

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA

DESIGUALDADES ÓTIMAS DE ENTROPIA E  
MOSER EM VARIEDADES RIEMANNIANAS:  
TRÊS CONTRIBUIÇÕES EM ANÁLISE  
GEOMÉTRICA

TESE DE DOUTORADO

Marcos Teixeira Alves

Curitiba, PR, Brasil

2016

DESIGUALDADES ÓTIMAS DE ENTROPIA E MOSER  
EM VARIEDADES RIEMANNIANAS: TRÊS  
CONTRIBUIÇÕES EM ANÁLISE GEOMÉTRICA

Marcos Teixeira Alves

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Matemática**. Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais.

**Orientador: Jurandir Ceccon**

**Coorientador: Higidio Portillo Oquendo**

Curitiba, PR, Brasil

2016

---

A474d

Alves, Marcos Teixeira

Desigualdades ótimas de entropia e moser em variedades riemannianas : três contribuições em análise geométrica/ Marcos Teixeira Alves. – Curitiba, 2016.

106 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Jurandir Ceccon – Co-orientador: Higidio Portillo Oquendo.  
Bibliografia: p. 104-106.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Geometria riemanniana. 3. Entropia. I. Universidade Federal do Paraná. II. Ceccon, Jurandir. III. Oquendo, Higidio Portillo. IV. Título.

CDD: 516.36

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor CIÊNCIAS EXATAS  
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA  
Código CAPES: 40001016041P1

### TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Doutorado de **MARCOS TEIXEIRA ALVES**, intitulada: "**Desigualdades Ótimas de Entropia e Moser em Variedades Riemannianas: três contribuições em Análise Geométrica**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua *Aprovação*, completando-se assim todos os requisitos previstos nas normas desta Instituição para a obtenção do Grau de **Doutor em MATEMÁTICA**.

Curitiba, 24 de Fevereiro de 2016.

Prof JURANDIR CECCCON (UFPR)  
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof CLÉBER DE MEDEIRA (UFPR)

Prof EZEQUEL RODRIGUES BARBOSA (UFMG)

Prof JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ (IMPA)

Prof MARCELO MOREIRA CAVALCANTI (UEM)

# AGRADECIMENTOS

Esta tese só pôde ser concluída graças à amizade e ao companheirismo de algumas pessoas. Meus agradecimentos especiais a minha família de Treze de Maio - SC por todo apoio recebido nesses últimos quatro anos. A meus pais, Joraci e Shirlei e a meus irmãos, Éderson e Mariane, sou infinitamente grato por todo carinho e amor que depositam. A minha sobrinha Ana Beatriz pelas brincadeiras e pelas conversas descontraídas por telefone e aos meus sobrinhos (gêmeos) que estão a caminho.

Registro também meus agradecimentos especiais ao professor Jurandir. Não apenas pela orientação que recebi, mas sobretudo pelos incontáveis conselhos e pelo exemplo de vida profissional. Obrigado pela paciência na elaboração desse trabalho. Agradeço aos professores Cleber de Medeira, Ezequiel Rodrigues Barbosa, Felipe Linares e Marcelo Moreira Calvacanti pela leitura deste texto e pelas palavras de incentivo.

A meus colegas de pós graduação, agradeço pela companhia nesse período 2012-2015. Aos amigos que aqui tive o privilégio de conviver: Aurita, Dion, Elvis, Fernando e Leonardo agradeço pelos momentos marcantes dessa caminhada. Em especial, agradeço a Stela (“bunita”) por estar sempre disposta a ouvir e aconselhar no decorrer destes 4 anos. Agradeço também aos amigos Cinthia, Rodrigo e Monique que mesmo distantes, incentivaram fortemente para que eu seguisse perseverante no doutorado.

Por toda minha formação adquirida durante o doutorado foi decisiva a participação de professores dedicados e empolgados pela mãe das ciências. Sou extremamente grato a vocês! Não deixaria de citar o nome do professor Higidio pela confiança e pelas exímias aulas nos cursos de Análise Funcional e Semigrupos de Operadores Lineares.

Agradeço a secretária Cinthia pela eficácia nos pedidos que realizei e por sua maneira serena de resolver as adversidades. A todos os funcionários da Universidade Federal do Paraná que de forma direta ou indireta contribuíram pelos bons momentos acadêmicos. À CAPES, sou grato pelo apoio financeiro concedido.

Por fim e o mais importante, agradeço a Deus por sua infinita bondade. Graças às suas bênçãos, pude concluir mais essa etapa de minha vida. A Ele, toda minha gratidão!

# RESUMO

## DESIGUALDADES ÓTIMAS DE ENTROPIA E MOSER EM VARIEDADES RIEMANNIANAS: TRÊS CONTRIBUIÇÕES EM ANÁLISE GEOMÉTRICA

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo com dimensão  $n \geq 2$ . Inicialmente, provamos que a desigualdade de Moser Riemanniana ótima:

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left( A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{opt} \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $p > 1$ ,  $r = \frac{p(n+p)}{n}$  e  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ . No caso em que  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ , ocorre a existência de funções extremais.

Em seguida, mostramos a validade da desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima. Precisamente, estabelecemos que para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^p(M)} = 1$ , verifica-se

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left( \mathcal{A}(p, \tau) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right),$$

em que  $p > 1$  e  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ . Quando  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$  ou  $\tau = p < 2$ , a desigualdade acima admite função extremal. Além disso, aplicamos a desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima para garantir que o semigrupo associado ao problema de Cauchy com equação de difusão não linear:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p(u^{\frac{1}{p-1}}) \text{ em que } (x, t) \in M \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases}$$

para algum dado inicial  $f \in L^1(M)$ ,  $f \geq 0$  é hipercontrativo.

Por fim, mostramos a validade da desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima, isto é, para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ , tem-se

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_{ent} \int_M |u|^p dv_g \right]$$

com  $1 < r \leq p \leq 2$ . Se  $1 < r \leq p < 2$ , então existe função extremal.

**Palavras-chave:** constantes ótimas, desigualdades ótimas, desigualdade de Moser, desigualdades de entropia.

# ABSTRACT

## OPTIMAL INEQUALITIES OF ENTROPY AND MOSER IN RIEMANNIAN MANIFOLDS: THREE CONTRIBUTIONS IN GEOMETRIC ANALYSIS

Let  $(M, g)$  be a smooth compact Riemannian manifold of dimension  $n \geq 2$  without boundary. First, we prove the validity of the optimal Moser inequality:

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left( A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{opt} \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}$$

for all function  $u \in H^{1,p}(M)$  where  $p > 1$ ,  $r = \frac{p(n+p)}{n}$  and  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ . We prove the existence of an extremal function for the optimal inequality above when  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ .

Next, we establish the validity of the general optimal  $L^p$ -entropy:

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left( \mathcal{A}(p, \tau) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right)$$

for all function  $u \in H^{1,p}(M)$  with  $\|u\|_{L^p(M)} = 1$  where  $p > 1$  and  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ . When  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$  we show the existence of an extremal function. Using this inequality, we prove that the semigroup associated with the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p(u^{\frac{1}{p-1}}) \text{ em que } (x, t) \in M \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases}$$

for some  $f \in L^1(M)$ ,  $f \geq 0$  is hypercontractive.

Finally, we show the validity of the optimal  $L^r$ -entropy:

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_{ent} \int_M |u|^p dv_g \right]$$

for all functions  $u \in H^{1,p}(M)$  with  $\|u\|_{L^r} = 1$  where  $1 < r \leq p \leq 2$ . If  $1 < r \leq p < 2$  we show there exists an extremal function.

**Keywords:** Best constants. Optimal inequalities. Moser inequality. Entropy inequalities.

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>1 DESIGUALDADE DE MOSER RIEMANNIANA ÓTIMA</b>	<b>18</b>
1.1 Desigualdade de Moser Euclidiana . . . . .	18
1.2 Desigualdade de Moser Riemanniana . . . . .	20
1.3 Desigualdade de Moser Riemanniana Ótima . . . . .	26
1.3.1 Equação de Euler-Lagrange . . . . .	29
1.3.2 Concentração $L^r$ . . . . .	33
1.3.3 Estimativa pontual . . . . .	37
1.3.4 O argumento final . . . . .	41
1.3.5 Existência de função extremal . . . . .	45
<b>2 DESIGUALDADE DE <math>p</math>-ENTROPIA RIEMANNIANA ÓTIMA</b>	<b>47</b>
2.1 Relação entre as primeiras constantes ótimas Euclidianas de Nash e de entropia	49
2.2 Limitação da segunda constante ótima de Nash . . . . .	52
2.2.1 Equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Nash ótima . . .	52
2.2.2 Concentração $L^p$ . . . . .	56
2.2.3 O lema da distância . . . . .	58
2.2.4 O argumento final . . . . .	63
2.3 Demonstração do Corolário 2.1 e do Teorema 2.2 . . . . .	69
2.4 Existência de função extremal . . . . .	71
2.5 Aplicação . . . . .	71

<b>3</b>	<b>DESIGUALDADE DE <math>r</math>-ENTROPIA RIEMANNIANA ÓTIMA</b>	<b>75</b>
3.1	A limitação da primeira constante ótima de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana .	77
3.2	Limitação da segunda constante ótima de Gagliardo-Nirenberg . . . . .	79
3.2.1	Equação de Euler-Lagrange . . . . .	79
3.2.2	Concentração $L^r$ . . . . .	82
3.2.3	Estimativa pontual . . . . .	90
3.2.4	O argumento final . . . . .	94
3.3	Demonstração do Corolário 3.1 e do Teorema 3.2 . . . . .	101
3.4	Existência de função extremal . . . . .	103
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>105</b>

# INTRODUÇÃO

Desigualdades ótimas do tipo Moser [42] têm sido objeto de extensa investigação nas últimas décadas, tanto no ambiente Euclidiano, quanto no Riemanniano. Para ter uma ideia do alcance deste estudo, citamos os seguintes trabalhos: [1], [5], [6], [24] e [26] para o caso Euclidiano e [15], [19], [20] e [23] para o caso de variedades Riemannianas.

A aparição da desigualdade de Moser (em  $\mathbb{R}^n$ ) aconteceu no artigo [42] de 1961. Neste trabalho, Moser estabeleceu que soluções de certas equações elípticas de segunda ordem têm a norma padrão  $L^\infty$  dominada pela norma  $L^p$  para todo  $p > 1$ . A ideia desenvolvida para mostrar essa estimativa é baseada num processo de iteração (esta técnica já foi melhorada e inclusive atualmente é conhecida como estimativas de Giorgi-Nash-Moser que, como sabemos, desempenha um papel importante na teoria das equações diferenciais parciais). O ponto chave deste processo iterativo consiste em conectar soluções fracas de uma EDP elíptica com a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2(n+2)}{n}} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \right)^{\frac{2}{n}}$$

válida para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  e alguma constante  $c > 0$ . Esta desigualdade é um caso particular ( $p = 2$ ) da *desigualdade de Moser Euclidiana geral* que afirma que existe uma constante  $A > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \leq A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{r}{n}} \quad (M_E(A))$$

é válida para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $p \geq 1$ ,  $n \geq 2$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ . Quando definimos

$$A(p, n)^{-1} = \inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \{ \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|u\|_{L^{\frac{p}{n}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p^2}{n}}; \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1 \},$$

a desigualdade ( $M_E(A(p, n))$ ) é chamada de *desigualdade de Moser Euclidiana ótima* e a constante  $A(p, n)$  é a *constante ótima* desta desigualdade. Mais detalhes sobre esta constante foram estudados por Beckner, em [6].

Nosso primeiro interesse, nesta tese, é estudar esta desigualdade do ponto de vista ótimo em variedades Riemannianas. Significativos avanços têm sido obtidos neste sentido, para uma exposição geral e outras referências sobre este assunto, citamos [15], [20] e [23]. Seguindo

nesta direção, muitos autores estabeleceram aplicações destas desigualdades na investigação de diversos problemas em EDP's. Em particular, as desigualdades ótimas do tipo Moser em variedades Riemannianas estudadas por Cecon e Montenegro em [19] (na situação  $n = p = 2$ ) foram aplicadas no trabalho [39] por Kishimoto e Maeda com o propósito de obter teoremas de existência global para um sistema de Zakharov em  $\mathbb{T}^2$ .

Introduzimos o cenário Riemanniano. Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta e sem bordo com dimensão  $n \geq 2$ . Em virtude dos argumentos padrões da geometria em variedades ([32], por exemplo), é possível encontrarmos uma versão Riemanniana da desigualdade de Moser Euclidiana ( $M_E(A)$ ), a saber: existem constantes positivas  $C$  e  $D$  tais que para toda função  $u$  pertencente ao espaço de Sobolev Riemanniano clássico  $H^{1,p}(M)$ , tem-se

$$\int_M |u|^r dv_g \leq \left( C \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + D \int_M |u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}},$$

onde  $p \geq 1$ ,  $n \geq 2$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ . Estudamos uma generalização desta desigualdade. Consideramos um parâmetro  $\tau$  satisfazendo  $1 \leq \tau \leq p$  (um parâmetro similar foi usado por Druet em [30] no âmbito das desigualdades de Sobolev). Chegamos, então, na desigualdade

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ A \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}} \quad (M_R(A, B))$$

válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  e para  $p$ ,  $n$  e  $r$  descritos anteriormente. Como observado em [31] ou [32], a desigualdade  $(M_R(A, B))$  implica  $A \geq A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}$ .

Nosso foco de estudo consistiu em considerar a desigualdade  $(M_R(A, B))$  em seu sentido ótimo. Como existem duas constantes em  $(M_R(A, B))$ , a otimalidade pode ser definida de duas maneiras diferentes. Seguiremos aquela de maior interesse do ponto de vista de EDP (conforme capítulos 4 e 5 do livro [38]). Definimos a *primeira constante ótima de Moser Riemanniana* por

$$A_{opt} = \inf\{A \in \mathbb{R} : \text{existe } B \in \mathbb{R} \text{ em que } (M_R(A, B)) \text{ é válida}\}.$$

Em particular,  $A_{opt} \geq A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}$ . Agora, usando um argumento de partição da unidade (as ideias, em linhas gerais, estão contidas em [31] ou [32]), estabelecemos a *desigualdade de Moser Riemanniana*: para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante  $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + C_\varepsilon \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Assim,

$$A_{opt} = A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Uma vez que  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, C_\varepsilon))$  é satisfeita, faz sentido considerarmos

$$B_\varepsilon = \inf\{B \in \mathbb{R}; (M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, B)) \text{ é válida}\}.$$

Desse modo, para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ , tem-se

$$\left(\int_M |u|^\tau dv_g\right)^{\frac{p}{\tau}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{p}{\tau}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{p}{\tau}} \right] \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{n}}.$$

Verificamos que  $(B_\varepsilon)$  é monótona não crescente. Seja

$$\mathcal{B} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon.$$

Em contraste com o caso Euclidiano ( $B_\varepsilon = 0$ ), a validade da primeira desigualdade de Moser Riemanniana ótima é mais delicada, pois se fazemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ , então  $(B_\varepsilon)$  pode, em princípio, explodir. De fato, quando  $\tau = p > 2$ , existem casos em que a desigualdade ótima de Gagliardo-Nirenberg ou a desigualdade ótima de Sobolev não são válidas, dependendo da geometria da variedade  $(M, g)$  (vide [19] ou [29], respectivamente). Em vista disto, consideramos  $\tau \leq \min\{2, p\}$ , isto é, enfraquecemos a desigualdade de Moser. Esta ideia já tinha sido aplicada em [23] no estudo de uma família de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg para  $\tau = 2$  e  $2 < p < n$ . Como será visto, os argumentos usados em nossa prova já foram apresentados em [23], cujo ponto chave consistiu em utilizar técnicas de explosão. Porém, em nosso trabalho, introduzimos um modo novo de estudar esta explosão, considerando-o mais apropriado para o nosso problema.

Como primeiro resultado, provamos que se  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ , então  $\mathcal{B} < +\infty$  e  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}))$  é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . A relevância deste fato é que o mesmo estende outros três resultados: de Brouttelande [15] quando  $p = q = \tau = 2$ , Ceccon e Montenegro [20] no caso  $1 < p = q \leq 2$  e  $\tau = p$  e Chen e Sun [23] na situação  $2 < p = q < n$  e  $\tau = 2$ .

A validade de  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}))$  permite considerarmos a *segunda constante ótima de Moser*:

$$B_{opt} = \inf\{B; (M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B)) \text{ é válida}\}.$$

Observamos que  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$  é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Com base nisso, chamamos de *função extremal* a qualquer função não nula em  $H^{1,p}(M)$  que realiza a igualdade em  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$ . Diferentemente do caso Euclidiano, a existência de funções extremas não segue imediatamente da aplicação de técnicas variacionais. Todavia, como segundo resultado, unificamos a demonstração da validade da desigualdade ótima com a existência de funções extremas. Precisamente, provamos que se  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ , a segunda desigualdade de Moser Riemanniana ótima  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$  admite função extremal e  $B_{opt} = \mathcal{B}$ .

Estes resultados referentes a validade da desigualdade de Moser Riemanniana ótima e a

existência de função extremal renderam o artigo [2].

A desigualdade de Moser está intimamente relacionada com a *desigualdade de entropia*. Basicamente, esta relação ocorre através da aplicação da desigualdade de Jensen. No cenário Riemanniano, a desigualdade de entropia foi recentemente estudada no caso  $1 < p \leq 2$  em [21] (para  $p > 2$ , está conjecturado que a desigualdade algumas vezes falha). Motivados com esta conexão, obtivemos resultados envolvendo a validade de uma família de desigualdades de entropia.

Tais desigualdades tornaram-se uma ferramenta poderosa em algumas áreas da matemática, como Análise Real, Análise Complexa, Análise Geométrica, Geometria Convexa, Probabilidade, entre outras. O trabalho pioneiro [37], devido a Gross, apresentou a equivalência entre uma classe de desigualdades de entropia e a hipercontratividade do semigrupo do calor. Particularmente, estas desigualdades com respeito a medida Gaussiana desempenham um papel relevante na teoria do fluxo de Ricci (como em [44]), na teoria do transporte ótimo (conforme [47]), na teoria da probabilidade (por exemplo, [40]), entre outras aplicações.

Recentes desenvolvimentos apontaram uma estreita relação entre uma classe de desigualdades logarítmicas de Sobolev (também conhecidas como *desigualdades de entropia*) e a propriedade de hipercontratividade para algumas equações de evolução não lineares. Para uma visão geral, citamos os trabalhos [26], [34] e [35] para referências no cenário Euclidiano e [10], [11] e [34] para referências em variedades Riemannianas.

Nesta direção, nosso próximo objetivo consistiu em estudar constantes e desigualdades de entropia ótimas em variedades Riemannianas. Contudo, antes de prosseguirmos e descrevermos os problemas do nosso interesse, resumidamente apresentamos a desigualdade de  $p$ -entropia em  $\mathbb{R}^n$ , juntamente com as contribuições que foram dadas.

A *desigualdade de  $p$ -entropia Euclidiana* estabelece que para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx = 1$ , tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|^p) dx \leq \frac{n}{p} \log \left( \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right), \quad (1)$$

onde  $n \geq 2$ ,  $p \geq 1$  e  $\mathcal{A}_0(p)$  é a *constante ótima* desta desigualdade.

Em 1978, Weissler [49] apresentou a desigualdade (1) para  $p = 2$ , sendo equivalente a desigualdade logarítmica de Sobolev Gaussiana introduzida por Gross em [37]. Mais tarde, Carlen [16] mostrou que suas funções extremais (aquelas funções não nulas com norma  $L^p(\mathbb{R}^n)$  unitária que realizam a igualdade em (1)) são dilatações ou translações da Gaussiana

$$u(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2}.$$

Para  $p = 1$ , Ledoux [41] provou a desigualdade (1) e Beckner [7] classificou suas funções extremais como funções características normalizadas em bolas. Neste mesmo trabalho, Beckner

também provou que (1) é válida para  $1 < p < n$  e Del Pino e Dolbeault [26] classificaram suas funções extremais como sendo precisamente translações e dilatações da função

$$u_0(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n(p-1)}{p} + 1\right)} e^{-|x|^{\frac{p}{p-1}}},$$

em que  $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é a função gama definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Por fim, usando técnicas de transporte de massa, Gentil [34] estabeleceu a validade de (1) e estendeu a classificação das suas extremais para  $p \geq n$ .

Em síntese, para  $p > 1$ ,

$$\mathcal{A}_0(p) = \frac{p}{n} \left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} \pi^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n(p-1)}{p} + 1\right)}\right)^{\frac{p}{n}}.$$

É oportuno mencionar a ideia chave introduzida por Backry, Coulhon, Ledoux e Salof-Coste em [5]: eles descobriram que para  $1 < p < n$ , a desigualdade de  $p$ -entropia Euclidiana pode ser deduzida como um caso limite de certas desigualdades de Gagliardo-Nirenberg Euclidiana. Mais tarde, este ponto de vista foi explorado por Del Pino e Dolbeault [26] para estabelecer a desigualdade (1) no caso  $1 < p < n$ .

Descrevemos agora o cenário Riemanniano: seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e de dimensão  $n \geq 2$ . Consideramos  $p > 1$  e um parâmetro  $\tau \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $1 \leq \tau \leq p$ . Nossa primeira meta baseou-se em mostrar que existem constantes  $A$  e  $B$  positivas tais que a desigualdade de  $p$ -entropia

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ A \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \right] \quad (\text{L(A,B)})$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^p(M)} = 1$ . O ponto de partida foi fundamentado na validade da *desigualdade de Nash Riemanniana ótima* [17] que estabelece o seguinte: para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ , tem-se

$$\left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p\theta_k}} \leq \left[ N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p, q_k) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}},$$

em que  $\theta_k = \frac{n(p-q_k)}{q_k p - q_k n + np}$ ,  $q_k = p - \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}$  é a *primeira constante ótima* desta desigualdade e  $B(p, q_k)$  é a *segunda constante ótima*. Naturalmente estas constantes dependem da dimensão  $n$  e  $B(p, q_k)$  pode depender da métrica  $g$ . Como estas informações não são relevantes para o nosso estudo, iremos omiti-las.

Nossa estratégia para estipular  $(L(A,B))$  consistiu, inicialmente, em rearranjar os termos da desigualdade de Nash Riemanniana ótima, aplicar a função logarítmica, isto é,

$$\frac{\tau}{\theta_k} \log \left( \frac{\|u\|_{L^p(M)}}{\|u\|_{L^{q_k}(M)}} \right) \leq \log \left( \frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g u\|_{L^p(M)}^\tau + B(p, q_k) \|u\|_{L^p(M)}^\tau}{\|u\|_{L^{q_k}(M)}^\tau} \right)$$

e fazer  $k \rightarrow +\infty$  (o que implica  $q_k \rightarrow p$ ). O sucesso deste plano só ocorreu como consequência das três afirmações abaixo:

- (a)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\tau}{\theta_k} \log \left( \frac{\|u\|_{L^p(M)}}{\|u\|_{L^{q_k}(M)}} \right) \right] = \frac{\tau}{n} \int_M \frac{|u|^p}{\|u\|_{L^p(M)}^p} \log \left( \frac{|u|^p}{\|u\|_{L^p(M)}^p} \right) dv_g;$
- (b) a sequência  $(N(p, q_k))$  converge para  $\mathcal{A}_0(p)$  quando  $k \rightarrow +\infty$ ;
- (c)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B(p, q_k) = \mathcal{B}(p) < +\infty$ .

A afirmação no item (a) decorre, essencialmente, da aplicação do teorema do valor médio em dois momentos. Para o item (b), usamos que  $(N(p, q_k))$  é monótona (não decrescente) e devido a desigualdade de Jensen, garantimos sua limitação. O ponto delicado foi estabelecer (c). Considerando a hipótese  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ , o resultado em (c) é então obtido, a grosso modo, levando em conta a existência de uma sequência  $(u_k)$  que satisfaz uma equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Nash Riemanniana ótima e da estimativa com que esta sequência converge para zero pontualmente. As principais ferramentas usadas nesta etapa foram o método blow-up, a iteração de Moser para EDP's elípticas (caso  $1 < p \leq n$ ), a desigualdade de Morrey (caso  $p > n$ ) e a teoria de regularidade de Tolksdorf.

Em vista da veracidade das afirmações em (a), (b) e (c), aplicamos o limite em  $k \rightarrow +\infty$  para concluirmos que

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p) \right] \quad (2)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^p(M)} = 1$ . De modo natural (assim como ocorreu na desigualdade de Moser), surgem as definições de *primeira constante ótima de p-entropia*

$$\mathcal{A}(p, \tau) = \inf \{ A \in \mathbb{R}; \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ com } (L(A, B)) \text{ válida} \}$$

e da *primeira desigualdade de p-entropia Riemanniana ótima* que afirma que existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^p(M)} = 1$ , tem-se

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}(p, \tau) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \right].$$

No caso da primeira desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima ser verdadeira, considera-

mos a *segunda constante ótima de  $p$ -entropia*

$$\mathcal{B}(p, \tau) = \inf\{B \in \mathbb{R} : (L(\mathcal{A}(p, \tau), B)) \text{ é válida}\}$$

e a *segunda desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima* que estabelece que

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}(p, \tau) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right]$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^p(M)} = 1$ . A definição de  $\mathcal{A}(p, \tau)$  aplicada em (2) garante que  $\mathcal{A}(p, \tau) \leq \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}$ . Por outro lado, combinamos a desigualdade de Jensen com a desigualdade de  $p$ -entropia para determinarmos uma desigualdade de Nash. Isto provará que

$$\mathcal{A}(p, \tau) = \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}$$

De modo semelhante ao que vimos na desigualdade de Moser, dizemos que  $u_0 \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u_0\|_{L^p(M)} = 1$  é uma *função extremal* quando

$$\int_M |u_0|^p \log(|u_0|^p) dv_g = \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u_0|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right].$$

Apoiados na prova da limitação de  $(\mathcal{B}(p, q_k))$ , demonstramos a existência de função extremal quando  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$  ou  $\tau = p < 2$ . Além disso,

$$\mathcal{B}(p, \tau) = \mathcal{B}(p).$$

Com a validade da desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima, apresentamos uma estimativa da solução do problema de Cauchy com equação de difusão não-linear:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p(u^{\frac{1}{p-1}}) \text{ em que } (x, t) \in M \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases}$$

para algum dado inicial  $f \in L^1(M)$ ,  $f \geq 0$ . Nesta estimativa, ficará explícito o uso das constantes ótimas de  $p$ -entropia.

Os resultados referentes a validade da desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima, a existência de função extremal para  $(L(\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}(p)))$  e a aplicação descrita brevemente acima foram organizados num preprint a ser submetido em 2016.

Por fim, investigamos a *desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima*. Consideramos  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e de dimensão  $n \geq 2$  e os parâmetros  $p, r \in \mathbb{R}$  com  $1 < r \leq p \leq 2$ . Nosso propósito inicial foi garantir que existem

constantes  $A$  e  $B$  positivas tais que a desigualdade de  $r$ -entropia:

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( A \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right) \quad (\text{Ent}(A,B))$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ .

Como nossa principal aliada nessa trajetória, fizemos uso frequente da validade da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima [20], a qual estabelece que

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \left[ \mathcal{A}(p, q_k, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_k, r) \int_M |u|^p dv_g \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}$$

é válida para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $1 \leq q_k < r \leq p \leq 2$ ,  $q_k = r - \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_k = \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)}$  um parâmetro interpolador que satisfaz  $\theta_k \in (0, 1)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}(p, q_k, r)$  é a *primeira constante ótima* desta desigualdade e  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  é a *segunda constante ótima*.

Com argumentos semelhantes aos adotados para a obtenção da desigualdade de  $p$ -entropia, mostramos que  $(\text{Ent}(A,B))$  é obtida a partir da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima via passagem do limite em  $\mathcal{A}(p, q_k, r)$  e em  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Num primeiro estágio, verificamos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(p, q_k, r) = \mathcal{A}_0(p, r) < +\infty.$$

Novamente, o argumento mais delicado consistiu no estudo do comportamento de  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  quando fazemos  $k \rightarrow +\infty$ . Entretanto, através da obtenção de uma sequência  $(u_k)$  que satisfaz uma equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima e da estimativa da velocidade com que esta sequência converge para zero pontualmente, mostramos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(p, q_k, r) = \mathcal{B}_0(p, r) < +\infty.$$

Com os dois limites anteriores, obtemos a desigualdade de  $r$ -entropia:

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_0(p, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_0(p, r) \int_M |u|^p dv_g \right]$$

válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ .

Procedendo da mesma forma realizada na discussão da desigualdade de  $p$ -entropia, podemos definir a *primeira constante ótima Riemanniana de  $r$ -entropia*, a qual denotamos por  $\mathcal{A}_{ent}$ , e *primeira desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima* que afirma que existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ , tem-se

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right)$$

Verificamos que

$$\mathcal{A}_{ent} = \mathcal{A}_0(p, r).$$

Definimos também a *segunda constante ótima de  $r$ -entropia* -  $\mathcal{B}_{ent}$  - e a *segunda desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima* que estabelece que

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_{ent} \int_M |u|^p dv_g \right)$$

é satisfeita para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ .

Como conclusão do estudo da desigualdade de  $r$ -entropia, provamos a existência de funções extremais para  $(Ent(\mathcal{A}_{ent}, \mathcal{B}_{ent}))$  (se  $1 < r \leq p < 2$ ) e  $\mathcal{B}_{ent} = \mathcal{B}_0(p, r)$ .

Os resultados referentes a validade da desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima e a existência de função extremal para esta desigualdade estão organizados num artigo na forma de preprint com submissão prevista para início de 2016.

Para encerrar, preparamos esta tese em três capítulos, de acordo com as três contribuições em análise geométrica que foram obtidas.

O **Capítulo 1** contém a validade da desigualdade de Moser Riemanniana ótima. Além disso, acrescentamos uma prova da desigualdade de Moser Euclidiana e descrevemos a maneira como é obtida a desigualdade de Moser Riemanniana.

No **Capítulo 2**, tratamos a validade da desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima.

O **Capítulo 3** apresenta nossa terceira contribuição, em que obtemos a validade da desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima.

# Capítulo 1

## DESIGUALDADE DE MOSER RIEMANNIANA ÓTIMA

Este capítulo está organizado em três seções. Na seção 1.1, apresentamos a desigualdade de Moser em  $\mathbb{R}^n$ . Na seção seguinte, estabelecemos esta desigualdade numa variedade Riemanniana suave e compacta via argumentos padrões da geometria em variedades. O capítulo encerra-se com o estudo da desigualdade de Moser Riemanniana num contexto ótimo.

A partir deste momento, convencionaremos que  $\|\cdot\|_s$  denota a norma em  $L^s(\mathbb{R}^n)$  ou  $L^s(M)$  (o contexto ficará claro), onde  $1 \leq s \leq +\infty$ .

### 1.1 Desigualdade de Moser Euclidiana

No espaço Euclidiano, a versão  $L^p$  da *desigualdade de Moser* garante que existe uma constante  $A > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{r}{n}} \quad (1.1)$$

é satisfeita para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$  com  $1 \leq p < +\infty$ ,  $n \geq 2$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ .

No que segue, estabeleceremos a validade desta desigualdade. Seja  $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Começamos provando o caso em que  $p = 1$ . Aplicamos a desigualdade de interpolação com  $1 \leq \frac{n+1}{n} \leq \frac{n}{n-1} = 1^*$ , em que

$$\frac{n}{n+1} = \frac{\theta}{1} + (1-\theta) \frac{n-1}{n},$$

para obter

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n+1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u| dx \right)^{\theta} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{1^*} dx \right)^{\frac{1-\theta}{1^*}}.$$

Como  $\theta = \frac{1}{n+1}$  e da aplicação da desigualdade de Sobolev, temos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n+1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u| dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Desse modo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n+1}{n}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u| dx \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.2)$$

a qual corresponde a desigualdade de Moser para  $p = 1$ .

Suponhamos  $p > 1$ . Definimos

$$v(x) = |u(x)|^\gamma = [u(x)^2]^{\frac{\gamma}{2}}$$

com  $\gamma > 1$  a ser escolhido e  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Como  $\gamma > 1$ , teremos  $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Com isso,  $\nabla v = \gamma |u|^{\gamma-2} u \nabla u$ . Substituindo  $v$  em (1.2), chegaremos a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma \frac{n+1}{n}} dx \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Decorre da desigualdade de Hölder que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma \frac{n+1}{n}} dx \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1) \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.3)$$

Escolhemos  $\gamma \in \mathbb{R}$  de modo que  $\gamma \frac{n+1}{n} = \frac{p(n+p)}{n} = r$ , isto é,  $\gamma = p \left( \frac{n+p}{n+1} \right) > 1$ . Para este  $\gamma$ , (1.3) transforma-se em

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1) \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}}_{(1.4.1)} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{n}}}_{(1.4.2)}. \quad (1.4)$$

Iremos estimar (1.4.1) e (1.4.2). Usaremos a desigualdade de interpolação em (1.4.2) na seguinte configuração:  $p \leq \gamma \leq \frac{p(n+p)}{n} = r$ . Observamos que  $\frac{1}{\gamma} = \frac{\nu}{p} + (1-\nu) \frac{n}{p(n+p)}$  implica  $\nu = \frac{1}{p}$ . Consequentemente,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p^2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{n(p-1)}{p^2(n+p)}}. \quad (1.5)$$

Aplicando agora a desigualdade de interpolação em (1.4.1) com

$$p \leq (\gamma-1) \frac{p}{p-1} \leq p \left( 1 + \frac{p}{n} \right),$$

encontramos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p(\gamma-1)}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p(n+p+1)}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{n}{p(n+p+1)}}. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.5) e (1.6) em (1.4), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p(\gamma-1)}} \right]^{\gamma-1} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{\gamma}{n}} \\ &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{n}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Portanto, obtemos a desigualdade de Moser

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \leq \gamma^p \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{p}{n}}$$

para  $p > 1$  e  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ .

Graças a um argumento de densidade, obtemos a *desigualdade de Moser Euclidiana geral* que estabelece o seguinte: existe uma constante  $A > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \leq A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{p}{n}} \quad (M_E(A))$$

é válida para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $p \geq 1$ ,  $n \geq 2$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ . Consideramos

$$A(p, n)^{-1} = \inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \{ \|\nabla u\|_p^p \|u\|_{\frac{p}{n}}^{\frac{p^2}{n}}; \|u\|_r = 1 \}. \quad (1.7)$$

Assim, temos a

**Definição 1.1** *A desigualdade  $(M_E(A(p, n)))$  é chamada **desigualdade de Moser Euclidiana ótima** e a constante  $A(p, n)$  é a **constante de Moser ótima** desta desigualdade.*

Mais detalhes sobre  $A(p, n)$  foram estudados por Beckner, em [6].

## 1.2 Desigualdade de Moser Riemanniana

Nosso objetivo, durante esta seção, será estabelecer uma versão Riemanniana da desigualdade  $(M_E(A))$ . Os resultados apresentados aqui usam argumentos já conhecidos desde os anos 70 (vide, por exemplo, [31] ou [38]).

**Proposição 1.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n \geq 2$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $B_\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que, para toda função  $u \in C^1(M)$ , temos*

$$\int_M |u|^r dv_g \leq \left[ (A(p, n) + \varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B_\varepsilon \int_M |u|^p dv_g \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}},$$

em que  $p \geq 1$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ .

**Demonstração:** Fixamos  $x_0 \in M$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , consideramos  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  e uma carta exponencial  $(\Omega, \varphi)$  centrada em  $x_0$  com  $\varphi(\Omega) = B(0; \delta) \subset \mathbb{R}^n$  satisfazendo

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1 + \varepsilon) \delta_{ij} \quad (1.8)$$

no sentido das formas bilineares ( $g_{ij}$  representam as componentes da métrica  $g$  nesta carta). A expressão em (1.8) é conhecida como *expansão de Cartan da métrica  $g$*  (para mais detalhes, vide [22]).

Devido a (1.8), obtemos as seguintes expansões em  $\Omega$ :

$$(1 + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \leq |g|^{\frac{1}{2}} \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{n}{2}} \text{ e } (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} |\nabla u| \leq |\nabla_g u| \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} |\nabla u|. \quad (1.9)$$

Seja  $u \in C_c^1(B(x_0; \delta))$ . Em virtude de (1.9), enumeramos três fatos:

- (a)  $\int_M |\nabla_g u|^p dv_g \geq (1 + \varepsilon)^{-\frac{n+p}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u \circ \varphi^{-1})|^p dx$ ;
- (b)  $(1 + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u \circ \varphi^{-1}|^p dx \leq \int_M |u|^p dv_g \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u \circ \varphi^{-1}|^p dx$ ;
- (c)  $(1 + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u \circ \varphi^{-1}|^r dx \leq \int_M |u|^r dv_g \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u \circ \varphi^{-1}|^r dx$ .

Logo, juntamos os itens (a), (b) e (c) acima com a desigualdade de Moser Euclidiana para obter

$$\int_M |u|^r dv_g \leq (1 + \varepsilon)^{n+p} A(p, n) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}.$$

Em resumo, podemos escolher  $\varepsilon > 0$  pequeno de modo que

$$\int_M |u|^r dv_g \leq (A(p, n) + \varepsilon) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}} \quad (1.10)$$

qualquer que seja  $u \in C_c^1(B(x_0; \delta))$ .

Como  $M$  é compacta, existem  $x_i \in M$ ,  $i = 1, \dots, K$  e  $\delta > 0$  tais que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^K B(x_i; \delta).$$

Consideramos  $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, K}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta  $\{B(x_i; \delta)\}_{i=1, \dots, K}$  de  $M$ . Para cada  $i = 1, \dots, K$ , definimos a aplicação:

$$\eta_i = \frac{\alpha_i^{[p]+1}}{\sum_{j=1}^K \alpha_j^{[p]+1}},$$

em que  $[p]$  denota a função maior inteiro que não excede  $p$ .

Uma vez que  $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$  para todo  $i = 1, \dots, K$  e possui suporte compacto em  $B(x_i; \delta)$ , segue que  $\eta_i^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{C}^1(M)$  com suporte compacto em  $B(x_i; \delta)$  qualquer que seja  $i = 1, \dots, K$ .

Fixamos  $u \in \mathcal{C}^1(M)$ . Observamos que

$$\begin{aligned} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r}} &= \left[ \int_M \left( \sum_{i=1}^K \eta_i |u|^p \right)^{\frac{r}{p}} dv_g \right]^{\frac{p}{r}} \leq \sum_{i=1}^K \left[ \int_M \left| \eta_i^{\frac{1}{p}} u \right|^r dv_g \right]^{\frac{p}{r}} \\ &\leq \sum_{i=1}^K \left[ (A(p, n) + \varepsilon_i) \left( \int_M \left| \nabla_g \left( \eta_i^{\frac{1}{p}} u \right) \right|^p dv_g \right) \left( \int_M \left| \eta_i^{\frac{1}{p}} u \right|^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \right]^{\frac{p}{r}}, \end{aligned}$$

sendo que nas desigualdades acima utilizamos a desigualdade de Minkowski ( $\frac{p}{r} \geq 1$ ) e (1.10), respectivamente.

Em síntese, obtemos

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r}} \leq \sum_{i=1}^K \left[ (A(p, n) + \varepsilon_i) \underbrace{\left( \int_M \left| \nabla_g \left( \eta_i^{\frac{1}{p}} u \right) \right|^p dv_g \right)}_{(1.1.1)} \left( \int_M \left| \eta_i^{\frac{1}{p}} u \right|^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \right]^{\frac{p}{r}}. \quad (1.11)$$

Estimaremos (1.1.1). Para isso, recorremos a desigualdade:

$$(x + y)^p \leq x^p + \nu x^{p-1}y + \nu y^p \text{ satisfeita para } x, y \geq 0 \text{ e } \nu > 0 \text{ uma constante.}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla_g(\eta_i^{1/p} u)|^p &= |(\nabla_g u) \eta_i^{1/p} + u \nabla_g(\eta_i^{1/p})|^p \\ &\leq \eta_i |\nabla_g u|^p + \nu |\nabla_g u|^{p-1} \eta_i^{(p-1)/p} |u| |\nabla_g(\eta_i^{1/p})| + \nu |u|^p |\nabla_g(\eta_i^{1/p})|^p. \end{aligned}$$

Consequentemente, ficamos com

$$\int_M |\nabla_g(\eta_i^{1/p}u)|^p dv_g \leq \int_M \left( \eta_i |\nabla_g u|^p + \nu |\nabla_g u|^{p-1} \eta_i^{\frac{p-1}{p}} |u| |\nabla_g(\eta_i^{1/p})| + \nu |u|^p |\nabla_g(\eta_i^{1/p})|^p \right) dv_g. \quad (1.12)$$

Notando que  $|\nabla_g(\eta_i^{1/p})| \leq c$ ,  $\eta_i \leq 1$ , para todo  $i = 1, \dots, K$  e devido a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_M \left( \nu |\nabla_g u|^{p-1} \eta_i^{(p-1)/p} |u| |\nabla_g(\eta_i^{1/p})| \right) dv_g \leq \nu c \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.13)$$

Nosso próximo passo é aplicar a desigualdade de Young em (1.13) do seguinte modo: dados  $a, b > 0$ , tem-se

$$a^{p-1}b \leq \frac{p-1}{p} \kappa a^p + c(\kappa)b^p, \quad \kappa > 0 \text{ e } c(\kappa) = \frac{1}{p\kappa^{p-1}}.$$

Tomando  $a = \|\nabla_g u\|_p$  e  $b = \|u\|_p$ , a desigualdade em (1.13) torna-se

$$\int_M \left( \nu |\nabla_g u|^{p-1} \eta_i^{(p-1)/p} |u| |\nabla_g(\eta_i^{1/p})| \right) dv_g \leq \nu c \left( \frac{p-1}{p} \kappa \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + c(\kappa) \int_M |u|^p dv_g \right). \quad (1.14)$$

Além disso, uma vez que  $|\nabla_g(\eta_i^{1/p})| \leq c$ , temos

$$\int_M \nu |u|^p |\nabla_g(\eta_i^{1/p})|^p dv_g \leq \nu c^p \int_M |u|^p dv_g. \quad (1.15)$$

Introduzindo (1.14) e (1.15) em (1.12), chegamos a

$$\int_M |\nabla_g(\eta_i^{1/p}u)|^p dv_g \leq \int_M \eta_i |\nabla_g u|^p dv_g + \nu c \frac{p-1}{p} \kappa \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \nu (cc(\kappa) + c^p) \int_M |u|^p dv_g.$$

Ao substituirmos essa última desigualdade em (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{r}{r}} &\leq (A(p, n) + \max_{1 \leq i \leq K} \{\varepsilon_i\})^{\frac{r}{r}} \sum_{i=1}^K \left[ \left( \int_M \eta_i |\nabla_g u|^p dv_g + \nu c \frac{p-1}{p} \kappa \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu (cc(\kappa) + c^p) \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{r}} \left( \int_M \eta_i |u|^p dv_g \right)^{\frac{p}{n+p}} \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

A desigualdade de Hölder

$$\sum_{i=1}^K a_i^{\frac{p}{r}} b_i^{\frac{p}{n+p}} \leq \left( \sum_{i=1}^K a_i \right)^{\frac{p}{r}} \left( \sum_{i=1}^K b_i \right)^{\frac{p}{n+p}}$$

aplicada em (1.16) fornece

$$\begin{aligned} \int_M |u|^r dv_g &\leq (A(p, n) + \max_{1 \leq i \leq K} \{\varepsilon_i\}) \left( (1 + K\nu c \frac{p-1}{p} \kappa) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \right. \\ &\quad \left. + K\nu(cc(\kappa) + c^p) \int_M |u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhemos  $\max_{1 \leq i \leq K} \{\varepsilon_i\} > 0$ ,  $\nu > 0$  e  $\kappa > 0$  suficientemente pequenos de modo que

$$(A(p, n) + \max_{1 \leq i \leq K} \{\varepsilon_i\})(1 + K\nu c \frac{p-1}{p} \kappa) \leq A(p, n) + \varepsilon.$$

Disto e por (1.17), inferimos que

$$\int_M |u|^r dv_g \leq \left[ (A(p, n) + \varepsilon) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right) + B_\varepsilon \left( \int_M |u|^p dv_g \right) \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}},$$

como queríamos. ■

**Observações 1.1** (a) A constante  $B_\varepsilon$  que surge é natural, uma vez que as funções constantes pertencem ao espaço  $C^1(M)$ ;

(b) Vemos de (1.17) que  $B_\varepsilon \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Por densidade, o resultado obtido na **Proposição 1.1** permanece válido no espaço  $H^{1,p}(M)$ . Com isso, concluímos que existem constantes positivas  $A$  e  $B$  tais que para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  verifica-se

$$\int_M |u|^r dv_g \leq \left[ A \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right) + B \left( \int_M |u|^p dv_g \right) \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}}, \quad (1.18)$$

em que  $p \geq 1$ ,  $n \geq 2$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ .

A próxima proposição justificará que  $A(p, n)$  é uma cota inferior para as constantes  $A$  que validam (1.18).

**Proposição 1.2** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com dimensão  $n \geq 2$  e considere  $1 \leq p < +\infty$ . Então,  $A \geq A(p, n)$  em (1.18), onde  $A(p, n)$  é definida em (1.7).

**Demonstração:** Fixamos um ponto  $x_0 \in M$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existem uma carta exponencial  $(\Omega, \varphi)$  em  $x_0$  e  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  tais que  $\varphi(\Omega) = B(0; \delta) \subset \mathbb{R}^n$  satisfazendo (1.8). Usando as desigualdades em (1.9), afirmamos o seguinte:

**Afirmção 1.1** Existe uma constante  $c(\varepsilon, \delta)$  (a ser definida mais tarde) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^r dx \leq c(\varepsilon, \delta) A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^p dx \right)^{\frac{p}{n}} \quad (1.19)$$

para toda função  $\tilde{u} \in \mathcal{C}_c^1(B(0; \delta))$ .

De fato, seja  $\tilde{u} \in \mathcal{C}_c^1(B(0; \delta))$ . Definimos a função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , pondo

$$u = \begin{cases} \tilde{u} \circ \varphi & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{em } M \setminus \Omega. \end{cases}$$

Observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^r dx \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{n}{2}} \int_M |u|^r dv_g. \quad (1.20)$$

Para a função  $u$ , temos

$$\int_M |u|^r dv_g \leq A \underbrace{\left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)}_{(1.21.1)} \underbrace{\left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}}_{(1.21.2)} + B \underbrace{\left( \int_M |u|^p dv_g \right)}_{(1.21.2)} \underbrace{\left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}}_{(1.21.2)}. \quad (1.21)$$

Iremos estimar (1.21.1) e (1.21.2). Começamos com (1.21.1):

$$\left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}} \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{n}{2}} (1 + \varepsilon)^p \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^p dx \right)^{\frac{r}{n}}.$$

Estimamos agora (1.21.2). Para este fim, utilizamos a desigualdade de Hölder ( $p < r$ ):

$$\left( \int_M |u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}} \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{n+p}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^r dx \right) \cdot \text{Vol}(B(0; \delta))^{\frac{r}{n}}.$$

Logo, invocando (1.20), (1.21) e as estimativas de (1.21.1) e de (1.21.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^r dx \leq A \left[ \frac{(1 + \varepsilon)^{n+p}}{1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{2n+p}{2}} \cdot B \cdot \text{Vol}(B(0; \delta))^{\frac{r}{n}}} \right] \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^p dx \right)^{\frac{r}{n}}.$$

Definimos

$$c(\varepsilon, \delta) = \left[ \frac{(1 + \varepsilon)^{n+p}}{1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{2n+p}{2}} \cdot B \cdot \text{Vol}(B(0, \delta))^{\frac{r}{n}}} \right].$$

Disto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^r dx \leq c(\varepsilon, \delta) A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{u}|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}|^p dx \right)^{\frac{r}{n}}$$

é válida para toda função  $\tilde{u} \in \mathcal{C}_c^1(B(0; \delta))$ , concluindo a prova da **Afirmção 1.1**.

Passamos agora para o argumento final. Fixada  $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$  e para  $\lambda > 0$ , consideramos

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Escolhemos  $\lambda > 0$  suficientemente grande para que tenhamos  $u_\lambda \in \mathcal{C}_c^1(B(0; \delta))$  e, então,

$$\int_{B(0; \delta)} |u_\lambda|^r dx \leq c(\varepsilon, \delta) A \left( \int_{B(0; \delta)} |\nabla u_\lambda|^p dx \right) \left( \int_{B(0; \delta)} |u_\lambda|^p dx \right)^{\frac{r}{n}}, \quad (1.22)$$

em decorrência da **Afirmção 1.1**. Graças ao teorema da mudança de variáveis em integrais, teremos as seguintes igualdades:

- (i)  $\int_{B(0; \delta)} |u_\lambda|^r dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx;$
- (ii)  $\int_{B(0; \delta)} |\nabla u_\lambda|^p dx = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx;$
- (iii)  $\left( \int_{B(0; \delta)} |u_\lambda|^p dx \right)^{\frac{r}{n}} = \lambda^{-p} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{r}{n}}.$

Reunindo (i), (ii), (iii) e (1.22), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \leq c(\varepsilon, \delta) A \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{r}{n}}.$$

Como  $A(p, n)$  é a constante ótima da desigualdade de Moser Euclidiana, devemos ter

$$A(p, n) \leq c(\varepsilon, \delta) A.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\delta \rightarrow 0$ , verificamos que  $c(\varepsilon, \delta) \rightarrow 1$  e, portanto,  $A \geq A(p, n)$ . ■

### 1.3 Desigualdade de Moser Riemanniana Ótima

Graças a **Proposição 1.1**, existem constantes positivas  $C$  e  $D$  tais que para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ , tem-se

$$\int_M |u|^r dv_g \leq \left( C \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + D \int_M |u|^p dv_g \right) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}, \quad (1.23)$$

em que  $p \geq 1$ ,  $n \geq 2$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ .

Estudaremos uma generalização para (1.23). Considere um parâmetro  $\tau \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $1 \leq \tau \leq p$ . Segue diretamente de (1.23) que existem  $A, B > 0$  tais que

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ A \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}} \quad (M_R(A, B))$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ .

**Observações 1.2** (a) Quando  $\tau = p$  em  $(M_R(A, B))$ , reobtemos (1.23).  
 (b) Argumentando como na **Proposição 1.2**, constatamos que  $A \geq A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}$ .

Passamos agora para o estudo da desigualdade ótima.

**Definição 1.2** A primeira constante ótima de Moser Riemanniana, denotada por  $A_{opt}$ , é definida por

$$A_{opt} = \inf\{A \in \mathbb{R}; \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ com } (M_R(A, B)) \text{ válida}\}$$

e a desigualdade  $(M_R(A_{opt}, B))$  é denominada **primeira desigualdade de Moser Riemanniana ótima**.

Com a definição acima e o item (b) das **Observações 1.2**, temos  $A_{opt} \geq A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}$ . Justificaremos que vale  $A_{opt} \leq A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}$ . De fato, segue da **Proposição 1.1** que dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante  $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ , tal que para qualquer  $u \in H^{1,p}(M)$ :

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + C_\varepsilon \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{n}}$$

é válida. Disto,  $A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon \geq A_{opt}$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos  $A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} \geq A_{opt}$ . Portanto,

$$A_{opt} = A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Notamos que a constante ótima de Moser Euclidiana coincide com a primeira constante de Moser Riemanniana no caso  $\tau = p$ .

Com a validade de  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, C_\varepsilon))$ , definimos

$$B_\varepsilon = \inf\{B \in \mathbb{R}; (M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, B)) \text{ é válida}\}.$$

Como as funções constantes não nulas pertencem a  $H^{1,p}(M)$ , podemos substituí-las em  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, C_\varepsilon))$  e iremos obter

$$B_\varepsilon \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}, \tag{1.24}$$

onde  $|M|$  denota o volume de  $(M, g)$ .

Usando a limitação dada em (1.24), faz sentido considerarmos a desigualdade  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, B_\varepsilon))$ , isto é,

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{n}}$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ .

Observamos agora que  $(B_\varepsilon)$  é monótona não crescente. De fato, suponhamos  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .

Segue da definição de  $B_{\varepsilon_2}$  que, dado  $\lambda > 0$ , existe  $u_\lambda \in H^{1,p}(M)$ , tal que

$$\left( \int_M |u_\lambda|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} > \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon_2) \left( \int_M |\nabla_g u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + (B_{\varepsilon_2} - \lambda) \left( \int_M |u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}.$$

Agora, usando a definição de  $B_{\varepsilon_1}$ , temos

$$\left( \int_M |u_\lambda|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon_1) \left( \int_M |\nabla_g u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{\varepsilon_1} \left( \int_M |u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}.$$

Combinando as duas desigualdades anteriores, encontramos

$$(B_{\varepsilon_2} - \lambda - B_{\varepsilon_1}) \left( \int_M |u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} < (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left( \int_M |\nabla_g u_\lambda|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} < 0,$$

donde  $B_{\varepsilon_1} > B_{\varepsilon_2} - \lambda$  para todo  $\lambda > 0$ . Isto mostra que  $(B_\varepsilon)$  é monótona não crescente.

Definimos

$$\mathcal{B} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon.$$

Nosso principal objetivo desta seção é mostrar que  $\mathcal{B}$  é finito. Este é o conteúdo do nosso

**Teorema 1.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta, sem fronteira e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideramos  $p > 1$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ . Se  $1 \leq \tau \leq \min\{p, 2\}$ , então  $\mathcal{B} < \infty$  e  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}))$  é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ .*

O **Teorema 1.1** permite considerarmos a *segunda constante ótima de Moser Riemanniana*:

$$B_{opt} = \inf\{B; (M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B)) \text{ é válida}\}.$$

Notamos que  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$  é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Chamaremos *função extremal* a qualquer função não nula em  $H^{1,p}(M)$  que satisfaz a igualdade em  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$ .

Como consequência do **Teorema 1.1**, teremos o

**Teorema 1.2** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta, sem fronteira e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideramos  $p > 1$  e  $r = \frac{p(n+p)}{n}$ . Se  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ , então  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$  admite função extremal e  $B_{opt} = \mathcal{B}$ .*

Para facilitar a compreensão da demonstração do **Teorema 1.1**, dividiremos o argumento em quatro etapas:

- na subseção 1.3.1, obtemos uma sequência  $(u_\varepsilon)$  que satisfaz uma equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Moser Riemanniana;
- na subseção 1.3.2, usando técnica de explosão, mostraremos que a sequência  $(u_\varepsilon)$  concentra-se em torno do seu ponto de máximo;

- na subseção 1.3.3, estimamos a velocidade com esta sequência converge para zero pontualmente;
- na subseção 1.3.4, mostramos finalmente que  $(B_\varepsilon)$  é limitada.

### Demonstração do Teorema 1.1:

#### 1.3.1 Equação de Euler-Lagrange

Vimos que  $B_\varepsilon \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Assim, duas possibilidades podem ocorrer:

$$(C.1) \quad \mathcal{B} = |M|^{-\frac{\tau}{n}} \text{ ou}$$

$$(C.2) \quad \mathcal{B} > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$$

Se (C.1) ocorrer, então  $\mathcal{B} < +\infty$  e o **Teorema 1.1** estará provado fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  em  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, B_\varepsilon))$ .

Suponhamos (C.2). Então, existe uma sequência  $(\gamma_\varepsilon)$  de números reais positivos satisfazendo  $B_\varepsilon > |M|^{-\frac{\tau}{n}} + \gamma_\varepsilon$  com  $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Associaremos uma *equação de Euler-Lagrange* a desigualdade  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, B_\varepsilon))$ . Para isto, definimos o espaço

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H^{1,p}(M); \int_M |u|^r dv_g = 1 \right\}$$

e o funcional  $J_\varepsilon : H^{1,p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , pondo

$$J_\varepsilon(u) = \left[ A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + (B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}.$$

Pela definição de  $B_\varepsilon$ , existe uma função  $u_0 \in \mathcal{H}$  tal que

$$J_\varepsilon(u_0) < 1.$$

Seja  $c_\varepsilon = \inf_{u \in \mathcal{H}} J_\varepsilon(u) < 1$ . Observamos que para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ , tem-se

$$c_\varepsilon \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq J_\varepsilon(u). \quad (1.25)$$

Consideramos  $(u_k)$  uma sequência com  $u_k \in \mathcal{H}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e tal que  $J_\varepsilon(u_k) \rightarrow c_\varepsilon$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Seja  $\sigma > 1$  satisfazendo  $c_\varepsilon < \sigma c_\varepsilon < 1$ . Disto e como  $J_\varepsilon(u_k) \rightarrow c_\varepsilon$ , temos

$$J_\varepsilon(u_k) < \sigma c_\varepsilon \text{ para } k \text{ suficientemente grande.}$$

Combinando este último fato com  $(M_R(A(p, n)^{\frac{r}{p}} + \lambda, B_\lambda))$  para  $\lambda > 0$ , encontramos

$$\left[ A(p, n)^{\frac{r}{p}} - \sigma c_\varepsilon (A(p, n)^{\frac{r}{p}} + \lambda) \left( \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} \right] \leq [B_\lambda - (B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon)] \left( \int_M |u_k|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}}. \quad (1.26)$$

Para  $\lambda$  suficientemente pequeno, temos  $A(p, n)^{\frac{r}{p}} - \sigma c_\varepsilon (A(p, n)^{\frac{r}{p}} + \lambda) > 0$ . Além disso, sendo  $p < r$ , segue que  $\|u_k\|_p \leq c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, em (1.26), verificamos que  $\|\nabla_g u_k\|_p \leq c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , donde  $(u_k)$  é limitada em  $H^{1,p}(M)$ .

O espaço  $H^{1,p}(M)$  é reflexivo, o que garante que existe  $\tilde{u}_\varepsilon \in H^{1,p}(M)$  satisfazendo  $u_k \rightharpoonup \tilde{u}_\varepsilon$ , a menos de subsequência. Por imersão compacta, obtemos

$$u_k \rightarrow \tilde{u}_\varepsilon \text{ em } L^p(M) \cap L^r(M).$$

Como  $1 = \|u_k\|_r \rightarrow \|\tilde{u}_\varepsilon\|_r$ , segue que  $\tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{H}$ . Logo,  $J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \geq c_\varepsilon$ . Mostramos a desigualdade contrária. Com efeito,

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \leq \liminf_k J_\varepsilon(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_\varepsilon(u_k) = c_\varepsilon.$$

Portanto,  $J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = c_\varepsilon$ .

Notando que  $\nabla_g |\tilde{u}_\varepsilon| = \pm \nabla_g \tilde{u}_\varepsilon$  em quase todo ponto, podemos assumir  $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ . Afirmamos que

$$\int_M |\nabla_g \tilde{u}_\varepsilon|^p dv_g \neq 0.$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que  $\tilde{u}_\varepsilon$  é constante. Como  $\tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{H}$ , temos  $\tilde{u}_\varepsilon = |M|^{-\frac{1}{r}}$ . Visto que

$$1 > c_\varepsilon = J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon),$$

chegaremos a  $1 > (B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon)|M|^{\frac{r}{n}}$ , contradizendo o fato de  $B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon > |M|^{-\frac{r}{n}}$  (dada a nossa escolha de  $(\gamma_\varepsilon)$ ). Logo,  $\tilde{u}_\varepsilon$  não é constante.

Desse modo, faz sentido definirmos a função

$$v_\varepsilon = \frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\|\nabla_g \tilde{u}_\varepsilon\|_p} \geq 0.$$

Observamos que  $v_\varepsilon$  satisfaz

$$c_\varepsilon = \left[ A(p, n)^{\frac{r}{p}} + (B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon) \left( \int_M |v_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} \right] \left( \int_M |\nabla_g \tilde{u}_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p^2}} \left( \int_M |v_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}$$

e

$$1 = \left( \int_M |\nabla_g \tilde{u}_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p^2}} \left( \int_M |v_\varepsilon|^r dv_g \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Juntamos as duas últimas igualdades e usando o fato de  $c_\varepsilon > 0$ , pois  $J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = c_\varepsilon$  e  $\tilde{u}_\varepsilon$  não é constante, obtemos

$$\frac{A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}}{c_\varepsilon} = \left( \int_M |v_\varepsilon|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |v_\varepsilon|^p dv_g \right)^{-\frac{\tau}{n}} - \frac{B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon}{c_\varepsilon} \left( \int_M |v_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Finalmente, definimos o funcional

$$G_\varepsilon(u) = \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{-\frac{\tau}{n}} - \frac{B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon}{c_\varepsilon} \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Por (1.25), temos  $G_\varepsilon(u) \leq \frac{A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}}{c_\varepsilon}$  no espaço

$$\mathcal{D} = \{u \in H^{1,p}(M); \int_M |\nabla_g u|^p dv_g = 1\}.$$

Como  $G_\varepsilon$  é de classe  $C^1$ ,  $v_\varepsilon \in \mathcal{D}$ ,  $c_\varepsilon < 1$  e  $G_\varepsilon(v_\varepsilon) = \frac{A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}}{c_\varepsilon}$ , garantimos que

$$\nu_\varepsilon = \sup_{u \in \mathcal{D}} G_\varepsilon(u) = G_\varepsilon(v_\varepsilon) > A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}. \quad (1.27)$$

Logo,  $v_\varepsilon$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{n+p}{n} \|v_\varepsilon\|_r^{\frac{\tau(n+p)-\tau n}{n}} \|v_\varepsilon\|_p^{-\frac{\tau p}{n}} v_\varepsilon^{r-1} - \frac{p}{n} \|v_\varepsilon\|_r^{\frac{\tau(n+p)}{n}} \|v_\varepsilon\|_p^{-\frac{\tau p}{n}-p} v_\varepsilon^{p-1} - d_\varepsilon \|v_\varepsilon\|_p^{\tau-p} v_\varepsilon^{p-1} = \nu_\varepsilon \Delta_{p,g} v_\varepsilon \quad (1.28)$$

em  $M$ , onde  $\Delta_{p,g} = -\operatorname{div}_g(|\nabla_g|^{p-2} \nabla_g)$  é o operador  $p$ -Laplaciano na métrica  $g$  e  $d_\varepsilon = \frac{B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon}{c_\varepsilon}$ .

Vamos simplificar (1.28). Escolhemos

$$u_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{\|v_\varepsilon\|_r} \geq 0.$$

Assim, reescrevemos (1.28) em termos de  $u_\varepsilon$  como segue

$$\frac{n+p}{n} u_\varepsilon^{r-1} = \nu_\varepsilon \|v_\varepsilon\|_r^{p-\tau} \|u_\varepsilon\|_p^{\frac{\tau p}{n}} \Delta_{p,g} u_\varepsilon + \frac{p}{n} \|u_\varepsilon\|_p^{-p} u_\varepsilon^{p-1} + d_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_p^{\tau-p} \|u_\varepsilon\|_p^{\frac{\tau p}{n}} u_\varepsilon^{p-1} \text{ em } M. \quad (1.29)$$

Definimos

$$A_\varepsilon = \left( \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \text{ e } \lambda_\varepsilon = \nu_\varepsilon^{-1} \|u_\varepsilon\|_p^{\frac{p(p-\tau)}{n}} \|v_\varepsilon\|_r^{\tau-p}.$$

Com as notações anteriores, (1.29) torna-se

$$\lambda_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon \Delta_{p,g} u_\varepsilon + d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{\tau}{p}} \|u_\varepsilon\|_p^{\tau-p} u_\varepsilon^{p-1} + \frac{p}{n} \|u_\varepsilon\|_p^{-p} u_\varepsilon^{p-1} = \frac{n+p}{n} u_\varepsilon^{r-1} \text{ em } M. \quad (1.30)$$

Mostraremos que

$$\lambda_\varepsilon^{-1} \geq A(p, n). \quad (1.31)$$

De fato, tomando  $v_\varepsilon$  como função teste em (1.28), temos

$$v_\varepsilon \leq \|v_\varepsilon\|_r^{\frac{\tau(n+p)}{n}} \|v_\varepsilon\|_p^{-\frac{\tau p}{n}}.$$

Usando essa desigualdade, (1.27) e o fato de que  $\tau \leq p$ , obtemos

$$\lambda_\varepsilon = v_\varepsilon^{-1} \|v_\varepsilon\|_r^{\frac{p(\tau-p)}{n}} \|v_\varepsilon\|_p^{-\frac{p(\tau-p)}{n}} \|v_\varepsilon\|_r^{\tau-p} = v_\varepsilon^{-1} \left( \|v_\varepsilon\|_r^{\frac{\tau(n+p)}{n}} \|v_\varepsilon\|_p^{-\frac{\tau p}{n}} \right)^{\frac{\tau-p}{\tau}} \leq v_\varepsilon^{-\frac{p}{\tau}} \leq A(p, n)^{-1},$$

o que prova (1.31).

Como  $p < r$ , via desigualdade de Hölder, existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$0 \leq A_\varepsilon \leq c$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Disto, analisaremos duas situações possíveis:

- (A)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon > 0$  (a menos de subsequência);
- (B)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = 0$  (a menos de subsequência).

Suponhamos que (A) ocorra. Escolhemos  $u_\varepsilon$  como função teste em (1.30) para obter

$$1 = \lambda_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon \|\nabla_g u_\varepsilon\|_p^p + d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{\tau}{p}} \|u_\varepsilon\|_p^\tau. \quad (1.32)$$

Com isso e escrevendo  $\|u_\varepsilon\|_p^\tau$  em termos de  $A_\varepsilon$ , temos

$$d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{\tau}{p}} \|u_\varepsilon\|_p^\tau \leq 1 \implies d_\varepsilon \leq A_\varepsilon^{-\tau \left( \frac{n+p}{p^2} \right)}.$$

Segue que  $(d_\varepsilon)$  é limitada. Como  $B_\varepsilon = c_\varepsilon \left( \frac{B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon}{c_\varepsilon} \right) + \gamma_\varepsilon = c_\varepsilon d_\varepsilon + \gamma_\varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$  com  $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $c_\varepsilon < 1$ , garantimos que  $(B_\varepsilon)$  é limitada. Assim,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = \mathcal{B} < +\infty,$$

provando o **Teorema 1.1**.

Suponhamos (B). Mostraremos que a única possibilidade para que este caso aconteça é quando  $\tau = \min\{2, p\}$  e, nestas condições, teremos  $\mathcal{B} < +\infty$ . O argumento envolvido nesta situação é mais delicado. Assim, iremos dividi-lo em três etapas, consistindo nas subseções 1.3.2, 1.3.3 e 1.3.4.

Primeiramente, tomando  $\varepsilon = \varepsilon_0$  em  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon, B_\varepsilon))$ , existe  $B_{\varepsilon_0} \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon_0) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{\varepsilon_0} \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Em particular, para  $u_\varepsilon$ , teremos

$$1 \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon_0) \left( \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{\varepsilon_0} \left( \int_M |u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}},$$

isto é,

$$\frac{1 - B_{\varepsilon_0} A_\varepsilon^{\tau \left( \frac{n+p}{p^2} \right)}}{A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \varepsilon_0} \leq \left( A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}}$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Uma vez que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = 0$ , garantimos que existe  $c > 0$  tal que

$$A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \geq c \quad (1.33)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Devido a (1.32) e (1.33) segue que

$$\lambda_\varepsilon^{-1} \leq c \quad (1.34)$$

para alguma constante  $c > 0$  e para todo  $\varepsilon > 0$ .

### 1.3.2 Concentração $L^r$

Mostraremos um fenômeno de explosão da sequência  $(u_\varepsilon)$  em torno do seu ponto de máximo. Em (1.30), fixado  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-2} \nabla_g u_\varepsilon \cdot \nabla_g \varphi dv_g \leq c \int_M u_\varepsilon^{r-1} \varphi dv_g \quad (1.35)$$

para toda função  $\varphi \in H^{1,p}(M)$ ,  $\varphi \geq 0$  e para alguma constante  $c > 0$ .

Aplicando o método iterativo de Moser para o caso  $p \leq n$  (vide [45]) ou a desigualdade de Morrey para o caso  $p > n$ , garantimos que  $u_\varepsilon \in L^\infty(M)$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Com isso, podemos aplicar a teoria de regularidade de Tolksdorf [48] para concluir que  $u_\varepsilon \in C^1(M)$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Sendo  $M$  compacta, existe  $x_\varepsilon \in M$  que realiza o ponto de máximo de  $u_\varepsilon$ , isto é,

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \|u_\varepsilon\|_\infty. \quad (1.36)$$

Nosso objetivo durante esta subseção é mostrar a

#### Afirmção 1.2

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} u_\varepsilon^r dv_g = 1. \quad (1.37)$$

Como estamos supondo (B), temos  $A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}} \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Iniciamos a prova da **Afirmção 1.2** com um reescalonamento da função  $u_\varepsilon$  e da métrica

g. Para cada  $x \in B(0; \sigma)$ , definimos

$$\begin{cases} h_\varepsilon(x) = g(\exp_{x_\varepsilon}(A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}} x)), \\ \varphi_\varepsilon(x) = A_\varepsilon^{\frac{n^2}{p^3}} u_\varepsilon(\exp_{x_\varepsilon}(A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}} x)). \end{cases} \quad (1.38)$$

Com esta mudança, (1.30) torna-se

$$\lambda_\varepsilon^{-1} \Delta_{p, h_\varepsilon} \varphi_\varepsilon + d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{r}{p}-1} \|u_\varepsilon\|_p^{r-p} A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p}} \varphi_\varepsilon^{p-1} + \frac{p}{n} \varphi_\varepsilon^{p-1} = \frac{n+p}{n} \varphi_\varepsilon^{r-1} \quad \text{em } B(0; \sigma). \quad (1.39)$$

Em (1.39), aplicamos o método iterativo de Moser caso  $p \leq n$  ou a desigualdade de Morrey para  $p > n$  para obtermos

$$A_\varepsilon^{\frac{n(n+p)}{p^2}} \|u_\varepsilon\|_\infty^r = \sup_{B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_\varepsilon^r \leq c \int_{B(0; \sigma)} \varphi_\varepsilon^r dh_\varepsilon = c \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} u_\varepsilon^r dv_g \leq c, \quad (1.40)$$

onde na última desigualdade usamos que  $\|u_\varepsilon\|_r = 1$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

Juntamos (1.40) com o seguinte fato:

$$1 = \int_M u_\varepsilon^r dv_g \leq \|u_\varepsilon\|_\infty^{r-p} \int_M u_\varepsilon^p dv_g = \left( \|u_\varepsilon\|_\infty A_\varepsilon^{\frac{n^2}{p^3}} \right)^{r-p},$$

e obtemos

$$1 \leq \|u_\varepsilon\|_\infty A_\varepsilon^{\frac{n^2}{p^3}} \leq c \quad (1.41)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Também por (1.40) e (1.41), temos

$$\int_{B(0; \sigma)} \varphi_\varepsilon^r dh_\varepsilon \geq c > 0 \quad (1.42)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Via expansão de Cartan, podemos escrever

$$\int_{B(0; \sigma)} \varphi_\varepsilon^p dx \leq c \int_{B(0; \sigma)} \varphi_\varepsilon^p dh_\varepsilon = c \frac{\int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} u_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \leq c.$$

De forma semelhante

$$\int_{B(0; \sigma)} |\nabla \varphi_\varepsilon|^p dx \leq c \int_{B(0; \sigma)} |\nabla_{h_\varepsilon} \varphi_\varepsilon|^p dh_\varepsilon = c A_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \leq c,$$

uma vez que  $\lambda_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon \|\nabla_g u_\varepsilon\|_p^p \leq 1$  (por (1.32)) e  $\lambda_\varepsilon^{-1} \geq A(p, n)$  (conforme (1.31)). Com as duas observações anteriores e um processo diagonal de Cantor, garantimos que existe  $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi$  em  $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  para alguma subsequência de  $(\varphi_\varepsilon)$ . Assim, para cada  $\sigma > 0$ , por

imersão compacta e a convergência  $dh_\varepsilon \rightarrow dx$  (em medida), temos

$$\int_{B(0;\sigma)} \varphi^r dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0;\sigma)} \varphi_\varepsilon^r dh_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} u_\varepsilon^r dv_g \leq 1.$$

Em particular,

$$\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n). \quad (1.43)$$

Introduzimos agora uma função de corte. Seja  $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $\eta = 1$  em  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $\eta = 0$  em  $[1, \infty)$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ . Definimos  $\eta_{\varepsilon, \sigma}(x) = \eta((\sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})^{-1} d_g(x, x_\varepsilon))$  em  $M$ . Escolhendo  $u_\varepsilon \eta_{\varepsilon, \sigma}^p$  como função teste em (1.30), chegamos a

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g + \lambda_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-2} \nabla_g u_\varepsilon \cdot \nabla_g (\eta_{\varepsilon, \sigma}^p) u_\varepsilon dv_g + \frac{p}{n} \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} &\leq \\ &\leq \frac{n+p}{n} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Afirmamos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-2} \nabla_g u_\varepsilon \cdot \nabla_g (\eta_{\varepsilon, \sigma}^p) u_\varepsilon dv_g = 0. \quad (1.45)$$

De fato, graças a (1.32) e (1.31), temos

$$A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \leq \lambda_\varepsilon \leq A(p, n)^{-1}.$$

Além disso, usando que  $|\nabla_g \eta_{\varepsilon, \sigma}| \leq \frac{c}{\sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}}}$  e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p |\nabla_g \eta_{\varepsilon, \sigma}|^p dv_g &\leq c \frac{A_\varepsilon}{\sigma^p A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p}}} \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} u_\varepsilon^p dv_g \\ &\leq c \frac{A_\varepsilon}{\sigma^p A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p}}} \left( \int_M u_\varepsilon^r dv_g \right)^{\frac{p}{r}} \left( \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} 1 dv_g \right)^{1 - \frac{p}{r}} \\ &\leq \frac{c}{\sigma^{\frac{pr - nr + np}{r}}}. \end{aligned}$$

Com os dois fatos anteriores e aplicando novamente a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left| A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-2} \nabla_g u_\varepsilon \cdot \nabla_g (\eta_{\varepsilon, \sigma}^p) u_\varepsilon dv_g \right| &\leq \left( A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p |\nabla_g (\eta_{\varepsilon, \sigma}^p)|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{c}{\sigma^{\frac{pr - nr + np}{pr}}}, \end{aligned}$$

donde fica estabelecido (1.45), já que  $pr - nr + np > 0$ .

Substituindo (1.31) e (1.45) em (1.44) e por (1.34), temos

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+p} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( A(p, n) A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right) + \frac{p}{n+p} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} &\leq \\ &\leq \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g. \end{aligned}$$

Vamos reescrever a desigualdade acima em um formato adequado. Para tanto, segue da definição da função  $\eta_{\varepsilon, \sigma}$  que

$$\left| \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g - \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g \right| \leq \int_{B(x_\varepsilon; \sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}}) \setminus B(x_\varepsilon; (\sigma A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})/2)} u_\varepsilon^r dv_g = \int_{B(0, \sigma) \setminus B(0, \sigma/2)} \varphi_\varepsilon^r dh_\varepsilon.$$

Agora, por imersão compacta, temos

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g.$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+p} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( A(p, n) A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right) + \frac{p}{n+p} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} &\leq \\ &\leq \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Por outro lado, para  $\kappa > 0$ , seja  $B_\kappa > 0$  tal que

$$\left( \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left[ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \kappa) \left( \int_M |\nabla_g (u_\varepsilon \eta_{\varepsilon, \sigma})|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\kappa \left( \int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}$$

com  $B_\kappa$  independente de  $\varepsilon > 0$ . Graças a definição de  $A_\varepsilon$ , o uso da desigualdade de Young e o uso da desigualdade:

$$(x + y)^p \leq x^p + cx^{p-1}y + cy^p \text{ para alguma constante } c > 0 \text{ e para quaisquer } x, y \geq 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \left( \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} &\leq c \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \\ &+ (A(p, n)^{\frac{\tau}{p}} + \kappa) \left[ (1 + \kappa) \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g + c(\kappa) \int_M u_\varepsilon^p |\nabla_g \eta_{\varepsilon, \sigma}|^p dv_g \right]^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}. \end{aligned}$$

Assim, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$  e por fim  $\kappa \rightarrow 0$  e usando a hipótese (B) e (1.45), obtemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g \leq \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( A(p, n) A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right) \times$$

$$\times \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{p}{n}}. \quad (1.47)$$

Denotamos por

$$X = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( A(p, n) A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g \right), \quad Y = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_{\varepsilon, \sigma}^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g}$$

e

$$Z = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u_\varepsilon^r \eta_{\varepsilon, \sigma}^r dv_g.$$

Observamos que  $X \leq 1$ , pois vimos que  $A_\varepsilon \|\nabla_g u_\varepsilon\|_p^p \leq A(p, n)^{-1}$ . Também, claramente, temos  $Y \leq 1$  e  $Z \leq 1$ . Com estas notações, reescremos (1.46) e (1.47) como segue

$$\begin{cases} \frac{n}{n+p} X + \frac{p}{n+p} Y \leq Z \\ Z \leq XY^{\frac{p}{n}}. \end{cases} \quad (1.48)$$

Por (1.42), verificamos que  $Z > 0$ . Como  $Z \leq XY^{\frac{p}{n}}$  e  $X, Y \leq 1$ , garantimos também que  $X > 0$  e  $Y > 0$ . Nosso objetivo é mostrar que  $Z = 1$ . Via desigualdade de Young, temos

$$X^{\frac{n}{n+p}} Y^{\frac{p}{n+p}} \leq Z.$$

Usando isto e o fato de  $Z \leq XY^{\frac{p}{n}}$ , teremos

$$1 \leq X^{\frac{p}{n+p}} Y^{\frac{p^2}{n(n+p)}}.$$

Como  $0 < X, Y \leq 1$ , obtemos  $X = 1$  e  $Y = 1$ . Portanto, retornando a (1.48) concluímos que  $Z = 1$ , o que garante (1.37).

### 1.3.3 Estimativa pontual

Nesta subseção, estimaremos a velocidade com que a sequência  $(u_\varepsilon)$  tende a zero pontualmente. Precisamente, iremos provar

**Lema 1.1** *Existe uma constante  $c > 0$ , independente de  $\varepsilon > 0$ , tal que*

$$d_g(x, x_\varepsilon) u_\varepsilon(x)^{\frac{p}{n}} \leq c A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

para todo  $x \in M$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que exista  $y_\varepsilon \in M$  tal que  $f_\varepsilon(y_\varepsilon) \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sendo

$$f_\varepsilon(x) = d_g(x_\varepsilon, x) u_\varepsilon(x)^{\frac{p}{n}} A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}}.$$

Como  $M$  é compacta, assumiremos sem perda de generalidade que  $f_\varepsilon(y_\varepsilon) = \|f_\varepsilon\|_\infty$ . Segue de (1.41) que

$$f_\varepsilon(y_\varepsilon) \leq \left( \frac{u_\varepsilon(y_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_\infty} \right)^{\frac{p}{n}} d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}} \leq d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}},$$

e como  $f_\varepsilon(y_\varepsilon) \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos

$$d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}} \rightarrow +\infty \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.49)$$

Dados  $\sigma > 0$  e  $\varepsilon \in (0, 1)$ , mostraremos que

$$B(y_\varepsilon; \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)) \cap B(x_\varepsilon; \sigma \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}}) = \emptyset \quad (1.50)$$

para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Este fato seguirá de

$$d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \sigma \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}} + \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$$

para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $\sigma > 0$  fixado. De fato, notamos que

$$d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \sigma \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}} + \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \iff d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}} \geq \frac{\sigma}{1-\varepsilon} \geq \sigma.$$

Como  $d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_\infty^{\frac{p(n+p)}{n^2}} \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a última desigualdade acima é claramente satisfeita e, portanto, (1.50) está provado.

Afirmamos agora que existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$u_\varepsilon(x) \leq c u_\varepsilon(y_\varepsilon) \quad (1.51)$$

para todo  $x \in B(y_\varepsilon; \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon))$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. De fato, notamos que para cada  $x \in B(y_\varepsilon; \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon))$ , temos

$$d_g(x, x_\varepsilon) \geq d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) - d_g(x, y_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon) d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon).$$

Com isso,

$$d_g(y_\varepsilon, x_\varepsilon) u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{\frac{p}{n}} A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}} = f_\varepsilon(y_\varepsilon) \geq f_\varepsilon(x) = d_g(x, x_\varepsilon) u_\varepsilon(x)^{\frac{p}{n}} A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}} \geq (1-\varepsilon) d_g(y_\varepsilon, x_\varepsilon) u_\varepsilon(x)^{\frac{p}{n}} A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}},$$

e assim

$$u_\varepsilon(x) \leq \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{n}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon).$$

Tomando  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, garantimos (1.51).

Sabemos que  $d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{\frac{p}{n}}A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}} \rightarrow +\infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Daí

$$u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

pois  $M$  é compacta. Desse modo, faz sentido definirmos o seguinte reescalonamento:

$$\begin{cases} h_\varepsilon(x) = g(\exp_{y_\varepsilon}(A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}}x)), \\ \psi_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\exp_{y_\varepsilon}(A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}}x)) \end{cases} \quad (1.52)$$

para todo  $x \in B(0; 2)$ .

A mudança em (1.52) permite-nos escrever (1.30) como segue

$$\lambda_\varepsilon^{-1}\Delta_{p, h_\varepsilon}\psi_\varepsilon + d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{r}{p}}\|u_\varepsilon\|_p^{\tau-p}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{p-r}\psi_\varepsilon^{p-1} + \frac{p}{n}\|u_\varepsilon\|_p^{-p}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{p-r}\psi_\varepsilon^{p-1} = \frac{n+p}{n}\psi_\varepsilon^{r-1} \text{ em } B(0; 2). \quad (1.53)$$

Em particular,

$$\int_{B(0; 2)} |\nabla_{h_\varepsilon}\psi_\varepsilon|^{p-2}\nabla_{h_\varepsilon}\psi_\varepsilon \cdot \nabla_{h_\varepsilon}\phi \, dh_\varepsilon \leq c \int_{B(0; 2)} \psi_\varepsilon^{r-1}\phi \, dh_\varepsilon$$

para toda função teste  $\phi \in \mathcal{C}_c^1(B(0, 2))$  com  $\phi \geq 0$ . Com isso, observamos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sup_{B(0; \frac{1}{4})} \psi_\varepsilon^r \leq c \int_{B(0; \frac{1}{2})} \psi_\varepsilon^r \, dv_{h_\varepsilon} = c \left( A_\varepsilon^{\frac{n}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{\frac{p}{n}} \right)^{-1} \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r \, dv_g \leq \\ &\leq c \left( \frac{\|u_\varepsilon\|_\infty}{u_\varepsilon(y_\varepsilon)} \right)^{\frac{p}{n}} \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r \, dv_g, \end{aligned}$$

onde aplicamos o método iterativo de Moser se  $p \leq n$  ou a desigualdade de Morrey caso  $p > n$  e também (1.41). Logo, chegamos a

$$0 < c \leq m_\varepsilon^{\frac{p}{n}} \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r \, dv_g, \quad (1.54)$$

em que  $m_\varepsilon = \frac{\|u_\varepsilon\|_\infty}{u_\varepsilon(y_\varepsilon)}$ .

Observamos que  $B(y_\varepsilon; \frac{1}{2}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}}) \subset B(y_\varepsilon; \varepsilon d(x_\varepsilon, y_\varepsilon))$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Esta inclusão decorre diretamente da hipótese de contradição. Afirmamos que

$$\int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r \, dv_g \rightarrow 0 \quad (1.55)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De fato, em vista da inclusão anterior e (1.50), temos

$$0 \leq \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2}A_\varepsilon^{\frac{1}{p}}u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r \, dv_g \leq \int_{B(y_\varepsilon; \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon))} u_\varepsilon^r \, dv_g \leq 1 - \int_{B(x_\varepsilon, \sigma \|u_\varepsilon\|_\infty^{-\frac{p(n+p)}{n^2}})} u_\varepsilon^r \, dv_g.$$

Via (1.41), para todo  $\sigma > 0$ , temos  $B(x_\varepsilon, \sigma \|u_\varepsilon\|_\infty^{-\frac{p(n+p)}{n^2}}) \supset B(x_\varepsilon, \frac{\sigma}{c} A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})$ , em que  $c > 0$  é uma constante. Assim,

$$0 \leq \int_{B(y_\varepsilon; A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r dv_g \leq 1 - \int_{B(x_\varepsilon; \frac{\sigma}{c} A_\varepsilon^{\frac{n+p}{p^2}})} u_\varepsilon^r dv_g,$$

donde obtemos (1.55) fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow +\infty$  e usando a **Afirmção 1.2**. Logo, por (1.54), temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon = +\infty.$$

Nosso objetivo consistirá em encontrar uma contradição com (1.54). Inicialmente, de (1.41) e (1.51), obtemos

$$m_\varepsilon^{\frac{p^2}{n}} \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^r dv_g \leq c m_\varepsilon^{\frac{p^2}{n}} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(D_\varepsilon)}^r (A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})^n \leq c m_\varepsilon^{\frac{p^2}{n}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^r (A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})^n \leq c, \quad (1.56)$$

em que  $D_\varepsilon = B(y_\varepsilon; A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})$ .

Introduzimos uma função de corte  $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  que satisfaz  $\eta = 1$  em  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $\eta = 0$  em  $[1, +\infty)$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ . Definimos  $\eta_\varepsilon(x) = \eta(A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{\frac{p}{n}} d_g(x, x_\varepsilon))$ . Aplicando  $u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p$  como função teste em (1.30), encontramos

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p dv_g + \lambda_\varepsilon^{-1} p A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon \eta_\varepsilon^{p-1} \nabla_g u_\varepsilon \cdot \nabla_g \eta_\varepsilon dv_g + d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{\tau}{p}} \|u_\varepsilon\|_p^{\tau-p} \int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g + \\ + \frac{p}{n} \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} dv_g = \frac{n+p}{n} \int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^p dv_g. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Via desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\left| \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} \eta_\varepsilon^{p-1} u_\varepsilon \nabla_g \eta_\varepsilon dv_g \right| \leq \delta \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p dv_g + c(\delta) \int_M |\nabla_g \eta_\varepsilon|^p u_\varepsilon^p dv_g \quad (1.58)$$

com  $\delta > 0$ . Além disso, temos

$$A_\varepsilon \int_M |\nabla_g \eta_\varepsilon|^p u_\varepsilon^p dv_g \leq c A_\varepsilon (A_\varepsilon^{-\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{\frac{p}{n}})^p \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^p dv_g \leq c u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{\frac{p^2}{n} + p} (A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})^n \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^2}{n}}, \quad (1.59)$$

onde utilizamos (1.41),  $D_\varepsilon \subset B(y_\varepsilon; \varepsilon d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon))$ , (1.51) e a definição de  $m_\varepsilon$ .

Graças as desigualdades (1.56), (1.58) e (1.59) substituídas em (1.57), determinamos a seguinte estimativa:

$$A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p dv_g + c d_\varepsilon A_\varepsilon^{\frac{\tau}{p}} \|u_\varepsilon\|_p^{\tau-p} \int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g + c \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^2}{n}}. \quad (1.60)$$

A desigualdade de Moser Riemanniana (1.18) produz

$$\begin{aligned} \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2} A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r dv_g \leq \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^r dv_g \leq c \left( \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p dv_g \right) \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}} + \\ + c \left( \int_M |\nabla_g \eta_\varepsilon|^p u_\varepsilon^p dv_g \right) \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}} + c \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right) \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Devido a (1.59), (1.60) e usando a definição de  $A_\varepsilon$ , podemos estimar cada parcela do membro direito de (1.61) como segue

$$\int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p dv_g \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \leq A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p dv_g \left( \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{p}{n}} \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^2}{n}(1+\frac{p}{n})}$$

e

$$\int_M |\nabla_g \eta_\varepsilon|^p u_\varepsilon^p dv_g \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \leq A_\varepsilon \int_M |\nabla_g \eta_\varepsilon|^p u_\varepsilon^p dv_g \left( \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{p}{n}} \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^2}{n}(1+\frac{p}{n})}.$$

Acrescentando a estas duas estimativas, iremos estimar a parcela

$$\left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right) \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}}.$$

A hipótese (B) fornece

$$A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

e sendo  $\tau \leq p$ , garantimos que

$$A_\varepsilon^{\frac{\tau-p}{p}} \|u_\varepsilon\|_p^{\tau-p} = \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{\tau-p}{p}} > c > 0$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Com isso, (1.60) e como  $d_\varepsilon > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ , chegamos a

$$\int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \left( \int_M (u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p)^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \leq A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g \left( \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{p}{n}} \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^2}{n}(1+\frac{p}{n})}.$$

Estas três últimas estimativas substituídas em (1.61) resultam em

$$\int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2} A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r dv_g \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^2}{n}(1+\frac{p}{n})},$$

isto é,

$$m_\varepsilon^{\frac{p^2}{n}} \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2} A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r dv_g \leq c m_\varepsilon^{-\frac{p^3}{n^2}}.$$

Como  $m_\varepsilon \rightarrow +\infty$ , temos

$$m_\varepsilon^{\frac{p^2}{n}} \int_{B(y_\varepsilon; \frac{1}{2} A_\varepsilon^{\frac{1}{p}} u_\varepsilon(y_\varepsilon)^{-\frac{p}{n}})} u_\varepsilon^r dv_g \rightarrow 0$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que contradiz (1.54). Isto prova o **Lema 1.1**. ■

### 1.3.4 O argumento final

Nesta subseção, mostraremos que  $(B_\varepsilon)$  é limitada. Realizaremos várias estimativas usando a estimativa pontual da sequência  $(u_\varepsilon)$ . Dada a invariância escalar do problema, assumiremos que o raio de injetividade de  $M$  é maior do que 1.

Seja  $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  uma função de corte como definida nas duas últimas subseções. Definimos  $\eta_\varepsilon(x) = \eta(d_g(x, x_\varepsilon))$ . Via desigualdade  $(M_E(A(p, n)))$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0;1)} u_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx &\leq A(p, n) \left( \int_{B(0;1)} |\nabla(u_\varepsilon(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon(\exp_{x_\varepsilon}(x)))|^p dx \right) \times \\ &\times \left( \int_{B(0;1)} u_\varepsilon^p(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^p(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx \right)^{\frac{p}{n}}. \end{aligned}$$

Expandindo a métrica  $g$  em coordenadas normais em torno de  $x_\varepsilon$ , localmente temos

$$(1 - cd_g(x, x_\varepsilon)^2) dv_g \leq dx \leq (1 + cd_g(x, x_\varepsilon)^2) dv_g \quad (1.62)$$

e

$$|\nabla(u_\varepsilon(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon(\exp_{x_\varepsilon}(x)))|^p \leq |\nabla_g(u_\varepsilon \eta_\varepsilon)|^p (1 + cd_g(x, x_\varepsilon)^2). \quad (1.63)$$

Usando estas expansões, iremos obter

$$\begin{aligned} &\int_{B(0;1)} u_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx \leq \\ &\leq \left( A_\varepsilon A(p, n) \int_M |\nabla_g(u_\varepsilon \eta_\varepsilon)|^p dv_g + cA_\varepsilon \int_M |\nabla_g(u_\varepsilon \eta_\varepsilon)|^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g \right) \left( \frac{\int_{B(0;1)} u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dx}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{p}{n}}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Por outro lado, usando (1.32) e (1.31), obtemos

$$A(p, n) A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \leq 1 - d_\varepsilon \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}}.$$

Com este fato juntamente com a desigualdade

$$|\nabla_g(u_\varepsilon \eta_\varepsilon)|^p \leq |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p + c |\eta_\varepsilon \nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} |u_\varepsilon \nabla_g \eta_\varepsilon| + c |u_\varepsilon \nabla_g \eta_\varepsilon|^p$$

e a definição de  $\eta_\varepsilon$ , reescrevemos (1.64) como abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{B(0;1)} u_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx &\leq \left[ 1 - d_\varepsilon \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{p}{n}} + \right. \\ &\left. + cF_\varepsilon + cG_\varepsilon + cA_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon;1) \setminus B(x_\varepsilon; \frac{1}{2})} u_\varepsilon^p dv_g \right] \left( \frac{\int_{B(0;1)} u_\varepsilon^p(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^p(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{p}{n}}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

onde

$$F_\varepsilon = A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g$$

e

$$G_\varepsilon = A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} \eta_\varepsilon^{p-1} u_\varepsilon |\nabla_g \eta_\varepsilon| dv_g.$$

Vamos estimar  $F_\varepsilon$  e  $G_\varepsilon$ . Começaremos por  $G_\varepsilon$ . Utilizando a definição de  $\eta_\varepsilon$  e aplicando as desigualdades de Hölder e Young, encontramos

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &\leq \kappa A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g + c(\kappa) A_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon; 1) \setminus B(x_\varepsilon; \frac{1}{2})} u_\varepsilon^p dv_g \leq \\ &\leq \kappa F_\varepsilon + c(\kappa) A_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon; 1)} u_\varepsilon^p dv_g, \end{aligned} \quad (1.66)$$

em que  $0 < \kappa < 1$ . Como veremos, a estimativa da expressão

$$A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} \eta_\varepsilon^p u_\varepsilon d_g(x, x_\varepsilon) dv_g$$

será útil para estimarmos  $F_\varepsilon$ . Faremos isso agora considerando dois casos possíveis:

(i)  $1 < p \leq 2$ : usamos as desigualdades de Hölder e Young para obter

$$\begin{aligned} A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} \eta_\varepsilon^p u_\varepsilon d_g(x, x_\varepsilon) dv_g &\leq \left( A_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon; 1)} |\nabla_g u_\varepsilon|^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^{\frac{p}{p-1}} dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \kappa F_\varepsilon + c(\kappa) A_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon; 1)} u_\varepsilon^p dv_g. \end{aligned} \quad (1.67)$$

(ii) para  $p > 2$ , aplicamos as desigualdades de Hölder e Young e usamos o fato de que

$$A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \leq c$$

para ficarmos com

$$\begin{aligned} A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} \eta_\varepsilon^p u_\varepsilon d_g(x, x_\varepsilon) dv_g &\leq A_\varepsilon \int_M \eta_\varepsilon^{\frac{p}{2}} |\nabla_g u_\varepsilon|^{\frac{p}{2}} d_g(x, x_\varepsilon) u_\varepsilon |\nabla_g u_\varepsilon|^{\frac{p-2}{2}} dv_g \leq \\ &\leq A_\varepsilon \left( \int_M \eta_\varepsilon^p |\nabla_g u_\varepsilon|^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{p-2}{p}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \kappa F_\varepsilon + c(\kappa) \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Escolhendo  $u_\varepsilon d_g^2 \eta_\varepsilon^p$  como função teste em (1.30), obtemos

$$F_\varepsilon \leq c \int_{B(x_\varepsilon; 1)} u_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g + c A_\varepsilon \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-1} \eta_\varepsilon^p u_\varepsilon d_g(x, x_\varepsilon) dv_g + c G_\varepsilon.$$

Assim, por (1.66) e (1.67), temos

$$F_\varepsilon \leq c \int_{B(x_\varepsilon; 1)} u_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g + c(\kappa) A_\varepsilon \int_{B(x_\varepsilon; 1)} u_\varepsilon^p dv_g \quad (1.69)$$

para  $1 < p \leq 2$ . No caso em que  $p > 2$ , usamos (1.66) e (1.68) e produzimos

$$F_\varepsilon \leq c \int_{B(x_\varepsilon;1)} u_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g + c(\kappa) \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2}{p}}. \quad (1.70)$$

Agora, usando (1.62) segue que

$$\begin{aligned} \int_{B(0;1)} u_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^r(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx &\geq \int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^r dv_g - c \int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g \geq \\ &\geq 1 - c \int_{M \setminus B(x_\varepsilon;1)} u_\varepsilon^r dv_g - c \int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left( \frac{\int_{B(0;1)} u_\varepsilon^p(\exp_{x_\varepsilon}(x)) \eta_\varepsilon^p(\exp_{x_\varepsilon}(x)) dx}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{2}{n}} &\leq \left( \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g + c \int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{2}{n}} \leq \\ &\leq \left( \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \right)^{\frac{2}{n}} + c \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \leq 1 + c \frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g}, \end{aligned}$$

em que na penúltima desigualdade acima utilizamos o teorema do valor médio. Novamente utilizamos  $u_\varepsilon \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2$  como função teste em (1.30) para obter

$$\frac{\int_M u_\varepsilon^p \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p dv_g} \leq c \int_{B(x_\varepsilon;1)} u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^p d_g(x_\varepsilon, x)^2 dv_g + c F_\varepsilon.$$

As três últimas estimativas juntamente com (1.66) aplicadas em (1.65) fornecem

$$\begin{aligned} d_\varepsilon \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} &\leq \\ &\leq c A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g + c F_\varepsilon + c \int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g + c \int_{M \setminus B(x_\varepsilon;1)} u_\varepsilon^r dv_g. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Vamos analisar duas situações:

(iii) suponhamos  $1 < p \leq 2$ . Graças a estimativa pontual (**Lema 1.1**) e a definição de  $r$ , encontramos

$$\int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g \leq \int_M u_\varepsilon^{r-p} d_g(x, x_\varepsilon)^p u_\varepsilon^p dv_g \leq c A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g$$

e

$$\int_{M \setminus B(x_\varepsilon;1)} u_\varepsilon^r dv_g \leq \int_M u_\varepsilon^{r-p} d_g(x, x_\varepsilon)^p u_\varepsilon^p dv_g \leq c A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g.$$

(iv) consideramos agora  $p > 2$ . Usamos novamente o **Lema 1.1** e a desigualdade de Hölder para garantir

$$\begin{aligned} \int_M u_\varepsilon^r \eta_\varepsilon^p d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g &\leq \int_M u_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g = \int_M u_\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{p}} d_g(x, x_\varepsilon)^2 u_\varepsilon^{\frac{r(p-2)+2p}{p}} dv_g \leq \\ &\leq c A_\varepsilon^{\frac{2}{p}} \int_M u_\varepsilon^{\frac{r(p-2)+2p}{p}} dv_g \leq c A_\varepsilon^{\frac{2}{p}} \left( \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2}{p}} \left( \int_M u_\varepsilon^r dv_g \right)^{\frac{p-2}{p}} = c \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

e

$$\int_{M \setminus B(x_\varepsilon; 1)} u_\varepsilon^r dv_g \leq \int_M u_\varepsilon^r d_g(x, x_\varepsilon)^2 dv_g \leq c \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Finalmente, se  $1 < p \leq 2$ , então

$$|M|^{-\frac{\tau}{n}} < B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon < \frac{B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon}{c_\varepsilon} = d_\varepsilon \leq c \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{p-\tau}{p}}, \quad (1.72)$$

onde usamos a definição de  $(\gamma_\varepsilon)$  e substituímos (1.69) e (iii) em (1.71). Agora, quando  $p > 2$ , aplicamos (1.70) e (iv) em (1.71) para ficarmos com

$$|M|^{-\frac{\tau}{n}} < d_\varepsilon \leq c \left( A_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{2-\tau}{p}}. \quad (1.73)$$

Vamos analisar (1.72) e (1.73). Observamos que se  $\tau < \min\{2, p\}$ , teremos uma contradição quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Então, a hipótese (B) não ocorre, o que implica que (A) é verificada e, como já vimos nesta situação,  $\mathcal{B} < +\infty$ . Quando  $\tau = \min\{2, p\}$ , então a limitação de  $(d_\varepsilon)$  segue de (1.72) ou (1.73) e, portanto,  $(B_\varepsilon)$  é limitada. Disto,  $\mathcal{B} < +\infty$ , encerrando a demonstração do **Teorema 1.1**.

### 1.3.5 Existência de função extremal

Nesta subseção, provaremos o **Teorema 1.2**, isto é, com as mesmas hipóteses sobre a variedade Riemanniana  $(M, g)$  do **Teorema 1.1** e considerando  $1 < \tau < \min\{2, p\}$ , então  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, B_{opt}))$  admite função extremal e  $B_{opt} = \mathcal{B}$ .

Lembramos da demonstração do **Teorema 1.1** que  $\mathcal{B} \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ . Primeiramente, se tivermos  $\mathcal{B} = |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ , então, por um cálculo direto, verificamos que as funções constantes são extremas para  $(M_R(A(p, n)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}))$ . Suponhamos  $\mathcal{B} > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ . Desse modo, a condição (C.2) (vide página 29) é satisfeita. Usando o mesmo raciocínio introduzido na subseção 1.3.1, obtemos uma sequência  $(u_\varepsilon)$  que satisfaz (1.72) ou (1.73). Como por hipótese  $\tau < \min\{2, p\}$ , garantimos que a condição (A) ocorre, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon > 0.$$

Em seguida, tomando  $u_\varepsilon$  como função teste em (1.30) e usando o fato anterior, obtemos

$$\int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g + \left( \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq c$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Disto,  $(u_\varepsilon)$  é limitada em  $H^{1,p}(M)$ . Logo, existe  $u_0 \in H^{1,p}(M)$  tal que, a menos de subsequência,  $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$  em  $H^{1,p}(M)$ . Como  $\|u_\varepsilon\|_r = 1$  para todo  $\varepsilon > 0$  e por imersão compacta, temos  $\|u_0\|_r = 1$ , mostrando que  $u_0$  é uma função não nula. Novamente por (1.30), temos

$$\int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^{p-2} \nabla_g u_\varepsilon \nabla_g h dv_g \leq c \int_M u_\varepsilon^{r-1} h dv_g$$

para toda função teste  $h \geq 0$ . Então, segue do método iterativo de Moser (se  $p \leq n$ ) ou da desigualdade

de Morrey (caso  $p > n$ ) que

$$\sup_{x \in M} u_\varepsilon \leq c$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Visto que  $u_\varepsilon \in L^\infty(M)$ , podemos aplicar a teoria de regularidade de Tolksdorf para concluir que  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  in  $\mathcal{C}^1(M)$ .

A função  $v_\varepsilon$  (como definida na subseção 1.3.1) satisfaz

$$\left( \int_M v_\varepsilon^r dv_g \right)^{\frac{r}{p}} \geq \left[ A(p, n)^{\frac{r}{p}} \left( \int_M |\nabla_g v_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} + (B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon) \left( \int_M v_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} \right] \left( \int_M v_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}},$$

uma vez que  $G_\varepsilon(v_\varepsilon) > A(p, n)^{\frac{r}{p}}$  e  $c_\varepsilon < 1$ . Sendo  $u_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{\|v_\varepsilon\|_r}$ , temos

$$1 \geq \left[ A(p, n)^{\frac{r}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u_\varepsilon|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} + (B_\varepsilon - \gamma_\varepsilon) \left( \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} \right] \left( \int_M u_\varepsilon^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}}.$$

Aplicando o limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$  nesta última desigualdade, encontramos

$$1 \geq \left[ A(p, n)^{\frac{r}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u_0|^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} + \mathcal{B} \left( \int_M u_0^p dv_g \right)^{\frac{r}{p}} \right] \left( \int_M u_0^p dv_g \right)^{\frac{r}{n}},$$

demonstrando que  $u_0$  é uma função extremal para  $(M_R(A(p, n)^{\frac{r}{p}}, \mathcal{B}))$  e  $\mathcal{B} = B_{opt}$ .

## Capítulo 2

# DESIGUALDADE DE $p$ -ENTROPIA RIEMANNIANA ÓTIMA

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e de dimensão  $n \geq 2$ . Consideramos  $p > 1$  e um parâmetro  $\tau \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $1 \leq \tau \leq p$ . Nosso primeiro objetivo durante este capítulo será mostrar que existem constantes  $A$  e  $B$  positivas tais que a desigualdade de  $p$ -entropia:

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ A \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \right] \quad (\text{L(A,B)})$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ .

O nosso ponto de partida é baseado na validade da *desigualdade de Nash Riemanniana ótima* [17] que estabelece o seguinte: para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ ,

$$\left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p\theta_k}} \leq \left[ N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p, q_k) \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} \quad (2.1)$$

é válida, em que  $\theta_k = \frac{n(p-q_k)}{q_k p - q_k n + np}$ ,  $q_k = p - \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}$  é a *primeira constante ótima* desta desigualdade e  $B(p, q_k)$  é a *segunda constante ótima*.

Veremos que (L(A,B)) será obtida a partir da desigualdade de Nash Riemanniana ótima. O ponto chave consistirá em estudar o comportamento das constantes ótimas  $N(p, q_k)$  e  $B(p, q_k)$  quando fazemos  $k \rightarrow +\infty$ . Na subsecção 2.1, verificaremos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(p, q_k) = \mathcal{A}_0(p),$$

onde  $\mathcal{A}_0(p)$  é a *constante ótima Euclidiana* da desigualdade de entropia:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|^p) dx \leq \frac{n}{p} \log \left( \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)$$

válida para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $\|u\|_p = 1$ .

O argumento delicado abrangerá o estudo do comportamento de  $B(p, q_k)$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Mais precisamente, iremos mostrar que, a menos de subsequência, teremos

$$\mathcal{B}(p) := \lim_{k \rightarrow +\infty} B(p, q_k) < +\infty,$$

isto é, provaremos o

**Teorema 2.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideremos  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$  e  $B(p, q_k)$  como em (2.1). Para qualquer  $p > 1$ ,  $\mathcal{B}(p) < +\infty$ .*

A partir deste teorema, obtemos o

**Corolário 2.1** *A desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana*

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p) \right]$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  que satisfaz  $\|u\|_p = 1$ .

Graças ao **Corolário 2.1**, podemos definir

**Definição 2.1** *A primeira constante ótima Riemanniana de  $p$ -entropia é*

$$\mathcal{A}(p, \tau) = \inf \{ A \in \mathbb{R}; \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ com } (L(A, B)) \text{ válida} \}.$$

**Definição 2.2** *A primeira desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima afirma que existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ :*

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}(p, \tau) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \right]$$

é válida.

**Observações 2.1** (a)  $\mathcal{A}(p, \tau) \leq \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}$ ;

(b) Em princípio, pode não existir  $B$ .

Em caso da desigualdade acima ser verdadeira, faz sentido considerarmos a

**Definição 2.3** *A segunda constante ótima Riemanniana de  $p$ -entropia é*

$$\mathcal{B}(p, \tau) = \inf \{ B \in \mathbb{R} : (L(\mathcal{A}(p, \tau), B)) \text{ é válida} \}.$$

**Definição 2.4** *A segunda desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima estabelece que*

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}(p, \tau) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right]$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ .

A validade da segunda desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana é obtida no

**Teorema 2.2** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideremos  $p > 1$  e  $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ . Então a segunda desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima é válida. Além disso,  $\mathcal{A}(p, \tau) = \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}$ .*

**Definição 2.5** *Uma função  $u_0 \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u_0\|_p = 1$  é dita uma **função extremal** quando*

$$\int_M |u_0|^p \log(|u_0|^p) dv_g = \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u_0|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right].$$

Na seção 2.4, mostraremos a existência de função extremal para a desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima, isto é, provaremos o

**Teorema 2.3** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideremos  $p > 1$  e  $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$  ou  $\tau = p < 2$ . Então a desigualdade  $(L(\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}(p, \tau)))$  admite função extremal e  $\mathcal{B}(p, \tau) = \mathcal{B}(p)$ .*

Finalizaremos este capítulo apresentando uma aplicação do **Teorema 2.2**. Verificaremos que o semigrupo associado ao problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p(u^{p-1}) \text{ em que } (x, t) \in M \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases}$$

para algum dado inicial  $f \in L^1(M)$ ,  $f \geq 0$  é hipercontrativo.

## 2.1 Relação entre as primeiras constantes ótimas Euclidianas de Nash e de entropia

A desigualdade de Nash Euclidiana ótima estabelece que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} \leq N(p, q_k) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_k} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}}$$

é válida para toda função  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  com  $\theta_k = \frac{n(p-q_k)}{q_k p - q_k n + np}$ ,  $q_k = p - \frac{1}{k} > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $N(p, q_k)$  é a constante ótima desta desigualdade.

Por outro lado, como já mencionamos,  $\mathcal{A}_0(p)$  é a constante ótima Euclidiana da desigualdade de entropia:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|^p) dx \leq \frac{n}{p} \log \left( \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)$$

válida para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $\|u\|_p = 1$ .

Estas constantes estão intimamente relacionadas pela seguinte

**Proposição 2.1** Para  $p > 1$  e  $q_k \geq 1$ , vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(p, q_k) = \mathcal{A}_0(p).$$

**Demonstração:** Primeiro, mostramos que  $(N(p, q_k))$  é monótona não decrescente em  $k \in \mathbb{N}$  para cada  $p > 1$  fixado, isto é, mostraremos que dados  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  com  $k_1 < k_2$ , temos  $N(p, q_{k_1}) \leq N(p, q_{k_2})$ .

De fato, seja  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Via desigualdade de interpolação ( $q_{k_1} < q_{k_2} < p$ ):

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_{k_2}} dx \right)^{\frac{1}{q_{k_2}}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_{k_1}} dx \right)^{\frac{\mu}{q_{k_1}}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1-\mu}{p}} \quad (2.2)$$

com  $\frac{1}{q_{k_2}} = \frac{\mu}{q_{k_1}} + \frac{1-\mu}{p}$ .

Por outro lado, temos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_{k_2}}} \leq N(p, q_{k_2}) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_{k_2}} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_{k_2})}{q_{k_2} \theta_{k_2}}}, \quad (2.3)$$

onde  $\theta_{k_2} = \frac{n(p-q_{k_2})}{q_{k_2}(p-n)+np}$ .

Juntamos (2.2) com (2.3) para produzir

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1+\mu \frac{1-\theta_{k_2}}{\theta_{k_2}}} \leq N(p, q_{k_2}) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_{k_1}} dx \right)^{\frac{\mu}{q_{k_1}} \frac{p(1-\theta_{k_2})}{\theta_{k_2}}}.$$

Porém,  $\mu \frac{1-\theta_{k_2}}{\theta_{k_2}} = \frac{1-\theta_{k_1}}{\theta_{k_1}}$ . Assim,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_{k_1}}} \leq N(p, q_{k_2}) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_{k_1}} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_{k_1})}{q_{k_1} \theta_{k_1}}} \quad (2.4)$$

para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Da definição de  $N(p, q_{k_1})$  aplicada em (2.4), encontramos

$$N(p, q_{k_1}) \leq N(p, q_{k_2}),$$

como queríamos.

Agora, vamos provar que  $N(p, q_k) \leq \mathcal{A}_0(p)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Fixamos  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\|u\|_p = 1$ . Da desigualdade de Jensen, temos

$$\begin{aligned} -\log \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_k} dx \right) &= -\log \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_k-p} |u|^p dx \right) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} -\log(|u|^{q_k-p}) |u|^p dx = \frac{p-q_k}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \log(|u|^p) |u|^p dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Unindo (2.5) com a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|^p) dx \leq \frac{n}{p} \log \left( \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right),$$

obtemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_k} dx \right)^{-\frac{p^2}{n(p-q_k)}} \leq \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx.$$

Mas  $\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k} = \frac{p^2}{n(p-q_k)}$ . Com isso, e usando que  $\|u\|_p = 1$ , encontramos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} \leq \mathcal{A}_0(p) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_k} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \quad (2.6)$$

Por um argumento de homogeneidade, provamos que a desigualdade (2.6) ocorre para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Segue da definição de  $N(p, q_k)$  que

$$N(p, q_k) \leq \mathcal{A}_0(p) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Uma vez que  $(N(p, q_k))$  é monótona limitada, denotamos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(p, q_k) = A(p) < +\infty.$$

Por (2.7), temos  $A(p) \leq \mathcal{A}_0(p)$ . Resta mostrar que  $A(p) \geq \mathcal{A}_0(p)$ .

Na desigualdade ótima Euclidiana de Nash:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} \leq N(p, q_k) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_k} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}$$

válida para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , tomamos a função logarítmica em ambos os membros para obter

$$\frac{1}{\theta_k} \log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left( N(p, q_k) \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{q_k}^p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando a definição de  $\theta_k$  e fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , chegamos a

$$\frac{p^2}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p - q_k} \log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left( A(p) \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.8)$$

Devemos solucionar a forma indeterminada que aparece no membro esquerdo de (2.8). Primeiro vemos que

$$\log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) = \frac{1}{p} [\log(\|u\|_p^p) - \log(\|u\|_{q_k}^p)] + \frac{q_k - p}{p} \log(\|u\|_{q_k}).$$

Em seguida, ao aplicarmos o teorema do valor médio duas vezes, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p - q_k} \log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{\|u\|_p^p} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|) dx - \log(\|u\|_p) \right).$$

Observamos agora que

$$\frac{1}{\|u\|_p^p} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|) \, dx - \log(\|u\|_p) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_p}\right) \, dx,$$

donde

$$\frac{p^2}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p - q_k} \log\left(\frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}}\right) = \frac{p}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_p}\right) \, dx.$$

Portanto, retornando a (2.8), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} \log\left(\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\right) \, dx \leq \frac{n}{p} \log\left(A(p) \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p}\right) \quad (2.9)$$

para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Por densidade, a desigualdade em (2.9) é válida para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Em particular, para toda função  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $\|u\|_p = 1$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log(|u|^p) \, dx \leq \frac{n}{p} \log\left(A(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right).$$

Decorre da definição de  $\mathcal{A}_0(p)$  que  $A(p) \geq \mathcal{A}_0(p)$ , concluindo que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(p, q_k) = \mathcal{A}_0(p).$$

■

## 2.2 Limitação da segunda constante ótima de Nash

Nesta seção, provaremos o **Teorema 2.1** garantindo que  $\mathcal{B}(p) < +\infty$ . Para facilitar a compreensão da demonstração, iremos dividi-la nas quatro subseções descritas abaixo:

- na subseção 2.2.1, obtemos uma sequência  $(u_k)$  que satisfaz uma equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Nash Riemanniana ótima;
- na subseção 2.2.2, estudamos um fenômeno de explosão que ocorre para  $(u_k)$ ;
- na subseção 2.2.3, estimamos a velocidade com esta sequência converge para zero pontualmente;
- na subseção 2.2.4, apresentamos o argumento final para a limitação de  $(B(p, q_k))$ .

**Demonstração do Teorema 2.1:**

### 2.2.1 Equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Nash ótima

Sabemos que as funções constantes não nulas pertencem ao espaço  $H^{1,p}(M)$ . Assim, podemos substituí-las em (2.1) e iremos obter

$$B(p, q_k) \geq |M|^{-\frac{p}{n}}. \quad (2.10)$$

Com isso, duas possibilidades podem ocorrer:

$$(C.1) \quad \mathcal{B}(p) = |M|^{-\frac{\tau}{n}} \text{ ou}$$

$$(C.2) \quad \mathcal{B}(p) > |M|^{-\frac{\tau}{n}}.$$

Se (C.1) ocorrer, então  $\mathcal{B}(p) < +\infty$  e o **Teorema 2.1** está provado.

Suponhamos (C.2). Então, existe uma sequência  $(\gamma_k)$  de números reais positivos satisfazendo  $B(p, q_k) - \gamma_k > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$  com  $\gamma_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Seja  $H = \left\{ u \in H^{1,p}(M); \int_M |u|^p dv_g = 1 \right\}$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos  $I_k : H^{1,p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , pondo

$$I_k(u) = \left[ N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + (\mathcal{B}(p, q_k) - \gamma_k) \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}.$$

Pela definição de  $B(p, q_k)$ , existe  $u_0 \in H$  tal que  $I_k(u_0) < 1$ . Considere

$$i_k = \inf_{u \in H} I_k(u) < 1.$$

Seja  $(u_m) \subset H$  tal que  $I_k(u_m) \rightarrow i_k$  quando  $m \rightarrow +\infty$ . Escolhemos  $\sigma > 1$  satisfazendo  $i_k < \sigma i_k < 1$ . Assim, para  $m$  suficientemente grande, temos  $I_k(u_m) < \sigma i_k$ . Este fato combinado com a desigualdade de Nash Riemanniana ótima aplicada a função  $u_m \in H$  resulta em

$$(N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} - \sigma i_k N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}) \left( \int_M |\nabla_g u_m|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \gamma_k.$$

Como  $N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} - \sigma i_k N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} > 0$ , temos  $(u_m)$  limitada em  $H^{1,p}(M)$ . Logo, existe  $\tilde{u}_k \in H^{1,p}(M)$  tal que  $u_m \rightarrow \tilde{u}_k$ , a menos de subsequência. Da imersão compacta, temos

$$u_m \rightarrow \tilde{u}_k \text{ em } L^p(M) \cap L^{q_k}(M)$$

quando  $m \rightarrow +\infty$ . Em particular,  $1 = \|u_m\|_p \rightarrow \|\tilde{u}_k\|_p$ . Disto,  $\tilde{u}_k \in H$ . Das propriedades do limite inferior, obtemos

$$I_k(\tilde{u}_k) \leq \liminf_m I_k(u_m) = \lim_m I_k(u_m) = i_k,$$

ou seja,  $I_k(\tilde{u}_k) \leq i_k$ . Já sabíamos que  $i_k \leq I_k(\tilde{u}_k)$ . Portanto,

$$i_k = I_k(\tilde{u}_k).$$

Notando que  $\nabla_g |\tilde{u}_k| = \pm \nabla_g \tilde{u}_k$  em quase todo ponto, podemos assumir  $\tilde{u}_k \geq 0$ . Provaremos agora que

$$\int_M |\nabla_g \tilde{u}_k|^p dv_g \neq 0.$$

Suponhamos, por absurdo, que  $\tilde{u}_k$  é constante. Sendo  $\|\tilde{u}_k\|_p = 1$ , então  $\tilde{u}_k = |M|^{-\frac{1}{p}}$ . Lembrando que  $1 > i_k$ , teremos

$$1 > (B(p, q_k) - \gamma_k) |M|^{\frac{\tau}{n}} = I_k(\tilde{u}_k).$$

Porém, isto contradiz com o fato de  $B(p, q_k) - \gamma_k > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$  (dada nossa escolha de  $(\gamma_k)$ ). Então,  $\tilde{u}_k$  não é constante.

Faz sentido definirmos

$$v_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\nabla_g \tilde{u}_k\|_p} \geq 0.$$

Sabendo que  $i_k = I_k(\tilde{u}_k)$  e que  $\|\tilde{u}_k\|_p = 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , verificamos que  $v_k$  satisfaz

$$i_k \left( \int_M |v_k|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p\theta_k}} = \left[ N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} + (B(p, q_k) - \gamma_k) \left( \int_M |v_k|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |v_k|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}.$$

Usamos agora que  $i_k > 0$  (uma vez que  $I_k(\tilde{u}_k) = i_k$  e  $\tilde{u}_k$  não é constante) para obter

$$\frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}}{i_k} = \left( \int_M |v_k|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p\theta_k}} \left( \int_M |v_k|^{q_k} dv_g \right)^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} - \frac{B(p, q_k) - \gamma_k}{i_k} \left( \int_M |v_k|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Finalmente, definimos o espaço  $E = \{u \in H^{1,p}(M); \|\nabla_g u\|_p = 1\}$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , consideramos o funcional  $J_k : H^{1,p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J_k(u) = \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p\theta_k}} \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} - C_k \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}},$$

em que  $C_k = \frac{B(p, q_k) - \gamma_k}{i_k}$ .

Como  $i_k \leq I_k(u)$  para toda função  $u \in H$ , segue que  $J_k(u) \leq \frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}}{i_k}$  para toda função  $u \in E$ . Além disso,  $J_k \in C^1$ ,  $v_k \in E$  e  $J_k(v_k) = \frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}}{i_k}$ . Logo,

$$\nu_k = \sup_{u \in E} J_k(u) = J_k(v_k) > N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}, \quad (2.11)$$

já que  $i_k < 1$ . Com isso,  $v_k$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{1}{\theta_k} \|v_k\|_p^{\frac{\tau}{\theta_k} - p} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} v_k^{p-1} - \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|v_k\|_p^{\frac{\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k} - q_k} v_k^{q_k-1} - C_k \|v_k\|_p^{\tau-p} v_k^{p-1} = \nu_k \Delta_{p,g} v_k \quad (2.12)$$

em  $M$ , onde  $\Delta_{p,g} = -\operatorname{div}_g(|\nabla_g|^{p-2} \nabla_g)$  é o operador  $p$ -Laplaciano na métrica  $g$ .

Vamos simplificar (2.12). Escolhemos  $u_k$  como

$$u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_p} \geq 0.$$

Reescrevemos (2.12) em termos de  $u_k$  como segue

$$\lambda_k^{-1} A_k \Delta_{p,g} u_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} u_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|u_k\|_{q_k}^{-q_k} u_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} u_k^{p-1} \text{ em } M, \quad (2.13)$$

onde

$$A_k = \left( \int_M |u_k|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \text{ e } \lambda_k = \nu_k^{-1} \|u_k\|_{q_k}^{\frac{(p-\tau)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_p^{\tau-p}.$$

Uma consequência importante da equação de Euler-Lagrange é

$$\lambda_k^{-1} > N(p, q_k). \quad (2.14)$$

Para provar (2.14), primeiramente usamos  $v_k$  como função teste em (2.12) para chegarmos a

$$\nu_k \leq \|v_k\|_p^{\frac{\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}}.$$

Com isso, (2.11) e notando que  $\tau \leq p$ , obtemos

$$\lambda_k = \nu_k^{-1} \|v_k\|_p^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_p^{\tau-p} = \nu_k^{-1} \left[ \|v_k\|_p^{\frac{\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \right]^{\frac{\tau-p}{\tau}} \leq \nu_k^{-\frac{p}{\tau}} < N(p, q_k)^{-1},$$

o que prova (2.14).

Como  $q_k < p$ , via desigualdade de Hölder, existe  $C > 0$  tal que

$$0 \leq A_k \leq C \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, a menos de subsequência, duas situações são possíveis:

(A)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k > 0$  ou

(B)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0$ .

Suponhamos que (A) ocorra. Mostraremos que nesta situação  $(B(p, q_k))$  é limitada. De fato, ao tomamos  $u_k$  como função teste em (2.13) obtemos

$$\lambda_k^{-1} A_k \|\nabla_g u\|_p^p + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} = 1 \implies C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \leq 1$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(C_k)$  é limitada. Já que podemos escrever

$$B(p, q_k) = i_k C_k + \gamma_k,$$

garantimos que  $(B(p, q_k))$  é também limitada. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B(p, q_k) = \mathcal{B}(p) < +\infty.$$

Dedicamos as próximas três subseções para provar a limitação de  $(B(p, q_k))$  assumindo que (B) ocorre. Antes disso, graças ao método iterativo de Moser [45] caso  $p \leq n$  ou a desigualdade de

Morrey se  $p > n$ , teremos  $u_k \in L^\infty(M)$ . Com isso e da teoria de regularidade de Tolksdorf [48], temos  $u_k \in \mathcal{C}^1(M)$ . O que observaremos agora é que a sequência  $(u_k)$  explode em  $L^\infty(M)$ . Precisamente, mostraremos que

$$\|u_k\|_\infty A_k^{\frac{n}{p^2}} \geq 1. \quad (2.15)$$

De fato,

$$1 = \|u_k\|_p^p = \int_M |u_k|^{p-q_k} |u_k|^{q_k} dv_g \leq \|u_k\|_\infty^{p-q_k} \int_M |u_k|^{q_k} dv_g.$$

Usando a definição de  $A_k$ , segue que

$$1 \leq \left[ \|u_k\|_\infty A_k^{\frac{n}{p^2}} \right]^{p-q_k},$$

o que demonstra (2.15).

## 2.2.2 Concentração $L^p$

Nesta subseção, mostraremos que a sequência  $(u_k)$  concentra-se em torno do seu ponto de máximo. Vimos que  $u_k \in \mathcal{C}^1(M)$ . Consideramos  $x_k \in M$  o ponto que realiza o máximo de  $u_k$ , isto é,

$$u_k(x_k) = \|u_k\|_\infty.$$

Nosso propósito durante esta subseção é estabelecer o

**Lema 2.1**  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(x_k, \sigma A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g = 1.$

**Prova do Lema 2.1:** Seja  $\sigma > 0$ . Para cada  $x \in B(0; \sigma)$ , definimos

$$\begin{cases} h_k(x) = g(\exp_{x_k}(A_k^{\frac{1}{p}}x)), \\ \varphi_k(x) = A_k^{\frac{n}{p^2}} u_k(\exp_{x_k}(A_k^{\frac{1}{p}}x)). \end{cases} \quad (2.16)$$

Com este reescalonamento, a equação de Euler-Lagrange (2.13), localmente, torna-se

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, h_k} \varphi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \varphi_k^{p-1} + \frac{1 - \theta_k}{\theta_k} \varphi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \varphi_k^{p-1} \text{ em } B(0; \sigma). \quad (2.17)$$

Usando o teorema do valor médio e a definição de  $\theta_k$ , temos

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, h_k} \varphi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \varphi_k^{p-1} = \frac{pq_k - nq_k + np}{n} \varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k) + \varphi_k^{q_k-1} \text{ em } B(0; \sigma), \quad (2.18)$$

em que  $\rho_k \in (q_k - 1, p - 1)$ .

Considere  $\varepsilon > 0$ . Como  $\varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k^\varepsilon) \leq \varphi_k^{p-1+\varepsilon}$ , segue de (2.18) que

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, h_k} \varphi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \varphi_k^{p-1} \leq \frac{pq_k - nq_k + np}{n\varepsilon} \varphi_k^{p-1+\varepsilon} + \varphi_k^{q_k-1} \text{ em } B(0; \sigma), \quad (2.19)$$

no sentido fraco e para funções testes não negativas. Usando que  $\varphi_k^{q_k-1} \leq \varphi_k^{p-1+\varepsilon} + 1$  juntamente

com a escolha:  $0 < \varepsilon < \frac{p^2}{n}$ , inferimos do método iterativo de Moser para  $p \leq n$  ou a desigualdade de Morrey caso  $p > n$  que

$$\left( A_k^{\frac{n}{p^2}} \|u_k\|_\infty \right)^p = \sup_{B(0;\sigma)} \varphi_k^p \leq c_\sigma \int_{B(0;2\sigma)} \varphi_k^p dh_k = c_\sigma \int_{B(x_k;2\sigma A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g \leq c_\sigma,$$

em que  $c_\sigma$  não depende de  $k \in \mathbb{N}$ . Com esta estimativa e (2.15), obtemos

$$1 \leq \|\varphi_k\|_{L^\infty(B(0;\sigma))} \leq c_\sigma^{\frac{1}{p}}. \quad (2.20)$$

Uma vez que  $C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \leq 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a menos de subsequência, temos

$$1 \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} = C \geq 0.$$

Também, a menos de subsequência, decorre de (2.14) e da **Proposição 2.1** que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda_0 \implies \lambda_0^{-1} \geq \mathcal{A}_0(p).$$

Graças a (2.20), a teoria de regularidade de Tolksdorf aplicada em (2.18) e o teorema de Arzela-Ascoli, garantimos que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{C}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, devido a (2.20), temos  $\varphi \geq 0$  não nula.

Fazendo  $k \rightarrow +\infty$  em (2.18), obtemos

$$\mathcal{A}_0(p) \Delta_{p,\xi} \varphi + C \varphi^{p-1} \leq \varphi^{p-1} + \frac{p}{n} \varphi^{p-1} \log(\varphi^p) \text{ em } \mathbb{R}^n, \quad (2.21)$$

onde  $\Delta_{p,\xi}$  denota o operador  $p$ -Laplaciano Euclidiano.

Para cada  $\sigma > 0$ , temos

$$\int_{B(0;\sigma)} \varphi^p dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^p dh_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(x_k;\sigma A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g \leq 1, \quad (2.22)$$

e como  $A_k \|\nabla_g u_k\|_p^p \leq \lambda_k$ , segue que

$$\int_{B(0;\sigma)} |\nabla \varphi|^p dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(0;\sigma)} |\nabla_{h_k} \varphi_k|^p dh_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k \int_{B(x_k;\sigma A_k^{\frac{1}{p}})} |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq \mathcal{A}_0(p)^{-1}.$$

As duas estimativas anteriores garantem que  $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Por um argumento de densidade, existe  $(\tilde{\varphi}_k) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  uma sequência de funções não negativas tal que  $\tilde{\varphi}_k \rightarrow \varphi$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Tomando  $\tilde{\varphi}_k$  como função teste em (2.21), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{n}{p} \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi \cdot \nabla \tilde{\varphi}_k dx + \frac{n}{p} C \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p-1} \tilde{\varphi}_k dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p-1} \log(\varphi^p) \tilde{\varphi}_k dx + \frac{n}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p-1} \tilde{\varphi}_k dx = \\ &= \int_{[\varphi \leq 1]} \varphi^{p-1} \log(\varphi^p) \tilde{\varphi}_k dx + \int_{[\varphi \geq 1]} \varphi^{p-1} \log(\varphi^p) \tilde{\varphi}_k dx + \frac{n}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p-1} \tilde{\varphi}_k dx. \end{aligned}$$

Agora, ao fazermos  $k \rightarrow +\infty$  e aplicando o teorema da convergência dominada e o lema de Fatou (este

foi aplicado somente na parcela:  $\int_{[\varphi \leq 1]} \varphi^{p-1} \log(\varphi^p) \tilde{\varphi}_k dx$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{n}{p} \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p dx &\leq \int_{[\varphi \leq 1]} \varphi^p \log(\varphi^p) dx + \int_{[\varphi \geq 1]} \varphi^p \log(\varphi^p) dx + \frac{n}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p \log(\varphi^p) dx + \frac{n}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Seja  $\psi = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_p} \geq 0$ . Podemos reescrever (2.23) em termos de  $\psi$  como segue

$$\frac{n}{p} \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi^p \log(\psi^p) dx + \log(\|\varphi\|_p^p) + \frac{n}{p}. \quad (2.24)$$

Combinando (2.24) com a desigualdade de entropia Euclidiana ótima, ficamos com

$$\mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi|^p dx \leq \log \left( \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi|^p dx \right) + 1 + \frac{p}{n} \log(\|\varphi\|_p^p). \quad (2.25)$$

Sabendo que  $\log(x) \leq x - 1$  para todo  $x > 0$  e considerando

$$x = \mathcal{A}_0(p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi|^p dx > 0,$$

obtemos de (2.25) que  $\log(\|\varphi\|_p^p) \geq 0$ , ou ainda,  $\|\varphi\|_p \geq 1$ . Por outro lado, devido a (2.22), temos  $\|\varphi\|_p = 1$ . Com isso, provamos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(x_k, \sigma A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p dx = 1,$$

o que conclui a prova do **Lema 2.1**.

### 2.2.3 O lema da distância

Estabeleceremos aqui uma estimativa pontual que mede a velocidade com que a sequência  $(u_k)$  vai para zero.

**Lema 2.2 (da distância)** *Para qualquer  $\lambda > 0$ , existe uma constante  $c_\lambda > 0$ , independente de  $k \in \mathbb{N}$ , tal que*

$$d_g(x, x_k)^\lambda u_k(x) \leq c_\lambda A_k^{\frac{\lambda}{p} - \frac{n}{p^2}}$$

para todo  $x \in M$  e  $k$  suficientemente grande, em que  $d_g$  denota a distância com respeito a métrica  $g$ .

**Demonstração:** Vamos proceder por contradição. Suponhamos que o lema é falso. Então, existem  $\lambda_0 > 0$  e  $y_k \in M$  tais que  $f_{k, \lambda_0}(y_k) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , sendo

$$f_{k, \lambda}(x) = d_g(x, x_k)^\lambda u_k(x) A_k^{\frac{n}{p^2} - \frac{\lambda}{p}}.$$

Sem perda de generalidade, assumiremos que  $f_{k,\lambda_0}(y_k) = \|f_{k,\lambda_0}\|_\infty$ . Vimos na subseção anterior que

$$1 \leq A_k^{\frac{n}{p^2}} \|u_k\|_\infty \leq c$$

com  $c > 0$  independente de  $k \in \mathbb{N}$ . Com isso,

$$f_{k,\lambda_0}(y_k) \leq c \frac{u_k(y_k)}{\|u_k\|_\infty} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} A_k^{-\frac{\lambda_0}{p}} \leq c \left( d_g(x_k, y_k) A_k^{-\frac{1}{p}} \right)^{\lambda_0}$$

e, então,

$$d_g(x_k, y_k) A_k^{-\frac{1}{p}} \rightarrow +\infty \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (2.26)$$

Dados  $\sigma > 0$  e  $\varepsilon \in (0, 1)$ , afirmamos que

$$B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k)) \cap B(x_k; \sigma A_k^{\frac{1}{p}}) = \emptyset \quad (2.27)$$

para  $k$  suficientemente grande. De fato, esta afirmação seguirá de

$$d(x_k, y_k) \geq \sigma A_k^{\frac{1}{p}} + \varepsilon d_g(x_k, y_k)$$

ou, equivalentemente,

$$(1 - \varepsilon) d_g(x_k, y_k) A_k^{-\frac{1}{p}} \geq \sigma.$$

Entretanto, por (2.26) e como  $1 - \varepsilon > 0$ , a desigualdade anterior é automaticamente satisfeita para  $k$  suficientemente grande, o que prova (2.27).

Afirmamos agora que existe uma constante  $c > 0$ , independente de  $k \in \mathbb{N}$ , tal que

$$u_k(x) \leq c u_k(y_k) \quad (2.28)$$

para todo  $x \in B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$ . Com efeito, sabemos que

$$d_g(x, x_k) \geq d_g(x_k, y_k) - d_g(x, y_k) \geq (1 - \varepsilon) d_g(x_k, y_k)$$

para todo  $x \in B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$ . Assim,

$$\begin{aligned} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} u_k(y_k) A_k^{\frac{n}{p^2} - \frac{\lambda_0}{p}} &= f_{k,\lambda_0}(y_k) \geq f_{k,\lambda_0}(x) = d_g(x_k, x)^{\lambda_0} u_k(x) A_k^{\frac{n}{p^2} - \frac{\lambda_0}{p}} \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon)^{\lambda_0} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} u_k(x) A_k^{\frac{n}{p^2} - \frac{\lambda_0}{p}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_k(x) \leq \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{\lambda_0} u_k(y_k)$$

para todo  $x \in B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$ , como queríamos.

Definimos o seguinte reescalonamento:

$$\begin{cases} \hat{h}_k(x) = g(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}}x)), \\ \hat{\varphi}_k(x) = A_k^{\frac{n}{p^2}} u_k(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}}x)) \end{cases} \quad (2.29)$$

com  $x \in B(0;3)$ . Esta mudança (2.29) aplicada em (2.13) nos dá

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \hat{\varphi}_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \hat{\varphi}_k^{p-1} + \frac{1 - \theta_k}{\theta_k} \hat{\varphi}_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \hat{\varphi}_k^{p-1} \text{ em } B(0;3). \quad (2.30)$$

Segue do teorema do valor médio e da definição de  $\theta_k$  que

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \hat{\varphi}_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \hat{\varphi}_k^{p-1} = \frac{pq_k - nq_k + np}{n} \hat{\varphi}_k^{\rho_k} \log(\hat{\varphi}_k) + \hat{\varphi}_k^{q_k-1} \text{ em } B(0;3), \quad (2.31)$$

onde  $\rho_k \in (q_k - 1, p - 1)$ .

Considere  $\varepsilon > 0$ . Usando que  $\log(\hat{\varphi}_k^\varepsilon) \hat{\varphi}_k^{\rho_k} \leq \hat{\varphi}_k^{p-1+\varepsilon}$  e graças ao método iterativo de Moser para  $p \leq n$  ou a desigualdade de Morrey se  $p > n$  aplicados em (2.31), chegamos a

$$\mu_k^{\frac{p}{p-q_k}} = \left( u_k(y_k) A_k^{\frac{n}{p^2}} \right)^p \leq \sup_{B(0;1)} \hat{\varphi}_k^p \leq c \int_{B(0;2)} \hat{\varphi}_k^p d\hat{h}_k = c \int_{B(y_k; 2A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g \leq c, \quad (2.32)$$

sendo

$$\mu_k = u_k(y_k)^{p-q_k} \int_M u_k^{q_k} dv_g. \quad (2.33)$$

Desse modo, temos  $(\mu_k^{\frac{p}{p-q_k}})$  limitada. Disto, duas situações independentes podem ocorrer:

- (I)  $\mu_k \geq 1 - \theta_k$ , para alguma subsequência;
- (II)  $\mu_k < 1 - \theta_k$ , para  $k$  suficientemente grande.

Em cada caso, extraímos uma contradição implicando a demonstração do **Lema 2.2**.

Suponhamos primeiro que (I) ocorre. Então,

$$\liminf_k \mu_k^{\frac{p}{p-q_k}} \geq \liminf_k (1 - \theta_k)^{\frac{p}{p-q_k}}.$$

Com a definição de  $\theta_k$ , temos

$$(1 - \theta_k)^{\frac{p}{p-q_k}} = \left[ \left( 1 + \frac{n(q_k - p)}{q_k(p - n) + np} \right)^{\frac{q_k(p-n)+np}{n(q_k-p)}} \right]^{-\frac{np}{q_k(p-n)+np}}.$$

Usando que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$ , garantimos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - \theta_k)^{\frac{p}{p-q_k}} = e^{-\frac{n}{p}}$ . Logo,

$$\liminf_k \mu_k^{\frac{p}{p-q_k}} \geq e^{-\frac{n}{p}}.$$

Por outro lado, devido a (2.26), temos

$$B(y_k; A_k^{\frac{1}{p}}) \subset B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$$

para  $k$  suficientemente grande. Usando este fato, o **Lema 2.1**, (2.27) e (2.32), chegamos na seguinte contradição

$$0 < e^{-\frac{n}{p}} \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))} u_k^p dv_g = 0.$$

Assumimos agora (II). Para  $k$  suficientemente grande, escolhemos o seguinte reescalonamento:

$$\begin{cases} \hat{h}_k(x) = g(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}}x)), \\ \psi_k(x) = u_k(y_k)^{-1} u_k(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}}x)), \end{cases} \quad (2.34)$$

com  $x \in B(0; 3)$ . Substituímos (2.34) em (2.13) para obter

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \psi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \psi_k^{p-1} + \frac{1 - \theta_k}{\theta_k} \frac{1}{\mu_k} \psi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \psi_k^{p-1} \text{ em } B(0; 3), \quad (2.35)$$

em que  $\mu_k$  é como (2.33). Reescrevemos a equação (2.35) como

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \psi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \psi_k^{p-1} + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \psi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \left( \psi_k^{p-1} - \psi_k^{q_k-1} \right) \text{ em } B(0; 3)$$

e usando o teorema do valor médio, chegamos a

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \psi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \psi_k^{p-1} + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \psi_k^{q_k-1} = \frac{pq_k - nq_k + np}{n} \log(\psi_k) \psi_k^{\rho_k} \text{ em } B(0; 3) \quad (2.36)$$

com  $\rho_k \in (q_k - 1, p - 1)$ .

Graças a (2.15) e (2.28), temos

$$\int_{B(0; 3)} \psi_k^p d\hat{h}_k = u_k(y_k)^{-p} A_k^{-\frac{n}{p}} \int_{B(y_k; 3A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g \leq c \|u_k\|_{\infty}^{-p} A_k^{-\frac{n}{p}} \leq c. \quad (2.37)$$

Considere  $h \in C_c^1(B(0; 3))$  tal que  $h = 1$  em  $B(0; 2)$  e  $h \geq 0$ . Escolhendo  $\psi_k h^p$  como função teste em (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} & \lambda_k^{-1} \int_{B(0; 3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p h^p d\hat{h}_k + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \int_{B(0; 3)} \psi_k^{q_k} h^p d\hat{h}_k \leq \\ & \leq \underbrace{\frac{pq_k - nq_k + np}{n} \int_{B(0; 3)} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) h^p d\hat{h}_k}_{(2.38.1)} + \underbrace{\lambda_k^{-1} \int_{B(0; 3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^{p-1} |\nabla_{\hat{h}_k} h^p| \psi_k d\hat{h}_k}_{(2.38.2)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Estimaremos (2.38.1) e (2.38.2). Começamos por (2.38.1). Observamos que  $\frac{pq_k - nq_k + np}{n} \rightarrow \frac{p^2}{n}$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Além disso, como  $\rho_k \in (q_k - 1, p - 1)$  e por (2.37), temos

$$\begin{aligned} \int_{B(0;3)} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) h^p d\hat{h}_k &= \int_{\{x \in B(0;3): \psi_k(x) \leq 1\}} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) h^p d\hat{h}_k + \int_{\{x \in B(0;3): \psi_k(x) \geq 1\}} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) h^p d\hat{h}_k \\ &\leq c \int_{B(0;3)} \psi_k^p d\hat{h}_k \leq c. \end{aligned}$$

Estimamos agora (2.38.2). Como  $|\nabla_{\hat{h}_k} h^p| \leq \bar{c} h^{p-1}$ , temos

$$\lambda_k^{-1} \int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^{p-1} |\nabla_{\hat{h}_k} h^p| \psi_k d\hat{h}_k \leq \bar{c} \lambda_k^{-1} \int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^{p-1} h^{p-1} \psi_k d\hat{h}_k.$$

Agora, devido a desigualdade de Young, (2.14), **Proposição 2.1** e (2.37), temos

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1} \int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^{p-1} |\nabla_{\hat{h}_k} h^p| \psi_k d\hat{h}_k &\leq \bar{c} \lambda_k^{-1} \xi \int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p h^p d\hat{h}_k + \bar{c} \lambda_k^{-1} c(\xi) \int_{B(0;3)} \psi_k^p d\hat{h}_k \\ &\leq \bar{c} \lambda_k^{-1} \xi \int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p h^p d\hat{h}_k + c \end{aligned}$$

com  $0 < \xi < 1$ .

Com as duas estimativas anteriores aplicadas em (2.38), encontramos

$$\lambda_k^{-1} (1 - \bar{c} \xi) \int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p h^p d\hat{h}_k + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \int_{B(0;3)} \psi_k^{q_k} h^p d\hat{h}_k \leq c. \quad (2.39)$$

Escolhendo  $\xi > 0$  pequeno de modo que  $1 - \bar{c} \xi > 0$ , usando (2.14), a **Proposição 2.1** e que  $\frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 > 0$ , garantimos que

$$\int_{B(0;3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p h^p d\hat{h}_k \leq c \implies \int_{B(0;2)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p d\hat{h}_k \leq c. \quad (2.40)$$

Logo, por (2.37) e (2.40), temos  $(\psi_k)$  limitada em  $W^{1,p}(B(0;2))$ . Desse modo, existe  $\psi \in W^{1,p}(B(0;2))$  tal que  $\psi_k \rightharpoonup \psi$  em  $W^{1,p}(B(0;2))$ . Segue do método iterativo de Moser caso  $p \leq n$  ou da desigualdade de Morrey se  $p > n$  que  $\psi$  não é nula (já que  $\psi_k(0) = 1$ ). Graças a (2.39) e por imersão compacta, temos

$$\limsup_k \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) < c.$$

Com isso, a menos de subsequência, teremos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) = \gamma \geq 0 \quad (2.41)$$

e, então,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = 1$ . Definimos

$$\beta_k = \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right).$$

Observamos que

$$\mu_k^{\frac{p}{p-q_k}} = \frac{(1 - \theta_k)^{\frac{p}{p-q_k}}}{(1 + \theta_k \beta_k)^{\frac{p}{p-q_k}}}.$$

Vimos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - \theta_k)^{\frac{p}{p-q_k}} = e^{-\frac{p}{n}}$ . Usando a definição de  $\theta_k$  e o limite:  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$ , obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \theta_k \beta_k)^{\frac{p}{p-q_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ (1 + \theta_k \beta_k)^{\frac{1}{\theta_k \beta_k}} \right]^{\beta_k \frac{n}{q_k} (1 - \theta_k)} = e^{\frac{n}{p} \gamma}.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k^{\frac{p}{p-q_k}} = e^{-(1+\gamma)\frac{n}{p}}.$$

Novamente extraímos uma contradição:

$$0 < e^{-(1+\gamma)\frac{n}{p}} \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; A_k^{\frac{1}{p}})} u_k^p dv_g \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))} u_k^p dv_g = 0,$$

em que recorreremos ao **Lema 2.1**, (2.27) e (2.32).

Portanto, o **Lema 2.2** está demonstrado. ■

## 2.2.4 O argumento final

Apresentaremos aqui o argumento final para a prova do **Teorema 2.1**. Lembramos que nosso objetivo é mostrar que  $(C_k)$  é limitada assumindo que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0$ . Esta etapa consiste de várias estimativas em torno de  $x_k \in M$ , onde  $u_k$  atinge seu máximo. Veremos que o **Lema 2.2** desempenhará um papel central em algumas destas estimativas.

Sem perda de generalidade, assumiremos que o raio de injetividade de  $M$  é maior do que 2. Seja  $\eta \in C_c^1(\mathbb{R})$  uma função de corte tal que  $\eta = 1$  em  $[0, 1)$ ,  $\eta = 0$  em  $[2, +\infty)$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ . Definimos  $\eta_k(x) = \eta(d_g(x, x_k))$ . A desigualdade de Nash Euclidiana ótima fornece

$$\left( \int_{B(0;2)} (u_k \eta_k)^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} \leq N(p, q_k) \left( \int_{B(0;2)} |\nabla(u_k \eta_k)|^p dx \right) \left( \int_{B(0;2)} (u_k \eta_k)^{q_k} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}},$$

em que simplificamos a notação ao escrevermos simplesmente  $u_k \eta_k$  em vez de  $u_k(\exp_{x_k}(x))\eta(\exp_{x_k}(x))$ . Expandimos a métrica  $g$  em coordenadas normais em torno de  $x_k$  (*expansão de Cartan*) para localmente obtermos

$$(1 - cd_g(x, x_k)^2) dv_g \leq dx \leq (1 + cd_g(x, x_k)^2) dv_g \text{ e } |\nabla(u_k \eta_k)|^p \leq |\nabla_g(u_k \eta_k)|^p (1 + cd_g(x, x_k)^2).$$

Com estas expansões e a **Proposição 2.1**, verificamos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0;2)} (u_k \eta_k)^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} &\leq \left( N(p, q_k) A_k \int_{B(x_k; 2)} |\nabla_g(u_k \eta_k)|^p dv_g + c A_k \int_{B(x_k; 2)} |\nabla_g(u_k \eta_k)|^p d_g(x, x_k)^2 dv_g \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{\int_{B(0;2)} (u_k \eta_k)^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$|\nabla_g(u_k \eta_k)|^p \leq |\nabla_g u_k|^p \eta_k^p + c |\eta_k \nabla_g u_k|^{p-1} |u_k \nabla_g \eta_k| + c |u_k \nabla_g u_k|^p$$

e denotando

$$X_k = A_k \int_M \eta_k^p |\nabla_g u_k|^p d_g(x, x_k)^2 dv_g \text{ e } Y_k = A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-1} |\nabla_g \eta_k| |u_k| dv_g,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0;2)} (u_k \eta_k)^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} &\leq \left( N(p, q_k) A_k \int_{B(x_k;2)} |\nabla_g u_k|^p \eta_k^p dv_g + c X_k + c Y_k + c A_k \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \right) \times \\ &\times \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se escolhermos  $u_k \eta_k^p$  como função teste em (2.13) e usando (2.14), ficamos com

$$N(p, q_k) A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_k^p dv_g \leq 1 - c A_k^{\frac{p}{q_k}} C_k + \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^p dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) + c Y_k. \quad (2.43)$$

Seja

$$Z_k = \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right).$$

Segue do teorema do valor médio e da definição de  $A_k$  que

$$\begin{aligned} \left| Z_k - \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^p dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right| &\leq \frac{1}{\theta_k} \frac{\int_M u_k^{q_k} |\eta_k^p - \eta_k^{q_k}| dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \\ &= \frac{pq_k - nq_k + np}{n} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{\sigma_k} |\log \eta_k| dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq c \frac{\int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = c A_k^{-\frac{n(p-q_k)}{p^2}} \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g, \end{aligned}$$

onde  $\sigma_k \in (q_k, p)$ . Em  $B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)$ , temos  $d_g(x, x_k)^{\lambda q_k} \geq 1$  para todo  $\lambda > 0$ . Com isso e aplicando o **Lema 2.1**, obtemos

$$A_k^{-\frac{n(p-q_k)}{p^2}} \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g \leq A_k^{-\frac{n(p-q_k)}{p^2}} \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} d_g(x, x_k)^{\lambda q_k} dv_g \leq c_\lambda A_k^{\frac{\lambda q_k - n}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Escolhemos  $\lambda > n + 2$ . Disto,  $\frac{\lambda q_k - n}{p} \geq \frac{2}{p}$ . Como  $A_k \leq 1$ , teremos  $A_k^{\frac{\lambda q_k - n}{p}} \leq A_k^{\frac{2}{p}}$  para  $k$  suficientemente grande. Logo,

$$\left| Z_k - \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^p dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right| \leq c A_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.44)$$

para  $k$  suficientemente grande.

De forma semelhante a (2.44), segue do **Lema 2.2** que

$$A_k \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \leq cA_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.45)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Substituindo (2.43), (2.44) e (2.45) em (2.42), obtemos

$$\left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} \leq \left( 1 - cA_k^{\frac{2}{p}} C_k + Z_k + cX_k + cY_k + cA_k^{\frac{2}{p}} \right) \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \quad (2.46)$$

Vamos estimar  $X_k$  e  $Y_k$ . Escolhendo  $u_k d_g^2 \eta_k^p$  como função teste em (2.13), encontramos

$$\begin{aligned} X_k &\leq \frac{c}{\theta_k} \left( \int_M u_k^p \eta_k^p d_g(x, x_k)^2 dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^p d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) + \\ &+ cA_k \int_M u_k \eta_k^p |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x, x_k) dv_g + c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + cY_k. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Começamos estimando as duas primeiras parcelas do lado direito de (2.47). Após uma mudança de variáveis (conforme reescalonamento (2.16)) e aplicação do teorema do valor médio, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_k} \left| \int_M \left( u_k^p \eta_k^p d_g(x, x_k)^2 - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^p d_g(x, x_k)^2}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) dv_g \right| &\leq cA_k^{\frac{2}{p}} \frac{1}{\theta_k} \int_{B(0;2A_k^{-\frac{1}{p}})} |\varphi_k^p - \varphi_k^{q_k} | \tilde{\eta}_k^p |x|^2 dh_k \\ &\leq cA_k^{\frac{2}{p}} \int_{B(0;2A_k^{-\frac{1}{p}})} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k, \end{aligned}$$

em que  $\rho_k \in (q_k, p)$  e  $\tilde{\eta}_k(x) = \eta_k(\exp_{x_k}(A_k^{\frac{1}{p}} x))$ . Observamos que

$$\int_{B(0;2A_k^{-\frac{1}{p}})} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k = \underbrace{\int_{\{x \in B(0;2A_k^{-1/p}) : \varphi_k(x) \leq 1\}} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k}_{(2.48.1)} + \underbrace{\int_{\{x \in B(0;2A_k^{-1/p}) : \varphi_k(x) \geq 1\}} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k}_{(2.48.2)} \quad (2.48)$$

Aplicaremos o **Lema 2.1** nas parcelas (2.48.1) e (2.48.2). Para isso, reescrevemos este lema em termos da função  $\varphi_k$  como segue: *para qualquer  $\lambda > 0$ , existe uma constante  $c_\lambda > 0$ , independente de  $k \in \mathbb{N}$ , tal que*

$$|x|^\lambda \varphi_k(x) \leq c_\lambda \quad (2.49)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $k$  suficientemente grande. Iniciamos com (2.48.1). Como  $\varphi_k \leq 1$  e  $\rho_k \in (q_k, p)$ , teremos  $\varphi_k^{\rho_k} \leq \varphi_k$ . Fixado  $\sigma > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in B(0;2A_k^{-1/p}) : \varphi_k(x) \leq 1\}} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k &\leq \int_{B(0;2A_k^{-1/p})} |\log(\varphi_k)| \varphi_k |x|^2 dh_k \\ &= \int_{B(0,\sigma)} |\log(\varphi_k)| \varphi_k |x|^2 dh_k + \int_{B(0;2A_k^{-1/p}) \setminus B(0,\sigma)} |\log(\varphi_k)| \varphi_k |x|^2 dh_k \end{aligned}$$

Agora, aplicando (2.49) nas duas parcelas acima, garantimos que

$$\int_{\{x \in B(0; 2A_k^{-1/p}): \varphi(x) \leq 1\}} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k \leq c$$

para  $k$  suficientemente grande. O mesmo raciocínio usamos para estimar (2.48.2) considerando, neste caso,  $\varphi_k^{\rho_k} \leq \varphi_k^p$ . Assim,

$$\int_{\{x \in B(0; 2A_k^{-1/p}): \varphi(x) \geq 1\}} |\log(\varphi_k)| \varphi_k^{\rho_k} |x|^2 dh_k \leq c$$

para  $k$  suficientemente grande. Portanto,

$$\frac{1}{\theta_k} \left| \int_M u_k^p \eta_k^p d_g(x, x_k)^2 dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^p d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq c A_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.50)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Via desigualdade de Hölder, (2.13), (2.14), a **Proposição 2.1** e o **Lema 2.2**, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M u_k \eta_k^p |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x, x_k) dv_g &\leq \left( \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x_k; 2)} u_k^p d_g(x, x_k)^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c A_k^{\frac{2-p}{p}} \left( \int_{B(0; 2A_k^{-1/p})} \varphi_k^p |x|^p dh_k \right)^{\frac{1}{p}} \leq c A_k^{\frac{2-p}{p}} \end{aligned}$$

para  $k$  suficientemente grande.

As estimativas anteriores aplicadas em (2.47) garantem que

$$X_k \leq c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + c Y_k + c A_k^{\frac{2}{p}}. \quad (2.51)$$

Novamente devido ao **Lema 2.2**, obtemos

$$\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq c A_k^{\frac{2}{p}} \int_{B(0; 2A_k^{-1/p})} \varphi_k^{q_k} |x|^2 dh_k \leq c A_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.52)$$

para  $k$  suficientemente grande. Por fim, estimamos  $Y_k$  usando a desigualdade de Hölder, (2.13), (2.14), a **Proposição 2.1** e o lema da distância para chegarmos a

$$Y_k \leq c A_k^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B(x_k; 2) \setminus B(x_k; 1)} u_k^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq c A_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.53)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Com as estimativas (2.51), (2.52) e (2.53) substituídas em (2.46) chegamos a

$$\left( \int_{B(0; 2)} u_k^p \eta_k^p dx \right)^{\frac{1}{\theta_k}} \leq \left( 1 + Z_k - c A_k^{\frac{\tau}{p}} C_k + c A_k^{\frac{2}{p}} \right) \left( \frac{\int_{B(0; 2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Agora, aplicamos a função logarítmica em ambos os membros da

desigualdade anterior e usando que  $\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} = \frac{1}{\theta_k} - \frac{n-p}{n}$ , iremos obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_k} \left[ \log \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right] &\leq \log(1 - cA_k^{\frac{2}{p}} C_k + Z_k + cA_k^{\frac{2}{p}}) - \\ &- \frac{n-p}{n} \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Do teorema do valor médio, existe  $\xi_k$  entre as expressões

$$\int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx \text{ e } \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}$$

tal que

$$\log \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \frac{1}{\xi_k} \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \quad (2.55)$$

A expansão de Cartan da métrica  $g$  em torno de  $x_k$  e o **Lema 2.2** fornecem

$$\max \left\{ \left| \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx - \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g \right|, \left| \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \right\} \leq cA_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.56)$$

para  $k$  suficientemente grande. De fato,

$$\left| \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx - \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g \right| \leq c \int_{B(x_k;2)} u_k^p \eta_k^p d_g(x, x_k)^2 dv_g \leq cA_k^{\frac{2}{p}} \int_{B(0;2A_k^{-\frac{1}{p}})} \varphi_k^p |x|^2 dh_k \leq cA_k^{\frac{2}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande.

E por (2.52), temos

$$\left| \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq cA_k^{\frac{2}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande, o que encerra a justificativa para (2.56).

Verificamos agora que

$$\max \left\{ \left| \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - 1 \right|, \left| \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - 1 \right| \right\} \leq cA_k^{\frac{2}{p}} \quad (2.57)$$

para  $k$  suficientemente grande. Com efeito, graças ao **Lema 2.2**, temos

$$\left| \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - 1 \right| = \left| \int_M u_k^p \eta_k^p dv_g - \int_M u_k^p dv_g \right| \leq \int_{M \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \leq cA_k^{\frac{2}{p}}$$

e

$$\left| \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - 1 \right| \leq \frac{\int_{M \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq cA_k^{\frac{2}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Logo fica garantido (2.57).

Com (2.56) e (2.57) deduzimos que  $\xi_k^{-1} = 1 + O(A_k^{\frac{2}{p}})$ . Segue de (2.55) que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta_k} \left[ \log \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\theta_k} \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) (1 + O(A_k^{\frac{2}{p}})). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Via expansão de Cartan e (2.50), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta_k} \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \frac{1}{\theta_k} \int_{B(0;2)} \left( u_k^p \eta_k^p - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\theta_k} \int_M \left( u_k^p \eta_k^p - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) dv_g + \frac{c}{\theta_k} \int_M \left( u_k^p \eta_k^p - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) O(d_g(x, x_k)^2) dv_g = Z_k + O(A_k^{\frac{2}{p}}) \end{aligned}$$

para  $k$  suficientemente grande. Substituímos em (2.58) para obter

$$\frac{1}{\theta_k} \left[ \log \left( \int_{B(0;2)} u_k^p \eta_k^p dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right] \geq Z_k - cA_k^{\frac{2}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Retornando a (2.54), encontramos

$$Z_k - cA_k^{\frac{2}{p}} \leq \log(1 + Z_k - cA_k^{\frac{\tau}{p}} C_k + cA_k^{\frac{2}{p}}) + \frac{n-p}{n} \left| \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right|$$

para  $k$  suficientemente grande.

Finalmente, usando a expansão de Cartan da métrica  $g$  em coordenadas normais em torno de  $x_k \in M$ , a expansão de Taylor da função logarítmica e o **Lema 2.2**, obtemos

$$\left| \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right| \leq c \frac{\int_{M \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq cA_k^{\frac{2}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Em resumo, ficamos com

$$Z_k - cA_k^{\frac{2}{p}} \leq \log(1 + Z_k - cA_k^{\frac{\tau}{p}} C_k + cA_k^{\frac{2}{p}}) + cA_k^{\frac{2}{p}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Lembrando que  $\log x \leq x - 1$  para todo  $x > 0$ , temos

$$Z_k - cA_k^{\frac{2}{p}} \leq Z_k - cA_k^{\frac{\tau}{p}} C_k + cA_k^{\frac{2}{p}},$$

donde

$$|M|^{-\frac{\tau}{n}} < C_k \leq cA_k^{\frac{2-\tau}{p}} \quad (2.59)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Observamos que se  $\tau < \min\{2, p\}$  ou  $\tau = p < 2$ , teremos uma contradição quando  $k \rightarrow +\infty$ . Então, a hipótese (B) não ocorre, o que mostra que (A) deve ocorrer e, como já vimos neste caso,  $\mathcal{B}(p) < +\infty$ . Quando  $\tau = 2 < p$ , segue de (2.59) que  $(C_k)$  é limitada. Portanto  $(\mathcal{B}(p, q_k))$  é limitada,

concluindo a prova do **Teorema 2.1**.

## 2.3 Demonstração do Corolário 2.1 e do Teorema 2.2

Demonstraremos nesta seção o **Corolário 2.1** e o **Teorema 2.2**. Iniciamos com o **Corolário 2.1**, isto é, devemos garantir que

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p) \right] \quad (2.60)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ .

De fato, aplicando a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade de Nash Riemanniana ótima (2.1), obtemos

$$\frac{\tau}{\theta_k} \log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left( \frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g u\|_p^\tau + \mathcal{B}(p, q_k) \|u\|_p^\tau}{\|u\|_{q_k}^\tau} \right)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Agora, decorre da **Proposição 2.1** e do **Teorema 2.1** que

$$\frac{\tau p^2}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p - q_k} \log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left( \frac{\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g u\|_p^\tau + \mathcal{B}(p) \|u\|_p^\tau}{\|u\|_p^\tau} \right)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Mas, conforme a demonstração da **Proposição 2.1**, temos

$$\frac{p^2}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p - q_k} \log \left( \frac{\|u\|_p}{\|u\|_{q_k}} \right) = \frac{p}{n} \int_M \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} \log \left( \frac{|u|}{\|u\|_p} \right) dv_g.$$

Portanto,

$$\frac{\tau}{n} \int_M \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} \log \left( \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} \right) dv_g \leq \log \left( \frac{\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g u\|_p^\tau + \mathcal{B}(p) \|u\|_p^\tau}{\|u\|_p^\tau} \right)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  ou, equivalentemente,

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p) \right]$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ . Isto demonstra o **Corolário 2.1**.

Demonstramos agora o **Teorema 2.2**. Nosso interesse é mostrar que a desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima é válida e  $\mathcal{A}(p, \tau) = \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}$ . Como consequência do **Corolário 2.1** e da definição de  $\mathcal{A}(p, \tau)$ , já garantimos que

$$\mathcal{A}(p, \tau) \leq \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Por outro lado, para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ , segue da desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned} -\log\left(\int_M |u|^{q_k} dv_g\right) &= -\log\left(\int_M |u|^{q_k-p}|u|^p dv_g\right) \leq \int_M -\log(|u|^{q_k-p})|u|^p dv_g = \\ &= \frac{p-q_k}{p} \int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Da definição de  $\mathcal{A}(p, \tau)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $B_\varepsilon > 0$  tal que

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ (\mathcal{A}(p, \tau) + \varepsilon) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \right] \quad (2.62)$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  satisfazendo  $\|u\|_p = 1$ .

Combinamos então (2.61) com (2.62) para produzir

$$\left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{-\frac{\tau p}{n(p-q_k)}} \leq (\mathcal{A}(p, \tau) + \varepsilon) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ .

Como  $\frac{1-\theta_k}{\theta_k} = \frac{pq_k}{n(p-q_k)}$  e por um argumento de homogeneidade, obtemos a desigualdade de Nash:

$$\left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \leq \left[ (\mathcal{A}(p, \tau) + \varepsilon) \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left( \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}$$

satisfeita para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Assim, temos da definição da primeira constante ótima de Nash que

$$N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \leq \mathcal{A}(p, \tau) + \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , temos

$$\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \leq \mathcal{A}(p, \tau) + \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Logo, ao fazermos  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos  $\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \leq \mathcal{A}(p, \tau)$ , donde fica estabelecido que

$$\mathcal{A}(p, \tau) = \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Em particular, a desigualdade encontrada no **Corolário 2.1** é ótima.

Como conclusão, segue diretamente da definição de  $\mathcal{B}(p, \tau)$  que a desigualdade

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right] \quad (2.63)$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_p = 1$ , culminando na demonstração do **Teorema 2.2**.

## 2.4 Existência de função extremal

Nesta seção, provamos o **Teorema 2.3**. Vimos que  $B(p, q_k) \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ . Então,  $\mathcal{B}(p) \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ . Se  $\mathcal{B}(p) = |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ , segue do **Corolário 2.1** que a função constante  $u = |M|^{-\frac{1}{p}}$  é extremal. Suponhamos  $\mathcal{B}(p) > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ . Repetindo a demonstração do **Teorema 2.1** e usando a hipótese  $\tau < \min\{2, p\}$  ou  $\tau = p < 2$ , veremos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k > 0$ , pois do contrário teríamos uma contradição com (2.59). Com isso e usando  $u_k$  como função teste em (2.13), obtemos

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq c$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo, a menos de subsequência,  $u_k \rightharpoonup u_0$  em  $H^{1,p}(M)$ . Por imersão compacta, temos  $1 = \|u_k\|_p \rightarrow \|u_0\|_p$ , donde  $\|u_0\|_p = 1$ . Graças ao método iterativo de Moser para  $p \leq n$  ou a desigualdade de Morrey caso  $p > n$ , chegamos a

$$\sup_{x \in M} u_k \leq c$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $u_k \in L^\infty(M)$ , da teoria de regularidade de Tolksdorf combinada com o teorema de Arzela-Ascoli, segue que  $u_k \rightarrow u_0$  em  $\mathcal{C}^1(M)$ . Lembrando que  $J_k(v_k) > N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}}$  (vide (2.11)), teremos

$$\left( \frac{\|v_k\|_p}{\|v_k\|_{q_k}} \right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} > \frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g v_k\|_p^\tau + (B(p, q_k) - \gamma_k) \|v_k\|_p^\tau}{\|v_k\|_{q_k}^\tau}.$$

Como  $u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_p}$ , obtemos

$$\left( \frac{1}{\|u_k\|_{q_k}} \right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} > \frac{N(p, q_k)^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g u_k\|_p^\tau + (B(p, q_k) - \gamma_k)}{\|u_k\|_{q_k}^\tau}.$$

Tomando a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade anterior, fazendo  $k \rightarrow +\infty$  e seguindo o mesmo raciocínio adotado na demonstração do **Corolário 2.1**, chegamos a

$$\int_M |u_0|^p \log(|u_0|^p) dv_g \geq \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}} \left( \int_M |\nabla_g u_0|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p) \right].$$

Portanto,  $u_0$  é uma função extremal para  $(L(\mathcal{A}_0(p)^{\frac{\tau}{p}}, \mathcal{B}(p, \tau)))$  e vale  $\mathcal{B}(p, \tau) = \mathcal{B}(p)$ .

## 2.5 Aplicação

Faremos nesta seção uma aplicação da desigualdade de  $p$ -entropia Riemanniana ótima estabelecida no **Teorema 2.2**. Inspirados em [27], iremos mostrar uma estimativa *a priori* para a solução de uma equação de difusão não linear.

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem fronteira com dimensão  $n \geq 2$ .

Vamos considerar o problema de Cauchy com equação de difusão não linear:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p(u^{\frac{1}{p-1}}) \text{ em que } (x, t) \in M \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases} \quad (2.64)$$

para algum dado inicial  $f \in L^1(M)$ ,  $f \geq 0$ .

A equação  $u_t = \Delta_p(u^{\frac{1}{p-1}})$  para  $p > 1$  é uma generalização não linear da equação do calor (caso em que  $p = 2$ ) que é homogênea de grau 1. No teorema que segue, verificaremos que o semigrupo  $(P_t)_{t \geq 0}$  associado a esta equação é *hipercontrativo*, isto é, existe uma função  $t \mapsto q(t)$  crescente que satisfaz

$$\|P_t f\|_{q(t)} \leq c(t) \|f\|_{q(0)} \text{ para todo } t \geq 0$$

e para alguma função  $t \mapsto c(t)$  contínua.

**Teorema 2.4** *Suponhamos que exista uma função não negativa  $u : M \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  solução do problema (2.64). Sejam*

$$\phi(t) = \frac{n}{\tau} \log \left( \mathcal{A}(p, \tau) t^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right)$$

e  $q = q(t)$  solução da equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \phi'(q^p) = \frac{p^p q^{2-p}(q-1)}{q'(p-1)^{p-1}}, \\ q(0) > 1. \end{cases} \quad (2.65)$$

Então, para todo  $t \in [0, t_0]$ , temos

$$\|u\|_{q(t)} \leq e^{D(t)} \|f\|_{q(0)},$$

em que  $D(t) = \int_{q(0)}^{q(t)} \frac{\psi(y^p)}{y^2} dy$ ,  $[0, t_0]$  é o intervalo de solução de  $q$  e  $\psi(t) = \phi(t) - t\phi'(t)$ .

**Demonstração:** Observamos que o problema de valor inicial (2.65) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} q'(t) = \frac{p^{p+1}}{n(p-1)^{p-1}} \left[ q(t)^2(q(t) - 1) + \frac{\mathcal{B}(p, \tau)}{\mathcal{A}(p, \tau)} q(t)^{2-\tau}(q(t) - 1) \right], \\ q(0) > 1. \end{cases}$$

Com isso, segue da teoria das equações diferenciais ordinárias que existe uma solução  $q = q(t)$  do problema (2.65) que é positiva e estritamente crescente no intervalo  $[0, t_0]$  (vide, por exemplo, [46]).

Seja  $F(t) = \|u(\cdot, t)\|_{q(t)}$  com  $u$  solução não negativa do problema (2.64). Calculando a derivada de  $F$ , encontramos

$$F'(t) = F(t) \left( -\frac{q'(t)}{q(t)^2} \right) \log \left( \int_M |u(x, t)|^{q(t)} dv_g \right) + F(t)^{q(t)-1} \frac{1}{q(t)} \frac{d}{dt} \left( \int_M |u(x, t)|^{q(t)} dv_g \right). \quad (2.66)$$

Como  $u$  satisfaz (2.64), obtemos de (2.66) que

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \left( -\frac{q'}{q^2} \right) \log (\|u\|_q^q) + \frac{q'}{q^2} \frac{1}{F^q} \int_M u^q \log(u^q) dv_g - \frac{q-1}{(p-1)^{p-1}} \frac{1}{F^q} \int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g. \quad (2.67)$$

Mas

$$\left(-\frac{q'}{q^2}\right) \log(\|u\|_q^q) + \frac{q'}{q^2} \frac{1}{F^q} \int_M u^q \log(u^q) dv_g = \frac{q'}{q^2} \int_M \frac{u^q}{\|u\|_q^q} \log\left(\frac{u^q}{\|u\|_q^q}\right) dv_g.$$

Substituímos em (2.67) para ficarmos com

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'}{q^2} \left[ \int_M \frac{u^q}{\|u\|_q^q} \log\left(\frac{u^q}{\|u\|_q^q}\right) dv_g - \frac{q^2}{q'} \frac{(q-1)}{(p-1)^{p-1}} \frac{\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g}{\int_M u^q dv_g} \right]. \quad (2.68)$$

Reescrevemos (2.68) como segue

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'}{q^2} \left[ \int_M \frac{(u^{\frac{q}{p}})^p}{\|u^{\frac{q}{p}}\|_p^p} \log\left(\frac{(u^{\frac{q}{p}})^p}{\|u^{\frac{q}{p}}\|_p^p}\right) dv_g - \frac{q^2}{q'} \frac{(q-1)}{(p-1)^{p-1}} \frac{\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g}{\int_M u^q dv_g} \right].$$

Agora, aplicando o **Teorema 2.2** na desigualdade anterior, chegamos a

$$\frac{F'}{F} \leq \frac{q'}{q^2} \left\{ \frac{n}{\tau} \log \left[ \mathcal{A}(p, \tau) \frac{\left(\int_M |\nabla_g (u^{\frac{q}{p}})|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}}{\|u^{\frac{q}{p}}\|_p^\tau} + \mathcal{B}(p, \tau) \right] - \frac{q^2}{q'} \frac{(q-1)}{(p-1)^{p-1}} \frac{\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g}{\int_M u^q dv_g} \right\}.$$

Como  $|\nabla_g (u^{\frac{q}{p}})|^p = \left(\frac{q}{p}\right)^p u^{q-p} |\nabla_g u|^p$ , segue da desigualdade acima que

$$\begin{aligned} \frac{F'}{F} \leq \frac{q'}{q^2} \left\{ \frac{n}{\tau} \log \left[ \left(\frac{q}{p}\right)^\tau \mathcal{A}(p, \tau) \frac{\left(\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}}{\left(\int_M u^q dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right] - \right. \\ \left. - \frac{q^2}{q'} \frac{(q-1)}{(p-1)^{p-1}} \frac{\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g}{\int_M u^q dv_g} \right\}. \quad (2.69) \end{aligned}$$

Consideramos  $\phi(t) = \frac{n}{\tau} \log \left( \mathcal{A}(p, \tau) t^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right)$ . Notamos que  $\phi$  é côncava, e então dados  $\alpha, \beta > 0$ , temos

$$\phi(\beta) \leq \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(\beta - \alpha). \quad (2.70)$$

Escolhemos

$$\beta(t) = \left(\frac{q}{p}\right)^p \frac{\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g}{\int_M u^q dv_g}$$

e considere uma função  $\alpha(t)$  tal que

$$\phi'(\alpha(t)) = \left(\frac{p}{q}\right)^p \frac{q^2}{q'} \frac{(q-1)}{(p-1)^{p-1}}.$$

Com estas escolhas aplicadas em (2.70), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{n}{\tau} \log \left[ \left(\frac{q}{p}\right)^\tau \mathcal{A}(p, \tau) \frac{\left(\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}}{\left(\int_M u^q dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}} + \mathcal{B}(p, \tau) \right] &\leq \\ &\leq \phi(\alpha(t)) + \frac{q^2}{q'} \frac{(q-1)}{(p-1)^{p-1}} \frac{\int_M u^{q-p} |\nabla_g u|^p dv_g}{\int_M u^q dv_g} - \alpha(t) \phi'(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Combinando esta última desigualdade com (2.69), temos

$$\frac{F'}{F} \leq \frac{q'}{q^2} (\phi(\alpha(t)) - \alpha(t)\phi'(\alpha(t))) = \frac{q'}{q^2} \psi(\alpha(t)),$$

em que  $\psi(s) = \phi(s) - s\phi'(s)$ . Vamos agora integrar no intervalo  $(0, t)$  para ficarmos com

$$\log \left( \frac{\|u\|_{q(t)}}{\|f\|_{q(0)}} \right) \leq \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)^2} \psi(\alpha(s)) ds,$$

donde

$$\|u\|_{q(t)} \leq e^{D(t)} \|f\|_{q(0)},$$

onde  $D(t) = \int_0^t \frac{q'}{q^2} \psi(\alpha) ds$ . Via (2.65) e uma mudança de variáveis, garantimos que

$$D(t) = \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)^2} \psi \left( (\phi')^{-1} \left( \left( \frac{p}{q(s)} \right)^p \frac{q(s)^2 (q(s) - 1)}{q'(s) (p-1)^{p-1}} \right) \right) ds = \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)^2} \psi(q(s)^p) ds = \int_{q(0)}^{q(t)} \frac{\psi(y^p)}{y^2} dy,$$

encerrando a prova do **Teorema 2.4**. ■

# Capítulo 3

## DESIGUALDADE DE $r$ -ENTROPIA RIEMANNIANA ÓTIMA

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e de dimensão  $n \geq 2$ . Consideramos  $p, r \in \mathbb{R}$  com  $1 < r \leq p \leq 2$ . Um dos primeiros objetivos deste capítulo será garantir a existência de constantes  $A$  e  $B$  positivas tais que a desigualdade de  $r$ -entropia:

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( A \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right) \quad (\text{Ent}(A, B))$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ .

O nosso ponto de partida concentra-se na *desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima* [20] que estabelece o seguinte:

$$\begin{aligned} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} &\leq \left[ \mathcal{A}(p, q_k, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_k, r) \int_M |u|^p dv_g \right] \times \\ &\quad \times \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $1 \leq q_k < r \leq p \leq 2$ ,  $q_k = r - \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_k = \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)}$  um parâmetro interpolador que satisfaz  $\theta_k \in (0, 1)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}(p, q_k, r)$  é a *primeira constante ótima* desta desigualdade e  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  é a *segunda constante ótima*.

Seguindo argumentos semelhantes aos estudados no **Capítulo 2**, verificaremos que  $(\text{Ent}(A, B))$  será obtida a partir da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima via passagem de limite em  $\mathcal{A}(p, q_k, r)$  e em  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Na seção 3.1, mostraremos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(p, q_k, r) = \mathcal{A}_0(p, r) < +\infty.$$

O argumento mais delicado consiste no estudo do comportamento de  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  quando fazemos

$k \rightarrow +\infty$ . Provaremos na seção 3.2 que, a menos de subsequência,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(p, q_k, r) = \mathcal{B}_0(p, r) < +\infty,$$

isto é, mostraremos o

**Teorema 3.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideremos  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  como em (3.1). Então, dados  $p, r \in \mathbb{R}$  com  $1 < r \leq p \leq 2$ , temos  $\mathcal{B}_0(p, r) < +\infty$ .*

Devido a uma passagem de limite e o **Teorema 3.1**, obtemos a desigualdade  $(\text{Ent}(A, B))$ .

**Corolário 3.1** *A desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana*

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_0(p, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_0(p, r) \int_M |u|^p dv_g \right]$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ .

Deste corolário, podemos definir

**Definição 3.1** *A primeira constante ótima Riemanniana de  $r$ -entropia é*

$$\mathcal{A}_{ent} = \inf \{ A \in \mathbb{R}; \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ com } (\text{Ent}(A, B)) \text{ válida} \}.$$

**Definição 3.2** *A primeira desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima afirma que existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ :*

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right)$$

é válida.

Em caso da desigualdade acima ser verdadeira, faz sentido considerarmos a

**Definição 3.3** *A segunda constante ótima Riemanniana de  $r$ -entropia é*

$$\mathcal{B}_{ent} = \inf \{ B \in \mathbb{R} : (\text{Ent}(\mathcal{A}_{ent}, B)) \text{ é válida} \}.$$

**Definição 3.4** *A segunda desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima estabelece que*

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_{ent} \int_M |u|^p dv_g \right)$$

é satisfeita para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ .

A validade da segunda desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima é estabelecida no

**Teorema 3.2** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideremos  $1 < r \leq p \leq 2$ . Então, a segunda desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima é válida. Além disso,  $\mathcal{A}_{ent} = \mathcal{A}_0(p, r)$ .*

**Definição 3.5** Uma função  $u_0 \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u_0\|_r = 1$  é dita uma **função extremal** quando

$$\int_M |u_0|^r \log(|u_0|^r) dv_g = \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left( \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u_0|^p dv_g + \mathcal{B}_{ent} \int_M |u_0|^p dv_g \right).$$

Finalizamos este capítulo mostrando a existência de função extremal para a desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima.

**Teorema 3.3** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e com dimensão  $n \geq 2$ . Consideremos  $1 < r \leq p < 2$ . Então, a desigualdade  $(Ent(\mathcal{A}_{ent}, \mathcal{B}_{ent}))$  admite função extremal e  $\mathcal{B}_{ent} = \mathcal{B}_0(p, r)$ .

### 3.1 A limitação da primeira constante ótima de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana

Nesta seção, mostraremos a seguinte

**Proposição 3.1** Dados  $1 \leq q_k < r \leq p \leq 2$ , existe  $\mathcal{A}_0(p, r) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(p, q_k, r) = \mathcal{A}_0(p, r).$$

**Demonstração:** Vamos mostrar que a sequência  $(\mathcal{A}(p, q_k, r))$  é monótona limitada. Consideramos  $u \in H^{1,p}(M)$  e sejam  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $k_1 < k_2$ . Logo,  $1 \leq q_{k_1} < q_{k_2} \leq r$  e via desigualdade de interpolação, chegamos a

$$\left( \int_M |u|^{q_{k_2}} dv_g \right)^{\frac{1}{q_{k_2}}} \leq \left( \int_M |u|^{q_{k_1}} dv_g \right)^{\frac{\mu}{q_{k_1}}} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{1-\mu}{r}} \quad (3.2)$$

com  $\frac{1}{q_{k_2}} = \frac{\mu}{q_{k_1}} + \frac{1-\mu}{r}$ .

Por outro lado, sabemos da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima que

$$\begin{aligned} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_{k_2}}} &\leq \left( \mathcal{A}(p, q_{k_2}, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_{k_2}, r) \int_M |u|^p dv_g \right) \times \\ &\times \left( \int_M |u|^{q_{k_2}} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_{k_2})}{q_{k_2}\theta_{k_2}}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que  $\theta_{k_2} = \frac{np(r - q_{k_2})}{r(q_{k_2}(p - n) + np)}$ .

Combinamos (3.2) e (3.3) para produzir

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r} \left( 1 + \mu \frac{1-\theta_{k_2}}{\theta_{k_2}} \right)} \leq \left[ \mathcal{A}(p, q_{k_2}, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_{k_2}, r) \int_M |u|^p dv_g \right] \times$$

$$\times \left( \int_M |u|^{q_{k_1}} dv_g \right)^{\frac{p}{q_{k_1}} \left( \mu^{\frac{1-\theta_{k_2}}{\theta_{k_2}}} \right)}.$$

Usando que

$$\mu \frac{1-\theta_{k_2}}{\theta_{k_2}} = \frac{1-\theta_{k_1}}{\theta_{k_1}}, \text{ onde } \theta_{k_1} = \frac{np(r-q_{k_1})}{r(q_{k_1}(p-n)+np)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_{k_1}}} &\leq \left[ \mathcal{A}(p, q_{k_2}, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_{k_2}, r) \int_M |u|^p dv_g \right] \times \\ &\times \left( \int_M |u|^{q_{k_1}} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_{k_1})}{q_{k_1}\theta_{k_1}}}. \end{aligned}$$

Segue da definição de  $\mathcal{A}(p, q_{k_1}, r)$  que

$$\mathcal{A}(p, q_{k_1}, r) \leq \mathcal{A}(p, q_{k_2}, r),$$

o que prova que  $(\mathcal{A}(p, q_k, r))$  é monótona (não decrescente).

Agora, mostraremos a limitação de  $(\mathcal{A}(p, q_k, r))$ . Graças a desigualdade de interpolação aplicada na situação  $q_k < r < p^*$ , temos

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{1-\theta_k}{q_k}} \left( \int_M |u|^{p^*} dv_g \right)^{\frac{\theta_k}{p^*}}, \quad (3.4)$$

em que  $\theta_k = \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)}$ .

A *desigualdade de Sobolev Riemanniana ótima* [30] estabelece que existe uma constante  $B > 0$  tal que

$$\left( \int_M |u|^{p^*} dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq K(n, p)^p \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \quad (3.5)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ , em que  $K(n, p)$  é a *constante ótima da desigualdade de Sobolev Euclidiana*.

Juntamos (3.4) e (3.5) para ficarmos com

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \left[ K(n, p)^p \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  e alguma constante  $B > 0$ . Segue da definição de  $\mathcal{A}(p, q_k, r)$  que

$$\mathcal{A}(p, q_k, r) \leq K(n, p)^p$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , o que garante que  $(\mathcal{A}(p, q_k, r))$  é limitada.

Portanto, existe  $\mathcal{A}_0(p, r) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(p, q_k, r) = \mathcal{A}_0(p, r).$$

■

## 3.2 Limitação da segunda constante ótima de Gagliardo-Nirenberg

Iremos provar nesta seção o **Teorema 3.1**, isto é, iremos garantir que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(p, q_k, r) = \mathcal{B}_0(p, r) < +\infty.$$

Semelhantemente ao que fizemos nos capítulos anteriores, dividiremos a demonstração deste teorema nas quatro etapas descritas abaixo:

- na subseção 3.2.1, obtemos uma sequência  $(u_k)$  que satisfaz uma equação de Euler-Lagrange associada a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima;
- na subseção 3.2.2, iremos mostrar que a sequência  $(u_k)$  concentra-se em torno de seu ponto de máximo;
- na subseção 3.2.3, calcularemos com qual velocidade  $(u_k)$  converge pontualmente para zero;
- na subseção 3.2.4, elaboramos o argumento final para a limitação de  $(\mathcal{B}(p, q_k, r))$ .

**Demonstração do Teorema 3.1:**

### 3.2.1 Equação de Euler-Lagrange

Como as funções constantes não nulas pertencem a  $H^{1,p}(M)$  e usando que

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \theta_k}{q_k} + \frac{\theta_k}{p^*},$$

obtemos

$$\mathcal{B}(p, q_k, r) \geq |M|^{-\frac{p}{n}}. \quad (3.6)$$

Assim, duas situações podem ocorrer:

$$(C.1) \quad \mathcal{B}_0(p, r) = |M|^{-\frac{p}{n}} \text{ ou}$$

$$(C.2) \quad \mathcal{B}_0(p, r) > |M|^{-\frac{p}{n}}.$$

Se (C.1) ocorrer, então  $\mathcal{B}_0(p, r) < +\infty$  e o **Teorema 3.1** está provado.

Suponhamos (C.2). Então existe uma sequência  $(\gamma_k)$  de números reais positivos tais que

$$\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k > |M|^{-\frac{p}{n}} \quad (3.7)$$

com  $\gamma_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Seja  $\mathcal{H} = \left\{ u \in H^{1,p}(M); \int_M |u|^p dv_g = 1 \right\}$ . Definimos o funcional  $\mathcal{I}_k : H^{1,p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , pondo

$$\mathcal{I}_k(u) = \left[ \mathcal{A}(p, q_k, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + (\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k) \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{-\frac{p}{r \theta_k}}.$$

Da definição de  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$ , existe  $u_0 \in \mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{I}_k(u_0) < 1$ . Denotamos por

$$i_k = \inf_{u \in \mathcal{H}} \mathcal{I}_k(u) < 1. \quad (3.8)$$

Seja  $(u_m) \subset \mathcal{H}$  uma sequência minimizante para o funcional  $\mathcal{I}_k$ , isto é,  $\mathcal{I}_k(u_m) \rightarrow i_k$  quando  $m \rightarrow +\infty$ . Considere  $\sigma > 1$  tal que  $i_k < \sigma i_k < 1$ . Para  $m$  suficientemente grande, temos  $\mathcal{I}_k(u_m) < \sigma i_k$ . Juntando este fato com a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima aplicada a função  $u_m \in \mathcal{H}$  resulta em

$$(\mathcal{A}(p, q_k, r) - \sigma i_k \mathcal{A}(p, q_k, r)) \int_M |\nabla_g u_m|^p dv_g \leq \gamma_k.$$

Como  $\mathcal{A}(p, q_k, r) - \sigma i_k \mathcal{A}(p, q_k, r) > 0$ , garantimos que  $(u_m)$  é limitada em  $H^{1,p}(M)$ . Então, existe  $\tilde{u}_k \in H^{1,p}(M)$  tal que  $u_m \rightarrow \tilde{u}_k$ , a menos de subsequência. Via imersão compacta, temos

$$u_m \rightarrow \tilde{u}_k \text{ em } L^{q_k}(M) \cap L^r(M) \cap L^p(M)$$

quando  $m \rightarrow +\infty$ . Em particular,  $1 = \|u_m\|_p \rightarrow \|\tilde{u}_k\|_p$ , donde  $\tilde{u}_k \in \mathcal{H}$ . Além disso,

$$\mathcal{I}_k(\tilde{u}_k) \leq \liminf_m \mathcal{I}_k(u_m) = \lim_m \mathcal{I}_k(u_m) = i_k,$$

o que mostra que  $i_k = \mathcal{I}_k(\tilde{u}_k)$ .

Notando que  $\nabla_g |\tilde{u}_k| = \pm \nabla_g \tilde{u}_k$  em quase todo ponto, podemos assumir  $\tilde{u}_k \geq 0$ . Verificaremos que

$$\int_M |\nabla_g \tilde{u}_k|^p dv_g \neq 0. \quad (3.9)$$

Suponhamos, por absurdo, que  $\tilde{u}_k$  é constante. Como  $\|\tilde{u}_k\|_p = 1$ , então  $\tilde{u}_k = |M|^{-\frac{1}{p}}$ . Lembrando que  $1 > i_k = \mathcal{I}_k(\tilde{u}_k)$ , obtemos

$$1 > (\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k) |M|^{\frac{p}{n}},$$

o que contradiz (3.7). Logo,  $\tilde{u}_k$  não é constante.

Definimos

$$v_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\nabla_g \tilde{u}_k\|_p} \geq 0.$$

Sabendo que  $i_k = \mathcal{I}_k(\tilde{u}_k)$  e que  $\|\tilde{u}_k\|_p = 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$i_k = \left[ \mathcal{A}(p, q_k, r) + (\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k) \int_M |v_k|^p dv_g \right] \left( \int_M |v_k|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \left( \int_M |v_k|^r dv_g \right)^{-\frac{p}{r \theta_k}}.$$

Usando novamente que  $i_k = \mathcal{I}_k(\tilde{u}_k)$  e (3.9), temos  $i_k > 0$  e

$$\frac{\mathcal{A}(p, q_k, r)}{i_k} = \left( \int_M |v_k|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \left( \int_M |v_k|^{q_k} dv_g \right)^{-\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} - \frac{\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k}{i_k} \int_M |v_k|^p dv_g.$$

Baseados na igualdade anterior, definimos o espaço  $\mathcal{E} = \{u \in H^{1,p}(M); \|\nabla_g u\|_p = 1\}$  e o funcional  $\mathcal{J}_k : H^{1,p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\mathcal{J}_k(u) = \left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{-\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} - C_k \int_M |u|^p dv_g,$$

em que  $C_k = \frac{\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k}{i_k}$ .

Como  $i_k \leq \mathcal{I}_k(u)$  para toda função  $u \in \mathcal{H}$ , segue que  $\mathcal{J}_k(u) \leq \frac{\mathcal{A}(p, q_k, r)}{i_k}$  para toda  $u \in \mathcal{E}$ . Além disso,  $\mathcal{J}_k \in \mathcal{C}^1$ ,  $v_k \in \mathcal{E}$  e  $\mathcal{J}_k(v_k) = \frac{\mathcal{A}(p, q_k, r)}{i_k}$ . Logo,

$$v_k = \sup_{u \in \mathcal{E}} \mathcal{J}_k(u) = \mathcal{J}_k(v_k) > \mathcal{A}(p, q_k, r), \quad (3.10)$$

já que  $i_k < 1$ . Desse modo,  $v_k$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{1}{\theta_k} \|v_k\|_r^{\frac{p}{\theta_k} - r} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k}} v_k^{r-1} - \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|v_k\|_r^{\frac{p}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k} - q_k} v_k^{q_k-1} - C_k v_k^{p-1} = v_k \Delta_{p,g} v_k \quad (3.11)$$

em  $M$ , onde  $\Delta_{p,g} = -\operatorname{div}_g(|\nabla_g|^{p-2} \nabla_g)$  é o operador  $p$ -Laplaciano na métrica  $g$ .

Para simplificar (3.11), defina  $u_k$  como

$$u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_r} \geq 0.$$

Reescrevemos (3.11) em termos de  $u_k$  como segue

$$\lambda_k^{-1} A_k \Delta_{p,g} u_k + C_k A_k u_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|u_k\|_{q_k}^{-q_k} u_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} u_k^{r-1} \text{ em } M, \quad (3.12)$$

onde

$$A_k = \left( \int_M |u_k|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} \text{ e } \lambda_k = \nu_k^{-1}.$$

A definição de  $\lambda_k$  e (3.10) garantem que

$$\lambda_k^{-1} > \mathcal{A}(p, q_k, r). \quad (3.13)$$

Como  $q_k < r$ , pela desigualdade de Hölder, existe  $C > 0$  tal que

$$0 \leq A_k \leq C \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, a menos de subsequência, duas situações são possíveis:

$$(A) \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k > 0 \text{ ou}$$

(B)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0$ .

Suponhamos que (A) ocorra. Tomando  $u_k$  como função teste em (3.12), obtemos

$$\lambda_k^{-1} A_k \|\nabla_g u\|_p^p + C_k A_k \|u_k\|_p^p = 1 \implies C_k A_k \|u_k\|_p^p \leq 1$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Usando a hipótese (A) e o fato de  $r < p$ , garantimos que  $(C_k)$  é limitada. Já que podemos escrever

$$\mathcal{B}(p, q_k, r) = i_k C_k + \gamma_k,$$

concluimos que  $(\mathcal{B}(p, q_k, r))$  é também limitada.

Suponhamos agora (B). Esta situação é mais delicada e para isso utilizaremos as próximas três subseções para garantir a limitação de  $(\mathcal{B}(p, q_k, r))$ . Antes porém, graças ao método iterativo de Moser [45] (uma vez que  $u_k^{r-1} \leq 1 + u_k^{p-1}$  em  $M$ ), teremos  $u_k \in L^\infty(M)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Deste modo, podemos usar o resultado de regularidade de Tolksdorf [48] para concluir que  $u_k \in \mathcal{C}^1(M)$ . Encerramos esta subseção observando que a sequência  $(u_k)$  explode em  $L^\infty(M)$ . Provaremos que

$$\|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}} \geq 1, \quad (3.14)$$

em que  $t_k := A_k^{\frac{r}{n(p-r)+pr}}$ .

De fato, notamos que

$$1 = \|u_k\|_r^r = \int_M |u_k|^{r-q_k} |u_k|^{q_k} dv_g \leq \|u_k\|_\infty^{r-q_k} \int_M |u_k|^{q_k} dv_g.$$

Usando a definição de  $t_k$ , chegamos a

$$1 \leq \left[ \|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}} \right]^{r-q_k},$$

o que demonstra (3.14).

### 3.2.2 Concentração $L^r$

Vimos que  $u_k \in \mathcal{C}^1(M)$ . Seja  $x_k \in M$  tal que

$$u_k(x_k) = \|u_k\|_\infty.$$

Mostraremos o

**Lema 3.1**  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(x_k, \sigma t_k)} u_k^r dv_g = 1$ .

**Demonstração:** Seja  $\sigma > 0$ . Para cada  $x \in B(0; \sigma)$ , definimos

$$\begin{cases} h_k(x) = g(\exp_{x_k}(t_k x)), \\ \varphi_k(x) = t_k^{\frac{n}{r}} u_k(\exp_{x_k}(t_k x)). \end{cases} \quad (3.15)$$

Observamos que o reescalonamento (3.15) está bem definido, uma vez que  $t_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Aplicando esta mudança em (3.12), localmente encontramos

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, h_k} \varphi_k + C_k t_k^p \varphi_k^{p-1} + \frac{1 - \theta_k}{\theta_k} \varphi_k^{q_k - 1} = \frac{1}{\theta_k} \varphi_k^{r-1} \text{ em } B(0; \sigma). \quad (3.16)$$

Em (3.16), aplicando o teorema do valor médio e usando a definição de  $\theta_k$ , obtemos

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, h_k} \varphi_k + C_k t_k^p \varphi_k^{p-1} = \frac{r(n(p - q_k) + pq_k)}{np} \varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k) + \varphi_k^{q_k - 1} \text{ em } B(0; \sigma), \quad (3.17)$$

com  $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $r + \varepsilon < p^*$ . Como  $\varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k^\varepsilon) \leq \varphi_k^{r-1+\varepsilon}$ , segue de (3.17) que

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, h_k} \varphi_k + C_k t_k^p \varphi_k^{p-1} \leq \frac{r(n(p - q_k) + pq_k)}{np\varepsilon} \varphi_k^{r-1+\varepsilon} + \varphi_k^{q_k - 1} \text{ em } B(0; \sigma). \quad (3.18)$$

Graças a (3.14) e ao método iterativo de Moser aplicado em (3.18), obtemos

$$1 \leq \left( t_k^{\frac{n}{r}} \|u_k\|_\infty \right)^r = \sup_{B(0; \sigma)} \varphi_k^r \leq c_\sigma \int_{B(0; 2\sigma)} \varphi_k^r dh_k = c_\sigma \int_{B(x_k; 2\sigma t_k)} u_k^r dv_g \leq c_\sigma,$$

em que  $c_\sigma$  não depende de  $k \in \mathbb{N}$ . Em resumo, ficamos com

$$1 \leq \|\varphi_k\|_{L^\infty(B(0; \sigma))} \leq c_\sigma^{\frac{1}{r}}. \quad (3.19)$$

Agora, usando (3.19) e a teoria de regularidade de Tolksdorf aplicada em (3.17), garantimos que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{C}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, devido a (3.19), temos  $\varphi \geq 0$  não nula.

Seja  $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$  uma função de corte que satisfaz  $\eta = 1$  em  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $\eta = 0$  em  $[1, +\infty)$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ . Definimos  $\eta_{k, \sigma}(x) = \eta((\sigma t_k)^{-1} d_g(x, x_k))$ . Escolhemos  $u_k \eta_{k, \sigma}^r$  como função teste em (3.12) para obtermos

$$\begin{aligned} & \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k, \sigma}^r dv_g + \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g (\eta_{k, \sigma}^r) u_k dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k, \sigma}^r dv_g - \\ & - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k, \sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \frac{1}{\theta_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k, \sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k, \sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mostraremos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g (\eta_{k, \sigma}^r) u_k dv_g = 0. \quad (3.21)$$

Quando tomamos  $u_k$  como função teste em (3.12), obtemos

$$A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq \lambda_k \leq c. \quad (3.22)$$

Com (3.19), temos

$$1 \leq \|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}} \leq c$$

e assim,

$$A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{k,\sigma}|^p dv_g \leq A_k \|u_k\|_\infty^{p-r} \int_M u_k^r |\nabla_g \eta_{k,\sigma}|^p dv_g \leq c \|u_k\|_\infty^{p-r} t_k^{\frac{n}{r}(p-r)} \frac{1}{\sigma^p} \leq \frac{c}{\sigma^p}. \quad (3.23)$$

Finalmente, devido a (3.22), (3.23) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left| A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g (\eta_{k,\sigma})^r u_k dv_g \right| &\leq \left( A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( A_k \int_M u_k^p |\nabla_g (\eta_{k,\sigma})^r|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq c \left( A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{k,\sigma}|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{\sigma}, \end{aligned}$$

completando a prova de (3.21).

Quando aplicamos o limite em  $k \rightarrow +\infty$  e depois  $\sigma \rightarrow +\infty$  em (3.20) e usamos (3.21), ficamos com

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^r dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^r dv_g \right) - \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \\ = \frac{np - nr + pr}{np} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

cuja notação  $\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty}$  significa  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty}$ . Iremos reescrever a desigualdade anterior em um formato mais adequado. Primeiro, notamos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| &\leq \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} |\eta_{k,\sigma}^{r-q_k} - 1| dv_g \leq \frac{\int_{B(x_k; \sigma t_k) \setminus B(x_k; \frac{\sigma}{2} t_k)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \\ &= \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_k^{q_k} dh_k. \end{aligned}$$

Como  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  em  $C_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ , garantimos que

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}. \quad (3.25)$$

De modo bastante semelhante, observamos que

$$\begin{aligned} A_k \left| \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g \right| &\leq A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^r (1 - \eta_{k,\sigma}^{p-r}) dv_g \leq \\ &\leq A_k \int_{B(x_k; \sigma t_k) \setminus B(x_k; \frac{\sigma}{2} t_k)} |\nabla_g u_k|^p dv_g = \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} |\nabla_{h_k} \varphi_k|^p dh_k, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^r dv_g = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g. \quad (3.26)$$

Por último, verificamos via teorema do valor médio que

$$\begin{aligned} & \frac{r}{r - q_k} \left| \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq \frac{r}{r - q_k} \frac{\int_M u_k^{q_k} |\eta_{k,\sigma}^{q_k} - \eta_{k,\sigma}^r| dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \\ & = r \frac{\int_M u_k^{q_k} |\log(\eta_{k,\sigma})| \eta_{k,\sigma}^{\xi_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq c \frac{\int_{B(x_k; \sigma t_k) \setminus B(x_k; \frac{\sigma}{2} t_k)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = c \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_k^{q_k} dh_k \end{aligned}$$

com  $\xi_k \in (q_k, r)$ . Logo,

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right] = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right]. \quad (3.27)$$

Substituimos (3.25), (3.26) e (3.27) em (3.24) e ficamos com

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^r dv_g \right) - \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \\ & = \frac{np - nr + pr}{np} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right]. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Por outro lado, com auxílio da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima e a definição de  $A_k$ , chegamos a

$$\left[ \frac{\left( \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g \right)^{\frac{1}{r}}}{\left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{1}{q_k}}} \right]^{\frac{p}{\theta_k}} \leq \frac{\mathcal{A}(p, q_k, r) A_k \int_M |\nabla_g (u_k \eta_{k,\sigma})|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_k, r) A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g}{\left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p}{q_k}}}.$$

Aplicamos a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade anterior para ficarmos com

$$\frac{p}{\theta_k} \log \left[ \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r}{\left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right)} \right] \leq \log \left[ \frac{\lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g (u_k \eta_{k,\sigma})|^p dv_g + \mathcal{B}(p, q_k, r) A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g}{\left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p}{q_k}}} \right], \quad (3.29)$$

onde também utilizamos (3.13).

Começaremos desenvolvendo o membro esquerdo da desigualdade (3.29). Segue da aplicação do teorema do valor médio que

$$\begin{aligned} \log(\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r) - \log \left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right) &= \frac{1}{r} \left[ \log(\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r) - \log \left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right) \right] + \frac{q_k - r}{r} \log \left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right) = \\ &= \frac{1}{r Y_{k,\sigma}} \left[ \|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r - \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right] + \frac{q_k - r}{r} \log \left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right), \end{aligned}$$

onde  $Y_{k,\sigma}$  está entre  $\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r^r$  e  $\frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}}$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{p}{\theta_k} \log \left[ \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r}{\left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right)} \right] &= \frac{q_k(p-n) + np}{n(r-q_k)} \frac{1}{Y_{k,\sigma}} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right] - \\ &\quad - \frac{q_k(p-n) + np}{n} \log \left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \end{aligned}$$

Tomando  $\sigma, k \rightarrow +\infty$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{p}{\theta_k} \log \left[ \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_r}{\left( \frac{\|u_k \eta_{k,\sigma}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right)} \right] &= \frac{n(p-r) + pr}{nrY} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r-q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right] - \\ &\quad - \frac{n(p-r) + pr}{n} \log \left[ \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

em que

$$Y = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} Y_{k,\sigma} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g.$$

Justificaremos as igualdades anteriores envolvendo  $Y$ . Do teorema da mudança de variáveis, temos

$$\int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g = \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^r \tilde{\eta}_{k,\sigma}^r dh_k \text{ e } \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^{q_k} \tilde{\eta}_{k,\sigma}^{q_k} dh_k,$$

em que  $\tilde{\eta}_{k,\sigma}(x) = \eta_{k,\sigma}(\exp_{x_k}(t_k x))$ . Assim,

$$\left| \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq \int_{B(0;\sigma)} |\varphi_k^r - \varphi_k^{q_k}| dh_k.$$

Usando que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{C}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  e (3.25), temos

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g},$$

o que mostra o resultado desejado, uma vez que  $Y_{k,\sigma}$  está entre  $\int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g$  e  $\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}$ .

Estudaremos agora o membro direito da desigualdade (3.29). Devido a desigualdade

$$(x+y)^p \leq x^p + cx^{p-1}y + cy^p$$

válida para  $x, y \geq 0$  e a desigualdade de Young, obtemos

$$A_k \int_M |\nabla_g(u_k \eta_{k,\sigma})|^p dv_g \leq (1+\mu) A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g + c(\mu) A_k \int_M u_k^p |\nabla_g u_k|^p dv_g$$

com  $0 < \mu < 1$ . Fazendo  $\mu \rightarrow 0$  e  $\sigma, k \rightarrow +\infty$  e usando (3.23), garantimos que

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g(u_k \eta_{k,\sigma})|^p dv_g \leq \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g. \quad (3.31)$$

Além disso,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(p, q_k, r) A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g. \quad (3.32)$$

De fato, usando a definição de  $C_k$  e o fato de  $i_k < 1$ , temos

$$\mathcal{B}(p, q_k, r) A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g \leq C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g + \gamma_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g. \quad (3.33)$$

Segue da definição de  $\mathcal{B}(p, q_k, r)$  e por (3.7) que

$$(B(p, q_k, r) - \gamma_k) A_k \int_M u_k^p dv_g \leq 1 \implies A_k \int_M u_k^p dv_g \leq c.$$

Com isso e (3.33), garantimos (3.32).

Finalmente, fazendo  $\sigma, k \rightarrow +\infty$  em (3.29) e usando (3.30), (3.31) e (3.32), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{n(p-r) + pr}{nrY} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right] \leq \\ & \leq \log \left[ \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g \right) \right] + \\ & + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) \log \left( \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Denotando por

$$X = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g \right), \quad Y = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}$$

e

$$Z = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \eta_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right],$$

podemos reescrever (3.28) e (3.34) no seguinte sistema:

$$\begin{cases} X - Y = \frac{n(p-r) + pr}{np} Z, \\ \frac{n(p-r) + pr}{nr} Z \leq Y \log X + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) Y \log Y. \end{cases} \quad (3.35)$$

Vamos considerar agora o comportamento de  $u_k$  no complementar da bola  $B(x_k; \sigma t_k)$ . Seja  $\xi_{k,\sigma} = 1 - \eta_{k,\sigma}$  definida em  $M$ , onde  $\eta_{k,\sigma}$  foi introduzida anteriormente. Sem grandes dificuldades, verificamos que as desigualdades em (3.28) e (3.34) permanecem válidas para  $\xi_{k,\sigma}$  no lugar de  $\eta_{k,\sigma}$ , isto

é,

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \xi_{k,\sigma}^r dv_g \right) - \lim_{k, \sigma \rightarrow +\infty} \left( \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \\ & = \frac{n(p-r) + pr}{np} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \xi_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{n(p-r) + pr}{nrY} \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \xi_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right] \leq \\ & \leq \log \left[ \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \xi_{k,\sigma}^r dv_g \right) \right] + \\ & \quad + \left( \frac{n(p-r) + pr}{np} - \frac{p}{r} \right) \log \left( \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \end{aligned}$$

De modo similar ao que fizemos anteriormente, quando denotamos por

$$\tilde{X} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \xi_{k,\sigma}^r dv_g \right), \quad \tilde{Y} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}$$

e

$$\tilde{Z} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{r}{r - q_k} \left[ \int_M u_k^r \xi_{k,\sigma}^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right],$$

encontramos o sistema:

$$\begin{cases} \tilde{X} - \tilde{Y} = \frac{n(p-r) + pr}{np} \tilde{Z}, \\ \frac{n(p-r) + pr}{nr} \tilde{Z} \leq \tilde{Y} \log \tilde{X} + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Estas variáveis estão relacionadas da seguinte forma:

$$Y + \tilde{Y} = X + \tilde{X} = 1. \quad (3.37)$$

Inicialmente, provamos que  $Y + \tilde{Y} = 1$ . Observamos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_M u_k^{q_k} (1 - \eta_{k,\sigma}^{q_k}) dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \int_M u_k^{q_k} |1 - (\eta_{k,\sigma}^{q_k} + \xi_{k,\sigma}^{q_k})| dv_g \leq \\ & \leq \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \int_{B(x_k; \sigma t_k) \setminus B(x_k; \frac{\sigma}{2} t_k)} u_k^{q_k} dv_g = \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_k^{q_k} dh_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} (1 - \eta_{k,\sigma}^{q_k}) dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}. \quad (3.38)$$

Por outro lado, graças a igualdade

$$1 = \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + \frac{\int_M u_k^{q_k} (1 - \eta_{k,\sigma}^{q_k}) dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g},$$

estabelecemos que

$$1 = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{k,\sigma}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} (1 - \eta_{k,\sigma}^{q_k}) dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}.$$

Unindo este fato com (3.38), temos  $1 = Y + \tilde{Y}$ .

Mostramos agora que  $X + \tilde{X} = 1$ . Primeiro, notamos que

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1} A_k \left| \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{k,\sigma}^p dv_g - \int_M |\nabla_g u_k|^p (1 - \eta_{k,\sigma}^p) dv_g \right| &\leq c A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p |1 - (\eta_{k,\sigma}^p + \xi_{k,\sigma}^p)| dv_g \leq \\ &\leq c A_k \int_{B(x_k; \sigma t_k) \setminus B(x_k; \frac{\sigma}{2} t_k)} |\nabla_g u_k|^p dv_g = c \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} |\nabla_{h_k} \varphi_k|^p dh_k, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{k,\sigma}^p dv_g = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \int_M \lambda_k^{-1} A_k |\nabla_g u_k|^p (1 - \eta_{k,\sigma}^p) dv_g. \quad (3.39)$$

Em seguida, também observamos que

$$C_k A_k \left| \int_M u_k^p \xi_{k,\sigma}^r dv_g - \int_M u_k^p (1 - \eta_{k,\sigma}^r) dv_g \right| \leq C_k A_k A_k^{\frac{n(r-p)}{n(p-r)+pr}} \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_k^p dh_k.$$

Mas, aplicando a desigualdade de interpolação na situação  $q_k < r \leq p$ , constatamos que

$$A_k^{\frac{n(r-p)}{n(p-r)+pr}} \leq \|u_k\|_p^p,$$

e como  $C_k A_k \|u_k\|_p^p \leq 1$ , temos

$$C_k A_k \left| \int_M u_k^p \xi_{k,\sigma}^r dv_g - \int_M u_k^p (1 - \eta_{k,\sigma}^r) dv_g \right| \leq C_k A_k \|u_k\|_p^p \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_k^p dh_k \leq \int_{B(0; \sigma) \setminus B(0; \frac{\sigma}{2})} \varphi_k^p dh_k.$$

Logo,

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} C_k A_k \int_M u_k^p \xi_{k,\sigma}^r dv_g = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} C_k A_k \int_M u_k^p (1 - \eta_{k,\sigma}^r) dv_g. \quad (3.40)$$

Usando  $u_k$  como função teste em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p dv_g = \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{k,\sigma}^p dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p \eta_{k,\sigma}^r dv_g \right) + \\ &+ \left( \lambda_k^{-1} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p (1 - \eta_{k,\sigma}^p) dv_g + C_k A_k \int_M u_k^p (1 - \eta_{k,\sigma}^r) dv_g \right). \end{aligned}$$

Com isso, (3.39) e (3.40), garantimos que

$$1 = X + \tilde{X}.$$

Finalmente estamos preparados para demonstrar que  $Y = 1$ . Devido a (3.37) juntamente com (3.35) e (3.36), temos  $Z + \tilde{Z} = 0$ . Desse modo, devemos ter

$$\begin{cases} Z \geq 0 \text{ e } \tilde{Z} \leq 0 \text{ ou} \\ Z \leq 0 \text{ e } \tilde{Z} \geq 0. \end{cases}$$

Suponha  $\tilde{Z} \geq 0$ . Como  $r \leq p$ , resulta de (3.36) que

$$0 \leq \tilde{Y} - \tilde{X} + \tilde{Y} \log \tilde{X} + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y}.$$

Definimos a função  $f(x, y) = y - x + y \log x + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) y \log y$  com domínio  $(0, 1] \times (0, 1]$ . Fixado  $y \in (0, 1]$ , não é difícil de verificar que os pontos da forma  $x = y$  realizam valores máximos de  $f(\cdot, y)$ . Assim,

$$\tilde{Y} - \tilde{X} + \tilde{Y} \log \tilde{Y} + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq \tilde{Y} - \tilde{X} + \tilde{Y} \log \tilde{X} + \left( \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq 0.$$

Logo,

$$\left( 1 + \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq 0. \quad (3.41)$$

Afirmamos que

$$1 + \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r} > 0.$$

De fato, considere a função  $g : [1, p] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(r) = 1 + \frac{n(p-r) + pr}{n} - \frac{p}{r}$ . Verificamos que  $g(1) = 1$ ,  $g(p) > 0$  e  $g$  é côncava em  $[1, p]$ . Assim,  $g(r) > 0$ , o que demonstra nossa afirmação. Com isso e (3.41), segue que

$$\tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq 0.$$

Como  $\tilde{Y} < 1$ , pois  $Y > 0$ , teremos  $\tilde{Y} = 0$ , o que implica  $Y = 1$ .

Suponha agora  $\tilde{Z} \leq 0$  e  $Z \geq 0$ . Procedendo de modo análogo ao que fizemos anteriormente, teremos  $Y \log Y \geq 0$ . Como  $Y > 0$ , garantimos que  $\log Y \geq 0$  e, assim,  $Y = 1$ .

Portanto,

$$\lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \int_{B(x_k; \sigma t_k)} u_k^r dv_g = \lim_{\sigma, k \rightarrow +\infty} \int_M u_k^r \eta_{\sigma, k}^r dv_g = Y = 1,$$

encerrando a prova do **Lema 3.1**. ■

### 3.2.3 Estimativa pontual

Vamos estabelecer aqui uma estimativa pontual para a sequência  $(u_k)$ . Mostraremos o

**Lema 3.2 (da distância)** *Para qualquer  $\lambda > 0$ , existe uma constante  $c_\lambda > 0$ , independente de  $k \in \mathbb{N}$ , tal que*

$$d_g(x, x_k)^\lambda u_k(x) \leq c_\lambda A_k^{\frac{\lambda r - n}{n(p-r) + pr}}$$

para todo  $x \in M$  e  $k$  suficientemente grande, em que  $d_g$  denota a distância com respeito a métrica  $g$ .

**Demonstração:** Suponhamos, por absurdo, que existam  $\lambda_0 > 0$  e  $y_k \in M$  tais que  $f_{k,\lambda_0}(y_k) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , onde

$$f_{k,\lambda}(x) = d_g(x, x_k)^\lambda u_k(x) A_k^{\frac{n-\lambda r}{n(p-r)+pr}}.$$

Sem perda de generalidade, consideramos  $f_{k,\lambda_0}(y_k) = \|f_{k,\lambda_0}\|_\infty$ . Sabemos de (3.19) que

$$1 \leq t_k^{\frac{n}{r}} \|u_k\|_\infty \leq c$$

com  $c > 0$  independente de  $k \in \mathbb{N}$ . Com isso,

$$f_{k,\lambda_0}(y_k) \leq c \frac{u_k(y_k)}{\|u_k\|_\infty} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} A_k^{-\frac{\lambda_0 r}{n(p-r)+pr}} \leq c (d_g(x_k, y_k) t_k^{-1})^{\lambda_0},$$

e assim,

$$d_g(x_k, y_k) t_k^{-1} \rightarrow +\infty \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (3.42)$$

Dados  $\sigma > 0$  e  $\varepsilon \in (0, 1)$ , temos

$$B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k)) \cap B(x_k; \sigma t_k) = \emptyset \quad (3.43)$$

para  $k$  suficientemente grande. De fato, esta afirmação segue de

$$d(x_k, y_k) \geq \sigma t_k + \varepsilon d_g(x_k, y_k)$$

ou, equivalentemente,

$$(1 - \varepsilon) d_g(x_k, y_k) t_k^{-1} \geq \sigma.$$

Entretanto, por (3.42) e como  $1 - \varepsilon > 0$ , a desigualdade anterior é satisfeita para  $k$  suficientemente grande, provando (3.43).

Afirmamos também que existe uma constante  $c > 0$ , independente de  $k \in \mathbb{N}$ , tal que

$$u_k(x) \leq c u_k(y_k) \quad (3.44)$$

para todo  $x \in B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$ . Com efeito, sabemos que

$$d_g(x, x_k) \geq d_g(x_k, y_k) - d_g(x, y_k) \geq (1 - \varepsilon) d_g(x_k, y_k)$$

para todo  $x \in B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$ . Assim,

$$\begin{aligned} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} u_k(y_k) A_k^{\frac{n-\lambda_0 r}{n(p-r)+pr}} = f_{k,\lambda_0}(y_k) &\geq f_{k,\lambda_0}(x) = d_g(x_k, x)^{\lambda_0} u_k(x) A_k^{\frac{n-\lambda_0 r}{n(p-r)+pr}} \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon)^{\lambda_0} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} u_k(x) A_k^{\frac{n-\lambda_0 r}{n(p-r)+pr}}, \end{aligned}$$

donde

$$u_k(x) \leq \left( \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{\lambda_0} u_k(y_k)$$

para todo  $x \in B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$ , como queríamos.

Definimos o seguinte reescalonamento:

$$\begin{cases} \hat{h}_k(x) = g(\exp_{y_k}(t_k x)), \\ \hat{\varphi}_k(x) = t_k^{\frac{n}{r}} u_k(\exp_{y_k}(t_k x)) \end{cases} \quad (3.45)$$

com  $x \in B(0; 3)$ . Esta mudança (3.45) aplicada em (3.12) fornece

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \hat{\varphi}_k + C_k t_k^p \hat{\varphi}_k^{p-1} + \frac{1 - \theta_k}{\theta_k} \hat{\varphi}_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \hat{\varphi}_k^{r-1} \text{ em } B(0; 3). \quad (3.46)$$

Segue do teorema do valor médio e da definição de  $\theta_k$  que

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \hat{\varphi}_k + C_k t_k^p \hat{\varphi}_k^{p-1} = \frac{r(q_k(p-n) + np)}{np} \hat{\varphi}_k^{\rho_k} \log(\hat{\varphi}_k) + \hat{\varphi}_k^{q_k-1} \quad (3.47)$$

em  $B(0; 3)$ , onde  $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$ .

Fixamos agora  $\varepsilon > 0$  tal que  $r + \varepsilon < p^*$ . Usando que  $\log(\hat{\varphi}_k^\varepsilon) \hat{\varphi}_k^{\rho_k} \leq \hat{\varphi}_k^{r-1+\varepsilon}$  e graças ao método iterativo de Moser aplicado em (3.47), chegamos a

$$\mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} = \left( u_k(y_k) t_k^{\frac{n}{r}} \right)^r \leq \sup_{B(0;1)} \hat{\varphi}_k^r \leq c \int_{B(0;2)} \hat{\varphi}_k^r d\hat{h}_k = c \int_{B(y_k; 2t_k)} u_k^r dv_g \leq c, \quad (3.48)$$

onde

$$\mu_k = u_k(y_k)^{r-q_k} \int_M u_k^{q_k} dv_g. \quad (3.49)$$

Logo,  $(\mu_k^{\frac{r}{r-q_k}})$  é limitada. Disto, duas situações independentes podem ocorrer

(I)  $\mu_k \geq 1 - \theta_k$ , para alguma subsequência ou

(II)  $\mu_k < 1 - \theta_k$ , para  $k$  suficientemente grande.

Em cada caso, extraímos uma contradição implicando a prova do **Lema 3.2**.

Suponhamos primeiro que (I) ocorre. Usando a definição de  $\theta_k$ , encontramos

$$(1 - \theta_k)^{\frac{r}{r-q_k}} = \left[ \left( 1 + \frac{np(q_k - r)}{r(q_k(p-n) + np)} \right)^{\frac{r(q_k(p-n) + np)}{np(q_k - r)}} \right]^{-\frac{np}{r(q_k(p-n) + np)}}.$$

Assim,

$$\liminf_k \mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - \theta_k)^{\frac{r}{r-q_k}} = e^{-\frac{np}{n(p-r) + pr}},$$

onde usamos que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$ .

Por outro lado, (3.42) fornece

$$B(y_k; t_k) \subset B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))$$

para  $k$  suficientemente grande. Com este fato, o **Lema 3.1**, (3.43) e (3.48), chegamos na seguinte contradição

$$0 < e^{-\frac{np}{n(p-r)+pr}} \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; t_k)} u_k^r dv_g \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))} u_k^r dv_g = 0.$$

Assuma (II). Para  $k$  suficientemente grande, escolhamos o seguinte reescalonamento:

$$\begin{cases} \hat{h}_k(x) = g(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} x)), \\ \psi_k(x) = u_k(y_k)^{-1} u_k(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} x)), \end{cases} \quad (3.50)$$

com  $x \in B(0; 3)$ . Observamos que a mudança (3.50) está bem definida, pois devido a (3.19), temos

$$A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} \leq A_k^{\frac{1}{p}} \|u_k\|_{\infty}^{\frac{p-r}{p}} \leq c t_k \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ . Substituímos (3.50) em (3.12) para produzir

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \psi_k + C_k A_k u_k(y_k)^{p-r} \psi_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \frac{1}{\mu_k} \psi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \psi_k^{r-1} \text{ em } B(0; 3), \quad (3.51)$$

ou ainda,

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \psi_k + C_k A_k u_k(y_k)^{p-r} \psi_k^{p-1} + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1-\theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \psi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \left( \psi_k^{r-1} - \psi_k^{q_k-1} \right) \text{ em } B(0; 3),$$

em que  $\mu_k$  foi definido em (3.49). Da aplicação do teorema do valor médio, encontramos

$$\lambda_k^{-1} \Delta_{p, \hat{h}_k} \psi_k + C_k A_k u_k(y_k)^{p-r} \psi_k^{p-1} + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1-\theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \psi_k^{q_k-1} = \frac{r(q_k(p-n) + np)}{np} \log(\psi_k) \psi_k^{\rho_k} \quad (3.52)$$

em  $B(0; 3)$  com  $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$ .

Graças a (3.44), obtemos

$$\int_{B(0; 3)} \psi_k^p d\hat{h}_k = u_k(y_k)^{-1} \left( A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} \right)^{-n} \int_{B(y_k; 3A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}})} u_k^p dv_g \leq c. \quad (3.53)$$

Considere  $h \in \mathcal{C}_c^1(B(0; 3))$  tal que  $h = 1$  em  $B(0; 2)$  e  $h \geq 0$ . Escolhendo  $\psi_k h^p$  como função teste em (3.52), obtemos (o mesmo raciocínio foi aplicado no **Capítulo 2**)

$$c \int_{B(0; 3)} |\nabla_{\hat{h}_k} \psi_k|^p h^p d\hat{h}_k + \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1-\theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \int_{B(0; 3)} \psi_k^{q_k} h^p d\hat{h}_k \leq c. \quad (3.54)$$

Assim, graças a (3.53), (3.54) e a hipótese (II), concluímos que  $(\psi_k)$  é limitada em  $W^{1,p}(B(0; 2))$ . Logo, existe  $\psi \in W^{1,p}(B(0; 2))$  tal que  $\psi_k \rightharpoonup \psi$  em  $W^{1,p}(B(0; 2))$ . Via método iterativo de Moser, segue que  $\psi$  não é nula, pois

$$1 = \psi_k(0) \leq \sup_{B(0; 1)} \psi_k^p \leq c \int_{B(0; 2)} \psi_k^p d\hat{h}_k.$$

Por (3.54) e por imersão compacta, temos

$$\limsup_k \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) < c.$$

Desse modo, a menos de subsequência, teremos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right) = \gamma \geq 0 \quad (3.55)$$

e, então,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = 1$ . Defina

$$\beta_k = \frac{1}{\theta_k} \left( \frac{1 - \theta_k}{\mu_k} - 1 \right).$$

Usando a definição de  $\theta_k$  e o limite:  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$ , obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \theta_k \beta_k)^{\frac{r}{r - q_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ (1 + \theta_k \beta_k)^{\frac{1}{\theta_k \beta_k}} \right]^{\beta_k \frac{nr}{q_k(r(p-n)+np)} (1 - \theta_k)} = e^{\gamma \frac{np}{n(p-r)+pr}}.$$

Sabemos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - \theta_k)^{\frac{r}{r - q_k}} = e^{-\frac{np}{n(p-r)+pr}}$ . Assim,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k^{\frac{r}{r - q_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \theta_k)^{\frac{r}{r - q_k}}}{(1 + \theta_k \beta_k)^{\frac{r}{r - q_k}}} = e^{-(1+\gamma) \frac{np}{n(p-r)+pr}}.$$

Novamente, obtemos uma contradição:

$$0 < e^{-(1+\gamma) \frac{np}{n(p-r)+pr}} \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; t_k)} u_k^r dv_g \leq c \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B(y_k; \varepsilon d_g(x_k, y_k))} u_k^r dv_g = 0,$$

em que recorreremos ao **Lema 3.1**, (3.43) e (3.48).

Portanto, o **Lema 3.2** está demonstrado. ■

### 3.2.4 O argumento final

O objetivo desta subseção é mostrar que  $(C_k)$  é limitada assumindo que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0$ . Como veremos, o **Lema 3.2** desempenhará um papel central na obtenção de várias estimativas em torno de  $x_k \in M$ , ponto este onde  $u_k$  atinge seu máximo. Dada a invariância escalar do problema, assumiremos que o raio de injetividade de  $M$  é maior do que 2.

Seja  $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  uma função de corte tal que  $\eta = 1$  em  $[0, 1)$ ,  $\eta = 0$  em  $[2, +\infty)$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ . Definimos  $\eta_k(x) = \eta(d_g(x, x_k))$ . A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Euclidiana ótima fornece

$$\left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \mathcal{A}_e(p, q_k, r) \left( \int_{B(0;2)} |\nabla(u_k \eta_k)|^p dx \right) \left( \int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}},$$

em que simplificamos a notação ao escrevermos simplesmente  $u_k \eta_k$  em vez de  $u_k(\exp_{x_k}(x))\eta(\exp_{x_k}(x))$ .

A constante  $\mathcal{A}_e(p, q_k, r)$  é a constante ótima desta desigualdade. Conforme [18], temos

$$\mathcal{A}(p, q_k, r) \geq \mathcal{A}_e(p, q_k, r).$$

Com isso,

$$\left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \mathcal{A}(p, q_k, r) \left( \int_{B(0;2)} |\nabla(u_k \eta_k)|^p dx \right) \left( \int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}$$

Expandimos a métrica  $g$  em coordenadas normais em torno de  $x_k$  (*expansão de Cartan*) e localmente encontramos

$$(1 - cd_g(x, x_k)^2) dv_g \leq dx \leq (1 + cd_g(x, x_k)^2) dv_g \text{ e } |\nabla(u_k \eta_k)|^p \leq |\nabla_g(u_k \eta_k)|^p (1 + cd_g(x, x_k)^2).$$

Com estas expansões e a **Proposição 3.1**, verificamos que

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} &\leq \left( \mathcal{A}(p, q_k, r) A_k \int_{B(x_k;2)} |\nabla_g(u_k \eta_k)|^p dv_g + c A_k \int_{B(x_k;2)} |\nabla_g(u_k \eta_k)|^p d_g(x, x_k)^2 dv_g \right) \times \\ &\times \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \end{aligned}$$

Graças a desigualdade

$$|\nabla_g(u_k \eta_k)|^p \leq |\nabla_g u_k|^p \eta_k^p + c |\eta_k \nabla_g u_k|^{p-1} |u_k \nabla_g \eta_k| + c |u_k \nabla_g u_k|^p$$

e denotando

$$X_k = A_k \int_M \eta_k^r |\nabla_g u_k|^p d_g(x, x_k)^2 dv_g \text{ e } Y_k = A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-1} |\nabla_g \eta_k| |u_k| dv_g,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} &\leq \left( \mathcal{A}(p, q_k, r) A_k \int_{B(x_k;2)} |\nabla_g u_k|^p \eta_k^r dv_g + c X_k + c Y_k + c A_k \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \right) \times \\ &\times \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Quando usamos  $u_k \eta_k^r$  como função teste em (3.12), estimamos

$$\mathcal{A}(p, q_k, r) A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_k^r dv_g \leq 1 - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) + c Y_k. \quad (3.57)$$

Seja

$$Z_k = \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right).$$

Da aplicação do teorema do valor médio e do uso do **Lema 3.2** (conforme aplicamos no **Capítulo 2**),

observamos que

$$\begin{aligned} & \left| Z_k - \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right| \leq \frac{1}{\theta_k} \frac{\int_M u_k^{q_k} |\eta_k^r - \eta_k^{q_k}| dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \\ & = \frac{r(q_k(p-n) + np)}{np} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{\sigma_k} |\log \eta_k| dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq c \frac{\int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq ct_k^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

para  $k$  suficientemente grande, em que  $\sigma_k \in (q_k, r)$ . Substituímos (3.58) e (3.57) em (3.56) para obtermos

$$\begin{aligned} & \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \left( 1 - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + Z_k + ct_k^2 + cX_k + cY_k + \right. \\ & \left. + cA_k \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \right) \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Vamos estimar  $X_k$ . Escolhendo  $u_k d_g^2 \eta_k^r$  como função teste em (3.12), ficamos com

$$\begin{aligned} X_k & \leq \frac{c}{\theta_k} \left( \int_M u_k^r \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) + \\ & + cA_k \int_M u_k \eta_k^r |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x, x_k) dv_g + c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + cY_k. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Estimaremos as duas primeiras parcelas do lado direito de (3.60). Após uma mudança de variáveis e aplicação do teorema do valor médio, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_k} \left| \int_M \left( u_k^r \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^r d_g(x, x_k)^2}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) dv_g \right| & \leq ct_k^2 \frac{1}{\theta_k} \int_{B(0;2t_k^{-1})} |\varphi_k^r - \varphi_k^{q_k}| |\tilde{\eta}_k^r| |x|^2 dh_k \\ & \leq ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} |\log(\varphi_k)| |\varphi_k^{\rho_k}| |x|^2 dh_k, \end{aligned}$$

em que  $\rho_k \in (q_k, r)$  e  $\tilde{\eta}_k(x) = \eta_k(\exp_{x_k}(t_k x))$ . Graças ao **Lema 3.2**, constatamos que

$$\frac{1}{\theta_k} \left| \int_M u_k^r \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq ct_k^2 \quad (3.61)$$

para  $k$  suficientemente grande. Agora, via desigualdade de Hölder, temos

$$\int_M u_k \eta_k^r |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x, x_k) dv_g \leq \left( \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x_k;2)} u_k^p d_g(x, x_k)^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.62)$$

Usando  $u_k$  como função teste em (3.12), temos

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq \lambda_k A_k^{-1} \leq cA_k^{-1}, \quad (3.63)$$

onde também utilizamos (3.13) e a **Proposição 3.1**. Aplicando uma mudança de variáveis e o **Lema**

**3.2**, obtemos

$$\int_{B(x_k;2)} u_k^p d_g(x, x_k)^p dv_g \leq ct_k^n \left(t_k^{-\frac{n}{r}}\right)^p t_k^p \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k^p |x|^p dh_k \leq ct_k^{\frac{n(r-p)+pr}{r}} \quad (3.64)$$

para  $k$  suficientemente grande. Substituindo (3.63) e (3.64) em (3.62), obtemos

$$A_k \int_M u_k \eta_k^r |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x, x_k) dv_g \leq cA_k A_k^{\frac{1-p}{p}} t_k^{\frac{n(r-p)+pr}{pr}} = ct_k^2 \quad (3.65)$$

para  $k$  suficientemente grande.

As estimativas (3.61) e (3.65) substituídas em (3.60) geram

$$X_k \leq c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + cY_k + ct_k^2 \quad (3.66)$$

para  $k$  suficientemente grande. Também pelo **Lema 3.2**, temos

$$\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k^{q_k} |x|^2 dh_k \leq ct_k^2 \quad (3.67)$$

para  $k$  suficientemente grande. Por fim, estimamos  $Y_k$  usando os mesmos argumentos utilizados em (3.65) como segue

$$Y_k \leq cA_k \left( \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq ct_k^2 \quad (3.68)$$

para  $k$  suficientemente grande. Com as estimativas (3.66), (3.67) e (3.68) introduzidas em (3.59), chegamos a

$$\begin{aligned} \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} &\leq \left( 1 - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + Z_k + ct_k^2 + cA_k \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \end{aligned}$$

para  $k$  suficientemente grande. Em decorrência do **Lema 3.2** e o fato de  $p > 1$ , inferimos que

$$A_k \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^p dv_g \leq ct_k^{2p} \leq ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande. Com isso, temos

$$\left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \left( 1 - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + Z_k + ct_k^2 \right) \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}$$

Agora aplicamos a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade anterior e usando

que  $\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} = \frac{p}{r\theta_k} - \frac{n-p}{n}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{p}{r\theta_k} \left[ \log \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right] &\leq \log \left( 1 - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + Z_k + ct_k^2 \right) - \\ &- \frac{n-p}{n} \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Da aplicação do teorema do valor médio, garantimos que existe  $\xi_k$  entre as expressões

$$\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \text{ e } \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}$$

tal que

$$\log \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \frac{1}{\xi_k} \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right). \quad (3.70)$$

A expansão de Cartan da métrica  $g$  em torno de  $x_k$  e o **Lema 3.2** fornecem

$$\max \left\{ \left| \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx - \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g \right|, \left| \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \right\} \leq ct_k^2 \quad (3.71)$$

para  $k$  suficientemente grande. De fato,

$$\left| \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx - \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g \right| \leq c \int_{B(x_k;2)} u_k^r \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 dv_g \leq ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k^r |x|^2 dh_k \leq ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande.

E ainda, por (3.67), temos

$$\left| \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right| \leq c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande, o que encerra a justificativa para (3.71).

Verificaremos agora que

$$\max \left\{ \left| \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g - 1 \right|, \left| \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - 1 \right| \right\} \leq ct_k^2 \quad (3.72)$$

para  $k$  suficientemente grande. Com efeito, graças ao **Lema 3.2**, temos

$$\left| \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g - 1 \right| = \left| \int_M u_k^r \eta_k^r dv_g - \int_M u_k^r dv_g \right| \leq \int_{M \setminus B(x_k;1)} u_k^r dv_g \leq ct_k^2$$

e

$$\left| \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} - 1 \right| \leq \frac{\int_{M \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande. Logo, fica garantido (3.72).

Com (3.71) e (3.72), deduzimos que  $\xi_k^{-1} = 1 + O(t_k^2)$ . Segue de (3.70) que

$$\begin{aligned} & \frac{p}{r\theta_k} \left[ \log \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right] = \\ & = \frac{p}{r\theta_k} \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) (1 + O(t_k^2)). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Via expansão de Cartan e (3.61), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{p}{r\theta_k} \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) = \frac{p}{r\theta_k} \int_{B(0;2)} \left( u_k^r \eta_k^r - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) dx = \\ & = \frac{p}{r\theta_k} \int_M \left( u_k^r \eta_k^r - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) dv_g + \frac{c}{\theta_k} \int_M \left( u_k^p \eta_k^r - \frac{u_k^{q_k} \eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) O(d_g(x, x_k)^2) dv_g = \frac{p}{r} Z_k + O(t_k^2) \end{aligned}$$

para  $k$  suficientemente grande. Substituímos em (3.73) para obter

$$\frac{p}{r\theta_k} \left[ \log \left( \int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r dx \right) - \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right] \geq \frac{p}{r} Z_k - ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande. Retornando a (3.69), encontramos

$$\frac{p}{r} Z_k - ct_k^2 \leq \log \left( 1 - c_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + Z_k + ct_k^2 \right) + \frac{n-p}{n} \left| \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right|$$

para  $k$  suficientemente grande. Usando a expansão de Cartan da métrica  $g$  em coordenadas normais em torno de  $x_k \in M$ , a expansão de Taylor da função logarítmica e o **Lema 3.2**, obtemos

$$\left| \log \left( \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} dx}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right) \right| \leq \frac{\int_{M \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} + c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \leq ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande. Em resumo, ficamos com

$$\frac{p}{r} Z_k - ct_k^2 \leq \log \left( 1 + Z_k - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + ct_k^2 \right) + ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande. Lembrando que  $\log x \leq x - 1$  para todo  $x > 0$ , temos

$$\frac{p}{r} Z_k - ct_k^2 \leq Z_k - C_k A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g + ct_k^2.$$

Observamos agora que

$$\int_{B(x_k;1)} u_k^p dv_g \geq \int_{B(x_k; t_k)} u_k^p dv_g = t_k^{\frac{n(r-p)}{r}} \int_{B(0;1)} \varphi_k^p dh_k \geq ct_k^{\frac{n(r-p)}{r}}$$

para  $k$  suficientemente grande. Como  $t_k^{\frac{n(r-p)}{r}} A_k = t_k^p$ , segue que

$$C_k t_k^p \leq \left( 1 - \frac{p}{r} \right) Z_k + ct_k^2 \quad (3.74)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Vamos agora estudar o comportamento de  $Z_k$ . Definimos  $\xi_k = 1 - \eta_k$  com  $\eta_k$  introduzida anteriormente. Notamos que

$$Z_k + R_k + S_k = 0, \quad (3.75)$$

em que

$$R_k = \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^r (\eta_k - \eta_k^r) dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} (\eta_k - \eta_k^{q_k}) dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)$$

e

$$S_k = \frac{1}{\theta_k} \left( \int_M u_k^r \xi_k dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \xi_k dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right).$$

Ainda é possível escrever  $R_k = R_k^{(1)} - R_k^{(2)}$ , onde

$$R_k^{(1)} = \frac{1}{\theta_k} \left( \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^r \eta_k dv_g - \frac{\int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} \eta_k dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right)$$

e

$$R_k^{(2)} = \frac{1}{\theta_k} \left( \int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} (u_k \eta_k)^r dv_g - \frac{\int_{B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)} (u_k \eta_k)^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right).$$

Quando aplicamos o teorema da mudança de variáveis, chegamos a

$$R_k^{(1)} = \frac{1}{\theta_k} \int_{B(0;2t_k^{-1}) \setminus B(0;t_k^{-1})} (\varphi_k^r - \varphi_k^{q_k}) \tilde{\eta}_k dh_k \text{ e } R_k^{(2)} = \frac{1}{\theta_k} \int_{B(0;2t_k^{-1}) \setminus B(0;t_k^{-1})} [(\varphi_k \tilde{\eta}_k)^r - (\varphi_k \tilde{\eta}_k)^{q_k}] dh_k,$$

em que  $\tilde{\eta}_k(x) = \eta(d_g(\exp_{x_k}(t_k x), x_k))$  definida em  $\mathbb{R}^n$ . Devido a aplicação do teorema do valor médio e do **Lema 3.2**, obtemos

$$\begin{aligned} |R_k^{(1)}| &\leq \frac{r(q_k(p-n) + np)}{np} \int_{B(0;2t_k^{-1}) \setminus B(0;t_k^{-1})} \varphi_k^{\rho_k} |\log(\varphi_k)| \tilde{\eta}_k dh_k \\ &\leq t_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k^{\rho_k} |\log(\varphi_k)| |x|^2 dh_k \leq ct_k^2 \end{aligned}$$

e

$$|R_k^{(2)}| \leq \frac{r(q_k(p-n) + np)}{np} \int_{B(0;2t_k^{-1}) \setminus B(0;t_k^{-1})} (\varphi_k \tilde{\eta}_k)^{\rho_k} |\log(\varphi_k \tilde{\eta}_k)| dh_k \leq ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande e  $\rho_k \in (q_k, r)$ . Com estas estimativas, deduzimos que

$$|R_k| \leq ct_k^2 \quad (3.76)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Afirmamos agora que

$$S_k \leq 0 \text{ para } k \text{ suficientemente grande.} \quad (3.77)$$

De fato, como estamos assumindo  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0$ , temos  $\int_M u_k^{q_k} dv_g \leq 1$ . Desse modo,

$$S_k = \frac{1}{\theta_k} \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \left[ \left( \int_M u_k^{q_k} dv_g \right) \left( \int_M u_k^r \xi_k dv_g \right) - \int_M u_k^{q_k} \xi_k dv_g \right] \leq$$

$$\leq \frac{r(q_k(p-n) + np)}{np} \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \int_{M \setminus B(x_k; 1)} u_k^{\rho_k} \log(u_k) \xi_k dv_g,$$

via teorema do valor médio com  $\rho_k \in (q_k, r)$ . Agora, decorre do **Lema 3.2** que  $u_k(x) \leq 1$  para todo  $x \in M \setminus B(x_k; 1)$  e  $k$  suficientemente grande. Com isso e a estimativa anterior para  $S_k$ , fica demonstrado (3.77).

Substituindo (3.76) e (3.77) em (3.75), encontramos

$$Z_k = -R_k - S_k \geq -R_k \geq -ct_k^2$$

para  $k$  suficientemente grande. Com isso e (3.74), garantimos que

$$|M|^{-\frac{p}{n}} < C_k \leq ct_k^{2-p} \quad (3.78)$$

para  $k$  suficientemente grande.

Notamos que se  $p < 2$ , então teremos uma contradição quando  $k \rightarrow +\infty$ . Então, a hipótese (B) não ocorre, o que mostra que (A) deve ocorrer e, como já vimos neste caso,  $\mathcal{B}_0(p, r) < +\infty$ . Quando  $p = 2$ , segue de (3.78) que  $(C_k)$  é limitada. Portanto  $(\mathcal{B}(p, q_k, r))$  é limitada, concluindo a demonstração do **Teorema 3.1**.

### 3.3 Demonstração do Corolário 3.1 e do Teorema 3.2

Demonstraremos nesta seção o **Corolário 3.1** e o **Teorema 3.2**. Iniciamos com o **Corolário 3.1**, isto é, vamos garantir que

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_0(p, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_0(p, r) \int_M |u|^p dv_g \right] \quad (3.79)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ .

De fato, aplicando a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana ótima (3.1), obtemos

$$\frac{p}{\theta_k} \log \left( \frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left( \frac{\mathcal{A}(p, q_k, r) \|\nabla_g u\|_p^p + \mathcal{B}(p, q_k, r) \|u\|_p^p}{\|u\|_{q_k}^p} \right)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Usando a **Proposição 3.1** e o **Teorema 3.1**, escrevemos

$$\frac{r(r(p-n) + np)}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r - q_k} \log \left( \frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left( \frac{\mathcal{A}_0(p, r) \|\nabla_g u\|_p^p + \mathcal{B}_0(p, r) \|u\|_p^p}{\|u\|_r^p} \right)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Faremos  $k \rightarrow +\infty$  na desigualdade anterior. Para isso, observamos que

$$\log \left( \frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) = \frac{1}{r} \log(\|u\|_r^r) - \frac{1}{q_k} \log(\|u\|_{q_k}^{q_k}) = \frac{q_k - r}{r} \log(\|u\|_{q_k}) + \frac{1}{r} [\log(\|u\|_r^r) - \log(\|u\|_{q_k}^{q_k})].$$

Com a igualdade acima, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r - q_k} \left[ \log \left( \frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) \right] = \frac{1}{r} \left\{ -\log(\|u\|_r) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r - q_k} \left[ \frac{1}{\sigma_{q_k}} (\|u\|_r^r - \|u\|_{q_k}^{q_k}) \right] \right\},$$

onde aplicamos o teorema do valor médio com  $\sigma_{q_k}$  entre  $\|u\|_r^r$  e  $\|u\|_{q_k}^{q_k}$ . Usando o fato que a função  $\phi(s) = u^s$  é diferenciável em  $(q_k, r)$ , recorremos novamente ao teorema do valor médio para encontrar

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{r - q_k} \left[ \log \left( \frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) \right] = \frac{1}{r} \left\{ -\log(\|u\|_r) + \frac{1}{\|u\|_r^r} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{r - q_k} \int_M |u|^{\mu_{q_k}} \log(|u|) dv_g(r - q_k) \right] \right\}$$

com  $\mu_{q_k} \in (q_k, r)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p}{\theta_k} \log \left( \frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) &= \frac{np - nr + pr}{n} \left\{ -\log(\|u\|_r) + \frac{1}{\|u\|_r^r} \int_M |u|^r \log(|u|) dv_g \right\} \\ &= \frac{np - nr + pr}{nr} \int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r} \log \left( \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r} \right) dv_g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{np - nr + pr}{nr} \int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r} \log \left( \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r} \right) dv_g \leq \log \left( \frac{\mathcal{A}_0(p, r) \|\nabla_g u\|_p^p + \mathcal{B}_0(p, r) \|u\|_p^p}{\|u\|_r^r} \right)$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ , ou equivalentemente,

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_0(p, r) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_0(p, r) \int_M |u|^p dv_g \right]$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ . Isto demonstra o **Corolário 3.1**.

Passamos agora para a demonstração do **Teorema 3.2**. Nosso interesse será mostrar a validade da desigualdade de  $r$ -entropia Riemanniana ótima e que  $\mathcal{A}_{ent} = \mathcal{A}_0(p, r)$ . Como consequência do **Corolário 3.1** e da definição de  $\mathcal{A}_{ent}$ , já garantimos que

$$\mathcal{A}_{ent} \leq \mathcal{A}_0(p, r).$$

Por outro lado, para toda  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ , segue da desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned} -\log \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right) &= -\log \left( \int_M |u|^{q_k - r} |u|^r dv_g \right) \leq \int_M -\log(|u|^{q_k - r}) |u|^r dv_g = \\ &= \frac{r - q_k}{r} \int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Decorre da definição de  $\mathcal{A}_{ent}$  que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $B_\varepsilon > 0$  tal que

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ (\mathcal{A}_{ent} + \varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B_\varepsilon \int_M |u|^p dv_g \right] \tag{3.81}$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  satisfazendo  $\|u\|_r = 1$ .

Combinamos então (3.80) com (3.81) para produzir

$$\left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{-\frac{np-nr+pr}{n(r-q_k)}} \leq (\mathcal{A}_{ent} + \varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B_\varepsilon \int_M |u|^p dv_g$$

para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ . Por um argumento de homogeneidade, obtemos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg:

$$\left( \int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \left[ (\mathcal{A}_{ent} + \varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B_\varepsilon \int_M |u|^p dv_g \right] \left( \int_M |u|^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}$$

satisfeita para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$ . Assim,

$$\mathcal{A}(p, q_k, r) \leq \mathcal{A}_{ent} + \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , temos

$$\mathcal{A}_0(p, r) \leq \mathcal{A}_{ent} + \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Logo, ao fazermos  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos  $\mathcal{A}_0(p, r) \leq \mathcal{A}_{ent}$ , donde fica estabelecido que

$$\mathcal{A}_{ent} = \mathcal{A}_0(p, r).$$

Em particular, a desigualdade encontrada no **Corolário 3.1** é ótima. Como conclusão, segue diretamente da definição de  $\mathcal{B}_{ent}$  que a desigualdade

$$\int_M |u|^r \log(|u|^r) dv_g \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_{ent} \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + \mathcal{B}_{ent} \int_M |u|^p dv_g \right]$$

é válida para toda função  $u \in H^{1,p}(M)$  com  $\|u\|_r = 1$ , encerrando a prova do **Teorema 3.2**.

### 3.4 Existência de função extremal

Provamos aqui o **Teorema 3.3**. Vimos que  $B(p, q_k, r) \geq |M|^{-\frac{p}{n}}$ . Então,  $\mathcal{B}_0(p, r) \geq |M|^{-\frac{p}{n}}$ . Se  $\mathcal{B}_0(p, r) = |M|^{-\frac{p}{n}}$ , segue do **Corolário 3.1** que a função constante  $u = |M|^{-\frac{1}{r}}$  é extremal. Suponhamos  $\mathcal{B}_0(p, r) > |M|^{-\frac{p}{n}}$ . Repetindo a demonstração do **Teorema 3.1** e usando a hipótese  $p < 2$ , veremos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k > 0$ , pois do contrário, teríamos uma contradição com (3.78). Com isso e usando  $u_k$  como função teste em (3.12), obtemos

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g + \int_M u_k^p dv_g \leq c$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, a menos de subsequência,  $u_k \rightharpoonup u_0$  em  $H^{1,p}(M)$ . Por imersão compacta, temos  $1 = \|u_k\|_r \rightarrow \|u_0\|_r$ , donde  $\|u_0\|_r = 1$ . Decorre do método iterativo de Moser que

$$\sup_{x \in M} u_k \leq c \left( \int_M u_k^r dv_g \right)^{\frac{1}{r}} \leq c$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $u_k \in L^\infty(M)$ , da teoria de regularidade de Tolksdorf combinada com o teorema de Arzela-Ascoli, inferimos que  $u_k \rightarrow u_0$  em  $C^1(M)$ . Lembrando que  $\mathcal{J}_k(v_k) > \mathcal{A}(p, q_k, r)$  (vide (3.10)), obtemos

$$\left( \frac{\|v_k\|_r}{\|v_k\|_{q_k}} \right)^{\frac{p}{\theta_k}} \geq \frac{\mathcal{A}(p, q_k, r) \|\nabla_g v_k\|_p^p + (\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k) \|v_k\|_p^p}{\|v_k\|_{q_k}^p}.$$

Uma vez que  $u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_r}$ , temos

$$\left( \frac{1}{\|u_k\|_{q_k}} \right)^{\frac{p}{\theta_k}} \geq \frac{\mathcal{A}(p, q_k, r) \|\nabla_g u_k\|_p^p + (\mathcal{B}(p, q_k, r) - \gamma_k) \|u_k\|_p^p}{\|u_k\|_{q_k}^p}.$$

Tomando a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade anterior, fazendo  $k \rightarrow +\infty$  e seguindo o mesmo raciocínio adotado na demonstração do **Corolário 3.1**, chegamos a

$$\int_M |u_0|^r \log(|u_0|^r) dv_g \geq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left[ \mathcal{A}_0(p, r) \int_M |\nabla_g u_0|^p dv_g + \mathcal{B}_0(p, r) \int_M |u_0|^p dv_g \right].$$

Portanto,  $u_0$  é uma função extremal para  $(Ent(\mathcal{A}_0(p, r), \mathcal{B}_{ent}))$  e vale que  $\mathcal{B}_{ent} = \mathcal{B}_0(p, r)$ .

# REFERÊNCIAS

- [1] M. Agueh - *Sharp Gagliardo-Nirenberg Inequalities via  $p$ -Laplacian type equations*, Nonlinear Diff. Eq. Appl. 15 (2008) 457-472.
- [2] M. T. Alves, J. Ceccon - *Sharp  $L^p$ -Moser inequality on Riemannian manifolds*, Journal of Differential Equations 260 (2) (2016) 1558-1584.
- [3] T. Aubin - *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, in: Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] D. Bakry -  *$L$ -hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes*, in: lectures on probability theory. École d'été de probabilités de St-Flour 1992, Lecture Notes in Math. 1581, Springer, Berlin (1994) 1-114.
- [5] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux, L. Saloff-Coste - *Sobolev inequalities in disguise*, Indiana J. Math. 44 (1995) 1033-1074.
- [6] W. Beckner - *Estimates on Moser Embedding*, Potential Analysis 20 (2004) 345-359.
- [7] W. Beckner - *Geometric asymptotics and the logarithmic Sobolev inequality*, Forum Math. 11, (1) (1999) 105-137.
- [8] W. Beckner - *Geometric proof of Nash's inequality*, Internat. Math. Res. Notices 2 (1998) 67-71.
- [9] A. Blanchet, M. Bonforte, J. Dolbeault, G. Grillo, J. L. Vázquez- *Asymptotics of the fast diffusion equations via entropy estimates*, Arch. Rat. Mech. Anal. 191 (2009) 347-385.
- [10] S. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux - *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. 80 (2001) 669-696.
- [11] S. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux - *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. Inhomogeneous random systems*, Markov Process. Related Fields 8 (2002) 233-235.
- [12] M. Bonforte, G. Grillo - *Ultracontractive bounds for nonlinear evolution equations governed by the subcritical  $p$ -Laplacian*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 61 (2005) 15-28.
- [13] H. Brezis, L. Nirenberg - *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Commun pure appl. Math. 36 (1983) 437-477.

- [14] C. Brouttelande - *On the second best constant in logarithmic Sobolev inequalities on complete Riemannian manifolds*, Bull. Sci. Math. 127 (2003) 292-312.
- [15] C. Brouttelande - *The best-constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifold*, Proc. R. Soc. Edinb. 46 (2003) 147-157.
- [16] E. A. Carlen - *Superadditivity of Fisher's information and logarithmic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. 101 (1) (1991) 194-211.
- [17] J. Ceccon - *General optimal  $L^p$ -Nash inequalities on Riemannian manifolds*, in press, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa (2016), DOI Number: 10.2422/2036 – 2145.201404\_006.
- [18] J. Ceccon, C. Durán - *Sharp constant in Riemannian  $L^p$ -Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 433 (2016) 260-281.
- [19] J. Ceccon, M. Montenegro - *Optimal  $L^p$ -Riemannian Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Math. Z. 258 (2008) 851-873.
- [20] J. Ceccon, M. Montenegro - *Optimal Riemannian  $L^p$ -Gagliardo-Nirenberg inequalities revisited*, J. Differential Equations 254, 6 (2013) 2532-2555.
- [21] J. Ceccon, M. Montenegro - *Sharp  $L^p$ -entropy inequalities on manifolds*, Journal of Functional Analysis 269 (2015) 1591-1619.
- [22] I. Chavel - *Riemannian Geometry - a modern introduction*, Cambridge University Press (1996).
- [23] W. Chen, X. Sun - *Optimal improved  $L^p$ -Riemannian Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Nonlinear Analysis 72 (2010) 3159-3172.
- [24] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani - *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Adv. Math. 182 (2004) 307-332.
- [25] M. Del Pino, J. Dolbeault - *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*, J. Math. Pures Appl. 81 (2002) 847-875.
- [26] M. Del Pino, J. Dolbeault - *The optimal Euclidean  $L^p$ -Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal. 197 (2003) 151-161.
- [27] M. Del Pino, J. Dolbeault, I. Gentil - *Nonlinear diffusions, hypercontractivity and the optimal  $L^p$ -Euclidean logarithmic Sobolev inequality*, J. Math. Anal. Appl. 293 (2004) 375-388.
- [28] J. Dolbeault, I. Gentil, A. Jungel - *A nonlinear fourth-order parabolic equation and related logarithmic Sobolev inequalities*, Commun. Math. Sci. 4 no. 2 (2006) 275-290.
- [29] O. Druet - *Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. 159 (1998) 217-242.
- [30] O. Druet - *The best constants problem in Sobolev inequalities*, Math. Ann. 314 (1999) 327-346.
- [31] O. Druet, E. Hebey - *The AB program in geometric analysis: sharp Sobolev inequalities and related problems*, Mem. Amer. Math. Soc. 160 (2002), no. 761.

- [32] O. Druet, E. Hebey, M. Vaugon - *Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds: the influence of geometry*, Int. Math. Res. Not. 14 (1999) 735-779.
- [33] L. G. Farah - *Global well-posedness and blow-up on the energy space for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation*, Journal of Evolution Equations (2015) 1-16.
- [34] I. Gentil - *The general optimal  $L^p$ -Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations*, J. Funct. Anal. 202 (2003) 591-599.
- [35] I. Gentil - *Ultracontractive bounds on Hamilton-Jacobi solutions*, Bull. Sci. Math., 126 (2002) 507-524.
- [36] G. Grillo - *On the equivalence between  $p$ -Poincaré inequalities and  $L^r - L^q$  regularization and decay estimates of certain nonlinear evolutions*, J. Differential Equations 249 (2010) 2561-2576.
- [37] L. Gross - *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975) 1061-1083.
- [38] E. Hebey - *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, Courant Institute of Mathematical Sciences, Lecture Notes in Mathematics, 5 (1999).
- [39] N. Kishimoto, M. Maeda - *Construction of blow-up solutions for Zakharov system on  $\mathbb{T}^2$* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 30 (2013), no. 5, 791-824.
- [40] M. Ledoux - *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de Probabilités XXXIII, Lecture Notes in Mathematics, 1709, Springer, 120-216, 1999
- [41] M. Ledoux- *Isoperimetry and Gaussian analysis, in: Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d'été de probabilités de St-Flour 1994*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1648, Springer, Berlin, (1996) 165-294.
- [42] J. Moser - *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. 14 (1961) 577-591.
- [43] J. Nash - *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Am. J. Math. 80 (1958) 931-954.
- [44] G. Perelman - *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159v1
- [45] J. Serrin - *Local behavior of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. 111 (1964) 247-302.
- [46] J. M. Sotomayor - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA (1979).
- [47] M. Talagrand - *Transportation cost for gaussian and other product measures*, Geom. Funct. Anal. 6 (1996) 587-600.
- [48] P. Tolksdorf - *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, 51 (1) (1984) 126-150.
- [49] F. B. Weissler - *Logarithmic Sobolev inequalities for the heat-diffusion semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. 237 (1978) 255-269.