

CRISTINA SANAE YAMAMURA

**ESCOAMENTO HIPERSÔNICO DE UM GÁS
RAREFEITO AO REDOR DE UMA ESFERA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Felix Sharipov

CURITIBA

2001

CRISTINA SANAE YAMAMURA

ESCOAMENTO HIPERSÔNICO DE UM GÁS RAREFEITO AO REDOR DE UMA ESFERA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Felix Sharipov

CURITIBA
2001

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação Mestrado da estudante **CRISTINA SANAE YAMAMURA** são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é: ***“ESCOAMENTO HIPERSÔNICO DE UM GÁS RAREFEITO AO REDOR DE UMA ESFERA”***

Banca Examinadora



PROF. FELIX SHARIPOV
(Orientador/Presidente)
(Dpto. Física UFPR)



PROF. WILSON MARQUES JUNIOR
(Dpto. Física UFPR)



Prof. LILIANE BASSO BARICHELLO
(UFRGS)

Curitiba, 14 de dezembro de 2001

Dedico esta dissertação aos meus pais.

RESUMO

Nesta dissertação foi investigado o problema do escoamento hipersônico de um gás monatômico e rarefeito ao redor de uma esfera, utilizando o Método da Simulação Direta de Monte Carlo. Os cálculos foram realizados para o número de Mach (Ma) igual a 10 e 20 e para diversos números de Knudsen (Kn) no intervalo de 0,01 a 100, ou seja, abrangendo os regimes hidrodinâmico, de transição e de moléculas livres. Foram calculados os coeficientes de arrasto, de atrito, de pressão e de transferência de calor. Os resultados são apresentados em gráficos e tabelas. Além disso, as distribuições de densidade, de temperatura e do número de Mach local são apresentadas em diagramas.

-Palavras chave:

Aerotermodinâmica, Gases rarefeitos, Escoamento hipersônico, Simulação Direta de Monte Carlo, Coeficiente de arrasto.

ABSTRACT

In this dissertation, the problem of a hypersonic flow of monoatomic rarefied gas past a sphere was investigated, applying the Direct Simulation Monte Carlo method. The calculations were carried out for the Mach number (Ma) equal to 10 and 20 in the range of the Knudsen numbers (Kn) from 0,01 to 100, i. e. for the hydrodynamic, transition and free-molecule regimes. The drag coefficient, the pressure coefficient, the friction coefficient and the heat transfer coefficient were calculated. The results are presented in graphics and tables. Also, the distributions of density, temperature and local Mach number are presented in diagrams.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Felix Sharipov pela orientação, dedicação e paciência.

À Agência Espacial Brasileira pelo apoio financeiro.

Aos professores Mardson Freitas de Amorim e Percy Nohama, pelo apoio e pelos conselhos.

A José Carlos Pereira Coninck e Sandro Ely de Souza Pinto pelas dicas computacionais.

Aos meus amigos e a todos os meus colegas da pós-graduação pelo companheirismo.

Sumário

Agradecimentos	iii
Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	vi
Nomenclatura	viii
1 Introdução	1
1.1 Conceito de Gás Rarefeito	1
1.2 Descrição do Problema	5
1.3 Estrutura da Dissertação	8
2 Revisão Bibliográfica	9
2.1 Regime de Moléculas Livres	9
2.2 Regime Hidrodinâmico	12
2.2.1 Escoamento Subsônico	13
2.2.2 Escoamento Supersônico	14
2.2.3 Escoamento Hipersônico	15
2.3 Regime de Transição	15
2.3.1 Escoamento Subsônico	15
2.3.2 Escoamento Supersônico	16
2.3.3 Escoamento Hipersônico	16
3 Método de Solução	18
3.1 Conceitos Básicos da Dinâmica dos Gases Rarefeitos	18
3.1.1 Equação de Boltzmann	18
3.1.2 Interação Gás-Superfície	20
3.1.3 Dinâmica das Colisões Binárias	22

3.2	Método de Simulação Direta de Monte Carlo	28
3.2.1	Histórico	28
3.2.2	Descrição do Método	29
3.2.3	Simulação das Colisões	31
3.2.4	Cálculo das Propriedades Macroscópicas	32
3.3	Programa Numérico	34
3.3.1	Estrutura do Programa	34
3.3.2	Sistema de Células	39
3.3.3	Outros Parâmetros do Programa	41
4	Resultados e Discussão	43
4.1	Coeficiente de Arrasto	43
4.2	Coeficiente de Pressão	45
4.3	Coeficiente de Atrito	45
4.4	Coeficiente de Transferência de Calor	46
4.5	Distribuição de Densidade	50
4.6	Distribuição de Temperatura	53
4.7	Distribuição de Número de Mach Local	56
4.8	Número de Knudsen Crítico	59
5	Conclusões	61
A	Método da Aceitação-Rejeição	63
B	Dados numéricos	65

Lista de Tabelas

1.1	Números de Knudsen em relação às altitudes que uma esfera de 1 m de diâmetro estaria sujeita	4
B.1	Coeficientes de Arrasto C_D vs Número de Knudsen (Kn)	65
B.2	Coeficientes de Pressão C_P vs Ângulo θ para $Ma = 10$	66
B.3	Coeficientes de Pressão C_P vs Ângulo θ para $Ma = 20$	67
B.4	Coeficientes de Atrito C_F vs Ângulo θ para $Ma = 10$	68
B.5	Coeficientes de Atrito C_F vs Ângulo θ para $Ma = 20$	69
B.6	Coeficientes de Transferência de Calor C_H vs Ângulo θ para $Ma = 10$	70
B.7	Coeficientes de Transferência de Calor C_H vs Ângulo θ para $Ma = 20$	71

Lista de Figuras

1.1	Altitudes alcançadas por veículos espaciais	3
1.2	Esquema das coordenadas e do escoamento	5
1.3	Esquema da esfera e do ângulo θ	7
2.1	Coeficiente de Arrasto C_{D0} vs número de Mach (Ma), no regime de Moléculas Livres	12
3.1	As velocidades das moléculas incidentes \mathbf{v}' e refletidas \mathbf{v}	21
3.2	Geometria da colisão de duas partículas, modelo da esfera rígida	22
3.3	Volume de uma molécula teste se movendo entre moléculas estacionárias	23
3.4	Interação da massa reduzida com um centro de espalhamento fixo	25
3.5	Parâmetros de impacto	27
3.6	Fluxograma do programa desenvolvido	38
3.7	Geometria do campo de escoamento.	40
3.8	Geometria das células.	40
3.9	Ampliação da região de células pequenas	41
4.1	Coeficiente de Arrasto C_D vs número de Knudsen	44
4.2	Coeficiente de Pressão C_P vs ângulo θ para Ma = 10	47
4.3	Coeficiente de Pressão C_P vs ângulo θ para Ma = 20	47
4.4	Coeficiente de Atrito C_F vs ângulo θ para Ma = 10	48
4.5	Coeficiente de Atrito C_F vs ângulo θ para Ma = 20	48
4.6	Coeficiente de Transferência de Calor C_H vs ângulo θ para Ma = 10	49
4.7	Coeficiente de Transferência de Calor C_H vs ângulo θ para Ma = 20	49
4.8	Distribuição de densidade n/n_∞ para Ma = 10: a) Kn = 0,01, b) Kn = 1 e c) Kn = 100	51
4.9	Distribuição de densidade n/n_∞ para Ma = 20: a) Kn = 0,01, b) Kn = 1 e c) Kn = 100	52

4.10	Distribuição de temperatura T/T_∞ para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$	54
4.11	Distribuição de temperatura T/T_∞ para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$	55
4.12	Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$	57
4.13	Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$	58
4.14	Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,04$ e b) $Kn = 0,02$	59
4.15	Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,1$ e b) $Kn = 0,04$	60

Nomenclatura

A_s	Segmento da superfície do objeto
b	Parâmetro de impacto
c	Velocidade do som
c_P	Calor específico a pressão constante
c_V	Calor específico a volume constante
C_D	Coefficiente de arrasto, equação (1.7)
C_{D0}	Coefficiente de arrasto no regime de moléculas livres, equação (2.6)
C_F	Coefficiente de atrito, equação (1.5)
C_{F0}	Coefficiente de atrito no regime de moléculas livres, equação (2.4)
C_H	Coefficiente de transferência de calor, equação (1.6)
C_{H0}	Coefficiente de transferência de calor no regime de moléculas livres, equação (2.5)
C_P	Coefficiente de pressão, equação (1.3)
C_{P0}	Coefficiente de pressão no regime de moléculas livres, equação (2.2)
d	Diâmetro molecular
F	Força de arrasto
F_N	Número de partículas reais representadas por uma partícula modelo
k_B	Constante de Boltzmann, $k_B = 1,380658 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$
Kn	Número de Knudsen, $Kn = \lambda/L$
L	Uma dimensão linear, distância característica
m	Massa molecular
N_A	Número de Avogadro, $N_A = 6,022137 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
Ma	Número de Mach
Ma_{local}	Número de Mach local
N_m	Número de partículas em uma célula
N_s	Número de partículas que colidiram com cada segmento de superfície A_s
n	Densidade numérica

P_∞	Pressão do gás no estado não-perturbado
P_d	Pressão dinâmica, equação (1.4)
\mathbf{q}	Vetor fluxo de calor, equação (3.6)
q_n	Fluxo de calor normal à superfície
Re	Número de Reynolds, $Re = \rho v l / \mu$
R_f	Número aleatório
R_s	Raio da esfera
T_∞	Temperatura do gás no estado não-perturbado
T_w	Temperatura da superfície
\mathbf{u}	Velocidade hidrodinâmica
U_∞	Velocidade do gás no estado não-perturbado
\mathbf{v}	Velocidade molecular
\mathbf{V}	Velocidade peculiar, $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$
V_c	Volume da célula
γ	Razão dos calores específicos
δ	Espaçamento médio molecular $\delta = n^{-1/3}$
ε	Ângulo entre o plano de colisão e um plano de referência, vide figura 3.5
θ	Ângulo entre o vetor unitário normal à superfície e a direção da velocidade U_∞ , vide figura 1.3
κ	Condutividade térmica, equação (3.25)
λ	Livre caminho médio
μ	Viscosidade cisalhante, equação (3.25)
ν	Taxa média de colisão
ρ_∞	Densidade de massa do gás no estado não-perturbado
σ_T	Seção reta de colisão total
τ	Tensão tangencial à superfície
χ	Ângulo de deflexão
Ω	Ângulo sólido

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conceito de Gás Rarefeito

Atualmente o estudo de escoamentos de gases rarefeitos tem demandado uma série de cálculos numéricos práticos. Esta necessidade vem do fato de que quando o tamanho característico do escoamento de um gás (L) tem a ordem da distância média percorrida por uma molécula entre duas colisões sucessivas, isto é, o livre caminho médio molecular (λ), não podemos aplicar as equações da mecânica do contínuo, mas devemos aplicar os métodos da Dinâmica dos Gases Rarefeitos (DGR) [1–4].

Um dos principais parâmetros na DGR é o número de Knudsen, que caracteriza o grau de rarefação de um gás, sendo definido como a razão entre o livre caminho médio λ e a distância característica L :

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L}. \quad (1.1)$$

O regime de escoamento de um gás pode ser classificado de acordo com o número de Knudsen como:

- contínuo ou hidrodinâmico ($\text{Kn} \ll 1$), em que o livre caminho médio é tão pequeno, que o gás pode ser considerado como um meio contínuo e as equações da hidrodinâmica podem ser aplicadas.

- de moléculas livres ($Kn \gg 1$), em que o livre caminho médio é tão grande que as colisões intermoleculares são raras e podemos considerar que as moléculas se movem independentemente uma das outras.
- de transição ($Kn \sim 1$), neste regime não podemos considerar o gás nem como um contínuo, nem como de moléculas livres. Por isso, para calcular um escoamento, devemos utilizar a equação de Boltzmann [1–4] ou a Simulação Direta de Monte Carlo (DSMC) [2].

Porém, para se calcular o número de Knudsen, precisamos do livre caminho médio, que não pode ser medido diretamente, o qual depende da pressão, da temperatura e do tipo do gás. Portanto, vamos relacionar o número de Knudsen com os coeficientes de transporte, fornecidos pela teoria cinética dos gases. Geralmente calcula-se λ através da viscosidade cisalhante μ :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}\mu}{2P} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

onde P é a pressão, T é a temperatura, $k_B = 1,380658 \times 10^{-23} JK^{-1}$ é a constante de Boltzmann e m é a massa molecular do gás. P e T são quantidades mensuráveis e as quantidades μ e m podem ser encontradas em livros de Física e Química, por exemplo em [5]. A equação (1.2) será deduzida na seção 3.1.3.

A DGR tem aplicações em vários campos. Por exemplo, na aerotermodinâmica de satélites retornáveis [6, 7]. A tabela 1.1 (Ref. [8]) nos fornece o grau de rarefação que uma esfera de 1 m de diâmetro (tamanho característico de um veículo espacial) estará sujeita, de acordo com a altitude. E podemos observar que a altitudes superiores a 90 km, o gás é bastante rarefeito, portanto é necessário a utilização dos métodos da DGR. Assim como na aerotermodinâmica de veículos espaciais, figura 1.1 (Ref. [8]), o foguete meteorológico, em sua viagem, pode alcançar altitudes de até 200 km e retornar à superfície terrestre, atravessando uma região

com grande variação do número de Knudsen. A DGR é muito utilizada no estudo de lançamentos e reentradas de ônibus espaciais, nas experiências com AFE (do inglês "Aeroassist Flight Experiment"), ou seja, um ensaio de voo de aeroassistência. Isto é um equipamento de teste de desaceleração, sem utilização de propulsores, em que a própria atmosfera do planeta é utilizada para desacelerá-lo para alcançar uma órbita, transferir para outra órbita ou reentrar e pousar na superfície.

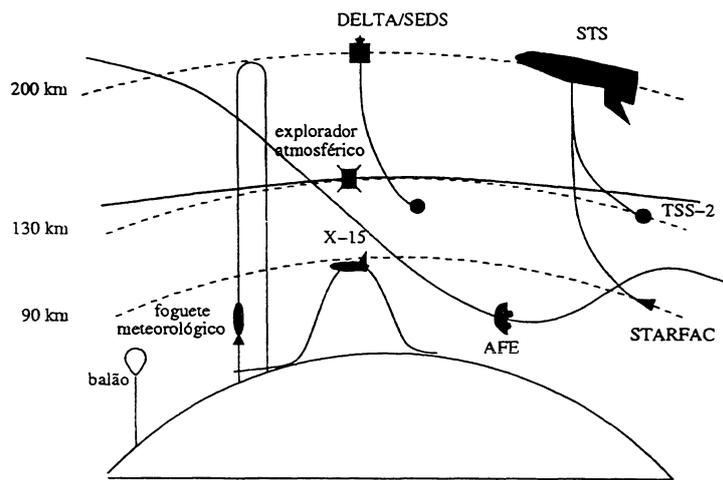


Figura 1.1: Altitudes alcançadas por veículos espaciais

DELTA/SEDS: Pequeno sistema de reboque de satélite, do inglês "Small Expendable-tether Deployment Systems"

STS: Sistema espacial de transporte, do inglês "Space Transportation System"

TSS-2: Sistema de reboque de satélite 2, do inglês "Tethered Satellite System-2"

Altitude (km)	Kn
90	0,010
100	0,062
110	0,374
120	1,675
130	4,827
140	10,546
160	31,456
200	122,906

Tabela 1.1: Números de Knudsen em relação às altitudes que uma esfera de 1 m de diâmetro estaria sujeita

Um outro campo de aplicação da DGR seria no estudo de sistemas de vácuo. Há grande interesse científico e prático na manutenção de grandes reservatórios a alto vácuo. Para se manter um equipamento a baixa pressão, necessita-se saber os valores exatos da taxa de fluxo de massa através de vários elementos que conectam os reservatórios a serem evacuados com as bombas [9]. Uma pressão típica nestes equipamentos (como sincrontron, tokamak, simulador de espaço, entre outros) é de 10^{-3} Torr. Nestas condições, λ tem a ordem de alguns centímetros, ou seja, a taxa de fluxo de massa deve ser calculada somente com os métodos da DGR. Além disso, alguns fenômenos que acontecem somente em gases rarefeitos podem ser usados para bombear o gás [9–13].

O desenvolvimento de microsistemas mecânicos e eletrônicos é uma área recente da engenharia, que atrai muitos cientistas e engenheiros, devido ao seu futuro promissor. Os principais problemas relacionados com a DGR são: o cálculo da taxa do fluxo de massa através de microcanais [14], cálculo da força de amortecimento de peças móveis e a troca de calor através do ar entre peças com temperaturas diferentes. O tamanho de um microsistema tem a ordem de alguns microns e daqui a alguns anos, pode chegar a atingir nano metros. Como o λ das moléculas do ar sob as condições normais é da ordem de 10 nm, nestas condições, o número de Knudsen

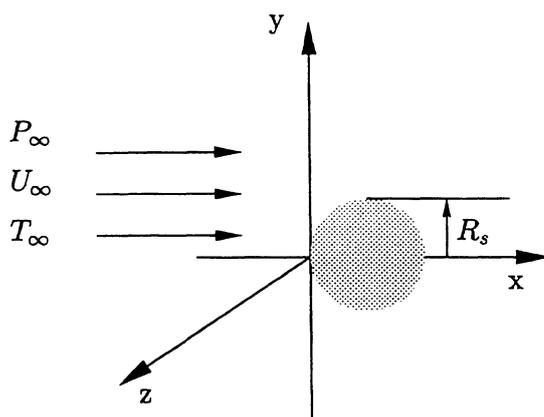


Figura 1.2: Esquema das coordenadas e do escoamento

é grande e não é possível aplicar as equações da mecânica do contínuo, por isso, estes problemas devem ser resolvidos no nível da função de distribuição, usando os métodos da DGR.

Outros exemplos de aplicação são: separação de gases, filtros finos utilizados para tirar micropartículas do ar, na indústria do laser, no escoamento de gases através de meios porosos, na engenharia química relacionada com gases, entre outros.

1.2 Descrição do Problema

O problema do escoamento de um gás ao redor de um corpo, que é um dos problemas clássicos de escoamentos externos, será apresentado nesta dissertação.

Considere o escoamento de um gás monatômico ideal e rarefeito ao redor de uma esfera de raio R_s , que está fixa, cuja posição nas coordenadas cartesianas é mostrada no esquema da figura 1.2. O gás possui pressão P_∞ , temperatura T_∞ e velocidade hidrodinâmica U_∞ longe da esfera, no estado não-perturbado. Assumimos que a velocidade U_∞ possui direção ao longo do eixo x .

O objetivo é calcular os seguintes coeficientes:

i. Coeficiente de Pressão

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{P_d}, \quad (1.3)$$

onde P é a pressão normal à superfície da esfera e P_d é a pressão dinâmica:

$$P_d = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2}, \quad \rho_\infty = \frac{mP_\infty}{k_B T_\infty}, \quad (1.4)$$

onde ρ_∞ é a densidade de massa do gás no estado não-perturbado.

ii. Coeficiente de Atrito

$$C_F = \frac{\tau}{P_d}, \quad (1.5)$$

onde τ é a tensão tangencial à superfície da esfera.

iii. Coeficiente de Transferência de Calor

$$C_H = \frac{q_n}{P_d U_\infty}, \quad (1.6)$$

onde q_n é o fluxo de calor normal à superfície da esfera.

iv. Coeficiente de Arrasto

$$C_D = \frac{F}{\pi R_s^2 P_d}, \quad (1.7)$$

onde F é a força de arrasto, que é a força à qual um objeto colocado em um fluido em movimento (ou que se move através de um fluido estacionário) estará sujeita, na direção do movimento do fluido, relativo ao objeto.

Os coeficientes acima, com exceção do coeficiente de arrasto C_D , dependem do ângulo θ , vide figura 1.3, que é o ângulo entre o vetor unitário normal à superfície e a direção da velocidade de corrente U_∞ .

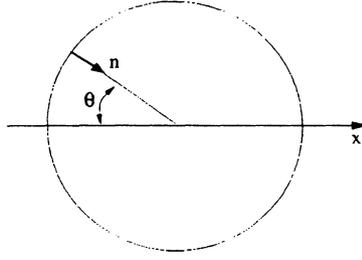


Figura 1.3: Esquema da esfera e do ângulo θ

A solução do problema é determinada pelos dois parâmetros principais:

- Número de Knudsen, que neste caso é definido como:

$$\text{Kn} = \frac{\lambda_\infty}{R_s}, \quad (1.8)$$

onde λ_∞ é o livre caminho médio à pressão P_∞ e temperatura T_∞ .

- Número de Mach

$$\text{Ma} = \frac{U_\infty}{c} = U_\infty \left(\frac{m}{\gamma k_B T_\infty} \right)^{1/2}, \quad (1.9)$$

onde c é a velocidade adiabática do som no gás, $\gamma = c_P/c_V$, c_P e c_V são os calores específicos a pressão constante e a volume constante, respectivamente.

Um escoamento pode ser caracterizado de acordo com o número de Mach como sendo:

- subsônico ($\text{Ma} < 1$),
- supersônico ($1 < \text{Ma} < 5$),
- hipersônico ($\text{Ma} > 5$), em que reações químicas podem ocorrer.

Além disto, a razão da temperatura ($t_w = T_w/T_\infty$, onde T_w é a temperatura da superfície da esfera), o potencial de interação das moléculas e a lei de interação gás-superfície são importantes também para a resolução do problema. No nosso trabalho, assumimos $t_w = 1$, que significa que a capacidade térmica da esfera é alta.

Na mecânica do contínuo, é comum os resultados serem apresentados através do Número de Reynolds (Re) que é relacionado com o número de Knudsen e o número de Mach da seguinte maneira:

$$Re = \frac{U_\infty L \rho_\infty}{\mu} = \left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)^{1/2} \frac{Ma}{Kn}, \quad (1.10)$$

onde as equações (1.1) e (1.9) foram utilizadas.

1.3 Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2 apresentamos uma compilação dos trabalhos encontrados na literatura, separados de acordo com o regime de escoamento. No Capítulo 3 descrevemos o método utilizado, as aproximações necessárias, os efeitos destas aproximações computacionais e como adquirir corretamente as quantidades macroscópicas através do método. Apresentamos os resultados obtidos com o método no Capítulo 4. As conclusões se encontram no Capítulo 5. O Método da Aceitação-Rejeição utilizado no programa numérico é apresentado no Apêndice A. Os dados numéricos de todos os coeficientes são apresentados na forma de tabelas no Apêndice B.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Apesar de ser um problema clássico, em alguns regimes, particularmente no escoamento supersônico no regime de transição e no escoamento hipersônico no regime hidrodinâmico, foram difíceis de se obter dados na literatura. A seguir, apresentamos os conceitos sobre cada regime de escoamento e uma compilação dos trabalhos encontrados na literatura, separados de acordo com os números de Mach e de Knudsen.

2.1 Regime de Moléculas Livres

O regime de moléculas livres é caracterizado para o caso em que o número de Knudsen, de acordo com a equação (1.1), tende ao infinito:

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{R_s} \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Neste regime a rarefação é tão grande que as colisões intermoleculares podem ser desprezadas, sendo que todos os problemas da dinâmica dos gases podem ser resolvidos, muitas vezes analiticamente [2].

No caso de corpo finito imerso em um gás, o aumento do livre caminho médio λ eventualmente pode levar a um estado no qual a distribuição das velocidades

das moléculas que incidem sobre o corpo não é perturbado pelas moléculas que foram refletidas pelo corpo e estão retornando para a corrente, pois neste tipo de escoamento, as moléculas refletidas geralmente viajam grandes distâncias antes de colidir com uma outra molécula [2].

Sabendo a função de distribuição das partículas incidentes e supondo que a interação gás-superfície é difusa, isto é, as partículas são reemitidas com a função Maxwelliana e a temperatura da superfície, obtemos os seguintes coeficientes no regime de moléculas livres [2]:

i. Coeficiente de Pressão

Substituindo (1.4) e (1.9) em (1.3) e usando a equação (7.58) seguindo da referência [2], obtemos:

$$C_{P0} = \frac{(P/P_\infty) - 1}{u^2} = \frac{1}{u^2} \left[\left\{ \left[\pi^{-1/2} u \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2} \right] \exp(-u^2 \cos^2\theta) + \left[\frac{1}{2} u^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{1/2} \pi^{1/2} u \cos\theta \right] [1 + \operatorname{erf}(u \cos\theta)] \right\} - 1 \right], \quad (2.2)$$

onde $\operatorname{erf}(a)$ é a função erro definida como:

$$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \exp(-x^2) dx$$

e

$$u = \beta U_\infty = \left(\frac{m}{2kT_\infty} \right)^{1/2} U_\infty = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \operatorname{Ma}. \quad (2.3)$$

que denota uma velocidade adimensional.

ii. Coeficiente de Atrito

Substituindo (1.4) em (1.5) e usando a equação (7.61) seguindo da referência [2]

temos:

$$\begin{aligned}
C_{F0} &= \frac{\tau}{P_{\infty} u^2} \\
&= \frac{\text{sen}\theta}{\pi^{1/2} u} \left\{ \exp(-u^2 \cos^2\theta) + \pi^{1/2} u \cos\theta [1 + \text{erf}(u \cos\theta)] \right\}. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

iii. Coeficiente de Transferência de Calor

Substituindo (1.4) em (1.6) e utilizando a equação (7.63) seguindo da referência [2] obtemos:

$$\begin{aligned}
C_{H0} &= \frac{2\beta_{\infty}^3 q_n}{\rho_{\infty} u^3} \\
&= \frac{1}{2u^3 \pi^{1/2}} \left\{ \left[u^2 + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} \left(\frac{T_w}{T_{\infty}} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left[\exp(-u^2 \cos^2\theta) + \pi^{1/2} u \cos\theta \{1 + \text{erf}(u \cos\theta)\} \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \exp(-u^2 \cos^2\theta) \right\}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

iv. Coeficiente de Arrasto

Substituindo (1.4) em (1.7), aplicando as equações (7.58) e (7.61) seguindo da referência [2] e resolvendo a integral temos:

$$\begin{aligned}
C_{D0} &= 2 \frac{\int_0^{\pi} (P \cos\theta + \tau \text{sen}\theta) 2\pi R_s^2 \text{sen}\theta d\theta}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2 \pi R_s^2} \\
&= \frac{2u^2 + 1}{\pi^{1/2} u^3} \exp(-u^2) + \frac{4u^4 + 4u^2 - 1}{2u^4} \text{erf}(u) + \frac{2\pi^{1/2}}{3u}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

No limite hipersônico $Ma \gg 1$, a equação (2.6) fornece o resultado seguinte:

$$\lim_{Ma \rightarrow \infty} C_{D0} = 2. \quad (2.7)$$

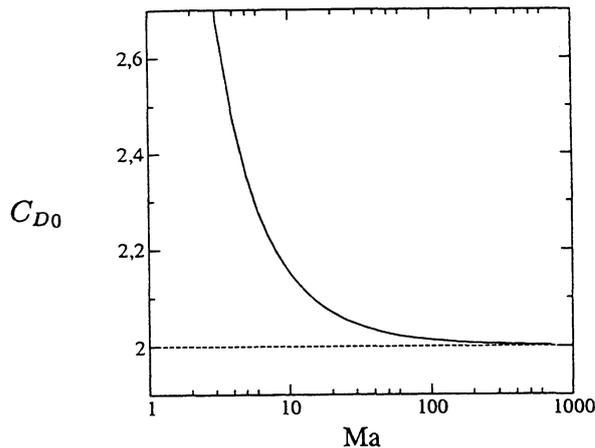


Figura 2.1: Coeficiente de Arrasto C_{D0} vs número de Mach (Ma), no regime de Moléculas Livres

Na figura 2.1, segundo a equação (2.6) podemos observar que para números de Mach (Ma) acima de 100 há pouca variação, do coeficiente de arrasto C_D em relação ao seu valor no limite quando $Ma \rightarrow \infty$. Para $Ma \geq 30$, esta variação é menor do que 2%.

2.2 Regime Hidrodinâmico

Uma constante preocupação na dinâmica dos gases rarefeitos é a determinação dos limites da aplicabilidade da teoria hidrodinâmica ou contínua, como uma função do parâmetro Kn e das condições de contorno que definem os vários tipos de escoamentos rarefeitos. É considerado que as equações de Navier-Stokes, complementadas pelas condições de contorno na interface gás-superfície, são válidas no limite de Kn pequeno. Mas a questão da definição do intervalo de Kn em que as equações são válidas não é trivial e depende do tipo de escoamento. Há duas maneiras de verificar a validade. A primeira consiste em se fazer a comparação direta entre as soluções das equações no contínuo para um escoamento em particular e as

observações experimentais daquele escoamento.

Uma segunda abordagem seria a comparação da solução da equação de Navier-Stokes com a solução correspondente baseada na equação cinética. Um resultado importante é de que a equação de Navier-Stokes é assintoticamente equivalente à equação de Boltzmann com a diminuição do grau de rarefação, exceto nas camadas próximas das superfícies sólidas, e no caso de fortes ondas de choque.

2.2.1 Escoamento Subsônico

O primeiro estudo da resistência de um corpo sólido que se movimenta relativamente ao fluido, no qual a viscosidade foi levada em conta, foi publicada por Sir George G. Stokes (1819-1903).

A equação de Navier-Stokes de movimento para um fluido incompressível pode ser expressa da seguinte maneira [15]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Uma maneira de simplificar a equação de Navier-Stokes para números de Reynolds (Re) pequenos, é através da omissão do termo inercial, $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, em comparação com o termo viscoso, $\mu\Delta\mathbf{u}$. Para um movimento estacionário de um fluido incompressível, a omissão do termo inercial reduz a equação de Navier-Stokes para

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\mu} \nabla P. \quad (2.9)$$

Supondo que não ocorram deslizamentos nas superfícies sólidas, ou seja, que a velocidade do gás na superfície é nula, a solução da equação (2.9) fornece a força de arrasto F no regime hidrodinâmico [15], como sendo

$$F = 6\pi\mu LU. \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.10) em (1.7) obtemos [15]:

$$C_D = \frac{24}{Re}. \quad (2.11)$$

Vlajinac e Covert [16], em 1972, mediram C_D para três tamanhos de esferas em um túnel de vento subsônico, para $Ma < 0,3$ e uma faixa de $10^4 < Re < 2,7 \times 10^5$, sendo que seus resultados concordaram com resultados de outros experimentos, tais como de Bailey e Hiatt [17] que trabalharam com intervalos de $0,1 < Ma < 6,0$ e $10 < Re < 10^5$, entre outros. Em 1974, Bailey [18] obteve dados de arrasto, através de medidas, para uma esfera com velocidade subsônica em escoamento contínuo, para $Ma < 0,2$. Henderson [19] em 1976, apresentou uma nova representação do coeficiente de arrasto para escoamentos subsônicos e supersônicos, equação (2.12), isto é, para $Ma < 6$ e para número de Reynolds (Re) até o limite de transição laminar-turbulento ($Re \sim 10^4$).

$$C_D = 24 \left[Re + u \left\{ 4,33 + \left(\frac{3,65 - 1,53(T_w/T)}{1 + 0,353((T_w/T))} \right) \exp \left(-0,247 \frac{Re}{u} \right) \right\} \right]^{-1} \\ + \exp \left(-\frac{0,5Ma}{\sqrt{Re}} \right) \left[\frac{4,5 + 0,38(0,03Re + 0,48\sqrt{Re})}{1 + 0,03Re + 0,48\sqrt{Re}} + 0,1 Ma^2 + 0,2 Ma^8 \right] \\ + \left[1 - \exp \left(-\frac{Ma}{Re} \right) \right] 0,6 u, \quad (2.12)$$

onde u foi definida na equação (1.9). Podemos verificar que ao fazermos $Re \rightarrow 0$ na equação (2.12), obtemos a equação (2.11).

2.2.2 Escoamento Supersônico

Bailey e Hiatt [17], em 1972, experimentalmente obtiveram dados de arrasto, para uma faixa do número de Mach de $0,1 < Ma < 6,0$, com uma incerteza de $\pm 2\%$ em relação a outros dados existentes na época. Em 1979, Miller e Bailey [20] escreveram uma revisão sobre o arrasto em esferas de vários diâmetros e compararam

dados de C_D em função do número de Mach (Ma) e em função do número de Reynolds (Re) com os dados disponíveis na época.

Molodtsov *et al.* [21], apresentaram mais tarde, em 1985, resultados numéricos de um escoamento supersônico ao redor de uma esfera, de uma mistura binária, utilizando um esquema para o conjunto completo da equação de Navier-Stokes e obtiveram o perfil da densidade do gás para $Ma = 3,83$ e $Re = 100$ e 500 .

2.2.3 Escoamento Hipersônico

Em 1992, Dogra *et al.* [8] trabalharam com escoamento hipersônico de uma mistura de gás para toda a faixa do número de Knudsen, utilizando o método de Simulação Direta de Monte Carlo [2].

2.3 Regime de Transição

O regime de transição ou intermediário é definido aqui como sendo aquele no qual o livre caminho médio não é tão pequeno nem tão grande em comparação com a dimensão linear típica, isto é, $Kn \sim 1$.

Neste regime, as equações de Navier-Stokes não são válidas e há dificuldades matemáticas associadas com a equação completa de Boltzmann. Geralmente são realizadas as simulações diretas, ao invés da resolução numérica da equação cinética.

2.3.1 Escoamento Subsônico

O problema do arrasto em uma esfera em escoamentos subsônicos tem sido estudado extensivamente. Em 1974, Bailey [18] realizou experiências com esferas de vários diâmetros em escoamentos subsônicos e mediu o arrasto. Em 1976, Henderson [19] obteve expressões para o coeficiente de arrasto em escoamentos compressíveis e

incompressíveis. Os trabalhos mais importantes neste tipo de escoamento foram citados no artigo de Lea e Loyalka [22], em 1985. Law e Loyalka [23] obtiveram dados de arrasto para uma faixa de número de Knudsen de $0, 10 \leq Kn \leq 20$, através do modelo Bhatnagar-Gross-Krook [24], com reflexão difusa na superfície de uma esfera, com variação na temperatura na camada de Knudsen.

Em 1992, Sone e Takata [25], estudaram a descontinuidade na função de distribuição de velocidades em superfícies convexas, para números de Mach pequenos, inclusive para escoamentos ao redor de esferas.

2.3.2 Escoamento Supersônico

Yanenko *et al.* [26] obtiveram através de métodos numéricos a distribuição de densidade ao longo do eixo de simetria de uma esfera para números de Mach $Ma = 3,8$ e de Knudsen $2 \times 10^{-1} < Kn < 4$. Observou-se uma grande dificuldade na obtenção de outros resultados na literatura, neste regime.

2.3.3 Escoamento Hipersônico

Em 1971, Phillips e Kuhlthau [27] obtiveram experimentalmente dados sobre o arrasto para escoamentos hipersônicos de Argônio e Nitrogênio ao redor de uma esfera.

A solução analítica para arrasto de uma esfera movendo-se à hipervelocidade através de um gás rarefeito foi obtida por Baker Jr e Charwat [28] em 1985, como sendo:

$$C_D = 2 \left[1 + \frac{\bar{u}_e}{u} (0,444) - B(0,23) - \frac{\bar{u}_e}{u} B(0,65) \right], \quad (2.13)$$

onde B descreve o desvio do regime de moléculas livres que foi calculado como sendo:

$$B \frac{\bar{u}_e}{u} \sim \frac{1}{2^{1/2} Kn} \quad (2.14)$$

e $\overline{u_e}$ é a velocidade média das moléculas emitidas da esfera.

Neste mesmo ano, Yanenko *et al.* [26], obtiveram resultados, através de métodos numéricos, do arrasto, fluxo de calor e perfil de densidade para escoamento hipersônico ao redor de uma esfera para $Ma = 17$, $0,02 \leq Kn \leq 2$, $\mu \sim T$ e $t_w = 1$ e $0,1$. Em 1992, Dogra *et al.* [8] utilizaram o método DSMC na aerodinâmica de uma esfera em um escoamento hipersônico, considerando mistura de gases e obtiveram dados para C_D , C_P , C_F , C_H , distribuições de densidade, temperatura e número de Mach, sendo resultados restritos para uma esfera de 1,6 m de diâmetro.

Através desta pesquisa bibliográfica, observamos que não existem dados confiáveis neste regime de escoamento para toda a faixa do número de Knudsen. O objetivo desta dissertação é então realizar cálculos para um escoamento hipersônico de um gás monatômico para toda a faixa do número de Knudsen. Serão calculados os coeficientes C_D , C_P , C_F , C_H e as distribuições de densidade, temperatura e número de Mach local ao redor da esfera. Os resultados serão apresentados na forma adimensional que permite aplicá-los para qualquer tamanho de esfera sem especificar a espécie do gás.

Capítulo 3

Método de Solução

3.1 Conceitos Básicos da Dinâmica dos Gases Rarfeitos

3.1.1 Equação de Boltzmann

Os problemas relacionados à dinâmica dos gases rarefeitos devem ser resolvidos no nível da função de distribuição. Para um gás monatômico, a função de distribuição $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ é definida tal que a grandeza $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ é igual ao número de partículas que se encontram no elemento de volume de fase $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ próximo do ponto \mathbf{r} e \mathbf{v} , no instante de tempo t , onde \mathbf{r} é a posição no espaço físico e \mathbf{v} é a velocidade molecular.

Estamos interessados nas seguintes características macroscópicas que podem ser representadas pela função de distribuição [1–4]:

i. densidade numérica:

$$n(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (3.1)$$

ii. velocidade hidrodinâmica

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (3.2)$$

iii. pressão

$$P(t, \mathbf{r}) = \frac{m}{3} \int V^2 f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (3.3)$$

iv. tensor tensão

$$P_{ij}(t, \mathbf{r}) = m \int V_i V_j f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (3.4)$$

v. temperatura

$$T(t, \mathbf{r}) = \frac{m}{3k_B n} \int V^2 f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (3.5)$$

vi. fluxo de calor

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{r}) = \frac{m}{2} \int V^2 \mathbf{V} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (3.6)$$

onde \mathbf{V} é a velocidade peculiar ($\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$). As expressões (3.1), (3.3) e (3.5) nos fornecem a relação $P = nk_B T$, ou seja, a equação de estado de um gás ideal também é válida para o gás fora do equilíbrio. A função de distribuição obedece a equação de Boltzmann [1–3], que na ausência de forças externas pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \mathcal{Q}(ff_*), \quad (3.7)$$

onde $\mathcal{Q}(ff_*)$ é a integral de colisão:

$$\mathcal{Q}(ff_*) = \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*; \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_* d\mathbf{v}_*, \quad (3.8)$$

onde $f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}')$ e $f_* = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_*)$. A quantidade $w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*; \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)$ é a densidade de probabilidade que duas moléculas com velocidades \mathbf{v}' e \mathbf{v}'_* terão as velocidades \mathbf{v} e \mathbf{v}_* , respectivamente, após a colisão.

A função w satisfaz as duas relações:

i) propriedade de reciprocidade:

$$w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*; \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) = w(-\mathbf{v}, -\mathbf{v}_*; -\mathbf{v}', -\mathbf{v}'_*); \quad (3.9)$$

que significa a reversibilidade do microprocesso da colisão binária.

ii) propriedade unitária

$$\int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*; \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int w(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*; \mathbf{v}, \mathbf{v}_*) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad (3.10)$$

Aplicando estas relações, a seguinte inequação é demonstrável [1-3]:

$$\int \mathcal{Q}(ff_*) \ln f d\mathbf{v} \leq 0, \quad (3.11)$$

significando a irreversibilidade da equação de Boltzmann, isto é, o Teorema H. Ainda, a integral de colisão obedece a igualdade

$$\int \psi(\mathbf{v}) \mathcal{Q}(ff_*) d\mathbf{v} = 0, \quad (3.12)$$

onde $\psi(\mathbf{v})$ pode assumir uma das funções a seguir:

$$1 \text{ ou } m\mathbf{v} \text{ ou } \frac{mv^2}{2},$$

que significa a conservação das partículas, do momento linear e da energia cinética em cada colisão.

3.1.2 Interação Gás-Superfície

Na superfície que restringe o escoamento do gás, precisamos relacionar as funções de distribuição das partículas incidentes f^- e das que estão deixando a superfície f^+ . A relação pode ser escrita em uma forma geral [1],

$$f^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{H(v_n)}{|v_n|} \int H(-v'_n) |v'_n| R(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) f^-(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad (3.13)$$

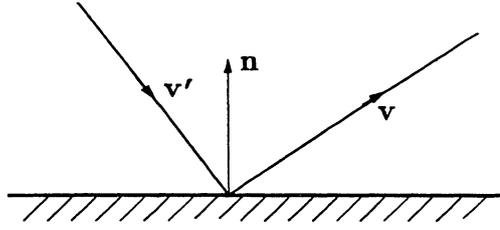


Figura 3.1: As velocidades das moléculas incidentes \mathbf{v}' e refletidas \mathbf{v}

onde $H(x)$ é a função degrau de Heaviside, definida como:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x < 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a componente normal da velocidade, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície, vide figura 3.1, e $R(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ é o núcleo de espalhamento, que satisfaz a seguinte condição de normalização:

$$\int H(v_n) R(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1. \quad (3.15)$$

que significa que a parede restitui todas as partículas incidentes.

Outra propriedade do núcleo de espalhamento é que este não pode assumir um valor negativo [1]:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.16)$$

Se a superfície estiver em equilíbrio local, à temperatura T_w , o núcleo de espalhamento satisfaz a propriedade de reciprocidade, [1]

$$\begin{aligned} & H(-v'_n) |v'_n| \exp\left(-\frac{mv'^2}{2k_B T_w}\right) R(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \\ &= H(v_n) |v_n| \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_w}\right) R(\mathbf{r}, -\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (3.17)$$

que significa a reversibilidade do processo de interação gás-superfície. O modelo mais conhecido é o espalhamento difuso, cujo núcleo de espalhamento tem a seguinte

forma:

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{2\pi(k_B T_w)^2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_w}\right), \quad (3.18)$$

significando que uma partícula não mantém a informação de antes da sua interação com a superfície e deixa a superfície com a função de distribuição Maxwelliana. Podemos verificar que (3.18) satisfaz as propriedades (3.15)-(3.17).

Em muitas situações reais podemos utilizar apenas a reflexão difusa. Um desvio do espalhamento difuso ocorre somente para uma superfície atômica limpa e não contaminada [29].

3.1.3 Dinâmica das Colisões Binárias

O potencial intermolecular $\varphi(r)$ utilizado neste trabalho é o da esfera rígida, em que

$$\varphi(r) = \begin{cases} \infty, & \text{para } r < d \\ 0, & \text{para } r > d, \end{cases} \quad (3.19)$$

onde d é o diâmetro da esfera rígida.

Considere uma partícula, cujo modelo é o da esfera rígida, sem estrutura

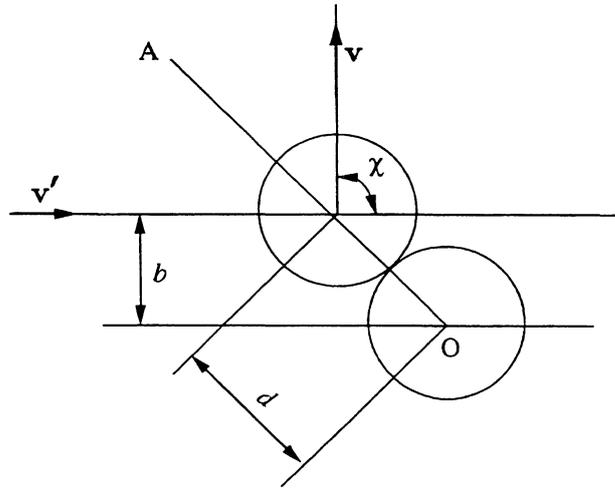


Figura 3.2: Geometria da colisão de duas partículas, modelo da esfera rígida

interna, de diâmetro d . Se duas partículas idênticas colidem, a distância entre os seus centros será igual a d , vide figura 3.2, onde χ é o ângulo de deflexão da velocidade relativa, A é a linha de apse, que une os centros das duas partículas e b é o parâmetro de impacto. Então a seção reta total de colisão é:

$$\sigma_T = \pi d^2. \quad (3.20)$$

Considere uma molécula em particular, que chamaremos de 'partícula teste'. As velocidades das outras moléculas, que denotaremos como sendo de classe \mathbf{c} com densidade numérica Δn , estão distribuídas de alguma maneira não especificada, com velocidade entre \mathbf{c} e $\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}$. Se a velocidade da molécula teste é c_t , a velocidade relativa entre esta e as outras moléculas de classe \mathbf{c} será $v_r = c_t - c$. Escolhendo a referência na qual a molécula teste se move com a velocidade relativa v_r , enquanto que as de classe \mathbf{c} serão estacionárias, então, se o intervalo de tempo Δt é muito maior que o tempo médio entre duas colisões, a molécula teste colidirá com qualquer molécula de classe \mathbf{c} que tenha seu centro localizado dentro do cilindro de volume $\sigma_T v_r \Delta t$, figura 3.3.

Então, a probabilidade de uma colisão entre a molécula teste e uma molécula

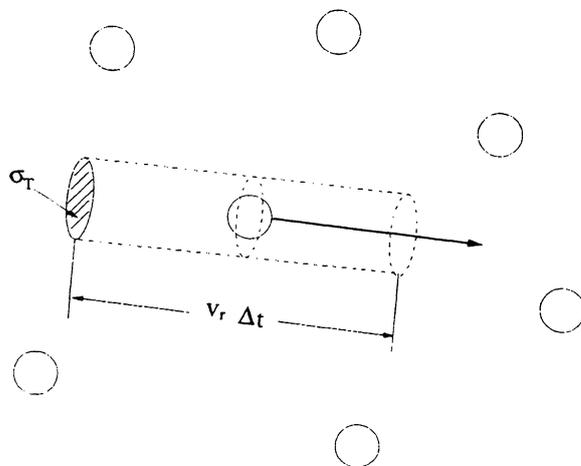


Figura 3.3: Volume de uma molécula teste se movendo entre moléculas estacionárias

de classe c no intervalo de tempo Δt é

$$\Delta n \sigma_T v_r \Delta t. \quad (3.21)$$

Quando as colisões ocorrem, e ao se tratar de gas diluído, na qual apenas uma pequena proporção da trajetória é afetada pelas colisões, a restrição em Δt pode ser retirada e o número de colisões por unidade de tempo com uma molécula de classe c é $\Delta n \sigma_T v_r$. A taxa de colisão média ν é obtida pela somatória de todas as velocidades e portanto, sobre todos os valores de v_r . Então,

$$\nu = \sum (\Delta n \sigma_T v_r) = n \sum \left[\frac{\Delta n}{n} \sigma_T v_r \right] \quad (3.22)$$

e como $\Delta n/n$ é a fração das moléculas com seção reta σ_T e velocidade v_r , temos

$$\nu = n \overline{\sigma_T v_r}. \quad (3.23)$$

Portanto, o número de colisões por unidade de tempo por unidade de volume do gás será

$$N_c = \frac{1}{2} n \nu = \frac{1}{2} n^2 \overline{\sigma_T v_r}. \quad (3.24)$$

O fator de simetria (1/2) foi introduzido devido a cada colisão envolver duas moléculas.

Podemos escrever as expressões explícitas dos coeficientes de viscosidade dinâmica μ e de condutividade térmica κ , utilizando o Método de Chapman-Enskog [3] e para este modelo de interação, obtemos:

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi m k_B T}}{\pi d^2} \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{75 k_B}{64 m} \frac{\sqrt{\pi m k_B T}}{\pi d^2} \quad (3.25)$$

e podemos reescrever o livre caminho médio como

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}. \quad (3.26)$$

Com o auxílio de (3.26) as expressões (3.25) são reescritas na forma:

$$\mu = \frac{5\pi}{32} \langle v \rangle mn\lambda \simeq \frac{1}{2} \langle v \rangle mn\lambda \quad (3.27)$$

e

$$\kappa = \frac{75\pi k_B}{128} \langle v \rangle n\lambda \simeq \frac{15k_B}{8} \langle v \rangle n\lambda, \quad (3.28)$$

onde $\langle v \rangle$ é a velocidade térmica média:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{8k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

A equação (3.27) foi utilizada para obter a equação (1.2) do livre caminho médio λ .

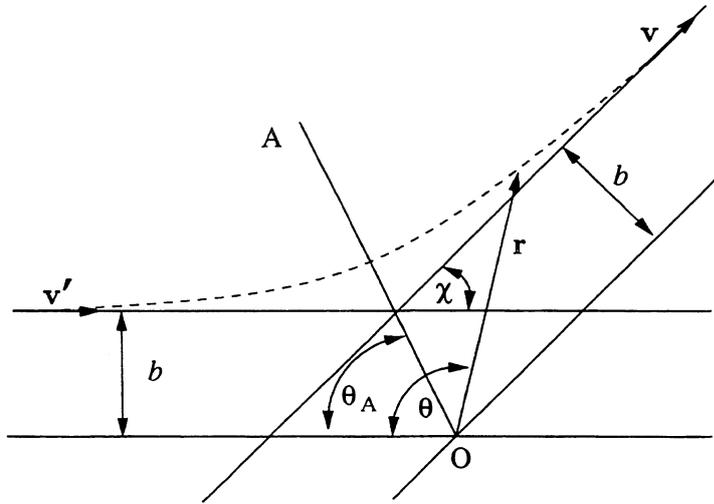


Figura 3.4: Interação da massa reduzida com um centro de espalhamento fixo

Com o modelo de interação intermolecular definido, vamos considerar a colisão binária e elástica entre as partículas com velocidades pré-colisionais \mathbf{v}' e \mathbf{v}'_* e pós-colisionais \mathbf{v} e \mathbf{v}_* , vide figura 3.4, onde \mathbf{r} é o vetor posição da partícula e A é a linha de apse.

Considerando as partículas com massas iguais e como na colisão elástica

devemos ter a conservação de momento linear e energia, isto exige que:

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_* = 2\mathbf{v}_{cm} \quad (3.30)$$

$$v'^2 + v'^*_2 = v^2 + v_*^2, \quad (3.31)$$

onde v_{cm} é a velocidade de centro de massa.

As velocidades relativas antes e depois da colisão são, respectivamente:

$$\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_*$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_* \quad (3.32)$$

Das equações (3.30) e (3.32) temos:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{cm} + \frac{1}{2}\mathbf{v}'_r \quad (3.33)$$

$$\mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_{cm} - \frac{1}{2}\mathbf{v}'_r \quad (3.34)$$

e

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{cm} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_r \quad (3.35)$$

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_{cm} - \frac{1}{2}\mathbf{v}_r. \quad (3.36)$$

De (3.31) a (3.36), temos:

$$v'^2 + v'^*_2 = 2v_{cm} + \frac{1}{2}v'^2_r \quad \text{e} \quad v^2 + v_*^2 = 2v_{cm} + \frac{1}{2}v_r^2. \quad (3.37)$$

Comparando (3.37) com (3.32), chegamos à conclusão que:

$$v_r = v'_r. \quad (3.38)$$

Com os valores das velocidades relativas pós-colisionais, resta calcularmos o ângulo de deflexão χ .

3.2 Método de Simulação Direta de Monte Carlo

A solução da Equação de Boltzmann exige um esforço computacional muito grande e uma das alternativas à solução numérica é a utilização do método de Simulação Direta de Monte Carlo (DSMC, do inglês *Direct Simulation Monte Carlo*) [2], o qual tem sido largamente utilizado hoje em dia. Considerando a facilidade da aplicação do método DSMC nas mais diversas áreas, decidimos estudá-lo e aplicá-lo neste problema.

3.2.1 Histórico

Na década de 1960, muitos artigos trataram o método de Monte Carlo aplicado a problemas na dinâmica dos gases rarefeitos. Porém, podemos dividi-los em três tipos básicos [30].

O primeiro, iniciado por Nordsieck *et al.* [31] em 1967, está muito ligada à equação de Boltzmann e tem por objetivo fazer uma estimativa numérica dos operadores "destruição" e "produção" (ou do operador de colisão combinado), para uma dada função de distribuição de velocidades.

A estimativa de Nordsieck do operador das colisões começa com a subdivisão de faixas finitas do espaço de velocidade e do espaço do vetor da linha de apse no grande número de células discretas e realiza-se a estimativa da integral 5 dimensional pela quadratura numérica direta [30]. Entretanto, ao invés de trocar a integral múltipla por uma soma, Nordsieck estabeleceu um valor médio exato do integrando por uma técnica de amostragem estatística e então multiplicou pelo volume total da célula para obter uma estimativa de Monte Carlo da integral.

O segundo método, de Haviland e Lavin [32], é uma extensão, para escoamentos com colisões intermoleculares, do método da "molécula-teste", aplicado em escoamentos no regime de moléculas livres. Primeiro é realizada a subdivisão do

espaço de configuração em células discretas, aproveitando qualquer simetria permitida pelas condições de contorno. Em cada célula, são designadas uma densidade numérica e uma função de distribuição das velocidades iniciais, com base em uma teoria aproximada. Uma sucessão de partículas teste são introduzidas no limite da região de interesse, com velocidades iniciais escolhidas aleatoriamente de uma distribuição satisfazendo as condições de contorno. Cada partícula teste é então seguida através de uma seqüência de vôos livres e colisões, nos quais, entre colisões e no tempo entre colisões, as velocidades das moléculas alvo são encontradas, os ângulos azimutais e os parâmetros de impacto são selecionados aleatoriamente de distribuições, que permitem com que as seções retas de colisão e para a densidade original e a distribuição de velocidades em cada célula na qual uma colisão ocorreu sejam registradas. A velocidade pós-colisional da partícula teste é calculada exatamente.

O terceiro método é o da Simulação Direta de Monte Carlo, criado por Bird [2].

3.2.2 Descrição do Método

O Método DSMC é uma técnica estatística que descreve o comportamento de escoamentos de gases a nível molecular. Na teoria cinética dos gases, a função de distribuição para as velocidades moleculares fornece uma descrição estatística do gás. A equação básica que descreve a mudança da função de distribuição é a equação de Boltzmann, equação (3.7). Bird mostrou que seu método fornece resultados consistentes com os resultados numéricos da equação de Boltzmann [2, 30, 33].

A versão NTC [2] (do inglês *Non Time-Counter*) do método empregada neste trabalho evita completamente o problema do tempo computacional ser diretamente proporcional ao número de moléculas. Ainda tem a vantagem de que o número de pares de seleção é determinado antes da entrada na subrotina de colisão, ao invés de entrar nesta subrotina, e esperar que o tempo na célula alcance o tempo do

escoamento.

Neste método, o gás é representado por algumas milhares de moléculas modelo, que estão inicialmente distribuídas uniformemente no espaço de interesse, com velocidades atribuídas de acordo com uma distribuição Maxwelliana. O equilíbrio é perturbado pela introdução, no tempo zero, de um obstáculo estacionário no escoamento ou por um objeto se movendo através de um gás estacionário.

O procedimento DSMC é composto principalmente de 2 etapas. A primeira é o movimento livre das moléculas, que corresponde ao lado esquerdo da equação de Boltzmann, equação (3.7) e a segunda é o cálculo das colisões intermoleculares, que corresponde ao lado direito da mesma equação.

Na primeira etapa, as moléculas modelo podem se mover com suas velocidades iniciais por um intervalo de tempo Δt , que é pequeno comparado com o tempo médio livre em um gás não-perturbado, de acordo a seguinte equação:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_a + \mathbf{v}\Delta t. \quad (3.41)$$

Aquelas moléculas que batem na superfície do corpo durante este tempo são imediatamente reemitidas com uma nova velocidade escolhida aleatoriamente segundo a distribuição Maxwelliana com a temperatura da superfície, ou de acordo com alguma outra lei de reemissão.

O campo de escoamento de interesse é dividido em células, cujo tamanho é escolhido de modo que as propriedades do gás sejam uniformes no interior da célula em qualquer estágio do movimento. Cada célula foi então subdividida em sub-células. Na segunda etapa, em tempo igual a Δt , todas as moléculas são paradas e todas aquelas em uma determinada célula, sem considerar as suas posições na célula, são consideradas pares de colisão possíveis. Os pares de colisão são escolhidos dentro das sub-células, para termos certeza de estarmos escolhendo o par mais próximo um do

outro. O esquema detalhado da simulação das colisões é dada na seção 3.2.3.

Após as colisões terem sido computadas para todas as células, todas as moléculas movem-se livremente por outro Δt , com suas novas velocidades (se colidiram) ou mantendo as anteriores (se não colidiram). Então, segue-se outro intervalo de tempo e todo o processo colisional é repetido.

As quantidades macroscópicas, como por exemplo a densidade, a temperatura e o número de Mach local podem ser obtidos pela amostragem e pelas médias sobre as quantidades moleculares apropriadas em cada célula. O cálculo destas grandezas é dado mais detalhadamente na seção 3.2.4.

3.2.3 Simulação das Colisões

Após a região de interesse ser delimitada e dividida em células e sub-células, vamos simular as colisões nas sub-células.

Os pares de partículas a serem selecionados para o teste da colisão são obtidos de acordo com a taxa de colisão ν , dada na equação (3.23), podendo ser expressa da seguinte maneira:

$$N_{pares} = \frac{N_m \overline{N_m} F_N \sigma v_{r,max} \Delta t}{2V_c}, \quad (3.42)$$

onde N_m é o número de moléculas na célula durante o último intervalo de tempo Δt , $\overline{N_m}$ é a média de N_m durante todos os intervalos de tempo Δt anteriores, V_c é o volume da célula e F_N é o número de partículas reais representadas por uma partícula modelo.

A probabilidade de ocorrer colisão é proporcional à seguinte grandeza:

$$\frac{\sigma_T v_r'}{(\sigma_T v_r')_{max}}. \quad (3.43)$$

Para o par de colisão ser aceito e as suas velocidades pós-colisionais serem computadas, é realizado um teste, utilizando o Método da Aceitação-Rejeição, vide Apêndice

A, com a probabilidade de um par em particular sendo dada pela equação (3.43).

Para o modelo da esfera rígida em que a seção reta da molécula permanece constante, mesmo após as colisões, podemos reescrever a equação (3.43) como sendo:

$$\frac{v'_r}{(v'_r)_{max}}. \quad (3.44)$$

Sob a condição $v'_r/(v'_r)_{max} > R_f$ o par é aceito para colidir, onde R_f é um número aleatório que varia uniformemente entre 0 e 1. Se a colisão for aceita, calculamos as componentes da velocidade pós-colisional. Então, calculamos a nova direção da velocidade relativa do par. De acordo com a dinâmica das colisões binárias, as componentes da velocidade relativa pós-colisional podem ser calculadas da seguinte maneira, vide figura 3.5:

$$v_{r1} = v'_r \cos\chi, \quad (3.45)$$

$$v_{r2} = v'_r \sin\chi \cos\varepsilon, \quad (3.46)$$

$$v_{r3} = v'_r \sin\chi \sin\varepsilon, \quad (3.47)$$

onde podemos utilizar dois números aleatórios R_f para calcularmos χ e ε do seguinte modo:

$$\cos\chi = 2R_f - 1, \quad (3.48)$$

$$\varepsilon = 2\pi R_f. \quad (3.49)$$

3.2.4 Cálculo das Propriedades Macroscópicas

As propriedades macroscópicas podem ser identificadas pelos valores médios das quantidades moleculares apropriadas em qualquer local do escoamento, desde que haja um número suficiente de partículas dentro de uma célula.

Podemos obter as propriedades macroscópicas de nosso interesse após um tempo de cálculo grande, o suficiente para que o escoamento tenha se estabelecido,

isto é, se tornado estacionário e as flutuações minimizadas.

A densidade numérica, definida pela equação (3.1), é calculada através do número de partículas em uma célula N_m :

$$n = \frac{N_m F_N}{V_c}. \quad (3.50)$$

A velocidade hidrodinâmica, definida pela equação (3.2), é a velocidade média das partículas na célula:

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_{i=1}^{N_m} \mathbf{v}_i}{N_m}. \quad (3.51)$$

A temperatura, definida em (3.5), é relacionada com a energia cinética média das partículas relativamente da velocidade hidrodinâmica \mathbf{u} :

$$T = \frac{1}{3k_B N_m} \sum_{i=1}^{N_m} m(\mathbf{v}_i - \mathbf{u})^2. \quad (3.52)$$

O fluxo de calor, definido pela equação (3.6), tem a forma:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{V_c} \sum_{i=1}^{N_m} \frac{mV_i^2}{2} \mathbf{v}_i. \quad (3.53)$$

A superfície do corpo é dividida em segmentos A_s e os cálculos dos coeficientes C_P , C_F e C_H , são obtidos através do número de partículas N_s que colidiram com cada segmento.

Para o coeficiente de pressão, da equação (1.3), temos:

$$C_P = \frac{1}{P_d} \left[\frac{m}{A_s t} \sum_{i=1}^{N_s} (V_{ni}^{ref} - V_{ni}^{inc}) - P_\infty \right], \quad (3.54)$$

onde V_n^{inc} é a componente normal das velocidades das partículas incidentes, V_n^{ref} é a componente normal das velocidades das partículas refletidas e t é o tempo de acumulação estatística.

Para o coeficiente de atrito, da equação (1.5), temos:

$$C_F = \frac{1}{P_d} \frac{m}{A_s t} \sum_{i=1}^{N_s} (V_{ti}^{ref} - V_{ti}^{inc}), \quad (3.55)$$

onde V_t^{inc} é a componente tangencial das velocidades das partículas incidentes e V_t^{ref} é a componente tangencial das velocidades das partículas refletidas.

Para o coeficiente de transferência de calor, da equação (1.6), obtemos:

$$C_H = \frac{1}{P_d U_\infty} \frac{m}{2A_s t} \sum_{i=1}^{N_s} [(V_i^{ref})^2 - (V_i^{inc})^2], \quad (3.56)$$

onde V^{inc} é a velocidade das partículas incidentes na superfície e V^{ref} é a velocidade das partículas refletidas da superfície.

Para o coeficiente de arrasto, da equação (1.7), obtemos:

$$C_D = \frac{1}{P_d \pi R_s^2} \frac{m}{t} \sum_{i=1}^{N_{s,total}} (V_{xi}^{inc} - V_{xi}^{ref}), \quad (3.57)$$

onde V_x^{inc} é a componente na direção x da velocidade das partículas incidentes, V_x^{ref} é a componente na direção x da velocidade das partículas refletidas e $N_{s,total}$ é o número total de colisões com a superfície da esfera durante o intervalo de tempo t .

3.3 Programa Numérico

3.3.1 Estrutura do Programa

O programa foi desenvolvido em Fortran 77 e consiste de uma série de subrotinas que são incluídas em um programa principal. No arquivo de parâmetros de entrada podemos modificar o número de Mach (Ma), o número de Knudsen (Kn), o número médio de partículas (INM), o número máximo de partículas (MNM), o incremento de tempo Δt e a geometria das células do campo de escoamento. O gerador de número aleatório R_f utilizado neste programa, foi o adotado por Bird [2]

em seus cálculos.

O sistema de notações escolhido foi o adimensional, para que o programa de simulação pudesse ser utilizado com qualquer gás monatômico, sem ter que se fazer grandes ajustes no programa, além da vantagem de não precisarmos especificar a temperatura e a pressão do gás.

Para adimensionalizarmos o problema, as seguintes grandezas foram utilizadas:

- i. A medida de comprimento é o raio da esfera R_s .
- ii. A medida da velocidade é a velocidade molecular mais provável v_{mp} , definido como:

$$v_{mp} = \left(\frac{2k_B T_\infty}{m} \right)^{1/2}. \quad (3.58)$$

- iii. A medida de tempo é o tempo médio entre as colisões sucessivas sofridas por qualquer partícula:

$$\bar{t} = \frac{\lambda_\infty}{v_{mp}}. \quad (3.59)$$

- iv. A medida de temperatura é a temperatura do gás no estado não-perturbado T_∞ .
- v. A medida de pressão é a pressão do gás no estado não-perturbado P_∞ .

O fluxograma do programa é dado na figura 3.6 e os seguintes passos são realizados no programa de simulação:

- Passo 1: Introdução dos parâmetros, inicialização das variáveis e divisão do campo de escoamento em células e sub-células. Cálculo e armazenamento das áreas dos elementos de superfície da esfera e do volume de cada célula. Os elementos de superfície da esfera estão desvinculados da célula, isto é, os elementos de superfície não precisam ter a mesma dimensão da célula próxima à superfície.

- Passo 2: Distribuição das partículas em um plano do espaço, com velocidade média determinada pelo número de Mach (Ma).
- Passo 3: Em um incremento de tempo Δt , movimentar as partículas, de acordo com a equação (3.41), ou seja, cálculo das posições novas. Se uma partícula sair do plano, a sua distância em relação à origem \mathbf{r} é mantida e o vetor posição é rotacionado até retornar ao plano, mantendo o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{v} .
- Passo 4: Se as partículas incidiram sobre a superfície, realizar a simulação da colisão, utilizando a lei de interação gás-superfície difusa. Para a simulação da interação, precisaremos da temperatura da superfície T_w , que depende das propriedades termodinâmicas do material. Para esta dissertação, vamos supor que a capacidade térmica da esfera é tão grande que a mesma mantém a temperatura T_∞ , portanto, $t_w = 1$.
- Passo 5: Como o movimento das partículas é livre, algumas partículas podem sair da região considerada. Estas partículas são desprezadas e retiradas da memória.
- Passo 6: De acordo com as condições de contorno, gerar partículas novas em todas as fronteiras da região considerada.
- Passo 7: Indexar, isto é, agrupar as partículas que estão na mesma sub-célula.
- Passo 8: As colisões serão consideradas binárias e a etapa de colisão é dividida basicamente em três estágios:
 - 1) Cálculo do número de pares a serem testados para a colisão, utilizando a equação (3.42).
 - 2) Escolher a primeira partícula em uma célula e a segunda é escolhida dentro da mesma sub-célula da primeira. Caso não haja uma segunda partícula na

mesma sub-célula, esta é escolhida de uma sub-célula próxima.

3) O par é aceito para colidir de acordo com o método da Aceitação-Rejeição, vide Apêndice A, isto é, o par com maior velocidade relativa tem maior probabilidade de colidir.

4) Se o par for aceito, os valores iniciais das componentes da velocidade e de posição das partículas são substituídos pelos valores obtidos após a colisão, utilizando as equações da dinâmica das colisões da Seção 3.1.3. Caso contrário as partículas mantêm as suas velocidades.

Os estágios 2), 3) e 4) são repetidos N_{pares} de vezes, calculado no estágio 1), sendo que N_{pares} nos fornece o número de pares a serem testados para a colisão.

- Passo 9: Realizamos a amostragem em todas as células. Em cada célula amostrada, as propriedades macroscópicas são calculadas, segundo os procedimentos das equações (3.50)-(3.53).
- Passo 10: Nos elementos de superfície da esfera são calculados os coeficientes, segundo os procedimentos das equações (3.54)-(3.57).
- Passo 11: Após determinado tempo, verificar se o sistema atingiu a precisão necessária e se as flutuações são aceitáveis. Caso afirmativo, registrar os dados de saída. Do contrário, repetimos o processo a partir do Passo 3. Os resultados finais foram obtidos através de uma solução pela média temporal, após um grande número de intervalos de tempo (10.000), que foi suficiente para obtermos a convergência do coeficiente de arrasto, isto é, a flutuação do coeficiente C_D menor do que 1%.

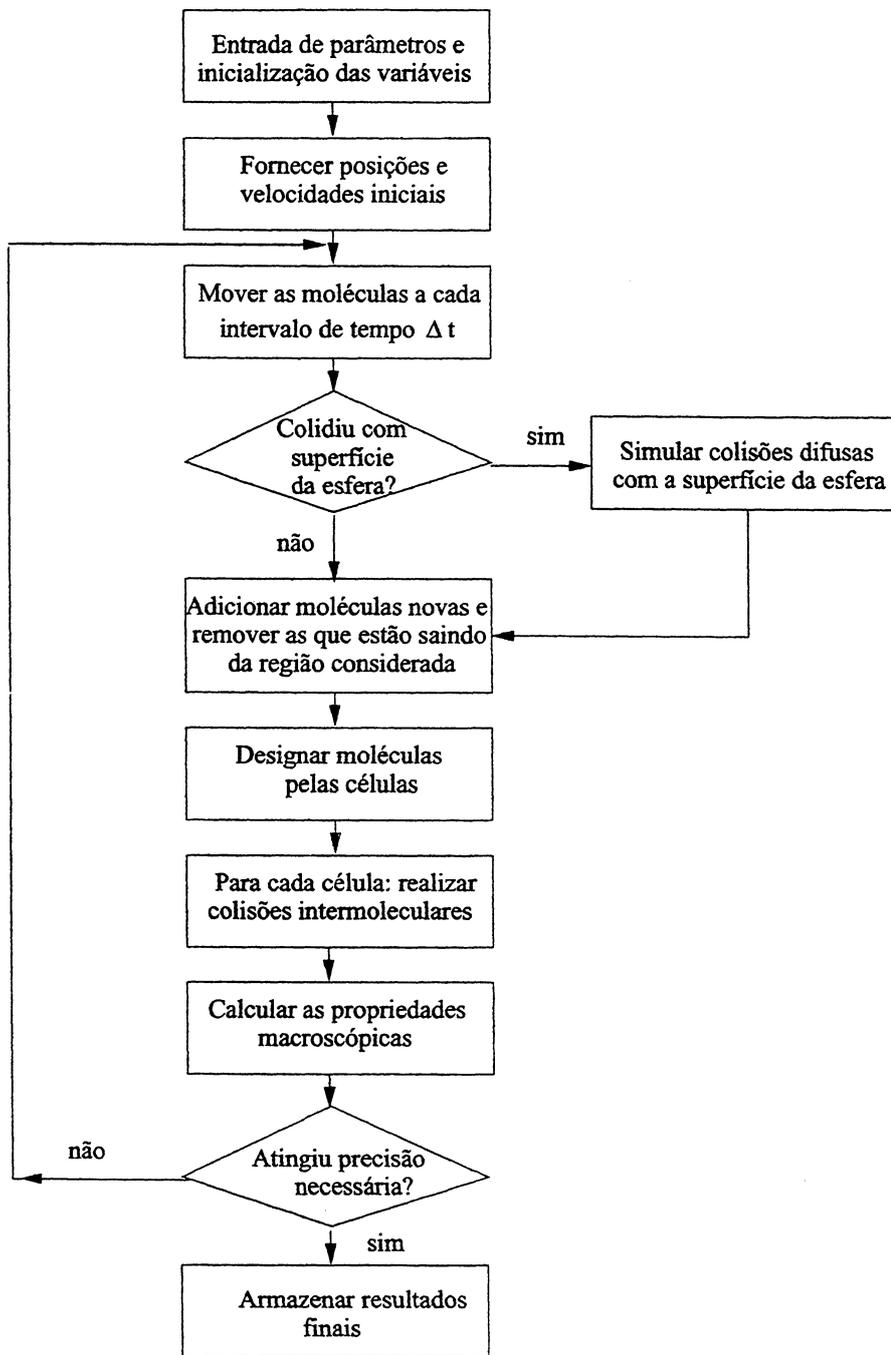


Figura 3.6: Fluxograma do programa desenvolvido

3.3.2 Sistema de Células

O esquema de células escolhido foi o de grades retangulares de níveis múltiplos [2]. Este esquema é um aperfeiçoamento da grade retangular simples, que é de fácil implementação e razoavelmente eficiente computacionalmente. Mas, a grade retangular simples apresenta algumas desvantagens, tais como quando há grandes variações na densidade, algumas células concentrarão muito mais que o número adequado de partículas simuladas, enquanto que outras muito menos, além do que se os limites da superfície não forem retangulares, as células efetivas próximas desses limites são irregulares e o esquema não é adequado para cálculos para números de Knudsen (Kn) baixos. Também, como a estrutura da célula não está relacionada com a geometria da superfície, cada superfície diferente exige uma codificação especial dentro do programa. Por isso, escolhemos o esquema de grade retangular multi-nível, que alivia algumas das desvantagens citadas acima, pela utilização de células menores na região ao redor da esfera.

O escoamento é 2-D axialmente simétrico e a região de interesse do escoamento do gás tem simetria cilíndrica, com raio do campo de escoamento NR e comprimento do campo à esquerda da esfera NSL somado ao comprimento do campo à direita da esfera NSR , vide figura 3.7. Próximo à esfera, há uma outra região de pequenas células, sendo SML a distância do campo à esquerda da esfera (células pequenas) e SMR a distância do campo à direita da esfera (células pequenas), com altura RSM . O programa de simulação permite a mudança na configuração do campo de escoamento, sendo que após testes preliminares com vários tamanhos de campo, escolhemos a configuração 3-1-2 ($NSR = 3R_s$, $NSL = R_s$, $NR = 2R_s$). Para a região de pequenas células, escolhemos $SMR = 2,5R_s$, $SML = 0,5R_s$ e $RSM = 1,5R_s$.

Após delimitarmos as fronteiras da região de escoamento, dividimos em um sistema de 1548 células com largura $CW = R_s/12$ e altura $CH = R_s/6$ e cada célula

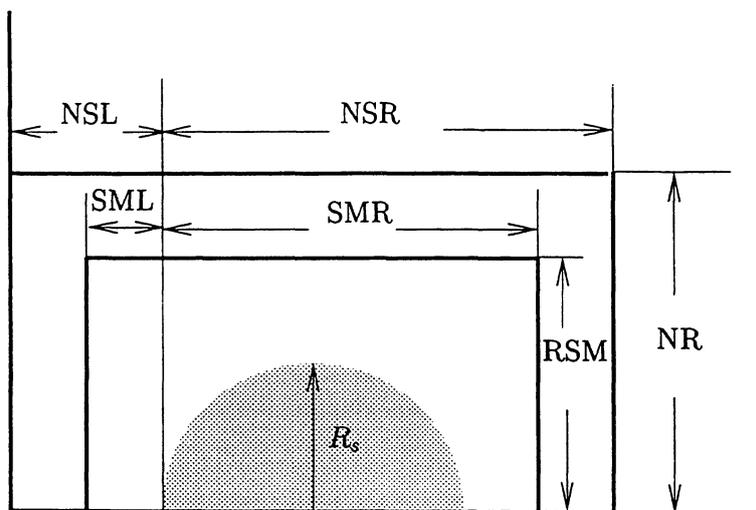


Figura 3.7: Geometria do campo de escoamento.

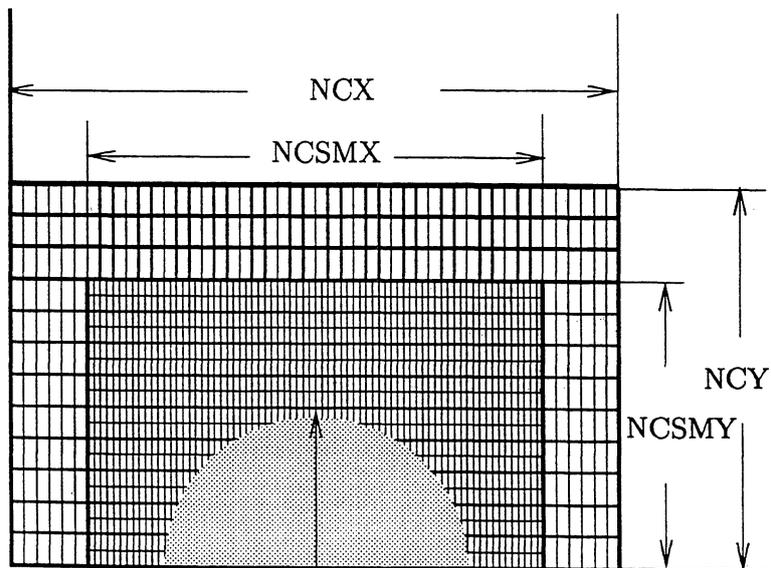


Figura 3.8: Geometria das células.

foi sub-divida em 4 sub-células, totalizando 6192 sub-células. Na figura 3.8 podemos observar a geometria das células. Sendo que trabalhamos com NCSMX (NCSMX = 72), que é o número de pequenas células na direção x , NCSMY (NCSMY = 18) o número de pequenas células na direção y , NCX (NCX = 48) o número de células na direção x e NCY (NCY = 12) o número de células na direção y .

Um ponto importante que deve ser considerado é a correção do volume da célula na fronteira com a esfera. Através da figura 3.9, podemos observar que, o fato de termos escolhido este tipo de malha, o qual não se ajusta à superfície da esfera, pode nos levar a erros ao amostrarmos a célula como um todo. No nosso programa de simulação, realizamos esta correção no volume da célula.

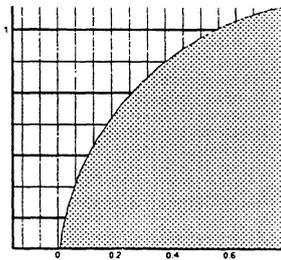


Figura 3.9: Ampliação da região de células pequenas

3.3.3 Outros Parâmetros do Programa

As aproximações computacionais são introduzidas pela troca das partículas reais por um número muito menor de partículas simuladas, pelo tamanho da célula Δr e pelo intervalo de tempo Δt . É esperado que resultados melhores sejam obtidos com o uso do maior número possível de partículas simuladas, para um Δr o menor possível em comparação com o livre caminho médio λ e para um Δt o menor possível em comparação com o tempo médio entre colisões. Mas, pelo bem da eficiência computacional, estes valores são limitados. Então, utilizamos na média 10^6 partículas

modelo e um incremento de tempo Δt igual a $0,01 \bar{t}$, onde \bar{t} é o tempo médio entre as colisões sucessivas sofridas por uma partícula, dado pela equação (3.59).

Os programas foram rodados na máquina Alpha 667 MHz Dual, usando as duas CPU's. O número de iterações realizadas na etapa de acumulação estatística foi de 10.000 e o tempo computacional para cada programa varia com o número de Knudsen de 1 dia a 4 semanas. No total rodamos 26 programas, variando os números de Knudsen e de Mach.

Capítulo 4

Resultados e Discussão

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos com o programa de simulação, utilizando o Método DSMC para números de Mach (Ma) igual a 10 e 20, no intervalo do número de Knudsen (Kn) de 0,01 a 100. O gás considerado é o monatômico, cujo modelo molecular é o da esfera rígida, com interação gás-superfície sendo assumido como difuso, ou seja, com completa acomodação.

4.1 Coeficiente de Arrasto

No gráfico 4.1 apresentamos o coeficiente de arrasto C_D em função do número de Knudsen. Os dados numéricos são apresentados também na tabela B.1. Podemos observar que no regime de moléculas livres, o coeficiente C_D é 40 % maior do que no regime contínuo. Isto é, não podemos utilizar as equações do contínuo para números de Knudsen elevados.

Além disso, a maior variação do coeficiente C_D ocorre no intervalo $0,1 < Kn < 40$, no qual também ocorre a inversão das curvas, ou seja, para $Kn < 1$ os valores do coeficiente C_D para $Ma = 20$ se tornam maiores do que para $Ma = 10$, ocorrendo o contrário para $Kn > 1$.

Podemos observar também que quando Kn é igual a 100, temos um coeficien-

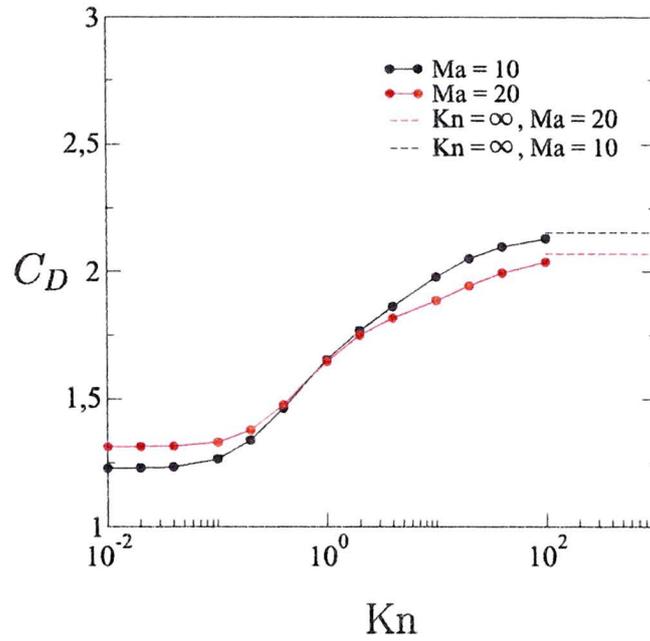


Figura 4.1: Coeficiente de Arrasto C_D vs número de Knudsen

te C_D igual a 2,1296 para número de Mach igual a 10, que é próximo do valor teórico dado pela equação (2.6). Para Ma igual a 20, o coeficiente C_D é igual a 2,0365, também concordando com a solução analítica. Além disso, este valor é próximo ao valor para o limite em que $Ma \gg 1$, o qual é $C_D = 2$.

4.2 Coeficiente de Pressão

Os resultados para o coeficiente de pressão C_P em função do ângulo θ , definido na figura 1.3 são apresentados nas figuras 4.2 e 4.3, para Ma igual a 10 e 20, respectivamente. Apresentamos também os resultados numéricos obtidos para estes dois coeficientes no Apêndice B, nas tabelas B.2 e B.3

A primeira observação que podemos fazer é a fraca dependência do coeficiente de pressão C_P com o número de Knudsen (Kn). Além do que, para $\text{Kn} = 100$, os valores do coeficiente C_P praticamente coincidem com os valores obtidos para $\text{Kn} = \infty$, calculados através da equação (2.2). Por outro lado, os valores dos coeficientes C_P não apresentam muitas diferenças para números de Mach (Ma) 10 e 20. O máximo de C_P está na parte da frente da esfera, em θ igual a zero. Na parte de trás da esfera, o coeficiente C_P se anula.

4.3 Coeficiente de Atrito

Nas figuras 4.4 e 4.5 apresentamos os coeficientes de atrito C_F em função do ângulo θ para números de Mach 10 e 20, respectivamente. Os dados numéricos para estes dois coeficientes se encontram nas tabelas B.4 e B.5.

Os efeitos da rarefação podem ser observados, comparando os resultados para diferentes números de Knudsen (Kn), com os resultados para o regime de moléculas livres, que foi calculado analiticamente. Ocorre um aumento significativo do valor do coeficiente C_F com o aumento de Kn, indicando uma grande sensibilidade do coeficiente C_F em relação ao grau de rarefação do gás. Para Kn igual a 100, temos um resultado do coeficiente C_F muito próximo ao resultado obtido para $\text{Kn} = \infty$, calculado através da equação (2.4).

Não há grande sensibilidade do coeficiente C_F com o número de Mach (Ma), pois os perfis são praticamente os mesmos para Ma igual a 10 e 20, com exceção no

regime hidrodinâmico ($Kn = 0,01$), em que a diferença é de 23 % do coeficiente C_F para $Ma = 10$ em relação a $Ma = 20$.

O máximo do coeficiente C_F ocorre nas vizinhanças de $\theta = \pi/4$. Para ângulos acima de $\pi/2$, que corresponde à parte de trás da esfera, o coeficiente se anula.

4.4 Coeficiente de Transferência de Calor

As distribuições do coeficiente de transferência de calor C_H em função do ângulo θ são apresentadas nas figuras 4.6 e 4.7, para Ma igual a 10 e 20, respectivamente. Nas tabelas B.6 e B.7 apresentamos os resultados numéricos para estes coeficientes.

Podemos observar a grande sensibilidade do coeficiente C_H com o número de Knudsen, sendo que o coeficiente aumenta com o grau de rarefação. Para Kn igual a 100, temos um resultado do coeficiente C_H muito próximo do resultado para $Kn = \infty$, calculado através da equação (2.5).

Para números de Knudsen mais elevados, os perfis dos coeficientes C_H para Ma igual a 10 e 20 são similares, porém, no regime hidrodinâmico, para Ma igual a 10, C_{Hmax} é igual a 0,4 e para Ma igual a 20, C_{Hmax} é igual a 0,5, ou seja a diferença é de 20 %.

O máximo do coeficiente C_H ocorre em θ igual a zero. Na parte de trás da esfera, $\theta > \pi/2$, o coeficiente se anula.

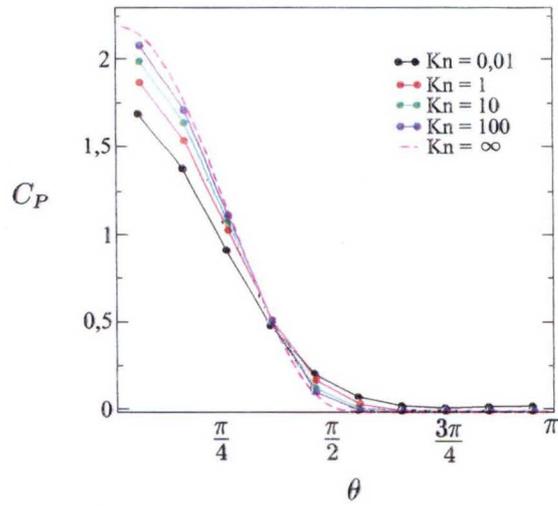


Figura 4.2: Coeficiente de Pressão C_P vs ângulo θ para $Ma = 10$

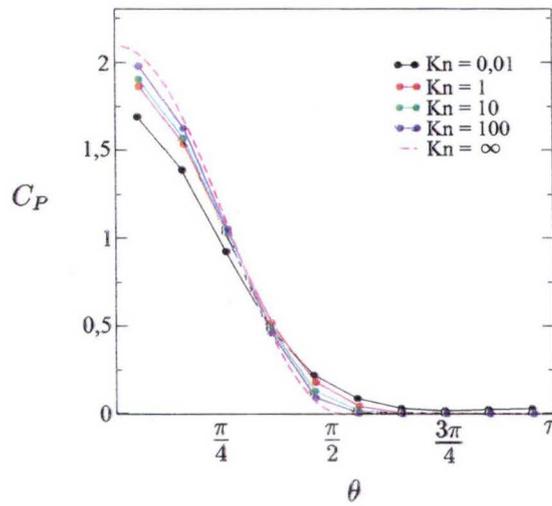


Figura 4.3: Coeficiente de Pressão C_P vs ângulo θ para $Ma = 20$

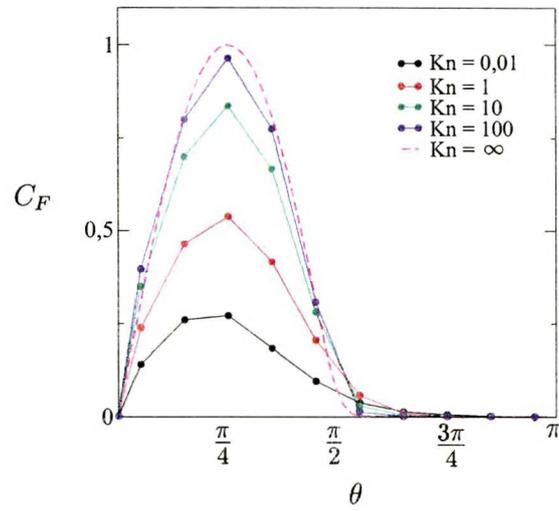


Figura 4.4: Coeficiente de Atrito C_F vs ângulo θ para $Ma = 10$

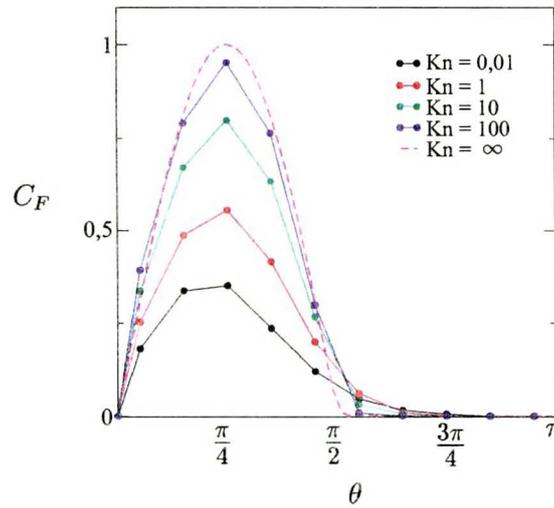


Figura 4.5: Coeficiente de Atrito C_F vs ângulo θ para $Ma = 20$

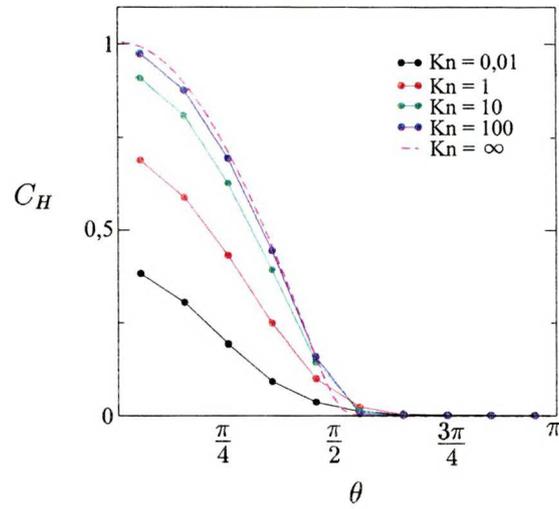


Figura 4.6: Coeficiente de Transferência de Calor C_H vs ângulo θ para $Ma = 10$

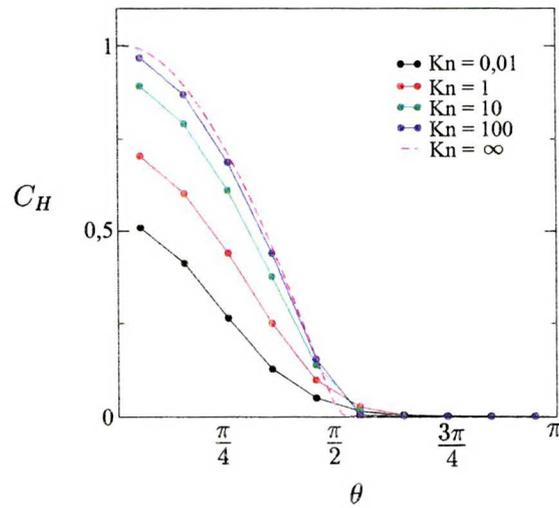


Figura 4.7: Coeficiente de Transferência de Calor C_H vs ângulo θ para $Ma = 20$

4.5 Distribuição de Densidade

Nas figuras 4.8 a), b) e c) apresentamos a distribuição de densidade n/n_∞ no espaço ao redor da esfera, para números de Knudsen (Kn) igual a 0,01, 1 e 100, respectivamente, para número de Mach (Ma) igual a 10. A mesma grandeza é apresentada nas figuras 4.9 a), b) e c), para Ma igual a 20.

Nas figuras 4.8 a) e 4.9 a) observamos uma grande variação de densidade em uma distância muito pequena, caracterizando uma onda de choque. As distribuições n/n_∞ são semelhantes para Ma igual a 10 e 20, com uma pequena diferença na parte de trás da esfera, onde a densidade n/n_∞ é maior para Ma igual a 20.

Em 4.8 b) e 4.9 b) podemos observar uma variação na distribuição n/n_∞ na frente da esfera, sendo uma onda de choque muito mais fraca, mais afastada e mais estendida em comparação com 4.8 a) e 4.9 a). Na parte de trás da esfera, há o início do que chamamos de "sombra", ou seja, uma região com baixa densidade, caracterizada pela pouca quantidade de partículas, pois a maioria passa por cima da esfera com a mesma velocidade de corrente livre.

Em 4.8 c) e 4.9 c) a "sombra" atrás da esfera é mais nítida e a grande maioria permanece com a mesma velocidade de corrente livre. Mas, na região frontal da esfera, comparando as distribuições de n/n_∞ para Ma igual a 10 e 20, para este último a região é maior.

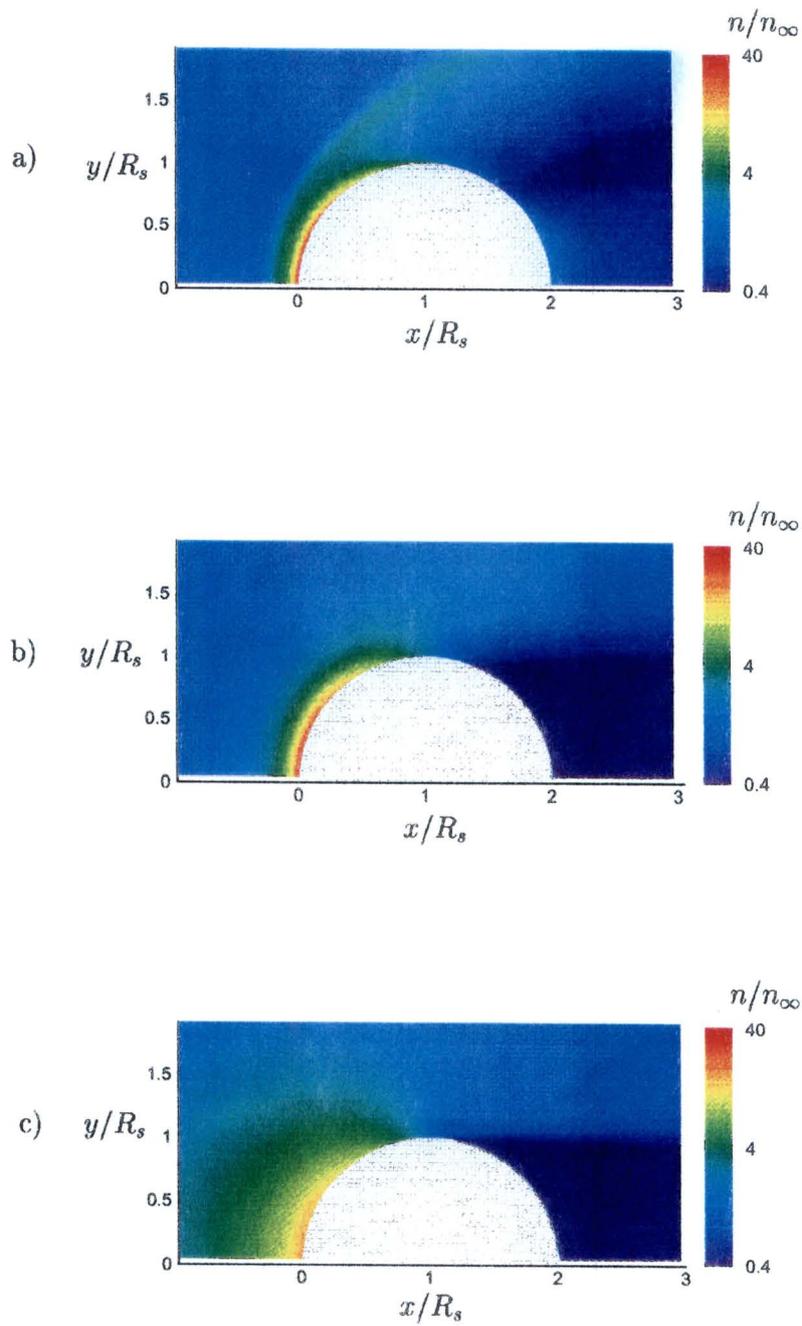


Figura 4.8: Distribuição de densidade n/n_∞ para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$

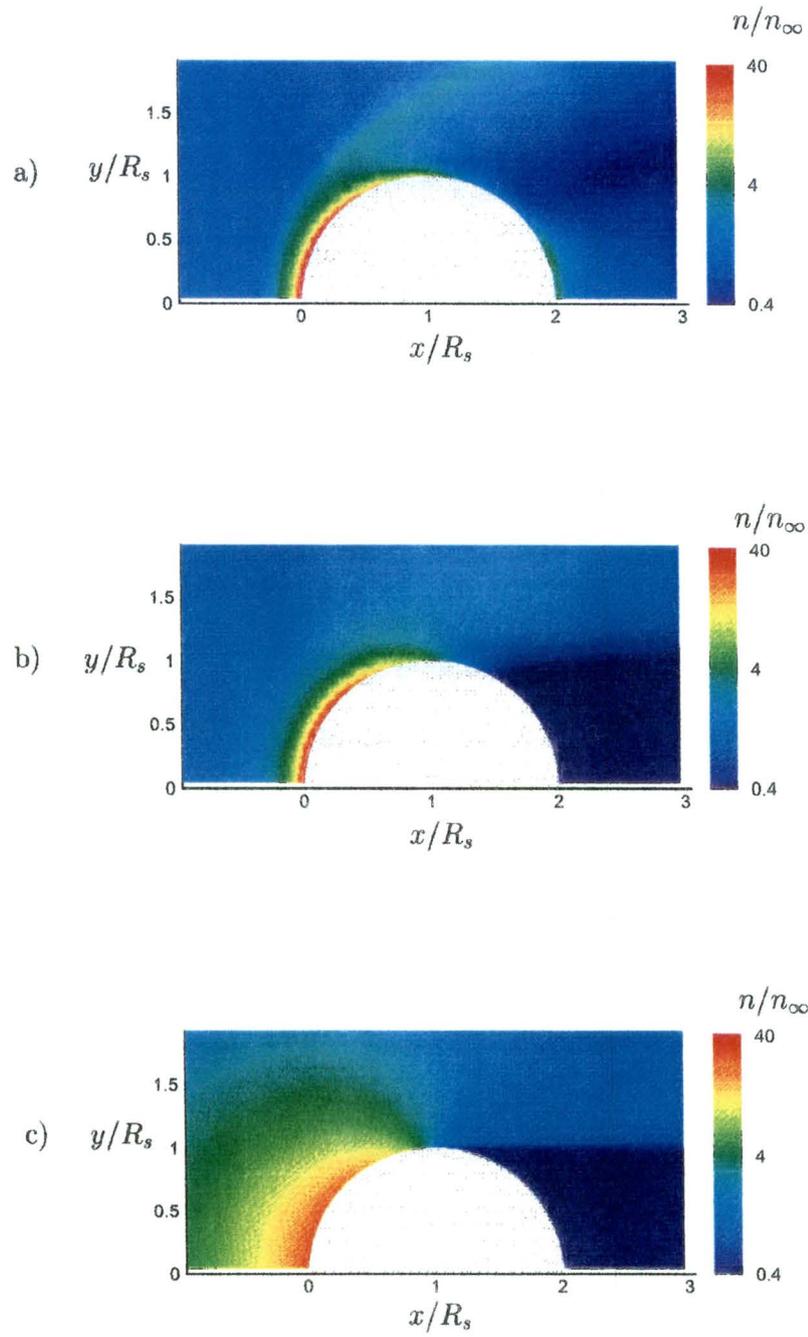


Figura 4.9: Distribuição de densidade n/n_∞ para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$

4.6 Distribuição de Temperatura

Nas figuras 4.10 e 4.11 apresentamos as distribuições de temperatura T/T_∞ para número de Mach (Ma) igual a 10 e 20, respectivamente, nos regimes hidrodinâmico ($Kn = 0,01$), de transição ($Kn = 1$) e de moléculas livres ($Kn = 100$).

Em 4.10 a) e 4.11 a), na região vermelha, a temperatura é muito alta, sendo 16 vezes a temperatura do gás não-perturbado, para $Ma = 10$ e 49 vezes para $Ma = 20$. Observando a diferença nas escalas. Na região bem próxima da parte frontal da esfera ocorre o fenômeno da camada limite, onde a temperatura é menor comparada com a região vermelha.

Nas figuras 4.10 b) e 4.11 b), a camada limite é um pouco mais espessa e a região de temperatura mais elevada também é maior.

Em 4.10 c) e 4.11 c), na região azul, onde a temperatura é baixa pois nesta região não há partículas refletidas, as partículas têm a velocidade de corrente livre. Na frente da esfera também, mas porque o número de partículas refletidas é muito grande e na média com as velocidades das partículas incidentes (com velocidade alta), a temperatura (que depende da velocidade peculiar) naquelas células diminui. Na região vermelha, a temperatura se mostra grande, há partículas refletidas, mas a maioria das partículas têm a velocidade de corrente livre.

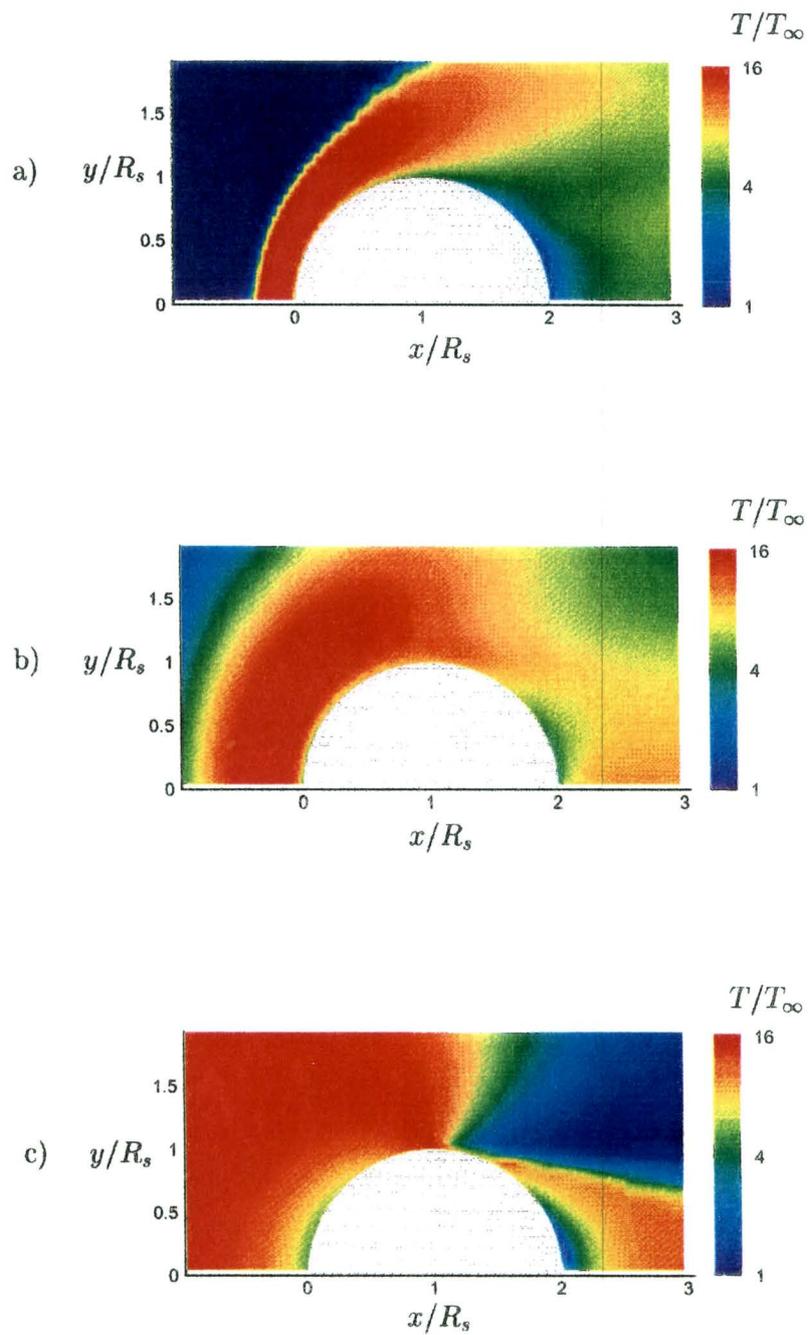


Figura 4.10: Distribuição de temperatura T/T_∞ para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$

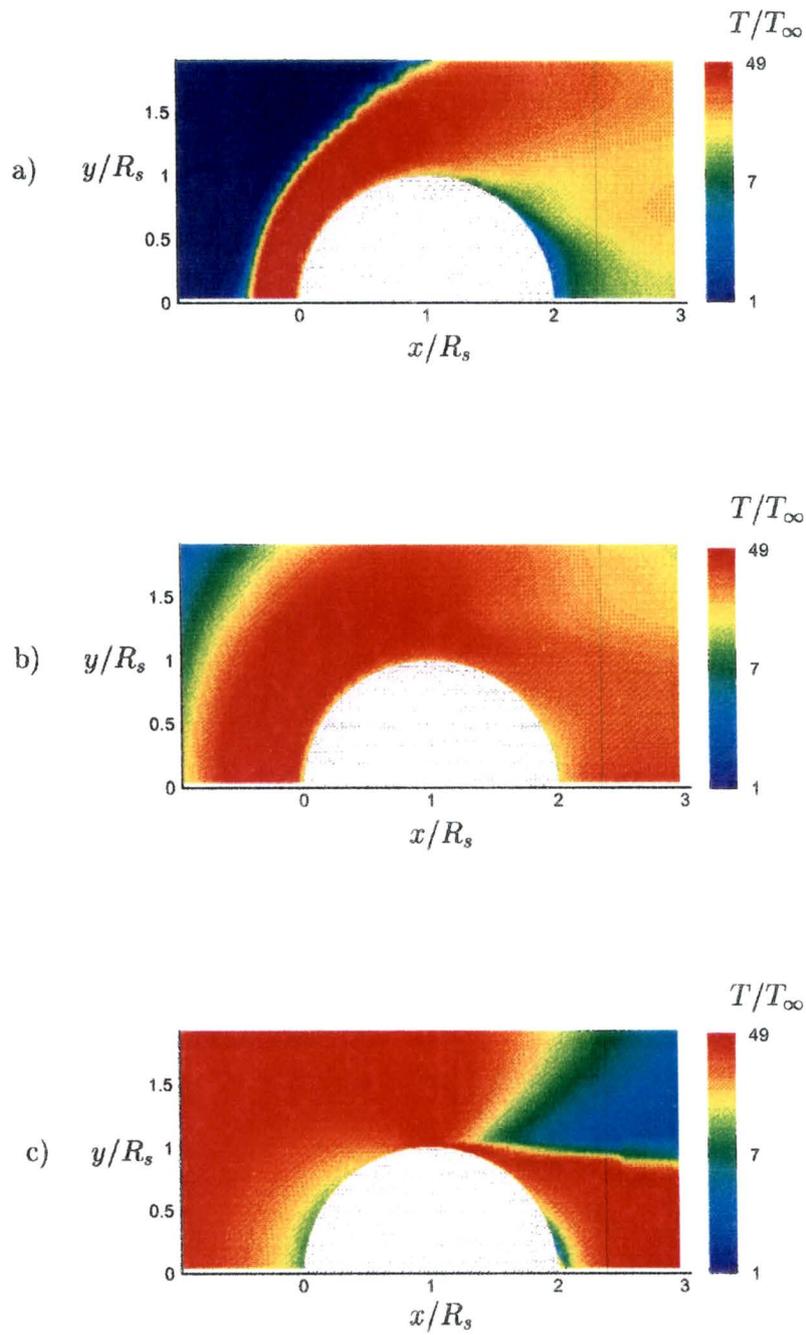


Figura 4.11: Distribuição de temperatura T/T_∞ para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$

4.7 Distribuição de Número de Mach Local

Apresentamos a distribuição de número de Mach local Ma_{local} e das linhas de correntes nas figuras 4.12 e 4.13, para números de Mach (Ma) igual a 10 e 20, respectivamente.

Nas figuras 4.12 a) e 4.13 a), ou seja, para $Kn = 0,01$, podemos observar uma forte onda choque, próxima à esfera e a ocorrência do vórtice atrás da esfera, característico de um regime hidrodinâmico. As distribuições são parecidas para $Ma = 10$ e 20, porém, as escalas de número de Mach local são diferentes.

Em 4.12 b) e 4.13 b), ou seja, para $Kn = 1$, a região vermelha, com número de Mach local grande, possui as linhas de corrente paralelas ao eixo de simetria, porém, à medida que o número de Mach local diminui, as linhas de corrente tendem a acompanhar o formato do objeto. Ainda há uma região de baixa velocidade atrás da esfera, mas já não ocorrem vórtices.

Em 4.12 c) e 4.13 c), ou seja, para $Kn = 100$, podemos observar que para número de Mach local pequeno, a temperatura é grande, pois as partículas refletidas possuem uma velocidade muito menor que as partículas com velocidade da corrente livre e na média, o número de Mach local fica pequeno naquelas células. Na região vermelha a velocidade é praticamente a velocidade de corrente livre.

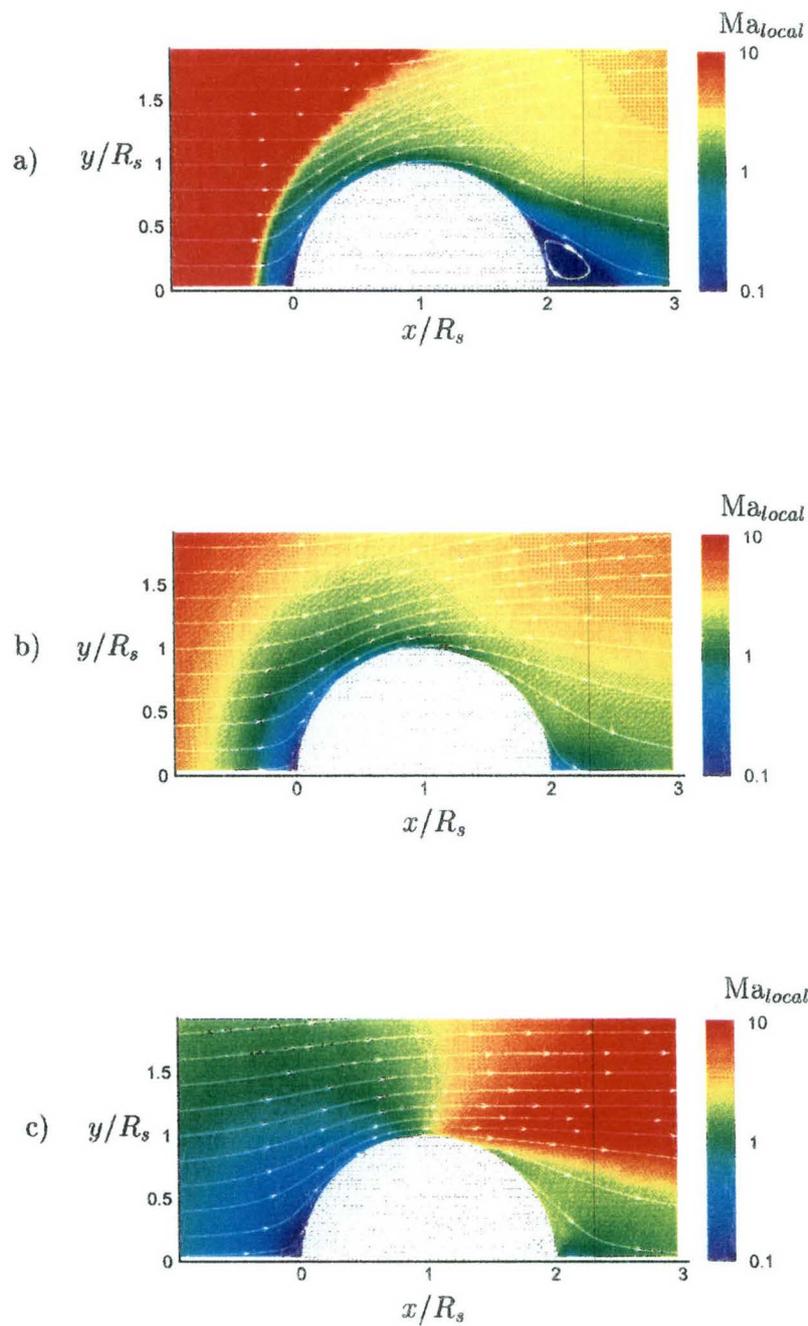


Figura 4.12: Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$

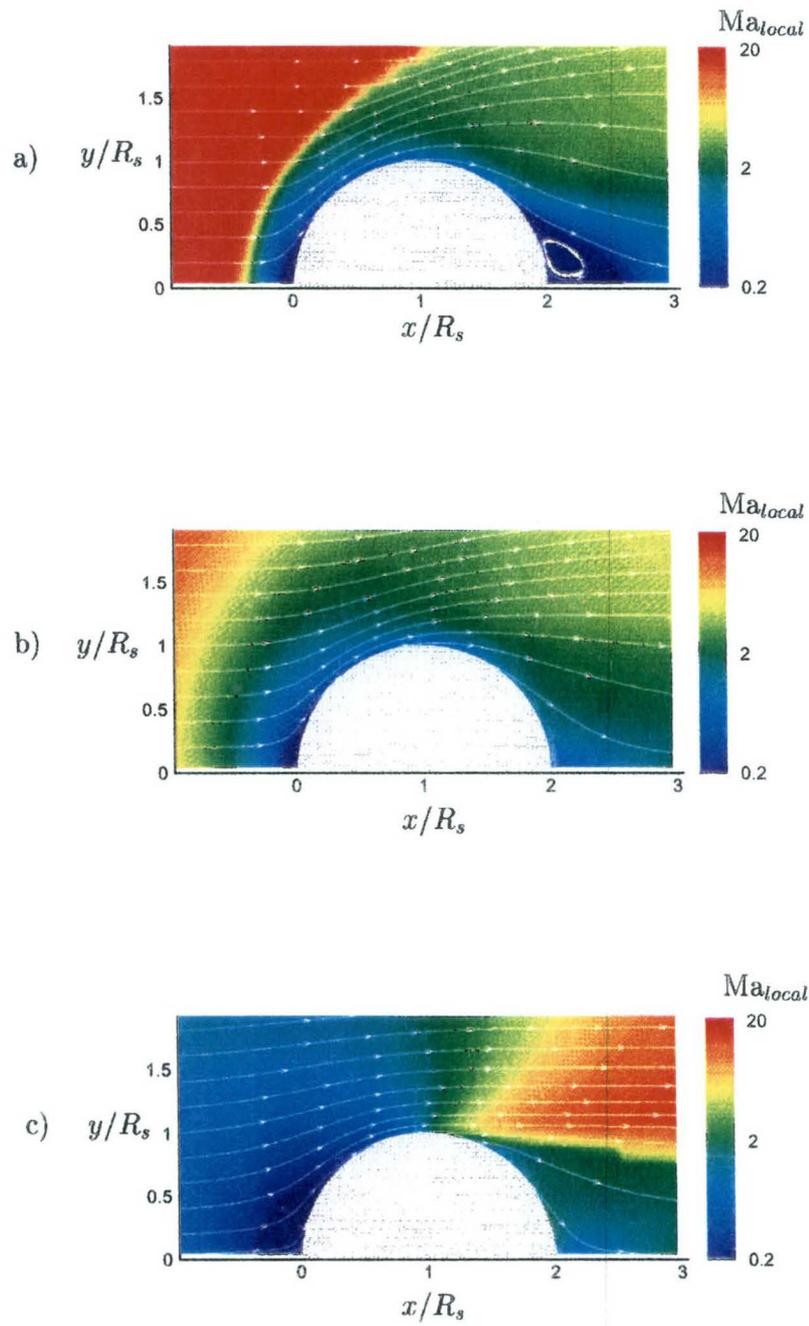


Figura 4.13: Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,01$, b) $Kn = 1$ e c) $Kn = 100$

4.8 Número de Knudsen Crítico

Através dos dados obtidos, foi possível obter o número de Knudsen (Kn) crítico, ou pelo menos termos uma noção deste número, já que fixamos o número de Mach (Ma) e variamos o número de Knudsen dentro de uma grande faixa. Então, ao verificarmos que para $Kn = 0,01$ ocorreram os vórtices, buscamos dentro dos nossos dados, o número de Knudsen no qual os vórtices se iniciavam, obtendo assim, o número de Knudsen crítico. Para $Ma = 10$, podemos observar que em 4.14 a), em que o $Kn = 0,04$, ainda não há a ocorrência de vórtice, mas para 4.14 b), em que $Kn = 0,02$ já há vórtice. Então podemos concluir que o número de Knudsen crítico está entre $0,02 > Kn > 0,04$.

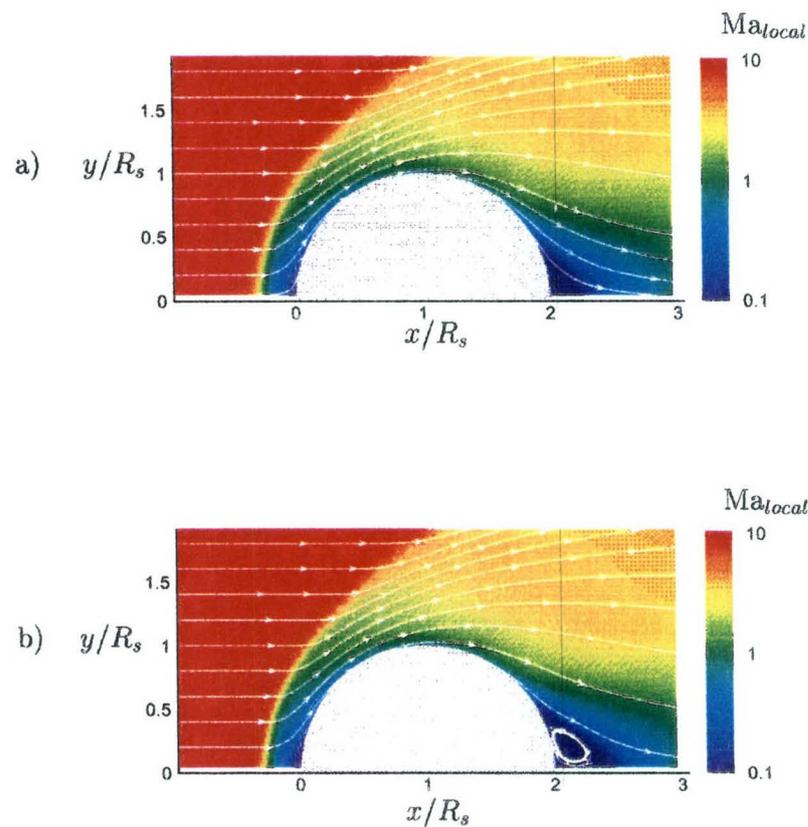


Figura 4.14: Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 10$: a) $Kn = 0,04$ e b) $Kn = 0,02$

Para número de Mach igual a 20, observamos que em 4.15 a), em que o número de Knudsen é igual a 0,1, não há vórtice e que em 4.15 b), já há o início do vórtice para $Kn = 0,04$. Portanto, podemos considerar que $Kn = 0,04$ seja o número de Knudsen crítico.

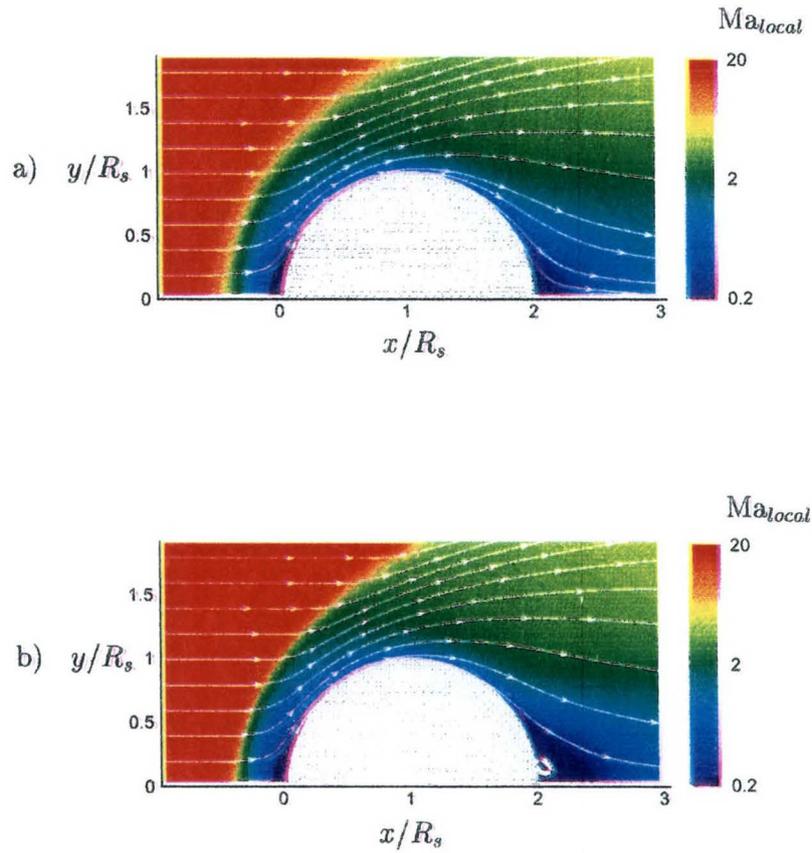


Figura 4.15: Distribuição de número de Mach local Ma_{local} para $Ma = 20$: a) $Kn = 0,1$ e b) $Kn = 0,04$

Capítulo 5

Conclusões

- Foi obtida a solução do problema do escoamento hipersônico de um gás rarefeito ao redor de uma esfera que é válida para todos os regimes, ou seja, para uma faixa grande do número de Knudsen (Kn) de 0,01 a 100.
- As soluções para os regimes de moléculas livres ($Kn = 100$) e hidrodinâmico ($Kn = 0,01$) são totalmente diferentes e estão de acordo com as previsões, isto é, para $Kn = 100$, obtemos resultados que coincidem com as soluções analíticas no limite em que $Kn = \infty$ e para $Kn = 0,01$ a ocorrência da onda de choque e do vórtice, que são fenômenos característicos do regime hidrodinâmico.
- Nesta dissertação utilizamos moléculas monatômicas, mas podemos generalizar o problema para uma mistura de gases de moléculas diatômicas.
- Como o programa consiste de subrotinas para cada etapa da simulação, podemos alterar o formato do corpo, modificando apenas a subrotina em que é realizada o teste que verifica se a trajetória da partícula cruza a superfície do corpo.
- Verificamos que o tipo de grade utilizado é adequado, apesar de não ser ajustado ao formato do objeto escolhido, pois foi realizada a correção do volume da célula próxima à superfície da esfera.

- Apesar da necessidade de um grande número de moléculas modelo para representar um gás real, o valor escolhido 10^6 se mostrou suficiente para minimizar o efeito das flutuações estatísticas.

Trabalhos Futuros

Tendo em vista o problema do cálculo das características aerotermodinâmicas do Satélite Brasileiro de Reentrada (um projeto financiado pela Agência Espacial Brasileira), as seguintes generalizações poderão ser feitas no programa:

- Consideração de um objeto mais complexo.
- Utilização de outros tipos de gases, como misturas de moléculas diatômicas.
- Utilização de outros modelos moleculares.
- Utilização de outros tipos de interação gás-superfície.
- Consideração dos processos de dissociação, recombinação e ablação.

Apêndice A

Método da Aceitação-Rejeição

A distribuição da variável x pode ser descrita por uma função distribuição tal que a probabilidade de um valor x se encontrar entre x e $x + dx$ é dado por:

$$f(x)dx. \quad (\text{A.1})$$

Se a faixa de x é de a a b , a probabilidade total é

$$\int_a^b f(x)dx = 1. \quad (\text{A.2})$$

Vamos definir a função de distribuição cumulativa como:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx. \quad (\text{A.3})$$

Vamos gerar um número aleatório e fazê-lo igual a $F(x)$. Então, o valor representativo de x é dado por:

$$F(x) = R_f. \quad (\text{A.4})$$

Por exemplo, considere que x varia entre a e b . Para o caso de $f(x)$ ser uma

constante e a condição de normalização exige que:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad (\text{A.5})$$

então,

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}. \quad (\text{A.6})$$

Comparando,

$$\frac{x-a}{b-a} = R_f. \quad (\text{A.7})$$

Portanto,

$$x = a + R_f (b-a). \quad (\text{A.8})$$

De modo a fazer uso direto do número aleatório, a função de distribuição é normalizada:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f_{max}}. \quad (\text{A.9})$$

Um valor de x é escolhido aleatoriamente, a função $f'(x)$ é calculado para este valor de x e um segundo número aleatório é gerado. O valor de x é ou não aceito se $f'(x)$ é maior ou menor que R_f . O procedimento é repetido até que um valor de x seja aceito. Como R_f é distribuído uniformemente entre 0 e 1, a probabilidade de um valor em particular de x ser aceito é proporcional a $f'(x)$ e os valores aceitos concordam com esta distribuição [2].

Apêndice B

Dados numéricos

Kn	C_D	
	Ma = 10	Ma = 20
0,01	1,2289	1,3132
0,02	1,2298	1,3136
0,04	1,2334	1,3153
0,1	1,2654	1,3313
0,2	1,3394	1,3790
0,4	1,4649	1,4788
1,0	1,6529	1,6461
2,0	1,7673	1,7494
4,0	1,8615	1,8170
10,0	1,9788	1,8852
20,0	2,0503	1,9426
40,0	2,0973	1,9939
100,0	2,1296	2,0365

Tabela B.1: Coeficientes de Arrasto C_D vs Número de Knudsen (Kn)

θ	C_P												
	Kn = 0,01	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1	2	4	10	20	40	100
0,157	1,68866	1,68751	1,68819	1,70592	1,74658	1,80349	1,87033	1,89913	1,92830	1,98730	2,02924	2,05858	2,07870
0,471	1,37913	1,37837	1,37771	1,38844	1,42107	1,47343	1,53791	1,56605	1,59074	1,63833	1,67269	1,69580	1,71158
0,785	0,91166	0,91107	0,90903	0,90861	0,92883	0,97193	1,02611	1,04488	1,05561	1,07724	1,09414	1,10591	1,11346
1,100	0,47806	0,47704	0,47185	0,46217	0,46784	0,48810	0,51191	0,51446	0,50947	0,50520	0,50442	0,50351	0,50291
1,414	0,20398	0,20220	0,19659	0,18562	0,18010	0,17785	0,17005	0,15655	0,14051	0,12127	0,11030	0,10305	0,09777
1,728	0,06964	0,06771	0,06359	0,05563	0,04781	0,03936	0,02778	0,01901	0,01109	0,00217	-0,00286	-0,00618	-0,00851
2,042	0,01597	0,01475	0,01237	0,00668	0,00129	-0,00321	-0,00692	-0,00838	-0,00933	-0,01038	-0,01102	-0,01146	-0,01177
2,356	0,00340	0,00192	-0,00085	-0,00627	-0,00945	-0,01091	-0,01160	-0,01176	-0,01183	-0,01189	-0,01193	-0,01196	-0,01198
2,670	0,01053	0,00820	0,00184	-0,00846	-0,01132	-0,01186	-0,01197	-0,01199	-0,01200	-0,01200	-0,01200	-0,01200	-0,01200
2,985	0,01517	0,01497	0,00954	-0,00762	-0,01153	-0,01196	-0,01200	-0,01200	-0,01200	-0,01200	-0,01200	-0,01200	-0,01200

Tabela B.2: Coeficientes de Pressão C_P vs Ângulo θ para $Ma = 10$

θ	C_P												
	$Kn = 0,01$	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1	2	4	10	20	40	100
0,157	1,69065	1,69082	1,69073	1,70055	1,73368	1,78922	1,86266	1,89436	1,89849	1,90349	1,92764	1,95512	1,97891
0,471	1,38602	1,38509	1,38406	1,38997	1,41525	1,46324	1,53088	1,55975	1,56426	1,56626	1,58379	1,60460	1,62300
0,785	0,92178	0,92101	0,91995	0,92208	0,93581	0,97014	1,02385	1,04507	1,04225	1,03145	1,03350	1,04001	1,04633
1,100	0,48848	0,48830	0,48677	0,48144	0,47954	0,49160	0,51346	0,51651	0,50593	0,48614	0,47573	0,46890	0,46344
1,414	0,21841	0,21795	0,21573	0,20424	0,19226	0,18533	0,17620	0,16356	0,14734	0,12524	0,11008	0,09785	0,08753
1,728	0,08222	0,08157	0,07847	0,06847	0,05892	0,04977	0,03821	0,02972	0,02242	0,01443	0,00891	0,00434	0,00047
2,042	0,02702	0,02596	0,02354	0,01759	0,01139	0,00627	0,00229	0,00076	-0,00007	-0,00084	-0,00147	-0,00206	-0,00257
2,356	0,01339	0,01238	0,00997	0,00453	0,00025	-0,00172	-0,00255	-0,00274	-0,00280	-0,00284	-0,00288	-0,00293	-0,00297
2,670	0,02066	0,01924	0,01414	0,00254	-0,00201	-0,00282	-0,00297	-0,00299	-0,00299	-0,00300	-0,00300	-0,00300	-0,00300
2,985	0,02552	0,02526	0,02201	0,00420	-0,00229	-0,00294	-0,00300	-0,00300	-0,00300	-0,00300	-0,00300	-0,00300	-0,00300

Tabela B.3: Coeficientes de Pressão C_P vs Ângulo θ para $Ma = 20$

θ	C_F												
	$Kn = 0,01$	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1	2	4	10	20	40	100
0,157	0,14057	0,14069	0,14200	0,14812	0,16239	0,18893	0,23716	0,27442	0,30881	0,34814	0,37050	0,38486	0,39486
0,471	0,25959	0,25975	0,26030	0,27089	0,30101	0,35852	0,46306	0,54351	0,61585	0,69958	0,74713	0,77780	0,79906
0,785	0,27103	0,27104	0,27160	0,28442	0,32425	0,40100	0,53804	0,64005	0,73047	0,83539	0,89591	0,93569	0,96318
1,100	0,18357	0,18337	0,18299	0,19574	0,23240	0,29870	0,41458	0,50126	0,57774	0,66603	0,71725	0,75033	0,77384
1,414	0,09554	0,09485	0,09484	0,10571	0,12669	0,15836	0,20427	0,23273	0,25548	0,27954	0,29265	0,30130	0,30698
1,728	0,03785	0,03769	0,03938	0,04672	0,05341	0,05844	0,05745	0,04994	0,04004	0,02759	0,02037	0,01559	0,01222
2,042	0,01360	0,01446	0,01607	0,01741	0,01598	0,01308	0,00923	0,00713	0,00540	0,00329	0,00198	0,00110	0,00047
2,356	0,00576	0,00654	0,00702	0,00555	0,00342	0,00180	0,00078	0,00051	0,00038	0,00025	0,00015	0,00008	0,00004
2,670	0,00101	0,00170	0,00253	0,00152	0,00060	0,00019	0,00004	0,00002	0,00001	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
2,985	-0,00039	-0,00023	0,00049	0,00040	0,00011	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela B.4: Coeficientes de Atrito C_F vs Ângulo θ para $Ma = 10$

θ	C_F												
	Kn = 0,01	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1	2	4	10	20	40	100
0,157	0,18115	0,18136	0,18246	0,18613	0,19460	0,21336	0,25029	0,27846	0,30358	0,33453	0,35729	0,37563	0,39032
0,471	0,33712	0,33689	0,33713	0,34308	0,36173	0,40258	0,48339	0,54619	0,60220	0,66888	0,71741	0,75697	0,78896
0,785	0,35095	0,35088	0,35087	0,35681	0,38125	0,43924	0,55227	0,63890	0,71260	0,79665	0,85736	0,90800	0,94956
1,100	0,23567	0,23566	0,23539	0,23886	0,26017	0,31201	0,41304	0,49139	0,55799	0,63183	0,68358	0,72630	0,76182
1,414	0,12161	0,12138	0,12070	0,12213	0,13416	0,15879	0,19724	0,22271	0,24363	0,26522	0,27874	0,28923	0,29754
1,728	0,04784	0,04760	0,04707	0,04891	0,05386	0,05937	0,06078	0,05435	0,04478	0,03188	0,02261	0,01481	0,00813
2,042	0,01710	0,01712	0,01752	0,01817	0,01694	0,01415	0,01037	0,00829	0,00681	0,00508	0,00360	0,00223	0,00102
2,356	0,00683	0,00718	0,00765	0,00677	0,00439	0,00230	0,00102	0,00067	0,00054	0,00045	0,00034	0,00021	0,00010
2,670	0,00128	0,00164	0,00255	0,00232	0,00095	0,00030	0,00008	0,00003	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000
2,985	-0,00030	-0,00028	0,00017	0,00080	0,00022	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela B.5: Coeficientes de Atrito C_F vs Ângulo θ para $Ma = 20$

θ	C_H												
	$Kn = 0,01$	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1	2	4	10	20	40	100
0,157	0,38193	0,38057	0,37981	0,39831	0,45439	0,54820	0,68790	0,77380	0,84031	0,90740	0,94038	0,96017	0,97284
0,471	0,30482	0,30410	0,30339	0,32206	0,37300	0,45762	0,58798	0,67233	0,73886	0,80701	0,84174	0,86245	0,87589
0,785	0,19335	0,19293	0,19364	0,21273	0,25461	0,32274	0,43094	0,50381	0,56305	0,62545	0,65861	0,67920	0,69272
1,100	0,09272	0,09270	0,09467	0,11018	0,13668	0,17835	0,24866	0,29980	0,34328	0,39038	0,41614	0,43213	0,44321
1,414	0,03652	0,03679	0,03895	0,04810	0,05979	0,07587	0,10020	0,11648	0,12996	0,14378	0,15087	0,15534	0,15819
1,728	0,01112	0,01168	0,01340	0,01780	0,02116	0,02358	0,02358	0,02078	0,01698	0,01212	0,00923	0,00728	0,00588
2,042	0,00337	0,00385	0,00475	0,00577	0,00548	0,00451	0,00316	0,00241	0,00181	0,00110	0,00067	0,00037	0,00016
2,356	0,00150	0,00181	0,00215	0,00179	0,00104	0,00052	0,00021	0,00013	0,00010	0,00006	0,00004	0,00002	0,00001
2,670	0,00096	0,00151	0,00195	0,00084	0,00020	0,00005	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2,985	0,00059	0,00111	0,00220	0,00086	0,00009	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela B.6: Coeficientes de Transferência de Calor C_H vs Ângulo θ para $Ma = 10$

θ	C_H												
	Kn = 0,01	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1	2	4	10	20	40	100
0,157	0,50873	0,50853	0,50668	0,50496	0,52502	0,58462	0,70058	0,78099	0,83838	0,89115	0,92415	0,94807	0,96496
0,471	0,41251	0,41180	0,40964	0,40938	0,43035	0,48793	0,59792	0,67544	0,73351	0,78859	0,82327	0,84891	0,86768
0,785	0,26472	0,26417	0,26275	0,26510	0,28709	0,33980	0,43719	0,50565	0,55725	0,60777	0,64026	0,66540	0,68464
1,100	0,12854	0,12836	0,12773	0,13154	0,14863	0,18378	0,24816	0,29605	0,33496	0,37492	0,40070	0,42075	0,43662
1,414	0,05032	0,05019	0,05026	0,05380	0,06218	0,07569	0,09671	0,11148	0,12403	0,13680	0,14413	0,14934	0,15319
1,728	0,01513	0,01519	0,01571	0,01817	0,02119	0,02402	0,02512	0,02268	0,01892	0,01381	0,00999	0,00666	0,00374
2,042	0,00444	0,00462	0,00511	0,00596	0,00579	0,00490	0,00360	0,00286	0,00234	0,00177	0,00127	0,00079	0,00037
2,356	0,00180	0,00202	0,00233	0,00224	0,00138	0,00069	0,00029	0,00018	0,00014	0,00012	0,00009	0,00005	0,00003
2,670	0,00103	0,00141	0,00201	0,00135	0,00034	0,00008	0,00002	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2,985	0,00056	0,00085	0,00173	0,00143	0,00018	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela B.7: Coeficientes de Transferência de Calor C_H vs Ângulo θ para $Ma = 20$

Bibliografia

- [1] C Cercignani. *The Boltzmann Equation and its Application*. Springer, New York, 1988.
- [2] G A Bird. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [3] J H Ferziger and H G Kaper. *Mathematical theory of transport processes in gases*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.
- [4] F Sharipov and V Seleznev. Data on internal rarefied gas flows. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 27(3):657–706, 1998.
- [5] D R Lide. *Handbook of Chemistry and Physics*. 76th Edition, CRC Press, 1995.
- [6] M N Kogan. Kinetic theory in aerothermodynamics. *Prog. Aerospace Sci.*, 29:271–354, 1992.
- [7] M S Ivanov and S F Gimelshein. Computational hypersonic rarefied flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30:469–505, 1998.
- [8] V K Dogra, R G Wilmoth, and J N Moss. Aerothermodynamics of a 1.6-meter-diameter sphere in hypersonic rarefied flow. *AIAA Journal*, 30(7):1789–1794, 1992.
- [9] F Sharipov and V Seleznev. Rarefied gas flow through a long tube at any pressure ratio. *J. Vac. Sci. Technol. A*, 12(5):2933–2935, 1994.

- [10] F Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. I. General theory for single gas. *Physica A*, 203:437–456, 1994.
- [11] F Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. II. Application of the theory for single gas. *Physica A*, 203:457–485, 1994.
- [12] F Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. III. Theory and its application for gaseous mixtures. *Physica A*, 209:457–476, 1994.
- [13] F Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for a mixture of rarefied gases interacting with a laser radiation. *J. Stat. Phys.*, 78(1/2):413–430, 1995.
- [14] F Sharipov. Non-isothermal gas flow through rectangular microchannels. *J. Micromech. Microeng.*, 9(4):394–401, 1999.
- [15] L D Landau and E M Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New York, 1989.
- [16] M Vlajinac and E E Covert. Sting-free measurements of sphere drag in laminar flow. *J. Fluid Mech.*, 54(3):385–392, August 1972.
- [17] A B Bailey and J Hiatt. Sphere drag coefficients for a broad range of Mach and Reynolds numbers. *AIAA J.*, 10(11):1436–1440, 1972.
- [18] A B Bailey. Sphere drag coefficient for subsonic speeds in continuum and free-molecule. *J. Fluid Mech.*, 65:401–410, 1974.
- [19] C B Henderson. Drag coefficients of spheres in continuum and rarefied flows. *AIAA J.*, 14(6):707–708, 1976.

- [20] D G Miller and A B Bailey. Sphere drag at Mach numbers from 0.3 to 2.0 at Reynolds numbers approaching 10^7 . *J. Fluid Mech.*, 93:449–464, August 1979.
- [21] V K Molodtsov and V V Ryabov. Investigation of structural features of rarefied gas flows about a sphere using Navier-Stokes equations. In O M Belotserkovskii, M N Kogan, S S Kutateladze, and A K Rebrov, editors, *Rarefied Gas Dynamics*, volume Vol 1, pages 535–541, Novosibirsk, 1985. 13th Int. Symp., USSR, 1982.
- [22] K C Lea and S K Loyalka. Motion of a sphere in a rarefied gas. *Phys. Fluids*, 25(9):1550–1557, 1982.
- [23] W S Law and S K Loyalka. Motion of a sphere in a rarefied gas. ii. role of temperature variation in the Knudsen layer. *Phys. Fluids*, 29(11):3886–3888, 1986.
- [24] P L Bhatnagar, E P Gross, and M A Krook. A model for collision processes in gases. *Phys. Rev.*, 94:511–525, 1954.
- [25] Y Sone and Sh Takata. Discontinuity of the velocity distribution function in a rarefied gas around a convex body and the s layer at the bottom of the Knudsen layer. *Trans. Theory Stat. Phys.*, 21(4-6):501–530, 1992.
- [26] N N Yanenko, Y N Grigoriev, M S Ivanov, S M Malykhin, and A N Mikhailitsyn. Methods of statistical modelling and direct numerical integration of kinetic equation of gas theory: development and application to problems of rarefied gas dynamics. In O M Belotserkovskii, M N Kogan, S S Kutateladze, and A K Rebrov, editors, *Rarefied Gas Dynamics*, volume 1, pages 371–382, Novosibirsk, 1985. 13th Int. Symp., USSR, 1982.
- [27] W M Phillips and A R Kuhlthau. Transition regime sphere drag near the free molecular limit. *AIAA J.*, 9(7):1434–1435, 1974.

- [28] R M L Baker and A F Charwat. Transitional correction to the drag of a sphere in free molecule flow. *Phys. Fluids*, 1(2):73–81, 1971.
- [29] O V Sazhin, S F Borisov, and F Sharipov. Accommodation coefficient of tangential momentum on atomically clean and contaminated surfaces. *J. Vac. Sci. Technol. A*, 19(5):2499–2503, 2001.
- [30] F S Sherman. The transition from continuum to molecular flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1:317–340, 1969.
- [31] A Nordsieck and B L Hicks. Monte Carlo evaluation of the boltzmann collision integral. In *Rarefied Gas Dynamics*, volume I, pages 695–710. 5th Int. Symp., London, 1966, Academic Press, 1967.
- [32] J K Haviland and M L Lavin. Application of the Monte-Carlo method to heat transfer in a rarefied gas. *Phys. Fluids*, 5(11):1399–1405, 1962.
- [33] F Seiler, B Schmidt, and N Kuschnerus. Direct Monte Carlo Simulation technique applied to some RGD problems. In V Boffi and C Cercignani, editors, *Rarefied Gas Dynamics*, volume 1, pages 431–441, Grado, 1986. 15th Int. Symp., Italy, 1986.