

ADRIANO DOFF SOTTA GOMES

**QUANTIZAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA EM  
TEORIAS COM GRUPO DE GAUGE  
SEMISIMPLES**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Curso de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Felice Pisano

CURITIBA

2001

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**PARECER**

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Mestrado do estudante Adriano Doff Sotta Gomes, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é "*Quantização da Carga Elétrica em Teorias com Grupo de Gauge Semisimples*".

Curitiba, 21 de fevereiro de 2001

**Prof. FELICE PISANO**  
(Orientador Presidente)  
(UFPR)



**Profa. RENATA ZUKANOVICH FUNCHAL**  
(USP)



**Prof. RICARDO LUIZ VIANA**  
(UFPR)



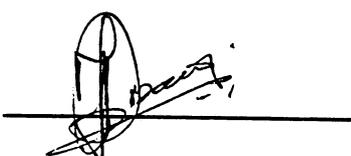
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ADRIANO DOFF SOTTA GOMES

TÍTULO : "QUANTIZAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA EM TEORIAS COM GRUPO DE  
GAUGE SEMISIMPLES"

Em sessão pública, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sobre o assunto de sua tese sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato conceito global A.

Banca Examinadora:	Assinatura	Conceito
Prof. FELICE PISANO (Orientador/Presidente) (UFPR)		<u>A</u>
Profa. RENATA ZUKANOVICH FUNCHAL (USP)		<u>A</u>
Prof. RICARDO LUIZ VIANA (UFPR)		<u>A</u>

Curitiba 21 de fevereiro de 2001

# Resumo

Apresentamos a realização da unicidade das atribuições de hipercarga dos fermions fundamentais, leptons e quarks, e a correspondente quantização da carga elétrica numa classe de teorias das interações eletromagnética e nucleares com as simetrias de gauge locais dos grupos semisimples  $SU(n)_c \otimes SU(m)_L \otimes U(1)_N$ . Mostramos que a quantização da carga elétrica, no âmbito do contexto apresentado, não é realizada no modelo standard mínimo. Todavia, as teorias de fermions leptarquarks e bosons bileptons,  $m = 3, 4$ , abrigam a quantização da carga  $N$  sem nenhum vínculo sobre a natureza dos neutrinos (Weyl, Dirac, Majorana ou Dirac-Majorana) mas conectando a quantização da carga elétrica com a replicação de gerações de sabor e a existência de três cargas de cor da simetria  $SU(3)_c$  exata.

-Palavras chave:

Extensões de gauge, Dinâmicas de sabor, Simetrias de sabor, Famílias ou gerações de fermions, Quantização da carga elétrica.

-Áreas de conhecimento:

1.05.03.00-5, 1.05.03.01-3, 1.05.03.02-1.

# Abstract

We consider the unicity of hypercharge attributions of fundamental fermions, the leptons and quarks, and the associated electric charge quantization in the leptoquark-bilepton theories with the  $SU(n)_c \otimes SU(m)_L \otimes U(1)_N$  local gauge symmetries. The electric charge quantization in such scheme is not realized as in the minimal standard model. However, these theories of leptoquark fermions and bilepton bosons,  $m = 3, 4$ , have the quantization of the  $N$  charges without any constraint on the neutrino character (Weyl, Dirac, Majorana, or Dirac–Majorana) but connecting the electric charge quantization to the flavor generation replication and to the realization of three color charges of the exact and hidden  $SU(3)_c$  symmetry quantum chromodynamics.

-Key words:

Gauge extensions, Flavor dynamics, Flavor symmetries, Fermions families, Electric charge quantization.

-PACS numbers:

11.30.Er - Charge conjugation, parity, time reversal, and other discrete symmetries

11.30.Hv - Flavor symmetries

11.30.Rd - Chiral symmetries

12.10.Dm - Unified theories and models of strong and electroweak interactions

12.60.Cn - Extensions of electroweak gauge sector

12.60.Fr - Extensions of electroweak Higgs sector

# Agradecimentos

Ao Prof. Felice Pisano pela orientação e iniciação a pesquisa científica, amizade e dedicação durante estes 3 anos;

A minha família, minha mãe Noeli e meus irmãos André e Adolfo, pelo apoio e incentivo;

Aos meus grandes amigos Ana Amélia, Sandro, Dáfni, Benvenho, Angela pela amizade e companheirismo e também pelas inesquecíveis idas ao Rebordosa. A todos os meus outros colegas da Pós pela amizade e companheirismo;

Aos Professores Fernando Pablo Devecchi, José Arruda Freire, Ricardo Luiz Viana e a Professora Renata Zukanovich (USP), pelas valiosas contribuições ao trabalho;

Aos Professores Marcio Henrique Franco Bettega e Carlos Maurício Lepiensi pela ajuda com os preparativos finais para a defesa;

A CAPES pelo suporte financeiro.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Lagrangeanas e Simetrias de Gauge</b>	<b>10</b>
1.1 O Formalismo Lagrangeano . . . . .	10
1.2 Simetrias de Gauge e Leis de Conservação . . . . .	13
1.3 O Surgimento de Anomalias em Teorias Quânticas de Campos . . . . .	18
<b>2 Anomalias Quirais</b>	<b>20</b>
2.1 O Diagrama Triângulo . . . . .	20
2.2 Obtenção da Amplitude Quântica para o Diagrama Triângulo . . . . .	22
2.3 Teorias de Gauge Livres de Anomalias . . . . .	30
2.4 Um Pouco de Entendimento Sobre a Origem das Anomalias . . . . .	35
<b>3 Quantização da Carga Elétrica no Modelo Padrão Eletrofraco</b>	<b>39</b>
3.1 A Estrutura de Multipletos do Modelo Padrão . . . . .	39
3.2 Quantização da Carga Elétrica com uma Família do Modelo Padrão . . . . .	41
3.2.1 Vínculos Clássicos . . . . .	41
3.2.2 Vínculos Quânticos . . . . .	43
3.3 O Problema da Desquantização . . . . .	46
3.4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo Padrão com Três Gerações de Férmions . . . . .	48
<b>4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-3-1</b>	<b>53</b>
4.1 A Estrutura de Multipletos da Extensão Leptoquark-Bilepton Mínima 3-3-1 . . . . .	55
4.2 Vínculos Clássicos . . . . .	58

4.3	Vínculos Quânticos . . . . .	60
4.4	Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-3-1 . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-4-1</b>	<b>64</b>
5.1	A Estrutura de Multipletos da Extensão Leptoquark-Bilepton 3-4-1	64
5.2	Vínculos Clássicos . . . . .	67
5.3	Vínculos Quânticos . . . . .	70
5.4	Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-4-1 . . . . .	72
	<b>Conclusão</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Diagrama triângulo - A Identidade de Ward Axial</b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Diagrama triângulo - A Identidade de Ward Vetorial</b>	<b>78</b>
<b>C</b>	<b>Álgebras de Lie, Matrizes de Dirac, Geradores de Grupo</b>	<b>80</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>

# Lista de Figuras

2.1	Expansão da função de vértice em termos de diagramas de Feynman .	21
2.2	Expansão da função de vértice axial em termos de diagramas de Feynman . . . . .	22
2.3	Diagramas triângulo . . . . .	23
2.4	Correções radiativas de segunda ordem ao diagrama triângulo . . . . .	29
2.5	Diagramas que contribuem a anômalia em modelos não-abelianos . . . . .	30
2.6	Representação do mar de Dirac . . . . .	37
2.7	Representação do mar de Dirac após a mudança adiabática em que $A \rightarrow A + \delta A$ . . . . .	38
3.1	Contribuições anômalas do diagrama triângulo. . . . .	43
4.1	Diagrama do processo de dupla carga elétrica $e^-e^- \rightarrow W^-V^-$ . . . . .	54
4.2	Diagrama do processo $e^-e^- \rightarrow W^-V^-$ considerando bósons de gauge com dupla carga elétrica . . . . .	54

# Introdução

É um fato já consolidado que a carga elétrica de léptons e quarks, os componentes fundamentais da matéria em torno da escala de Fermi, é sempre proporcional a múltiplos inteiros da carga elétrica dos quarks *down*,  $\frac{1}{3}|e|$ . A constatação de que a carga elétrica é quantizada consiste, em princípio, num dos mais profundos mistérios da Física. Então, há alguns anos, propostas visando o entendimento teórico desta constatação foram apresentadas, como, por exemplo, a hipótese dos monopolos magnéticos, proposta inicialmente por Dirac [1], em que ao se postular nas equações de Maxwell uma simetria entre os campos elétrico e magnético obtemos, então, a condição de quantização da carga elétrica, supondo dentro deste contexto a existência de monopolos magnéticos, ou no caso das teorias de grande unificação, (GUTs [2]), onde a quantização da carga elétrica é imediata, pois o operador de carga dentro desta classe de teorias é um gerador do grupo, que é simples, e tem seus autovalores quantizados de forma que léptons e quarks têm suas cargas elétricas definidas automaticamente [3]. Todavia, estas sugestões são altamente especulativas e muito difíceis de serem testadas experimentalmente, pelo menos para as escalas de energia alcançadas até o momento ( $\text{KTeV} \equiv \text{PeV}$ ). Portanto, neste trabalho, consideraremos uma abordagem menos especulativa para o entendimento da quantização da carga elétrica [4-18], que segue ao consideramos no caso modelos com uma estrutura de gauge semisimples, tal como o modelo padrão e suas variantes. De fato, a quantização da carga elétrica chega dentro desta abordagem a partir da consistência teórica do modelo, que deve ser livre de anomalias de modo a preservar a sua renormalizabilidade [19], e do fato dos férmions serem massivos, com a possível exceção do neutrino, requerendo, então, a preservação da invariância de gauge do setor de Yukawa. Assim, no Capítulo 1 apresentamos o formalismo lagrangeano e mostramos que para uma dada lagrangeana a invariância de gauge, ou quiral, levará a conservação, respectivamente, de uma corrente vetorial, ou axial no limite de massa nula. Então, argumentamos que uma simetria presente na versão clássica da teoria

pode não ser respeitada na correspondente versão quântica, é o fenômeno das anomalias que surgem em teorias onde interações com correntes axiais estão presentes. No Capítulo 2, portanto, levantamos explicitamente a forma da anomalia triângulo, ou de Adler-Bell-Jackiw, para o caso da QED em 4-D, considerando o acoplamento do fóton ao diagrama triângulo com um vértice axial e dois vértices vetoriais, e mostramos que para o caso de um modelo com simetria de gauge não-abeliana que a anomalia pode ser cancelada ao escolhermos uma representação adequada para os multipletos de campos de matéria. Já no Capítulo 3, fazendo uso dos resultados obtidos no capítulo anterior, mostramos que a quantização da carga elétrica é realizada considerando-se apenas a primeira geração de férmions do modelo padrão. Todavia, mostramos que o modelo padrão mínimo com 3 gerações não abriga a quantização da carga elétrica. O Capítulo 4 é dedicado, então, a tratarmos da questão da quantização da carga na extensão mínima dos modelos leptarquark-bilepton [20], o modelo 3-3-1. Finalmente, no Capítulo 5 consideramos a quantização da carga elétrica na extensão máxima dos modelos leptarquark-bilepton [21], o modelo 3-4-1.

# Capítulo 1

## Lagrangianas e Simetrias de Gauge

### 1.1 O Formalismo Lagrangeano

Na formulação de uma teoria quântica relativística de campos das interações das partículas elementares, o formalismo lagrangeano é bastante útil, pois mostra a conexão fundamental entre as simetrias e as leis de conservação associadas e, em particular, no desenvolvimento das teorias de gauge, nas quais as dinâmicas quânticas das interações são obtidas como consequência da invariância da teoria sob simetrias de gauge locais. A versão quântica de uma teoria de campo é construída a partir da versão clássica através de métodos funcionais, utilizando integrais de trajetória de Feynman, ou métodos operatoriais via quantização canônica. Todavia, o nosso objetivo neste capítulo é derivar leis de conservação para um campo clássico. Tendo em vista este objetivo consideremos a ação para o campo escalar real  $\varphi(x)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx^3 \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (1.1)$$

De posse da ação, e com a finalidade de obtermos as equações que regem a dinâmica deste campo, consideremos o Princípio de Hamilton [22]

$$\delta S = 0 \quad (1.2)$$

que de todas as configurações possíveis fornece apenas os campos  $\varphi(x)$  que extremizam a ação. Então, para uma variação arbitrária  $\delta\varphi$  com as condições de contorno fixas e considerando as Eqs.(1.1) e (1.2), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] = 0 \quad (1.3)$$

que são as equações de Euler–Lagrange para o campo  $\varphi$ . Todavia, é de interesse escrevermos estas equações para o caso mais geral possível. Então, para um sistema descrito por  $N$  campos independentes,  $\varphi_i$ ;  $i = 1, \dots, N$ , em um espaço  $d$ -dimensional que é descrito pelas coordenadas,  $x_\mu$ ;  $\mu = 0, \dots, d - 1$ , temos que a generalização do procedimento que discutimos anteriormente leva as seguintes equações de Euler–Lagrange [23] para um campo qualquer  $\varphi_i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right] = 0, \quad (1.4)$$

de modo que a partir das equações de Euler–Lagrange e, especificada a densidade de lagrangeana  $\mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$  pode-se, em princípio, obter as equações que regem a dinâmica do sistema.

Iremos então considerar alguns casos de interesse em que conhecendo a forma da densidade de lagrangeana [24], para um dado campo, encontramos as equações de movimento associadas .

- a) Campo fermiônico livre : Os campos fermiônicos de spin- $\frac{1}{2}\hbar$  descrevem os campos de matéria como o elétron, o múon, o próton, etc..., e são descritos relativisticamente por bi-spinores de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

que satisfazem a equação de Dirac

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0, \quad (1.6)$$

onde  $\gamma^\mu$  são as quatro matrizes de Dirac que satisfazem a relação de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

fechando a álgebra de Clifford [25].

A equação de Dirac, por sua vez, pode ser obtida a partir de uma densidade de lagrangeana, a lagrangeana de Dirac para o campo livre,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \quad (1.8)$$

onde  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$  e, a partir deste momento, estaremos usando unidades naturais,  $c = \hbar = 1$ .

- b) Campo escalar livre : O campo escalar livre é descrito por funções  $\phi(x^\mu) = \phi(x)$  e descreve partículas de spin zero, tais como os píons, os kaons e outros mésons escalares. Estes campos satisfazem a equação de Klein–Gordon

$$(\square + m^2)\phi(x^\mu) = 0 \quad (1.9)$$

que é obtida da lagrangeana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \quad (1.10)$$

que contém o termo cinético e o termo de massa, respectivamente, e com o operador d'Alambertiano,  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ .

- c) Campo vetorial não massivo : O campo vetorial não massivo descreve o fóton, de spin-1, e tem sua dinâmica descrita pelas equações de Maxwell

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.11)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{onde} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho} \text{ e,} \quad (1.12)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.13)$$

que são obtidas da seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \quad (1.14)$$

## 1.2 Simetrias de Gauge e Leis de Conservação

Na descrição da dinâmica de um campo nos valem do formalismo lagrangeano escrevendo a densidade de lagrangeana correspondente, como por exemplo, a lagrangeana de Dirac do campo fermiônico de spin- $\frac{1}{2}$ , e obtemos a equação que rege a dinâmica do campo, no caso do campo fermiônico de spin- $\frac{1}{2}$ , a equação de Dirac. Agora, verificaremos que dada uma lagrangeana para o sistema, a simetria e a correspondente invariância sob uma transformação de gauge levará, então, a uma lei de conservação de acordo com o teorema de Noether [26] visto que, princípios de invariância e transformações de simetria contínuas ou discretas, geométrica ou interna, globais ou locais associadas desempenham papéis muito significativos em física guiando a formulação de teorias.

Quando as equações de movimento são derivadas a partir de princípios variacionais, procedimentos sistemáticos são adotados para se estabelecer leis de conservação e as constantes de movimento como consequência das propriedades de invariância. Então, leis de conservação e regras de seleção podem ser impostas como simetrias da lagrangeana, restringindo e prescrevendo sua forma. Partimos especificamente de uma teoria de campos de Dirac, na qual descrevemos inicialmente a interação do campo fermiônico, descrito pela lagrangeana de Dirac, Eq.(1.8), com um campo de gauge abeliano  $A_\mu$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \quad (1.15)$$

onde, com a introdução da derivada covariante de gauge,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.16)$$

a lagrangeana do campo livre de Dirac, Eq.(1.8), conterà a interação do campo fermiônico  $\Psi$  com o campo bosônico de gauge com spin-1,  $A_\mu$ .

Submetemos agora o campo  $\Psi$  a uma transformação de gauge local com relação ao grupo U(1) abeliano ,

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-ie\theta(x)}\Psi(x) \simeq (1 - ie\theta(x))\Psi(x) \quad (1.17)$$

e a correspondente transformação do spinor conjugado de Dirac

$$\bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{+ie\theta(x)} \simeq \bar{\Psi}(x)(1 + ie\theta(x)), \quad (1.18)$$

onde  $A_\mu$  se transforma de acordo com

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = GA_\mu G^{-1} + \frac{i}{e}(\partial_\mu G)G^{-1}$$

sendo  $G$  o gerador da transformação e  $\theta(x)$  é um parâmetro associado a transformação que depende das coordenadas do espaço-tempo,  $x = x^\mu$ . Então, com as respectivas transformações dos campos  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$  determinamos a variação funcional

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}, \quad (1.19)$$

e com

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}' (i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi' \quad (1.20)$$

obtemos

$$\delta\mathcal{L} = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\theta(x), \quad (1.21)$$

onde  $e$  é a carga elétrica elementar e não consideramos termos de ordem  $O(e^2)$ . Por outro lado, notamos que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}\delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}}\delta\bar{\Psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta(\partial_\mu\Psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\Psi}). \quad (1.22)$$

Todavia, tomando a lagrangeana de Dirac, Eq.(1.15), temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} = 0 \quad (1.23)$$

e considerando as equações de Euler–Lagrange para os campos  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \right] \quad (1.25)$$

reescrevemos a Eq.(1.22) como

$$\delta\mathcal{L} = e\partial_\mu[\bar{\Psi}\gamma^\mu\theta(x)\Psi], \quad (1.26)$$

onde usamos o fato que  $\delta\Psi = -ie\theta(x)\Psi$ . Todavia, a lagrangeana de Dirac é invariante sob uma transformação de gauge  $U(1)$  local se

$$\delta\mathcal{L} = 0, \quad (1.27)$$

então, reconsiderando as equações (1.27), (1.26) e (1.21), temos

$$\partial_\mu[\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi] = 0, \quad (1.28)$$

que implica que a corrente  $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  é conservada e, portanto, a invariância da lagrangeana sob a transformação de gauge do grupo U(1) local leva a conservação de uma corrente vetorial  $j^\mu$  de acordo com o teorema de Noether, independente do fato da massa dos férmions ser nula ou não.

Agora, consideremos a transformação de gauge quiral local do campo fermiônico  $\Psi(x)$ ,

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-ie\theta(x)\gamma_5}\Psi(x) \simeq (1 - ie\theta(x)\gamma_5)\Psi(x) \quad (1.29)$$

e a correspondente transformação adjunta

$$\bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{-ie\theta(x)\gamma_5} \simeq \bar{\Psi}(x)(1 - ie\theta(x)\gamma_5), \quad (1.30)$$

de modo que, considerando novamente a Eq.(1.18) e levando em conta a relação de anti-comutação,

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0, \quad (1.31)$$

realizando uma álgebra de Clifford obtemos,

$$\delta\mathcal{L} = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi\partial_\mu\theta(x) + 2im\theta(x)\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad (1.32)$$

onde, na representação quiral, a matriz  $\gamma_5$  é definida como

$$\gamma_5 = \gamma^5 = -\frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\lambda = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Todavia, ao retomarmos as Eqs.(1.22) a (1.24), e usando o fato que  $\delta\Psi = -ie\theta(x)\gamma_5\Psi$ , temos

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu[e\bar{\Psi}\theta(x)\gamma^\mu\gamma_5\Psi]. \quad (1.34)$$

Assim, na condição de preservarmos a invariância da lagrangeana de Dirac sob a transformação de gauge quirial, ou seja,

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

as Eqs.(1.34) e (1.32) fornecem

$$\partial_\mu[\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi] = \partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad (1.35)$$

onde a corrente axial é definida como

$$j_5^\mu \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi. \quad (1.36)$$

Portanto, ao contrário da corrente vetorial, a corrente axial será conservada apenas no limite de massa nula onde, a circunstância em que tomamos o limite de massa nula, é o chamado limite quirial. Assim, não é possível mantermos simultaneamente as simetrias  $U(1)$  e  $U(1)_A$ <sup>1</sup> no caso de férmions massivos e, então, a simetria  $U(1)_A$  é apenas aproximada.

Antes de considerarmos o caso não-abeliano, correspondente as transformações de gauge do grupo  $SU(2)$  local e a transformação  $SU(2)$  quirial, apresentaremos alguns aspectos essenciais relativos ao grupo  $SU(2)$ .

- i) Numero de geradores do grupo  $SU(2)$ : Para grupos especiais unitários de dimensionalidade  $N$ ,  $SU(N)$ , o número de geradores do grupo é dado por [27]

$$G = N^2 - 1, \quad (1.37)$$

assim para o caso do grupo  $SU(2)$ , temos 3 geradores do grupo,  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ , já que  $2^2 - 1 = 3$ , e  $\sigma_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) são as matrizes  $2 \times 2$  de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

- ii) Álgebra dos geradores de  $SU(2)$ : É fácil verificarmos que as matrizes de Pauli, que são os geradores do grupo  $SU(2)$ , satisfazem uma álgebra, a álgebra de Lie

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (1.39)$$

onde  $\varepsilon_{ijk}$  é o simbolo de Levi-Civita, que corresponde as constantes de estrutura do grupo  $SU(2)$ , e exhibe o caráter não-abeliano do grupo  $SU(2)$ .

---

<sup>1</sup>Onde  $U(1)_A$  é o grupo de transformações de gauge quirais.

De posse destes fatos, consideraremos, então, a transformação de gauge local do campo  $\Psi$  sob o grupo  $SU(2)$

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2}} \Psi(x) \simeq (1 - ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2}) \Psi(x) \quad (1.40)$$

e a correspondente transformação conjugada de Dirac

$$\bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x) e^{+ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2}} \simeq \bar{\Psi}(x) (1 + ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2}) \quad (1.41)$$

de forma que, seguindo o procedimento anterior, notando ainda que a derivada covariante de gauge para este caso é escrita como

$$D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu = \partial_\mu + igB_\mu^a \sigma^a / 2$$

com  $B_\mu$  se transformando de acordo com

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu G) G^{-1},$$

temos, portanto, satisfeita a conservação da corrente vetorial não-abeliana  $j_a^\mu$

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0, \quad (1.42)$$

com  $j_a^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\sigma^a}{2} \Psi$ .

Finalmente, consideremos a transformação quiral não-abeliana do campo  $\Psi$ ,

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2} (1 - \gamma_5)} \Psi \simeq (1 - ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2} (1 - \gamma_5)) \Psi(x) \quad (1.43)$$

e a respectiva transformação conjugada de Dirac,

$$\bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi} e^{+ieg\theta^a \frac{\sigma^a}{2} (1 + \gamma_5)} \simeq \bar{\Psi}(x) (1 + ig\theta^a \frac{\sigma^a}{2} (1 + \gamma_5)) \quad (1.44)$$

de maneira que a corrente axial não-abeliana,

$$\partial_\mu j_5^{\mu a} = \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\sigma^a}{2} \Psi) = -2im \bar{\Psi} \frac{\sigma^a}{2} \gamma_5 \Psi, \quad (1.45)$$

como no caso abeliano, também será conservada no limite quiral. Portanto, verificamos que, tanto para o caso abeliano<sup>2</sup>, quanto para o caso não abeliano<sup>3</sup>, que a

<sup>2</sup>Correspondente as simetrias  $U(1)$  e  $U(1)_A$ .

<sup>3</sup>Correspondente as simetrias  $SU(2)$  e  $SU(2)_A$ .

invariância perante tais transformações locais leva a uma lei de conservação que no caso das simetrias  $U(1)_A$  e  $SU(2)_A$  é apenas satisfeita no limite quirial. Porém, como veremos na próxima seção a versão quântica da teoria pode perder alguma simetria, devido ao surgimento de um termo anômalo no divergente das correntes, implicando que, na versão quântica da teoria, poderemos ter correntes não conservadas.

### 1.3 O Surgimento de Anomalias em Teorias Quânticas de Campos

Mostramos que a invariância de uma lagrangeana sob uma transformação de gauge leva a conservação de uma corrente e, que no caso da invariância quirial, é satisfeita no limite de massa nula. Todavia, ao quantizarmos a teoria uma dada invariância, que é preservada classicamente, pode não ser preservada na correspondente versão quântica, então, este fenômeno é chamado de anomalia [28]. Portanto, a versão quântica de uma teoria sofrerá do fenômeno das anomalias ao verificarmos que

$$\partial_\mu j_{\text{quant}}^\mu \neq 0. \quad (1.46)$$

O equivalente quântico da lei de conservação clássica pode até ser respeitado a nível de árvore de diagramas de Feynman, mas não a nível de diagramas com loops, que são os responsáveis pelo aparecimento das anomalias e, cujo o significado emerge como uma violação de determinadas simetrias da dinâmica do sistema como resultado do processo de quantização. Na prática a verificação da conservação de uma determinada corrente na versão quantizada da teoria equivale a verificarmos se as funções de Green satisfazem determinadas relações, conhecidas como identidades de Ward–Takahashi [29] no caso de uma teoria abeliana, como a QED, e as identidades de Slavnov–Taylor [29] para o caso de teorias não-abelianas, como teorias do tipo Yang–Mills. Assim, ao verificarmos que tais identidades permanecem normais equivale a verificarmos que

$$\partial_\mu j_{\text{quant}}^\mu = 0. \quad (1.47)$$

Então, o surgimento das anomalias na teoria se fará presente quando tais identidades forem violadas, especificamente a anomalia se manifestará como um termo adicional presente nas identidades mencionadas. A presença de anomalias destrói a renormabilizabilidade da teoria e, portanto, as anomalias devem ser eliminadas re-

querendo de partida a condição de que uma teoria quântica de campos realística das interações fundamentais seja renormalizável [19]. O próximo capítulo será então dedicado ao estudo das anomalias e os procedimentos adotados para eliminá-las da teoria.

# Capítulo 2

## Anomalias Quirais

### 2.1 O Diagrama Triângulo

Na QED e QCD existe apenas um tipo de interação entre os campos de gauge e de matéria, a interação vetorial, que tem forma  $\sim g j_\mu W^\mu$ , onde  $W^\mu$  é um campo de gauge e  $j_\mu$  é uma corrente vetorial.

Mostramos que a corrente vetorial é conservada classicamente,

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (2.1)$$

Todavia, ao considerarmos a versão quântica da teoria, no caso a QED, ao levarmos em conta a identidade de Ward para a função de vértice, de acordo com a expansão em termos de diagramas de Feynman da Figura 2.1, cuja amplitude é [24]

$$W^\mu \langle p' | J_\mu | p \rangle \quad (2.2)$$

e a conservação da corrente implica

$$(p' - p)^\mu J_\mu = q^\mu J_\mu = 0 \quad (2.3)$$

e temos, então, satisfeita a identidade de Ward

$$(p' - p)^\mu \Gamma_\mu = 0 \quad (2.4)$$

onde  $\Gamma_\mu = \Gamma_\mu(p, 0, p)$  é a função de vértice de três pontos. Identidade que satisfeita em todas as ordens de teoria de perturbação implica na preservação da invariância de gauge da teoria e, portanto, a renormalizabilidade da teoria pode ser provada. Porém, na teoria de Weinberg–Salam [30], mais especificamente na teoria de gauge

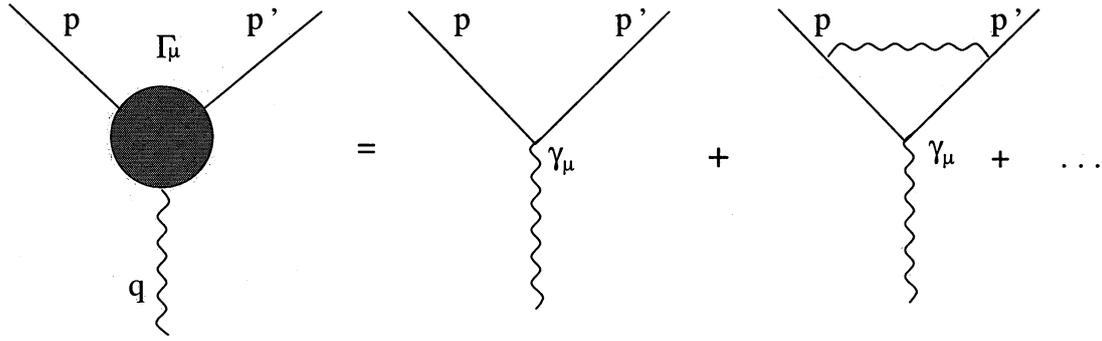


Figura 2.1: Expansão da função de vértice em termos de diagramas de Feynman

das interações fracas, a QFD, existe também uma corrente axial acoplada aos campos de gauge,  $g_A j_\mu^5 W^\mu$ , com

$$j_\mu^5 = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi, \quad (2.5)$$

que implica em

$$\partial_\mu j_\mu^5 = 2mi \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi = 2mj_5, \quad (2.6)$$

como mostramos na Seção 1.2. Portanto, a corrente axial só é conservada no limite quirial. Todavia, mesmo ao considerarmos férmions com massa nula, ao efetuarmos a expansão em termos de diagramas de Feynman das funções de vértice axiais em maior ordem de teoria de perturbação, de acordo com a Figura 2.2, percebe-se que a contribuição devido a um diagrama contendo um *loop* triangular [29] falha ao satisfazer a identidade de Ward axial

$$(p' - p)^\mu \Gamma_\mu^5 \neq 0, \quad (2.7)$$

dando origem as chamadas anomalias axiais, ou quirais ou anomalias triângulo. Sendo as identidade de Ward, e sua extensão para o caso não-abeliano, essenciais para a prova da renormalizabilidade das teorias de gauge a existência da anomalia triângulo destrói a renormalizabilidade do modelo de Weinberg-Salam e, a única maneira de preservarmos a renormalizabilidade da teoria é eliminando a contribuição anomala devido ao diagrama triângulo, pois, procedimentos de regularização dimensional [3] não removem a contribuição anômala devido ao diagrama triângulo isto porque a matriz de Dirac,  $\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma$ , é definida apenas em 4-dimensões.

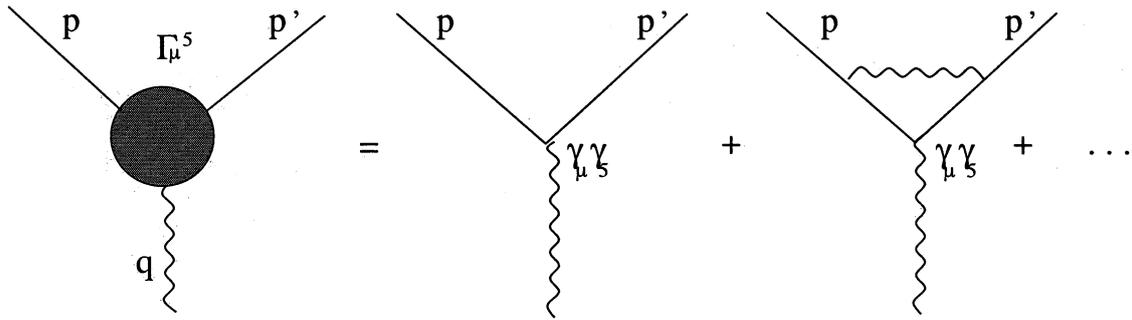


Figura 2.2: Expansão da função de vértice axial em termos de diagramas de Feynman

No entanto, veremos mais adiante que a anomalia poderá ser excluída da teoria se colocarmos certas condições sobre o conteúdo de representação dos férmions da teoria e admitindo que os quarks carregam um grau de liberdade adicional, a cor.

## 2.2 Obtenção da Amplitude Quântica para o Diagrama Triângulo

Visto que o diagrama triângulo gera a uma anomalia axial, mostraremos explicitamente que a amplitude total correspondente ao diagrama triângulo não satisfaz simultaneamente as identidades de Ward axiais e vetoriais.

O diagrama triângulo consiste de um *loop* triangular fermiônico com um vértice axial e dois vetoriais, (AVV), e chamamos coletivamente de diagrama triângulo o conjunto de dois gráficos cuja a única diferença está na permutação dos 4-momentos externos ao *loop* triangular  $k_1$  e  $k_2$  e, nos vértices vetoriais  $\alpha$  e  $\beta$ , diagramas estes que apresentamos a seguir, na Fig 2.3 . Então, a amplitude total correspondente ao diagrama triângulo é formada pela contribuição de cada um dos diagramas e, denotamos amplitude total por  $t_{\alpha\beta\mu}$  que escrevemos como

$$t_{\alpha\beta\mu} = S_{\alpha\beta\mu} + S_{\beta\alpha\mu}. \quad (2.8)$$

Estabeleceremos agora as regras de Feynman para a QED [3] com o objetivo de contruirmos a expressão correspondente a amplitude quântica de espalhamento para o diagrama triângulo.

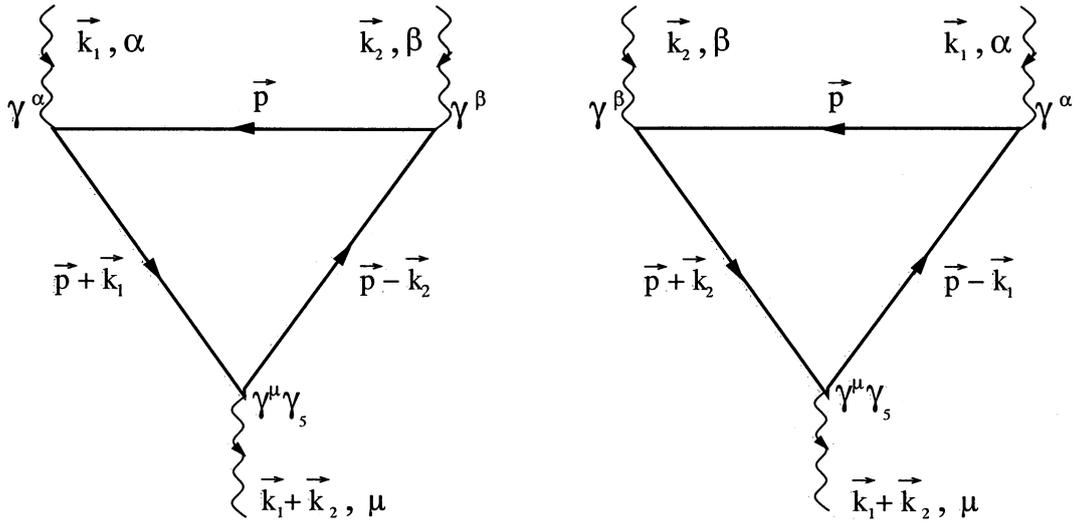


Figura 2.3: Diagramas triângulo

- A cada férmion com momento  $\vec{p}$  no estado inicial associamos o spinor  $u(\vec{p})$  e uma linha orientada da esquerda para a direita (sentido do tempo) e a cada pósitron no estado inicial associamos o spinor  $\bar{v}(\vec{p})$  e uma linha orientada na direção contrária ao tempo (o momento do pósitron tem sentido diferente à orientação da linha).
- A cada férmion no estado final associamos o spinor  $\bar{u}(\vec{p})$  e uma linha na direção positiva do tempo e a cada pósitron no estado final o spinor  $v(\vec{p})$  orientado negativamente em relação ao tempo.
- Aos fótons no estado inicial associamos a polarização  $\varepsilon_{\mu}^{(\alpha)}(\vec{k})$  e uma linha ondulando como rótulo e fótons no estado final  $\varepsilon_{\nu}^{*(\alpha)}(\vec{k})$ .
- Duas linhas de férmions e uma de fóton conectam-se no vértice, ao qual associamos uma matriz  $-ie\gamma_{\mu}$ , onde  $e$  é a constante de acoplamento da interação.
- Os vértices são conectados por propagadores de férmions e por propagadores dos fótons.
- Os momentos são conservados nos vértices, a cada conjunto de laços fechados *loops*, independente dos propagadores adicionamos um momento arbitrário as linhas e integramos

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

g) Cada *loop* de férmions é multiplicado por um fator  $-1$  (este fator vem do número ímpar de permutações entre os spinores  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$  quando aplicado o teorema de Wick) e, tomamos o traço.

Então, omitindo as constantes de acoplamento específicas e propagadores externos ao *loop* triangular as regras de Feynman fornecem;

$$S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) \propto -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right) \quad (2.9)$$

$$S_{\beta\alpha\mu}(k_1, k_2) \propto -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right), \quad (2.10)$$

onde  $m$  é a massa do férmion que circula no *loop* e, o propagador correspondente é

$$S_F = \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (2.11)$$

As integrais acima são linearmente divergentes, o que podemos perceber por uma simples contagem de potências. Entretanto, a soma correspondente a amplitude total é convergente como mostraremos a seguir.

De posse da expressão para a amplitude total do processo as identidades de Ward esperadas seguindo a partir da conservação das correntes vetorial e axial correspondente aos 3 vértices do diagrama triângulo são

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (\text{axial}) \quad (2.12)$$

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (\text{vetorial}) \quad (2.13)$$

$$k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (\text{vetorial}), \quad (2.14)$$

que mostraremos que não serão satisfeitas.

Assim, com esse objetivo inicialmente contraímos  $S_{\alpha\beta\mu}$  com  $(k_1 + k_2)^\mu$  de forma a obtermos

$$(k_1 + k_2)^\mu S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} (k_1 + k_2) \gamma_5 \right), \quad (2.15)$$

todavia, sendo

$$\text{Tr} \left( \frac{(\not{p} - m) + (-\not{p} - m) + 2m}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \right) = 0 \quad (2.16)$$

escrevemos a Eq.(2.15), após algumas manipulações algébricas, na forma

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)^\mu S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) &= (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \gamma_5 \right) \\ &\quad + (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \right) \\ &\quad + 2m(-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A contração de  $(k_1 + k_2)^\mu$  com  $S_{\beta\alpha\mu}$  resultará em uma expressão semelhante a apresentada acima bastando fazer a seguinte troca  $k_1 \leftrightarrow k_2$  e  $\alpha \leftrightarrow \beta$  e, portanto, a contração de  $(k_1 + k_2)^\mu$  com a amplitude total do processo resulta

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = (k_1 + k_2)^\mu S_{\alpha\beta\mu} + (k_1 + k_2)^\mu S_{\beta\alpha\mu}, \quad (2.18)$$

que reescrevemos, tomando o resultado do Apêndice A, na forma

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) &= \frac{(+4k_1^\mu k_1^\lambda)}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} \int \frac{d^4 p}{([p - k_1]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \\ &\quad + \frac{(+4k_2^\mu k_2^\lambda)}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\mu\lambda\beta\alpha} \int \frac{d^4 p}{([p - k_2]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} + 2mI(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

como  $k_1^\mu k_1^\lambda = k_1^\mu k_{1\mu} g^{\mu\lambda}$  e  $k_2^\mu k_2^\lambda = k_2^\mu k_{2\mu} g^{\mu\lambda}$ , temos

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu} = 2mI(\alpha, \beta), \quad (2.20)$$

onde  $I(\alpha, \beta)$  é definido como

$$I(\alpha, \beta) = (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \right) \\ + (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_5 \right). \quad (2.21)$$

Portanto, apartir da Eq.(2.20) percebemos que a invariância quiral é respeitada no limite de massa nula, da mesma forma que ocorrido classicamente, ou seja

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (\text{para } m \rightarrow 0). \quad (2.22)$$

Agora, a fim de tentarmos verificar a identidade de Ward vetorial correspondente a Eq.(2.13), contraímos  $k_1^\alpha$  com  $t_{\alpha\beta\mu}$

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = k_1^\alpha S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) + k_1^\alpha S_{\beta\alpha\mu}(k_1, k_2) \quad (2.23)$$

que resulta

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = +i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{-\not{k}_1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right) \\ + i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - m} \frac{-\not{k}_1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right), \quad (2.24)$$

considerando ainda

$$\text{Tr} \left( \frac{(\not{p} - m) + (-\not{p} + m)}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right) = 0 \\ \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\beta \frac{(\not{p} - m) + (-\not{p} + m)}{\not{p} - m} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right) = 0 \quad (2.25)$$

a Eq.(2.24) pode ser colocada na forma

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right) \\ - i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right) \quad (2.26)$$

de modo que ao definirmos o tensor

$$F_{\beta\mu}(p) = \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right), \quad (2.27)$$

reescrevermos a Eq.(2.26) como

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [F_{\beta\mu}(p+k_1) - F_{\beta\mu}(p+k_2)]. \quad (2.28)$$

Então, expandindo em série de Taylor o lado direito da Eq.(2.28) e, considerando o teorema da divergência, resolvemos a ultima integral<sup>1</sup> de modo que ganhamos o resultado

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = \frac{-i}{8\pi^2} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1 + k_2)^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.29)$$

como

$$(k_1 - k_2)^\alpha (k_1 + k_2)^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = 2k_1^\alpha k_2^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.30)$$

obtemos a identidade de Ward anômala

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = \frac{-i}{4\pi^2} k_1^\alpha k_2^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.31)$$

De forma semelhante a contração de  $t_{\alpha\beta\mu}$  com  $k_2^\beta$  nos fornece

$$k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu} = \frac{i}{4\pi^2} k_2^\beta k_1^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Portanto, retomando as Eqs.(2.22) , (2.31) e (2.32) temos

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu} |_{m=0} = 0 \quad (2.33)$$

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = -\frac{i}{4\pi^2} k_1^\alpha k_2^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.34)$$

$$k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu} = +\frac{i}{4\pi^2} k_2^\beta k_1^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Assim, a Eq.(2.33) mostra que a invariância quiral é preservada no limite de massa nula, todavia, as Eqs.(2.34) e (2.35) apresentam um termo anômalo, ou seja as identidades de Ward vetoriais não são satisfeitas, o que implica que a invariância de gauge é perdida. A fim de preservarmos a invariância de gauge redefiniremos a amplitude total do diagrama triângulo subtraindo um polinômio nos 4-momentos externos  $k_1$  e  $k_2$  da amplitude total original  $t_{\alpha\beta\mu}$ , de modo que a amplitude redefinida é

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes da resolução da integral consulte o Apêndice B.

$$T_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = t_{\alpha\beta\mu} - \frac{i}{4\pi^2}(k_1 - k_2)^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Assim, em termos da nova amplitude as identidades de Ward tornam-se

$$(k_1 + k_2)^\mu T_{\alpha\beta\mu} = (k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu} - \frac{i}{4\pi^2}(k_1 + k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.37)$$

$$k_1^\alpha T_{\alpha\beta\mu} = k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} - \frac{i}{4\pi^2} k_1^\alpha (k_1 - k_2)^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.38)$$

$$k_2^\beta T_{\alpha\beta\mu} = k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu} - \frac{i}{4\pi^2} k_2^\beta (k_1 - k_2)^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.39)$$

então, após considerarmos algumas simplificações, temos

$$(k_1 + k_2)^\mu T_{\alpha\beta\mu} |_{m=0} = \frac{i}{2\pi^2} k_1^\mu k_2^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.40)$$

$$k_1^\alpha T_{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (2.41)$$

$$k_2^\beta T_{\alpha\beta\mu} = 0. \quad (2.42)$$

Portanto, ao redefinirmos amplitude do processo asseguramos a invariância de gauge, porém, geramos um anomalia na identidade de Ward axial correspondente a

$$\frac{i}{2\pi^2} k_1^\mu k_2^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.43)$$

a qual independe da massa do férmion. Então, não podemos manter simultaneamente preservadas as identidades Ward axial e vetorial devido ao aparecimento de um termo anômalo que independe da massa do férmion que circula no *loop* triangular, desta forma, as simetrias de gauge e quiral são incompatíveis na versão quântica da teoria e nenhum procedimento de regularização permite evitar a anomalia se apenas um férmion estiver presente, pois, como mencionamos anteriormente a matriz  $\gamma_5$  de Dirac é definida apenas em 4-dimensões.

Foi demonstrado [31] que correções radiativas de segunda ordem ao diagrama triângulo (ver Fig 2.4) não renormalizam a anomalia e, foi também argumentado [32] [31] que correções de ordem superior estão ausentes, de modo que os resultados obtidos representam a anomalia exata em todas as ordens de perturbação. Fato que acomodamos no teorema

**Teorema 1** ( De Adler e Bardeen [31])

*Correções radiativas não renormalizam a anomalia.*

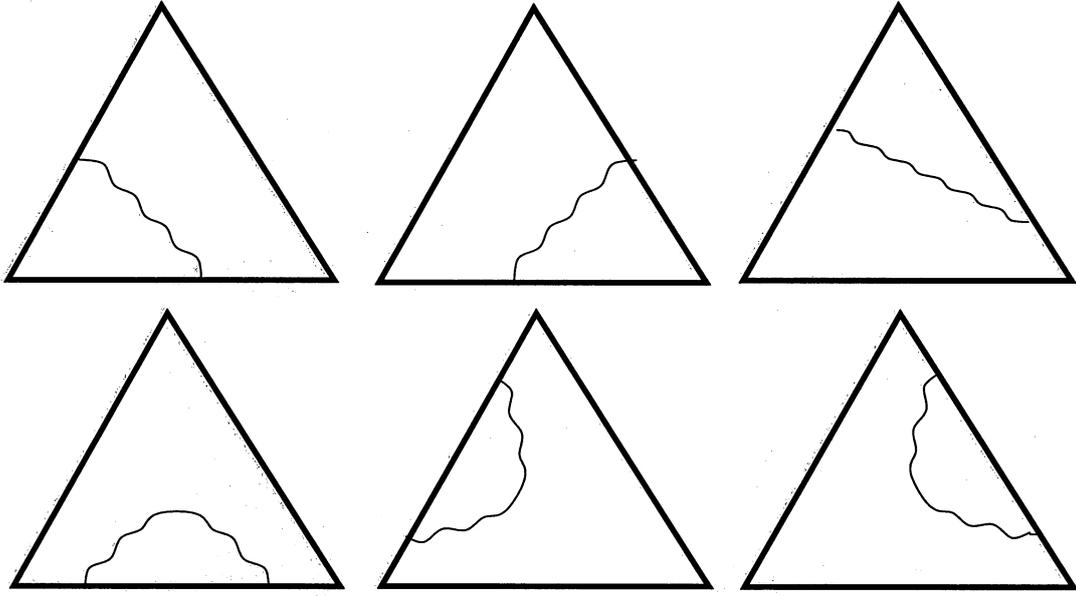


Figura 2.4: Correções radiativas de segunda ordem ao diagrama triângulo

Generalizaremos agora o resultado para o caso não-abeliano, bastando para isto, efetuarmos a extensão para os índices de simetria interna e, portanto, para modelos com estrutura do tipo Yang–Mills a generalização da identidade de Ward axial anômala para amplitude do diagrama triângulo é [24]

$$i(k_1 + k_2)^\mu T_{\alpha\beta\mu}^{abc}(k_1, k_2) |_{m=0} = A^{abc} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_1^\mu k_2^\nu, \quad (2.44)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  correspondem a índices de simetria interna. Então, em teorias não-abelianas a generalização da identidade de Ward axial anômala, que corresponde as identidades de Slavnov-Taylor, apresenta a particularidade de apresentar o fator

$$A^{abc} = \text{Tr}(\gamma_5 \{t_a, t_b\} t_c), \quad (2.45)$$

de modo que ao escolhermos uma determinada representação para o grupo de simetria, assegurando que  $A^{abc} = 0$ , teremos a teoria livre das anomalias triângulo. Ainda no caso de teorias do tipo de Yang-Mills devido ao autoacoplamento dos campos de gauge não-abelianos as divergências anômalas das correntes axiais envolverão termos quadráticos e cúbicos nos campos de gauge, de modo que diagramas com um número ímpar de vértices [28] axiais (ver Fig. 2.5) também contribuem para a anomalia no divergente das correntes axiais, porém, esta contribuição não é independente da anomalia triângulo, podendo esta ser determinada pela invâriância de

gauge das correntes axiais, fato que acomodamos no teorema abaixo

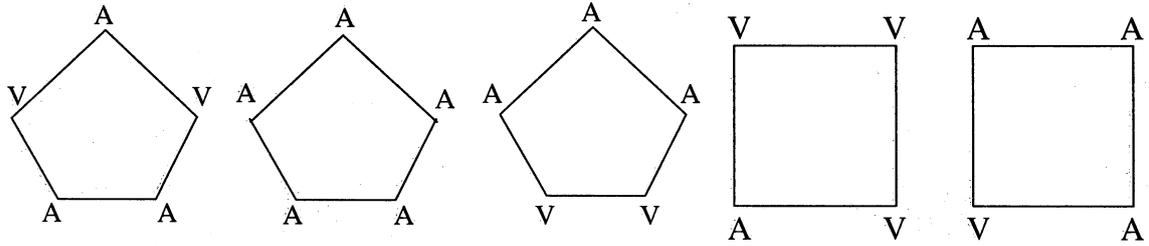


Figura 2.5: Diagramas que contribuem a anômalia em modelos não-abelianos

**Teorema 2** ( De Bardeen [33])

*Uma vez que for cancelada a anomalia gerada pelo diagrama triângulo com dois vértices vetoriais e um vértice axial(AVV), então, todas as outras anomalias serão canceladas.*

## 2.3 Teorias de Gauge Livres de Anomalias

S. Weinberg [30] e A.Salam em meados da década de 60 mostraram que uma teoria realística das interações eletrofracas poderia ser formulada com base nos seguintes fatores: de um lado a teoria de campos em questão é uma teoria com simetria de gauge do tipo Yang–Mills (não-abeliana), e por outro lado os mésons vetoriais mediadores da interação fraca da teoria adquirem massa através dos efeitos da quebra espontânea de simetria via mecanismo de Higgs, todavia, foi G. t’Hooft [34], no início da década de 70, que mostrou que o modelo proposto por Weinberg e Salam era uma teoria renormalizável. Então, se um modelo das interações eletrofracas baseado no mecanismo de Higgs é renormalizável este é livre de anomalias e os mesmos comentários se aplicam a um modelo estendido para incluir as interações fortes, portanto, nesta seção discutiremos de forma geral as condições necessárias para construção de teorias de gauge livres de anomalias. Iniciamos, então, considerando uma teoria de campo com simetria de gauge em que as correntes conservadas que acoplam aos campos de gauge são

$$j_a^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu t_a \Psi, \quad (2.46)$$

onde  $t_a$  ( $a = 1 \dots N$ ) são geradores do grupo de gauge representados por matrizes que atuam sobre  $\Psi$ , e  $\Psi$  são multipletos de férmions representados por matrizes coluna.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

sendo  $\psi_1 \dots \psi_N$  spinores de Dirac. Assim, de maneira geral, consideremos que o multiplete de férmions  $\Psi$  seja escrito em termos das componentes quirais (Left-Handed) L.H., ou  $L$ , e (Right-Handed) R.H., ou  $R$ , as quais definiremos logo a seguir, e que as componentes  $L$  e  $R$  se transformem de diferente forma sob o grupo de gauge, portanto, representaremos os geradores do grupo de gauge  $t_a$  por diferentes matrizes,  $t_{aR}$  e  $t_{aL}$ , as quais atuam respectivamente sob as componentes  $L$  e  $R$ . Sendo assim o gerador  $t_a$  é escrito da seguinte forma

$$t_a = t_{aR}P_R + t_{aL}P_L, \quad (2.48)$$

onde  $P_R$  e  $P_L$  são os operadores de projeção [26] que são definidos como

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5),$$

e que apresentam as seguintes propriedades

$$P_L^2 + P_R^2 = 1$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0$$

$$P_L^2 = P_L$$

$$P_R^2 = P_R, \quad (2.49)$$

que atuando sob um multiplete  $\Psi$  fornecem as respectivas componentes quirais  $L$  e  $R$

$$P_L \Psi = \Psi_L$$

$$P_R \Psi = \Psi_R. \quad (2.50)$$

Assim, com base na definição destes operadores e, considerando suas propriedades, escrevemos a Eq.(2.46) como

$$j_a^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu t_{aR}P_R\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu t_{aL}P_L\Psi = \bar{\Psi}_R\gamma^\mu t_{aR}\Psi_R + \bar{\Psi}_L\gamma^\mu t_{aL}\Psi_L. \quad (2.51)$$

Então, para algum diagrama triângulo em que os três vértices envolvem estas correntes o *loop* fermiônico deverá ser completamente L.H. , ou completamente R.H., já que não há acoplamento entre as componentes quirais L.H. e R.H. visto que estamos tomando o limite quiral, ou seja  $m \rightarrow 0$ .

Retomando o diagrama triângulo que gera a anomalia dada por um múltiplo positivo de

$$A_{abc} = \text{Tr}(\gamma_5\{t_a, t_b\}t_c), \quad (2.52)$$

e considerando as propriedades dos operadores de projeção, Eq.(2.49), notando ainda que os geradores  $t_{aR}$  e  $t_{aL}$  também satisfazem a mesma álgebra de  $t_a$ , ou seja a álgebra de Lie

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c \quad (2.53)$$

$$[t_{a(L,R)}, t_{b(L,R)}] = if_{abc}t_{c(L,R)}, \quad (2.54)$$

escrevemos, então, a Eq.(2.52) em termos das componentes quirais  $L$  e  $R$

$$A_{abc} = \text{Tr}(\gamma_5[P_R\{t_{aR}, t_{bR}\}t_{cR} + P_L\{t_{aL}, t_{bL}\}t_{cL}]), \quad (2.55)$$

assim, na condição que a teoria seja livre das anomalias triângulo e, considerando  $\gamma_5^2 = 1_{4 \times 4}$  e  $\text{Tr}(\gamma_5) = 0$ , obtemos

$$A_{abc} = 2(A_{abcR} - A_{abcL}) = 0. \quad (2.56)$$

Portanto, tal condição nos leva a considerarmos dois casos.

1º caso: As anomalias dos setores  $L$  e  $R$  se cancelam

$$A_{abcR} - A_{abcL} = 0, \quad (2.57)$$

todavia,

$$A_{abcR} = A_{abcL} \neq 0.$$

Neste caso o cancelamento ocorre naturalmente se os geradores  $t_{aR}$  e  $t_{aL}$  são equivalentes, ou seja se estiverem relacionados pela transformação de semelhança

$$t_{aR} = Ut_{aL}U^\dagger \quad (2.58)$$

onde  $U$  é uma matriz unitária, tal que

$$UU^\dagger = UU^{-1} = 1,$$

de forma que escrevemos

$$A_{abcR} = \text{Tr}(\{Ut_{aL}U^\dagger, Ut_{bL}U^\dagger\}Ut_{cL}U^\dagger) = A_{abcL}. \quad (2.59)$$

Então, para este caso temos  $A_{abc} = 0$ , assim, podemos reescrever as correntes fermiônicas exclusivamente em termos de correntes vetoriais ao redefinirmos os campos de matéria como

$$\Psi' \equiv P_R\Psi + P_L U\Psi \quad (2.60)$$

que resulta em

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu t_a\Psi = \bar{\Psi}'\gamma^\mu t_a R\Psi'. \quad (2.61)$$

Portanto, modelos que apresentam esta característica são chamados de “modelos vetoriais”, desta forma como mencionamos no início do capítulo a QED e a QCD são teorias vetoriais, pois, os bósons de gauge acoplam da mesma forma à correntes L.H. e R.H., e neste caso as anomalias são automaticamente canceladas. Todavia, existe a possibilidade do caso 1 ser realizado acidentalmente, mesmo que os geradores  $t_a R$  e  $t_a L$  não estejam relacionados pela transformação de semelhança, (Eq.2.58), podemos perceber este fato com o seguinte exemplo. Consideremos uma teoria de gauge a um único parâmetro, com

$$t_R \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_L \equiv \begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

de forma que as correspondentes anomalias são

$$A_R = \text{Tr}(\{t_R, t_R\}t_R) = 2 \quad (2.63)$$

$$A_L = \text{Tr}(\{t_L, t_L\}t_L) = 2 \quad (2.64)$$

satisfazendo  $A_{abc} = 0$ , cancelamentos semelhantes ocorrem em modelos não-abelianos.

2º caso: As anomalias do setores  $L$  e  $R$  anulam-se separadamente

$$A_{abc_R} = 0 = A_{abc_L}. \quad (2.65)$$

Este tipo de cancelamento ocorre com as chamadas representações seguras, cujos geradores  $t_a$  satisfazem

$$\text{Tr}(\{t_a, t_b\}t_c) = 0. \quad (2.66)$$

Assim, se os geradores do grupo,  $t_a$ , apresentam representações seguras, então, não há anomalias. Vimos que os geradores  $t_a$  de uma dada representação de grupo satisfazem

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c$$

e se  $t_a$  são hermitianos, então, as constantes de estrutura  $f_{abc}$  são reais. Tomando o conjugado complexo da equação acima temos

$$[(-t_a^*), (-t_b^*)] = if_{abc}(-t_c^*) \quad (2.67)$$

de forma que os geradores  $(-t_a^*)$  também formam uma representação do grupo, a representação conjugada. Se  $t_a$  e  $(-t_a^*)$  são equivalentes, ou seja estão relacionados por um transformação de semelhança

$$t_a = U(-t_a^*)U^\dagger, \quad (2.68)$$

então, a representação é designada por “representação real”, sendo

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\{t_a, t_b\}t_c) &= \text{Tr}(\{U(-t_a^*)U^\dagger, U(-t_b^*)U^\dagger\}U(-t_c^*)U^\dagger) \\ &= -\text{Tr}(\{t_a, t_b\}t_c) \end{aligned} \quad (2.69)$$

temos que todas as representações reais são representações seguras. Tomemos agora o exemplo do grupo  $SU(2)$ , considerando as representações  $\underline{2}$  e  $\bar{\underline{2}}$ , temos

$$-t_i^* = -t_i^\top = -\frac{1}{2}\sigma_i^\top$$

sendo

$$U = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$U\left(\frac{-1}{2}\sigma_i^\top\right)U^\dagger = \frac{1}{2}\sigma_i$$

para qualquer matriz de Pauli  $\sigma_i$ .

Assim, o grupo especial unitário SU(2) é um grupo cujas às representações são seguras no sentido que toda a representação é equivalente ao seu conjugado.

Embora grupos especiais unitários simples, SU(N), só apresentem representações fundamentais seguras apenas para N=2, mesmo assim podemos construir teorias livres de anomalias, tomando o exemplo de SU(3), desde que uma das seguintes situações se cumpra:

- i) As anomalias  $A_{abc_L}$  e  $A_{abc_R}$  se cancelam, situação que se enquadra no caso 1, e então a teoria é vetorial que é o caso da QCD.
- ii) As representações envolvidas são seguras; para SU(3) as representações  $\mathbf{8}$  ou  $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$  são exemplos de representações seguras, situação esta que se enquadra no caso 2.

Completando esta seção consideraremos o fator não-abeliano,  $A^{abc}$ , escrito da forma mais geral possível, então, para uma dada representação definidora  $\mathcal{R}$ , o fator não-abeliano é escrito como [35]

$$\text{Tr}[\{t^a(\mathcal{R}), t^b(\mathcal{R})\}t^c(\mathcal{R})] = \mathcal{A}(\mathcal{R})d^{abc} \quad (2.70)$$

onde  $d^{abc}$  são símbolos simétricos que dependem da representação dada e  $\mathcal{A}(\mathcal{R})$  é a anomalia da representação que possui as propriedades [35]

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}^*) = -\mathcal{A}(\mathcal{R}) \quad (2.71)$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_2) \quad (2.72)$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{R}_1)\dim(\mathcal{R}_2) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_2)\dim(\mathcal{R}_1) \quad (2.73)$$

## 2.4 Um Pouco de Entendimento Sobre a Origem das Anomalias

Mesmo que a origem das anomalias continue ainda obscura, considerando uma abordagem teórica, buscaremos um certo entendimento deste fenômeno

partindo de um modelo fermiônico mais simples, a QED em duas dimensões com férmions não massivos acoplados aos campos de gauge [27]. Então, após termos definido o modelo de estudo escolheremos o gauge de Weyl,  $A_0 = 0$ , e consideraremos que a componente espacial do campo de fundo,  $A_1$ , é constante e que o sistema tem um comprimento finito  $L$  que satisfaz condições de contorno periódicas. Portanto, com base nestas prescrições escrevemos a lagrangeana de Dirac para este sistema

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi = i\bar{\Psi}\gamma^0\partial_0\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^1(\partial_1 + ieA_1)\Psi. \quad (2.74)$$

De modo que a partir desta construímos o Hamiltoniano e o escrevemos em termos das componentes quirais

$$\mathcal{H} = \int dx \{-i\Psi_L^\dagger(\partial_1 - ieA_1)\Psi_L + i\Psi_R^\dagger(\partial_1 - ieA_1)\Psi_R\} \quad (2.75)$$

onde  $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_0$ . Como  $A_1$  é constante o Hamiltoniano é facilmente diagonalizável fornecendo, então, os respectivos auto-estados de energia

$$\begin{aligned} \Psi_L : \quad E_{n_L} &= +(K_n - eA_1) \\ \Psi_R : \quad E_{n_R} &= -(K_n - eA_1) \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde  $K_n = 2\pi n/L$ ,  $n = -\infty, \dots, +\infty$ .

Portanto, a partir das relações acima percebemos que tanto os estados com quiralidade L quanto os estados com quiralidade R podem ter energia infinitamente negativa, todavia, para quantizarmos a teoria precisamos de um vácuo estável, ou seja um estado com mínima energia, e como estamos considerando um modelo fermionico 2-dimensional o procedimento da definição do vácuo pode ser visto segundo a interpretação original de Dirac [36], onde o vácuo é definido preenchendo-se os estados com energia negativa e deixando vazios os estados com energia positiva, assim, interpretamos um buraco no mar de energia negativa como uma anti-partícula.

Consideraremos, agora, o equivalente quântico para este sistema da expressão correspondente a conservação da corrente axial [27]

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \partial_\mu j_L^\mu - \partial_\mu j_R^\mu = \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.77)$$

Então, tomando a equação acima percebemos que a corrente axial não é conservada na presença de campos eletromagnéticos.

Todavia, para o caso que estamos tratando,  $A_1 = \text{const}$  e  $A_0 = 0$ , a Eq.(2.77) se torna

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \partial_\mu j_L^\mu - \partial_\mu j_R^\mu = 0 \quad (2.78)$$

o que não leva a nenhuma informação a respeito da anomalia, todavia, podemos contornar o problema realizando a variação no tempo através de uma mudança adiabática em que  $A \rightarrow A + \delta A$ , de modo que o lado direito da Eq.(2.77) não se anula. Assim, ao considerarmos esta mudança adiabática as Eqs.(2.76) se tornam

$$\begin{aligned} \Psi_L : \quad E_{n_L} &= +(K_n - e(A_1 + \delta A_1)) \\ \Psi_R : \quad E_{n_R} &= -(K_n - e(A_1 + \delta A_1)). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Entretanto, analizaremos o caso em que  $A_1 = \text{const} = 0$ , de forma que reescrevemos as Eqs.(2.76) como

$$\begin{aligned} E_{n_L} &= +K_n \\ E_{n_R} &= -K_n \end{aligned}$$

e que representamos pelo diagrama

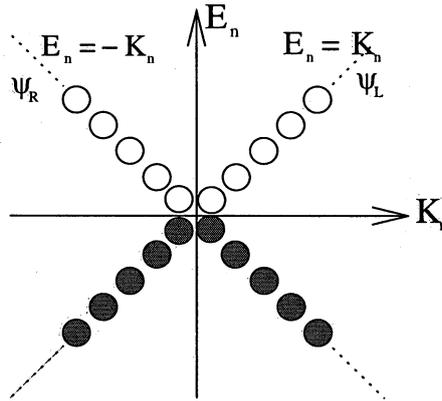


Figura 2.6: Representação do mar de Dirac

Todavia, ao considerarmos as Eqs.(2.79) para  $A_1 = \text{const} = 0$ , com  $\delta A_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} E_{n_L} &= +K_n - \delta A_1 \\ E_{n_R} &= -K_n + \delta A_1 \end{aligned}$$

o gráfico correspondente a, Fig 2.6, torna-se

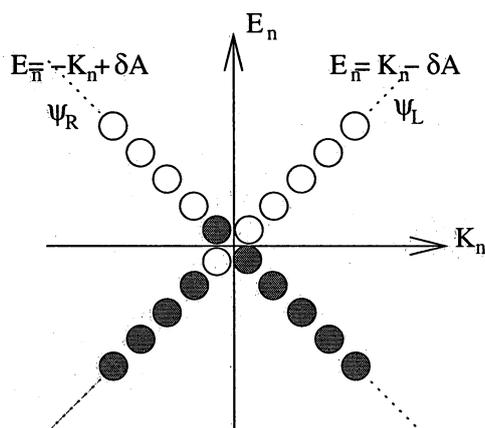


Figura 2.7: Representação do mar de Dirac após a mudança adiabática em que  $A \rightarrow A + \delta A$

Então, a partir deste último diagrama percebemos que os estados com quiralidade L.H. perdem energia, enquanto os estados com quiralidade R.H. ganham energia de modo que surge um estado ocupado com energia positiva, uma partícula com quiralidade R.H., e um estado com energia negativa, uma anti-partícula com quiralidade L.H., portanto, percebemos que as correntes quirais  $j_L^\mu$  e  $j_R^\mu$  não são conservadas separadamente na versão quântica da teoria, apenas a soma que o é conservada e, por isto, a corrente axial  $j^{\mu 5}$  não é mais conservada.

## Capítulo 3

# Quantização da Carga Elétrica no Modelo Padrão Eletrofraco

Conforme já havíamos adiantado na introdução, neste trabalho, abordaremos uma proposta alternativa para o entendimento da quantização da carga elétrica, no contexto de modelos baseados em grupos de gauge semisimples [4-18]. Basicamente, esta abordagem sobre a quantização da carga elétrica segue a partir de vínculos impostos sobre a liberdade da teoria a partir das anomalias triângulo, que descrevemos no capítulo 2, combinando com o fato dos férmions da teoria serem massivos, ou seja, requeremos a invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa, já que esta é responsável pela massa dos férmions que compõem o modelo. Então, a partir destes vínculos obtemos a quantização da carga elétrica.

### 3.1 A Estrutura de Multipletos do Modelo Padrão

Com o objetivo de tratarmos do problema da quantização da carga no modelo padrão, no contexto apresentado acima, consideraremos os dubletos de isospin correspondentes ao setor leptônico do modelo padrão [37]

$$L_a = \begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, Y_{aL}), \quad (3.1)$$

onde na notação utilizada,  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, Y_{aL})$ , representa respectivamente as propriedades de transformação do dubleto de isospin sob o grupo de gauge  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \times U(1)_Y$ , de modo que o dubleto se transforma como um singlete sob o grupo de cor, léptons

não sentem as interações fortes, como um dubleto de isospin e com a atribuição do número quântico de hipercarga  $Y_{aL}$ . Os singletos R.H. são definidos segundo

$$l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, Y_{aR}). \quad (3.2)$$

Agora, considerando o setor dos quarks [37], temos

$$q_{aL} = \begin{pmatrix} u_a \\ d_a \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2}, Y_{q_{aL}}), \quad (3.3)$$

de modo que os correspondentes singletos são

$$u_{aR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, Y_{u_{aR}}), \quad d_{aR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, Y_{d_{aR}}) \quad (3.4)$$

e o índice  $a$  corresponde, respectivamente, às três gerações de léptons e quarks do modelo padrão. Todavia, dentro do modelo padrão os léptons, quarks e os bósons de gauge mediadores das interações fracas,  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , adquirem massa via efeitos de quebra espontânea de simetria e, portanto, a fim de realizarmos este mecanismo no modelo padrão introduzimos o campo de Higgs [37]

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, Y_\phi), \quad (3.5)$$

que ao adquirir o valor esperado no vácuo (VEV)

$$\langle \varphi \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

dispara o mecanismo de quebra espontânea de simetria gerando massa aos férmions e bósons de gauge massivos do modelo padrão. Portanto, após quebrada a simetria

$$\begin{aligned} G_{321} &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y \\ &\quad \downarrow \langle \varphi \rangle_0 \\ &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{U}(1)_Q, \end{aligned}$$

o fóton é, então, formado pela combinação linear dos estados  $W_\mu^3$  de  $\text{SU}(2)_L$  e  $B_\mu$  de  $\text{U}(1)_Y$  [26],

$$A_\mu = \frac{gB_\mu + g'W_\mu^3}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \quad (3.7)$$

onde o ângulo de Weinberg, que parametriza a mistura entre as constantes de acoplamento associadas as interações fracas e eletromagnéticas, é definido segundo  $\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$ , de modo que a carga elétrica elementar é definida como [26]

$$|e| = \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (3.8)$$

Portanto, o operador de carga elétrica no modelo padrão é construído a partir da seguinte combinação linear de geradores do grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  [4],

$$\frac{Q}{|e|} = T_3 + aY \quad (3.9)$$

onde  $T_3$  é definido como  $T_3 = \sigma^3/2$ . Finalizando a seção escrevemos a lagrangeana de Yukawa [37], pois, esta fornece os termos de massa, a nível de árvore, de todos os férmions da teoria

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{m=1}^3 \sum_{a=1}^3 \left[ A_{am}^u \bar{q}_{aL} \tilde{\phi} u_{mR} + A_{am}^d \bar{q}_{aL} \phi d_{mR} + A_{am}^l \bar{L}_a \phi l_{mR} \right] + \text{H.c} \quad (3.10)$$

onde  $\tilde{\phi} \equiv i\tau_2 \phi^*$ .

## 3.2 Quantização da Carga Elétrica com uma Família do Modelo Padrão

Conforme já mencionamos no início do capítulo a quantização da carga elétrica chega, dentro do contexto apresentado, a partir de vínculos impostos sobre a liberdade da teoria das anomalias triângulo, condição necessária para que a teoria seja renormalizável, combinando com o fato de requerermos a preservação da invariância de gauge do setor de Yukawa. Iniciamos, portanto, considerando a quantização da carga elétrica apenas na primeira família ou geração do modelo padrão [6] [4] [7] e, a partir deste momento, nos referimos como vínculos quânticos aos vínculos impostos pela liberdade do modelo das anomalias triângulo, e os vínculos impostos a partir da preservação da invariância de gauge local da lagrangeana de Yukawa iremos nos referir como vínculos clássicos.

### 3.2.1 Vínculos Clássicos

Ao considerarmos apenas a primeira família do modelo padrão a lagrangeana de Yukawa, Eq.(3.10), é reescrita

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = A_{11}^u \bar{q}_{1L} \tilde{\phi} u_{1R} + A_{11}^d \bar{q}_{1L} \phi d_{1R} + A_{11}^l \bar{L}_1 \phi l_{1R} + \text{H.c.} \quad (3.11)$$

Então, submetendo a equação acima a uma transformação de gauge local com relação ao grupo  $U(1)_Y$ , temos

$$-\mathcal{L}'_{\text{Yukawa}} = A_{11}^u \bar{q}'_{1L} \tilde{\phi}' u'_{1R} + A_{11}^d \bar{q}'_{1L} \phi' d'_{1R} + A_{11}^l \bar{L}'_1 \phi' l'_{1R} + \text{H.c.} \quad (3.12)$$

e denotando,

$$\begin{aligned} Y_{1L} &= Y_l, \quad Y_{1R} = Y_e, \\ Y_{q_{1L}} &= Y_q, \quad Y_{u_{1R}} = Y_u \text{ e } Y_{d_{1R}} = Y_d, \end{aligned}$$

os campos se transformam sob o grupo  $U(1)_Y$  de acordo com

$$q_{1L} \rightarrow q'_{1L} = e^{-i\frac{Y_q}{2}\alpha} q_{1L} \simeq (1 - i\frac{Y_q}{2}\alpha) q_{1L} \quad (3.13)$$

$$u_{1R} \rightarrow u'_{1R} = e^{-i\frac{Y_u}{2}\alpha} u_{1R} \simeq (1 - i\frac{Y_u}{2}\alpha) u_{1R} \quad (3.14)$$

$$d_{1R} \rightarrow d'_{1R} = e^{-i\frac{Y_d}{2}\alpha} d_{1R} \simeq (1 - i\frac{Y_d}{2}\alpha) d_{1R} \quad (3.15)$$

$$L_1 \rightarrow L'_1 = e^{-i\frac{Y_l}{2}\alpha} L_1 \simeq (1 - i\frac{Y_l}{2}\alpha) L_1 \quad (3.16)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\frac{Y_\phi}{2}\alpha} \phi \simeq (1 - i\frac{Y_\phi}{2}\alpha) \phi \quad (3.17)$$

$$l_{1R} \rightarrow l'_{1R} = e^{-i\frac{Y_e}{2}\alpha} l_{1R} \simeq (1 - i\frac{Y_e}{2}\alpha) l_{1R}, \quad (3.18)$$

de modo que as equações acima fornecem

$$A_{11}^u \bar{q}'_{1L} \tilde{\phi}' u'_{1R} = A_{11}^u \bar{q}_{1L} \tilde{\phi} u_{1R} - A_{11}^u \bar{q}_{1L} (Y_u - Y_\phi - Y_q) i \frac{\alpha}{2} \tilde{\phi} u_{1R} \quad (3.19)$$

$$A_{11}^d \bar{q}'_{1L} \phi' d'_{1R} = A_{11}^d \bar{q}_{1L} \phi d_{1R} - A_{11}^d \bar{q}_{1L} (Y_d - Y_q + Y_\phi) i \frac{\alpha}{2} \phi d_{1R} \quad (3.20)$$

$$A_{11}^l \bar{L}'_1 \phi' l'_{1R} = A_{11}^l \bar{L}_1 \phi l_{1R} - A_{11}^l \bar{L}_1 (Y_\phi - Y_l + Y_e) \phi l_{1R}. \quad (3.21)$$

Portanto, na condição de preservarmos a invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa ganhamos os vínculos

$$Y_u = Y_q + Y_\phi, \quad (3.22)$$

$$Y_d = Y_q - Y_\phi, \quad (3.23)$$

$$Y_e = Y_l - Y_\phi. \quad (3.24)$$

### 3.2.2 Vínculos Quânticos

Vamos considerar os vínculos impostos sobre a liberdade da teoria a partir das anomalias triângulo, portanto, listamos abaixo todas as anomalias triângulo possíveis de serem realizadas no modelo padrão [27]:

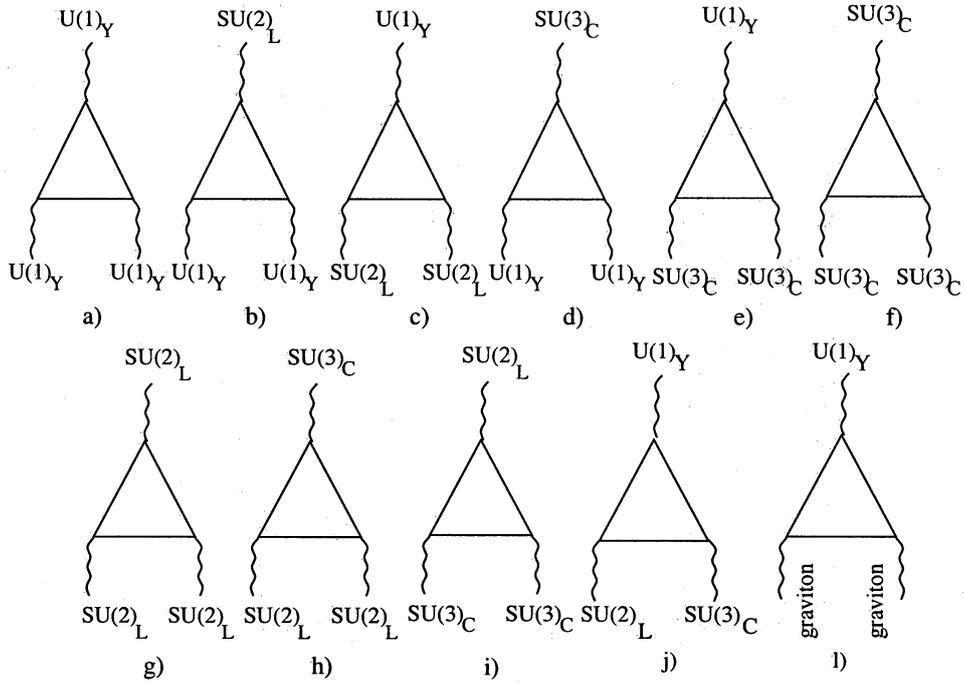


Figura 3.1: Contribuições anômalas do diagrama triângulo.

De posse de todos os diagramas triângulo que contribuem para as anomalias quirais no modelo padrão retomaremos agora a expressão, Eq.(2.45), de forma que para cada um dos diagramas triângulo listados a correspondente anomalia é proporcional a

$$A_{abc} = \text{Tr}[\gamma_5 \{t_a, t_b\} t_c], \quad (3.25)$$

todavia, considerando a equação acima, lembrando que os respectivos geradores de SU(3), SU(2) e U(1) atuam em diferentes espaços de simetria interna, e tomando a Eq.(C.3) do Apêndice C, percebemos que as contribuições devidas aos diagramas b), d), h), i) e j) são proporcionais a

$$\text{Tr}[\text{SU}(2)] \text{ ou } \text{Tr}[\text{SU}(3)], \quad (3.26)$$

sendo que todos os geradores de SU(2) e SU(3)<sup>1</sup> têm traço nulo estas anomalias acabam cancelando-se trivialmente.

As anomalias puras correspondentes apenas a acoplamentos entre bosóns de SU(3) e SU(2), que corresponde aos diagramas g) e f), também se anulam trivialmente, pois, como mostramos no Capítulo 2 o grupo SU(2) apresenta uma representação segura (*safe representation*) e no caso dos acoplamentos com bóson de SU(3) as anomalias correspondentes aos setores quirais  $L$  e  $R$  cancelam-se mutuamente, visto que a QCD é uma teoria vetorial, e que se enquadra no 1º caso descrito na penúltima seção do capítulo 2 em que abordamos as condições necessárias para construirmos teorias de gauge livres de anomalias. Portanto, apenas as contribuições correspondentes aos diagramas a), c), e), e l) não possuem cancelamentos triviais e, apesar de não conhecermos ainda um versão quântica para a interação gravitacional a anomalia mista gauge gravitacional [40] [38] [39], de acordo com o diagrama l), é introduzida no intuito de preservarmos a covariância geral da teoria e os acoplamentos correspondentes a dois grávitons com um bóson de gauge de SU(2) ou SU(3) estão ausentes já que estes são proporcionais a um gerador de SU(2) ou SU(3).

Então, listaremos, agora, todas as contribuições que não apresentam um cancelamento trivial, ou seja contribuições anômalas que restringem os valores atribuídos às hipercargas de forma a proporcionar o respectivo cancelamento das anomalias, segue-se então:

i) A anomalia correspondente ao diagrama a):

$$A_{abc} = \text{Tr}(\text{U}(1)_Y [\text{U}(1)_Y]^2) \propto \text{Tr}[\text{Y}^3] = \sum_i \text{Y}_i^3 \quad (3.27)$$

ii) A anomalia correspondente ao diagrama c):

$$A_{abc} = \text{Tr}(\text{U}(1)_Y [\text{SU}(2)_L]^2) \propto \text{Tr}[\text{Y}_L] = \sum_i \text{Y}_{iL} \quad (3.28)$$

iii) A anomalia correspondente ao diagrama l):

$$A_{abc} = \text{Tr}(\text{U}(1)_Y [\text{graviton}]^2) \propto \text{Tr}[\text{Y}] = \sum_i \text{Y}_i, \quad (3.29)$$

---

<sup>1</sup>Os geradores de SU(3) estão listados no Apêndice C.

onde nas somas acima consideramos os léptons e quarks e que, com relação aos quarks, devemos ainda multiplicar as suas correspondentes hipercargas por um fator 3 devido ao grau de liberdade de cor.

iv) A anomalia correspondente ao diagrama e):

$$A_{abc} = \text{Tr}(U(1)_Y[SU(3)_c]^2) \propto \text{Tr}[Y] = \sum_i Y_i, \quad (3.30)$$

neste caso a soma apenas deve se dar sobre as hipercargas dos quarks, já que os léptons não sentem o grau de liberdade de cor.

Retomando as equações provenientes a partir dos vínculos clássicos percebemos que as contribuições anômalas devidas aos diagramas l e e, que correspondem as Eqs.(3.29) e (3.30), são automaticamente satisfeitas, restando portanto apenas a contribuição devida aos diagramas a e c que fornecem os vínculos

$$3Y_q + Y_l = 0 \quad (3.31)$$

$$Y_l + Y_\phi = 0, \quad (3.32)$$

e a partir destas equações obtemos

$$Y_q = \frac{1}{3}Y_\phi. \quad (3.33)$$

Reconsiderando as Eqs.(3.22) a (3.24) fixamos, então, todas as hipercargas em termos da hipercarga atribuída ao campo de Higgs, ou seja

$$Y_q = \frac{1}{3}Y_\phi \quad (3.34)$$

$$Y_u = \frac{4}{3}Y_\phi \quad (3.35)$$

$$Y_d = -\frac{2}{3}Y_\phi \quad (3.36)$$

$$Y_e = -2Y_\phi \quad (3.37)$$

$$Y_l = -Y_\phi. \quad (3.38)$$

O operador de carga elétrica deve aniquilar o valor esperado no vácuo para o campo de Higgs, ou seja

$$Q\langle\phi\rangle_0 = (I_3 + aY)\langle\phi\rangle_0 = 0, \quad (3.39)$$

então, a partir da última equação obtemos  $a = 1/2Y_\phi$ , de modo que o operador de carga é reescrito na forma [4]

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{Y}{2Y_\phi}, \quad (3.40)$$

portanto, considerando as Eqs.(3.34) a (3.38), notando que  $Y_l$  e  $Y_q$  são as hipercargas atribuídas, respectivamente, aos dubletos de léptons e quarks de modo que para obtermos as correspondentes cargas das partículas que compõem o dubleto devemos fazer com que o operador de carga atue sobre este. Então, tomando a Eq.(3.40), ganhamos a quantização da carga elétrica no modelo padrão com uma geração.

$$Q_\nu = 0, \quad Q_e = -|e|, \quad Q_u = \frac{2}{3}|e|, \quad Q_d = -\frac{1}{3}|e| \quad (3.41)$$

### 3.3 O Problema da Desquantização

Mostramos que a condição imposta a partir da liberdade do modelo padrão das anomalias triângulo combinada com a preservação da invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa, considerando-se apenas a primeira geração do modelo padrão, leva à condição de quantização da carga. Todavia, antes de considerarmos as demais gerações do modelo buscaremos um melhor entendimento dentro desta abordagem da quantização da carga elétrica em teorias quânticas relativísticas com simetria de gauge local. Assim, tendo em vista este objetivo, adicionamos à estrutura de multipletos do modelo padrão, considerando apenas a primeira geração, um singlete R.H. de férmions neutros

$$\nu_{1R} \sim (1, 1, Y_\nu), \quad (3.42)$$

que implica na seguinte alteração no setor de Yukawa

$$\delta\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = A_{11}^\nu \bar{L}_1 \phi^c \nu_{1R}, \quad (3.43)$$

de modo que a correspondente invariância de gauge deste termo sob o grupo  $U(1)_Y$  leva ao vínculo adicional

$$Y_\nu = Y_l + Y_\phi, \quad (3.44)$$

que satisfaz automaticamente à Eq.(3.27) e, portanto, resta apenas um vínculo proveniente a partir da liberdade das anomalias triângulo

$$3Y_q + Y_l = 0. \quad (3.45)$$

Conseqüentemente as equações que envolvem as hipercargas associadas aos férmions da teoria tornam-se

$$Y_l = Y_\nu - Y_\phi = \alpha - Y_\phi \quad (3.46)$$

$$Y_e = Y_\nu - 2Y_\phi = \alpha - 2Y_\phi \quad (3.47)$$

$$Y_q = -\frac{Y_\nu}{3} + \frac{Y_\phi}{3} = -\frac{\alpha}{3} + \frac{Y_\phi}{3} \quad (3.48)$$

$$Y_u = -\frac{Y_\nu}{3} + \frac{4Y_\phi}{3} = -\frac{\alpha}{3} + \frac{4Y_\phi}{3} \quad (3.49)$$

$$Y_d = -\frac{Y_\nu}{3} - \frac{2Y_\phi}{3} = -\frac{\alpha}{3} - \frac{2Y_\phi}{3}. \quad (3.50)$$

Então, a quantização da carga é perdida na primeira família do modelo padrão, pois, temos apenas cinco equações independentes envolvendo sete hipercargas desconhecidas. Todavia, ao analisarmos as equações (3.46) a (3.50) percebemos que todas as hipercargas podem ser expressas na forma

$$Y = Y_{MS} + \alpha(B - L), \quad (3.51)$$

onde  $B$  e  $L$  são respectivamente os números bariônico e leptônico que são globalmente conservados e, a combinação  $\alpha(B - L)$  é uma simetria global [4] [6] [11] que permanecia oculta a teoria. Desta forma compreendemos porque obtivemos a quantização da carga para a primeira família do modelo padrão, pois, originalmente a única simetria  $U(1)$  observada e que a lagrangeana de Yukawa continha era precisamente a própria simetria  $U(1)_{Y_{MS}}$ , ao passo que ao adicionarmos um neutrino com quiralidade R.H liberamos uma simetria,  $U(1)_{B-L}$ , que inicialmente estava oculta ao modelo e levou a desquantização da carga elétrica. Contudo, a quantização da carga elétrica é recuperada se a simetria  $U(1)_{B-L}$  for explicitamente quebrada.

A fim de ilustrarmos a realização da quebra da simetria  $U(1)_{B-L}$  consideremos novamente o modelo padrão, com uma geração de férmions, e com um neutrino R.H, que como vimos no início desta seção contribue com o seguinte termo adicional ao setor de Yukawa

$$\delta\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = A'_{11} \bar{L}_1 \phi^c \nu_{1R},$$

e cuja invariância sob a transformação de gauge do grupo  $U(1)$  leva ao vínculo adicional

$$Y_\nu = Y_l + Y_\phi.$$

No entanto, se assumirmos a existência de um termo de massa de Majorana na forma [4]

$$A_M \bar{\nu}_R (\nu_R)^c$$

teremos que a invariância de gauge deste levará ao vínculo

$$Y_\nu = 0$$

que, portanto, recupera a condição de quantização da carga na primeira família do modelo padrão, pois o neutrino de Majorana não conserva o número leptônico, este viola a conservação do número leptônico em duas unidades e, desta forma, a simetria  $U(1)_{B-L}$  é quebrada.

### 3.4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo Padrão com Três Gerações de Férmions

Vimos que existe uma simetria global que estava oculta ao modelo padrão, considerando-se apenas a primeira geração de férmions, e que revelou-se e levou a desquantização da carga elétrica quando introduzimos na lagrangeana de Yukawa um neutrino de quiralidade R.H. Então, para continuarmos a abordagem descrita neste capítulo sobre a quantização da carga no modelo padrão, considerando agora as três gerações, devemos encontrar todas as simetrias globais  $U(1)_{B-L}$ , pois, não podemos simplesmente generalizar para as três gerações do modelo padrão o resultado obtido para a primeira geração. Mesmo porque três gerações de léptons e quarks existem e, são misturadas, e a lagrangeana total do modelo padrão não é apenas a simples soma das lagrangeanas para cada família.

O modelo padrão com três gerações possui quatro simetrias globais  $U(1)$ , as quais são geradas respectivamente pela conservação do número leptônico do elétron ( $L_e$ ), do número leptônico do múon ( $L_\mu$ ), do tau ( $L_\tau$ ) e do número bariônico ( $B$ ). Assim, definiremos a seguinte combinação geral como o gerador da simetria

$U(1)_{B-L}$

$$L' = \alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau + \delta B, \quad (3.52)$$

as simetrias geradas por  $L'$  devem ser livres de anomalias, portanto, devem satisfazer as relaões [4]

$$\text{Tr}[U(1)_{L'}]^3 = 0 \quad (3.53)$$

$$\text{Tr}(G_{\text{MS}})[U(1)_{L'}]^2 = 0 \quad (3.54)$$

$$\text{Tr}(G_{\text{MS}}^2)[U(1)_{L'}] = 0, \quad (3.55)$$

onde  $G_{\text{MS}}$  é um gerador do modelo padrão que pode ser  $U(1)_Y$ ,  $SU(2)_L$  ou  $SU(3)_c$ .

Considerando as Eqs. acima verificamos que as contribuioes que são proporcionais a

$$\text{Tr}(SU(3)_c[U(1)_{L'}]^2) \text{ e } \text{Tr}(SU(2)_L[U(1)_{L'}]^2)$$

são automaticamente satisfeitas, já que estas são respectivamente proporcionais a um gerador de  $SU(3)$  e a um gerador de  $SU(2)$ , pois, como já mencionamos tais geradores possuem trao nulo. A contribuiao proveniente do termo

$$\text{Tr}U(1)_Y[U(1)_{L'}]^2$$

também é satisfeita imediatamente, isto porque este termo é proporcional a

$$\sum_i Y_{\text{MS}}^i,$$

que na condiao da liberdade apartir das anomalias triângulo anula-se identicamente.

Ao considerarmos as demais contribuioes percebemos que existem apenas três equaoes que são independentes e que, portanto, fornecem os respectivos vínculos

$$\text{Tr}[U(1)_{L'}]^3 \rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0 \quad (3.56)$$

$$\text{Tr}[SU(2)_L]^2 U(1)_{L'} \rightarrow 3\delta + \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (3.57)$$

ainda considerando o vínculo imposto a partir da liberdade do mixing gauge gravitacional, temos

$$\text{Tr}[\text{graviton}]^2 U(1)_{L'} \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0. \quad (3.58)$$

Das expressões acima obtemos duas equaoes envolvendo três parâmetros desconhecidos e, portanto, percebemos que o modelo padrão com três geraoes abriga

um número infinito de simetrias globais  $U(1)_{B-L}$ , as quais são geradas respectivamente pela conservação dos números bariônico e leptônico, que levam a desquantização das hipercargas e, conseqüentemente da carga elétrica no modelo padrão com três gerações.

Todavia, se admitirmos que a simetria  $U(1)_{B-L}$  seja explicitamente quebrada, como já mencionamos anteriormente, recuperaremos a quantização da carga no modelo padrão. Assim, tendo em vista este objetivo, analizaremos a seguir algumas possibilidades em que esta quebra explícita de simetria é realizada [16].

- i) Admitimos que a conservação individual dos números leptônicos  $L_e$ ,  $L_\mu$  e  $L_\tau$  é quebrada, contudo, o número leptônico total  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$  ainda é conservado.
- ii) A conservação do número leptônico total é quebrada.

A fim de ilustrarmos a primeira possibilidade introduzimos no modelo padrão um segundo dubleto de Higgs [16], de forma que agora temos

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}$$

de modo que a lagrangeana de Yukawa é, então, reescrita como

$$-\mathcal{L}_{Yukawa} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{a=1}^3 \left[ A_{am\alpha}^u \bar{q}_{aL} \tilde{\phi}_\alpha u_{mR} + A_{am\alpha}^d \bar{q}_{aL} \phi_\alpha d_{mR} + A_{am\alpha}^l \bar{l}_a \phi_\alpha l_{mR} \right] + \text{H.c.}, \quad (3.59)$$

onde os correspondentes valores esperados do vácuo para os dois dubletos de Higgs são

$$\langle \phi_1 \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle \phi_2 \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Considerando-se apenas o setor leptônico da lagrangeana de Yukawa e, os valores esperados do vácuo para os dois dubletos de Higgs, podemos, então, construir a matriz de massa para o setor leptônico

$$M^l = (v_1 \Gamma_l^1 + v_2 \Gamma_l^2), \quad (3.61)$$

com as matrizes  $\Gamma_l^1$  e  $\Gamma_l^2$  definidas como

$$\Gamma_l^1 = \begin{pmatrix} A_{111}^l & A_{121}^l & A_{131}^l \\ A_{211}^l & A_{221}^l & A_{231}^l \\ A_{311}^l & A_{321}^l & A_{331}^l \end{pmatrix}, \quad \Gamma_l^2 = \begin{pmatrix} A_{112}^l & A_{122}^l & A_{132}^l \\ A_{212}^l & A_{222}^l & A_{232}^l \\ A_{312}^l & A_{322}^l & A_{332}^l \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

e os índices  $a, m = 1, 2, 3$  correspondem respectivamente a geração do  $e, \mu$  e  $\tau$ . A matriz de massa para as três gerações de léptons deve ser diagonalizada a fim de fornecer os autoestados físicos de massa para o elétron, o múon e o tau, isto pode ser feito através da seguinte transformação unitária

$$M_d^l = \begin{pmatrix} m_{ee} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\mu\mu} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} = U_R^\dagger M^l U_L, \quad (3.63)$$

onde  $U_R$  e  $U_L$  são matrizes unitárias que diagonalizam a matriz de massa correspondente ao setor leptônico.

Assim, os autoestados físicos (correspondentes aos autoestados de massa) se relacionam entre os autoestados de simetria através das seguintes transformações unitárias

$$\begin{pmatrix} \hat{e} \\ \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}_L = U_L^\dagger \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \hat{e} \\ \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}_R = U_R^\dagger \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_R \quad (3.64)$$

ou de forma equivalente

$$\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L = U_L \begin{pmatrix} \hat{e} \\ \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_R = U_R \begin{pmatrix} \hat{e} \\ \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}_R$$

Agora que definimos os auto-estados de simetria,  $e, \mu, \tau$ , em termos dos auto-estados da massa,  $\hat{e}, \hat{\mu}$  e  $\hat{\tau}$ , mostraremos que a introdução de um segundo dubleto de Higgs viola a conservação individual do número leptônico e, com esta finalidade, escreveremos as interações de corrente carregada para o setor leptônico em termos dos auto-estados da massa

$$\mathcal{L}_{cc}^l = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left( \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \hat{e}_L W_\mu^+ + \dots \text{H.c.} \right), \quad (3.65)$$

onde  $\hat{\nu}_{eL} = U_L^\dagger \nu_{eL}$ . Observando a lagrangeana acima percebemos que a conservação individual do número leptônico é mantida, pois, não há uma mistura de gerações entre os auto-estados da massa. Contudo, com a introdução de um segundo dubleto de Higgs temos agora um bóson físico de Higgs carregado  $H^\pm$  e três neutros  $H_1^0, H_2^0$  e  $H_3^0$  [16], de forma que a interação destes campos de Higgs com os léptons é

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs-Lepton}} = -\bar{\nu}_L A_R \hat{e}_R H^+ - \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_L B_i \hat{e}_R H_i^0 + \text{H.c.} \quad (3.66)$$

onde

$$A_R = U_L^\dagger (\Gamma_l^1 a_1 + \Gamma_l^2 a_2) U_R$$

$$B_i = U_L^\dagger (\Gamma_l^1 b_1^{(i)} + \Gamma_l^2 b_2^{(i)}) U_R$$

e

$$a_1 = b_1^{(1)} = -i \frac{v_2^*}{v} \quad , \quad a_2 = b_2^{(1)} = -i \frac{v_1^*}{v}$$

$$b_1^3 = -b_2^{(2)*} = \frac{v_1}{v} \quad , \quad b_2^3 = b_1^{(2)*} = \frac{v_2}{v}$$

com  $v$  definido como

$$v = (|v_1|^2 + |v_2|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Como as matrizes  $U_L$  e  $U_R$  não diagonalizam simultaneamente as matrizes  $A_R$  e  $B_i$  teremos uma mistura de gerações e, portanto, a conservação individual dos números leptônicos é perdida na interação dos campos de Higgs com os léptons e, desta forma, a simetria  $U(1)_{B-L}$  é quebrada com a introdução de mais de um dubleto de Higgs.

Uma outra possibilidade seria introduzirmos ao modelo padrão, com três gerações, um neutrino com quiralidade R.H. com um termo de massa de Majorana [17] [18], como mostramos no final da Seção 3.3., já que também neste caso a conservação individual dos números leptônicos  $L_e$ ,  $L_\mu$  e  $L_\tau$  também seria violada.

Em resumo, esta abordagem adotada para o entendimento da quantização da carga elétrica serve como um guia heurístico para a construção de possíveis extensões para o modelo padrão, pois, como ilustramos nesta última seção, a quantização da carga no modelo padrão, com três gerações de férmions, só é recuperada admitindo-se alguma modificação em sua estrutura mínima de forma a quebrar a simetria  $U(1)_{B-L}$ .

## Capítulo 4

# Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-3-1

Mostramos que a quantização da carga elétrica não é realizada no modelo padrão com três gerações e, argumentamos que o modelo padrão deveria sofrer alguma alteração a fim de recuperarmos a condição de quantização da carga. Vimos, por exemplo, que a introdução de um neutrino de quiralidade R.H. com termo de massa de Majorana recupera a quantização da carga e, mostramos que uma outra possibilidade seria a introdução de um segundo dubleto de Higgs que também leva à quebra da conservação individual do número leptônico restabelecendo, portanto, a condição da quantização da carga elétrica. Desde o começo da década 60 vem se discutindo a possibilidade dos neutrinos possuírem massa [41], a fim de se encontrar explicações para as discrepâncias observadas entre os dados experimentais e teoria associados com neutrinos solares [42] e, mais recentemente, com os neutrinos atmosféricos [43]. De fato, se neutrinos forem massivos interações que envolvem correntes R.H. devem ser levadas em consideração. Então, a constatação de que a quantização da carga elétrica é perdida no modelo padrão com três gerações juntamente com a possibilidade dos neutrinos serem massivos são bons argumentos que servem como motivação para considerarmos extensões do modelo padrão.

Há alguns anos, foi apontado [44] que processos como

$$e^-e^- \rightarrow W^-V^-$$

que surgem em interações que envolvem correntes R.H. violam a unitariedade da teoria a altas energias e, portanto, motivados em recuperar o bom comportamento a altas energias do processo mencionado acima e representado pelo diagrama, Fig

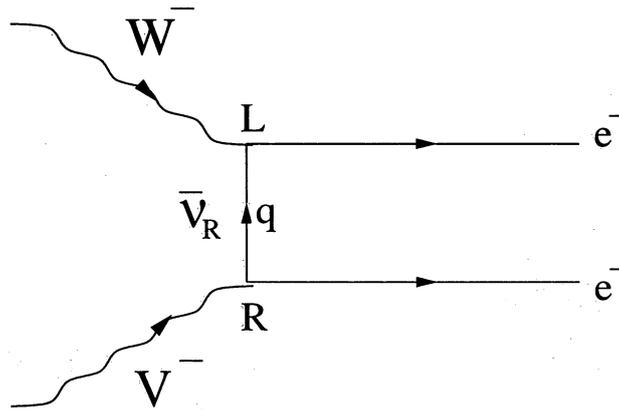


Figura 4.1: Diagrama do processo de dupla carga elétrica  $e^-e^- \rightarrow W^-V^-$ .

4.1. Pisano e Pleitez [46] propuseram uma extensão para o modelo padrão, o modelo leptoquark-bilepton 3-3-1, alargando o grupo de gauge do setor eletrofraco de forma a introduzir bósons de gauge com dupla carga que recuperam o bom comportamento do diagrama, Fig 4.1, a altas energias.

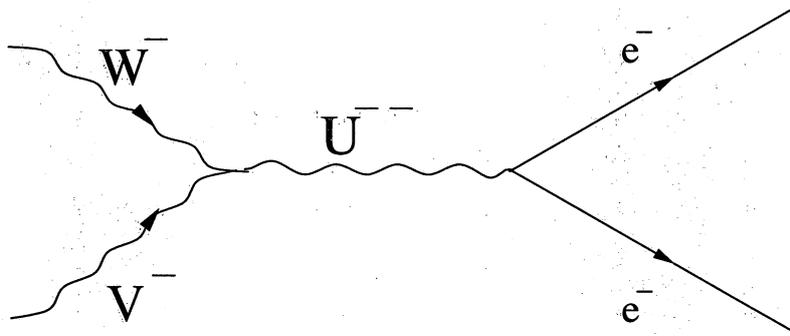


Figura 4.2: Diagrama do processo  $e^-e^- \rightarrow W^-V^-$  considerando bósons de gauge com dupla carga elétrica

Portanto, após termos motivado o porque do interesse em se considerar modelos além do modelo padrão dedicamos este capítulo para tratar o problema da quantização da carga elétrica no modelo 3-3-1 [20].

## 4.1 A Estrutura de Multipletos da Extensão Leptoquark-Bilepton Mínima 3-3-1

Seguindo o procedimento desenvolvido no Capítulo 4 definiremos a estrutura de representação dos campos fermiônicos e de Higgs que compõem o modelo 3-3-1 e, as respectivas propriedades de transformação com relação a esta estrutura de gauge [46] [47]. Iniciamos, então, introduzindo o tripleto de léptons

$$f_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \\ l_i^c \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, N_i), \quad (4.1)$$

onde os campos R.H. são obtidos a partir dos campos L.H. através da operação de conjugação de carga

$$f_{iR} = (f_{iL})^c = C f_{iL}^T,$$

sendo  $C$  o produto das matrizes de Dirac,  $\gamma^0$  e  $\gamma^2$ , escritas em alguma representação adequada.

Porém, diferente do modelo padrão o tripleto de quarks, correspondente à primeira geração, se transforma de forma diferente sob o grupo de gauge do setor eletrofraco dos tripletos de quarks que formam, respectivamente, a segunda e terceira gerações, pois, como mencionamos no Capítulo 3 a teoria deve ser livre de anomalias, no entanto, o grupo  $SU(3)$  não possui representações fundamentais seguras, conforme discutimos no final da Seção 2.3, todavia, a representação  $3 \oplus \bar{3}$  é segura como mostraremos a seguir. Então, retomando as Eqs.(2.71) e (2.72) notamos que a anomalia gerada por esta representação é proporcional a

$$\mathcal{A}(3 \oplus \bar{3}) = \mathcal{A}(3) + \mathcal{A}(\bar{3}) = \mathcal{A}(3) - \mathcal{A}(3) = 0.$$

Portanto, para que o cancelamento das anomalias ocorra dentro do modelo, independente dos valores fixados as hipercargas, é necessário que se tenha o mesmo número de multipletos de férmions se transformando sob as representações tripleto e anti-tripletos, pois, a anomalia gerada apenas por acoplamentos com bósons do grupo  $SU(3)_L$  deve ser cancelada. Assim, esta condição nos permite algumas possibilidades de escolha para a estrutura de representação dos multipletos dos campos fermiônicos do modelo [47]. Todavia, como já havíamos adiantado, neste trabalho consideramos o caso em que o tripleto de quarks, corresponde a 1ª geração, possui a seguinte estrutura de representação

$$Q_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, N_{q_{1L}}) \quad (4.2)$$

com correspondentes singletos R.H. definidos como

$$u_{1R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{u_{1R}}), \quad d_{1R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{d_{1R}}), \quad J_{1R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{J_{1R}}), \quad (4.3)$$

já considerando a segunda e a terceira geração, temos

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} J_i \\ u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}}, N_{q_{iL}}) \quad (4.4)$$

$$u_{iR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{u_{iR}}), \quad d_{iR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{d_{iR}}), \quad J_{iR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{J_{iR}}) \quad (4.5)$$

com  $i = 2, 3$  e (-) representando os campos que se transformam sob a representação anti-triplete, ou representação conjugada de SU(3).

Considerando o setor de Higgs introduzimos o seguinte conjunto de multipletos de campos escalares [47] a fim de gerar massa aos férmions e, bósons de gauge mediadores das interações fracas da teoria

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta^- \\ \eta^+ \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, N_\eta), \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, N_\rho), \quad (4.6)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, N_\chi), \quad S^* = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h^+ & h^- \\ h^+ & H^{++} & \sigma_2^0 \\ h^- & \sigma_2^0 & H^{--} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \bar{\mathbf{6}}_S, N_{S^*}), \quad (4.7)$$

onde o campo  $S^*$  é introduzido com a finalidade de gerar a massa dos léptons, enquanto os demais campos são responsáveis pela geração de massa dos quarks e bósons de gauge massivos.

O modelo apresenta a seguinte hierarquia de quebra espontânea de simetria

$$\begin{aligned} G_{331} &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{SU}(3)_L \otimes \text{U}(1)_N \\ &\quad \downarrow \langle \chi \rangle \\ G_{321} &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y \\ &\quad \langle \rho \rangle \downarrow \langle \eta \rangle, \langle S \rangle \\ &\quad \text{SU}(3)_c \otimes \text{U}(1)_Q, \end{aligned}$$

que justificamos da seguinte forma, ao se alargar o grupo de gauge de isospin fraco há a necessidade de se introduzir quarks exóticos, que deverão ser extremamente massivos, pois, na escala de energia observada até então não se tem evidencia da existência de tais partículas e, portanto, estas deverão adquirir massa a uma escala de energia superior a escala onde ocorre a quebra espontânea de simetria do modelo padrão e, deste modo, o campo  $\chi$  é responsável pela geração de massa dos quarks e bósons de gauge exóticos, enquanto, os demais campos,  $\rho$ ,  $\eta$  e  $S$ , são introduzidos a fim de gerar massa aos campos usuais.

Assim, para disparar o mecanismo de quebra espontânea de simetria, de acordo com a estrutura hierárquica apresentada, os campos que mencionamos acima devem adquirir os seguintes valores esperados do vácuo

$$\langle \chi \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \eta \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\langle S^* \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Então, após quebrada a simetria,  $G_{331} \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$ , o fóton físico é formado pela seguinte combinação linear dos estados  $W_\mu^3$  e  $W_\mu^8$  de  $SU(3)_L$ , e  $B_\mu$  de  $U(1)_N$  [46]

$$A_\mu = \sin \theta_W (W_\mu^3 - \sqrt{3} W_\mu^8) + (1 - 4 \sin^2 \theta_W)^{\frac{1}{2}} B_\mu. \quad (4.10)$$

Portanto, operador de carga elétrica no modelo 3-3-1 é escrito da seguinte forma [20]

$$\frac{Q}{|e|} = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3} \lambda_8) + bN, \quad (4.11)$$

onde  $|e|$  é definido como

$$|e| = g \sin \theta_W = g' (1 - 4 \sin^2 \theta_W)^{\frac{1}{2}}$$

sendo  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$  as matrizes de Gell-Mann listadas no Apêndice C e  $N$  é a nova carga de  $U(1)$  associada aos férmions do modelo.

A partir da lagrangiana de Yukawa obtemos os respectivos termos de massa para os léptons e quarks do modelo e, então, após termos definido a estrutura de multipletos dos campos de matéria escrevemos a lagrangeana de Yukawa [47]

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y = & \frac{1}{2} G_{ij} \overline{(f_{iL})^c} f_{jL} S^* + a_1 \bar{Q}_{1L} J_{1R} \chi + a_{\alpha\beta} \bar{Q}_{\alpha L} J_{\beta R} \chi^* + a'_{1i} \bar{Q}_{1L} d_{iR} \rho + a'_{\alpha i} \bar{Q}_{\alpha L} u_{iR} \rho^* \\
& + a''_{1i} \bar{Q}_{1L} u_{iR} \eta + a''_{i\alpha} \bar{Q}_{\alpha L} d_{iR} \eta^* + H.c
\end{aligned} \tag{4.12}$$

com  $\alpha, \beta = 2, 3$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  e (\*) sinalizando os campos que se transformam sob a representação conjugada de  $SU(3)$ , ou anti-tripletto  $\bar{3}$ , exeto o campo  $S^*$  que se transforma como um antisexteto simétrico na representação conjugada de  $SU(3)$ .

## 4.2 Vínculos Clássicos

A fim de obtermos vínculos entre as hipercargas dos campos fermiônicos e de Higgs consideremos, então, a invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa, Eq.(4.12), sob o grupo  $U(1)_N$ , de forma que os campos do setor fermiônico se transformam de acordo com

$$f_{iL} \rightarrow f'_{iL} = e^{-i\frac{N_i}{2}\alpha} f_{iL} \sim (1 - i\frac{N_i}{2}\alpha) f_{iL} \tag{4.13}$$

$$Q_{1L} \rightarrow Q'_{1L} = e^{-i\frac{N_{q1L}}{2}\alpha} Q_{1L} \sim (1 - i\frac{N_{q1L}}{2}\alpha) Q_{1L} \tag{4.14}$$

$$Q_{\alpha L} \rightarrow Q'_{\alpha L} = e^{-i\frac{N_{q\alpha L}}{2}\alpha} Q_{\alpha L} \sim (1 - i\frac{N_{q\alpha L}}{2}\alpha) Q_{\alpha L} \tag{4.15}$$

$$J_{1R} \rightarrow J'_{1R} = e^{-i\frac{N_{J1R}}{2}\alpha} J_{1R} \sim (1 - i\frac{N_{J1R}}{2}\alpha) J_{1R} \tag{4.16}$$

$$J_{\beta R} \rightarrow J'_{\beta R} = e^{-i\frac{N_{J\beta R}}{2}\alpha} J_{\beta R} \sim (1 - i\frac{N_{J\beta R}}{2}\alpha) J_{\beta R} \tag{4.17}$$

$$u_{iR} \rightarrow u'_{iR} = e^{-i\frac{N_{u_{iR}}}{2}\alpha} u_{iR} \sim (1 - i\frac{N_{u_{iR}}}{2}\alpha) u_{iR} \tag{4.18}$$

$$d_{iR} \rightarrow d'_{iR} = e^{-i\frac{N_{d_{iR}}}{2}\alpha} d_{iR} \sim (1 - i\frac{N_{d_{iR}}}{2}\alpha) d_{iR} \tag{4.19}$$

e os campos do setor escalar segundo

$$S^* \rightarrow S'^* = e^{-i\frac{N_{S^*}}{2}\alpha} S^* \sim (1 - i\frac{N_{S^*}}{2}\alpha) S^* \tag{4.20}$$

$$\chi \rightarrow \chi' = e^{-i\frac{N_\chi}{2}\alpha} \chi \sim (1 - i\frac{N_\chi}{2}\alpha) \chi \tag{4.21}$$

$$\chi^* \rightarrow \chi'^* = e^{-i\frac{N_{\chi^*}}{2}\alpha} \chi^* \sim (1 - i\frac{N_{\chi^*}}{2}\alpha) \chi^* \tag{4.22}$$

$$\eta \rightarrow \eta' = e^{-i\frac{N_\eta}{2}\alpha} \eta \sim (1 - i\frac{N_\eta}{2}\alpha) \eta \tag{4.23}$$

$$\eta^* \rightarrow \eta^{*'} = e^{-i\frac{N_{\eta^*}}{2}\alpha}\eta^* \sim (1 - i\frac{N_{\eta^*}}{2}\alpha)\eta^* \quad (4.24)$$

$$\rho \rightarrow \rho' = e^{-i\frac{N_{\rho}}{2}\alpha}\rho \sim (1 - i\frac{N_{\rho}}{2}\alpha)\rho \quad (4.25)$$

$$\rho^* \rightarrow \rho^{*'} = e^{-i\frac{N_{\rho^*}}{2}\alpha}\rho^* \sim (1 - i\frac{N_{\rho^*}}{2}\alpha)\rho^* \quad (4.26)$$

Portanto, na condição de preservarmos a invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0,$$

obtemos

$$2N_i = -N_{S^*} \quad (4.27)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{J_{1R}} = N_{\chi} \quad (4.28)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{J_{\beta R}} = N_{\chi^*} \quad (4.29)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{d_{iR}} = N_{\rho} \quad (4.30)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{u_{iR}} = N_{\rho^*} \quad (4.31)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u_{iR}} = N_{\eta} \quad (4.32)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{d_{iR}} = N_{\eta^*}, \quad (4.33)$$

O operador de carga elétrica, Eq.(4.11), deve aniquilar o valor esperado no vácuo para os multipletos  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\chi$ ,  $S^*$ ,  $\rho^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\chi^*$ , então, retomando as Eqs.(4.8) e (4.9) e considerando o valor esperado no vácuo para os campos  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  na representação conjugada

$$\langle\chi^*\rangle_0 \sim \begin{pmatrix} v_{\chi^*} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle\rho^*\rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\rho^*} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle\eta^*\rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{\eta^*} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

obtemos os vínculos adicionais

$$b = \frac{1}{N_{\rho}}, \quad N_{\eta} = 0, \quad N_S = 0, \quad N_{\chi} = -N_{\rho} \quad (4.35)$$

$$N_{\rho^*} = -N_{\rho}, \quad N_{\eta^*} = 0, \quad N_{\chi^*} = -N_{\chi} \quad (4.36)$$

Assim, com base nas relações acima, as Eqs.(4.27) a (4.33) são reescritas como

$$N_i = 0 \quad (4.37)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{J_{1R}} = -N_\rho \quad (4.38)$$

$$N_{q_{iL}} - N_{J_{iR}} = N_\rho \quad (4.39)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{d_{aR}} = N_\rho \quad (4.40)$$

$$N_{q_{iL}} - N_{u_{aR}} = -N_\rho \quad (4.41)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u_{aR}} = 0 \quad (4.42)$$

$$N_{q_{iL}} - N_{d_{aR}} = 0, \quad (4.43)$$

a partir das quais estabelecemos

$$N_{u_{1R}} = N_{u_{2R}} = N_{u_{3R}} \equiv N_{u_R}$$

$$N_{d_{1R}} = N_{d_{2R}} = N_{d_{3R}} \equiv N_{d_R}$$

$$N_{q_{2L}} = N_{q_{3L}} \equiv N_{q_L}$$

$$N_{J_{2R}} = N_{J_{3R}} \equiv N_{J_R},$$

de modo que podemos finalmente escrever

$$N_{u_R} = N_\rho + N_{q_L} \quad (4.44)$$

$$N_{d_R} = N_{q_L} \quad (4.45)$$

$$N_{J_R} = N_{q_L} - N_\rho \quad (4.46)$$

$$N_{J_{1R}} = N_{q_L} + 2N_\rho \quad (4.47)$$

$$N_{q_{1L}} = N_\rho + N_{q_L} \quad (4.48)$$

### 4.3 Vínculos Quânticos

Como já mencionamos, os vínculos quânticos, são provenientes da liberdade das anomalias triângulo e, nesta condição, devemos considerar todas as contribuições devido ao diagrama triângulo, que são basicamente as mesmas que apresentamos na Fig. 3.1, exeto que o grupo de isospin fraco agora é o grupo SU(3). Portanto, com base nos mesmos argumentos que apresentamos na Seção 3.2 listamos as únicas contribuições anômalas que não apresentam um cancelamento trivial

$$\text{Tr}(\text{U}(1)_N[\text{U}(1)_N]^2) \propto \text{Tr}N^3 = \sum_i N_i^3 \quad (4.49)$$

$$\text{Tr}(\text{U}(1)_N[\text{SU}(3)_L]^2) \propto \text{Tr}N_L = \sum_i N_{iL} \quad (4.50)$$

$$\text{Tr}(\text{U}(1)_N[\text{SU}(3)_c]^2) \propto \text{Tr}N = \sum_i N_i \quad (4.51)$$

$$\text{Tr}(\text{U}(1)_N[\text{gráviton}]^2) \propto \text{Tr}N = \sum_i N_i, \quad (4.52)$$

onde a anomalia pura que é proporcional a  $\text{Tr}[\text{SU}(3)_L]^3$  tem seu cancelamento garantido graças a estrutura de representação dos campos fermiônicos, pois, como já argumentamos na Seção 4.1 o cancelamento das anomalias é realizado no modelo se o número de campos fermiônicos que se transformam sob a representação triplete for igual a número de campos que se transformam sob a representação anti-triplete. Além disso, analisando com um pouco mais de detalhe este esquema de cancelamento das anomalias percebemos que dentro deste modelo e de sua extensão máxima semisimples, o modelo 3-4-1, encontramos uma explicação para o problema da replicação das famílias [48]. Fato que trataremos rapidamente. Para tanto, consideremos abaixo, de forma geral, o esquema de cancelamento das anomalias no modelo

$$A^{abc}(\text{férmions na representação } \mathbf{3}) + A^{abc}(\text{férmions na representação } \bar{\mathbf{3}}) = 0$$

e considerando a contagem

$$1^{\text{a}} \text{ família} \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ tripletos de quarks se transformando como } \mathbf{3} \\ 1 \text{ triplete de léptons se transformando como } \mathbf{3} \end{array} \right.$$

$$2^{\text{a}} \text{ e } 3^{\text{a}} \text{ famílias} \left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ tripletos de quarks se transformando como } \bar{\mathbf{3}} \\ 2 \text{ tripletos de léptons se transformando como } \mathbf{3} \end{array} \right.$$

percebemos que temos o mesmo número de férmions se transformando segundo as representações  $\mathbf{3}$  e  $\bar{\mathbf{3}}$  ao levarmos em conta, no caso dos quarks, os 3 graus de liberdade de cor. Assim, a anomalia total é cancelada. Porém, se o número de gerações de férmions não for um múltiplo inteiro dos graus de liberdade de cor o cancelamento das anomalias não será realizado dentro do modelo, então, o modelo 3-3-1 e sua extensão oferecem uma conexão entre as gerações de férmions fundamentais e, os três graus de liberdade de cor, na condição de preservarmos a renormalizabilidade da teoria.

Voltando à questão da quantização da carga, as Eqs.(4.49) a (4.52) fornecem

$$2N_{q_L} + N_{q_{1L}} = 0 \quad (4.53)$$

$$9N_{q_{1L}}^3 + 18N_{q_L}^3 - 9N_{u_R}^3 - 9N_{d_R}^3 - 3N_{J_{1R}}^3 - 6N_{J_R}^3 = 0 \quad (4.54)$$

$$9N_{q_{1L}} + 18N_{q_L} - 9(N_{u_R} + N_{d_R}) - 3N_{J_{1R}} - 6N_{J_R} = 0 \quad (4.55)$$

$$9N_{q_{1L}} + 18N_{q_L} - 9(N_{u_R} + N_{d_R}) - 3N_{J_{1R}} - 6N_{J_R} = 0, \quad (4.56)$$

e retomando os vínculos impostos sobre as hipercargas a partir da invariância de gauge de lagrangeana da Yukawa, Eqs.(4.44) a (4.48), temos apenas uma equação independente proveniente a partir da liberdade das anomalias triângulo

$$3N_{q_L} + N_\rho = 0 \quad (4.57)$$

então, a partir da última equação fixamos as hipercargas correspondentes aos tripletos de quarks da 2ª e 3ª geração em termos da hipercarga  $N_\rho$

$$N_{q_L} = -\frac{1}{3}N_\rho. \quad (4.58)$$

Portanto, com base na última expressão podemos escrever todas as hipercargas, Eqs.(4.44) a (4.48), em termos da hipercarga do multiplete  $\rho$

$$N_{u_R} = \frac{2}{3}N_\rho \quad (4.59)$$

$$N_{d_R} = -\frac{1}{3}N_\rho \quad (4.60)$$

$$N_{J_R} = -\frac{4}{3}N_\rho \quad (4.61)$$

$$N_{J_{1R}} = \frac{5}{3}N_\rho \quad (4.62)$$

$$N_{q_{1L}} = \frac{2}{3}N_\rho \quad (4.63)$$

## 4.4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-3-1

Agora que expressamos todas as hipercargas em termos de  $N_\rho$  podemos obter as cargas elétricas de todos os férmions pertencentes ao modelo, retomando a expressão para o operador de carga elétrica, Eq.(4.11), e considerando a Eq.(4.35), temos

$$\frac{Q}{|e|} = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + \frac{N}{N_\rho}. \quad (4.64)$$

Então, de posse da equação acima e, das Eqs.(4.59) a (4.63), obtemos as cargas, respectivamente, dos léptons e quarks

$$Q_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} = 0 \quad (4.65)$$

$$Q_{e, \mu, \tau} = -|e| \quad (4.66)$$

$$Q_u = \frac{2}{3}|e| \quad (4.67)$$

$$Q_d = -\frac{1}{3}|e| \quad (4.68)$$

$$Q_{J_1} = \frac{5}{3}|e| \quad (4.69)$$

$$Q_{J_2} = Q_{J_3} = -\frac{4}{3}|e| \quad (4.70)$$

Portanto, a quantização da carga elétrica, considerando três gerações de férmions, é realizada no modelo leptoquark-bilepton 3-3-1, pois a simetria  $U(1)_{B-L}$  não é realizada neste caso.

# Capítulo 5

## Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-4-1

Consideremos finalmente a quantização da carga elétrica na máxima extensão leptouark-bilepton com grupo de gauge semisimples, o modelo 3-4-1 [49], no qual em um mesmo multipletto são incluídos todos os graus de liberdade leptônicos independentes  $\nu_l$ ,  $\nu_l^c$ ,  $l$ , e  $l^c$ . Portanto, com base no procedimento desenvolvido anteriormente mostraremos que a quantização da carga elétrica é realizada dentro deste modelo [21].

### 5.1 A Estrutura de Multipletos da Extensão Leptouark-Bilepton 3-4-1

Iniciamos, então, definindo o quadrupletto correspondente ao setor leptônico L.H. [49]

$$f_{iL} = \left( \left( \begin{array}{c} \nu_{iL} \\ l_{iL} \end{array} \right) \right)_c = \left( \begin{array}{c} \nu_i \\ l_i \\ \nu_i^c \\ l_i^c \end{array} \right)_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, N_i), \quad (5.1)$$

onde os correspondentes campos R.H são obtidos através da operação de conjugação de carga como já havíamos mencionado no Capítulo 4.

Considerando o setor dos quarks [49], pelos mesmos argumentos que apresentamos no 2º parágrafo da Seção 4.1, temos que o quadrupletto correspondente

à primeira geração

$$Q_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ u' \\ J_1 \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{4}, N_{q_{1L}}) \quad (5.2)$$

se transforma de diferente forma sob o grupo de gauge do setor eletrofraco dos quadrupletos de quarks que constituem, respectivamente, a segunda e a terceira geração

$$Q_{\alpha L} = \begin{pmatrix} J_\alpha \\ d'_\alpha \\ u_\alpha \\ d_\alpha \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}}, N_{q_{\alpha L}}), \quad (5.3)$$

onde os singletos R.H. correspondentes à primeira geração são definidos como

$$u_{1R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{u_{1R}}) \quad , \quad d_{1R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{d_{1R}}) \quad (5.4)$$

$$J_{1R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{J_{1R}}) \quad , \quad u'_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{u'_R}) \quad (5.5)$$

e respectivamente para a segunda e terceira gerações, temos

$$u_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{u_{\alpha R}}) \quad , \quad d_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{d_{\alpha R}}) \quad (5.6)$$

$$J_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{J_{\alpha R}}) \quad , \quad d'_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, N_{d'_{\alpha R}}) \quad (5.7)$$

com  $\alpha=2, 3$ .

A fim de gerar massa aos férmions e bósons de gauge mediadores da interação fraca,  $V^\pm$ ,  $U^{\pm\pm}$ ,  $Z^0$ ,  $Z^{0'}$  e  $W^\pm$ , é necessário introduzirmos o seguinte conjunto de campos escalares [49]

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, N_\eta) \quad , \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, N_\rho), \quad (5.8)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi^{--} \\ \chi_2^- \\ \chi^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, N_\chi) \quad , \quad \eta' = \begin{pmatrix} \eta_1^{0'} \\ \eta_1^{-'} \\ \eta_2^{0'} \\ \eta_2^{+'} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, N_{\eta'}), \quad (5.9)$$

$$H^* = \begin{pmatrix} H_1^0 & H_1^+ & H_2^0 & H_2^- \\ H_1^+ & H_1^{++} & H_3^+ & H_3^0 \\ H_2^0 & H_3^+ & H_4^0 & H_4^- \\ H_2^- & H_3^0 & H_4^- & H_2^{--} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{10}}_S, N_{H^*}), \quad (5.10)$$

sendo o campo  $H^*$  responsável pela geração da massa dos léptons e os demais campos são responsáveis pela geração de massa dos quarks e bósons de gauge massivos.

A hierarquia de quebra espontânea de simetria do modelo que tratamos neste capítulo é [47]

$$\begin{aligned} G_{341} &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{SU}(4)_L \otimes \text{U}(1)_N \\ &\quad \downarrow \langle \chi \rangle \\ G_{331} &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{SU}(3)_L \otimes \text{U}(1)_N \\ &\quad \downarrow \langle \eta' \rangle \\ G_{321} &= \text{SU}(3)_c \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y \\ &\quad \langle \rho \rangle \downarrow \langle \eta \rangle, \langle H \rangle \\ &\quad \text{SU}(3)_c \otimes \text{U}(1)_Q, \end{aligned}$$

que é realizada quando os multipletos de Higgs adquirem os seguintes valores esperados no vácuo

$$\langle \chi \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \eta \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\langle H^* \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \eta' \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} v_{\eta'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

com  $\langle \chi \rangle_0 > \langle \eta' \rangle_0 > \langle \rho \rangle_0, \langle \eta \rangle_0$  e  $\langle H \rangle_0$ . Então, depois de quebrada a simetria  $G_{341} \rightarrow G_{331} \rightarrow G_{321} \rightarrow \text{SU}(3)_c \otimes \text{U}(1)_{\text{em}}$  o campo do fóton é formado, portanto, pela seguinte combinação linear de estados  $W_\mu^3, W_\mu^8$  e  $W_\mu^{15}$  do grupo  $\text{SU}(4)_L$  e  $B_\mu$  de  $\text{U}(1)_N$  [47]

$$A_\mu = \frac{1}{(1+4t^2)}(tW_\mu^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}tW_\mu^8 - \frac{2\sqrt{6}}{3}tW_\mu^{15} + B_\mu) \quad (5.13)$$

com  $t \equiv \frac{g'}{g}$  e

$$|e| = \frac{gt}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{g'}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

de forma que o operador de carga elétrica é escrito segundo

$$\frac{Q}{|e|} = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda_{15}) + bN, \quad (5.14)$$

onde as matrizes  $\lambda_3$ ,  $\lambda_8$  e  $\lambda_{15}$  estão listadas no Apêndice C. Finalizando a seção, escreveremos, então, os acoplamentos de Yukawa para o modelo 3-4-1 [49]

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & \frac{1}{2}G_{ij}\overline{(f_{iL})^c}f_{jL}H^* + \Gamma_1\bar{Q}_{1L}J_{1R}\chi + \Gamma_{\alpha\beta}\bar{Q}_{\alpha L}J_{\beta R}\chi^* + F'_{1i}\bar{Q}_{1L}d_{kR}\rho + \\ & F'_{\alpha k}\bar{Q}_{\alpha L}u_{kR}\rho^* + F'_{1k}\bar{Q}_{1L}u_{kR}\eta + F'_{k\alpha}\bar{Q}_{\alpha L}d_{kR}\eta^* + h_1\bar{Q}_{1L}u'_R\eta' + \\ & h_{\alpha\beta}\bar{Q}_{\alpha L}d'_{\beta R}\eta'^* + \text{H.c} \end{aligned} \quad (5.15)$$

com  $\alpha, \beta = 2, 3$  e  $k, i, j = 1, 2, 3$  e da mesma forma que no capítulo anterior representamos por (\*) os campos que se transformam sob a representação conjugada de SU(4), exceto  $H^*$  que se transforma como um decuplo simétrico na representação conjugada de SU(4).

## 5.2 Vínculos Clássicos

A exemplo do capítulo anterior buscaremos relações entre as hiper-cargas atribuídas aos campos fermiônicos e campos de Higgs e, com esta finalidade consideraremos, então, a invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa, Eq.(5.15), sob o grupo U(1)<sub>N</sub>, de forma que os campos do setor fermiônico se transformam segundo

$$f_{iL} \rightarrow f'_{iL} = e^{-i\frac{N_i}{2}\alpha}f_{iL} \sim (1 - i\frac{N_i}{2}\alpha)f_{iL} \quad (5.16)$$

$$Q_{1L} \rightarrow Q'_{1L} = e^{-i\frac{N_{q1L}}{2}\alpha}Q_{1L} \sim (1 - i\frac{N_{q1L}}{2}\alpha)Q_{1L} \quad (5.17)$$

$$Q_{\alpha L} \rightarrow Q'_{\alpha L} = e^{-i\frac{N_{q\alpha L}}{2}\alpha} Q_{\alpha L} \sim (1 - i\frac{N_{q\alpha L}}{2}\alpha) Q_{\alpha L} \quad (5.18)$$

$$J_{1R} \rightarrow J'_{1R} = e^{-i\frac{N_{J1R}}{2}\alpha} J_{1R} \sim (1 - i\frac{N_{J1R}}{2}\alpha) J_{1R} \quad (5.19)$$

$$J_{\beta R} \rightarrow J'_{\beta R} = e^{-i\frac{N_{J\beta R}}{2}\alpha} J_{\beta R} \sim (1 - i\frac{N_{J\beta R}}{2}\alpha) J_{\beta R} \quad (5.20)$$

$$u_{kR} \rightarrow u'_{kR} = e^{-i\frac{N_{u_{kR}}}{2}\alpha} u_{kR} \sim (1 - i\frac{N_{u_{kR}}}{2}\alpha) u_{kR} \quad (5.21)$$

$$d_{kR} \rightarrow d'_{kR} = e^{-i\frac{N_{d_{kR}}}{2}\alpha} d_{kR} \sim (1 - i\frac{N_{d_{kR}}}{2}\alpha) d_{kR} \quad (5.22)$$

$$u'_R \rightarrow (u'_R)' = e^{-i\frac{N_{u'_R}}{2}\alpha} u'_R \sim (1 - i\frac{N_{u'_R}}{2}\alpha) u'_R \quad (5.23)$$

$$d'_{\beta R} \rightarrow (d'_{\beta R})' = e^{-i\frac{N_{d'_{\beta R}}}{2}\alpha} d'_{\beta R} \sim (1 - i\frac{N_{d'_{\beta R}}}{2}\alpha) d'_{\beta R} \quad (5.24)$$

e os campos do setor escalar de acordo com

$$H^* \rightarrow H'^* = e^{-i\frac{N_{H^*}}{2}\alpha} H^* \sim (1 - i\frac{N_{H^*}}{2}\alpha) H^* \quad (5.25)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = e^{-i\frac{N_{\chi}}{2}\alpha} \chi \sim (1 - i\frac{N_{\chi}}{2}\alpha) \chi \quad (5.26)$$

$$\chi^* \rightarrow \chi'^* = e^{-i\frac{N_{\chi^*}}{2}\alpha} \chi^* \sim (1 - i\frac{N_{\chi^*}}{2}\alpha) \chi^* \quad (5.27)$$

$$\eta \rightarrow \eta' = e^{-i\frac{N_{\eta}}{2}\alpha} \eta \sim (1 - i\frac{N_{\eta}}{2}\alpha) \eta \quad (5.28)$$

$$\eta^* \rightarrow \eta'^* = e^{-i\frac{N_{\eta^*}}{2}\alpha} \eta^* \sim (1 - i\frac{N_{\eta^*}}{2}\alpha) \eta^* \quad (5.29)$$

$$\rho \rightarrow \rho' = e^{-i\frac{N_{\rho}}{2}\alpha} \rho \sim (1 - i\frac{N_{\rho}}{2}\alpha) \rho \quad (5.30)$$

$$\rho^* \rightarrow \rho'^* = e^{-i\frac{N_{\rho^*}}{2}\alpha} \rho^* \sim (1 - i\frac{N_{\rho^*}}{2}\alpha) \rho^* \quad (5.31)$$

$$\eta' \rightarrow (\eta')' = e^{-i\frac{N_{\eta'}}{2}\alpha} \eta' \sim (1 - i\frac{N_{\eta'}}{2}\alpha) \eta' \quad (5.32)$$

$$\eta'^* \rightarrow (\eta'^*)' = e^{-i\frac{N_{\eta'^*}}{2}\alpha} \eta'^* \sim (1 - i\frac{N_{\eta'^*}}{2}\alpha) \eta'^* \quad (5.33)$$

Então, na condição de preservarmos a invariância de gauge da lagrangeana de Yukawa

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0,$$

ganhamos os respectivos vínculos sobre as hipercargas

$$2N_i = -N_{H^*} \quad (5.34)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{J_{1R}} = N_\chi \quad (5.35)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{J_{\alpha R}} = N_{\chi^*} \quad (5.36)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{d_{kR}} = N_\rho \quad (5.37)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{u_{kR}} = N_{\rho^*} \quad (5.38)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u_{kR}} = N_\eta \quad (5.39)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{d_{kR}} = N_{\eta^*} \quad (5.40)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u'_{kR}} = N_{\eta'} \quad (5.41)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{d'_{kR}} = N_{\eta'^*} \quad (5.42)$$

Novamente o operador de carga elétrica deve aniquililar o estado de vácuo para os campos  $\chi, \chi^*, \eta, \eta^*, \eta', \eta'^*, H^*, \rho, \rho^*$  e, nesta condição, considerando as Eqs.(5.11) e (5.12) e o valor esperado do vácuo para os campos  $\chi, \eta, \eta'$  e  $\rho$  na representação conjugada de SU(4)

$$\langle \chi^* \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} v_{\chi^*} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho^* \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{\rho^*} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \eta^* \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\eta^*} \end{pmatrix}, \quad \langle \eta'^* \rangle_0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\eta'^*} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

obtemos

$$b = \frac{1}{N_\rho}, \quad N_\eta = N_{\eta'} = 0, \quad N_{H^*} = 0, \quad N_\chi = -N_\rho \quad (5.44)$$

$$N_{\rho^*} = -N_\rho, \quad N_{\eta^*} = -N_\eta, \quad N_{\chi^*} = -N_\chi, \quad N_{\eta'^*} = -N_{\eta'}, \quad (5.45)$$

de maneira que com base nestas equações escrevemos as Eqs.(5.34) a (5.42) na forma

$$N_i = 0 \quad (5.46)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{J_{1R}} = -N_\rho \quad (5.47)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{J_{\beta R}} = N_\rho \quad (5.48)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{d_{kR}} = N_\rho \quad (5.49)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{u_{kR}} = -N_\rho \quad (5.50)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u_{kR}} = 0 \quad (5.51)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{d_{kR}} = 0 \quad (5.52)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u'_R} = 0 \quad (5.53)$$

$$N_{q_{\alpha L}} - N_{d'_{\alpha R}} = 0. \quad (5.54)$$

Assim, considerando as relações acima estabelecemos

$$N_{u_{1R}} = N_{u_{2R}} = N_{u_{3R}} \equiv N_{U_R}$$

$$N_{d_{1R}} = N_{d_{2R}} = N_{d_{3R}} \equiv N_{D_R}$$

$$N_{q_{2L}} = N_{q_{3L}} \equiv N_{q_L}$$

$$N_{J_{2R}} = N_{J_{3R}} \equiv N_{J_R}$$

$$N_{d'_{2R}} = N_{d'_{3R}} = N_{D_R}$$

Finalmente, escrevemos as Eqs.(5.46) a (5.54) como

$$N_{q_{1L}} - N_{J_{1R}} = -N_\rho \quad (5.55)$$

$$N_{q_L} - N_{J_R} = N_\rho \quad (5.56)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{D_R} = N_\rho \quad (5.57)$$

$$N_{q_L} - N_{U_R} = -N_\rho \quad (5.58)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{U_R} = 0 \quad (5.59)$$

$$N_{q_L} - N_{D_R} = 0 \quad (5.60)$$

$$N_{q_{1L}} - N_{u'_R} = 0 \quad (5.61)$$

$$N_{q_L} - N_{D'_R} = 0. \quad (5.62)$$

### 5.3 Vínculos Quânticos

Novamente, com base nos argumentos já apresentados, listamos as únicas contribuições anômalas ao modelo 3-4-1 que não apresentam um cancelamento trivial

$$\text{Tr}(U(1)_N[U(1)_N]^2) \propto \text{Tr}N^3 = \sum_i N_i^3 \quad (5.63)$$

$$\text{Tr}(U(1)_N[SU(4)_L]^2) \propto \text{Tr}N_L = \sum_i N_{iL} \quad (5.64)$$

$$\text{Tr}(U(1)_N[SU(3)_c]^2) \propto \text{Tr}N = \sum_i N_i \quad (5.65)$$

$$\text{Tr}(U(1)_N[\text{gráviton}]^2) \propto \text{Tr}N = \sum_i N_i \quad (5.66)$$

onde, como no caso do modelo 3-3-1, a anomalia pura proporcional a  $\text{Tr}[SU(4)_L]^3$  tem seu cancelamento garantido graças à escolha da representação dos campos fermiônicos sob o grupo de isospin fraco. Portanto, na condição que o modelo seja livre das anomalias triângulo, de Adler-Bell-Jackiw, ganhamos os seguintes vínculos sobre as novas hipercargas dos campos fermiônicos

$$24N_{q_L} + 12N_{q_{1L}} = 0 \quad (5.67)$$

$$12N_{q_{1L}}^3 + 24N_{q_L}^3 - 9N_{U_R}^3 - 9N_{D_R}^3 - 3N_{J_{1R}}^3 - 6N_{J_R}^3 - 3N_{u'_R}^3 - 6N_{D'_R}^3 = 0 \quad (5.68)$$

$$9N_{q_{1L}} + 18N_{q_L} - 9(N_{U_R} + N_{D_R}) - 3N_{J_{1R}} - 6N_{J_R} - 3N_{u'_R} - 6N_{D'_R} = 0 \quad (5.69)$$

$$9N_{q_{1L}} + 18N_{q_L} - 9(N_{U_R} + N_{D_R}) - 3N_{J_{1R}} - 6N_{J_R} - 3N_{u'_R} - 6N_{D'_R} = 0, \quad (5.70)$$

todavia, considerando os vínculos clássicos as equações acima fornecem apenas uma equação independente

$$3N_{q_L} + N_\rho = 0,$$

de forma que a partir desta e, reconsiderando as Eqs.(5.55) a (5.62), fixamos todas as hipercargas em termos da hipercarga do multipletto  $\rho$  de campos escalares

$$N_{U_R} = \frac{2}{3}N_\rho \quad (5.71)$$

$$N_{D_R} = -\frac{1}{3}N_\rho \quad (5.72)$$

$$N_{J_R} = -\frac{4}{3}N_\rho \quad (5.73)$$

$$N_{J_{1R}} = \frac{5}{3}N_\rho \quad (5.74)$$

$$N_{q_{1L}} = \frac{2}{3}N_\rho \quad (5.75)$$

$$N_{q_L} = -\frac{1}{3}N_\rho \quad (5.76)$$

$$N_{u'_R} = \frac{2}{3}N_\rho \quad (5.77)$$

$$N_{D'_R} = -\frac{1}{3}N_\rho \quad (5.78)$$

## 5.4 Quantização da Carga Elétrica no Modelo 3-4-1

De posse das hipercargas escritas em termos da hipercarga do campo  $\rho$  obteremos, então, as correspondentes cargas elétricas dos férmions pertencentes ao modelo e, para tanto, reconsideremos a expressão para o operador de carga elétrica, Eq.(5.14), e a Eq.(5.44) a fim de escrevermos

$$\frac{Q}{|e|} = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\lambda_{15}) + \frac{N}{N_\rho}. \quad (5.79)$$

Assim, com base na equação acima e nas Eqs.(5.71) a (5.78) temos

$$Q_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} = 0 \quad (5.80)$$

$$Q_{e, \mu, \tau} = -|e| \quad (5.81)$$

$$Q_U = \frac{2}{3}|e| \quad (5.82)$$

$$Q_D = -\frac{1}{3}|e| \quad (5.83)$$

$$Q_{J_1} = \frac{5}{3}|e| \quad (5.84)$$

$$Q_{J_2} = Q_{J_3} = Q_J = -\frac{4}{3}|e| \quad (5.85)$$

$$Q_{u'} = \frac{2}{3}|e| \quad (5.86)$$

$$Q_{D'} = -\frac{1}{3}|e|. \quad (5.87)$$

Portanto, a quantização da carga elétrica nas extensões leptoquark-bilepton 3-3-1 e 3-4-1 do modelo padrão é inevitável e independe da natureza do neutrino [50] e do fato destes serem massivos ou não.

# Conclusão

Uma teoria quântica de campos das interações das partículas elementares, em que acoplamentos com correntes axiais estão presentes, é uma teoria que em princípio sofre de anomalias. Uma teoria que sofre de anomalias é uma teoria não-renormalizável, devendo, então, serem as anomalias excluídas da teoria. Todavia, para modelos com simetria de gauge não-abeliana, a anomalia pode ser cancelada ao escolhermos uma estrutura de representação adequada para os campos de matéria. Assim, mostramos que para modelos com estrutura de gauge semisimples, que a quantização da carga elétrica é realizada a partir de vínculos impostos sobre a liberdade da teoria das anomalias de Adler-Bell-Jackiw juntamente combinado com o fato dos férmions do modelo serem massivos. Entretanto, mostramos que a quantização da carga elétrica não ocorre no modelo padrão com 3 gerações de férmions, pois, o modelo padrão com três gerações abriga uma simetria global oculta que é gerada pela conservação individual dos números leptônicos e bariônico, conforme discutimos na Seção 3.4, e que interpretaremos de uma forma mais conveniente. Como os números leptônicos são conservados individualmente a matriz de massa correspondente ao setor leptônico é diagonal, ou seja, perdemos informação entre as diferentes gerações ou famílias de léptons e, assim, não temos equações suficientes para fixar as hipercargas de todos os férmions que compõem o modelo, resultando, então, o fenômeno da desquantização da carga no modelo padrão com três gerações. Contudo, argumentamos que a quantização da carga no modelo padrão com três gerações é restabelecida se admitirmos que a simetria gerada pela conservação individual dos números leptônicos e bariônico seja explicitamente quebrada, que pode ser realizado ao introduzirmos, no modelo padrão com três gerações, neutrinos massivos de Majorana. Todavia, ao contrário do modelo padrão, foi possível mostrar que as extensões, os modelos leptoquark-bilepton, 3-3-1 e 3-4-1, abrigam naturalmente a quantização da carga elétrica em suas respectivas estruturas, independente da natureza do neutrino e do fato deste ser massivo ou não [50]. Além do mais, constatamos

que estes modelos apresentam uma solução simples e natural para o problema da replicação das famílias [48].

### **Trabalhos Futuros**

- Elaboração de uma versão supersimétrica do modelo 3-4-1
- Construção de uma GUT com a hierarquia de quebra de simetria  
 $GUT \rightarrow 3-4-1 \rightarrow 3-3-1 \rightarrow 3-2-1 \rightarrow 3-1$
- Construção de uma versão dual para os modelos 3-3-1 e 3-4-1.
- Examinar o setor de Higgs para o modelo 3-4-1

# Apêndice A

## Diagrama triângulo - A Identidade de Ward Axial

Mostraremos que as contribuições das integrais à Eq.(2.18) que dependem de apenas um quadri-momento externo  $k_1$  ou  $k_2$  se anulam. Então, com este fim consideremos apenas os integrandos correspondentes as duas primeiras integrais na Eq.(2.17)

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \gamma_5 \right) \\ & \text{Tr} \left( \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

que podemos reescrever respectivamente como

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left( \frac{(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{(\not{p} + \not{k}_1 - m)(\not{p} + \not{k}_1 + m)} \gamma_\alpha \frac{(\not{p} + m)}{(\not{p} - m)(\not{p} + m)} \gamma_\beta \gamma_5 \right) \\ & \text{Tr} \left( \gamma_\alpha \frac{(\not{p} + m)}{(\not{p} - m)(\not{p} + m)} \gamma_\beta \frac{(\not{p} - \not{k}_2 + m)}{(\not{p} - \not{k}_2 - m)(\not{p} - \not{k}_2 + m)} \gamma_5 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

todavia,

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)(\not{p} + m) &= p^2 - m^2 \\ (\not{p} + \not{k}_1 - m)(\not{p} + \not{k}_1 + m) &= ([p + k_1]^2 - m^2) \\ (\not{p} - \not{k}_2 - m)(\not{p} - \not{k}_2 + m) &= ([p - k_2]^2 - m^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

de modo que ganhamos as expressões

$$\frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k}_1 + m)\gamma_\alpha(\not{p} + m)\gamma_\beta\gamma_5]}{([p + k_1]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\text{Tr}[\gamma_\alpha(\not{p} + m)\gamma_\beta(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_5]}{([p - k_2]^2 - m^2)(p^2 - m^2)}. \quad (\text{A.5})$$

Invocando as propriedades de traço das matrizes de Dirac [27]

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\delta\gamma_5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_5) &= -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

escrevemos respectivamente as Eqs.(A.4) e (A.5) como

$$\begin{aligned} & -\frac{4ip^\mu k_1^\lambda \epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}}{([p + k_1]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \\ & +\frac{4ip^\mu k_2^\lambda \epsilon_{\alpha\mu\beta\lambda}}{([p - k_2]^2 - m^2)(p^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De forma semelhante, os dois primeiros integrandos correspondentes a contribuição  $(k_1 + k_2)^\mu S_{\beta\alpha\mu}$  fornecem

$$\begin{aligned} & -\frac{4ip^\mu k_2^\lambda \epsilon_{\mu\lambda\beta\alpha}}{([p + k_2]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \\ & +\frac{4ip^\mu k_1^\lambda \epsilon_{\beta\mu\alpha\lambda}}{([p - k_1]^2 - m^2)(p^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Então, usando a propriedade cíclica de  $\epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}$  e considerando a mudança de variável  $p \rightarrow p' - k_1$ , na integral que envolve  $p + k_1$ , e  $p \rightarrow p' - k_2$ , na integral que envolve  $p + k_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) &= \frac{(4k_1^\lambda k_1^\mu)}{(2\pi)^4} \epsilon_{\beta\nu\alpha\lambda} \int \frac{d^4p}{([p - k_1]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \\ &+ \frac{(4k_2^\lambda k_2^\mu)}{(2\pi)^4} \epsilon_{\lambda\beta\nu\alpha} \int \frac{d^4p}{([p - k_2]^2 - m^2)(p^2 - m^2)} + 2mI(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

que é precisamente a Eq.(2.19). Todavia,  $k_1^\mu k_1^\lambda = g^{\mu\lambda} k_1^\mu k_{1\mu}$  e  $k_2^\mu k_2^\lambda = g^{\mu\lambda} k_2^\mu k_{2\mu}$ , e sendo o tensor métrico diagonal, de acordo com a Eq.(C.9), temos que os integrandos correspondentes as duas primeiras integrais acima acabam se anulando fornecendo, portanto, o resultado

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu} = 2mI(\alpha, \beta). \quad (\text{A.10})$$

## Apêndice B

# Diagrama triângulo - A Identidade de Ward Vetorial

Verificamos que a corrente vetorial é classicamente conservada. Todavia, mostramos no capítulo 2 que a versão quântica desta não o é. Portanto, neste apêndice justificaremos este resultado resolvendo as integrais, Eq.(2.26), que isoladamente são linearmente divergentes, porém, a soma destas é convergente como mostraremos a seguir. Então, com esta finalidade consideremos a expansão em série de Taylor da Eq.(2.28)

$$\begin{aligned}
 k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ F_{\beta\mu}(p) + k_1^\lambda \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\lambda} + \frac{1}{2} k_1^\lambda k_1^\delta \frac{\partial}{\partial p^\lambda} \left( \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\delta} \right) + \dots \right] \\
 &- i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ F_{\beta\mu}(p) + k_2^\lambda \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\lambda} + \frac{1}{2} k_2^\lambda k_2^\delta \frac{\partial}{\partial p^\lambda} \left( \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\delta} \right) + \dots \right]. \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

de modo que contraindo esta última expressão com  $a^\beta b^\mu$  e passando para o espaço dos momentos euclidiano, usando  $ip_E^4 = p^0$  e  $i \not{p}_E = i\gamma_E^\mu p_{E\mu}$  [32], obtemos

$$\begin{aligned}
 a_E^\beta b_E^\mu k_{1E}^\alpha t_{\alpha\beta\mu E} &= \int a_E^\beta b_E^\mu \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[ k_{1E}^\lambda \frac{\partial F_{\beta\mu}(p_E)}{\partial p_E^\lambda} + \frac{1}{2} k_{1E}^\lambda k_{1E}^\delta \frac{\partial}{\partial p_E^\lambda} \left( \frac{\partial F_{\beta\mu}(p_E)}{\partial p_E^\delta} \right) + \dots \right] \\
 &- \int a_E^\beta b_E^\mu \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[ k_{2E}^\lambda \frac{\partial F_{\beta\mu}(p_E)}{\partial p_E^\lambda} + \frac{1}{2} k_{2E}^\lambda k_{2E}^\delta \frac{\partial}{\partial p_E^\lambda} \left( \frac{\partial F_{\beta\mu}(p_E)}{\partial p_E^\delta} \right) + \dots \right] \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

de forma que aplicando o teorema da divergência a expressão acima, omitindo as integrais de superfície nulas, temos

$$a_E^\beta b_E^\mu k_{1E}^\alpha t_{\alpha\beta\mu E} = \frac{a_E^\beta b_E^\mu}{(2\pi)^4} (k_1 - k_2)_E^\lambda \lim_{p_E \rightarrow \infty} \int_S dS_{E\lambda} F_{\beta\mu}(p_E). \quad (\text{B.3})$$

Todavia, antes de tomarmos o limite indicado na Eq.(B.3) reescrevemos a expressão para  $F_{\beta\mu}(p_E)$ , seguindo o mesmo procedimento que usamos para chegar na Eq.(A.7), da seguinte forma

$$F_{\beta\mu}(p_E) = \frac{4i(k_1 + k_2)_E^\nu p_E^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}}{p_E^4 \left(1 - \frac{m^2}{p_E^2}\right) \left(\left[1 - \frac{(k_1+k_2)_E}{p_E}\right]^2 - \frac{m^2}{p_E^2}\right)}, \quad (\text{B.4})$$

então, considerando a equação acima, e sendo o elemento de área escrito neste espaço euclidiano 4-dimensional como  $dS_{E\lambda} = \frac{p_{E\lambda}}{p_E} dS_E = \frac{p_{E\lambda}}{p_E} p_E^3 d\Omega$ , finalmente escrevemos a Eq.(B.3) na forma

$$a_E^\beta b_E^\mu k_{1E}^\alpha t_{\alpha\beta\mu E} = \frac{4i a_E^\beta b_E^\mu}{(2\pi)^4} (k_1 - k_2)_E^\lambda (k_1 + k_2)_E^\nu \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} \lim_{p_E \rightarrow \infty} \int_S d\Omega \times \frac{p_E^\alpha p_{E\lambda} p_E^3}{p_E^5 \left(1 - \frac{m^2}{p_E^2}\right) \left(\left[1 - \frac{(k_1+k_2)_E}{p_E}\right]^2 - \frac{m^2}{p_E^2}\right)} \quad (\text{B.5})$$

Portanto, tomando o limite na equação acima e integrando sob todo o ângulo sólido,  $d\Omega$ , obtemos a Eq.(2.29)

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = -\frac{i}{8\pi^2} (k_1 - k_2)^\alpha (k_1 + k_2)^\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{B.6})$$

que corresponde a identidade de Ward anômala

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu} = -\frac{i}{4\pi^2} k_1^\alpha k_2^\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{B.7})$$

## Apêndice C

# Álgebras de Lie, Matrizes de Dirac, Geradores de Grupo

Neste apêndice apresentamos algumas propriedades fundamentais que os geradores de grupos especiais unitários de dimensionalidade  $N$ ,  $SU(N)$ , satisfazem e também listaremos a forma explícita dos geradores dos grupos  $SU(3)$ ,  $SU(4)$ , as matrizes  $\gamma$  de Dirac e as suas respectivas propriedades.

### Álgebra de Lie

$$[\lambda^a, \lambda^b] = i f^{abc} \lambda^c \quad (\text{C.1})$$

onde  $f^{abc}$  são constantes de estrutura totalmente anti-simétricas associadas ao grupo considerado.

### Normalização

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{C.2})$$

### Relação de Anti-Comutação

$$\{\lambda^a, \lambda^b\} = \frac{4}{N} \delta^{ab} 1_{N \times N} + 2 d^{abc} \lambda^c \quad (\text{C.3})$$

onde  $d^{abc} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\{\lambda^a, \lambda^b\} \lambda^c)$ .

### Geradores de SU(3)

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

### Geradores de SU(4)

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A133**, 60 (1931).
- [2] J. C. Pati e A. Salam, Phys.Rev. D **10**, 275 (1974).
- [3] M. Kaku, *Quantum Field Theory* (Oxford University Press, 1993).
- [4] R. Foot, H. Lew e R. R. Volkas, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **19**, 361 (1993).
- [5] Eugene Golowich e Palash B. Pal, Phys. Rev. D **41**, 3537 (1990).
- [6] R. Foot , Mod. Phys. Lett. A **6**, 527 (1991).
- [7] C. A. de S. Pires , Phys. Rev. D **60**, 75013 (1999).
- [8] A. Abbas, Phys. Lett. B **238**, 344 (1990).
- [9] A. Abbas, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **16**, 163 (1990).
- [10] Joseph Hucks, Phys. Rev. D **43**, 2709 (1991).
- [11] R. Foot, Mod. Phys. Lett. A **5**, 1947 (1990).
- [12] C. Q. Geng, Phys. Rev. D **41**, 1292 (1990).
- [13] Serge Rudaz, Phys. Rev. D **41**, 2619 (1990).
- [14] M. Nowakowski e A. Pilaftsis, Phys. Rev. D **48**, 259 (1993).
- [15] R. Foot, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1467 (1991).
- [16] J. Sladkowski e M. Zralek, Phys. Rev. D **45**, 1701 (1992).
- [17] K. S. Babu e R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D **41**, 271 (1990).
- [18] K. S. Babu e R. N. Mohapatra, Phys. Rev. Lett. **63**, 938 (1989).

- [19] David J. Gross e R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **6**, 477 (1972).
- [20] C. A. de S. Pires e O. P. Ravinez, *Phys. Rev. D* **58**, 35008 (1998).
- [21] A. Doff e F. Pisano, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 1133 (1999).
- [22] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics* (2ª Edição, Addison-Wesley, 1980).
- [23] A. Zadra, *Anomalias, Investigações Perturbativas e Topológicas* (Monografia de Qualificação para Doutorado, IFT - 1989).
- [24] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1980).
- [25] W. K. Clifford, *Am. J. Math.* **1**, 350 (1878).
- [26] Chris Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions* (Addison-Wesley, 1980).
- [27] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, 1999).
- [28] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).
- [29] George Stermann, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Cambridge, 1980)
- [30] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [31] S. L. Adler e W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969).
- [32] K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields* (World Scientific, 1982).
- [33] W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **184**, 1848 (1969).
- [34] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971);  
C. Bollini e J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B**, 20 (1972).
- [35] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin, 1982).
- [36] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **155A**, 447 (1936).
- [37] John F. Donoghue, Eugene Golowich e Barry R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, 1992).

- [38] R. Delbourgo e A. Salam, *Phys. Lett.* **40**, 381 (1972).
- [39] Tohru Eguchi e Peter G. O. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1251 (1976).
- [40] L. Alvarez-Gaumé e E. Witten, *Nucl. Phys. B* **234**, 269 (1983).
- [41] Z. Maki, M. Nakagawa e S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
- [42] Colaboração Homestake, K. Lande *et al.*, *Astrophys. J.* **496**, 505 (1998);  
 Colaboração GALLEX, W. Hampel *et al.*, *Phys. Lett. B* **447**, 127 (1999);  
 V. Gavrin pela colaboração SAGE, seminário apresentado na XIX Conferência International sobre Física e Astrofísica de Neutrinos (Neutrino 2000), Sudbury, Canada, de 16 a 21 de Junho, 2000, disponível em <http://nu2000.sno.laurentian.ca/V.Gavrin/index.html>;  
 E. Bellotti pela colaboração GNO, seminário apresentado na XIX Conferência International sobre Física e Astrofísica de Neutrinos (Neutrino 2000), Sudbury, Canada, de 16 a 21 de Junho, 2000, disponível em <http://nu2000.sno.laurentian.ca/E.Bellotti/index.html>;  
 Y. Suzuki pela colaboração Super-Kamiokande, seminário apresentado na XIX Conferência International sobre Física e Astrofísica de Neutrinos (Neutrino 2000), Sudbury, Canada, de 16 a 21 de Junho, 2000, disponível em <http://nu2000.sno.laurentian.ca/Y.Suzuki/index.html>.
- [43] Colaboração Kamiokande, H. S. Hirata *et al.*, *Phys. Lett. B* **205**, 416 (1988);  
*ibid.* **280**, 146 (1992);  
 Y. Fukuda *et al.*, *ibid.* **B 335**, 237 (1994);  
 Colaboração IMB, R. Becker-Szendy *et al.*, *Phys. Rev. D* **46**, 3720 (1992);  
 Colaboração Super-Kamiokande, Y. Fukuda *et al.*, *ibid.* **B 433**, 9 (1998); *ibid.*  
**B 436**, 33 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998);  
 T. Mann pela colaboração Soudan-2, seminário apresentado na XIX Conferência International sobre Física e Astrofísica de Neutrinos (Neutrino 2000), Sudbury, Canada, de 16 a 21 de Junho, 2000, disponível em <http://nu2000.sno.laurentian.ca/T.Mann/index.html>;  
 B. Barish pela colaboração MACRO, seminário apresentado na XIX Conferência International sobre Física e Astrofísica de Neutrinos (Neutrino 2000), Sudbury, Canada, de 16 a 21 de Junho, 2000, disponível em <http://nu2000.sno.laurentian.ca/B.Barish/index.html>;  
 H. Sobel pela colaboração Super-Kamiokande, seminário apresentado na XIX

Conferência International sobre Física e Astrofísica de Neutrinos (Neutrino 2000), Sudbury, Canada, de 16 a 21 de Junho, 2000, disponível em <http://nu2000.sno.laurentian.ca/H.Sobel/index.html>.

- [44] B. Kayser, F. Gibrat-Debu e F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos* (World Scientific, 1989).
- [45] E. Witten , Seminário apresentado na XIX Conferência sobre Física e Astrofísica de Neutrinos - Neutrino 2000, Sudbury, Ontario, Canada, 16-21 de Junho de 2000.
- [46] F. Pisano e V. Pleitez, Phys. Rev. D **46**, 410 (1992);  
R. Foot, O. F. Hernandez, F. Pisano e V. Pleitez, *ibid* **47**, 4158 (1993).
- [47] F. Pisano, *Férmions Exóticos, Novas Dinâmicas de Sabor e o Problema das Famílias* (Tese de Doutorado - IFT, 1995).
- [48] A. Doff e F. Pisano, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1471 (2000).
- [49] F. Pisano e V. Pleitez, Phys. Rev. D **51**, 3865 (1995).
- [50] A. Doff e F. Pisano, Phys. Rev. D **63**, 067103 (2001).