DANIELLE ZAWADZKI PEREIRA

# UM MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO NÃO BALANCEADO

**CURITIBA**

**MARÇO 2016**

DANIELLE ZAWADZKI PEREIRA

# UM MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO NÃO BALANCEADO

Dissertação Para a Obtenção de Título de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico

Universidade Federal do Paraná – UFPR

Setor de Ciências Sociais Aplicadas - Departamento de Economia

Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico

Orientador: Dr. Armando Vaz Sampaio

CURITIBA

MARÇO 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. SISTEMA DE BIBLIOTECAS.
CATALOGAÇÃO NA FONTE

Pereira, Danielle Zawadzki
Um modelo de crescimento econômico não balanceado / Danielle Zawadzki Pereira. – 2016.
31 f.
Orientador: Armando Vaz Sampaio.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Sociais Aplicadas, Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico.
Defesa: Curitiba, 2016.

1.Economia. 2. Desenvolvimento econômico. I. Sampaio, Armando Vaz, 1965-. II. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico. III. Título.

CDD 338.9

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **DANIELLE ZAWADZKI PEREIRA**, intitulada: "**Um Modelo de Crescimento Econômico Não Balanceado**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 24 de Março de 2016.

Armando Vaz Sampaio
Prof ARMANDO VAZ SAMPAIO (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Fernando Motta Correia
Prof FERNANDO MOTTA CORREIA (UFPR)

Luciano Vereda Oliveira
Prof LUCIANO VEREDA OLIVEIRA (UFF)

*“[...]to understand why some countries grow and some fail to do so,*
*economists have to move beyond the mechanics of models*
*and pose questions about the fundamental causes of economic growth.”*
*(Daron Acemoglu, Introduction to Modern Economic Growth, 2009)*

# Resumo

Diante do fenômeno do crescimento não balanceado, é proposto um modelo de equilíbrio geral, com preferências não homotéticas, tecnologia exógena, função de produção com retornos constantes de escala e múltiplos setores de produção, numa economia fechada. Indo além de modelos já difundidos na literatura, o presente trabalho engloba dois canais pelos quais se dá o crescimento não balanceado: (i) efeito substituição pelo lado da oferta, capturado pelas taxas de crescimento tecnológica dos setores e intensidade de capital; (ii) e, por efeito renda pelo lado da demanda, capturado pelo parâmetro de elasticidade das preferências.

**Palavras-chaves**: Crescimento econômico. Não balanceado. Preferências não homotéticas.

# Abstract

In the face of the non-balanced growth phenomenon, it proposes a general equilibrium model, with non-homothetic preferences, exogenous technology, production function with constant returns to scale and multiple production sectors, in a closed economy. Going beyond models already widespread in the literature, this study encompasses two channels by which gives the unbalanced growth: (i) substitution effect on the supply side, captured by technological growth rates of sectors and capital intensity; (ii) and income effect on the demand side, captured by the preferences elasticity parameter.

**Key-words**: Economic growth. Non-balanced. Non-homothetic preferences.

# Lista de ilustrações

# Sumário

# Introdução

Modelos formais macroeconômicos que abordem o tema do crescimento não balanceado ainda são escassos dentro do *mainstrean* econômico (Acemoglu e Guerrieri (2008); Kongsamut, Rebelo e Xie (2001); Ngai e Pissarides (2007); Boppart (2014)), porém sabemos desde Kuznets que o desenvolvimento econômico leva a mudanças nos pesos relativos dos setores. A principal contribuição desse trabalho é preencher algumas das lacunas existentes estendendo o modelo proposto por Boppart (2014), inserindo mais setores além dos três considerados pelo autor, adotando uma forma funcional diferente para descrever as preferências do consumidor e propondo uma estrutura mais simples e tratável.

Enquanto que trabalhos como de Acemoglu e Guerrieri (2008) e Ngai e Pissarides (2007) justificam o crescimento não balanceado pelo lado da oferta, Kongsamut, Rebelo e Xie (2001) o justificam pelo lado da demanda. A presente obra se alinha mais ao pensamento de Boppart (2014) em que tanto fatores pelo lado da demanda, quanto pelo lado da oferta, contribuem para o crescimento não balanceado. Ignorar um destes canais de transmissão poderia subestimar a magnitude do “não balanceamento”, ou mesmo superestimar o efeito de alguma das causas do crescimento não balanceado.

Ou seja, basicamente o que acontece na economia são dois efeitos:

(i) Efeito substituição: conforme a economia se desenvolve, os setores dela se desenvolvem em velocidades distintas, fazendo com que aquele que se torna mais produtivo, cresça mais rápido e se torne relativamente maior[1]. Sendo que, o provável canal de transmissão deste fenômeno seja através das mudanças nos preços relativos;

(ii) Efeito renda: o desenvolvimento econômico leva a um crescimento da renda média da população, que por sua vez passa a gastar uma menor fração de sua renda com produtos agropecuários. Assim, leva a um descompasso entre os setores.

Desta forma, é proposto um modelo de equilíbrio geral, com preferências não homotéticas, tecnologia exógena, função de produção com retornos constantes de escala e múltiplos setores de produção. Para tal fim, este trabalho se dividirá, além desta breve introdução em: uma revisão das principais obras já publicadas acerca o assunto; apresentação de algumas regularidades empíricas que justifiquem a pesquisa; a elaboração do modelo propriamente dito; uma discussão dos principais resultados obtidos; e, por fim, uma conclusão do trabalho.

---

[1] É claro que por este setor estar crescendo, ele se torna absolutamente maior também, mas o foco aqui está nos pesos relativos dos setores.

# 1 Revisão da Literatura

Em Acemoglu e Guerrieri (2008), os autores reforçam que a maior parte dos modelos econômicos buscam consistência com os fatos de Kaldor, quais sejam, relativa constância da taxa de crescimento, da relação capital-produto, da parcela de capital no PIB, e da taxa de juros real. Contudo, além dessa visão balanceada, é necessário levar em conta mudanças sistemáticas na importância relativa dos vários setores. Os autores apresentam, então, um modelo de dois setores que evidencia uma razão para o crescimento não balanceado, razão esta originada no lado da oferta e relacionada com a tese de Baumol (1967).

Acemoglu e Guerrieri (2008) afirmam que diferenças na proporção dos fatores entre os setores, quando combinadas com o aprofundamento do capital, levam a um crescimento não balanceado porque um aumento na razão capital-trabalho aumenta mais o produto nos setores mais intensivos em capital. Os autores ilustram esse mecanismo econômico utilizando uma economia com elasticidade de substituição constante entre os dois setores e uma função de produção Cobb-Douglas dentro de cada setor. E mostram que a alocação de equilíbrio (que é Pareto Ótima) se caracteriza por um crescimento não balanceado a nível setorial, mas é consistente com os fatos de Kaldor no longo prazo. No caso empírico relevante, em que a elasticidade de substituição entre os dois setores é menor que 1, um dos setores (tipicamente o mais capital intensivo) cresce mais rápido que o restante da economia, porém, como os preços relativos se movem em direção oposta a esse setor, seu valor (ponderado pelo preço) cresce a uma taxa menor que o resto da economia. Além disso, os autores mostram que capital e trabalho são continuamente realocados para fora do setor que cresce mais rapidamente.

Além disso, Acemoglu e Guerrieri (2008) apresentam uma simples calibração de seu modelo para investigar se suas predições são consistentes com os dados dos EUA. A calibração mostra que a convergência para o equilíbrio assintótico é muito lenta, e consistente com os fatos de Kaldor, e, ao longo desse caminho de transição, a parcela de capital na renda nacional e a taxa de juros real são aproximadamente constantes.

Ngai e Pissarides (2007), que trazem um modelo multisetor em que a função de produção não precisa ser uma Cobb-Douglas, e o crescimento não balanceado ocorre devido a diferença no crescimento da produtividade entre os setores;

Kongsamut, Rebelo e Xie (2001) justificam o crescimento não balanceado pelo lado da demanda, através da Lei de Engel, ou seja, assim que a renda do indivíduo cresce, a fração gasta com produtos agropecuários diminui. Neste modelo, a tecnologia é exógena e a economia possui três setores, todos com a mesma função de produção; por fim,

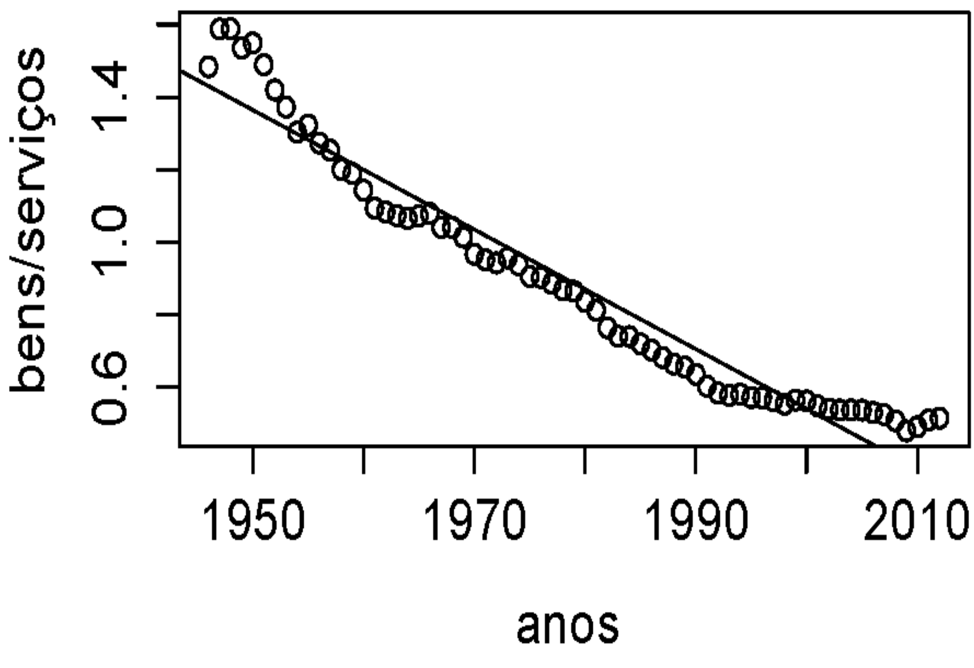
Boppart (2014) tenta unir as justificativas de crescimento não balanceado dos trabalhos acima citados. Assim, explica o crescimento não balanceado via demanda (via efeito renda) e oferta (via preços relativos). Para tal, utiliza preferências não Gorman para captar o fato que a propensão marginal a consumir bens e serviços difere entre pobres e ricos. Utiliza a função utilidade PIGL (Price Independent Generalized Linearity) proposto por Muellbauer (1975). Para verificar o resultado teórico, o autor ainda estima os parâmetros de preferência e quantifica os dois canais de mudança estrutural, encontrando que os dois canais são igualmente importantes para o fenômeno.

# 2 Regularidades Empíricas

Esta seção trará algumas regularidades empíricas que justificam o tema de pesquisa. Para tal, são utilizados dados do Estados Unidos no pós-Guerra, obtidos através do Bureau of Economic Analysis (BEA). O uso do país em questão se deve, principalmente, a maior confiança e abrangência estatística. Além disso, para o propósito deste trabalho, é interessante analisar países que já passaram por vários estágios de desenvolvimento. Futuramente, é cabível também incluir dados de outros países de alta renda.

Primeiramente, cabe destacar que ao longo dos anos analisados, os EUA passaram por um crescimento da renda. E a Figura 1 mostra a evolução do valor adicionado dos bens e serviços. A linha representa o valor ajustado dos dados. É possível perceber, claramente, a queda na relação entre bens e serviços, o que significa dizer, um aumento do peso relativo dos serviços nesse período de desenvolvimento. Ou seja, caracterizando este momento como o de um crescimento não balanceado.

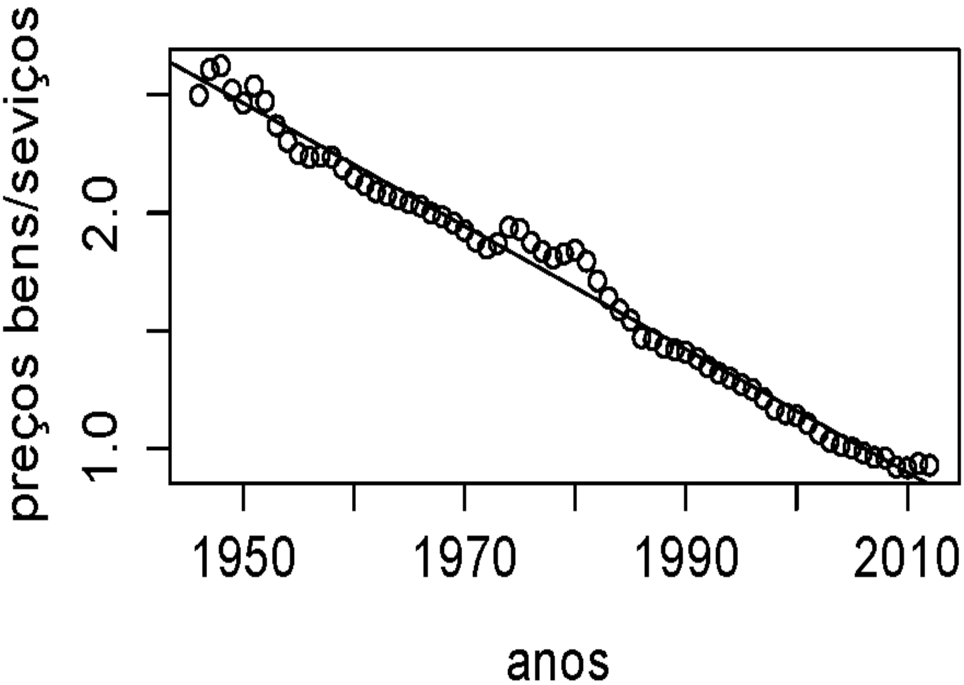
Figura 1 – Valor Adicionado Relativo Entre Bens e Serviços




Fonte: Bureau of Economic Analysis. Elaboração própria.

Além disso, como podemos observar na Figura 2, o preço relativo entre bens e serviços também apresenta uma relação linear negativa. O que indica que, ao construirmos um modelo formal, precisamos levar em conta o canal de transmissão via preços relativos.

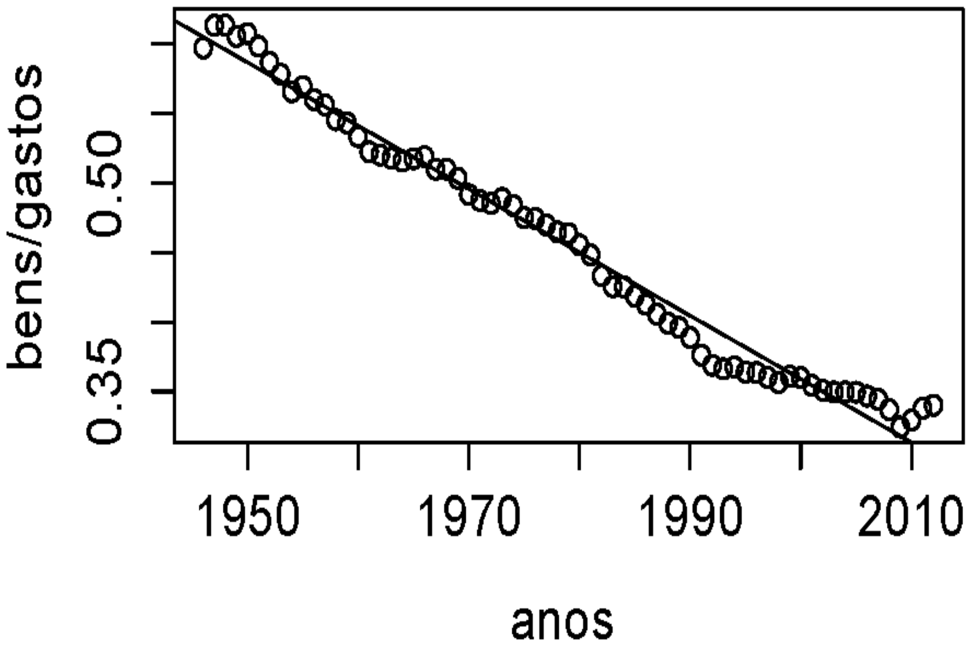
Figura 2 – Preço Relativo Entre Bens e Serviços




Fonte: Bureau of Economic Analysis. Elaboração própria.

Por fim, a Figura 3 mostra o quanto do total de consumo foi gasto em bens. E note que, ao passar dos anos, essa parcela declina de forma constante, o que leva a crer que a Lei de Engel possa estar se valendo. Da mesma forma que devemos levar em conta o efeito substituição citado anteriormente, os dados mostram que o efeito renda também não deve ser ignorado.

Figura 3 – Parcela de Bens no Dispêndio Total




Fonte: Bureau of Economic Analysis. Elaboração própria.

Desta forma, as presentes regularidades empíricas evidenciam:

(a) O crescimento econômico pode ser não balanceado entre setores;

(b) Existe uma mudança nos preços relativos, que, provavelmente, deve impactar no crescimento não balanceado;

(c) Há uma diminuição no dispêndio relativo em bens, que também deve impactar no crescimento não balanceado.

Assim, ao se construir um modelo, é preciso levar em conta tais regularidades empíricas.

# 3 O Modelo

## 3.1 Famílias

A economia admite uma família representativa com preferências padrão:

$$\int_0^\infty exp[-(\rho - n)t]\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt \tag{3.1}$$

onde $c(t)$ é o consumo no período $t$, $\rho$ é a preferência intertemporal, e $\theta \geq 0$ é o inverso da elasticidade de substituição intertemporal (ou, simplesmente, coeficiente de aversão ao risco relativo).

O consumo agregado, $c(t)$ combina bens setoriais de acordo com a função Stone-Geary:

$$c = \left(\sum_{i=1}^{I}(c_i - \underline{c}_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{3.2}$$

Onde $\underline{c}_i$ representa o agregador setorial. Se considerarmos o caso comum de 3 setores (agricultura, manufatura e serviços) - como considera Kongsamut, Rebelo e Xie (2001) -, temos que $\underline{c}_a < 0$, $\underline{c}_m = 0$ e $\underline{c}_s > 0$. Em termos práticos, significa dizer que há um nível mínimo de subsistência da agricultura igual a $\underline{c}_a$. Ou seja, as famílias devem consumir no mínimo este valor para sobreviver. Acima desse valor de subsistência, as famílias começam a demandar outros bens, como bens manufaturados e serviços. Mas, note que, a presença do agregador $\underline{c}_s$ implica que as famílias apenas consomem uma quantidade positiva de serviços após certo nível de bens manufaturados e agrícolas serem atingidos.

A oferta de trabalho é inelástica e é igual a população $L(t)$ no período $t$, que cresce a taxa exponencial $n \in [0, \rho)$, logo

$$L(t) = exp(nt)L(0) \tag{3.3}$$

Assume-se que as famílias possuam toda a alocação de capital da economia, toma a sequência de salários, remuneração do capital e preços de bens e serviços como dados, e escolha uma sequência de estoque de capital e consumo agregado para maximizar sua utilidade sujeito a seguinte restrição orçamentária:

$$K_{t+1} + \sum_{i=1}^{I} p_{it}c_{it} \leq w_t + K_t(1 - \delta + R_t) \tag{3.4}$$

Assim, a condição de primeira ordem, estática, é

$$\rho_t\frac{(1-\sigma)w_t}{\sigma c_{it}} = \lambda_t p_{it} \tag{3.5}$$

Onde $\lambda$ é o multiplicador de Lagrange do problema de otimização restrita. Utilizando 3.2, chegamos a

$$p_{it}c_{it} = p_{it}\underline{c}_i + \frac{\sigma - 1}{\sigma}\sum_j \left(\frac{p_{jt}}{\sigma_j}\right)^{\sigma_j} \tag{3.6}$$

Logo, o problema intertemporal pode ser escrito como:

$$\max_{\{c_t\}_t}\sum_t \left\{\nu^t \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t(w_t + K_t(1-\delta+R_t) - K_{t+1} - E(c_t))\right\} \tag{3.7}$$

Onde $E(c_t)$ é a função dispêndio, definido como

$$E(c_t) = \sum_i p_i \underline{c}_i + \frac{\sigma-1}{\sigma}\sum_i\sum_j\left(\frac{p_{ij}}{\sigma_j}\right)^{\sigma_j} \tag{3.8}$$

Daí, temos que a parcela de consumo, $\omega_i$ pode ser definida como a parte que é consumida dentre todo o dispêndio, ou seja, $\omega_i \equiv \frac{p_{ci}}{E}$.

Em que, a condição de primeira ordem com relação a $K_t$ é

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{\beta(1-\delta+R_t)} \tag{3.9}$$

Que nos leva a

$$c_t^{1-\theta} = \lambda_t E(c_t)\frac{\sum_i \epsilon_i\omega_{it} - \sigma}{1-\sigma} \tag{3.10}$$

Em que $\sigma$ representa a elasticidade de substituição e $\epsilon$ é a elasticidade renda setorial.

Usando 3.9 e 3.10, obtemos a equação de Euler

$$c_t^{-\theta} = (1-\delta+R_t)\frac{P_t}{P_{t+1}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{I}\epsilon_i\omega_{it} - \sigma}{\sum_{i=1}^{I}\epsilon_i\omega_{i,t+1} - \sigma}\right)c_{t+1}^{-\theta} \tag{3.11}$$

Que mostra que o gasto em consumo é uma função não linear do consumo real agregado e o índice de preços reflete mudanças na composição setorial de consumo conforme a renda cresce.

## 3.2 Produção

Assume-se função de produção Cobb-Douglas, com variação temporal e progresso técnico Hicks-neutro específico por setor:

$$Y_i(t) = A_i(t)K_i(t)^{\alpha_i}L_i(t)^{1-\alpha_i} \tag{3.12}$$

Onde $K_i$ e $L_i$são os níveis de capital e trabalho do setor $i$ no período $t$. E $0 < \alpha_i < 1$ é a intensidade de capital.

Em equilíbrio temos que a firma maximiza seu lucro e iguala os preços de trabalho e capital entre os setores com os preços setoriais dos bens de consumo,

$$p_i(t) = \frac{p_i(t)}{p_0(t)} = \frac{\alpha_0^{\alpha_0}(1-\alpha_0)^{1-\alpha_0}}{\alpha_i^{\alpha_i}(1-\alpha_i)^{1-\alpha_i}} \left(\frac{w(t)}{r(t)}\right)^{\alpha_0-\alpha_i} \frac{A_0(t)}{A_i(t)} \tag{3.13}$$

onde as variáveis com o subscrito 0 são referentes ao setor do bem investimento. Além disso, $w$ e $R$ representam a remuneração do trabalho e capital, respectivamente. E, como as unidades do bem investimento e do capital são os mesmos, podemos normalizar o preço do bem investimento, $p(t) \equiv 1$. Além disso, podemos ver que a variação nos preços setoriais podem se dar pela diferença nas intensidades nos fatores setoriais (primeiro termo do lado direito da equação) ou pelas diferanças nas produtividades (terceiro termo do lado direito da equação).

## 3.3 Equilíbrio Dinâmico

O consumidor maximiza a utilidade sujeita à restrição de recursos

$$\dot{a}(t) = w(t) + [r(t) - n]a(t) - E(c(t); p(t)) \tag{3.14}$$

e a condição de Não-Ponzi

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \exp\left(-\int_0^t (r(t') - n)dt'\right) \geq 0 \tag{3.15}$$

Desta forma, podemos escrever o Hamiltoniano do problema como:

$$H(t, c(t), a(t), \lambda(t)) \equiv u(c(t)) + \lambda(t)(w(t) + [r(t) - n]a(t) - E(c(t); p(t))) \tag{3.16}$$

Obtendo as condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial c} &= 0 \\ u'(c) &= \lambda \frac{\partial E}{\partial c} \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial a} &= (\rho - n)\lambda - \dot{\lambda} \\ \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= (\rho - n) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Da condição de transversalidade, podemos, ainda, impor que

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\rho-n)t}\lambda(t)a(t) = 0 \tag{3.19}$$

Da CPO, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{u'(c)}{\frac{\partial E}{\partial c}} \\
\lambda = \frac{u'(c)}{\frac{E \partial \log E}{c \partial \log c}} &= \frac{u'(c)}{\frac{c}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial c}\log\sum_{i=1}^{I}(g^{\epsilon_i}p_i)^{1-\sigma}} \\
\lambda &= \frac{u'(c)}{\eta_g \sum_{i=1}^{I}\epsilon_i w_i}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Diferenciando 3.20 em relação ao tempo e dividindo por ela mesma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= \eta_{u'}^{c}\frac{\dot{c}}{c} - \frac{(\dot{\frac{E}{c}})}{\frac{E}{c}} - \frac{\dot{\eta_E^c}}{\eta_E^c} \\
&= \eta_{u'}^{c}\frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{E}}{E} + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{\eta_E^c}}{\eta_E^c}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Que, combinando com a CPO, obtemos a equação de Euler

$$
\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\rho - n + \frac{\dot{E}}{E} + \frac{\dot{\eta_E^c}}{\eta_E^c}}{\eta_{u'}^{c} + 1} \tag{3.22}
$$

Que nos diz que se os parâmetros de elasticidade renda forem idênticos entre os setores, temos a condição de Euler usual. No entanto, se os parâmetros de elasticidade forem heterogêneos entre os setores - como é esperado -, temos que $\eta_{u'}^{c} + 1$ é a taxa de declínio da utilidade marginal do consumo a preços constantes. Note ainda que o numerador da expressão mostra a taxa de crescimento da utilidade marginal do consumo, enquanto que o denominador expressa a razão entre a taxa de crescimento do consumo e o consumo real agregado.

Já pela ótica do planejador social, temos o seguinte problema:

$$
\max_{\{k_i, l_i\}_{i=0}^{I}} \int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t} u(\boldsymbol{c_i}) \tag{3.23}
$$

Em que $c_i = A_i k_i^{\alpha_i} l_i^{1-\alpha_i}$ e $\dot{k} = A k_0^{\alpha_0} l^{1-\alpha_0} - (\sigma + n)k$, e o problema está sujeito a

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{I} l_i &= 1 \\
\sum_{i=0}^{I} k_i &= k
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Logo, o Hamiltoniano de valor presente do problema é

$$
H = u + \mu(A k_0^{\alpha_0} l_0^{1-\alpha_0} - (\sigma + n)k) \tag{3.25}
$$

Temos, então, que encontrar candidatos a solução do problema do planejador social. Das CPO, sendo $\beta$ e $\gamma$ os multiplicadores de lagrange correspondente as equações da função de produção setorial e da agregação de capital, respectivamente:

$$-\frac{\partial H}{\partial k} = (\sigma + n)\mu - (\dot{\mu} - (\rho - n)\mu) = \gamma \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_i} = \alpha_i \frac{\partial u}{\partial c_i} A_i \left(\frac{k_i}{l_i}\right)^{\alpha_i - 1} = \gamma \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_0} = \alpha_0 \mu A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1} = \gamma \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_i} = (1 - \alpha_i) \frac{\partial u}{\partial c_i} A_i \left(\frac{k_i}{l_i}\right)^{\alpha_i} = \beta \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_0} = (1 - \alpha_0)\mu A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0} = \beta \tag{3.30}$$

Com a condição de transversalidade

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(\rho - n)t} \mu(t) k(t) = 0 \tag{3.31}$$

Utilizando 3.26 e 3.28, obtemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= (\sigma + n)\mu + (\rho - n)\mu - \gamma \\
\dot{\mu} &= (\sigma + \rho)\mu - \gamma \\
\dot{\mu} &= (\sigma + \rho)\mu - \alpha_0 \mu \ A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1} \\
\dot{\mu} &= \mu \left[(\sigma + \rho) - \alpha_0 \ A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1}\right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Resolvendo a equação diferencial, chegamos a

$$\mu(t) = \mu(0) exp \left(-\int \left[\alpha_0 A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1} - (\sigma + \rho)\right] dt\right) \tag{3.33}$$

Substituindo 3.33 na condição de transversalidade:

$$\lim_{t \to \infty} k(t) \mu(0) exp \left(-\int_0^t \left[\alpha_0 A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1} - (\sigma + n)\right] dt\right) = 0 \tag{3.34}$$

Agora, substituindo 3.29 por 3.28:

$$\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \tilde{\kappa}_i(t) = \frac{\beta(t)}{\gamma(t)} \tag{3.35}$$

Onde $\tilde{\kappa_i}(t) \equiv A_i(t)^{-\frac{1}{1-\alpha_i}}\frac{k_i(t)}{l_i(t)}$. O que sugere que a relação capital-trabalho em todos os setores são proporcionais entre eles. Além disso, da definição de $\kappa$, vemos que os multiplicadores de lagrange correspondem aos preços do trabalho (salário) e do capital. Agora, substituindo 3.35 na definição de $c_i$, obtemos que

$$c_i = A_0^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_0}} A_i l_i \tilde{\kappa_0}^{\alpha_i} \tag{3.36}$$

O que nos leva a

$$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_0}\xi_0 + \xi_i + \xi_i^l \tag{3.37}$$

Em que as variáveis $\xi$ representam as taxas de crescimento[1]. Ou seja, $\xi_0$ representa a taxa de crescimento do setor investimento e $\xi_i$ são as taxas de crescimento dos demais setores.

Da função consumo temos que para todo $t \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{I} \phi_i \left(\xi_i + \frac{\alpha_i}{1-\alpha_0}\xi_0 + g_i - \eta_g \epsilon \frac{\dot{c}}{c}\right) = 0 \tag{3.38}$$

Onde $\phi_i$ é a parcela efetiva do setor $i$ no consumo. Desde que as parcelas de consumo crescem proporcionalmente às parcelas de emprego, segue que $\lim_{t\to\infty} \xi_i^l = 0$. Assim,

$$\xi^* \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\eta_g \epsilon}\left(\xi_i + \frac{\alpha_i}{1-\alpha_0}\xi_0\right) \tag{3.39}$$

Que mostra que tanto as forças do lado da oferta (capturadas pelos parâmetros de intensidade de capital) quanto as forças do lado da demanda (capturadas pelos parâmetros de elasticidade) determinam a taxa de crescimento do consumo real. Além disso, faz com que a condição de transversalidade seja reescrita como:

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\mu(0)exp\left(-\int_0^t \left[\alpha_0 A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1} - \left(\sigma + n + \frac{\xi_0}{1-\alpha_0}\right)\right] dt\right) = 0 \tag{3.40}$$

Desta forma, para assegurar que a condição de transversalidade seja válida, é preciso garantir que

$$\alpha_0 A_0 \left(\frac{k_0}{l_0}\right)^{\alpha_0 - 1} > \left(\sigma + n + \frac{\xi_0}{1-\alpha_0}\right) \tag{3.41}$$

Ou seja, respeitando tal condição, temos que o problema de máximização é côncavo em relação a $k$, e essas equações apresentam uma única trajetória de $\{k, l, \mu\}_{t=0}^{\infty}$. O que significa dizer que o problema do planejador social tem solução única, com as variáveis de produção, consumo,

[1] Por exemplo, $\frac{\dot{A}_i}{A_i} = \xi_i$. Intuitivamente, o processo consiste em tirar o logaritmo da equação e derivar os termos em relação ao tempo.

dispêndio e preços sendo obtidos endogeneamente no modelo. Em outras palavras, existe uma correspondência direta entre a solução do planejador social e do equilíbrio competitivo.

# 4 Resultados

Existe uma única trajetória de equilíbrio competitivo na economia, pelo qual o consumo per capita real cresce assintoticamente a uma taxa constante, $\xi^*$. Assintoticamente, a economia gera uma realocação entre os setores de consumo. A taxa de crescimento do consumo real e a realocação entre setores são determinadas por duas forças: efeito substituição pelo lado da oferta, capturado pelas taxas de crescimento tecnológica dos setores e intensidade de capital; E por efeito renda pelo lado da demanda, capturado pelo parâmetro de elasticidade das preferências.

Os resultados entram em consonância com os trabalhos já citados. Em primeiro lugar, como mostram Acemoglu e Guerrieri (2008) e Boppart (2014), o modelo é condizente com os fatos de Kaldor no longo prazo. Além disso, o modelo engloba os resultados pelo lado da oferta, como em Acemoglu e Guerrieri (2008)[1] e Ngai e Pissarides (2007), e os resultados pelo lado da demanda, como em Kongsamut, Rebelo e Xie (2001). E, como dito anteriormente, este modelo se assemelha mais com o de Boppart (2014), com a diferença da consideração do número de setores, em que este trata no máximo três, e na forma funcional das preferências do consumidor. Sendo que, nas preferências PIGL - utilizada por Boppart (2014) - não há generalização de mais de dois bens no sistema de demanda que preserve a independência das elasticidade renda entre diferentes bens.

[1] Derivação deste resultado se encontra em anexo.

# Conclusão

O trabalho apresentou um modelo de mudança estrutural com dois canais de transmissão que fazem com que o crescimento seja não balanceado entre os setores. O argumento para a utilização de um modelo que englobe tanto um efeito substituição advinda da mudança nos preços relativos entre os setores, quanto um efeito renda oriundo da diminuição da parcela relativa dos gastos com bens, se deveu à constatação empírica destes fatos. Além disso, a revisão da literatura já apontava para essa necessidade, visto que tínhamos trabalhos que contavam com efeitos do lado da demanda, como Kongsamut, Rebelo e Xie (2001), e trabalhos que abarcavam-se no argumento do lado da oferta, como Ngai e Pissarides (2007) e Acemoglu e Guerrieri (2008); mais recentemente, teve o trabalho de Boppart (2014) que incluiu os dois efeitos. O presente trabalho se diferencia deste último principalmente por uma maior simplicidade[2] do modelo - ou seja, é mostrado que é possível fazer um modelo tratável que inclua os dois canais de transmissão - e também por uma generalização no que diz respeito a quantidade de setores considerado, já que Boppart (2014) considera no máximo três setores.

Com relação ao modelo, como usualmente são encontrados em modelos de crescimento econômico, foi encontrado que existe uma única trajetória de equilíbrio competitivo na economia, pelo qual o consumo per capita real e as taxas de juros crescem assintoticamente a taxas constantes. Além disso, a taxa de crescimento do consumo real e a realocação entre setores são determinadas por duas forças: (i) efeito substituição pelo lado da oferta, capturado pelas taxas de crescimento tecnológica dos setores e intensidade de capital; (ii) e, por efeito renda pelo lado da demanda, capturado pelo parâmetro de elasticidade das preferências.

Assim, o principal fruto desta obra foi trazer um modelo tratável que justifique o crescimento não balanceado. Podendo, este modelo, ser insumo para trabalhos futuros que mostrem o peso que cada efeito (renda e substituição) têm na mudança estrutural. Sendo que, isso é um dos objetivos futuro pretendido: fazer calibração com dados de economias desenvolvidas, tendo por base o modelo teórico aqui proposto. Destarte, poderemos ter uma noção mais precisa da magnitude do impacto das variáveis no modelo e o quanto este modelo mais simples se difere do modelo de Boppart (2014).

[2] Simplicidade no que tange a forma funcional das preferências do consumidor. A forma PIGL utilizada por Boppart (2014) requer algumas delimitações para que seja válida a agregação da demanda.

# Referências


ACEMOGLU, D. *Introduction to Modern Economic Growth*. [S.l.: s.n.], 2009. 990 p. ISBN 9780691132921. Nenhuma citação no texto.

ACEMOGLU, D.; GUERRIERI, V. Capital Deepening and Nonbalanced Economic Growth. *Journal of Political Economy*, v. 116, n. 3, p. 467–498, 2008. ISSN 0022-3808. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 21 e 22.

ADDA, J.; COOPER, R. Dynamic Economics - Quantitative methods + applications. 2003. Disponível em: <http://discovery.ucl.ac.uk/12691/>. Nenhuma citação no texto.

AGHION, P.; HOWITT, P. *The economics of growth*. [s.n.], 2009. ISSN 0013-0079. ISBN 9780262012638. Disponível em: <http://eprints.ucl.ac.uk/17829/>. Nenhuma citação no texto.

AGHION, P.; HOWITT, P.; GARCÍA-PEÑALOSA, C. *Endogenous growth theory*. 1998. Disponível em: <http://books.google.com/books?hl=en{&}lr={&}id=tLuqjIVJUcoC{&}oi=fnd{&}pg=PA1{&}dq=Endogenous+growth+theory{&}ots=mvH11vRo9Q{&}sig=26OJejqwNGR7TqEawUAGLahd3xs$\delimiter"026E30F$nhttp://books.google.com/books?hl=en{&}lr={&}id=tLuqjIVJUcoC{&}oi=fnd{&}pg=PA1{&}dq=>. Nenhuma citação no texto.

BARRO, R. J.; MARTIN, X. Sala-i. *Economic Growth*. [S.l.: s.n.], 2004. 673 p. ISSN 1778-3585. ISBN 0262025531. Nenhuma citação no texto.

BAUMOL, W. J. Macroeconomics of unbalanced growth: The anatomy of urban crisis. *The American Economic Review*, v. 57, n. 3, p. 415–426, 1967. Citado na página 9.

BOPPART, T. Structural Change and the Kaldor Facts in a Growth Model With Relative Price Effects and Non-Gorman Preferences. *Econometrica*, v. 82, n. 6, p. 2167–2196, 2014. ISSN 0012-9682. Disponível em: <https://www.econometricsociety.org/doi/10.3982/ECTA11354>. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 21 e 22.

FUENTE, a. la; FUENTE, a. la. *Mathematical Methods and Models for Economists*. 2000. Nenhuma citação no texto.

KALDOR, N. *Capital Accumulation and Economic Growth*. 1961. 177–222 p. Disponível em: <www.fep.up.pt>. Nenhuma citação no texto.

KONGSAMUT, P.; REBELO, S.; XIE, D. Beyond balanced growth. *Review of Economic Studies*, v. 68, n. 237, p. 869–882, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 8, 9, 14, 21 e 22.

LUCAS, R. E. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, v. 22, n. 1, p. 3–42, 1988. ISSN 03043932. Nenhuma citação no texto.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. Microeconomic theory. p. 1008, 1995. Disponível em: <http://scholar.google.com/scholar?hl=en{&}btnG=Search{&}q=intitle:Microeconomic+Th>. Nenhuma citação no texto.

MATSUYAMA, K. STRUCTURAL CHANGE IN AN INTERDEPENDENT WORLD: A GLOBAL VIEW OF MANUFACTURING DECLINE By Kiminori Matsuyama 1 November 10, 2008. p. 1–11, 2008. Nenhuma citação no texto.

MCMILLAN, M.; RODRIK, D. Globalization, structural change and productivity growth. *Making Globalization Socially Sustainable*, n. February, p. 49–85, 2011. Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w17143>. Nenhuma citação no texto.

MUELLBAUER, J. Aggregation, Income Distribution and Consumer Demand. *Review of Economic Studies*, v. 42, n. 4, p. 525, 1975. ISSN 00346527. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2296792?origin=crossref>. Citado na página 10.

MUELLBAUER, J. Community Preferences and the Representative Consumer. *Econometrica*, v. 44, n. 5, p. 979–999, 1976. ISSN 0012-9682. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1911540$\delimiter"026E30F$nhttp://www.jstor.org/stable/pdfplus/1911540.pdf?acceptTC=true>. Nenhuma citação no texto.

MUELLBAUER, J.; DEATON, A. An Almost Ideal Demand System. *The American Economic Review*, v. 70, n. 3, p. 312–326, 1980. Nenhuma citação no texto.

NGAI, L. R.; PISSARIDES, C. a. Structural change in a multisector model of growth. *American Economic Review*, v. 97, n. 1, p. 429–443, 2007. ISSN 00028282. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 21 e 22.

QU, Z.; PERRON, P. Estimating and testing structural changes in multivariate regressions. *Econometrica*, v. 75, n. 2, p. 459–502, 2007. ISSN 00129682. Nenhuma citação no texto.

ROMER, D. Dynamic stochastic general-equilibrium models of fluctuations. *Advanced Macroeconomics (Fourth ed.)*, p. 312–364, 2012. Nenhuma citação no texto.

SIMON, C. P.; BLUME, L. Mathematics for Economists. 2005. Disponível em: <http://usir.salford.ac.uk/7844/>. Nenhuma citação no texto.

STOKEY, N. L.; LUCAS, R. E.; PRESCOTT, E. C. Recursive methods in economic dynamics. 1989. Disponível em: <http://books.google.com/books?id=tWYo0QolyLAC>. Nenhuma citação no texto.

UY, T.; YI, K.-M.; ZHANG, J. Structural change in an open economy. *Journal of Monetary Economics*, v. 60, n. 6, p. 667–682, 2013. ISSN 03043932. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439321300086X>. Nenhuma citação no texto.

UZAWA, H. The Stability of Dynamic Processes. *Econometrica*, v. 29, n. 4, p. 617–631, 1961. ISSN 00129682. Nenhuma citação no texto.

# Anexos

# ANEXO A – Equação 3.13

Dada da função de produção em 3.12 e igualando os preços do trabalho e capital entre os setores, temos que o lucro da empresa $i$ é definido como[1]:

$$\pi_i = p_i(A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{(1-\alpha_i)}) - wL_i - rK_i \tag{A.1}$$

Obtendo as CPO, temos

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial K_i} = p_i A_i \alpha_i K^{(\alpha_i - 1)} L_i^{1-\alpha_i} - r = 0 \tag{A.2}$$

e

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial L_i} = p_i A_i (1-\alpha_i) K^{\alpha_i} L_i^{-\alpha_i} - w = 0 \tag{A.3}$$

Isolando $L_i$ de A.2 e $K_i$ de A.3, obtemos:

$$L_i = \frac{r^{\frac{1}{1-\alpha_i}} K_i}{(p_i A_i \alpha_i)^{\frac{1}{1-\alpha_i}}} \tag{A.4}$$

e

$$K_i = \frac{w^{\frac{1}{\alpha_i}} L_i}{(p_i A_i (1-\alpha_i))^{\frac{1}{\alpha_i}}} \tag{A.5}$$

Agora, substituindo A.5 em A.4, fazendo algumas manipulações algébricas, e isolando $p_i$, chegamos a

$$p_i = \frac{r^{\alpha_i} w^{(1-\alpha_i)}}{A_i \alpha_i (1-\alpha_i)^{(1-\alpha_i)}} \tag{A.6}$$

Definindo A.6 para o índice 0 e dividindo A.6 por esta nova equação, chegamos a

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{\alpha_0^{\alpha_0}(1-\alpha_0)^{1-\alpha_0}}{\alpha_i^{\alpha_i}(1-\alpha_i)^{1-\alpha_i}} \left(\frac{w}{r}\right)^{\alpha_0 - \alpha_i} \frac{A_0}{A_i} \tag{A.7}$$

[1] O subscrito do tempo será omitido na demonstração, por não interferir no resultado.

# ANEXO B – Modelo Acemoglu-Guerrieri

Preferências

$$\int_0^{\infty} exp(-(\rho - n)t)\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}dt \tag{B.1}$$

Função de produção da economia respeita

$$Y(t) = F(Y_1(t), Y_2(t)) \tag{B.2}$$

onde

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= A_1(t)G_1(K_1(t), L_1(t)) \\ Y_2(t) &= A_2(t)G_2(K_2(t), L_2(t)) \end{aligned} \tag{B.3}$$

Da condição de market-clearing:

$$\begin{aligned} K_1(t) + K_2(t) &= K(t) \\ L_1(t) + L_2(t) &= L(t) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Como estamos num ambiente de mercado competitivo (a partir de agora será omitido o parâmetro de tempo, apesar de ele continuar na análise):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial F(.)/\partial Y_1}{\partial F(.)/\partial Y_2} \tag{B.5}$$

$$w = p_1\frac{\partial Y_1(.)}{\partial L_1} = p_2\frac{\partial Y_2(.)}{\partial L_2} \tag{B.6}$$

$$r = p_1\frac{\partial Y_1(.)}{\partial K_1} = p_2\frac{\partial Y_2(.)}{\partial K_2} \tag{B.7}$$

Denote as parcelas de capital dos setores como:

$$\sigma_1 \equiv \frac{rK_1}{p_1Y_1} \quad \text{e} \quad \sigma_2 \equiv \frac{rK_2}{p_2Y_2} \tag{B.8}$$

Algumas hipóteses:

- Existe aprofundamento de capital:

$$\frac{\dot{K}}{K} > \frac{\dot{L}}{L} \tag{B.9}$$

- Há diferenças na proporção dos fatores:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \tag{B.10}$$

- O progresso é balanceado se:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} \tag{B.11}$$

Definindo

$$\begin{gathered} k_1 \equiv \frac{K_1}{L_1} \quad \text{e} \quad k_2 \equiv \frac{K_2}{L_2} \\ g_1(k_1) \equiv \frac{G_1(K_1, L_1)}{L_1} \quad \text{e} \quad g_2(k_2) \equiv \frac{G_2(K_2, L_2)}{L_2} \end{gathered} \tag{B.12}$$

Derivando a função de produção setorial:

$$\begin{gathered} \frac{\partial Y_i}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} G_i(.) + A_i \frac{\partial G_i(.)}{\partial t} \\ \dot{Y}_i = \dot{A}_i G_i(.) + A_i \dot{G}_i \quad \text{para } i = 1, 2 \end{gathered} \tag{B.13}$$

Dividindo por $Y_i$:

$$\frac{\dot{Y}_i}{Y_i} = \frac{\dot{A}_i G_i + A_i \dot{G}_i}{A_i G_i} = \frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{\dot{G}_i}{G_i} \tag{B.14}$$

Temos que $\sigma \equiv \frac{rK_i}{p_i Y_i}$, logo

$$\frac{\dot{G}_i}{G_i} = \sigma_i \frac{\dot{K}_i}{K_i} + (1 - \sigma_i) \frac{\dot{L}_i}{L_i} \tag{B.15}$$

Agora, suponha por contradição que $\frac{\dot{Y}_1}{Y_1} = \frac{\dot{Y}_2}{Y_2}$. Como $F(K_i, L_i)$ apresenta retornos constantes de escala, e juntando ao fato que $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial F / \partial Y_1}{\partial F / \partial Y_2}$, temos que

$$\frac{\dot{p}_1}{p_1} = \frac{\dot{p}_2}{p_2} = 0 \tag{B.16}$$

Da definição de $r$ e $w$, temos

$$r = p_1 A_1 g_1' = p_2 A_2 g_2' \tag{B.17}$$

$$w = p_1 A_1 (g_1 - g_1' k_1) = p_2 A_2 (g_2 - g_2' k_2) \tag{B.18}$$

Diferenciando B.17 por $t$, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{\partial(p_i A_i g_i')}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i') + p_i \frac{\partial(A_i g_i')}{\partial t} \\ &= \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i') + p_i \left[\frac{\partial A_i}{\partial t}(g_i') + A_i \frac{\partial g_i'}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial t}\right] \\ &= \dot{p}_i A_i g_i' + p_i \dot{A}_i g_i' + p_i A_i g_i'' \dot{k}_i\end{aligned} \tag{B.19}$$

Dividindo B.19 por $r$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{r} &= \frac{\dot{p}_i A_i g_i'}{p_i A_i g_i'} + \frac{p_i \dot{A}_i g_i'}{p_i A_i g_i'} + \frac{p_i A_i g_i'' \dot{k}_i}{p_i A_i g_i'} \\ \frac{\dot{r}}{r} &= \frac{\dot{p}_i}{p_i} + \frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{g_i'' \dot{k}_i}{g_i'}\end{aligned} \tag{B.20}$$

Como $\frac{\dot{p}_i}{p_i} = 0$, temos

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{g_1'' k_1 \dot{k}_1}{k_1 g_1'} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} + \frac{g_2'' k_2 \dot{k}_2}{k_2 g_2'} \tag{B.21}$$

Denotando $\epsilon_{g_i'} \equiv \frac{g_i'' k_i}{g_i'}$, obtemos

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \epsilon_{g_1'} \frac{\dot{k}_1}{k_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} + \epsilon_{g_2'} \frac{\dot{k}_2}{k_2} \tag{B.22}$$

Como $\frac{\dot{A}_1}{A_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2}$:

$$\epsilon_{g_1'} \frac{\dot{k}_1}{k_1} = \epsilon_{g_2'} \frac{\dot{k}_2}{k_2} \tag{B.23}$$

Realizando o mesmo procedimento, agora para $w$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial(p_i A_i g_i}{\partial t} - \frac{\partial(p_i A_i g_i' k_i)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i) + p_i \frac{\partial(A_i g_i}{\partial t} - \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i' k_i) - p_i \frac{\partial(A_i g_i' k_i)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i) + p_i \left[\frac{A_i}{\partial t}(g_i) + A_i \frac{\partial g_i}{\partial t}\right] - \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i' k_i) - p_i \left[\frac{\partial A_i}{\partial t}(g_i' k_i) + A_i \frac{\partial(g_i' k_i)}{\partial t}\right] \\ &= \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i) + p_i \left[\frac{A_i}{\partial t}(g_i) + A_i \frac{\partial g_i}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial t}\right] - \frac{\partial p_i}{\partial t}(A_i g_i' k_i) - p_i \left\{\frac{\partial A_i}{\partial t}(g_i' k_i) + A_i \left[\frac{\partial g_i'}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial t}(k_i) + g_i' \frac{\partial k_i}{\partial t}\right]\right\} \\ &= \dot{p}_i A_i g_i + p_i \dot{A}_i g_i + p_i A_i g_i' \dot{k}_i - \dot{p}_i A_i g_i' k_i - p_i \dot{A}_i g_i' k_i - p_i A_i g_i'' \dot{k}_i k_i - p_i A_i g_i' \dot{k}_i\end{aligned} \tag{B.24}$$

Dividindo B.24 por $w$:

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{p}_i A_i g_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} + \frac{p_i \dot{A}_i g_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} + \frac{p_i A_i g_i' \dot{k}_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} - \frac{\dot{p}_i A_i g_i' k_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} - \frac{p_i \dot{A}_i g_i' k_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} - \frac{p_i A_i g_i'' \dot{k}_i k_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} - \frac{p_i A_i g_i' \dot{k}_i}{p_i A_i (g_i - g_i' k_i)} \tag{B.25}$$

Como $\frac{\dot{p}_i}{p_i} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{w}}{w} &= \frac{\dot{A}_i}{A_i} \frac{g_i}{(g_i - g_i' k_i)} + \frac{g_i' \dot{k}_i}{(g_i - g_i' k_i)} - \frac{\dot{A}_i}{A_i} \frac{g_i' k_i}{(g_i - g_i' k_i)} - \frac{g_i'' \dot{k}_i k_i}{(g_i - g_i' k_i)} - \frac{g_i' \dot{k}_i}{(g_i - g_i' k_i)} \\ &= \frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{g_i' \dot{k}_i}{(g_i - g_i' k_i)} - \frac{g_i'' \dot{k}_i k_i}{(g_i - g_i' k_i)} - \frac{g_i' \dot{k}_i}{(g_i - g_i' k_i)} \end{aligned} \tag{B.26}$$

Temos que:

- $\sigma_i \equiv \frac{r k_i}{p Y_i} = \frac{p_i A_i g_i' k_i}{p_i A_i g_i} = \frac{g_i' k_i}{g_i}$
- $\epsilon \equiv \frac{g_i'' k_i}{g_i'}$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{w}}{w} &= \frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{g_i' k_i \dot{k}_i g_i}{g_i k_i \left(g_i - \frac{g_i' k_i g_i}{g_i}\right)} - \frac{g_i'' k_i \dot{k}_i g_i'}{g_i' \left(g_i - \frac{g_i' k_i g_i}{g_i}\right)} - \frac{g_i' k_i g_i \dot{k}_i}{g_i k_i \left(g_i - \frac{g_i' k_i g_i}{g_i}\right)} \\ &= \frac{\dot{A}_i}{A_i} - \frac{\epsilon_{g_i'} \dot{k}_i g_i'}{g_i - \sigma_i g_i} \\ &= \frac{\dot{A}_i}{A_i} - \frac{\epsilon_{g_i'} \dot{k}_i g_i' k_i}{k_i g_i (1 - \sigma_i)} \\ &= \frac{\dot{A}_i}{A_i} - \frac{\epsilon_{g_i'} \sigma_i}{(1 - \sigma_i)} \frac{\dot{k}_i}{k_i} \end{aligned} \tag{B.27}$$

Como $\frac{\dot{A}_1}{A_1} = \frac{\dot{A}_2}{A_2}$, temos que

$$\frac{\epsilon_{g_1'} \sigma_1}{(1 - \sigma_1)} \frac{\dot{k}_1}{k_1} = \frac{\epsilon_{g_2'} \sigma_2}{(1 - \sigma_2)} \frac{\dot{k}_2}{k_2} \tag{B.28}$$

Como $\sigma_1 \neq \sigma_2$, temos uma contradição com B.23. Portanto, o crescimento é não balanceado.