

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO AFONSO RIBEIRO

CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM MÁQUINAS ROTATIVAS
ATRAVÉS DE SUPORTES VISCOELÁSTICOS

CURITIBA
2016

EDUARDO AFONSO RIBEIRO

CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM MÁQUINAS ROTATIVAS
ATRAVÉS DE SUPORTES VISCOELÁSTICOS

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR, área de concentração Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri.

CURITIBA
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

-
- R484c Ribeiro, Eduardo Afonso
 Controle passivo de vibrações em máquinas rotativas através de
 suportes viscoelásticos / Eduardo Afonso Ribeiro. – Curitiba, 2016.
 133f. : il. [algumas color.] ; 30 cm.
- Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
 Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica,
 2016.
 Orientador: Carlos Alberto Bavastri.
1. Engenharia Mecânica. 2. Rotores – Dinâmica. 3. Materiais
 viscoelásticos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Bavastri,
 Carlos Alberto. III. Título.

CDD: 621.406

TERMO DE APROVAÇÃO

EDUARDO AFONSO RIBEIRO


CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES COM MÁQUINAS ROTATIVAS ATRAVÉS DE SUPORTES VISCOELÁSTICOS

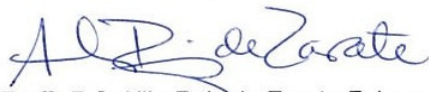
Tese aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

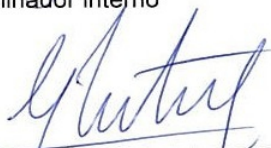
Banca Examinadora:



Prof.^a. Dr.^a. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini
Universidade Estadual de Campinas
Examinadora externa


Prof. Dr. Marco Antonio Luersen
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Examinador externo


Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira
Universidade Federal do Paraná
Examinador interno


Prof.^a. Dr.^a. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas
Universidade Federal do Paraná
Examinadora externa


Prof.^a. Dr.^a. Ana Gabriela Martinez
Universidade Federal do Paraná
Examinadora externa
Examinadora


Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
Universidade Federal do Paraná
Orientador e Presidente da Banca

Curitiba, 06 de maio de 2016.

À DEUS, à minha amada
esposa Ana Paula, e aos meus
queridos pais Valdir e Dora.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS meu CRIADOR e PROVIDOR da vida, pela saúde, capacidade cognitiva e por tantas outras necessidades providas para o desenvolvimento deste trabalho. “... porque eu sei em quem tenho crido e estou certo de que ele é poderoso para guardar o meu depósito até aquele Dia” - 2 Timóteo 1:12.

À minha família, primeiramente à minha esposa pela paciência, suporte e incansável encorajamento para persistir na meta de concluir este trabalho dando o melhor de mim; também aos meus pais por sempre me apoiarem, se orgulharem e orarem por minha carreira.

Ao meu orientador Dr. Carlos Alberto Bavastri, que desde a iniciação científica, 2006, até o momento, tem sido um ótimo professor e amigo, sempre acreditando no meu trabalho e dispensando o conhecimento e a paciência necessária para a conclusão desta Tese.

Ao Dr. Jucélio Tomás Pereira que além das aulas, também contribuiu diretamente para este trabalho com sábios conselhos.

Ao amigo de pós-graduação Rodrigo Bubniak Silvério pelo companheirismo e ajuda nas intermináveis manhãs de testes numéricos e conferência de códigos computacionais.

Ao amigo de laboratório Thiago da Silva pela valiosa ajuda na parte experimental deste trabalho, da mesma forma ao amigo de pós-graduação Alcemir Miliavaca.

Ao laboratório de usinagem da UFPR na pessoa do José Antônio Miquilino Barbosa pela ajuda na confecção de parte do protótipo utilizado nos ensaios experimentais.

Agradecemos o apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – ANP –, da Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP – e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação – MCTI por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás – PRH-ANP/MCTI.

À todos que contribuíram para a realização desta Tese.

RESUMO

A atual demanda por eficiência energética torna necessária a utilização de controle de vibrações em máquinas rotativas. Técnicas de controle para tais máquinas vem sendo desenvolvidas ao longo das últimas décadas, contudo, uma alternativa é a utilização de suportes compostos por materiais viscoelásticos (SVEs), devido ao seu baixo custo e à elevada capacidade de dissipar energia vibratória. Porém, a utilização de SVEs é incipiente, devido provavelmente às abordagens clássicas de modelagem matemática largamente utilizadas para tais dispositivos. Por uma razão de simplificação matemática, muitos trabalhos abordam SVEs utilizando modelos matemáticos, para os MVEs, pouco precisos como: Maxwell, Kelvin-Voigt, Zenner, GHM, e inclusive modelos independentes da frequência e temperatura; os quais, em uma ampla faixa de frequência e temperatura tem precisão inferior aos modelos fracionários, desde que a comparação seja baseada no mesmo número de parâmetros materiais. Inclusive, nesses trabalhos, é evidente a necessidade de adicionar graus de liberdade ao sistema devido à inclusão dos SVEs, fato que dificulta a otimização dos mesmos, sendo, desse modo, negligenciada na maioria dos trabalhos. Ainda, não são observadas modelagens dos GDL angulares nos suportes, assim como a inclusão de massas adicionais com o objetivo de aprimorar o controle passivo de vibrações. Assim, dentre as contribuições deste trabalho destaca-se a proposição de uma metodologia baseada no método de (PEG) parâmetros equivalentes generalizados que evita a adição de GDL ao modelo, e de forma precisa, possibilita levantar a resposta em frequência do sistema rotor-SVE com reduzido tempo computacional, permitindo, por consequência, a otimização dos SVEs em função da minimização da resposta em frequência do sistema. Essa metodologia propõe ainda a parametrização dos GDL dos SVEs (translativos e angulares) de maneira independente, assim como a adição de massas translativas e/ou inércias rotativas como forma de aprimorar o controle passivo de vibrações, tratando os SVEs como estruturas complexas de controle de vibrações em máquinas rotativas. Para tal, o rotor é modelado através do método dos elementos finitos com formulação de Timoshenko e o material viscoelástico através do modelo de derivadas fracionárias com quatro parâmetros. Os GDL dos SVEs são devidamente parametrizados em ambos os modelos de inserção destes no sistema de equações, nomeadamente, acréscimo de GDL e PEG, e por sua vez o método de otimização adotado combina algoritmos genéticos e Nelder Mead. Simulações numéricas são realizadas para investigar a influência no controle e transmissibilidade do sistema, em razão da consideração dos GDL de translação e rotação individualmente e de maneira combinada. Um protótipo com parâmetros ótimos é construído e testado experimentalmente, demonstrando que a metodologia proposta é capaz de prever de maneira precisa o comportamento dinâmico de sistemas rotor-SVEs provendo excelente capacidade de controle de vibrações em termos de amplitude da resposta ao desbalanceamento e transmissibilidade.

Palavras-chave: Dinâmica de rotores. Suportes viscoelásticos. Cálculo fracionário. Otimização híbrida. Elementos finitos.

ABSTRACT

The present energy efficiency demand establishes the need of vibration control in rotating machinery. Vibration control techniques for such machines are available, however, a low cost alternative is the use of viscoelastic supports (VES) due to its high ability to dissipate vibrational energy. Nonetheless the modest use of VES may be explained by the widely use of classical approaches for the mathematical modeling of such devices. Its noticed the frequent use of classical viscoelastic models - like Maxwell, Kelvin-Voigt, Zenner, GHM models and even frequency/temperature independent models - but they lack the accuracy of fractional models in a large range of frequency and temperature regarding the same number of material parameters. Even in those works, the need to add degrees of freedom to motion equations due to VES is evident, in fact, this causes a slow computation performance regarding the optimization of SVEs, which is also neglected in most studies. In addition, the angular DOFs modelling in VES as well as the inclusion of additional masses/inertias in order to improve the vibration control are not observed in those works. Thus arises the demand for the development of a fast and accurate general methodology to optimize VES with n DOF properly parameterized (translational and angular), in order to minimize the vibration response of rotating systems with multiple DOF. This thesis presents a robust methodology based mainly on generalized equivalent parameters (GEP) - for an optimal design of viscoelastic supports for rotating machinery - aiming at minimizing the unbalance frequency response of the system using a hybrid optimization technique (genetic algorithms and Nelder-Mead method). For this purpose the rotor is modeled based on the finite element method using Timoshenko's thick beam formulation, and the viscoelastic material is modeled based on the four-parameter fractional derivatives. The DOF of VES are properly parameterized in both models of VES, adding DOF and GEP. Numerical simulations are performed to investigate the influence of translational and angular DOF of VES - considered individually and combined - on systems vibration control and transmissibility. A prototype of VES is built with optimal parameters and subjected to experimental tests, which demonstrated that the proposed methodology is fully capable to provide accurate prediction of the dynamics behavior of rotor-VES systems as well as to control the vibrational response in terms of amplitude and transmissibility.

Keywords: Rotordynamics. Viscoelastic supports. Fractional calculus. Hybrid optimization. Finite elements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Elemento finito quadrático.....	32
Figura 2.2 - Deslocamentos, velocidades e acelerações do rotor.....	34
Figura 2.3 - Desbalanceamento.....	38
Figura 2.4 - Coordenadas do centro geométrico do eixo em vista transversal.....	39
Figura 2.5 - Hipótese de Timoshenko para deslocamento em vigas.....	40
Figura 3.1 - Modelos viscoelásticos clássicos - a) Maxwell, b) Kelvin-Voigt, c) Zenner, d) Maxwell generalizado, e) Kelvin generalizado.....	44
Figura 3.2 - Esboço de suporte viscoelástico.....	45
Figura 3.3 - Suportes propostos em a) SILVÉRIO (2015) b) FERREIRA (2005) e c) TILLEMA (2003).....	46
Figura 3.4 - Modelo viscoelástico de Zenner fracionário.....	49
Figura 3.5 - Nomograma de borracha butílica em temperatura constante (20°C).....	51
Figura 3.6 - Efeito da temperatura sobre as propriedades viscoelásticas a frequência constante (20 Hz).....	51
Figura 3.7 - Nomograma de frequência reduzida de espécime de borracha butílica.....	53
Figura 3.8 - Sistema composto com suporte de quatro GDL.....	53
Figura 3.9 - Sistema composto com SVE de oito GDL.....	56
Figura 3.10 - PEG aplicado a estrutura de suporte com n GDL.....	58
Figura 3.11 - Módulo da rigidez equivalente.....	62
Figura 3.12 - Rigidez equivalente para os três suportes modelados.....	63
Figura 3.13 - Efeito da massa na rigidez equivalente.....	63
Figura 3.14 - Cisalhamento puro.....	64
Figura 3.15: Manta viscoelástica.....	65
Figura 3.16 - Modelo de elementos finitos 3D para manta circular.....	65
Figura 3.17 - Erro relativo entre fator geométrico analítico e numérico.....	66
Figura 3.18 - Esquema de deslocamento rotativo em manta viscoelástica.....	66
Figura 3.19 - Composição das mantas em análise de rigidez à rotação.....	68
Figura 3.20 - Modelo de elementos finitos 3D de manta viscoelástica.....	68
Figura 3.21 - Erro relativo entre fator geométrico analítico e numérico.....	69
Figura 4.1 - Fluxograma da metodologia de otimização (abordagem PEG à esq., abordagem com acréscimo de GDL à dir.).....	70
Figura 4.2 - Sistema primário generalizado.....	71

Figura 4.3 - Diagrama de Campbell 3D (FN – Frequência Natural).....	76
Figura 4.4 - Diagrama de Campbell 3D, perspectiva 2.....	76
Figura 5.1 - Modelo discreto do rotor com 5 elementos finitos quadráticos.....	90
Figura 5.2 - Nomograma de borracha butílica em temperatura constante de 27[°C].....	91
Figura 5.3 - Resposta em frequência, módulo e fase.....	91
Figura 5.4 - Resposta em frequência, módulo e fase.....	92
Figura 5.5 - Modelo matemático discreto e geometria do rotor testado.....	93
Figura 5.6 - Nomograma do neoprene em temperatura constante, 17 [°C].	94
Figura 5.7 - Respostas em frequência do grau de liberdade "u" calculadas na posição 300[mm].....	95
Figura 5.8 - Respostas em frequência do grau de liberdade "u" calculadas na posição 300[mm].....	96
Figura 5.9 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 3498 [rpm] e 6290 [rpm].....	97
Figura 5.10 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 4540 [rpm] e 6385 [rpm].....	97
Figura 5.11 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 3201 [rpm] e 7492 [rpm].....	98
Figura 5.12 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 3344 [rpm] e 7236 [rpm].....	98
Figura 5.13 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 4288 [rpm] e 6704 [rpm].....	98
Figura 5.14 - Transmissibilidade em termos de força, fonte: RIBEIRO et al. (2015).....	99
Figura 5.15 - Transmissibilidade translativa de força para 3 SVEs distintos.....	100
Figura 5.16 - Transmissibilidade rotativa de momento para 3 SVEs distintos.....	100
Figura 5.17 - Rotor kit RK4.....	102
Figura 5.18 - a) Massa rotórica. b) sensores de proximidade e apoio dos sensores.....	102
Figura 5.19 - a) Rolamento SKF 1200. b) Pedestal rígido.....	102
Figura 5.21 - a) Placa de aquisição de dados Bruel & Kjaer. b) Termômetro infravermelho.....	103
Figura 5.22 - Teste de impacto, eixo livre-livre.....	104
Figura 5.23 - Resposta em frequência, experimental x numérico.....	105
Figura 5.24 - Resposta experimental, sistema balanceado x sistema com desbalanceamento residual.....	108

Figura 5.25 - Resposta em frequência, sistema rotor-SVE sem ajustes e com ajustes..	110
Figura 5.26 - Protótipo de SVE translativo com uma massa adicional.....	111
Figura 5.27 - Comparação entre modelo numérico e experimental em termos de resposta em frequência.....	111
Figura 5.28 - Resposta em frequência ao desbalanceamento; rotor com rolamentos x SVEs.....	112
Figura A. 1 - Segmento linear PQ no corpo não deformado e deformado.....	123
Figura A. 2 - Sistema de referência inercial (x,y,z) e móvel, ponto P(--)......	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1- Valores dos parâmetros de AG.....	85
Tabela 5.1 - Propriedades geométricas e de materiais das simulações de equivalência dinâmica.....	90
Tabela 5.2 - Parâmetros materiais da borracha butílica 45 SHORE A.	91
Tabela 5.3 - Dados do sistema rotativo analisado numericamente.....	93
Tabela 5.4 - Parâmetros materiais do neoprene 45 SHORE A.....	94
Tabela 5.5 - Parâmetros ótimos de SVEs de translação, rotação e combinado.....	95
Tabela 5.6 - Parâmetros ótimos de SVEs de translação e rotação com 2 massas/inércias adicionais.....	96
Tabela 5.7 - Propriedades do material do eixo.....	104
Tabela 5.8 - Propriedades do apoio rígido.....	106
Tabela 5.9 - Resultados do balanceamento numérico.....	107
Tabela 5.10 - Detalhes da bancada experimental.....	109
Tabela 5.11 - Parâmetros do SVE otimizado.....	110
Tabela 5.12 - Comparação dos valores de resposta em frequência, numérico versus experimental.	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
AG	Algoritmos Genéticos
FINEP	Financiadora de Estudos e Projetos
GDL	Graus de Liberdade
MGDL	Múltiplos Graus de Liberdade
GVIBS	Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som da UFPR
LAVIBS	Laboratório de Vibrações e Som da UFPR
MVE	Material Viscoelástico
NDV	Neutralizador Dinâmico Viscoelástico
PEG	Parâmetros Equivalentes Generalizados
SVE	Suporte Viscoelástico
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
WEG	Empresa brasileira fabricante de motores elétricos

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
$\mathbf{0}$	Matriz de zeros ou vetor de zeros
A	Área de aplicação da força cisalhante em manta de material viscoelástico
\mathbf{A}	Matriz composta no espaço de estado
\mathbf{A}_p	Matriz composta no espaço de estado para o sistema primário
Al	Área lateral livre de carregamento da manta viscoelástica
α	Ângulo de integração do fator geométrico do setor de manta viscoelástica em torno da coordenada y
α_c	Espessura angular circunferencial do setor de manta viscoelástica
α_t	Espessura angular transversal do setor de manta viscoelástica
$\alpha(T)$	<i>Shift factor</i> ou fator de deslocamento
a_i	Valores decorrentes da diagonalização das matrizes \mathbf{A} e $\bar{\mathbf{B}}$
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz composta no espaço de estado (complexa)
b_1	Parâmetro material constante
$\bar{\mathbf{B}}_{eq}$	Matriz composta no espaço de estado com os coeficientes de rigidez equivalente (complexa)
\mathbf{B}_p	Matriz composta no espaço de estado para o sistema primário
β_i	Parâmetro material fracionário
\mathbf{C}	Matriz global de amortecimento
\mathbf{C}_m	Matriz de amortecimento dos mancais
\mathbf{C}_p	Matriz global de amortecimento do sistema primário
c_{xx}	Coefficiente de amortecimento translacional na direção x
c_{xz}	Coefficiente de amortecimento translacional cruzado entre as direções x e z
c_{zx}	Coefficiente de amortecimento translacional cruzado entre as direções z e x
c_{zz}	Coefficiente de amortecimento translacional na direção z
$c_{\psi\psi}$	Coefficiente de amortecimento rotacional em relação à z
$c_{\psi\theta}$	Coefficiente de amortecimento rotacional cruzado em relação às direções z e x
$c_{\theta\theta}$	Coefficiente de amortecimento rotacional em relação à x
$c_{\theta\psi}$	Coefficiente de amortecimento rotacional cruzado em relação às direções x e z
d	Número de elementos de uma linha ou coluna de uma matriz global do sistema primário

$\frac{d}{dt}$ ou $\dot{}$	Derivada total em relação ao tempo
$\frac{\partial}{\partial q}$	Derivada parcial em relação a uma coordenada generalizada
δ	Vetor com organização dos deslocamento nodais elementares
δ_{ij}	Delta de Kronecker
E	Módulo de Young
\mathbf{E}	Vetor erro
ε_{yy}	Deformação normal
f	Força generalizada
\mathbf{f}	Vetor de forças generalizadas no domínio do tempo
\mathbf{F}	Vetor de forças generalizadas no domínio da frequência
$F(\Omega_{\text{rpm}})$	Força desbalanceada
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
f_t, F_t	Força translativa no domínio do tempo e da frequência, respectivamente
f_r, F_r	Força rotativa no domínio do tempo e da frequência, respectivamente
φ	Fase da força desbalanceada
ϕ	Deslocamento rotativo em relação à coordenada axial y
G	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
\mathbf{G}	Matriz global giroscópica
\bar{G}	Módulo viscoelástico ao cisalhamento (complexo)
G_0	Parâmetro material constante – Assíntota inferior da parte real do módulo cisalhante
\mathbf{G}_1	Parcela constante da matriz global giroscópica
\mathbf{G}_d	Matriz giroscópica de disco
\mathbf{G}_{el}	Matriz giroscópica elementar
\mathbf{G}_p	Matriz global giroscópica do sistema primário
G_∞	Parâmetro material constante – Assíntota superior da parte real do módulo cisalhante
γ	Deformação cisalhante
h	Espessura da manta de material viscoelástico
H	Resposta em amplitude complexa obtida numericamente
HE	Resposta em amplitude complexa obtida experimentalmente
\mathbf{I}	Matriz identidade
I	Momento de inércia de área da seção transversal elementar
\Im	Parte imaginária

I_{dx} e I_{dz}	Momento de inércia transversal de massa de disco
I_{dy}	Momento polar de inércia de massa de disco
I_e	Momento de inércia de área da seção transversal do eixo
I_f	Inércia adicional do suporte
I_m	Inércia de massa transversal da caixa do mancal
\bar{k}	Representação geral da rigidez viscoelástica da manta de MVE (complexo)
K	Matriz global de rigidez
$\bar{\mathbf{K}}$	Matriz global de rigidez do sistema composto (complexa)
\mathbf{K}_{el}^f	Matriz de rigidez elementar devido à deformação flexional
\mathbf{K}_{el}^c	Matriz de rigidez elementar devido à deformação cisalhante
\bar{k}_{eq}	Coefficiente de rigidez equivalente (complexo)
$\bar{\mathbf{K}}_{eq}$	Matriz com os coeficientes de rigidez equivalente (complexa)
k_m	Representação geral dos coeficientes de rigidez dos mancais (translativos e rotativos)
\mathbf{K}_m	Matriz de rigidez dos mancais
\mathbf{K}_p	Matriz global de rigidez do sistema primário
$\bar{\mathbf{K}}_s$	Matriz de rigidez do suporte viscoelástico
k_t	Rigidez da manta de material viscoelástico à força cisalhante translativa
k_{xx}	Coefficiente de rigidez translacional na direção x
k_{xz}	Coefficiente de rigidez translacional cruzado entre as direções x e z
k_{zx}	Coefficiente de rigidez translacional cruzado entre as direções z e x
k_{zz}	Coefficiente de rigidez translacional na direção z
$k_{\psi\psi}$	Coefficiente de rigidez rotacional em relação à z
$k_{\psi\theta}$	Coefficiente de rigidez rotacional cruzado em relação às direções z e x
$k_{\theta\psi}$	Coefficiente de rigidez rotacional cruzado em relação às direções x e z
$k_{\theta\theta}$	Coefficiente de rigidez rotacional em relação à x
κ_i	Parâmetro material fracionário
L	Comprimento do elemento finito
L_e	Comprimento do eixo
l_{ft}	Fator de forma à deformação cisalhante devido ao deslocamento translativo
l_g	Fator geométrico da manta viscoelástica
l_{gr}	Fator geométrico dos setores de mantas viscoelásticas
l_{gt}	Fator geométrico translativo

λ	Autovalor
Λ	Matriz de autovalores complexos
L_{\max}	Conjunto de limites máximos
L_{\min}	Conjunto de limites mínimos
\mathbf{M}	Matriz global de massa
M_d	Massa de disco
\mathbf{M}_d	Matriz de massa de disco
\mathbf{M}_{el}	Matriz de massa elementar
m_f	Massa adicional do suporte
m_m	Massa da caixa do mancal
\mathbf{M}_p	Matriz global de massa do sistema primário
$\bar{\mathbf{M}}_s$	Matriz de massa do suporte viscoelástico
m_u	Massa desbalanceada
μ	Constante de correção à distribuição transversal do cisalhamento
\mathbf{N}	Vetor de forças no espaço de estado
N_i	i-ésima Função de forma
η	Fator de perda
η_z	Parâmetro viscoso do modelo de Zenner fracionário
nl	Número de graus de liberdade
nn	Número total de nós do sistema
ns	Número de suportes
Ω_i	Frequência natural não amortecida
Ω_r	Frequência reduzida
Ω_{rpm}	Velocidade de rotação do eixo
\mathbf{p}	Variável do espaço modal
\mathbf{P}	Variável do espaço modal no domínio da frequência
\mathbf{P}_p	Variável do espaço modal no domínio da frequência (sistema primário)
ψ	Campo de deslocamento rotacional em relação à coordenada global z
Ψ	Matriz de autovetores à esquerda complexos
ψ_i	Autovetor à esquerda
Ψ_i	Vetor (coluna) da matriz de autovetores Ψ
\mathbf{q}	Vetor de coordenadas generalizadas
Q	Coordenada generalizada no domínio da frequência
\mathbf{q}_p	Vetor global de coordenadas generalizadas do sistema primário
r	Excentricidade

R	Conjunto dos números reais
R_1	Raio interno de cisalhamento da manta viscoelástica
R_2	Raio externo da manta viscoelástica
R_m	Raio médio do setor de manta viscoelástica
R_{z1}	Parâmetro elástico do modelo de Zenner fracionário
R_{z2}	Parâmetro elástico do modelo de Zenner fracionário
\Re	Parte real
ρ	Massa específica elementar
ρ_e	Massa específica do eixo
S	Área da seção transversal elementar
S_e	Área da seção transversal do eixo
σ	Tensão normal
t	Variável tempo
T	Energia cinética ou temperatura
T_0	Temperatura de referência
T_d	Energia cinética de inércia em formato de disco
T_e	Energia cinética do eixo
T_u	Energia cinética da massa desbalanceada
τ	Tensão cisalhante
θ	Campo de deslocamento rotacional em relação à coordenada global x
Θ	Matriz de autovetores à direita complexos
θ_1	Parâmetro material constante
θ_2	Parâmetro material constante
θ_i	Autovetor à direita
Θ_i	Vetor (coluna) da matriz de autovetores Θ
u	Campo de deslocamento translacional ao longo da coordenada global x
U	Energia potencial de deformação
v	Deslocamento axial ao longo da coordenada y
v_z	Parâmetro fracionário do modelo de Zenner fracionário
w	Campo de deslocamento translacional ao longo da coordenada global z
ω	Vetor de velocidades angulares
ω_x	Componente de velocidade angular em relação à coordenada global x
ω_y	Componente de velocidade angular em relação à coordenada global y
ω_z	Componente de velocidade angular em relação à coordenada global z
x	Vetor projeto

x	Coordenada global
y	Coordenada global axial
y	Variável de estado
Y	Variável do espaço de estado no domínio da frequência
Y_p	Variável do espaço de estado no domínio da frequência (sistema primário)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	22
1.1	Estado da Arte.....	24
1.2	Definição do Problema.....	27
1.3	Objetivo do Trabalho.....	28
1.4	Organização da Tese.....	29
2	MODELO NUMÉRICO DE DINÂMICA DE ROTORES.....	30
2.1	Equação de Movimento.....	31
2.2	Elemento Finito.....	32
2.3	Matriz de Massa.....	34
2.3.1	O disco.....	35
2.3.2	O eixo.....	36
2.3.3	O desbalanceamento.....	37
2.4	Matriz de Rigidez.....	39
2.4.1	Os mancais.....	42
3	MODELAGEM DO SUPORTE VISCOELÁSTICO.....	44
3.1	Viscoelasticidade por Derivadas Fracionárias.....	47
3.1.1	Equação constitutiva.....	48
3.2	Modelo de Suportes Através de Acréscimo de GDL.....	53
3.2.1	Suportes sem inserção de massa adicional.....	53
3.2.2	Suportes com inserção de massa adicional.....	55
3.3	Modelo de Suportes por Parâmetros Equivalentes Generalizados (PEG).....	58
3.3.1	PEG aplicado a suporte sem massa adicional.....	59
3.3.2	PEG aplicado a suporte com massa adicional.....	60
3.4	Determinação dos fatores geométricos das mantas viscoelásticas.....	63
3.4.1	Fator geométrico de mantas sob deslocamento translativo.....	64
3.4.2	Fator geométrico de mantas sob deslocamento rotativo.....	66
4	METODOLOGIA.....	70
4.1	Resolução do sistema com adição de GDL.....	72
4.1.1	Diagrama de Campbell.....	75
4.1.2	Resposta em frequência.....	77
4.1.3	Campbell simplificado.....	78
4.2	Resolução do sistema utilizando PEG.....	80

4.2.1	Parâmetros modais do sistema primário.....	80
4.2.2	Resposta em frequência ao desbalanceamento (sistema composto).....	81
4.2.3	Otimização.....	83
5	RESULTADOS.....	89
5.1	Resultados numéricos.....	89
5.1.1	Equivalência dinâmica.....	89
5.1.2	Efeito da consideração de diferentes GDL de SVEs otimizados na resposta em frequência.....	93
5.2	Resultados numérico-experimentais.....	101
5.2.1	Equipamentos.....	101
5.2.2	Identificação de componentes da bancada.....	104
5.2.3	Balanceamento.....	106
5.2.4	Resultados finais.....	108
6	CONCLUSÕES.....	114
6.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	115
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS MATRIZES ELEMENTARES DE E. F.....	123
I.	Matrizes de rigidez.....	123
II.	Matrizes de massa e giroscópica.....	128

1 INTRODUÇÃO

A busca por maior segurança, confiabilidade e, principalmente, maior potência na operação de máquinas rotativas impulsionou o estudo e desenvolvimento de técnicas de controle dinâmico para tais sistemas. Atualmente, a demanda por máquinas que desenvolvam elevadas potências específicas tem sido uma crescente exigência por parte de empresas que focam na economia de recursos e alta produtividade. Desse modo, máquinas rotativas como turbinas a gás, turbinas a vapor, geradores elétricos, motores elétricos, bombas, compressores, entre outros, são colocadas em condições críticas de operação, em termos de elevadas rotações nominais e flexibilidade do sistema rotor-mancais. As técnicas de controle de vibrações para essas máquinas envolvem conhecimentos multidisciplinares como, mecânica dos sólidos, métodos numéricos, análise modal de vigas rotativas, viscoelasticidade, mecânica dos fluidos e eletromagnetismo, para citar alguns, fato que torna o estudo e desenvolvimento dessas soluções bastante complexo.

É possível definir duas áreas nas quais se inserem as técnicas de controle de vibrações em máquinas rotativas: controle passivo e controle ativo. O controle ativo ocorre através de intervenções em tempo real, utilizando sensores e atuadores no sistema rotor-mancal, com o objetivo de manter baixos os níveis de vibração no rotor. Essa forma de controle necessita de um sistema de *hardware* e *software* que executam a aquisição, tratamento e transmissão de dados aos atuadores. Entre as técnicas de controle ativo em máquinas rotativas pode-se citar os mancais magnéticos como principal solução empregada atualmente a exemplo de GUICKING (2007).

Por sua vez o controle passivo de vibrações envolve várias técnicas, entre as quais pode-se citar:

- Alteração dimensional de eixo, massa e espaçamento entre mancais,
- Balanceamento,
- Inserção de mancais,
- Neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, e
- Suportes com elementos dissipadores de energia (isolamento de vibrações).

As três primeiras técnicas citadas incorrem em grandes alterações dimensionais e custos

o que limita a utilização das mesmas.

Neutralizador dinâmico viscoelástico consiste em uma técnica bastante eficaz de controle passivo de vibrações. Esses dispositivos mecânicos simples, compostos de MVE, são projetados de forma tal que, ao serem fixados ao rotor através de mancais auxiliares, aplicam forças reativas dissipadoras de energia vibratória reduzindo a vibração do sistema rotativo a níveis aceitáveis. Essa técnica foi utilizada com sucesso por DOUBRAWA et al. (2010) ao combinar a modelagem do rotor por elementos finitos ao modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros para o material viscoelástico, juntamente com a técnica de PEG na modelagem dos sistemas auxiliares (NDVs), formando uma metodologia que possibilitaria a otimização desses dispositivos em função da minimização da resposta ao desbalanceamento, utilizando, para isso, técnicas de otimização não linear.

Contudo, neste trabalho, o foco são suportes viscoelásticos. Por esse motivo é dada ênfase na última técnica citada, suportes com elementos dissipadores de energia, destacando, entre outros, os *squeeze film dampers* e os suportes viscoelásticos.

A utilização de *squeeze film dampers* como alternativa para controle passivo de vibrações em rotores remonta à década de 1960 com a publicação de COOPER (1963). Naquele trabalho, testes experimentais mostraram redução das amplitudes de vibrações em torno das rotações críticas. Com a publicação desse artigo, até a atualidade, muito se investiu em tornar tal solução viável, fato que se comprova com a grande utilização desse tipo de controle passivo, principalmente em turbomáquinas, conforme ZEIDAN et al. (1996), DAI et al. (2000), entre outros. O *squeeze film damper* tem sido utilizado em combinação com diferentes tipos de mancais como: mancais de rolamento, mancais hidrodinâmicos e mancais hidrodinâmicos *tilting pad*. Essa característica de utilização com diferentes tipos de mancais é também compartilhada nas soluções de controle através de suportes viscoelásticos.

Porém, diferentemente dos *squeeze film dampers*, as soluções para controle passivo de máquinas rotativas baseadas em suportes viscoelásticos não estão definitivamente consolidadas a ponto de ser possível citar aplicações em máquinas rotativas comerciais. Isso não se deve à baixa qualidade dos materiais viscoelásticos disponíveis, pois a utilização dos mesmos em problemas de engenharia, de acordo com NASHIF et al. (1985), DARLOW e ZORZI (1981) e BILLMEYER JR. (1984) tem crescido justamente pela sua excelente capacidade de amortecimento, em conjunto com o desenvolvimento tecnológico desses

materiais nesse mesmo período. Um fato que pode fundamentar a incipiente utilização de suportes viscoelásticos é o seu comportamento dependente da frequência de excitação e temperatura, dificultando a modelagem matemática e, conseqüentemente, a predição teórica de suas propriedades físicas.

Materiais viscoelásticos vêm sendo muito estudados ao longo dos últimos sessenta anos com seus modelos mecânicos clássicos, dos quais se destacam os modelos generalizados de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zenner (HADDAD, 1995). Esses modelos clássicos, que utilizam na formulação do material elementos puramente elásticos e outros puramente viscosos, ainda são utilizados atualmente em aplicações na engenharia, como no trabalho de GENTA e AMATI (2010), por exemplo.

Contudo foi nos últimos trinta anos que pesquisas relacionadas com o cálculo fracionário em viscoelasticidade foram realizadas (MAINARDI, 2012), permitindo a formulação de modelos mais precisos com poucos parâmetros. Atualmente, têm-se modelos que preveem com precisão adequada o comportamento dinâmico viscoelástico de uma vasta gama de materiais utilizados na engenharia. BAGLEY e TORVIK (1979) foram os pioneiros na utilização de derivadas fracionárias para obtenção do módulo de elasticidade complexo de MVEs dependente da frequência e temperatura. Até então, a grande maioria dos modelos utilizava derivadas de ordem inteira, o que, segundo BAGLEY e TORVIK (1983), não apresentam precisão adequada em grandes faixas de frequência e temperatura, desde que não sejam generalizados com a utilização de um número elevado de coeficientes. A variação da temperatura, por sua vez, pode ser considerada no modelo viscoelástico linear como proposto por FERRY (1980), através da hipótese de materiais termo reologicamente simples, na qual uma variação na temperatura resulta em um deslocamento do comportamento dinâmico do material viscoelástico no domínio da frequência.

1.1 ESTADO DA ARTE

Entre as pesquisas em suportes viscoelásticos aplicados a máquinas rotativas, KIRK e GUNTER (1972) foi um dos primeiros artigos publicados. Nesse trabalho foi utilizado um modelo de rotor *Jeffcot* que consiste em um sistema composto por um eixo, dois mancais, um em cada extremidade, e uma inércia circular localizada no centro do eixo. Esse sistema possui apenas dois graus de liberdade (deslocamento horizontal e vertical) e, quando considerados os suportes, recebe um grau de liberdade adicional correspondente. A modelagem do material

viscoelástico é realizada através do modelo de Kelvin-Voigt com coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes e constantes. KIRK e GUNTER (1972) mostram que, para sistemas com valores pré-determinados de rigidez e massa dos suportes, é possível obter um amortecimento ótimo para o mesmo e, por consequência, uma elevada redução das amplitudes de vibração na ressonância e na transmissibilidade total do sistema. Com uma modelagem de rotor similar, com parâmetros de rigidez e massa concentrados, os trabalhos, DUTT e NAKRA (1992), DUTT e TOI (2003) e PANDA e DUTT (2003) variam as características do suporte para obter uma redução da resposta ao desbalanceamento e maiores limites de estabilidade. Nesses trabalhos, o material viscoelástico dos SVEs é modelado com 4 elementos (elásticos e dissipativos).

Em DUTT e NAKRA (1992) é realizado um enfoque na comparação entre sistemas rotor-mancal suportados por fundações puramente elásticas e sistemas suportados por fundações compostas por material viscoelástico. Nesse trabalho, é mostrado que sistemas com suportes compostos com material viscoelástico possuem uma larga faixa de estabilidade, fato que não ocorre com suportes puramente elásticos e com suportes viscoelásticos que possuam elevados valores de fator de perda, os quais provocam grandes faixas de instabilidade.

SHABANEH e ZU (2000) utilizam o mesmo modelo apresentado por KIRK e GUNTER (1972) para modelagem do material viscoelástico do suporte, associado a um modelo analítico de Timoshenko para o rotor *Jeffcot*. Os autores concluem que as características do suporte influenciam de forma importante nas rotações críticas do sistema, assim como na resposta em frequência do mesmo. Nesse trabalho, foi avaliado um parâmetro negligenciado pelos outros autores, com exceção de KIRK e GUNTER (1972), que foi a influência da massa do suporte viscoelástico; apresentando valores de resposta ao desbalanceamento menores com o aumento daquela massa.

DUTT e TOI (2003) utilizam uma abordagem prática no sentido de apresentar uma forma geométrica otimizada para o suporte consistindo em setores angulares de mantas de material viscoelástico colocadas entre o mancal de rolamento e a caixa do mancal. A função objetivo utilizada foi a resposta ao desbalanceamento, e os parâmetros variados individualmente para atingir o mínimo da função objetivo foram o ângulo dos setores de MVE e a sua espessura. DUTT e TOI (2003) concluem que suportes otimizados podem atenuar de maneira importante as amplitudes de vibração do rotor na rotação crítica, também

concluíram que os ângulos e espessuras das mantas de material viscoelástico possuem um valor ótimo, ao contrário do que se esperava previamente.

Em PANDA e DUTT (2003) a função objetivo a ser minimizada passa a ser o limite de estabilidade e a resposta ao desbalanceamento. Os parâmetros otimizados foram a rigidez e o fator de perda do material viscoelástico presente no suporte, o que torna essa abordagem problemática quando não é possível encontrar um material que atenda aos parâmetros otimizados de módulo elástico e fator de perda.

MONTAGNIER e HOCHARD (2007) realizaram um estudo de estabilidade de sistemas rotor-mancal com mancais hidrodinâmicos em comparação aos sistemas rotor-mancal apoiados em fundações com suportes viscoelásticos. Nesse trabalho, os autores mostram que eixos longos possuem maior estabilidade quando montados sobre fundações com mancais viscoelásticos. Em contrapartida, os mancais hidrodinâmicos ofereceram melhor estabilidade para sistemas com eixos mais curtos. Porém, naquele trabalho, o modelo de material viscoelástico é bastante limitado sendo hysterético e independente da frequência. Utilizando o mesmo modelo hysterético independente da frequência, MONTAGNIER e HOCHARD (2014) aplicam suportes viscoelásticos para avaliar sua influência nos limites de estabilidade de um eixo compósito modelado através de uma abordagem analítica.

Diferentes abordagens utilizando o método dos elementos finitos para modelagem do eixo do sistema rotor-suporte viscoelástico são apresentadas em KULKARNI et al. (1993) e KANG et al. (2011). Nesses trabalhos o modelo utilizado para o material viscoelástico é o de quatro elementos apresentado em PANDA e DUTT (2003). No primeiro, o estudo se concentra no levantamento das respostas em frequência para sistemas rotor-mancal com mancais de rolamento e de filme de óleo, apoiados sobre suportes viscoelásticos. KULKARNI et al. (1993) mostra que ambos os sistemas tem suas amplitudes de respostas melhoradas com a utilização de suportes viscoelásticos. Nesse trabalho, pode ser observado a sensibilidade do sistema com relação aos parâmetros de rigidez e amortecimento dos suportes, assim como a capacidade de absorção de energia em função da rigidez do suporte. KULKARNI et al. (1993) mostra que coeficientes de rigidez elevados do suporte, comprometem a absorção de energia mesmo com a utilização de fatores de perda elevados. Já no segundo trabalho, KANG et al. (2011) utilizaram suportes viscoelásticos em um sistema rotor-engrenagem, com empenamento residual. Os autores concluem que a utilização dos suportes oferece grande

redução na resposta do sistema. Ainda, considerando rotores com MGDL e utilizando para o SVE parâmetros constantes de fator de perda e módulo de elasticidade, GENTA e AMATI (2010) propõe uma formulação de amortecimento não viscoso, a qual acrescenta graus de liberdade ao sistema.

As abordagens mais relevantes na aplicação de suportes viscoelásticos em máquinas rotativas são apresentadas em TILLEMA (2003), SALDARRIAGA (2007), BAVASTRI et al. (2008), VARNEY e GREEN (2014) e SILVÉRIO (2015), esses trabalhos utilizam modelos numéricos de múltiplos graus de liberdade para modelagem do rotor e, com exceção de SALDARRIAGA (2007) e TILLEMA (2003) utilizam cálculo fracionário para modelagem do material viscoelástico dos suportes. O modelo numérico utilizado em TILLEMA (2003), SALDARRIAGA (2007), BAVASTRI et al. (2008) e SILVÉRIO (2015) é o método dos elementos finitos com formulação de viga de Euler Bernoulli incluindo um fator de correção para consideração da contribuição à rigidez devido ao cisalhamento transversal. Em VARNEY e GREEN (2014) utiliza-se o método das matrizes de transferência. O modelo de derivadas fracionárias para o MVE é utilizado, com quatro parâmetros, em BAVASTRI et al. (2008) e SILVÉRIO (2015), por sua vez VARNEY e GREEN (2014) usa um modelo de derivadas fracionárias de três parâmetros. SALDARRIAGA (2007) baseia-se no modelo viscoelástico não fracionário dos campos de deslocamento anelásticos obtendo boa redução nos níveis de vibrações porém com baixa capacidade de predição das amplitudes experimentais a partir do modelo numérico. TILLEMA (2003) utiliza para modelagem viscoelástica o modelo de Maxwell generalizado. Nesse trabalho, assim como em BAVASTRI et al. (2008) e SILVÉRIO (2015), são definidas formas geométricas para as mantas dos suportes viscoelásticos. Em termos de resultados são apresentados, em ambos os trabalhos, as rotações críticas através do diagrama de Campbell e a resposta em frequência ao desbalanceamento com grande redução devido a utilização dos suportes viscoelásticos. Em VARNEY e GREEN (2014) não há definição da forma das mantas viscoelásticas e os cálculos se limitam à determinação das rotações críticas através do diagrama de Campbell.

1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Uma análise do estado da arte leva às seguintes lacunas:

- Predominância na utilização de modelos viscoelásticos não fracionários ou até mesmo constantes em relação à frequência e temperatura;

- Na maioria dos trabalhos foi observada a utilização de modelos analíticos ou com rigidez e massas concentradas, representando a flexibilidade e massa do rotor (2 GDL ou 4 GDL), limitando a modelagem de rotores com estruturas complexas e modos de alta frequência;
- Apenas dois trabalhos entre os pesquisados apontaram metodologias de otimização do suporte, porém fazendo uso de um modelo de rotor limitado e de um modelo viscoelástico pouco preciso em uma larga banda de frequência e temperatura;
- Apenas um trabalho apontou o efeito da massa do suporte, sem considerá-la como variável de projeto para uma possível otimização;
- Nenhum dos trabalhos considerou comparar os efeitos na dinâmica do sistema, de suportes com graus de liberdade puramente de translação, rotação ou com ambos devidamente parametrizados;
- Entre os trabalhos mais relevantes não se observou a utilização de metodologias de otimização assim como técnicas de cálculo para redução do tempo computacional quando considerados materiais viscoelásticos dependentes da frequência de excitação e da temperatura;
- Nota-se a necessidade de uma metodologia que permita calcular de forma rápida e precisa a melhor geometria das mantas viscoelásticas para um suporte viscoelástico, viabilizando assim uma solução em controle passivo de vibrações em máquinas rotativas.

1.3 OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho consiste em elaborar uma metodologia de otimização de suportes viscoelásticos aplicados no controle passivo de vibrações de máquinas rotativas. Para tal fim, o modelo de elementos finitos com formulação de viga de Timoshenko é usado na discretização do rotor, o modelo de viscoelasticidade linear do suporte é baseado em derivadas fracionárias com quatro parâmetros, os suportes são modelados através da técnica de parâmetros equivalentes generalizados, que permite a simplificação de suportes com múltiplos graus de liberdade, possibilitando a otimização dos parâmetros do mesmo. Uma técnica híbrida de otimização é implementada combinando algoritmos genéticos e otimização não linear via método de Nelder-Mead com o objetivo de aumentar a probabilidade de

obtenção do mínimo global.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A tese é dividida em seis capítulos: introdução, modelo de elementos finitos, modelagem do suporte viscoelástico, metodologia, resultados e conclusões, além das referências bibliográficas e do apêndice A.

No primeiro capítulo, é explanado como se posiciona a tecnologia de SVEs (suportes viscoelásticos) frente a soluções com objetivos similares. O estado da arte é também apresentado contendo os principais trabalhos diretamente ligados ao tema do presente trabalho em ordem cronológica. Por fim a definição do problema e objetivos são descritos.

No segundo capítulo, o modelo geral de elementos finitos é descrito através da apresentação das funções de forma e equações de energias cinética e potencial de deformação levantadas para cada componente do rotor.

A modelagem dos suportes viscoelásticos é apresentada no capítulo três através de duas formas distintas, previamente, no capítulo, é apresentada a equação constitutiva dos materiais viscoelásticos considerando um breve histórico de modelagem dos MVEs (materiais viscoelásticos).

Posteriormente, no capítulo quatro, o sistema global de equações é resolvido no domínio da frequência, de duas formas distintas em coerência com os dois modelos de SVEs apresentados no capítulo três. Este capítulo ainda trata da técnica de otimização híbrida utilizada neste trabalho, explanando brevemente as características de cada componente.

Nos últimos capítulos cinco e seis, são apresentados, respectivamente, os resultados obtidos, tanto de simulações numéricas quanto experimentais, e as conclusões gerais desta tese doutoral.

2 MODELO NUMÉRICO DE DINÂMICA DE ROTORES

O método de elementos finitos vem sendo aplicado na modelagem de rotores ao longo dos últimos quarenta anos. Um dos primeiros trabalhos publicados na área, foi escrito por RUHL e BOOKER (1972). Nesse trabalho, a teoria de viga utilizada é a de Euler Bernoulli, a qual considera apenas a deformação flexional no levantamento da energia potencial do sistema. Em termos de energia cinética foram considerados apenas os graus de liberdade de translação e desprezados os termos de rotação e giroscópicos. A partir destes funcionais energéticos definidos, as funções de forma utilizadas para discretização do sistema foram os polinômios cúbicos de Hermite, que fornecem funções cúbicas de aproximação. NELSON e McVAUGH (1976) aprimoraram o modelo ao incorporarem os termos rotativos e giroscópicos à energia cinética do sistema. GASCH (1976) complementa o modelo utilizado por NELSON e McVAUGH (1976) ao considerar efeitos de elasticidade e amortecimento viscoso de mancais no sistema rotativo. Os mancais considerados naquele trabalho são mancais de filme de óleo, tais mancais introduzem maior complexidade no sistema ao terem sua rigidez radial variante com a frequência de rotação do sistema.

No contexto dessa época, pode-se citar como trabalhos de levantamento das propriedades dinâmicas de rigidez e amortecimento de mancais, LUND (1965) no que se refere à mancais hidrodinâmicos e LEWIS e MALINOWSKI (1965) no estudo de mancais de rolamento.

Uma importante contribuição foi realizada por NELSON (1980) ao inserir os efeitos do cisalhamento transversal na energia potencial de deformação do sistema. Esta consideração, porém, foi realizada ainda utilizando como funções de forma os polinômios de Hermite ou funções de forma de classe C^1 , abordagem que não abrange a interpolação independente dos GDL de deslocamentos translativo e rotativo do sistema.

Em LALANNE e FERRARIS (1990) é apresentada uma formulação de elementos finitos que contempla os efeitos do cisalhamento, sem a utilização do modelo de viga de Timoshenko. Nesse trabalho, foi utilizado um fator de correção, multiplicado à matriz de rigidez elementar. Buscando mais rigor matemático CHEN e KU (1991) apresentam um modelo de elementos finitos baseado na teoria de viga de Timoshenko com funções de forma da classe C^0 . Assim, os deslocamentos translativos e rotativos do sistema são interpolados de

maneira independente. Ainda, naquele trabalho, são considerados modelos de amortecimento interno do tipo hysterético e viscoso.

O modelo de elementos finitos utilizado no presente trabalho é semelhante ao apresentado por CHEN e KU (1991) e está disponível de forma detalhada em RIBEIRO (2009), trabalho baseado no legado do projeto PROMOVE 4931 que envolveu os financiadores FINEP e WEG, e como executora do projeto a UTFPR. As principais diferenças em relação ao trabalho de CHEN e KU (1991) concentram-se no número de nós do elemento finito utilizado (Figura 2.1), o qual possui três nós, diferentemente daquele trabalho que utilizava um elemento finito com dois nós. Todos os outros efeitos introduzidos ao longo do tempo e citados anteriormente são considerados no modelo numérico apresentado neste trabalho.

2.1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A equação de movimento permite determinar a dinâmica do sistema rotativo. Esta equação pode ser baseada em diferentes métodos analíticos ou numéricos que permitem descrever poucos ou múltiplos graus de liberdade do sistema. O método dos elementos finitos escolhido neste trabalho possibilita descrever um sistema rotativo com seus múltiplos graus de liberdade, inclusive os componentes de massa e inércia, e os componentes que adicionam rigidez e amortecimento como mancais.

As equações de Lagrange aplicadas aos funcionais de energia potencial de deformação e energia cinética de um sistema rotativo resultam na equação de movimento. As equações de Lagrange podem ser escritas como (DOUBRAWA, 2008):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = f_i, \quad \text{Eq. 2.1}$$

na qual T e U representam a energia cinética e potencial do sistema rotativo, f_i representa a i -ésima força generalizada atuante sobre o sistema e q_i representa a i -ésima coordenada generalizada. Utilizando o método dos elementos finitos para interpolação dos deslocamentos translativos e rotativos das energias cinética e potencial e, ainda, considerando os componentes do eixo que inserem massa, inércia, rigidez e amortecimento ao sistema, a equação de movimento na forma matricial pode ser descrita como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad \text{Eq. 2.2}$$

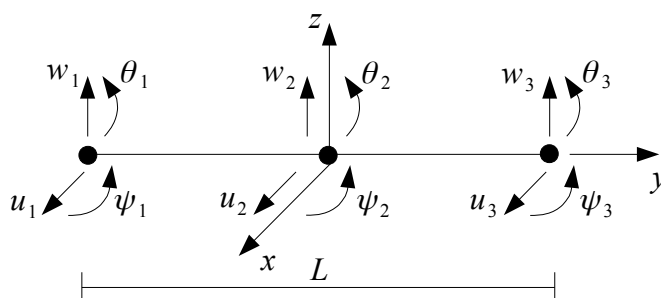
A Eq. 2.2 apresenta as matrizes de massa, amortecimento, giroscópica e rigidez, respectivamente, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{G} e \mathbf{K} . Os vetores de coordenadas generalizadas e forças generalizadas são representados por $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$. A equação de movimento expressa na Eq. 2.2 representa o sistema com todos¹ os graus de liberdade considerados.

Por hipótese, neste trabalho não é considerado o efeito de forças circulatorias presentes em sistemas como rotores de helicópteros, do mesmo modo a hipótese se estende ao efeito das forças aeroelásticas.

2.2 ELEMENTO FINITO

Nesta seção o tipo de elemento finito é detalhado em termos de graus de liberdade, número de nós e funções de forma. Em sistemas modelados por elementos finitos o refino de malha pode ser realizado de duas formas distintas, interna ou externa ao elemento. No refino externo é realizado o aumento do número total de elementos e conseqüentemente a redução no tamanho do mesmo. No refino interno são inseridos novos nós internos ao elemento que por conseqüência resultam em aumento do grau dos polinômios interpoladores ou funções de forma. O elemento finito utilizado neste trabalho é um elemento de viga com formulação de Timoshenko, com quatro graus de liberdade por nó e três nós (Figura 2.1), sendo um nó interno.

Figura 2.1 - Elemento finito quadrático.



A escolha do elemento finito em questão baseia-se na maior precisão obtida na modelagem de vigas espessas assim como em simulações dinâmicas em elevadas frequências (CARVALHO et al., 2007). Além disso, as funções de forma utilizadas são polinômios de

¹ Obviamente, um sistema dinâmico real possui infinitos graus de liberdade, nesse caso porém, considera-se somente os graus de liberdade do eixo convencionados por hipótese de acordo com a Figura 2.1.

classe C^0 , as quais permitem a interpolação dos deslocamentos de translação independentemente dos deslocamentos de rotação, fato importante na modelagem de eixos com influência do cisalhamento transversal (SANTOS et al., 2008). Os polinômios de interpolação dos deslocamentos são dados por

$$[N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \left[-\frac{y}{L} \left(1 - \frac{2y}{L} \right) \quad 1 - \left(\frac{2y}{L} \right)^2 \quad \frac{y}{L} \left(1 + \frac{2y}{L} \right) \right] \quad \text{Eq. 2.3}$$

Outro fato interessante ao utilizar elementos finitos com refino interno é a redução no tamanho final do sistema global de equações, assim como a descrição dos campos de deslocamento de maneira mais suave, justamente por serem utilizadas funções de forma quadráticas (HUGHES, 2000).

Em coerência com os graus de liberdade apresentados na Figura 2.1, assume-se, por hipótese, que os campos de deslocamentos e velocidades da linha neutra do eixo em uma posição axial y qualquer podem ser descritos de forma discreta, através de:

$$u(y) = N_1(y)u_1 + N_2(y)u_2 + N_3(y)u_3, \quad \text{Eq. 2.4}$$

$$w(y) = N_1(y)w_1 + N_2(y)w_2 + N_3(y)w_3, \quad \text{Eq. 2.5}$$

$$\theta(y) = N_1(y)\theta_1 + N_2(y)\theta_2 + N_3(y)\theta_3, \quad \text{Eq. 2.6}$$

$$\psi(y) = N_1(y)\psi_1 + N_2(y)\psi_2 + N_3(y)\psi_3, \quad \text{Eq. 2.7}$$

$$\dot{u}(y) = N_1(y)\dot{u}_1 + N_2(y)\dot{u}_2 + N_3(y)\dot{u}_3, \quad \text{Eq. 2.8}$$

$$\dot{w}(y) = N_1(y)\dot{w}_1 + N_2(y)\dot{w}_2 + N_3(y)\dot{w}_3, \quad \text{Eq. 2.9}$$

$$\dot{\theta}(y) = N_1(y)\dot{\theta}_1 + N_2(y)\dot{\theta}_2 + N_3(y)\dot{\theta}_3 \quad \text{Eq. 2.10}$$

e

$$\dot{\psi}(y) = N_1(y)\dot{\psi}_1 + N_2(y)\dot{\psi}_2 + N_3(y)\dot{\psi}_3, \quad \text{Eq. 2.11}$$

Por sua vez, a montagem das matrizes globais apresentadas na Eq. 2.2 segue a ordenação proposta através dos vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais que são dados, respectivamente, por:

$$\delta = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2 \quad u_3 \quad w_3 \quad \theta_3 \quad \psi_3], \quad \text{Eq. 2.12}$$

$$\dot{\delta} = [\dot{u}_1 \quad \dot{w}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\psi}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{w}_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\psi}_2 \quad \dot{u}_3 \quad \dot{w}_3 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\psi}_3] \quad \text{Eq. 2.13}$$

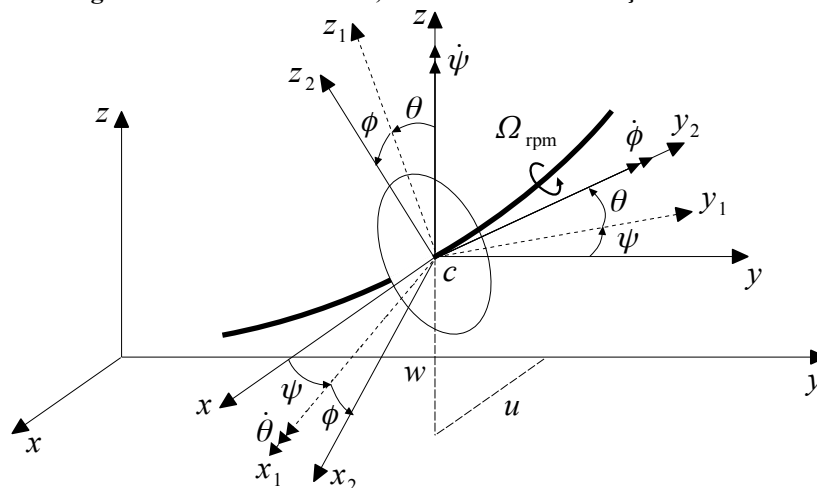
e

$$\ddot{\delta} = [\ddot{u}_1 \quad \ddot{w}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\psi}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad \ddot{w}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\psi}_2 \quad \ddot{u}_3 \quad \ddot{w}_3 \quad \ddot{\theta}_3 \quad \ddot{\psi}_3]. \quad \text{Eq. 2.14}$$

2.3 MATRIZ DE MASSA

A obtenção da matriz de massa do eixo deve levar em consideração os deslocamentos e velocidades de translação e rotação do rotor. A Figura 2.2 ilustra as várias componentes de deslocamento translativos e rotativos, assim como as velocidades de rotação do eixo e da seção transversal do rotor, demonstrando o movimento tridimensional a que o rotor está sujeito.

Figura 2.2 - Deslocamentos, velocidades e acelerações do rotor.



É importante salientar que os movimentos rotativos relacionado aos GDL θ e ψ não estão relacionados com a velocidade de rotação do eixo e sim com a rotação da seção transversal do eixo em relação aos eixos coordenados x e z , provocadas pela flexão. Assim,

expressões como “deslocamento rotativo”, “suporte rotativo”, entre outras, referindo-se principalmente aos SVEs são muito utilizadas neste trabalho, logo devem ser entendidas conforme citado e apresentado na Figura 2.2. A sequência de deslocamentos inicia-se com a rotação ψ em torno do eixo z , seguida pela rotação θ em torno do eixo x_1 e por último a rotação ϕ em torno de y_2 . Adota-se a formulação de referencial inercial como mostrado na Figura 2.2.

O vetor de velocidades angulares em relação ao referencial inercial pode ser obtido segundo RIBEIRO (2009), ao transformar os deslocamentos em torno do centro de massa c , através de matrizes de transformação de coordenadas, para o referencial inercial, desse modo o vetor de velocidades angulares resulta em (LALANNE e FERRARIS, 1990)

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) \sin(\phi) + \frac{d\theta}{dt} \cos(\phi) \\ \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin(\theta) \\ \frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) \cos(\phi) + \frac{d\theta}{dt} \sin(\phi) \end{bmatrix}^T \quad \text{Eq. 2.15}$$

É importante ressaltar o fato de um possível erro conceitual cometido em (LALANNE e FERRARIS, 1990) devido a linearização da Eq. 2.15 antes da aplicação das equações de Lagrange à energia cinética do sistema rotativo. Desse modo é necessário que essa linearização seja realizada somente após a aplicação das equações de Lagrange. Contudo, de maneira prática, os resultados numéricos não são afetados.

Conforme LALANNE e FERRARIS (1990), a energia cinética do disco apresentado na Figura 2.2 é escrita em termos das velocidades de translação e rotação como segue:

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad \text{Eq. 2.16}$$

na qual M_d representa a massa do disco e I_{dx} , I_{dy} e I_{dz} representam os momentos de inércia de massa em relação aos eixos coordenados x , y e z , respectivamente.

2.3.1 O disco

A matriz de massa e a matriz giroscópica referente à inércia circular inserida sobre o

eixo é obtida com a aplicação das equações de Lagrange (Eq. 2.1) à equação Eq. 2.16. Por se tratar de um disco com formato cilíndrico considera-se $I_{dx} = I_{dz}$, e os termos da equação Eq. 2.15 são simplificados pela hipótese de pequenos deslocamentos, e velocidade de rotação do eixo constante $\Omega_{\text{rpm}} = \dot{\phi}$. Desse modo as matrizes de massa e giroscópica do disco correspondem a

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.17}$$

e

$$\mathbf{G}_d = \Omega_{\text{rpm}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. 2.18}$$

respectivamente. Nota-se que a matriz giroscópica do disco apresenta dependência da frequência de rotação, fato que será evidenciado de forma análoga na matriz giroscópica do eixo.

2.3.2 O eixo

A consideração da massa distribuída do eixo é fundamental para precisão do modelo numérico deste componente, diferentemente da contribuição do disco, que pode ser considerada com parâmetros concentrados. Assim, considerando o eixo como uma sucessão de infinitos discos diferenciais e integrando ao longo do domínio y , a equação Eq. 2.16 torna-se

$$T_e = \frac{1}{2} \rho_e \int_0^{L_e} \left[S_e(y) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \left(I_e(y) (\omega_x^2 + 2\omega_y^2 + \omega_z^2) \right) dy \right], \quad \text{Eq. 2.19}$$

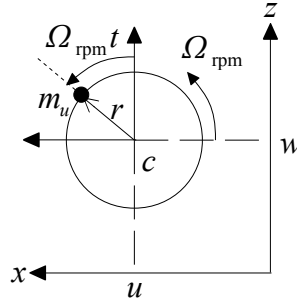
na qual $S_e(y)$ e $I_e(y)$ representam a área e o momento de inércia de área da seção transversal

velocidade de rotação Ω_{rpm} e pode ser escrita, segundo LALANNE e FERRARIS (1990), como segue.

$$|F(\Omega_{\text{rpm}})| = m_u r \Omega_{\text{rpm}}^2 \quad \text{Eq. 2.22}$$

As variáveis m_u e r correspondem à massa desbalanceada e a sua excentricidade, respectivamente. Na Figura 2.3 é possível observar a posição da massa desbalanceada em um instante de tempo t rotacionada de um ângulo $\Omega_{\text{rpm}} t$ em relação ao referencial inercial xyz .

Figura 2.3 - Desbalanceamento.



Baseado na Figura 2.3 de acordo com LALANNE e FERRARIS (1990), a energia cinética associada à massa desbalanceada é determinada pela expressão

$$T_u \simeq m_u r \Omega_{\text{rpm}} (\dot{u} \cos(\Omega_{\text{rpm}} t) - \dot{w} \sin(\Omega_{\text{rpm}} t)). \quad \text{Eq. 2.23}$$

Aplicando as equações de Lagrange à Eq. 2.23 e adotando o modelo de exponenciais complexas com consideração da fase à uma referência φ , pode-se escrever de forma vetorial

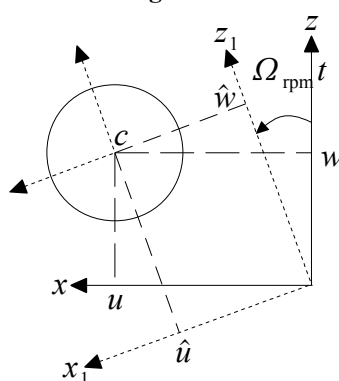
$$\mathbf{F}(\Omega_{\text{rpm}}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ i(m_u r \Omega_{\text{rpm}}^2 e^{i\varphi}) \\ -(m_u r \Omega_{\text{rpm}}^2 e^{i\varphi}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow u \\ \rightarrow w \\ \rightarrow \theta \\ \rightarrow \psi \end{matrix} \quad \text{Eq. 2.24}$$

É importante ressaltar que neste trabalho as setas contidas na Eq. 2.24, e em outras equações matriciais, são meramente ilustrativas com o simples objetivo de fazer correspondência entre as posições vetoriais ou matriciais aos respectivos graus de liberdade.

2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ

O levantamento da matriz de rigidez do eixo envolve a determinação de expressões dos deslocamentos e rotações da linha neutra do mesmo. Considerando um sistema de coordenadas inercial xyz e um sistema de coordenadas local $x_1y_1z_1$ rotacionado em um ângulo $\Omega_{\text{rpm}}t$, os deslocamentos de translação são esboçados conforme apresentado na Figura 2.4, na qual \hat{u} e \hat{w} são os deslocamentos nas coordenadas locais x_1 e z_1 .

Figura 2.4 - Coordenadas do centro geométrico do eixo em vista transversal.



A relação entre os deslocamentos relativos ao sistema de coordenadas locais e o sistema inercial é obtida através de uma matriz de transformação de coordenadas, conforme RIBEIRO (2009). Assim, os deslocamentos em x e z são definidos como apresentado nas Eq. 2.25 e Eq. 2.26.

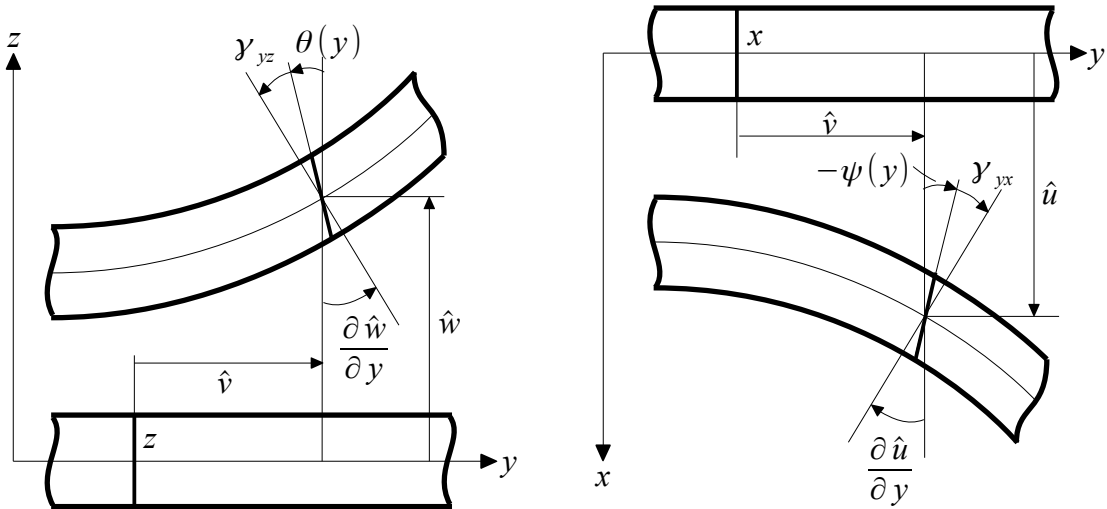
$$u = \hat{u} \cos(\Omega_{\text{rpm}} t) + \hat{w} \sin(\Omega_{\text{rpm}} t) \quad \text{Eq. 2.25}$$

$$w = -\hat{u} \sin(\Omega_{\text{rpm}} t) + \hat{w} \cos(\Omega_{\text{rpm}} t) \quad \text{Eq. 2.26}$$

As deformações do eixo são determinadas a partir dos deslocamentos de translação definidos nas Eq. 2.25 e Eq. 2.26 e dos deslocamentos rotativos. Neste trabalho, ao considerar a contribuição do cisalhamento transversal à rigidez do sistema, através da formulação de Timoshenko, deve-se desconsiderar a hipótese de perpendicularidade da seção transversal do eixo deformado à linha neutra (SACRAMENTO (2003)).

A Figura 2.5 ilustra a hipótese de Timoshenko na qual as rotações da seção transversal do eixo sofrem influência das forças de corte, ao ser aplicada uma deformação no eixo.

Figura 2.5 - Hipótese de Timoshenko para deslocamento em vigas.



Os deslocamentos podem então ser definidos como:

$$v(y) = \hat{v} + x \operatorname{sen}(\psi(y)) - z \operatorname{sen}(\theta(y)), \quad \text{Eq. 2.27}$$

sendo v o deslocamento axial na coordenada y . Pela hipótese de ausência de carregamentos axiais o primeiro termo da Eq. 2.27 é considerado nulo, $\hat{v} = 0$. Por outro lado as rotações resultam em

$$\theta(y) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} - \gamma_{yz} \quad \text{Eq. 2.28}$$

e

$$\psi(y) = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \gamma_{yx} \quad \text{Eq. 2.29}$$

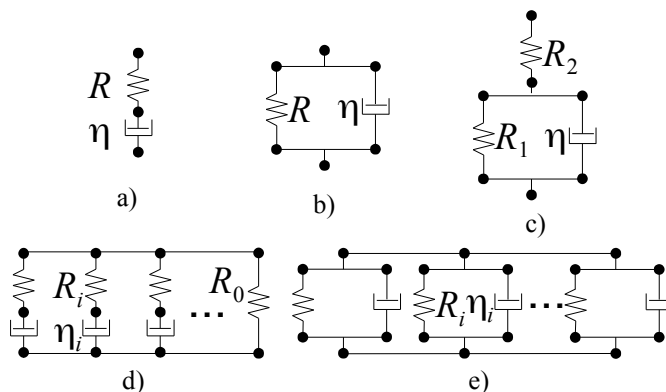
Com a definição dos deslocamentos, é possível escrever o funcional de energia potencial de deformação do eixo em função das deformações axiais e cisalhantes. Desse modo, assumindo a hipótese de material isotrópico e linear e ainda separando a integral volumétrica em uma integral dupla ao longo da área da seção transversal e do comprimento do elemento finito, conforme KOKOT (2009), obtém-se

nulos, assim como a matriz \mathbf{C}_m é considerada apenas por ocasião da calibração do modelo numérico para se adequar ao modelo experimental, nos demais casos (capítulo 4 , seção 5.1.1 e seção 5.1.2) a mesma é considerada nula, no presente trabalho.

3 MODELAGEM DO SUPORTE VISCOELÁSTICO

No contexto de suportes viscoelásticos, como descrito na seção 1.1, observa-se um número limitado de trabalhos e pesquisas publicadas nesta área, quando comparado a soluções semelhantes como os *squeeze film dampers*. Dentre os trabalhos citados como mais relevantes neste contexto, BAVASTRI et al. (2008), VARNEY e GREEN (2014) e SILVÉRIO (2015) utilizam o modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros. Esse modelo, segundo BAGLEY e TORVIK (1983), PADOVAN e GUO (1988), PRITZ (1996), SUN e CHEN (2015), entre outros, apresenta melhor precisão quando comparado a outros modelos viscoelásticos (Figura 3.1), em uma larga banda de frequência e temperatura, utilizando um número reduzido de parâmetros. Devido a robustez do modelo de derivadas fracionárias o mesmo é utilizado neste trabalho com o intuito de modelar o comportamento dinâmico viscoelástico das mantas do suporte.

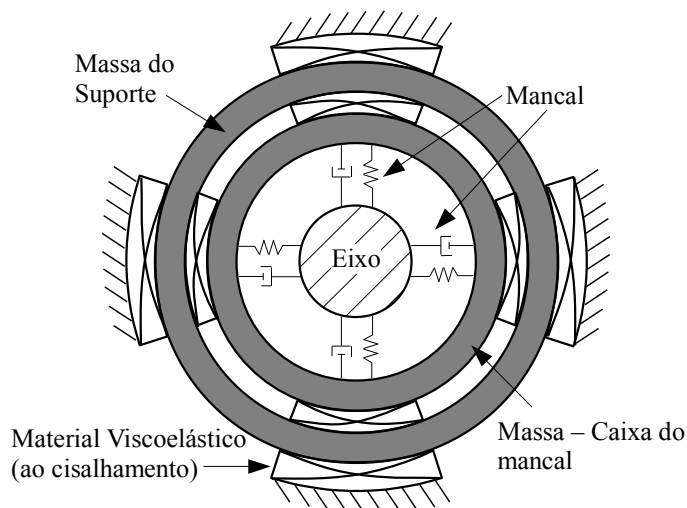
Figura 3.1 - Modelos viscoelásticos clássicos - a) Maxwell, b) Kelvin-Voigt, c) Zenner, d) Maxwell generalizado, e) Kelvin generalizado.



Com relação à modelagem dos diferentes graus de liberdade e sua influência na dinâmica e controle do sistema rotativo, entre os trabalhos listados na seção 1.1 não foi encontrada uma abordagem adequada. Em DOUBRAWA et al. (2010) é sugerida a avaliação de neutralizadores aplicados à diferentes graus de liberdade que na ocasião não foram contemplados. Considerando as hipóteses lançadas e estendendo a sugestão expressa por DOUBRAWA et al. (2010) para o caso de SVEs, neste trabalho, os diferentes graus de liberdade rotativos (θ e ψ) e translativos (u e w) do suporte são modelados, devidamente parametrizados e avaliados de forma a permitir apontar vantagens e desvantagens entre os mesmos. Ainda por hipótese o tipo de suporte proposto, como apresentado na Figura 3.2,

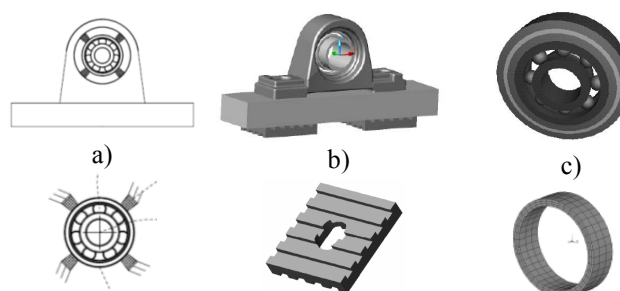
acrescenta ao menos um grau de liberdade adicional para cada direção ortogonal ao eixo, além dos GDL adicionados pelo mancal.

Figura 3.2 - Esboço de suporte viscoelástico.



O tipo de deformação aplicado às mantas viscoelásticas do suporte determina a abordagem que será adotada para consideração dos fatores de forma, já que neste trabalho o intuito é parametrizar a geometria das mantas de material viscoelástico para posterior otimização. É possível trabalhar com mantas sujeitas a carregamentos de cisalhamento puro, tração/compressão pura, ou uma combinação dos anteriores. Porém, devido à característica de incompressibilidade presente na grande maioria dos polímeros viscoelásticos, nos quais pode-se afirmar que $\nu \approx 0,5$, os fatores de forma decorrentes dos carregamentos normais são muito mais influentes quando comparados aos fatores de forma decorrentes da deformação cisalhante. Esses últimos podem, na maioria das situações, ser desconsiderados (DARLOW e ZORZI, 1981, BILLMEYER JR., 1984). Isso implica diretamente na precisão da modelagem matemática das deformações nas mantas, pois os fatores de forma à compressão/tração como apresentados em NASHIF et al. (1985) não são adequados em todos os casos, como pode ser observado em SILVÉRIO (2015) e TILLEMA (2003). Para evitar essa imprecisão, naqueles trabalhos são utilizados softwares de elementos finitos com modelagem 3D para levantamento preciso dos fatores de forma, fato que inviabiliza a parametrização e posterior otimização destas mantas em função do comportamento dinâmico do sistema. Na Figura 3.3 observa-se que os suportes propostos em SILVÉRIO (2015), FERREIRA (2005) e TILLEMA (2003) trabalham predominantemente em regime de compressão/tração, embora seja necessário considerar que componentes cisalhantes estão presentes.

Figura 3.3 - Suportes propostos em a) SILVÉRIO (2015) b) FERREIRA (2005) e c) TILLEMA (2003).



Outro fator que influencia de maneira importante o comportamento de materiais viscoelásticos é a pré carga de compressão. Em DARLOW e ZORZI (1981) são realizados vários testes experimentais dos quais é possível concluir que a pré carga de compressão altera sensivelmente fatores como módulo de elasticidade, fator de perda, fator de forma e distribuição de temperatura. Além desses fatos, pode acrescentar-se a falta de precisão na determinação de parâmetros geométricos que permitam avaliar a rigidez radial ou até mesmo a rigidez ao cisalhamento de mantas viscoelásticas sob pré carga. É interessante lembrar que o peso próprio de um rotor suspenso em suportes viscoelásticos gerará uma pré carga no material viscoelástico, em NASHIF et al. (1985), LÉPORE NETO e SANTOS (2012), entre outros, este fato é corroborado. Desse modo, com o objetivo de evitar imprecisões no modelo do material viscoelástico, os espécimes tratados neste trabalho estarão por hipótese em condição de cisalhamento puro e sem pré carga de compressão.

Em relação à determinação das matrizes contendo a contribuição dos suportes para o sistema rotativo, observa-se ao longo da seção 1.1, que o método tradicional de acréscimo de GDL é amplamente utilizado, fato que torna o suporte parte do sistema de equações. A utilização de um modelo viscoelástico dependente da frequência associado ao método tradicional leva a uma metodologia com alto custo computacional. Por outro, lado a utilização do modelo de PEG permite modelar estruturas de controle passivo como SVEs com seus n GDL, através de coeficientes equivalentes de rigidez, chamados parâmetros equivalentes de rigidez (ESPÍNDOLA e BAVASTRI, 1997). Dessa forma, além de não acrescentar GDL ao modelo numérico, este método permite descrever a resposta em frequência do sistema composto (sistema primário, Figura 4.2, + SVEs) em função das coordenadas generalizadas do sistema primário (ESPÍNDOLA et al., 2010). O ganho computacional com a utilização do modelo de PEG é notável e por isso é adotado neste trabalho.

A Figura 3.2 apresenta um esquema do suporte proposto neste trabalho. Ressalta-se

alguns pontos importantes: isotropia, acréscimo de ao menos um GDL adicional para cada direção transversal do eixo através de uma massa rígida (adicional), material viscoelástico interposto à massa adicionada com deformação cisalhante, consideração da flexibilidade do mancal.

3.1 VISCOELASTICIDADE POR DERIVADAS FRACIONÁRIAS

A utilização do cálculo fracionário para modelagem viscoelástica remonta, segundo CRUZ (2004), à década de 20, com as observações de NUTTING (1921) sobre problemas de tensão-relaxação. Segundo MAINARDI (2010), autores como GEMANT (1950) e SCOTT-BLAIR (1944); (1947); (1949) contribuíram para impulsionar o uso do cálculo fracionário em modelos matemáticos para ajustar dados empíricos de materiais viscoelásticos.

Atualmente, o início do uso moderno do cálculo fracionário em viscoelasticidade linear é geralmente atribuído a tese de doutorado de BAGLEY (1979). Esse trabalho gerou quatro artigos dos quais destacam-se, BAGLEY e TORVIK (1979); (1983). O primeiro trata da determinação de uma relação constitutiva no domínio do tempo e da frequência, para análise de elastômeros em termos de derivadas fracionárias. O segundo trabalho denota uma relação entre os coeficientes fracionários com capacidade de modelar o comportamento dinâmico de elastômeros utilizados em engenharia.

Entre as aplicações mais recentes, pode-se citar o trabalho de SUN e CHEN (2015), o qual utiliza derivadas fracionárias para modelagem de amortecedores mecânicos de cabos de pontes suspensas. Em VARNEY e GREEN (2014), a utilização de derivadas fracionárias se dá na modelagem de suportes viscoelásticos para máquinas rotativas. DOUBRAWA et al. (2010) projeta de forma ótima NDVs para controle de vibrações laterais em máquinas rotativas, utilizando o modelo de derivadas fracionárias.

Neste trabalho, como hipótese, o comportamento viscoelástico é considerado como linear, o que implica em pequenos deslocamentos e ângulos de rotação. Assim, uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é suficiente para representar tal comportamento. O comportamento viscoelástico ocorre na maioria dos materiais utilizados em engenharia em maior ou menor grau; pode-se dizer que é predominante em materiais poliméricos como resinas, acrílicos, elastômeros, entre outros (BILLMEYER JR., 1984), nos quais a viscoelasticidade é notável. Porém, em menor grau, a viscoelasticidade pode ser observada em materiais cerâmicos e até mesmo em materiais metálicos (LAKES, 2009).

Os materiais viscoelásticos quando submetidos a carregamentos cíclicos apresentam uma defasagem entre força de excitação e a resposta gerada devido à componente viscosa presente neles (HADDAD, 1995).

3.1.1 Equação constitutiva

A equação diferencial com derivadas de ordem fracionária que, segundo BAGLEY e TORVIK (1983) e PRITZ (1996) representa de maneira adequada o comportamento viscoelástico no domínio do tempo pode ser escrita como

$$b_0\sigma(t) + b_1 \frac{d^{\kappa_1}\sigma(t)}{dt^{\kappa_1}} + \dots + b_n \frac{d^{\kappa_n}\sigma(t)}{dt^{\kappa_n}} = a_0\varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\beta_1}\varepsilon(t)}{dt^{\beta_1}} + \dots + a_m \frac{d^{\beta_m}\varepsilon(t)}{dt^{\beta_m}}, \quad \text{Eq. 3.1}$$

na qual σ e ε representam, respectivamente, a tensão e a deformação, respectivamente, b_i e a_i são parâmetros materiais constantes e, κ_i e β_i são os parâmetros fracionários materiais contidos no intervalo $\{\kappa_i, \beta_i \in \mathbb{R} | 0 < \kappa_i, \beta_i < 1\}$. A definição das derivadas fracionárias presentes na Eq. 3.1, no domínio do tempo, segue a seguinte forma:

$$\frac{d^{\kappa_i}\sigma(t)}{dt^{\kappa_i}} = \frac{1}{\Gamma(1-\kappa_i)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{(t-\tau)^{\kappa_i}} d\tau, \quad \text{Eq. 3.2}$$

na qual a função gama é

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt \quad \text{Eq. 3.3}$$

De acordo com BAGLEY e TORVIK (1979), para $n \geq 2$ e $m \geq 2$ a Eq. 3.1 modela materiais com forte dependência da frequência, para a representação dos elastômeros usuais utilizados comumente na engenharia valores de n e m iguais a 1 são suficientes; pode-se também simplificar fazendo $\kappa_i = \beta_i$. Desse modo a Eq. 3.1 reduz-se a:

$$b_0\sigma(t) + b_1 \frac{d^{\beta}\sigma(t)}{dt^{\beta}} = a_0\varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\beta}\varepsilon(t)}{dt^{\beta}} \quad \text{Eq. 3.4}$$

Ao adotar n e m iguais a 1 na equação constitutiva Eq. 3.1, assume-se a utilização do

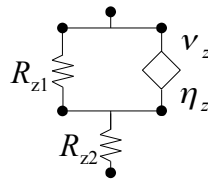
modelo de Zenner viscoelástico (PRITZ 2003) apresentado na Figura 3.4. Nota-se, a partir desta figura, que os parâmetros presentes na equação Eq. 3.4 não são os mesmos mostrados na Figura 3.4, porém, segundo PRITZ (2003), os mesmos se correspondem como apresentado na Eq. 3.5, Eq. 3.6 e Eq. 3.7. Ainda, assume-se $b_0=1$ e $\beta_1=\nu_z$.

$$b_1 = \frac{\eta_z}{R_{z1} + R_{z2}} \quad \text{Eq. 3.5}$$

$$a_0 = \frac{R_{z1} R_{z2}}{R_{z1} + R_{z2}} \quad \text{Eq. 3.6}$$

$$a_1 = \frac{R_{z1} \eta_z}{R_{z1} + R_{z2}} \quad \text{Eq. 3.7}$$

Figura 3.4 - Modelo viscoelástico de Zenner fracionário.



Não é objetivo deste trabalho a resolução no domínio do tempo da Eq. 3.4, para detalhes sobre a resolução no domínio do tempo consultar CRUZ (2004). Fazendo uso da transformada de Fourier aplicada a Eq. 3.4 tem-se

$$b_0 \sigma(\Omega) + b_1 (i\Omega)^\beta \sigma(\Omega) = a_0 \varepsilon(\Omega) + a_1 (i\Omega)^\beta \varepsilon(\Omega) \quad \text{Eq. 3.8}$$

Ao considerar apenas deformações cisalhantes no material viscoelástico, a Eq. 3.8 pode ser reescrita na forma:

$$b_0 \tau(\Omega) + b_1 (i\Omega)^\beta \tau(\Omega) = a_0 \gamma(\Omega) + a_1 (i\Omega)^\beta \gamma(\Omega) \quad \text{Eq. 3.9}$$

Consequentemente, o módulo complexo ao cisalhamento resulta em

$$\bar{G}(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{a_0 + a_1 (i\Omega)^\beta}{b_0 + b_1 (i\Omega)^\beta} \quad \text{Eq. 3.10}$$

Com o objetivo de obter um módulo de elasticidade complexo em função de quatro parâmetros materiais como apresentado em PRITZ (1996), definiu-se $b_0=1$ e $a_0=G_0$. Ainda separando a adição da Eq. 3.10 em dois termos e multiplicando o numerador e denominador do termo à direita da adição pelo quociente $\frac{b_1}{b_1}$ e por fim definindo $\frac{a_1}{b_1}=G_\infty$, o módulo cisalhante pode ser escrito em função da frequência e de quatro parâmetros materiais constantes.

$$\bar{G}(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty b_1 (i\Omega)^\beta}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta} \quad \text{Eq. 3.11}$$

Os termos G_0 , G_∞ , b_1 e β são os parâmetros materiais definidos experimentalmente, com destaque para os parâmetros G_0 e G_∞ , que representam os valores assintóticos de $\Re(\bar{G}(\Omega))$ quando $\Omega \rightarrow 0$ e quando $\Omega \rightarrow \infty$, respectivamente. Na Figura 3.5 pode-se observar o efeito do enrijecimento devido ao aumento da frequência de excitação. Outra maneira de escrever a Eq. 3.11 é

$$\bar{G}(\Omega) = (\Re \bar{G}(\Omega))(1 + i\eta(\Omega)), \quad \text{Eq. 3.12}$$

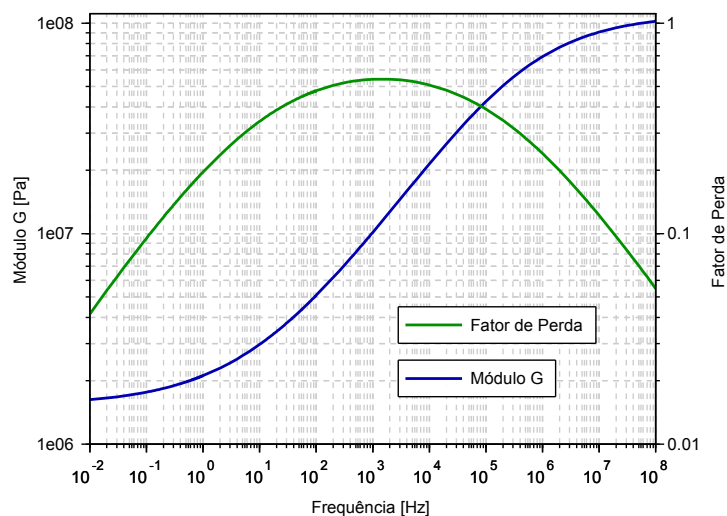
Onde $\eta(\Omega)$ é denominado fator de perda e é dado por:

$$\eta(\Omega) = \frac{\Im(\bar{G}(\Omega))}{\Re(\bar{G}(\Omega))}. \quad \text{Eq. 3.13}$$

A $\Re(\bar{G}(\Omega))$ é também denominada módulo de elasticidade $G(\Omega)$ e pode ser representado por:

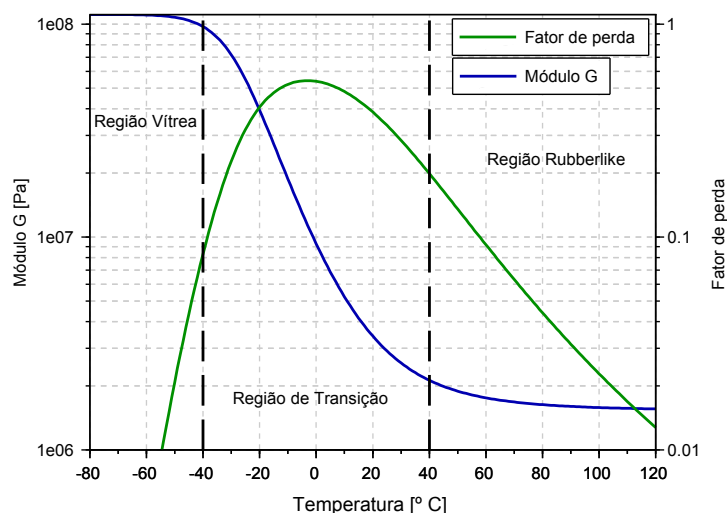
$$\Re(\bar{G}(\Omega)) = \frac{G_0 + G_\infty b_1^2 (\Omega)^{2\beta}}{1 + b_1^2 (\Omega)^{2\beta}}. \quad \text{Eq. 3.14}$$

Figura 3.5 - Nomograma de borracha butílica em temperatura constante (20°C).



A Eq. 3.11 leva em consideração o efeito da frequência de excitação no comportamento viscoelástico do material, porém existem outros efeitos que influenciam o seu comportamento. Dentre esses efeitos, será considerado, neste trabalho, a variação módulo de elasticidade complexo de cisalhamento em função da temperatura. A Figura 3.6 apresenta o efeito típico da variação da temperatura em um espécime de material viscoelástico. Pode-se observar três regiões bem definidas (LAKES, 2009):

Figura 3.6 - Efeito da temperatura sobre as propriedades viscoelásticas a frequência constante (20 Hz).



- Região vítrea, com módulo de elasticidade elevado e baixo fator de perda, comportamento frágil,
- Região de transição, com grande variação do módulo de elasticidade e elevados valores de fator de perda, região ótima para controle de vibrações,

- Região *rubberlike*, baixo módulo de elasticidade e baixos valores de amortecimento, material com elevada elasticidade.

Neste trabalho a hipótese considerada para modelar a variação de temperatura é a de materiais termoreologicamente simples. De acordo com essa hipótese, a variação da temperatura, no MVE gera um deslocamento na curva que representa seu comportamento, no domínio da frequência (HADDAD, 1995). Desse modo, como proposto por FERRY (1980), esse deslocamento pode ser modelado pela seguinte expressão:

$$\log \alpha(T) = -\theta_1 \frac{(T - T_0)}{(T - T_0 + \theta_2)}, \quad \text{Eq. 3.15}$$

na qual α é o fator de deslocamento, T é a temperatura corrente do material, T_0 é a temperatura de referência definida arbitrariamente e θ_1 e θ_2 são constantes que dependem do material.

A aplicação do fator de deslocamento α à variável de frequência gera uma variável chamada frequência reduzida que combina os efeitos de frequência e temperatura da seguinte forma:

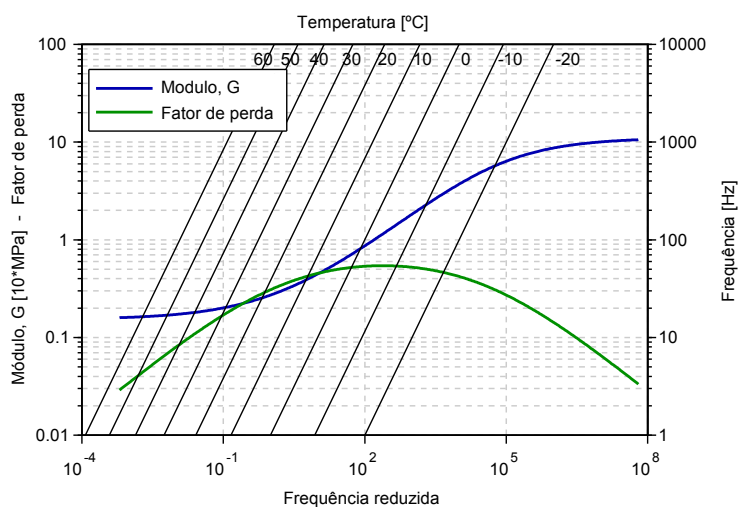
$$\Omega_r = \Omega \alpha(T). \quad \text{Eq. 3.16}$$

Assim, é possível através de uma única variável, descrever o comportamento dinâmico do módulo cisalhante complexo, levando em consideração os efeitos da frequência de excitação e da temperatura, utilizando a seguinte expressão:

$$\bar{G}(\Omega, T) = \frac{G_0 + G_\infty b_1 (i\Omega_r)^\beta}{1 + b_1 (i\Omega_r)^\beta}. \quad \text{Eq. 3.17}$$

A Figura 3.7 mostra um nomograma de frequência reduzida típico de um elastômero utilizado para controle de vibrações em engenharia. Para determinar as propriedades viscoelásticas diferentes valores de frequência e temperatura basta traçar uma reta vertical baseada na intersecção entre a frequência e temperatura de interesse, e determinar por sua vez as intersecções dessa reta com as curvas de módulo elástico e fator de perda.

Figura 3.7 - Nomograma de frequência reduzida de espécime de borracha butílica.



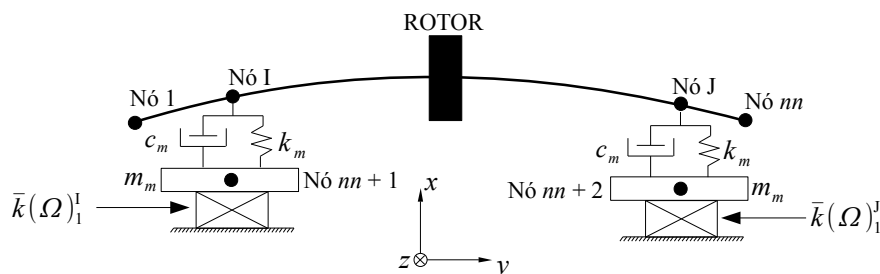
3.2 MODELO DE SUPORTES ATRAVÉS DE ACRÉSCIMO DE GDL

Nesta seção são abordados os modelos tradicionais de inserção de suportes em máquinas rotativas, através do aumento no número de GDL do sistema global. É importante ressaltar que este modelo modifica o sistema global, que por consequência torna-se parte do sistema alterando seus parâmetros modais. Em GENTA e AMATI (2010); RIBEIRO et al. (2008); KIRK e GUNTER (1972); PANDA e DUTT (2003); DUTT e NAKRA (1992); DUTT e TOI (2003); SILVÉRIO (2015), entre outros, pode-se observar o emprego deste modelo.

3.2.1 Suportes sem inserção de massa adicional

A Figura 3.8 apresenta um modelo discreto de um sistema rotor-suporte, no qual os suportes são responsáveis por acrescentar quatro GDL ao modelo.

Figura 3.8 - Sistema composto com suporte de quatro GDL.



Na Figura 3.8, k_m e m_m representam, respectivamente, a rigidez radial e angular (ou rotacional) do mancal e a massa da caixa do mancal. Devido à utilização de mancais de rolamento na validação experimental, considera-se por hipótese isotropia de rigidez nos

mancais. A rigidez complexa da manta viscoelástica é obtida conforme

$$\bar{k}(\Omega) = l_g \bar{G}_a(\Omega), \quad \text{Eq. 3.18}$$

Onde $\bar{G}_a(\Omega) = l_f \bar{G}(\Omega)$. Os parâmetros l_g e l_f correspondem, respectivamente, ao fator geométrico e ao fator de forma, detalhados nas seções 3.4.1 e 3.4.2.

O levantamento das matrizes dos suportes é realizado através da aplicação da segunda lei de Newton aos nós I e $nn+1$ da Figura 3.8. Considerando essa operação aplicada na direção das coordenadas x e θ obtém-se o sistema de equações

$$\begin{aligned} k_{im} u_1(t) - k_{im} u_{nn+1}(t) &= f_t(t) \\ m_m \ddot{u}_{nn+1}(t) - k_{im} u_1(t) + (k_{im} + \bar{k}_t(\Omega)_1^I) u_{nn+1}(t) &= 0 \\ k_{rm} \theta_1(t) - k_{rm} \theta_{nn+1}(t) &= f_r(t) \\ I_m \ddot{\theta}_{nn+1}(t) - k_{rm} \theta_1(t) + (k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^I) \theta_{nn+1}(t) &= 0, \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.19}$$

no qual k_{im} , k_{rm} , $\bar{k}_t(\Omega)$ e $\bar{k}_r(\Omega)$ representam, respectivamente, a rigidez radial e angular do mancal e a rigidez a translação e a rotação da manta viscoelástica. As variáveis $f_t(t)$ e $f_r(t)$ correspondem à força de translação e ao momento angular, respectivamente. Rearranjando os termos da Eq. 3.19 em forma matricial obtém-se a matriz de rigidez e a matriz de massa.

$$\mathbf{K}_s^I = \begin{array}{cccc} u_1 & \theta_1 & u_{nn+1} & \theta_{nn+1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} k_{im} & 0 & -k_{im} & 0 \\ 0 & k_{rm} & 0 & -k_{rm} \\ -k_{im} & 0 & k_{im} + \bar{k}_t(\Omega)_1^I & 0 \\ 0 & -k_{rm} & 0 & k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^I \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow \theta_1 \\ \leftarrow u_{nn+1} \\ \leftarrow \theta_{nn+1} \end{array} \end{array} \quad \text{Eq. 3.20}$$

$$\mathbf{M}_s^I = \begin{array}{cccc} \ddot{u}_1 & \ddot{\theta}_1 & \ddot{u}_{nn+1} & \ddot{\theta}_{nn+1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow \ddot{u}_1 \\ \leftarrow \ddot{\theta}_1 \\ \leftarrow \ddot{u}_{nn+1} \\ \leftarrow \ddot{\theta}_{nn+1} \end{array} \end{array} \quad \text{Eq. 3.21}$$

É importante ressaltar que considerando apenas os graus de liberdade de translação tem-se um suporte puramente translativo com dois GDL. O mesmo ocorre ao considerar apenas os graus de liberdade rotativos (ou angulares). Neste caso, o modelo apresentado nas equações Eq. 3.20 e Eq. 3.21 representa um suporte misto com quatro graus de liberdade.

Aplicando a hipótese de simetria, o processo realizado anteriormente na direção das coordenadas z e ψ resulta em matrizes idênticas às apresentadas nas Eq. 3.20 e Eq. 3.21, totalizando assim quatro graus de liberdade adicionais. Analogamente ao tratar os nós J e $nn+2$ obtém-se as seguintes matrizes:

$$\mathbf{K}_s^J = \begin{array}{cccc} u_J & \theta_J & u_{nn+2} & \theta_{nn+2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} k_{tm} & 0 & -k_{tm} & 0 \\ 0 & k_{rm} & 0 & -k_{rm} \\ -k_{tm} & 0 & k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1^J & 0 \\ 0 & -k_{rm} & 0 & k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^J \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow u_J \\ \leftarrow \theta_J \\ \leftarrow u_{nn+2} \\ \leftarrow \theta_{nn+2} \end{array} \end{array} \quad \text{Eq. 3.22}$$

e

$$\mathbf{M}_s^J = \begin{array}{cccc} \ddot{u}_J & \ddot{\theta}_J & \ddot{u}_{nn+2} & \ddot{\theta}_{nn+2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow \ddot{u}_J \\ \leftarrow \ddot{\theta}_J \\ \leftarrow \ddot{u}_{nn+2} \\ \leftarrow \ddot{\theta}_{nn+2} \end{array} \end{array} \quad \text{Eq. 3.23}$$

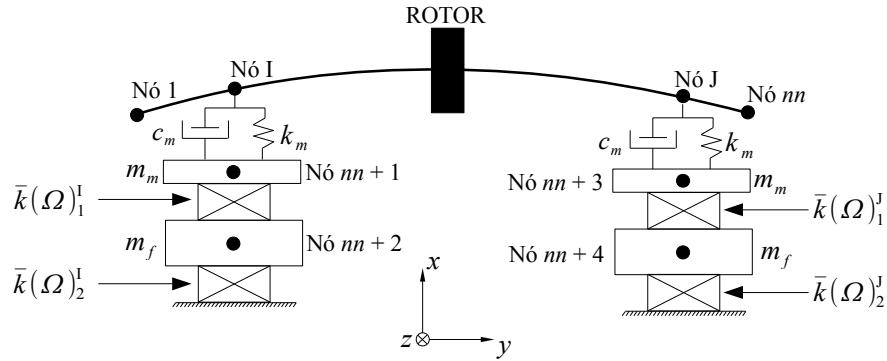
Os trabalhos relativos a SVEs apresentados na seção 1.1 limitam-se a considerar modelos de suporte similares ao apresentado nesta seção, sem, no entanto, considerar a influência dos graus de liberdade de rotação. Esses modelos de suporte não consideram massas dimensionáveis como o proposto neste trabalho e apresentado nas próximas seções.

3.2.2 Suportes com inserção de massa adicional

O modelo de suporte com massa adicional insere no sistema ao menos oito graus de liberdade adicionais na condição de suporte misto (considerando todos os graus de liberdade), como apresentado na Figura 3.9. No exemplo da Figura 3.9, e sem perda de generalidade, é

considerada a inserção de apenas uma massa adicional por suporte.

Figura 3.9 - Sistema composto com SVE de oito GDL.



O mesmo procedimento aplicado na seção 3.2.1 pode ser aplicado aos nós I, $nn+1$ e $nn+2$ resultando nas matrizes

$$\mathbf{K}_s^I = \begin{bmatrix} k_{tm} & 0 & -k_{tm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{rm} & 0 & -k_{rm} & 0 & 0 \\ -k_{tm} & 0 & k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1^I & 0 & -k_t(\Omega)_1^I & 0 \\ 0 & -k_{rm} & 0 & k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^I & 0 & -\bar{k}_r(\Omega)_1^I \\ 0 & 0 & -k_t(\Omega)_1^I & 0 & \bar{k}_t(\Omega)_1^I + \bar{k}_t(\Omega)_2^I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{k}_r(\Omega)_1^I & 0 & \bar{k}_r(\Omega)_1^I + \bar{k}_r(\Omega)_2^I \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow \theta_1 \\ \leftarrow u_{nn+1} \\ \leftarrow \theta_{nn+1} \\ \leftarrow u_{nn+2} \\ \leftarrow \theta_{nn+2} \end{matrix} \quad \text{Eq. 3.24}$$

e

$$\mathbf{M}_s^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_f \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow \theta_1 \\ \leftarrow u_{nn+1} \\ \leftarrow \theta_{nn+1} \\ \leftarrow u_{nn+2} \\ \leftarrow \theta_{nn+2} \end{matrix} \quad \text{Eq. 3.25}$$

De maneira análoga aplicando a segunda lei de Newton aos nós J, $nn+3$ e $nn+4$ obtêm-se as matrizes (Eq. 3.26 e Eq. 3.27) referentes ao segundo suporte representado na Figura 3.9.

$$\mathbf{K}_s^J = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} u_J & \theta_J & u_{nn+3} & \theta_{nn+3} & u_{nn+4} & \theta_{nn+4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
k_{im} & 0 & -k_{im} & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_{rm} & 0 & -k_{rm} & 0 & 0 \\
-k_{im} & 0 & k_{im} + \bar{k}_t(\Omega)_1^J & 0 & -k_t(\Omega)_1^J & 0 \\
0 & -k_{rm} & 0 & k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^J & 0 & -\bar{k}_r(\Omega)_1^J \\
0 & 0 & -k_t(\Omega)_1^J & 0 & \bar{k}_t(\Omega)_1^J + \bar{k}_t(\Omega)_2^J & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\bar{k}_r(\Omega)_1^J & 0 & \bar{k}_r(\Omega)_1^J + \bar{k}_r(\Omega)_2^J
\end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_J \\ \leftarrow \theta_J \\ \leftarrow u_{nn+3} \\ \leftarrow \theta_{nn+3} \\ \leftarrow u_{nn+4} \\ \leftarrow \theta_{nn+4} \end{matrix} \quad \text{Eq. 3.26}$$

$$\mathbf{M}_s^J = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} u_J & \theta_J & u_{nn+3} & \theta_{nn+3} & u_{nn+4} & \theta_{nn+4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & m_m & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_f & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_f
\end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_J \\ \leftarrow \theta_J \\ \leftarrow u_{nn+3} \\ \leftarrow \theta_{nn+3} \\ \leftarrow u_{nn+4} \\ \leftarrow \theta_{nn+4} \end{matrix} \quad \text{Eq. 3.27}$$

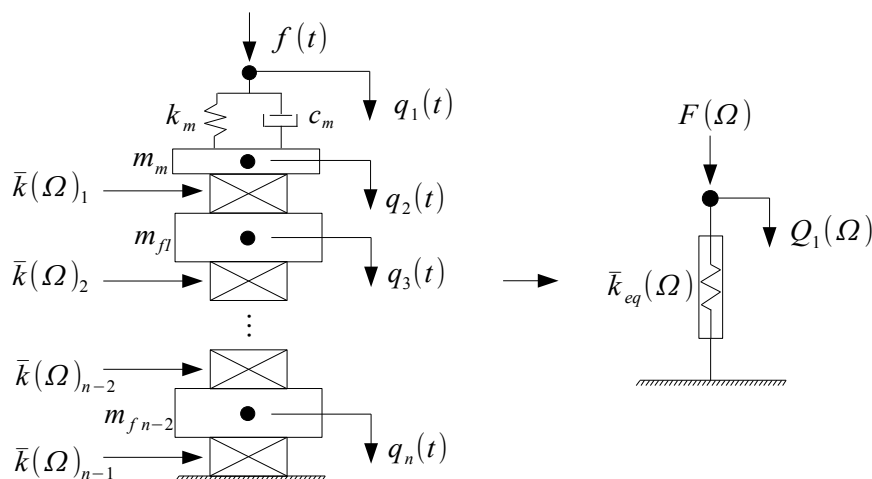
Nota-se que a simples inserção de uma massa de fundação (adicional) dobra o número de GDL adicionais do sistema, demonstrando que inserir mais massas pode influenciar no tempo de resolução computacional do sistema composto.

Por outro lado, no caso de suportes compostos de elementos puramente elásticos, esta abordagem é suficientemente eficaz para predição do comportamento de sistemas rotor-suporte. Porém considerando suportes compostos de elementos viscoelásticos, que são dependentes da frequência e temperatura, esta abordagem se torna bastante onerosa em termos computacionais e inviável se o objetivo é otimizar os parâmetros do suporte. Devido a isso técnicas de simplificação podem ser empregadas, desde as mais simples e comuns nas quais são assumidas propriedades médias constantes para os materiais viscoelásticos (MONTAGNIER e HOCHARD (2007), (2014); KANG et al. (2011); GENTA e AMATI (2010); SHABANEH e ZU 2000), a técnicas como parâmetros equivalentes generalizados que permitem prever o comportamento do sistema composto, em termos de resposta em frequência, sem perda de generalidade.

3.3 MODELO DE SUPORTES POR PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS (PEG)

O método de PEG faz uso de coeficientes de rigidez dinâmica equivalentes para substituir as matrizes de inserção dos suportes (Eq. 3.20 a Eq. 3.27). Este método foi primeiramente proposto por ESPÍNDOLA e SILVA (1992) na modelagem de neutralizadores viscoelásticos com uma diferença em relação à abordagem presente devido a utilização de coeficientes de amortecimento e massa dinâmica equivalentes derivados do coeficiente de rigidez equivalente. Outros trabalhos utilizaram esta técnica como BAVASTRI et al. (2015), HUDENSKI et al. (2007), CECCON (2008), ESPÍNDOLA et al. (2010) e DOUBRAWA et al. (2010). Nesses trabalhos, a técnica de PEG foi aplicada em neutralizadores viscoelásticos para porta-ferramentas, neutralizadores viscoelástico-eleto-mecânicos, neutralizadores viscoelásticos torcionais para máquinas rotativas, neutralizadores viscoelásticos pendulares e neutralizadores viscoelásticos de vibração lateral para máquinas rotativas, respectivamente. A aplicação desta técnica para modelagem de suportes viscoelásticos não foi encontrada até a publicação do trabalho RIBEIRO et al. (2015).

Figura 3.10 - PEG aplicado a estrutura de suporte com n GDL.



O modelo de PEG é dinamicamente equivalente, no domínio da frequência, ao modelo de inserção de GDL. De acordo com ESPÍNDOLA e SILVA (1992) o uso destes parâmetros permite descrever a dinâmica do sistema composto (Figura 3.8, Figura 3.9) em função das coordenadas generalizadas do sistema primário (Figura 4.2) apenas. A obtenção dos coeficientes de rigidez dinâmica equivalente parte do cálculo do equilíbrio de forças nos nós de uma estrutura de suporte, como mostrado na Figura 3.10, em conjunto com a aplicação da transformada de Fourier. A determinação da rigidez dinâmica equivalente é dada pelo

quociente $\frac{F(\Omega)}{Q_1(\Omega)}$ ¹.

O uso de PEG permite modelar estruturas, independentemente de sua complexidade em seus n GDL. Assim, todos os termos que representam o SVE podem ser substituídos por apenas um coeficiente de rigidez complexo e dependente da frequência. Desse modo a técnica proposta não altera o sistema primário (Figura 4.2) inicial, fato que permite utilizar os parâmetros modais desse sistema para determinar a resposta do sistema composto.

3.3.1 PEG aplicado a suporte sem massa adicional

Tomando o suporte apresentado na Figura 3.10, sem a consideração das massas adicionais m_{fi} e aplicando a segunda lei de Newton, para $n=2$, segundo os graus de liberdade u e θ , obtém-se o sistema de equações

$$\begin{aligned} k_{im}u_1(t) - k_{im}u_2(t) &= f_t(t) \\ m_m\ddot{u}_2(t) - k_{im}u_1(t) + (k_{im} + \bar{k}_t(\Omega)_1)u_2(t) &= 0 \\ k_{rm}\theta_1(t) - k_{rm}\theta_2(t) &= f_r(t) \\ I_m\ddot{\theta}_2(t) - k_{rm}\theta_1(t) + (k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^I)\theta_2(t) &= 0. \end{aligned} \tag{Eq. 3.28}$$

Aplicando a transformada de Fourier para cada equação individual e separando as equações referentes aos termos de translação e rotação, a Eq. 3.28 pode ser desmembrada em

$$\begin{aligned} k_{im}U_1(\Omega) - k_{im}U_2(\Omega) &= F_t(\Omega) \\ -\Omega^2 m_m U_2(\Omega) - k_{im}U_1(\Omega) + (k_{im} + \bar{k}_t(\Omega)_1^I)U_2(\Omega) &= 0 \end{aligned} \tag{Eq. 3.29}$$

e

$$\begin{aligned} k_{rm}\Theta_1(\Omega) - k_{rm}\Theta_2(\Omega) &= F_r(\Omega) \\ -\Omega^2 I_m \Theta_2(\Omega) - k_{rm}\Theta_1(\Omega) + (k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1^I)\Theta_2(\Omega) &= 0. \end{aligned} \tag{Eq. 3.30}$$

O termo de rigidez dinâmica equivalente translativa pode ser obtido ao escrever U_2 em

¹ A variável q_i com $i = 1, \dots, n$ representa as coordenadas generalizadas, ou seja, pode assumir os GDL u_i , w_i , θ_i e ψ_i .

função de U_1 na Eq. 3.29, e ao calcular o quociente $\frac{F_t(\Omega)}{U_1(\Omega)}$.

$$\bar{k}_{t\,eq}(\Omega) = \frac{F_t(\Omega)}{U_1(\Omega)} = \frac{(-\Omega^2 m_m + \bar{k}_t(\Omega)_1) k_{tm}}{k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1 - \Omega^2 m_m} \quad \text{Eq. 3.31}$$

Da mesma forma, o termo de rigidez dinâmica equivalente rotativa pode ser obtido ao escrever Θ_2 em função de Θ_1 na Eq. 3.30 e ao calcular o quociente $\frac{F_r(\Omega)}{\Theta_1(\Omega)}$.

$$\bar{k}_{r\,eq}(\Omega) = \frac{F_r(\Omega)}{\Theta_1(\Omega)} = \frac{(-\Omega^2 I_m + \bar{k}_r(\Omega)_1) k_{rm}}{k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1 - \Omega^2 I_m} \quad \text{Eq. 3.32}$$

3.3.2 PEG aplicado a suporte com massa adicional

Nesta seção são deduzidas as expressões de rigidez equivalente para suportes com uma e duas massas adicionais.

O mesmo procedimento demonstrado na seção 3.3.1, pode ser aplicado considerando $n=3$ (Figura 3.10), de forma obter o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} k_{tm} u_1(t) - k_{tm} u_2(t) &= f_t(t) \\ m_m \ddot{u}_2(t) - k_{tm} u_1(t) + (k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1) u_2(t) - \bar{k}_t(\Omega)_1 u_3(t) &= 0 \\ m_{f1} \ddot{u}_3(t) - \bar{k}_t(\Omega)_1 u_2(t) + (\bar{k}_t(\Omega)_1 + \bar{k}_t(\Omega)_2) u_3(t) &= 0 \\ k_{rm} \theta_1(t) - k_{rm} \theta_2(t) &= f_t(t) \\ I_m \ddot{\theta}_2(t) - k_{rm} \theta_1(t) + (k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1) \theta_2(t) - \bar{k}_r(\Omega)_1 \theta_3(t) &= 0 \\ I_{f1} \ddot{\theta}_3(t) - \bar{k}_r(\Omega)_1 \theta_2(t) + (\bar{k}_r(\Omega)_1 + \bar{k}_r(\Omega)_2) \theta_3(t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.33}$$

Aplicando a transformada de Fourier e avaliando os quocientes $\frac{F_t(\Omega)}{U_1(\Omega)}$ e $\frac{F_r(\Omega)}{\Theta_1(\Omega)}$ tem-se como resultado:

$$\bar{k}_{t\,eq}(\Omega) = k_{tm} - \frac{k_{tm}^2}{k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1 - \Omega^2 m_m - \frac{(\bar{k}_t(\Omega)_1)^2}{\bar{k}_t(\Omega)_1 + \bar{k}_t(\Omega)_2 - \Omega^2 m_{f1}}} \quad \text{Eq. 3.34}$$

e

$$\bar{k}_{r\,eq}(\Omega) = k_{rm} - \frac{k_{rm}^2}{k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1 - \Omega^2 I_m - \frac{(\bar{k}_r(\Omega)_1)^2}{\bar{k}_r(\Omega)_1 + \bar{k}_r(\Omega)_2 - \Omega^2 I_{f1}}} \quad \text{Eq. 3.35}$$

Por sua vez, considerando $n=4$ (Figura 3.10), e realizando novamente a aplicação da segunda lei de Newton, o sistema de equações resultante fica

$$\begin{aligned} k_{tm}u_1(t) - k_{tm}u_2(t) &= f_t(t) \\ m_m\ddot{u}_2(t) - k_{tm}u_1(t) + (k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1)u_2(t) - \bar{k}_t(\Omega)_1u_3(t) &= 0 \\ m_{f1}\ddot{u}_3(t) - \bar{k}_t(\Omega)_1u_2(t) + (\bar{k}_t(\Omega)_1 + \bar{k}_t(\Omega)_2)u_3(t) - \bar{k}_t(\Omega)_2u_4(t) &= 0 \\ m_{f2}\ddot{u}_4(t) - \bar{k}_t(\Omega)_2u_3(t) + (\bar{k}_t(\Omega)_2 + \bar{k}_t(\Omega)_3)u_4(t) &= 0 \\ k_{rm}\theta_1(t) - k_{rm}\theta_2(t) &= f_t(t) \\ I_m\ddot{\theta}_2(t) - k_{rm}\theta_1(t) + (k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1)\theta_2(t) + \bar{k}_r(\Omega)_1\theta_3(t) &= 0 \\ I_{f1}\ddot{\theta}_3(t) - \bar{k}_r(\Omega)_1\theta_2(t) + (\bar{k}_r(\Omega)_1 + \bar{k}_r(\Omega)_2)\theta_3(t) - \bar{k}_r(\Omega)_2\theta_4(t) &= 0 \\ I_{f2}\ddot{\theta}_4(t) - \bar{k}_r(\Omega)_2\theta_3(t) + (\bar{k}_r(\Omega)_2 + \bar{k}_r(\Omega)_3)\theta_4(t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.36}$$

Por sua vez os coeficientes de rigidez equivalente para translação e rotação são expressos nas Eq. 3.37 e Eq. 3.38.

$$\bar{k}_{t\,eq}(\Omega) = k_{tm} - \frac{k_{tm}^2}{k_{tm} + \bar{k}_t(\Omega)_1 - \Omega^2 m_m - \frac{(\bar{k}_t(\Omega)_1)^2}{\bar{k}_t(\Omega)_1 + \bar{k}_t(\Omega)_2 - \Omega^2 m_{f1} - \frac{(\bar{k}_t(\Omega)_2)^2}{\bar{k}_t(\Omega)_2 + \bar{k}_t(\Omega)_3 - \Omega^2 m_{f2}}}} \quad \text{Eq. 3.37}$$

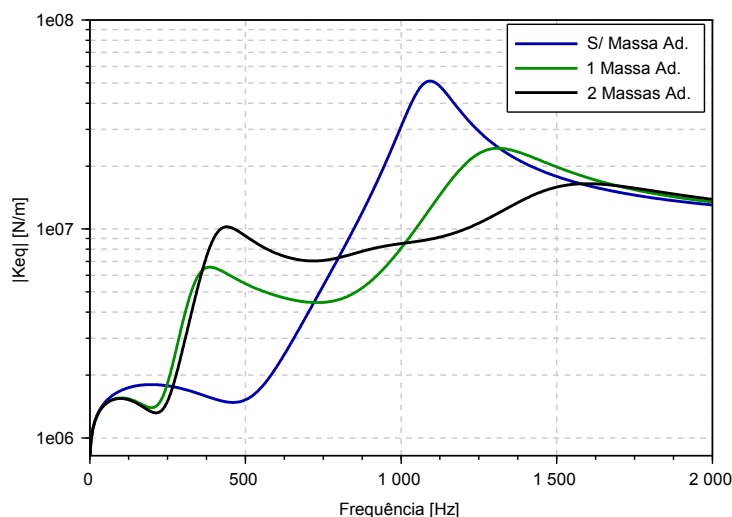
$$\bar{k}_{r\,eq}(\Omega) = k_{rm} - \frac{k_{rm}^2}{k_{rm} + \bar{k}_r(\Omega)_1 - \Omega^2 I_m - \frac{(\bar{k}_r(\Omega)_1)^2}{\bar{k}_r(\Omega)_1 + \bar{k}_r(\Omega)_2 - \Omega^2 I_{f1} - \frac{(\bar{k}_r(\Omega)_2)^2}{\bar{k}_r(\Omega)_2 + \bar{k}_r(\Omega)_3 - \Omega^2 I_{f2}}}} \quad \text{Eq. 3.38}$$

Nota-se que a técnica de PEG é bastante robusta ao modelar estruturas de suportes com n GDL através de coeficientes no domínio da frequência. Porém a utilização desta técnica inviabiliza a determinação dos deslocamentos, velocidades ou acelerações relativos aos nós internos do suporte, nós $nn+1$, $nn+2$, $nn+3$ e $nn+4$ no caso do suporte representado pela Figura 3.9. Isso implica na impossibilidade, por exemplo, de calcular a função transmissibilidade no suporte.

Por outro lado, os PEG permitem a simplificação do modelo numérico e a realização da otimização dos suportes em um tempo computacional viável, o que é detalhado no capítulo 4.

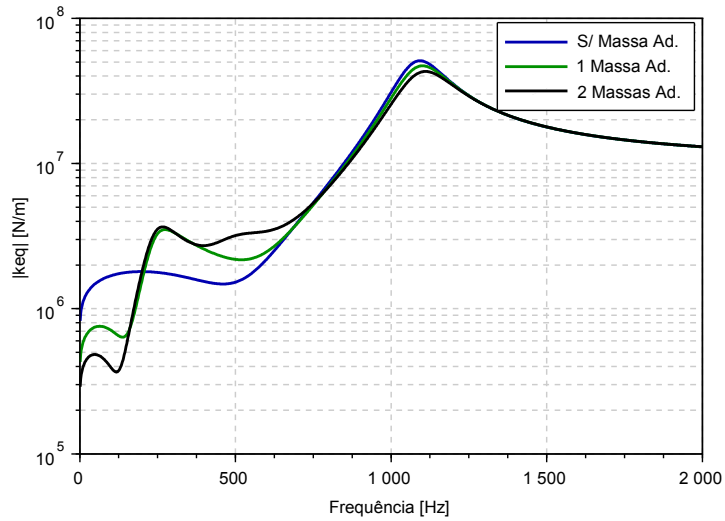
A Figura 3.11 apresenta o comportamento do módulo da rigidez equivalente ao longo da frequência para os três modelos de suporte considerados. Neste gráfico, os valores de rigidez viscoelástica $\bar{k}(\Omega)_{n-1}$ são definidos de modo a gerar uma rigidez viscoelástica equivalente idêntica para os três modelos de suporte. Os valores de massa também são definidos de forma que a massa total dos suportes, com massa adicional, são iguais. Assim, a Figura 3.11 mostra o comportamento dos diferentes SVEs considerando apenas o efeito da forma construtiva de cada um deles.

Figura 3.11 - Módulo da rigidez equivalente.



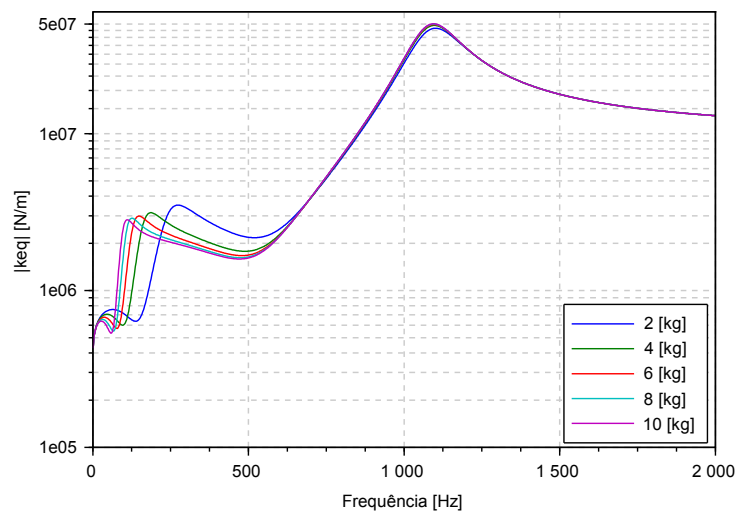
Considerando os valores individuais de $\bar{k}(\Omega)_{n-1}$ iguais para cada tipo de suporte, mantendo a soma das massas totais dos suportes com massa adicional iguais, o comportamento dos coeficientes de rigidez equivalente resulta nas formas apresentadas na Figura 3.12.

Figura 3.12 - Rigidez equivalente para os três suportes modelados.



A Figura 3.13 apresenta o efeito da variação do valor da massa adicional no coeficiente de rigidez equivalente para o suporte com apenas uma massa adicional.

Figura 3.13 - Efeito da massa na rigidez equivalente.



É importante ressaltar que nos coeficientes de rigidez equivalente os valores de massa são multiplicados pelo quadrado da frequência, porém a alteração nos valores de massa como mostrado na Figura 3.13 apresenta efeito considerável em médias e baixas frequências.

3.4 DETERMINAÇÃO DOS FATORES GEOMÉTRICOS DAS MANTAS VISCOELÁSTICAS

Os fatores geométricos são fundamentais para determinar os valores de rigidez complexa $\bar{k}(\Omega)_{n-1}$ conforme Eq. 3.18. Esses termos ainda desempenham um papel chave no desenvolvimento da metodologia deste trabalho, uma vez que os mesmos são determinados

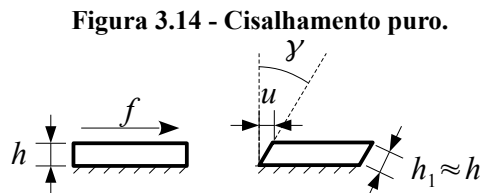
em função da geometria das mantas viscoelásticas. Esse fato permite a posterior otimização dos parâmetros geométricos das mantas e consequente otimização da rigidez viscoelástica.

Em trabalhos como KIRK e GUNTER (1972), PANDA e DUTT (2003) e KANG et al. (2011), entre outros, são apresentadas abordagens que apontam à determinação de valores adequados de $\Re(\bar{G}(\Omega))$ e $\eta(\Omega)$ referentes ao material viscoelástico presente no suporte, para uma melhor resposta ao desbalanceamento do sistema rotor-suporte. Porém, de acordo com BILLMEYER JR. (1984), fabricar materiais viscoelásticos que se adequem a parâmetros materiais pré-determinados, com elevada precisão, é inviável. Deste modo, abordagens que fazem uso de materiais pré-caracterizados e utilizam otimização em sua geometria são mais adequadas.

Nesta seção, os fatores geométricos das mantas sujeitas a deslocamentos translacionais e rotacionais são determinados separadamente.

3.4.1 Fator geométrico de mantas sob deslocamento translativo

A Figura 3.14 apresenta o esquema de uma manta viscoelástica de espessura h sujeita a força cisalhante f , apresentando deformação cisalhante γ com deslocamento translativo u .



Considerando-se a lei de Hooke pode-se escrever:

$$\tau = G\gamma = \frac{k_t u}{A}, \quad \text{Eq. 3.39}$$

na qual k_t e A são, respectivamente, a rigidez cisalhante do material à força f e a área cisalhada. Considerando $u = h \sin(\gamma)$ e a hipótese de pequenas deformações e deslocamentos tem-se

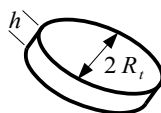
$$k_t = \frac{GA}{h}. \quad \text{Eq. 3.40}$$

Comparando as Eq. 3.40 e Eq. 3.18, conclui-se, em relação ao fator geométrico à translação que,

$$l_{gt} = \frac{A}{h} \quad \text{Eq. 3.41}$$

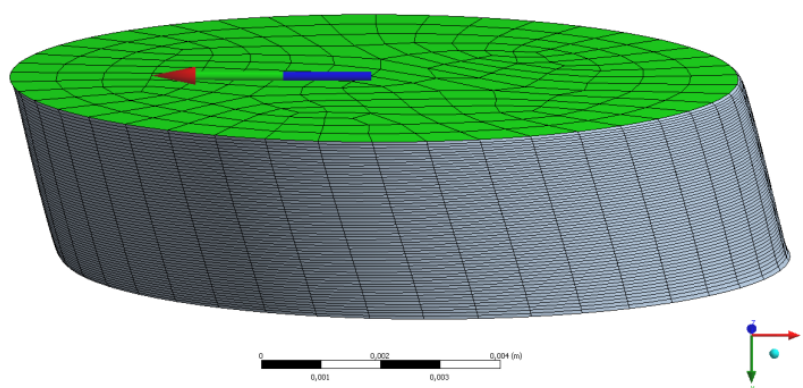
Como o fator geométrico depende da área da seção transversal (cisalhada) e da espessura da manta viscoelástica, a forma geométrica da superfície de aplicação da força cisalhante pode ser qualquer, porém deve-se evitar geometrias que gerem, sob carregamento, regiões de concentração de tensões. Assim foi escolhida a área circular (Figura 3.15).

Figura 3.15: Manta viscoelástica.



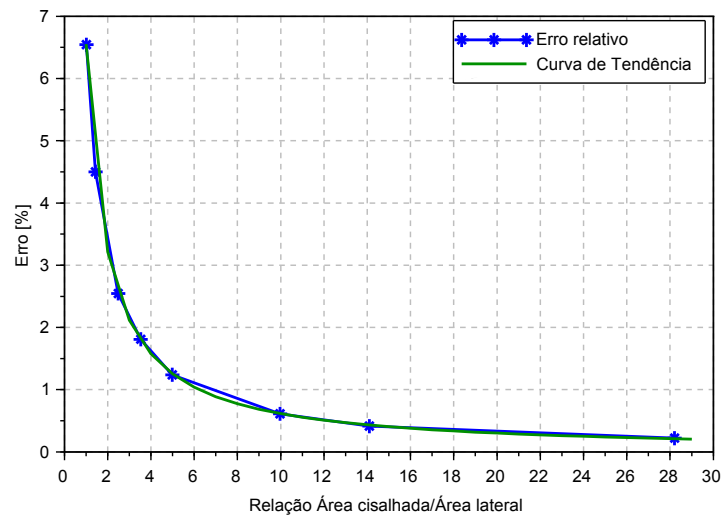
Esse fator geométrico porém, quando comparado em uma simulação de elementos finitos 3D apresentou algumas divergências. A Figura 3.16 apresenta o sólido discretizado a partir do qual foram realizadas análises estáticas de aplicação de deslocamento, medição de forças reativas e comparação dos valores de fatores geométricos analítico e numérico.

Figura 3.16 - Modelo de elementos finitos 3D para manta circular.



A curva de erro relativo entre os fatores geométricos analítico e numérico é exposta na Figura 3.17, a partir da qual é possível calcular um fator de forma para correção das divergências. Esse fator de forma é obtido a partir da curva de tendência ajustada aos valores de erro relativo obtidos. A variável escolhida para parametrizar a curva foi a relação $\frac{A}{Al}$, sendo Al a área lateral livre de carregamento.

Figura 3.17 - Erro relativo entre fator geométrico analítico e numérico.



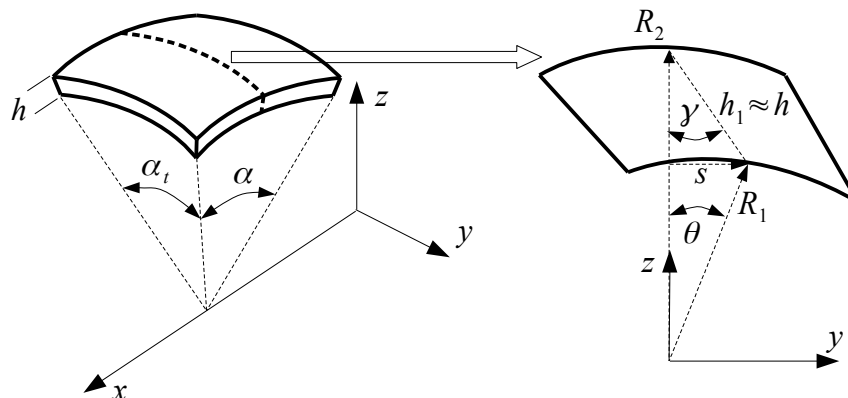
Baseado na equação da curva de tendência (Figura 3.17) é possível estabelecer um fator de forma para corrigir o erro relativo entre os fatores geométricos analítico e numérico. Por este motivo, o fator de forma é expresso por

$$l_{ft} = 1 - 6,5522 \left(\frac{A}{Al} \right)^{-1,028} \quad \text{Eq. 3.42}$$

3.4.2 Fator geométrico de mantas sob deslocamento rotativo

A obtenção de deformações cisalhantes puras em mantas viscoelásticas sujeitas a deslocamentos rotativos necessita de uma geometria específica, neste caso essas mantas devem possuir formato de um setor de casca esférica, como apresentado na Figura 3.18.

Figura 3.18 - Esquema de deslocamento rotativo em manta viscoelástica.



Considerando o elemento infinitesimal de espessura $d\alpha$ obtido ao longo da linha

pontilhada (Figura 3.18), sujeito à uma rotação θ na região de raio R_1 , escreve-se:

$$s = R_1 \text{sen}(\theta) = h \text{sen}(\gamma) \quad \text{Eq. 3.43}$$

Pela hipótese de pequenos deslocamentos e rotações e a variação senoidal de s ao longo de α simplifica-se a Eq. 3.43 para

$$\gamma = \frac{R_1 \theta \text{sen}(\alpha)}{h} \quad \text{Eq. 3.44}$$

A força axial aplicada, devido ao deslocamento s pode ser escrita como

$$\tau \alpha_t (R_1 + h/2)^2 d\alpha = \frac{\alpha_t G R_1 \left(R_1 + \frac{h}{2}\right)^2 \theta \text{sen}(\alpha) d\alpha}{h} \quad \text{Eq. 3.45}$$

na qual τ é a tensão cisalhante, e α é o ângulo de rotação segundo a coordenada y . Para levantar a rigidez à rotação θ é necessário determinar o torque aplicado. Considerando que a distância de aplicação da força axial varia de forma senoidal, o torque resulta em

$$Tor = \int \left(\frac{\alpha_t G R_1^2 (R_m)^2 \theta \text{sen}^2(\alpha)}{h} \right) d\alpha \quad \text{Eq. 3.46}$$

sendo $R_m = R_1 + \frac{h}{2}$ o raio médio.

Isolando o quociente $\frac{Tor}{\theta}$ e calculando a integral em α a rigidez à rotação da manta viscoelástica é dada por:

$$k_r = \frac{\alpha_t G R_1^2 (R_m)^2}{h} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} \right]_{\alpha} \quad \text{Eq. 3.47}$$

Assim, comparando a Eq. 3.47 com a Eq. 3.18, o fator geométrico pode ser definido como segue.

$$l_{gr} = \frac{\alpha_t R_1^2 (R_m)^2}{h} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right]_{\alpha} \quad \text{Eq. 3.48}$$

O mesmo procedimento de comparação com um modelo de elementos finitos 3D foi aplicado para as mantas em formato de casca esférica. As Figura 3.19 e Figura 3.20 apresentam o modelo utilizado. Nesta análise, deslocamentos angulares foram aplicados ao sólido, as forças de reação medidas, e os fatores geométricos analítico e numérico foram comparados.

Figura 3.19 - Composição das mantas em análise de rigidez à rotação.

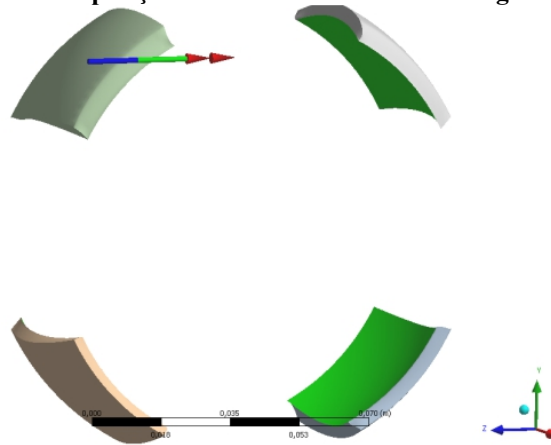
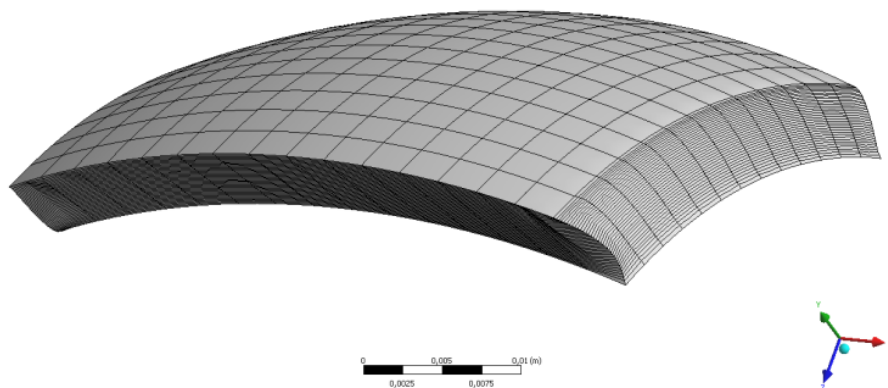
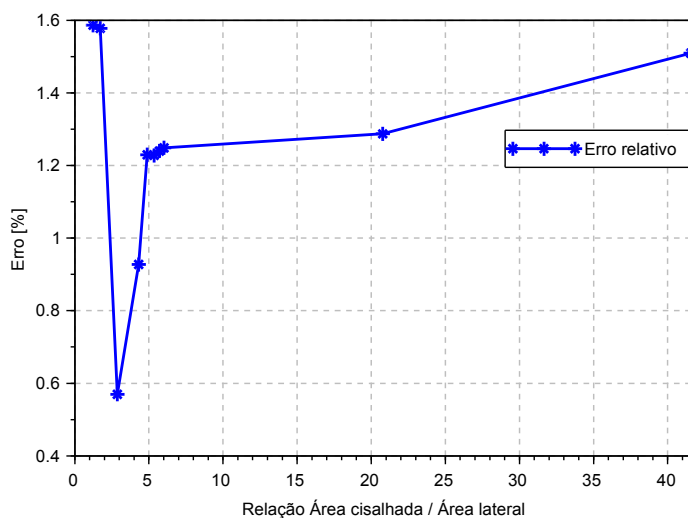


Figura 3.20 - Modelo de elementos finitos 3D de manta viscoelástica.



Diferentemente da abordagem em relação à translação o fator geométrico expresso pela Eq. 3.48 apresentou valores bastante adequados quando comparado ao modelo numérico 3D. Devido a esse resultado satisfatório, por hipótese, o fator de forma para o cálculo do módulo aparente (Eq. 3.18) é desconsiderado. A Figura 3.21 apresenta o erro relativo entre a abordagem analítica e numérica.

Figura 3.21 - Erro relativo entre fator geométrico analítico e numérico.



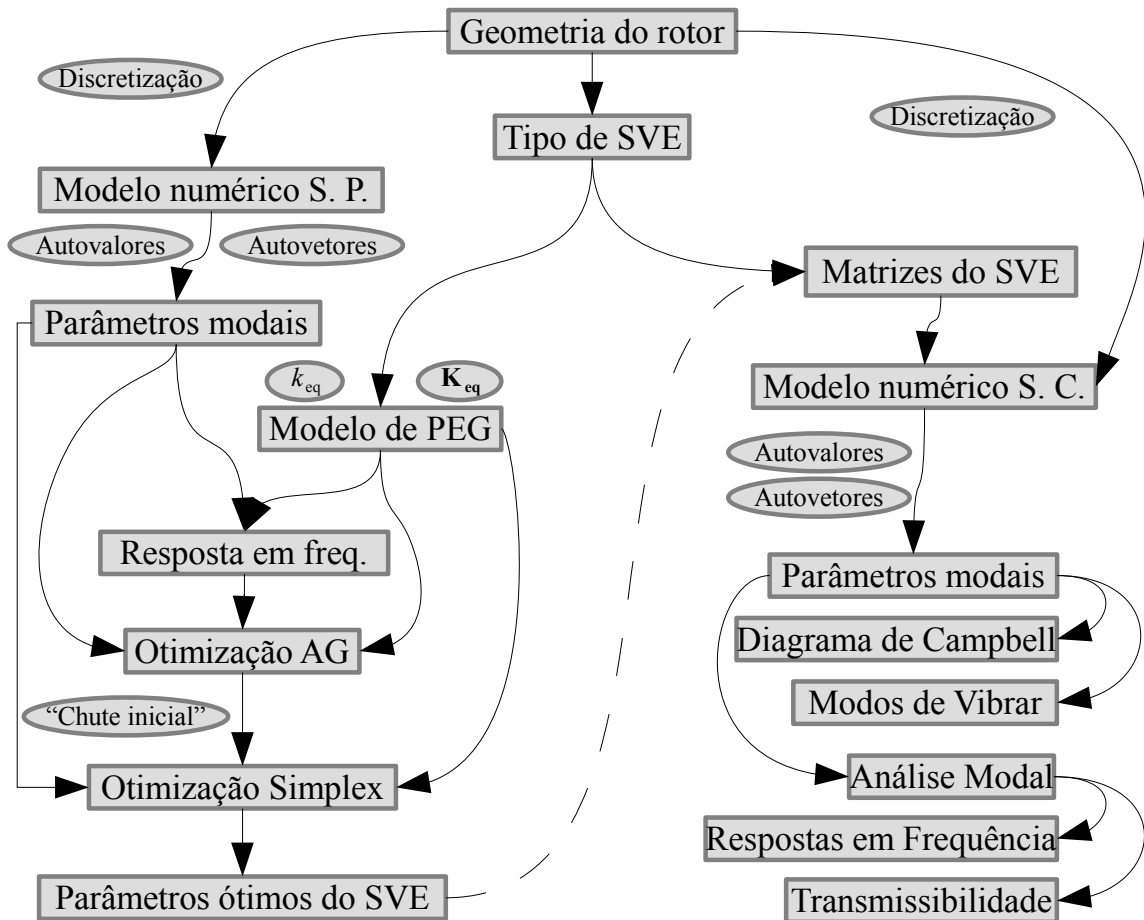
Com os fatores geométricos e de forma deduzidos, em conjunto com o módulo complexo, formulado através de derivadas fracionárias, é possível determinar, com precisão adequada, os valores dos termos $\bar{k}(\Omega)$ presentes nos modelos de suporte, em função da geometria das mantas viscoelásticas, que juntamente com os valores de massa suprem as informações necessárias para os modelos de suportes viscoelásticos propostos.

Com os modelos matemáticos apresentados neste capítulo, procede-se à resolução do sistema de equações. Considerando que os dois modelos apresentam diferenças importantes, duas abordagens de resolução do sistema são apresentadas. A primeira utiliza o modelo de acréscimo de GDL, a segunda faz uso do modelo de PEG. Em ambas o objetivo é a obtenção da resposta em frequência ao desbalanceamento do sistema composto. É evidenciado que alguns parâmetros dinâmicos do sistema não são possíveis de serem gerados devido a limitações em uma ou outra técnica, porém as mesmas demonstram ser dinamicamente equivalentes e complementares em termos de resposta em frequência ao desbalanceamento.

4 METODOLOGIA

A Figura 4.1 apresenta um esquema da metodologia proposta neste trabalho. Através dessa figura é possível verificar duas formas distintas de obtenção da resposta em frequência do sistema, porém as mesmas diferem essencialmente em relação ao modelo de SVE utilizado.

Figura 4.1 - Fluxograma da metodologia de otimização (abordagem PEG à esq., abordagem com acréscimo de GDL à dir.).

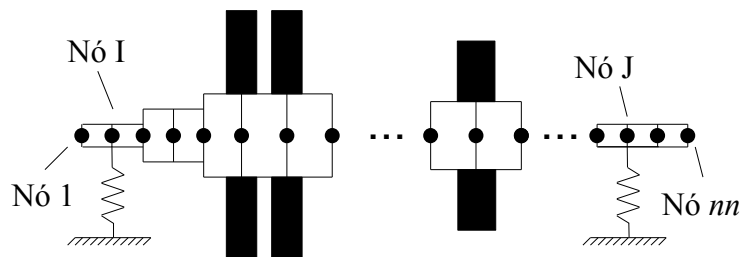


A utilização do modelo de SVE que acrescenta GDL ao sistema é mais abrangente por permitir determinar os parâmetros modais em termos de diagrama de Campbell e modos de vibrar do sistema composto. Esta abordagem também permite o cálculo da resposta em frequência não somente nos nós do eixo mas nos GDL internos adicionados pelo SVE, assim outro resultado possível de ser levantado é a transmissibilidade do sistema. Estas respostas podem também ser calculadas considerando excitações assíncronas. Porém, como é

apresentado neste capítulo, o tempo computacional para os cálculos mencionados é bastante elevado. Nessa abordagem, o sistema representado pela equação Eq. 2.2 se torna o sistema composto através da superposição das matrizes referentes aos SVEs. A resolução desse sistema composto leva à determinação dos parâmetros modais. A partir desses parâmetros, utilizando propriedade de ortonormalização dos parâmetros modais em relação às matrizes que os geraram (EWINS (2000)), pode-se realizar um procedimento de análise modal numérica e determinar a resposta em frequência do sistema à uma excitação externa, e ainda, as curvas de transmissibilidade.

Por outro lado, a principal contribuição proposta neste trabalho é a modelagem dos SVEs através dos PEG, que leva à utilização de uma abordagem de resolução simplificada, baseada nas características do sistema primário, Figura 4.2 e Eq. 4.1. Os parâmetros modais desse sistema (autovalores e autovetores) são utilizados como uma base no espaço modal para descrição da resposta do sistema composto, através da análise modal numérica e da inserção dos coeficientes de $k_{eq}(\Omega)$. Aliada à utilização da técnica de Campbell simplificada (seção 4.1.3), essa abordagem torna-se bastante ágil computacionalmente, viabilizando sua inserção em um ambiente de otimização, ou seja, minimização da resposta em frequência ao desbalanceamento, em função da geometria das mantas viscoelásticas e da massa/inércia dos suportes. A redução da generalidade da abordagem através de PEG leva a impossibilidade de determinação do diagrama de Campbell, modos de vibrar, respostas a excitações assíncronas e transmissibilidade do sistema composto. Assim, a abordagem através de PEG é complementada pela abordagem que considera o acréscimo de GDL devido aos SVEs.

Figura 4.2 - Sistema primário generalizado.



Como apresentado na Figura 4.2, o sistema primário consiste no modelo discreto do rotor, Eq. 2.2, com inserção de condições de contorno elásticas pré-definidas. As matrizes são obtidas através da superposição de efeitos na qual os nós compartilhados entre dois elementos finitos tem suas características somadas. Assim, a partir das matrizes elementares, geometria

dos elementos finitos definidos, e massas rotóricas (Figura 4.2), é possível descrever o sistema primário através da seguinte equação:

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p(t) + (\mathbf{C}_p + \mathbf{G}_p(\Omega_{rpm})) \dot{\mathbf{q}}_p(t) + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_p(t) = \mathbf{f}_p(t), \quad \text{Eq. 4.1}$$

na qual a ordem das matrizes e dos vetores são, respectivamente, $d \times d$ e d . A dimensão d é obtida através de

$$d = (2nn - 1)nl, \quad \text{Eq. 4.2}$$

onde nn e nl correspondem, respectivamente, ao número de nós, e ao número de GDL por nó. É importante ressaltar que a formulação quadrática de elemento finito utilizada considera um nó intermediário no elemento.

Pode-se concluir que a metodologia proposta neste trabalho consiste em utilizar a abordagem através de PEG para otimização dos SVEs, sendo assim complementada pela abordagem tradicional de acréscimo de GDL para levantamento do comportamento dinâmico completo do sistema rotor-SVE otimizado, conforme apresentado na Figura 4.1.

4.1 RESOLUÇÃO DO SISTEMA COM ADIÇÃO DE GDL

Desconsiderando as condições de contorno aplicadas na Eq. 4.1 e substituindo-as pela superposição das matrizes Eq. 3.24 a Eq. 3.27 (no caso de suporte com uma massa adicional) nas matrizes da Eq. 4.1 o sistema composto resulta em

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm})) \dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{K}}(\Omega) \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad \text{Eq. 4.3}$$

na qual $\bar{\mathbf{K}}$ corresponde a matriz de rigidez com coeficientes complexos devido ao elemento de rigidez viscoelástica dos suportes. A ordem das matrizes corresponde a $(d + 4ns) \times (d + 4ns)$, os vetores por sua vez tem ordem $(d + 4ns)$, com ns correspondendo ao número de suportes inseridos ao sistema primário. A ordem das matrizes depende do número de GDL considerados no suporte. Neste caso considera-se um suporte misto com ambos GDL de rotação (angular) e translação.

É importante ressaltar o fato de que as expressões das Eq. 4.3, Eq. 4.1 são denominadas como *non equations* uma vez que apresentam ambos os domínios de frequência e tempo. O

cálculo da matriz de rigidez complexa no tempo leva à necessidade de resolução das derivadas fracionárias através de sua definição (CRUZ 2004). Porém como neste trabalho as resoluções são realizadas apenas no domínio da frequência, as mesmas devem ser interpretadas formalmente.

A presença do efeito giroscópico representado pela matriz $\mathbf{G}(\Omega_{rpm})$ e do amortecimento representado pela matriz \mathbf{C} , neste caso considerada nula, leva a necessidade de escrever a Eq. 4.3 no espaço de estado, quando o objetivo é a determinação dos parâmetros modais. Nesse espaço, o sistema de equações diferenciais tem sua ordem reduzida, o que permite escrever o problema generalizado de autovalores em função das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{G} e $\bar{\mathbf{K}}$. Para isso, definindo a variável de estado como

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix}_{2(d+4ns) \times 1}, \quad \text{Eq. 4.4}$$

a Eq. 4.3 resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\Omega_{rpm}) & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}(\Omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.5}$$

A Eq. 4.5 pode ser escrita de maneira simplificada como segue:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{y}}(t) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{y}(t) = \mathbf{N}(t). \quad \text{Eq. 4.6}$$

Nota-se que a matriz \mathbf{A} não é simétrica e possui dependência da frequência de rotação, enquanto que a matriz complexa $\bar{\mathbf{B}}$ é simétrica e apresenta dependência da frequência.

A partir da Eq. 4.6 é possível escrever o problema generalizado de autovalores e autovetores. Devido à antissimetria de parte da matriz \mathbf{A} é necessário determinar o problema de autovalores adjunto. Assim, tem-se

$$\Lambda \mathbf{A} \Theta = \bar{\mathbf{B}} \Theta \quad \text{Eq. 4.7}$$

e

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{A}^T \mathbf{\Psi} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{\Psi}, \quad \text{Eq. 4.8}$$

nas quais $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Theta}$ e $\mathbf{\Psi}$ são a matriz espectral diagonal com os autovalores complexos λ_i , e as matrizes de autovetores a direita e a esquerda, respectivamente. Os vetores Θ_i e Ψ_i são as colunas de $\mathbf{\Theta}$ e $\mathbf{\Psi}$, com as informações sobre as formas modais correspondentes aos autovalores λ_i .

Segundo (EWINS (2000)) a seguinte propriedade de ortogonalidade deve ser satisfeita

$$\Psi_i^T \mathbf{A} \Theta_j = a_{ij} \delta_{ij} \quad \text{Eq. 4.9}$$

e

$$\Psi_i^T \bar{\mathbf{B}} \Theta_j = b_{ij} \delta_{ij}, \quad \text{Eq. 4.10}$$

com $\delta_{ij}=1$ se $i=j$ e $\delta_{ij}=0$ se $i \neq j$. Pela formulação no espaço de estado deve-se considerar que

$$\Psi_i = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ -\lambda_i \psi_i \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.11}$$

e que

$$\Theta_j = \begin{Bmatrix} \theta_j \\ -\lambda_j \theta_j \end{Bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.12}$$

Assim, da Eq. 4.10 e Eq. 4.9 podem ser obtidos, respectivamente,

$$-\lambda_i \lambda_j \psi_i^T \mathbf{M} \theta_j + \psi_i^T \bar{\mathbf{K}} \theta_j = b_i \delta_{ij} \quad \text{Eq. 4.13}$$

e

$$-(\lambda_i + \lambda_j) \psi_i^T \mathbf{M} \theta_j + \psi_i^T (\mathbf{G}) \theta_j = a_i \delta_{ij}. \quad \text{Eq. 4.14}$$

As equações Eq. 4.13 e Eq. 4.14 representam as condições de ortogonalidade dos

autovetores em relação às matrizes que os geraram. Considerando que os mesmos autovetores sejam normalizados em relação à matriz \mathbf{A} , pode-se deduzir que $a_i=1$ e $b_i=\lambda_i$.

Devido a presença de um coeficiente complexo ($\bar{\mathbf{B}}$) no polinômio característico, os autovalores se apresentam em pares complexo e seu negativo. Desse modo, tomando os valores de $i \neq j$, e que correspondem a $\lambda_i = -\lambda_j$ na relação Eq. 4.13, obtém-se:

$$\lambda_i^2 \psi_i^T \mathbf{M} \theta_j + \psi_i^T \bar{\mathbf{K}} \theta_j = 0, \quad \text{Eq. 4.15}$$

simplificando, a Eq. 4.15 resulta em

$$\lambda_i^2 = -\frac{\bar{K}_i}{M_i} = -\bar{\Omega}_i^2 = (i\bar{\Omega}_i)^2. \quad \text{Eq. 4.16}$$

De Eq. 4.16 pode-se escrever:

$$\lambda_i^2 = -\Omega_i^2 (1 + i\nu_i), \quad \text{Eq. 4.17}$$

onde Ω_i corresponde à i -ésima frequência natural não amortecida. Assim, se deduz que

$$\Omega_i = \sqrt{\Re(-\lambda_i^2)}, \quad \text{Eq. 4.18}$$

4.1.1 Diagrama de Campbell

Com a determinação dos valores de frequência natural não amortecida é possível plotar o diagrama de Campbell, a partir do qual pode-se definir as rotações críticas do sistema composto. Porém, é importante notar que as frequências naturais não amortecidas além de serem dependentes da frequência de rotação Ω_{rpm} , como em um problema típico de dinâmica de rotores, neste caso, devido ao sistema ser composto de MVE, as mesmas possuem uma dependência adicional em relação à frequência de excitação Ω . Esse fato leva a um problema duplamente iterativo no qual é necessário fixar uma frequência Ω_{rpm} e resolver primeiramente o problema de autovalores e autovetores generalizados para $\Omega_i x \Omega$. Após isso, incrementa-se o valor de Ω_{rpm} e gera-se uma nova sequência de autovalores em função de Ω , estratégia esta proposta de maneira pioneira por FERREIRA (2004), através de um diagrama de Campbell auxiliar. Neste trabalho, ao fim do processo, são obtidas superfícies Ω_i , que contém a dupla

dependência em relação a Ω_{rpm} e Ω , essas superfícies podem ser plotadas em conjunto resultando em um diagrama de Campbell 3D como apresentado na Figura 4.3 e Figura 4.4.

Figura 4.3 - Diagrama de Campbell 3D (FN – Frequência Natural).

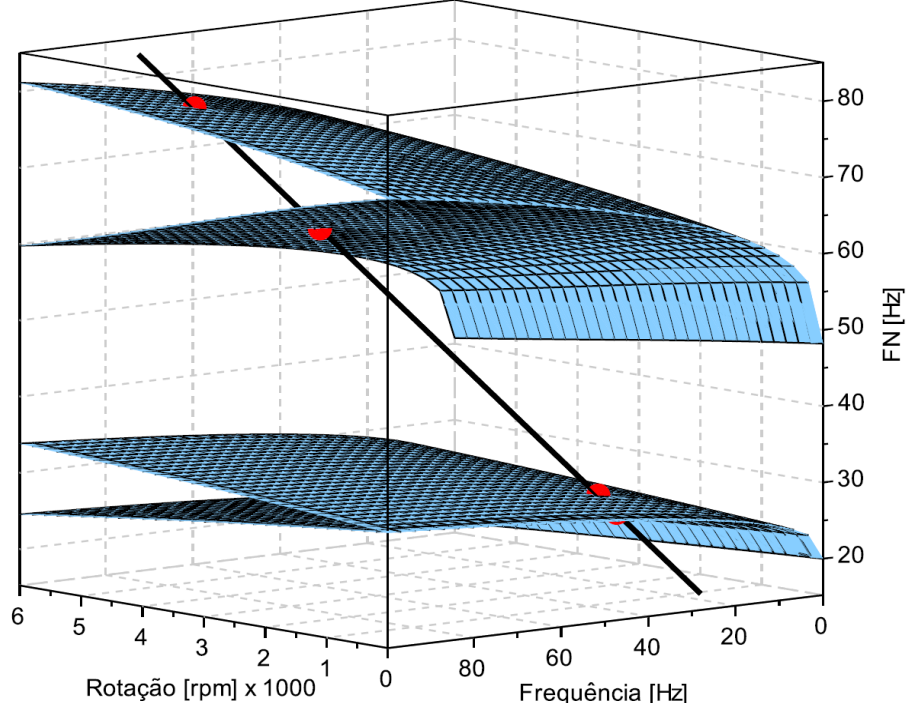
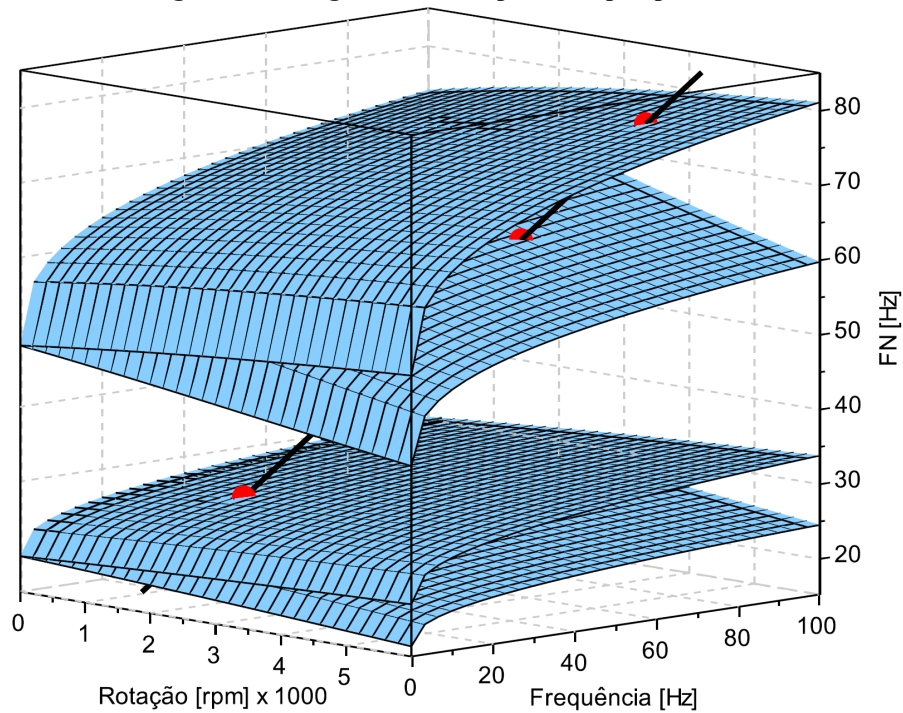


Figura 4.4 - Diagrama de Campbell 3D, perspectiva 2.



A linha inclinada intercepta as superfícies de frequências naturais Ω_i nos valores de rotações críticas ao desbalanceamento, considerando que a frequência de excitação da massa

desbalanceada é igual à frequência de rotação. A Figura 4.4 apresenta o mesmo diagrama de Campbell 3D, mostrado na Figura 4.3, de uma outra perspectiva. No eixo de frequência Ω_{rpm} pode-se observar claramente a “abertura” das frequências naturais não amortecidas (superfícies) devido ao efeito giroscópico, simultaneamente observa-se, no eixo de frequências Ω , a variação das frequências naturais devido ao comportamento viscoelástico presente nos SVEs.

4.1.2 Resposta em frequência

A análise modal numérica é uma ferramenta matemática bastante robusta que permite desacoplar sistemas discretos de MGD, como o descrito na Eq. 4.3, em n sistemas de um GDL. Isso é realizado através de uma mudança de variáveis do espaço de estado para o espaço modal. Desse modo, pode-se escrever:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Theta} \mathbf{p}(t) \quad \text{Eq. 4.19}$$

a qual pode ser aplicada à Eq. 4.6 para obter

$$\mathbf{A} \mathbf{\Theta} \dot{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{\Theta} \mathbf{p}(t) = \mathbf{N}(t), \quad \text{Eq. 4.20}$$

que, no domínio da frequência, através da aplicação da transformada de Fourier, corresponde a

$$(i\Omega \mathbf{A} \mathbf{\Theta} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{\Theta}) \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{N}(\Omega). \quad \text{Eq. 4.21}$$

Pré multiplicando pelo autovetor à esquerda $\mathbf{\Psi}^T$, é possível obter a equação de movimento no espaço modal do espaço de estado.

$$(i\Omega \mathbf{\Psi}^T \mathbf{A} \mathbf{\Theta} + \mathbf{\Psi}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{\Theta}) \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{N}(\Omega) \quad \text{Eq. 4.22}$$

Baseado na Eq. 4.9 e Eq. 4.10, afirma-se que, para uma dada frequência de rotação

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{A} \mathbf{\Theta} = \mathbf{I}, \quad \text{Eq. 4.23}$$

e que, para uma dada frequência de excitação

$$\Psi^T \bar{\mathbf{B}} \Theta = \Lambda, \quad \text{Eq. 4.24}$$

nas quais \mathbf{I} denota a matriz identidade e Λ denota a matriz diagonal de autovalores complexos. As equações Eq. 4.23 e Eq. 4.24 representam a propriedade de ortonormalidade. Assim, em coordenadas modais a resposta do sistema corresponde a:

$$\mathbf{P}(\Omega) = (\mathbf{i}\Omega \mathbf{I} + \Lambda)^{-1} \Psi^T \mathbf{N}(\Omega). \quad \text{Eq. 4.25}$$

No espaço de estado a resposta do sistema pode ser escrita como:

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \Theta (\mathbf{i}\Omega \mathbf{I} + \Lambda)^{-1} \Psi^T \mathbf{N}(\Omega). \quad \text{Eq. 4.26}$$

Finalmente, a resposta no espaço de configurações em termos das coordenadas generalizadas físicas \mathbf{Q} , baseado nas Eq. 4.26 e Eq. 4.4, resulta em

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}(\Omega) \\ \mathbf{i}\Omega \mathbf{Q}(\Omega) \end{Bmatrix} = \Theta (\mathbf{i}\Omega \mathbf{I} + \Lambda)^{-1} \Psi^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\Omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.27}$$

É facilmente notado que a dupla dependência em relação à frequência de rotação e à frequência causa um grande impacto no tempo computacional de resolução do sistema. Esse fato torna essa abordagem inviável se o objetivo é otimizar os parâmetros dos suportes. Isso se deve à necessidade de, a partir de qualquer alteração nos parâmetros dos suportes, realizar o cálculo de uma nova série de parâmetros modais do sistema. Com o objetivo de reduzir o tempo computacional, é possível, para o caso exclusivo de excitação do tipo desbalanceamento, utilizar a técnica de Campbell simplificado conforme ESPÍNDOLA e BAVASTRI (1997) e explanado a seguir.

4.1.3 Campbell simplificado

Esta técnica visa eliminar a dependência em relação à frequência de rotação, dos parâmetros modais de um sistema rotativo devido à matriz giroscópica. Isso resulta em perda de generalidade, como, por exemplo, a determinação da resposta do sistema em uma rotação constante, ou devido à uma excitação assíncrona. Porém, em casos exclusivos de excitações síncronas, esta técnica é suficientemente precisa para determinar os parâmetros modais do

sistema. Esses parâmetros modais correspondem aos valores de rotações críticas do sistema.

Assim, na Eq. 4.3 é definido que $\mathbf{G}(\Omega_{\text{rpm}}) = \Omega_{\text{rpm}} \mathbf{G}_1$, onde \mathbf{G}_1 é uma matriz independente da frequência de rotação/excitação. Como $\Omega_{\text{rpm}} = \Omega$, devido a excitação síncrona, pode-se escrever que $\mathbf{G}(\Omega) = \Omega \mathbf{G}_1$. Tomando então a Eq. 4.3 no domínio da frequência tem-se:

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + i\Omega^2 \mathbf{G}_1 + \bar{\mathbf{K}}(\Omega)) \mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad \text{Eq. 4.28}$$

Definido $\hat{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} - i\mathbf{G}_1)$ e agrupando os termos no espaço de estado obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \hat{\mathbf{M}} \\ \hat{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i\Omega \mathbf{Q}(\Omega) \\ -\Omega^2 \mathbf{Q}(\Omega) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}(\Omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}(\Omega) \\ i\Omega \mathbf{Q}(\Omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\Omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.29}$$

onde as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \hat{\mathbf{M}} \\ \hat{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.30}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}(\Omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.31}$$

Desta forma, o mesmo procedimento realizado na seção 4.1.2 pode ser aplicado para obtenção da resposta do sistema composto. Nota-se que a simplificação do sistema diminui um grau de iteratividade do sistema, melhorando seu desempenho computacional. Porém, como a matriz $\bar{\mathbf{B}}$ contém as matrizes referentes aos suportes, qualquer alteração nos parâmetros do suporte, em um ambiente de otimização, demandará o cálculo de uma nova série de parâmetros modais do sistema. Outro fato que produz o mesmo efeito mencionado é a dependência da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ em relação à frequência de excitação.

Assim, é evidente a necessidade de uma técnica que permita o cálculo da resposta do sistema composto em um tempo computacional viável, para uma possível otimização dos seus suportes.

4.2 RESOLUÇÃO DO SISTEMA UTILIZANDO PEG

A principal vantagem do uso da técnica de PEG é a possibilidade de utilizar os parâmetros modais do sistema primário (Figura 4.2 e Eq. 4.1) como uma base n-dimensional para descrever a resposta do sistema composto. Por esse motivo, os autovetores e autovalores do sistema primário, independentes da frequência, são utilizados no procedimento de análise modal, descrevendo assim o comportamento dinâmico do sistema composto em função das coordenadas generalizadas do sistema primário. Os coeficientes de rigidez equivalente são inseridos no decorrer da análise modal.

4.2.1 Parâmetros modais do sistema primário

Tomando por base o sistema de equações do sistema primário, representado pela Eq. 4.1, e aplicando a simplificação apresentada na seção 4.1.3, no espaço de estado, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \hat{\mathbf{M}}_p \\ \hat{\mathbf{M}}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i\Omega \mathbf{Q}_p(\Omega) \\ -\Omega^2 \mathbf{Q}_p(\Omega) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}}_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_p(\Omega) \\ i\Omega \mathbf{Q}_p(\Omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p(\Omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \text{Eq. 4.32}$$

ou de forma compacta:

$$i\Omega \mathbf{A}_p \mathbf{Y}(\Omega) + \mathbf{B}_p \mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{N}_p(\Omega). \quad \text{Eq. 4.33}$$

Na Eq. 4.32 defini-se $\hat{\mathbf{M}}_p = (\mathbf{M}_p - i\mathbf{G}_{1p})$. É importante ressaltar que as matrizes apresentadas na Eq. 4.32 são matrizes com coeficientes constantes, independentes da frequência. Desse modo, o problema de autovalores generalizado e seu adjunto, definidos como

$$\Lambda \mathbf{A}_p \Theta = \mathbf{B}_p \Theta \quad \text{Eq. 4.34}$$

e

$$\Lambda \mathbf{A}_p^T \Psi = \mathbf{B}_p^T \Psi, \quad \text{Eq. 4.35}$$

sendo

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \hat{\mathbf{M}}_p \\ \hat{\mathbf{M}}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.36}$$

e

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}}_p \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. 4.37}$$

pode ser resolvido uma única vez. Nesse caso, não é possível extrair dos parâmetros modais, Λ , Ψ e Θ , as informações de frequências naturais e modos de vibrar do sistema composto. Para isso o problema de autovalores e autovetores deve-se basear no sistema de equações descrito pela Eq. 4.5. Porém essas matrizes Λ , Ψ e Θ formam uma base para descrever a resposta do sistema composto.

4.2.2 Resposta em frequência ao desbalanceamento (sistema composto)

Considerando as propriedades de ortogonalidade expressas nas Eq. 4.13 e Eq. 4.14 e que os autovetores apresentados nas Eq. 4.34 e Eq. 4.35, são normalizados em relação à matriz \mathbf{A}_p , deduz-se que

$$\Psi^T \mathbf{A}_p \Theta = \mathbf{I}, \quad \text{Eq. 4.38}$$

e que

$$\Psi^T \mathbf{B}_p \Theta = \Lambda. \quad \text{Eq. 4.39}$$

Fazendo uso da técnica de análise modal, definindo a seguinte mudança de variáveis

$$\mathbf{Y}_p(\Omega) = \Theta \mathbf{P}_p(\Omega) \quad \text{Eq. 4.40}$$

E pré multiplicando por Ψ^T , o sistema de equações (Eq. 4.33) assume a forma

$$(i\Omega \Psi^T \mathbf{A}_p \Theta + \Psi^T \mathbf{B}_p \Theta) \mathbf{P}(\Omega) = \Psi^T \mathbf{N}_p(\Omega). \quad \text{Eq. 4.41}$$

Para avaliar a resposta do sistema composto, a contribuição relativa aos suportes viscoelásticos pode ser inserida via matriz $\bar{\mathbf{K}}_{\text{eq}}$, a qual possui a mesma dimensão da matriz de rigidez do sistema primário \mathbf{K}_p . Contudo, as posições da matriz $\bar{\mathbf{K}}_{\text{eq}}$ relativas aos graus de liberdade de vínculo entre os SVEs e o eixo são preenchidas pelos coeficientes de rigidez equivalente como apresentado na Eq. 4.42.

$$\bar{\mathbf{K}}_{\text{eq}}(\Omega) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \cdots & u & w & \theta & \psi & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{t \text{ eq}}(\Omega) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{t \text{ eq}}(\Omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{k}_{r \text{ eq}}(\Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{k}_{r \text{ eq}}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vdots \\ \leftarrow u \\ \leftarrow w \\ \leftarrow \theta \\ \leftarrow \psi \\ \vdots \end{array} \end{array} \end{array} \quad \text{Eq. 4.42}$$

Com o objetivo de somar a influência dos coeficientes de rigidez equivalente à matriz \mathbf{B}_p faz-se necessário definir:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{\text{eq}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.43}$$

Desta forma, a Eq. 4.41 é reescrita como segue.

$$(i\Omega \Psi^T \mathbf{A}_p \Theta + \Psi^T (\mathbf{B}_p + \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}}) \Theta) \mathbf{P}_p(\Omega) = \Psi^T \mathbf{N}_p(\Omega) \quad \text{Eq. 4.44}$$

Considerando as Eq. 4.38 e Eq. 4.39, obtém-se:

$$(i\Omega \mathbf{I} + \Lambda + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta) \mathbf{P}_p(\Omega) = \Psi^T \mathbf{N}_p(\Omega). \quad \text{Eq. 4.45}$$

A resposta no espaço modal pode ser escrita como

$$\mathbf{P}_p(\Omega) = (i\Omega \mathbf{I} + \Lambda + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta)^{-1} \Psi^T \mathbf{N}_p(\Omega). \quad \text{Eq. 4.46}$$

Por sua vez no espaço de estado a resposta é dada por:

$$\mathbf{Y}_p(\Omega) = \Theta (i\Omega \mathbf{I} + \Lambda + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta)^{-1} \Psi^T \mathbf{N}_p(\Omega). \quad \text{Eq. 4.47}$$

No espaço de configurações a resposta do sistema composto em função das coordenadas generalizadas do sistema primário corresponde a

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_p(\Omega) \\ i\Omega \mathbf{Q}_p(\Omega) \end{Bmatrix} = \Theta (i\Omega \mathbf{I} + \Lambda + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta)^{-1} \Psi^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p(\Omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad \text{Eq. 4.48}$$

A passagem pelo espaço de estado dobra a ordem do sistema gerando d autovalores e autovetores complexo-conjugados adicionais os quais não carregam informações relevantes para a determinação da resposta em frequência ao desbalanceamento do sistema. Assim, a partir da Eq. 4.48 reescreve-se a resposta final do sistema composto como:

$$\mathbf{Q}_p(\Omega) = \Theta (i\Omega \mathbf{I} + \Lambda + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta)^{-1} \Psi^T \mathbf{F}(\Omega)_p. \quad \text{Eq. 4.49}$$

O produto $\Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta$, apesar de resultar em uma matriz não diagonal nada interfere na precisão da inversão da matriz $\mathbf{D} = i\Omega \mathbf{I} + \Lambda + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{\text{eq}} \Theta$. Com o intuito de reduzir ainda mais o tempo computacional de cálculo é possível realizar o procedimento de análise modal truncada, tomando parte das matrizes espectrais e das matrizes de autovetores resultantes da resolução dos problemas generalizados de autovalores e autovetores nas equações Eq. 4.7, Eq. 4.8, Eq. 4.34 e Eq. 4.35.

Para um dado projeto viável de suporte a resolução da equação Eq. 4.49 pode ser desenvolvida de maneira ágil do ponto de vista computacional, uma vez que Θ e Ψ são constantes. Esta resolução demanda apenas um único cálculo de autovalores e autovetores, uma única inversão de matriz, e cinco produtos matriciais, considerando a disponibilidade das matrizes globais do sistema primário. Esta extrema agilidade computacional da técnica de PEG viabiliza a otimização do sistema composto em função dos fatores geométricos das mantas de material viscoelástico e da(s) massa(s) adicional(ais) dos suportes, com o objetivo de minimizar a resposta em frequência do sistema.

4.2.3 Otimização

A técnica de otimização utilizada neste trabalho baseia-se em dois métodos distintos,

configurando assim uma técnica híbrida. Métodos como esse tem sido utilizados em pesquisas e tem como objetivo aumentar a probabilidade de obtenção do mínimo global, em conjunto com uma performance computacional adequada, do ponto de vista de tempo. Em trabalhos como KELNER et al. (2008); BHATTACHARJYA e SATISH (2007); DOUBRAWA (2008); MILIAVACA (2015), entre outros, observa-se o uso de técnicas híbridas de otimização para diversas aplicações.

Neste trabalho, a técnica híbrida é composta de dois métodos já consolidados segundo ARORA (2007): método dos algoritmos genéticos e método Nelder-Mead ou também denominado método *simplex* ou poliedro flexível.

No trabalho RAHAMI et al. (2011), foi utilizada para otimização estrutural em treliças tridimensionais. O autor conclui que a técnica é bastante eficiente, principalmente quando comparada aos métodos não híbridos. Em termos de otimização de suportes viscoelásticos, apenas dois artigos foram encontrados até a data de publicação de RIBEIRO et al. (2015), nomeadamente, DUTT e TOI (2003), e PANDA e DUTT (2003). Nesses últimos não são utilizadas técnicas híbridas de otimização.

O método de AG é um método estocástico de otimização muito utilizado em diversas áreas de pesquisas científicas. Esse método baseia-se na teoria evolucionária da seleção natural, basicamente as melhores características dos indivíduos (vetor projeto) são mantidas até o término das iterações. AG destaca-se por ser um método que não necessita de informações de gradiente ou sensibilidade da função objetivo, e também por ser capaz de determinar com grande probabilidade o mínimo global de funções de múltiplas variáveis com um ou mais mínimos locais. Porém, devido a sua natureza, a saber, o elevado número de operações matemáticas e iterações requeridas para obtenção do mínimo global, este método tem um alto custo computacional. Os parâmetros básicos de um AG são (ARORA, 2007):

População. Conjunto de variáveis de projeto, tomados aleatoriamente (na primeira iteração) dentro de um domínio restrito. E esses valores ou indivíduos servirão como base para obtenção da população da próxima geração.

Fitness. Etapa na qual ocorre a avaliação da função objetivo para cada indivíduo disponível naquela iteração, seguido pela classificação dos indivíduos mais aptos (que geraram os menores valores de função).

Crossover. Corresponde ao cruzamento de indivíduos escolhidos através de, por

exemplo, uma roleta ponderada, onde os indivíduos mais aptos tem uma probabilidade maior de serem escolhidos do que outros. Este parâmetro recebe valores dentro no intervalo $0 < cross \leq 1$, que corresponde à taxa com que os indivíduos mais aptos serão cruzados para formar novos indivíduos.

Mutação. Processo que ocorre ao final do *crossover* que seleciona alguns indivíduos e insere mutações nos mesmos. Os valores para este parâmetro também variam dentro do intervalo $0 < mut \leq 0.2$, que corresponde a taxa de indivíduos cruzados que receberão mutações aleatórias. Esse processo contribui para obtenção do mínimo global em funções com vários mínimos locais.

Geração. Uma iteração completa de um algoritmo genético é chamada de geração. Por ser um método em que critérios de convergência são difíceis de implementar, na maioria dos casos, o parâmetro *Geração* regula o número de iterações que o processo será repetido.

A determinação dos parâmetros de um algoritmo genético é geralmente realizada de forma peculiar para o problema a ser resolvido. Neste trabalho, o conjunto de parâmetros utilizado que gerou os melhores resultados não variou significativamente (Tabela 4.1) de uma aplicação a outra.

Tabela 4.1- Valores dos parâmetros de AG.

Parâmetros de AG			
População	Crossover	Mutação	Geração
150 – 200	0,8 – 0,9	0,1 – 0,2	15 – 20

Devido ao custo computacional para determinar o mínimo global de uma função através do método de algoritmos genéticos, o mesmo é utilizado com um número pequeno de gerações e o melhor indivíduo servirá como valor inicial para o método de Nelder Mead.

Proposto primeiramente por NELDER e MEAD (1965) o poliedro flexível consiste em um método de busca direta que se baseia no movimento de um poliedro com $n+1$ vértices, sendo n o número de variáveis de projeto, no espaço \mathbf{R}^n . Os valores das variáveis de projeto são alterados de forma a movimentar o poliedro, também chamado de *simplex*, em direção ao mínimo da função. O método utiliza apenas o valor da função para determinar a eliminação do pior vértice e a movimentação do poliedro em direção ao melhor vértice. Os movimentos do poliedro consistem em:

Reflexão. Consiste no movimento do poliedro na direção do vértice que possui o melhor valor da função. Este movimento se dá pela eliminação do pior vértice e sua substituição.

Contração. É a redução volumétrica do *simplex* que ocorre principalmente em regiões nas quais a função possui gradiente de variação pequeno, as quais geralmente são regiões de valores mínimos da função objetivo. Esse tipo de movimento permite a acomodação do poliedro na região do mínimo, possibilitando a correta determinação do valor ótimo e a convergência do método.

Expansão. A expansão ocorre em regiões nas quais existe um gradiente elevado de variação da função. Esse tipo de movimento acelera o processo de otimização sendo responsável pelo excelente desempenho computacional do método.

Esse processo se repete até os valores da função, ou os valores das variáveis de projeto satisfazerem os critérios de parada, que consistem em valores mínimos de variação dos parâmetros citados.

Pontuando algumas vantagens (quatro primeiros pontos) e desvantagens dos algoritmos genéticos observa-se:

- Alta probabilidade de obtenção do mínimo global em funções com vários mínimos locais,
- Pode ser empregado em funções multidimensionais de várias variáveis,
- Não requer informação de gradiente ou sensibilidade da função objetivo,
- Não necessita de critério de parada,
- Alto custo computacional,
- Necessidade de adequar os parâmetros ao tipo de aplicação,

O método de Nelder-Mead também apresenta algumas vantagens (três primeiros pontos) e desvantagens como:

- Agilidade e rapidez computacional,
- Sem parâmetros de configuração apenas critérios de parada,
- Não requer informação de gradiente ou sensibilidade da função objetivo,

- Alta probabilidade de obtenção de mínimos locais em funções com vários mínimos locais,
- Existe probabilidade de convergência em pontos não estacionários,
- Necessita de valor inicial ou “chute inicial”.

Conclui-se que a hibridização entre AG e Nelder-Mead, nesta ordem de aplicação, possibilita aliar vantagens como alta probabilidade de determinação do mínimo global e alto desempenho computacional.

O problema de otimização é definido através da determinação da função objetivo, variáveis de projeto e restrições, da seguinte forma:

$$\min f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{Eq. 4.50}$$

na qual o vetor projeto,

$$\mathbf{x} = \{l_{gl}, l_{gr}, \dots, m_f, I_f\}, \quad \text{Eq. 4.51}$$

contém as variáveis de projeto, que diferem em número e tipo de acordo com o suporte a ser otimizado (suporte translativo, rotativo ou combinado). Dentre as variáveis de projeto estão os fatores geométricos das mantas viscoelásticas deduzidos na seções 3.4.1 e 3.4.2, e os valores de massa(s) e/ou inércia(s) dos suportes.

A função objetivo baseia-se na Eq. 4.49 como segue:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \Omega) = (\Theta \mathbf{D}^{-1} \Psi^T \mathbf{F}_p)_j, \quad \text{Eq. 4.52}$$

em que $\mathbf{D} = i\Omega \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} + \Psi^T \bar{\mathbf{B}}_{eq} \Theta$. Nota-se que o valor da função é dependente do vetor projeto \mathbf{x} e da faixa de frequência Ω devido à matriz $\bar{\mathbf{B}}_{eq}$.

Como o interesse principal da otimização é a minimização dos valores de amplitude máxima da banda de resposta em frequência definida previamente, o valor da função é calculado a partir do valor máximo do produto matricial (Eq. 4.49) ao longo de Ω , e os demais pontos são desconsiderados. Essa abordagem permite a otimização em banda larga e a equalização dos valores de amplitude máxima, dentro da banda de frequência especificada,

após a otimização.

O procedimento de obtenção do valor máximo em Ω consiste em uma simples busca unidimensional ao longo do vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x}^i, \Omega)$, considerando-se a i -ésima iteração no processo de otimização. Assim pode-se escrever a função objetivo como:

$$f(\mathbf{x}) = \max \mathbf{f}(\mathbf{x}^i, \Omega). \quad \text{Eq. 4.53}$$

As variáveis de projeto estão sujeitas a restrições do tipo desigualdade

$$L_{\min}^j \leq x_j \leq L_{\max}^j, \quad \text{Eq. 4.54}$$

na qual L_{\min}^j e L_{\max}^j correspondem aos limites inferior e superior da j -ésima variável de projeto.

Os algoritmos utilizados para realização do procedimento híbrido de otimização proposto neste trabalho são disponibilizados no software de programação Scilab, através das rotinas *optim_ga* (AG) e *fminsearch* (Nelder-Mead).

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados vários testes numéricos com o intuito de explorar os recursos da metodologia proposta através de exemplos de equivalência dinâmica entre os modelos de suporte viscoelástico propostos, comparar estes modelos de suportes e mostrar exemplos de aplicação prática.

Além disso, são apresentados testes experimentais com o objetivo de validar os modelos numéricos propostos, bem como avaliar o desempenho relativo ao controle de vibrações realizado pelos suportes viscoelásticos.

Por isso, este capítulo é dividido em duas seções principais: Resultados numéricos e Resultados numérico experimentais.

5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS

A metodologia proposta neste trabalho é bastante abrangente e para explorá-la de maneira completa são necessários vários testes numéricos. Desse modo, diferentes exemplos de rotor são simulados com diferentes tipos de SVEs e em condições distintas, de forma a permitir avaliar a coerência das hipóteses lançadas e as vantagens da aplicação destes dispositivos em situações reais.

5.1.1 Equivalência dinâmica

Os modelos de SVEs apresentados nas seções 3.2 e 3.3 são conceitualmente distintos, porém, os mesmos são, no domínio da frequência, equivalentes. Essa equivalência dinâmica ocorre apenas em termos de resposta em frequência ao desbalanceamento devido às hipóteses que tiram parte da generalidade do modelo de PEG. Nesta seção, são apresentados gráficos de resposta em frequência calculados a partir de ambos os modelos de SVEs propostos, considerando diferentes tipos de SVEs.

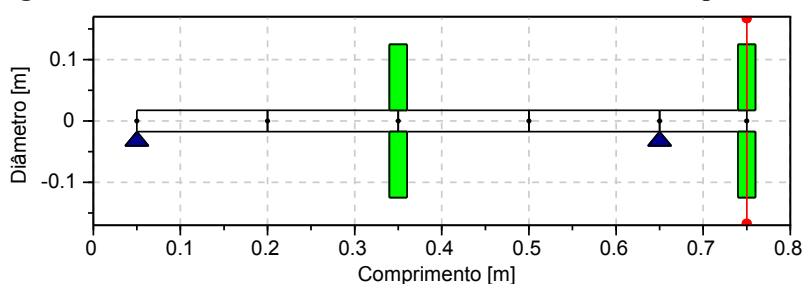
Para realização deste teste numérico, faz-se necessário utilizar um modelo de rotor que apresente os efeitos dinâmicos que podem apresentar divergências entre as modelagens matemáticas dos SVEs. Este modelo é apresentado na Figura 5.1. O rotor possui um eixo de 35 [mm] de diâmetro com discos posicionados ao centro da distância entre mancais (600 [mm]) e na extremidade em balanço à 700 [mm] da origem, tendo os discos 250 [mm] de

diâmetro. As demais propriedades geométricas e de materiais encontram-se na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Propriedades geométricas e de materiais das simulações de equivalência dinâmica.

Eixo							
Diâmetro [mm]	Comprimento [mm]	Módulo de Young [GPa]	Densidade [kg/m ³]	Coef. Poisson			
35	700	210	7850	0.3			
Discos							
Posição [mm]	Diâmetro [mm]	Espessura [mm]	Densidade [kg/m ³]				
300	250	20	7850				
700	250	20	7850				
Carregamento							
Posição [mm]	Magnitude [gmm]			Fase [°]			
700	50			0			
Mancais de rolamento (axissimétricos)							
k_{xx} [N/m]	k_{xz} [N/m]	k_{zx} [N/m]	k_{zz} [N/m]	c_{xx} [N/m]	c_{xz} [N/m]	c_{zx} [N/m]	c_{zz} [N/m]
50000000	0	0	50000000	0	0	0	0
SVEs de Translação – 1 massa adicional							
Posições [mm]	l_{gt} - Manta 1		l_{gt} - Manta 2		Massa [kg]		
0 - 600	7,54		1,36		12		
SVEs de Translação – 2 massas adicionais							
Posições [mm]	l_{gt} - Manta 1	l_{gt} - Manta 2	l_{gt} - Manta 3	Massa 1 [kg]	Massa 2 [kg]		
0 - 600	7,54	2,51	1,05	6	6		

Figura 5.1 - Modelo discreto do rotor com 5 elementos finitos quadráticos.



O material viscoelástico escolhido para a simulação de equivalência dinâmica apresenta elevado amortecimento fato que permite elevar a exigência dos testes. Este material tem seu nomograma de frequência reduzida apresentado na Figura 3.8, o qual foi obtido através dos parâmetros disponíveis no Laboratório de Vibrações da UFPR. A temperatura considerada para realização dos testes numéricos foi de 27°C, desse modo o nomograma para a temperatura constante é apresentado na Figura 5.2. Como pode ser observado na Figura 5.2, o material possui um elevado amortecimento por apresentar um fator de perda na faixa

$0,35 \leq \eta \leq 0,5$, e um baixo módulo de elasticidade $3 \cdot 10^6 \leq G \leq 7 \cdot 10^6$ [Pa] na faixa de frequência de 50 [Hz] à 1000 [Hz]. Os parâmetros do modelo viscoelástico estão apresentados na Tabela 5.2.

Figura 5.2 - Nomograma de borracha butílica em temperatura constante de 27[°C].

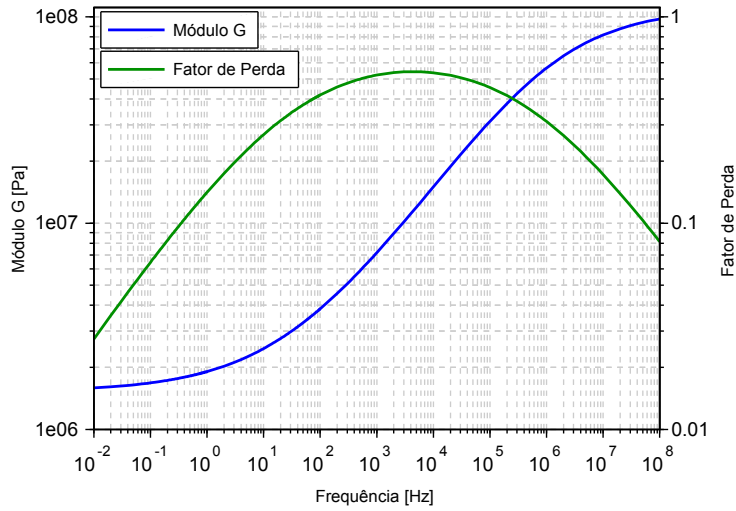
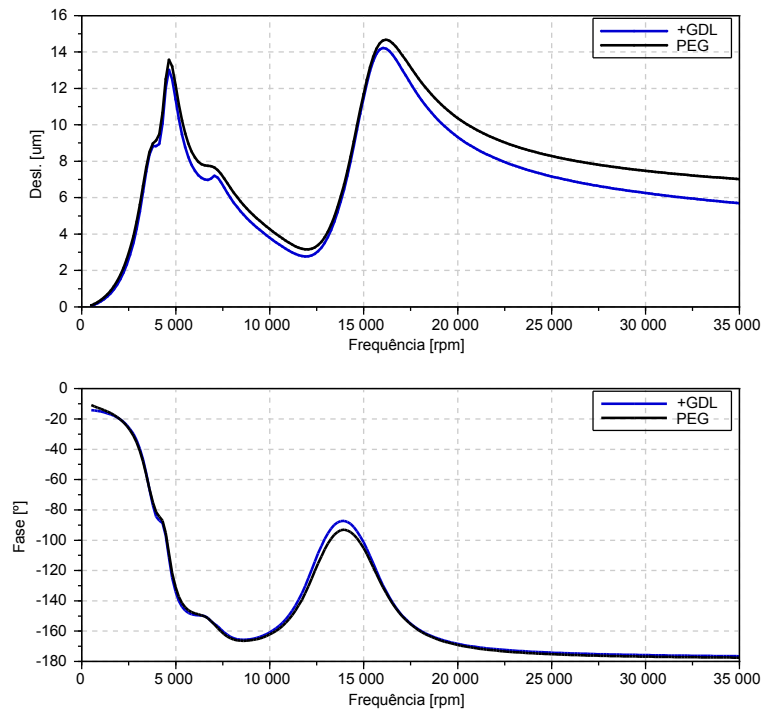


Tabela 5.2 - Parâmetros materiais da borracha butílica 45 SHORE A.

G_0 [MPa]	G_∞ [MPa]	b_1	β	θ_1	θ_2	T_0 [°K]	T [°K]
1,53	111	0,0134	0,396	15,1	171	273	300

Figura 5.3 - Resposta em frequência, módulo e fase.

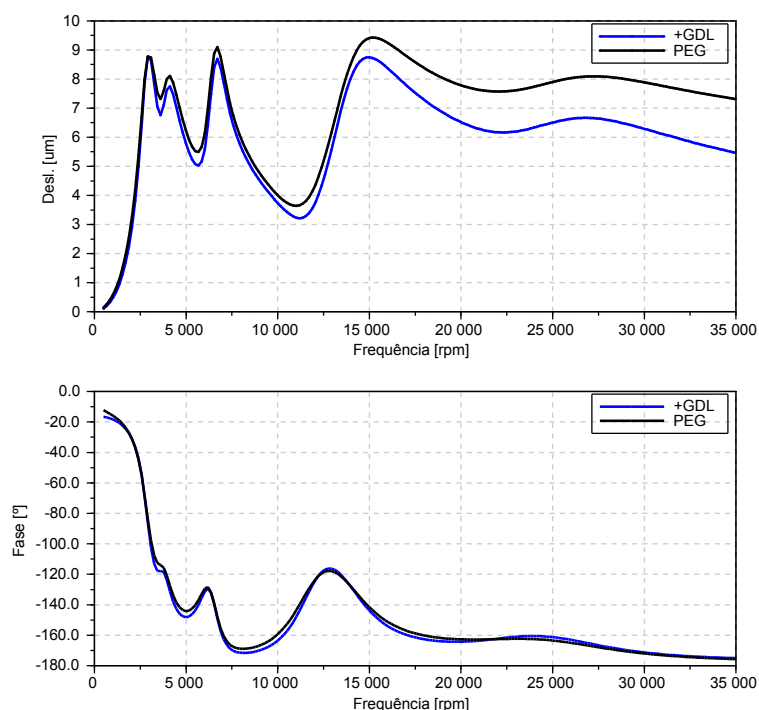


A primeira curva de resposta em frequência, Figura 5.3, é levantada para um modelo de

suporte como apresentado na Figura 3.10 com uma massa adicional.

A segunda curva de resposta em frequência, Figura 5.4, é levantada para um modelo de suporte com duas massas adicionais. Em ambas as simulações são considerados somente graus de liberdade de translação, por simplicidade, devido ao fato de que a consideração dos outros graus de liberdade seguem as mesmas hipóteses estabelecidas. Desse modo, o mesmo comportamento será reproduzido em simulações considerando apenas graus de liberdade de rotação e em combinações de translação e rotação.

Figura 5.4 - Resposta em frequência, módulo e fase



A observação da Figura 5.3 e Figura 5.4, evidencia o fato de que o número de GDL do SVE não afeta a equivalência dinâmica entre os modelos de suporte. Por sua vez, o pequeno *gap* entre uma curva e outra, em elevadas rotações, se deve a dois fatos: o primeiro é a simplificação (Campbell simplificado) utilizada no modelo de PEG apresentada na seção 4.1.3, o segundo é o acoplamento entre os modos devido ao elevado amortecimento do sistema, combinado à facilidade de consideração de todos os modos no cálculo da resposta em frequência utilizando PEG em contraste com a inviabilidade de considerar todos os modos no cálculo utilizando o modelo com acréscimo de GDL.

5.1.2 Efeito da consideração de diferentes GDL de SVEs otimizados na resposta em frequência

Nesta seção o efeito dinâmico da utilização dos diferentes GDL dos suportes ótimos, no sistema global, é analisado em termos de resposta em frequência, utilizando para esse fim a abordagem através de PEG. Neste caso, o modelo de rotor utilizado é apresentado na Figura 5.5, com eixo de 10 [mm] de diâmetro, comprimento de 400 [mm] e espaçamento entre mancais de 365 [mm]. Um disco com 75 [mm] de diâmetro está fixado ao eixo na posição 60 [mm] em relação à origem. Os demais dados são apresentados na Tabela 5.3.

Figura 5.5 - Modelo matemático discreto e geometria do rotor testado.

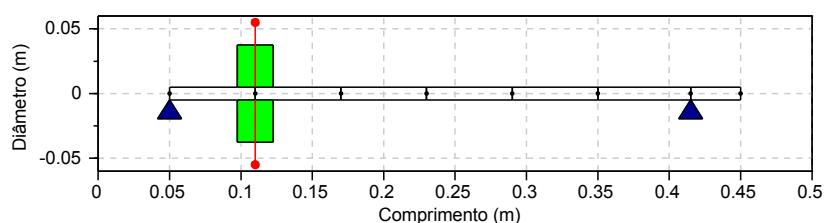
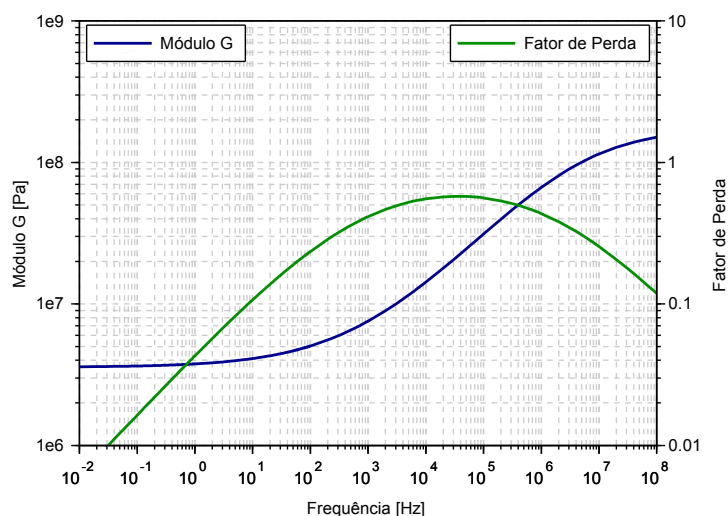


Tabela 5.3 - Dados do sistema rotativo analisado numericamente.

Eixo							
Diâmetro [mm]	Comprimento [mm]	Módulo de Young [GPa]	Densidade [kg/m ³]	Coef. Poisson			
10	400	200	7850	0,3			
Disco							
Posição [mm]	Diâmetro [mm]	Espessura [mm]	Densidade [kg/m ³]				
60	75	25	7386				
Carregamentos							
Posição [mm]	Magnitude [gmm]			Fase [°]			
60	24			0			
Mancais de rolamento (axissimétricos)							
k_{xx} [N/m]	k_{xz} [N/m]	k_{zx} [N/m]	k_{zz} [N/m]	c_{xx} [N/m]	c_{xz} [N/m]	c_{zx} [N/m]	c_{zz} [N/m]
2300000	0	0	2300000	100	0	0	100
$k_{\theta\theta}$ [Nm]	$k_{\theta\psi}$ [Nm]	$k_{\psi\theta}$ [Nm]	$k_{\psi\psi}$ [Nm]	$c_{\theta\theta}$ [Nms]	$c_{\theta\psi}$ [Nms]	$c_{\psi\theta}$ [Nms]	$c_{\psi\psi}$ [Nms]
1000	0	0	1000	0,05	0	0	0,05
SVEs							
Posição SVE 1 [mm]				Posição SVE 2 [mm]			
0				365			
Posição de medição da resposta [mm]							
Coordenada x				Coordenada z			
304				304			

O material viscoelástico utilizado nas simulações é o “neoprene 45 SHORE A” disponível no Laboratório de Vibrações da UFPR, o qual foi caracterizado pelo grupo GVIBS utilizando modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros. A temperatura medida por ocasião dos experimentos é utilizada para obtenção do nomograma a temperatura constante. Desse modo as propriedades viscoelásticas utilizadas nas simulações desta seção são apresentadas na Figura 5.6.

Figura 5.6 - Nomograma do neoprene em temperatura constante, 17 [°C].



Diferentemente às propriedades da borracha butílica apresentadas na seção anterior, o neoprene possui, em uma faixa de frequência usual de 50 [Hz] à 1000 [Hz], fator de perda relativamente baixo (borracha butílica), entre $0,2 \leq \eta \leq 0,4$, e módulo elástico, relativamente alto (borracha butílica), entre $4,5 \cdot 10^6 \leq G \leq 8 \cdot 10^6$ [Pa], o que confere menor amortecimento ao sistema. Os parâmetros de derivadas fracionárias para o neoprene são mostrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 - Parâmetros materiais do neoprene 45 SHORE A.

G_0 [MPa]	G_∞ [MPa]	b_1	β	θ_1	θ_2	T_0 [°K]	T [°K]
3,57	179	0,00246	0,435	6,57	68	273	290

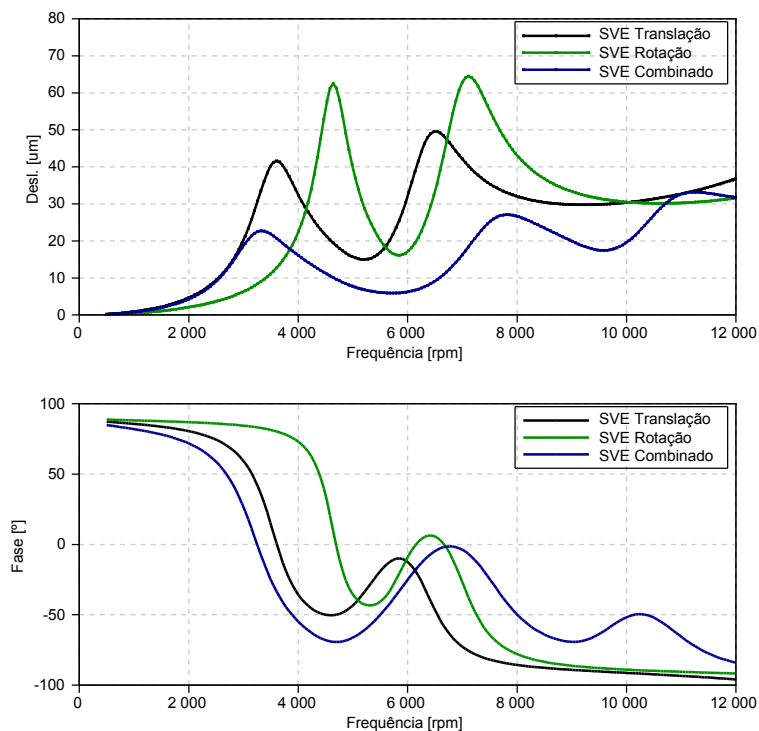
Os mancais aqui considerados possuem rigidez translativa isotrópica igual a 2.3 [MN/m] e rigidez rotativa isotrópica igual a 1 [kNm]¹. Com a mesma simetria estão os coeficientes de amortecimento translativo, 100 [Ns/m], e rotativo, 0,05 [Nms].

A primeira curva compara em termos de resposta em frequência os suportes otimizados

1 Quando simulados os SVEs de translação pura os coeficientes de rigidez dos mancais à rotação são desprezados.

com uma massa adicional, com GDL de translação pura, rotação pura e combinado.

Figura 5.7 - Respostas em frequência do grau de liberdade "u" calculadas na posição 300[mm].



As respostas em frequência apresentadas na Figura 5.7 demonstram que a consideração de ambos graus de liberdade simultaneamente (translação e rotação) apresenta uma eficácia teórica superior no controle de vibrações quando comparada a abordagens considerando GDL de translação ou rotação apenas. Nota-se, também, que o sistema rotor-SVE é mais flexível considerando ambos os graus de liberdade por apresentar um pico de resposta em menor frequência, relativamente aos outros SVEs.

Tabela 5.5 - Parâmetros ótimos de SVEs de translação, rotação e combinado.

SVE translação – 1 massa adicional					
l_{gt} - Manta 1	l_{gt} - Manta 2	Massa [kg]			
0,176	0,112	1,870			
SVE rotação – 1 inércia adicional					
l_{gr} - Manta 1	l_{gr} - Manta 2	Inércia [kgm ²]			
1,44E-05	9,06E-06	1,80E-03			
SVE combinado – 1 massa/inércia adicional					
l_{gt} - Manta 1	l_{gr} - Manta 1	Massa [kg]	l_{gt} - Manta 2	l_{gr} - Manta 2	Inércia [kgm ²]
0,942	4,02E-05	0,900	0,056	3,41E-05	1,80E-03

Os parâmetros geométricos resultantes, obtidos da otimização dos SVEs bem como os

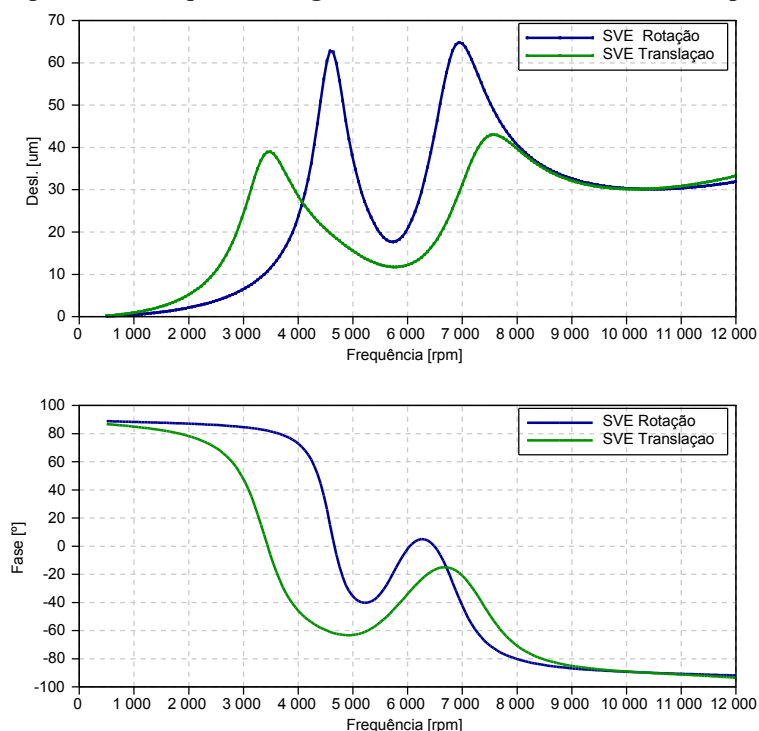
valores de inércia e massa são apresentados na Tabela 5.5 e na Tabela 5.6. Em cada simulação o par de SVEs recebe os mesmos valores ótimos.

Em uma segunda análise são apresentadas as respostas em frequência considerando suportes com graus de liberdade somente translativos e rotativos, porém com a inserção de duas massas/inércias adicionais. O mesmo material viscoelástico em conjunto com o modelo de rotor apresentado anteriormente são utilizados para esta simulação.

Tabela 5.6 - Parâmetros ótimos de SVEs de translação e rotação com 2 massas/inércias adicionais.

SVE translação – 1 massa adicional				
l_{gt} - Manta 1	l_{gt} - Manta 2	l_{gt} - Manta 3	Massa 1 [kg]	Massa 2 [kg]
0,764	0,153	0,424	0,559	0,727
SVE rotação – 2 inércias adicionais				
l_{gr} - Manta 1	l_{gr} - Manta 2	l_{gr} - Manta 3	Inércia 1 [kgm ²]	Inércia 2 [kgm ²]
1,26E-05	6,73E-05	8,67E-06	8,87E-04	8,87E-04

Figura 5.8 - Respostas em frequência do grau de liberdade "u" calculadas na posição 300[mm].



A comparação entre as curvas apresentadas na Figura 5.7 e Figura 5.8 leva a concluir que, nas condições impostas neste trabalho, a contribuição de duas massas/inércias adicionais, em termos de controle da resposta em frequência, é pequena em relação aos SVEs apresentados na Figura 5.7, que possuem uma massa/inércia adicional. Porém, como pode ser

observado nas Tabela 5.5 e Tabela 5.6, a massa/inércia total dos SVEs, com duas massas/inércias é menor do que a massa/inércia total dos SVEs de translação/rotação pura onde foi considerado uma massa/inércia. O tipo de abordagem que resultou no melhor controle de vibrações para o modelo utilizado foi a abordagem que faz uso de uma massa/inércia adicional e ambos os graus de liberdade de rotação e translação. Porém estas simulações devem ser conduzidas de maneira mais exaustiva em trabalhos futuros.

Os modos de vibrar relativos aos picos de frequência, observados na Figura 5.7 e Figura 5.8, são mostrados na sequência para os mesmo sistemas rotor-SVE já otimizados. Os modos de vibrar permitem observar as amplitudes de diferentes regiões do eixo em termos de translação ou rotação da seção transversal do eixo.

Os primeiros modos apresentados na Figura 5.9, são calculados para o sistema rotor-SVE de translação pura, com uma massa adicional. Na Figura 5.9a pode observar-se uma elevada amplitude no suporte localizado na posição 0 [mm], a amplitude no suporte posicionado em 365 [mm] é relativamente menor, porém ambas são maiores do que as amplitudes observadas na Figura 5.9b (nas regiões dos SVEs). A rotação da seção transversal é elevada na região dos suportes com exceção da região próxima a 0 [mm], Figura 5.9a.

Figura 5.9 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 3498 [rpm] e 6290 [rpm].

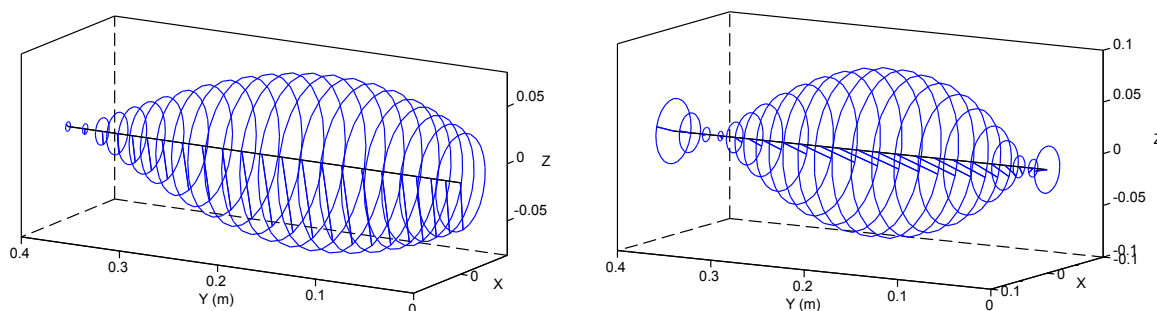
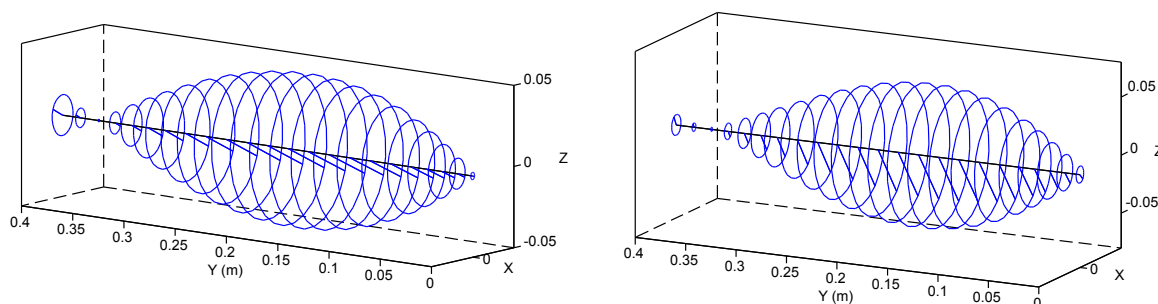


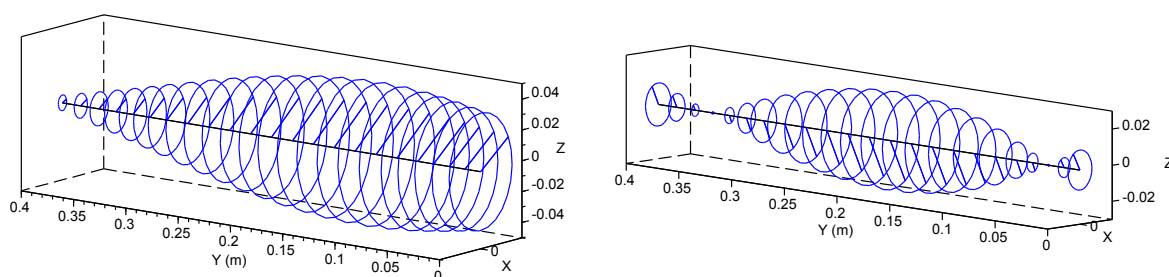
Figura 5.10 - 2° e 6° modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 4540 [rpm] e 6385 [rpm].



Em sequência, na Figura 5.10, são apresentados os modos para o sistema rotor-SVE de

rotação pura, com uma inércia adicional apenas. Pode-se observar que os modos apresentados na Figura 5.10 tem pequena amplitude de translação na região dos mancais e baixa rotação da seção transversal. Este último efeito é mais acentuado no modo apresentado na Figura 5.10 b, além de ambos os modos serem semelhantes.

Figura 5.11 - 2º e 6º modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 3201 [rpm] e 7492 [rpm].



A Figura 5.11, por sua vez, apresenta os modos de vibrar para o sistema rotor-SVE com GDL de rotação e translação combinados, e com uma inércia e uma massa adicionais. Estes modos se assemelham aos modos apresentados na Figura 5.9, porém com amplitude rotacional da seção transversal relativamente menor.

Figura 5.12 - 2º e 6º modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 3344 [rpm] e 7236 [rpm].

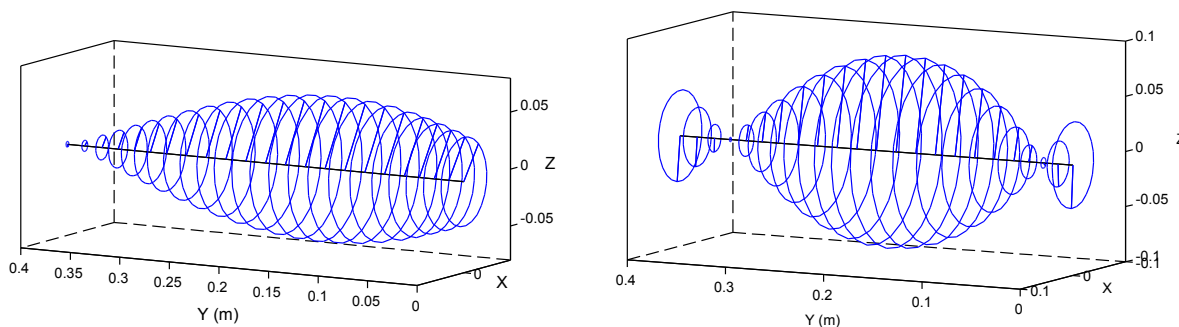
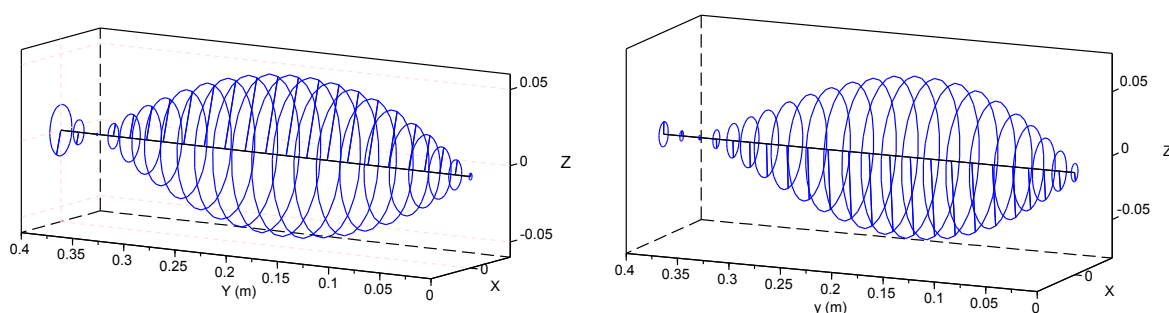


Figura 5.13 - 2º e 6º modos de vibrar correspondentes às velocidades críticas 4288 [rpm] e 6704 [rpm].

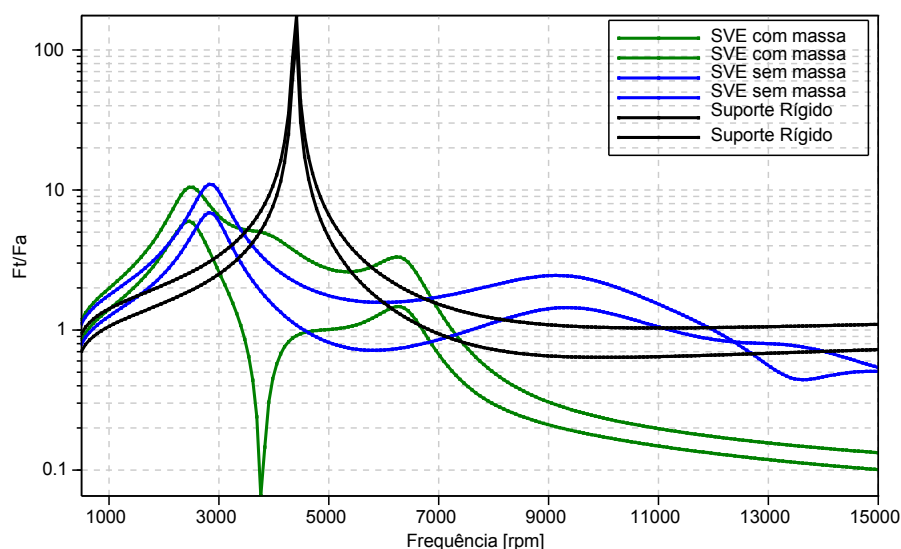


Para as abordagens com duas massas/inércias adicionais, iniciando pelo sistema rotor-

SVE de translação pura, a Figura 5.12 mostra os modos respectivos, expostos na Figura 5.8. A Figura 5.13 apresenta os modos de vibrar para o sistema rotor-SVE de rotação pura. Nas Figura 5.12 e Figura 5.13 observa-se modos semelhantes aos mostrados na Figura 5.9 e Figura 5.10.

A redução na transmissibilidade de um sistema rotativo apoiado sobre suportes flexíveis é bastante conhecida. Neste trabalho, são comparadas a redução da transmissibilidade do sistema em função do tipo de abordagem de SVE, semelhantemente às comparações feitas anteriormente em termos de resposta em frequência. O primeiro resultado apresentado é uma curva de transmissibilidade publicada em RIBEIRO et al. (2015), que compara a transmissibilidade de um sistema rotativo apoiado em três tipos de suportes distintos, suporte rígido, SVE sem massa adicional, e SVE com uma massa adicional.

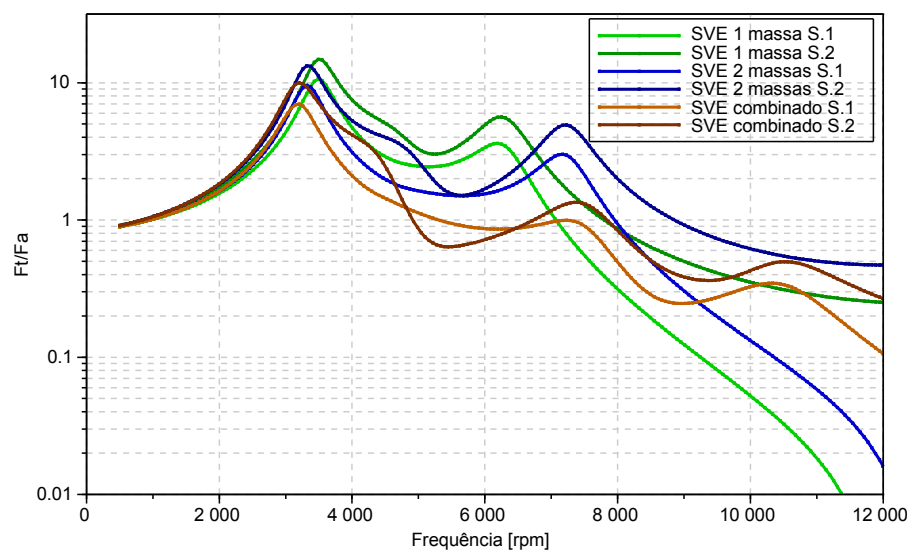
Figura 5.14 - Transmissibilidade em termos de força, fonte: RIBEIRO et al. (2015).



A Figura 5.14 apresenta a superioridade em termos de transmissibilidade de um sistema rotor SVE com massa adicional frente aos outros modelos, principalmente em elevadas rotações. Os suportes utilizados na simulação consideram apenas os graus de liberdade de translação.

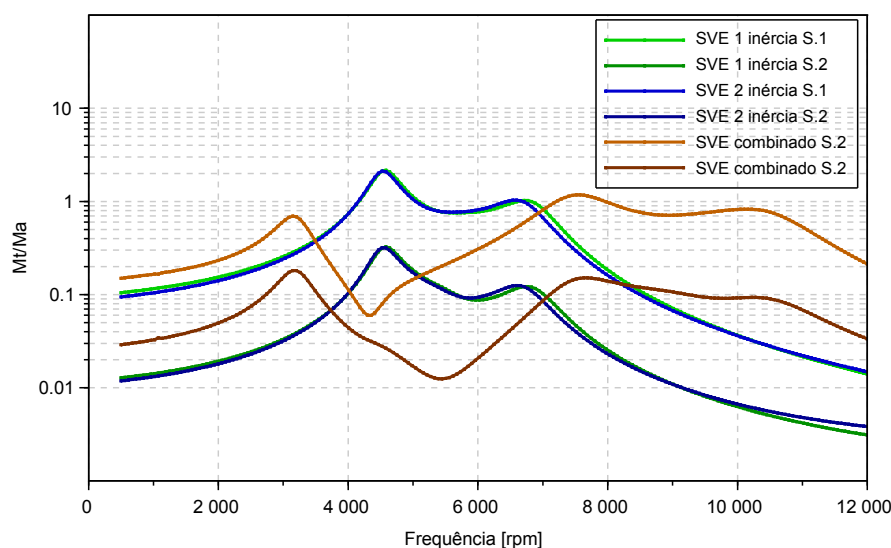
A comparação das transmissibilidades dos sistemas rotor-SVEs otimizados inicia-se através da Figura 5.15, na qual pode-se observar a transmissibilidade de três sistemas rotor-SVEs, translação pura com uma massa adicional, combinado, e translação pura com duas massas adicionais.

Figura 5.15 - Transmissibilidade translativa de força para 3 SVEs distintos.



A Figura 5.16, apresenta as transmissibilidades rotativas em termos de momento para os três sistemas rotor-SVEs distintos, de rotação pura com uma inércia adicional, combinado, e de rotação pura com duas inércias adicionais.

Figura 5.16 - Transmissibilidade rotativa de momento para 3 SVEs distintos.



As Figura 5.15 e Figura 5.16 mostram que os suportes viscoelásticos de translação pura com uma e duas massas, de rotação pura com uma e duas inércias, e combinado, se comportam de maneira bastante distinta em termos de transmissibilidades, com exceção dos suportes de rotação pura com uma e duas inércias, que de acordo com a Figura 5.16, apresentam pouca diferença na faixa de frequência de interesse.

Em termos de transmissibilidade translativa, o SVE com abordagem combinada apresenta uma performance melhor se comparado aos outros tipos, principalmente na região dos picos, por distribuir os carregamentos de forma mais igualitária nos suportes. Para transmissibilidades na faixa de frequência entre 6500 [rpm] e 12000 [rpm], o suporte de translação pura com uma massa adicional apresenta melhor performance. O comportamento do SVE de translação pura com duas massas adicionais é pouco melhor que aquele na região dos picos. Porém, para uma avaliação mais conclusiva seria necessário aumentar a faixa de frequência. Outros fatores que podem estar influenciando este comportamento são o maior amortecimento, o menor valor de massa adicional total e a maior abertura entre os picos de frequência.

Em termos de transmissibilidade rotativa o SVE com abordagem combinada apresenta novamente uma performance melhor se comparado aos outros tipos de SVEs na região dos picos. Porém, devido a este suporte gerar um afastamento entre os picos, seu desempenho em altas frequências é pior quando comparado aos outros.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICO-EXPERIMENTAIS

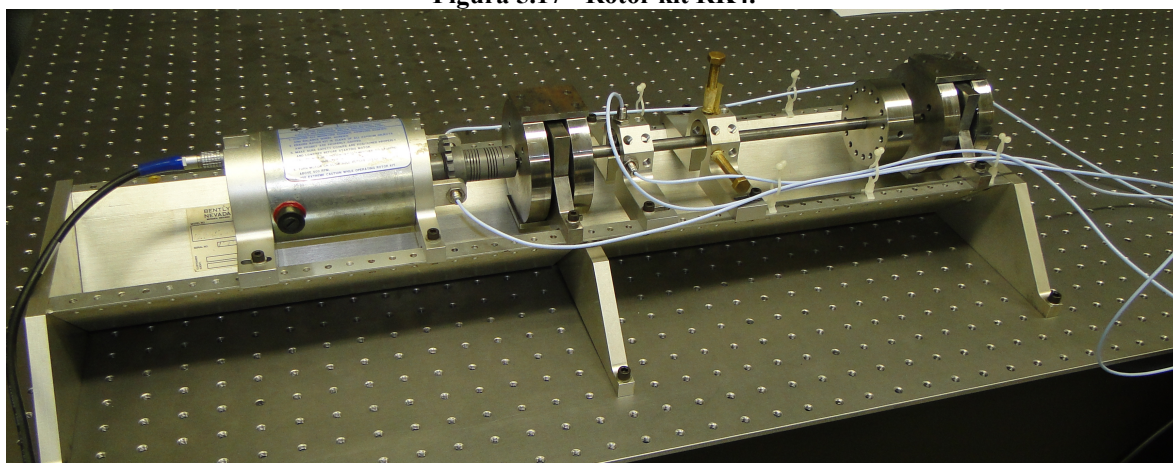
Nesta seção, são apresentados os detalhes do experimento conduzido com o objetivo de validar a metodologia apresentada no presente trabalho, inclusive, a bancada de testes, os instrumentos de medição e o protótipo. Curvas experimentais são confrontadas às curvas numéricas com o objetivo de avaliar a capacidade de predição do comportamento dinâmico do sistema rotor-SVE.

Devido a limitações, somente uma geometria de suporte foi utilizada para aplicação da metodologia de otimização e testes experimentais, no caso, um SVE de translação pura com uma massa adicional. Deste modo, as mantas de material viscoelástico e a massa desse suporte foram alvo de otimização.

5.2.1 Equipamentos

O principal instrumento de trabalho para realização dos experimentos é a bancada de rotores *rotor kit RK4* fabricada pela empresa *Bently Nevada*, representada através da Figura 5.17. Com os SVEs posicionados nas coordenadas 0 [mm] e 365 [mm]. A bancada, adquirida pelo LAVIBS, é composta de um motor elétrico, um acoplamento flexível e um eixo INA® de aço carbono ABNT 1050 com 400 [mm] de comprimento e diâmetro 10 [mm].

Figura 5.17 - Rotor kit RK4.



A massa rotórica, representada na Figura 5.18 a), possui 800 [g], 16 furos roscados para inserção de massas desbalanceadas e está posicionada na coordenada 60 [mm]. A bancada possui sensores de proximidade para medição de deslocamento, velocidade de rotação e fase, como mostra a Figura 5.18 b).

Figura 5.18 - a) Massa rotórica. b) sensores de proximidade e apoio dos sensores.

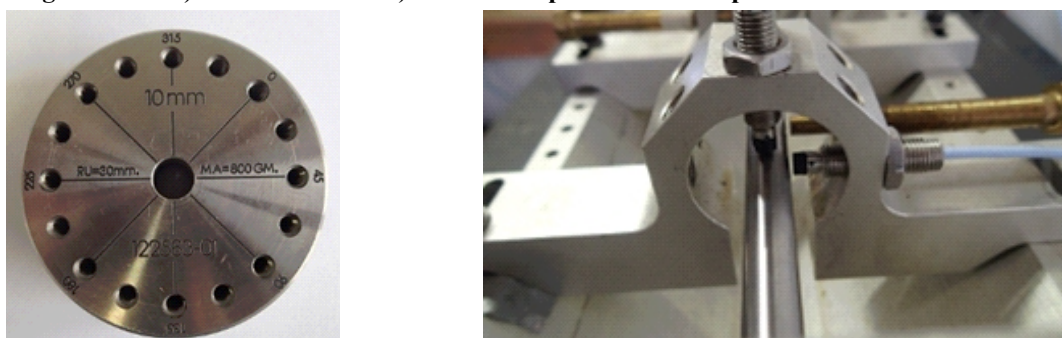
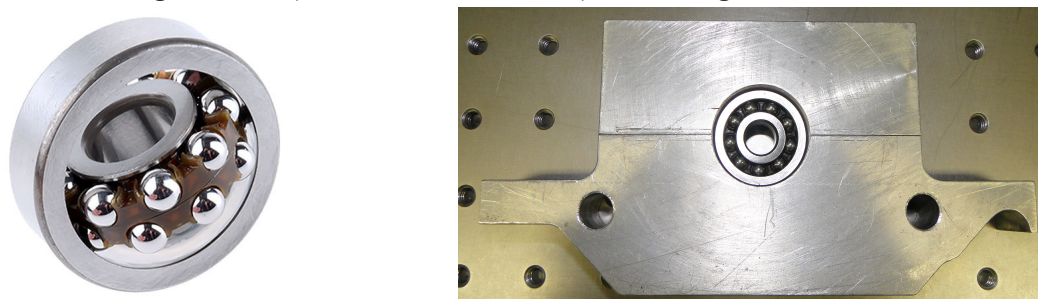


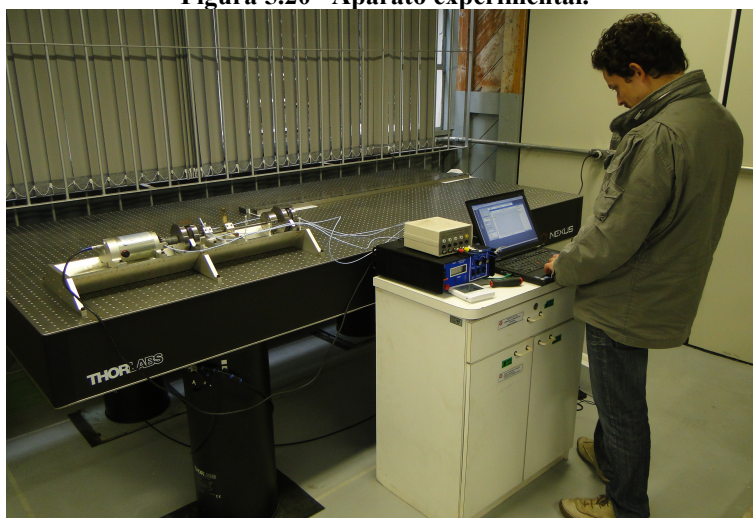
Figura 5.19 - a) Rolamento SKF 1200. b) Pedestal rígido.



Para comparar/mostrar o efeito dos SVEs uma bancada similar de rotores foi montada com apoios rígidos. Assim os SVEs da Figura 5.17 foram substituídos por mancais de rolamento autocompensadores SKF 1200, montados em pedestais rígidos, conforme mostra a Figura 5.19.

A bancada de rotores foi apoiada sobre uma mesa pneumática NEXUS da fabricante THORLABS, com o objetivo de evitar contaminação de vibrações do ambiente nas medições. Todo o aparato experimental localizado no LAVIBS, é apresentado na Figura 5.20, na qual também é possível visualizar o controlador de velocidade da bancada de rotores que permite realizar análises de *runup* e *rundown* em uma faixa de frequência que varia de 250 a 10000 [rpm].

Figura 5.20 - Aparato experimental.



A placa de aquisição de sinais utilizada, representada na Figura 5.21a, é fabricada pela empresa Bruel & Kjaer. A mesma possui 6 canais de aquisição suficientes para obtenção dos sinais do *key phasor* e dos sensores de deslocamento nas direções ortogonais ao eixo, estes últimos posicionados na coordenada axial 304 [mm].

Figura 5.21 - a) Placa de aquisição de dados Bruel & Kjaer. b) Termômetro infravermelho.



A verificação da temperatura dos materiais viscoelásticos antes de cada teste é realizada através de um termômetro infravermelho, conforme representado na Figura 5.21b (dispositivo cedido pelo laboratório de metrologia da UFPR).

O software utilizado para tratamento dos dados obtidos e geração das curvas de resposta em frequência em termos de amplitude de deslocamento e fase, é o software *Pulse* também desenvolvido pela empresa Bruel & Kjaer.

Dois experimentos distintos foram realizados: o primeiro deles foi um ensaio de run-up na bancada de rotores apoiada sobre os suportes rígidos, por sua vez no segundo experimento foram realizados testes de run-up e run-down, nesse caso, a bancada estava apoiada sobre os protótipos de SVEs. A principal diferença entre os experimentos em termos de equipamentos utilizados concentra-se apenas no tipo de suporte. As posições dos apoios são as mesmas apresentadas na Figura 5.5.

O principal objetivo da realização do experimento em apoios rígidos é realizar a identificação de algumas características, principalmente de amortecimento dos rolamentos, para calibração do modelo numérico. Da mesma forma, esse experimento é utilizado como base para avaliar o controle de vibrações obtido através dos SVEs.

5.2.2 Identificação de componentes da bancada

Dois componentes principais concentram os esforços para identificação de suas propriedades, eixo e mancais de rolamentos. A identificação das propriedades do eixo é obtida através de um teste de impacto utilizando um martelo piezoelétrico e um acelerômetro, em uma configuração na qual o eixo esteja sujeito a condições de contorno livre-livre, conforme Figura 5.22 (SILVÉRIO 2015). A Tabela 5.7 apresenta os valores das propriedades do eixo obtidas.

Tabela 5.7 - Propriedades do material do eixo.

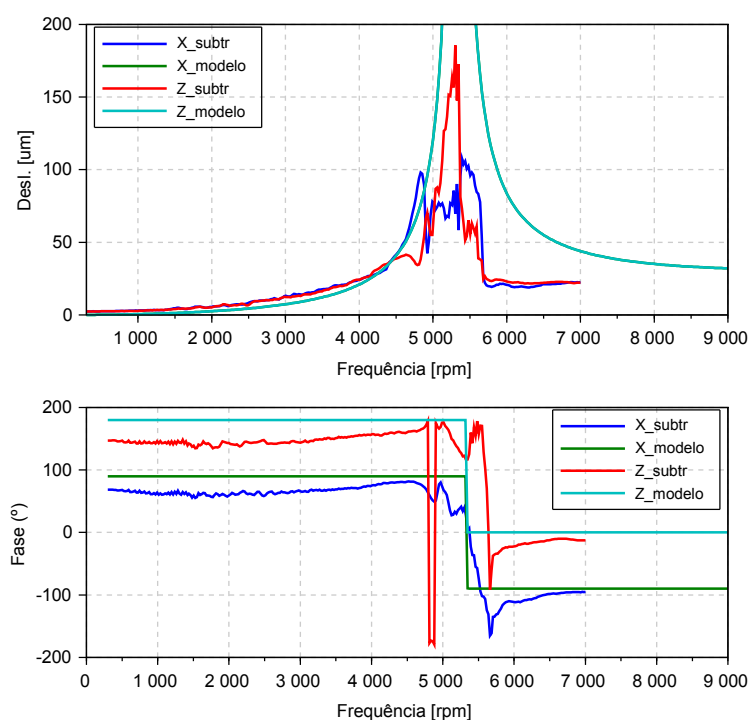
Módulo de Young [GPa]	Densidade [kg/m³]	Coef. Poisson
200	7850	0,3

Figura 5.22 - Teste de impacto, eixo livre-livre.



Para a identificação dos parâmetros dos mancais de rolamento autocompensadores foi realizado um experimento em que a bancada foi apoiada nos mesmos, que por sua vez foram inseridos nos pedestais rígidos (Figura 5.19). A Tabela 5.10 apresenta os detalhes de eixo, disco e posições de suportes rígidos e medição da resposta. Nesse experimento, foi obtida uma curva de resposta em frequência ao desbalanceamento. Devido ao baixo amortecimento deste sistema, foram utilizados batentes de cobre para evitar contato do eixo com os sensores de proximidade. A curva obtida é apresentada na Figura 5.23. A abordagem proposta em PRASHAD (2004) foi utilizada como ferramenta auxiliar para identificar os parâmetros de rigidez dos mancais.

Figura 5.23 - Resposta em frequência, experimental x numérico.



O ajuste da curva numérica apresentada na Figura 5.23 utiliza como parâmetros: a rigidez translacional dos mancais e o amortecimento translacional e rotacional dos mesmos. Todos estes parâmetros são, por hipótese, considerados isotrópicos. O ajuste realizado foi manual e as regiões das curvas que são escolhidas para o ajuste são: a posição de pico de resposta, a elevação da resposta desde frequências baixas à região de pico, a tendência da resposta após a região de pico e a largura da banda de resposta. É fato que, devido ao choque entre eixo e batentes, a região de pico fica bastante ruidosa, porém ainda assim é possível inferir que a posição do pico de resposta, no eixo de frequência, deve estar aproximadamente

entre os valores de 5000 [rpm] e 5500 [rpm]. A rotação crítica do modelo numérico ajustado é de 5345 [rpm].

A obtenção das curvas sem a presença de *runout* e desbalanceamento residual é realizada através da execução de duas corridas de *runup* com massas desbalanceadas de valores diferentes, neste caso, 0.4 [g] e 0.8 [g], porém inseridas na mesma fase 90[°] em relação à referência. A posterior subtração vetorial em termos de amplitude complexa entre a curva obtida com massa desbalanceada maior e a obtida com a massa menor, resulta em uma curva de resposta que contém apenas a contribuição da diferença entre as massas desbalanceadas utilizadas, ou seja, desbalanceamento de 0.4 [g] em 90 [°]. Este valor de desbalanceamento foi utilizado para determinação da resposta em frequência numérica apresentada na Figura 5.23.

A Tabela 5.8 apresenta os dados ajustados e posteriormente utilizados nos experimentos com SVEs.

Tabela 5.8 - Propriedades do apoio rígido.

k_{xx} [kN/m]	k_{zz} [kN/m]	c_{xx} [Ns/m]	c_{zz} [Ns/m]	$c_{\theta\theta}$ [Nms]	$c_{\psi\psi}$ [Nms]
2300	2300	100	100	0,05	0,05

5.2.3 Balanceamento

Os primeiros ensaios realizados com o sistema rotor-SVE de translação pura indicaram a dificuldade em utilizar a abordagem apresentada na seção anterior, com o objetivo de remoção do desbalanceamento residual e *runout* das respostas em frequência medidas. Em SILVÉRIO (2015) o mesmo problema foi identificado, principalmente em sistemas com elevado amortecimento, nos quais ambas a fase e amplitude medidas com desbalanceamentos de magnitudes diferentes, quando subtraídas, apresentaram certas discrepâncias.

Desse modo, foi realizado em procedimento de balanceamento sem a necessidade de utilização de massas de teste, este procedimento é baseado em XU et al. (2000), o qual utiliza um método de otimização para minimizar a função objetivo que corresponde à norma euclidiana do vetor erro como segue:

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} Hu_1^1 \\ Hw_1^1 \\ Hu_2^1 \\ Hw_2^1 \\ \vdots \\ Hu_m^n \\ Hw_m^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} HEu_1^1 \\ HEw_1^1 \\ HEu_2^1 \\ HEw_2^1 \\ \vdots \\ HEu_m^n \\ HEw_m^n \end{Bmatrix}, \quad \text{Eq. 5.1}$$

na qual, H representa a resposta numérica em termos de amplitude complexa calculada a partir da Eq. 4.49. Por sua vez, HE representa a resposta experimental medida. Os índices n e m representam a totalidade do número de pontos e rotações medidas.

Para a identificação do desbalanceamento, a função objetivo é definida como

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{E}\|, \quad \text{Eq. 5.2}$$

onde o vetor projeto, \mathbf{x} , é dado por

$$\mathbf{x} = \{m_u r, \varphi\}. \quad \text{Eq. 5.3}$$

O produto $m_u r$ (massa desbalanceada vezes raio de excentricidade) representa a amplitude da força desbalanceada e φ a fase do desbalanceamento.

As técnicas de otimização utilizadas nesta seção são as mesmas apresentadas na seção 4.2.3. Assim esse método, por sua generalidade, foi escolhido para realização do procedimento de balanceamento. A Tabela 5.9 mostra os resultados obtidos pela aplicação do método proposto.

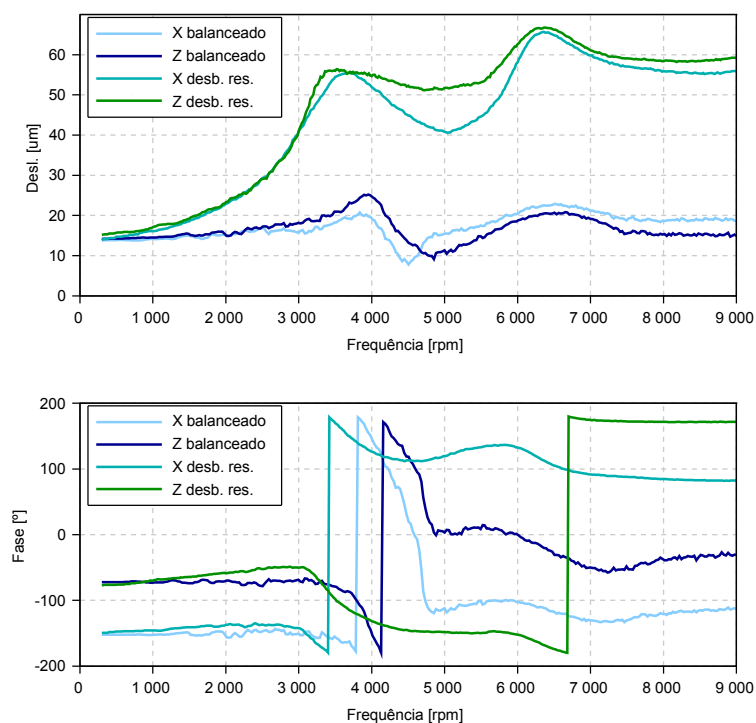
Tabela 5.9 - Resultados do balanceamento numérico.

Rotação [rpm]	Direção	Amplitude [g]	Fase [°]
1000	x	1,9	97
	z	1,4	103
3430	x	0,7	97
	z	0,74	88

Como mostrado na Tabela 5.9, foram realizados 4 ensaios para duas rotações distintas e

para cada direção ortogonal. A posição de medição da resposta, como mencionado, é a coordenada axial 304 [mm]. Pode-se observar que entre as direções ortogonais existe uma pequena diferença, fato que não afetou o balanceamento. Porém os resultados para a primeira rotação apresentaram massas de correção muito elevadas, por esse motivo foi utilizado o resultado obtido ao medir as respostas experimentais em 3430 [rpm]. De fato a escolha foi acertada, pois realizando o ajuste manual do balanceamento obteve-se: 0,4 [g] de massa de correção em 112 [°] de fase em relação à referência. Esse resultado demonstra que tanto o procedimento de balanceamento quanto o modelo de rotor e SVE se mostraram coerentes. O *runout* medido em 250 [rpm] foi descontado vetorialmente dos valores de respostas medidas.

Figura 5.24 - Resposta experimental, sistema balanceado x sistema com desbalanceamento residual.



A Figura 5.24 apresenta as respostas em frequência experimentais medidas com o sistema rotor-SVE sujeito ao desbalanceamento residual e com a massa de balanceamento resultante do processo de otimização. É possível notar que a redução da resposta é sensível, e que as amplitudes se reduzem a praticamente o valor inicial de *runout*. Com este resultado foi assumido que o sistema estava balanceado.

5.2.4 Resultados finais

Com a bancada devidamente balanceada e com os principais componentes do rotor

identificados, é possível realizar a comparação final entre curvas de resposta em frequência experimentais e as curvas de resposta em frequência numéricas com objetivo de validação. A Tabela 5.10 apresenta os detalhes da configuração da bancada testada, Figura 5.17, e que segue o modelo apresentado na Figura 5.5.

Tabela 5.10 - Detalhes da bancada experimental.

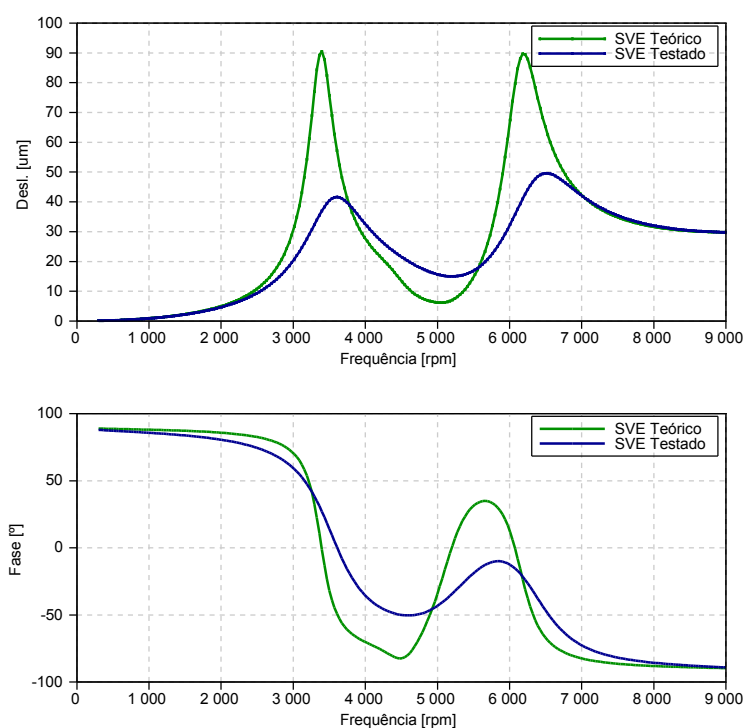
Eixo							
Diâmetro [mm]	Comprimento [mm]	Módulo de Young [GPa]	Densidade [kg/m³]	Coef. Poisson			
10	400	200	7850	0.3			
Disco							
Posição [mm]	Diâmetro [mm]	Espessura [mm]	Densidade [kg/m³]				
60	75	25	7386				
Carregamentos							
Posição [mm]	Magnitude [gmm]	Fase [°]					
60	24	0					
Mancais de rolamento (axissimétricos)							
k_{xx} [N/m]	k_{xz} [N/m]	k_{zx} [N/m]	k_{zz} [N/m]	c_{xx} [N/m]	c_{xz} [N/m]	c_{zx} [N/m]	c_{zz} [N/m]
2300000	0	0	2300000	100	0	0	100
$c_{\theta\theta}$ [Nms]	$c_{\theta\psi}$ [Nms]	$c_{\psi\theta}$ [Nms]	$c_{\psi\psi}$ [Nms]				
0,05	0	0	0,05				
SVEs							
Posição SVE 1 [mm]				Posição SVE 2 [mm]			
0				365			
Posição de medição da resposta [mm]							
Coordenada x				Coordenada z			
304				304			

A otimização das mantas de material viscoelástico e massa do SVE utilizado nos experimentos foi realizada em um ambiente sem a consideração de alguns fatores que foram identificados posteriormente, como a rigidez e amortecimento dos mancais de rolamento (Tabela 5.8), propriedades mecânicas do eixo (Tabela 5.7) e temperatura dos ensaios, visto que, a otimização foi realizada cerca de 3 a 4 meses antes da realização dos experimentos.

A curva da Figura 5.25 denominada “SVE Teórico”, corresponde à resposta numérica ao desbalanceamento do sistema rotor-SVE otimizado, sem a consideração dos parâmetros da bancada, identificados experimentalmente, e com temperatura do MVE dos SVEs, hipoteticamente, definida como 300 [°K]. Por outro lado a curva na cor azul “SVE Testado”,

corresponde à resposta numérica ao desbalanceamento do sistema rotor-SVE otimizado com a consideração dos dados de ajuste citados anteriormente, em conjunto com a temperatura de 290 [°K] do MVE dos SVEs, que foi medida durante a realização dos ensaios. Essas considerações resultam em um sistema com maior amortecimento e levemente dessintonizado (Figura 5.25).

Figura 5.25 - Resposta em frequência, sistema rotor-SVE sem ajustes e com ajustes.

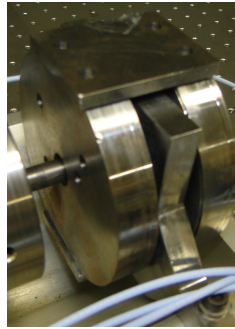


A Figura 5.26 apresenta o SVE de translação pura montado na bancada de testes. A Tabela 5.11 apresenta os parâmetros geométricos das mantas de material viscoelástico otimizadas, do mesmo modo, a massa do SVE. O material viscoelástico utilizado é o Neoprene representado no nomograma da Figura 5.6.

Tabela 5.11 - Parâmetros do SVE otimizado.

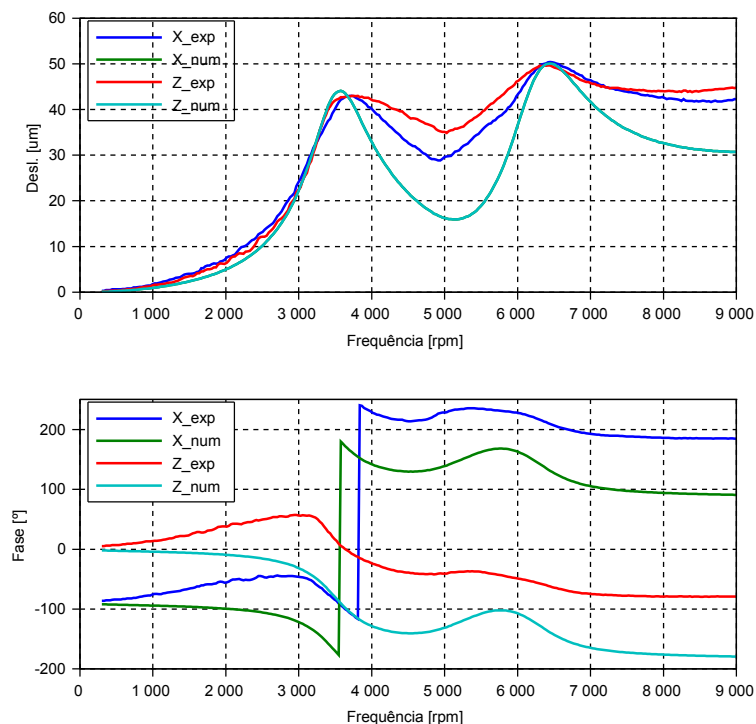
	Nº de mantas	Diâmetro [mm]	Espessura [mm]	Massa [kg]
1º GDL	12	7,27	2,96	1,87
2º GDL	8	7,12	2,96	

Figura 5.26 - Protótipo de SVE translativo com uma massa adicional.



Faz-se necessário considerar que o espécime de MVE utilizado no SVE estava já caracterizado através do modelo de derivadas fracionárias e disponibilizado em formato de manta com espessura constante de 2,96 [mm]. Sendo realizada de forma manual a confecção dos “botões” de MVE, os mesmos foram cortados manualmente nas medidas definidas na Tabela 5.11, obviamente de maneira aproximada, podendo gerar erros em relação ao modelo numérico.

Figura 5.27 - Comparação entre modelo numérico e experimental em termos de resposta em frequência.



Finalmente, a Figura 5.27 apresenta a resposta em frequência ao desbalanceamento medida já com o *runout* descontado, em comparação com a resposta predita, ambas para o sistema rotor-SVE. O desbalanceamento utilizado corresponde a 0.8 [g] de massa, e fase 0 [°] em relação à referência.

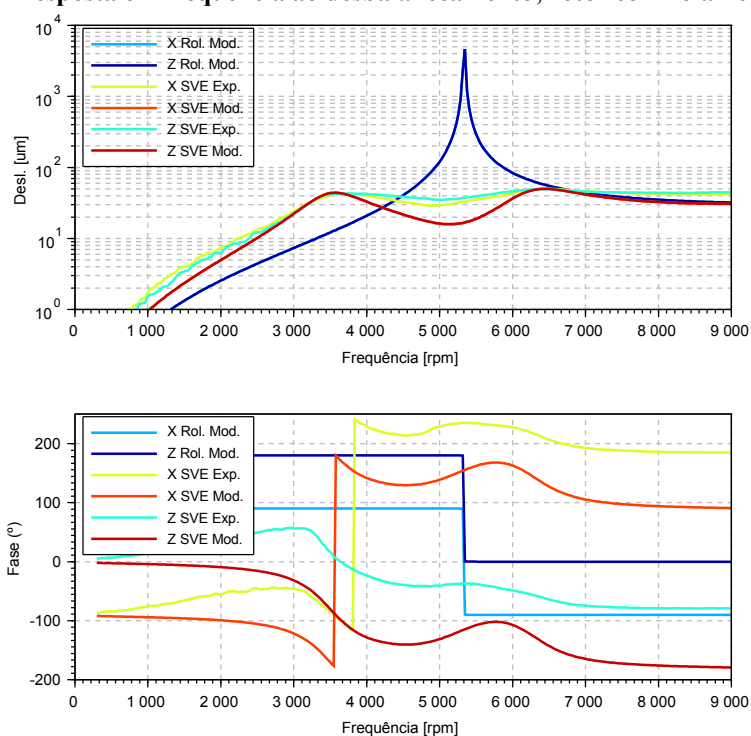
Com o objetivo de comparação a Tabela 5.12 apresenta os valores de frequência da posição dos picos e amplitudes, em conjunto com as diferenças relativas, entre o modelo numérico e experimental.

Tabela 5.12 - Comparação dos valores de resposta em frequência, numérico versus experimental.

		Experimental	Numérico	Diferença %
1º Pico	Freq. [rpm]	3720	3577	3,8
	Amp. [µm]	43	44	2,32
2º Pico	Freq. [rpm]	6460	6443	0,26
	Amp. [µm]	50,4	50	0,8

Pode-se observar através da Figura 5.27 e da Tabela 5.12 que existe coerência entre os modelos numérico e experimental, com pequenas diferenças em termos de largura de banda. Porém a coerência nos valores de amplitude e de posição dos picos atesta a precisão do modelo numérico.

Figura 5.28 - Resposta em frequência ao desbalanceamento; rotor com rolamentos x SVEs.



Faz-se necessário comparar o ganho em controle de vibrações obtido em relação ao sistema rotativo sem SVE. Desse modo a Figura 5.28 inclui aos gráficos da Figura 5.27 à resposta no domínio da frequência do modelo numérico apoiado em suportes rígidos, o qual foi ajustado ao modelo experimental.

Mesmo com um modelo ajustado para o suporte rígido com muita dificuldade devido à

presença dos batentes, verifica-se o elevado controle de vibrações obtido com a utilização dos SVEs, a redução na amplitude de resposta é de aproximadamente 40 [dB] ou 9900 [μ m]. Valor este que deve ser tomado com cuidado considerando a dificuldade na identificação do real valor de amplitude de pico da resposta em frequência ajustada. Logicamente o rotor apoiado de forma rígida não atingiria as amplitudes de vibrações expostas pela Figura 5.28, sem antes deformar plasticamente e apresentar comportamento dinâmico não linear.

6 CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foi apresentada uma metodologia para o projeto ótimo das mantas de MVE e massas/inércias de SVEs aplicados em máquinas rotativas com o objetivo de controle de vibrações. Essa metodologia é baseada no modelo de elementos finitos (formulação de viga de Timoshenko), assim como no modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros e em dois modelos de SVE, um com adição de graus de liberdade e outro através de PEG. Através de experimentos em bancada de rotores com um modelo de SVE de translação pura e uma massa adicional, a presente metodologia foi validada.

A metodologia agrega componentes modernos como o método dos elementos finitos para modelagem de eixos de rotores, modelo de derivadas fracionárias para modelagem de MVEs e modelo de PEG para modelagem de estruturas de múltiplos GDL destinadas a controle passivo de vibrações. Esses componentes permitem modelar sistemas rotor-SVEs bem como otimizar a rigidez viscoelástica dos SVEs e de suas massas/inércias. É observado também que independente do número, tipo ou combinação de GDL presentes no SVE, a metodologia proposta é geral e robusta.

Quanto aos modelos de SVE apresentados neste trabalho, observa-se que os mesmos se complementam ao realizar as operações de otimização do SVE através do modelo de PEG, e a posterior obtenção dos parâmetros modais do sistema composto (frequências naturais e modos de vibrar) e curvas de transmissibilidade, através do modelo com adição de GDL. Isso é possível devido à equivalência dinâmica entre os modelos conforme apresentado. Porém é importante ressaltar a eficiência computacional do modelo de PEG, que em comparação com o modelo de adição de GDL, no que se refere ao cálculo da resposta em frequência do sistema composto, apresentou conforme RIBEIRO et al. (2015), uma diferença de tempo de cálculo de quatro segundos (PEG) a 20 minutos (adição de GDL), respectivamente. As várias otimizações realizadas ao longo deste trabalho não seriam possíveis sem a utilização do modelo de PEG na metodologia proposta.

Essas várias otimizações demonstram que para os cinco tipos de suportes testados numericamente, o suporte que apresentou melhor desempenho do ponto de vista de controle de vibrações foi o suporte combinado. Por meio deste suporte, foi também possível verificar que a consideração do GDL de rotação, juntamente com o de translação no SVE, permitiu

uma transmissibilidade translativa melhorada. O que atesta o fato de que o controle rotativo gera uma melhoria sensível em termos de translação, tanto para resposta em frequência, quanto para a transmissibilidade do sistema. Quanto aos tipos de SVE testados numericamente, pode-se observar que embora exista um tipo mais eficaz, todos eles permitem o controle de vibrações em banda larga de frequência e níveis de amplitude teórica seguros para operação acima das rotações críticas.

O protótipo de SVE de translação pura, com rigidez viscoelástica e massa otimizados foi testado em bancada de rotores. Para comparação e avaliação do controle de vibrações, a bancada de rotores apoiada em mancais de rolamentos inseridos em suportes rígidos foi testada em condições similares. Foi possível identificar uma sensível redução nos níveis de vibrações com a utilização do protótipo de SVE em comparação ao sistema com apoio rígido. A falta de amortecimento do sistema rotativo sem SVEs ocasionou o choque entre eixo e batentes utilizados, enquanto que para o sistema com SVE foi possível operar em sintonia com as rotações críticas de maneira bastante segura. O modelo experimental de SVE também apresentou excelente coerência com o modelo numérico, e as diferenças relativas calculadas para as frequências críticas e amplitudes de pico são inferiores a 5%.

Outros protótipos de SVEs não foram testados experimentalmente nem tampouco projetados, devido a algumas dificuldades técnicas. Porém, assume-se por hipótese que possam gerar controle de vibrações de maneira semelhante.

Conclui-se finalmente que a metodologia apresentada é geral, robusta e viável para realização de otimização de rigidez viscoelástica e massas/inércias de SVEs, tornando os mesmos eficazes e confiáveis para aplicação em controle passivo de vibrações de máquinas rotativas.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A metodologia proposta neste trabalho agrega diversas áreas científicas, fato que corrobora a necessidade de aprofundamento em algumas delas com o objetivo de aprimoramento de tal metodologia. Assim, sugere-se:

- Desenvolver uma metodologia para identificação da estabilidade do sistema composto,
- Efetuar mais simulações numéricas para levantamento de padrões nos resultados das otimizações e para configuração dos parâmetros dos AG,

- Efetuar mais simulações numéricas para determinar com mais clareza a diferença entre a inserção de uma ou duas massas/inércias nos SVEs,
- Desenvolver um experimento que permita medir a transmissibilidade do sistema composto,
- Realizar experimentos com diferentes tipos de MVEs,
- Realizar experimentos com os outros tipos de SVEs, como o de rotação pura e o combinado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARORA, J. S. **Optimization of structural and mechanical systems**. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
- BAGLEY, R.L. **Applications of generalized derivatives to viscoelasticity**. Tese de PhD, Air Force Institute of Technology, USA, 1979.
- BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. **A generalized derivative model for an elastomer damper**. Shock Vib. Bull, v. 49, p. 135–143, 1979.
- BAGLEY R. L.; TORVIK P. J. **A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity**. Journal of Rheology, v. 27 p. 201-210, 1983.
- BAVASTRI, C. A.; POLLI, M. L.; VOLTOLINI, D. R.; PRESEZNIAK, F. A. **A methodology to mitigate chatter through optimal viscoelastic absorber**. Journal of Engineering Manufacturing, v. 229, p. 1348-1356, 2015.
- BAVASTRI C.A.; FERREIRA E.M.S.; ESPÍNDOLA J.J.; LOPES E.M.O., **Modeling of dynamic rotors with flexible bearings due to the use of viscoelastic materials**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 30, p. 22-29, 2008.
- BHATTACHARJYA, R.; SATISH, M. **Optimal design of a stable trapezoidal channel section using hybrid optimization techniques**. Journal of Irrigation and Drainage, v. 133, p. 323-329, 2007.
- BILLMEYER JR., F. W. **Textbook of polimer science**. New York: John Wiley & Sons 3ª edição, 1984.
- CARVALHO, A. P.; BAVASTRI, C. A.; PEREIRA, J. T.; LUERSEN, M. A.; SANTOS, H. L. V. **Análise de dinâmica de rotores utilizando elementos finitos de viga de timoshenko de classe C⁰**. 8º Congresso Ibero-americano de Ingenieria Mecanica (CIBIM 8), trabalho 1503, 2007.
- CECCON, E. R. **Controle de vibração torcional usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos**. Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil, 2008.
- CHEN, Lien-Wen; KU, Der-Ming **Analysis of whirl speeds of rotor-bearing systems with internal damping by C⁰ finite elements**. Finite Elements in Analysis and Design, v 9, p. 169-176, 1991.
- COOPER, S. **Preliminary investigation of oil films for the control of vibration**. Lubrication and Wear Convention, Inst Mech Engrs, Paper 28, 1963.
- CRUZ, G. A. M. **Projeto ótimo de neutralizadores viscoelásticos baseado no modelo de**

derivadas fracionárias. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2004.

DAI, X.; SHEN Z.; WAI, H. **On the vibration of rotor-bearing system with squeeze film damper in an energy storage fly wheel.** International Journal of Mechanical Sciences, v. 43, p. 2525–2540, 2001.

DARLOW M.; ZORZI E. **Mechanical design handbook for elastomers.** NASA Contractor Report 3423, Informativo técnico-científico, 1981.

DOUBRAWA FILHO, F. J.; LUERSEN M. A.; BAVASTRI C. A. **Optimal design of viscoelastic vibration absorbers for rotating systems.** Journal of Vibration and Control, v. 17, p. 699-710, 2010.

DOUBRAWA FILHO, F. J. **Controle de vibração flexional em sistemas girantes utilizando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos.** Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR, Brasil, 2008.

DUTT, J. K.; NAKRA, B. C. **Stability of rotor systems with viscoelastic supports.** Journal of Sound and Vibration, v. 153, p. 89-96, 1992.

DUTT, J. K.; TOI, T. **Rotor vibration reduction with polymeric sectors.** Journal of Sound and Vibration, v. 262, p. 769–793, 2003.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA, H. P. **Modal reduction of vibration by dynamic neutralizers: a generalized approach.** Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, v. 2 p. 1367-1373, 1992.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C.A. **An efficient concept of transmissibility for a general equipment isolation system.** DETC'97/VIB-4120, ASME – Design Engineering Technical Conferences, 1997.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C.A.; LOPES, E. M. O. **On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamics absorbers of ordinary and pendulum types.** Journal of Franklin Institute, v. 347, p. 102-115, 2010.

EWINS, D. J. **Modal testing: Theory, practice, application.** Philadelphia: Research Studies Press LTD 2ª edição, 2000.

FERREIRA, E. M. S. **Modelos de rotores dinâmicos com mancais flexíveis utilizando material viscoelástico.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) Universidade Federal do Paraná, Brasil, 2005.

FERRY, J. D. **Viscoelastic properties of polymers.** New York: John Wiley & Sons 3ª edição, 1980.

GASCH, R. **Vibration of large turbo-rotors in fluid-film bearings on an elastic foundation.** Journal of Sound and Vibration, v. 47, p. 53-73, 1976.

GEMANT, A. **Frictional Phenomena**. New York: Chemical Publ. Co, 1950.

GENTA G.; AMATTI N. **Hysteretic damping in rotordynamics: An equivalent formulation**. Journal of Sound and Vibration, v. 329, p. 4772-4784, 2010.

GUICKING, D. **Active control of sound and vibration history – fundamentals – state of the art**. Gottingen: Universidade de Gottingen, 2007.

HADDAD, Y. M. **Viscoelasticity of engineering materials** Londres: Chapman & Hall, 1995.

HUDENSKI, R. A.; PARANÁ, R. F.; BAVASTRI, C. A. **A hybrid electromechanical-viscoelastic dynamic vibration neutralizer: a new model and analysis**. 19th International Congress of Mechanical Engineering, Trabalho 0758, 2007.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method**. Mineola: Dover Publications, 2000.

KANG C. H.; HSU W. C.; LEE E. K.; SHIAU T. N. **Dynamic analysis of gear-rotor system with viscoelastic supports under residual shaft bow effect**. Mechanism and Machine Theory, v. 46 p. 264-275, 2011.

KELNER, V.; CAPITANESCU, F.; LÉONARD, O.; WEHENKEL, L. **A hybrid optimization technique coupling an evolutionary and a local search algorithm**. Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 215, p. 448-456, 2008.

KIRK, R.; G. GUNTER, E. J. **The effect of support flexibility and damping on the synchronous response of a single-mass flexible rotor**. ASME Journal of Engineering for Industry, v. 94, p. 221, 1972.

KOKOT, A. **Modelo de elementos finitos aplicado a motores eléctricos para caracterização dinâmica de rotores**. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 2009.

KULKARNI, P.; PANNU, S.; NAKRA, B. C.; **Unbalance response and stability of a rotating system with viscoelastically supported bearings**. Mech. Mach. Theory, v. 28, p. 427-436, 1993.

LAKES, R. **Viscoelastic materials**. New York: Cambridge University Press, 2009.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**, New York: John Wiley & Sons Ltd, 1990.

LÉPORE NETO, F. P.; SANTOS, M. B. **A procedure for the parametric identification of viscoelastic dampers accounting for preload**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering, v. 34, p. 213-218, 2012.

LEWIS, P.; MALINOWSKI, S. **Rotor-bearing design technology, Part IV: Ball bearing design data**. Mechanical technology incorporated technical report AFAPL TR 65 45, 1965.

LUND, J. W. **Rotor-bearing dynamics design technology, Part III: Design handbook for fluid film type bearings.** Mechanical technology incorporated technical report AFAPL TR 65 45, 1965.

MAINARDI F. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity.** London: Imperial College Press, 2010.

MAINARDI, F. **An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity.** Fractional Calculus Applications Anals, v. 15, p. 712-717, 2012.

MILIAVACA, A. **Identificação dos coeficientes dinâmicos de mancais em máquinas rotativas através de respostas ao desbalanceamento e técnicas de otimização não linear.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Brasil, 2015.

MONTAGNIER, O.; HOCHARD, C. **Dynamic instability of supercritical driveshafts mounted on dissipative supports-effects of viscous and hysteretic internal damping.** Journal of Sound and Vibration, v. 305, p. 378-400, 2007.

MONTAGNIER, O.; HOCHARD, C. **Dynamics of a supercritical composite shaft mounted on viscoelastic supports.** Journal of Sound and Vibration, v. 333, p. 470-484, 2014.

NASHIF A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration damping.** New York: John Wiley & Sons, 1985.

NELDER, J. A.; MEAD, R. **A simplex method for function minimization.** The Computer Journal, v. 7, p. 308-313, 1965.

NELSON H. D. **A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory.** ASME Journal of Mechanical Design, v. 102, p. 793-803, 1980.

NELSON H. D.; McVAUGH J. M. **The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements.** ASME Journal of Engineering for Industry, v. 98, p. 593-600, 1976.

NUTTING, P. G. **A new general law of deformation.** Journal of Frankline Institute, v. 191, p. 679-685, 1921.

PADOVAN J.; GUO Y. **General response of viscoelastic systems modelled by fractional operators.** Journal of Franklin Institute, v. 325, p. 247-275, 1988.

PANDA, K. C.; DUTT, J. K. **Optimum support characteristics for rotor-shaft system with preloaded rolling element bearings.** Journal of Sound and Vibration, v. 260 p. 731-755, 2003.

PRASHAD, H. **Tribology in electrical environments.** Amsterdam: Elsevier B. V. 1ª edição, 2006.

PRITZ T. **Five parameter fractional derivative model for polymeric damping materials.** Journal of Sound and Vibration, v. 265 p. 935-952, 2003.

PRITZ T. **Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials.** Journal of Sound and Vibration, v. 8 p. 103-115, 1996.

RAHAMI H.; KAVEH A.; ASLANI M.; NAJIAN ASL R. **A hybrid modified genetic-nelder mead simplex algorithm for large scale truss optimization.** International Journal of Optimization in Civil Engineering, v. 1 p. 29-46, 2011.

RIBEIRO, E. A. **Análise dinâmica de motores eléctricos: modelo e controlo.** Tese de Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 2009.

RIBEIRO, E. A.; PEREIRA, J. T.; BAVASTRI, C. A. **Passive vibration control in rotor dynamics: Optimization of composed support using viscoelastic materials.** Journal of Sound and Vibration, v. 351, p. 43-56, 2015.

RIBEIRO, E. A.; KOKOT, A.; SANTOS, H. L. V.; LUERSEN, M. A.; BAVASTRI, C. A. **Modelo de fundação em máquinas rotativas utilizando parâmetros equivalentes generalizados.** V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Trabalho 1817, 2008.

RUHL, R. L.; BOOKER, J. L. **A finite element model for distributed parameter turborotor systems.** ASME Journal of Engineering for Industry, v. 94, p. 126-132, 1972.

SACRAMENTO, V. F. D. **Análise de vibração em vigas de Timoshenko rotativas.** Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Brasil, 2003.

SALDARRIAGA, M. R. V. **Atenuação de vibrações em máquinas rotativas flexíveis usando materiais viscoelásticos nos suportes.** Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil, 2007.

SANTOS, H. L. V.; LUERSEN, M. A.; BAVASTRI, C. A. **Experimental Evaluation of Numerical Models to Represent the Stiffness of Laminated Rotor Cores in Electrical Machines.** Journal of Engineering Science & Technology, v. 8, p. 460-474, 2013.

SCOTT-BLAIR, G.W. **Analytical and integrative aspects of the stress strain-time problem.** Journal of Scientific Instruments, v. 21, p. 80-84, 1944.

SCOTT-BLAIR, G.W. **The role of psychophysics in rheology.** Journal of Colloid Science, v. 2, p. 21-32, 1947.

SCOTT-BLAIR, G.W. **Survey of General and Applied Rheology.** London: Pitman, 1949.

SHABANEH, N. H.; ZU, J. W. **Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings.** Mechanism and Machine Theory, v. 35, p. 1313-1330, 2000.

SILVÉRIO, R. B. **Aplicação de material viscoelástico em mancais de rotores de máquinas rotativas.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Brasil, 2015.

SUN L.; CHEN L. **Free vibrations of a tault cable with a general viscoelastic damper modeled by fractional derivatives.** Journal of Sound and Vibration, v. 335, p. 19-33, 2015.

TILLEMA, H. G. **Noise reduction of rotating machinery by viscoelastic bearings supports.** Tese de PhD, Universidade Twente, Holanda, 2003.

TIMOSHENKO S.; GOODIER J. N. **Teoria da elasticidade.** Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

VARNEY, P.; GREEN, I. **Rotordynamic analysis using complex transfer matrix: An application to elastomer supports using viscoelastic correspondence principle.** Journal of Sound and Vibration, v. 333, p. 6258-6272, 2014.

XU, B.; QU, L.; SUN, R. **The optimization technique-based balancing of flexible rotors without test runs.** Journal of Sound and Vibration, v. 238, p. 877-892, 2000.

ZEIDAN F.; SAN ANDRES L. A.; VANCE J. M. **Design and application of squeeze film dampers in rotating machinery.** Proceedings of the Twenty-Fifth Turbomachinery Symposium, Texas A&M University, p. 169-188, 1996.

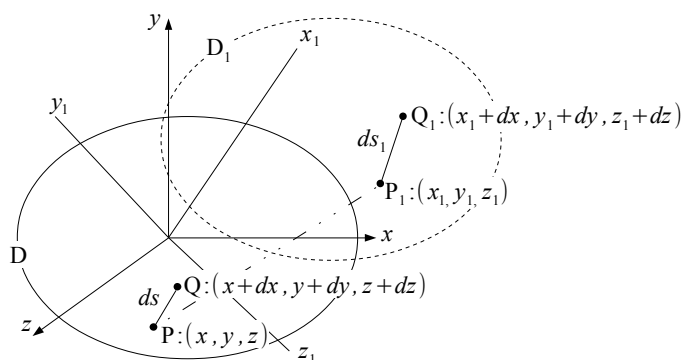
APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS MATRIZES ELEMENTARES DE E. F.

Este apêndice dedica-se a apresentar detalhadamente a obtenção das matrizes elementares de rigidez, massa e giroscópica do modelo numérico de elementos finitos apresentado neste trabalho.

I. MATRIZES DE RIGIDEZ

A Figura A. 1 apresenta esquematicamente um segmento em um corpo em seus estágios indeformado (linha cheia) e deformado (linha tracejada).

Figura A. 1 - Segmento linear PQ no corpo não deformado e deformado.



De acordo com o esquema da Figura A. 1, a deformação normal ε_E do segmento linear pode ser calculada como

$$\varepsilon_E = \frac{ds_1 - ds}{ds}, \quad \text{Eq. A. 1}$$

na qual

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{Eq. A. 2}$$

e

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2. \quad \text{Eq. A. 3}$$

Aplicando o conceito de diferencial total,

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dx_1}{dx} dx + \frac{dx_1}{dy} dy + \frac{dx_1}{dz} dz \\ dy_1 &= \frac{dy_1}{dx} dx + \frac{dy_1}{dy} dy + \frac{dy_1}{dz} dz, \\ dz_1 &= \frac{dz_1}{dx} dx + \frac{dz_1}{dy} dy + \frac{dz_1}{dz} dz \end{aligned} \quad \text{Eq. A. 4}$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= x + u \\ y_1 &= y + v, \\ z_1 &= z + w \end{aligned} \quad \text{Eq. A. 5}$$

pode-se obter:

$$\begin{aligned} M_f &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds_1}{ds} \right)^2 - 1 \right] = \varepsilon_E + \frac{1}{2} \varepsilon_E^2 = \\ &= l^2 \varepsilon_{xx} + lm \varepsilon_{xy} + ln \varepsilon_{xz} + ml \varepsilon_{yx} + m^2 \varepsilon_{yy} + mn \varepsilon_{yz} + nl \varepsilon_{zx} + nm \varepsilon_{zy} + n^2 \varepsilon_{zz}, \\ &= l^2 \varepsilon_{xx} + m^2 \varepsilon_{yy} + n^2 \varepsilon_{zz} + 2lm \varepsilon_{xy} + 2ln \varepsilon_{xz} + 2mn \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad \text{Eq. A. 6}$$

na qual M é denominado fator de amplificação em que

$$\begin{aligned} l &= \frac{dx}{ds} \\ m &= \frac{dy}{ds}, \\ n &= \frac{dz}{ds} \end{aligned} \quad \text{Eq. A. 7}$$

e ainda

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \text{Eq. A. 8}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \text{Eq. A. 9}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \quad \text{Eq. A. 10}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad \text{Eq. A. 11}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad \text{Eq. A. 12}$$

e

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \quad \text{Eq. A. 13}$$

Os termos ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} são as deformações longitudinais de uma linha ds paralela à x , y , z , respectivamente. Por sua vez os termos ε_{xy} , ε_{xz} e ε_{yz} são deformações cisalhantes ou variações angulares em um elemento linear inicialmente paralelo aos planos x, y , x, z e y, z , respectivamente. Esses conceitos de deformação podem ser aplicados na determinação das deformações de um eixo de máquina rotativa. Devido ao estado de tensões adotado num problema típico de vibrações laterais de uma viga, como neste trabalho, as expressões de ε_{xx} , ε_{zz} e ε_{xz} são desconsideradas.

Substituindo as equações dos deslocamentos laterais e axiais, Eq. 2.25, Eq. 2.26 e Eq. 2.27 na Eq. A. 9, obtém-se:

$$\varepsilon_{yy} = x \frac{\partial \text{sen}(\psi(y))}{\partial y} - z \frac{\partial \text{sen}(\theta(y))}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial \text{sen}(\psi(y))}{\partial y} - z \frac{\partial \text{sen}(\theta(y))}{\partial y} \right)^2. \quad \text{Eq. A. 14}$$

A partir das equações Eq. 2.28 e Eq. 2.29 as deformações cisalhantes são obtidas.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = -\theta(y) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \quad \text{Eq. A. 15}$$

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \psi(y) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \quad \text{Eq. A. 16}$$

Para um material com comportamento linear na relação tensão deformação, a expressão da energia de deformação U corresponde a

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad \text{Eq. A. 17}$$

na qual, já adotando a simplificação devido ao estado de tensões,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{yx} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. A. 18}$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yx} \end{pmatrix}. \quad \text{Eq. A. 19}$$

Substituindo as equações Eq. A. 18 e Eq. A. 19 em Eq. A. 17 a energia de deformação reduz-se a

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \tau_{yx} \gamma_{yx} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad \text{Eq. A. 20}$$

Através da lei de Hooke reescreve-se a energia potencial de deformação como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \int_{S_e} (\varepsilon_{yy}^2 E + G \gamma_{yx}^2 + G \gamma_{yz}^2) dS_e dy \quad \text{Eq. A. 21}$$

Tomando da Eq. A. 21, primeiramente, o termo referente à energia de deformação normal, o

qual dará origem à matriz de rigidez à flexão, pode-se aproximar os termos de deslocamentos angulares e de translação através das equações Eq. 2.4 a Eq. 2.7. Para a obtenção da matriz de rigidez procede-se a aplicação das equações de Lagrange (Eq. 2.1) e a linearização devido à hipótese de pequenos deslocamentos e rotações. Esse procedimento matemático resulta em:

$$\int_{-L/2}^{L/2} E I_x \left(\frac{\partial(\mathbf{N})}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial(\mathbf{N})}{\partial y} \right) dy \boldsymbol{\theta} + \int_{-L/2}^{L/2} E I_z \left(\frac{\partial(\mathbf{N})}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial(\mathbf{N})}{\partial y} \right) dy \boldsymbol{\psi} \quad \text{Eq. A. 22}$$

Deve-se considerar que I_x e I_z são originados das integrais $\int_S z^2 dS$ e $\int_S x^2 dS$ e que neste trabalho, por hipótese de simetria de eixo são considerados iguais. Ainda, é assumido que os mesmos não variam ao longo do elemento finito, da mesma forma que o módulo de elasticidade E . Nota-se que a Eq. A. 22 é uma parcela do sistema de equações elementar que representa as forças inerciais. Considerando que

$$\frac{\partial}{\partial y} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \left[\left(-\frac{1}{L} + \frac{4y}{L^2} \right) \quad \left(\frac{8y}{L^2} \right) \quad \left(\frac{1}{L} + \frac{4y}{L^2} \right) \right] = \mathbf{B} \quad \text{Eq. A. 23}$$

A expressão da matriz elementar de rigidez à flexão é dada por:

$$\mathbf{K}_{el}^f = E I_x \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dy + E I_z \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dy \quad \text{Eq. A. 24}$$

Considerando a ordenação dos GDL de acordo com a Eq. 2.12, obtém-se a matriz de rigidez à flexão, \mathbf{K}_{el}^f , conforme a Eq. 2.31.

Por sua vez tomando da Eq. A. 21, os termos referentes a energia de deformação cisalhante, os quais darão origem à matriz de rigidez ao cisalhamento transversal, pode-se aproximar os termos de deslocamentos angulares e de translação através das equações Eq. 2.4 a Eq. 2.7. Para a obtenção da matriz de rigidez procede-se a aplicação das equações de Lagrange (Eq. 2.1) e a linearização devido à hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, assim tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{el}^c = & \mu GS \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy \boldsymbol{\psi}^T + \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N}^T \mathbf{B} dy \boldsymbol{\psi}^T + \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N}^T \mathbf{B} dy \mathbf{u}^T + \\
& + \mu GS \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dy \mathbf{u}^T + \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{N} dy \boldsymbol{\psi}^T + \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{N} dy \mathbf{u}^T + \\
& + \mu GS \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy \boldsymbol{\theta}^T - \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N}^T \mathbf{B} dy \boldsymbol{\theta}^T - \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N}^T \mathbf{B} dy \mathbf{w}^T + \\
& + \mu GS \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dy \mathbf{w}^T - \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{N} dy \boldsymbol{\theta}^T - \mu GS \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}^T \mathbf{N} dy \mathbf{w}^T
\end{aligned} \tag{Eq. A. 25}$$

Nota-se que a consideração da área da seção transversal constante ao longo do elemento finito, do mesmo modo que o módulo de elasticidade ao cisalhamento, permite retirar esses termos do integrando. Como citado no corpo do texto desta tese μ corresponde a um termo de aproximação da distribuição do cisalhamento transversal parabólica, para uma distribuição linear ao longo da seção transversal. Porém, para obtenção da matriz de rigidez devido ao cisalhamento deve-se proceder a integração gaussiana da Eq. A. 25 uma vez que a integração completa da mesma incorrerá no problema do bloqueio da solução ou *locking* (HUGHES (2000)). Para isso procede-se a modificação dos limites de integração de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$ em y para -1 a 1 para ξ , e o elemento diferencial dy fica:

$$dy = \frac{L}{2} d\xi \tag{Eq. A. 26}$$

Desse modo a integração passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{-L/2}^{L/2} f(y) dy &= \int_{-1}^1 f(\xi) \frac{L}{2} d\xi = p_1 f(\xi = 1/\sqrt{3}) \frac{L}{2} + p_2 f(\xi = -1/\sqrt{3}) \frac{L}{2} = \\
&= f(\xi = 1/\sqrt{3}) \frac{L}{2} + f(\xi = -1/\sqrt{3}) \frac{L}{2}
\end{aligned} \tag{Eq. A. 27}$$

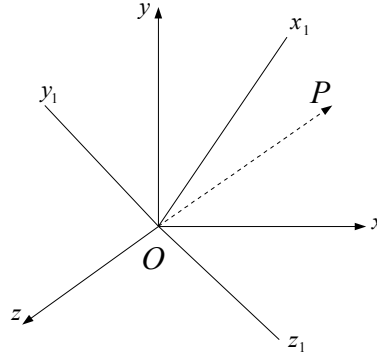
A aplicação da Eq. A. 27 na Eq. A. 25 permite obter, considerando a ordenação nodal proposta em Eq. 2.12, a matriz \mathbf{K}_{el}^c conforme a Eq. 2.32.

II. MATRIZES DE MASSA E GIROSCÓPICA

Para a determinação da energia cinética de um corpo sujeito a GDL de rotação e

translação se faz necessário o levantamento das matrizes de transformação de coordenadas do sistema móvel para o sistema inercial.

Figura A. 2 - Sistema de referência inercial (x,y,z) e móvel, ponto P(--).



Adotando \mathbf{i}_0 , \mathbf{j}_0 e \mathbf{k}_0 como vetores unitários do sistema inercial, e \mathbf{i}_1 , \mathbf{j}_1 e \mathbf{k}_1 como vetores unitários do sistema móvel, pode-se representar um ponto qualquer através de dois sistemas distintos, $P_0 = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})$ e $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$. Assim pode-se escrever:

$$\mathbf{P}_0 = p_{0x} \mathbf{i}_0 + p_{0y} \mathbf{j}_0 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \quad \text{Eq. A. 28}$$

e

$$\mathbf{P}_1 = p_{1x} \mathbf{i}_1 + p_{1y} \mathbf{j}_1 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \quad \text{Eq. A. 29}$$

Como \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 representam o mesmo ponto tem-se as seguintes relações:

$$p_{0x} = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{i}_0, \quad \text{Eq. A. 30}$$

$$p_{0y} = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \quad \text{Eq. A. 31}$$

e

$$p_{0z} = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{k}_0 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{k}_0. \quad \text{Eq. A. 32}$$

Substituindo a Eq. A. 29 nas equações Eq. A. 30, Eq. A. 31 e Eq. A. 32 obtém-se:

$$p_{0x} = p_{1x} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0, \quad \text{Eq. A. 33}$$

$$p_{0y} = p_{1x} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \quad \text{Eq. A. 34}$$

e

$$p_{0z} = p_{1x} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0, \quad \text{Eq. A. 35}$$

Considerando que

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{P}_1 \quad \text{Eq. A. 36}$$

então a matriz de rotação é definida como:

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 37}$$

Através da Eq. A. 36 é possível transformar o vetor \mathbf{P}_1 do sistema móvel para o sistema inercial. Observa-se que os vetores colunas são cossenos diretores dos eixos do sistema móvel em relação aos eixos do sistema inercial.

A matriz de rotação apresentada na equação Eq. A. 37 possui a propriedade de ortogonalidade, ou seja, sua inversa é igual à sua transposta e seu determinante é numericamente igual a 1.

Desse modo, as matrizes de rotação do sistema móvel em relação ao sistema inercial, a saber, os eixos coordenados xyz em função dos GDL de rotação $\theta \phi \psi$, podem ser escritas como:

$$\mathbf{R}_{0z,\psi}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. A. 38}$$

$$\mathbf{R}_{0y,\phi}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 39}$$

e

$$\mathbf{R}_{0x,\theta}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 40}$$

A partir da Figura 2.2 seguindo a ordem de rotações da seção transversal do eixo, primeiramente em relação ao eixo z , após em relação ao eixo x_1 e por fim em relação a y_2 , pode-se escrever o vetor de velocidades angulares como:

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\psi}{dt} \end{bmatrix} (\mathbf{R}_{0z,\psi}^1 \times \mathbf{R}_{0x,\theta}^1 \times \mathbf{R}_{0y,\phi}^1) + \begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathbf{R}_{0x,\theta}^1 \times \mathbf{R}_{0y,\phi}^1) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} (\mathbf{R}_{0y,\phi}^1) \quad \text{Eq. A. 41}$$

Efetuada os produtos matriciais, a Eq. A. 41 resulta em

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) \text{sen}(\phi) + \frac{d\theta}{dt} \cos(\phi) \\ \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \text{sen}(\theta) \\ \frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) \cos(\phi) + \frac{d\theta}{dt} \text{sen}(\phi) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 42}$$

Substituindo a Eq. A. 42 na equação da energia cinética, Eq. 2.16, a mesma pode ser simplificada, considerando axissimetria do disco, e expressa como segue:

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_{dy} (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \text{sen}^2(\theta) + 2 \dot{\phi} \dot{\psi} \text{sen}(\theta)) \quad \text{Eq. A. 43}$$

Os termos que multiplicam as parcelas quadráticas de velocidade geram a matriz de massa e os termos que multiplicam $\dot{\psi}$ e $\text{sen}(\theta)$ darão origem à matriz giroscópica.

Aplicando as equações de Lagrange (Eq. 2.1) à Eq. A. 43, linearizando os termos (considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações) e fazendo $\dot{\phi} = \Omega$, obtém-se a expressão:

$$M_d \ddot{\mathbf{u}} + M_d \ddot{\mathbf{w}} + I_{dx} \ddot{\theta} - \Omega I_{dy} \dot{\psi} + I_{dx} \ddot{\psi} + \Omega I_{dy} \dot{\theta} \quad \text{Eq. A. 44}$$

a partir da qual obtém-se as matrizes apresentadas nas equações Eq. 2.17 e Eq. 2.18.

Para a obtenção da energia cinética do eixo procede-se à diferenciação da Eq. A. 43 como segue:

$$dT_d = \frac{1}{2} dM_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} dI_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2(\theta)) + \frac{1}{2} dI_{dy} (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta) + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin(\theta)) \quad \text{Eq. A. 45}$$

considerando que

$$dI_{dx} = \rho I dy \quad \text{Eq. A. 46}$$

e que

$$dI_{dy} = 2 \rho I dy \quad \text{Eq. A. 47}$$

Assim a equação da energia cinética do eixo pode ser escrita como:

$$T_e = \frac{1}{2} \rho S \int_0^{L_e} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^{L_e} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2(\theta)) dy + \rho I \int_0^{L_e} (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2(\theta) + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin(\theta)) dy \quad \text{Eq. A. 48}$$

Para obtenção da matriz de massa e giroscópica elementares as equações de aproximação dos deslocamentos e rotações, Eq. 2.8 a Eq. 2.11, são substituídas na Eq. A. 48 e são aplicadas as equações de Lagrange, resultando nas expressões:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{el} &= \rho S \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \ddot{\mathbf{u}} + \rho S \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \ddot{\mathbf{w}} + \\
&\quad + \rho S \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \rho S \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \ddot{\boldsymbol{\psi}} \\
\mathbf{G}_{el} &= -2 \rho I \Omega \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \dot{\boldsymbol{\psi}} + 2 \rho I \Omega \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{Eq. A. 49}$$

Os quatro primeiros termos integrais resultam na matriz de inércia (Eq. 2.20), de acordo com a ordenação de GDL apresentada na Eq. 2.14. O quinto e sexto termos integrais originam a matriz giroscópica Eq. 2.21.

É importante salientar que neste trabalho o rigor matemático de aplicar as equações de Lagrange antes de linearizar as expressões de energia potencial e cinética foi obedecido, e desse modo teve sua apresentação resumida devido a extensão do trabalho algébrico. Porém a linearização dos funcionais de energia antes da aplicação das equações de Lagrange, apesar de não obedecer o rigor matemático, nada influencia os resultados obtidos.