora (2016)

FIGURA 3 – AS DEMONSTRAÇÕES E A SALA DE AULA DA EDUCAÇÃO BÁSICA
FONTE: A autora (2016)

As figuras 1, 2 e 3 apresentam como a categorização das entrevistas foi realizada, levando-se em conta as relações de análise estabelecidas.

Observando as figuras nota-se a quantidade de categorias que foram elencadas na primeira leitura das relações. O que se fez na sequência foi realizar a leitura de cada uma delas, a fim de reclassificá-las em novas categorias, ou seja, reduzir a quantidade de categorias fazendo a fusão das que continham temas relacionados e/ou que possuíam ligação umas com as outras.

As primeiras categorias da relação "As demonstrações e o Matemático" eram: (1) Aceitar uma verdade; (2) Convencer; (3) Explicar; (4) Compreender; (5) Argumentar; (6) Veracidade dos resultados; (7) Intuição; (8) Processos Lógicos; (9) Rigor/Seguir regras; (10) Linguagem; e, (11) Tipos de Raciocínio. Cada uma foi colorida com uma cor diferente. Assim, quando olhava para os depoimentos dos Formadores e dos Professores em relação ao papel das demonstrações para o Matemático podia enxergar todas as categorias citadas de forma rápida. Em uma segunda análise as categorias ficaram assim:

- Categoria 1: O papel das demonstrações para o Matemático;
- Categoria 2: Processos lógicos, rigor e linguagem; e,
- Categoria 3: Intuição e Tipos de Raciocínio.

Na categoria "O papel das demonstrações para o Matemático" estão as frases que relacionam a demonstração com "seus verbos", isto é, com as ações relacionadas ao ato de demonstrar: explicar, compreender, argumentar, aceitar, convencer e garantir a veracidade de resultados. Já na categoria "Processos lógicos, rigor e linguagem" as falas se referem aos processos envolvidos para o desenvolvimento de uma demonstração. E na categoria "Intuição e Tipos de Raciocínio" estão as falas referentes ao raciocínio que conduz à uma demonstração.

Em uma primeira análise a relação "As demonstrações e o Professor de Matemática" continha quinze categorias: (1) Licenciado = Bacharel; (2) Licenciado ≠ Bacharel; (3) Formação exigente e abrangente; (4) Aumentar a qualidade do ensino; (5) Garantir a veracidade de um resultado; (6) Pensar matematicamente; (7) Comparar; (8) Compreender; (9) Mostrar; (10) Argumentar; (11) Segurança; (12) Comunicação (leitura e escrita); (13) Rigor; (14) Domínio do conteúdo/assunto; e, (15) Linguagem. Análogo à relação anterior, colori cada uma das categorias com uma cor diferente a fim de visualizar mais facilmente as informações nos depoimentos. Após a reclassificação, as categorias ficaram assim:

- Categoria 1: O papel das demonstrações para o Professor;

- Categoria 2: Licenciado x Bacharel;
- Categoria 3: Formação abrangente e Qualidade do ensino;
- Categoria 4: Domínio do conteúdo e Segurança; e,
- Categoria 5: Rigor e Linguagem.

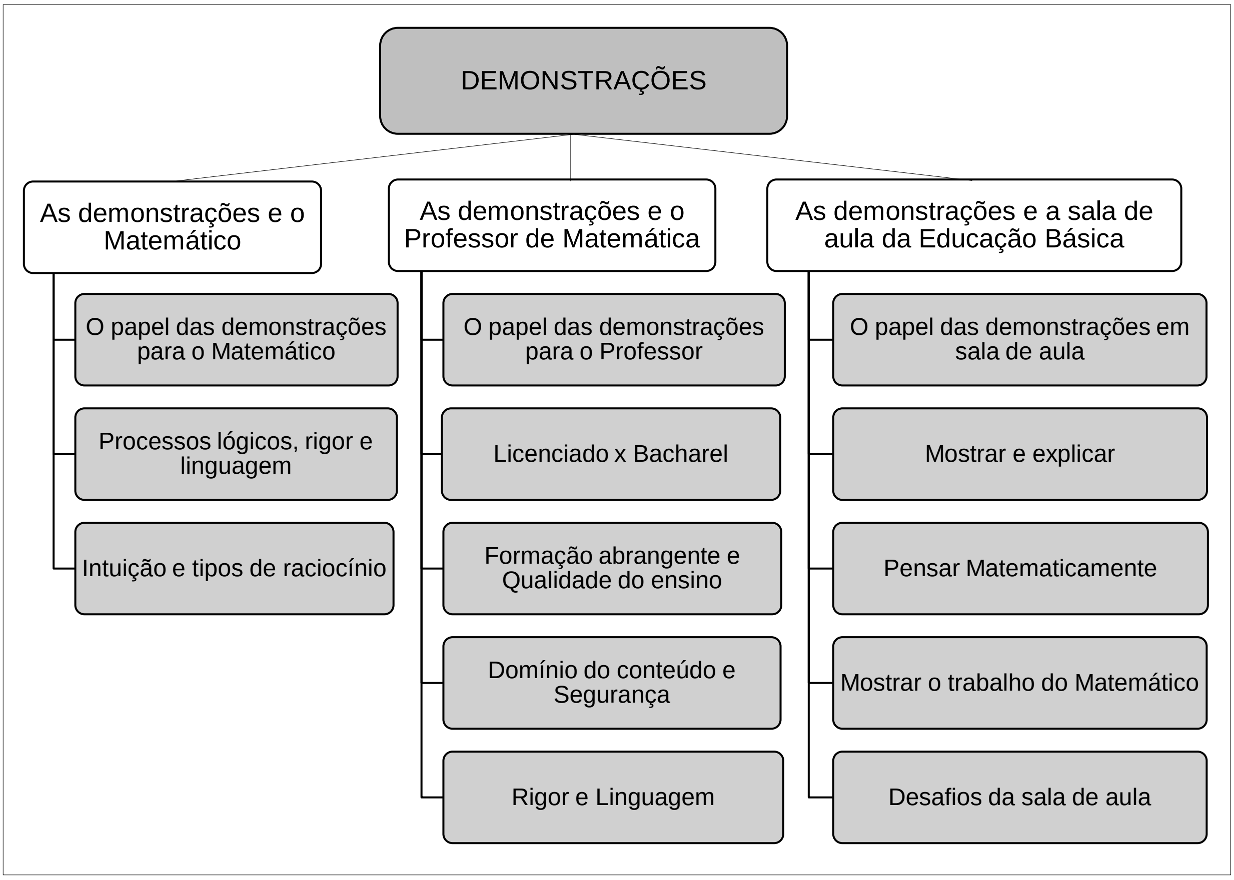
Em "O papel das demonstrações para o Professor" estão as frases referentes às ações relacionadas ao ato de demonstrar: pensar, argumentar, comparar, mostrar, compreender, garantir, comunicar. A categoria "Licenciado x Bacharel" aponta as considerações feitas pelos depoentes no que tange às diferenças e semelhanças nas duas modalidades do curso de Matemática. Em "Formação abrangente e Qualidade do ensino" estão as frases que relacionam o aumento da qualidade de ensino nas escolas com a formação abrangente e exigente do professor. A categoria "Domínio do conteúdo e Segurança" apresenta depoimentos relacionando a segurança que o professor sente quando domina o conteúdo que trabalha. A quinta categoria, "Rigor e Linguagem", trata das relações entre o rigor das demonstrações que se estuda na universidade e a linguagem utilizada na Matemática.

A última relação de análise, "As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica" considerou inicialmente dezoito categorias: (1) Relacionar com o cotidiano; (2) Forma de Raciocinar; (3) Construir Raciocínio; (4) Tipo de Raciocínio; (5) Pensar matematicamente; (6) Dar oportunidade para conhecer; (7) Argumentar; (8) Mostrar; (9) Compreender, entender; (10) Conjecturar; (11) Explicar; (12) Concluir/chegar em resultados e/ou fórmulas; (13) Unificadora de Raciocínios; (14) Linguagem matemática para provar; (15) Concreto x Abstrato; (16) Falta de comprometimento dos alunos; (17) Ambiente de aprendizagem; e, (18) Rendimento da turma. Similar ao que foi feito nas relações anteriores, usei cores diferentes para cada categoria, destacando as informações e deixando-as visíveis. Com a reclassificação o montante foi reduzido para cinco categorias:

- Categoria 1: O papel das demonstrações em sala de aula;
- Categoria 2: Mostrar e explicar;
- Categoria 3: Pensar Matematicamente;
- Categoria 4: Mostrar o trabalho do Matemático; e,
- Categoria 5: Desafios da sala de aula.

A categoria "O papel das demonstrações em sala de aula" contempla as frases que apontam para as ações do ato de demonstrar em sala de aula, ou seja, as demonstrações servem para: argumentar, conjecturar, compreender e concluir. Em “Mostrar e explicar” estão as falas relacionadas ao papel das demonstrações para a atividade do professor, isto é, qual a finalidade do professor utilizar as demonstrações em sala de aula: para mostrar e explicar resultados. Na categoria “Pensar Matematicamente” são exibidos os depoimentos que relacionam as demonstrações como uma forma de pensar matematicamente. Em “Mostrar o trabalho do Matemático” estão os depoimentos referentes às demonstrações como uma forma de fazer os alunos conhecerem um pouco do trabalho do Matemático. A última categoria “Desafios da sala de aula” trata das dificuldades e desafios enfrentados em sala de aula para que se possa, ou não, trabalhar com demonstrações.

O quadro abaixo apresenta uma síntese da divisão dos dados produzidos:



QUADRO 1 – SÍNTESE DAS RELAÇÕES DE ANÁLISE E SUAS CATEGORIAS
FONTE: A autora (2016)

Até o momento descrevi como os dados produzidos por meio das entrevistas com os Formadores e Professores foram preparados para a análise. Agora inicio a apresentação dos dados após o tratamento e, posteriormente, a discussão dos resultados encontrados. Para melhor compreensão e aprofundamento, optei por separar o estudo em dois grupos: “Formadores falam sobre as demonstrações” e “Professores falam sobre as demonstrações”.

5.1 PRODUZINDO DIÁLOGOS

Nesta seção apresento e analiso os dados produzidos pelos Formadores e Professores entrevistados. Os depoimentos foram tratados, conforme o descrito no quadro 1, e em seguida agrupados em tabelas. Em todas as tabelas adotei o seguinte formato: cada coluna é destinada às categorias, enquanto que as linhas são destinadas aos depoimentos dos colaboradores. Nos itens em que não há depoimentos coloquei uma marcação (**************) para não deixar espaços vazios.

Na subseção “Formadores falam sobre as demonstrações” abordarei as relações de análise sob a ótica dos Formadores entrevistados e em “Professores falam sobre as demonstrações” tratarei das relações sob a ótica dos Professores.

5.1.1 Formadores falam sobre as demonstrações

Três relações de análise foram estabelecidas: “As demonstrações e o Matemático”; “As demonstrações e o Professor de Matemática”; e, “As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica”.

Vamos considerar o(s) olhar(es) dos Formadores entrevistados: Formador α, Matemático Puro, Formador β, Matemático Aplicado e Formador γ, Educador Matemático. Eles lecionam há pelo menos cinco anos na Universidade Federal do Paraná e já trabalharam e/ou trabalham com o curso de Matemática tanto na modalidade licenciatura quanto bacharelado.

Na primeira relação de análise “As demonstrações e o Matemático”, os Formadores falam para os Matemáticos. A tabela a seguir trata desta relação de análise:

TABELA 1 – FORMADORES PARA MATEMÁTICOS: AS DEMONSTRAÇÕES E O MATEMÁTICO (RELAÇÃO 1)

	O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES PARA O MATEMÁTICO	PROCESSOS LÓGICOS, RIGOR E LINGUAGEM	INTUIÇÃO E TIPOS DE RACIOCÍNIO
FORMADOR α	**§8** “[...] mas as demonstrações são o que fazem você realmente entender o porquê daquelas coisas funcionarem.” “Então o papel da demonstração, para mim, é garantir que aquele resultado funcione.” “É eu querer entender quando aquilo funciona, por que funciona, quando falha... é isso.” **§9** “Ou você acredita que aquela é a fórmula, ou tenta entender por que tem que ser aquela fórmula.” “Agora se você quer saber: ‘Bom, por que é essa a fórmula?’, ‘Por que é assim que faz?’. Só faz sentido se for através de uma demonstração. A demonstração cumpre o seu papel aí.” “É você fazer um caso, fazer outro, tentar generalizar, fazer. Não precisa resolver o problema necessariamente em todas as situações, mas uma situação em que você se convença de que aquilo funciona em alguns casos. É buscar argumentos para entender. Faz parte do processo de aprendizagem e compreensão do problema.”	**§15** “A Matemática tem uma linguagem própria, tem uma maneira de apresentar os problemas, de enunciar os problemas, de demonstrar [...]. É uma maneira própria de escrever. [...] é mandatório para os alunos saberem, entenderem esse código.” **§18** “Matemática é um jogo né? Você tem uma porção de regras para seguir para chegar aos resultados.”	********************
FORMADOR β	**§3** “[...] eu vejo a demonstração como uma forma de você ter entendimento em nível um pouco mais elevado sobre o termo em si, porque a própria demonstração explica o porquê que determinadas coisas funcionam [...] eu vejo a demonstração como uma forma de você entender a Matemática em outro nível de compreensão, além daquela parte de execução automática de tarefas, de cálculos [...]”.	********************	********************
FORMADOR γ	**§1** “Só que, para efeito do que o matemático chama de “deter o conhecimento matemático sistematizado, consolidado”, aí a demonstração já é o papel final, digamos, de juiz. [...] **§6** “[...] é a última palavra sobre uma ideia matemática, do ponto de vista do matemático, não do educador matemático. Ou seja, para ela ser aceita como matemática verdadeira tem que ser demonstrada.” **§3** “Mas, sem ter uma demonstração lógica pode-se fazer uma argumentação sobre matemática, discorrer sobre matemática, aprender sobre matemática e, inclusive, alimentar a intuição sobre a matemática.” **§4** [...] como eu digo, a demonstração é a última palavra, mas ao ponto de vista mais da própria ciência matemática. Para aceitar algo matematicamente tem que estar demonstrado. Esse é o sentido lógico!”	**§1** “[...] o conceito de demonstração, à rigor, tem a ver com lógica, porque uma demonstração é uma sequência lógica de raciocínios, de argumentos, que conduzem a demonstrar justamente alguma proposição, alguma verdade, e desse ponto de vista, o conceito de demonstração deve ser entendido como um pouco restrito, ou seja, a demonstração é o procedimento lógico de chegar a uma verdade.” **§ 2** “A palavra “rigor”, aliás, vem de “regra”. Rigor é seguir regras, então a lógica, para fazer uma demonstração de algo matemático, tem que seguir certas regras. [...] o conceito de demonstração, eu acho, que deveria ser entendido mesmo em um sentido razoavelmente restrito, ligado à lógica.” **§3** “Só que o que se chama “demonstração” é aquele que está mais ligado à lógica.”	**§1** “[...] em Matemática, e na própria lógica, existem outras formas de argumentação que não são demonstrativas, e essas outras formas envolvem outros tipos de raciocínio, como um raciocínio indutivo, um raciocínio por analogias, um raciocínio de outros tipos, que não são exatamente lógicos, e esses outros tipos também são importantes na compreensão e para chegar à verdade matemática, só que não tem aquele rigor que a lógica exige.” **§2** “[...] quando se fala de demonstração, no geral, se envolvem muitos tipos de raciocínio que não são lógicos. Como eu já falei, são de tipos indutivos, de tipos analógicos, são raciocínios que não há regras implícitas a eles [...]. Esse tipo de raciocínio não é dedutivo, é indutivo: você induz uma verdade. Então, esse tipo de raciocínio não tem regras lógicas, restritas, mas é um raciocínio válido e é uma forma de aprender matemática. **§3** “Outros tipos de raciocínios que não são lógicos são às vezes questionáveis, às vezes refutáveis, aí entram uma série de ferramentas, digo, outros mecanismos de raciocínios, como fazer conjecturas, refutar uma hipótese, formular outra hipótese, substituir argumentações por outras mais plausíveis. [...] Outro fator que a matemática usa fortemente é a intuição.” **§4** “A intuição matemática não é algo que nasce com a gente, é algo que se constroi com o tempo. Um fenômeno matemático, que antes não era familiar para nós, depois de certo estudo, vira uma coisa familiar. Então, isso é a intuição matemática que vai se construindo, se alimentando. E isso não é de caráter demonstrativo. Aprender coisas por intuição não é uma demonstração, é uma forma de chegar a um conceito matemático sem passar pelo crivo da demonstração.”

A primeira categoria, “O papel das demonstrações para o Matemático”, contempla as afirmativas referentes às demonstrações e seus verbos, ou seja, as ações relacionadas ao ato de demonstrar tendo em vista o trabalho do Matemático. Ao observar a tabela 1, nota-se que todos os Formadores entrevistados apresentaram contribuições para esta categoria. Segundo os depoimentos, para o Matemático as demonstrações têm várias funções, dentre elas estão: explicar, compreender, argumentar, aceitar, convencer e garantir a veracidade de resultados. O Formador γ ressalta também que a demonstração tem o papel de “juíza”, isto é, a demonstração é a última palavra para que um resultado em Matemática seja aceito.

Na categoria “Processos lógicos, rigor e linguagem” estão os depoimentos que relacionam as demonstrações com sua forma, ou seja, com os processos lógicos envolvidos para o desenvolvimento de uma demonstração, além da linguagem e rigor que também são fatores importantes em uma demonstração. Apenas o Formador β não contribuiu com a categoria. O depoimento do Formador α afirma que a Matemática tem linguagem e maneira próprias, logo é necessário que o aluno que se propõe a estudá-la compreenda esta linguagem. Ele acrescenta ainda que a Matemática pode ser comparada com um jogo, pois ela é repleta de regras para serem seguidas a fim de chegar em algum resultado. Já o Formador γ salientou que o conceito de demonstração está ligado com a Lógica, pois, por definição, para provar uma proposição usa-se uma sequência lógica de argumentos e raciocínios.

Depoimentos relacionados aos tipos de raciocínio envolvidos em uma demonstração pertencem à última categoria desta relação: “Intuição e Tipos de Raciocínio”. Somente o Formador γ apresentou contribuições. Nota-se em sua fala que para chegar a uma demonstração muitos tipos de raciocínio estão envolvidos. Estes tipos de raciocínio, apesar de muitas vezes não serem tão ligados à lógica, são importantes para se chegar à verdade matemática. Além disso, o Formador γ afirma que os mecanismos de raciocínios (conjecturar, formular e refutar hipóteses...) são raciocínios válidos que ajudam a aprender matemática.

A próxima tabela trata da segunda relação de análise “As demonstrações e o Professor de Matemática”. Nela os Formadores falam para os Professores. Foram elencadas cinco categorias: O papel das demonstrações para o Professor; Licenciado x Bacharel; Formação abrangente e Qualidade do ensino; Domínio do conteúdo e Segurança; e, Rigor e Linguagem. Observe, na sequência, a tabela 2:

TABELA 2 – FORMADORES PARA PROFESSORES: AS DEMONSTRAÇÕES E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RELAÇÃO 2)

	O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES PARA O PROFESSOR	LICENCIADO X BACHAREL	FORMAÇÃO ABRANGENTE E QUALIDADE DO ENSINO	DOMÍNIO DO CONTEÚDO E SEGURANÇA	RIGOR E LINGUAGEM
FORMADOR α	**§15** "O que eu espero de um aluno que termina o curso de Licenciatura em Matemática é que ele tenha condições de pegar um texto matemático e ler. [...] que ele tenha condições de ler um enunciado, com épsilons, com deltas, com sequências convergindo, Álgebra, qualquer outro assunto... ou artigo, mesmo na Revista do Professor de Matemática, que ele tenha condições de ler aquele artigo, entender as definições, saber o que é um lema, o que é um teorema, uma proposição. **§15** "Com a estrutura que existe no texto matemático, onde as demonstrações desempenham um papel fundamental de garantir que aqueles dados são verdadeiros, um Matemático tem que ter condições de pegar um texto do nível dele, se ele é Licenciado em Matemática pegar qualquer texto de nível de graduação, ou Ensino Médio, ou Fundamental, ler aquilo; e mesmo que seja um texto mais avançado – como são aqueles textos do PROFMAT [...] tem que estar em condições de pelo menos ler estes textos e redigir uma demonstração." **§16** "Saber não só ler, mas também se precisar, redigir um texto. Se ele descobriu um resultado, pensou em alguma coisa, como que ele vai convencer um colega, ou trazer um resultado, ou tentar escrever um artigo?" **§16** "Eu acho que os alunos formados que saem daqui têm condições de ler algum texto e obter informações a partir dele. Não sei se produzir textos, mas eu espero que você como Matemática formada pegue lá um artigo de uma revista do Professor de Matemática e tenha condições de ler, se aquilo te interessou."	**§14** "Eu acho que na formação dos professores... bom essa é uma opinião pessoal, minha, como que eles vão usar isso depois eu não sei. Eu não sei te dizer assim "como ensinar demonstração" ou "como é passar a demonstração pros alunos aqui da graduação, no curso de formação de professores de tal modo que eles possam fazer algo lá na frente". Isso eu não sei responder. O que eu acredito é assim: a demonstração na graduação – antes eu respondi o que era para mim – além do que é a demonstração em si, em Matemática, que é aquela quantidade de argumentos lógicos, tal, que garante a validade de um resultado, um enunciado, eu acho que na formação dos alunos, não vou dizer de professores, na formação dos alunos que frequentam Licenciatura eu entendo que é importante." **§7** "Não gostei de dar aula para eles [alunos das engenharias] justamente por isso, porque eles querem saber pra quê vai servir aquilo, e quando você dá aula para os alunos da Matemática eles querem saber a Matemática porque eles têm que saber, acham interessante ou porque tem que passar naquilo, mas eles não querem saber para quê serve. A questão é a Matemática pela Matemática. É disso que eu gosto: a Matemática pela Matemática."	**§16** "Pode dizer assim: "Ah a Federal" sei lá, "o curso de Licenciatura em Matemática da Federal é muito teórico" ou "dedica pouco tempo à formação do professor" em, por exemplo, Didática e Metodologia, mas é assim. Eu acho que essa parte da demonstração, com esse papel, não como o cara vai usar isso depois lá na sala de aula, mas com esse papel eu acho que forma."	********************	**§16** "Tem que ter contato com o padrão formal da língua, ser alfabetizado dessa forma."
FORMADOR β	********************	**§4** "Não vejo muita diferenciação no papel da demonstração para o Matemático e para o Professor de Matemática da Escola Básica, porque, repare, o licenciado tem atribuições de bacharel, pelo que me consta, então eu acho que o teor de conteúdo que Matemáticos devem ter, quando as matérias são exclusivamente de Matemática, devem ser os mesmos. Primeiro, pela atribuição que o diploma exerce: o licenciado tem atribuições de bacharel. O Licenciado em Matemática vai fazer um mestrado, por exemplo. E segundo, eu não acho assim que deva haver uma diferenciação, levando-se em conta a atual situação da qualidade que os alunos estão chegando na universidade, em termos matemáticos." **§4 "**Então, por isso, eu acho que a Matemática que um bacharel e um licenciado devem ter não devem ter muita diferença não. Ainda mais nas disciplinas comuns. Porque há disciplinas de Matemática que bachareis não veem, isso já é uma outra história, mas as disciplinas comuns, como Cálculo, por exemplo, tem que ser vistas no mesmo nível de dificuldade, no mesmo nível de exigência." **§7** "Eu vejo que as demonstrações são extremamente importantes para a formação, tanto do bacharel quanto do licenciado. Elas não diferem nas disciplinas comuns, não vejo diferença."	**§4** "Não sei se você sabe que teve uma pesquisa aí de um instituto, que foi contratado pelo Inep [Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira], o Pisa, em que, entre 45 países que estão registrados lá, o Brasil obteve uma nota na 38ª posição. Então, nesse sentido, acho que a formação, a capacitação em Matemática, dos professores de Matemática, tem que ser a mais exigente e a mais abrangente possível."	**§3** "O nível de compreensão acima daquele que é visto em sala de aula, ou que pode ser visto em sala de aula, eu acho desejável, pois acredito piamente no seguinte fato: acredito que você tendo mais domínio no assunto, você explica ele de uma maneira mais completa e mais segura para as pessoas." **§7** "Eu sou muito adepto do seguinte: quando você explica com segurança, você torna as pessoas também um pouco mais seguras e confiantes no que está sendo passado. Se você trabalha com insegurança, se você não entende direito do que está falando, você transmite desconfiança para as pessoas e o aprendizado fica comprometido." **§7** "E para ensinar Matemática você tem que ter uma certa familiaridade com o assunto."	**§7** "Eu vejo que, trabalhar Matemática, mesmo em disciplinas específicas, com um rigor, com conceitos bem definidos, ajuda que o profissional explique esses conceitos de uma maneira mais segura."
FORMADOR γ	**§6** "[...] a Matemática não é um conhecimento sistematizado, não deve ser considerada apenas como um conhecimento sistematizado, a Matemática deve ser considerada mais como uma forma de pensar. Pensamento matemático. E o pensamento matemático tem várias etapas! Talvez a última etapa de rigor no pensamento é a demonstração. O professor deve atingir esse nível de argumentação. [...] Ter uma nova argumentação. O professor deve ser capaz disso, porque ele tem condições mentais de atingir esse nível." **§6** "Agora, depende de como os Professores Formadores ensinam essas coisas, porque, muitas vezes, vão para o campo das pesquisas... Enfim, não abordam, não enfatizam esse aspecto do pensamento matemático. Inclusive, esse pensamento matemático de demonstração se pode fazer com conteúdos razoavelmente elementares. Não tem que atingir um conteúdo avançado em Matemática para aprender a pensar matematicamente. Então, eu acho que o professor deve aprender demonstração! Deve aprender a demonstrar em situações elementares de conteúdos. Aprender a demonstrar não significa saber muito de matemática e sim saber pensar matematicamente. **§9** "Um educador matemático é um professor de matemática. Um professor de matemática tem que saber raciocinar matematicamente, tem que saber pensar matematicamente. Porque a Matemática é uma forma de pensamento, não é saber mais Matemática, não é saber mais algoritmos, mais fórmulas. Tem que saber pensar matematicamente e esse pensar matematicamente é uma gama de formas de argumentações diferentes que, entre elas, está a demonstração, que é a última etapa, já falamos, mas que para um matemático é a palavra final sobre o que é válido matematicamente. Mas para um estudante de matemática, que vai aplicar em outra situação, para um aluno pequeno... enfim, para outros casos, não se precisa desse nível de rigor para aceitar: um engenheiro, hoje, usa matemática. Ele não sabe demonstrar, nem precisa demonstrar, a menos que queira, digamos, confeccionar métodos novos dentro de sua engenharia, mas um engenheiro, que é usuário da matemática, não precisa saber demonstrar, mas precisa saber como os conceitos que ele está utilizando foram desenvolvidos, como se concatenaram, como se formaram. Isto está envolvido na forma de pensar matematicamente sobre o problema de engenharia. Então a forma de pensar, ou seja, eu incluiria a demonstração em um conceito mais amplo: a argumentação matemática."	**§6** "Sou da opinião que o Professor de Matemática tem que saber [demonstrar]. Não com o rigor de um matemático profissional, que vai utilizar para aplicar a Matemática em outro contexto, em situações mais avançadas, não!" **§8** "[...] já trabalhei com a licenciatura em diversas oportunidades e diversas disciplinas. E sempre tento dar um enfoque que possa ser feito para ambas as situações, para bachareis e para licenciados, porque o bacharel também precisa aprender a argumentar em sua ciência. Ele vai, claro, aprender a argumentar com conteúdos avançados, mas o licenciado deve aprender a argumentar com conteúdos elementares. Então a questão é a diferença de conteúdo, talvez. De nível de conteúdo, mas enquanto forma e raciocínio, ambos precisam da mesma coisa. [...] Repito, acho que o licenciado, de repente, deve fazer isso com conteúdos mais elementares, enquanto que o bacharel pode fazê-lo com conteúdos mais avançados, mas não há diferença no tipo de argumentação."	********************	********************	********************

Na categoria “O papel das demonstrações para o Professor” estão as afirmativas que relacionam as demonstrações com as ações ligadas ao ato de demonstrar. O Formador β foi o único que não contribuiu para esta categoria. De modo geral o depoimento do Formador α é direcionado ao fator comunicativo de uma demonstração, ou seja, ele salientou que o Professor de Matemática deve ser capaz de ler, compreender e se necessário redigir uma demonstração. Para ele o aluno que se gradua em Matemática, independentemente da modalidade, tem que ter condições de ler um artigo, entender lemas, teoremas e afins. Já o Formador γ considerou outros aspectos que a demonstração pode assumir para o Professor de Matemática, dentre eles a argumentação e pensamento matemático são os mais presentes em sua fala. Aponta também que aprender a demonstrar não significa saber muito de Matemática e sim saber pensar matematicamente.

Quando as falas se referem às diferenças e semelhanças entre as duas modalidades do curso de Matemática da UFPR, entramos na segunda categoria: “Licenciado x Bacharel”. Os três Formadores contribuíram com seus depoimentos. O que mais chama atenção na fala do Formador α é a crença de que um aluno da Matemática não quer saber para quê serve determinado conteúdo. Já o Formador β garante que ele não vê muita diferença entre a Licenciatura e o Bacharelado. Para ele as duas modalidades de curso devem ter o mesmo nível de exigência nos conteúdos, principalmente nas disciplinas comuns. Já o Formador γ acredita que em ambas as modalidades o profissional precisa aprender a argumentar e consequentemente demonstrar, no entanto o licenciado fará isso com conteúdos mais elementares enquanto que o bacharel com conteúdos mais avançados.

Na categoria “Formação abrangente e Qualidade do ensino” o Formador α afirmou que o curso de Matemática da UFPR cumpre seu papel em formar profissionais que tenham condições de ler, compreender e redigir textos matemáticos, apesar de muitos criticarem o curso por seu aspecto mais teórico de formação. Já o Formador β acredita que a formação exigente e abrangente pode melhorar a qualidade do ensino nas escolas. O Formador γ não apresentou contribuições.

Apenas o Formador β apresentou contribuições para a quarta categoria analisada: “Domínio do conteúdo e Segurança”. Segundo o Formador, uma pessoa que possui domínio de conteúdo terá também segurança para explicá-lo. Além disso, ter uma atitude de segurança em relação aos assuntos passados deixará os alunos mais seguros e confiantes. Outro ponto interessante levantado pelo Formador β é o comprometimento no aprendizado do aluno quando o Professor não está familiarizado com o assunto, não entende direito do que está falando ou sente-se inseguro para trabalhar o assunto.

A quinta categoria, “Rigor e Linguagem”, como o nome sugere, é dedicada aos depoimentos que relacionam as demonstrações com rigor e linguagem. O Formador α, por exemplo, citou que para demonstrar a pessoa precisa estar alfabetizada na linguagem matemática, saber o modo formal da língua. Já o Formador β novamente se refere às questões de segurança. Em seu depoimento ele diz que trabalhar com conceitos bem definidos e rigor ajuda o profissional a explicá-los com maior segurança. Já o Formador γ não apresentou contribuições para a categoria.

Vimos até agora as duas primeiras relações de análise. Enquanto uma tratava das demonstrações para o Matemático, a outra abordava as demonstrações para o Professor de Matemática. Resta apresentar as demonstrações para a sala de aula da Educação Básica.

Na última relação de análise, intitulada “As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica”, os Formadores falam para a sala de aula. Nela estão as afirmativas que relacionam as demonstrações com a sala de aula e todo o ambiente escolar intrínseco a ela.

Antes da apresentação da tabela vale lembrar um pouco das experiências de trabalho com o Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio que os entrevistados relataram: o Formador α fez magistério e, portanto, trabalhou com os diversos níveis de ensino até chegar ao Ensino Superior; o Formador β formou-se e foi trabalhar diretamente na universidade, logo, não possui experiência em sala de aula da Educação Básica além daquela que teve enquanto estudante deste nível; e o Formador γ não relatou se lecionou na Educação Básica.

Nesta relação de análise, assim como na segunda, foram elencadas cinco categorias: “O papel das demonstrações em sala de aula”, “Mostrar e explicar”, “Pensar Matematicamente”, “Mostrar o trabalho do Matemático”; e “Desafios da sala de aula”. A tabela 3 apresenta os dados desta relação. Acompanhe:

TABELA 3 – FORMADORES PARA A SALA DE AULA: AS DEMONSTRAÇÕES E A SALA DE AULA DA EDUCAÇÃO BÁSICA (RELAÇÃO 3)

	O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM SALA DE AULA	MOSTRAR E EXPLICAR	PENSAR MATEMATICAMENTE	MOSTRAR O TRABALHO DO MATEMÁTICO	DESAFIOS DA SALA DE AULA
FORMADOR α	**§11** "[...] o ensino de Matemática tem várias funções. A pessoa tem que aprender a Matemática, por exemplo, para usar no dia-a-dia, é uma função dela. [...] mas ela tem outras funções e, se você não contar um pouquinho daquilo, se a pessoa não tiver a chance de ver uma demonstração, ver que a Matemática é "você raciocinando em cima", é conseguir tirar conclusões, chegar a uma fórmula." **§13** "[...] eu acho que a demonstração num sentido mais amplo: de você entender os resultados. De fazer uma construção até chegar, que tenha justificativas. Pode ser aí, pode ser em Geometria. Têm vários momentos que você pode deduzir expressões, pode perguntar se isso vale ou não vale, por que essa fórmula vale quando $b^2 - 4ac$ é positivo, o que acontece?"	********************	********************	**§11** "Então você não pode privar as pessoas de ter acesso a esse conhecimento. A escola não pode privar ninguém de ter né? [...] Não sei se eu teria capacidade, mesmo com a consciência que eu tenho hoje, se eu teria a capacidade pra ensinar para eles, ou pior, conseguir motivar um grupo a se interessar por esse assunto [demonstrações]. Mas acho que faz parte da escola dar esse acesso, pelo menos dar condições de que os alunos consigam, sei lá, vislumbrar algo disso né?" **§13** "Estimular, dar oportunidade, possibilitar. Se ele vai aproveitar? Isso é outra história. Mas eu acho que tem que ser dada a condição. Eu tentaria fazer, se eu fosse dar aula no Ensino Fundamental, eu tentaria."	**§13** "Provavelmente ficaria decepcionado né? Eu fico decepcionado aqui na graduação: os alunos gostam de Matemática, são caras que se propõem a estudar Matemática. Eu proponho um problema e na aula seguinte dos 40 que estão na sala dois ou três fizeram. A maioria nem pensou, "não teve tempo"."
FORMADOR β	********************	**§5** "Nível Médio, demonstrações... não sei se é de uma forma muito diferente do que é visto aqui, com utilizações de exemplos, né? Exemplos básicos, particulares e, depois, apresentação da teoria, de uma forma mais abstrata, para que as pessoas entendam que, por exemplo, você faz uma demonstração na qual você está tratando de um determinado tema. Primeiro em casos específicos e depois mostra que essa situação pode ser utilizada em um caso mais geral."	**§5** "Mas, assim, formas metodológicas de aplicação de demonstração, isso eu deixo para os Educadores Matemáticos. Eu sou bacharel. Não tenho experiência nenhuma no assunto. Mas na minha visão leiga é o que eu costumo fazer com meus alunos, quando não estão acostumados com demonstração, que é primeiro ver casos particulares e isso motivá-los a ver que a demonstração é uma unificadora de raciocínios. Dados os casos particulares, uso o mesmo raciocínio de uma forma mais abstrata." **§9** "É algo útil que é resultado de consequências. Onde, a partir do momento em que você constroi o raciocínio, você constroi outro em cima e assim vai."	**§9** "Então, voltando ao assunto, acho que a inserção de teorias de demonstração, de explicações sobre o que está acontecendo, pode ser explorada via utilização de conceitos que foram trabalhados anteriormente, né? Para que a Matemática se construa. O conhecimento construtivo."	**§5** "Aí, você pergunta, como é que demonstrações poderiam ser aplicadas ali, né? Uma boa pergunta! Isso é uma boa pergunta, porque aparecem muitas dificuldades, né? Vocês que trabalham com nível Médio e Fundamental têm muito mais dificuldade do que nós temos aqui no nível superior, porque já recebemos as pessoas que passaram por um processo de aprendizado de 12 anos [9 anos do Fundamental somados aos 3 do Ensino Médio]. Ao passo que lá, esse processo de aprendizado ainda está sendo feito, né? Então, olhe, eu não tenho informação a respeito. Não tenho como contribuir nesse aspecto, pela minha inexperiência no assunto." **§10** "Porque a ideia do abstrato, ali [Ensino Fundamental], é muito difícil de trabalhar, né? Porque se trabalha muito com concreto, né? [...] O abstrato não faz muita parte da vida da criança, assim, em termos de aprendizado. Então, Matemática, nesse nível, é muito construtivo, né? É muito associado a objeto: "1" [apontando para a mesa], "1" [apontando para a cadeira] ou "1" [apontando para a caneta] só que pra você sair do "1", do "1" e do "1" [apontando novamente os objetos citados anteriormente] e ir para o "1" a ideia geral do "1", sem estar associada ou presa a objeto, assim, é o tipo de coisa que aconteceu na minha vida de uma forma que eu não sei explicar direito, né?"
FORMADOR γ	**§3** "[...] se você quer levar o tipo de raciocínio que se faz na escola, para o aluno aprender matemática, ou para o professor ensinar a pensar sobre matemática ao aluno, de repente ao invés de usar a palavra "demonstração" pode usar "argumentações matemáticas"." **§6** "E, talvez, para nível escolar, o mais importante seja primeiro aprender outros tipos de argumentações. Por isso eu acho que o regimento que está sendo colocado, à nível escolar, onde se pede aprender a conjecturar, aprender a argumentar, aprender a refutar, essas coisas, são completamente válidas. É talvez o processo mais natural de aprender a argumentar. E sabendo argumentar, no geral, em todas as suas faces, o pessoal aprenderá depois a demonstrar, porque a demonstração é um tipo de argumentação que exige certas regras. Mas é uma consequência, a nível escolar acho que não vai ser o mais importante." **§8** "Sou da opinião que ninguém vai aprender matemática aprendendo primeiro a demonstrar. Não se aprende matemática aprendendo a demonstrar, né? Tem que ir por etapas, e isso tem também a ver com a idade, obviamente! Uma criança pequena não tem a capacidade de fazer argumentações mais complexas do que aquelas primárias de conjecturar... essas situações são etapas etárias. Também tem os níveis de abstração, tudo isso está envolvido."	********************	**§6** "Então, eu acho que os alunos devem aprender, e eu insisto muito nisso, a pensar matematicamente. E nesse aprender a pensar matematicamente, significa aprender a argumentar de diversas formas sobre a matemática, entre elas, a demonstração." **§8** "Esse pensar matematicamente tem muitas formas de pensamentos, de argumentações, de situações... e a demonstração é uma delas, e talvez a etapa final."	********************	********************

Na primeira categoria, “O papel das demonstrações em sala de aula” estão as falas referentes ao papel que as demonstrações desempenham em uma sala de aula, na visão dos Formadores. Para o Formador α, uma das funções da Matemática é raciocinar sobre algum fato para chegar a conclusões, portanto, as demonstrações em sala de aula serviriam para deduzir fórmulas e expressões, e também para compreender resultados. Segundo o Formador γ, ninguém aprende Matemática aprendendo primeiro a demonstrar, por isso ele acredita que no nível escolar é importante aprender outros tipos de argumentação, tais como conjecturar, argumentar e refutar. Nesta categoria não há contribuições do Formador β.

Em “Mostrar e explicar” as falas relacionam as demonstrações com o papel que elas desempenham na atividade do professor. Somente o Formador β contribuiu para a categoria. Ele acredita que o professor pode utilizar as demonstrações em sala de aula de uma maneira muito similar ao que é feito no Ensino Superior: mostrando exemplos mais básicos, casos particulares e depois apresentando a teoria de forma abstrata.

Os depoimentos que relacionavam as demonstrações com funções ligadas ao raciocínio (forma e tipo de raciocínio, construir e unificar raciocínios) e formas de pensamento matemático compõem a categoria “Pensar matematicamente”. O Formador α não apresentou contribuições. O Formador β afirma que por ser bacharel não possui experiência com a Educação Básica, porém acredita que poderia trabalhar da mesma forma que faz com seus alunos da graduação: inicia com exemplos básicos, apresenta a teoria e tenta motivá-los a ver a demonstração como uma unificadora de raciocínios. Já o Formador γ reafirma que os alunos precisam aprender tipos de argumentações, o que implica em aprender a pensar matematicamente.

Para a categoria “Mostrar o trabalho do Matemático” estão as falas referentes ao uso das demonstrações para apresentar um pouco do trabalho de um Matemático aos alunos. Desta vez o Formador γ não contribuiu. Já o Formador α acredita que é papel da escola dar acesso ao conhecimento, inclusive na Matemática, portanto, o aluno deve ter a oportunidade de conhecer o que é uma demonstração. Para Formador β o conhecimento matemático é construído, por essa razão ele acredita que o trabalho com as demonstrações pode ser explorado utilizando conceitos trabalhados anteriormente, ou seja, do modo como um Matemático faria.

As dificuldades e os desafios enfrentados em uma sala de aula são os temas da categoria “Desafios da sala de aula”. O Formador α fez um desabafo em seu depoimento: disse que tentaria trabalhar com demonstrações no Ensino Básico, mas provavelmente ficaria decepcionado, pois na graduação em Matemática, que os alunos gostam de Matemática, ele pede para que resolvam alguns exercícios em casa e poucos tentam fazer. Já o Formador β, apesar de não ter experiência com o Ensino Básico, acredita que os professores do Ensino Básico enfrentam mais dificuldades para trabalhar do que os professores do Ensino Superior, pois lá o processo de aprendizado ainda está em construção e a ideia do abstrato ainda não faz parte do repertório da criança. Para ele, no Ensino Básico trabalha-se muito mais com o concreto do que com o abstrato. Não há depoimentos do Formador γ nesta categoria.

De modo geral o que se pode observar nas três tabelas é que todos os Formadores apresentaram pelo menos uma contribuição em cada categoria das relações de análise. Nota-se também que para eles a demonstração, independentemente do nível de ensino em que se está inserido, é importante. Interessante notar que os Formadores têm muito a dizer quando a demonstração é para o Matemático ou para o Professor, porém, quando são questionados sobre a demonstração em sala de aula ou ainda, sobre a importância das demonstrações para o aluno da Educação Básica, as contribuições diminuem.

5.1.2 Professores falam sobre as demonstrações

Observamos o ponto de vista dos Formadores, agora vamos considerar o(s) olhar(es) dos Professores entrevistados: Professor X, Professor Y e Professora Z graduaram-se em Licenciatura pela UFPR nos anos 2000, 1994 e 1975 respectivamente e lecionam em escolas da rede estadual de ensino do Paraná.

De modo similar ao que foi feito com os Formadores, apresentarei uma tabela para cada uma das três relações de análise seguida de breves comentários sobre os resultados observados.

Na primeira relação de análise “As demonstrações e o Matemático”, os Professores falam para os Matemáticos conforme a tabela a seguir:

TABELA 4 – PROFESSORES PARA MATEMÁTICOS: AS DEMONSTRAÇÕES E O MATEMÁTICO (RELAÇÃO 1)

	O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES PARA O MATEMÁTICO	PROCESSOS LÓGICOS, RIGOR E LINGUAGEM	INTUIÇÃO E TIPOS DE RACIOCÍNIO
PROFESSOR X	********************	********************	********************
PROFESSOR Y	********************	**§3** "O papel da demonstração para o professor de matemática, que dá aula pro Ensino Básico é totalmente diferente do papel da demonstração para o Matemático, principalmente em relação à linguagem. A linguagem de um Matemático para a Matemática não tem muita coisa a ver com a [linguagem] de um Professor para um aluno."	********************
PROFESSORA Z	**§14** "Para o Matemático, eu acho que as demonstrações têm sim um papel fundamental."	********************	********************

Na tabela 4, diferentemente do observado na tabela 1, os depoimentos foram muito escassos. Na categoria "O papel das demonstrações para o Matemático" apenas a Professora Z contribuiu. Ela considera que a demonstração tem papel fundamental para o Matemático, no entanto a Professora não vai além dessa afirmativa, ou seja, não diz qual seria esse papel. Na segunda categoria, "Processos lógicos, rigor e linguagem" somente o Professor Y contribuiu com depoimento. Segundo ele a demonstração para um Matemático é diferente da demonstração para um Professor, pois a linguagem que um Matemático usa para a Matemática é diferente da linguagem que um Professor de Matemática usa para um aluno. Já a terceira categoria, "Intuição e tipos de raciocínio" não possui depoimentos.

Os Professores entrevistados, apesar de serem formados em Matemática, se distanciaram do trabalho do matemático profissional. Este talvez tenha sido o motivo pelo qual eles pouco falaram sobre as demonstrações para o Matemático.

Na segunda relação de análise, "As demonstrações e Professor de Matemática", os Professores falam para os Professores conforme apresenta a tabela:

TABELA 5 – PROFESSORES PARA PROFESSORES: AS DEMONSTRAÇÕES E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RELAÇÃO 2)

	O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES PARA O PROFESSOR	LICENCIADO X BACHAREL	FORMAÇÃO ABRANGENTE E QUALIDADE DO ENSINO	DOMÍNIO DO CONTEÚDO E SEGURANÇA	RIGOR E LINGUAGEM
PROFESSOR X	**3** "[...] mostrar o sentido daquela prática matemática no nosso dia-a-dia... claro, mostrar de alguma forma." **§11** "[...] como eu já dava aula eu questionava [meus professores] como que de repente nós poderíamos mostrar isso dentro de algum contexto do nosso dia-a-dia." **§12** "Então a missão agora é de você mostrar pra quê serve cada conteúdo."	**§13** "Quando eu era aluno, não falo agora... como eu saí fazem "só" 13 anos da Universidade, muita coisa deve ter avançado, com certeza. Mas, eu acho que o nosso curso tinha o nome de Licenciatura só de fachada, né?"	********************	**§8** "[...] eu acho que sem a demonstração ele [professor] vai ficar com falhas no embasamento teórico."	*******************
PROFESSOR Y	**§3** "Então, a demonstração feita por um Matemático e por um Professor de Matemática é diferente. Acho que um professor de Matemática usa mais comparações, então, a fala deve ter muita comparação para poder chegar na linguagem apropriada"	********************	**§7** "A forma como as demonstrações foram abordadas em minha formação contribuíram mais para o meu conhecimento do que para a utilização em sala de aula."	**§2** "[...] mas quando entendia o processo no todo, realmente, dava uma firmeza, dava uma segurança no entendimento da matéria. Então, me passava segurança, depois que eu conhecia o processo inteiro [...]. Acredito que a demonstração fortaleceu a minha base de conhecimento, fortaleceu sim. Por mais que seja tenebrosa, como eu disse, ou muito trabalhosa."	*******************
PROFESSORA Z	**§20** "Eu acho que a gente tem que sair da graduação sabendo o porquê dessa demonstração, de onde que saiu [...]"	********************	**§19** "As demonstrações em minha formação não contribuíram para eu utilizar em sala." **§14** "Então eu acho que nesse sentido é necessário que o professor tenha esse conhecimento para poder passar isso. Mas pelo menos que eu me lembre, lá no início da minha formação, eu tive muito pouco."	********************	**§10** "Então ela [Formadora] exigia da gente que as demonstrações tivessem o ponto e a vírgula do jeito que estava lá. Eu já te falei da minha dificuldade, então aquilo era terrível pra mim. [...] A disciplina em que eu reprovei, foi por isso, tinha que demonstrar ponto por ponto, vírgula por vírgula."

Analisando a tabela 5 nota-se que todas as categorias apresentaram pelos menos um depoimento. Na categoria “O papel das demonstrações para o Professor” estão as falas que relacionam as demonstrações com as ações ligadas ao ato de demonstrar. Para o Professor X demonstrar é mostrar o porquê das fórmulas e conteúdos estudados. O Professor Y acredita que demonstrar é comparar, ou seja, que o Professor em sua fala usa mais comparações a fim de chegar em uma linguagem mais acessível para o aluno. Já a Professora Z considera que é importante sair da graduação compreendendo o desenvolvimento de uma demonstração.

Na categoria “Licenciado x Bacharel”, apenas o Professor X apresentou depoimento. Para ele o curso de Licenciatura em Matemática da UFPR, na época da sua graduação, tinha licenciatura apenas no nome. Isto quer dizer que na visão do entrevistado, cursar licenciatura era cursar bacharelado, pois a Universidade formava pesquisadores em matemática e não professores.

A categoria seguinte, “Formação abrangente e Qualidade do ensino”, trata da formação dos professores. O Professor X não contribuiu. Já o Professor Y afirmou que o trabalho com demonstrações em sua formação inicial colaborou mais para seu conhecimento do que para o uso em sala de aula. Para a Professora Z é necessário que o Professor tenha o conhecimento sobre demonstrações para poder trabalha-la, porém a forma como as aulas foram ministradas em sua graduação não a motivaram para o trabalho em sala de aula.

Na categoria “Domínio do conteúdo e Segurança”, o Professor X afirmou que sem as demonstrações o Professor fica com falhas no embasamento teórico, enquanto que o Professor Y garantiu que as demonstrações dão segurança no entendimento do conteúdo e fortalecimento da base teórica. Não há depoimento da Professora Z.

A quinta categoria, “Rigor e Linguagem” possui apenas o depoimento da Professora Z. Em sua fala ela relata como uma de suas professoras na universidade cobrava as demonstrações: ponto por ponto, vírgula por vírgula; ou seja, com rigor.

Quando se trata da sala de aula da Educação Básica, falamos da terceira e última relação de análise. A tabela que segue apresentará a relação “As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica” segundo a visão dos Professores entrevistados:

TABELA 6 – PROFESSORES PARA A SALA DE AULA: AS DEMONSTRAÇÕES E A SALA DE AULA DA EDUCAÇÃO BÁSICA (RELAÇÃO 3)

	O PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM SALA DE AULA	MOSTRAR E EXPLICAR	PENSAR MATEMATICAMENTE	MOSTRAR O TRABALHO DO MATEMÁTICO	DESAFIOS DA SALA DE AULA
PROFESSOR X	**§3** "Então você começa, por exemplo, demonstrando a distância entre dois pontos num plano cartesiano [...] e, a partir dali, os alunos começam a entender o porquê das fórmulas, o que seriam as propriedades que nós usamos, porque que as fórmulas existem em si." **§9** "Então eu tento fazer com que o aluno chegue à fórmula, e não fornecer essa fórmula." **§10** "Não coloco de uma forma muito, assim, como é que eu posso dizer... Não utilizo aquela forma mais "burocrática" de colocar a demonstração, formalizada: "Vamos demonstrar que o triângulo tal é semelhante ao triângulo tal." Utilizo de uma forma mais simples. Mostro uma argumentação pra eles." **§10** "[...] prefiro que eles cheguem à conclusão de, entende? E não passar a eles a informação. Fazer com que eles comecem a buscar. [...] Então, sempre fazer com que o aluno busque a ideia."	**§7** "E ela tem realmente essa importância de mostrar, fazer com que o aluno perceba a importância daquela equação, por exemplo [...]." **§8** "[...] como professor a gente começa a fazer, a querer explicar para os alunos [...]." **§3** "Eu prefiro fazer o desenho e interpretá-lo, pois basta mostrar alguns exemplos e eles já conseguem perceber que aquela fórmula tinha uma certa importância." **§9** "[...] tenho [no currículo] muitas demonstrações para explicar o motivo pelo qual aquela fórmula que nós temos [existe]." **§14** "As demonstrações, nas minhas aulas, servem pra mostrar o "por que das coisas", principalmente das fórmulas. Mostrar por que elas foram criadas."	**§8** "E até no meio de uma demonstração a gente começa a ver o leque de opções que uma pessoa começa a criar quando ela sabe demonstrar: ela consegue pensar a Matemática, desenvolver a Matemática de uma forma mais hábil."	********************	**§7** "Para utilizar as demonstrações em sala de aula eu parto primeiro da realidade do aluno. Tento buscar algum gancho na realidade de cada um." **§12** "Aquela demonstração lá [da graduação]: inviável pra esse ambiente da sala de aula." **§15** "Agora, é importante a demonstração? Com certeza. Eu acho que é necessário, mas não pode se tornar essencial. Se você começar a trabalhar só a demonstração como algo que tem que ser cobrado e que "se não souber a demonstração você não vai saber", você perderá alunos pelo desinteresse." **§16** "Eu acho que isso, o desinteresse, ele aumenta à medida que vai passando o nível, que o tempo vai passando para os alunos. Eles possuem um certo interesse por algumas demonstrações eu percebo isso. Então, no 6º ano, você fala sobre as Regras de Divisibilidade: "como que você sabe essas regras?" Então ali eles mostram interesse. Chega até o 8º, 9º ano você trabalha alguns conteúdos eles olham e "Tá, e daí?". Você vai falar sobre Fórmula de Bháskara, se você não trouxer algo convincente pra eles, eles já vão desistir de cara. Eu percebo essa desistência, essa, de repente, falta de vontade de buscar a informação. Eles realmente não têm muita vontade de buscar a informação."
PROFESSOR Y	********************	**§4** "Então, quando dá certo, é mais uma "mostração" do que uma demonstração."	********************	**§5** "Quando eu uso demonstração em sala de aula é para provar mesmo, porque em muitos casos não tem algo que dê um sentido prático para o aluno. Quando tem, ótimo! E quando você não consegue? As vezes aquilo que você está falando é utilizado em coisas que ele ainda não viu, daí ele não entende, né? Então, resta a linguagem matemática para provar que realmente aquilo que se fala é aquilo que se ouve, mas geralmente, assim, a resposta não é muito boa não! São poucos os alunos que conseguem enxergar, entender uma demonstração até o final."	**§4** "Trabalho bem pouco com demonstrações com meus alunos. Não por não conhecer, é que às vezes diante de uma situação tão adversa, você vê que não convém usar como recurso metodológico uma demonstração nas turmas que temos hoje. Temos poucos alunos interessados e um ambiente que não vai propiciar um aluno a acompanhar a demonstração." **§6** "Não acho que seja pouco viável trabalhar com demonstrações na Escola Básica. Você tem que sentir a turma e o momento, né? Compensa? Essa turma está em um nível que vai acompanhar uma demonstração? Então, aquelas muito simples, muito básicas, sim: tem que fazer! Agora aquelas um pouquinho mais trabalhosas, em muitas situações, não. Não vale a pena! E, em muitas situações, nem para dizer de onde veio a fórmula a gente não consegue. Já tentei, por experiência própria mesmo, mas você precisa de um aluno queira entender aquilo e um grupo que colabore também. Então, se você tem dois alunos querendo saber de onde vem aquilo e outro grupo não colaborando, fica difícil. Nós não temos um ambiente propício para trabalhar com demonstrações." **§7** "Eu acho assim, como é uma Licenciatura – eu não lembro de todo o currículo, porque faz tempo que eu me formei – mas acredito que tinha que, não exageradamente, mas tinha que levar em conta que precisa ser trabalhado como fazer isso lá com os alunos reais. Não ficar imaginando um aluno "irreal", que não existe, uma turma "irreal"... uma turma "ideal"." **§8** "Hoje, diante da realidade, funciona mais você tentar contextualizar o que você está falando do que demonstrar o que você está falando. [...] Eu tento contextualizar. Eu não demonstro usando palavras, não dá certo. Eu contextualizo, eu tento justificar aquilo. É pegar algo lá fora e tentar ajustar a modelos matemáticos. Modelagem Matemática. A Modelagem Matemática, assim, falando em linguagem, funciona mais do que você demonstrar para o aluno."
PROFESSORA Z	**§14** "Quando você pede para um aluno pôr a fórmula geral lá: ele repete, repete, repete e chega a conclusão de que se aquele número for um número qualquer, é assim que ele resolve, pra demonstração." **§17** "Eu acho que a demonstração é válida, como eu te falei, quando você faz, por exemplo: numa questão de potência você chegar à conclusão de porque aquela base se repete, [...] e depois em alguma questão lá que ele perceba e chegue a conclusão que essa é a fórmula; [...] É que ele chegue à conclusão de que realmente é aquilo. Como demonstração daí é válido, que o aluno vá fazendo e chegue a essa conclusão. Porque daí ele enxerga. Na hora que ele conclui ele entende, ele expõe." **§18** "Eu uso demonstração em alguns casos, mas não essa demonstração que agente faz: x, y, z e tal. Mas a demonstração pra chegar à conclusão daquilo. Como é que chega lá." **§20** "Então eu acho assim, aquela questão do porque que "menos vezes menos fica positivo" essa justificativa, talvez se a gente fizesse a demonstração, talvez eles até entendessem isso."	********************	********************	********************	**§8** "Tem algumas turmas que eu não consigo aquilo que eu quero, é meio difícil, tem algumas turmas mais difíceis assim: é, o aluno que chega aqui e acha que não tem a necessidade de estudar. Ele não consegue ver que ele é o que mais precisa estudar." **§9** "Ontem mesmo, como eu te falei, surtei naquele 2º ano do Ensino Médio. Nossa, surtei! Conscientemente. Porque você está explicando uma coisa seríssima, importante – eu estava dando aula de Trigonometria – eu havia dito para eles "Vou começar do básico! Tragam uma folha quadriculada." Ninguém trouxe. "Pelo menos uns três ou quatro compassos." Ninguém trouxe." **§9** [...] Porque eu acho assim, não quero que eles venham para cá mudos, Matemática tem a necessidade de fazer juntos, mas que participem, que conversem, que façam, conversem mais um pouquinho, perguntem, vá lá na frente e faz. Que façam! Que participem!" **§13** "Se eu acho que essas demonstrações que estudei durante minha formação foram importantes para minha atuação na escola? Eu acho que não. Até porque depois quando eu comecei a trabalhar eu tive que estudar muito, talvez até se eu tivesse compreensão das demonstrações, talvez até entendesse melhor." **§15** "Se é possível trabalhar com demonstração na educação básica? Eu acho que é difícil. Talvez até fique mais claro, mas eu acho que é difícil. Porque eu tenho, alguns alunos brilhantes, bons. Mas assim, de cada turma de trinta alunos [...] que a gente tem, aproximadamente cinco sabem o que estão fazendo, que você pode dar qualquer resolução de problema que eles fazem. Têm outros cinco que não tem noção, tenho 9°ano, tem cinco nessa turma que não têm noção do que é "dois mais dois", que não sabem o que é "dois ao quadrado", que não sabem nada! O resto da turma, menos ainda. Não sabem o que é uma soma, não sabem nada, nada!" **§17** "Acho que é válido, mas pra exigir só demonstração, acho que – pode ser que eu esteja enganada – mas acho mais difícil, o trabalho é mais difícil. Digamos assim que a gente pegasse uma turma de 1°ano como experimento. No 1º ano ele vai, desde o primeiro passo dele, ele vai fazer sempre demonstrações, demonstrações... Aí vai chegar um momento que ele faz sozinho, isso sem dúvida nenhuma. Agora tem um grupo muito grande de alunos que têm todas as dificuldades e que não vai conseguir chegar. Porque a grande dificuldade do professor é deixar uma turma mais ou menos nivelada, que todos entendam. O ideal é que todo mundo saia daquele conteúdo entendendo, pelo menos 50% daquilo. E eu acho que com a demonstração é muito difícil."

A primeira categoria, “O papel das demonstrações em sala de aula”, contempla os depoimentos que apontam para as ações do ato de demonstrar em sala de aula. De forma geral o Professor X acredita que as demonstrações em sala de aula servem para fazer o aluno concluir e compreender o porquê de determinados resultados. Assim como o Professor X, a Professora Z também considera que as demonstrações em sala devem fazer com que o aluno conclua e compreenda resultados. Nesta categoria o Professor Y não contribuiu.

Em “Mostrar e explicar” as falas tratam das demonstrações e o papel que elas desempenham na atividade do professor. Segundo o Professor X, em suas aulas as demonstrações servem para, por exemplo, mostrar e explicar as fórmulas. Já o Professor Y afirmou que quando consegue utilizar demonstrações em sala é mais uma “mostração” do que demonstração, ou seja, ele faz o passo a passo e não o aluno. Não há depoimento da Professora Z.

Na categoria “Pensar matematicamente” apenas o Professor X contribuiu com seu depoimento. Ele afirmou que quando uma pessoa sabe demonstrar ela consegue pensar a Matemática com maior habilidade.

Já na categoria “Mostrar o trabalho do Matemático” somente o Professor Y apresentou contribuições. Segundo ele, quando usa demonstração em sala é com o objetivo de provar um resultado, pois não havia encontrado algo que desse sentido prático para o aluno. Assim, ele acaba demonstrando. Além disso, algumas coisas que o Professor fala em uma demonstração o aluno não entende, porque nunca viu. Resta ao Professor a linguagem matemática para provar o que foi dito.

Intitulada “Desafios da sala de aula”, a última categoria expõe algumas das dificuldades e desafios pelos quais os Professores entrevistados passam em sala de aula que podem ou não favorecer o trabalho com demonstrações. O Professor X afirma que tenta partir da realidade do aluno para utilizar demonstrações. Ressalta que as demonstrações vistas na graduação são inviáveis para o ambiente da sala de aula e que o trabalho com elas é importante, porém não pode tornar-se essencial, pois há o risco de deixar os alunos desinteressados.

Ainda na última categoria, o Professor Y relatou que apesar de conhecer as demonstrações, trabalha pouco com elas em suas turmas, pois o ambiente não é próprio para isso – o aluno interessado não conseguiria acompanhar – e muitos alunos não têm interesse. O Professor acredita que é possível trabalhar com demonstrações, mas para isso alguns fatores devem ser levados em conta, dentre eles o nível da turma: Será que eles estão em condições de acompanhar a demonstração? O Professor Y acrescenta também que o curso de licenciatura deveria abordar o “como fazer” esse tipo de trabalho com alunos “reais” e não com turmas idealizadas, turmas que não existem.

A Professora Z afirmou que em algumas turmas ela consegue trabalhar o que planeja e em outras não, pois muitos alunos chegam na escola achando que não há necessidade de estudar, além disso boa parte deles não têm noção de conteúdos básicos. Para ela o trabalho com demonstrações na Educação Básica é difícil. Talvez tornasse algumas explicações mais claras para os estudantes. A Professora comenta que as demonstrações que estudou em sua formação não foram importantes para o seu trabalho em sala, pois quando começou a lecionar precisou estudar muito para ensinar.

De modo geral pode-se concluir que os Professores consideram que a demonstração é importante na formação do professor para uma melhor compreensão e segurança ao se trabalhar com os conteúdos. Nota-se ainda que os Professores apresentaram poucas falas quando questionados sobre o papel das demonstrações para o Matemático. Já em relação ao papel para os Professores e para a sala de aula as contribuições foram maiores.

Após a apresentação dos dados produzidos pelos Formadores e Professores entrevistados partiremos para uma análise fundamentada destes dados.

5.2 DIÁLOGOS: FORMADORES, PROFESSORES E LITERATURA

Muito se fala sobre demonstrar sem se saber ao certo o que é demonstrar. Esta é uma das contradições que cercam a prática do Matemático e do Professor de Matemática. Além disso, quando se está em um curso de Matemática, independente da modalidade, o graduando constantemente depara-se com demonstrações de teoremas, corolários e afins. Mas, demonstrar por quê? Qual a função da demonstração? Qual o papel da demonstração na formação docente? Estes questionamentos culminaram na seguinte indagação, motivadora do presente estudo: **Qual o papel das demonstrações, na formação de professores de Matemática, na visão do Formador de professores e na visão do Professor de Matemática da Educação Básica?**

A partir deste problema nosso objetivo era compreender as visões do Professor de Matemática da Educação Básica e do Formador de professores de Matemática em relação ao papel que o uso das demonstrações desempenha em dois contextos: (1) para a formação do professor de Matemática; e, (2) na sala de aula de Matemática da Educação Básica.

Com as entrevistas realizadas, transcritas e textualizadas, iniciou-se o processo de preparo dos dados para a análise[41]. Após este percurso, chegou-se em três relações de análise:

- Relação 1: As demonstrações e o Matemático;
- Relação 2: As demonstrações e o Professor de Matemática; e,
- Relação 3: As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica.

Na seção anterior apresento os dados produzidos tratados e compilados em tabelas, seguidos de breves comentários sobre os resultados observados. Agora inicio uma discussão desses dados usando como fundamento o olhar da literatura e dos documentos oficiais.

Quando se considera a Matemática como uma ciência formal e acadêmica, o instrumental da Lógica fornece elementos para se definir de modo claro o que é uma demonstração. Segundo Garnica (1995, p. 10), demonstrar ou provar, é testar a veracidade de cálculos ou raciocínios apoiando-se em premissas tidas como verdadeiras. Além disso, demonstração é importante para o “fazer em Matemática”. Tal importância pode ser constatada pelo discurso e atividade presentes no cotidiano da prática científica da Matemática que reconhecem a demonstração, conforme sugere Garnica (1995, p.11), como elemento central do que se conhece por Matemática. Nesse sentido, a fala dos Formadores, quando indagados sobre o papel das demonstrações para o Matemático, reforçou essa ideia. Observe um trecho do depoimento do Formador γ:

> [...] para efeito do que o matemático chama de “deter o conhecimento matemático sistematizado, consolidado”, aí a demonstração já é o papel final, digamos, de juiz. [...] É a última palavra sobre uma ideia matemática, do ponto de vista do Matemático, não do Educador Matemático. [...] Como eu digo, a demonstração é a última palavra, mas ao ponto de vista mais da própria ciência matemática. Para aceitar algo matematicamente tem que estar demonstrado. Esse é o sentido lógico! (FORMADOR γ).

Apesar do reconhecimento da importância da demonstração e de esforços

---

[41] Mais detalhes sobre a metodologia da pesquisa e métodos utilizados para o preparo dos dados estão no início deste capítulo e no capítulo 4.

para tentar se aproximar de uma definição, a conceituação do termo “demonstrar” não é uma tarefa simples. Além das questões referentes à subjetividade da concepção do ato de demonstrar, que são construídas ao longo da vida acadêmica do matemático, as práticas profissionais somadas às concepções construídas no decorrer da sua formação influenciam diretamente na conceituação que o profissional (Formador ou Professor) fará para o termo. Enquanto para alguns “demonstrar” relaciona-se com o ato de “provar através de dispositivos lógicos e rigorosos” para outros pode se remeter ao ato de “justificar”, sem usar necessariamente regras e rigor matemático. Foi o que ocorreu com as falas dos entrevistados. Observe os exemplos:

> Então o papel da demonstração, para mim, é garantir que aquele resultado funcione. É eu querer entender quando aquilo funciona, por que funciona, quando falha... é isso. (FORMADOR α).
>
> [...] eu vejo a demonstração como uma forma de você ter entendimento em nível um pouco mais elevado sobre o termo em si, porque a própria demonstração explica o porquê que determinadas coisas funcionam. [...] Eu vejo a demonstração como uma forma de você entender a Matemática em outro nível de compreensão, além daquela parte de execução automática de tarefas, de cálculos [...]. (FORMADOR β).
>
> [...] o conceito de demonstração, à rigor, tem a ver com lógica, porque uma demonstração é uma sequência lógica de raciocínios, de argumentos, que conduzem a demonstrar justamente alguma proposição, alguma verdade, e desse ponto de vista, o conceito de demonstração deve ser entendido como um pouco restrito, ou seja, a demonstração é o procedimento lógico de chegar a uma verdade. A palavra “rigor”, aliás, vem de “regra”. Rigor é seguir regras, então a lógica, para fazer uma demonstração de algo matemático, tem que seguir certas regras. [...] o conceito de demonstração, eu acho, que deveria ser entendido mesmo em um sentido razoavelmente restrito, ligado à lógica. (FORMADOR γ).
>
> As demonstrações, nas minhas aulas, servem pra mostrar o “por que das coisas”, principalmente das fórmulas. Mostrar por que elas foram criadas. (PROFESSOR X).
>
> Então, quando dá certo, é mais uma “mostração” do que uma demonstração. (PROFESSOR Y).
>
> Eu acho que a demonstração é válida, como eu te falei, quando você faz, por exemplo: numa questão de potência você chegar à conclusão de porque aquela base se repete, [...] e depois em alguma questão lá que ele perceba e chegue a conclusão que essa é a fórmula. (PROFESSORA Z).

Cada um deles parece ter uma definição própria do que é demonstração, o que nos leva a concluir que o conceito de demonstração que cada profissional adota é, portanto, produto de um conjunto de fatores que vão desde sua formação acadêmica até suas vivências profissionais.

Além disso, o conceito de demonstração também pode ser relacionado ao contexto em que ela está inserida. Nos exemplos anteriores o Professor X e o Professor Y consideram que demonstrar é mostrar aos alunos o porquê das fórmulas, enquanto que a Professora Z considera que demonstrar é concluir (deduzir) fórmulas. Já o Formador α acredita que demonstrar é garantir a validade de resultados, enquanto que o Formador β considera que a demonstração garante a compreensão da Matemática em um nível mais elevado justamente porque ela explica o porquê das coisas, e o Formador γ afirma que demonstrar é o procedimento lógico de se chegar a uma verdade. Nestes exemplos a demonstração assume papéis diversos.

O papel e os significados das definições e das demonstrações são uma das distinções importantes entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. Moreira e David (2010, p. 23) afirmam que em ambos os campos é necessário caracterizar os respectivos objetos, validar afirmações a eles referidas e explicar os motivos pelos quais determinados fatos são aceitos como verdadeiros enquanto que outros não, porém a formulação das definições, das provas e o papel que desempenham em cada um dos contextos são diferentes.

No contexto da Matemática Acadêmica, segundo estes autores, devido à sua estrutura axiomática, todas as provas se desenvolvem com base nas definições e teoremas definidos previamente. As definições devem ser precisamente formuladas, pois ambiguidades na caracterização de um objeto matemático podem ocasionar contradições na teoria. Moreira e David (2010) apontam ainda que as demonstrações rigorosas e as definições formais, neste contexto, são elementos importantes tanto durante o processo de conformação, quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada. Conformação é o momento em que a comunidade avalia e eventualmente aceita um novo resultado, garantindo assim, sua incorporação ao conjunto dos resultados que são tidos como válidos.

Usualmente demonstrar está relacionado com três funções: convencer, validar e verificar. Neste sentido a demonstração é usada para eliminar as dúvidas, pessoais ou dos céticos. Tal ideia de objetivo, segundo De Villiers (2001), dominou de forma unilateral a prática de ensino e boa parte das discussões e investigações referentes ao ensino das demonstrações. Porém, a validação de conceitos e ideias matemáticas não é a única possibilidade para as demonstrações. Thurston (1994) considera, por exemplo, que a demonstração matemática é uma atividade interligada à construção da própria matemática servindo para trazer entendimento e compreensão. Já o modelo proposto por Hanna e Jahnke (1996) elenca os seguintes papeis para as demonstrações: (1) Verificar; (2) Explicar; (3) Sistematizar; (4) Propiciar a descoberta; e, (5) Propiciar a comunicação.

Além destes papeis, o modelo proposto por De Villiers (2001) acrescenta "desafio intelectual" na lista. Portanto, para o pesquisador as demonstrações podem desempenhar os papeis de: (1) Verificação; (2) Explicação; (3) Sistematização; (5) Descoberta; (6) Comunicação; e, (7) Desafio intelectual.

Algumas destas funções podem ser encontradas nas afirmativas dos Formadores e dos Professores entrevistados:

> É você fazer um caso, fazer outro, tentar generalizar, fazer. Não precisa resolver o problema necessariamente em todas as situações, mas uma situação em que você se convença de que aquilo funciona em alguns casos. (FORMADOR α).

A fala exposta acima é um exemplo da função de verificação. Segundo De Villiers (2001) verificar é convencer, a si mesmo e o outro, em relação à veracidade de uma afirmação. Enquanto que explicar é compreender o motivo pelo qual uma afirmação é verdadeira. Esta função pode ser observada na fala do Professor X:

> Então você começa, por exemplo, demonstrando a distância entre dois pontos num plano cartesiano [...] e, a partir dali, os alunos começam a entender o porquê das fórmulas, o que seriam as propriedades que nós usamos, porque que as fórmulas existem em si. (PROFESSOR X).

A função de sistematização, para De Villiers (2001) indica que demonstrar é organizar os resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas. A fala do Formador β exemplifica este papel:

> [...] com utilizações de exemplos, né? Exemplos básicos, particulares e, depois, apresentação da teoria, de uma forma mais abstrata, para que as pessoas entendam que, por exemplo, você faz uma demonstração na qual você está tratando de um determinado tema. Primeiro em casos específicos e depois mostra que essa situação pode ser utilizada em um caso mais geral. (FORMADOR β).

Descobrir relaciona-se com a possibilidade da criação de novos resultados, enquanto que a função comunicação refere-se à disseminação do conhecimento matemático entre matemáticos profissionais, professores e estudantes. Estes papeis podem ser observados no depoimento do Formador α:

> O que eu espero de um aluno que termina o curso de Licenciatura em Matemática é que ele tenha condições de pegar um texto matemático e ler. [...] que ele tenha condições de ler um enunciado, com épsilons, com deltas, com sequências convergindo, Álgebra, qualquer outro assunto... ou artigo, mesmo na Revista do Professor de Matemática, que ele tenha condições de ler aquele artigo, entender as definições, saber o que é um lema, o que é um teorema, uma proposição. [...] Saber não só ler, mas também se precisar, redigir um texto. Se ele descobriu um resultado, pensou em alguma coisa, como que ele vai convencer um colega, ou trazer um resultado, ou tentar escrever um artigo? (FORMADOR α).

A última função, desafio intelectual, refere-se à satisfação pessoal pelo êxito na construção de uma demonstração. Nenhum dos depoimentos apresentou referência a este tipo de papel de uma demonstração.

Considerando agora o contexto da Matemática Escolar, encontram-se dois elementos fundamentais que, segundo Moreira e David (2010), modificam significativamente o papel das definições e provas: (1) A "validade" dos resultados matemáticos que serão debatidos no processo de escolarização básica não é colocada em dúvida já que está garantida, em princípio, pela própria Matemática Acadêmica; (2) A aprendizagem, isto é, o desenvolvimento de uma prática pedagógica que objetive a compreensão do fato e a construção de justificativas que possibilitem ao aluno utilizá-lo de maneira conveniente e coerente na sua vida seja ela escolar ou extraescolar.

Além disso, a demonstração tida como "prova rigorosa" não é única forma aceitável de demonstração. Moreira e David (2010, p. 27) entendem que as justificativas menos formais, podem levar a uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas que estão em discussão. O Formador γ parece concordar com estes autores, observe:

> [...] quando se fala de demonstração, no geral, se envolvem muitos tipos de raciocínio que não são lógicos. Como eu já falei, são de tipos indutivos, de tipos analógicos, são raciocínios que não há regras implícitas a eles [...]. Esse tipo de raciocínio não é dedutivo, é indutivo: você induz uma verdade. Então, esse tipo de raciocínio não tem regras lógicas, restritas, mas é um raciocínio válido e é uma forma de aprender matemática. [...] Se você quer levar o tipo de raciocínio que se faz na escola, para o aluno aprender matemática, ou para o professor ensinar a pensar sobre matemática ao aluno, de repente ao invés de usar a palavra "demonstração" pode usar "argumentações matemáticas". (FORMADOR γ).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também apontam para esse caminho. Segundo o documento, o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades tais como: "[...] argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa." (BRASIL, 1998, p. 56). Neste sentido o Formador γ afirma que no nível escolar, mais do aprender a demonstrar é importante aprender outros tipos de argumentações:

> E, talvez, para nível escolar, o mais importante seja primeiro aprender outros tipos de argumentações. Por isso eu acho que o regimento que está sendo colocado, à nível escolar, onde se pede aprender a conjecturar, aprender a argumentar, aprender a refutar, essas coisas, são completamente válidas. É talvez o processo mais natural de aprender a argumentar. E sabendo argumentar, no geral, em todas as suas faces, o pessoal aprenderá depois a demonstrar, porque a demonstração é um tipo de argumentação que exige certas regras. Mas é uma consequência, a nível escolar acho que não vai ser o mais importante. (FORMADOR γ).

A atividade de produzir uma demonstração, bem como a sensibilidade ao seu interesse e a comunicação clara e correta das ideias matemáticas envolvidas, como aponta Boavida (2001, p. 11), tem mais importância do que o formato final da demonstração. Além disso, a prática da argumentação atua naturalmente no plano das discussões, onde é possível defender diferentes pontos de vista, de modo que ela pode ser um caminho que leva à demonstração.

Boavida (2001) acredita que ao se falar sobre o ensino de demonstração somos conduzidos a outras atividades matemáticas intimamente relacionadas com a atividade de demonstrar, tais como: (1) explorar, (2) investigar, (3) conjecturar e (4) argumentar. De modo que estas podem ser consideradas como as funções (os papeis) que as demonstrações assumem no contexto da sala de aula da Educação Básica. Quando analisamos os PCNs e as DCEs do Estado do Paraná, observamos a valorização destas atividades nos currículos de Matemática.

O termo "demonstração", propriamente dito, pouco apareceu nos PCNs e PCN+. Já as ações ligadas ao ato de demonstrar, tais como as propostas por Boavida (2001): intuição, dedução, formulação de hipóteses, argumentação, justificação de raciocínios e sistematização de ideias são algumas das sugestões dos documentos para o trabalho com demonstrações na sala de aula. As DCEs apontam para que o ensino de Matemática na escola possibilite aos alunos, análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias.

Algumas dessas funções da demonstração no contexto da sala de aula foram notadas na fala dos entrevistados. Observe alguns trechos dos depoimentos:

> [...] eu acho que a demonstração num sentido mais amplo: de você entender os resultados. De fazer uma construção até chegar, que tenha justificativas. Pode ser aí, pode ser em Geometria. Têm vários momentos

> que você pode deduzir expressões, pode perguntar se isso vale ou não vale, por que essa fórmula vale quando $b^2 - 4ac$ é positivo, o que acontece? (FORMADOR α).
>
> Então, eu acho que os alunos devem aprender, e eu insisto muito nisso, a pensar matematicamente. E nesse aprender a pensar matematicamente, significa aprender a argumentar de diversas formas sobre a matemática, entre elas, a demonstração. (FORMADOR γ).
>
> [...] Não utilizo aquela forma mais "burocrática" de colocar a demonstração, formalizada: "Vamos demonstrar que o triângulo tal é semelhante ao triângulo tal." Utilizo de uma forma mais simples. Mostro uma argumentação pra eles. (PROFESSOR X).
>
> Eu acho que a demonstração é válida, como eu te falei, quando você faz, por exemplo: numa questão de potência você chegar à conclusão de porque aquela base se repete, [...] e depois em alguma questão lá que ele [aluno] perceba e chegue à conclusão que essa é a fórmula. [...] Como demonstração daí é válido, que o aluno vá fazendo e chegue a essa conclusão. Porque daí ele enxerga. Na hora que ele conclui ele entende, ele expõe. (PROFESSORA Z).

Sobre as demonstrações em sala de aula, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 71) sugerem que é desejável que se trabalhe no terceiro ciclo (6º e 7º anos) no sentido de desenvolver a argumentação de tal maneira que os alunos não se satisfaçam somente produzindo respostas às afirmações, mas adotem atitude de sempre tentar justificá-las, para que no quarto ciclo (8º e 9º anos) se possa avançar com o trabalho a fim de que ele reconheça a importância das demonstrações e compreenda a prova de alguns teoremas.

A prática da argumentação, de acordo com os PCNs, é fundamental para a compreensão das demonstrações, mesmo que a argumentação e a demonstração utilizem frequentemente os mesmos conectivos lógicos, há "exigências formais para uma demonstração em Matemática que não podem estar presentes numa argumentação" (BRASIL, 1998, p. 86). As argumentações produzidas serão refinadas, gradativamente, com a assimilação de princípios da lógica formal possibilitando o desenvolvimento das demonstrações. Os documentos ressaltam que não é desejável abandonar as verificações empíricas, pois são elas que permitem a produção de conjecturas e a ampliação do grau de compreensão dos conceitos envolvidos.

Boavida (2001, p. 14) aponta que o trabalho desenvolvido pelo aluno nas fases de exploração e teste de uma conjectura é frequentemente um motivador para a produção da demonstração dessa conjectura e, neste contexto, o grande desafio para o professor é o de aproveitar tal entusiasmo. Não se trata de tornar a atividade de formulação de conjecturas subordinada à possibilidade de demonstração, pode acontecer do aluno formular uma conjectura que ele não seja capaz de demonstrar com os conhecimentos matemáticos que possui no momento. Isto, como salienta a pesquisadora, tem em si, valor educativo, além de proporcionar aos alunos um maior aprofundamento da compreensão sobre o trabalho dos Matemáticos.

As colocações da pesquisadora e as sugestões dos PCNs são pertinentes e de grande valia para o trabalho com demonstrações em sala de aula, no entanto, pelo que podemos observar na fala dos Professores entrevistados, este trabalho é pouco feito em sala de aula:

> Aquela demonstração lá [da graduação]: inviável pra esse ambiente da sala de aula. [...] Agora, é importante a demonstração? Com certeza. Eu acho que é necessário, mas não pode se tornar essencial. Se você começar a trabalhar só a demonstração como algo que tem que ser cobrado e que “se não souber a demonstração você não vai saber”, você perderá alunos pelo desinteresse. (PROFESSOR X)
>
> Trabalho bem pouco com demonstrações com meus alunos. Não por não conhecer, é que às vezes diante de uma situação tão adversa, você vê que não convém usar como recurso metodológico uma demonstração nas turmas que temos hoje. Temos poucos alunos interessados e um ambiente que não vai propiciar um aluno a acompanhar a demonstração (PROFESSOR Y).
>
> Se é possível trabalhar com demonstração na educação básica? Eu acho que é difícil. Talvez até fique mais claro, mas eu acho que é difícil. Porque eu tenho, alguns alunos brilhantes, bons. Mas assim, de cada turma de trinta alunos [...] que a gente tem, aproximadamente cinco sabem o que estão fazendo, que você pode dar qualquer resolução de problema que eles fazem. Têm outros cinco que não tem noção, tenho 9°ano, tem cinco nessa turma que não têm noção do que é “dois mais dois”, que não sabem o que é “dois ao quadrado”, que não sabem nada! O resto da turma, menos ainda. Não sabem o que é uma soma, não sabem nada, nada! (PROFESSORA Z).

Percebi, com estas falas, que os Professores, quando indagados sobre o trabalho com demonstrações em sala de aula, imediatamente associavam “demonstrar” com o papel da demonstração no contexto da Matemática Acadêmica e não com o papel no contexto da Matemática Escolar, isto é, apesar de considerarem que as demonstrações na sala de aula servem para mostrar, explicar, justificar e “chegar” em fórmulas, a noção de demonstração formal – aquela que usa os preceitos da lógica, os tradicionais “demonstre que” que fizeram parte de sua formação inicial – é muito forte para eles. Nenhum deles associou a ideia de demonstração, no ambiente da escola, com as funções de explorar, investigar, conjecturar e argumentar, no sentido proposto por Boavida (2001) e sugerido nos

PCNs (1998) e DCEs (2008). Estas associações que eles fizeram, sem perceber, pode ser um reflexo da formação que tiveram na graduação:

> A forma como as demonstrações foram abordadas em minha formação contribuíram mais para o meu conhecimento do que para a utilização em sala de aula. [...] Eu acho assim, como é uma Licenciatura – eu não lembro de todo o currículo, porque faz tempo que eu me formei – mas acredito que tinha que, não exageradamente, mas tinha que levar em conta que precisa ser trabalhado como fazer isso lá com os alunos reais. Não ficar imaginando um aluno "irreal", que não existe, uma turma "irreal"... uma turma "ideal". (PROFESSOR Y).
>
> As demonstrações em minha formação não contribuíram para eu utilizar em sala. (PROFESSORA Z).

Tanto o Professor Y, quanto a Professora Z afirmam que a maneira pela qual as demonstrações foram abordadas durante a formação inicial deles, não contribuiu para que fossem utilizadas em sala de aula. Já o Professor X considera que sua formação em licenciatura, na verdade foi um bacharelado:

> Quando eu era aluno, não falo agora... como eu saí fazem "só" 13 anos da Universidade, muita coisa deve ter avançado, com certeza. Mas, eu acho que o nosso curso tinha o nome de Licenciatura só de fachada, né? (PROFESSOR X).

Por outro lado, os Formadores entrevistados, quando questionados sobre as demonstrações na formação do Professor de Matemática, com exceção do Formador γ, demonstraram acreditar que a licenciatura não difere do bacharelado:

> Não vejo muita diferenciação no papel da demonstração para o Matemático e para o Professor de Matemática da Escola Básica, porque, repare, o licenciado tem atribuições de bacharel, pelo que me consta, então eu acho que o teor de conteúdo que Matemáticos devem ter, quando as matérias são exclusivamente de Matemática, devem ser os mesmos. Primeiro, pela atribuição que o diploma exerce: o licenciado tem atribuições de bacharel. O Licenciado em Matemática vai fazer um mestrado, por exemplo. E segundo, eu não acho assim que deva haver uma diferenciação, levando-se em conta a atual situação da qualidade que os alunos estão chegando na universidade, em termos matemáticos. [...] Então, por isso, eu acho que a Matemática que um bacharel e um licenciado devem ter não devem ter muita diferença não. Ainda mais nas disciplinas comuns. Porque há disciplinas de Matemática que bachareis não veem, isso já é uma outra história, mas as disciplinas comuns, como Cálculo, por exemplo, tem que ser vistas no mesmo nível de dificuldade, no mesmo nível de exigência. (FORMADOR β).
>
> Pode dizer assim: "Ah a Federal" sei lá, "o curso de Licenciatura em Matemática da Federal é muito teórico" ou "dedica pouco tempo à formação do professor" em, por exemplo, Didática e Metodologia, mas é assim. Eu acho que essa parte da demonstração, com esse papel, não como o cara vai usar isso depois lá na sala de aula, mas com esse papel eu acho que forma. (FORMADOR α).

Outro fato observado na fala dos Formadores, novamente com exceção do Formador γ, é que mesmo formando professores eles não sabem como poderia ser feito um trabalho com os licenciandos de tal modo as demonstrações fossem usadas nas escolas. Além disso, por vezes mostram desconhecimento sobre a realidade da sala de aula. Observe os trechos:

> Eu acho que na formação dos professores... bom essa é uma opinião pessoal, minha, como que eles vão usar isso depois eu não sei. Eu não sei te dizer assim “como ensinar demonstração” ou “como é passar a demonstração pros alunos aqui da graduação, no curso de formação de professores de tal modo que eles possam fazer algo lá na frente”. Isso eu não sei responder. (FORMADOR α).
>
> Mas, assim, formas metodológicas de aplicação de demonstração, isso eu deixo para os Educadores Matemáticos. Eu sou bacharel. Não tenho experiência nenhuma no assunto. (FORMADOR β).

Quando o assunto é formação de professores, um documento que pode auxiliar na discussão são as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2001). As Instituições de Ensino Superior (IES), segundo o documento, são autônomas para elaborar o currículo da graduação em Matemática respeitando o perfil do profissional que deseja formar, bem como as legislações pertinentes.

Devido ao crescente campo de aplicações da Matemática em outras áreas, tais como Ciências Econômicas, Biológicas, Humanas e Sociais, e também pela longa história de intercâmbio com a Física e com as Engenharias, o profissional graduado em Matemática, segundo as DCNs, é capaz de ocupar posições no mercado de trabalho em áreas onde o raciocínio abstrato é ferramenta indispensável. Assim, o documento sugere que os programas de graduação sejam flexíveis para contemplar esse grande campo de interesses.

Além disso, o documento ressalta que o objetivo da modalidade licenciatura é o de formar professores para a Educação Básica.

O currículo do curso de Matemática, tanto no Bacharelado quanto na Licenciatura, deve ser elaborado, segundo as DCNs (BRASIL, 2001), de modo a desenvolver habilidades e competências, a saber:

- Capacidade de expressar-se, escrita e oralmente, com clareza e precisão;
- Capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas;

- Capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento;
- Capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares;
- Habilidade para identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, fazendo uso do rigor lógico-científico na análise da situação;
- Fazer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;
- Educação abrangente para o entendimento do impacto das soluções encontradas em um contexto social e global;
- Conhecer questões contemporâneas;
- Participar de programas de formação continuada;
- Realizar estudos de pós-graduação;
- Trabalhar a Matemática com outros campos de saber.

Nota-se aí que o currículo do curso de Matemática, independente da modalidade, deverá formar um profissional com características comuns. Tanto licenciados quanto bachareis precisam desenvolver determinadas características durante a formação. Nos itens citados acima não há menção ao termo "demonstração", mas sim aos tipos de raciocínio que conduzem a uma demonstração e alguns dos papeis que a demonstração assume para o Matemático, por exemplo, "Capacidade de expressar-se, escrita e oralmente, com clareza e precisão" e "Habilidade para identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação". Portanto, em alguns momentos as modalidades licenciatura e bacharelado serão comuns, porém, não precisam ser tratadas da mesma forma. O Formador γ sugere que apesar destes momentos de intercessão de disciplinas, o enfoque poderá ser diferente para a licenciatura e para o bacharelado:

> Sou da opinião que o Professor de Matemática tem que saber [demonstrar]. Não com o rigor de um matemático profissional, que vai utilizar para aplicar a Matemática em outro contexto, em situações mais avançadas, não! [...] já trabalhei com a licenciatura em diversas oportunidades e diversas disciplinas. E sempre tento dar um enfoque que possa ser feito para ambas as situações, para bachareis e para licenciados, porque o bacharel também precisa aprender a argumentar em sua ciência. Ele vai, claro, aprender a argumentar com conteúdos avançados, mas o licenciado deve aprender a argumentar com conteúdos elementares. Então a questão é a diferença de conteúdo, talvez. De nível de conteúdo, mas enquanto forma e raciocínio, ambos precisam da mesma coisa. [...] Repito, acho que o licenciado, de repente, deve fazer isso com conteúdos mais elementares, enquanto que o bacharel pode fazê-lo com conteúdos mais avançados, mas não há diferença no tipo de argumentação. (FORMADOR γ).

As DCNs (BRASIL, 2001) apontam que além destas habilidades e competências, o Educador Matemático necessita desenvolver a capacidade de:

- Elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica;
- Analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
- Analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a Educação Básica;
- Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
- Perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;
- Contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica.

As competências e habilidades citadas são específicas para o Professor de Matemática, logo, não cabem a um curso de bacharelado. Do mesmo modo que as especificidades do bacharel não cabem para um licenciado. Portanto, apesar dos pontos comuns que as modalidades do curso apresentam, acredito que a licenciatura não pode ser reduzida a um bacharelado nem vice-versa. Pois, cada uma delas apresenta características próprias que devem ser consideradas ao se elaborar um currículo ou uma ementa de disciplina para o curso de Matemática.

Neste sentido o depoimento do Formador γ é bem interessante:

> [...] Talvez a última etapa de rigor no pensamento é a demonstração. O professor deve atingir esse nível de argumentação. [...] O professor deve ser capaz disso, porque ele tem condições mentais de atingir esse nível. [...] Agora, depende de como os Professores Formadores ensinam essas coisas, porque, muitas vezes, vão para o campo das pesquisas... Enfim, não abordam, não enfatizam esse aspecto do pensamento matemático. Inclusive, esse pensamento matemático de demonstração se pode fazer com conteúdos razoavelmente elementares. Não tem que atingir um conteúdo avançado em Matemática para aprender a pensar matematicamente. Então, eu acho que o professor deve aprender demonstração! Deve aprender a demonstrar em situações elementares de conteúdos. Aprender a demonstrar não significa saber muito de matemática e sim saber pensar matematicamente. (FORMADOR γ).

O Formador γ acredita que a demonstração é a última etapa de rigor no pensamento matemático e o professor deve ser capaz de chegar neste nível de argumentação, pois ele tem condições mentais para isso. Porém, a forma pela qual os Formadores ensinam as demonstrações não contribui para alcançar este nível de argumentação. Ele afirma que muitos dos formadores vão para o campo da pesquisa e não enfatizam o aspecto do pensamento matemático. O Formador γ acrescenta que o professor deve aprender a demonstrar, mas pode fazer isso com conteúdos mais elementares.

Portanto, em relação à formação do Professor de Matemática, penso que a licenciatura e o bacharelado, apesar de terem disciplinas em comum, devem ser abordados com olhares diferentes, pois formarão dois tipos de profissionais: um que trabalha diretamente com o ensino de matemática e outro que trabalha com pesquisas em matemática. É certo que independente da modalidade cursada, o bacharel pode assumir funções de licenciado e vice-versa. O que queremos salientar é o foco que deve ser dado para cada uma delas e não tratar as duas modalidades como uma só, como os Professores entrevistados relataram.

Outro ponto observado nas entrevistas é que as demonstrações parecem dar uma segurança para o professor. Confira alguns depoimentos:

> O nível de compreensão acima daquele que é visto em sala de aula, ou que pode ser visto em sala de aula, eu acho desejável, pois acredito piamente no seguinte fato: acredito que você tendo mais domínio no assunto, você explica ele de uma maneira mais completa e mais segura para as pessoas. [...] Eu sou muito adepto do seguinte: quando você explica com segurança, você torna as pessoas também um pouco mais seguras e confiantes no que está sendo passado. Se você trabalha com insegurança, se você não entende direito do que está falando, você transmite desconfiança para as pessoas e o aprendizado fica comprometido. (FORMADOR β).
>
> [...] eu acho que sem a demonstração ele [professor] vai ficar com falhas no embasamento teórico. (PROFESSOR X).
>
> [...] mas quando entendia o processo no todo, realmente, dava uma firmeza, dava uma segurança no entendimento da matéria. Então, me passava segurança, depois que eu conhecia o processo inteiro [...]. Acredito que a demonstração fortaleceu a minha base de conhecimento, fortaleceu sim. Por mais que seja tenebrosa, como eu disse, ou muito trabalhosa. (PROFESSOR Y).

Pelo que foi dito nos depoimentos acima, as demonstrações fortalecem o embasamento teórico do professor, além de deixá-lo mais seguro para trabalhar com os conteúdos em sala de aula. Apesar de acreditarem que as demonstrações são importantes para a formação do professor e apresentarem um discurso de que o conhecimento delas proporciona segurança, os Professores entrevistados pouco ou nunca trabalham com atividades demonstrativas em sala de aula. Além dos fatores já citados, as questões inerentes à dinâmica da sala de aula também são possíveis motivos para que as demonstrações não tenham espaço e nem vez na escola. Observe os trechos que seguem:

> Eu acho que isso, o desinteresse, ele aumenta à medida que vai passando o nível, que o tempo vai passando para os alunos. Eles possuem um certo interesse por algumas demonstrações eu percebo isso. Então, no 6º ano, você fala sobre as Regras de Divisibilidade: “como que você sabe essas regras?”. Então ali eles mostram interesse. Chega até o 8º, 9º ano você trabalha alguns conteúdos eles olham e “Tá, e daí?”. Você vai falar sobre Fórmula de Bháskara, se você não trouxer algo convincente pra eles, eles já vão desistir de cara. Eu percebo essa desistência, essa, de repente, falta de vontade de buscar a informação. Eles realmente não têm muita vontade de buscar a informação. (PROFESSOR X).

> Trabalho bem pouco com demonstrações com meus alunos. Não por não conhecer, é que às vezes diante de uma situação tão adversa, você vê que não convém usar como recurso metodológico uma demonstração nas turmas que temos hoje. Temos poucos alunos interessados e um ambiente que não vai propiciar um aluno a acompanhar a demonstração. [...] Não acho que seja pouco viável trabalhar com demonstrações na Escola Básica. Você tem que sentir a turma e o momento, né? Compensa? Essa turma está em um nível que vai acompanhar uma demonstração? Então, aquelas muito simples, muito básicas, sim: tem que fazer! Agora aquelas um pouquinho mais trabalhosas, em muitas situações, não. Não vale a pena! E, em muitas situações, nem para dizer de onde veio a fórmula a gente não consegue. Já tentei, por experiência própria mesmo, mas você precisa de um aluno queira entender aquilo e um grupo que colabore também. [...] Nós não temos um ambiente propício para trabalhar com demonstrações. (PROFESSOR Y).

> Tem algumas turmas que eu não consigo aquilo que eu quero, é meio difícil, tem algumas turmas mais difíceis assim: é, o aluno que chega aqui e acha que não tem a necessidade de estudar. Ele não consegue ver que ele é o que mais precisa estudar. [...] Se é possível trabalhar com demonstração na educação básica? Eu acho que é difícil. Talvez até fique mais claro, mas eu acho que é difícil. Porque eu tenho, alguns alunos brilhantes, bons. Mas assim, de cada turma de trinta alunos [...] que a gente tem, aproximadamente cinco sabem o que estão fazendo, que você pode dar qualquer resolução de problema que eles fazem. Têm outros cinco que não tem noção, tenho 9°ano, tem cinco nessa turma que não têm noção do que é “dois mais dois”, que não sabem o que é “dois ao quadrado”, que não sabem nada! O resto da turma, menos ainda. Não sabem o que é uma soma, não sabem nada, nada! (PROFESSORA Z).

O Professor X fala sobre o desinteresse do aluno em buscar as informações. Para ele essa desistência vai aumentando conforme o aluno vai ficando mais velho, ou seja, no 6º ano ele ainda tem interesse por alguns tópicos, já no 9º ano o interesse é muito menor. O depoimento do Professor Y trata também do desinteresse dos alunos. Como grande parte da turma não se interessa, os poucos que gostariam de aprender não terão um ambiente propício para acompanhar a demonstração. De modo que utilizar as demonstrações como recurso metodológico nas turmas de hoje, em muitos dos casos, não compensa. O Professor Y acredita que é possível trabalhar com demonstrações em sala de aula, mas primeiro é necessário “sentir” a turma, isto é, analisar se isso será viável, se eles têm condições de acompanhar e se vai ser significativo. A Professora Z, em seu depoimento, também relata a falta de interesse dos alunos. Além disso, ela considera que o trabalho com demonstrações em sala de aula talvez até deixasse as coisas mais claras, mas é difícil, pois a maior parte dos alunos de uma turma não tem base para acompanhar uma demonstração.

E como poderia ser feito o trabalho com demonstrações em sala de aula? Tanto nos PCNs (BRASIL, 1998) quanto nas DCEs (PARANÁ, 2008) os conteúdos relacionados à Geometria formam um campo muito vasto para a utilização de exemplos concretos e atividades investigativas. Estas experiências, apesar do grande convencimento que podem causar aos alunos, não constituem uma prova matemática. Elas podem ser aceitas como prova nos 6º e 7º anos, mas a partir do 8º ano devem funcionar como desencadeadoras de conjecturas e processos que conduzam às justificativas mais formais.

A aprendizagem da demonstração é um percurso. Boavida (2001) acredita que os alunos constroem uma ideia cada vez mais correta do que é uma demonstração ao longo dos anos de escolaridade, assim, restringir a aprendizagem de demonstrações apenas aos anos finais do Ensino Básico, por considerar que os alunos mais velhos já atingiram a maturidade lógica necessária para compreender: definições abstratas, distinguir hipótese de tese, axioma, teorema e corolário, e ainda distinguir condições suficientes de necessárias, não parece ser o caminho mais adequado para que os alunos possam aprender a demonstrar e sintam a necessidade e gosto por tal atividade.

A fala do Formador γ sintetiza nossa discussão:

> Um educador matemático é um professor de matemática. Um professor de matemática tem que saber raciocinar matematicamente, tem que saber pensar matematicamente. Porque a Matemática é uma forma de pensamento, não é saber mais Matemática, não é saber mais algoritmos, mais fórmulas. Tem que saber pensar matematicamente e esse pensar matematicamente é uma gama de formas de argumentações diferentes que, entre elas, está a demonstração, que é a última etapa, já falamos, mas que para um matemático é a palavra final sobre o que é válido matematicamente. Mas para um estudante de matemática, que vai aplicar em outra situação, para um aluno pequeno... enfim, para outros casos, não se precisa desse nível de rigor para aceitar: um engenheiro, hoje, usa matemática. Ele não sabe demonstrar, nem precisa demonstrar, a menos que queira, digamos, confeccionar métodos novos dentro de sua engenharia, mas um engenheiro, que é usuário da matemática, não precisa saber demonstrar, mas precisa saber como os conceitos que ele está

> utilizando foram desenvolvidos, como se concatenaram, como se formaram. Isto está envolvido na forma de pensar matematicamente sobre o problema de engenharia. Então [...] eu incluiria a demonstração em um conceito mais amplo: a argumentação matemática. (FORMADOR γ).

A argumentação e o pensamento matemático, estas são as peças chave para uma demonstração. Acredito que mais do que redigir uma demonstração formal, o aluno precisa aprender a pensar a matemática e a pensar matematicamente. O professor e o matemático também precisam saber demonstrar, cada um dentro da sua Matemática. O depoimento do Formador γ representa bem esta ideia: a demonstração como uma gama de argumentações.

Por fim, destacamos que os Formadores e os Professores entrevistados, em alguns momentos apresentam um discurso muito próximo, como por exemplo, concordam com a importância das demonstrações e que elas dão segurança para o profissional. Mas em outros momentos suas falas são muito distantes, por exemplo, quando falam da formação do professor. Os Formadores α e β consideram que a licenciatura e o bacharelado devem ser tratados com o mesmo rigor e exigência, enquanto que o Formador γ e os Professores X, Y e Z acreditam que a licenciatura não pode ser abordada da mesma maneira que um bacharelado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Demonstrações são uma constante na vida de um estudante do curso de Matemática. Independente da modalidade, licenciatura ou bacharelado, o graduando irá se deparar com elas. Porém, nem sempre é considerado o real motivo de se "aprender" uma demonstração, ou ainda, a utilidade de uma demonstração para o futuro profissional ou, simplesmente, o que é demonstrar. Apenas fala-se "demonstre" ou "prove que" e assim é feito: o estudante faz, faz e faz, muitas vezes sem saber "o que" e "por que" está fazendo. Apenas reproduz, ou tenta reproduzir, o que lhe é "ensinado". O presente estudo é fruto dessas inquietações.

Tendo como questão norteadora a seguinte indagação: **Qual o papel das demonstrações, na formação de professores de Matemática, na visão do Formador de professores e na visão do Professor de Matemática da Educação Básica?** Objetivou-se compreender as visões do Professor de Matemática da Educação Básica e do Formador de professores de Matemática em relação ao papel que o uso das demonstrações desempenha em dois contextos: para a formação do professor de Matemática; e, na sala de aula de Matemática da Educação Básica.

Para a realização deste estudo, primeiramente busquei evidenciar o olhar de alguns dos pesquisadores em Educação Matemática que se dedicaram a estudar o papel do uso das demonstrações nos contextos da formação inicial, sala de aula e na própria Matemática. Em seguida procurei o que as Diretrizes Curriculares Nacionais sugerem em relação às demonstrações no curso de Matemática, mais especificamente na licenciatura. E na sequência fiz o mesmo com os Documentos Oficiais para a Educação Básica (Parâmetros Curriculares Nacionais e Diretrizes Curriculares Estaduais) com o objetivo de evidenciar o que é sugerido em relação ao trabalho com as demonstrações no contexto escolar.

Após estes levantamentos elaboramos um roteiro com questões pertinentes ao tema para que se pudesse entrevistar os Formadores e os Professores de Matemática sem perder nosso foco. Conforme os colaboradores desenvolviam sua fala, aproveitava para ir inserindo meus questionamentos. O roteiro de entrevista para os Formadores continha as seguintes questões:

1) Qual o papel das demonstrações para você? Essa importância/papel que você dá às demonstrações enquadra-se mais para o Matemático ou para o Professor de Matemática?

2) Você acredita que na Escola Básica é possível trabalhar com demonstração? É possível? É viável trabalhar com demonstrações nesta etapa de ensino?
3) Como o professor poderia trabalhar com demonstrações em sala de aula?
4) Você acredita que o modo como as demonstrações são abordadas no curso de formação de professores de Matemática motiva o futuro docente a trabalhar com demonstrações em sala de aula? O que você pensa sobre?

Já o roteiro de entrevista para os Professores visava responder aos seguintes questionamentos:

1) Qual o papel das demonstrações para a sua formação como Professor de Matemática? Você considera que elas foram importantes?
2) Você consegue fazer relações entre as demonstrações que viu durante a graduação e os conteúdos que tem que ensinar?
3) Você acha viável ou razoável trabalhar com demonstrações com seus alunos? Como você faz isso no seu dia-a-dia, na sua prática de sala de aula?

Para a escolha dos colaboradores elaboramos um “perfil” com características para os Formadores e para os Professores que gostaríamos de entrevistar. Os Formadores deveriam lecionar para o curso de Licenciatura em Matemática da UFPR e atuar nesta instituição há pelo menos cinco anos. Já os Professores deveriam ser licenciados em Matemática pela UFPR, há mais de cinco anos, com dois padrões de trabalho (40h semanais), lecionando em colégios estaduais.

Os formadores entrevistados, denominados Formador α, Formador β e Formador γ, foram escolhidos por enquadrarem-se no perfil idealizado e por terem aceitado colaborar com a pesquisa. O Formador α é Matemático Puro, graduou-se na UFPR e leciona nesta instituição desde final de 1995. O Formador β é um Matemático Aplicado, graduou-se na Unicamp e leciona na Federal desde 2004. E o Formador γ graduou-se em Matemática pela Universidad Nacional de Ingeniería (Lima-Peru), tem por formação a área de Lógica, enquadrando-se mais na Matemática Pura, porém aproximou-se bastante da Educação Matemática – por este motivo que decidimos entrevistá-lo – leciona na UFPR desde 1993.

Os professores entrevistados, aqui denominados Professor X, Professor Y e

Professora Z, foram escolhidos por enquadrarem-se no perfil proposto e por aceitarem colaborar com a pesquisa. O Professor X e a Professora Z atuam na mesma instituição de ensino (colégio localizado na região do bairro Tarumã, em Curitiba), mas em turnos diferentes, enquanto que o Professor Y leciona em um colégio do município de Pinhais. O Professor X formou-se em 2000 e leciona desde o 2º ano da faculdade, o Professor Y formou-se em 1994 e a Professora Z formou-se em 1975, ambos atuam em sala de aula desde o 1º ano da faculdade.

As seis entrevistas foram gravadas em áudio, mediante a autorização dos entrevistados, e realizadas em dias diferentes e em locais que fossem mais viáveis para os colaboradores: cada Formador foi entrevistado em seu gabinete, situado no terceiro andar do Prédio de Administração do campus Centro Politécnico da UFPR; os Professores X e Z concederam as entrevistas no colégio em que trabalham; e, o Professor Y foi entrevistado em sua residência.

Iniciei a conversa relatando um pouco da minha formação inicial, seguida de breve relato sobre minha pesquisa. Depois solicitei que o entrevistado relatasse brevemente sua trajetória até a docência no Ensino Superior, no caso dos Formadores, ou até a sala de aula da Educação Básica, no caso dos Professores. Conforme eles falavam, ia inserindo meus questionamentos baseados no roteiro previamente elaborado.

Findada as entrevistas, elas foram transcritas e textualizadas. Depois, receberam novo tratamento para que pudessem ser analisadas, sendo este último inspirado nos procedimentos da Análise de Conteúdo. Primeiro realizei leituras exaustivas a fim “mergulhar completamente” nas informações obtidas. Neste ponto pude notar que em todas as entrevistas além do tema “demonstrações”, objeto desta pesquisa, três grandes grupos interrelacionados se sobressaiam: as demonstrações para o Matemático, para o Professor de Matemática e na sala de aula da Educação Básica. Estes grupos apareceram nos depoimentos devido às perguntas norteadoras realizadas aos depoentes no momento da entrevista. Assim, as falas dos entrevistados foram divididas em três relações de análise: (1) As demonstrações e o Matemático; (2) As demonstrações e o Professor de Matemática; e, (3) As demonstrações e a sala de aula da Educação Básica.

Na primeira relação os depoimentos dos Formadores α, β, γ e dos Professores X, Y, Z referem-se ao papel das demonstrações para o Matemático. Na segunda relação as afirmações remetem ao papel das demonstrações para o

Professor de Matemática que atua na Educação Básica e na última as falas tratam do papel das demonstrações na sala de aula da Educação Básica.

O passo seguinte foi realizar recortes nas falas dos depoentes separando-as de acordo com as relações estabelecidas. Neste processo optei por literalmente “recortar e colar” as falas agrupando-as em cada relação.

Em seguida iniciei a categorização no sentido proposto por Bardin (2011), ou seja, classificar por diferenciação e reagrupamento, os elementos que constituem um conjunto. As categorias são classes que reúnem um grupo de elementos sob um título genérico. Esse agrupamento é feito considerando as características comuns dos elementos. Em minha categorização usei lápis de cor para colorir as palavras/frases comuns, dentro de cada relação, com as mesmas cores. Tal procedimento foi um facilitador para elencar as categorias, pois elas emergiram dos depoimentos de forma muito natural. As cores foram responsáveis por isso: ajudaram a deixar mais visíveis as informações que se repetiam e a quantidade de vezes que apareciam, tanto considerando a relação como um todo ou apenas olhando para as falas de cada depoente, dentro da relação de análise.

Depois realizei a leitura de cada uma delas, a fim de reclassificá-las em novas categorias, ou seja, reduzir a quantidade de categorias fazendo a fusão das que continham temas relacionados e/ou que possuíam ligação umas com as outras.

Na primeira relação de análise, “As demonstrações e o Matemático” as categorias elencadas foram: Categoria 1: O papel das demonstrações para o Matemático; Categoria 2: Processos lógicos, rigor e linguagem; e, Categoria 3: Intuição e Tipos de Raciocínio.

Na segunda relação de análise, “O papel das demonstrações para o Matemático”, as categorias eram: Categoria 1: O papel das demonstrações para o Professor; Categoria 2: Licenciado x Bacharel; Categoria 3: Formação abrangente e Qualidade do ensino; Categoria 4: Domínio do conteúdo e Segurança; e, Categoria 5: Rigor e Linguagem.

E na última relação, “O papel das demonstrações para o Professor”, as categorias foram: Categoria 1: O papel das demonstrações em sala de aula; Categoria 2: Mostrar e explicar; Categoria 3: Pensar Matematicamente; Categoria 4: Mostrar o trabalho do Matemático; e, Categoria 5: Desafios da sala de aula.

Na sequência compilei tabelas para cada relação de análise, separando as falas dos Formadores das falas dos Professores para melhor compreensão dos dados. Após a apresentação das tabelas teci breves comentários sobre o que foi observado. Em seguida apresentei meu olhar, iniciando uma discussão fundamentada na revisão de literatura e nos documentos oficiais consultados.

Um dos primeiros aspectos a se considerar é que cada entrevistado parece ter uma definição própria do que é demonstração, o que nos leva a concluir que o conceito de demonstração que cada profissional adota é, portanto, produto de um conjunto de fatores que vão desde sua formação acadêmica até suas vivências profissionais. A importância da demonstração para o “fazer” em Matemática também é consenso entre eles.

Além das questões referentes à subjetividade da concepção do ato de demonstrar, que são construídas ao longo da vida acadêmica do matemático, as práticas profissionais somadas às concepções desenvolvidas no decorrer da sua formação influenciam diretamente na conceituação que o profissional fará para o termo. Assim, o papel que as demonstrações podem assumir dependerá do contexto em que ela está inserida. Por exemplo: O Professor X e o Professor Y consideram que demonstrar é mostrar aos alunos o porquê das fórmulas, enquanto que a Professora Z considera que demonstrar é concluir (deduzir) fórmulas. Já o Formador α acredita que demonstrar é garantir a validade de resultados, enquanto que o Formador β considera que a demonstração garante a compreensão da Matemática em um nível mais elevado justamente por explicar o porquê das coisas, e o Formador γ afirma que demonstrar é o procedimento lógico para se chegar a uma verdade.

O papel e os significados das demonstrações são uma das distinções importantes entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, como apontam Moreira e David (2010). Em ambos os campos é necessário caracterizar os respectivos objetos, validar afirmações a eles referidas e explicar os motivos pelos quais determinados fatos são aceitos como verdadeiros enquanto que outros não, porém a formulação das definições, das provas e o papel que desempenham em cada um dos contextos são diferentes.

Usualmente demonstrar está relacionado com três funções: convencer, validar e verificar. Mas demonstrar não se reduz apenas a estes pontos. Pesquisadores como Thurston (1994), Hanna e Jahnke (1996) e De Villiers (2001) propõem em seus estudos modelos de funções para as demonstrações. Este último é o que tomamos por base em nosso estudo. Para De Villiers (2001) as demonstrações podem desempenhar os papeis de: (1) Verificação; (2) Explicação; (3) Sistematização; (5) Descoberta; (6) Comunicação; e, (7) Desafio intelectual. Estas funções, com exceção da última, foram constatadas na fala dos entrevistados.

Já no contexto da Matemática Escolar a demonstração tida como “prova rigorosa” não é única forma aceitável de demonstração. Moreira e David (2010) entendem que as justificativas menos formais, podem levar a uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas que estão em discussão. E os Parâmetros Curriculares Nacionais também apontam para esse caminho. Segundo o documento, o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades tais como: “[...] argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa.” (BRASIL, 1998, p. 56). Estes elementos apareceram muito fortemente nas falas do Formador γ.

As demonstrações, quando tratadas neste contexto, têm por funções o que Boavida (2001) propõe: (1) explorar, (2) investigar, (3) conjecturar e (4) argumentar. Estes termos também apareceram nos PCNs e DCEs do Estado do Paraná. No entanto o termo “demonstração”, propriamente dito, pouco apareceu nos documentos consultados. Já as ações ligadas ao ato de demonstrar: justificar raciocínios, deduzir, formular hipóteses, argumentar e sistematizar ideias são algumas das sugestões de trabalho com demonstrações na sala de aula.

As DCEs (2008) também apontam que o ensino de Matemática deve possibilitar aos alunos, análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias. E o trabalho desenvolvido pelo aluno nas fases de exploração e teste de uma conjectura, como garante Boavida (2001), é frequentemente um motivador para a produção da demonstração dessa conjectura e, neste contexto, o grande desafio para o professor é o de aproveitar tal entusiasmo.

O que notei na fala dos Professores entrevistados, em relação a estes aspectos, é que quando indagados sobre o trabalho com demonstrações em sala de aula, imediatamente associavam “demonstrar” com o papel da demonstração no contexto da Matemática Acadêmica e não com o papel no contexto da Matemática Escolar, isto é, apesar de considerarem que as demonstrações na sala de aula servem para mostrar, explicar, justificar e “chegar” em fórmulas, a noção de demonstração formal – aquela que usa os preceitos da lógica, os tradicionais “demonstre que” que fizeram parte de sua formação inicial – é muito forte para eles.

Nenhum deles associou a ideia de demonstração, no ambiente da escola, com as funções de explorar, investigar, conjecturar e argumentar, no sentido proposto por Boavida (2001) e sugerido nos PCNs (1998) e DCEs (2008). As associações que eles fizeram, sem perceber, pode ser um reflexo da formação que tiveram na graduação, tendo em vista que, em sua maioria, os professores da referida licenciatura são mestres e doutores nas áreas de Matemática Pura e Matemática Aplicada, com predominância do primeiro sobre o segundo. Esta formação dos docentes, por sua vez, estabelece uma marca característica no curso: forte ligação com o rigor e a técnica.

Não ter contato com profissionais que têm conhecimento da realidade da futura atuação de seus alunos trata-se de um fato indesejável em um curso de graduação que se destina a formar profissionais para a Educação Básica. Tal desconhecimento não é tido como problemático para os Formadores, dado que, não se sentem incomodados em explicitar que desconhecem a realidade das salas de aula. E isto nos leva a outro questionamento: por que um Professor da Educação Básica não está atuando (ou não pode atuar) também na sala de aula da Universidade? Fato curioso este, já que é comum médicos, advogados e engenheiros trabalharem simultaneamente em suas áreas de formação e com a formação de novos profissionais.

Outro ponto que observei na fala dos Formadores, exceto do Formador γ, é que para eles a licenciatura e o bacharelado não diferem, por isto devem ter o mesmo nível de rigor e exigência. Ademais, mesmo formando professores, eles não saberiam como poderia ser feito um trabalho com os licenciandos de tal modo que as demonstrações fossem usadas nas escolas. Portanto, em relação à formação do Professor de Matemática, penso que a licenciatura e o bacharelado, apesar de terem disciplinas em comum, devem ser abordados com olhares diferentes, pois formarão dois tipos de profissionais: um que trabalha diretamente com o ensino de matemática e outro que trabalha com pesquisas em matemática. É certo que independente da modalidade cursada, o bacharel pode assumir funções de licenciado e vice-versa. O que quero ressaltar é que o foco dado a cada uma delas pode ser diferente.

Notei também que os Formadores e Professores acreditam que as demonstrações parecem dar uma segurança para o professor. Conhecendo as demonstrações eles se sentem mais seguros e confiantes para passar os conteúdos em sala. Isto foi um consenso entre os seis entrevistados. Mas até que ponto saber mais Matemática me torna um profissional mais seguro? Será que o fato de ser uma excelente aluna de uma disciplina de “Análise”, “Cálculo” ou “Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas” durante a graduação me torna completamente capaz de resolver, e mais, ensinar um exercício “trivial” de trigonometria para alunos do Ensino Médio?

Outro aspecto interessante observado é que apesar de acreditarem que as demonstrações são importantes para a formação do professor e apresentarem um discurso de que o conhecimento delas proporciona segurança, os Professores entrevistados pouco ou nunca trabalham com atividades demonstrativas em sala de aula. Além dos fatores já citados, as questões inerentes à dinâmica da sala de aula também são possíveis motivos para que as demonstrações não tenham espaço e nem vez na escola. A maior dificuldade relatada pelos Professores é a falta de interesse do aluno, além da defasagem acumulada. Estes são dois pontos que, para eles, tornam o trabalho com demonstrações difícil. Além disso, o ambiente da sala de aula, segundo os relatos, não é próprio para este trabalho, justamente por poucos alunos mostrarem interesse e/ou terem condições de acompanhar uma demonstração. De tudo isto fica a seguinte questão: a realidade da sala de aula pode apresentar muitos obstáculos para a ação docente, no entanto, será que o discurso de que “é muito difícil para o aluno” ou “não demonstram interesse” é usado somente neste caso (quando se tratam das demonstrações) ou também em relação ao uso de novas tecnologias, por exemplo? Pois para nós professores o “sair da zona de conforto” requer mais horas de planejamento, pesquisa e reflexão.

Em se tratando da aprendizagem da demonstração, acredito que ela é um percurso que não deve ser destinado apenas para os anos finais do Ensino Fundamental. Concordando com Boavida (2001), penso que os alunos constroem uma ideia cada vez mais correta do que é uma demonstração ao longo dos anos de escolaridade. Portanto, a habilidade de argumentar deve ser desenvolvida desde o início da vida escolar.

Considero que a argumentação e o pensamento matemático são as peças chave para uma demonstração. De modo que mais do que redigir uma demonstração formal, o aluno precisa aprender a pensar a matemática e a pensar matematicamente. E isto não se restringe apenas ao aluno da Educação Básica: o professor e o matemático também precisam saber demonstrar, cada um dentro da sua Matemática. Sendo este “demonstrar”, no sentido do “pensar matematicamente”.

Dentre todos os pontos observados neste estudo o que mais se destaca é a distância entre Formador e sala de aula da Educação Básica. O que é um fator grave, pois professores para este nível de ensino são formados por profissionais que não sabem como é a realidade dos seus alunos, os futuros Professores de Matemática. E estes, por consequência, tendem a reproduzir em suas salas de aula os métodos que foram utilizados com eles, seja em sua época escolar ou de graduação.

Como diminuir esta distância? Ampliar o contato de formadores com profissionais da Educação Básica, por meio de parcerias entre escolas e universidades seria uma possibilidade: o formador “estagiando” na escola. Além disso, acredito que os currículos e projetos políticos pedagógicos do curso de Licenciatura em Matemática deveriam ser reelaborados conjuntamente com profissionais que atuam em sala de aula da Educação Básica. E por que não, Formadores também atuarem na escola e Professores na Universidade?

Tínhamos por objetivo compreender as visões do Formador e do Professor em relação ao papel que o uso das demonstrações desempenha em dois contextos (formação e na sala de aula). Ressaltamos que este foi um olhar, uma análise, uma interpretação das entrevistas, que convida o leitor a lançar outros olhares e aos pesquisadores a continuar o movimento de pesquisa, utilizando outras abordagens e metodologias. Pesquisas que possam acompanhar professores e formadores em suas salas de aula, trarão outras importantes contribuições.

Uma possível continuação deste estudo poderia considerar outras fontes, ou seja, buscar compreender os olhares dos estudantes do curso de Matemática, por exemplo. Ou ainda estudar o curso de Matemática de outras universidades, procurando compreender outros olhares sobre o papel das demonstrações. Uma abordagem investigativa diferente poderia também evidenciar os olhares de alunos da Educação Básica e o que eles entendem por demonstrar.

Observo que existe uma barreira entre os alunos da licenciatura em Matemática e as demonstrações, o que gera um distanciamento do trabalho com demonstrações nos demais níveis de ensino. Esta pesquisa se propôs a contribuir para a reversão desta realidade, apontando caminhos e gerando inquietações.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Tradução: RETO, L. A.; PINHEIRO, A. São Paulo: Edições 70, 2011.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 63, p.11-15, maio/junho 2001.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro: Editora Unesp, n. 18, p. 79-90, set. 2002.

BRASIL. **LEI Nº 5.692: Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências.** Brasília, DF, 1971. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5692impressao.htm>. Acesso em: 27/03/2014.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CES 1302/2001: Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Brasília, DF, 06 de nov. 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/ pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 30/11/2012.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP 01: Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.** Brasília, DF, 18 de fev. 2002(a). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/res1_2.pdf>. Acesso em: 30/11/2012.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (5ª a 8ª séries). 148 p. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20/11/2012.

______. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+):** Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. 144 p. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002(b). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 20/11/2012.

______. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v. 2, 135 p. Brasília: MEC/SEMTEC, 2006. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 20/05/2013.

DAVIS, Philip J., HERSH, Reuben. **Experiência matemática.** Tradução: LOURO, F. M.; RIBEIRO, R. M. Lisboa: Editora Gradiva, 1995.

DE VILLIERS, Michael D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad.* Tradução de: VELOSO, E. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p.31-36, março/abril 2001.

DOMINGUES, Higyno H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **BOLEMA**, Rio Claro: Editora Unesp, n. 18, p. 55-67, set. 2002.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **BOLEMA**, Rio Claro: Editora Unesp, n. 18, p. 91-122, set. 2002.

______. Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: um levantamento. In: BAUMANN, A. P. P.; MIARKA, R.; MONDINI, F.; LAMMOGLIA, B.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Maria em *Forma/Ação***. Rio Claro: Editora IGCE, 2010. p. 69-100. 1 CD.

______. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática.** 258 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1995.

HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

MATEMÁTICA: Licenciatura e Bacharelado. Disponível em <http://www.mat.ufpr.br/graduacao/matematica/index.html>. Acesso em: 11/09/2012.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. **Demonstração: Uma sequência didática para a introdução de seus aprendizado no ensino da Geometria.** 189 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1999. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/elizabeth_g_mello.pdf>. Acesso em: 15/04/2013.

MOCROSKY, Luciane Ferreira; BAUMANN, Ana Paula Purcina; MONDINI, Fabiane. Um ensaio sobre demonstrações geométricas na Educação Básica. *In:* **I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia.** p. 1177-1193, 2009. Disponível em: <http://www.pg.utfpr.edu.br/sinect/anais/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo25.pdf>. Acesso em: 22/06/2012.

MONDINI, Fabiane. **O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus Diferentes Modos de Pensar a Matemática.** Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/287-1-A-gt2_mondini_ta.pdf>. Acesso em: 28/05/2013.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor:** formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 195 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2004. Disponível em <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/EABA-6ABMUH/2000000078.pdf?sequence=1>. Acesso em 11/05/2012.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente**.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, 11).

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** 84 p. Curitiba: SEED/DEB, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 20/11/2012.

ROLKOUSKI, Emerson. **Vida de professores de Matemática** – (im)possibilidades de leitura. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, 2006.

SILVA, Jairo José. A Demonstração Matemática na perspectiva da lógica. **BOLEMA**, Rio Claro: Editora Unesp, n. 18, p. 68-78, set. 2002.

TARSKI, Alfred. Verdade e demonstração. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, São Paulo, série 3, p. 91-123, jan. /jul. 1991.

THURSTON, William P. On proof and progress in mathematics. **Appeared in bulletin of the American Mathematical Society.** Volume 30, n. 2, abr. 1994, p. 161-177. Disponível em: <http://www.math.toronto.edu/mccann/199/thurston.pdf >. Acesso em: 16/07/2012.

ANEXOS

ANEXO 1 – CURRÍCULO ANUAL (VIGENTE DE 1993 À 2005)

	LICENCIATURA		BACHARELADO	
1º ANO	CM430	Fundamentos da Matemática C	CM430	Fundamentos da Matemática C
	CM405	Cálculo Diferencial e Integral C	CM405	Cálculo Diferencial e Integral C
	CM412	Geometria Analítica A	CM412	Geometria Analítica A
	CI208	Programação de Computadores (1º sem)	CI208	Programação de Computadores (1º sem)
	CI202	Métodos Numéricos (2º sem)	CI202	Métodos Numéricos (2º sem)
2º ANO	CF406	Física Geral A	CF406	Física Geral A
	CM406	Calculo Diferencial e Integral D	CM406	Cálculo Diferencial e Integral D
	CM413	Álgebra Linear A	CM413	Álgebra Linear A
	CD405	Desenho Geométrico A	CM415	Análise Matemática A
	EP431	Estrutura e Func. do Ensino 1º e 2º Graus	HF403	Filosofia do Método Científico A
	ET401	Psicologia da Educação A		Optativa 1 (1º sem)
		Optativa 1 (1º sem)		Optativa 2 (2º sem)
		Optativa 2 (2º sem)		
3º ANO	CM415	Análise Matemática A	CM419	Álgebra A
	CM419	Álgebra A	CM068	Variáveis Complexas (1º sem)
	CD415	Elementos de Geometria	CM050	Teoria Básica de Eq. Dif. (2º sem)
	EM401	Didática A	CM407	Calculo Diferencial e Integral E
	EM402	Metodologia do Ensino de Matemática	CM409	Geometria Diferencial
	CM036	Tópicos de Historia da Matemática I (1º sem)		Optativa 3 (1º sem)
	D025	Projetos Integrados em Geometria (1º sem)		Optativa 4 (1º sem)
	CMP001	Projetos Integrados em Ed. Mat. I (2º sem)		Optativa 5 (2º sem)
	CMP002	Projetos Integrados em Ed. Mat.II (2º sem)		
4º ANO	CF407	Física Geral B	CF407	Física Geral B
	CM431	Fundamentos da Matemática D	CM431	Fundamentos da Matemática D
	CD404	Geometria Descritiva A	CM416	Análise Matemática B
	EM403	Prática de Ensino e Estágio Supervisionado de Matemática A	CM420	Álgebra B
	CM432	Fundamentos da Matemática Elementar A	CM417	Análise Matemática C
	EM061	Prática de Ensino e Estágio Supervisionado de Matemática I (1º sem)	CM226	Estágio Supervisionado em Matemática (2º sem)
		Optativa 3 (1º sem)		
		Optativa 4 (2º sem)		

ANEXO 2 – CURRÍCULO SEMESTRAL (VIGENTE A PARTIR DE 2006)

	LICENCIATURA		BACHARELADO	
1º SEMES.	CM118	Geometria Analítica	CM118	Geometria Analítica
	CM119	Funções	CM119	Funções
2º SEMES.	CM047	Cálculo Diferencial e Integral I	CM047	Cálculo Diferencial e Integral I
	CM100	Complementos de Matemática	CM100	Complementos de Matemática
	CM120	Álgebra Linear I	CM120	Álgebra Linear I
	CM127	Fundamentos de Geometria	CM127	Fundamentos de Geometria
3º SEMES.	CD031	Desenho Geométrico I	CE003	Estatística II
	CE003	Estatística II	CF059	Física I
	CF059	Física I	CM048	Cálculo Diferencial e Integral II
	CM048	Cálculo Diferencial e Integral II	CM053	Álgebra Linear II
	CM124	Teoria de Números	CM124	Teoria de Números
4º SEMES.	CD030	Geometria Dinâmica	CF060	Física II
	CF060	Física II	CM095	Análise I
	CM121	Equações Diferenciais e Aplicações	CM125	Teoria de Aneis
	CM125	Teoria de Aneis	CM139	Cálculo Diferencial e Integral III
	CM139	Cálculo Diferencial e Integral III		
5º SEMES.	CD036	Geometria no Ensino	CF061	Física III
	CM122	Fundamentos de Análise	CM068	Variáveis Complexas
	CM126	Teoria de Grupos	CM111	Análise II
	EP073	Políticas e Planej. da Educ. Brasileira	CM126	Teoria de Grupos
	ET053	Psicologia da Educação		Optativa 1
	EM200	Didática I		
6º SEMES.	CM123	Análise na Reta	CF062	Física IV
	CM128	Geometrias Euclidianas e Não–Euclidianas	CM050	Teoria Básica de Eq. Diferenciais
	CM132	Matemática no Ensino Fundamental	CM112	Análise III
	EM126	Metodologia do Ensino de Matemática	CM128	Geometrias Eucl. e Não–Euclidianas
	EP074	Organização do Trabalho Pedagógico	CM226	Estágio Supervisionado em Matem.
	ET054	Processos Interativos na Escola		Optativa 2
7º SEMES.	CE068	Cálculo de Probabilidades A	CE068	Cálculo de Probabilidades A
	CF061	Física III	CM077	Introdução à Geometria Diferencial
	CM133	Matemática no Ensino Médio	CM078	Introdução à Topologia
	CM134	Trabalho de Conclusão de Curso para Lic. I	CM102	Equações Diferenciais Parciais
	EM127	Prática de Docência em Matemática I	CM136	Trab. de Concl. de Curso para Bach. I
		Optativa 1		Optativa 3
8º SEMES.	EM128	Prática de Docência em Matemática II	CM075	Introdução à Análise Funcional
	CM135	Trabalho de Concl. de Curso para Lic. II	CM227	Teoria de Conjuntos
		Optativa 2	CM230	Topologia Algébrica
		Optativa 3	CM137	Trab. de Concl. de Curso para Bach. II
		Optativa 4		Optativa 4
		Optativa 5		Optativa 5

ANEXO 3 – DISCIPLINAS ESPECÍFICAS DO BACHARELADO

DISCIPLINA DO CURRÍCULO ANTIGO		DISCIPLINA DO CURRÍCULO NOVO	
CM407	Calculo Diferencial e Integral E	CM102	Equações Diferenciais Parciais
CM409	Geometria Diferencial	CM077	Introdução à Geometria Diferencial
CM416	Análise Matemática B	CM112 + CM113	Análise II + Análise III
CM417	Análise Matemática C	CM078 + CM230	Introdução à Topologia + Topologia Algébrica
CM420	Álgebra B	CM126 + CM128	Teoria de Grupos + Geom. Euclidianas e Não–Euclidianas

ANEXO 4 – TABELA DE EQUIVALÊNCIA (ANUAL X SEMESTRAL)

	DISCIPLINAS DO CURRÍCULO ANUAL		DISCIPLINAS DO CURRÍCULO SEMESTRAL	
1º ANO	CI202	Métodos Numéricos	Não tem equivalente	
	CI208	Programação de Computadores	Não tem equivalente	
	CM405	Cálculo Diferencial e Integral C	CM047	Cálculo Diferencial e Integral I
	CM412	Geometria Analítica A	CM119	Geometria Analítica
	CM430	Fundamentos da Matemática C	CM100	Complementos de Matemática
2º ANO	CD405	Desenho Geométrico A	CD031	Desenho Geométrico I
	CM406	Cálculo Diferencial e Integral D	CM048	Cálculo Diferencial e Integral II
	CM413	Álgebra Linear A	CM120	Álgebra Linear
	CF406	Física Geral A	CF059 + CF060	Física I + Física II
	EP431	Estrutura e Funcionamento do Ensino de 1º e 2º Graus	EP073	Políticas e Planejamento da Educação Brasileira
	ET401	Psicologia da Educação A	ET053	Psicologia da Educação
3º ANO	CD025	Projetos Integrados em Geometria	CD036	Geometria no Ensino
	CD415	Elementos de Geometria	CM127	Fundamentos de Geometria
	CM036	Tópicos de Historia da Matemática I	CM142	Tópicos de Historia da Matemática I
	CM415	Análise Matemática A	CM122 + CM123	Fundamentos de Análise + Análise na Reta
	CM419	Álgebra A	CM124 + CM125	Teoria de Números + Teoria de Anéis
	CMP001	Projetos Integrados em Educação Matemática I	CM132	Matemática no Ensino Fundamental
	CMP002	Projetos Integrados em Educação Matemática II	CM133	Matemática no Ensino Médio
	EM401	Didática A	EM200	Didática I
	EM402	Metodologia do Ensino de Matemática	EM126	Metodologia do Ensino de Matemática
4º ANO	CF407	Física Geral B	CF061 + CF062	Física III + Física IV
	CM431	Fundamentos da Matemática D		Não tem equivalência
	CM432	Fundamentos da Matemática Elementar A	CM131	Análise de Textos e Materiais Didáticos
	EM061	Pratica de Ensino e Estagio Supervisionado de Matemática I	EM128	Prática de Docência em Matemática II
	CD404	Geometria Descritiva A	CD033	Geometria Descritiva I
	EM403	Pratica de Ensino e Estagio Supervisionado de Matemática A	EM127	Prática de Docência em Matemática I

ANEXO 5 – DISCIPLINAS OPTATIVAS (ANUAL X SEMESTRAL)

OPTATIVAS DO CURRÍCULO ANUAL		OPTATIVAS DO CURRÍCULO SEMESTRAL	
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA		DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA	
CM035	Educação Matemática I	CM035	Educação Matemática I
CM037	Tópicos de Análise I	CM037	Tópicos de Análise I
CM038	Tópicos de Álgebra I	CM038	Tópicos de Álgebra I
CM039	Tópicos de Geometria/Topologia I	CM039	Tópicos de Geometria/Topologia I
CM040	Tópicos de Lógica e Fundamentos da Matemática I	CM040	Tópicos de Lógica e Fundamentos da Matemática I
CM053	Álgebra Linear II		
		CM073	Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias
CM075	Introdução à Análise Funcional		
CM076	Introdução à Teoria da Integração	CM076	Introdução à Teoria da Integração
CM079	Modelos Matemáticos em Finanças	CM079	Modelos Matemáticos em Finanças
CM081	Introdução ao Cálculo Variacional	CM081	Introdução ao Cálculo Variacional
CM082	Introdução à Inteligência Artificial	CM082	Introdução à Inteligência Artificial
CM087	Tópicos de Análise Numérica I	CM087	Tópicos de Análise Numérica I
CM088	Tópicos de Análise Numérica II	CM088	Tópicos de Análise Numérica II
CM089	Tópicos de Pesquisa Operacional I	CM089	Tópicos de Pesquisa Operacional I
CM090	Tópicos de Pesquisa Operacional II	CM090	Tópicos de Pesquisa Operacional II
CM091	Tópicos de Otimização I	CM091	Tópicos de Otimização I
CM092	Tópicos de Otimização II	CM092	Tópicos de Otimização II
CM093	Tópicos de Física-Matemática I	CM093	Tópicos de Física-Matemática I
CM094	Tópicos de Física-Matemática II	CM094	Tópicos de Física-Matemática II
CM096	Análise Numérica I	CM096	Análise Numérica I
CM097	Análise Numérica II	CM097	Análise Numérica II
		CM098	Análise Numérica III
CM103	Laboratório de Matemática Aplicada	CM103	Laboratório de Matemática Aplicada
CM104	Métodos de Matemática Aplicada I	CM104	Métodos de Matemática Aplicada I
CM105	Métodos de Matemática Aplicada II	CM105	Métodos de Matemática Aplicada II
CM106	Otimização I	CM106	Otimização I
CM107	Otimização II	CM107	Otimização II
CM109	Algoritmos de Pontos Interiores	CM109	Algoritmos de Pontos Interiores
CM110	Análise Convexa na Reta	CM110	Análise Convexa na Reta
		CM113	Análise IV
CM114	Métodos Computacionais de Otimização	CM114	Métodos Computacionais de Otimização
CM115	Modelos Matemáticos para Biologia	CM115	Modelos Matemáticos para Biologia
CM116	Tópicos de Matemática Aplicada I	CM116	Tópicos de Matemática Aplicada I
CM117	Tópicos de Matemática Aplicada II	CM117	Tópicos de Matemática Aplicada II
CM129	Epistemologia da Matemática	CM129	Epistemologia da Matemática
CM130	Pesquisa em Educação Matemática	CM130	Pesquisa em Educação Matemática

		CM131	Análise de Textos e Materiais Didáticos
CM138	Tópicos de Geometria/Topologia II	CM138	Tópicos de Geometria/Topologia II
CM140	Tópicos de Matemática I	CM140	Tópicos de Matemática I
CM141	Tópicos de Matemática II	CM141	Tópicos de Matemática II
CM142	Tópicos de História da Matemática I	CM142	Tópicos de História da Matemática I
CM143	Tópicos de História da Matemática II	CM143	Tópicos de História da Matemática II
CM144	Tópicos de Análise II	CM144	Tópicos de Análise II
CM145	Tópicos de Álgebra II	CM145	Tópicos Álgebra II
CM146	Tópicos de Lógica/Fundamentos II	CM146	Tópicos de Lógica/Fundamentos II
CM224	Pesquisa Operacional I	CM224	Pesquisa Operacional I
CM225	Pesquisa Operacional II	CM225	Pesquisa Operacional II
CM227	Álgebra Linear B		
CM228	Teoria dos conjuntos		
CM229	Introdução à Lógica Matemática	CM229	Introdução à Lógica Matemática
		CM231	Filosofia da Matemática
CM414	Geometria Projetiva A		
CM427	Fundamentos da Programação Matemática		
CM433	Evolução dos conceitos Matemáticos		

ANEXO 6 – CARTA DE CESSÃO (MODELO)

CARTA DE CESSÃO

Eu, ____, portador do RG nº __________________________, declaro para os devidos fins que autorizo a utilização da minha voz, para fins exclusivamente da pesquisa que está sendo realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática - UFPR, pela aluna Suellen Rodrigues de Oliveira, sob a orientação do Professor Dr. Emerson Rolkouski. Cedo os direitos de minha entrevista, transcrita e textualizada para leitura, para que se possa usá-la integralmente ou em partes, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data. Da mesma forma, permito o uso de terceiros para ouvi-la e usar citações, ficando vinculado o controle à instituição, que tem sua guarda.

Abdicando de direitos meus e de meus descendentes, subscrevo a presente,

Curitiba, ____ de ____________ de _____.

____

Assinatura