

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR

TALINE SUELLEN KRÜGER

**GRAU DE HIPERBOLICIDADE DO ESPAÇO DE FASES E SUA RELAÇÃO COM O
EFEITO *STICKINESS* EM SISTEMAS CONSERVATIVOS**

CURITIBA

2016

TALINE SUELLEN KRÜGER

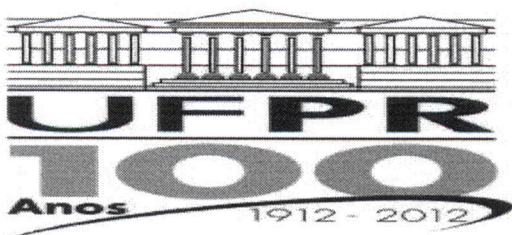
**GRAU DE HIPERBOLICIDADE DO ESPAÇO DE FASES E SUA RELAÇÃO COM O
EFEITO *STICKINESS* EM SISTEMAS CONSERVATIVOS**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

CURITIBA

2016



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Tese de Doutorado da aluna **TALINE SUELLEN KRÜGER**, consideram aprovada a redação final da tese, cujo título é: “*Grau de hiperbolicidade do espaço de fases e sua relação com o efeito stickiness em sistemas conservativos*”.

Curitiba, 25 de fevereiro de 2016.

Banca Examinadora

Assinatura

Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)

Prof. Dr. Guilherme Jean Pereira de Abreu (UFPR)

Prof. Dr. Wilson Marques Junior (UFPR)

Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior (UEPG)

Prof. Dr. César Manchein (UDESC)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

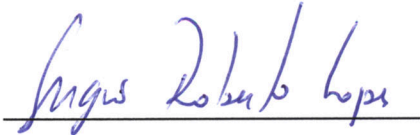
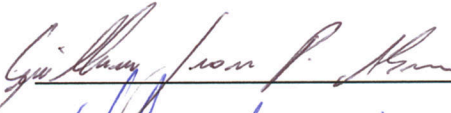
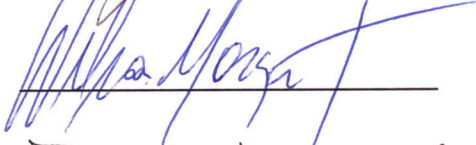
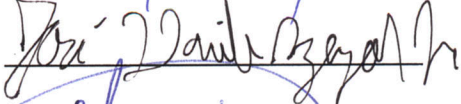
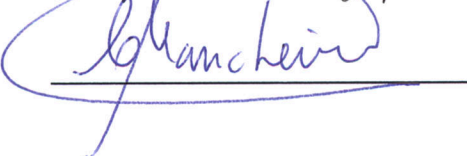
ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

“Grau de hiperbolicidade do espaço de fases e sua relação com o efeito stickiness em sistemas conservativos.”

ALUNA

TALINE SUELLEN KRÜGER

Em sessão pública iniciada às quatorze horas do dia 25 de fevereiro de 2016, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu APROVAR a candidata com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Guilherme Jean Pereira de Abreu (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Wilson Marques Junior (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior (UEPG)		<u>A</u>
Prof. Dr. César Manchêin (UDESC)		<u>A</u>

*Dedico esta Tese de Doutorado
aos meus pais e irmã,
pelo apoio, incentivo e força
depositados a mim nesta caminhada
e ao meu noivo,
por estar sempre ao meu lado
incentivando e motivando a não desistir deste sonho.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu alcançasse o objetivo de obter o grau de Doutora em Física. O apoio, incentivo e força que recebi foi de extrema importância para atingir esta meta.

Agradeço,

- a Deus, que iluminou o meu caminho nos momentos difíceis.
- aos meus pais Ademiro Krüger e Isolete Maria Vassel Krüger que me acompanharam neste processo dando força, incentivo, apoio, carinho, amor, abnegação e cuidados que contribuíram tanto para minha formação como cidadã quanto para minha formação acadêmica e à minha irmã Andressa Wilma Krüger pelo apoio e incentivo.
- ao meu noivo Ricardo Jean Meier, de forma especial e carinhosa, que me deu forças, incentivo, confiança, auxílio e que nunca deixou de acreditar na minha capacidade. Por sua abnegação e compreensão para que conseguisse realizar minhas tarefas.
- aos meus familiares pelo incentivo, em especial ao meu tio Ílido L. Vassel e minha avó Serafina B. Vassel pelo carinho, apoio e preocupação dedicados a mim.
- aos familiares do meu noivo pelo incentivo, em especial a minha sogra Gina Marlene Maestri Meier e meu sogro Wigando Meier Filho pelo apoio. Ao meu cunhado Marcio Henrique Meier pela ajuda.
- ao meu orientador Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes, pela orientação e a dedicação nestes 4 anos de doutorado.
- a todos os Profs. do Programa de Pós-Graduação em Física da UFPR, e aos Profs. das disciplinas de Pós-Graduação que cursei ao longo do período de doutoramento.
- ao Prof. Dr. Marcus W. Beims pelo trabalho de colaboração realizado com o Carlos Alberto Coelho Jousseph.

- a todos os meus amigos e colegas da Pós-Graduação que de alguma forma colaboraram no desenvolvimento deste trabalho. Em especial a, Mariana Couto Siqueira, Diana Jastrombek, Cristiane de Col e Ana Paula Mendonça, pelo incentivo, apoio, conselhos, conversas, ensinamentos e a bela amizade construída neste período. A Karla Weber, Luana Cristina Wouk de Menezes e Fabiane de Fatima Carvalho pela amizade, pelas conversas nos momentos difíceis, pelas infinitas histórias para contar da nossa moradia, enfim pelo incentivo e apoio para alcançar a reta final. A todos meus amigos queridos de Jaraguá do Sul que de alguma forma contribuíram para minha jornada, também a Amanda Pacher, Joseane Elisabeth Drews, Iara Maitê Campestrini, Juliana Vicente, Cristiane Stegemann e Juliana Motter pela amizade mesmo que a distância.
- aos meus colegas de grupo Thiago de Lima Prado e Paulo Paneque Galuzio, pelas discussões, aprendizado, ajuda, conselhos e incentivo.
- a Rita de Fátima C. B. de Souza pela ajuda profissional, a qual foi de fundamental contribuição para a realização do sonho de tornar-se Doutora.
- ao Prof. Dr. Carlos de Carvalho pelo suporte computacional (HOGGAR e LCPAD).
- a agência financiadora: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro com a concessão da bolsa de estudos nestes 4 anos.

RESUMO

O tema principal desenvolvido nesta tese de doutorado está relacionado com o estudo da dinâmica do sistema conservativo bidimensional, conhecido como rotor pulsado periodicamente e descrito pelo mapa de Chirikov-Taylor ou mapa padrão. Os sistemas conservativos apresentam um espaço de fases composto por regiões onde a dinâmica pode ser regular (ilhas), caótica (mar caótico) ou uma mistura de ambos. Quando trajetórias caóticas se aproximam de regiões regulares, elas podem ser aprisionadas por um intervalo de tempo finito, este fenômeno é conhecido como efeito *stickiness*. Neste trabalho estudamos como regiões hiperbólicas e não hiperbólicas na vizinhança de uma ilha de ressonância desempenham um papel importante, permitindo ou proibindo, o fenômeno de *stickiness* ao redor da ilha. A vizinhança da ilha é composta por áreas não hiperbólicas que quase impedem a trajetória de visitar a borda ilha. Para alguns parâmetros específicos existem canais minúsculos incorporados nas áreas não hiperbólicas que são associados a pontos fixos hiperbólicos localizados na vizinhança da ilha. Estes canais permitem que a trajetória seja injetada na porção interna da vizinhança e quando atravessa a barreira imposta pelas regiões não hiperbólicas, gasta muito tempo para abandonar a vizinhança da ilha, uma vez que a barreira também evita que a trajetória escape. Neste cenário as estruturas não hiperbólicas são responsáveis pelo fenômeno de *stickiness* e, mais do que isso, pela intensidade do efeito *stickiness*. Mostramos que essas propriedades do espaço de fases nos permite manipular a existência de eventos extremos (e de transporte associado) responsáveis pela flutuação de não equilíbrio do sistema. De fato, demonstramos que através do monitoramento de pequenas porções do espaço de fases (isto é $\approx 1 \times 10^{-4} \%$ dele) é possível gerar um sistema completamente difusivo eliminando tempos de recorrências longos que resultam do fenômeno de *stickiness*. Portanto, descrevemos um mecanismo para suprimir o efeito *stickiness* baseado no conhecimento da estrutura não hiperbólica na borda da ilha.

Palavras-chave: Mapa padrão. Efeito *stickiness*. Hiperbolicidade.

ABSTRACT

The main subject developed in this thesis is the characterization of the dynamics of two dimensional conservative system known as periodically kicked rotor described by Chirikov-Taylor map or standard map. The conservative systems exhibit a phase space composed of regions where the dynamics can be regular (islands), chaotic (chaotic sea) or the coexistence of both. When the chaotic trajectories come close to regular regions, they can get trapped by a finite time interval, a phenomenon known as *stickiness* effect. In this work, we study how hyperbolic and nonhyperbolic regions in the neighborhood of a resonant island perform an important role allowing or forbidding *stickiness* phenomenon around islands in conservative systems. The vicinity of the island is composed of nonhyperbolic areas that almost prevent the trajectory to visit the island edge. For some specific parameters, tiny channels are embedded in the nonhyperbolic area that are associated to hyperbolic fixed points localized in the neighborhood of the islands. Such channels allow the trajectory to be injected in the inner portion of the vicinity and when it crosses the barrier imposed by the nonhyperbolic regions, it spends a long time abandoning the vicinity of the island, since the barrier also prevents the trajectory from escaping from the neighborhood of the island. In this scenario, the nonhyperbolic structures are responsible for the *stickiness* phenomena and, more than that, the strength of the *sticky* effect. We show that those properties of the phase space allow us to manipulate the existence of extreme events (and the transport associated to it) responsible for the nonequilibrium fluctuation of the system. In fact, we demonstrate that by monitoring very small portions of the phase space (namely $\approx 1 \times 10^{-4}$ % of it) it is possible to generate a completely diffusive system eliminating long-time recurrences that result from the *stickiness* phenomenon. Therefore, we have described a mechanism to suppress the effect of *stickiness* based on the knowledge of the nonhyperbolic structures on the edge of an island.

Key words: Standard map. *Stickiness* effect. Hiperbolicity.

Sumário

1	Introdução	10
2	Fundamentação teórica	15
2.1	Sistemas dinâmicos	15
2.2	Sistemas Hamiltonianos	17
2.2.1	A formulação Hamiltoniana	17
2.2.2	Sistemas Integráveis	18
2.2.3	Sistemas Quase Integráveis	22
2.3	Seção de Poincaré	25
2.4	Teorema KAM	26
2.5	Teorema Poincaré-Birkhoff	29
2.6	Variedades	33
2.7	Expoente de Lyapunov	35
2.8	Hiperbolicidade do espaço de fases	38
2.9	O efeito <i>stickiness</i> e as quase armadilhas dinâmicas	42
2.10	Recorrência de Poincaré	46
2.10.1	Estatística do tempo de retorno	48
3	Mapa Padrão	51
3.1	Modelo físico	51
3.2	Transição do comportamento regular para o caótico	54

3.3	Efeito de aprisionamento das trajetórias no mapa padrão	57
4	Influência das regiões hiperbólicas e não hiperbólicas no efeito <i>stickiness</i>	59
4.1	Variedades estáveis e instáveis	59
4.2	Hiperbolicidade do espaço de fases	63
4.3	Propriedades topológicas do espaço de fases na vizinhança da ilha no mapa padrão	66
4.4	Distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré e mecanismos de controle de eventos extremos	76
4.5	Outros casos de K	80
5	Perspectivas futuras	84
5.1	Mapa padrão dissipativo e assimétrico	84
6	Considerações finais	88
	Bibliografia	91

Capítulo 1

Introdução

A investigação de sistemas dinâmicos envolve diversas áreas do conhecimento humano e modelam problemas de interesse físico, químico, biológico, econômico, etc. No final do século XIX o campo da dinâmica não-linear recebeu um grande impulso com o matemático francês Jules Henri Poincaré, que em 1886 estudou um modelo simplificado do Sistema Solar com três corpos [1], inspirado pelo desafio lançado pelo rei Oscar II, da Suécia e da Noruega. O desafio consistia em provar matematicamente a estabilidade (ou não) do Sistema Solar, no qual o ganhador receberia um prêmio, sendo que, somente em 1889 o prêmio foi conquistado por Poincaré que elaborou um texto de quase 300 páginas. Poincaré provavelmente foi o primeiro a vislumbrar a existência de caos no problema dos três corpos [2].

No entanto, com o desenvolvimento de computadores sofisticados, em meados dos anos 80, tornou-se possível uma investigação numérica detalhada, por meio das simulações computacionais. Os resultados numéricos obtidos no estudo da dinâmica de sistemas não lineares foi realizado através da integração numérica das equações diferenciais ou da iteração em sistemas dinâmicos discretos.

Os sistemas dinâmicos podem ser separados em duas classes distintas: os conservativos e os dissipativos. No decorrer das últimas décadas, o estudo de sistemas não-lineares Hamiltonianos, considerados sistemas conservativos, ganhou atenção de diversos cientistas pela riqueza de fenômenos físicos observados neles.

A dinâmica de sistemas Hamiltonianos é descrita pela chamada função Hamiltoniana definida por $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, em que \mathbf{p} e \mathbf{q} é o momento e coordenada generalizada, respectivamente.

Existem dois tipos de sistemas: os integráveis e os quase integráveis. Uma característica marcante dos sistemas Hamiltonianos, que difere fundamentalmente de um sistema dissipativo, é a conservação do volume no espaço de fases, conforme propõe o teorema de Liouville [3, 4, 5], ou seja, a incompressibilidade do volume no espaço de fases para sistemas Hamiltonianos é chamado teorema de Liouville [3].

O espaço de fases de sistemas Hamiltonianos quase integráveis geralmente apresenta não uniformidade, o qual é composto por regiões regulares (ilhas) e regiões caóticas (mar caótico) [4]. A interface entre as regiões regulares e caóticas está longe de ser uma superfície suave, caracterizando uma dinâmica muito complexa e não muito bem compreendida até agora. O movimento de uma trajetória no espaço de fases para um sistema integrável com dois graus de liberdade é descrito por uma superfície cuja topologia é conhecida como torus.

O modelo físico estudado nesta tese é um sistema Hamiltoniano conhecido como *mapa de Chirikov-Taylor* ou *mapa padrão* [6], que modela uma variedade de sistemas físicos, como por exemplo, em problemas de física de plasma ele modela a interação entre uma partícula carregada e um trem de ondas planas eletrostáticas [7], o comportamento de órbitas de deriva em Tokamaks na presença de ondas de deriva [8]. Em física de aceleradores de partículas ele descreve a interação de partículas carregadas em um ciclotron sob a influência de um potencial periódico, aplicado em uma pequena região [9, 10]. O modelo do mapa padrão também está presente na área de matéria condensada [11], na astronomia [12], na biologia [13], em mecânica de fluidos [14], vãos de Lévy [15], entre outros.

Como dito anteriormente, os sistemas Hamiltonianos quase integráveis apresentam um espaço de fases composto por domínios formados pela coexistência de regiões caóticas e regulares, em que a complexidade na sua dinâmica é principalmente devido à presença de *stickiness* na fronteira da ilha [16]. O efeito *stickiness* é caracterizado pelo aprisionamento de trajetórias caóticas na borda das ilhas (regiões regulares) por intervalos finitos de tempo. Também podemos chamar de efeito de aprisionamento por quase armadilhas dinâmicas (*stickiness effect*) [17], sendo que, as quase armadilhas dinâmicas são as regiões regulares presentes no espaço de fases.

A ocorrência do efeito *stickiness* depende de algumas variáveis como: a estrutura topológica do espaço de fases e também dos parâmetros envolvidos no sistema. Uma explicação

comumente aceita e amplamente estudada na literatura para que este efeito ocorra é devido a existência de cantori [18]. Como previsto pelo teorema KAM, as curvas invariantes (torus KAM) podem ser deformadas ou destruídas, quando estes torus são destruídos com o incremento da perturbação surgem estruturas remanescentes conhecidas como cantori [16, 19].

Os cantori constituem uma espécie de barreira parcial no espaço de fases, de forma que, tal barreira pode ser descrita como um torus com um número infinito de lacunas (entradas) geradas pela sobreposição de cadeias de ilhas vizinhas. Uma camada caótica forma-se na região interna do último torus KAM conforme aumenta-se o parâmetro de não linearidade, contudo, ainda não ocorre a conexão entre a camada caótica interna com o mar caótico externo. Somente após a destruição deste torus e o surgimento do cantori, composto por uma infinidade de lacunas muito pequenas, é que as trajetórias caóticas podem permanecer por um longo intervalo de tempo dentro do cantori antes de escapar para o mar caótico.

Na década de 70 foram feitas as primeiras observações numéricas da existência do aprisionamento de trajetórias caóticas na vizinhança de ilhas em sistemas Hamiltonianos por George Contopoulos [20] e posteriormente na década de 80 estudos foram realizados pelos pesquisadores Meiss e Ott [16]. Contudo, destaca-se o pesquisador George M. Zaslavsky como um dos pesquisadores pioneiros na investigação deste fenômeno [17, 21, 22, 23]. Uma das principais consequências do fenômeno de *stickiness* é a existência de caudas "gordas", ou seja, uma distribuição tipo lei de potência na distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré, que é definido como o tempo que uma trajetória demora para sair de uma determinada região no espaço de fases, evoluir, e retornar a ela novamente [3, 17, 21].

A distribuição tipo lei de potência que surge devido a presença do efeito *stickiness* faz com que o sistema apresente uma distribuição de tempos de recorrência com decaimento algebrico para tempos longos e ocorra transporte anômalo. Em um sistema que não apresente o efeito *stickiness* observamos um decaimento exponencial na distribuição de tempos de recorrência e como esperado temos um sistema com transporte normal (difusão normal ou Browniana). Sendo assim, a ocorrência de transporte anômalo em sistemas Hamiltonianos de baixa dimensão está relacionado com o efeito *stickiness* [21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

A origem de transporte anômalo tem sido conectada com propriedades topológicas locais de domínio do espaço de fases nas proximidades das ilhas e a estruturas autossimilares do

domínio (cadeia de ilhas). A difusão e o transporte de partículas são relacionados com a evolução no tempo do deslocamento quadrático médio $\langle \sigma^2 \rangle \sim t^\mu$, onde μ é o expoente de transporte, do qual, para difusão normal (Browniana) ou transporte normal $\mu = 1$ [31]. Em contraste, para processos com $\mu \neq 1$ temos transporte anômalo ou difusão anômala, com um decaimento assintótico no tempo do tipo lei de potência. O transporte anômalo pode ser dividido em dois tipos: super-difusivo ($\mu > 1$) e sub-difusivo ($\mu < 1$), significando que cresce não linearmente com o tempo. Sistemas com dinâmica complexa, cujo espaço de fases é composto por regiões regulares e caóticas coexistindo, apresentam transporte anômalo, por outro lado, sistemas fortemente caóticos o transporte pode ser difusivo, no sentido de exibir difusão normal [15, 30, 31, 32, 33].

A topologia do espaço de fases de sistemas Hamiltonianos desempenha um papel crucial no transporte anômalo e no fenômeno de *stickiness* [34, 35]. Como mencionado anteriormente, existem estruturas conhecidas como cantori no espaço de fases, estas por sua vez influenciam no transporte formando uma barreira parcial [19]. Muitos problemas da ciência, como a advecção de partículas em fluidos [36, 37], o transporte em dispositivos de fusão de plasma [4, 38], mecânica celeste [18] e muitos outros, têm encontrado aplicações em ocorrências do efeito *stickiness*.

O grau de hiperbolicidade é uma propriedade topológica do espaço de fases que pode ser calculado para diversos sistemas sendo de grande relevância, pois existem evidências que o efeito *stickiness* pode estar intimamente ligado a hiperbolicidade do sistema [35]. Trabalhos anteriores têm estudado propriedades na fronteira entre regiões regulares e caóticas, concentrando-se principalmente no papel de *stickiness* na dinâmica [22, 39] e também nas estruturas conhecidas como cantori, que são remanescentes da quebra do último torus KAM [40]. No entanto, até onde se sabe, nenhuma explicação teórica completamente satisfatória está disponível para o explicar o efeito *stickiness*.

O objetivo deste trabalho é estudar como características da topologia do sistema, a saber, regiões hiperbólicas e não hiperbólicas na vizinhança de uma ilha, desempenham um importante papel a fim de determinar a presença e, mais do que isso, o intensidade do efeito *stickiness*. Neste contexto, estudamos como uma trajetória é injetada na região de *stickiness* e como podemos controlar a ocorrência desse fenômeno que é considerado um evento extremo [41], e o transporte anômalo que ocorre devido a presença de *stickiness* no sistema, resultando da inje-

ção de trajetórias na região de *stickiness*. A seguir uma breve exposição do desenvolvimento de nosso trabalho será descrita para cada capítulo que compõe esta tese.

No capítulo 2 é apresentado o embasamento teórico utilizado para os trabalhos desenvolvidos no decorrer da tese. Neste capítulo são discutidos conceitos de sistemas dinâmicos, sistemas Hamiltonianos e algumas propriedades que aparecem no espaço de fases destes sistemas, seção de Poincaré, teorema KAM, teorema de Poincaré-Birkhoff, variedades, expoente de Lyapunov, hiperbolicidade do espaço de fases, o efeito *stickiness* e as armadilhas dinâmicas, bem como o conceito de recorrências de Poincaré.

No capítulo 3 apresentamos o modelo físico proposto para o estudo nesta tese que é conhecido como mapa padrão, descrevemos sua dinâmica, mostramos os resultados de como ocorre a transição do comportamento regular para o caótico no espaço de fases, bem como, a ocorrência do efeito *stickiness* por meio da análise da série temporal.

O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos mediante aplicação dos conceitos discutidos no capítulo 2, que são: o cálculo das variedades estáveis e instáveis, bem como da hiperbolicidade no espaço de fases do sistema. Mostramos resultados referentes a propriedades topológicas na vizinhança da ilha, a análise da distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré e mecanismos de controle de eventos extremos. Os resultados deste capítulo são descritos para o parâmetro de não linearidade $K = 3, 0$, sendo que na última seção estendemos as análises para outro valor de K . Neste capítulo são apresentados os principais resultados desta tese.

No capítulo 5 serão expostas as perspectivas futuras, que compreende estudos preliminares para o mapa padrão dissipativo e assimétrico.

Por fim, no capítulo 6 apresentamos as conclusões gerais do nosso trabalho até o presente momento.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Neste capítulo apresentamos a fundamentação teórica sobre tópicos relevantes para o entendimento do trabalho, com o objetivo de definir e discutir as principais propriedades dos sistemas Hamiltonianos, e alguns conceitos básicos utilizados na caracterização da dinâmica caótica em sistemas conservativos. Assim, a revisão conceitual abordará propriedades do espaço de fases, teorema KAM, teorema de Poincaré-Birkhoff, variedades estáveis e instáveis, expoente de Lyapunov, hiperbolicidade e as quase armadilhas dinâmicas também conhecidas na literatura como *stickiness*. Discutiremos a ideia de recorrência de Poincaré e a relação com o aprisionamento das trajetórias no espaço de fases.

2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico consiste em um conjunto de estados possíveis, juntamente com uma regra que determina o estado atual em termos do estado passado [3, 42]. Podemos classificar um sistema dinâmico como linear ou não linear. Quanto a sua dependência temporal dizemos que, um sistema dinâmico é autônomo quando não depende do tempo e não autônomo quando depende do tempo.

Com relação a variável temporal um sistema dinâmico pode ser contínuo ou discreto. Quando o tempo t é uma variável contínua, o sistema é dito contínuo, conhecido como fluxo. Quando o tempo é uma variável discreta temos um sistema de diferenças finitas, conhecido como mapa.

Um sistema dinâmico contínuo, no qual o tempo é a variável contínua, é um sistema de m equações diferenciais ordinárias (EDOs), descrito pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}\frac{dx^{(1)}}{dt} &= F^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= F^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(m)}}{dt} &= F^{(m)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}),\end{aligned}\tag{2.1}$$

e são representadas vetorialmente da seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)].\tag{2.2}$$

Para o caso discreto o tempo assume valores inteiros e adota-se n para a variável do tempo. Um sistema discreto é representado por equações de diferenças ou mapa, cujas soluções são conhecidas como trajetórias. Para um sistema discreto m -dimensional o conjunto das m equações de diferenças podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}x_{n+1}^{(1)} &= M^{(1)}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}), \\ x_{n+1}^{(2)} &= M^{(2)}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}), \\ &\vdots \\ x_{n+1}^{(m)} &= M^{(m)}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}),\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde a coordenada temporal é representada pelo índice inferior e a dimensão do sistema é representada pelo índice superior. Na forma vetorial temos

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n).\tag{2.4}$$

portanto, dado um estado inicial x_0 , num instante de tempo $n = 0$, obtemos um outro estado para o instante de tempo $n = 1$ fazendo $x_1 = M(x_0)$, e assim sucessivamente. Iterando o mapa n vezes a partir de uma dada condição inicial x_0 geramos uma trajetória de um sistema discreto x_0, x_1, x_2, \dots [3].

2.2 Sistemas Hamiltonianos

Os sistemas Hamiltonianos são uma classe de sistemas dinâmicos e são conservativos. Nas seções a seguir explicaremos com mais detalhes a formulação de sistemas Hamiltonianos, bem como suas propriedades.

2.2.1 A formulação Hamiltoniana

No formalismo Hamiltoniano a dinâmica de um sistema Hamiltoniano, com N graus de liberdade, pode ser descrita pelo conjunto de N coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ e N momentos generalizados $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, por meio de uma única função, a Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. As equações que descrevem a evolução temporal de um sistema Hamiltoniano, conhecidas como equações de Hamilton, determinam a trajetória $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ que o sistema segue em um espaço $2N$ -dimensional, conhecido como espaço de fases. As equações de Hamilton são dadas por [3, 4, 17]

$$\dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.5)$$

O espaço de fases é definido como o espaço das coordenadas e momentos generalizados (\mathbf{p}, \mathbf{q}) de um sistema dinâmico. Na figura 2.1 temos uma representação esquemática de um espaço de fases bidimensional definido por \mathbf{p} e \mathbf{q} . Cujo caminho no espaço de fases seguido pelo sistema a medida que o tempo evolui de $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ para $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ é chamado de trajetória [3].

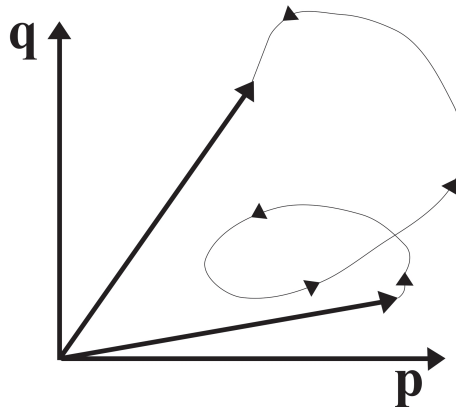


Figura 2.1: Espaço de fases bidimensional ($N = 2$). Fonte: a autora, com base na referência [3].

A Hamiltoniana que depende explicitamente do tempo, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, chamamos de não autônoma. Quando não há dependência temporal, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, dizemos que a Hamiltoniana é autônoma. Para o caso autônomo, usando as equações de Hamilton, podemos verificar que o valor para $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ é constante no tempo

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.6)$$

Desta forma, identificando o valor da Hamiltoniana com a energia E do sistema, concluimos que a energia é uma quantidade conservada para sistemas independentes do tempo, $E = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{constante}$. Assim, diz-se que a Hamiltoniana é uma constante de movimento [3].

A dinâmica de um sistema Hamiltoniano é regida pelo conjunto de equações (2.5) e o volume no espaço de fases é preservado, conforme propõe o teorema de Liouville [3, 4]. O teorema de Liouville, os diz que, ao considerarmos uma superfície inicial fechada S_0 em um espaço de fases $2N$ -dimensional, cujo volume é dado por $V(0)$. Evoluindo cada ponto da superfície para frente no tempo, obtemos a cada instante de tempo t uma nova superfície fechada S_t , cujo volume é $V(t)$, que contém dentro dela o mesmo volume $2N$ -dimensional da superfície inicial S_0 [3]. Portanto,

$$V(t) = V(0), \quad (2.7)$$

o volume final em um dado instante de tempo t após a evolução do fluxo no espaço de fases é igual ao volume inicial para $t = 0$, ou seja, o volume é conservado. Essencialmente o teorema de Liouville pode ser interpretado como uma nuvem de pontos representativos (formado pelas condições iniciais) que se move como um fluido incompressível cujo volume é constante.

2.2.2 Sistemas Integráveis

Um sistema Hamiltoniano que não apresenta dependência no tempo, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, implica que $d\mathcal{H}/dt = 0$ e a energia $E = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é uma quantidade conservada ao longo da trajetória, ou seja, é uma constante de movimento. Considere uma função $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ que seja dita constante de movimento de um dado sistema. Sabemos que $\mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ evoluem com o tempo de acordo com as equações de Hamilton (2.5), portanto se o valor da função f não muda,

$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{constante}$ [3].

De maneira geral, diferenciando $f(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ em relação ao tempo, e admitindo que a função Hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo, temos que

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.8)$$

onde o lado direito da equação (2.8) pode ser escrito da seguinte maneira

$$[f, H] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.9)$$

A expressão (2.9) é chamada de *colchetes ou parênteses de Poisson* de f e \mathcal{H} [3, 4]. Deste modo, a condição necessária para que f seja uma constante de movimento é que o colchete de Poisson de f com \mathcal{H} seja zero

$$[f, \mathcal{H}] = 0. \quad (2.10)$$

Um sistema Hamiltoniano autônomo com N graus de liberdade é dito integrável se possuir N constantes de movimento independentes $f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, para $i = 1, 2, \dots, N$, ou seja,

$$f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k_i = \text{constante}, \quad (2.11)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ onde k_i são as N constantes.

Uma vez que as constantes de movimento devem ser independentes para que o sistema seja integrável, temos

$$[f_i, f_j] = 0, \quad (2.12)$$

para todo i e j . Dizemos que as N constantes de movimento f_i estão em involução se a condição (2.12) for válida. Isto implica que a trajetória do sistema no espaço de fases está restrita a uma superfície cuja topologia é conhecida como torus [3], que será discutido adiante.

Considerando um sistema Hamiltoniano integrável é possível realizar uma transformação canônica de variáveis de um par canônico (\mathbf{p}, \mathbf{q}) para um novo par canônico definido por $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$, de forma que a nova função Hamiltoniana $\bar{\mathcal{H}}$ dependa apenas explicitamente do momento

$\bar{\mathbf{p}}$.

Uma possível mudança é a escolha das novas variáveis $\bar{\mathbf{p}}$ como sendo as N constantes de movimento, $\bar{p}_i = f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, de forma que a nova Hamiltoniana $\bar{\mathcal{H}}$ só depende de $\bar{\mathbf{p}}$. A conexão entre as variáveis conjugadas antigas (\mathbf{p}, \mathbf{q}) com as novas variáveis $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$ é dada pela função geradora $S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})$ de segunda espécie.

Desse modo, temos que a função geradora é função da nova coordenada de momento e da antiga coordenada da posição. Ou seja, a nova Hamiltoniana não tem dependência explícita na coordenada $\bar{\mathbf{q}}$ e pode ser escrita como $\bar{\mathcal{H}}(\bar{\mathbf{p}})$ [3, 4]. As equações de movimento podem ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = 0, \\ \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt} &= \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{\mathbf{p}}}.\end{aligned}$$

Reescrevendo em termos da função geradora

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})}{\partial \bar{\mathbf{p}}}. \quad (2.13)$$

Uma escolha particularmente conveniente para a mudança de variáveis é a transformação *ação-ângulo*, onde as variáveis transformadas são $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) = (\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$. Definimos \mathbf{I} por

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\eta} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, \quad (2.14)$$

sendo η as curvas sobre o torus e a integral (2.14) é conhecida como *integral de Poincaré-Cartan* [3]. Portanto, as transformações de coordenadas que preservam a forma das equações de Hamilton são chamadas de transformações canônicas.

As variáveis transformadas podem ser escritas em termos da função geradora, de maneira análoga a equação (2.13), de forma que

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{I}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.15)$$

Com isso, pode-se construir a função Hamiltoniana em termos das coordenadas ação-

ângulo, porém independente do ângulo. Neste caso, as equações de Hamilton reduzem a

$$\dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\mathbf{I})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}). \quad (2.16)$$

A solução do conjunto de equações (2.16) são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t) &= \mathbf{I}(0), \\ \boldsymbol{\theta}(t) &= \boldsymbol{\theta}(0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde a frequência $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ é interpretada como um vetor da velocidade angular.

O movimento no espaço de fases é descrito por um tipo de topologia específica conhecida como torus. As equações (2.17) descrevem o movimento de um torus N -dimensional mostrado na figura 2.2 para o caso bidimensional. Uma vantagem de se utilizar tal descrição para o movimento é que pode ser generalizada para sistemas com mais de dois graus de liberdade [4].

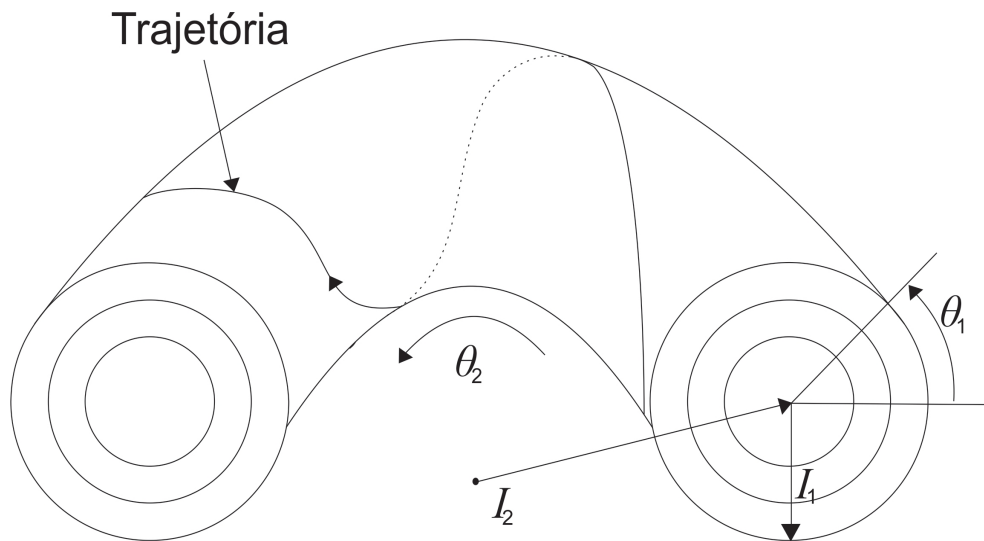


Figura 2.2: Movimento de uma trajetória no espaço de fases para um sistema integrável com dois graus de liberdade. Fonte: a autora, com base na referência [43].

O movimento no torus é caracterizado pelas variáveis ação, (I_1, I_2) , que representam os raios constantes e as variáveis ângulo, (θ_1, θ_2) , que são cíclicas e evoluem temporalmente. A variável I_1 representa o raio de círculos concêntricos (raio interno do torus) e θ_1 a variável ângulo de cada um destes círculos. A variável I_2 representa o raio externo do torus e θ_2 a

variável ângulo conjugada. O movimento ocorre sobre um torus com $I_1 = \text{constante}$ e $I_2 = \text{constante}$, sendo assim a Hamiltoniana para um sistema integrável expressa em termos das variáveis ação-ângulo é $\mathcal{H}(I_1, I_2)$. Como I_1 e I_2 são constantes de movimento, logo $\omega_1 = \omega_1(I_1)$ e $\omega_2 = \omega_2(I_2)$ também são, e a razão

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (2.18)$$

é conhecida como número de rotação.

Considerando r e s números inteiros, se a razão $\alpha = r/s$ é um número racional o movimento no torus é periódico e chamado de torus racional. Deste modo, uma trajetória sempre retornará ao ponto inicial depois de r revoluções em θ_1 e s revoluções em θ_2 , conhecida como trajetória periódica. Por outro lado, quando α for um número irracional, trata-se de um torus irracional, e a trajetória jamais se fecha. Neste caso, a trajetória é quase-periódica [4].

2.2.3 Sistemas Quase Integráveis

Para um sistema integrável, o espaço de fases é preenchido com torus invariantes e qualquer trajetória permanecerá em um torus em particular selecionado pela condição inicial. Estamos interessados em investigar o comportamento de um sistema quando as integrais de movimento são destruídas por pequenas perturbações [44]. Nos referimos a estes sistemas como sistemas quase integráveis.

Considerando um sistema autônomo quase integrável periódico com dois graus de liberdade, podemos escrever o Hamiltoniano perturbado da seguinte forma

$$\mathcal{H}(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = \mathcal{H}_0(I_1, I_2) + \epsilon \mathcal{H}_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2), \quad (2.19)$$

onde \mathbf{I} , $\boldsymbol{\theta}$ são as variáveis ação-ângulo do movimento não perturbado, com a perturbação ϵ pequena, \mathcal{H}_0 é uma função das ações somente, e \mathcal{H}_1 é uma função periódica nos θ 's [4].

O espaço de fases para estes sistemas é caracterizado por duas partes distintas, a primeira é composta por uma parte finita das trajetórias chamadas de regulares, que estão associadas com as primeiras integrais de movimento. A segunda parte está associada com a parte restante do espaço de fases que exhibe comportamento caótico. Tal arranjo do espaço de fases é melhor compreendido de acordo com o teorema KAM [4], o qual será discutido adiante.

Podemos verificar os tipos de trajetórias regulares no espaço de fases e sua intersecção com uma seção de superfície na figura 2.3 para o caso onde $\theta_1 = \text{cte}$ em um sistema de dois graus de liberdade. Na figura 2.3 (a) temos o caso de uma trajetória que cobre toda a superfície de um torus. As sucessivas intersecções da trajetória com uma seção de superfície nos valores de $\theta_2 = \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23} \dots$ forma uma *curva invariante fechada*. Na figura 2.3 (b) temos um exemplo de ressonância, cuja trajetória ressonante é fechada e periódica em θ_1 e θ_2 , com período 5. As sucessivas intersecções da trajetória com uma seção de superfície levam a cinco pontos discretos chamados de *pontos fixos* ou *pontos periódicos* de movimento. Referimos este movimento como uma *ressonância primária* uma vez que é uma trajetória periódica fechada de uma Hamiltoniana não perturbada \mathcal{H}_0 .

Na figura 2.3 (c) mostramos uma seção de superfície de uma trajetória genérica na vizinhança de uma ressonância primária. As sucessivas intersecções da trajetória com esta superfície exibem um conjunto de cinco curvas suaves fechadas, chamadas de *ilhas primárias* circundando os pontos fixos da figura 2.3 (b). De modo que, para outras condições iniciais os raios das ilhas sofrem alterações, mas qualitativamente as figuras se mantêm. Um caso mais complicado podemos ver na figura 2.3 (d), que mostra uma seção de superfície para uma trajetória periódica fechada que passa 3 (três) vezes em torno de cada ressonância primária percorrendo um caminho que cruza a superfície 15 vezes. Isto é um exemplo de *ressonância secundária*, acoplando o movimento em torno da ilha primária. As ressonâncias secundárias são produzidas pela Hamiltoniana perturbada \mathcal{H}_1 e são cercadas por ilhas secundárias. Portanto, a estrutura das trajetórias regulares são apresentadas da seguinte forma, ressonâncias primárias dão origem a ilhas primárias, que por sua vez dão origem a ressonâncias secundárias e suas ilhas, e assim por diante.

As regiões formadas por trajetórias caóticas são conhecidas por preencher uma porção finita da superfície de energia no espaço de fases. As sucessivas intersecções de uma trajetória caótica simples com a superfície da seção preenche uma área finita. Na figura 2.3 (e) mostramos uma camada anelar caótica preenchida por uma trajetória simples entre duas curvas invariantes, mostradas na figura 2.3 (a). Na figura 2.3 (f) temos uma camada caótica preenchida por uma trajetória simples perto de ilhas, como na figura 2.3 (c).

O movimento caótico ocorre perto das separatrizes separando curvas invariantes de suas

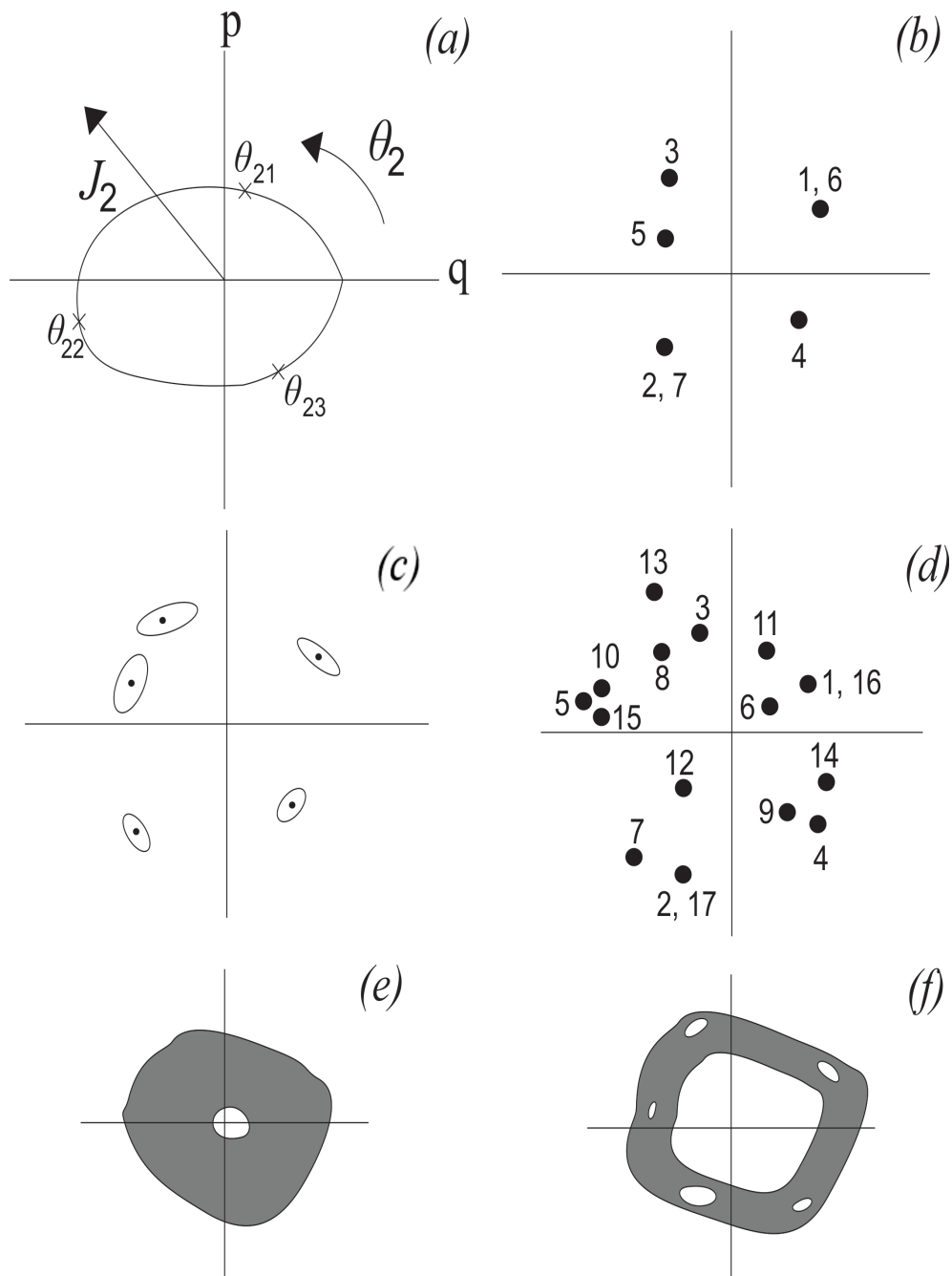


Figura 2.3: Diagrama esquemático mostrando a intersecção de uma trajetória com uma seção de superfície para $\theta_1 = \text{cte}$. A figura 2.3 (a) mostra uma trajetória que cobre toda a superfície de um torus. A figura 2.3 (b) mostra ressonância primária. A figura 2.3 (c) mostra ilhas primárias em torno de pontos fixos. A figura 2.3 (d) mostra ressonância secundária. A figura 2.3 (e) mostra uma região caótica entre duas curvas invariantes. A figura 2.3 (f) mostra uma região caótica próxima das ilhas. Fonte: a autora, com base na referência [4].

ilhas. A região caótica que se forma perto das separatrizes são conhecidas como *camada risonante*. Estas camadas apresentam uma dinâmica peculiar conforme o parâmetro de perturbação

ϵ varia, para uma pequena perturbação as camadas são finas e separadas por curvas invariantes, sendo que o acesso de uma camada com outra não é permitido.

Conforme aumentamos o valor de ϵ as curvas invariantes que separam as cadeias de ilhas vizinhas com suas camadas ressonantes são fortemente perturbadas e finalmente destruídas. As camadas se fundem quando a última curva invariante separando camadas circundando cadeias de ilhas é destruída, quando as camadas da ressonância primária se fundem ocorre o aparecimento de um movimento *fortemente caótico* [4].

2.3 Seção de Poincaré

A visualização das trajetórias em sistemas com alta dimensionalidade se torna eventualmente impossível. Para contornar este problema Poincaré mostrou uma forma de simplificar o estudo destes sistemas dinâmicos através das conhecidas seções de Poincaré. O nome é justamente uma homenagem ao cientista francês Jules Henri Poincaré que foi o primeiro a utilizar estas seções em 1899 para estudar o problemas de três corpos [1].

Podemos utilizar esta técnica para reduzir um sistema a tempo contínuo para um sistema discreto. A redução de um fluxo em um espaço de fases N -dimensional para um espaço de fases com $(N-1)$ dimensões é feita pela aplicação do mapa de Poincaré ou mapa de retorno.

Fazendo uma escolha apropriada de uma superfície $(N-1)$ -dimensional no espaço de fases N -dimensional e marcando as intersecções das trajetórias com essa superfície obtemos a mapa de Poincaré. Portanto, as intersecções sucessivas geram o mapa de Poincaré e a superfície onde marcamos os pontos é denominada seção de Poincaré [3].

Na figura 2.4 temos um espaço de fases constituído por x_1 , x_2 e x_3 e a superfície escolhida é o plano $x_3 = S$. Podemos observar que as intersecções na superfície acontecem nos pontos A e B e são consideradas em um único sentido. Portanto, o mapa de Poincaré é obtido considerando a intersecção da trajetória com a superfície S [3]. Uma das vantagens na utilização da seção de Poincaré é a redução de um espaço de fases N -dimensional em um espaço de fases $(N-1)$ -dimensional, proporcionando a eliminação de uma variável do problema original.

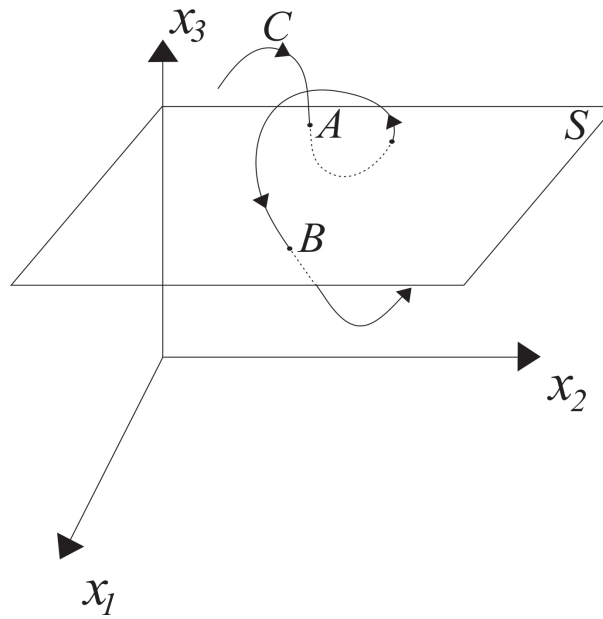


Figura 2.4: Seção de Poincaré. Fonte: a autora, com base na referência [42].

2.4 Teorema KAM

Como mencionado em seções anteriores, existem dois tipos de sistemas Hamiltonianos: os integráveis e os quase integráveis. Os sistemas integráveis apresentam um comportamento bem definido e de fácil estudo, ao contrário, os quase integráveis são mais complexos e requerem um tratamento matemático muito mais robusto para resolvê-los. Deste modo, podemos questionar o quão robusta é a integrabilidade quando aplicada uma certa perturbação em um sistema integrável.

A transição de um sistema integrável para um não integrável foi analisada e solucionada em etapas por Andrey N. Kolmogorov em 1954, que enunciou a solução ou o teorema propriamente dito, Juergen K. Moser em 1962 que determinou a solução para mapas, e Vladimir I. Arnold em 1963 para fluxos. O nome dado ao teorema é em homenagem a estes pesquisadores, o qual recebe o nome de *Teorema KAM* [3, 4, 17, 44].

Considerando um sistema bidimensional integrável sob uma perturbação, representado por uma Hamiltoniana como função das variáveis ação-ângulo

$$\mathcal{H}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}), \quad (2.20)$$

em que o Hamiltoniano é separado em uma parte integrável, denotado por \mathcal{H}_0 , mais um Hamiltoniano \mathcal{H}_1 relacionado a uma pequena perturbação ϵ . A resposta para o que acontece quando adicionamos uma pequena perturbação a um sistema integrável é explicada pelo teorema KAM, que essencialmente nos diz que quase todos os torus sobrevivem a pequenas perturbações, embora que alguns torus são destruídos e outros deformados, e as trajetórias ainda cobrem um sub-conjunto do espaço de fases [17, 44].

Em princípio, imagina-se que para $\epsilon \neq 0$ não ocorra nenhuma limitação com relação às trajetórias, pois as constantes de movimento são destruídas. No entanto, de acordo com o teorema KAM, a maioria dos torus irracionais são apenas distorcidos para pequenas perturbações [17], como pode ser visto na figura 2.5.

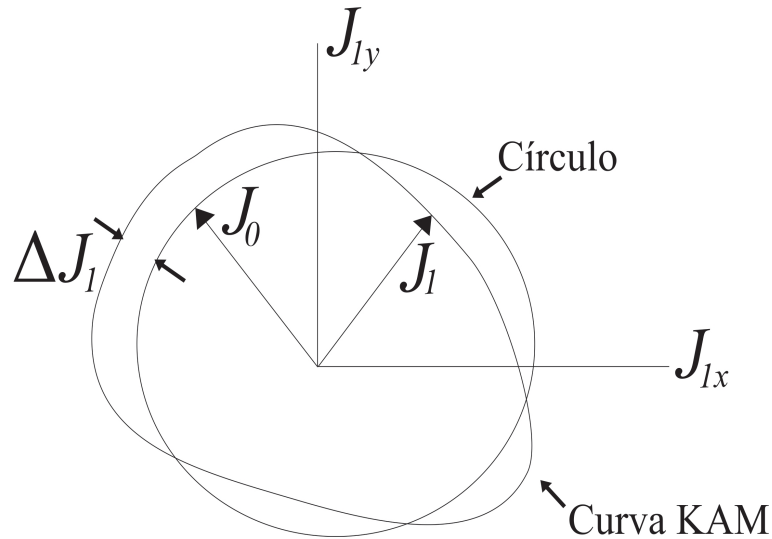


Figura 2.5: Superfície KAM que surge após deformação de uma curva com α irracional, gerando uma curva KAM. O movimento não perturbado é representado pelo círculo tracejado de raio J_0 . Após a perturbação surge a curva KAM, círculo de raio J_1 , sendo deformada de uma quantidade ΔJ_1 . Fonte: a autora, com base na referência [43].

Neste sentido, enumeramos algumas condições que devem ser satisfeitas para que o teorema KAM tenha validade:

- ✓ independência linear das frequências, onde

$$m \cdot \omega(\mathbf{I}) \neq 0, \quad (2.21)$$

em um certo domínio de \mathbf{I} (suficientemente não-linear), sendo que $\omega = \partial \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) / \partial \mathbf{I}$ [4];

- ✓ a perturbação tem que ser suave (um número suficiente de derivadas contínuas de \mathcal{H}_1) [4];
- ✓ condições iniciais suficientemente afastadas das ressonâncias (o teorema KAM perderá validade se forem escolhidas condições iniciais próximas ao valor de ressonância) [4].

O último torus KAM a ser destruído é aquele cuja frequência é o número mais irracional possível. Pode-se fazer uma boa aproximação de um número irracional G por números racionais através de uma expansão de frações continuadas [3] na forma

$$G = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} \quad (2.22)$$

em que os termos a_i possuem valores inteiros. Uma aproximação racional de um número irracional pode ser obtida truncando a fração em um certo valor de a_n . Desta forma, o número mais irracional é definido como sendo o que se aproxima mais lentamente do valor inteiro da fração (2.22) [3]. O número mais irracional que existe é denominado razão áurea, e pode ser representado da seguinte maneira

$$G_a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (2.23)$$

o qual converge para $G_a \approx 0,6180$ [44], mais conhecido como *número áureo*. Para o modelo do mapa padrão, a última curva KAM será destruída para um valor crítico de $K \approx 0,97$, cujo valor foi previsto analiticamente e numericamente [3]. Portanto, o teorema KAM garante a existência das curvas invariantes em sistemas de dois ou mais graus de liberdade.

2.5 Teorema Poincaré-Birkhoff

O teorema KAM se propõe a investigar o que ocorre com os torus irracionais quando submetidos a uma pequena perturbação que é adicionada a Hamiltoniana integrável, mas não é válido quando estamos interessados em torus racionais $\alpha = r/s$ (para r e s números inteiros). Portanto, para analisar os torus ressonantes com α racional e suas vizinhanças utilizamos o *teorema de Poincaré-Birkhoff*. De acordo com o teorema de Poincaré-Birkhoff, o termo perturbativo fará com que o torus seja destruído e $2ks$ pontos, para $k = 1, 2, \dots$, apareçam no seu lugar. Surge um número par de pontos, sendo ks pontos elípticos e ks pontos hiperbólicos [3, 4, 44].

Vamos considerar o mapa de torção não perturbado [4], escolhendo um círculo com α racional, o qual um ponto inicial volta a si mesmo após s iterações, e mais duas curvas KAM. Se assumirmos por definição que α aumenta para fora, então existe uma curva externa a superfície racional denominada por α_+ , que após s iterações mapeia no sentido anti-horário e uma curva interna a superfície racional denominada por α_- , que mapeia no sentido horário, como representado na figura 2.6.

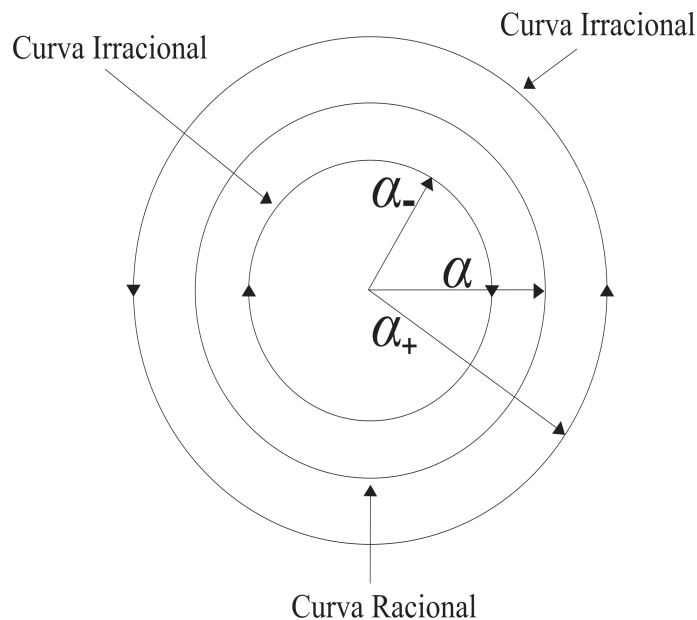


Figura 2.6: Representação de três círculos invariantes do mapa de torção não perturbado. O círculo mais externo representa uma curva KAM com α_+ irracional e mapeia no sentido anti-horário. O círculo mais interno representa uma curva KAM com α_- irracional e mapeia no sentido horário. Entre as duas curvas KAM temos uma curva α racional. Fonte: a autora.

Quando adicionamos uma pequena perturbação, pelo teorema KAM, sabemos que as curvas α_+ e α_- podem sofrer deformações. No lugar da curva α obtemos duas novas curvas α_ϵ e α'_ϵ , como pode ser visto na figura 2.7. Devido a propriedade de conservação das áreas, temos que a área limitada pela curva α_ϵ é igual a limitada pela curva α'_ϵ . Isso só é possível se as duas curvas se cruzam um número par de vezes [3, 4].

Cada um destes cruzamentos quando iterado s vezes retornam à sua posição inicial, de modo que cada uma das s iterações são pontos fixos. Assim, para um mesmo número de cruzamentos, deve haver $2ks$ pontos, chamados de pontos fixos de Poincaré-Birkhoff [4].

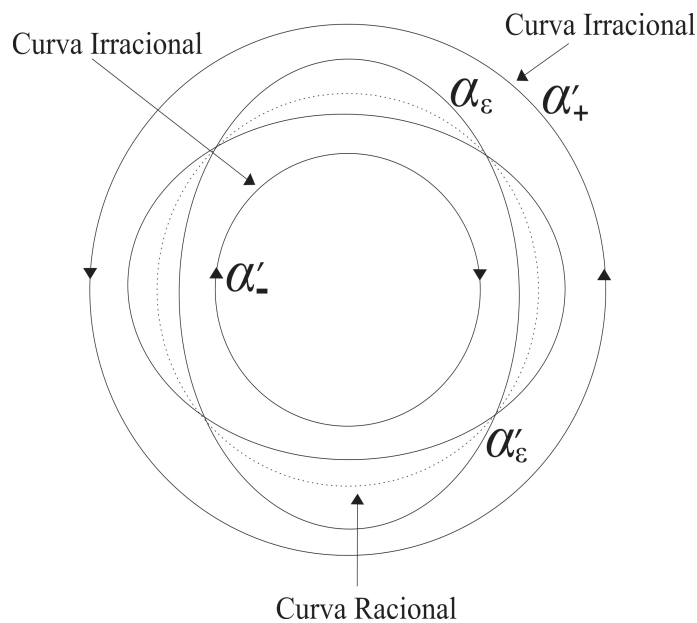


Figura 2.7: Curvas α_ϵ e α'_ϵ geradas após s iterações que se interceptam um número par de vezes. Fonte: a autora.

Examinando o mapeamento na vizinhança dos pontos fixos de Poincaré-Birkhoff, vemos que os pontos são mapeados da curva α_ϵ para a curva α'_ϵ , conforme mostrado na figura 2.8. Os pontos na vizinhança do ponto fixo chamado *elíptico*, tendem a circundar o ponto elíptico, conforme marcado em (a) e (c) na figura 2.8 e pontos na vizinhança do ponto fixo dito *hiperbólico*, tendem a se afastar do ponto fixo, conforme marcado em (b) e (d) na figura 2.8.

Então podemos descrever qualitativamente os ks pontos elípticos e os ks pontos hiperbólicos, que surgem após a inserção de uma pequena perturbação na Hamiltoniana integrável, da seguinte forma:

- *Pontos Elípticos*: são pontos fixos estáveis e qualquer ponto próximo de um ponto elíptico

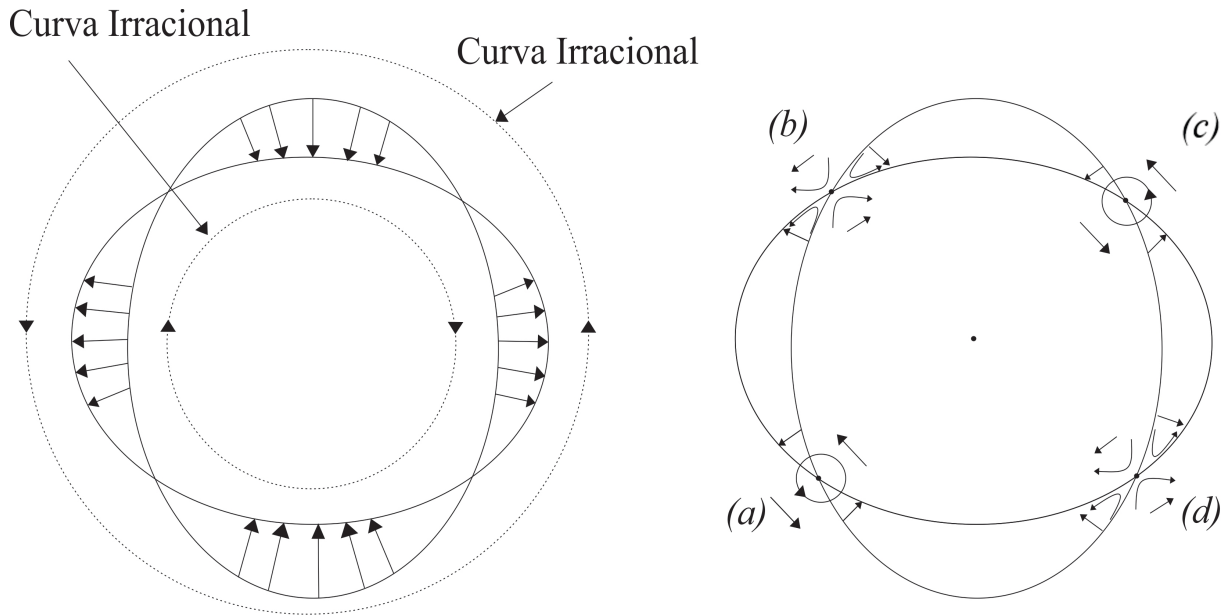


Figura 2.8: Pontos fixos de Poincaré-Birkhoff gerados pelo cruzamento das curvas α_ϵ e α'_ϵ e o comportamento de trajetórias na vizinhança destes pontos. O ponto (a) e (c) é dito elíptico e trajetórias iniciadas na sua vizinhança tendem a circular o ponto fixo. O ponto (b) e (d) é dito hiperbólico e trajetórias iniciadas próximas a estes pontos tendem a se afastar. Fonte: a autora.

permanece na sua vizinhança [3, 4, 44].

- **Pontos Hiperbólicos:** são pontos fixos instáveis e possuem direções estáveis e instáveis. Logo, uma trajetória iniciada nas vizinhanças deste ponto tende a se afastar rapidamente do mesmo.

Podemos considerar um ponto hiperbólico como a junção de quatro curvas: duas curvas com trajetórias que se aproximam do ponto fixo pertencendo a Hamiltoniana H^+ , e duas curvas com trajetórias que se afastam do ponto fixo, fazendo parte da Hamiltoniana H^- . Por isso, um ponto P pertencerá a H^+ , somente se, após T_x^n iterações, com n tendendo ao infinito, se aproximar do ponto.

Desta forma, para o ponto P pertencer a H^- , a transformada inversa do mapa iterada n vezes deve se aproximar do ponto. Neste cenário, considerando dois pontos hiperbólicos adjacentes, a curva H^- que sai de um ponto hiperbólico (a), como mostrado na figura 2.9, intercepta uma curva H^+ que está se aproximando do outro ponto hiperbólico (b). O ponto de intersecção entre as curvas é denominado homoclínico, e representado pelo ponto X . O primeiro cruzamento representado em X implica em cruzamentos seguintes e as áreas entre as

trajetórias de H^+ e H^- entre dois cruzamentos consecutivos são conservadas. Devido ao fato de que os pontos de cruzamento estão cada vez mais próximos, verifica-se que H^- oscila cada vez mais em torno de H^+ . Esta infinidade de cruzamentos próximos do ponto hiperbólico é chamada de emaranhamento homoclínico [4].

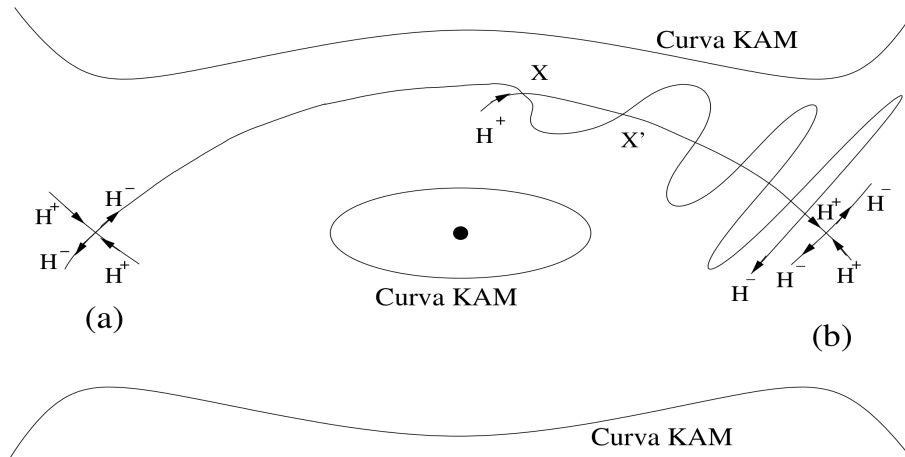


Figura 2.9: Representação gráfica do emaranhamento homoclínico, mostrando os infinitos cruzamentos que ocorrem entre as variedades instável e estável, bem como a distância entre os pontos homoclínicos adjacentes que diminui quanto mais próximos do ponto hiperbólico. Fonte: [4].

Devido ao comportamento de emaranhamento observamos a presença de caos ao redor da separatriz, entre duas curvas KAM, formando uma região de caos local [4]. Portanto, o espaço de fases de um sistema quase integrável de dois graus de liberdade, no qual a perturbação é suficientemente pequena, será formado por curvas KAM provenientes de curvas com α irracional, por pontos elípticos e hiperbólicos provenientes de curvas com α racional, novas curvas KAM em torno dos novos pontos elípticos e regiões de caos local que preenchem regiões limitadas por duas curvas KAM.

Com o aumento da perturbação mais torus irracionais serão quebrados, fazendo com que ocorra a ligação entre áreas de caos local. A última superfície KAM a ser quebrada gera a transição da região de caos local, caracterizada por ser isolada e fraca, para uma região de caos global, caracterizada pela coexistência de regiões caóticas e regulares conectadas. Tal transição ocorrerá para um valor crítico do parâmetro de perturbação.

Em resumo, o mecanismo de origem da dinâmica caótica pode ser entendido observando o comportamento das trajetórias nas vizinhanças dos pontos fixos, sejam hiperbólicos ou elípticos, que são previstos pelo teorema de Poincaré-Birkhoff. Os pontos elípticos tornam-se centro

de regiões regulares, chamadas ilhas de ressonância que encontram-se imersas no mar caótico. Por outro lado, os pontos fixos hiperbólicos são importantes para o aparecimento do comportamento caótico. Quanto a estabilidade dos torus, conclui-se que, de acordo com o teorema KAM os torus irracionais sobrevivem sob uma pequena perturbação, o que não acontece com os torus racionais, que são destruídos.

2.6 Variedades

As variedades estáveis e instáveis são conhecidas como curvas invariantes e estão associadas aos pontos de sela de trajetórias periódicas, sendo que o comportamento dinâmico de um sistema não-linear é governado por essas curvas invariantes. Em casos de baixa dimensionalidade é possível visualizar a transição do comportamento periódico para o caótico estudando como as estruturas de variedades estáveis e instáveis de certos pontos de sela mudam com um parâmetro [45]. O conceito de variedades é muito importante para o contexto do nosso estudo, pois estamos interessados em observar como elas estão dispostas no espaço de fases, para posteriormente estudar a hiperbolicidade do sistema utilizando o cálculo entre os ângulos das variedades estáveis e instáveis.

Podemos definir as variedades estáveis e instáveis de um estado de equilíbrio para um mapa f . Desta forma, a variedade estável \mathcal{W}^s de um estado de equilíbrio \mathbf{x}^* corresponde ao conjunto de todos os pontos \mathbf{x} , tais que as trajetórias que se iniciam em \mathbf{x} tendem a \mathbf{x}^* quando o sistema evolui na direção positiva de t . Ou seja, $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Ou seja, quando iteramos o mapa para frente no tempo a variedade que se aproxima do ponto fixo é a estável [3, 42].

De forma similar, a variedade instável \mathcal{W}^u de um estado de equilíbrio \mathbf{x}^* corresponde ao conjunto de todos os pontos \mathbf{x} , tais que as trajetórias que se iniciam em \mathbf{x} tendem a \mathbf{x}^* quando t cresce negativamente. Ou seja, $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow -\infty$, isto é, quando iteramos o mapa para trás no tempo a variedade que se aproxima do ponto fixo é a instável [3, 42].

As variedades de tipos diferentes - uma estável e outra instável - podem se cruzar infinitas vezes, e estes cruzamentos são responsáveis pela complexidade da dinâmica de sistemas não lineares, sendo conhecido por emaranhamento das variedades. Existem dois tipos de cruzamentos entre as variedades estáveis e instáveis: os cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos

[3, 4, 44].

Os cruzamentos homoclínicos ocorrem quando as variedades estáveis e instáveis de um mesmo ponto fixo se cruzam. Os cruzamentos heteroclínicos ocorrem quando as variedades estáveis e instáveis de pontos fixos diferentes se cruzam [44]. Na figura 2.10 podemos ver esquematicamente como ocorrem os dois tipos de cruzamentos: homoclínicos e heteroclínicos.

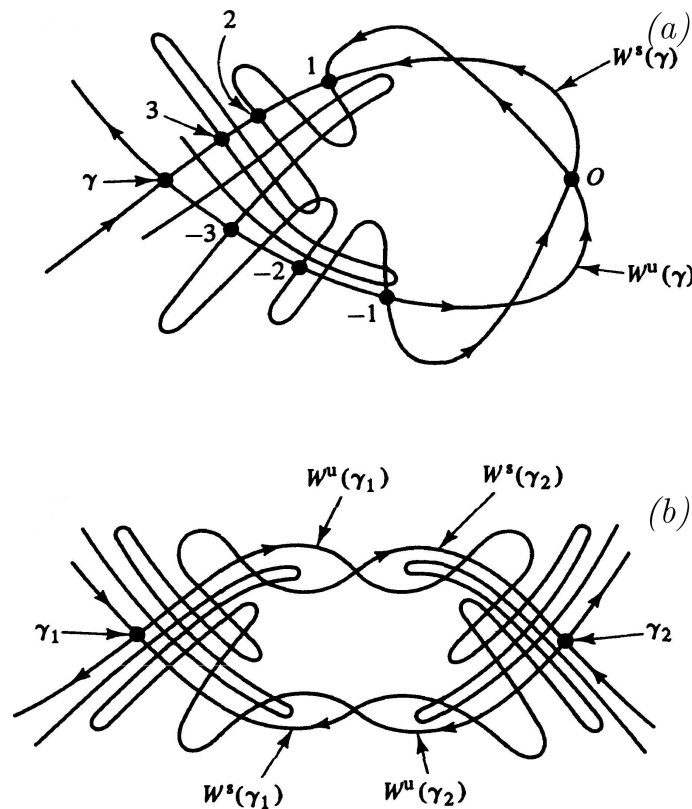


Figura 2.10: Quando interseções homoclínicas e heteroclínicas estão presentes no espaço de fases de um sistema sua dinâmica torna-se complicada. Em (a) temos um cruzamento homoclínico das variedades estáveis e instáveis do ponto γ e na (b) temos um cruzamento heteroclínico das variedades instáveis e estáveis dos pontos γ_1 e γ_2 . Fonte: [3].

Na figura 2.10 (a) temos um cruzamento homoclínico, onde γ é um ponto fixo que tem suas variedades estáveis e instáveis definidas $W^s(\gamma)$ e $W^u(\gamma)$, respectivamente. Iterando o ponto O para frente no tempo, que se aproxima de γ pela variedade estável, sucessivamente mapeia os pontos 1, 2, 3. Iterando o ponto O para trás no tempo temos o mapeamento sucessivamente para os pontos -1, -2, -3 [3]. Na figura 2.10 (b) temos um cruzamento heteroclínico dos pontos fixos γ_1 e γ_2 da variedade estável $W^s(\gamma_2)$ com a variedade instável $W^u(\gamma_1)$ e con-

sequentemente da variedade estável $\mathcal{W}^s(\gamma_1)$ com a variedade instável $\mathcal{W}^u(\gamma_2)$.

2.7 Expoente de Lyapunov

Uma das características dos sistemas caóticos relaciona-se a chamada dependência sensível às condições iniciais e uma das formas mais utilizadas na determinação dessa dependência sensível dá-se através dos chamados *expoentes de Lyapunov*. Os expoentes de Lyapunov quantificam a taxa de divergência ou convergência exponencial entre trajetórias inicializadas infinitesimalmente próximas uma da outra [3, 4, 44].

A quantidade de expoentes de Lyapunov de um sistema Hamiltoniano é a mesma quantidade de dimensões deste. Portanto, no nosso caso onde estudamos o mapa padrão, que é um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade teremos dois expoentes de Lyapunov. Chamamos de *espectro de Lyapunov* o conjunto de todos os expoentes de Lyapunov do sistema [46] e a soma de todos os elementos do espectro de Lyapunov deve ser igual a zero, $\sum_i \lambda_i = 0$, pois nestes sistemas ocorre a conservação do volume do espaço de fases [4].

Para definirmos o expoente de Lyapunov, vamos considerar um mapa cuja variável temporal é discreta. Estudos da estabilidade de uma trajetória do sistema começando em um ponto inicial \mathbf{x}_0 , pode ser realizada através da evolução de trajetórias próximas. Tomando dois pontos muito próximos $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$, separados por uma distância $\Delta\mathbf{x}(0)$, conforme iteramos o mapa, eles movem-se afastando-se exponencialmente um do outro, representado na figura 2.11, de acordo com

$$\Delta\mathbf{x}(n) \approx \Delta\mathbf{x}(0)e^{\lambda n}, \quad (2.24)$$

onde λ é a taxa de expansão exponencial local, conhecido como expoente de Lyapunov. Para $\lambda < 0$, as trajetórias convergem exponencialmente, ou seja, aproximam-se exponencialmente com o passar do tempo, e para $\lambda > 0$ as trajetórias divergem exponencialmente, ou seja, afastam-se exponencialmente com o passar do tempo. Para sistemas caóticos devemos ter pelo menos um expoente de Lyapunov maior que zero [46].

Deste modo, definimos o expoente de Lyapunov da seguinte forma

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\mathbf{x}(0) \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\Delta\mathbf{x}(n)}{\Delta\mathbf{x}(0)} \right), \quad (2.25)$$

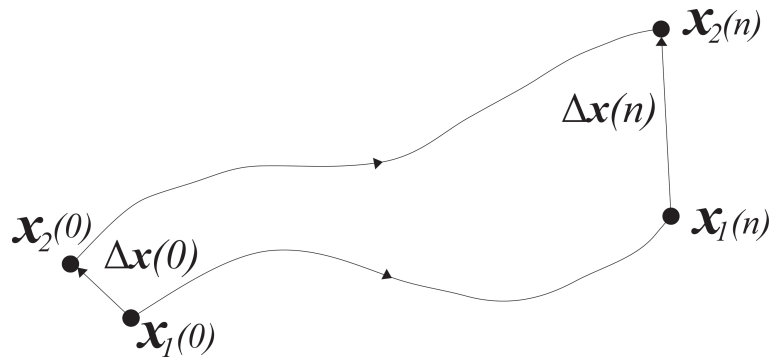


Figura 2.11: Representação esquemática da separação das trajetórias geradas por diferentes condições iniciais. Fonte: a autora.

representando a taxa exponencial média de afastamento entre trajetórias escolhidas muito próximas umas das outras.

Entretanto, para muitos problemas práticos o cômputo dos expoentes de Lyapunov, dado pela equação (2.25) não é possível, pois temos o problema do crescimento exponencial que pode conduzir a erros numéricos e outra questão é o fato de não poder obedecer o limite temporal de iteração tendendo para infinito ($n \rightarrow \infty$).

O procedimento numérico para o cálculo do maior expoente de Lyapunov a tempo finito pode ser descrito como [44, 47]: considerando uma pequena separação inicial $\delta \mathbf{x}(0)$, entre as trajetórias principal e da denominada satélite, até que $|\delta \mathbf{x}_i|$ torne-se suficientemente grande (num intervalo de tempo τ), para então determinarmos a quantidade $\ln(|\delta \mathbf{x}_i|/|\delta \mathbf{x}(0)|)$. A partir disso, deve ser feito o reescalonamento de $|\delta \mathbf{x}_i|$ por um fator $|\delta \mathbf{x}(0)|/|\delta \mathbf{x}_i|$, e assim por diante, sempre repetindo o reescalonamento até o instante de tempo desejado, conforme mostrado na figura 2.12.

Portanto, a partir deste procedimento foi mostrado que o espectro de Lyapunov a tempo finito pode ser calculado através da seguinte equação, de acordo com [49]

$$\lambda_n = \frac{1}{n\tau} \sum_i^{n\tau} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{x}_i|}{|\delta \mathbf{x}(0)|} \right), \quad (2.26)$$

com $i = 1, 2, \dots, n\tau$. Então, os expoentes de Lyapunov a tempo finito medem a taxa da convergência ou da divergência entre trajetórias, a cada trecho de n tempos (ou n iteradas).

Podemos reescrever a expressão para o expoente de Lyapunov a tempo infinito em ter-

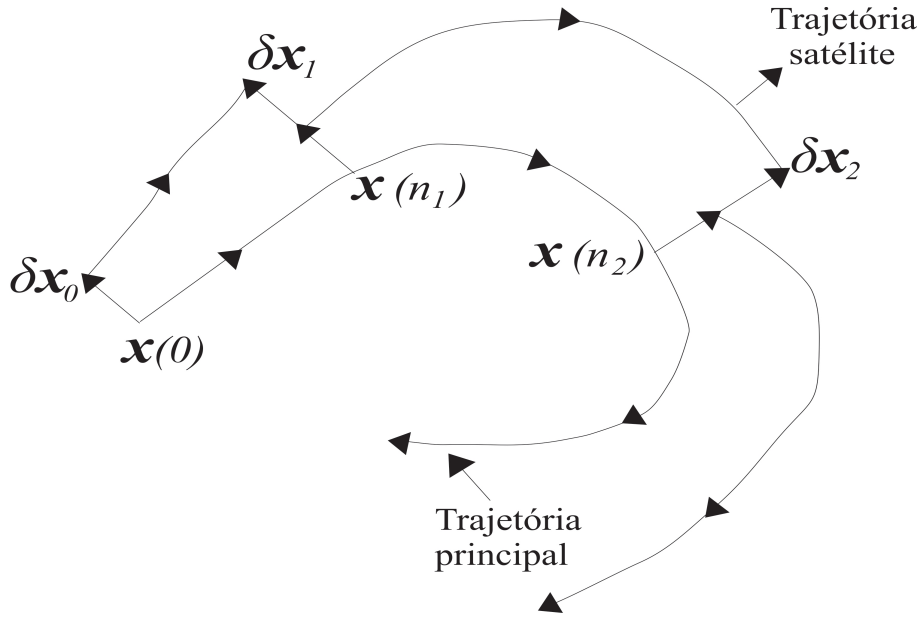


Figura 2.12: Representação do procedimento utilizado para o cálculo do maior expoente de Lyapunov a tempo finito. Fonte: a autora, com base na referência [48].

mos da matriz jacobiana. Inicialmente tomamos \mathbf{x}_0 sendo a condição inicial e \mathbf{x}_n a correspondente trajetória. Vamos considerar um deslocamento infinitesimal de \mathbf{x}_0 na direção de um vetor tangente \mathbf{y}_0 , a evolução deste vetor é dada por

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{y}_n, \quad (2.27)$$

sendo $\mathbf{y}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}_0$, onde

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{x}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{x}_0). \quad (2.28)$$

Logo, para uma condição inicial \mathbf{x}_0 e uma orientação inicial de um deslocamento infinitesimal dado por $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$, o expoente de Lyapunov pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_n|}{|\mathbf{y}_0|} \right), \\ \lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0)$ denota a matriz Jacobiana da n -ésima iterada do sistema calculada em \mathbf{x}_0 , e \mathbf{u}_0 é o autovetor correspondente ao k -ésimo autovalor de $\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0)$. Quando computamos (2.29) a

tempo finito temos

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|. \quad (2.30)$$

Do ponto de vista computacional, não é possível calcular o expoente de Lyapunov desta maneira, pois os vetores crescem exponencialmente. Para contornar este problema uma solução foi desenvolvida independentemente por Bennetin [50], Shimada e Nagashima [51], que propuseram sucessivos processos de ortonormalização ao longo das trajetórias através do método de Gram-Schmidt. Para o nosso caso este procedimento consiste em reortonormalizar a matriz jacobiana \mathbf{DM} a cada intervalo de tempo.

O procedimento de reortonormalização de Gram-Schmidt é amplamente utilizado no cálculo numérico do espectro de Lyapunov a tempo finito. Considere um conjunto de k vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ que compõem um espaço vetorial de dimensão $N \geq k$. Ou seja, o objetivo é determinar uma base de k vetores ortonormais $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ que descrevam o subespaço projetado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. A solução para este problema é a seguinte [3]

$$\mathbf{u}_i = \left[\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j \right] / \beta_j, \quad (2.31)$$

onde

$$\beta_j = \left\| \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j \right\|, \quad (2.32)$$

com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$. Deste modo, obtendo \mathbf{u}_i , poderemos determinar a base de k vetores ortonormais, começando em $i = 1$ e seguindo sucessivamente até o maior valor de i . O procedimento de reortonormalização de Gram-Schmidt nunca afeta a direção do primeiro vetor calculado, logo este ainda aponta na direção de maior crescimento.

2.8 Hiperbolicidade do espaço de fases

Uma propriedade fundamental de sistemas dinâmicos é o conceito de hiperbolicidade do espaço de fases. Caracterizamos uma região hiperbólica \mathcal{S} do espaço de fases como um *ensemble* para o qual o espaço de fases tangente em cada ponto se decompõe continuamente em variedades estáveis e instáveis [52]. Desta maneira, um sistema dinâmico é dito hiperbólico se no espaço de fases tangente as variedades estáveis e instáveis forem transversais entre si em

todo espaço, ou seja, se o cruzamento entre as variedades apresentarem ângulos diferentes de zero. Portanto, a condição de hiperbolicidade requer transversalidade das variedades estáveis e instáveis [35, 53].

No entanto, sistemas dinâmicos relevantes fisicamente apresentam um caráter não hiperbólico, isto é, as variedades estáveis e instáveis não são transversais em todo espaço e um mecanismo que causa a não hiperbolicidade é a tangência entre as variedades estáveis e instáveis [54]. Contudo, quando um sistema dinâmico possui a propriedade de hiperbolicidade seu tratamento teórico, em geral, torna-se fácil comparado com casos não hiperbólicos [55].

Outro ponto importante associado à hiperbolicidade é a propriedade estatística dos tempos de retorno de Poincaré, sendo que, para sistemas hiperbólicos e não hiperbólicos existem dois comportamentos distintos. Quando temos um sistema hiperbólico o decaimento é exponencial, e para um sistema não hiperbólico temos um decaimento algébrico [56].

A caracterização da instabilidade de trajetórias caóticas pode ser feita por meio do cálculo dos expoentes de Lyapunov que quantifica a dependência sensível às condições iniciais, como mostrado na seção anterior. Além disso, os expoentes de Lyapunov possuem propriedades intrínsecas que permitem quantificar propriedades físicas como, entropia local e dimensão de atratores [53, 57].

Existe um interesse não somente nos valores dos expoentes de Lyapunov, mas também nos correspondentes vetores de Lyapunov que servem de base para o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Os vetores de Lyapunov são gerados pelo procedimento de Gram-Schmidt e são utilizados para o estudo de caracterização de sistemas dinâmicos. Por muito tempo, foram os únicos vetores numericamente acessíveis. Tais vetores apresentam algumas desvantagens, por exemplo, são ortonormais, mesmo quando as variedades estáveis e instáveis são quase tangentes, não são invariantes em tempos reversos e não são covariantes. Contudo, nos últimos anos vem ocorrendo um crescente interesse pelos vetores de Lyapunov covariantes que abrangem direções intrínsecas locais no espaço de fases de sistemas caóticos [53, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64].

Até pouco tempo atrás, devido a falta de algoritmos eficientes para determinar os vetores de Lyapunov covariantes, poucos trabalhos tinham sido elaborados na literatura. Todavia, a situação mudou essencialmente há alguns anos com o desenvolvimento de ferramentas capazes de calcular tais vetores, uma vez que proporcionam todas as informações sobre a estrutura

geométrica local do espaço tangente, em oposição aos expoentes de Lyapunov que representam quantidades globais.

A possibilidade de caracterizar e calcular um conjunto de vetores locais do espaço de fases tangente associados aos expoentes de Lyapunov permite investigar diretamente as direções de expansão e contração de um determinado sistema dinâmico. Estes vetores possuem algumas propriedades relevantes a considerar como, coincidir com as variedades estáveis e instáveis, ser invariante sob inversão do tempo e covariante [57].

Uma abordagem inovadora proposta por Ginelli et. al [53] estabelece que os vetores de Lyapunov covariantes são construídos a partir da iteração de um sistema dinâmico para frente (expansão local) e para trás (contração local) no tempo, permitindo determinar um conjunto de direções em cada ponto do espaço de fases que é invariante sob inversão do tempo e covariante.

Como deve ser levado em consideração que nem todos os sistemas dinâmicos são totalmente hiperbólicos, o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de quantificar seu grau de hiperbolicidade tem alto grau de relevância. Portanto, a quantificação da hiperbolicidade do espaço de fases, é dado pela determinação dos ângulos entre as variedades estáveis e instáveis obtidos através dos vetores de Lyapunov covariantes.

O grau de hiperbolicidade ou não hiperbolicidade de uma região \mathcal{S} pode ser estudado computando os ângulos locais entre as duas variedades, sendo que as discussões futuras serão feitas para um sistema bidimensional [53]

$$\theta(p, x) = \cos^{-1}(|\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}|), \quad (2.33)$$

para $(p, x) \in \mathcal{S}$. Portanto, definimos $\mathbf{u}(p, x)$ o vetor de Lyapunov covariante associado ao expoente de Lyapunov máximo λ_u , quando iteramos para frente e $\mathbf{s}(p, x)$ é o vetor de Lyapunov covariante associado ao expoente de Lyapunov mínimo λ_s , quando iteramos para trás. Os vetores $\mathbf{u}(p, x)$ e $\mathbf{s}(p, x)$ são tangentes às variedades instáveis e estáveis, respectivamente, no ponto (p, x) . Se $\theta(p, x) \sim 0$ indica tangência entre a variedade estável e instável em (p, x) [53].

O procedimento numérico para quantificar o grau de hiperbolicidade do espaço de fases de um sistema é dado por meio do cálculo dos vetores de Lyapunov covariantes, o qual foi obtido da referência [53]. Desta forma, do ponto de vista numérico o cálculo dos vetores de Lyapunov covariantes se estrutura em duas fases distintas: a primeira fase segue próximo ao

algoritmo padrão introduzido por Benettin et. al [50] para computar os expoentes de Lyapunov e a segunda fase consiste na iteração para trás no tempo na dinâmica do sistema. A seguir descreveremos de maneira mais detalhada as duas fases enunciadas anteriormente.

A primeira fase consiste em evoluir para frente no tempo a dinâmica a partir de uma condição inicial genérica x_0 e uma base ortonormal de vetores. Para o cômputo desta base é utilizado o processo de reortonormalização de Gram-Schmidt, o mesmo que é usado para obter os expoentes de Lyapunov. A diferença que agora serão guardadas as informações contidas nas matrizes Q e R obtidas da decomposição QR durante o processo de reortonormalização de Gram-Schmidt, pois as informações presentes nestas matrizes serão necessárias para obter a dinâmica inversa. Deve-se evoluir o sistema por um tempo suficientemente longo para que ocorra a convergência desta base de vetores que são conhecidos como vetores de Lyapunov. A decomposição QR , também conhecida como fatorização QR , de uma matriz é a decomposição em uma matriz ortogonal Q (isto é, $Q^T Q = I$) e uma triangular superior R .

A segunda fase do cálculo consiste em utilizar as informações contidas na matriz R , envolvida no processo de ortonormalização, para inverter no tempo a dinâmica. Escolhe-se um vetor genérico dentro de um sub-espaço gerado pelos vetores de Gram-Schmidt, este é iterado para trás no tempo pela inversão da matriz triangular superior R . Itera-se por um tempo suficientemente grande, eventualmente alinhando com a (para trás) direção de maior crescimento após cada mudança de base, sendo este vetor denominado de vetor de Lyapunov covariante.

De forma sintetizada, o método para calcular os vetores de Lyapunov covariantes é baseado em ambas as iterações para frente e para trás no tempo, ou seja, consiste em evoluir para frente no tempo a dinâmica do sistema, ortonormalizando periodicamente para evitar erros anteriores e guardando a informação necessária para construir a dinâmica inversa. Em seguida, a evolução do sistema é realizada para trás no tempo por meio de um vetor genérico, seguindo a dinâmica através de cada mudança de base de Gram-Schmidt até que esteja alinhado ao longo da direção de maior crescimento [65].

De maneira simplificada, para um sistema dinâmico discreto no tempo com dimensão N , o método numérico segue os seguintes passos:

- Comece com uma condição inicial aleatória \vec{x}_0 e uma base de vetores ortonormais.
- Evolua a dinâmica para frente no tempo até obter a convergência dos vetores de Lyapunov,

conservando as informações.

- Continue sua trajetória no espaço de fases e armazene continuamente as informações da decomposição QR .
- Escolhe-se um vetor genérico, dentro de um sub-espaço gerado pelos vetores de Gram-Schmidt.
- Evolua este vetor para trás no tempo com as informações armazenadas na matriz R obtidas da decomposição QR .
- Após iterar por um tempo suficientemente longo o vetor se alinhará com a direção de maior crescimento, o qual é conhecido como vetor covariante de Lyapunov.

2.9 O efeito *stickiness* e as quase armadilhas dinâmicas

Nesta seção temos como objetivo discutir qualitativamente a existência de um tipo de singularidade que está presente no espaço de fases de alguns sistemas, que são as chamadas *quase armadilhas dinâmicas*, que causam o efeito de aprisionamento de trajetórias em torno das ilhas, conhecido na literatura como *stickiness effect* [12, 16, 21, 66, 67, 68, 69, 70, 71]. As quase-armadilhas dinâmicas encontram-se imersas no mar caótico e dependem da intensidade do parâmetro de não-linearidade [21].

O primeiro caso de aprisionamento de trajetórias em torno de ilhas foi observado por Contopoulos em 1971 [20], quando estava tentando encontrar os limites das ilhas em um sistema dinâmico de dois graus de liberdade e encontraram algumas trajetórias que permaneciam por um longo tempo ao redor dessas ilhas, mas que escapavam para o grande mar caótico ao redor das ilhas [68]. Esse fenômeno de aprisionamento das trajetórias em torno das ilhas foi denominado de *stickiness* por Karney em 1983 [66] e resultados similares foram encontrados por outros autores, Shirts and Reinhardt (1982), Karney (1983), Meiss et al. (1983), Menjuk (1983, 1985) entre outros [66, 68].

O efeito *stickiness* pode ser definido da seguinte maneira, quando iniciamos trajetórias no mar caótico observamos a existência de regiões do espaço de fases para as quais estas trajetórias são atraídas e permanecem um longo período antes de escaparem deste domínio. As

trajetórias que são aprisionadas pelas regiões de *stickiness* sofrem influência da dinâmica ao redor das ilhas, como consequência observamos a alteração da dinâmica no transporte de partículas. Em uma dada região do espaço de fases, onde a dinâmica regular e caótica coexistem, o transporte de partículas é afetado pelas estruturas conhecidas como *cantori* [16, 71]. Estas estruturas são torus invariantes e formam-se quando a curva KAM mais externa é destruída, aparecendo uma infinidade de lacunas por meio das quais as trajetórias dentro do cantori conseguem escapar [66]. Após a destruição do último torus KAM surgem os cantori, cujas entradas características deste tipo de barreira, são ilustradas na figura 2.13. As entradas são muito pequenas e, portanto, as trajetórias caóticas permanecem por longos tempos dentro do cantori antes de escapar para o mar caótico.

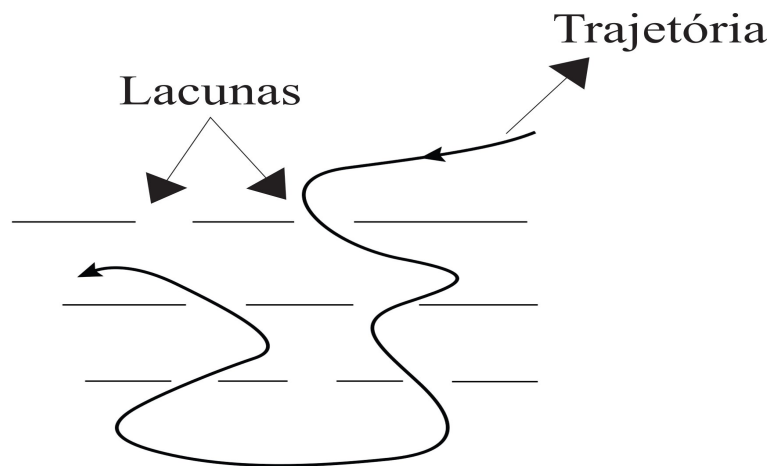


Figura 2.13: Figura ilustrativa de uma trajetória atravessando as entradas dos cantori. Observa-se diversas lacunas por onde a trajetória atravessa gastando um certo intervalo de tempo. Fonte: a autora, com base na referência [17].

Os cantori estão presentes em torno das ilhas e podem ser vistos como remanescentes de curvas KAM que foram destruídas devido ao incremento do parâmetro de não-linearidade [16]. O que se observa é que um pouco antes da constituição destas estruturas uma camada caótica se forma dentro da última curva KAM que acaba não permitindo a comunicação com o mar caótico externo, fazendo uma espécie de barreira dinâmica no sistema. Desse modo, as trajetórias que inicialmente estão confinadas num domínio caótico cercadas por cantori permanecerão aprisionadas nesta região por longos intervalos de tempo antes de escapar para o mar caótico, e neste momento o fenômeno de *stickiness* aparece [66].

Sendo assim, podemos destacar como as trajetórias que estão presentes no espaço de

fases, podem ser aprisionadas em torno das ilhas. Existem alguns tipos de aprisionamentos, dentre eles o aprisionamento devido a ilhas hierárquicas, as quase armadilhas de rede caótica e as quase armadilhas de camada caótica [17, 21], e possuem tais características:

- Quase armadilha de ilhas hierárquicas

As quase armadilhas de ilhas hierárquicas foram introduzidas e descritas por Zaslavsky em 1995, mas somente no ano de 1997 foram descritas para sistemas como o mapa padrão e o mapa da teia (*web map*) [21]. Esta quase armadilha dinâmica se localiza em torno de cadeias de ilhas ressonantes e quando uma trajetória é aprisionada ela despende um longo tempo em torno deste domínio hierárquico de ilhas, ou seja, a trajetória sofre o efeito stickiness em torno de uma sequência de ilhas em torno de ilhas de menor ressonância. Na figura 2.14 temos um exemplo de quase armadilha de ilhas hierárquicas.

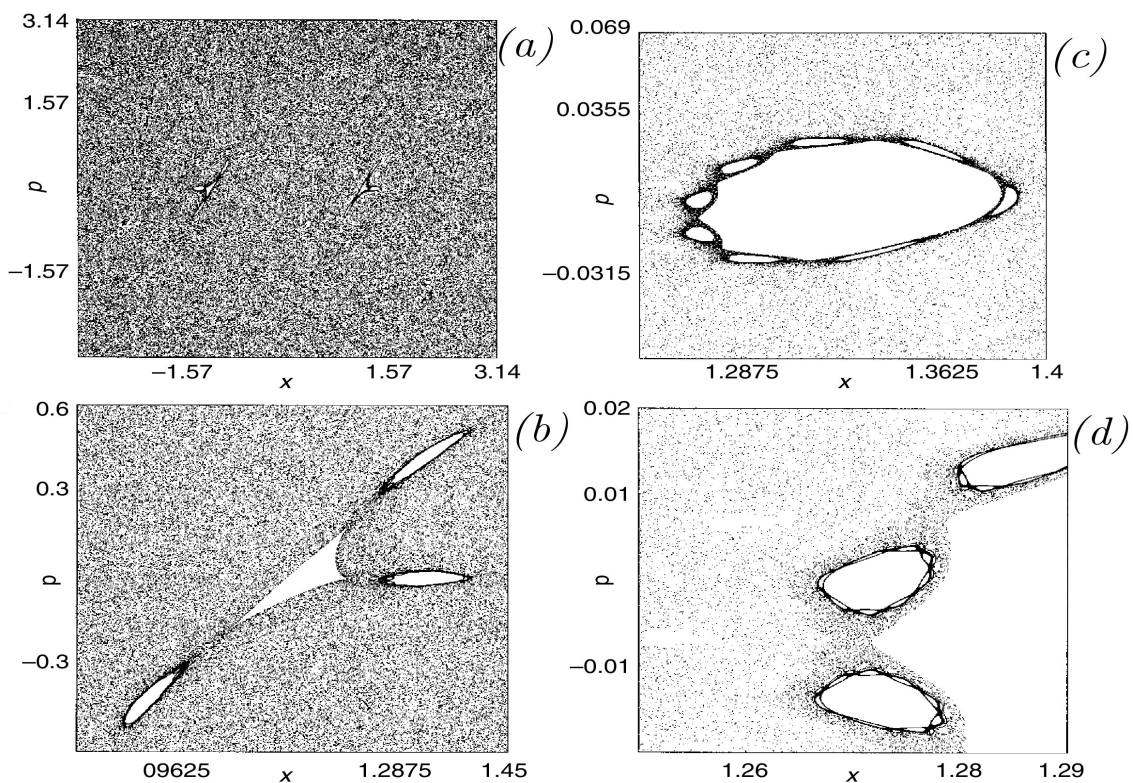


Figura 2.14: Representação de uma quase armadilha dinâmica de ilhas hierárquicas para o mapa padrão. Em (a) temos o espaço de fases do sistema, composto por duas ilhas. (b) Ampliação de uma das ilhas de (a), apresentando 3 ilhas. (c) Ampliação de uma das 3 ilhas de (b), onde pode-se observar 8 ilhas ao redor desta. (d) Ampliação de uma cadeia de três ilhas de (c), sendo que cada uma destas 3 ilhas são compostas por 8 ilhas ao seu redor novamente. Fonte: [17].

Na figura 2.14 (a) temos o espaço de fases para o mapa padrão para o valor do parâmetro $K = 6,90875$ e as figuras 2.14 (b),(c) e (d) são ampliações das ilhas observando que quanto mais ampliarmos surgem mais cadeias de ilhas. Para este caso temos a ocorrência de uma quase armadilha dinâmica de ilhas hierárquicas, pois a cada ampliação de uma ilha observamos que ela está ao redor de outra ilha, fazendo com que as trajetórias também se aprisionem a estas pequenas ilhas [17].

- Quase armadilha de rede caótica

A quase armadilha de rede caótica apresenta uma topologia que assemelha-se com sistemas que possuem quase armadilhas de ilhas hierárquicas para alguns valores especiais do parâmetro de controle. Quando mudamos o parâmetro de controle do sistema este passa por bifurcações, onde determinadas bifurcações propiciam a criação de uma cadeia de ilhas que são separadas de sua ilha base. Surgindo durante essas mudanças um tipo de quase armadilha conhecida como rede caótica [17].

Na figura 2.15 (a) pode ser visto uma quase armadilha de rede caótica, que é a parte mais escura da figura, que foi retirada novamente da referência [17]. Na figura 2.15 (b) temos uma ampliação da ilha em (a).

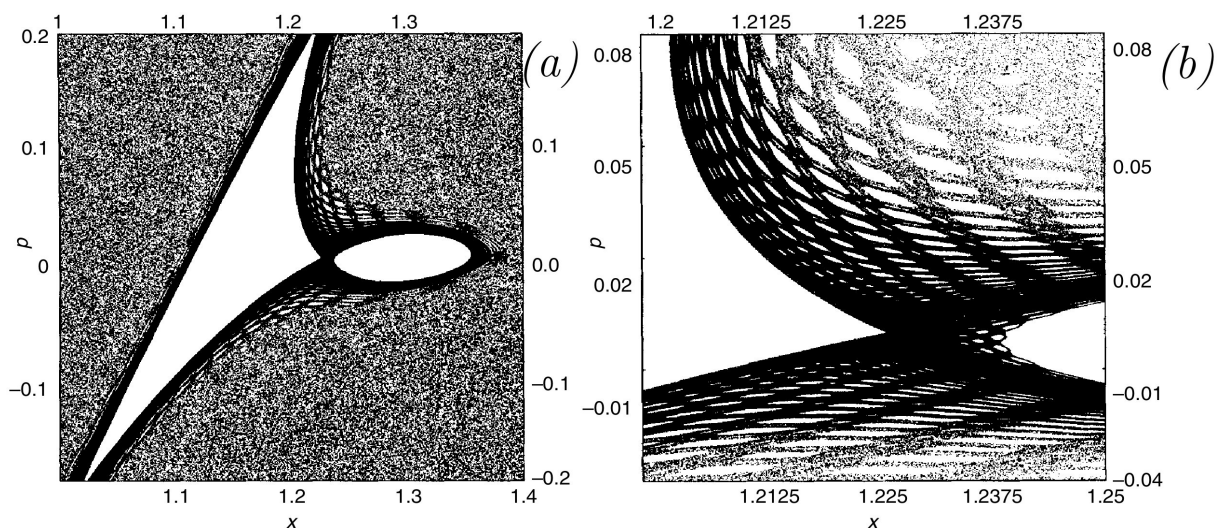


Figura 2.15: Quase armadilha dinâmica de rede caótica para o mapa padrão com parâmetro $K = 6,9009$. Em (a) uma ilha que está próxima a um valor de K que ocorre uma bifurcação. Em (b) temos a ampliação de uma vizinhança da ilha. Fonte: [17].

- Quase armadilha de camada caótica

As quase armadilhas de camada caótica podem ocorrer quando as ilhas sofrem bifurcações. Na figura 2.16 podemos ver o surgimento de uma camada caótica. Primeiramente temos uma versão simplificada do espaço de fases mostrado na figura 2.16 (a), ou seja, é uma ilha localizada no mar caótico que possui um ponto elíptico. Após um aumento do parâmetro de controle, ocorre uma bifurcação criando dois pontos elípticos e hiperbólicos adicionais mostrado na figura 2.16 (b). As separatrizes na figura 2.16 (b) são destruídas com o aumento da perturbação e em seu lugar surge uma camada caótica estreita.

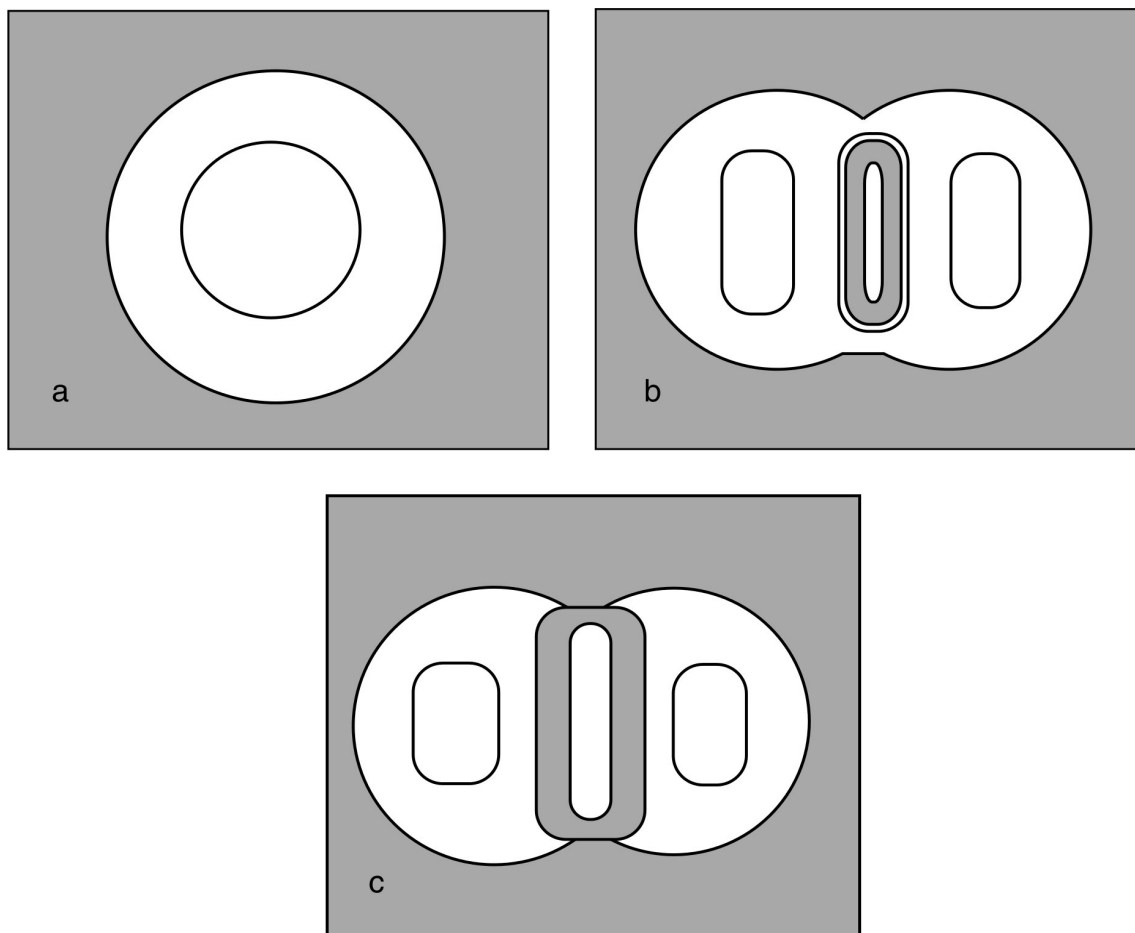


Figura 2.16: Em (a) temos uma ilha que sofrerá bifurcação. Em (b) ocorre uma bifurcação no ponto elíptico gerando um ponto elíptico e um hiperbólico, sendo que na região do ponto hiperbólico surge uma região de caos que não está conectada com a região de caos de fora da ilha. Em (c) temos a formação de uma camada caótica, que surge a partir da conexão entre a região de caos interna à ilha com a externa à ilha. Fonte: [17].

Quanto maior for o parâmetro de controle, mais larga a camada caótica se tornará e por

uma pequena alteração do parâmetro de controle, podemos alcançar uma conexão da camada caótica com o mar caótico como na figura 2.16 (c). A quase armadilha dinâmica de camada caótica é formada nesta região de conexão com o mar caótico, na qual uma trajetória pode permanecer um longo tempo sem conseguir cruzar esta camada, justamente pelo fato desta ser arbitrariamente pequena e, portanto, a probabilidade de ultrapassar a fronteira pode ser arbitrariamente pequena [22].

2.10 Recorrência de Poincaré

A recorrência ou retorno de Poincaré é uma propriedade fundamental de sistemas Hamiltonianos que possuem trajetórias confinadas em uma região de volume finito no espaço de fases, e diz respeito às trajetórias que visitam repetidas vezes uma determinada região. A análise de sistemas dinâmicos que apresentam diferentes regimes, por exemplo, sistemas com dinâmica caótica ou com regiões de aprisionamento de trajetórias pode ser feita através da estatística do tempo de retorno [17, 21].

O teorema de recorrência de Poincaré foi enunciado em 1890 e é uma consequência da conservação do volume do espaço de fases para sistemas Hamiltonianos. Este teorema consiste em primeiramente escolhermos um ponto inicial qualquer no espaço de fases que está delimitado por uma esfera R_0 (de condições iniciais), com um pequeno raio ε . Então, o teorema de recorrência de Poincaré prova que, algumas das trajetórias geradas a partir destas condições iniciais sempre retornam a essa esfera decorrido um tempo suficientemente longo. Isso é verdade, não importa o quão pequeno escolhermos o raio ε da esfera R_0 [3]. A figura 2.17 mostra uma representação da ideia da recorrência de Poincaré.

Na figura 2.17, para o caso de um espaço de fases bidimensional, temos uma pequena região do espaço de fases denominada R_0 , que corresponde a região de retorno. As condições iniciais são dadas dentro deste domínio, assim sendo, uma dada trajetória irá retornar infinitas vezes ao domínio R_0 após um determinado intervalo de tempo [3, 17, 72].

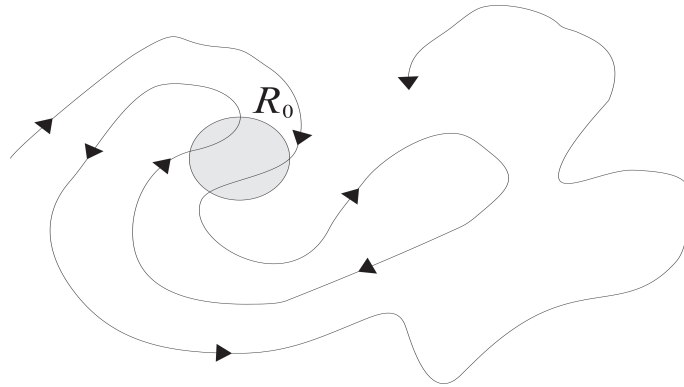


Figura 2.17: Recorrência de Poincaré para uma região de domínio R_0 no espaço de fases. Fonte: a autora, com base na referência [17].

2.10.1 Estatística do tempo de retorno

O teorema da recorrência de Poincaré garante a ocorrência de um conjunto infinito de instantes de retorno, portanto, definimos tempo de retorno de Poincaré como o tempo de retorno de uma trajetória a um intervalo infinitesimal do espaço de fases. Considerando tal teorema, uma maneira de analisar o tempo de retorno é através da distribuição de probabilidade dos tempos de retorno $P(\tau)$.

Supondo longos períodos, temos que uma sequência de tempos de retorno para uma região de domínio A é dada por $\tau_i = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, com $n \rightarrow \infty$ e τ é tido como o tempo percorrido até que a trajetória retorne a uma região específica do espaço de fases, que denominamos região de retorno. A distribuição de probabilidade dos tempos de retorno $P(\tau, A)$, para um pequeno domínio A , é expressa para uma trajetória que retorne a região A do espaço de fases depois de um intervalo de tempo entre um retorno e outro, sendo que, começa-se a contar o tempo de recorrência quando a trajetória sai da região de retorno.

O cenário do espaço de fases em que coexistam regiões caóticas com regiões regulares é típico de sistemas Hamiltonianos, os quais estamos interessados. O movimento de uma trajetória iniciada em uma região caótica é descrita por dois tipos de movimento: (1) no mar caótico, caracterizado por um movimento similar a um passeio aleatório e (2) próximo às ilhas, cuja trajetória sofre um aprisionamento permanecendo confinada por um longo tempo e obtendo um movimento aproximadamente regular. Em consequência, a trajetória alterna entre estes dois regimes de movimento indefinidamente.

Portanto, a distribuição de probabilidade dos tempos de retorno refletirá a presença desses dois movimentos no espaço de fases. Quando as trajetórias percorrem o mar caótico os tempos de retorno são curtos e esperamos uma queda exponencial, conforme a relação mostrada em (2.34). Quando temos o predomínio de ilhas no espaço de fases as trajetórias sofrem aprisionamento e esperamos uma distribuição do tipo lei de potência, já que os tempos de retorno são longos, conforme a relação mostrada em (2.34) [72, 73, 74]

$$P(\tau) \propto \begin{cases} e^{-b\tau}, & \text{tempos curtos} \\ \tau^{-\eta}, & \text{tempos longos} \end{cases} \quad (2.34)$$

onde, τ é o tempo de retorno ou tempo de recorrência, b é o coeficiente da lei de decaimento e η é o expoente de decaimento, o qual pode quantificar características de sistemas específicos.

No caso das trajetórias sofrerem o efeito *stickiness* em torno das ilhas presentes no espaço de fases as recorrências decaem algebricamente com o tempo ($\tau^{-\eta}$). O expoente de decaimento η está bem estabelecido na literatura para mapas simpléticos genéricos bidimensionais onde temos recorrências de Poincaré com expoente de Poincaré universal médio $\eta \approx 1,5$ [24, 72, 75]. O decaimento algébrico foi observado primeiro por Channon e Lebowitz no estudo de movimento estocástico entre duas superfícies KAM no mapa quadrático de Hénon [76, 77]. Outro aspecto importante é a relação entre a distribuição de probabilidade dos tempos de retorno com o processo de difusão, ou seja, com o transporte no sistema [78]. A distribuição de probabilidade dos tempos de retorno que possui decaimento exponencial está associada ao processo de difusão normal (Gaussiano) ou Browniano. A distribuição de probabilidade dos tempos de retorno que é caracterizada por uma lei de potência apresenta uma cauda longa, isto se dá porque a distribuição de cauda longa apresenta uma quantidade muito maior de dados ao longo da cauda. Portanto, distribuições tipo lei de potencia estão ligadas ao processo de difusão anômala.

As relações mostradas em (2.34) descrevem o comportamento geral de sistemas que apresentam espaço de fases com estruturas regulares no mar caótico, sendo válidas para sistemas bidimensionais. Isto é, um comportamento exponencial está relacionado a trajetórias no mar caótico e é uma propriedade de sistemas aleatórios e totalmente caóticos. O comportamento do tipo lei de potência está relacionado a trajetórias aprisionadas nas ilhas, cujo espaço de fases

pode apresentar regiões mais visitadas que outras, configurando um sistema com espaço de fases não uniforme [17, 21, 22, 25, 74, 79, 80].

Desse modo, a estatística do tempo de retorno torna-se um ótimo instrumento para estudar o efeito de aprisionamento das trajetórias em torno das ilhas presentes no espaço de fases, pois quando ocorre o efeito *stickiness* em sistemas Hamiltonianos observa-se que o decaimento da distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré é lento, resultando no decaimento tipo lei de potência [24, 26, 27, 29, 81, 82].

Capítulo 3

Mapa Padrão

Neste capítulo apresentamos o modelo físico a ser estudado nesta tese conhecido como *mapa padrão* [3, 4, 6] que pode representar diversas situações físicas, tais como: interação entre uma partícula carregada e um trem de ondas, comportamento de órbitas de deriva em Tokamaks, interação de partículas carregadas em um ciclotron, pêndulo quântico, entre outros [7, 8, 9, 10, 83]. O mapa padrão foi introduzido por Taylor (1968) e foi usado mais tarde por Chirikov e Greene (1979) para estimar a transição do comportamento regular para o caótico [4, 84]. O mapa padrão é considerado um dos sistemas Hamiltonianos mais conhecidos e utilizados na literatura científica, sobretudo pelo fato de ser um sistema de fácil manipulação computacional e por descrever uma variedade de sistemas físicos. Neste capítulo, abordaremos as principais características do modelo físico em questão, descreveremos como ocorre a transição do comportamento regular para caótico, bem como a caracterização de trajetórias aprisionadas por meio da análise da série temporal.

3.1 Modelo físico

O modelo físico que descreve o mapa padrão é conhecido como rotor pulsado ou quicado (em inglês “*kicked rotor*”). O rotor pulsado é constituído por uma barra rígida de momento de inércia I e comprimento L , que é fixa numa extremidade por um pivô sem atrito. A outra extremidade está sujeita a uma força impulsiva periódica vertical F de intensidade K/L e período τ . Não há influência gravitacional no sistema [3]. A representação esquemática do rotor

pulsado é mostrada na figura 3.1.

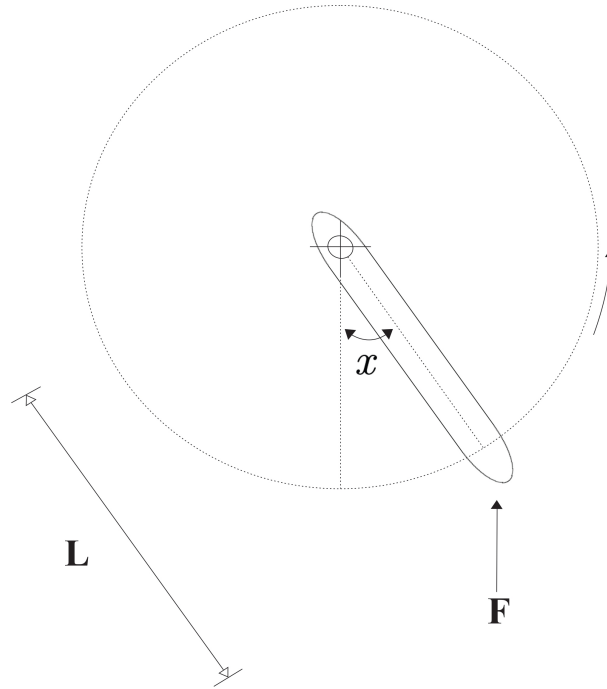


Figura 3.1: Figura esquemática do rotor pulsado. Fonte: a autora, com base na referência [3].

A função Hamiltoniana que descreve a dinâmica do rotor pulsado é a seguinte [3, 85]

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2I} + K \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (3.1)$$

onde $\delta(t - n\tau)$ é a função delta de Dirac. Na equação (3.1) o primeiro termo do lado direito representa a energia cinética e o segundo termo representa a energia potencial do rotor. Temos que p é o momento generalizado conjugado, e representa o momento angular. A coordenada generalizada x representa a posição angular da barra em relação a vertical.

As equações de movimento do rotor pulsado são obtidas a partir das equações de Hamilton, dadas pelas Eqs. (2.5), de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{p}{I}, \\ \frac{dp}{dt} &= K \text{sen}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Destas equações temos que p é constante entre dois impulsos, mas varia descontinuamente em cada impulso. A posição angular x varia linearmente com o tempo entre dois impulsos e é contínua no momento do impulso [3].

Podemos descrever a dinâmica deste sistema por meio do seguinte conjunto de equações discretas bidimensionais obtidas a partir da integração das Eqs. (3.2) entre dois pulsos consecutivos, conhecido como mapa padrão

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n + K \text{sen}(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1},\end{aligned}\tag{3.3}$$

cujos parâmetros K é a amplitude dos pulsos, também conhecido como parâmetro de não linearidade, sendo que o seu papel é de alterar a quantidade e o tamanho dos domínios da dinâmica regular (ilhas) e caótica (mar de caos). A variável temporal é dada por n e o termo $K \text{sen}(x_n)$ representa a força e a direção do pulso, sendo que a direção é definida através do sinal deste termo (– ou +).

A dinâmica do mapa padrão irá se comportar de formas diferentes dependendo da escolha das condições de contorno, portanto deve-se especificá-las para as variáveis dinâmicas, p_{n+1} e x_{n+1} . Podemos enumerar as seguintes categorias de condições de contorno: (1) em um torus onde as condições de contorno são periódicas, tais que $(0 < p < 2\pi$ e $0 < x < 2\pi) \text{ mod } (2\pi)$, ou (2) pode-se escolher condições de contorno tal que o p_{n+1} e x_{n+1} ambos tem um intervalo infinito ($-\infty < p < \infty$ e $-\infty < x < \infty$) ou quando somente uma das variáveis dinâmicas tem um intervalo infinito, para p_{n+1} temos ($-\infty < p < \infty$ e $0 < x < 2\pi$) ou para x_{n+1} temos ($0 < p < 2\pi$ e $-\infty < x < \infty$), chamado de movimento no cilindro [77]. Cada uma dessas opções de condições de contorno fornece uma informação útil a respeito da dinâmica do sistema, sendo assim definimos as condições de contorno das variáveis dinâmicas p e x para o nosso estudo, respectivamente entre $(-\pi < p < \pi$ e $-\pi < x < \pi)$.

Como o mapa padrão é um sistema Hamiltoniano conservativo ele apresenta a propri-

idade de preservar áreas no espaço de fases, ou seja, o determinante da matriz Jacobiana é 1:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K \cos(x_n) \\ 1 & 1 + K \cos(x_n) \end{bmatrix} = 1$$

3.2 Transição do comportamento regular para o caótico

O mapa padrão é um modelo de mapa conservativo utilizado no estudo da transição do movimento regular para o caótico. Fazendo uma análise detalhada de suas propriedades pode-se obter uma ideia mais clara do mecanismo que envolve tal transição. Analisando as Eqs. (3.3) podemos estudar dois casos para o parâmetro de não linearidade: (1) $K = 0$ e (2) $K \neq 0$. Para o primeiro caso, onde $K = 0$, não temos perturbação e o sistema é dito integrável. As Eqs. (3.3) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Neste caso p é uma constante de movimento e o espaço de fases é formado por infinitas curvas invariantes, independentemente das condições iniciais dadas (p_0, x_0) . Portanto, as trajetórias permanecem confinadas em um torus. Quando $p_n = r/s$ for irracional a trajetória não se repete preenchendo uma linha densa (retas fechadas) e o torus é dito não ressonante. Se $p_n = r/s$ for racional a trajetória se repete após algum tempo, então o movimento é periódico e o torus dito ressonante [77].

A figura 3.2 apresenta as trajetórias características no espaço de fases do mapa padrão para $K = 0, 0$. Foram dadas 20 condições iniciais distribuídas aleatoriamente em todo o espaço de fases e efetuadas $n = 1000$ iterações. Podemos observar que o espaço de fases é basicamente preenchido por trajetórias periódicas e linhas fechadas (trajetórias para p constante) quando o sistema é integrável. Neste caso o sistema não apresenta regimes caóticos.

Para o segundo caso, onde $K \neq 0$, o sistema torna-se quase-integrável ocorrendo mudanças na dinâmica do sistema segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff e o teorema KAM. Quando aumentamos o valor do parâmetro K , ou seja, aumentamos a perturbação no sistema,

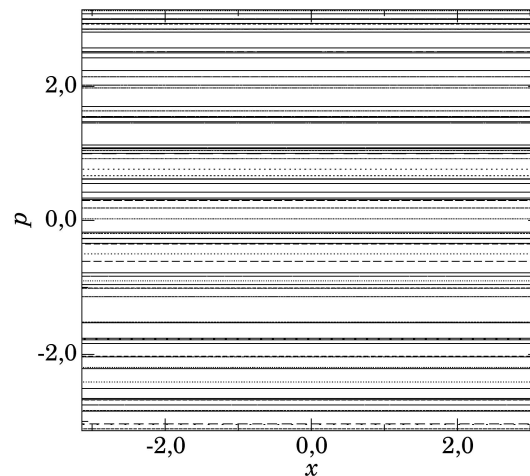


Figura 3.2: Comportamento de algumas trajetórias típicas do mapa padrão para o caso integrável ($K = 0, 0$). Para trajetórias com número rotacional irracional temos linhas densamente preenchidas, enquanto as que possuem número rotacional racional formam um conjunto discreto de pontos periódicos.

as curvas KAM remanescentes do sistema integrável acabam sendo destruídas. Para valores pequenos de K a maioria dos torus irracionais ainda sobrevivem, mas conforme aumentamos o valor de K estes torus serão quebrados e posteriormente destruídos dando lugar ao movimento caótico no espaço de fases.

Existe um valor crítico para K onde ocorre a quebra do último torus KAM, este valor é $K_c \approx 0,9716$, o qual foi encontrado por Greene (1979) usando a técnica da trajetória periódica [3, 4, 84]. Para $K < K_c$ as trajetórias ainda estão limitadas por barreiras que impedem a formação do mar caótico, portanto a difusão de trajetórias verticalmente (direção de p) através deste torus não é permitida. Quando $K > K_c$ o último torus é quebrado e o movimento das trajetórias não são mais limitadas na direção p , ou seja, a região caótica que conecta $p = -\infty$ a $p = +\infty$ passa a existir, permitindo a propagação de trajetórias na direção do momento p [3].

A transição sofrida no espaço de fases em função do aumento do parâmetro K é mostrada na figura 3.3 para verificar a influência que este parâmetro exerce sobre o sistema. O espaço de fases de sistemas Hamiltonianos é constituído pelas seguintes regiões: as regiões associadas a estabilidade, conhecidas como ilhas e as regiões associadas ao caos, chamado de mar caótico [17].

Podemos observar a existência de trajetórias regulares e a inexistência de domínios caóticos na figura 3.3 (a) para $K = 0,5$, onde consideramos um forçamento relativamente pequeno.

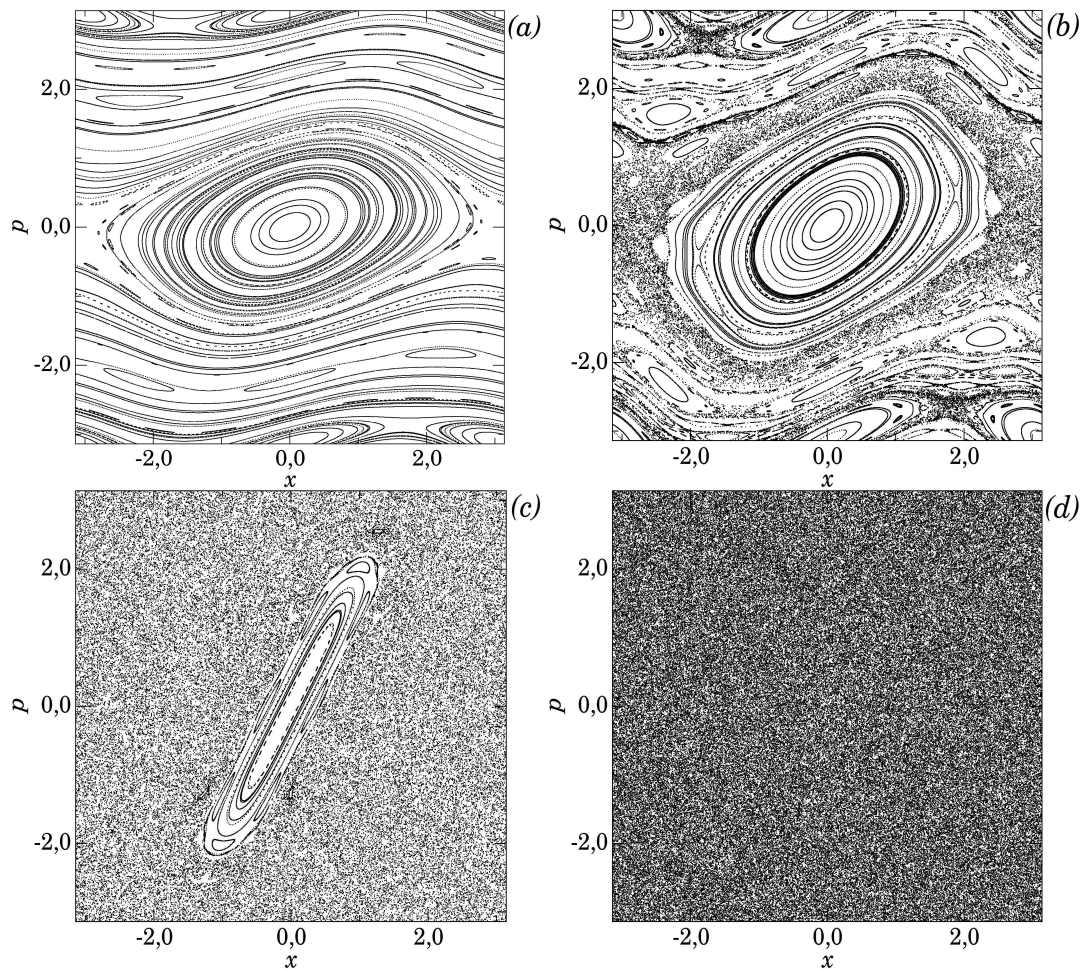


Figura 3.3: Espaço de fases do mapa padrão para vários valores de K , no qual em todos os casos as condições iniciais foram distribuídas aleatoriamente em todo o espaço de fases. Em (a) $K = 0,5$, onde foram dadas 100 condições iniciais e efetuadas $n = 1000$ iteradas. (b) $K = 0,9716$, onde foram dadas 100 condições iniciais e efetuadas $n = 1000$ iteradas. (c) $K = 4,0$, onde foram dadas 80 condições iniciais e efetuadas $n = 1000$ iteradas e (d) $K = 8,0$, onde foram dadas 100 condições iniciais e efetuadas $n = 2000$ iteradas.

Constatamos também que o espaço de fases da figura 3.3 (a) é preenchido por diversos torus KAM que resistem a perturbação do sistema.

A figura 3.3 (b) mostra o espaço de fases para o valor crítico $K_c \approx 0,9716$, para o qual o último torus KAM é quebrado. Observamos a existência tanto regiões com trajetórias regulares quanto de regiões com trajetórias caóticas. Na figura 3.3 (c) para o valor de $K = 4,0$, onde foi aumentada a perturbação no sistema, vê-se a presença dominante do mar caótico e uma ilha, localizada no centro do espaço de fases, composta por trajetórias regulares. Na figura 3.3 (d) para o valor de $K = 8,0$ podemos ver que o espaço de fases é ocupado totalmente por trajetórias

caóticas. Conforme o valor de K for aumentado a dinâmica do sistema terá um comportamento cada vez mais caótico.

3.3 Efeito de aprisionamento das trajetórias no mapa padrão

A influência das quase armadilhas dinâmicas em um sistema ocorre quando as trajetórias sofrem o aprisionamento em torno das ilhas, no qual a dinâmica torna-se quase-regular, podendo permanecer um longo período de tempo até conseguir escapar, ainda que as condições iniciais forem escolhidas no mar caótico [12, 16, 22]. O efeito *stickiness* pode ser observado no espaço de fases para $K = 3, 0$ na figura 3.4 (a), que é caracterizado pela região mais escura ao redor da ilha, sendo esta região mais visitada do que outras partes.

Outra maneira de verificarmos a influência do efeito *stickiness* é por meio da análise da série temporal do sistema, que é um conjunto de observações de uma variável ordenada no tempo. No nosso caso estamos interessados em olhar a evolução temporal de ambas as coordenadas, x e p do sistema.

Na figura 3.4 (b) mostramos a série temporal de x e na figura 3.4 (c) a série temporal de p . Observamos que ocorre o efeito *stickiness* tanto na coordenada generalizada da posição angular x como do momento angular p para um mesmo intervalo de tempo. A trajetória inicialmente se movimentava na região do mar caótico até um tempo $n < 22.000$ caracterizando uma trajetória caótica.

Após, a trajetória sofre o aprisionamento em torno da ilha principal permanecendo por pelo menos 9×10^3 tempos ao redor da ilha, caracterizando o aprisionamento por estruturas de regularidade. Podemos observar que a trajetória consegue escapar da região de confinamento que está compreendida entre $-2, 0 \lesssim x \lesssim 2, 0$ e $-2, 0 \lesssim p \lesssim 2, 0$, posteriormente a trajetória volta a ter um movimento caótico para um tempo $n \gtrsim 32.000$.

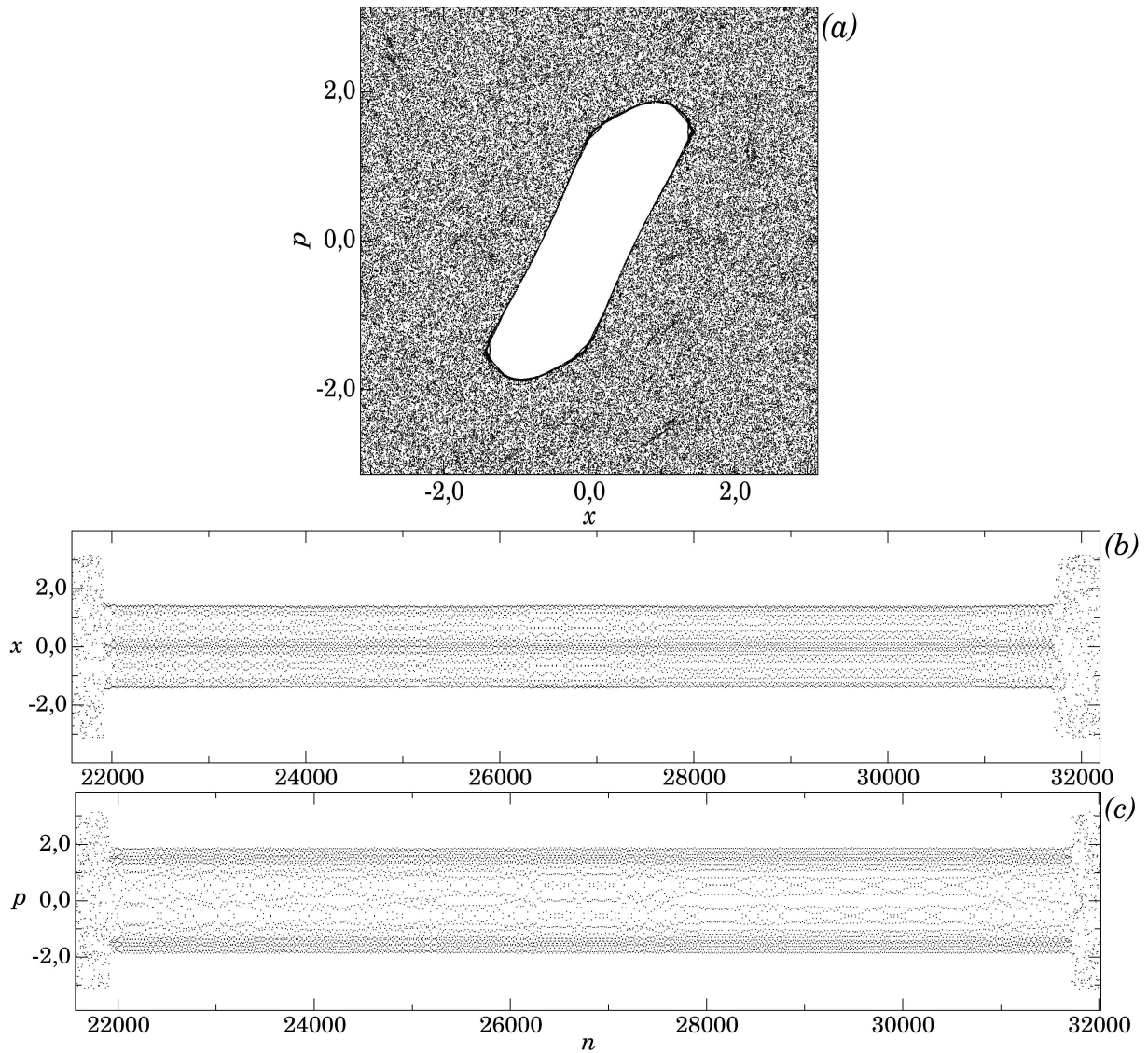


Figura 3.4: (a) Espaço de fases com 10^5 pontos e a condição inicial foi dada em torno de $x(0) = 1,5$ e $p(0) = 1,5$. (b) Série temporal para x mostra o confinamento em um determinado intervalo de tempo e espaço de trajetórias aprisionadas e (c) série temporal para p mostra o mesmo padrão encontrado para a variável x .

Capítulo 4

Influência das regiões hiperbólicas e não hiperbólicas no efeito *stickiness*

Neste capítulo, propomos o estudo de como regiões hiperbólicas e não hiperbólicas na vizinhança de uma ilha realizam um importante papel no efeito de aprisionamento das trajetórias em torno de ilhas na investigação da dinâmica de um sistema conservativo. Para isto usamos ferramentas conhecidas na literatura, bem como uma nova abordagem proposta nesta tese, cujos resultados detalhados neste capítulo foram utilizados para a confecção do artigo referente a pesquisa de doutorado. O título do trabalho é *Mechanism for stickiness suppression during extreme events in Hamiltonian systems* e foi publicado na revista *Physical Review E* [86]. O sistema utilizado é o mapa padrão, descrito na Seção 3.1 do Capítulo 3.

Os resultados obtidos e mostrados nas seções deste capítulo são para o parâmetro de não linearidade $K = 3, 0$, onde a variação do mesmo faz com que ocorra uma mudança significativa no espaço de fases. Para este valor do parâmetro K o espaço de fases é composto por uma ilha imersa em uma grande região caótica (ver figura 3.4 (a)).

4.1 Variedades estáveis e instáveis

Com o cômputo das variedades estáveis e instáveis do mapa padrão aferimos como estão dispostas as variedades, ou seja, como ocorre o cruzamento entre elas, com o intuito de posteriormente utilizar tal conceito no estudo da hiperbolicidade. Sendo que, o estudo da

hiperbolicidade envolve o cálculo entre os ângulos das variedades estáveis e instáveis.

O método utilizado na construção da figura das variedades foi o algoritmo do “regador” (*sprinkler algorithm*) [87, 88]. A figura 4.1 foi construída da seguinte maneira: irrigamos um grande número de condições iniciais em uma região do espaço de fases, delimitada por um valor máximo e mínimo de x e p , usando uma grade de pontos. Em seguida, iteramos o mapa n vezes e verificamos se para cada condição inicial a trajetória escapou dessa região estabelecida entre um valor máximo e mínimo de x e p .

Quanto mais próxima uma condição inicial está da variedade estável, conseqüentemente a trajetória levará mais tempo para escapar da região. Portanto, as trajetórias que permanecem na vizinhança da região escolhida após n iterações formam uma aproximação da variedade estável. A região da ilha foi excluída utilizando o nosso método de detecção de vizinhança o qual será explicado na seção 4.3. Na figura 4.1 mostramos uma ampliação do espaço de fases, para $-2,0 < x < 2,0$ e $-2,5 < p < 2,5$.

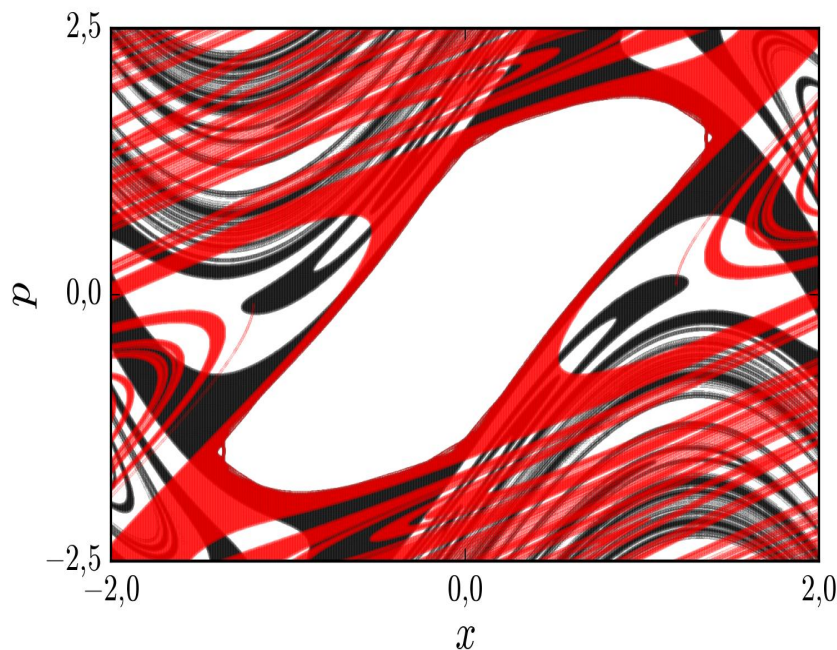


Figura 4.1: Ampliação do espaço de fases das variedades estáveis e instáveis do mapa padrão. A cor preta representa a variedade estável e a cor vermelha representa a variedade instável.

A grade de condições iniciais é de 1000×1000 pontos, após iteramos o mapa 5 vezes para frente, se a trajetória permanecer dentro da região entre um valor mínimo e máximo de x e p , dada por $-2,0 < x < 2,0$ e $-2,5 < p < 2,5$, gravamos como variedade estável. Para obter

a variedade instável iteramos o mapa inverso e verificamos se a trajetória permanece dentro da região estabelecida, então marcamos como variedade instável, pois no mapa padrão inverso a variedade instável é a estável do mapa padrão. Podemos observar que as variedades estáveis e instáveis se cruzam infinitas vezes, logo temos um emaranhamento. Verificamos que na vizinhança da ilha acontece uma infinidade de cruzamentos, em vista disso, temos lugares em que as variedades estão paralelas entre si. Afastando-se da borda da ilha os cruzamentos ocorrem com uma certa variação angular entre as variedades, ou seja, não temos somente tangências entre as variedades. A fim de averiguar por quais lugares as trajetórias predominantemente escapam quando colocadas próximas a vizinhança da ilha, iteramos o mapa padrão mostrando a evolução de um conjunto de trajetórias na cor azul, conforme exibido na figura 4.2.

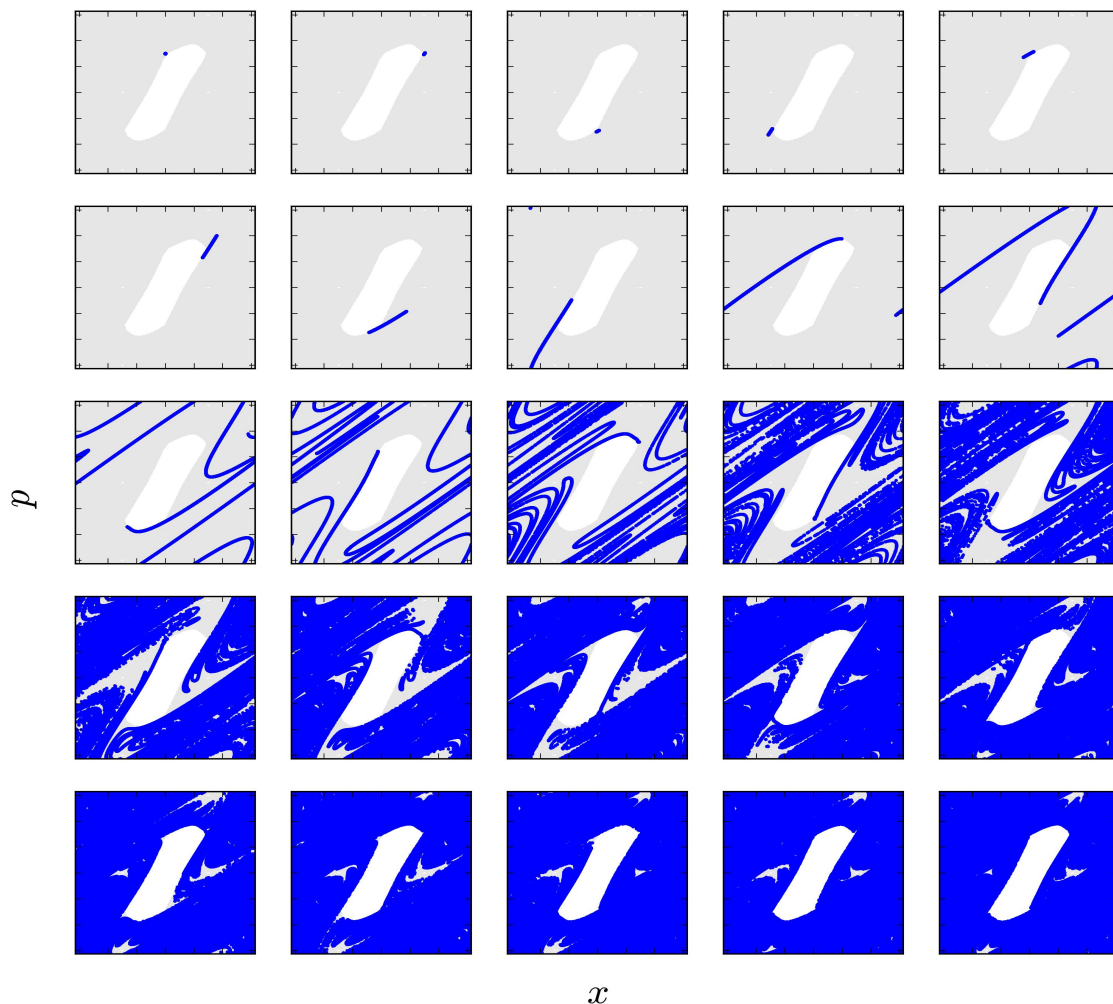


Figura 4.2: Espaço de fases, definido de $-\pi$ a π , gerado a partir de um conjunto de condições iniciais nas proximidades da ilha, representado pela cor azul.

Na figura 4.2 mostramos as primeiras 25 iteradas do mapa, começando da esquerda para a direita e de cima para baixo. Utilizamos como condições iniciais um conjunto N de trajetórias com um certo raio distribuídas uniformemente na região caótica, mas iniciado na vizinhança da ilha. Onde $N = 100.000$ e os valores para gerar as condições iniciais são $x_i = 0,0$, $p_i = 1,5$ e $raio = 0,01$.

O conjunto de trajetórias permanece na vizinhança da ilha até a sexta iterada, após as trajetórias começam a escapar para o mar caótico. Constatamos que as trajetórias escapam por regiões específicas nas proximidades da ilha e estas coincidem com as regiões da variedade instável mostrada na figura 4.3.

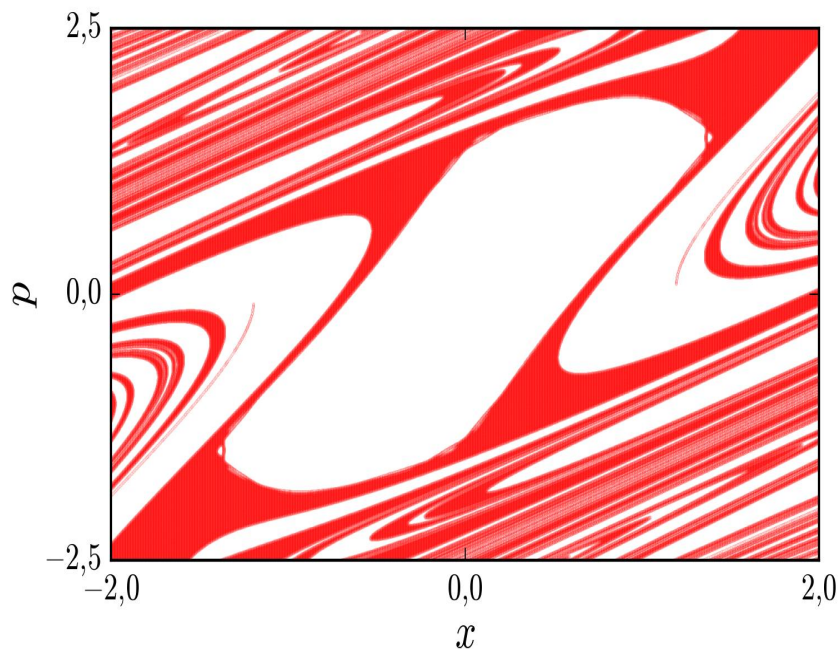


Figura 4.3: Variedade instável do mapa padrão.

A figura 4.3 foi obtida mostrando apenas a variedade instável da figura 4.1. Deste modo, observamos que as trajetórias mostradas na figura 4.2 tendem a escapar da vizinhança da ilha pela variedade instável.

4.2 Hiperbolicidade do espaço de fases

Sistemas Hamiltonianos possuem uma característica comum que é a não uniformidade do espaço de fases. Devido a esta característica várias propriedades estão presentes nestes sistemas, como por exemplo, as trajetórias caóticas são frequentemente não hiperbólicas uma vez que as variedades estáveis e instáveis são tangentes em um número infinito de pontos. O modelo de estudo proposto nesta tese pode ser considerado um sistema não hiperbólico, pois seu espaço de fases apresenta tanto regiões em que as variedades são tangentes, bem como regiões hiperbólicas nas quais as variedades são perpendiculares entre si. No intuito de caracterizar a hiperbolicidade nas áreas em torno da ilha contida no espaço de fases do mapa padrão, calculamos o ângulo entre os vetores de Lyapunov covariantes, conforme mostrado na Seção 2.8, o ângulo é dado por

$$\theta(p, x) = \cos^{-1}(|\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}|), \quad (4.1)$$

em que θ é definido no intervalo de $[0, \pi/2]$, uma vez que o valor absoluto do produto interno foi considerado.

Na construção da figura 4.4 (a) foram utilizados 7×10^5 pontos e as condições iniciais foram $(x_0, p_0) = (3, 14; 0, 01)$. Mostramos o espaço de fases do mapa padrão nas coordenadas (x, p) , cujo ângulo θ entre as variedades é representado pela escala de cores que varia do azul para o vermelho, e é definido no intervalo de $[0, \pi/2]$, uma vez que o valor absoluto do produto interno foi considerado.

As regiões que apresentam tons de azul escuro simbolizam tangências entre as variedades estáveis e instáveis e são definidas como regiões fortemente não hiperbólicas, correspondendo a ângulos menores que 30° , e podem ser observadas na figura 4.4 (a). Os tons verde-amarelo-vermelho correspondentes a ângulos maiores que 30° e menores que 90° são regiões definidas como fracamente hiperbólicas. Na região do espaço de fases cujas variedades estão perpendiculares entre si (cor vermelha), ou seja, o ângulo entre as variedades correspondem a 90° , definimos como regiões hiperbólicas.

Na 4.4 (b) exibimos a função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades estáveis e instáveis $\rho(\theta)$. Notamos um grande platô para pequenos ângulos θ refletindo um forte caráter de não hiperbolicidade nesta região. Na figura 4.4 (a) definimos outro ângulo

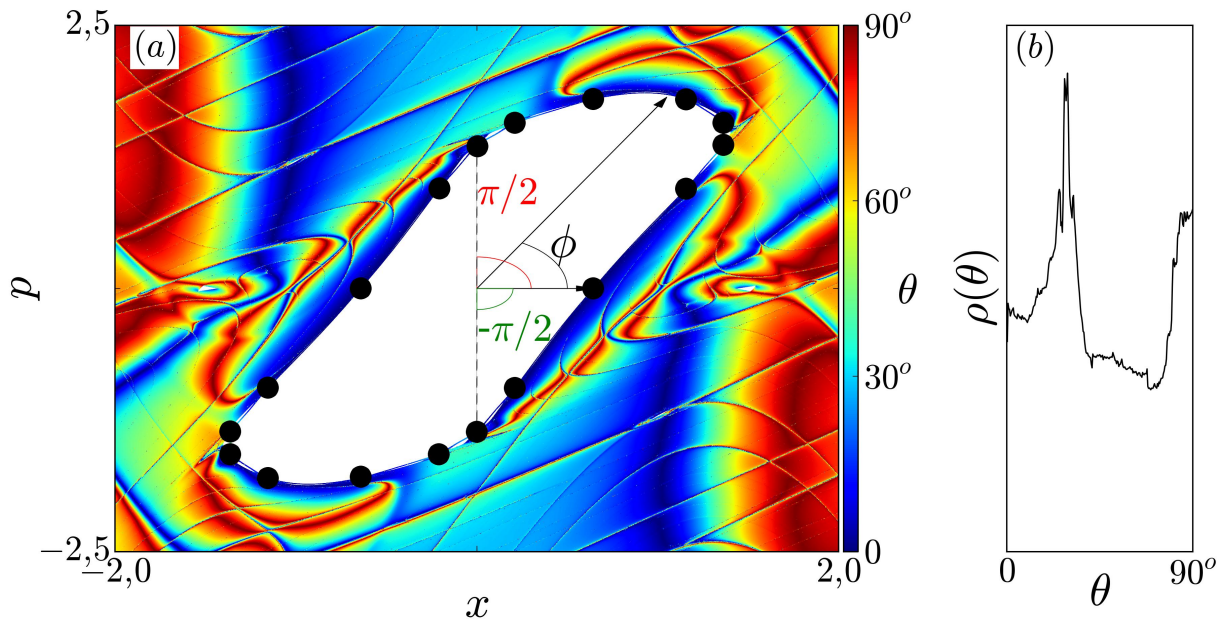


Figura 4.4: (a) Distribuição do espaço de fases do ângulo entre as variedades estáveis e instáveis. Tons de azul refletem forte não hiperbolicidade. Tons que variam do verde-amarelo-vermelho indicam regiões fracamente hiperbólicas correspondendo a ângulos maiores que 30° . As regiões em vermelho são regiões hiperbólicas. (b) Função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades estáveis e instáveis $\rho(\theta)$.

vinculado a um ponto na vizinhança da ilha, ou seja, cada ponto na vizinhança da ilha pode ser identificado por um simples número. Denominamos o ângulo por $\phi = \arctan(p/x)$ no intervalo de $[-\pi/2, \pi/2]$, com o propósito de ser usado nas análises discutidas na seção seguinte.

Devido a simetria do mapa padrão não utilizamos o intervalo tradicional de $[-\pi, \pi)$ para ϕ uma vez que as propriedades hiperbólicas e também locais dos pontos hiperbólicos do lado esquerdo da ilha principal replica nos pontos do lado direito. Além disso, percebemos círculos pretos na vizinhança da ilha principal os quais identificamos sendo os pontos hiperbólicos de uma órbita de período 18, portanto, devido a simetria temos $9 + 9$ pontos hiperbólicos. As coordenadas (x, p) e o ângulo ϕ de cada um dos pontos hiperbólicos e elípticos de uma órbita de período 18 na vizinhança da ilha principal são apresentados na tabela 4.1.

Observamos na vizinhança da ilha duas regiões distintas, uma região representada por áreas em azul escuro exibindo um forte caráter de não hiperbolicidade do espaço de fases, ocupando a maior parte da vizinhança da ilha. A outra região ocupando uma fração pequena da vizinhança da ilha, compreende as áreas em tons de verde-amarelo-vermelho e são responsáveis pela fraca hiperbolicidade.

Pontos hiperbólicos			Pontos elípticos		
x	p	ϕ	x	p	ϕ
0,00	$\mp 1,36$	-1,57	$\pm 0,09$	$\mp 1,20$	-1,50
$\pm 0,21$	$\mp 0,95$	-1,35	$\pm 0,39$	$\mp 0,54$	-0,95
$\pm 0,64$	0,00	0,00	$\pm 0,93$	$\pm 0,54$	0,53
$\pm 1,16$	$\pm 0,95$	0,69	$\pm 1,29$	$\pm 1,20$	0,75
$\pm 1,36$	$\pm 1,36$	0,79	$\pm 1,38$	$\pm 1,47$	0,82
$\pm 1,36$	$\pm 1,57$	0,86	$\pm 1,29$	$\pm 1,68$	0,92
$\pm 1,16$	$\pm 1,80$	1,00	$\pm 0,93$	$\pm 1,87$	1,11
$\pm 0,64$	$\pm 1,80$	1,23	$\pm 0,39$	$\pm 1,68$	1,34
$\pm 0,21$	$\pm 1,57$	1,44	$\pm 0,09$	$\pm 1,47$	1,51

Tabela 4.1: Posição no espaço de fases e o ângulo polar dos pontos hiperbólicos e elípticos de uma órbita de período 18. Fonte: [86].

Na parte da vizinhança da ilha com áreas fortemente não hiperbólicas ocorre uma espécie de blindagem impedindo as trajetórias de visitarem as proximidades da ilha, e consequentemente as trajetórias que já estão na vizinhança atuam como uma barreira, também impedindo que saiam para o mar caótico. Quando as trajetórias conseguem atravessar a barreira, imposta por estas áreas fortemente não hiperbólicas, despenderão um longo tempo para abandonar o entorno da ilha.

As áreas fracamente hiperbólicas e hiperbólicas na vizinhança da ilha, como mencionado, compõe uma fração pequena no espaço de fases. Observa-se na figura 4.4 (a) a existência de 4 regiões fracamente hiperbólicas e hiperbólicas próximas a borda da ilha. Sendo assim, pode ser feita uma associação com a figura 4.1 notando que existem regiões correspondentes, ou seja, as regiões fracamente hiperbólicas e hiperbólicas são semelhantes as regiões da variedade instável, que é por onde as trajetórias escapam. Portanto, identificaremos as partes hiperbólicas nas proximidades da ilha como canais hiperbólicos do espaço de fases, sendo que estes correspondem a regiões por onde as partículas escapam quando aprisionadas ao redor da ilha.

4.3 Propriedades topológicas do espaço de fases na vizinhança da ilha no mapa padrão

As propriedades topológicas do espaço de fases na vizinhança de uma ilha desempenha um importante papel no mecanismo de *stickiness*. Desta forma, nesta seção mostramos algumas análises que demonstram a relação entre características topológicas do espaço de fases, o caminho que as trajetórias visitam a vizinhança da ilha e o efeito *stickiness*.

O conceito de vizinhança da ilha é de fundamental importância para as próximas análises, na qual pode ser definida como uma borda de largura estreita na borda da ilha. De modo a tornar-se claro o que chamamos de vizinhança da ilha foi feito um programa de detecção de borda de ilha baseado no método utilizado na referência [89].

A detecção da borda decorre da seguinte maneira, primeiramente divide-se o espaço de fases em uma grade $N \times N$, em que $N = 1000$. Após, iniciamos uma condição inicial num ponto no mar caótico, aplicando o mapa um grande número de vezes, atribuímos falso para todas as células que não foram visitadas e verdadeiro as visitadas. Como consequência constrói-se uma matriz $n(i, j)$ de verdadeiros no mar caótico, e falsos na região da ilha. Esta matriz diferencia regiões de mar caótico e ilhas, em razão das trajetórias que começam no mar caótico não entrarem no domínio das ilhas, portanto desta forma excluimos a região da ilha.

Dada a matriz $n(i, j)$ construímos um conjunto de vizinhança \mathcal{B} nesta ilha, que consiste em todo i, j no mar caótico, mas a uma distância δ de algum ponto k, l dentro da ilha, ou seja, a distância mínima para a ilha é inferior a δ . Definimos uma matriz $b(i, j)$, tal que $b(i, j) = 1$ se o ponto (i, j) pertence a \mathcal{B} , e $b(i, j) = 0$ caso contrário.

Os resultados expostos na figura 4.5, mostram a determinação da vizinhança da ilha com uma largura δ . Observa-se que o método de detecção de bordas localiza a ilha principal, ocupando a maior parte do espaço de fases, mas também identifica outras ilhas secundárias em torno da ilha principal. As ilhas secundárias podem ser vistas na magnificação contida na figura 4.5 no lado inferior direito.

A partir do conceito de vizinhança da ilha definido anteriormente, construímos algumas análises que exploram a relação entre características topológicas do espaço de fases, o caminho das trajetórias visitarem a vizinhança da ilha e o efeito *stickiness*. Nas figuras 4.6 e 4.7

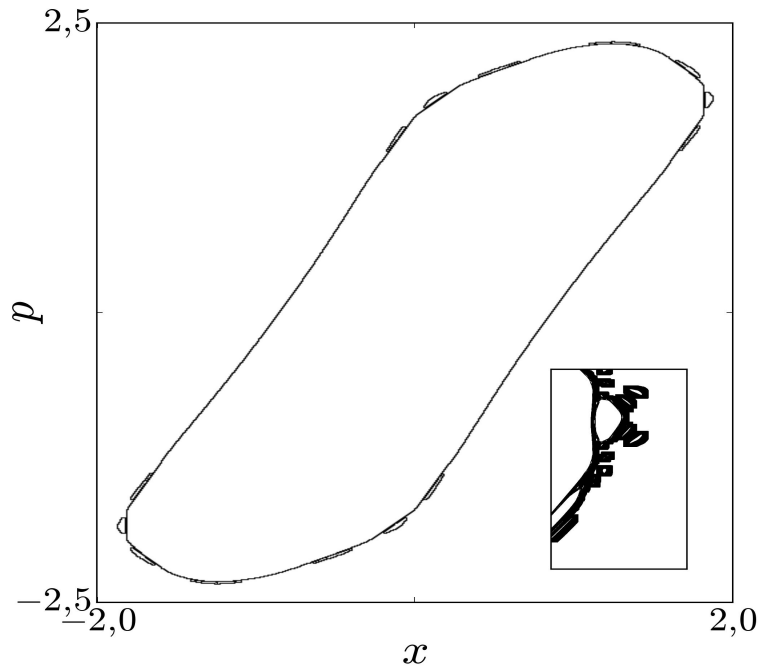


Figura 4.5: Vizinhança da ilha com largura $\delta = 0,010$ para $K = 3,0$. Na magnificação, lado inferior direito, outras ilhas além da principal são detectadas.

analisamos a metade do espaço de fases, de $-\pi/2$ até $\pi/2$, conforme mostrado na figura 4.4 (a), no qual transformamos um ponto de coordenada x e p em um ângulo denotado por ϕ , dado em coordenadas polares. Iteramos o mapa padrão 4×10^5 vezes a partir de condições iniciais aleatórias distribuídas uniformemente em todo o espaço de fases.

Na figura 4.6 (a) mostramos a função densidade de probabilidade do ângulo de entrada ou de injeção, $F_{in}^{(1)}(\phi)$, para trajetórias que foram injetadas na vizinhança da ilha por um ângulo ϕ , considerando a vizinhança da ilha computada pelo método acima descrito, como mostrada na figura 4.5. Dessa maneira, $F_{in}^{(1)}(\phi)d(\phi)$ é a probabilidade que uma trajetória caótica típica visite a vizinhança da ilha através de um ângulo entre ϕ e $\phi + d(\phi)$.

Na figura 4.6 (b) mostramos o tempo médio que as trajetórias permanecem na vizinhança da ilha quando injetadas por um ângulo em particular, denominado por $10^2\tau_{in}$. A figura 4.6 (c) é a ampliação da região em cinza presente na figura 4.6 (a) e na 4.6 (b) para melhor visualização do setor de interesse, que compreende as regiões próximas dos picos de $F_{in}^{(1)}(\phi)$.

Da figura 4.6 (c) verificamos que, embora a maior parte das trajetórias são injetadas por apenas alguns ângulos dentro das regiões fracamente hiperbólicas, tons verde-amarelo-vermelho, em torno da ilha na figura 4.4 (a), estas trajetórias gastam, em média, um tempo

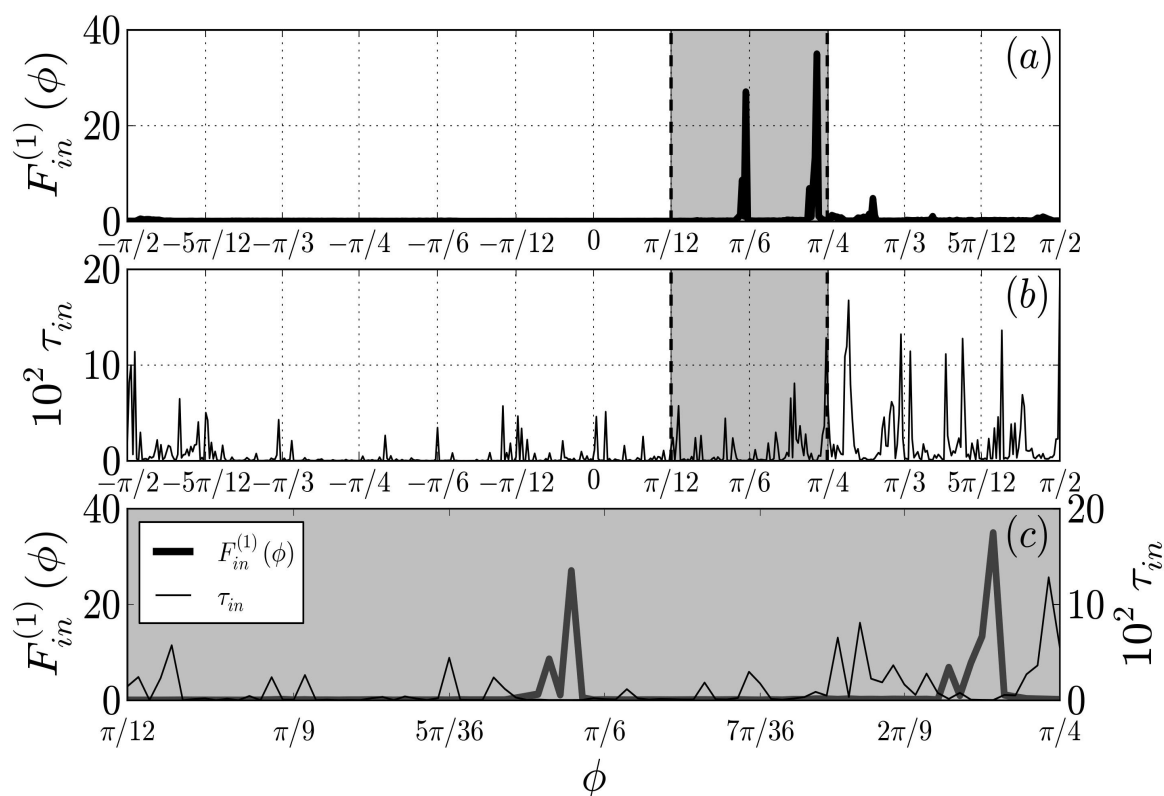


Figura 4.6: (a) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção na vizinhança da ilha. (b) Tempo médio gasto na região de *stickiness* em função do ângulo de injeção. (c) Ampliação das regiões cinzas em (a) e (b) próximo dos máximos de $F_{in}^{(1)}(\phi)$.

pequeno mapeando na região de *stickiness*. As trajetórias que são facilmente injetadas nas regiões de *stickiness*, por áreas fracamente hiperbólicas ao redor da ilha, e conseqüentemente também as que são facilmente ejetadas não contribuem para o fenômeno de *stickiness* nem sequer para mudanças substanciais na distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré para a dinâmica.

Então, a fim de distinguir os dois tipos de trajetórias presentes na dinâmica do sistema, que são as trajetórias de *stickiness* contribuindo para o efeito *stickiness*, e as trajetórias que apenas atingem a borda da ilha e a deixa rapidamente, computamos $F_{in}^{(100)}(\phi)$. Exibimos na figura 4.7 (a), $F_{in}^{(100)}(\phi)$, que é a função densidade de probabilidade do ângulo de injeção de trajetórias injetadas em uma região de *stickiness* por um ângulo específico, considerando que uma vez que uma trajetória atinge as proximidades da ilha, permaneça mapeando o mesmo conjunto de pontos pelo menos por 100 iterações. Particularmente, denominados tais trajetórias como trajetórias de *stickiness*.

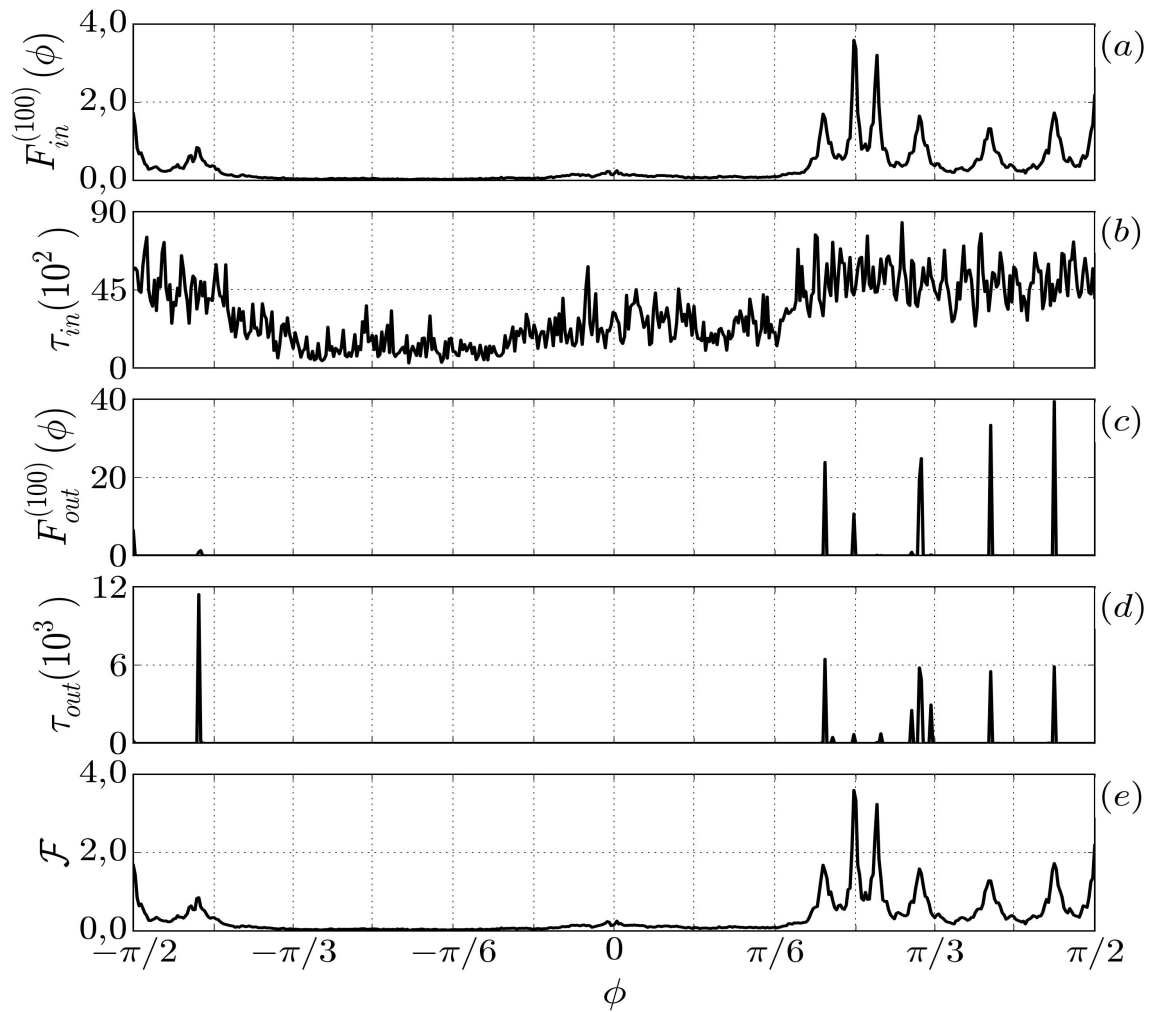


Figura 4.7: (a) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção na vizinhança da ilha principal do mapa padrão. (b) Tempo médio gasto na região de *stickiness* em função do ângulo de injeção. (c) Função densidade de probabilidade do ângulo de ejeção na vizinhança da ilha principal. (d) Tempo médio gasto na região de *stickiness* em função do ângulo de ejeção e (e) função densidade de probabilidade do ângulo de injeção sujeito a condição de que o tempo de *stickiness* deve ser maior que 1000 iterações.

Percebemos que, quase todas as trajetórias de *stickiness* são injetadas em intervalos de ângulos muito específicos e cada intervalo de ângulo está diretamente relacionado com a localização angular da cadeia de pontos hiperbólicos definidos como círculos pretos na figura 4.4 (a). A tabela 4.2 apresenta a relação entre os máximos de $F_{in}^{(100)}(\phi)$ da figura 4.7 (a) e os pontos hiperbólicos da figura 4.4 (a).

A primeira coluna diz respeito aos ângulos dos máximos de $F_{in}^{(100)}(\phi)$ que correspondem aos picos visíveis na figura 4.7 (a). Notamos a existência de 8 picos significativos, pois o ângulo $-\pi/2$ e $\pi/2$ são correspondentes. O valor do terceiro ponto para o máximo de $F_{in}^{(100)}(\phi)$ não

Máximos de $F_{in}^{(100)}(\phi)$	Pontos hiperbólicos
-1,57	-1,57
-1,34	-1,35
-	0,00
0,68	0,69
0,79	0,79
0,86	0,86
1,00	1,00
1,23	1,23
1,44	1,44

Tabela 4.2: Máximos locais de $F_{in}^{(100)}(\phi)$ e os 9 pontos hiperbólicos na vizinhança da ilha principal, referentes a parte direita da ilha devido a simetria, cuja unidade é dada em radianos.

está contido na tabela 4.2 em virtude de não apresentar um pico relevante nas nossas análises, mas seu valor é 0,00, ou seja, tem relação com o ponto hiperbólico 0,00. A segunda coluna refere-se aos valores dos pontos hiperbólicos e confrontando seus valores com os da primeira coluna constatamos uma semelhança entre eles, portanto concluímos que, por aproximação, os máximos de $F_{in}^{(100)}(\phi)$ são condizentes com os pontos hiperbólicos da ilha.

Por conseguinte, é possível concluir que trajetórias são injetadas em uma área de *stickiness* quando são tangentes a variedade estável de um dos pontos hiperbólicos localizados na vizinhança da ilha principal. Todas as trajetórias que não são tangentes o suficiente a variedade estável de um dos pontos hiperbólicos não atravessam o minúsculo canal hiperbólico produzido pelo cruzamento entre variedades estáveis e instáveis do ponto hiperbólico e não podem ser injetadas para dentro da área de *stickiness*.

Na elaboração da figura 4.7 (b) consideramos as trajetórias injetadas na área de *stickiness* que permanecem mapeando a borda da ilha por pelo menos 100 iterações e computamos o tempo médio que as trajetórias gastam perto da ilha (trajetórias de *stickiness*) em função do ângulo de injeção, denominado $\tau_{in}(10^2)$. A função densidade de probabilidade de trajetórias de *stickiness* em função dos ângulos de ejeção exibimos na figura 4.7 (c), designada por $F_{out}^{(100)}(\phi)$. Analisando a função densidade de probabilidade torna-se clara a sua natureza quase discreta. Todas as trajetórias ejetadas seguem a variedade instável dos pontos hiperbólicos movendo-se ao longo de um estreito canal e afastando-se do ponto hiperbólico.

Na figura 4.7 (d) computamos o tempo médio que as trajetórias permanecem na região de *stickiness* (por pelo menos 100 iterações dentro da região de *stickiness*) em função do ângulo

de ejeção. Com base na figura 4.7 (d), concluímos que as trajetórias de *stickiness* são ejetadas apenas por poucos intervalos de ângulos dados por $\phi_{out} = \phi(\max(\tau_{out}))$. A $\tau_{out}(10^3)$ mostra que temos ângulos de ejeção muito específicos quando trajetórias permanecem um tempo médio grande na vizinhança da ilha. Portanto, as trajetórias que saíram por estes ângulos sofreram o efeito *stickiness*.

Desta maneira, determinamos a probabilidade $\mathcal{F}(\phi)d(\phi)$ que uma determinada trajetória entrará na região de *stickiness* considerando apenas trajetórias que deixam esta região através do ângulo ϕ_{out} . Deste modo, na figura 4.7 (e) calculamos a função densidade de probabilidade \mathcal{F} do ângulo de injeção das trajetórias que estão sujeitas a condição do tempo de *stickiness* (τ_{out}) ser maior que 1000 iterações, ou seja, apenas considerar trajetórias que entram na região de *stickiness* e saem por ângulos que correspondem aos máximos de $\tau_{out}(10^3)$.

Os resultados para $F_{in}^{(100)}(\phi)$ e \mathcal{F} apresentam grande similaridade sugerindo que nossas conclusões anteriores são consistentes, propondo que existem ângulos preferenciais por onde as trajetórias entram na região de *stickiness* e gastam um longo tempo na vizinhança da ilha. Deste modo, podemos argumentar que o máximo local de $F_{in}^{(100)}(\phi)$ representa os ângulos de *stickiness*, isto é, os ângulos que uma vez que uma trajetória é injetada de um deles, há uma grande probabilidade que esta trajetória volte para ser presa na ilha. Estes máximos correspondem à mesma região onde estão localizados os pontos hiperbólicos, confirmando a hipótese de que estes pontos fornecem um canal para uma típica trajetória entrar na região de *stickiness*.

As figuras 4.7(a) e 4.7 (e) mostram claramente que ambas são quase idênticas, sugerindo que todas as trajetórias deixam as regiões de *stickiness* por canais hiperbólicos partindo dos pontos hiperbólicos. Na tabela 4.3 estão os valores dos máximos locais de $F_{in}^{(100)}(\phi)$, máximos locais de \mathcal{F} e os 9 pontos hiperbólicos na vizinhança da ilha principal, confirmando a correspondência entre eles.

A fenômeno de *stickiness* em torno de uma ilha é prevista por algumas teorias [16, 39], mas uma análise da figura 4.7 (a) mostra que a eficácia de uma trajetória de injeção ou ejeção por um canal hiperbólico particular não é o mesmo para todos os pontos fixos, como pode ser observado pelas diferentes amplitudes de máximos de $F_{in}^{(100)}(\phi)$. A fim de tornar claro o papel da hiperbolicidade na vizinhança dos pontos hiperbólicos no fenômeno de injeção e ejeção de trajetórias de *stickiness*, primeiramente apresentamos como exemplo a figura 4.8, que mostra

Máximos de $F_{in}^{(100)}(\phi)$	Máximos de \mathcal{F}	Pontos hiperbólicos
-1,57	-1,57	-1,57
-1,34	-1,35	-1,35
-	0,00	0,00
0,68	0,68	0,69
0,79	0,79	0,79
0,86	0,86	0,86
1,00	1,00	1,00
1,23	1,23	1,23
1,44	1,43	1,44

Tabela 4.3: Máximos locais de $F_{in}^{(100)}(\phi)$, máximos locais de \mathcal{F} e os 9 pontos hiperbólicos na vizinhança da ilha principal, cuja unidade é dada em radianos.

o grau de hiperbolicidade na vizinhança de um dos pontos hiperbólicos localizados ao redor da ilha principal e a função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades estáveis e instáveis $\rho(\theta)$.

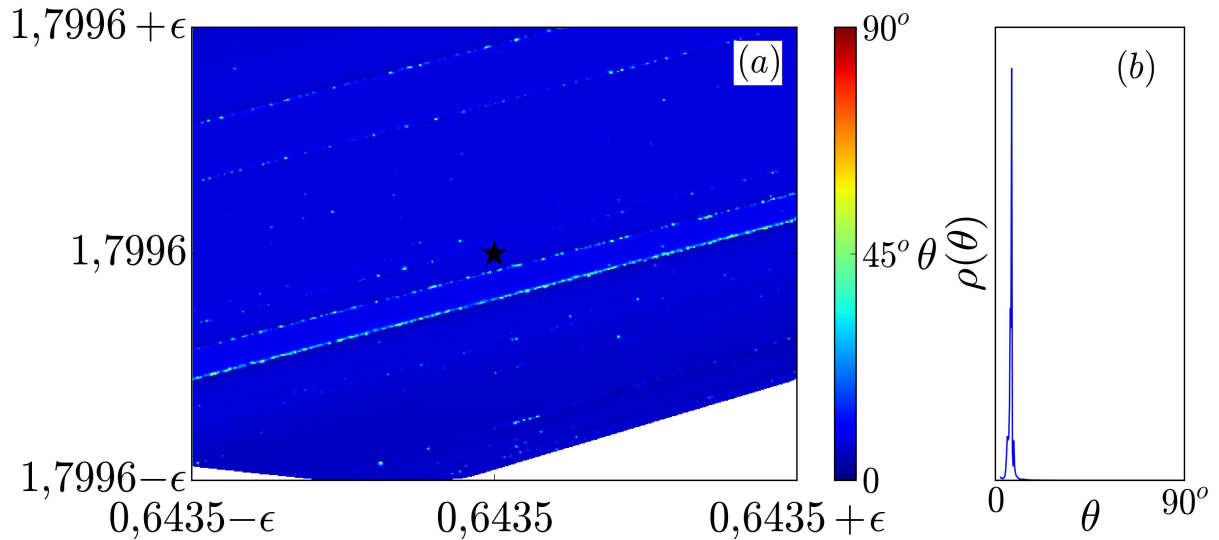


Figura 4.8: (a) Grau de hiperbolicidade na vizinhança do ponto hiperbólico de coordenada $(x, p) = (0,6435; 1,7996)$, cujo ângulo correspondente é $\theta \sim 1,22rad \sim 70,3^\circ$ e $\epsilon = 0,0025$. (b) Função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades estáveis e instáveis $\rho(\theta)$, a qual é caracterizada por apenas um máximo.

A posição da coordenada (x, p) corresponde ao oitavo ponto hiperbólico, conforme a tabela 4.3, e pode ser observado na figura 4.9 sendo o penúltimo ponto do gráfico. O ponto hiperbólico é marcado com uma estrela preta na figura 4.8 (a), onde pode-se averiguar que nas proximidades deste ponto, em questão, a região é predominantemente não hiperbólica. Como

observado na figura 4.8 (b), a função densidade de probabilidade $\rho(\theta)$ exibe apenas um máximo acentuado devido ao ângulo (quase) único entre as variedades estável e instável computado nas proximidades do ponto hiperbólico. Todos os outros pontos hiperbólicos exibem picos acentuados semelhantes na função densidade de probabilidade $\rho(\theta)$. No entanto, cada ponto hiperbólico tem seu próprio ângulo para o máximo de $\rho(\theta)$ caracterizando o seu próprio grau de hiperbolicidade.

Na figura 4.9, demonstramos a relação entre o grau de hiperbolicidade nas proximidades dos pontos hiperbólicos, e a eficácia dos canais hiperbólicos relacionados a cada ponto fixo para capturar trajetórias de *stickiness*. Na figura 4.9 representamos o máximo da função $F_{in}^{(100)}(\phi)$ em função do grau de hiperbolicidade medido pelo ângulo em que a função $\rho(\theta)$ apresente um máximo $\theta(\rho_{max})$.

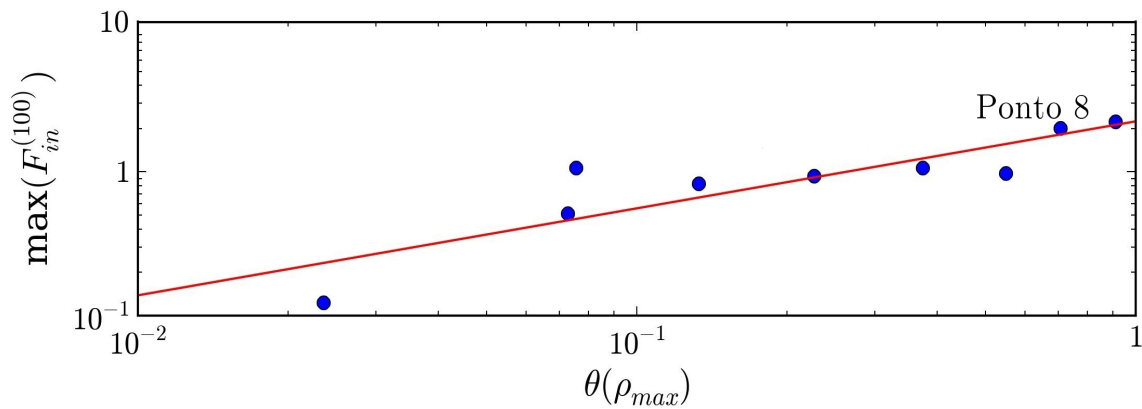


Figura 4.9: A eficácia dos canais de injeção medidos usando $\max(F_{in}^{(100)})$ em função do ângulo entre a variedade instável e a variedade estável.

A linha vermelha é um ajuste de lei de potência que serve de guia. O resultado apresentado na figura 4.9 indica que a eficácia dos canais é uma função do grau de hiperbolicidade da região próxima dos pontos hiperbólicos, ou seja, devido a estrutura complexa entre as variedades estáveis e instáveis. Quando consideramos valores pequenos de $\theta(\rho_{max})$, associamos com o fato de apenas uma porção muito pequena da área circundante do ponto fixo estar ocupada por canais hiperbólicos de injeção/ejeção. Como resultado, a função $F_{in}^{(100)}(\phi)$ revela um máximo relativamente pequeno, significando apenas que uma pequena fração das trajetórias podem atravessar o canal num processo de injeção ou de ejeção a partir da área de *stickiness*.

As evidências da correlação dos canais hiperbólicos com o efeito *stickiness* corrobora

com o objetivo do nosso trabalho, que é explicar o efeito *stickiness* associado a hiperbolicidade do espaço de fases por meio de canais hiperbólicos na vizinhança da ilha. Na figura 4.10 (a) mostramos os ângulos entre as variedades para algumas iteradas do mapa quando as trajetórias começam a escapar da vizinhança da ilha, e na figura 4.10 (b) temos a função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades $\rho(\theta)$ em função do ângulo θ .

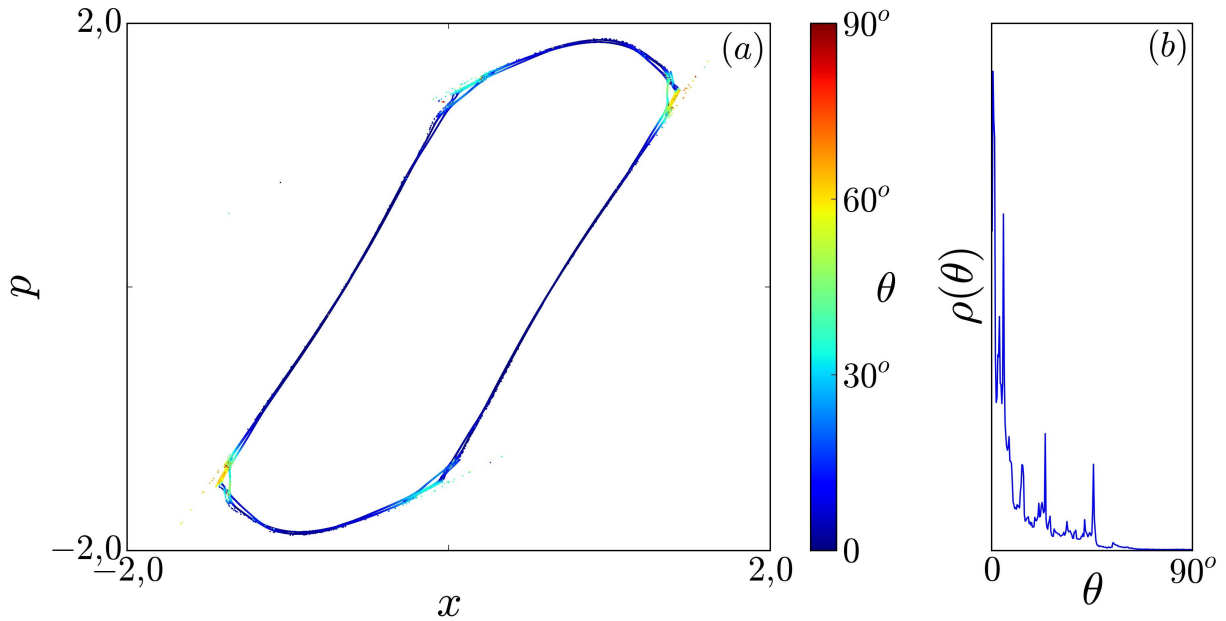


Figura 4.10: (a) Distribuição do espaço de fases do ângulo entre as variedades e (b) Função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades $\rho(\theta)$ em função do ângulo θ .

Na construção da figura 4.10 foi utilizada uma esfera de 250000 condições iniciais distribuídas em torno de um ângulo de injeção de $F_{in}^{(100)}(\phi)$, em seguida o mapa foi iterado 255 vezes e somente foram salvas as últimas 55 iteradas. Na figura 4.10 (a) podemos ver que a maior parte da borda da ilha apresenta regiões fortemente não hiperbólicas, na cor azul, confirmando a não hiperbolicidade do espaço de fases na vizinhança da ilha. Correspondentemente na figura 4.10 (b) temos um pico em $\theta = 0$ para a função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades.

As regiões fortemente não hiperbólicas não só formam uma espécie de barreira no espaço de fases, blindando as trajetórias que querem entrar na vizinhança da ilha, mas também quando as trajetórias já estão na borda da ilha formam uma barreira para que não escapem com tanta facilidade para o mar caótico. Além dessas regiões, observamos que existem 4 regiões fracamente hiperbólicas, duas destas na cor amarela-laranja e as outras duas na cor azul clara.

As regiões fracamente hiperbólicas configuram por onde as trajetórias começam a escapar, portanto podemos associar estas regiões a canais de escape no espaço de fases. Logo, a probabilidade das trajetórias escaparem por tais regiões é maior comparada a outras regiões na borda da ilha. Comparando as figuras 4.1, 4.2 e 4.10 vemos que existe uma correspondência entre os lugares mais prováveis por onde as trajetórias serão ejetadas da vizinhança da ilha.

Além disso, um interessante comportamento é percebido quando calculamos a distribuição dos tempos em que as trajetórias permanecem na vizinhança da ilha e logo a deixa, e a distribuição dos tempos de *stickiness* sujeita a condição das trajetórias saírem por algum máximo de $\tau_{out}(10^3)$. Para agregar relevância aos nossos estudos calculamos a distribuição dos tempos em que os expoentes de Lyapunov a tempo finito ($n = 100$) possuam o valor $\lambda < 0,2$ [90]. Quando computamos somente valores de $\lambda < 0,2$ levamos em consideração que trajetórias sofreram o aprisionamento em torno da ilha.

Na figura 4.11 mostramos a distribuição dos tempos das trajetórias na vizinhança da ilha τ_v , no qual os tempos de permanência das trajetórias na vizinhança da ilha foram obtidos a partir do momento em que a trajetória entra na vizinhança até o momento que ela a deixa. Mostramos também a distribuição dos tempos de *stickiness* e a distribuição dos tempos para valores de expoentes de Lyapunov a tempo finito dado por $\lambda < 0,2$, em escala logarítmica. Para a distribuição τ_v , vemos que o decaimento ocorre mais rápido do que o encontrado para a distribuição dos tempos de *stickiness* τ_s , isto se deve ao efeito de aprisionamento das trajetórias na borda das ilhas.

Como, tanto a distribuição τ_v quanto a distribuição $\tau_{(\lambda < 0,2)}$ referem-se a contribuição de aprisionamento das trajetórias, a correspondência entre as duas curvas deve ser parecida. A confirmação da relação entre as duas distribuições pode ser vista na figura 4.11 nas curvas de cor preta e verde, demonstrando que os dois métodos estão identificando o efeito *stickiness* de maneira correta, dando confiabilidade aos resultados obtidos.

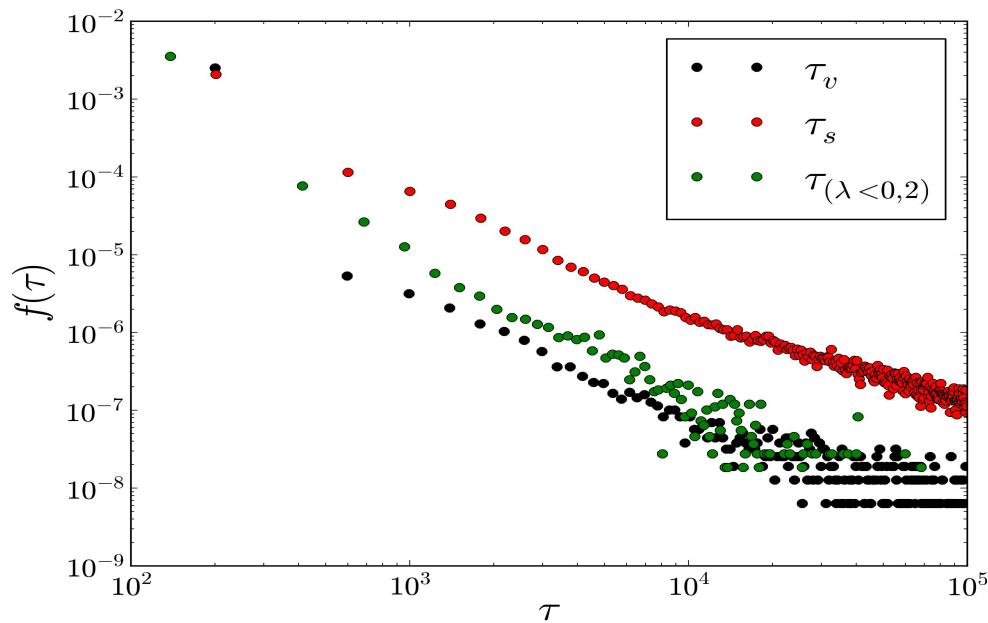


Figura 4.11: Distribuição dos tempos de trajetórias na vizinhança da ilha τ_v , representada pela cor preta. Distribuição dos tempos de *stickiness* τ_s , representada pela cor vermelha e $\tau_{(\lambda < 0,2)}$ que representa a distribuição dos tempos para valores de expoentes de Lyapunov a tempo finito dado por $\lambda < 0,2$ representada pela cor verde.

4.4 Distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré e mecanismos de controle de eventos extremos

Os eventos extremos tem tomado a atenção de muitos cientistas em todo o mundo devido ao seu impacto na sociedade, principalmente com o aumento da conectividade global entre as pessoas. Podemos encontrar eventos extremos diferentes setores da sociedade, por exemplo, em epidemias, apagões, crises financeiras, acidentes ambientais e industriais [91, 92, 93, 94, 95, 96, 97]. Sistemas que apresentam uma distribuição tipo lei de potência (“*power-law*”), caracterizada por uma cauda “gorda”, descrevem uma probabilidade considerável de eventos extremos. A principal característica desta distribuição é que dizemos ser livre de escala, significando que eventos de tamanhos arbitrariamente grandes são causados pelo mesmo mecanismo dinâmico que governa a ocorrência de eventos pequenos e intermediários, levando a uma imprevisibilidade [91].

No caso de sistemas Hamiltonianos, cuja dinâmica caracteriza-se pela distribuição de tempos de retorno, a ocorrência de eventos extremos é determinada pelo tipo de decaimento

que o sistema apresentar. Os sistemas Hamiltonianos completamente caóticos, ou fortemente caóticos, são caracterizados por uma distribuição de tempos de retorno com decaimento exponencial assintoticamente no tempo e o espaço de fases é totalmente preenchido por trajetórias caóticas. Logo, exponenciais são a assinatura de propriedades caóticas fortes [24].

Os sistemas Hamiltonianos fracamente caóticos apresentam um espaço de fases composto por comportamentos regulares e caóticos, sendo observados desvios do decaimento exponencial para tempos longos, ou seja, exibem assintoticamente um decaimento tipo lei de potência para a distribuição de tempos de retorno. Este comportamento acontece devido a presença de regiões de *stickiness* no espaço de fases [74, 25]. Portanto, o efeito *stickiness* é responsável pelo surgimento deste decaimento tipo lei de potência na distribuição de tempos de retorno, pois as trajetórias gastam intervalos de tempos longos na vizinhança da ilha.

A presença da cauda de lei de potência, causada pelo efeito *stickiness*, é uma característica de eventos extremos. Como é previsto na literatura [25, 72] a presença de tal comportamento para o modelo do mapa padrão, fizemos duas investigações para o controle deste fenômeno que consideramos como um evento extremo: uma relacionada a distribuição de tempos de *stickiness* e a outra relacionada a distribuição de tempos de retorno.

Na investigação relacionada com a distribuição de tempos de *stickiness* realizamos o seguinte mecanismo de controle: fechamos os máximos locais de \mathcal{F} , que são os ângulos de injeção da função densidade de probabilidade \mathcal{F} correspondentes às trajetórias que entram na vizinhança da ilha e permanecem um longo tempo na região de *stickiness*, cujos resultados são mostrados na figura 4.12. O mecanismo de controle consiste em fechar os ângulos por onde as trajetórias entram na vizinhança, ou seja, toda vez que uma trajetória quiser entrar por um dos ângulos de entrada de \mathcal{F} reinicializamos a trajetória no mar caótico. Os máximos de \mathcal{F} chamaremos de ângulos de controle e as curvas preta e vermelha, são definidas para a distribuição dos tempos de *stickiness* no caso com e sem controle, respectivamente.

Na distribuição dos tempos de *stickiness* com controle somente é levado em consideração o tempo que a trajetória permaneceu na vizinhança da ilha quando não entrou por algum ângulo de controle. Consequentemente, para a distribuição sem controle marcamos todos os tempos, mesmo os que entraram por algum ângulo de controle. As condições iniciais foram distribuídas aleatoriamente entre $-\pi$ e π e iteramos o mapa 4×10^5 vezes.

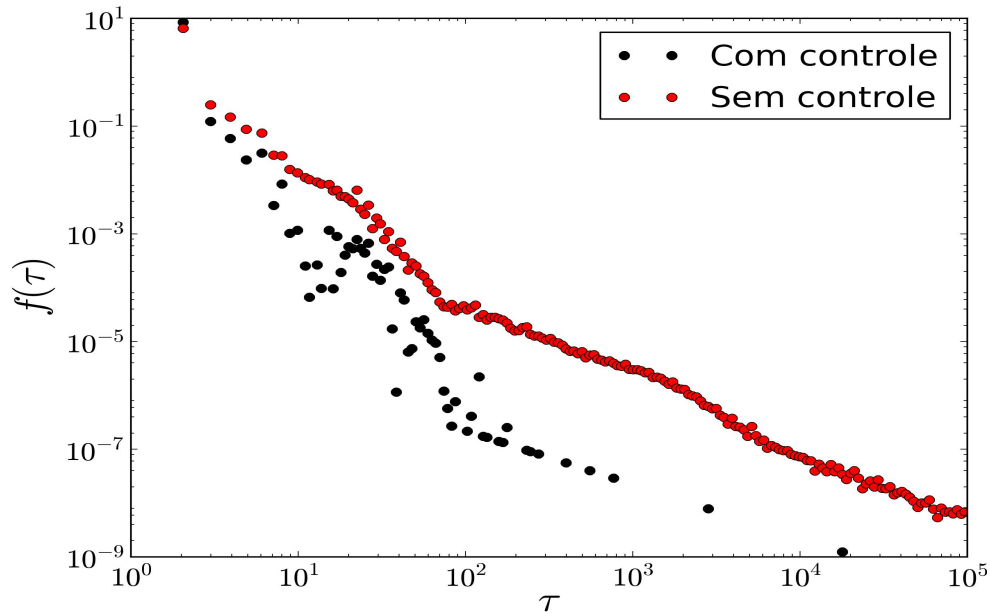


Figura 4.12: Distribuição dos tempos de *stickiness* para o caso com controle representado na curva preta e o caso sem controle representado na curva vermelha.

Como esperado, na distribuição dos tempos de *stickiness* sem controle obtemos uma cauda de lei de potência que é uma distribuição característica quando ocorre o aprisionamento de trajetórias ao redor da ilha. O resultado esperado para o caso com controle é um decaimento exponencial, pois não é levado em conta os tempos correspondentes às trajetórias que entraram na vizinhança da ilha por um determinado ângulo e permaneceram um longo período nessa região de *stickiness*. Observamos um decaimento exponencial até $\tau = 10^2$, porém vemos pontos além deste valor de τ que podem ser devido ao fato de não conseguirmos fechar todos os ângulos para o controle do *stickiness*, ou seja, a princípio fechamos os ângulos que consideramos mais relevantes na distribuição de \mathcal{F} .

De maneira geral, podemos concluir que efetivamente conseguimos controlar o efeito *stickiness* apenas controlando os ângulos que levam as trajetórias a ficarem mais tempo na vizinhança da ilha. De fato, mostramos que monitorando uma pequena parte do espaço de fases podemos alterar consideravelmente a distribuição dos tempos de *stickiness*, caracterizando-o como um evento extremo na dinâmica do mapa padrão.

A outra investigação utiliza os fundamentos do tempo de recorrência de Poincaré para mostrar que é possível controlar as flutuações que surgem devido à presença de *stickiness* na dinâmica do mapa padrão. O mecanismo de controle proposto consiste em rastrear as trajetórias,

e uma vez que quiser entrar em um dos pequenos círculos de raio 0,003 (correspondente a $\approx 1 \times 10^5$ % do espaço de fases) centrados em cada um dos pontos hiperbólicos de uma órbita de período 18, perturbamos a trajetória de modo que uma possível passagem em um dos canais hiperbólicos e conseqüentemente o efeito de aprisionamento das trajetórias seja evitado.

Os resultados da distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré para o sistema com e sem mecanismo de controle são traçados na figura 4.13. Numericamente, para o caso com controle, realizamos um reinício da trajetória fora do canal de injeção, ou seja, toda vez que uma trajetória quiser entrar na vizinhança da ilha por algum ângulo de controle reiniciamos sua posição no mar caótico.

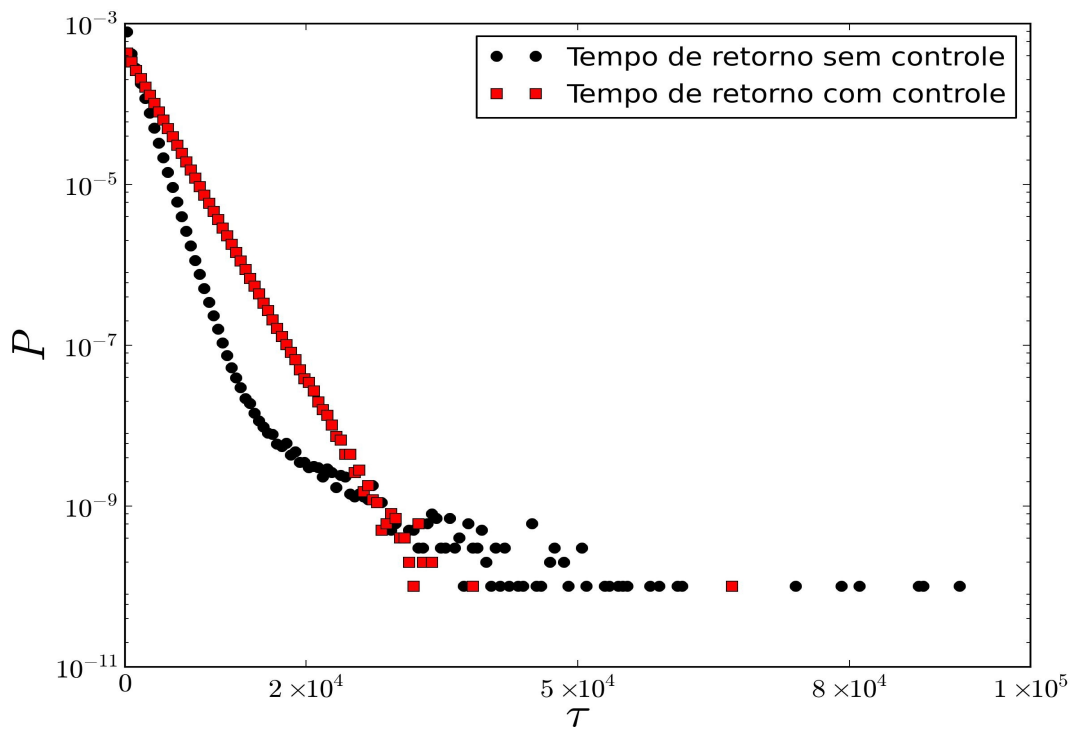


Figura 4.13: Distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré do mapa padrão para o caso com controle, representado pelo quadrado vermelho e o caso sem controle, representado pela bola preta. O gráfico está normalizado.

A distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré sem qualquer mecanismo de controle é denotada pelas bolas pretas na figura 4.13. Como pode ser observado, para tempos de recorrência grandes, uma forte flutuação da lei exponencial é observada. De fato, para tempos de recorrência grandes a distribuição tem um decaimento tipo lei de potência, como resultado do fenômeno de *stickiness*.

Quando o sistema é submetido ao nosso mecanismo de controle a distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré é denotada pelos quadrados vermelhos na figura 4.13. Neste caso, quase todas as flutuações para tempos de recorrência longos estão ausentes, corroborando a ideia de que toda flutuação fora do equilíbrio no sistema está agora ausente, desde que o *stickiness* seja evitado. Portanto, conseguimos controlar eventos de recorrência extrema associado a presença de canais hiperbólicos na vizinhança da ilha.

4.5 Outros casos de K

No decorrer do trabalho todas as análises foram feitas para o parâmetro de não linearidade $K = 3,0$. Para dar maior credibilidade aos estudos realizados na tese, também foram feitos para outros parâmetros de K como, $K = 3,25$, $K = 3,50$, $K = 3,75$, $K = 4,0$, obtendo resultados semelhantes para estes outros parâmetros de K . Mostraremos os resultados para o parâmetro de $K = 3,565$, o qual possui o efeito *stickiness* significativo tornando mais clara a evidência do controle na dinâmica do sistema. Na figura 4.14 mostramos o espaço de fases para o mapa padrão com parâmetro de não linearidade $K = 3,565$, onde podemos observar que é constituído de uma ilha principal envolto do mar caótico e ao redor da ilha temos uma região mais escura caracterizando a ocorrência do efeito *stickiness*.

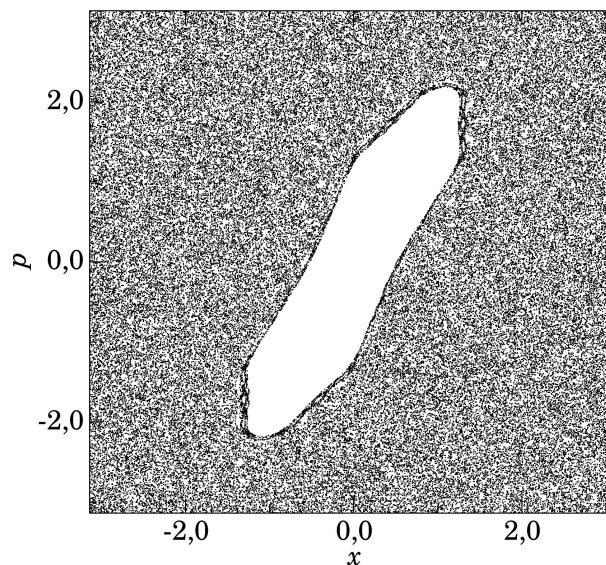


Figura 4.14: Espaço de fases com 10^5 pontos e a condição inicial foi dada em torno de $x(0) = 1,6$ e $p(0) = 2,0$.

O estudo da relação entre as propriedades topológicas do espaço de fases, o mecanismo de *stickiness* e o caminho que as trajetórias visitam a vizinhança da ilha, também foi realizado para o parâmetro de não linearidade $K = 3,565$, conforme mostrado na figura 4.15.

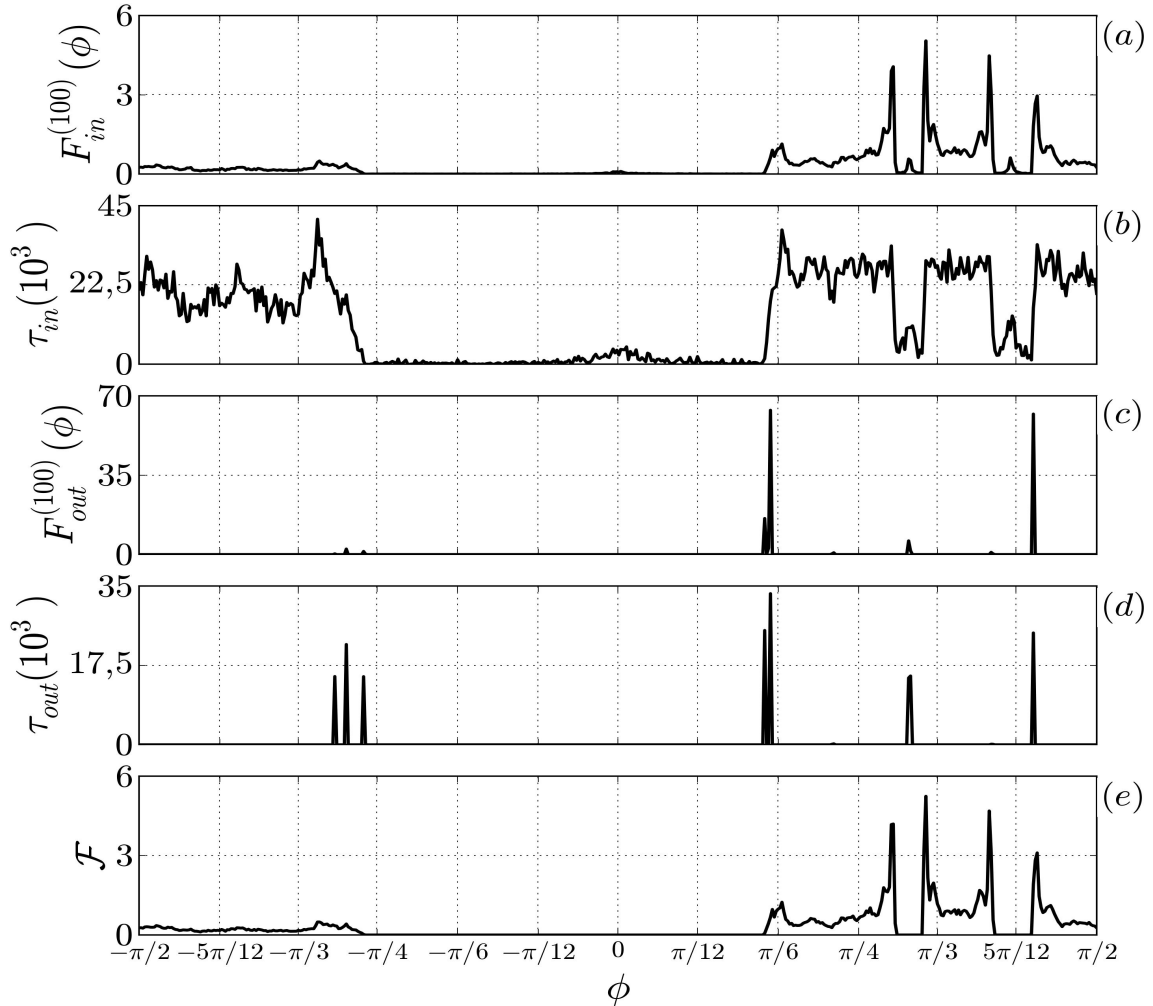


Figura 4.15: (a) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção na vizinhança da ilha do mapa padrão. (b) Tempo médio gasto na área de *stickiness* em função do ângulo de injeção. (c) Função densidade de probabilidade do ângulo de ejeção na vizinhança da ilha do mapa padrão. (d) Tempo médio gasto na área de *stickiness* em função do ângulo de ejeção e (e) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção sujeito a condição de as trajetórias que entram na região de *stickiness* devem sair por ângulos que correspondem aos máximos de $\tau_{out}(10^3)$.

Na figura 4.15 (a) mostramos $F_{in}^{(100)}(\phi)$, o qual tem um comportamento característico parecido com o da figura 4.7 (a), porém não tanto pontual. Contudo, vemos que ainda existem intervalos de ângulos bem definidos por onde as trajetórias entram na vizinhança da ilha. Na figura 4.15 (b) computamos o tempo médio que as trajetórias gastam perto da ilha (trajetó-

rias de *stickiness*) em função do ângulo de injeção, denominado $\tau_{in}(10^3)$. Visualizamos quatro platôs quando comparado com a figura 4.15 (a) observamos que as regiões por onde as trajetórias são injetadas se assemelham, em que os três platôs da direita são expressivos, pois é por essas regiões que as trajetórias tem maior probabilidade de entrarem na região de *stickiness* e permanecerem por um intervalo de tempo longo.

A distribuição $F_{out}^{(100)}(\phi)$ está representada na figura 4.15 (c), sendo que mais uma vez torna-se visível sua natureza quase discreta para ângulos de ejeção. Na figura 4.15 (d) computamos o tempo médio das trajetórias que permaneceram em uma região de *stickiness* (por pelo menos 100 iterações dentro da área de *stickiness*) em função do ângulo de ejeção. Averiguamos que as trajetórias de *stickiness* são ejetadas apenas por poucos intervalos de ângulos dados por $\phi_{out} = \phi(\max(\tau_{out}))$. Conseqüentemente, as trajetórias que saem por estes ângulos permanecem um bom tempo na vizinhança da ilha, ocorrendo o efeito *stickiness*. Os resultados para $F_{in}^{(100)}(\phi)$ e $F_{out}^{(100)}(\phi)$ propõem a existência de ângulos preferenciais por onde as trajetórias são injetadas na região de *stickiness* e gastam um longo tempo na vizinhança da ilha, bem como existem ângulos preferenciais por onde as trajetórias são ejetadas da vizinhança.

A função densidade de probabilidade \mathcal{F} do ângulo de injeção das trajetórias que estão sujeitas a condição de considerarmos apenas as trajetórias que entram na região de *stickiness* e saem por ângulos que correspondem aos máximos de $\tau_{out}(10^3)$ é mostrada na figura 4.15 (e). Constatamos que as figuras 4.15 (a) e 4.15 (e) mostram notadamente que ambas distribuições são quase idênticas como acontece nas figuras 4.7 (a) e 4.7 (e). Sendo assim, concluímos que há uma forte ideia que o mecanismo de injeção e ejeção das trajetórias nas regiões de *stickiness* ocorre por canais hiperbólicos partindo dos pontos hiperbólicos de uma órbita de período 18 (círculos pretos).

Os resultados obtidos para a distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré são mostrados na figura 4.16, para o caso com controle, representado pelo triângulo azul e o caso sem controle, representado pelo triângulo verde, para $(K = 3, 565)$, cujo parâmetro é considerado caso de *stickiness* forte no mapa padrão. A distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré sem qualquer mecanismo de controle é denotada pelos triângulos verdes na figura 4.16. Como pode ser observado, a ocorrência de tempos de recorrência a partir de $\tau = 1 \times 10^4$ é muito maior do que para o caso de $K = 3, 0$, configurando um cenário em que mais trajetórias

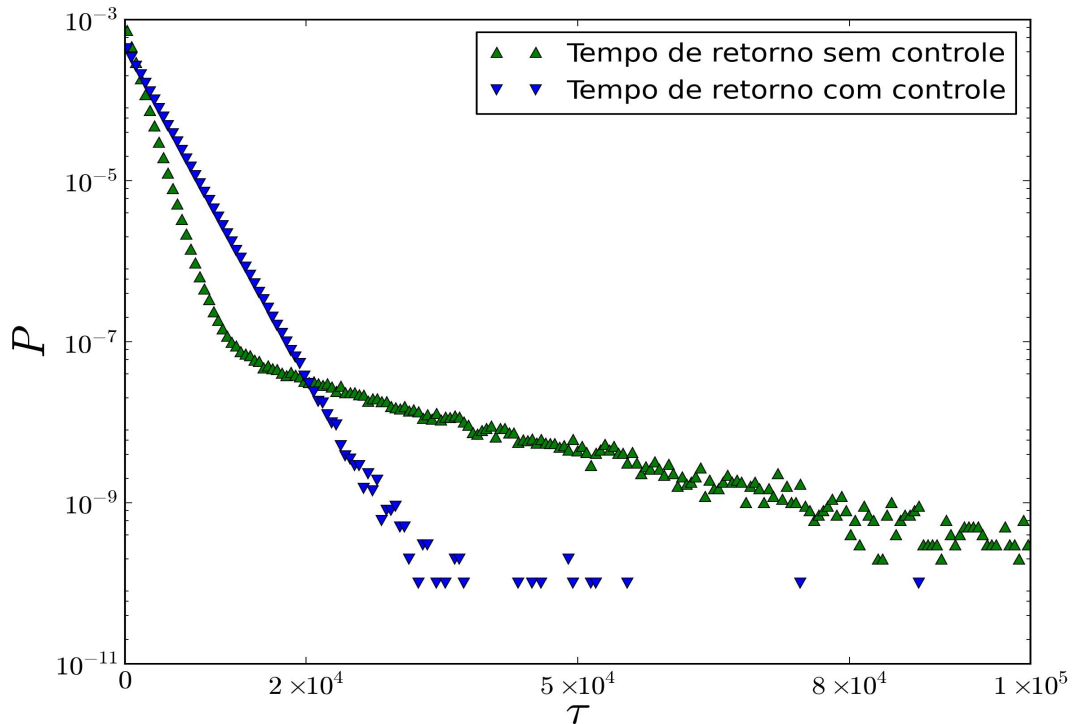


Figura 4.16: Distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré do mapa padrão para o caso com controle, representado pelo triângulo azul e o caso sem controle, representado pelo triângulo verde. O gráfico está normalizado.

são aprisionadas na vizinhança da ilha. Uma vez que existem tempos de recorrência grandes ($\tau = 1 \times 10^5$), uma forte flutuação da lei exponencial é observada. De fato, para tempos de recorrência grandes a distribuição tem um decaimento tipo lei de potência como resultado do fenômeno de *stickiness* no tempo de recorrência.

Na figura 4.16 mostramos a distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré quando o sistema é submetido ao nosso mecanismo de controle que consiste em fechar os ângulos que correspondem aos pontos hiperbólicos. Neste caso, novamente temos que quase todas as flutuações para os tempos de recorrência longos estão ausentes, ou seja, quando conseguimos evitar o *stickiness* quase toda flutuação existente no sistema se torna inexistente.

Comparando as figuras 4.13 e 4.16, observa-se que a taxa exponencial para ambos os valores de K é a mesma, suportando a ideia de que o comportamento do sistema é agora completamente difusivo independentemente do valor de K . Portanto, conseguimos controlar eventos de recorrência extrema e o transporte anômalo associado a presença de canais hiperbólicos na vizinhança da ilha.

Capítulo 5

Perspectivas futuras

Como trabalhos futuros propomos o estudo em um sistema dissipativo, cujo modelo físico usado é conhecido na literatura como mapa padrão dissipativo e assimétrico. Desta maneira, tem-se como objetivo verificar se existe alguma relação entre a hiperbolicidade e as propriedades topológicas do espaço de fases.

5.1 Mapa padrão dissipativo e assimétrico

O modelo físico que descreve um rotor pulsado periodicamente sujeito a dissipação fraca e um potencial assimétrico é o mapa padrão dissipativo e assimétrico (MPDA) (em inglês "*dissipative asymmetric kicked rotor map (DAKRM)*") [35, 98]. Podemos descrever a dinâmica deste sistema por meio do seguinte conjunto de equações discretas bidimensionais

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1 - \gamma)p_n + K[\text{sen}(x_n) + a\text{sen}(2x_n + \pi/2)], \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

A variável canônica conjugada p representa o momento angular e x representa a posição angular. O parâmetro K é a amplitude dos pulsos, também conhecido como parâmetro de não linearidade. O parâmetro γ é o coeficiente de dissipação e a é o parâmetro de quebra de simetria do sistema, responsável pelo transporte na dinâmica do mapa.

Quando aplicamos os limites conservativos, isto é, $\gamma = 0$ e simétrico $a = 0$, retornamos ao mapa conhecido na literatura como mapa padrão ou mapa de Chirikov-Taylor [4]. Como

estamos interessados no caso com dissipação fraca tomamos o valor do parâmetro de dissipação pequeno o suficiente, $\gamma = 0,0002$, para que se observe o efeito de ilhas periódicas do caso conservativo e o valor para o parâmetro de assimetria é $a = 0,005$.

Alguns resultados preliminares são mostrados na figura 5.1 respectivo ao grau de hiperbolicidade deste sistema dissipativo, para valores de $K = 6,40$ e $K = 6,92$. As condições de contorno das variáveis dinâmicas p e x para o nosso estudo estão respectivamente entre $(-2\pi < p < 2\pi$ e $-2\pi < x < 2\pi)$.

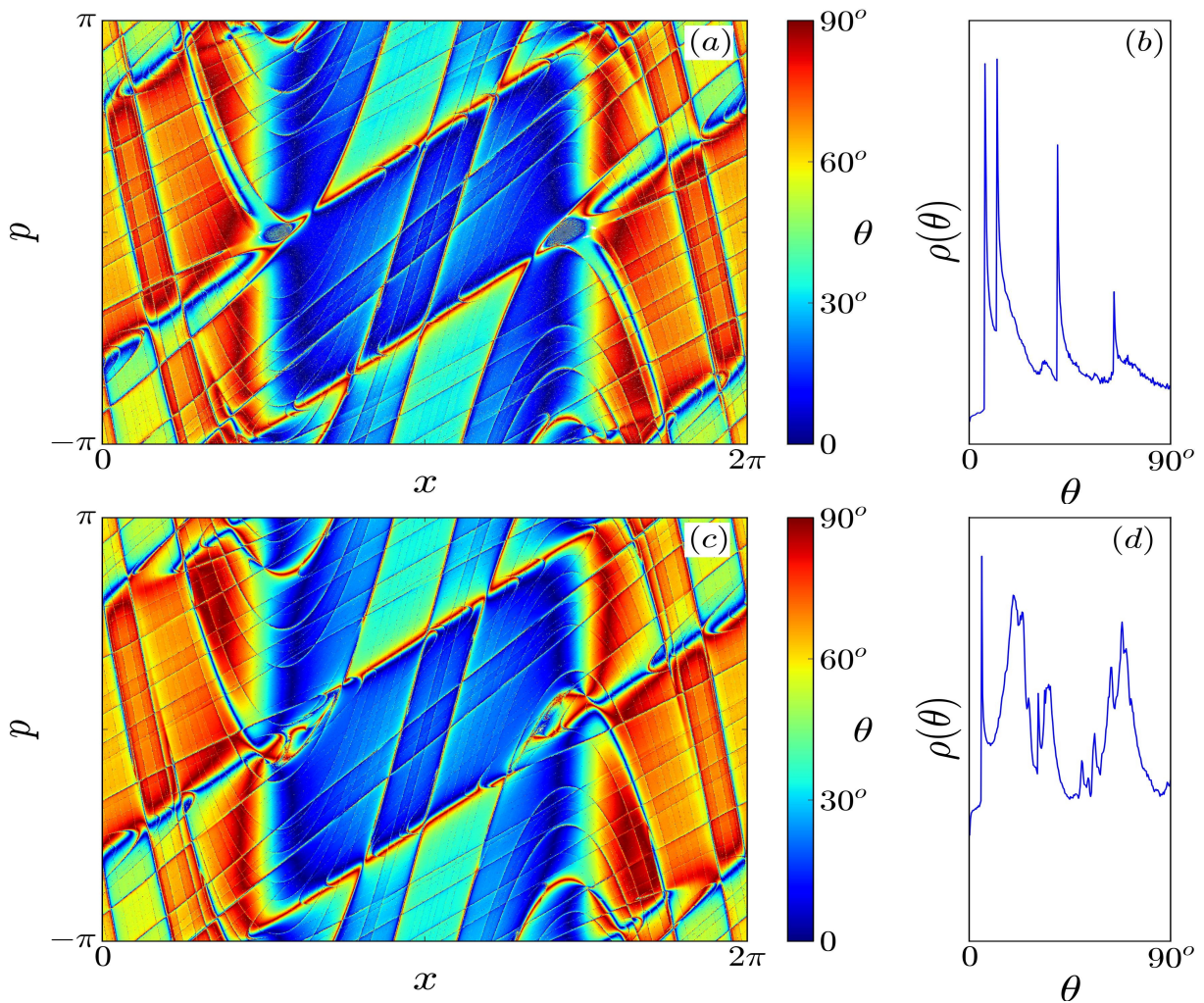


Figura 5.1: Distribuição do espaço de fases do ângulo entre as variedades estáveis e instáveis do mapa padrão dissipativo e assimétrico, representado pela escala de cores. Em (a) temos o grau de hiperbolicidade para $K = 6,40$ e em (b) a respectiva função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades $\rho(\theta)$ em função de θ . (c) Grau de hiperbolicidade para $K = 6,92$ e em (d) a respectiva função de distribuição de probabilidade dos ângulos entre as variedades $\rho(\theta)$ em função de θ .

Podemos ver que ocorrem duas regiões distintas, uma região central com caráter essen-

cialmente não hiperbólico, e a outra compreende as regiões quase hiperbólicas e hiperbólicas visualizadas na porção esquerda e direita da figura 5.1 (a) e (c). Na figura 5.1 (b) e (d) são exibidas as funções de distribuição de probabilidades dos ângulos entre as variedades $\rho(\theta)$ em função de θ , sendo que nas duas distribuições avistamos alguns picos para ângulos próximos de zero, intermediários (entre 0 e 90°) e próximos de 90° , evidenciando um caráter não homogêneo da distribuição do espaço de fases do ângulo entre as variedades.

Como o sistema é dissipativo, não observamos mais as ilhas presentes no espaço de fases, contudo temos agora pontos fixos no seu lugar, os quais se tornam atratores do sistema. Um estudo foi feito para verificarmos as propriedades topológicas do espaço de fases, em que calculamos a função densidade de probabilidade do ângulo de injeção em uma esfera de raio $r = 0,1$ em torno dos dois pontos fixos, um localizado na ilha da esquerda e outro na ilha da direita, presentes no espaço de fases.

O procedimento para obter as figuras 5.2 e 5.3 consiste em dar 500.000 condições iniciais no mar caótico distribuídas uniformemente em todo o espaço de fases longe dos pontos fixos e averiguar por quais ângulos as trajetórias entram na esfera de raio r em torno dos pontos fixos, analisando o espaço de fases da esfera de $-\pi$ até π .

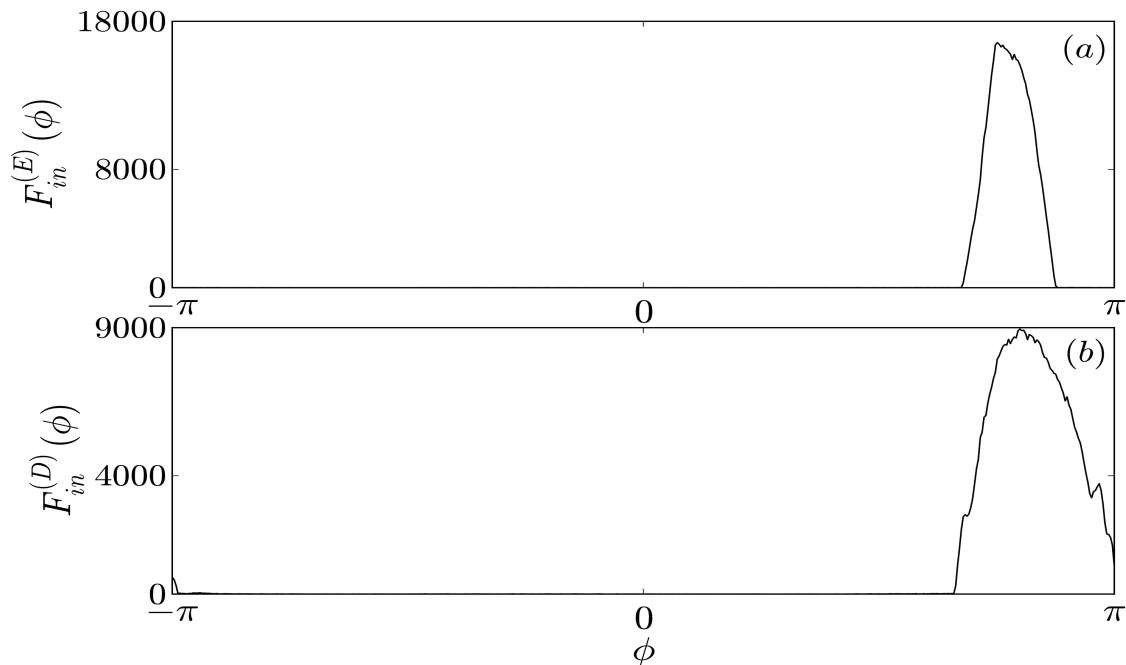


Figura 5.2: (a) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção no ponto fixo da esquerda $F_{in}^{(E)}(\phi)$ e (b) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção no ponto fixo da direita $F_{in}^{(D)}(\phi)$.

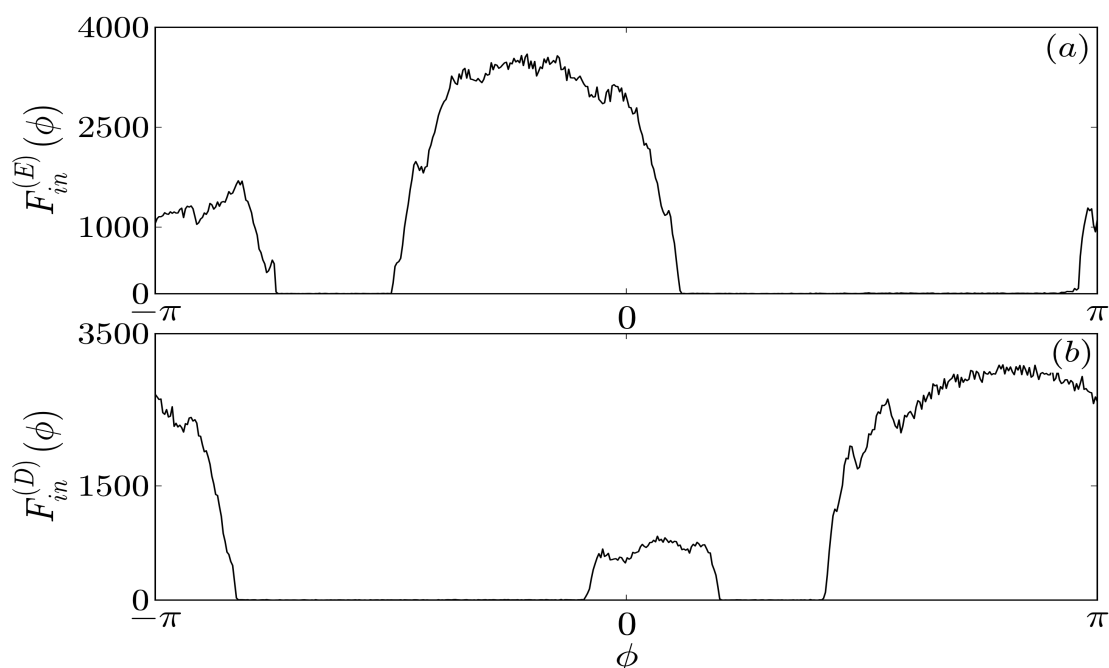


Figura 5.3: (a) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção no ponto fixo da esquerda $F_{in}^{(E)}(\phi)$ e (b) Função densidade de probabilidade do ângulo de injeção no ponto fixo da direita $F_{in}^{(D)}(\phi)$.

Na figura 5.2 (a) apresentamos as funções densidade de probabilidade dos ângulos de injeção nos pontos fixos da esquerda e em (b) da direita para $k = 6, 40$ e na figura 5.3 (a) as funções densidade de probabilidade dos ângulos de injeção nos pontos fixos da esquerda e em (b) da direita para $k = 6, 92$. Observamos que existe um intervalo de ângulos específicos por onde as trajetórias entram na esfera em torno do ponto fixo, portanto estas informações evidenciam que há ângulos de injeção preferenciais nos dois casos de K analisados.

Com base nestes primeiros resultados obtidos podemos inferir que possivelmente ocorra uma relação entre canais por onde as trajetórias entrem na esfera em torno do ponto fixo e as propriedades topológicas do espaço de fases. Contudo, esta premissa só poderá ser confirmada com outros estudos que serão averiguados futuramente.

A hiperbolicidade pode ser analisada tanto em sistemas conservativos quanto em sistemas dissipativos. Surgiu a oportunidade de colaboração com o ex-aluno de doutorado Carlos A. C. Jousseph orientado pelo professor Dr. Marcus W. Beims, resultando na elaboração de um artigo que tem como objetivo apresentar propriedades de convergência de trajetórias conservativas regulares e caóticas sob pequena dissipação. Publicado na revista *Physica A*, cujo título é *Weak dissipative effects on trajectories from the edge of basins of attraction*.

Capítulo 6

Considerações finais

Nesta tese estudamos as propriedades de hiperbolicidade nas fronteiras das ilhas e o efeito *stickiness* na dinâmica de um sistema Hamiltoniano bidimensional conhecido como rotor pulsado, que é modelado por um mapa, conhecido como mapa padrão. Os principais objetivos deste trabalho foram investigar a influência das regiões hiperbólicas e não hiperbólicas na vizinhança de uma ilha e como estas realizam um importante papel permitindo ou proibindo o efeito *stickiness* em torno da ilha, bem como, descrever um mecanismo para suprimir tal fenômeno. Afim de transformar o sistema que inicialmente tem um comportamento não difusivo, em virtude da presença dos eventos de recorrência extremos, para um sistema difusivo.

Estudamos a dinâmica do mapa padrão que é descrito pelas Eqs. (3.3), e mostramos que o cenário típico do seu espaço de fases é composto por regiões regulares e caóticas, no qual o parâmetro de não linearidade K definirá o tipo de dinâmica do sistema. Além destes comportamentos, podemos observar no espaço de fases um fenômeno que ocorre quando trajetórias caóticas são aprisionadas ao redor de uma ilha, sendo identificado pelas regiões escuras na borda da ilha, tal fenômeno é conhecido como *stickiness*. Os principais resultados contidos na tese foram obtidos para o parâmetro de não linearidade $K = 3,0$ do mapa padrão, mas também foram estendidos para outros valores de K , obtendo resultados semelhantes.

A partir da investigação realizada com o cálculo das variedades estáveis e instáveis e a iteração de um conjunto de trajetórias na vizinhança da ilha, constatamos que existem regiões preferenciais por onde as trajetórias são ejetadas, que coincidem com as regiões das variedades instáveis. O cômputo dos ângulos entre as variedades estáveis e instáveis determinam o grau

de hiperbolicidade do espaço de fases, no qual verificamos a presença de regiões hiperbólicas e não hiperbólicas ocupando todo o espaço de fases. Outro resultado que reforça a existência de regiões preferenciais de escape foi mostrado quando calculamos o grau de hiperbolicidade para algumas iteradas do mapa, em que as condições iniciais são distribuídas em torno de um ângulo de injeção de $F_{in}^{(100)}(\phi)$. Analisando quando as trajetórias começam a escapar da vizinhança da ilha percebemos que o escape ocorre novamente em regiões coincidentes com as regiões das variedades instáveis. Evidenciando que uma região não hiperbólica ao redor da ilha blindada as trajetórias que querem sair da vizinhança da ilha ou as que querem entrar na vizinhança.

A partir da nossa definição de vizinhança da ilha foram feitos estudos da relação entre as propriedades topológicas do espaço de fases, das trajetórias que visitam a vizinhança da ilha e o mecanismo de *stickiness*. As análises mostradas na figura 4.7 corroboram com a ideia de que existem regiões preferenciais por onde as trajetórias entram $F_{in}^{(100)}(\phi)$ e saem $F_{out}^{(100)}(\phi)$ da vizinhança da ilha. Outro resultado importante mostrado foi o da função densidade de probabilidade \mathcal{F} do ângulo de injeção de trajetórias que entram na região de *stickiness* e saem por ângulos que correspondem aos máximos de $\tau_{out}(10^3)$. Concluimos, então, que existem ângulos de injeção que são equivalentes aos pontos hiperbólicos, bem definidos no espaço de fases quando consideramos apenas as trajetórias que ficam bastante tempo na vizinhança da ilha, ou seja, correspondem as trajetórias de *stickiness*. Sugerindo que todas as trajetórias deixam as regiões de *stickiness* por canais hiperbólicos partindo dos pontos hiperbólicos.

Na análise das regiões hiperbólicas e não hiperbólicas na vizinhança da ilha destacamos que estas desempenham um papel importante na determinação da presença e, mais do que isso, na intensidade do efeito *stickiness*. Mostramos que o efeito *stickiness* está associado com a presença de canais de injeção relacionados ao cruzamento das variedades estáveis e instáveis de pontos hiperbólicos na vizinhança da ilha, permitindo que as trajetórias mudem entre regiões de *stickiness* e regiões que não apresentem *stickiness* no espaço de fases. Deste modo, constatamos que a eficácia da borda da ilha para trajetórias de *stickiness* está diretamente relacionada com o grau de hiperbolicidade de pequenas áreas circundantes aos pontos hiperbólicos entorno da ilha.

Através das análises feitas neste trabalho baseadas na topologia de estruturas hiperbólicas e não hiperbólicas na vizinhança da ilha construímos um mecanismo de controle do efeito

stickiness, que consiste em fechar os ângulos por onde as trajetórias entram na vizinhança da ilha, ou seja, toda vez que uma trajetória quiser entrar por um dos ângulos de \mathcal{F} reinicializamos a trajetória no mar caótico. Tal mecanismo, transforma a original lei de potência obtida pela distribuição dos tempos de recorrência de Poincaré para o sistema em uma distribuição exponencial, evitando-o de exibir eventos extremos na dinâmica.

Além disso, mostramos que monitorando as áreas hiperbólicas na vizinhança no espaço de fases, podemos transformar o sistema originalmente não difusivo em um sistema difuso. Portanto, aplicando o controle em pequenas porções do espaço de fases, que correspondem a $\approx 1 \times 10^{-4} \%$ do espaço de fases total, é possível gerar um sistema completamente difusivo eliminando as recorrências de tempos longos que surgem do fenômeno de *stickiness*. Ou seja, interferindo em uma porção irrisória do espaço de fases total conseguimos transformar o sistema, com relação ao processo difusivo.

Bibliografia

- [1] J. H. Poincaré, “Les methodes nouvelles de la mécanique celeste,” *Paris: Gauthier-Villars*, 1899.
- [2] L. H. A. Monteiro, in *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [3] E. Ott, in *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Nova York, 2000.
- [4] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, in *Regular and Stochastic Motion*. Nova York: Springer, 1983.
- [5] S. Wiggins, in *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Nova York: Springer-Verlag, 1990.
- [6] B. V. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional oscillator systems,” *Physics Reports*, vol. 52, no. 5, pp. 263 – 379, 1979.
- [7] G. Schmidt, “Stochasticity and fixed points transitions,” *Phys. Rev. A*, vol. 22, p. 2849, 1980.
- [8] A. B. Rechester and R. B. White, “Calculation of turbulent diffusion for the chirikov-taylor model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 44, p. 1586, 1980.
- [9] G. M. Zaslavsky and B. V. Chirikov, “Stochastic instability of non-linear oscillations,” *Usp. Fiz. Nauk.*, vol. 14, p. 195, 1972.
- [10] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, R. B. White, and C. F. F. Karney, “Statistical description of the chirikov-taylor model in the presence of noise,” vol. II, pp. 471 – 483, 1983.

- [11] S. Aubry, “The twist map, the extended frenkel-kontorova model and the devil’s staircase,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 7, no. 1, pp. 240 – 258, 1983.
- [12] G. Contopoulos and M. Harsoula, “Stickiness effects in chaos,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 107, no. 1 - 2, pp. 77 – 92, 2010.
- [13] T. Tél, A. de Moura, C. Grebogi, and G. Károlyi, “Chemical and biological activity in open flows: A dynamical system approach,” *Physics Reports*, vol. 413, pp. 91 – 196, 2005.
- [14] T. H. Solomon, E. R. Weeks, and H. L. Swinney, “Observation of anomalous diffusion and lévy flights in a two-dimensional rotating flow,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, pp. 3975 – 3978, 1993.
- [15] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and J. Klafter, “Strange kinetics,” *Nature*, vol. 363, p. 31, 1993.
- [16] J. D. Meiss and E. Ott, “Markov-tree model of intrinsic transport in hamiltonian systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 2741 – 2744, 1985.
- [17] G. M. Zaslavsky, in *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*. Oxford, 2006.
- [18] C. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, and N. Voglis, “Cantori, islands and asymptotic curves in the stickiness region,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 73, no. 1-4, pp. 221–230, 1999.
- [19] V. Rom-Kedar and S. Wiggins, “Transport in two-dimensional maps,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 109, pp. 239 – 298, 1990.
- [20] G. Contopoulos *The Astronomical Journal*, vol. 17, p. 147, 1971.
- [21] G. M. Zaslavsky, “Chaos, fractional kinectics, and anomalous transport.,” *Physics Reports*, vol. 371, pp. 461 – 580, 2002.
- [22] G. M. Zaslavsky, “Dynamical traps,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 168 - 169, pp. 292 – 304, 2002.
- [23] G. M. Zaslavsky, in *The physics of chaos in Hamiltonian systems*. London: Imperial College Press, 2007.

- [24] R. Venegeroles, “Universality of algebraic laws in hamiltonian systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 064101, 2009.
- [25] E. G. Altmann and T. Tél, “Poincaré recurrences from the perspective of transient chaos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 174101, 2008.
- [26] J. M. Seoane and M. A. Sanjuán, “Exponential decay and scaling laws in noisy chaotic scattering,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 2, pp. 110 – 116, 2008.
- [27] E. G. Altmann and A. Endler, “Noise-enhanced trapping in chaotic scattering,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 244102, 2010.
- [28] Y. C. Lai and T. Tel, in *Transient Chaos Complex Dynamics on Finite-Time Scales*. New York: Springer, 2010.
- [29] O. Alus, S. Fishman, and J. D. Meiss, “Boundary circles of mixed phase space, hamiltonian systems,” 2014.
- [30] E. G. Altmann and H. Kantz, *Anomalous Transport in Hamiltonian Systems*, pp. 269 – 291. Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2008.
- [31] V. Latora, A. Rapisarda, and S. Ruffo, “Chaotic dynamics and superdiffusion in a hamiltonian system with many degrees of freedom,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 280, pp. 81 – 86, 2000.
- [32] T. Manos and M. Robnik, “Survey on the role of accelerator modes for anomalous diffusion: The case of the standard map,” *Phys. Rev. E*, vol. 89, p. 022905, 2014.
- [33] G. M. Zaslavsky, “Chaotic dynamics and the origin of statistical laws,” *Phys. Today*, pp. 39 – 45, 1999.
- [34] R. W. Easton, J. D. Meiss, and S. Carver, “Exit times and transport for symplectic twist maps,” *Chaos*, vol. 3, no. 2, pp. 153–165, 1993.
- [35] S. R. Lopes, J. D. Szezech Jr., R. F. Pereira, A. A. Bertolazzo, and R. L. Viana, “Anomalous transport induced by nonhyperbolicity,” *Phys. Rev. E*, vol. 86, no. 5 - 6, p. 016216, 2012.

- [36] A. Babiano, G. Boffetta, A. Provenzale, and A. Vulpiani, “Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 7, pp. 2465–2474, 1994.
- [37] T. Tél, A. de Moura, C. Grebogi, and G. Károlyi, “Chemical and biological activity in open flows: A dynamical system approach,” *Physics Reports*, vol. 413, no. 2â3, pp. 91 – 196, 2005.
- [38] J. D. Szezech Jr., I. L. Caldas, S. R. Lopes, P. J. Morrison, and R. L. Viana, “Effective transport barriers in nontwist systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 86, p. 036206, 2012.
- [39] L. A. Bunimovich and L. V. Vela-Arevalo, “Many faces of stickiness in hamiltonian systems,” *Chaos*, vol. 22, no. 2, 2012.
- [40] R. Mackay, J. Meiss, and I. Percival, “Transport in hamiltonian systems,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 13, no. 1, pp. 55 – 81, 1984.
- [41] M. Santhanam, , and H. Kantz, “Return interval distribution of extreme events and long-term memory,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 051113, 2008.
- [42] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, in *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [43] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, in *Regular and Chaotic Dynamics*. Nova York: Springer-Verlag, 1992.
- [44] H. J. Korsch and H. J. Jodl, in *Chaos: A Program Collection for the PC*. Springer, 1998.
- [45] Z. You, E. J. Kostelich, and J. A. Yorke, “Calculating stable and unstable manifolds,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 01, no. 03, pp. 605 – 623, 1991.
- [46] J. C. Sommerer, “The end of classical determinism,” *Johns Hopkins APL Technical Digest*, vol. 16, no. 4, pp. 333 – 347, 1995.
- [47] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, “Determining lyapunov exponents from a time series,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 16, no. 3, pp. 285 – 317, 1985.

- [48] C. Manchein, *Estudo das Propriedades de Caos Fraco em Sistemas Conservativos e Intermitentes*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Física, Curitiba, 2010.
- [49] G. Benettin, L. Galgani, and J.-M. Strelcyn, “Kolmogorov entropy and numerical experiments,” *Phys. Rev. A*, vol. 14, pp. 2338 – 2345, 1976.
- [50] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory,” *Meccanica*, vol. 15, no. 1, 1980.
- [51] I. Shimada and T. Nagashima, “A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 61, no. 6, pp. 1605 – 1616, 1979.
- [52] J. Guckenheimer and P. Holmes, in *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Nova York: Springer, 2002.
- [53] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chaté, R. Livi, and A. Politi, “Characterizing dynamics with covariant lyapunov vectors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 130601, 2007.
- [54] E. J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, “Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems,” *Phys. D*, vol. 109, no. 1-2, pp. 81 – 90, 1997.
- [55] M. Inubushi, M. U. Kobayashi, S.-i. Takehiro, and M. Yamada, “Covariant lyapunov analysis of chaotic kolmogorov flows,” *Phys. Rev. E*, vol. 85, p. 016331, 2012.
- [56] R. Artuso and C. Manchein, “Instability statistics and mixing rates,” *Phys. Rev. E*, vol. 80, p. 036210, 2009.
- [57] F. Ginelli, H. Chaté, R. Livi, and A. Politi, “Covariant lyapunov vectors,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 46, no. 25, p. 254005, 2013.
- [58] D. P. Truant and G. P. Morriss, “Backward and covariant lyapunov vectors and exponents for hard-disk systems with a steady heat current,” *Phys. Rev. E*, vol. 90, p. 052907, 2014.

- [59] H.-I. Yang and G. Radons, “Comparison between covariant and orthogonal lyapunov vectors,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 046204, 2010.
- [60] M. Inubushi, M. U. Kobayashi, S.-i. Takehiro, and M. Yamada, “Covariant lyapunov analysis of chaotic kolmogorov flows,” *Phys. Rev. E*, vol. 85, p. 016331, 2012.
- [61] H. Bosetti and H. A. Posch, “Covariant lyapunov vectors for rigid disk systems,” *Chemical Physics*, vol. 375, pp. 296 – 308, 2010.
- [62] M. Sala, C. Manchein, and R. Artuso, “Estimating hyperbolicity of chaotic bidimensional maps,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, no. 09, p. 1250217, 2012.
- [63] P. V. Kuptsov and U. Parlitz, “Theory and computation of covariant lyapunov vectors,” *Journal of Nonlinear Science*, vol. 22, no. 5, pp. 727 – 762, 2012.
- [64] H. Bosetti, H. A. Posch, C. Dellago, and W. G. Hoover, “Time-reversal symmetry and covariant lyapunov vectors for simple particle models in and out of thermal equilibrium,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 046218, 2010.
- [65] A. Turchi, *Caratterizzazione del caos tramite lo studio dei vettori di Lyapunov covarianti*. PhD thesis, Università Degli Studi di Firenze, Firenze, 2007.
- [66] G. Contopoulos and M. Harsoula, “Stickiness effects in conservative systems,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 20, no. 7, pp. 2015 – 2043, 2010.
- [67] E. G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz, “Stickiness in hamiltonian systems: From sharply divided to hierarchical phase space,” *Phys. Rev. E*, vol. 73, p. 026207, 2006.
- [68] G. Contopoulos and M. Harsoula, “Stickiness in chaos,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 18, p. 2929, 2008.
- [69] C. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, N. Voglis, and R. Dvorak, “Stickiness and cantori,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 30, no. 23, p. 8167, 1997.
- [70] C. F. Karney, “Long-time correlations in the stochastic regime,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 8, no. 3, pp. 360 – 380, 1983.

- [71] J. D. Hanson, J. R. Cary, and J. D. Meiss, “Algebraic decay in self-similar markov chains,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 39, no. 3 - 4, pp. 327 – 345, 1985.
- [72] D. L. Shepelyansky, “Poincaré recurrences in hamiltonian systems with a few degrees of freedom,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 055202, 2010.
- [73] B. Chirikov and D. Shepelyansky, “Correlation properties of dynamical chaos in hamiltonian systems,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 13, no. 3, pp. 395 – 400, 1984.
- [74] E. G. Altmann and T. Tél, “Poincaré recurrences and transient chaos in systems with leaks,” *Phys. Rev. E*, vol. 79, p. 016204, 2009.
- [75] G. Cristadoro and R. Ketzmerick, “Universality of algebraic decays in hamiltonian systems,” *Phys. Rev. Lett.*
- [76] S. R. Channon and J. L. Lebowitz, “Numerical experiments in stochasticity and homoclinic oscillation,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 357, pp. 108 – 118, 1980.
- [77] L. E. Reichl, in *The Transition To Chaos: Conservative Classical Systems And Quantum Manifestations*. Nova York: Springer, 2004.
- [78] G. M. Zaslavsky and M. K. Tippet, “Connection between recurrence-time statistics and anomalous transport,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, pp. 3251 – 3254, 1991.
- [79] O. Alus, S. Fishman, and J. D. Meiss, “Statistics of the island-around-island hierarchy in hamiltonian phase space,” *Phys. Rev. E*, vol. 90, p. 062923, 2014.
- [80] R. M. da Silva, M. W. Beims, and C. Manchein, “Recurrence-time statistics in non-hamiltonian volume-preserving maps and flows,” *Phys. Rev. E*, vol. 92, p. 022921, 2015.
- [81] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, “Asymptotic statistics of poincaré recurrences in hamiltonian systems with divided phase space,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 528 – 531, 1999.
- [82] R. Venegeroles, “Calculation of superdiffusion for the chirikov-taylor model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 054102, 2008.

- [83] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, and J. Ford, “Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation,” vol. 93, pp. 334 – 352, 1979.
- [84] J. M. Greene, “A method for determining a stochastic transition,” *J. Math. Phys.*, vol. 20, p. 1183, 1979.
- [85] S. Fishman, R. E. Prange, and M. Gryniasy, “Scaling theory for the localization length of the kicked rotor,” *Phys. Rev. A*, vol. 39, pp. 1628 – 1633, 1989.
- [86] T. S. Krüger, P. P. Galuzio, T. d. L. Prado, R. L. Viana, J. D. Szezech Jr., and S. R. Lopes, “Mechanism for stickiness suppression during extreme events in hamiltonian systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 91, p. 062903, 2015.
- [87] J. Aguirre, J. C. Vallejo, and M. A. F. Sanjuán, “Wada basins and chaotic invariant sets in the hénon-heiles system,” *Phys. Rev. E*, vol. 64, p. 066208, 2001.
- [88] G. H. Hsu, E. Ott, and C. Grebogi, “Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds,” *Physics Letters A*, vol. 127, no. 4, pp. 199 – 204, 1988.
- [89] S. Benkadda, S. Kassibrakis, R. B. White, and G. M. Zaslavsky, “Self-similarity and transport in the standard map,” *Phys. Rev. E*, vol. 55, pp. 4909 – 4917, 1997.
- [90] J. D. Szezech Jr., S. R. Lopes, and R. L. Viana, “Finite-time lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable hamiltonian systems,” *Physics Letters A*, vol. 335, no. 5 - 6, pp. 394 – 401, 2005.
- [91] H. L. D. d. S. Cavalcante, M. Oriá, D. Sornette, E. Ott, and D. J. Gauthier, “Predictability and suppression of extreme events in a chaotic system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 198701, 2013.
- [92] D. Sornette and G. Ouillon, “Dragon-kings: mechanisms, statistical methods and empirical evidence,” vol. 205, pp. 1 – 26, 2012.
- [93] J. Janczura and R. Weron, “Black swans or dragon-kings? A simple test for deviations from the power law,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 205, no. 1, pp. 79–93, 2012.

- [94] D. Sornette, “Dragon-kings, black swans and the prediction of crises,” *International Journal of Terraspace Science and Engineering*, pp. 1–18, 2009.
- [95] V. Yukalov, E. Yukalova, and D. Sornette, “Extreme events in population dynamics with functional carrying capacity,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 205, no. 1, pp. 313–354, 2012.
- [96] D. Sornette, “Probability distributions in complex systems,” in *Computational Complexity* (R. A. Meyers, ed.), pp. 2286–2300, Springer New York, 2012.
- [97] J. Laherrère and D. Sornette, “Stretched exponential distributions in nature and economy: “fat tails” with characteristic scales,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 525–539, 1998.
- [98] L. Wang, G. Benenti, G. Casati, and B. Li, “Ratchet effect and the transporting islands in the chaotic sea,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 244101, 2007.