

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TÁSIA HICKMANN

ANÁLISE DA VARIAÇÃO TÉRMICA SAZONAL EM BARRAGEM DE  
CONTRAFORTES COM O USO DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

CURITIBA

2016

TÁSIA HICKMANN

ANÁLISE DA VARIAÇÃO TÉRMICA SAZONAL EM BARRAGEM DE  
CONTRAFORTES COM O USO DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Ciências, no curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Profa. Dra. Liliana Madalena Gramani

Coorientador: Prof. Dr. Eloy Kaviski

CURITIBA

2016

Hickmann, Tásia

Análise de variação térmica sazonal em barragem de contrafortes com o uso de cálculo fracionário / Tásia Hickmann. – Curitiba, 2016.  
138 f. : il., tabs.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientadora: Liliana Madalena Gramani

Coorientador: Eloy Kaviski

Bibliografia: p. 113-118

1. Barragens de concreto. 2. Barragens - Temperatura.  
Equação de calor. I. Gramani, Liliana Madalena. II. Kaviski, Eloy.  
III. Título.

CDD 627.8028

## TERMO DE APROVAÇÃO

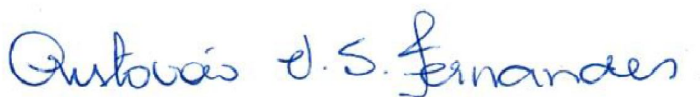
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de TÁSIA HICKMANN, intitulada: "ANÁLISE DA VARIAÇÃO TÉRMICA SAZONAL EM BARRAGEM DE CONTRAFORTES COM O USO DE CÁLCULO FRACIONÁRIO", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 04 de maio de 2016.



Prof ELOY KAVISKI (UFPR)

(Presidente da Banca Examinadora)



Prof CRISTÓVÃO V. SCAPULATEMPO FERNANDES (UFPR)

Por vídeo conferência

Prof ADILANDRI MERCIO LOBEIRO (UTFPR)



Prof EMERSON DILAY (UP)



Prof FABIO ANDRÉ NEGRI BALBO (IFC)

Curitiba, 04 de maio de 2016

*Aos meus pais, Ivete e Eugenio,  
por tanto amor desde sempre.*

## AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento e finalização desta tese não é apenas meu, e sim a soma da solidária contribuição de diversas partes. A estas o meu sincero e profundo Muito Obrigada:

A Deus, Ser Onisciente e Bondoso, que está presente em todas as nobres ações que colaboram para a expansão do limitado conhecimento humano.

Aos meus queridos e estimados orientadores Professora Liliana Madalena Gramani e Professor Eloy Kaviski, pela sabedoria, paciência e generosidade no compartilhamento de suas ideias e conhecimento.

À minha família, em especial minha irmã Janete, meu cunhado Cassol e minha amada sobrinha e afilhada Milena por terem sido sempre meu porto seguro de carinho e amor.

Aos meus colegas da Itaipu Binacional e do CEASB/FPTI Luis Sucapuca, Everton Garcia e Dimilson Coelho que contribuíram sem medir esforços para o alcance dos resultados desejados.

Aos meus colegas de doutorado, pelos bons e felizes momentos compartilhados, em especial aqueles que dividem comigo seus dias de trabalho na UTFPR, Câmpus Medianeira: Cleverson Gonçalves, Jairo Córrea, Levi Lopes e Samuel Bellido.

Aos meus amigos muito especiais: Ricardo Oliveira, Maria Claudia Aguitoni, Daniela Barbieri, Diego Canever, Rafaela Camicia, Mariana Novaes, Ezequiel de Lima e Flávio Feix que sempre fizeram eu me sentir capaz de vencer e alcançar todos os meus objetivos.

Ao PPGMNE-UFPR pela oportunidade da realização do doutorado e aos professores pelos novos aprendizados e experiências.

Ao CEASB-FPTI pelo apoio e espaço concedidos para o pleno desenvolvimento desta tese.

*“O que destrói a humanidade:  
A Política, sem princípios;  
O Prazer, sem compromisso;  
A Riqueza, sem trabalho;  
A Sabedoria, sem caráter;  
Os Negócios, sem moral;  
A Ciência, sem humanidade;  
A Oração, sem caridade”.*

(Mahatma Gandhi)

## RESUMO

Barragens de concreto respondem a diversos tipos de carregamentos, sejam eles provenientes da força da gravidade, pressão hidrostática da água ou variação térmica sazonal. Dentre estes, diversos trabalhos presentes na literatura destacam a importância de se avaliar os efeitos da temperatura no desempenho estrutural de barragens. Altos índices de variação de temperatura podem afetar o desempenho, resistência e durabilidade das estruturas, de modo que a correta avaliação do campo de temperaturas é essencial para que uma futura análise e determinação das tensões de origem térmica possa ser realizada. Através de um estudo de caso na Barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu (UHI), é proposto um esquema numérico via elementos finitos para calibrar e validar os parâmetros térmicos do concreto (condutividade térmica, calor e massa específica) de um bloco de contraforte quando este está sujeito à variação térmica sazonal. Devido ao advento das aplicações do Cálculo Fracionário (que se trata de uma abordagem generalizada do Cálculo Tradicional, onde derivadas e integrais sucessivas podem ser de ordem não inteira) esta tese traz como inovação a modelagem térmica em barragem de contrafortes através de Equações Diferenciais Fracionárias. As soluções de um modelo via Cálculo Tradicional e via Cálculo Fracionário foram analisadas comparativamente aos dados observados por meio do MAPE (Erro Percentual Absoluto Médio). Para o caso da barragem da UHI, com geometria, condições de contorno e propriedades do concreto bem definidas, o modelo térmico fracionário apresentou um resultado mais próximo à realidade do bloco em estudo ao verificar que o maior MAPE nos pontos de prova foi de 3.23%. O objetivo assim é instigar futuras aplicações do Cálculo Fracionário no âmbito de barragens.

**Palavras-chaves:** Modelagem Térmica. ANSYS. Equação do Calor Fracionária. Métodos Aproximados.



## ABSTRACT

Concrete dams respond to various types of loads, whether from the force of gravity, hydrostatic water pressure or seasonal thermal variation. Among these, several studies in the literature highlight the importance of evaluating the effects of temperature on the structural performance of dams. High temperature change rates may affect the performance, strength and durability of the structures, so that the correct evaluation of the temperature field is essential for future analysis and determination of the thermal stress can be performed. Through a case study in Itaipu Hydroelectric Power Plant dam (UHI), a numerical scheme is proposed via finite element to calibrate and validate the thermal parameters of concrete (thermal conductivity, heat and density) of a buttress block when this it is subject to seasonal thermal variation. Due to the advent of applications of Fractional Calculus (which is a generalized approach to the traditional calculation, where derivatives and successive integrals can be no integer order) this thesis brings as innovation thermal modeling in buttresses dam through Fractional Differential Equations. The solutions of a model via traditional calculation and via Fractional Calculus were analyzed in comparison to the observed data through MAPE (Mean Absolute Percent Error). In the case of UHI dam, with geometry, boundary conditions and concrete properties well defined, the fractional thermal model presented closer to reality block in study results to check the biggest MAPE in test points was 3.23%. The purpose is to instigate so future applications of fractional calculus under dams.

**Key-words:** Thermal Modeling. ANSYS. Fractional Heat Equation. Approximate methods.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TIPOS DE BARRAGENS DE ACORDO COM O MATERIAL EMPREGADO. . . . .	17
FIGURA 2 – MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR. . . . .	27
FIGURA 3 – VOLUME DE CONTROLE PARA ANÁLISE DE CONDUÇÃO . . . . .	28
FIGURA 4 – ESQUEMA PARA ANÁLISE NUMÉRICA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. . . . .	33
FIGURA 5 – EXEMPLO DE MALHA EM ELEMENTOS FINITOS EM UMA BARRAGEM HIPOTÉTICA. . . . .	34
FIGURA 6 – DIAGRAMA COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO. . . . .	35
FIGURA 7 – DIAGRAMA COM UM CÁLCULO DE UMA INTEGRAL CURVILÍNEA NA FRONTEIRA DO ELEMENTO TRIANGULAR $\Omega^e$ . . . . .	37
FIGURA 8 – ELEMENTO FINITO LINEAR RETANGULAR. . . . .	39
FIGURA 9 – RELAÇÕES ENTRE CONSISTÊNCIA, ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA. . . . .	41
FIGURA 10 – DIFUSÃO ANÔMALA E NORMAL. . . . .	43
FIGURA 11 – EXEMPLOS DE ACOPLAMENTOS REALIZADOS ATRAVÉS DO ANSYS . . . . .	53
FIGURA 12 – ACOPLAMENTO TERMO-ESTRUTURAL. . . . .	54
FIGURA 13 – ESQUEMA DE ANÁLISE TRANSIENTE NO <i>SOFTWARE</i> ANSYS. . . . .	55
FIGURA 14 – CONDIÇÕES DE CONTORNO. . . . .	56
FIGURA 15 – SEÇÃO DE UMA BARRAGEM DE CONTRAFORTES. . . . .	57
FIGURA 16 – GEOMETRIA PARA MODELO TÉRMICO FRACIONÁRIO. . . . .	60
FIGURA 17 – LOCALIZAÇÃO DO TRECHO E. . . . .	61
FIGURA 18 – MAQUETE TRIDIMENSIONAL DO TRECHO ‘E’ DA UHI. . . . .	62
FIGURA 19 – GEOMETRIA TRIDIMENSIONAL DO BLOCO E-6. . . . .	62
FIGURA 20 – BLOCO E-6 BIDIMENSIONAL. . . . .	63
FIGURA 21 – GRÁFICO DA TEMPERATURA AMBIENTE E DO DESLOCAMENTO DA CRISTA DO BLOCO E-6 MENSURADO PELO PÊN-DULO PD-E-6. . . . .	65
FIGURA 22 – GEOMETRIA DO BLOCO DE CONTRAFORTE. . . . .	66
FIGURA 23 – MALHA EM ELEMENTOS FINITOS EMPREGADA NAS ANÁLISES ESTACIONÁRIA E TRANSIENTE. . . . .	67
FIGURA 24 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O MODELO TÉRMICO NA FASE DE CALIBRAÇÃO. . . . .	69
FIGURA 25 – GRÁFICOS DAS TEMPERATURAS VIA SÉRIES DE FOURIER E VIA MEF DA FASE DE CALIBRAÇÃO . . . . .	71

FIGURA 26 – TEMPERATURA PARA O PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE CALIBRAÇÃO NOS PONTOS DE MONITORAMENTO. . . . .	72
FIGURA 27 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSAIS PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE CALIBRAÇÃO. . . . .	78
FIGURA 28 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O MODELO TÉRMICO NA FASE DE VALIDAÇÃO. . . . .	79
FIGURA 29 – GRÁFICOS DAS TEMPERATURAS VIA SÉRIES DE FOURIER E VIA ELEMENTOS FINITOS DA FASE DE VALIDAÇÃO . . . .	80
FIGURA 30 – TEMPERATURA PARA O PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE VALIDAÇÃO NOS PONTOS DE MONITORAMENTO. . . . .	81
FIGURA 31 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSAIS PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE VALIDAÇÃO. . . . .	87
FIGURA 32 – MALHA PARA APLICAÇÃO DO MDFD . . . . .	93
FIGURA 33 – GRÁFICOS ENTRE AS TEMPERATURAS VIA SÉRIE DE FOURIER, VIA MDFD ( $\gamma = 1.15$ ) E VIA MEF PARA O PERÍODO 2005 A 2014. . . . .	95
FIGURA 34 – GRÁFICOS COMPARATIVOS ENTRE AS TEMPERATURAS VIA MEF E VIA MDFD PARA O ‘ANO MÉDIO’ DO PERÍODO DE 2005 A 2014. . . . .	97
FIGURA 35 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSAIS PARA O ‘ANO MÉDIO’ 2005-2014 VIA MEF. . . . .	104
FIGURA 36 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSAIS PARA O ‘ANO MÉDIO’ 2005-2014 VIA MDFD. . . . .	110

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – DADOS SOBRE AS COTAS, PERÍODO E NÚMERO DE OBSERVAÇÕES DOS TERMÔMETROS . . . . .	67
TABELA 2 – DADOS DOS TERMÔMETROS NO PERÍODO DE OBSERVAÇÃO (1985 A 2014) . . . . .	68
TABELA 3 – NÚMERO DE HARMÔNICOS E O RESPECTIVO MAPE PARA O AJUSTE DOS DADOS DE 1985 A 2004 . . . . .	69
TABELA 4 – NÚMERO DE HARMÔNICOS E O RESPECTIVO MAPE PARA O AJUSTE DOS DADOS DE 2005 A 2014. . . . .	79
TABELA 5 – MÁXIMAS E MÍNIMAS DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO . . . . .	88
TABELA 6 – DADOS REAIS E APROXIMADOS DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO . . . . .	88
TABELA 7 – DADOS REAIS E APROXIMADOS DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE VALIDAÇÃO . . . . .	89
TABELA 8 – DADOS APROXIMADOS NOS PONTOS MONITORADOS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO . . . . .	89
TABELA 9 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA $t = 0.25$ . . . . .	90
TABELA 10 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA $t = 0.5$ . . . . .	91
TABELA 11 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA $t = 0.75$ . . . . .	91
TABELA 12 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA $t = 1.0$ . . . . .	92
TABELA 13 – MAPE's ENTRE SÉRIES DE FOURIER, MODELOS FRACIONÁRIO E TRADICIONAL . . . . .	94
TABELA 14 – DADOS APROXIMADOS PELO MEF E MDFP NOS PONTOS DOS TERMÔMETROS INTERNOS . . . . .	96
TABELA 15 – DADOS APROXIMADOS PELO MEF E MDFP NOS PONTOS MONITORADOS . . . . .	98
TABELA 16 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS SUPERFICIAIS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO . . . . .	136
TABELA 17 – CONTINUAÇÃO DA TABELA ANTERIOR . . . . .	137
TABELA 18 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO . . . . .	138

TABELA 19 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS SUPERFICIAIS PARA A FASE DE VALIDAÇÃO . . . . .	138
TABELA 20 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE VALIDAÇÃO . . . . .	139

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CCR	Concreto Compactado a Rolo
CEASB	Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens
CF	Cálculo Fracionário
EDF	Equação Diferencial Fracionária
EDP	Equação Diferencial Parcial
EDPF	Equação Diferencial Parcial Fracionária
FPTI	Fundação Parque Tecnológico Itaipu
MAPE	<i>Mean Absolute Percentage Error</i> (Erro Percentual Absoluto Médio)
MDF	Método das Diferenças Finitas
MDFF	Método das Diferenças Finitas Fracionárias
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVF	Método dos Volumes Finitos
UHI	Usina Hidrelétrica de Itaipu

## LISTA DE SÍMBOLOS

$q_x, q_y$ e $q_z$	Taxas de condução de calor $x, y$ e $z$ , respectivamente
$\dot{q}$	Taxa de energia gerada
$c$	Calor específico
$\rho$	Massa específica
$k_x, k_y$ e $k_z$	Condutividades térmicas em $x, y$ e $z$ , respectivamente
$h$	Coefficiente convectivo
$T_s$	Temperatura da superfície
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann
$\varepsilon$	Emissividade
$N_i^e$	Função base no nó $i$ e elemento $e$
$T_j^e$	Temperatura no nó $j$ e elemento $e$
$\Gamma$	Função gama generalizada
${}_{RL}D_{a,t}^\alpha$	Derivada de Riemann-Liouville de ordem $\alpha$
${}_CD_{a,t}^\alpha$	Derivada de Caputo de ordem $\alpha$
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\alpha$	Difusividade térmica

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	20
1.2	OBJETIVOS DA TESE . . . . .	23
1.3	JUSTIFICATIVA . . . . .	24
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	25
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> . . . . .	<b>26</b>
2.1	TRANSFERÊNCIA DE CALOR . . . . .	26
2.1.1	Condução . . . . .	27
2.1.2	Convecção . . . . .	30
2.1.3	Radiação . . . . .	30
2.2	MÉTODOS APROXIMADOS EM TRANSFERÊNCIA DE CALOR . . . . .	31
2.2.1	Método dos Elementos Finitos . . . . .	32
2.2.2	Estabilidade e Convergência do Método dos Elementos Finitos . . . . .	41
2.3	CÁLCULO FRACIONÁRIO . . . . .	42
2.3.1	Diferenciação e Integração Fracionária . . . . .	43
2.3.2	Equações Diferenciais Fracionárias . . . . .	47
2.3.3	Métodos Aproximados . . . . .	49
2.3.3.1	Método das Diferenças Finitas Fracionárias . . . . .	49
<b>3</b>	<b>MÉTODOS</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	ANÁLISE TÉRMICA NO <i>SOFTWARE</i> ANSYS . . . . .	53
3.1.1	Método dos Elementos Finitos . . . . .	55
3.1.2	Condições Iniciais e de Contorno . . . . .	55
3.2	ESQUEMA NUMÉRICO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .	57
3.3	ESQUEMA NUMÉRICO VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO . . . . .	59
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1	DESCRIÇÃO DA BARRAGEM . . . . .	61
4.2	SOLUÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .	64
4.3	SOLUÇÃO VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO . . . . .	90
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b> . . . . .	<b>111</b>
5.1	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	112
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>114</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>120</b>
	<b>APÊNDICE A – FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO</b> . . . . .	<b>121</b>



APÊNDICE B – PROGRAMA EM PASCAL DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS FRAZIONÁ- RIAS . . . . .	123
APÊNDICE C – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOU- RIER . . . . .	136

## 1 INTRODUÇÃO

Barragens são estruturas hidráulicas construídas no curso de um rio para criar um reservatório para o uso de água com diversas finalidades, como: irrigação, abastecimento de água, controle de enchentes, navegação, pesca ou produção de energia hidrelétrica. Para esta última finalidade, as barragens podem ser classificadas em dois grandes grupos de acordo com o material utilizado na sua construção: barragens de concreto, que podem ser do tipo gravidade, arco e contrafortes, e barragens convencionais de terra ou enrocamento.

A FIGURA 1 apresenta os tipos de barragens mencionadas.

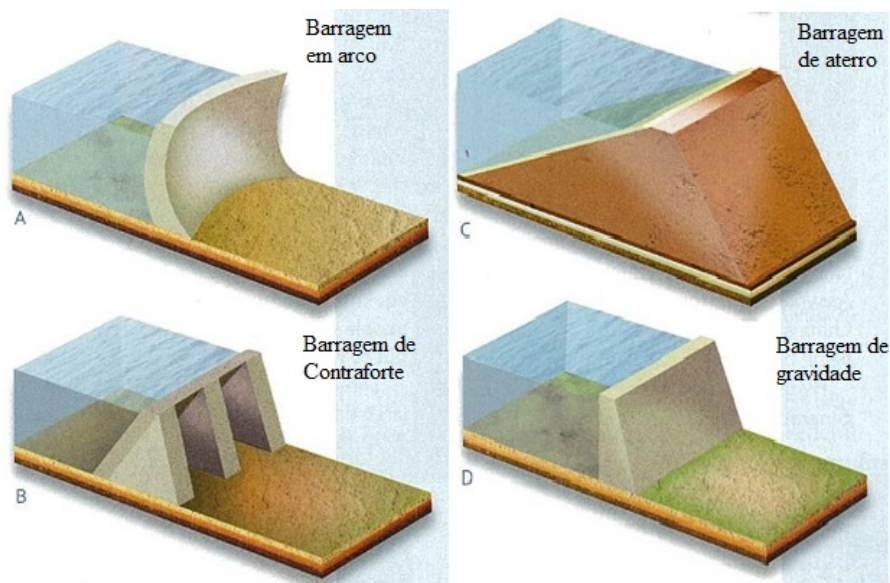


FIGURA 1 – TIPOS DE BARRAGENS DE ACORDO COM O MATERIAL EMPREGADO.

FONTE: Adaptado de <<http://www.australiangeographic.com.au/topics/science-environment/2011/01/to-dam-or-not-to-dam>>. Acesso em: 01 fev. 2016.

De acordo com SA (2003), a segurança das barragens constitui uma preocupação permanente para o governo e a sociedade, tanto por sua importância econômica como pelo risco potencial que representa a possibilidade de ruptura ou outro acidente grave, em termos de vidas humanas, impacto ao meio ambiente, prejuízos materiais e os reflexos econômico-financeiros.

Conforme Silva (2003) e Maken, Léger e Roth (2013), as barragens estão sujeitas à mudanças na sua temperatura interna em função de mudanças de temperatura externa e do calor de hidratação, que é uma fonte de calor proveniente de reações químicas do concreto durante a fase de construção da barragem, mas que se dissipa após certo tempo. As cargas térmicas externas a uma superfície são oriundas da radiação solar e das variações de temperatura do ar, fundação e reservatório e tais cargas podem causar deformações e alterações volumétricas significativas na estrutura, o que frequentemente faz exceder a resistência à tração do concreto levando ao desenvolvimento de fissuras.

A avaliação de problemas relacionados à transferência de calor entre materiais e o ambiente tem sido abordados com frequência, devido ao surgimento de tensões de origem térmica na estrutura, que podem comprometer requisitos de desempenho, segurança e durabilidade da estrutura. Assim, a correta avaliação do campo de temperaturas em uma barragem é essencial para a determinação de tais tensões e deformações.

Em geral, no âmbito de projeto de barragens, os estudos térmicos consistem nas análises das temperaturas e das subsequentes tensões e deformações devido a alguns fatores, descritos em Coelho (2012) e Petronilho (2011):

- A contração térmica do concreto que ocorre durante o período de resfriamento como resultado da dissipação do calor gerado pela sua hidratação. Nesta fase o concreto ganha rapidamente tanto resistência como rigidez, gerando tensões internas que, se ultrapassarem sua resistência à tração, levam à fissuração. A retração térmica também ocorre em virtude das condições climáticas durante a execução da obra, temperatura de lançamento, quantidade e tipo de materiais empregados, geometria da estrutura, propriedades do concreto endurecido, propriedades térmicas e elásticas da fundação, tipo de cura, altura das camadas de lançamento e seus intervalos de execução e dimensionamento de juntas de contração;
- Os efeitos da condução, radiação e convecção e a diferença entre as temperaturas máxima e mínima que o concreto está sujeito devido a fatores ambientais.

Segundo Rosso, Fiorini e Porto (1997) as barragens de contrafortes são fortemente influenciadas pelas oscilações de temperatura. Os deslocamentos horizontais e verticais da crista dos blocos das barragens de concreto são induzidos pelas variações térmicas ambientais, observando-se comportamento diferenciado entre os paramentos de montante e de jusante, sendo esta última que experimenta variações térmicas mais significativas devido principalmente à sazonalidade. Assim, faz-se necessário o estudo dos gradientes térmicos entre verão e inverno e sua relação entre as variações de deslocamento da crista da barragem.

A determinação dos campos de temperatura em uma barragem de concreto está ligada a processos de transferência de calor a que esta está sujeita e ao examinar algumas referências que tratam do tema Transferência de Calor, como Ozisik (1993), Shukla (2005) e Incropera, Dewitt et al. (2011), verifica-se que as equações que descrevem a transferência de calor podem apresentar as seguintes características: são não lineares; algébricas, diferenciais parciais e/ou integrais; constituem um sistema acoplado; as propriedades dos materiais envolvidos são geralmente em função da temperatura; e a região de solução normalmente tem uma geometria complexa. Todas essas características fazem com que os métodos analíticos se tornem muito limitados, e as soluções exatas constantemente são indisponíveis, de modo que os métodos numéricos são os recursos mais empregados à

resolução de problemas de real interesse. Exemplos são o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Além das características citadas acima ao analisar um modelo matemático, é habitual que as equações diferenciais e/ou integrais são de ordem inteira, ou seja, que empreguem o conceito de derivada e integral como no abordado em disciplinas clássicas de Cálculo. No entanto, é possível modelar problemas físicos em termos de equações diferenciais e/ou integrais de ordem arbitrária, real ou complexa. Esse desenvolvimento remete ao trabalho de L'Hôpital, que em 1695 foi o primeiro a questionar Leibniz sobre a possível interpretação do que viria a ser  $d^n y/dx^n$  quando  $n = \frac{1}{2}$ . A partir de então e até meados do século passado, diversos matemáticos e estudiosos trouxeram importantes contribuições para o desenvolvimento do chamado Cálculo Fracionário (CF), cuja designação é mantida por razões históricas, e ao qual está subentendido a ideia de tratar-se de derivadas e integrais de ordem arbitrária (CARPINTERI; MAINARDI, 1997).

Até poucas décadas atrás o Cálculo Fracionário era considerado uma teoria matemática sem grande utilidade. A partir da década de 1970 este ponto de vista começou a mudar devido à expansão das atividades de pesquisa e atualmente aplicações do Cálculo Fracionário são apontadas em diversos campos científicos, como em sistemas de controle de finanças e economia; processamento de sinais e imagens; modelagem térmica de sistemas em engenharia, além de relações constitutivas nas áreas de mecânica, elétrica e química; fenômenos de difusão e advecção, entre outras áreas (MACHADO; KIRYAKOVA; MAINARDI, 2011).

Na literatura é possível encontrar uma série de livros que abordam o tema, envolvendo teoria e aplicações, em especial na mecânica e física, alguns deles são: Samko, Kilbas e Marichev (1993), Miller e Ross (1993), Carpinteri e Mainardi (1997), Hilfer (2000), Sabatier, Agrawal e Machado (2007), Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), Abbas, Benchohra e N'Guerekata (2012) e Atanackovic et al. (2014). O livro, Latawiec, Łukaniszyn e Stanisławski (2014), publicado em 2014 após a *6th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications*, realizado na Polônia, reúne diversos trabalhos e é considerado um pequeno passo à frente no desenvolvimento da teoria e aplicações do CF.

Algumas pesquisas como Caputo e Mainardi (1971), Sabatier, Agrawal e Machado (2007) mostraram que a derivada de ordem arbitrária oferece uma descrição mais refinada de alguns fenômenos naturais que aquela feita a partir do Cálculo de ordem inteira, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma boa descrição para efeitos de memória e processos de difusão anômala.

As definições de derivada e integral fracionárias foram idealizadas e formalizadas por vários matemáticos, sendo que as mais usuais foram propostas por Riemann, Liouville, Grunwald, Letnikov, Caputo, Weyl e Riesz (CAMARGO, 2009). Para problemas modelados por equações diferenciais fracionárias, a definição de derivada fracionária dada por Caputo é considerada a mais conveniente, tanto em aplicações gerais como para esta

tese, uma vez que as condições iniciais e de contorno podem ser exibidas na sua forma tradicional, como no caso de equações diferenciais de ordem inteira. Os modelos matemáticos descritos através de equações fracionárias tem apresentado grande evolução e consigo métodos de resolução são estudados, tanto de caráter analítico quanto numérico. Em diversos casos tais métodos de solução tratam-se de generalizações dos métodos numéricos conhecidos e aplicados a modelos matemáticos tradicionais.

A modelagem matemática é uma técnica entre muitas que traz importante contribuição para um projeto estrutural. Esta tese, como será visto mais adiante, busca instigar e ampliar a aplicabilidade de modelos matemáticos de ordem fracionária no estudo da transferência de calor em barragens de concreto, em particular de contrafortes. Pode-se dizer que, atualmente, a modelagem matemática combinada com a Tecnologia da Informação provêm suporte às atividades de *design* e otimização, de uma forma notável, facilitando as atividades e melhorando os resultados. No que diz respeito ao método dos elementos finitos, existem diversos *softwares* CAE (*Computer Aided Engineering* ou Engenharia Auxiliada por Computador) para o método dos elementos finitos no mercado, entre eles, o ANSYS<sup>®</sup>, Abaqus<sup>®</sup>, Nastran<sup>®</sup>, Adina<sup>®</sup>, Mecway<sup>®</sup>, HyperMesh<sup>®</sup> e Cosmos<sup>®</sup>.

Nesta tese, para o desenvolvimento do método que analisará o efeito térmico sazonal em barragens de concreto do tipo contrafortes, foi utilizado o ANSYS. Este *software* é capaz de realizar análises estáticas e dinâmicas, transferência de calor, fluxo de fluidos e eletromagnetismo e seu uso abrange diversos campos da engenharia, incluindo aeroespacial, automotivo, eletrônica e nuclear (MOAVENI, 2008). Por meio dele é possível realizar análises de modelos desde os mais simples aos mais complexos, com extrema flexibilidade e com a vantagem de ser um *software* utilizado pela comunidade científica e pela indústria (COELHO, 2012).

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No que concerne ao estudo de efeitos térmicos sazonais em barragem de concreto, realizou-se uma extensa pesquisa bibliográfica e os trabalhos considerados mais significativos são apresentados nos parágrafos que seguem.

Os autores Léger, Venturelli e Bhattachar devolvem dois trabalhos, um complementar ao outro, Leger, Venturelli e Bhattacharjee (1993a) e Leger, Venturelli e Bhattacharjee (1993b), onde relataram o comportamento estrutural de barragens de gravidade quando sujeitas à distribuição de tensão e temperatura sazonais. A parte 1 descreveu um método para calcular deformações induzidas termicamente em barragens de concreto utilizando elementos finitos. A parte 2 trouxe uma resposta térmica de um sistema fundação-barragem-reservatório típico utilizando a metodologia descrita na parte 1. Adicionalmente realizou-se uma análise paramétrica para avaliar a influência das diferentes hipóteses na modelagem e identificar os parâmetros mais importantes que afetam a resposta estrutural do sistema, como o tamanho e as propriedades térmicas e mecânicas da barragem, reserva-

tório e fundação e a distribuição do calor através da radiação solar. Os autores chegaram à conclusão de que a distribuição de temperatura diária do ambiente afeta expressivamente as tensões térmicas de tração superficiais.

O trabalho Sheibany e Ghaemian (2006) dedicou-se à análise tridimensional para determinar as tensões térmicas em uma barragem de concreto a arco empregando um modelo em elementos finitos, que foi desenvolvido para determinar a variação anual da temperatura e do estresse térmico no corpo da barragem Karaj no Irã. As temperaturas previstas pelo modelo foram satisfatoriamente comparadas com os registros da instrumentação e os resultados da análise numérica mostraram que prováveis fissuras ocorrem numa região muito próxima a face da jusante e sugerem que as cargas térmicas são as ações mais significativas para causar fissuras quando comparadas com o próprio peso da barragem e as cargas hidrostáticas.

Ainda Léger e outros pesquisadores se incumbiram em continuar o estudo relativo ao comportamento térmico sazonal de barragens. No trabalho Leger e Seydou (2009) avaliou-se os deslocamentos térmicos sazonais de barragens de gravidade de concreto a partir de um modelo determinístico em elementos finitos e um modelo estatístico HST (*Hydrostatic Seasonal Time*). Um modelo híbrido, calibrado a partir de dados de deslocamento de pêndulos, foi utilizado para extrapolar a resposta de deslocamento para eventos térmicos extremos ainda não experimentados pela barragem.

Em 2013 foi publicado o trabalho Maken, Léger e Roth (2013), onde se estudou o comportamento estrutural em barragens localizadas ao Norte do Canadá, uma vez que as mesmas podem estar sujeitas a variações de temperatura que chegam a  $75^{\circ}\text{C}$  entre o inverno e o verão. Os autores concluíram que as propriedades físicas do material dependentes da temperatura não afetam significativamente a resposta estrutural quanto ao deslocamento da barragem e as fissuras na face à jusante podem ser bem representadas através de modelos numéricos por elementos finitos via ANSYS.

Anders Ansell, Richard Malm e outros pesquisadores desenvolveram trabalhos sobre propagação de fissuras em barragem de contrafortes, como pode ser visto em Ansell et al. (2010), Malm e Ansell (2011) e Malm et al. (2013). Um modelo em elementos finitos baseado na mecânica da fratura não-linear, teoria da plasticidade e mecânica do dano foi estudado para examinar o desenvolvimento de fissura em uma barragem de contrafortes levando-se em conta variações sazonais de temperatura. Os resultados mostraram que a variação térmica sazonal causa altas tensões à tração em diferentes pontos na barragem e as tensões térmicas, em combinação com a pressão hidrostática da água, mostraram ser a razão para o fissuramento.

Em acréscimo aos trabalhos acima, outros presentes na literatura abordam metodologias para a descrição do campo de temperatura em barragens de concreto através do método dos elementos finitos, como se vê em Daoud, Galanis e Ballivy (1997), Noorzaei et al. (2006) e Mirzabozorg et al. (2014), Žvanut, Turk e Kryžanowski (2015) e Jafari

(2016).

A aplicabilidade do *software* ANSYS em problemas térmicos em barragem de concreto foi investigada a fim de fundamentar a escolha deste *software* na realização de algumas simulações numéricas nesta tese.

Em Malkawi, Mutasher e Qiu (2003) a distribuição de temperatura real no corpo de uma barragem a gravidade de Concreto Compactado a Rolo (CCR), medida por termopares, foi comparada com a simulada através de ANSYS, e em geral, houve boa concordância entre os dados e valores numericamente preditos. Além disso, o *software* determinou a tensão por meio de uma análise termo-estrutural como resultado da variação da temperatura através do tempo.

Também foi simulado numericamente, por meio do ANSYS, os campos de temperaturas transientes durante o processo de construção de uma barragem a gravidade de CCR situada na China. Os campos de tensões térmicas e de tensões desenvolvidas através acoplamento reservatório-temperatura foram simuladas. Os resultados obtidos por meio de simulações via ANSYS apresentaram boa concordância com os resultados experimentais. (CHAO et al., 2010)

No trabalho Maken, Léger e Roth (2013) um dos objetivos foi investigar a capacidade do ANSYS em prever o desenvolvimento da fissura na face à jusante da barragem a arco Daniel Johnson, localizada em Quebec no Canadá, para uma condição de carga térmica severa. Uma análise termomecânica não-linear através do método dos elementos finitos foi concebida quando a barragem está sujeita à variações térmicas sazonais.

Na literatura existem vários livros dedicados ao estudo de problemas em engenharia com o auxílio deste *software*, como por exemplo: Nakasone, Yoshimoto e Stolarski (2006), Moaveni (2008), Bitterncourt (2010) e Madenci e Guven (2015).

Nos trabalhos mencionados acima e outros mais presentes na literatura constatou-se a eficácia do método dos elementos finitos na resolução de modelos térmicos em barragem de concreto, sendo que grande parte deles tem como *software* de apoio o ANSYS.

Quanto ao tema modelagem térmica através de Equações Diferenciais Fracionárias, os trabalhos que merecem destaque dentro do escopo desta tese também serão brevemente discutidos na continuidade.

Povstenko dedicou-se extensivamente ao estudo de soluções para a equação da difusão fracionária e problemas de tensão associada ao calor. Alguns dos seus trabalhos são: Povstenko (2004), Povstenko (2007), Povstenko (2008), Povstenko (2009a), Povstenko (2009b), Povstenko (2010), Povstenko (2011b), Povstenko (2012) e Luchko, Mainardi e Povstenko (2013), Özdemir et al. (2014).

Os métodos aproximados para solução de equações diferenciais fracionárias apresentam formulações semelhantes quando comparados aos métodos para as equações clássicas, pois na maioria dos casos são apenas uma generalização dos métodos tradicionais. Os métodos numéricos mais empregados para equações fracionárias são: método das di-

ferenças finitas, método dos elementos finitos, método dos elementos espectrais e método da iteração variacional.

Em Atallah (2011), o método dos elementos finitos na sua forma variacional foi aplicado à equação da difusão unidimensional fracionária no tempo. As discretizações espacial e temporal foram aplicadas a alguns exemplos evidenciando que os resultados numéricos são consistentes com os resultados teóricos.

No trabalho Cao e Wang (2014) uma formulação semi-discreta baseada no método dos elementos finitos foi aplicado para a equação da difusão fracionária no espaço. Experimentos numéricos verificaram boa conformidade com as previsões teóricas. Em Li e Zeng (2012) o método das diferenças finitas para equações diferenciais fracionárias foi abordado, especialmente para solução da equação da difusão ou dispersão fracionárias no tempo, espaço e tempo-espaço.

Devido às amplas aplicações do CF, a busca por algoritmos numéricos com alta precisão, convergência rápida e baixo armazenamento está se tornando cada vez mais importante. Duas importantes referências sintetizam os principais métodos numéricos para Equações Diferenciais Fracionárias (EDF) com análises de convergência e estabilidade, que são: Guo, Pu e Huang (2015) e Li e Zeng (2015).

Constatou-se durante as pesquisas sobre este tema que existe uma lacuna no que se refere a modelagem em barragem de concreto e o uso dos dados observados de termômetros como meio de validação dos modelos térmicos fracionários. Por outro lado, nota-se um maior desenvolvimento dos métodos numéricos de solução de tais modelos, especialmente o MDF.

Diante do cenário em que se encontra a pesquisa sobre modelagem térmica em barragem de concreto, em particular contrafortes, em termos do cálculo tradicional e fracionário, definiu-se os objetivos desta tese e estes são destacados na seção que segue.

## 1.2 OBJETIVOS DA TESE

O objetivo geral desta tese consiste em: Avaliar a aplicabilidade de um modelo térmico fracionário para descrever o campo de temperatura em um bloco de concreto do tipo contraforte da barragem da UHI sob efeito da variação térmica sazonal.

Para o alcance deste objetivo, alguns passos são fundamentais, e estes são:

- Desenvolver um método numérico-computacional para calibração e validação dos parâmetros térmicos do concreto (condutividade, calor e massa específicos) de um bloco de contraforte da barragem da UHI, quando este está sob efeito sazonal da temperatura, utilizando o ANSYS como ferramenta operacional para processamento do método dos elementos finitos;
- Propor um modelo matemático simplificado do problema da difusão de calor fracionária para uma geometria simplificada de um bloco de contraforte da UHI;



- Produzir um método computacional para solucionar o modelo de difusão fracionária;
- Comparar os resultados obtidos para este modelo via ANSYS e via CF através dos dados observados em um bloco de contraforte da UHI;
- Analisar comparativamente as soluções da equação do calor via ANSYS 2D e da equação do calor de ordem fracionária 2D a partir de dados coletados rotineiramente dos termômetros de um bloco de contraforte em estudo.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Os objetivos mencionados acima consistem, de forma geral, em analisar os efeitos térmicos sazonais em barragem de contrafortes através de uma modelagem numérica e computacional explorando um novo método de análise térmica, baseado na formulação e resolução numérica de equações diferenciais parciais fracionárias (EDPF).

Um primeiro ponto relevante concentra-se no fato de ser um estudo em barragem de contrafortes, pouco abordado na literatura. Grande parte das pesquisas são enfatizadas em barragens de gravidade aliviada e a arco. Outro aspecto fundamental é a análise térmica sob os efeitos da sazonalidade, que são as variações térmicas entre inverno e verão. Uma aplicação deste estudo foi realizada em um bloco de contraforte da barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu a fim de avaliar a propagação de calor no bloco quando este está sujeito à temperaturas nas suas faces. O modelo numérico-computacional desenvolvido é inédito devido à alguns fatores, como: ajuste dos dados de temperatura dos termômetros superficiais e internos à estrutura por meio de Séries de Fourier, modelagem térmica por meio do CF, geometria do bloco em análise e características do concreto.

A calibração e validação dos coeficientes térmicos do concreto do bloco em análise constituiu em um passo primordial para o alcance do objetivo principal desta tese. Uma das etapas deste processo consistiu na solução do modelo térmico na sua forma tradicional por intermédio do método dos elementos finitos com auxílio do *software* ANSYS, que foi escolhido perante sua plena e eficaz aplicabilidade vista na literatura, além de que historicamente tal método foi amplamente empregado em problemas estruturais com geometrias complexas e malhas não estruturadas (MALISKA, 2014).

Uma ênfase notável foi concedida à modelagem térmica em barragem de concreto por meio do Cálculo Fracionário, bem como um método numérico de solução. Trata-se de uma teoria que muito evoluiu em termos de aplicações em diversos ramos da ciência nas últimas décadas. Diante da ascensão deste ramo da Matemática e percebendo, por meio da revisão bibliográfica, a ausência de estudos aplicados em barragem de concreto é que optou-se por abordar uma modelagem térmica na forma de equações fracionárias, novidade desta tese.

A solução do modelo térmico fracionário de um bloco de contraforte foi realizado através de um método das diferenças finitas fracionárias implícito, por alguns motivos

peculiares: trata-se de um método incondicionalmente estável e convergente e cuja implementação é relativamente simples para domínios regulares, situação abordada no estudo de caso desta tese.

#### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A tese está estruturada da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta conceitos sobre transferência de calor com suas equações constitutivas, levando-se em conta três modos básicos de transferência: condução, convecção e radiação, além do método dos elementos finitos. Definições de derivada e integral fracionária são também apresentadas neste capítulo, assim como EDPF e métodos aproximados de solução.

O Capítulo 3 descreve os métodos numérico-computacionais a serem aplicados ao problema da modelagem térmica de um bloco de contraforte, sendo o primeiro para a calibração e validação dos parâmetros térmicos do concreto quando o bloco está sob efeito da variação térmica sazonal e com auxílio do *software* ANSYS para o processamento numérico do método dos elementos finitos. O outro método refere-se às etapas de solução de um modelo térmico fracionário por diferenças finitas para um geometria bidimensional simplificada de um bloco e a estratégia de avaliação do modelo fracionário em problemas reais.

O capítulo 4 aborda os resultados dos métodos propostos no Capítulo 3 quando estes são aplicados a um estudo de caso na barragem de contrafortes da UHI. Inicialmente descreve-se de forma sucinta a barragem da UHI e o trecho 'E' em análise. Para o esquema em elementos finitos apresentam-se a geometria do bloco tridimensional concebida a mais próxima da realidade e a localização dos termômetros, juntamente com o ajuste dos dados de temperaturas observados através de séries de Fourier que serviram de condições de contorno para o modelo. Resultados gráficos e numéricos das simulações através do ANSYS para as fases de calibração e validação são apresentados. Por fim, para o método em diferenças finitas fracionárias, os resultados do método numérico-computacional proposto no capítulo anterior exibem um comparativo entre as soluções numéricas via ANSYS e via CF certificando a real utilidade da modelagem de ordem fracionária.

O Capítulo 5 que apresenta as conclusões e recomendações e sugestões de trabalhos futuros seguido das Referências.

Os Apêndices ficaram divididos como: o Apêndice A resume algumas funções básicas do Cálculo Fracionário, o Apêndice B o algoritmo desenvolvido e implementado em Pascal para o método das diferenças finitas fracionário implícito aplicado ao estudo de caso da Barragem de Itaipu e o Apêndice C apresenta os coeficientes das séries de Fourier das temperaturas dos termômetros instalados no bloco de contraforte em análise.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo caracteriza os fundamentos teóricos necessários para uma boa compreensão e desenvolvimento desta tese. Leis da transferência de calor, elementos do cálculo fracionário e métodos aproximados de solução de equações diferenciais tradicionais e de ordem fracionária são sua essência.

Ao se dedicar ao estudo de fenômenos físicos, basicamente duas etapas são vitais. Na primeira, todas as variáveis que afetam os fenômenos são identificadas e a relação entre essas variáveis é tratada. As leis e princípios físicos relevantes são apontados e o problema é formulado matematicamente. As descrições da maioria dos problemas científicos envolvem o conceito de taxa de variação, assim as equações diferenciais proporcionam formulações matemáticas precisas e adequadas. Diversas áreas, como mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, eletrostática, propagação de ondas e difusão do calor são modelados por meio de equações diferenciais. Na segunda etapa o problema é resolvido utilizando uma abordagem apropriada e os resultados são interpretados.

A modelagem térmica em barragem de concreto é a essência desta tese, portanto é conveniente apresentar numa primeira instância os modos de transferência de calor entre um corpo e o meio que o circunda.

### 2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

A natureza do calor é algo conhecido desde os primórdios da humanidade, no entanto, apenas em meados do século XIX se compreendeu o aspecto físico relacionado ao calor graças ao desenvolvimento da teoria cinética e assim defini-lo como a energia associada ao movimento aleatório dos átomos e moléculas. Alguns nomes que muito contribuíram para a evolução deste ramo da física-matemática: Antoine Lavoisier (1743 – 1794), Count Rumford (1753 – 1814), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), James P. Joule (1818 – 1889), Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822 – 1888), James Clark Maxwell (1831 – 1879) e Ludwig Eduard Boltzmann (1844 – 1906).

De acordo com a teoria cinética a temperatura está associada à energia cinética das moléculas no interior de um material, incluindo o movimento vibracional, rotacional e translacional, o calor é a energia transferida entre dois pontos a diferentes temperaturas. É dito que dois corpos estão em equilíbrio térmico entre si se não há transferência de calor entre eles. Resumidamente, o calor é a forma de energia que pode ser transferida de um sistema para outro como um resultado da diferença de temperatura e a área que lida com a determinação das taxas de tais transferências de energia é chamada de Transferência de Calor. (CENGEL; PÉREZ, 2004).

Esta seção tem o objetivo de apresentar as equações diferenciais referentes ao pro-

cesso de transferência de calor em um meio homogêneo. O calor é transferido por três modos básicos, a condução, a convecção e a radiação, conforme ilustra a FIGURA 2. Nos dois primeiros modos, um meio é necessário para transferir o calor a partir de um ponto para o outro, ao passo que o terceiro modo é transmitido através de ondas eletromagnéticas. Na realidade, a distribuição de temperatura é um efeito combinado desses três modos de transferência de calor sendo difícil isolar totalmente um modo de transferência dos outros dois restantes. No entanto, um deles pode ser dominante em relação aos outros para determinação dos fenômenos e, por simplicidade, pode-se considerar este modo para a análise negligenciando a influência dos outros dois. (SHUKLA, 2005)

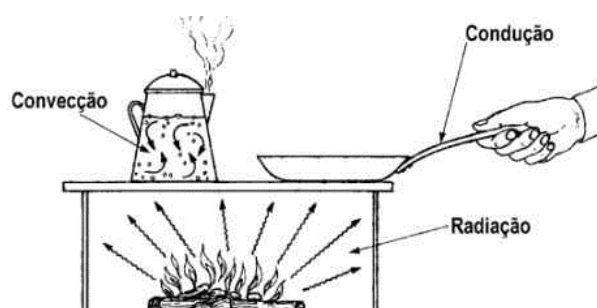


FIGURA 2 – MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.

FONTE: <https://fenomenosdetransporte2unisol.wordpress.com/2013/03/10/mecanismos-de-transferencia-de-calor-1a-aula-fenomenos-de-transporte-ii>. Acesso em: 02 mar. 2015.

Na sequência são percorridas as formulações matemáticas para os modos de transferência de calor: condução, convecção e radiação.

### 2.1.1 Condução

A condução é o modo de transferência de calor na qual a troca de energia ocorre em sólidos, líquidos ou gases em repouso, ou seja, sem movimento de convecção resultante do deslocamento da porção macroscópica do meio, a partir de regiões de alta temperatura para regiões de baixa temperatura devido à presença de um gradiente de temperatura no corpo (OZISIK, 1993).

Um dos principais objetivos da análise de transferência de calor por condução é determinar o campo de temperatura num meio, resultante das condições impostas nas suas fronteiras. Uma vez que esta distribuição é conhecida, o fluxo de calor por condução em qualquer ponto no meio ou sobre a sua superfície pode ser calculado a partir da Lei de Fourier conforme as Equações (2.7). Para um sólido, o conhecimento da distribuição da temperatura por condução pode ser utilizado para verificar a integridade estrutural por meio da determinação de tensões térmicas, expansão, contração e deslocamentos.

Considere um volume de controle infinitesimal  $dx dy dz$ , como mostra a FIGURA 3.

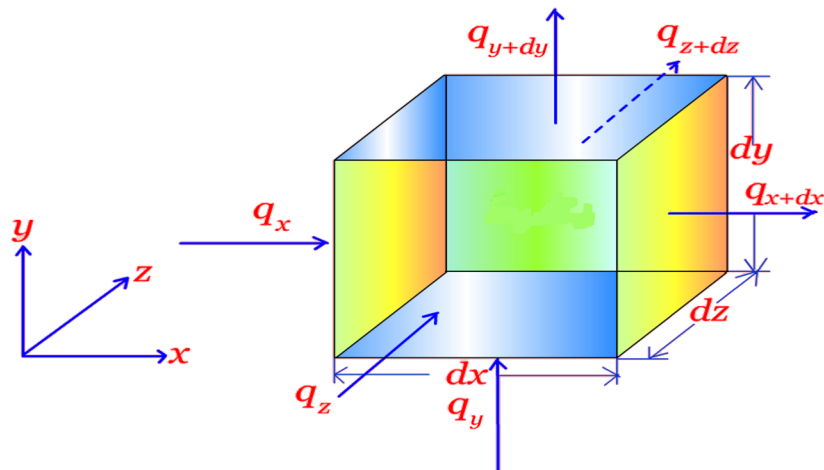


FIGURA 3 – VOLUME DE CONTROLE PARA ANÁLISE DE CONDUÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS.

FONTE: O Autor (2016).

De acordo com a 1ª lei da termodinâmica que declara que: O aumento na quantidade de energia acumulada em um volume de controle deve ser igual à quantidade de energia que entra no volume de controle menos a quantidade de energia que deixa o volume de controle (INCROPERA; DEWITT et al., 2011), e levando em conta que há gradientes de temperatura, a transferência de calor por condução ocorrerá através de cada uma das superfícies de controle. As taxas de condução de calor perpendiculares a cada uma das superfícies de controle em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , são indicadas, respectivamente, pelos termos,  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ . As taxas de condução de calor nas superfícies opostas podem ser expressas como uma expansão em série de Taylor, negligenciando termos de ordem superior:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx, \quad (2.1a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy, \quad (2.1b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz. \quad (2.1c)$$

Dentro do meio pode existir uma fonte de energia associada com a taxa de geração de energia térmica,  $\dot{E}_g$ . Este termo é representado como:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz, \quad (2.2)$$

onde  $\dot{q}$  é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio ( $W/m^3$ ). Além disso, podem ocorrer variações na quantidade de energia interna armazenada pelo

material. Se o material não está passando por uma mudança de fase, os efeitos da energia latente não são pertinentes e a energia acumulada,  $\dot{E}_{st}$ , pode ser expressa como:

$$\dot{E}_{st} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \quad (2.3)$$

onde  $c$  é o calor específico ( $J/(kgK)$ ),  $\rho$  a massa específica ( $kg/m^3$ ) e  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$  representa a taxa de variação da energia térmica (sensível) do meio por unidade de volume.

A equação de balanço da transferência de calor será:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (W), \quad (2.4)$$

onde  $\dot{E}_{in} = q_x + q_y + q_z$  é a energia de entrada e  $\dot{E}_{out} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$  é a energia de saída, de modo a se obter:

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz. \quad (2.5)$$

Substituindo as Equações de (2.1) em (2.5), segue:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz. \quad (2.6)$$

As taxas de condução de calor podem ser avaliadas pela Lei de Fourier:

$$q_x = -k_x dy dz \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.7a)$$

$$q_y = -k_y dx dz \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.7b)$$

$$q_z = -k_z dx dy \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.7c)$$

onde  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  são as condutividades térmicas ( $W/(mK)$ ) com relação às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e então considera-se nesse caso que o material é anisotrópico, ou seja, suas propriedades podem mudar conforme a direção. Observa-se que em uma análise térmica por condução a condutividade térmica é uma importante propriedade do material, que controla a taxa de transferência de calor no meio. Substituindo cada Equação de (2.7) em (2.6) e dividindo pelo volume de controle  $dx dy dz$ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) é a forma geral, em coordenadas cartesianas, da equação da condução de calor, geralmente conhecida como a equação da difusão de calor, pois não

se tem o termo advectivo. Resumidamente, a Equação (2.8) estabelece que em qualquer ponto do meio, a taxa de transferência de energia por condução para uma unidade de volume acrescido da taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação de energia térmica armazenada no interior do volume.

### 2.1.2 Convecção

A convecção consiste na transferência de calor na qual a energia térmica se propaga através do transporte de matéria. Este processo ocorre por meio de fluidos (líquidos ou gases), pois na convecção térmica há transporte de matéria. Segundo Cengel e Pérez (2004), a transferência de calor por convecção depende de algumas propriedades do fluido, como a viscosidade dinâmica  $\mu$ , a condutividade térmica  $k$ , a densidade  $\rho$ , o calor específico  $c$ , além da velocidade do fluido  $V$ , o que torna suas relações mais complexas do que no caso da condução. Em diversas situações a taxa de transferência de calor por convecção é observada ser proporcional à diferença de temperatura e é expressa pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$\dot{q}_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad (W/m^2) \quad (2.9)$$

ou

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (W), \quad (2.10)$$

onde  $h$  é o coeficiente da transferência de calor por convecção ( $W/(m^2K)$ ) (o qual depende das propriedades do fluido, tipo de escoamento e geometria da superfície),  $A_s$  é a área da superfície pela qual o calor está sendo transferido e  $T_s$  sua temperatura e  $T_\infty$  a temperatura do fluido suficientemente longe da superfície. A Lei de resfriamento de Newton afirma que a taxa de perda de calor de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e suas imediações.

### 2.1.3 Radiação

É a transferência de calor em forma de ondas eletromagnéticas e não necessita de um meio de propagação, podendo ocorrer através do vácuo. A energia radiante que um corpo emite é definida pela Lei de Stefan-Boltzmann (Josef Stefan (1835 – 1893) e Ludwig Boltzmann (1844 – 1906)):

$$\dot{q}_{rad} = \sigma \varepsilon T_s^4 \quad (W/m^2), \quad (2.11)$$

onde  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$  é a constante de Stefan-Boltzmann,  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) a emissividade da superfície emissora e  $T_s$  a temperatura absoluta da superfície.

Como se observa na Equação (2.11), a energia emitida é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta. Um corpo ideal (negro) emite a radiação máxima possível já que a sua emissividade é unitária. Porém, em problemas ou sistemas reais, tem-se preocupação com a radiação entre dois sistemas com temperaturas  $T_1 > T_2$ . A superfície em  $T_2$  emitirá alguma radiação, mas receberá mais radiação a partir de  $T_1$ , conseqüentemente aumentará sua temperatura. Assim, para o cálculo da velocidade de perda ou ganho de energia o que interessa é conhecer o resultado global da troca de energia radiante entre superfícies.

Para os dois sistemas recentemente mencionados a energia na forma de radiação trocada entre uma superfície de um corpo à temperatura  $T_1$  e outra superfície vizinha à temperatura  $T_2$  separadas por um fluido não absorvente será:

$$\dot{q}_{rad} = \sigma \varepsilon (T_1^4 - T_2^4) \quad (W/m^2). \quad (2.12)$$

## 2.2 MÉTODOS APROXIMADOS EM TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Na representação de fenômenos físicos normalmente se estabelece um sistema de equações diferenciais válidas em certa região, o domínio de definição, onde se impõem condições iniciais e de contorno. Até esse estágio o modelo matemático está basicamente completo e, para aplicações práticas, necessita de uma solução.

A solução exata é resultado de um método de solução analítica determinada por meio de métodos algébricos e diferenciais aplicados a geometrias e condições particulares. Entretanto, a aplicação de métodos analíticos torna-se impraticável ou até mesmo impossível dependendo das condições e propriedades impostas ao modelo. Uma abordagem para superar tal dificuldade consiste na utilização de métodos numéricos, obtendo-se, assim, soluções aproximadas para o modelo. A ideia básica dos métodos numéricos é discretizar o problema contínuo de modo que o conjunto infinito de números que representam relações, parâmetros e funções desconhecidas é substituído por um conjunto finito de incógnitas desconhecidas que são determinadas a partir da resolução de um sistema algébrico de equações.

Dentre os métodos numéricos para resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP) têm-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo que este último é explorado nesta tese, uma vez que o modelo numérico-computacional para calibração e validação dos coeficientes térmicos do concreto do bloco de contraforte é desenvolvido com auxílio do *software* ANSYS. Para discussões sobre os dois primeiros métodos recomenda-se as seguintes referências: Smith (1985), Ferziger e Perić (2002), Versteeg e Malalasekera (2007), LeVeque (2007) e Chapra e Canale (2011).



### 2.2.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica numérica para obtenção de solução numérica de equações na forma diferencial ou integral, que geralmente permite aos utilizadores obter a evolução no espaço e/ou tempo das variáveis que representam o comportamento de um sistema físico. Quanto à análise estrutural, o método dos elementos finitos é um relevante método para calcular deslocamentos, tensões e deformações quando a estrutura está sujeita a diversos carregamentos. Sua origem concentrou-se na análise estrutural, com grande desenvolvimento de métodos matriciais com o surgimento dos primeiros computadores digitais.

Em problemas da Mecânica do Contínuo as funções como deslocamentos, tensões, pressões e temperatura estão associadas a cada ponto da região de solução. Visto que o meio contínuo é constituído por um número infinito de pontos, a quantidade de incógnitas é infinito. O processo de discretização por elementos finitos reduz a dimensão do problema a uma quantidade finita de incógnitas através da divisão do domínio de solução em elementos e expressando as variáveis em termos de funções de aproximação em cada elemento. As funções de aproximação, também conhecidas como funções de interpolação, são definidas em pontos específicos chamados nós ou pontos nodais. Os nós fazem a interligação entre os elementos, embora alguns elementos possam ter nós adicionais em seu interior (KRÜGER, 2001).

De acordo com Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), a solução aproximada para um problema do contínuo através do método dos elementos finitos consiste nos seguintes passos:

1. Discretização do contínuo: dividir a região de solução em subdomínios ou elementos não sobrepostos;
2. Seleção das funções base ou de interpolação: tais funções determinam a variação da variável incógnita em estudo;
3. Formulação das equações dos nós: levam-se em consideração as propriedades individuais de cada elemento;
4. Montagem da matriz global para resolução simultânea das equações dos elementos;
5. Aplicação das condições iniciais e de contorno e os carregamentos;
6. Resolução do sistema global para determinação dos resultados nodais, tais deslocamentos e temperatura em diferentes nós;
7. Cálculo de quantidades secundárias: a partir dos valores nodais da variável de campo. Se for temperatura, por exemplo, pode-se calcular também fluxos de calor.

O fluxograma apresentado através da FIGURA 4 apresenta resumidamente os passos a serem executados numa análise numérica através do método dos elementos finitos. Após ter o modelo físico representado matematicamente, as variáveis incógnitas da equação e o domínio são discretizados, a fim de se aproximar a solução do modelo para um número finito de pontos do domínio.

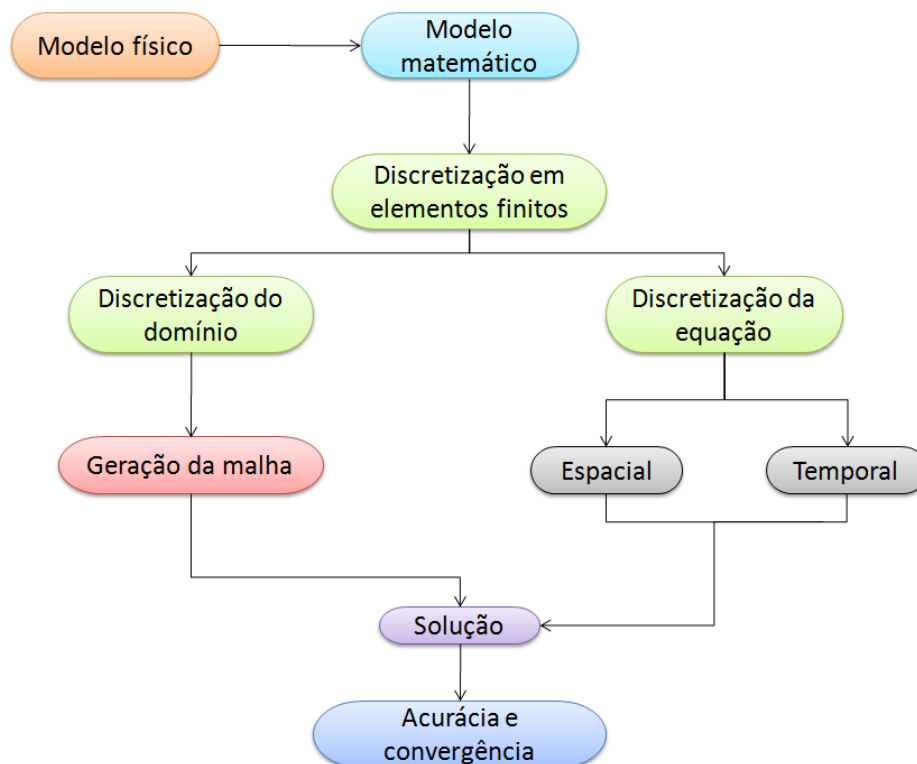


FIGURA 4 – ESQUEMA PARA ANÁLISE NUMÉRICA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

FONTE: Adaptado de Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004).

Resumidamente o método dos elementos finitos apresentado no esquema da FIGURA 4 consiste em reescrever a equação em termos dos pontos nodais

Em termos gerais, um analista numérico está interessado em determinar a distribuição de variáveis em determinada região, como o deslocamento em análise de tensão, a temperatura ou fluxo de calor em análise térmica e a carga elétrica em análise elétrica, e assim por diante. Tais distribuições podem ser obtidas por meio do método dos elementos finitos próximas satisfatoriamente da realidade quando as etapas descritas acima forem executadas de forma adequada às necessidades de modelagem e resolução.

Elementos finitos individuais podem ser entendidos como pequenas partes de uma estrutura. O termo ‘finito’ distingue essas partes dos elementos infinitesimais usados em Cálculo. Existem várias abordagens para formular problemas em elementos finitos, tais como: Método Direto, Mínima Energia Potencial, Resíduos Ponderados e Métodos Variacionais (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005); (MOAVENI, 2008).

O primeiro passo que consiste na discretização do meio em elementos, construção da malha, podem ser triângulos ou quadriláteros para o caso bidimensional, prismas e pirâmides no caso tridimensional. A quantidade de nós será de acordo com o tipo de elemento escolhido para a malha e a função base.

A especificação e geração da malha em elementos finitos é uma etapa importante do método dos elementos finitos, uma vez que a acurácia da solução e o custo computacional está diretamente associado ao projeto da malha. A FIGURA 5 traz um exemplo de malha:

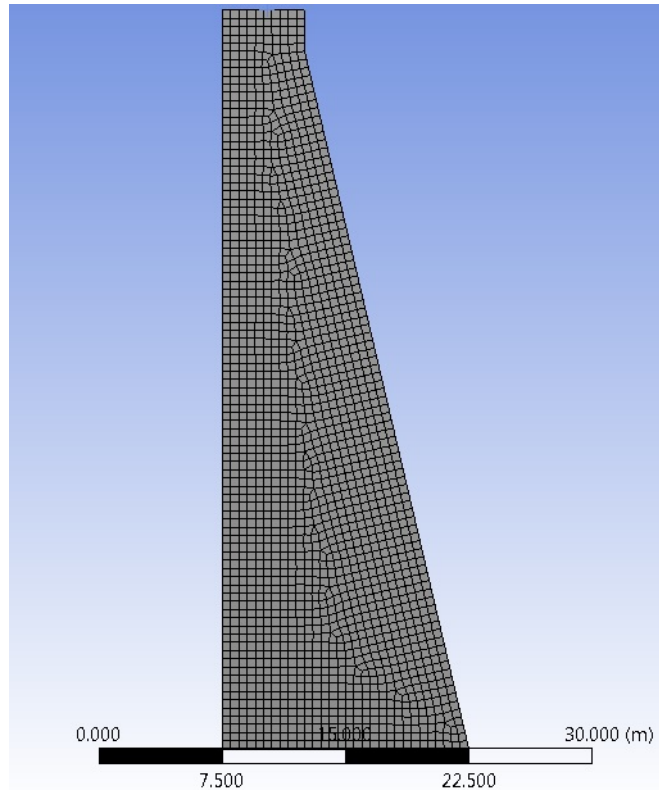


FIGURA 5 – EXEMPLO DE MALHA EM ELEMENTOS FINITOS EM UMA BARRAGEM HIPOTÉTICA.

FONTE: O Autor (2016).

Diretamente relacionado à quantidade de nós dos elementos, está a determinação das funções base que irão descrever a variação da variável em estudo em cada elemento por meio da interpolação dos valores nodais. As funções polinomiais são as mais empregadas, pois além de serem fáceis de derivar e integrar, a acurácia da solução em alguns casos pode ser obtida aumentando-se o grau do polinômio.

Uma expressão que descreve como as temperaturas são interpoladas em um elemento finito é dada pela seguinte expressão, em coordenadas locais do elemento  $(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$T(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta, \zeta) T_i(t), \quad (2.13)$$

onde  $N$  é a quantidade de nós,  $N_i$ 's são as funções base e  $T_i$  as temperaturas nos nós  $i$ 's.

Existem dois grupos de métodos usados para obter a integração das formulações em elementos finitos, que são os variacionais e os resíduos ponderados. A título de exemplo, o método por resíduos ponderados de Galerkin será aplicado à equação da difusão de calor bidimensional utilizando como funções de interpolação polinômios lineares em elementos quadrangulares.

Considere a hipotética superfície apresentada na FIGURA 6, na qual deseja-se obter a distribuição de temperatura, dada pela Equação (2.14), e sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

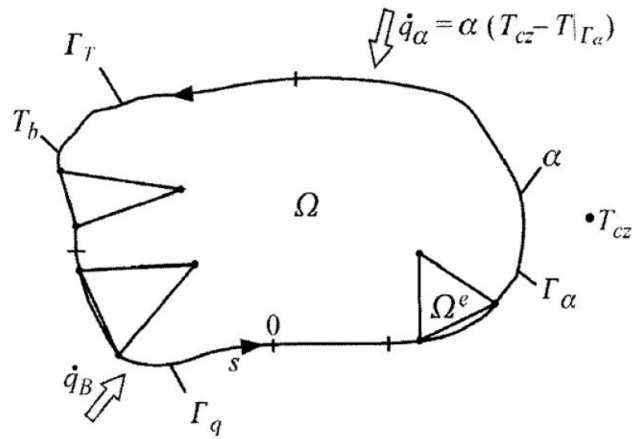


FIGURA 6 – DIAGRAMA COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO.

FONTE: (TALER; DUDA, 2010).

$$T|_{\Gamma_T} = T_b, \quad (2.15)$$

$$\left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \Big|_{\Gamma_q} = \dot{q}_B, \quad (2.16)$$

$$\left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \Big|_{\Gamma_\alpha} = \alpha (T_{cz} - T|_{\Gamma_\alpha}), \quad (2.17)$$

onde:

$k_x$ ,  $k_y$  - condutividades térmicas do material nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$T_b$  - temperatura no contorno do corpo  $\Gamma_T$ ;

$\dot{q}_B$  - fluxo de calor no contorno do corpo  $\Gamma_q$ ;

$\alpha$  - coeficiente de transferência de calor no contorno do corpo  $\Gamma_\alpha$ ;

$T_{cz}$  - temperatura do meio.

O problema de valor de contorno foi apresentado para toda a região  $\Omega$  ilustrada na FIGURA 6. No entanto, o método dos elementos finitos é primeiro formulado para um

único elemento  $\Omega^e$  da malha discretizada. A distribuição de temperatura dentro de um elemento  $\Omega^e$  é aproximado pela função:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \rho c \frac{\partial T^e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) - \dot{q} \right] N_i^e(x, y) dx dy = 0, \quad (2.18)$$

resultante da integração da Equação (2.14) em  $\Omega^e$ .

O Teorema de Green apresentado na Equação (2.19) é utilizado para reescrever (2.18), a forma integral da equação da difusão de calor:

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^e} (F dx + G dy), \quad (2.19)$$

onde  $\Gamma^e$  é a fronteira de  $\Omega^e$ . Tomando que:

$$F = -k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} N_i^e, \quad G = k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} N_i^e, \quad (2.20)$$

a partir da Equação (2.19) escreve-se:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} N_i^e \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} N_i^e \right) \right] dx dy = \oint_{\Gamma^e} N_i^e \left( k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} dx + k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} dy \right). \quad (2.21)$$

Esta última equação pode ainda ser escrita por integração por partes como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) \right] N_i^e dx dy = \\ & - \int_{\Omega^e} \left( k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma^e} N_i^e \left( -k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} dx + k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} dy \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Substituindo a Equação (2.22) na Equação (2.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \rho c N_i^e \frac{\partial T^e}{\partial t} dx dy + \int_{\Omega^e} \left( k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy = \\ & \int_{\Omega^e} N_i^e \dot{q} dx dy + \oint_{\Gamma^e} N_i^e \left( -k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} dx + k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} dy \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ao considerar as relações trigonométricas e algébricas ilustradas na FIGURA 7 tem-se:

$$\begin{cases} -dx = ds \cdot \text{sen } \varphi = n_y ds \\ dy = ds \cdot \text{cos } \varphi = n_x ds \end{cases}, \quad (2.24)$$

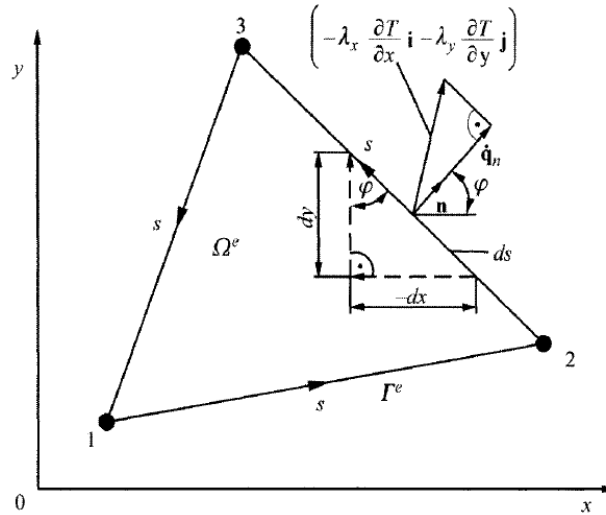


FIGURA 7 – DIAGRAMA COM UM CÁLCULO DE UMA INTEGRAL CURVILÍNEA NA FRONTEIRA DO ELEMENTO TRIANGULAR  $\Omega^e$ .

FONTE: (TALER; DUDA, 2010).

e uma vez que pela Lei de Fourier:

$$-k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} n_y = \dot{q}_x n_x + \dot{q}_y n_y = \dot{q}_n, \quad (2.25)$$

segue-se que:

$$-k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} dx + k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} dy = k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} n_y ds + k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} n_x ds = \dot{q}_n ds. \quad (2.26)$$

E as condições de contorno (2.16) e (2.17) reescritas da forma:

$$\dot{q}_n|_{\Gamma_q^e} = \dot{q}_B, \quad (2.27)$$

$$\dot{q}_n|_{\Gamma_\alpha^e} = \alpha (T_{cz} - T|_{\Gamma_\alpha^e}), \quad (2.28)$$

que, juntamente com a Equação (2.26) são substituídas na Equação (2.23), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \rho c N_i^e \frac{\partial T^e}{\partial t} dx dy + \int_{\Omega^e} \left( k_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy = \\ \int_{\Omega^e} N_i^e \dot{q} dx dy + \oint_{\Gamma_q^e} N_i^e \dot{q}_B ds + \oint_{\Gamma_\alpha^e} N_i^e \alpha (T_{cz} - T|_{\Gamma_\alpha^e}) ds. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Uma vez que:

$$T^e(x, y) = \sum_{j=1}^n T_j^e \cdot N_j^e(x, y) = [N^e] \{T^e\} \quad (2.30)$$

onde  $n$  é o número de nós no elemento  $\Omega^e$  e  $T_j^e$  a temperatura no nó  $j$ , a partir da Equação (2.29) obtém-se:

$$\int_{\Omega^e} \rho c N_i^e \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t} T_j^e \cdot N_j^e dx dy + \int_{\Omega^e} \left( k_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \sum_{j=1}^n T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \sum_{j=1}^n T_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega^e} N_i^e \dot{q} dx dy + \oint_{\Gamma_q^e} N_i^e \dot{q}_B ds - \oint_{\Gamma_\alpha^e} N_i^e \alpha \sum_{j=1}^n T_j^e N_j^e ds + \oint_{\Gamma_\alpha^e} N_i^e \alpha T_{cz} ds. \quad (2.31)$$

A Equação (2.31) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^n \left( M_{ij}^e \frac{dT_j^e}{dt} + K_{ij}^e T_j^e \right) = f_{Q,i}^e + f_{q,i}^e + f_{\alpha,i}^e, \quad (2.32)$$

onde:

$$K_{ij}^e = K_{c,ij}^e + K_{\alpha,ij}^e, \quad (2.33)$$

com:

$$K_{c,ij}^e = \int_{\Omega^e} \left( k_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy, \quad K_{\alpha,ij}^e = \int_{\Gamma_\alpha^e} \alpha N_i^e N_j^e ds, \quad (2.34)$$

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} c \rho N_i^e N_j^e dx dy, \quad (2.35)$$

$$f_{Q,i}^e = \int_{\Omega^e} \dot{q} N_i^e dx dy, \quad f_{q,i}^e = \int_{\Gamma_q^e} \dot{q}_B N_i^e ds, \quad f_{\alpha,i}^e = \int_{\Gamma_\alpha^e} \alpha T_{cz} N_i^e ds. \quad (2.36)$$

A matriz  $[M^e]$  é usualmente chamada de matriz de capacitância térmica e é dada por:

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} c \rho [N]^T [N] dx dy. \quad (2.37)$$

Para elementos retangulares a matriz  $[M^e]$  é escrita da seguinte forma:

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} c \rho [N]^T [N] dx dy = \int_{\Omega^e} c \rho \begin{bmatrix} (N_1^e)^2 & N_1^e N_2^e & N_1^e N_3^e & N_1^e N_4^e \\ N_1^e N_2^e & (N_2^e)^2 & N_2^e N_3^e & N_2^e N_4^e \\ N_1^e N_3^e & N_2^e N_3^e & (N_3^e)^2 & N_3^e N_4^e \\ N_1^e N_4^e & N_2^e N_4^e & N_3^e N_4^e & (N_4^e)^2 \end{bmatrix} dx dy. \quad (2.38)$$

O sistema de equações, pelo qual se determinam as temperaturas nodais em um único elemento  $\Omega^e$  será:

$$[M^e] \{\dot{T}^e\} + ([K_c^e] + [K_\alpha^e]) \{T^e\} = \{f_Q^e\} + \{f_q^e\} + \{f_\alpha^e\}, \quad (2.39)$$

onde:

$$[K_c^e] = \int_{\Omega_e} [B^e]^T [k] [B^e] dx dy, \quad (2.40)$$

com

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$[K_\alpha^e] = \int_{\Gamma_\alpha^e} \alpha [N^e]^T [N^e] ds, \quad (2.42)$$

com

$$[N^e] = [N_1^e, N_2^e, \dots, N_n^e] \quad (2.43)$$

e

$$\{f_Q^e\} = \int_{\Omega_e} \dot{q} [N^e]^T dx dy, \quad \{f_q^e\} = \int_{\Gamma_q^e} \dot{q}_B [N^e]^T ds, \quad \{f_\alpha^e\} = \int_{\Gamma_\alpha^e} \alpha T_{cz} [N^e]^T ds. \quad (2.44)$$

Um elemento linear tetragonal, como mostra a FIGURA 8 será discutido.

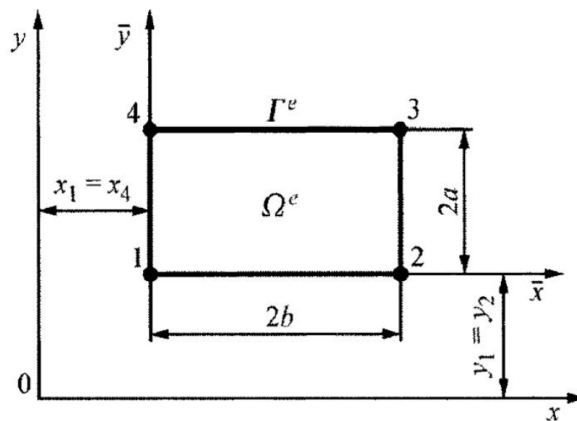


FIGURA 8 – ELEMENTO FINITO LINEAR RETANGULAR.  
FONTE: (TALER; DUDA, 2010).



A distribuição de temperatura dentro deste elemento pode ser descrita através da função:

$$T^e = a_0^e + a_1^e x + a_2^e y + a_3^e xy, \quad (2.45)$$

tal que as constantes  $a_0^e$ ,  $a_1^e$ ,  $a_2^e$ ,  $a_3^e$  são determinadas a partir das condições:

$$T^e(0, 0) = T_1^e, \quad T^e(2b, 0) = T_2^e, \quad T^e(2b, 2a) = T_3^e, \quad T^e(0, 2a) = T_4^e. \quad (2.46)$$

Substituindo as condições apresentadas em (2.46) na Equação (2.45) obtém-se um sistema linear, cuja solução é:

$$a_0^e = T_1^e, \quad a_1^e = \frac{1}{2b}(T_2^e - T_1^e), \quad a_2^e = \frac{1}{2a}(T_4^e - T_1^e), \quad a_3^e = \frac{1}{4ab}(T_1^e - T_2^e + T_3^e - T_4^e). \quad (2.47)$$

Substituindo as relações em (2.47) na Equação (2.45) e fazendo as devidas manipulações algébricas, chega-se, como apontado na Equação (2.13), a:

$$T^e = N_1^e T_1^e + N_2^e T_2^e + N_3^e T_3^e + N_4^e T_4^e, \quad (2.48)$$

onde:

$$N_1^e = \left(1 - \frac{x}{2b}\right) \left(1 - \frac{y}{2a}\right), \quad N_2^e = \frac{x}{2b} \left(1 - \frac{y}{2a}\right), \quad N_3^e = \frac{xy}{4ab}, \quad N_4^e = \frac{y}{2a} \left(1 - \frac{x}{2b}\right). \quad (2.49)$$

Estas são chamadas funções de interpolação linear para um elemento tetragonal.

De maneira análoga, o modelo em elementos finitos para o caso da equação do calor tridimensional pode ser obtido e para maiores detalhes consulte Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004). O método dos elementos finitos em problemas de transferência de calor é abordado em diversos livros e além das referências citadas nessa seção, recomenda-se: Huang e Usmani (1994) e Bergheau e Fortunier (2013).

O artigo Hickmann et al. (2015) foi publicado pelo autor no XXX Seminário Nacional de Grandes Barragens que se realizou em Foz do Iguaçu entre os dias 11 e 13 de maio de 2015, o qual descreve o método dos elementos finitos quando aplicado a um problema de condução de calor bidimensional estacionário. Solução analítica e numérica são comparadas afim de validação do método numérico. O *software* ANSYS foi utilizado para determinar o campo de temperatura em um perfil de barragem hipotético.

## 2.2.2 Estabilidade e Convergência do Método dos Elementos Finitos

Para qualquer modelo matemático que se deseja resolver, deve-se ter total segurança de que os resultados numéricos são aproximações válidas para a solução ‘exata’, a qual geralmente é desconhecida. Trata-se portanto de uma análise de convergência. Além disso, um esquema numérico precisa satisfazer condições de consistência entre o modelo matemático e sua discretização, ou seja, ao fazer  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  tender a zero, as equações do modelo matemático original são recuperadas. A diferença entre as equações matemáticas e as equações discretizadas é chamada de **Erro de Truncamento**. Finalmente tem-se o critério de estabilidade, que garante que o esquema numérico não produza erros que crescem indefinidamente (como erros devido a aritmética finita do computador).

De acordo com Hirsch (2007) a condição de consistência define uma relação entre a equação diferencial e a sua formulação discreta; a condição de estabilidade estabelece uma relação entre a solução computacional e a solução exata das equações discretizadas; enquanto a condição de convergência relaciona a solução computacional e a solução exata da equação diferencial. A FIGURA 9 resume estas conclusões.

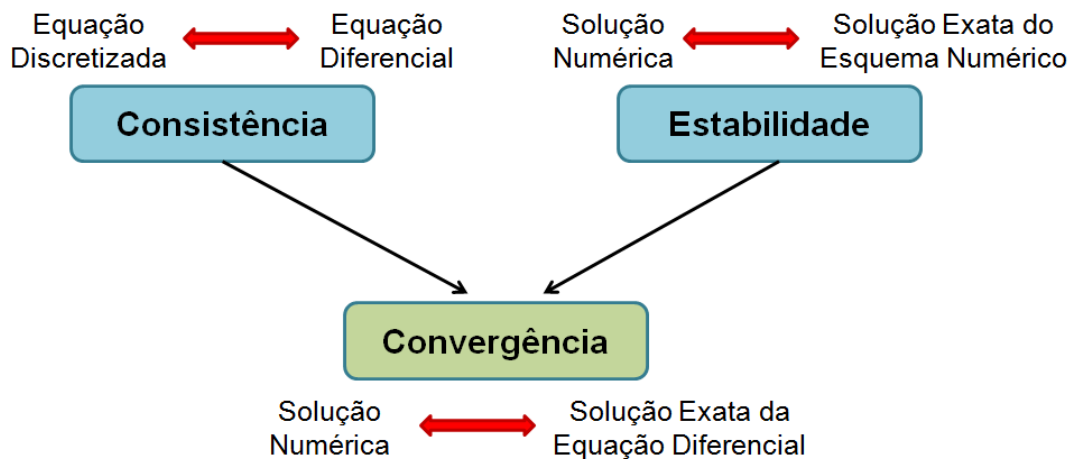


FIGURA 9 – RELAÇÕES ENTRE CONSISTÊNCIA, ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA.  
FONTE: Adaptado de (HIRSCH, 2007).

O método dos elementos finitos e os métodos numéricos em geral são uma aproximação. De acordo com Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), à medida que a malha é refinada através da redução do tamanho dos elementos, a solução deve se aproximar da solução exata. Teoricamente, a solução não será exata até que o tamanho da malha é torne-se zero, o que é evidentemente impossível. No entanto, é possível fixar uma tolerância ao erro solução e isto pode ser conseguido através da resolução do problema em várias malhas.

Para se assegurar que a solução obtida é tão próxima quanto possível da realidade, as soluções devem ser obtidas a partir de várias malhas, iniciando com uma malha mais grosseira e terminando com uma malha mais fina. Se a diferença entre os resultados de duas malhas consecutivas é menor do que uma tolerância fixada, a última malha é aceita como uma malha apropriada para a análise.

Para problemas bidimensionais, não é difícil realizar este estudo detalhado de convergência de malha. No entanto, em grandes problemas tridimensionais, é muitas vezes difícil de levar a cabo um estudo completo de convergência. Em tais situações, é habitual para comparar os resultados numéricos com dados experimentais, se disponível. A experiência prática do usuário também ajuda na obtenção de uma solução precisa para problemas complicados.

### 2.3 CÁLCULO FRACIONÁRIO

O Cálculo Fracionário (CF) pode ser visto como uma generalização do Cálculo Diferencial e Integral de Isaac Newton e Gottfried Leibniz, cuja diferenciação e integração são de ordens inteiras, para um Cálculo cujas ordens de derivadas e integrais são arbitrárias. Historicamente o CF é tão antigo quanto o cálculo tradicional, no entanto foi pouco explorado, no sentido de sistematização e desenvolvimento teórico, e suas aplicações nas ciências e engenharia foram retardadas devido à sua complexidade e além do fato de que lhe falta uma interpretação geométrica física ou totalmente aceitável.

A primeira monografia sobre o assunto é atribuída a Oldham e Spanier que, depois de uma colaboração iniciada em 1968, publicaram um livro dedicado ao CF em 1974: Oldham e Spanier (1974). Este trabalho revelou uma nova era para o CF baseada tanto na intuição física quanto na abordagem matemática. Em 1987, um livro escrito por Samko, Kilbas e Marichev, referido atualmente como ‘enciclopédia’ do CF, apareceu pela primeira vez em russo, e mais tarde, com uma edição inglês em 1993: Samko, Kilbas e Marichev (1993).

Atualmente existe uma série de livros, revistas e textos dedicados ao CF e suas aplicações decorrente do trabalho de diversos pesquisadores, tanto na área da Matemática quanto Física, Química, Engenharia, Finanças e Ciências Sociais. Possivelmente, o CF será o Cálculo do século XXI (MACHADO; KIRYAKOVA; MAINARDI, 2011); (DAS, 2011).

Uma das formas de modelar processos de difusão anômala é através do emprego de derivadas fracionárias na formulação dos modelos matemáticos, como pode ser visto em Gonçalves et al. (2005). A difusão anômala tem como característica principal a relação não linear no tempo do deslocamento quadrático médio (MSD),  $\langle r^2 \rangle$ , de uma partícula, enquanto a difusão normal segue uma relação linear entre o tempo e MSD, que é uma medida do desvio ao longo do tempo entre a posição de uma partícula e uma posição de referência. A FIGURA 10 mostra os diferentes tipos de difusão.

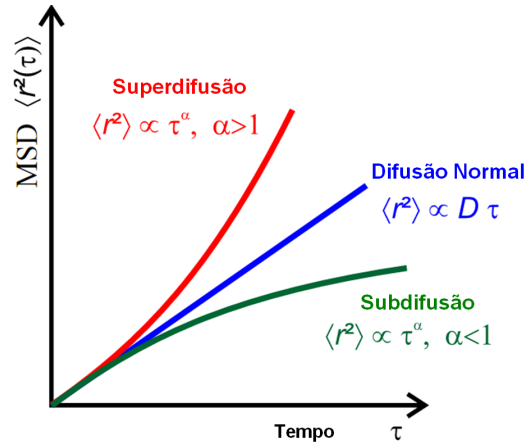


FIGURA 10 – DIFUSÃO ANÔMALA E NORMAL.

FONTE: Adaptado de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Anomalous\\_diffusion](https://en.wikipedia.org/wiki/Anomalous_diffusion)>. Acesso em: 11 mar. 2016.

Na FIGURA 10, o termo  $D$  é o coeficiente de difusão. O processo de difusão típica ocorre para o caso  $\alpha = 1$ , se  $\alpha > 1$ , o fenômeno é chamado de superdifusão e se  $\alpha < 1$  chama-se subdifusão. Alguns fatores podem induzir a manifestações atípicas nos fenômenos de transportes, como não homogeneidade no meio onde ocorre a difusão e desordem geométrica, a exemplo da que surge em estrutura fractal e estes fatores podem alterar as leis do movimento browniano que estão vinculadas ao teorema central do limite da teoria de probabilidades. É possível simular o comportamento anômalo da difusão através de generalizações da equação de difusão ordinária. Isso pode ser feito introduzindo uma apropriada dependência temporal ou espacial nos coeficientes desta equação, introdução de não-linearidades ou emprego de derivadas fracionárias (PEDRON, 2003); (VLAHOS et al., 2008).

### 2.3.1 Diferenciação e Integração Fracionária

O bom entendimento das derivadas e integrais fracionárias está associado ao conhecimento de algumas funções especiais, como a função Gama que desempenha o papel do fatorial generalizado; a função Beta para obtenção da derivada de funções potências; e as funções Mittag-Leffler e Wright que surgem na solução de equações diferenciais fracionárias (EDF) lineares (veja o APÊNDICE A).

O primeiro passo para a generalização do que viria a ser uma derivada de ordem fracionária foi feito por Fourier. Após apresentar sua famosa fórmula, a designada representação da integral de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px - pz) dp, \quad (2.50)$$

ele observou, baseando-se em relações trigonométricas e na expressão da derivada  $n$ -ésima de  $\cos(px - pz)$ , que:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(px - pz + n\frac{\pi}{2}\right) dp, \quad (2.51)$$

e esta relação forneceu uma primeira definição da derivada de ordem não inteira. No entanto, a fórmula mais conhecida atualmente foi desenvolvida por Liouville e Riemann, frequentemente designada de Riemann-Liouville (SAEDPANAH, 2009).

Tal formulação é oriunda da fórmula de Cauchy para integração repetida:

$$\begin{aligned} D^{-n} f(t) &= \int_0^t \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} f(t_0) dt_0 \dots dt_{n-2} dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-n}} ds, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.52)$$

com  $D^0 f(t) = f(t)$ . Substituindo o número inteiro  $n$  por um número real  $\alpha > 0$ , o fatorial discreto  $(n-1)!$  pela função gama de Euler,  $\Gamma$ , e supondo que a função  $f(t)$  está definida no intervalo  $t \in (a, b)$ , a integral fracionária de Riemann-Liouville consiste na seguinte expressão:

$$D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = {}_{RL}D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (2.53)$$

tal que  $\alpha$  é dita ser a ordem de integração. Alguns exemplos da integral fracionária são apresentados na sequência.

Considere  $f(t) = t^\mu$  com  $\mu > -1$ , a integral fracionária de  $f$  de ordem  $\alpha$ , de acordo com a Equação (2.53) é calculada da seguinte forma:

$${}_{RL}D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\mu ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[ t \left( 1 - \frac{s}{t} \right) \right]^{\alpha-1} s^\mu ds, \quad (2.54)$$

fazendo  $x = s/t$  e de acordo com as relações (A.5) e (A.6) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_{0,t}^{-\alpha} t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^\alpha (1-x)^{\alpha-1} (xt)^\mu dt = \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\mu (1-x)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} B(\mu+1, \alpha) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} t^{\alpha+\mu}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Seja agora  $f(t) = e^{kt}$ , com  $k$  constante real, pela Equação (2.53) tem-se:

$${}_{RL}D_{0,t}^{-\alpha} e^{kt} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{ks} ds, \quad (2.56)$$

tomando  $x = t-s$  a Equação (2.56) fica:

$${}_{RL}D_{a,t}^{-\alpha} e^{kt} = \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} e^{-kx} dx \quad (2.57)$$

A partir da função gama incompleta,  $\Gamma^*$ , (Equação (A.4)) chega-se à seguinte integral fracionária para a função exponencial:

$${}_{RL}D_{0,t}^{-\alpha} e^{kt} = t^\alpha e^{kt} \Gamma^*(\alpha, kt). \quad (2.58)$$

De forma natural poderia se esperar que para se obter a derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville bastaria fazer a troca  $\alpha \rightarrow -\alpha$  em (2.53), isto é:

$${}_{RL}D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} f(s) ds, \quad \alpha > 0, \quad (2.59)$$

porém isso conduzirá a uma integral em geral divergente. Uma expressão convergente é obtida dividindo o operador derivada em uma derivada de ordem inteira e um operador integral fracionário. Ou seja, para  $\alpha \geq 0$ , a derivada fracionária de Riemann-Liouville seria:

$${}_{RL}D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ {}_{RL}D_{a,t}^{-(n-\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (2.60)$$

onde  $n$  é um inteiro que satisfaz a condição  $n-1 < \alpha \leq n$ .

Com as mesmas condições para  $n$  e  $\alpha$ , outras duas relevantes definições para derivada fracionária foram propostas por Grünwald-Letnikov e Caputo, que são respectivamente:

$${}_{GL}D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (2.61)$$

$${}_CD_{a,t}^{\alpha} f(t) = D_{a,t}^{-(n-\alpha)} \left[ f^{(n)}(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad (2.62)$$

onde  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}$ .

As definições apresentadas para Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e Caputo, são conhecidas como derivadas e integrais fracionárias à esquerda e as definições à direita são obtidas de forma similar e podem ser vistas em Camargo (2009) e Li e Zeng (2015). Além destas definições, foram propostas outras, devido a Weyl, Jumarie, Hadamard, Davison and Essex, Riesz, Erdelyi-Kober e Coimbra. Vantagens e desvantagens das mesmas podem ser vistas em Atangana e Secer (2013).

Em complemento ao cálculo da integral fracionária da função potência  $f(x) = x^{\mu}$  com  $\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$ , a derivada fracionária de Caputo é calculada para esta função. Se  $n$  é um número inteiro, então  $D^n = {}_{RL}D_{a,t}^{-n}$  e por (2.55):

$${}_{RL}D_{0,t}^n t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} t^{\mu-n}, \quad (2.63)$$

$${}_{RL}D_{0,t}^{-(n-\alpha)} t^{\mu-n} = \frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}. \quad (2.64)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} {}_C D_{0,t}^\alpha t^\mu &= {}_{RL} D_{0,t}^{-(n-\alpha)} \left[ {}_{RL} D_{0,t}^n t^\mu \right] = {}_{RL} D_{0,t}^{-(n-\alpha)} \left[ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} t^{\mu-n} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} \frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{n-\alpha+\mu-n} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

De acordo com Podlubny (1998) e Li e Zeng (2015), as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo para uma função  $f(t)$  apresentam a seguinte relação:

$${}_{RL} D_{a,t}^\alpha f(t) = {}_C D_{a,t}^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad (2.66)$$

onde  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n$  é um inteiro positivo e  $f^{(n)}$  é integrável em  $[a, t]$ . É também possível escrever a expressão em (2.66) como:

$${}_{RL} D_{a,t}^\alpha [f(t) - \phi(t)] = {}_C D_{a,t}^\alpha f(t), \quad (2.67)$$

onde  $\phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k$ . Caso  $f^{(k)}(a) = 0$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ), então:

$${}_{RL} D_{a,t}^\alpha f(t) = {}_C D_{a,t}^\alpha f(t). \quad (2.68)$$

Como o interesse está em abordar o tema Equações Diferenciais Parciais Fracionárias de forma análoga define-se as derivadas parciais de Riemann-Liouville e Caputo, como pode ser visto em Li e Zeng (2015). O operador derivada fracional parcial  ${}_{RL} D_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_l^{\alpha_l}}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l}$  com ordem  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l)$  é definido como:

$$\begin{aligned} {}_{RL} D_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_l^{\alpha_l}}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l} u(x_1, x_2, \dots, x_l) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^l \Gamma(m_k - \alpha_k)} \frac{\partial^{n_1 + n_2 + \dots + n_l}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_l^{m_l}} \\ &\times \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_l} (x_l - \xi_l)^{n_l - \alpha_l - 1} \dots (x_1 - \xi_1)^{n_1 - \alpha_1 - 1} u(\xi_1, \dots, \xi_l) d\xi_1 \dots d\xi_l, \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde  $n_k - 1 < \alpha_k < n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ),  $n_k$  são inteiros positivos.

Considerando as mesmas condições para os valores de  $n_k$ , o operador derivada fracional parcial  ${}_C D_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_l^{\alpha_l}}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l}$  com ordem  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l)$  é definido como:

$$\begin{aligned} {}_C D_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_l^{\alpha_l}}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l} u(x_1, x_2, \dots, x_l) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^l \Gamma(m_k - \alpha_k)} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_l} (x_l - \xi_l)^{n_l - \alpha_l - 1} \dots (x_1 - \xi_1)^{n_1 - \alpha_1 - 1} \\ &\times \frac{\partial^{n_1 + n_2 + \dots + n_l}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_l^{m_l}} u(\xi_1, \dots, \xi_l) d\xi_1 \dots d\xi_l. \end{aligned} \quad (2.70)$$

### 2.3.2 Equações Diferenciais Fracionárias

As equações diferenciais parciais fracionárias (EDPF) são uma extensão do CF, onde a ordem das derivadas na equação podem ser de ordem não inteira. Na modelagem em termos de derivadas parciais fracionárias é natural trabalhar com a generalização dos modelos clássicos existentes. Esse processo parece simples e direto, no entanto é complexo e requer muita atenção, pois o cálculo fracionário exige condições adicionais para se bem definir o modelo.

Um dos motivos que levam à definição de derivada por Caputo é essencialmente a praticidade, uma vez que a abordagem Riemann-Liouville requer as condições iniciais para equações diferenciais em termos de derivadas não inteiras que são mal interpretadas fisicamente, ao passo que a abordagem de Caputo usa condições iniciais de ordem inteira mesmo se a equação que rege o fenômeno ser de ordem fracionária (KISELA, 2008); (PODLUBNY, 1998).

Considere, por exemplo, o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad u(0, x) = -\frac{4a}{L^2}x^2 + \frac{4a}{L}x \end{cases}, \quad (2.71)$$

onde  $u(t, x)$  é a temperatura do corpo na posição  $x$  e instante  $t$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  e  $x \in [0, L]$ . A Equação (2.71) é conhecida como equação da difusão de calor fracionária no tempo. Tal equação, nas suas diversas formas de abordagem (a derivada fracionária pode encontrar-se tanto na variável temporal quanto espacial), é amplamente abordado na literatura. O principal objetivo físico para a adoção e investigação de equações de difusão de ordem fracionária é descrever fenômenos de difusão anômala que normalmente se encontram em processos de transporte através de sistemas complexos e/ou desordenados incluindo meios fractais (GORENFLO et al., 2002).

A solução para o modelo (2.71) é assumida ser da forma:

$$u(t, x) = T(t) X(x), \quad (2.72)$$

a qual gera o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X \\ {}_C D_{0,t}^\alpha T = -\lambda^2 T \end{cases}. \quad (2.73)$$

A solução geral para a primeira equação é dada por:

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x), \quad (2.74)$$

enquanto que para obter a solução para a segunda equação será aplicado a transformada de Laplace de ordem fracionária. De acordo com Camargo (2009) a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo de ordem  $\alpha$  da função  $T(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L} \left\{ {}_C D_{0,t}^\alpha T(t) \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-k-1}, \quad (2.75)$$



onde  $m - 1 < \alpha \leq m$  e  $F(s)$  é a transformada de Laplace da função  $T(t)$ , ou seja:

$$F(s) = \mathcal{L}\{T(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} T(t) dt. \quad (2.76)$$

Ao aplicar a transformada de Laplace na equação  ${}_t^c D_0^\alpha T = -\lambda^2 T$  as seguintes relações são encontradas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_C D_{0,t}^\alpha T\} &= -\lambda^2 \mathcal{L}\{T\} \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{1-1} T^{(k)}(0) s^{\alpha-k-1} &= -\lambda^2 F(s) \\ s^\alpha F(s) - T^{(0)}(0) s^{\alpha-1} &= -\lambda^2 F(s) \\ F(s) (s^\alpha + \lambda^2) &= \kappa s^{\alpha-1} \\ F(s) &= \kappa \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^2}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde  $\kappa = T(0)$ . Uma vez que a transformada inversa de Laplace da função  $F(s)$  dá como resultado a função  $T(t)$ , isto é:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = T(t), \quad (2.78)$$

basta aplicar  $\mathcal{L}^{-1}$  em ambos os lados da Equação (2.77). Como pode ser visto em Camargo (2009):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^\rho}\right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\rho(\pm \lambda t^\alpha), \quad (2.79)$$

onde  $E_{\alpha,\beta}$  é a função de Mittag-Leffer (A.10). Uma vez que  $\beta = 1$  e  $\rho = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} T(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\kappa \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^2}\right] \\ &= \kappa E_{\alpha,1}(-\lambda^2 t^\alpha) \\ &= \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^2 t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

A função  $u(t, x)$  é então:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= T(t) X(x) \\ &= \left[ \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^2 t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \right] [c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x)], \end{aligned} \quad (2.81)$$

as constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\kappa$  são determinadas a partir das condições de contorno e as condições iniciais, concluindo-se que:

$$u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}, m \text{ ímpar}} \left[ \frac{32a}{n^3 \pi^3} \text{sen}(\lambda_m x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_m^2 t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \right], \quad (2.82)$$

onde  $\lambda_m = \frac{m\pi}{L}$ . Para mais detalhes consulte Kelow e Hayden (2013).

Acima foi apresentado um método exato de solução para a equação fracionária do calor unidimensional, mas assim como na modelagem tradicional, soluções exatas são restritas e para casos mais complexos os métodos numéricos são mais apropriados. A seção que segue menciona alguns métodos aproximados para as derivadas fracionárias, com ênfase no método das diferenças finitas fracionárias.

### 2.3.3 Métodos Aproximados

A partir dos métodos clássicos de resolução numérica de EDP's é possível em muitos casos estender os algoritmos para o caso de Equações Diferenciais Parciais Fracionárias (EDPF) e estes apresentam formas semelhantes quando comparados aos métodos para as equações clássicas. Os mais abordados para resolução da equação da difusão fracionária são: método das diferenças finitas Meerschaert e Tadjeran (2006); Cui (2009); Khader, Sweilam e Mahdy (2011) e Li e Zeng (2012), método dos elementos finitos Ford, Xiao e Yan (2011); Zhao e Zheng (2014); Esen et al. (2014), método dos elementos espectrais Lin e Xu (2007) e método da iteração variacional Molliq, Noorani e Hashim (2009); Wu e Lee (2010) e Turut e Güzel (2013).

Com fins de aplicação na modelagem térmica fracionária de um bloco de contraforte da Barragem de Itaipu a próxima seção discorre sobre o Método das Diferenças Finitas Fracionárias (MDFF).

#### 2.3.3.1 Método das Diferenças Finitas Fracionárias

Diversos autores dedicaram suas pesquisas com o objetivo de estender o MDF para a obtenção de soluções numéricas para modelos fracionários, entres eles destacam-se: Zhang (2009) que propôs um método implícito pra resolver a equação fracionária no tempo e espaço da difusão-convecção, onde a derivada fracionária de Riemann-Liouville no espaço foi aproximada pela fórmula shifted de Grünwald, gerando um esquema numérico incondicionalmente estável. Li e Zeng (2012) descreveram os principais tipos de aproximações para as derivadas fracionárias, como a aproximação da derivada de Riemann-Liouville a partir da definição de Grünwald-Letnikov, esquemas denominados L1, L2 e L2C para a aproximação da derivada de Caputo, e a partir daí discorreu sobre alguns métodos de diferenças finitas para as equações cinéticas da difusão e advecção com derivadas fracionárias no tempo, espaço e tempo-espaço. Li e Zeng (2015) retratou um coletânea de MDFF's de acordo com as diversas formas de aproximação para as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, além das análises de convergência e estabilidade dos métodos.

No que segue um MDFFF na sua forma implícita é apresentado. Os métodos numéricos para a derivada de Riemann-Liouville com ordem fracionária  $0 < \alpha < 1$  e  $1 < \alpha < 2$  são particularmente importantes em aplicações reais, pois modelam fenômenos como a difusão anômala.

Se  $f(t)$  é uma função suave, as derivadas de Grünwald-Letnikov e Riemann-Liouville são equivalentes, portanto a Equação (2.61) pode ser usada para aproximar a derivada de Riemann-Liouville da seguinte forma: denotando  $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ , obtém-se:

$$\left[ {}_{RL}D_{a,t}^{\alpha} f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^{\alpha}} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} f(t_{n-j}). \quad (2.83)$$

A Equação (2.83) é convergente de ordem 1 para todo  $\alpha > 0$  e é chamada de fórmula padrão de Grünwald-Letnikov. Os métodos conhecidos como L1 e L2 são aplicáveis para os casos  $0 < \alpha < 1$  e  $1 < \alpha < 2$ , respectivamente. A fórmula L1 é encontrada tomando-se a definição da derivada de Caputo, Equação (2.62), e a Equação (2.66) que relaciona as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, com  $0 < \alpha < 1$  e  $t = t_n$ :

$$\begin{aligned} \left[ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) \right]_{t=t_n} &= \left[ {}_C D_{0,t}^{\alpha} f(t) \right]_{t=t_n} + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_n^{-\alpha} \\ &= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_n^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha} f'(s) ds \\ &= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_n^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} f'(s) ds \\ &\approx \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_n^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta t} ds \\ &= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_n^{-\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} [f(t_{k+1}) - f(t_k)], \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde  $t_0 = 0$  e  $b_k = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}]$ . De maneira análoga encontra-se a fórmula L2, agora com  $1 < \alpha < 2$ :

$$\left[ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_n^{-\alpha} + \frac{f'(0)}{\Gamma(2-\alpha)} t_n^{1-\alpha} + \sum_{k=-1}^n W_k f(t_{n-k}), \quad (2.85)$$

onde:

$$W_k = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \begin{cases} 1, & k = -1 \\ 2^{2-\alpha} - 3, & k = 0 \\ (k+2)^{2-\alpha} - 3(k+1)^{2-\alpha} + 3k^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha}, & 1 \leq k \leq n-2 \\ -2n^{2-\alpha} + 3(n-1)^{2-\alpha} - (n-2)^{2-\alpha}, & k = n-1 \\ n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha}, & k = n. \end{cases} \quad (2.86)$$

Uma vez que as derivadas de Caputo e Riemann-Liouville estão vinculadas, como visto na Equação (2.66), os métodos numéricos que aproximam a derivada de Riemann-Liouville podem ser estendidos para a derivada de Caputo. Por exemplo, ao aproximar a derivada de Caputo pela fórmula padrão de Grünwald-Letnikov (2.83) e sabendo da relação (2.66), encontra-se a seguinte aproximação:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} f(t_{n-j}) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0) t_n^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad (2.87)$$

onde  $m-1 < \alpha < m$ . Se  $0 < \alpha < 1$ , então:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} f(t_{n-j}) - \frac{f(0) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (2.88)$$

A Equação (2.88) pode ser reescrita como:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}^{(\alpha)} [f(t_k) - f(0)]. \quad (2.89)$$

No caso de  $1 < \alpha < 2$ , tem-se:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} f(t_{n-j}) - \frac{f(0) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{f'(0) t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (2.90)$$

A Equação (2.89) é a aproximação da derivada de Caputo através da fórmula de Grünwald-Letnikov quando  $0 < \alpha < 1$ . Se  $f'(0) = 0$ , então a Equação (2.89) coincide com as Equações (2.88) e (2.90). Ainda para o intervalo  $0 < \alpha < 1$ , pode-se obter a fórmula L1 para a derivada de Caputo:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} \approx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} [f(t_{k+1}) - f(t_k)], \quad (2.91)$$

onde  $b_k = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}]$ . Para  $1 < \alpha < 2$ , a fórmula L2 para Caputo se torna:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\alpha f(t) \right]_{t=t_n} \approx \sum_{k=-1}^n W_k f(t_{n-k}), \quad (2.92)$$

onde  $W_k$  está definido na Equação (2.86).

Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^\gamma U = K_1 \partial_x^2 U + K_2 \partial_y^2 U + g(x, y, t), & (x, y, t) \in (a, b) \times (c, d) \times (0, T], \\ U(x, y, 0) = \phi_0(x, y), & (x, y) \in (a, b) \times (c, d), \\ U(a, y, t) = U_a(y, t), \quad U(b, y, t) = U_b(y, t), & (y, t) \in (c, d) \times (0, T], \\ U(x, c, t) = U_c(x, t), \quad U(x, d, t) = U_d(x, t), & (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \end{cases} \quad (2.93)$$

onde  $U = U(x, y, t)$ ,  $K_1, K_2 > 0$  e  $0 < \gamma < 1$  e sejam as seguintes notações:  $\Delta t = T/n_T$ ,  $\Delta x = (b - a)/N_x$ ,  $\Delta y = (d - c)/N_y$  os incrementos no tempo, nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, onde  $n_T$ ,  $N_x$  e  $N_y$  são inteiros positivos. Os pontos  $t_k$ ,  $x_i$  e  $y_j$  são definidos como:  $t_k = k\Delta t$ ,  $x_i = a + i\Delta x$  e  $y_j = c + j\Delta y$ , respectivamente. Para a função  $U(x, y, t)$ , denota-se  $U_{i,j}^n = U(x_i, y_j, t_n)$ .

Uma das formas de escrever a Equação (2.93) em diferenças finitas na sua forma implícita é discretizar a derivada de Caputo no tempo por meio da fórmula de Grünwald-Letnikov, (2.89), e as derivadas espaciais de segunda ordem  $\partial_x^2$  e  $\partial_y^2$  através das diferenças finitas centrais, ou seja:

$$\left[ {}_C D_{0,t}^\gamma f(t) \right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^\gamma} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}^{(\gamma)} \left[ U_{i,j}^k - U_{i,j}^0 \right], \quad (2.94)$$

$$\partial_x^2 U_{i,j}^n \approx \delta_x^2 U_{i,j}^n = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \quad \partial_y^2 U_{i,j}^n \approx \delta_y^2 U_{i,j}^n = \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (2.95)$$

Se  $u_{i,j}^n \approx U_{i,j}^n$  e  $g_{i,j}^n = g(x_i, y_j, t_n)$ , então um Método das Diferenças Finitas Fracionárias na Forma Implícita para a Equação (2.93) é dado por: encontrar  $u_{i,j}^n$  ( $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$  e  $i = 1, 2, \dots, n_T$ ), tal que:

$$\frac{1}{\Delta t^\gamma} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}^{(\gamma)} \left[ u_{i,j}^k - u_{i,j}^0 \right] = \left( K_1 \delta_x^2 + K_2 \delta_y^2 \right) u_{i,j}^n + g_{i,j}^n. \quad (2.96)$$

De acordo com Li e Zeng (2015), o esquema numérico apresentado na Equação (2.96) é incondicionalmente estável, tem ordem de convergência  $O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$  e este será aplicado ao modelo térmico do bloco de contraforte da Barragem de Itaipu. O próximo capítulo caracteriza os esquemas numéricos por elementos finitos e diferenças finitas fracionárias empregados num estudo de caso da Barragem de Itaipu.

### 3 MÉTODOS

Os métodos a serem aplicados para que os objetivos, vistos na Seção 1.2, sejam alcançados são descritos neste capítulo. A primeira seção descreve os aspectos gerais do *software* ANSYS e sua análise térmica via elementos finitos, além de um esquema numérico para a calibração e validação dos coeficientes térmicos (condutividade, calor e massa específicos) do concreto de um bloco de contraforte. Por fim, é abordado um esquema numérico para a verificação da adequabilidade de um modelo térmico fracionário para determinação do campo de temperatura transiente em um bloco de contraforte.

#### 3.1 ANÁLISE TÉRMICA NO *SOFTWARE* ANSYS

O *software* ANSYS tem uma importante característica que é viabilizar o acoplamento de diferentes análises a partir de diferentes ramos da engenharia. Por exemplo, em um problema de tensão térmica, o campo de temperatura introduz tensões no domínio estrutural. Em problema de interação fluido-estrutura, a pressão do fluido faz com que a estrutura se deforme, o que por sua vez faz com que a solução de fluido também se modifique. De modo geral, problemas de eletromagnetismo, estrutural, dinâmica dos fluidos e problemas térmicos podem estar relacionados ou serem ditos interdependentes. A FIGURA 11 apresenta alguns módulos do ANSYS e seus acoplamentos.

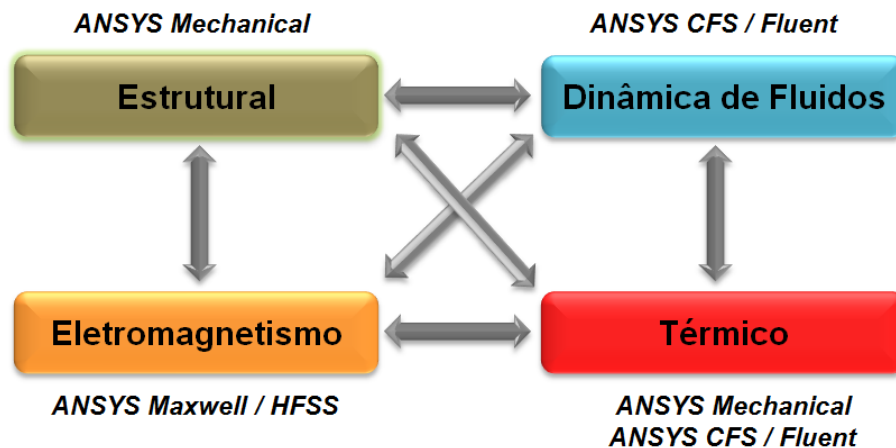


FIGURA 11 – EXEMPLOS DE ACOPLAMENTOS REALIZADOS ATRAVÉS DO ANSYS E SEUS RESPECTIVOS PRODUTOS.

FONTE: Adaptado de Silva (2013).

Para estudos termo-estruturais um acoplamento simplificado é descrito por meio da FIGURA 12. Neste acoplamento a análise térmica calcula as distribuições de temperatura e outras quantidades térmicas e a análise estrutural considera como entrada o resultado da análise térmica para calcular deformação, tensão e deslocamentos.

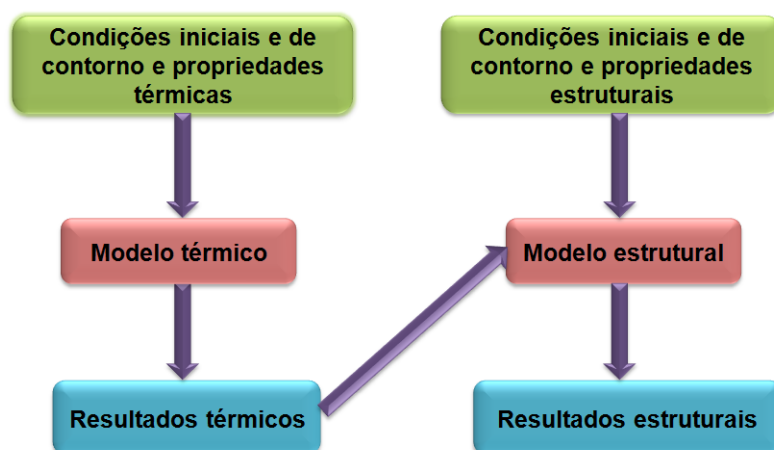


FIGURA 12 – ACOPLAMENTO TERMO-ESTRUTURAL.  
 FONTE: Adaptado de Silva (2013).

O *ANSYS Mechanical*, empregado nesta tese, é uma aplicação *Workbench* que pode executar uma variedade de simulações de engenharia, incluindo tensões, deslocamento, temperatura, vibração, termo-elétrica e simulações magnetostáticas. Os tutoriais ANSYS, Inc. (2015a) e ANSYS, Inc. (2015b) exibem uma descrição teórica dos elementos, procedimentos e comandos que podem ser utilizados no *ANSYS Mechanical*.

Esse recurso suporta dois tipos de análise térmica:

1. Análise térmica em estado estacionário ou regime permanente: determina a distribuição da temperatura e outras quantidades térmicas sob condições de carga de estado estacionário. Uma situação que se pode aplicar esta análise é quando os efeitos de armazenamento de calor que variam ao longo de um período de tempo passam a ser ignorados, pode ser linear, com propriedades materiais constantes; ou não linear, com as propriedades dos materiais que dependem da temperatura.
2. Análise térmica transiente: determina a distribuição da temperatura e outras quantidades sob condições térmicas que variam ao longo de um período de tempo.

A análise térmica é baseada em três atividades principais: Construção do modelo, gerando a geometria e propriedades dos materiais; aplicação de carregamentos e obtenção da solução, especificando o tipo de análise: estacionária ou transiente, condições de contorno e/ou iniciais, não-linearidades, geração da malha, critérios e gráfico de convergência, e a revisão dos resultados através de saídas como *display* gráfico e tabelas.

A FIGURA 13 aponta uma configuração do esquema para uma análise térmica transiente através do *ANSYS Mechanical*, onde naturalmente numa primeira instância se determina um campo de temperatura inicial através de uma análise estacionária e este é inserido como condição inicial para resolver o modelo térmico transiente.

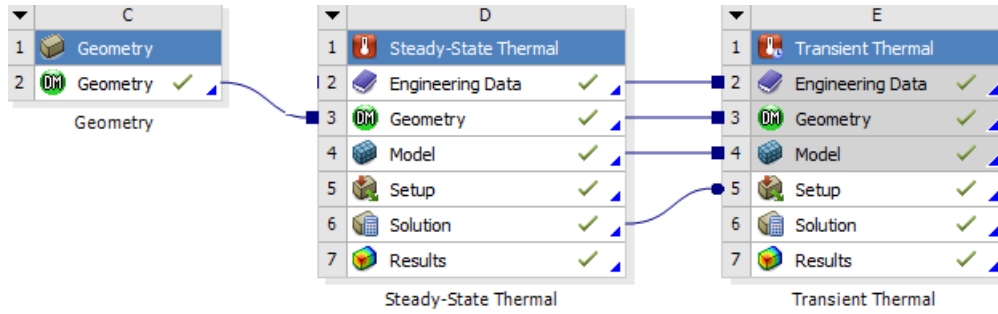


FIGURA 13 – ESQUEMA DE ANÁLISE TRANSIENTE NO *SOFTWARE* ANSYS.  
FONTE: O Autor (2016).

O processamento numérico no *ANSYS Mechanical* dos modelos descritos pelas leis constitutivas da Mecânica do Contínuo ocorre através do Método dos Elementos Finitos e este é abordado de maneira breve na próxima seção para a equação do calor tridimensional.

### 3.1.1 Método dos Elementos Finitos

Conforme visto no Capítulo 2, a equação da difusão do calor (2.8), para um material isotrópico e onde os coeficientes térmicos  $k$ ,  $\rho$  e  $c$  são constantes e não exista geração de calor interno, a Equação (2.8) pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.1)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano e  $\alpha = k/\rho c$  é chamada de difusividade térmica ( $m^2/s$ ).

A Equação (2.8) é resolvida no ANSYS através do método dos elementos finitos após definida a geometria, malha, propriedades dos materiais e condições iniciais e de contorno que são retratadas na seção que segue (na Seção 2.2.1 apresentou-se uma prévia dessas condições quando se aplicou o método de Galerkin à equação da difusão bidimensional).

### 3.1.2 Condições Iniciais e de Contorno

Considera-se um domínio arbitrário  $\Omega$  sobre o qual se aplica a equação da condução de calor, limitado por uma superfície  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_{qf} \cup \Gamma_{qc}$ , onde  $\Gamma_T$  é a superfície na qual uma função temperatura  $T$  é prescrita,  $\Gamma_{qf}$  e  $\Gamma_{qc}$  são as superfícies nas quais incidem um fluxo de calor proveniente, por exemplo, de uma fonte de calor externa, e fluxo de calor convectivo, respectivamente, conforme a FIGURA 14.



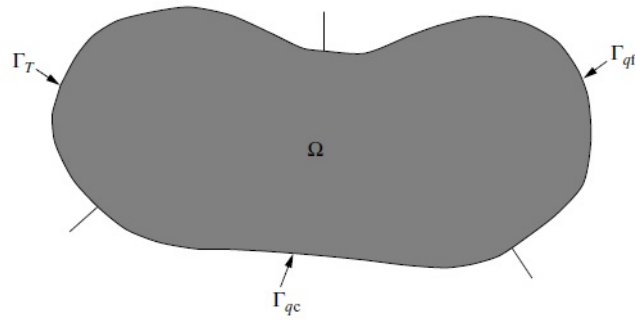


FIGURA 14 – CONDIÇÕES DE CONTORNO.  
 FONTE: (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004).

De acordo com Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), as condições de contorno para a equação do calor podem ser de dois tipos, ou uma combinação destas. Condição de Dirichlet, que é a temperatura estabelecida em uma porção do contorno do domínio e/ou condição de Neumann, que é fluxo de calor prescrito em outra porção do contorno do domínio.

*Condição de Dirichlet:*

$$T = T_b, \quad \text{em } \Gamma_T, \quad (3.2)$$

*Condição de Neumann:*

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \text{em } \Gamma_{qf}, \quad (3.3)$$

onde  $T_b$  é uma temperatura prescrita ( $K$ ),  $n$  é o vetor normal à superfície  $\Gamma_{qf}$  e  $q$  é o fluxo constante ( $W/m^2$ ). O fluxo de calor convectivo também se enquadra como uma condição de contorno de Neumann e pode ser escrito como:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_a), \quad \text{em } \Gamma_{qc}, \quad (3.4)$$

onde  $h$  é o coeficiente de transferência de calor convectivo ( $W/m^2$ ),  $T$  é a temperatura da superfície em  $\Gamma_{qc}$  e  $T_a$  é a temperatura do fluido adjacente.

A condição inicial trata-se da temperatura em todo o domínio  $\Omega$  em um tempo de referência  $t = t_0$ , normalmente chamado de instante inicial. Esta temperatura pode ser representada como:

$$T = T_0, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.5)$$

Tomando a Equação da condução de calor (2.8) com as condições inicial e de contorno para a geometria em estudo obtém-se um modelo térmico que requer solução. O modelo em

elementos finitos de Galerkin foi apresentado no capítulo anterior para uma geometria bidimensional, sua formulação tridimensional pode ser vista em Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004) e apresenta a seguinte expressão matricial:

$$[C_{ij}] \left\{ \frac{\partial T_j}{\partial t} \right\} + [K_{ij}] \{T_j\} = \{f_i\}, \quad (3.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} [C_{ij}] &= \int_{\Omega} \rho c N_i N_j d\Omega, \\ [K_{ij}] &= \int_{\Omega} \left[ k_x(T) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y(T) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z(T) \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{qc}} h N_i N_j d\Gamma_{qc}, \\ \{f_i\} &= \int_{\Omega} N_i G d\Omega - \int_{\Gamma_{qf}} q N_i d\Gamma_{qf} + \int_{\Gamma_{qc}} h T_a N_i d\Gamma_{qc}. \end{aligned}$$

### 3.2 ESQUEMA NUMÉRICO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção é apresentado um esquema numérico para aproximar os valores dos coeficientes térmicos do concreto (condutividade térmica, massa específica e calor específico) de um bloco de uma barragem de contrafortes no caso de não existirem informações reais ou atualizadas desses valores através de ensaios em laboratório. O principal critério para a escolha do bloco para se realizar uma análise térmica deve ser a presença de termômetros superficiais e internos à estrutura e estes com registros de leituras em um considerável período de tempo. A FIGURA 15 exhibe a geometria tridimensional simplificada de um trecho de uma barragem de contrafortes.

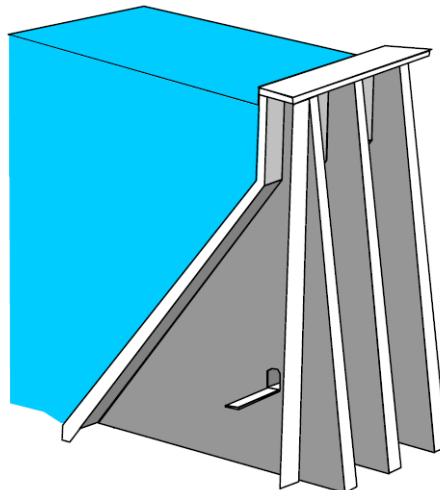


FIGURA 15 – SEÇÃO DE UMA BARRAGEM DE CONTRAFORTES.

FONTE: (ANSELL et al., 2010).

Ao adotar a hipótese de que tais termômetros não são automatizados, ou seja, os registros de leitura são feitos manualmente e com periodicidade por exemplo, semanal ou mensal, e estes obedecem a característica sazonal da temperatura ambiente, os dados de cada um dos

termômetros presentes no bloco podem ser aproximados por meio de séries de Fourier, a fim de se obter valores de temperatura contínuos no tempo. Os dados ajustados dos termômetros superficiais são utilizados como condições de contorno para obtenção da solução numérica por elementos finitos da equação da difusão do calor e o modelo é calibrado e validado a partir de dados ajustados dos termômetros internos.

A primeira etapa consiste em dividir em duas partes o tempo de registro das temperaturas, sendo a primeira parte para a fase de calibração e a segunda para a fase de validação. Considere  $N$  anos de registros e que na divisão  $N_1$  consiste nos primeiros anos e  $N_2$  os últimos anos, tal que  $N = N_1 + N_2$ , e cada termômetro terá suas temperaturas aproximadas por uma série de Fourier, cuja representação se dá pela seguinte equação:

$$T(t) = y_0 + \sum_{k=1}^M a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{P}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{P}t\right), \quad (3.7)$$

onde  $t$  é a variável tempo em dias,  $P = 365.25$  dias o período da série,  $T(t)$  a temperatura em um dado instante  $t$  dias,  $M$  o número de harmônicos e os  $2M + 1$  coeficientes  $y_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  a serem ajustados através do Método dos Mínimos Quadrados.

O ajuste é considerado satisfatório quando para um determinado número  $M$  de harmônicos, o erro MAPE for inferior a 10%, ou seja, se:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left| \frac{T_j - \hat{T}_j}{T_j} \right|}{n_i} < 0.1, \quad (3.8)$$

onde  $n_i$  é o número de dados observados no período  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $T_j$  a  $j$ -ésima temperatura observada no termômetro e  $\hat{T}_j$  o valor aproximado da  $j$ -ésima temperatura determinada através da série de Fourier.

Como o período da série corresponde a um ano, os  $N_i$  anos de dados de cada fase são representados por um ano chamado ‘ano médio’ e as temperaturas deste ano para os termômetros superficiais são tomadas, por exemplo, como condições de contorno nas faces à montante e à jusante e fluxo de calor nulo nas superfícies em contato com a fundação e com os blocos adjacentes.

Para a fase de calibração, com as condições de contorno bem definidas, o próximo passo para a obtenção da solução da Equação da condução de calor (3.1) consiste em estimar uma condição inicial, ou seja, um campo de temperatura inicial para o bloco e especificar os valores das propriedades térmicas do concreto. Os valores adotados a princípio, podem ser provenientes de cálculos de projeto ou valores presentes na literatura.

Após designados os coeficientes térmicos e as temperaturas no contorno para o primeiro dia do ‘ano médio’, executa-se uma análise térmica estacionária com a aplicação do método dos elementos finitos no ANSYS *Mechanical* e assim se obtém um campo de temperatura inicial. Na sequência realiza-se a análise térmica transiente no bloco para tal ano, oscilando os valores dos coeficientes térmicos em torno dos designados em projeto ou literatura, e essa é considerada

fidedigna com o comportamento térmico real do bloco ao verificar-se a concordância entre os valores das temperaturas encontradas via série de Fourier e via ANSYS para os pontos de prova, onde se localizam os termômetros internos. A concordância consiste em alcançar um MAPE inferior a 10%.

Com a fase de calibração previamente concluída, inicia-se a fase de validação. Nesta etapa novamente as análises estacionária e transiente são realizadas, agora com os dados dos termômetros ajustados para os últimos  $N_2$  anos, e os coeficientes térmicos obtidos da fase de calibração. O modelo térmico é considerado validado se, assim como na fase de calibração, o MAPE entre os valores das temperaturas do novo ‘ano médio’ encontradas via série de Fourier e via ANSYS para os pontos de prova for inferior a 10%.

### 3.3 ESQUEMA NUMÉRICO VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

O esquema numérico de solução para um modelo térmico fracionário em um bloco de contraforte com uma geometria bidimensional simplificada e sujeita à condições iniciais e de contorno é apresentado nesta seção.

A equação da difusão do calor fracionária:

$${}_C D_{0,t}^\gamma T = \alpha \left( \partial_x^2 T + \partial_y^2 T \right) + G(x, y, t), \quad (3.9)$$

pode ser resolvida por um método de diferenças finitas fracionário, cuja formulação foi desenvolvida na Seção 2.3.3.1 (Equação (2.96)) e neste caso dada por:

$$\frac{1}{\Delta t^\gamma} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}^{(\gamma)} \left[ \tilde{T}_{i,j}^k - \tilde{T}_{i,j}^0 \right] = \alpha \left( \delta_x^2 + \delta_y^2 \right) \tilde{T}_{i,j}^n + G_{i,j}^n, \quad (3.10)$$

onde  $0 < \gamma < 2$  se  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{i,j}^0 = 0$  e  $\tilde{T}_{i,j}^k \approx T_{i,j}^k = T(x_i, y_j, t_k)$ .

Para tanto deve definir-se as condições inicial e de contorno e as propriedades do material, nas Equações (3.9) e (3.10) representadas pelo coeficiente de difusividade térmica  $\alpha$ .

De maneira análoga ao realizado no esquema numérico por elementos finitos, tomam-se registros de temperaturas em determinado período de tempo dos termômetros superficiais e internos a um bloco de contraforte e a estes dados ajustam-se séries de Fourier para aproximar a variável temperatura em qualquer instante de tempo naquele período. Após estabelecida a geometria do bloco, os dados ajustados irão caracterizar suas condições de contorno e os coeficientes térmicos caso não sejam conhecidos, podem ser aproximados através do esquema anterior e assim o modelo térmico fracionário pode ser resolvido através da discretização vista na Equação (3.10). A geometria a ser utilizada nesta tese é exibida na FIGURA 16.

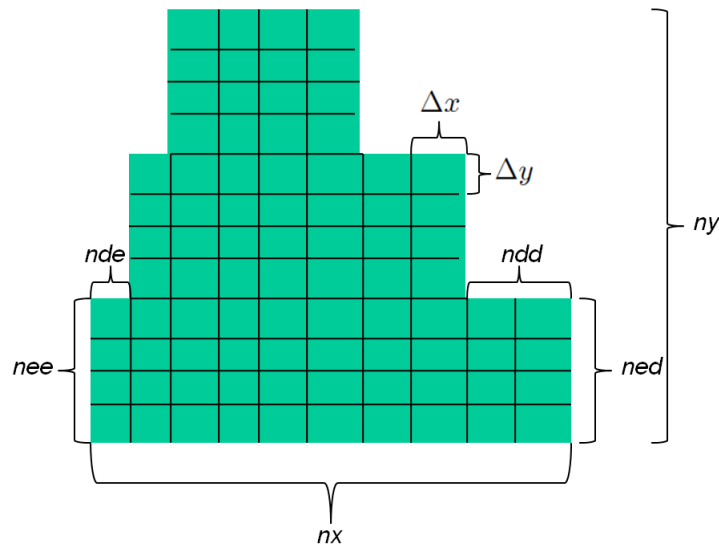


FIGURA 16 – GEOMETRIA PARA MODELO TÉRMICO FRACIONÁRIO.  
 FONTE: O Autor (2016).

Onde as variáveis assinaladas na FIGURA 16 são:

- $nx$  = número de divisões de comprimento  $\Delta x$  na base da barragem;
- $ny$  = número de divisões de comprimento  $\Delta y$  na altura da barragem;
- $nde$  = largura (número de  $\Delta x$ ) do degrau à esquerda do topo;
- $ndd$  = largura (número de  $\Delta x$ ) do degrau à direita do topo;
- $nee$  = altura do espelho (número de  $\Delta y$ ) do degrau à esquerda do topo;
- $ned$  = altura do espelho (número de  $\Delta y$ ) do degrau à direita do topo.

Com a geometria, condições e variáveis de interesse definidas, a equação do calor fracionária para o bloco é resolvida numericamente pelo esquema de diferenças finitas acima. O APÊNDICE B apresenta o MDFFF implementado em linguagem Pascal e o qual foi aplicado em um estudo de caso da Barragem de Itaipu. Para cada ordem  $\gamma$  da derivada fracionária escolhida, os resultados são comparados com as temperaturas encontradas pelas séries de Fourier e pelo modelo tradicional resolvido por elementos finitos nos pontos de prova (onde se localizam os termômetros internos). Esta análise permite concluir a real aplicabilidade do CF na modelagem térmica de estruturas.

O próximo capítulo aborda um estudo de caso para um bloco de contraforte da barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu onde foi aplicado os métodos numéricos apresentados neste capítulo.

## 4 RESULTADOS

Os resultados encontrados ao aplicar-se os métodos descritos no Capítulo 3 em um bloco de contraforte da Barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu (UHI) compõem este capítulo. As etapas de calibração e validação dos parâmetros térmicos do concreto e a aplicabilidade do modelo térmico fracionário é investigada por meio de comparações entre os dados de temperatura do bloco ajustadas por série de Fourier e os dois modelos numéricos: tradicional e fracionário. A primeira seção caracteriza a Barragem de Itaipu em alguns aspectos gerais como localização geográfica, geometria dos blocos de contrafortes e instrumentação, em particular o trecho E e o bloco E-6, objeto de estudo.

### 4.1 DESCRIÇÃO DA BARRAGEM

A barragem da UHI possui  $7.919\text{ m}$  de extensão e altura máxima de  $196\text{ m}$  e está localizada no rio Paraná, fronteira entre o Brasil e o Paraguai. O trecho E da barragem possui  $102\text{ m}$  de comprimento e é constituído de 6 blocos de contrafortes, listados do E-1 ao E-6, apoiados em maciço rochoso basáltico. Sua localização pode ser vista na FIGURA 17.



FIGURA 17 – LOCALIZAÇÃO DO TRECHO E.

FONTE: Imagem cedida pelo Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens (CEASB) da Fundação Parque Tecnológico Itaipu (FPTI).

Para maior clareza da geometria dos blocos do trecho E observe as FIGURAS 18 e 19:

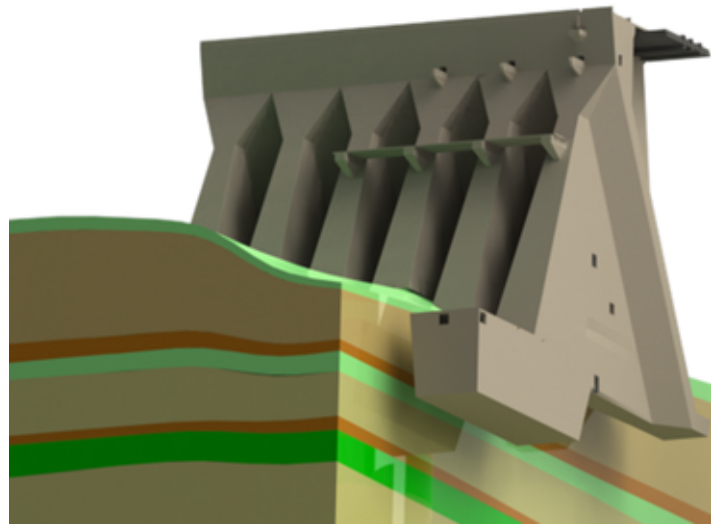


FIGURA 18 – MAQUETE TRIDIMENSIONAL DO TRECHO 'E' DA UHI.  
 FONTE: Imagem cedida pelo CEASB da FPTI.

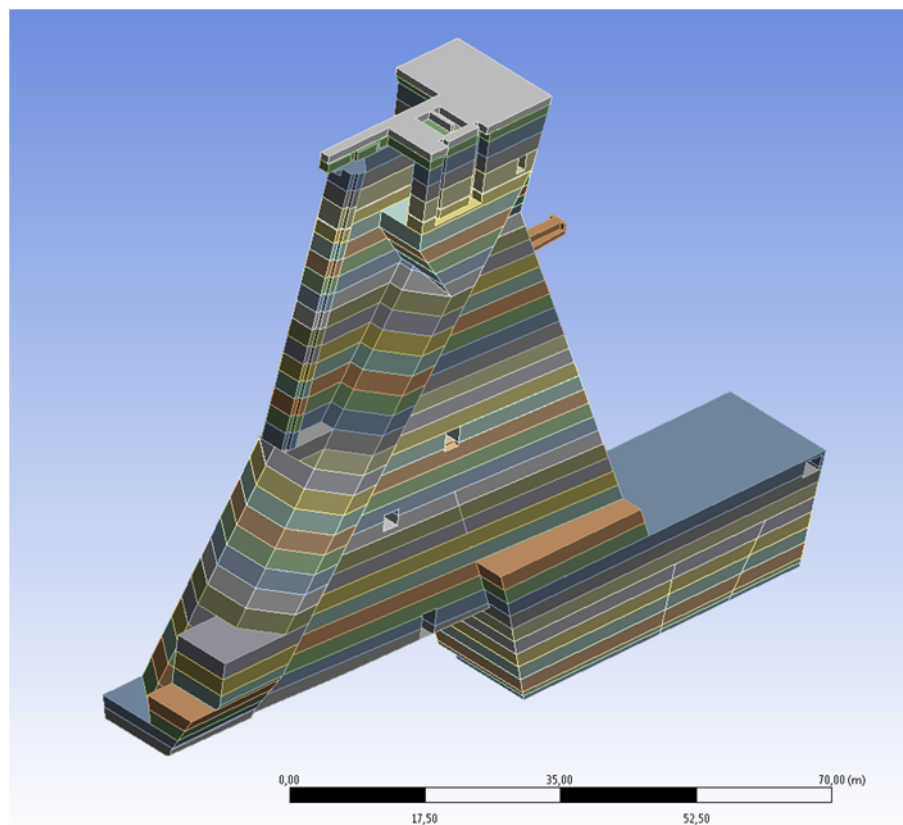
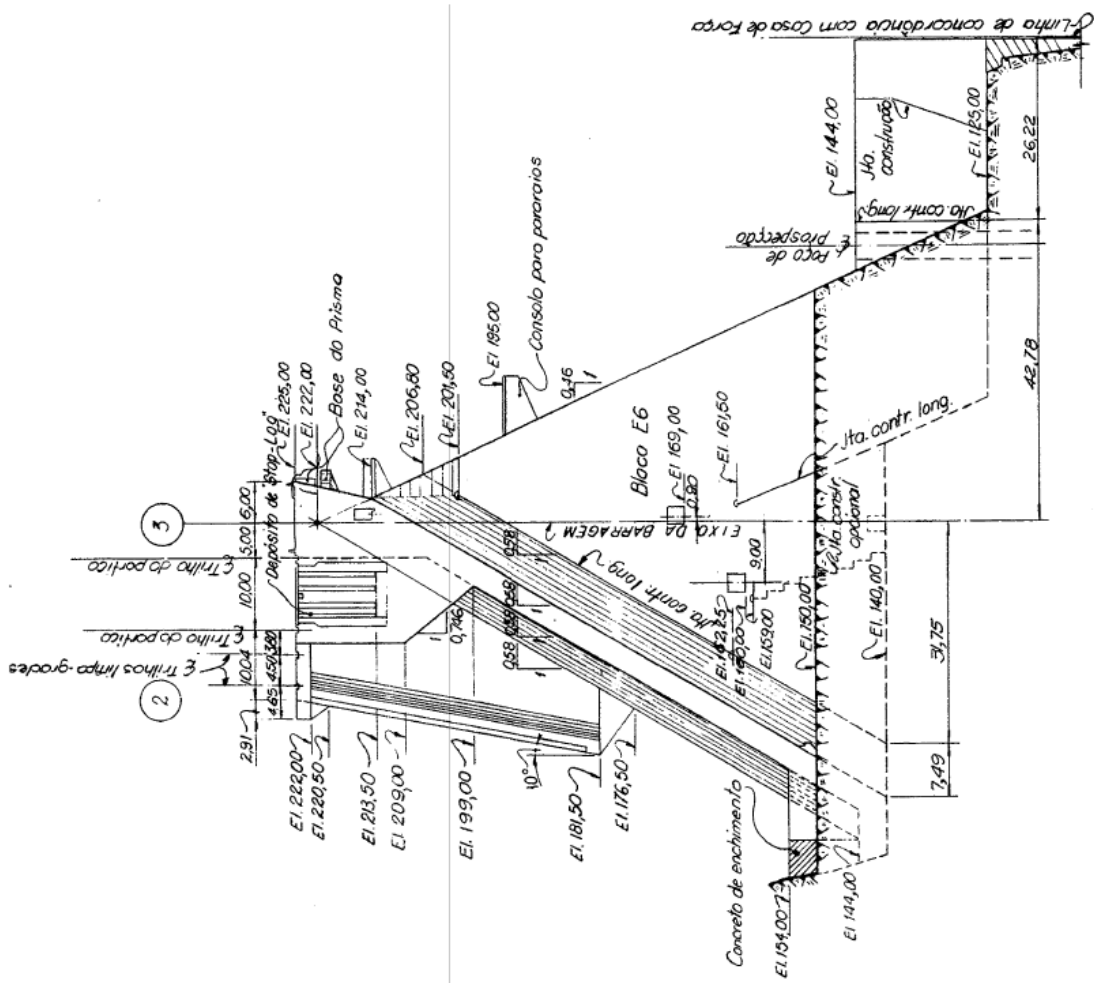
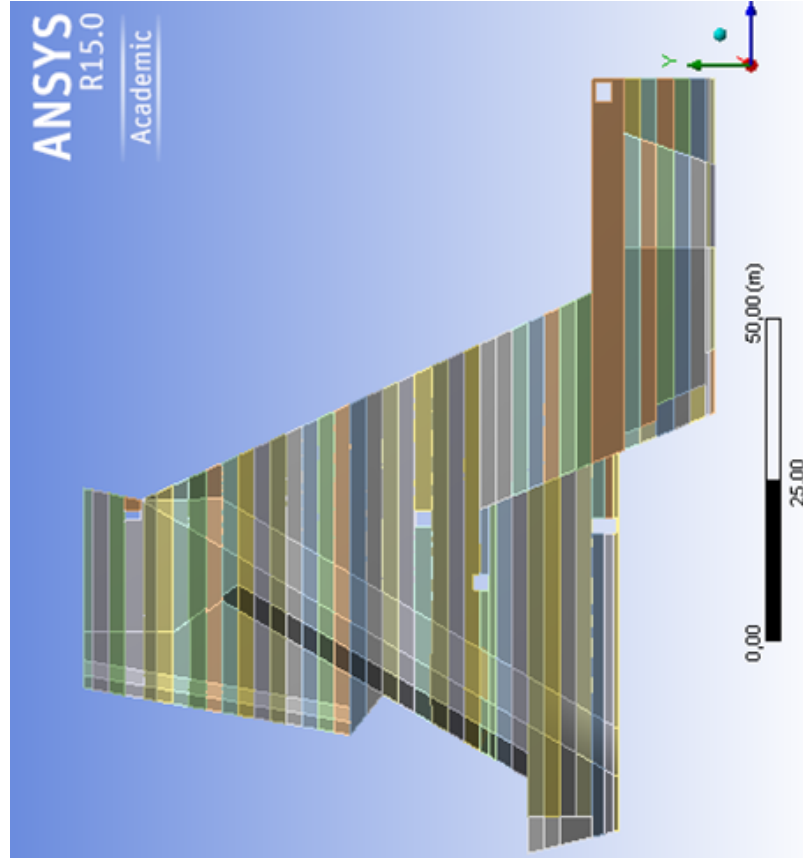


FIGURA 19 – GEOMETRIA TRIDIMENSIONAL DO BLOCO E-6.  
 FONTE: Imagem cedida pelo CEASB da FPTI.

A geometria tridimensional tem dimensões aproximadas de  $17,3 \times 97,9 \times 120,0 \text{ m}$  e foi utilizada no esquema numérico por elementos finitos para a calibração e validação dos parâmetros térmicos do concreto. As FIGURAS 20(a) e 20(b) apresentam, respectivamente, uma vista lateral de projeto do bloco E-6 e sua geometria bidimensional simplificada.



(a) VISTA LATERAL.



(b) Geometria.

FIGURA 20 – BLOCO E-6 BIDIMENSIONAL.  
 FONTE: FIGURA 20(a) em (EN.DT; ENC.DT; ENCC.DT, 2007) e a FIGURA 20(b) cedida pelo CEASB da FPTL.



O Trecho E dispõe de instrumentos na sua estrutura e fundação, sendo que os registros datam da construção, início da década de 1980, enchimento do reservatório e de todo o período de operação da UHI. O bloco mais alto, E-6, é chamado bloco-chave em razão de dispor uma instrumentação mais completa, onde se destacam:

- Pêndulo direto da crista da barragem até a fundação;
- Extensômetros múltiplos na fundação;
- Piezômetros na fundação;
- Termômetros internos e superficiais;
- Tensômetros e Roseta de Tensômetros.

Os pêndulos são consideravelmente sensíveis à variação da temperatura ambiente devido a grande superfície exposta dos contrafortes. No inverno os blocos se contraem provocando o deslocamento da crista para a jusante (sentido positivo), em contrapartida no verão se dá o oposto com o movimento para a montante (sentido negativo). Igualmente como afirma a literatura sobre a influência térmica sazonal no comportamento de grandes estruturas, relatórios técnicos desenvolvidos pela Superintendência de Engenharia da UHI também verificaram tal situação nos blocos de contrafortes. O gráfico da FIGURA 21 revela o deslocamento medido pelo pêndulo PD-E-6 do bloco E-6 comparativamente com a temperatura ambiente, desde o enchimento do reservatório até início do ano 2015. É possível identificar um aumento contínuo dos deslocamentos para a jusante.

Diante de tal cenário fica novamente evidente a relevância de se investigar modelos matemáticos que sejam capazes de descrever de forma eficaz os campos de temperaturas nos blocos de contrafortes, além de se estimar os parâmetros térmicos do concreto o mais próximos da realidade da estrutura. A próxima seção traz os resultados do esquema numérico por elementos finitos descrito na Seção 3.2.

## 4.2 SOLUÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O bloco E-6 tem instalado no seu corpo 7 termômetros, sendo 4 superficiais e 3 internos. Os dados ajustados dos quatro termômetros superficiais foram utilizados como condições de contorno para obtenção da solução numérica por elementos finitos da equação da difusão do calor e o modelo foi calibrado e validado a partir de dados ajustados de três termômetros internos. A FIGURA 22 exibe a geometria bidimensional simplificada do bloco E-6, retrata suas dimensões e localização dos termômetros superficiais (TS-D-903, TS-D-904, TS-E-1 e TS-D-5) e internos (TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3).

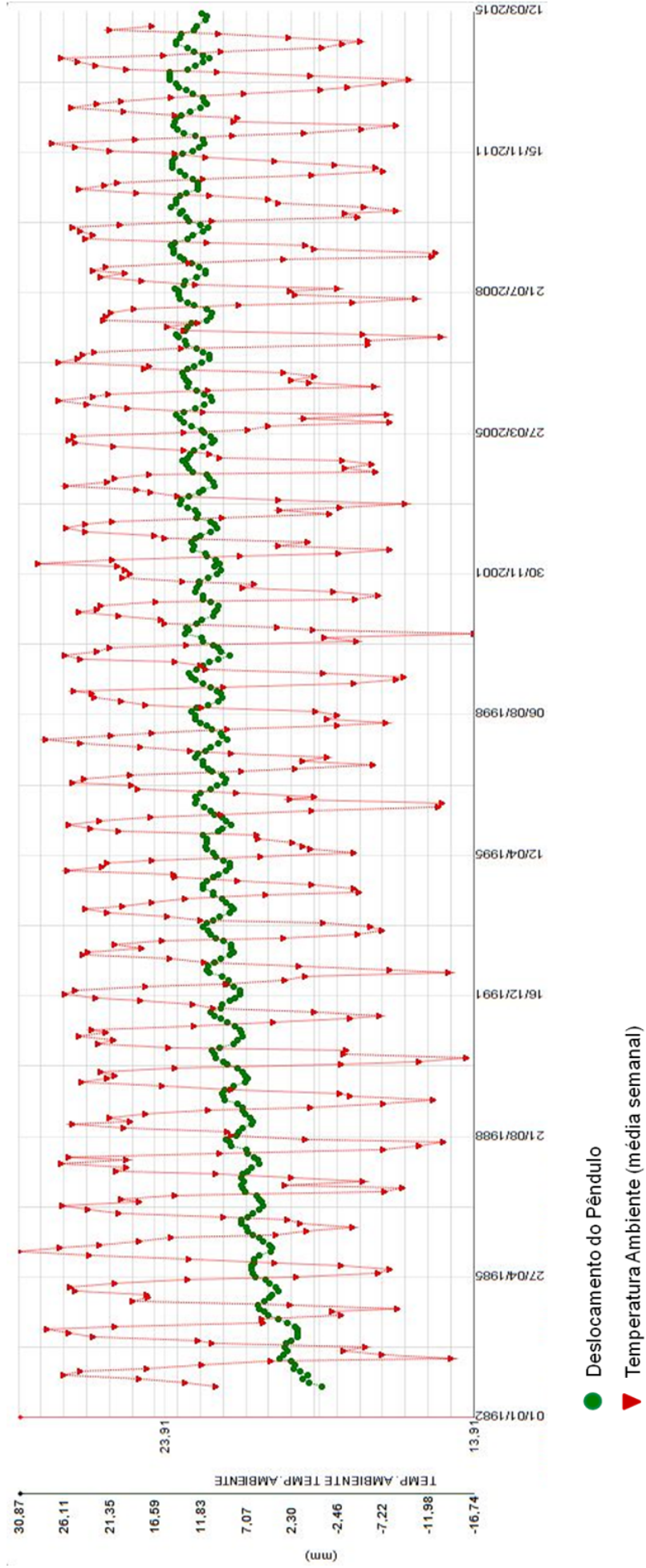


FIGURA 21 – GRÁFICO DA TEMPERATURA AMBIENTE E DO DESLOCAMENTO DA CRISTA DO BLOCO E-6 MENSURADO PELO PÊNDULO PD-E-6.  
 FONTE: Imagem cedida pela Superintendência de Engenharia (EN.DT) da UHL.

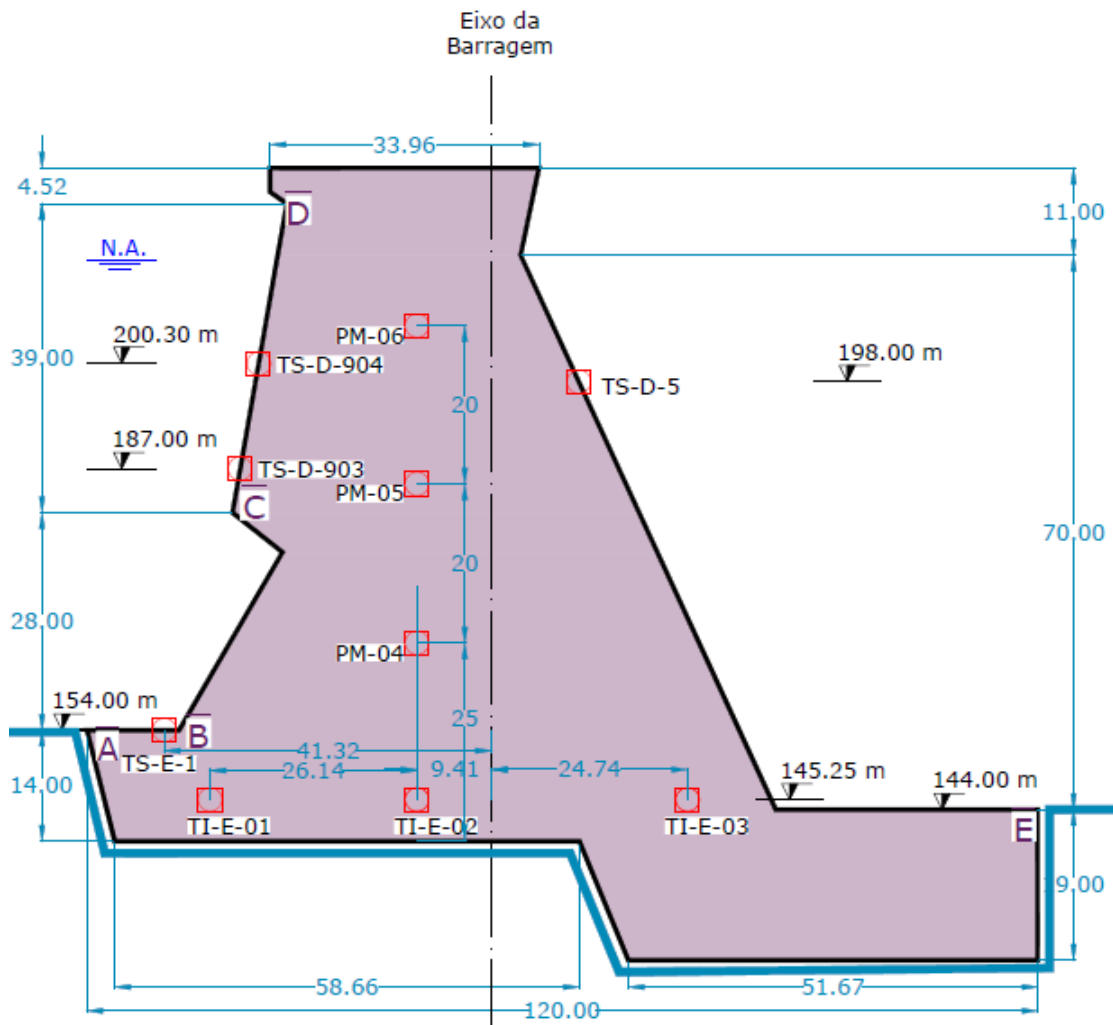


FIGURA 22 – GEOMETRIA DO BLOCO DE CONTRAFORTE, LOCALIZAÇÃO DOS TERMÔMETROS, PONTOS DE MONITORAMENTO ADICIONAIS E DELIMITAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO.

FONTE: O Autor (2016).

Algumas simplificações foram consideradas no processo de geração do modelo térmico numérico via ANSYS: ausência de fonte geradora de calor, homogeneidade do material, comportamento isotrópico e elástico linear e simplificações na geometria, como ausência de chanfros, drenagem, suportes e vigas. Um modelo térmico por condução que representa estas simplificações pode ser escrito como a Equação (3.1). A FIGURA 23 ilustra a malha tridimensional empregada nas análises estacionária e transiente nas fase de calibração e validação, com elementos tetraédricos totalizando aproximadamente 66 mil elementos e 104 mil nós.

Preliminarmente tomou-se registros de temperatura compreendidos entre os anos 1985 e 2014 dos 7 termômetros. As TABELAS 1 e 2 apresentam algumas informações e dados estatísticos relevantes sobre as temperaturas observadas nos termômetros superficiais e internos. A cota zero (0m) é a nível do mar.

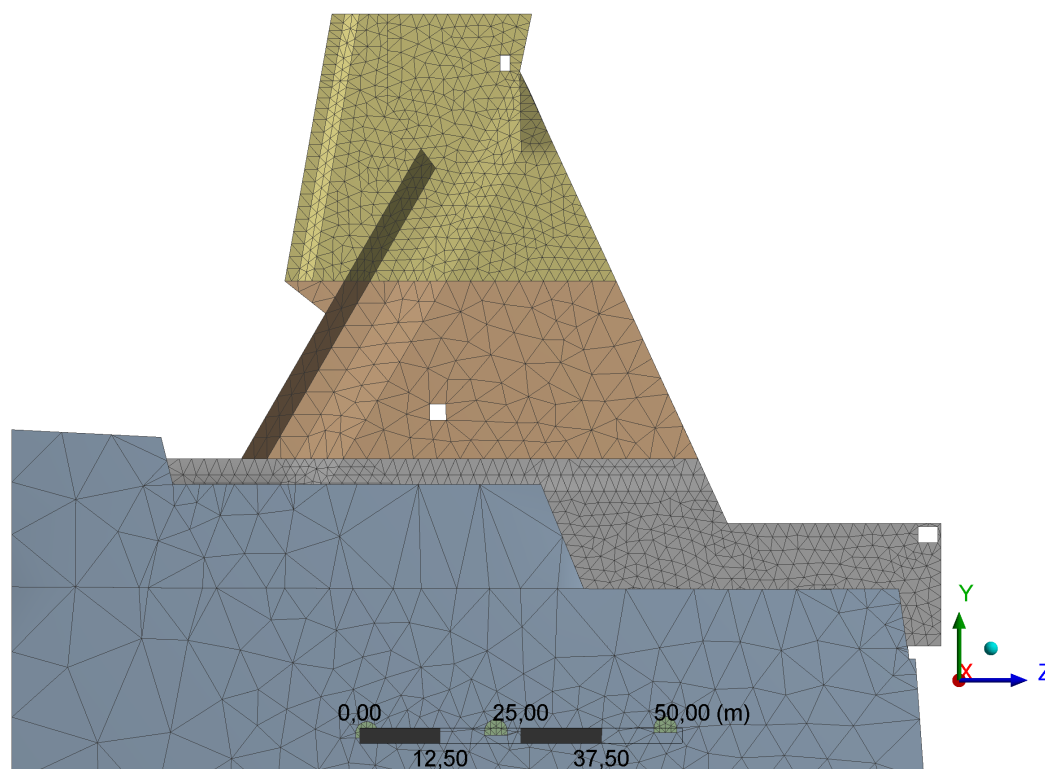


FIGURA 23 – MALHA EM ELEMENTOS FINITOS EMPREGADA NAS ANÁLISES ESTACIONÁRIA E TRANSIENTE.

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 1 – DADOS SOBRE AS COTAS, PERÍODO E NÚMERO DE OBSERVAÇÕES DOS TERMÔMETROS

Termômetro	Cota (m)	Período de Observação	N. de Observações
TS-D-903	187.00	02/01/85 a 27/11/14	469
TS-D-904	200.30	02/01/85 a 27/11/14	470
TS-D-5	198.00	02/01/85 a 27/11/14	471
TS-E-1	154.00	02/01/85 a 25/11/14	473
TI-E-1	145.25	07/01/85 a 06/10/14	279
TI-E-2	145.25	07/01/85 a 06/10/14	279
TI-E-3	145.25	07/01/85 a 06/10/14	279

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 2 – DADOS SOBRE TEMPERATURAS MÁXIMAS E MÍNIMAS, MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DOS TERMÔMETROS NO PERÍODO DE OBSERVAÇÃO (1985 A 2014)

Termômetro	Mín.	Máx.	Média	Desv. Pad.	Coef. de Var. (%)
TS-D-903	17.34	31.54	24.10	3.43	14.22
TS-D-904	17.67	30.53	24.49	3.52	14.38
TS-D-5	6.45	38.39	22.53	6.63	29.43
TS-E-1	18.43	25.74	21.56	1.90	8.80
TI-E-1	20.66	23.18	21.81	0.60	2.73
TI-E-2	19.55	24.25	22.09	1.23	5.58
TI-E-3	20.71	24.31	22.60	0.93	4.10

FONTE: O Autor (2016).

O coeficiente de variação é interpretado como a variabilidade dos dados em relação à média, é o quociente entre o desvio padrão e a média. Quanto menor for o valor do coeficiente de variação, mais homogêneos serão os dados, ou seja, menor será a dispersão em torno da média. Por exemplo, o coeficiente de variação do termômetro TS-D-903 é 14.22%, isso significa que o desvio padrão deste termômetro corresponde a 14.22% do valor da média que é 24.10. Ao analisar a TABELA 2 nota-se que os maiores desvios padrões e coeficientes de variação estão para os termômetros superficiais, sendo que o termômetro TS-D-5 tem ambos valores mais elevado pois está em contato com o ar ambiente, cuja temperatura pode variar consideravelmente no período de um dia.

Para a fase de calibração separou-se os dados de temperatura dos 20 primeiros anos (1985 – 2004) e ajustou-se uma curva dada por uma série de Fourier para cada um dos termômetros mencionados acima, e esta forneceu uma aproximação para a função temperatura em qualquer instante de tempo neste período. O caráter sazonal da temperatura no bloco justifica a escolha da série de Fourier como função de ajuste para os dados. O número de harmônicos e o MAPE para cada um dos 7 termômetros para a fase de calibração estão descritos na TABELA 3.

TABELA 3 – NÚMERO DE HARMÔNICOS E O RESPECTIVO MAPE PARA O AJUSTE DOS DADOS DE 1985 A 2004

Termômetro	Número de Harmônicos	MAPE (em %)
TS-D-5	45	9.76
TS-D-903	10	2.52
TS-D-904	10	2.55
TS-E-1	10	2.25
TI-E-1	5	1.15
TI-E-2	5	1.38
TI-E-2	5	1.21

FONTE: O Autor (2016).

As TABELAS 16 e 18 do APÊNDICE C apresentam os coeficientes das séries de Fourier dos termômetros superficiais e internos para a fase de calibração.

Os vinte anos de dados da fase de calibração foram representados por um ano chamado ‘ano médio’ e as temperaturas deste ano foram tomadas como condições de contorno no bloco da seguinte maneira: ao visualizar a FIGURA 22, a função temperatura adotada na face compreendida do ponto A ao ponto B foi a do termômetro TS-E-1, do ponto B ao C do termômetro TS-D-903, do ponto C ao D do termômetro TS-D-904, do ponto D ao E do termômetro TS-D-5, do ponto E ao ponto A e nas faces em contato com os blocos adjacentes foi considerado fluxo de calor nulo, ou seja,  $q = 0$ . A FIGURA 24 representa graficamente as condições de contorno referente ao ‘ano médio’ da fase de calibração.

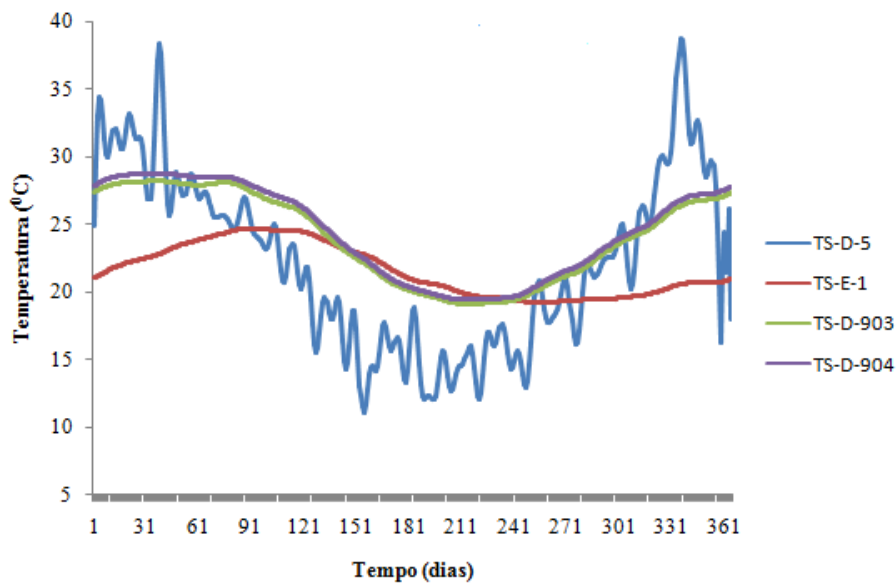


FIGURA 24 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O MODELO TÉRMICO NA FASE DE CALIBRAÇÃO.

FONTE: O Autor (2016).

Com as condições de contorno bem definidas, o próximo passo para a obtenção da solução da Equação da condução de calor (3.1) consiste em estimar uma condição inicial, ou seja, um campo de temperatura inicial para o bloco E-6 e especificar os valores das propriedades térmicas do concreto. Os valores adotados a princípio advieram do relatório técnico Grupo Consultor Alto Paraná (1976), que data da época da construção da barragem de Itaipu, cujo objetivo consistia em analisar as tensões térmicas via elementos finitos que a estrutura poderia estar sujeita quando em fase de operação, e estes são: condutividade térmica  $1.2 W(mK)^{-1}$ , calor específico  $895.38 J(kg K)^{-1}$  e massa específica  $2550 kg m^{-3}$ .

Por meio dos coeficientes térmicos de projeto e dos dados de temperatura do primeiro dia do ‘ano médio’, uma análise térmica estacionária foi realizada com a aplicação do método dos elementos finitos resolvido no *software* ANSYS a fim de obter-se um campo de temperatura inicial. Na sequência executou-se a análise térmica transiente no bloco para tal ano com um passo de tempo de 14400s, oscilando os valores dos coeficientes térmicos em torno dos obtidos em projeto em paralelo com a verificação de que a amplitude de variação da temperatura nos pontos de prova, onde se localizam os termômetros internos (TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3), via elementos finitos estava em concordância com a amplitude de variação das temperaturas encontradas via série de Fourier. Vista a conformidade entre as amplitudes térmicas ao tomar-se como parâmetros térmicos os mesmos de projeto e o erro MAPE entre os dados ajustados e o método dos elementos finitos nos pontos de prova foi inferior a 10%, o campo de temperatura transiente foi considerado fidedigno com o comportamento térmico real do bloco.

A FIGURA 25 exhibe os gráficos comparativos entre as temperaturas reais ajustadas por série de Fourier e as determinadas pela resolução do modelo térmico por elementos finitos nos pontos de prova e os MAPE’s calculados.

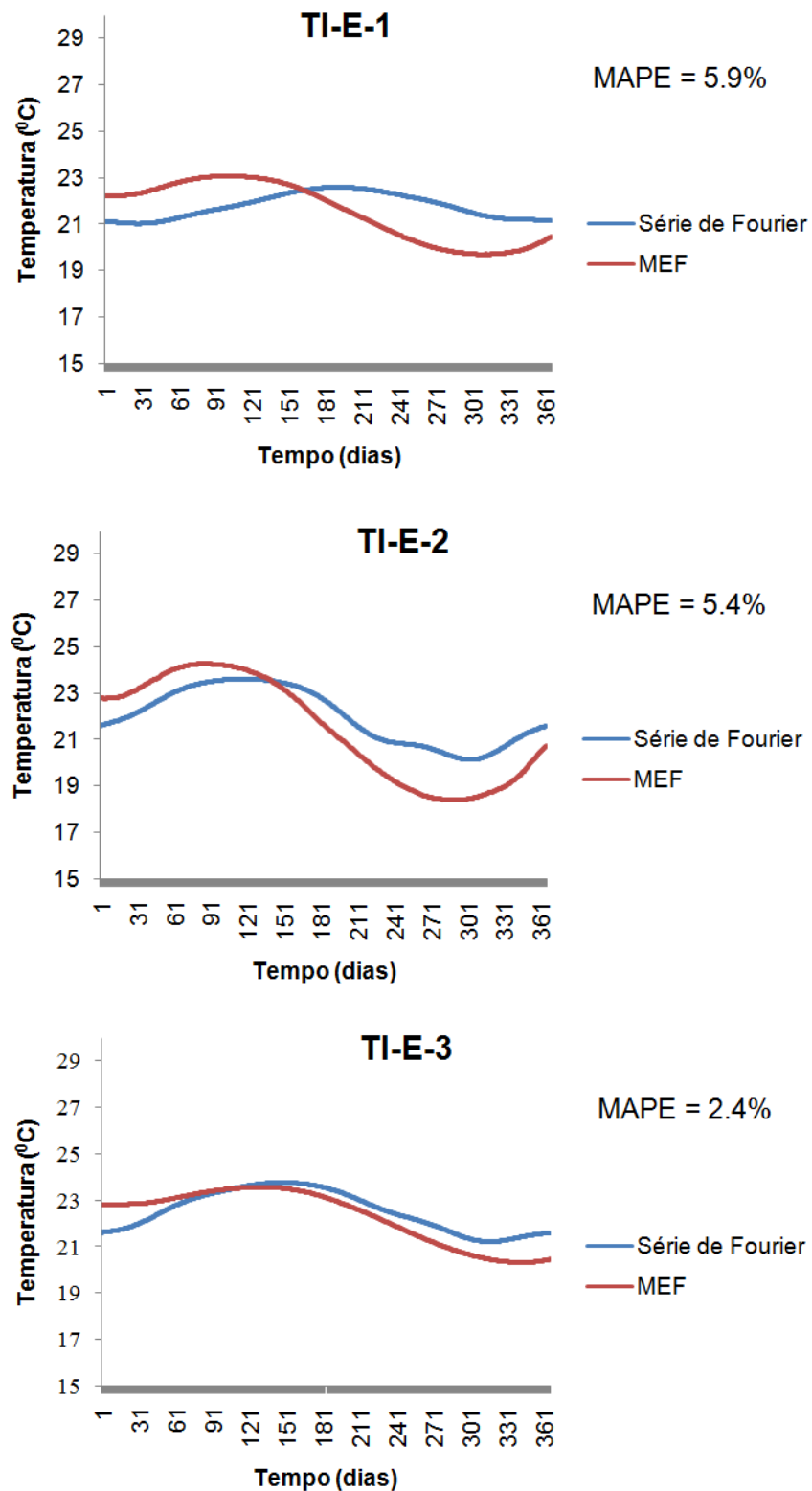


FIGURA 25 – GRÁFICOS COMPARATIVOS ENTRE AS TEMPERATURAS VIA SÉRIE DE FOURIER E VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE CALIBRAÇÃO.

FONTE: O Autor (2016).

De acordo com a FIGURA 25, nota-se que os termômetros internos apresentam tem-



peraturas mais elevadas entre maio e julho que são meses frios, ao contrário dos termômetros superficiais (FIGURA 24) que seguem mais de perto a temperatura do ar ambiente. Uma justificativa para este comportamento pode ser dado devido à lenta difusão do calor no concreto.

Além dos pontos de prova, onde se localizam os termômetros internos, selecionou-se outros três pontos, PM-04, PM-05 e PM-06 (veja FIGURA 22) no interior do bloco para analisar a distribuição anual da temperatura para a fase de calibração, como mostra a FIGURA 26.

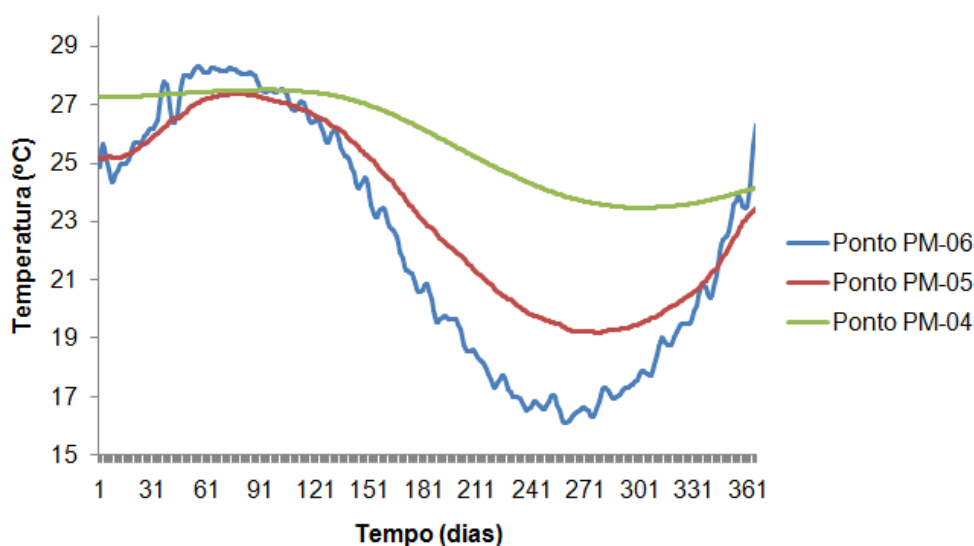


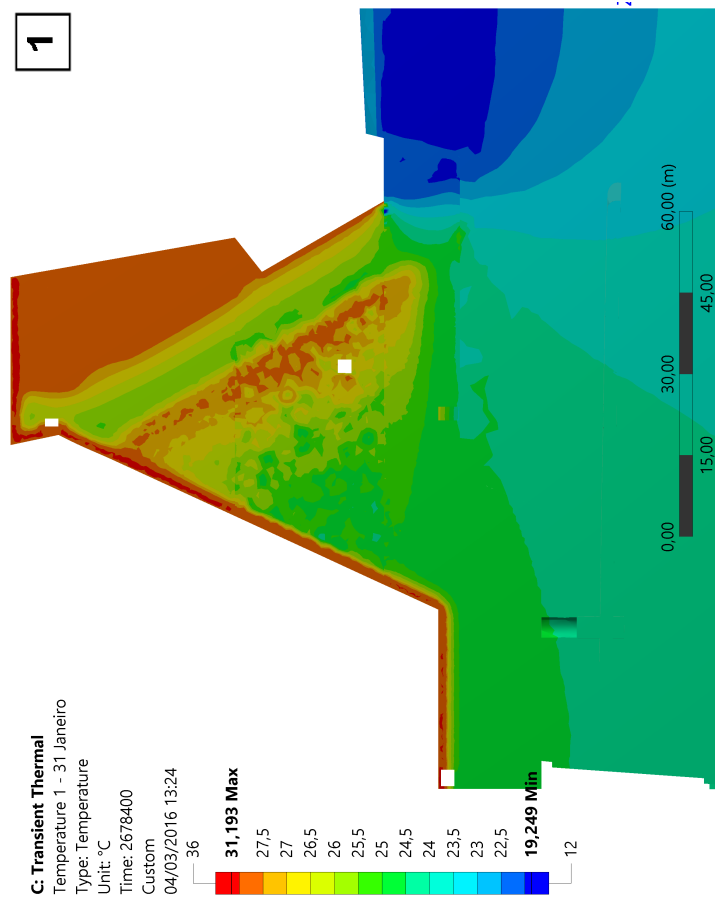
FIGURA 26 – TEMPERATURA PARA O PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE CALIBRAÇÃO NOS PONTOS DE MONITORAMENTO.

FONTE: O Autor (2016).

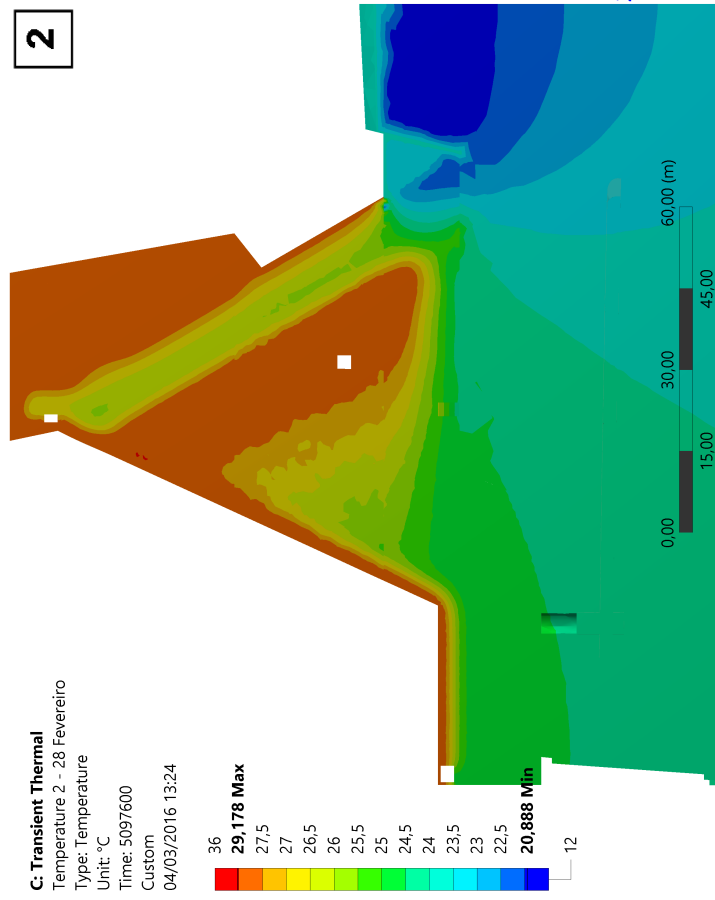
O ponto PM-06 que está localizado na cota mais elevada apresenta maior variação da temperatura durante o ano. As temperaturas mais altas encontram-se nos meses de março e abril e as mais baixas nos meses de agosto e setembro, resultado das temperaturas de verão e inverno, respectivamente, que ocorrem em meses anteriores. Os pontos PM-04 e PM-05 apresentam comportamento similar com um atraso levemente maior, pois são pontos um pouco mais afastados da superfície do bloco.

Após concluída a solução numérica do modelo térmico transiente com os coeficientes térmicos calibrados, gerou-se campos de temperaturas mensais, com datas do último dia de cada mês, como mostra a FIGURA 27.

A fase de calibração foi previamente concluída e iniciou-se uma nova fase, a validação. Nesta etapa novamente as análises estacionária e transiente foram realizadas, agora com os dados dos termômetros ajustados para os últimos 10 anos, 2005 a 2014. A TABELA 4 mostra o número de harmônicos e o MAPE para cada um dos 7 termômetros para a fase de validação.

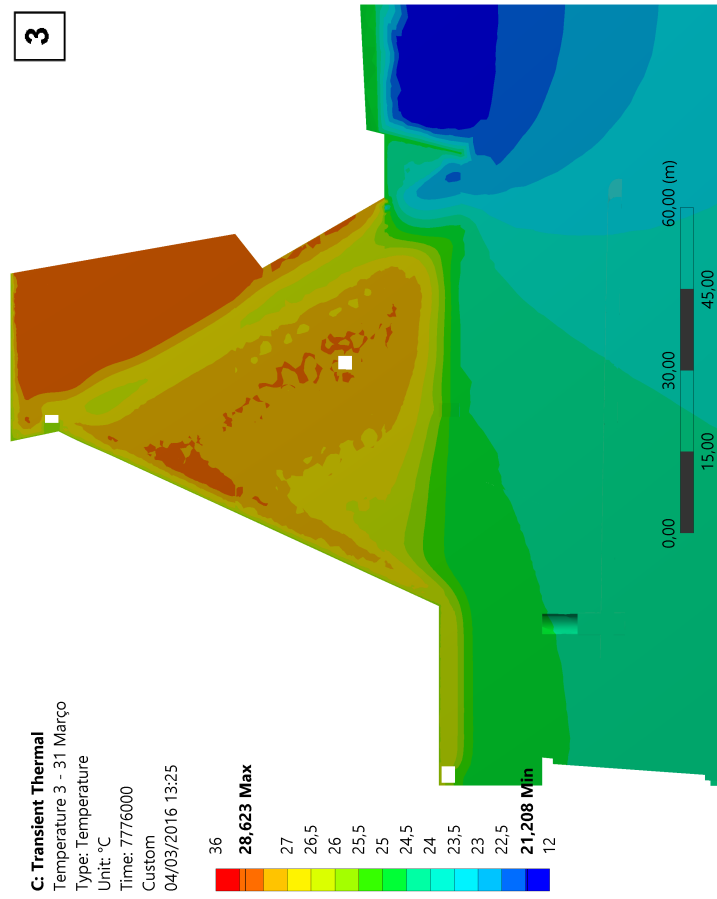


(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Janeiro.

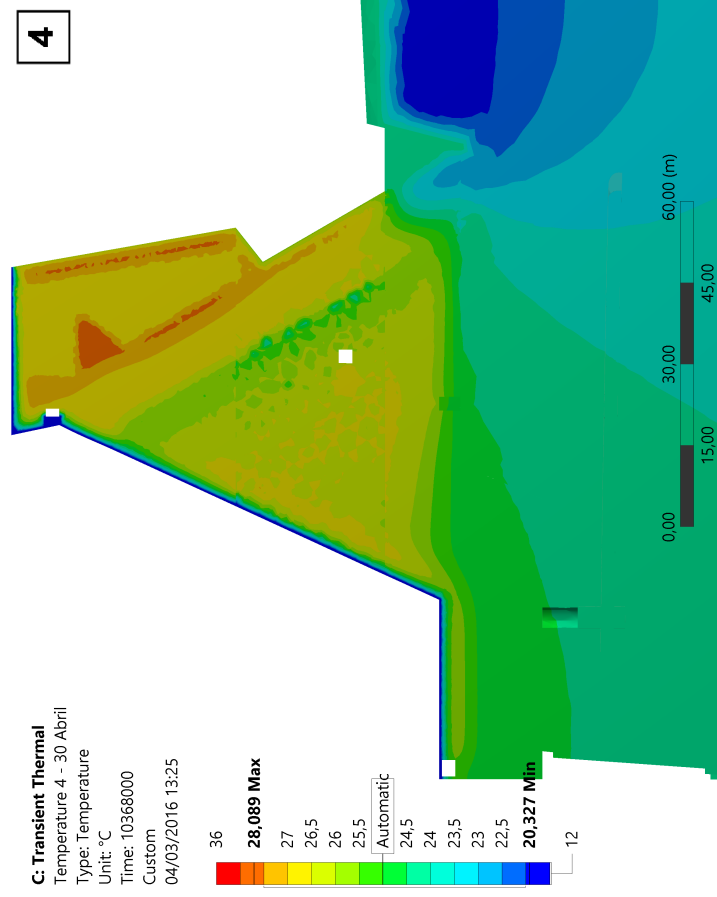


(b) Campo de Temperatura Dia 28 de Fevereiro.

Continuação na próxima página

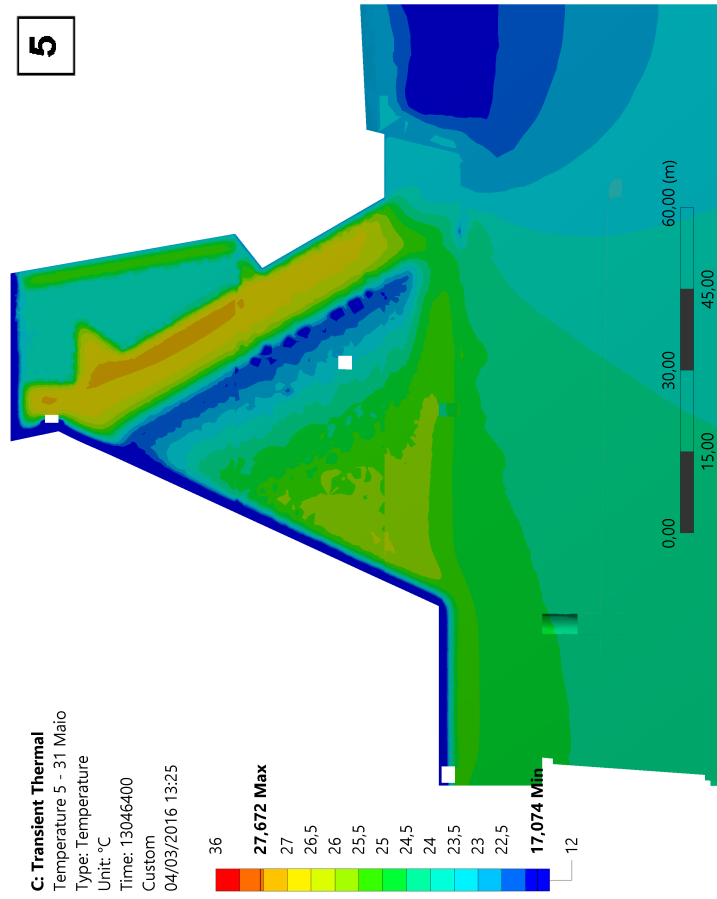


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Março.

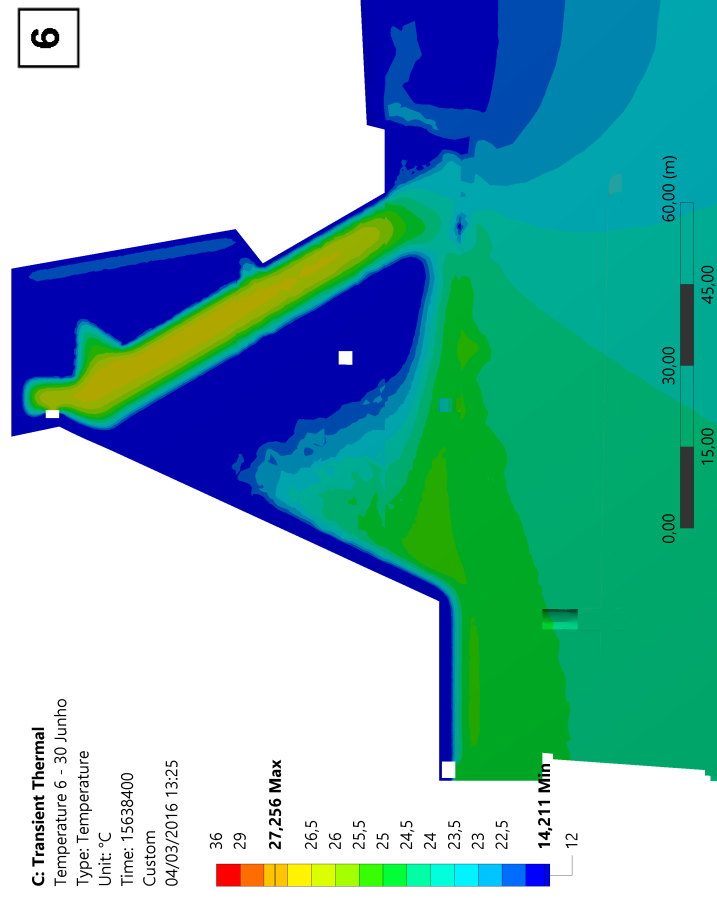


(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Abril.

Continuação na próxima página

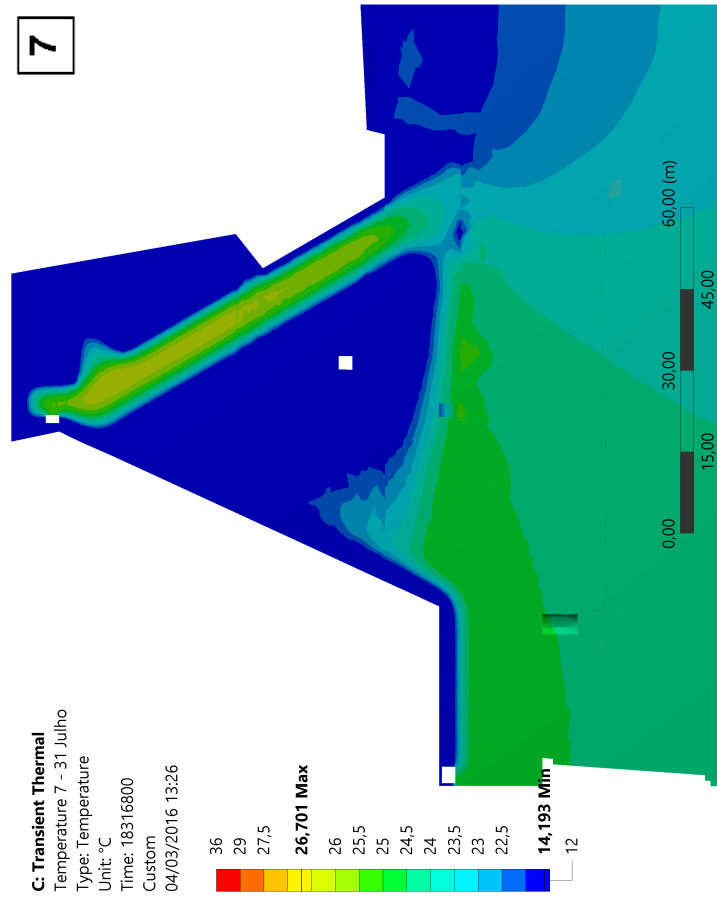


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Maio.

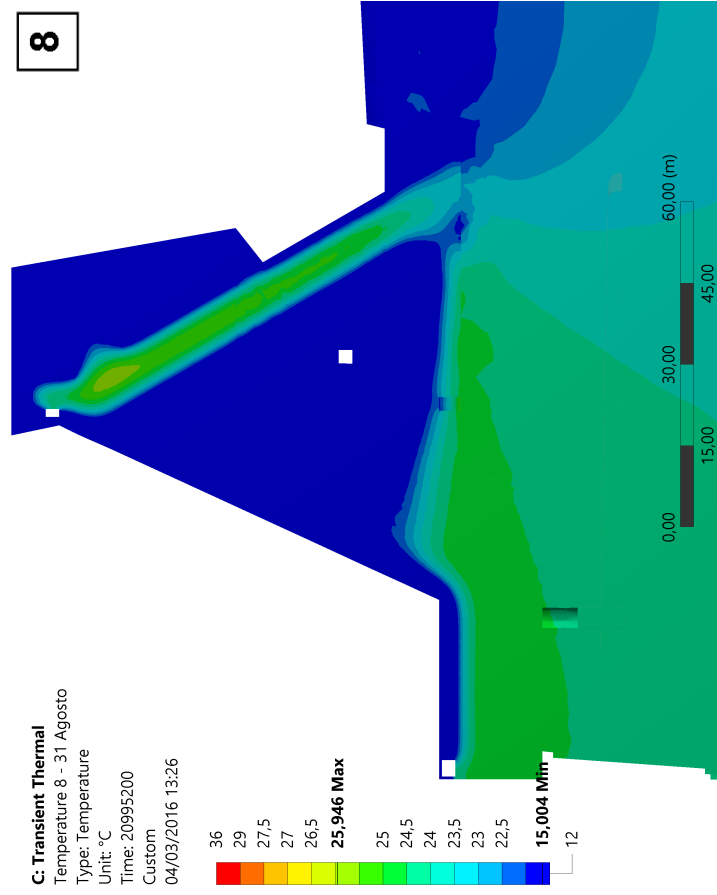


(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Junho.

Continuação na próxima página

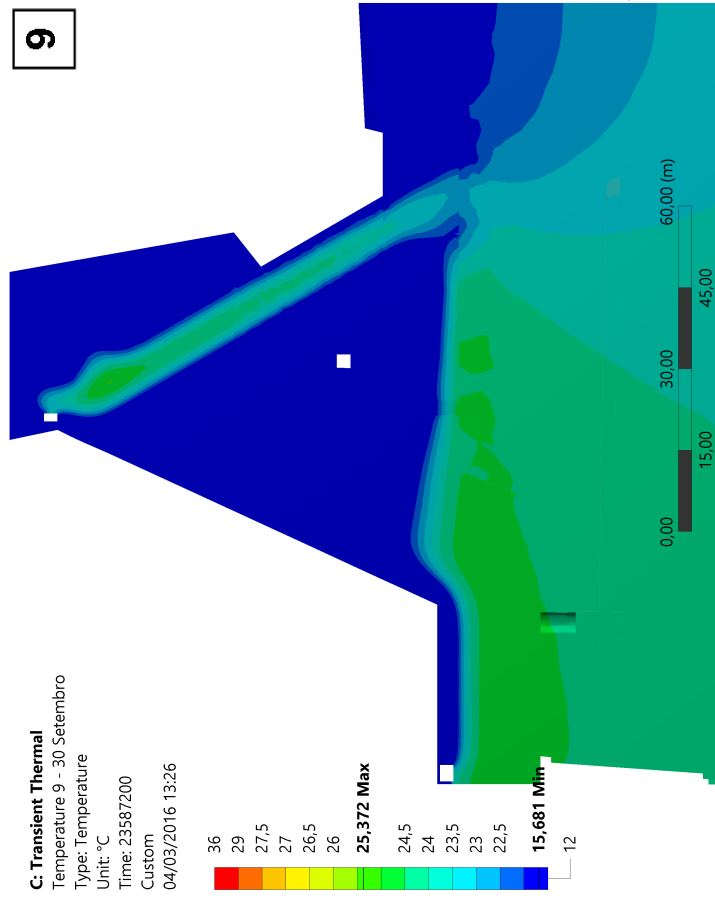


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Julho.

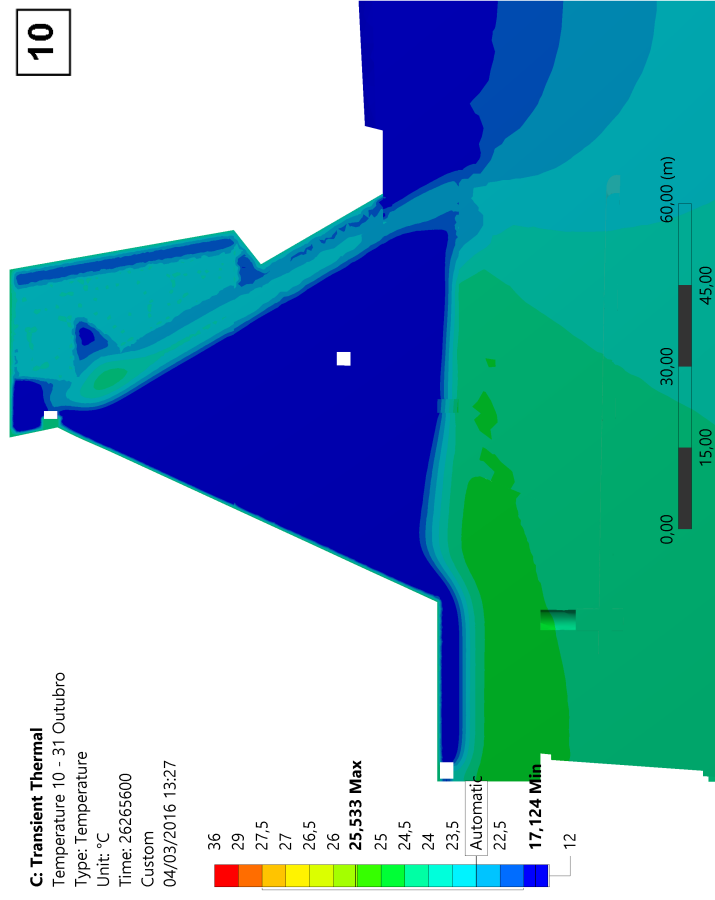


(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Agosto.

Continuação na próxima página

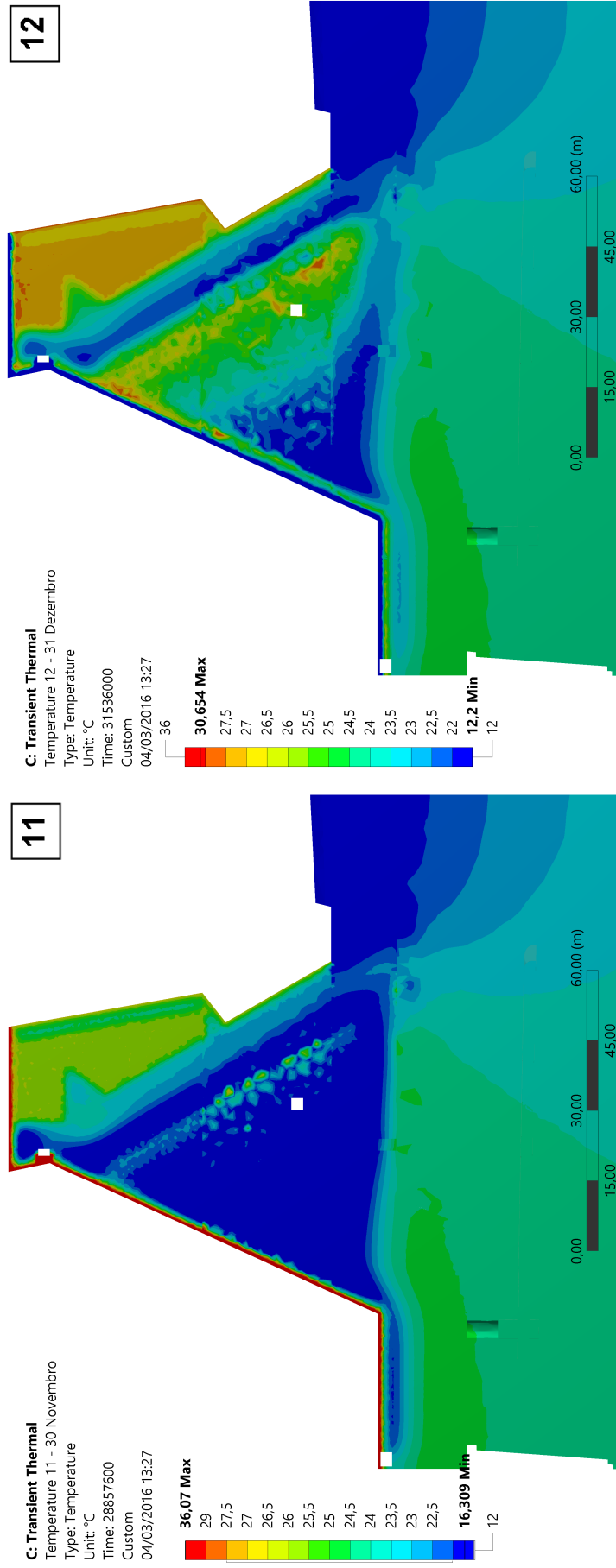


(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Setembro.



(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Outubro.

Continuação na próxima página



(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Novembro.

(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Dezembro.

FIGURA 27 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSAIS PARA O 'ANO MÉDIO' DA FASE DE CALIBRAÇÃO.  
FONTE: O Autor (2016).

TABELA 4 – NÚMERO DE HARMÔNICOS E O RESPECTIVO MAPE PARA O AJUSTE DOS DADOS DE 2005 A 2014.

Termômetro	Número de Harmônicos	MAPE (em %)
TS-D-5	15	9.55
TS-D-903	5	2.60
TS-D-904	5	2.70
TS-E-1	5	1.36
TI-E-1	3	0.74
TI-E-2	1	2.07
TI-E-2	4	0.66

FONTE: O Autor (2016).

As TABELAS 19 e 20 do APÊNDICE C apresentam os coeficientes das séries de Fourier dos termômetros superficiais e internos para a fase de validação. As condições de contorno para a concepção do modelo térmico transiente referente ao ‘ano médio’ da fase de validação estão representadas graficamente através da FIGURA 28.

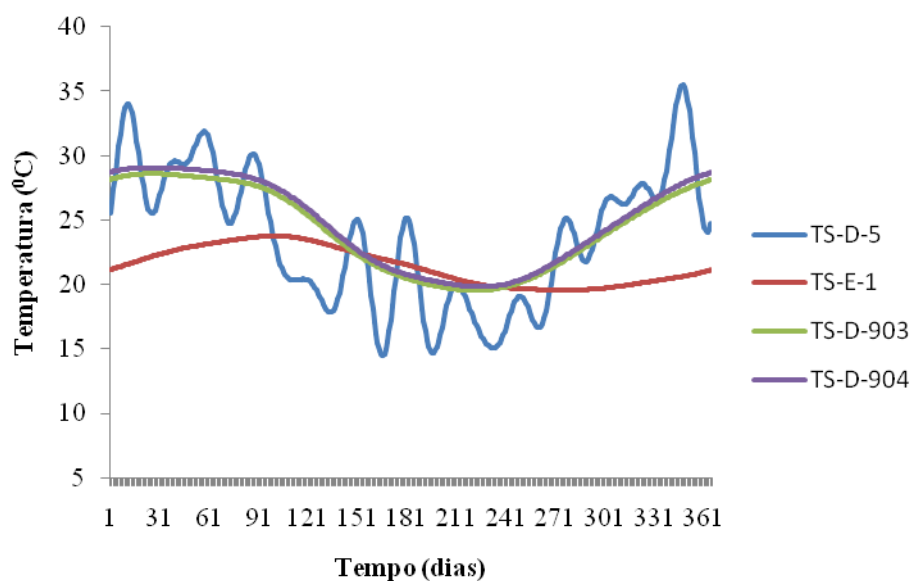


FIGURA 28 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O MODELO TÉRMICO NA FASE DE VALIDAÇÃO.

FONTE: O Autor (2016).

Os parâmetros térmicos adotados para as análises térmicas estacionária e transiente desta fase foram os obtidos na fase de calibração, que como visto, coincidiram com os dados de projeto. A FIGURA 29 exhibe os gráficos comparativos entre as temperaturas reais ajustadas por série de Fourier e as determinadas pela resolução do modelo térmico por elementos finitos e os MAPE's calculados.



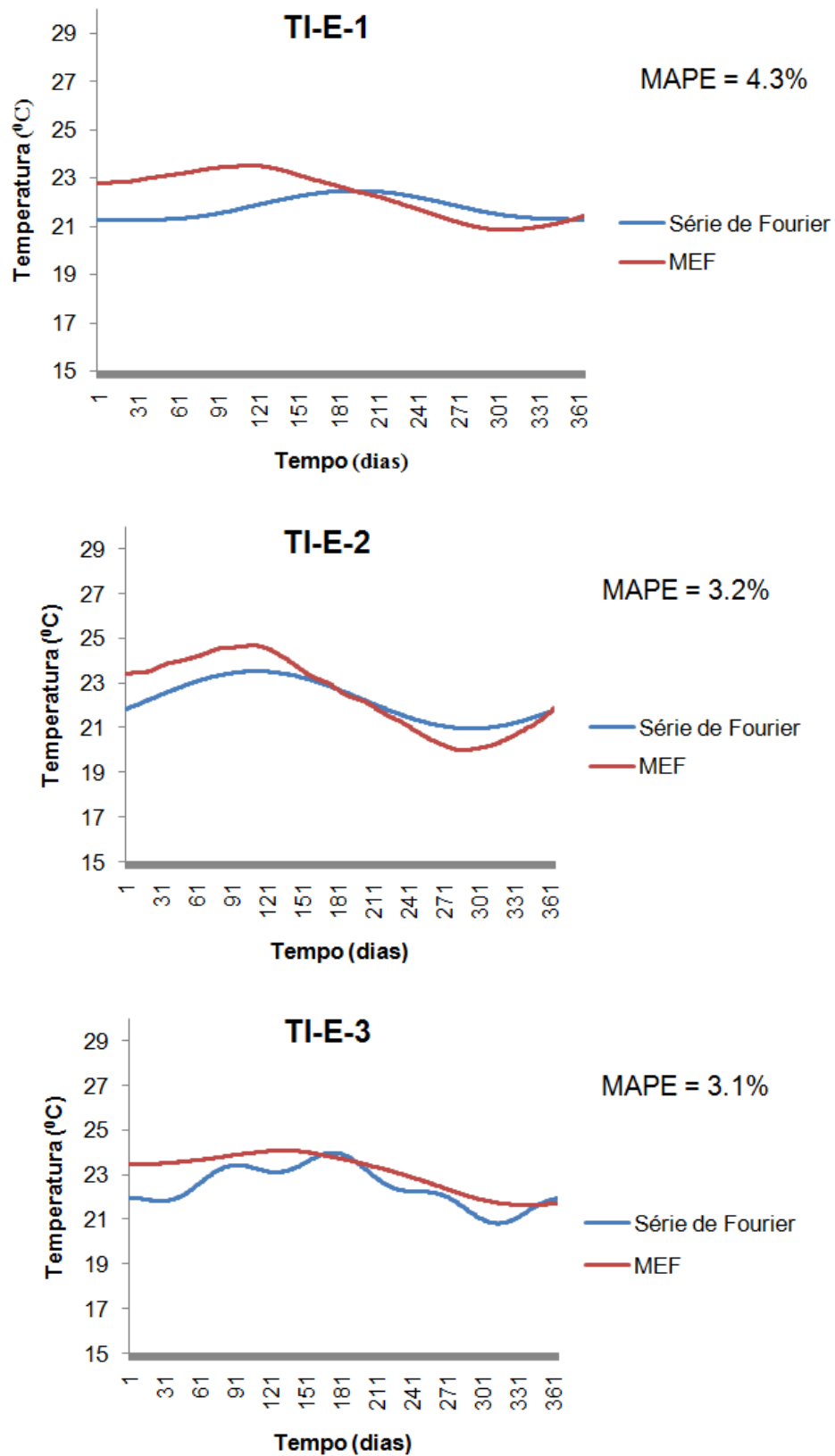


FIGURA 29 – GRÁFICOS COMPARATIVOS ENTRE AS TEMPERATURAS VIA SÉRIE DE FOURIER E VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE VALIDAÇÃO.

FONTE: O Autor (2016).

Conforme a FIGURA 29, os termômetros na fase de validação apresentam comportamento similar aos termômetros na fase de calibração (observe a FIGURA 25), ou seja, os termômetros internos apresentam temperaturas mais elevadas entre maio e julho, inverso aos termômetros superficiais (FIGURA 28). O MAPE entre os valores das temperaturas do novo ‘ano médio’ encontradas via série de Fourier e via ANSYS para os pontos de prova foi inferior a 10%, o que valida os coeficientes térmicos.

Além dos pontos de prova, onde se localizam os termômetros internos, os mesmos três pontos selecionados pra fase de calibração para monitoramento da distribuição anual da temperatura foram utilizados na fase de validação, os gráficos destes são exibidos na FIGURA 30. De maneira similar a apresentada na fase de calibração, os pontos PM-04, PM-05 e PM-06 apresentam as temperaturas mais altas encontram-se no meses de março e abril e as mais baixas no meses de agosto e setembro, resultado das temperaturas de verão e inverno que ocorrem em meses anteriores.

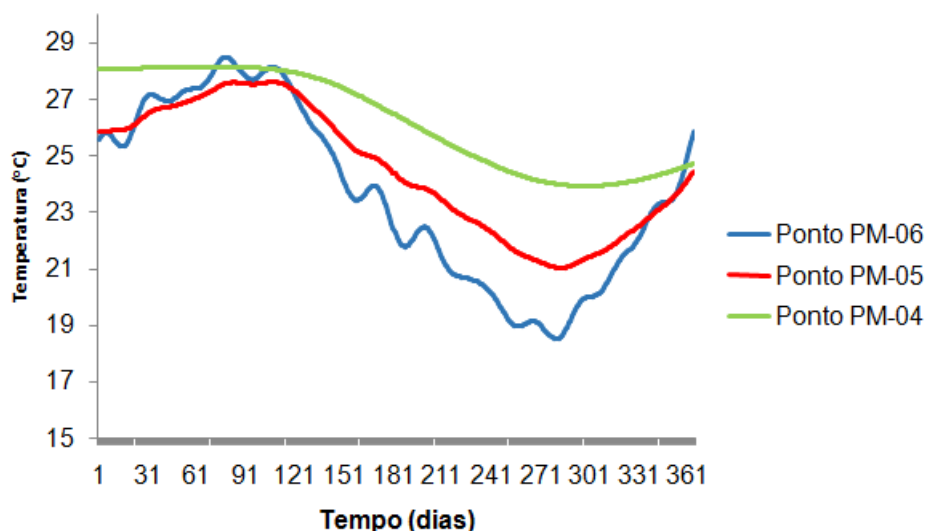
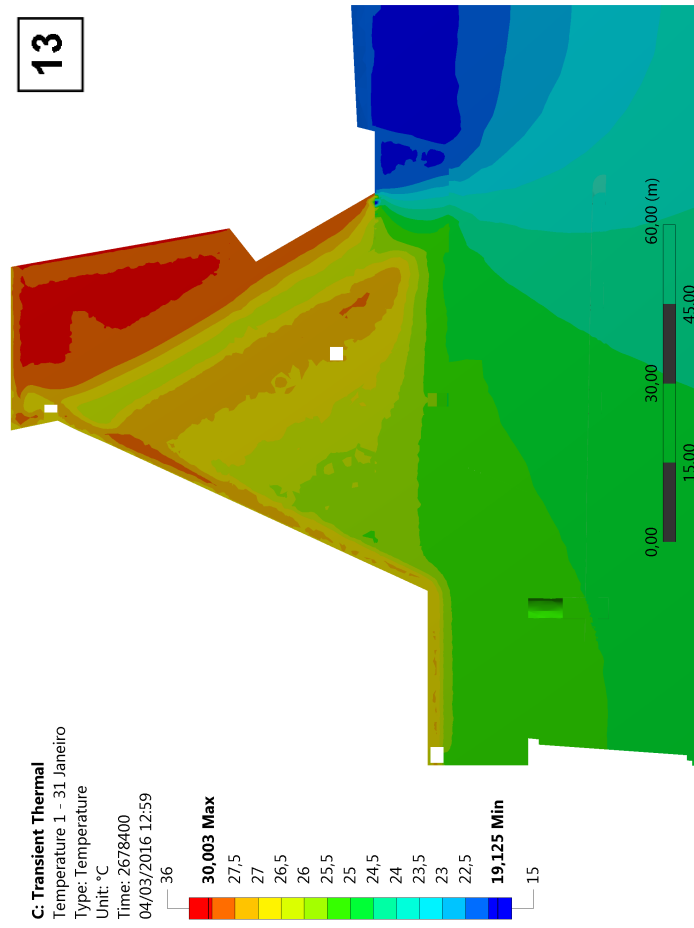


FIGURA 30 – TEMPERATURA PARA O PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE VALIDAÇÃO NOS PONTOS DE MONITORAMENTO.

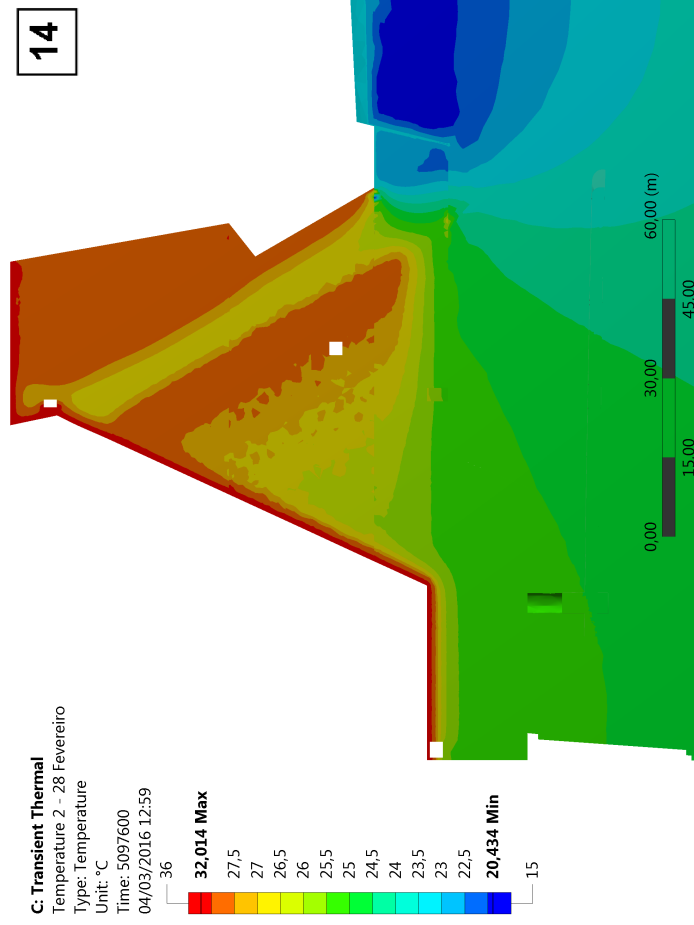
FONTE: O Autor (2016).

Após concluída a solução numérica do modelo térmico transiente com os coeficientes térmicos calibrados, gerou-se campos de temperaturas mensais, com datas do último dia de cada mês, como mostra a FIGURA 31.

Em acréscimo a todo o procedimento numérico realizado, para demonstrar a conformidade entre os dados reais dos termômetros e aqueles obtidos por elementos finitos, as TABELAS 5, 6 e 7 apresentam as temperaturas máximas e mínimas atingidas pelos termômetros internos, médias, desvio padrão e coeficientes de variação por meio dos registros de leituras e através do modelo térmico do bloco resolvido numericamente para ambas as fases de calibração e validação. A TABELA 8 apresenta alguns dados estatísticos referentes às temperaturas nos pontos monitorados no interior da barragem em ambas as fases.

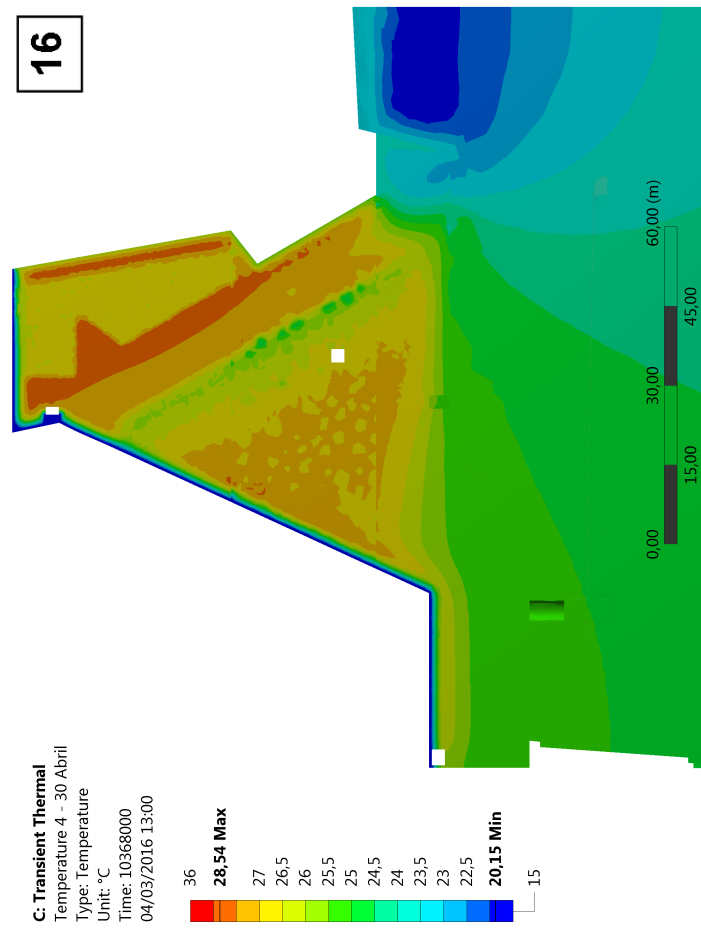


(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Janeiro.

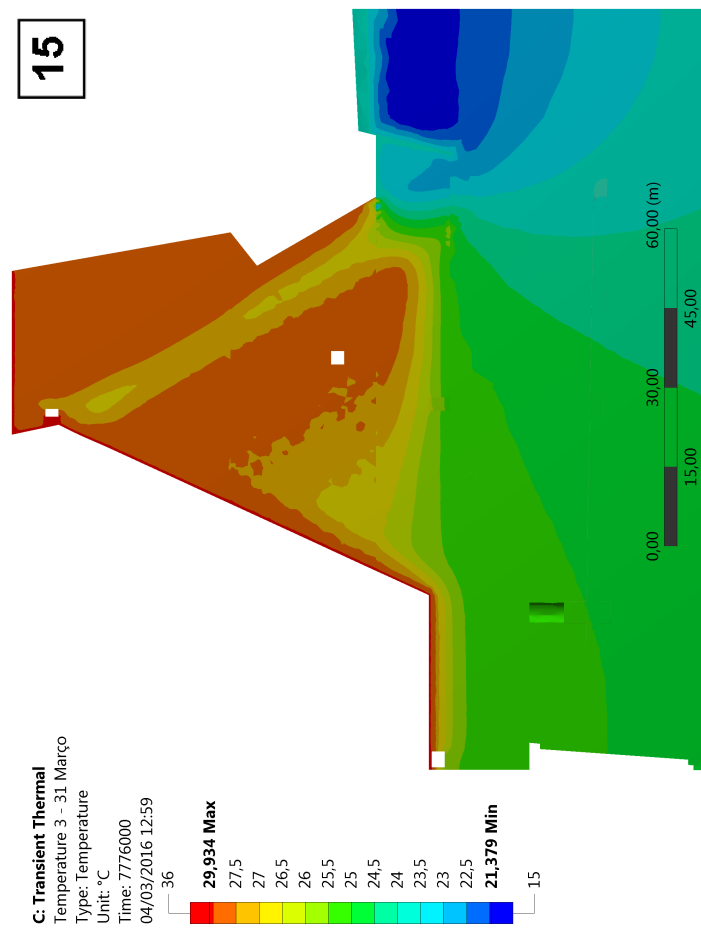


(b) Campo de Temperatura Dia 28 de Fevereiro.

Continuação na próxima página

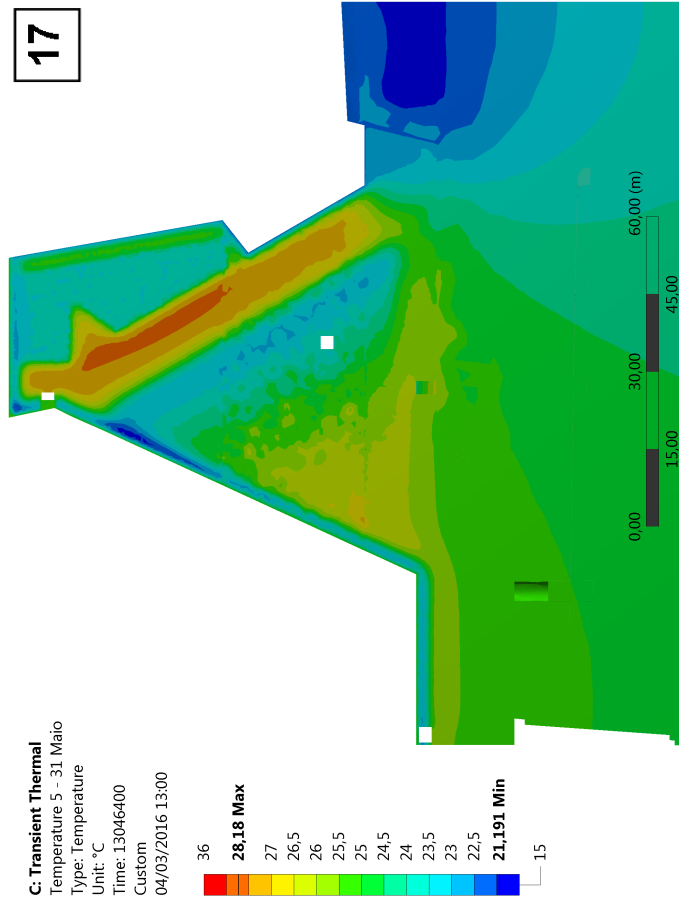


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Março.

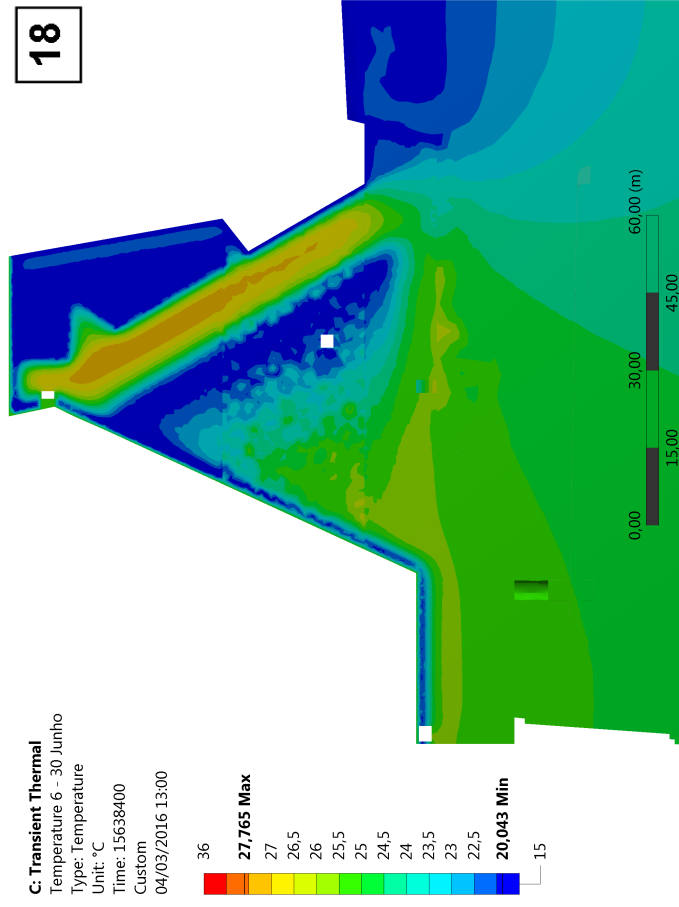


(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Abril.

Continuação na próxima página

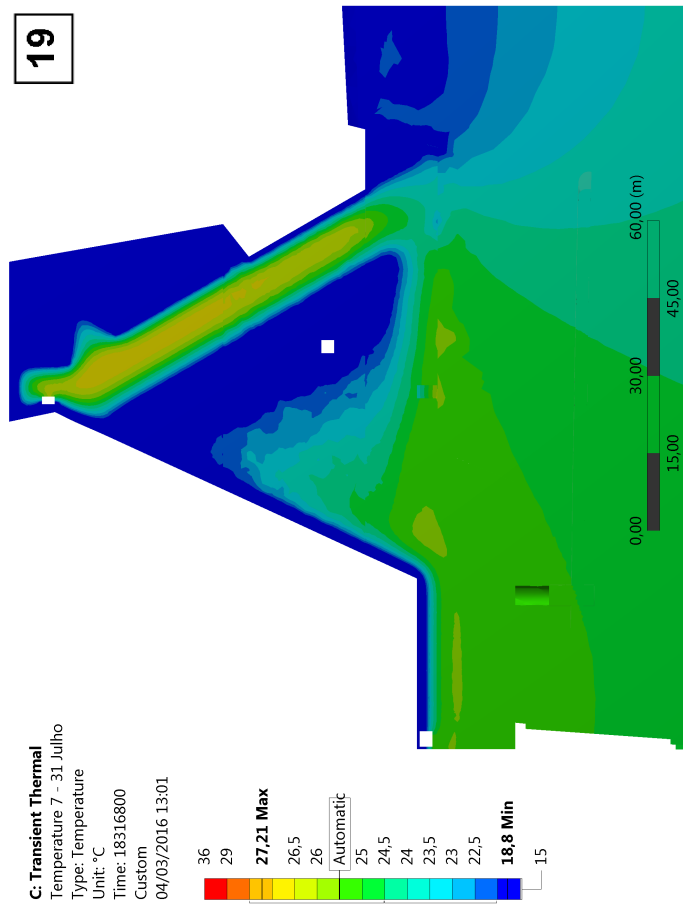


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Maio.

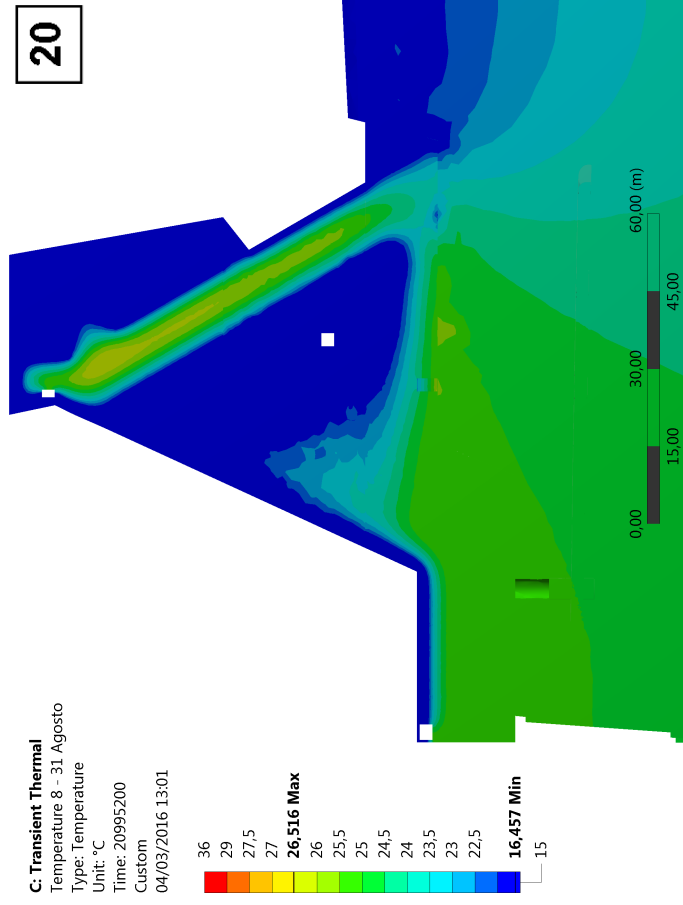


(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Junho.

Continuação na próxima página

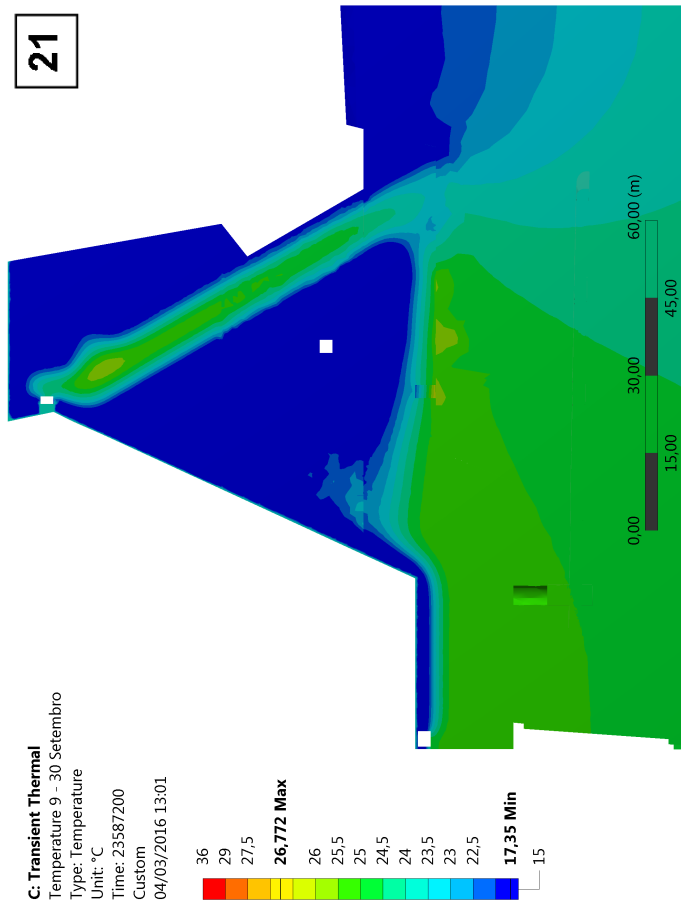


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Julho.

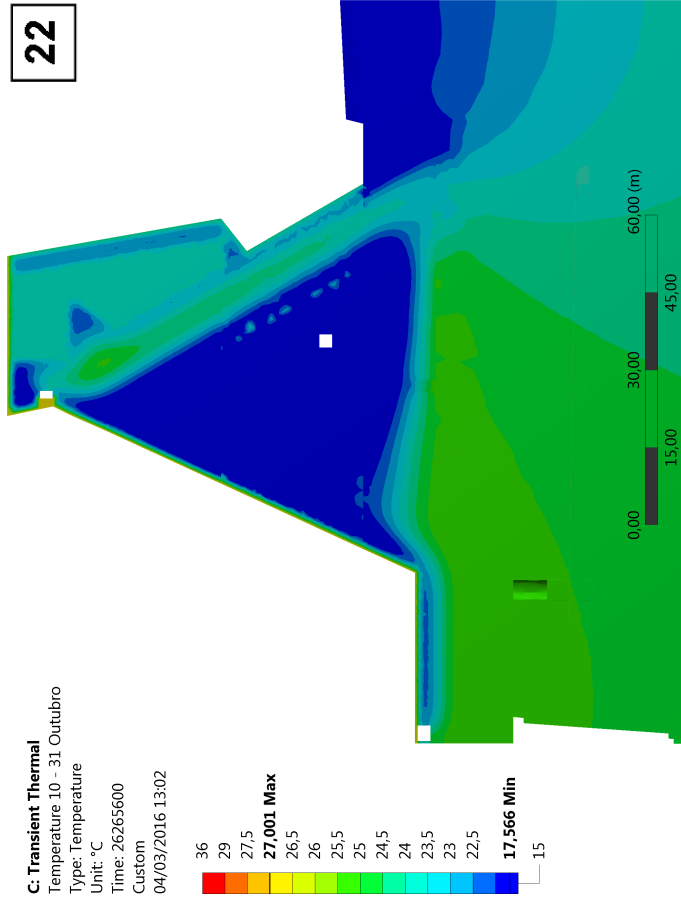


(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Agosto.

Continuação na próxima página

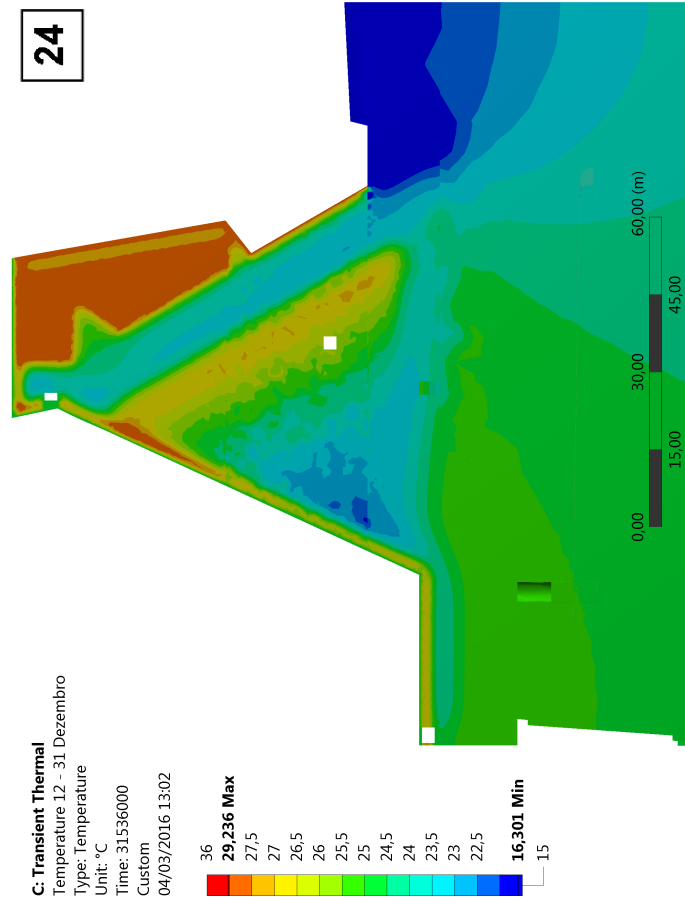


(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Setembro.

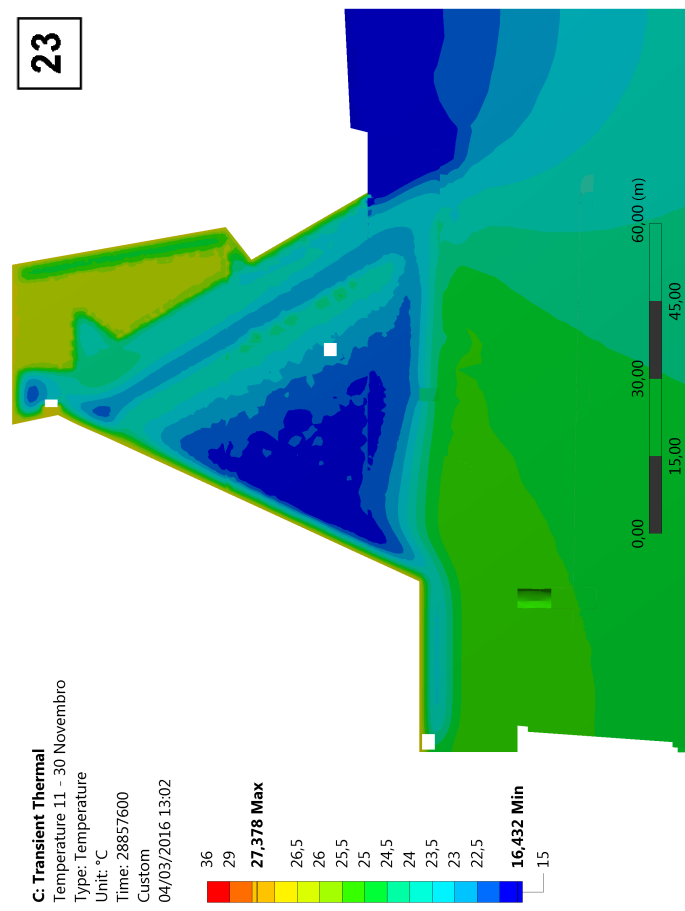


(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Outubro.

Continuação na próxima página



(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Novembro.



(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Dezembro.

FIGURA 31 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSIAIS PARA O ‘ANO MÉDIO’ DA FASE DE VALIDAÇÃO.  
 FONTE: O Autor (2016).



TABELA 5 – TEMPERATURAS MÁXIMAS E MÍNIMAS REAIS E APROXIMADAS NOS PONTOS DE LOCALIZAÇÃO DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA AS FASES DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO

Termômetro	Temperatura observada	Fase Calibração		Fase Validação	
		Mín.	Máx.	Mín.	Máx.
TI-E-1	Real	20.66	23.18	21.05	22.73
	Aproximada (MEF)	19.70	23.07	20.86	23.51
TI-E-2	Real	19.55	24.25	20.39	23.91
	Aproximada (MEF)	18.40	24.27	19.99	24.68
TI-E-3	Real	20.71	24.31	21.10	24.20
	Aproximada (MEF)	20.32	23.55	21.64	24.09

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 6 – TEMPERATURAS MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO REAIS E APROXIMADOS NOS PONTOS DE LOCALIZAÇÃO DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO

Termômetro	Temperatura Observada	Fase Calibração		
		Média	Desv. Pad.	Coef. Var. (%)
TI-E-1	Real	21.81	0.61	2.81
	Aproximada (MEF)	21.52	1.27	5.91
TI-E-2	Real	22.07	1.24	5.63
	Aproximada (MEF)	21.44	2.19	10.24
TI-E-3	Real	22.59	0.93	4.11
	Aproximada (MEF)	22.28	1.17	5.24

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 7 – TEMPERATURAS MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO REAIS E APROXIMADOS NOS PONTOS DE LOCALIZAÇÃO DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE VALIDAÇÃO

Termômetro	Fase Validação			
	Temperatura Observada	Média	Desv. Pad.	Coef. Var. (%)
TI-E-1	Real	21.79	0.49	2.23
	Aproximada (MEF)	22.30	0.95	4.25
TI-E-2	Real	22.24	1.19	5.37
	Aproximada (MEF)	22.47	1.63	7.27
TI-E-3	Real	22.64	0.94	4.14
	Aproximada (MEF)	23.11	0.86	3.71

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 8 – TEMPERATURAS MÁXIMAS, MÍNIMAS, MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO NOS PONTOS MONITORADOS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO

Ponto Monit.	Fase	Mín.	Máx.	Média	Desv. Pad.	Coef. Var. (%)
Ponto PM-06	Calib.	16.08	28.30	22.44	4.20	18.74
	Valid.	18.51	28.48	23.49	3.14	13.39
Ponto PM-05	Calib.	19.19	27.36	23.19	2.99	12.88
	Valid.	21.02	27.60	24.35	2.24	9.20
Ponto PM-04	Calib.	23.46	27.49	26.06	1.63	6.26
	Valid.	23.92	28.14	26.41	1.71	6.49

FONTE: O Autor (2016).

A TABELA 5 mostra por meio das temperaturas máximas e mínimas atingidas nos pontos de localização dos termômetros internos, que a amplitude de variação real e aproximada por elementos finitos está de acordo em ambas as fases de calibração e validação. As TABELAS 6 e 7 apresentam alguns dados estatísticos das temperaturas reais e aproximadas para os mesmos pontos, para ambas as fases, e nota-se boa concordância nos resultados. Finalmente, a TABELA 8 reúne algumas informações estatísticas nos pontos de monitoramento adicionais. É perceptível através dos resultados no Ponto PM-06 que ao se aproximar da superfície, a amplitude de variação da temperatura é maior (basta comparar os máximos e mínimos entre os pontos) e o coeficiente de variação também é maior, o que denota relativa variabilidade dos dados em torno da média.

### 4.3 SOLUÇÃO VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

O método das diferenças finitas fracionárias, na sua forma implícita (Equação (2.96)), foi inicialmente aplicado a um exemplo, que pode ser visto em Li e Zeng (2015), e tem por objetivo evidenciar a validade do método ao comparar-se a solução numérica e analítica do modelo proposto.

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_C D_{0,t}^\gamma U = \Delta U + \text{sen}(x+y) \left[ \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \left( \frac{2t+1}{1-\gamma} - \frac{2t}{2-\gamma} \right) + 2(t^2+t+1) \right], \\ (x, y, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1], \\ U(x, y, 0) = \text{sen}(x+y), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ U(0, y, t) = (t^2+t+1) \text{sen}(y), \quad U(1, y, t) = (t^2+t+1) \text{sen}(y+1), \\ (y, t) \in (0, 1) \times (0, 1], \\ U(x, 0, t) = (t^2+t+1) \text{sen}(x), \quad U(x, 1, t) = (t^2+t+1) \text{sen}(x+1), \\ (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1]. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

A solução analítica para este modelo é  $U(x, y, t) = (t^2+t+1) \text{sen}(x+y)$ , como pode ser visto em (LI; ZENG, 2015). Tomando  $\gamma = 0.2$ ,  $\Delta t = \Delta x = \Delta y = 0.25$  e aplicando o MDFF visto na Equação (2.96), as TABELAS 9, 10, 11 e 12 apresentam um comparativo entre as soluções numéricas e analíticas por meio dos erros relativos para  $t = 0.25$ ,  $t = 0.5$ ,  $t = 0.75$  e  $t = 1.0$ .

TABELA 9 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA  $t = 0.25$

Coordenadas	Solução Analítica	Solução Numérica	Erro Relativo
$x = 0.25; y = 0.25$	0.6292	0.6306	0.0022
$x = 0.25; y = 0.5$	0.8947	0.8967	0.0023
$x = 0.25; y = 0.75$	1.1044	1.1062	0.0016
$x = 0.5; y = 0.25$	0.8947	0.8967	0.0023
$x = 0.5; y = 0.5$	1.1044	1.1073	0.0026
$x = 0.5; y = 0.75$	1.2455	1.2480	0.0019
$x = 0.75; y = 0.25$	1.1044	1.1062	0.0016
$x = 0.75; y = 0.5$	1.2455	1.2480	0.0019
$x = 0.75; y = 0.75$	1.3092	1.3112	0.0015

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 10 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA  $t = 0.5$ 

Coordenadas	Solução Analítica	Solução Numérica	Erro Relativo
$x = 0.25; y = 0.25$	0.8390	0.8365	0.0030
$x = 0.25; y = 0.5$	1.1929	1.1892	0.0030
$x = 0.25; y = 0.75$	1.4726	1.4694	0.0021
$x = 0.5; y = 0.25$	1.1929	1.1892	0.0030
$x = 0.5; y = 0.5$	1.4726	1.4675	0.0035
$x = 0.5; y = 0.75$	1.6607	1.6564	0.0026
$x = 0.75; y = 0.25$	1.4726	1.4694	0.0021
$x = 0.75; y = 0.5$	1.6607	1.6564	0.0026
$x = 0.75; y = 0.75$	1.7456	1.7421	0.0020

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 11 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA  $t = 0.75$ 

Coordenadas	Solução Analítica	Solução Numérica	Erro Relativo
$x = 0.25; y = 0.25$	1.1087	1.1007	0.0072
$x = 0.25; y = 0.5$	1.5763	1.5647	0.0074
$x = 0.25; y = 0.75$	1.9459	1.9357	0.0052
$x = 0.5; y = 0.25$	1.5763	1.5647	0.0074
$x = 0.5; y = 0.5$	1.9459	1.9295	0.0084
$x = 0.5; y = 0.75$	2.1945	2.1808	0.0063
$x = 0.75; y = 0.25$	1.9459	1.9357	0.0052
$x = 0.75; y = 0.5$	2.1945	2.1808	0.0063
$x = 0.75; y = 0.75$	2.3067	2.2953	0.0049

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 12 – COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA PARA  $t = 1.0$ 

Coordenadas	Solução Analítica	Solução Numérica	Erro Relativo
$x = 0.25; y = 0.25$	1.4383	1.4231	0.0106
$x = 0.25; y = 0.5$	2.0449	2.0227	0.0109
$x = 0.25; y = 0.75$	2.5244	2.5050	0.0077
$x = 0.5; y = 0.25$	2.0449	2.0227	0.0109
$x = 0.5; y = 0.5$	2.5244	2.4931	0.0124
$x = 0.5; y = 0.75$	2.8470	2.8207	0.0092
$x = 0.75; y = 0.25$	2.5244	2.5050	0.0077
$x = 0.75; y = 0.5$	2.8470	2.8207	0.0092
$x = 0.75; y = 0.75$	2.9925	2.9707	0.0073

FONTE: O Autor (2016).

Fica evidente por meio das tabelas que o método numérico apresentou resultados suficientemente próximos à solução analítica nos pontos em análise, concedendo um indicativo de que o método pode ser aplicado a outros modelos fracionários, em particular ao modelo térmico fracionário de um bloco de contraforte.

O esquema numérico visto na Seção 3.3 foi aplicado e as dimensões do bloco, coeficiente de difusividade térmica para a Equação (3.9) e as variáveis exibidas na FIGURA 16 adotadas foram:

- comprimento da base do bloco =  $89\text{ m}$ ; altura do bloco =  $85\text{ m}$ ;  $\alpha = 5 \times 10^{-7}\text{ m}^2\text{s}$ ;
- $nx = ny = 30$ ;  $nde = 1$ ;  $ndd = 3$ ;  $nee = ned = 5$ .

A FIGURA 32 apresenta a geometria, malha, as variáveis acima, localização dos pontos de prova (termômetros internos TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3), pontos de monitoramento adicionais (Ponto 1, Ponto 2 e Ponto 3) e as condições de contorno delimitadas de maneira análoga ao esquema via elementos finitos, ou seja: do ponto A ao ponto B a função temperatura adotada foi a do termômetro TS-E-1, do ponto B ao C do termômetro TS-D-903, do ponto C ao D do termômetro TS-D-904, do ponto D ao E do termômetro TS-D-5, do ponto E ao ponto A foi considerado fluxo de calor nulo, ou seja,  $q = 0$ . O período de dados de temperatura escolhido consistiu no mesmo da fase de validação, de 2005 a 2014, de modo que as séries de Fourier dos 7 termômetros já foram ajustadas no esquema anterior.

O MDFFF, Equação (3.10), foi implementado tomando-se:  $\Delta x = 89/30$ ,  $\Delta y = 85/30$ ,  $\Delta t = 1\text{ dia}$  e  $G(x, y, t) = 0$ . A ordem da derivada fracionária  $\gamma$  foi ajustada para um valor no intervalo  $(0; 2)$  de modo que ao comparar-se a solução do modelo fracionário com a série de Fourier nos pontos de prova (termômetros internos), o erro MAPE foi considerado satisfatório (inferior a 5%).

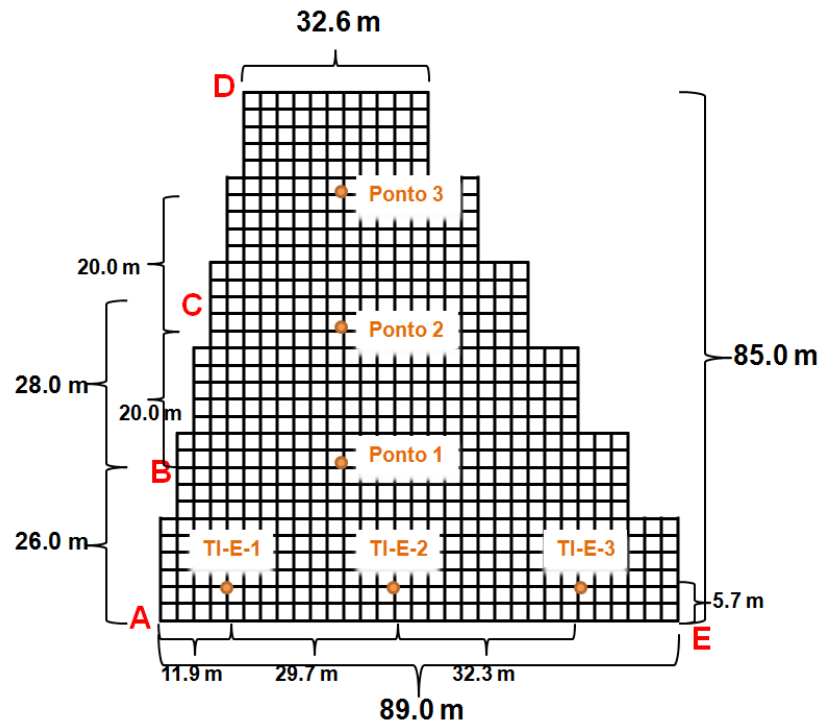


FIGURA 32 – MALHA PARA APLICAÇÃO DO MDFF, DIMENSÕES DO BLOCO, DELIMITAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO, LOCALIZAÇÃO DOS TERMÔMETROS INTERNOS E PONTOS ADICIONAIS DE MONITORAMENTO.

FONTE: O Autor (2016).

Variando-se a ordem da derivada fracionária, notou-se que uma melhor aproximação entre as séries de Fourier dos termômetros internos e a solução do modelo fracionário pelo MDFF ocorreu quando  $\gamma$  pertencia ao intervalo  $[1.1, 1.2]$  caracterizando o processo de superdifusão, conforme Seção 2.3. A TABELA 13 evidencia este fato através dos erros MAPE's.

TABELA 13 – ERROS MAPE's EM PORCENTAGEM (%) ENTRE SÉRIES DE FOURIER E MODELO FRACIONÁRIO E SÉRIES DE FOURIER E MODELO TRADICIONAL

Ordem da Derivada	Termômetro	MAPE MDFF	MAPE MEF
$\gamma = 0.1$	TI-E-1	1.82	2.46
	TI-E-2	3.81	7.28
	TI-E-3	3.77	7.24
$\gamma = 1.0$	TI-E-1	1.86	2.46
	TI-E-2	3.81	7.28
	TI-E-3	3.74	7.24
$\gamma = 1.1$	TI-E-1	1.58	2.46
	TI-E-2	3.80	7.28
	TI-E-3	3.29	7.24
$\gamma = 1.15$	<b>TI-E-1</b>	<b>0.39</b>	<b>2.46</b>
	<b>TI-E-2</b>	<b>3.23</b>	<b>7.28</b>
	<b>TI-E-3</b>	<b>2.46</b>	<b>7.24</b>
$\gamma = 1.2$	TI-E-1	2.18	2.46
	TI-E-2	4.49	7.28
	TI-E-3	6.03	7.24
$\gamma = 1.3$	TI-E-1	7.29	2.46
	TI-E-2	9.67	7.28
	TI-E-3	14.18	7.24

FONTE: O Autor (2016).

A FIGURA 33 exibe os gráficos comparativos entre as temperaturas reais ajustadas por série de Fourier, as determinadas pelo método dos elementos finitos e as obtidas por meio da resolução do modelo térmico por diferenças finitas fracionárias no ‘ano médio’ correspondente ao período de 2005 – 2014, nos pontos onde localizam-se os termômetros internos (veja FIGURA 32). A TABELA 14 resume algumas informações estatísticas destas temperaturas, evidenciando o melhores resultados para o modelo fracionário.

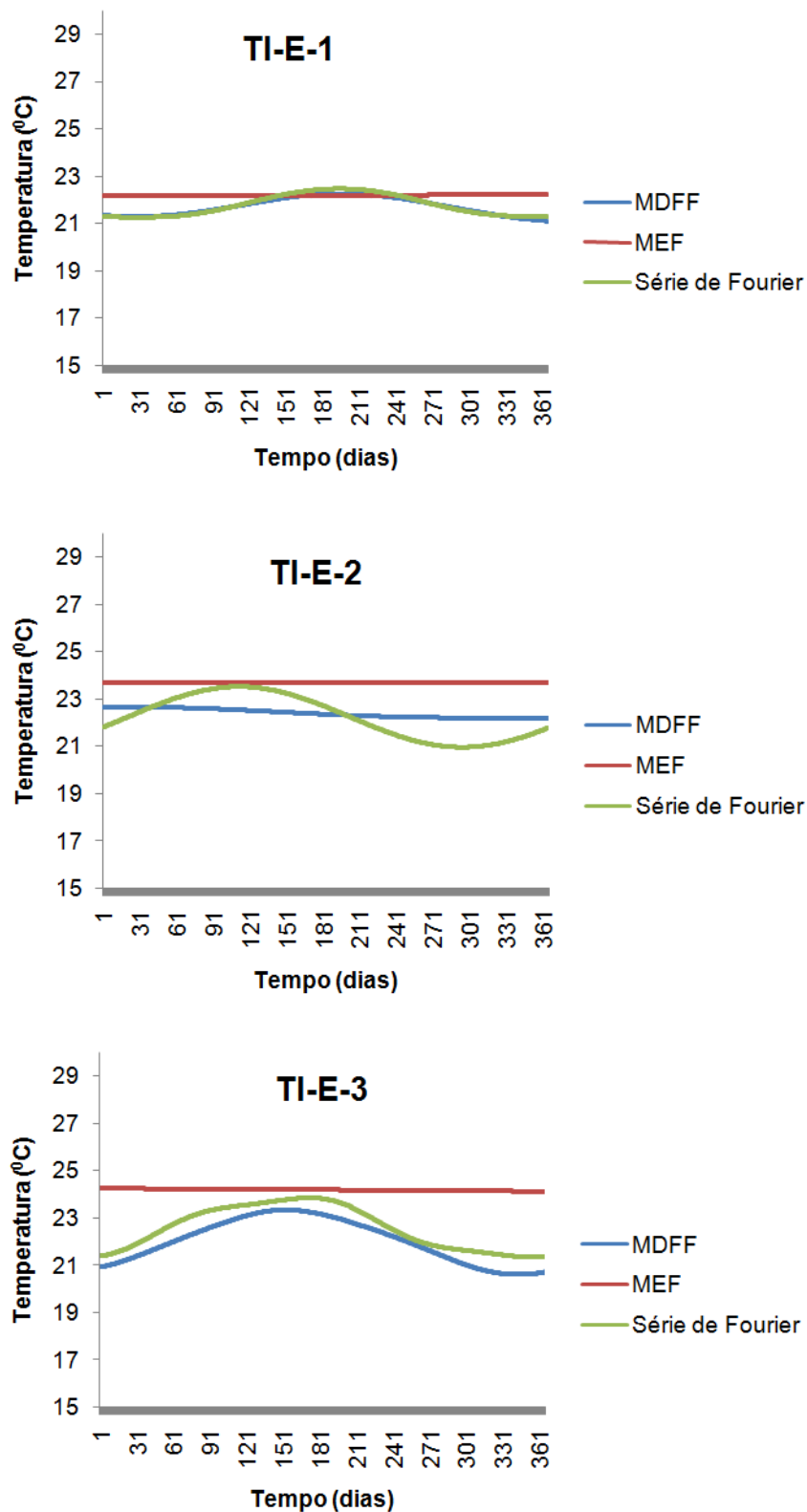


FIGURA 33 – GRÁFICOS COMPARATIVOS ENTRE AS TEMPERATURAS VIA SÉRIE DE FOURIER, VIA MDFF ( $\gamma = 1.15$ ) E VIA MEF PARA O 'ANO MÉDIO' DO PERÍODO DE 2005 A 2014.

FONTE: O Autor (2016).



TABELA 14 – TEMPERATURAS MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO REAIS E APROXIMADOS PELO MEF E MDFF NOS PONTOS DE LOCALIZAÇÃO DOS TERMÔMETROS INTERNOS

Termômetro	Temp. Observada	Média	Desv. Pad.	Coef. Var. (%)
TI-E-1	Real	21.79	0.49	2.23
	Aproximada (MDFF)	21.71	0.37	1.70
	Aproximada (MEF)	22.20	0.00	0.00
TI-E-2	Real	22.24	1.19	5.37
	Aproximada (MDFF)	22.40	0.18	0.80
	Aproximada (MEF)	23.71	0.00	0.00
TI-E-3	Real	22.64	0.94	4.14
	Aproximada (MDFF)	22.04	0.92	4.19
	Aproximada (MEF)	24.20	0.04	0.15

FONTE: O Autor (2016).

A FIGURA 33 aliada às TABELAS 13 e 14 constatam que para a geometria bidimensional simplificada (FIGURA 32), condições de contorno e propriedades do material em questão, o modelo térmico composto em termos de derivadas fracionárias apresentou um resultado mais compatível com a realidade ao tomar-se como base de comparação os dados dos termômetros internos inseridos no bloco de contraforte do que o modelo térmico tradicional. Sendo esse o primeiro passo para justificar e continuar a investigação da aplicabilidade de modelos térmicos fracionários em barragem de concreto, em particular, contrafortes.

Além dos pontos de prova, onde se localizam os termômetros internos, selecionou-se outros três pontos no interior do bloco (veja a localização destes pontos na FIGURA 32) para monitorar a distribuição anual da temperatura, como mostra a FIGURA 34. A TABELA 15 exhibe alguns dados estatísticos sobre a temperatura nestes pontos.

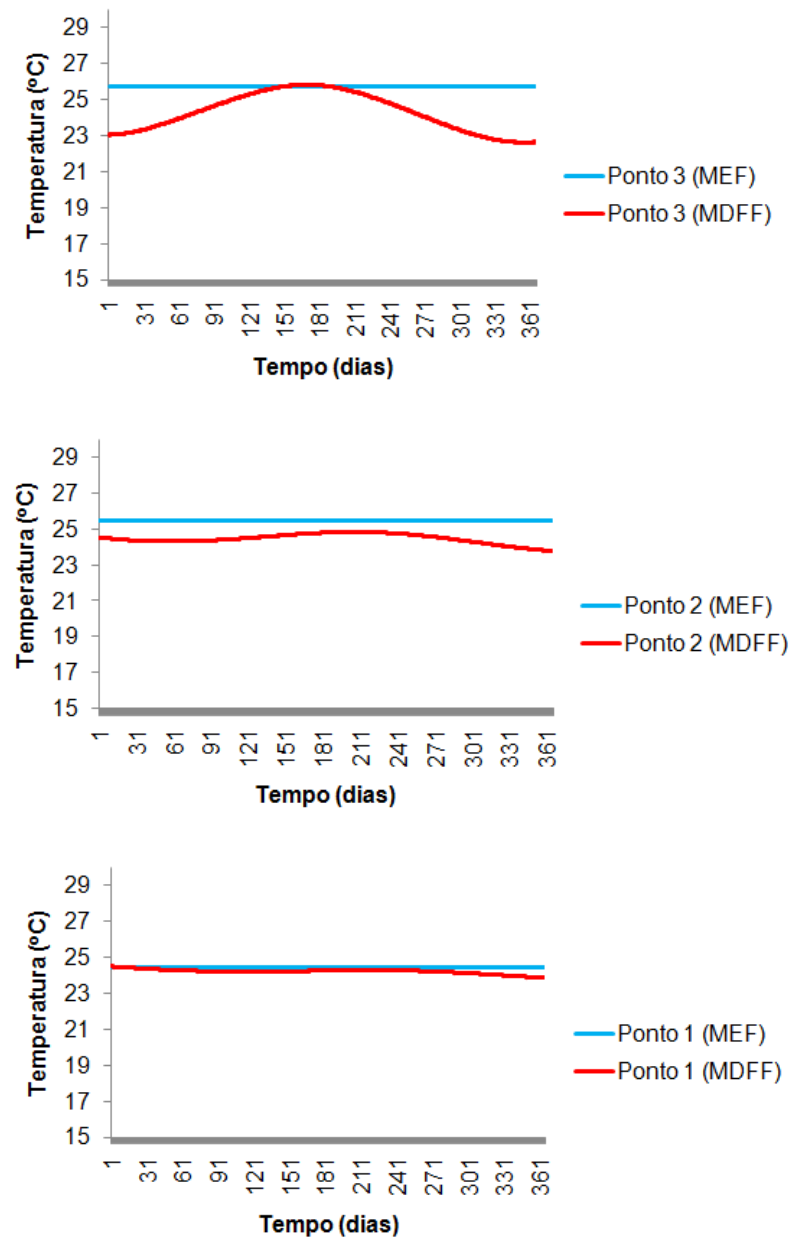


FIGURA 34 – GRÁFICOS COMPARATIVOS ENTRE AS TEMPERATURAS VIA MEF E VIA MDFF PARA O ‘ANO MÉDIO’ DO PERÍODO DE 2005 A 2014.

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 15 – TEMPERATURAS MÉDIA, DESVIO PADRÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO NOS PONTOS MONITORADOS PARA O MODELO EM ELEMENTOS FINITOS E EM DIFERENÇAS FINITAS FRACIONÁRIAS

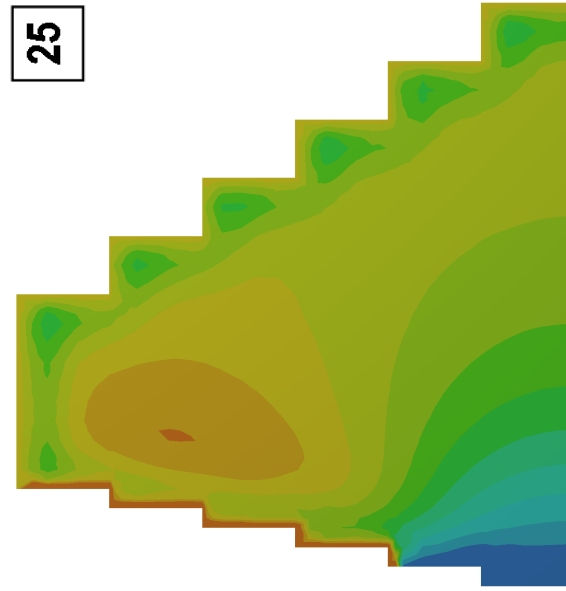
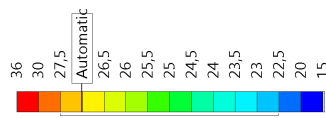
Ponto de Monit.	Temp. Observada	Média	Desv. Pad.	Coef. Var. (%)
Ponto 1	Aproximada (MDFF)	24.22	0.13	0.52
	Aproximada (MEF)	24.43	0.00	0.00
Ponto 2	Aproximada (MDFF)	24.47	0.28	1.12
	Aproximada (MEF)	25.45	0.00	0.00
Ponto 3	Aproximada (MDFF)	24.31	1.08	4.42
	Aproximada (MEF)	25.71	0.00	0.00

FONTE: O Autor (2016).

Por meio dos gráficos nas FIGURAS 33, 34 e 35 é visto que as temperaturas determinadas pelo método dos elementos finitos para a equação da condução de calor aplicada à geometria bidimensional, FIGURA 32, apresentou baixa variação durante o ano, sendo mais visível alterações na temperatura próximas à superfície. Já o modelo de condução de calor fracionário apresentou variação de temperatura significativa no interior do bloco, como exibem as figuras 33, 34 e 36, uma vez que adotou-se um modelo de superdifusão para descrever o campo de temperatura no bloco bidimensional. Como observado na TABELA 13, o menor erro MAPE entre a série de Fourier e o Método das Diferenças Finitas Fracionárias nos pontos onde se localizam os termômetros internos, foi encontrado para a ordem 1.15 da derivada temporal de Caputo da Equação (3.9).

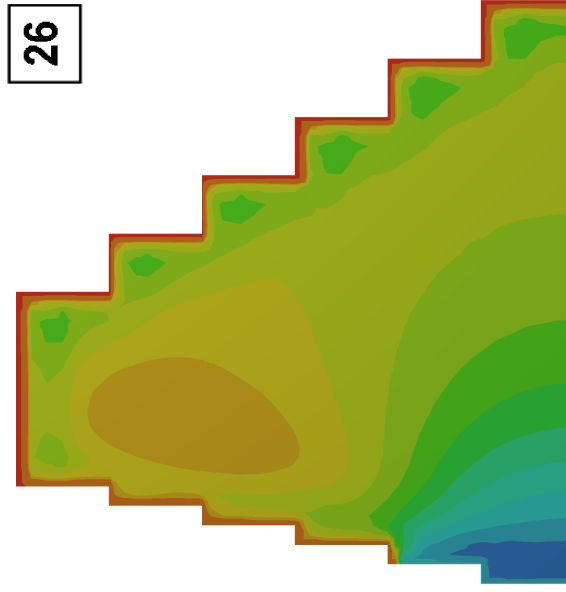
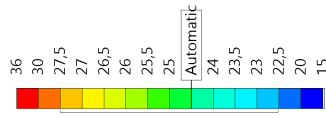
Finalmente, ao analisar as curvas representadas nas FIGURAS 25, 29 e 33, do ponto de vista do fenômeno físico envolvido, alguns fatores podem ser utilizados para justificar o comportamento um pouco diferenciado entre as curvas, como: ausência de transferência de calor entre o bloco e sua fundação, que foi suprimida devido a falta de dados relevantes para a resolução do modelo térmico do bloco; simplificações na modelagem, conforme discutido no início da Seção 4.2; e quantidade limitada de dados observados, como visto na TABELA 1, o que torna o ajuste por série de Fourier limitado para representar os dados de forma aproximada.

**C: Transient Thermal**  
 Temperature 13 - 31 Janeiro  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 3421,4400  
 Custom  
 Max: 29,069  
 Min: 21,323  
 17/03/2016 10:56



(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Janeiro.

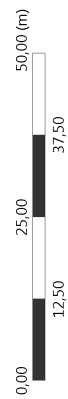
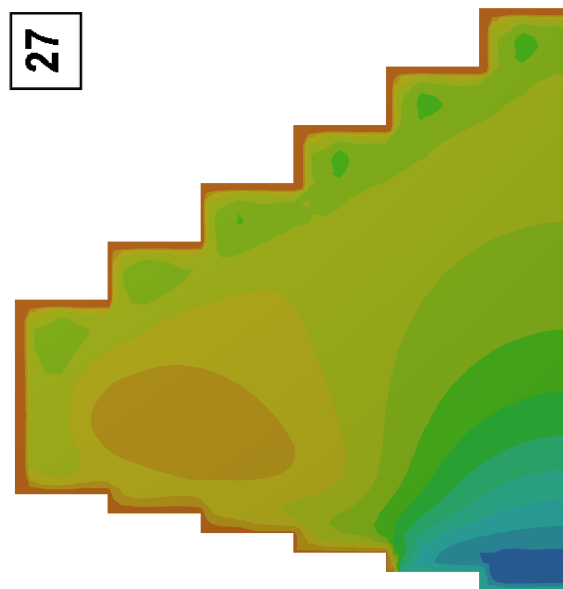
**C: Transient Thermal**  
 Temperature 14 - 28 Fevereiro  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 36633600  
 Custom  
 Max: 31,826  
 Min: 21,634  
 17/03/2016 10:56



(b) Campo de Temperatura Dia 28 de Fevereiro.

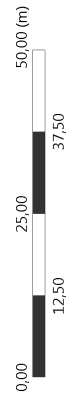
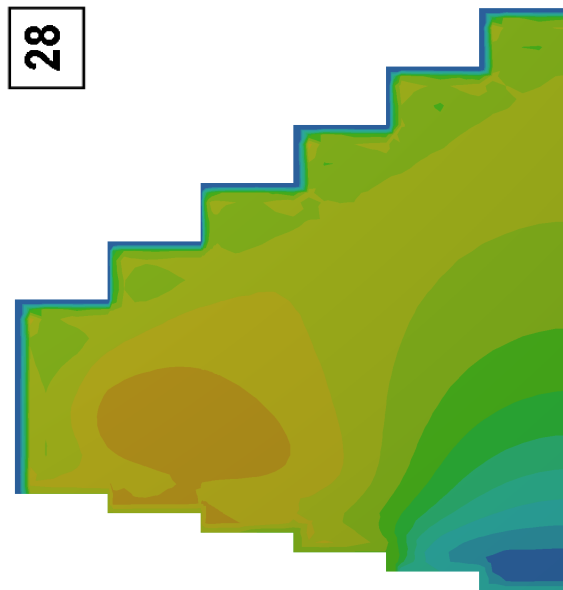
Continuação na próxima página

**C: Transient Thermal**  
 Temperature 15 - 31 Março  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 39312000  
 Custom  
 Max: 29,786  
 Min: 21,889  
 17/03/2016 10:56



(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Março.

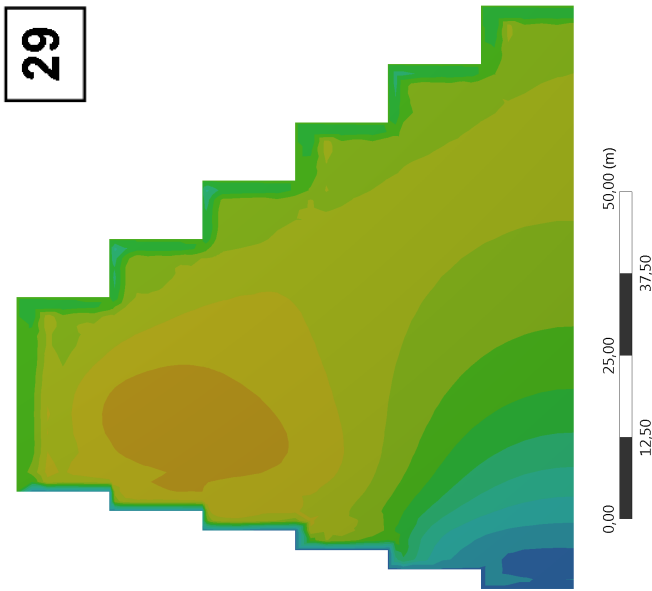
**C: Transient Thermal**  
 Temperature 16 - 30 Abril  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 41904000  
 Custom  
 Max: 27,431  
 Min: 20,376  
 17/03/2016 10:57



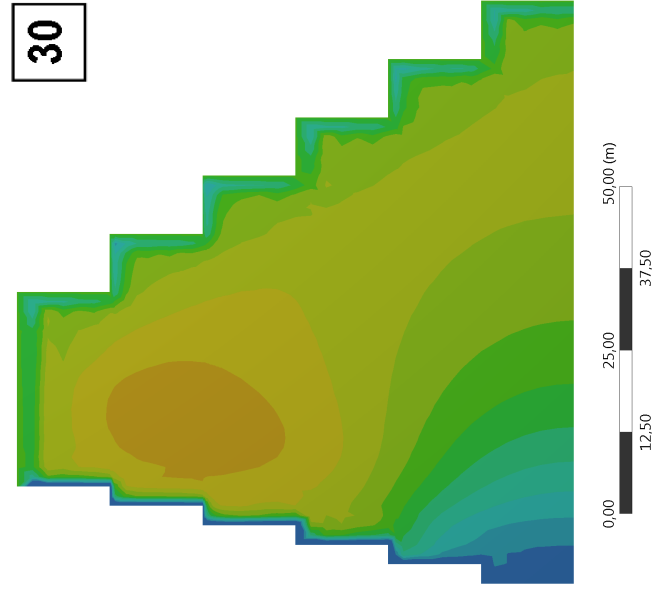
(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Abril.

Continuação na próxima página

**C: Transient Thermal**  
 Temperature 17 - 31 Maio  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 44582400  
 Custom  
 Max: 27,367  
 Min: 22,315  
 17/03/2016 10:57



**C: Transient Thermal**  
 Temperature 18 - 30 Junho  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 47174400  
 Custom  
 Max: 27,337  
 Min: 20,467  
 17/03/2016 10:57



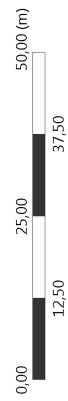
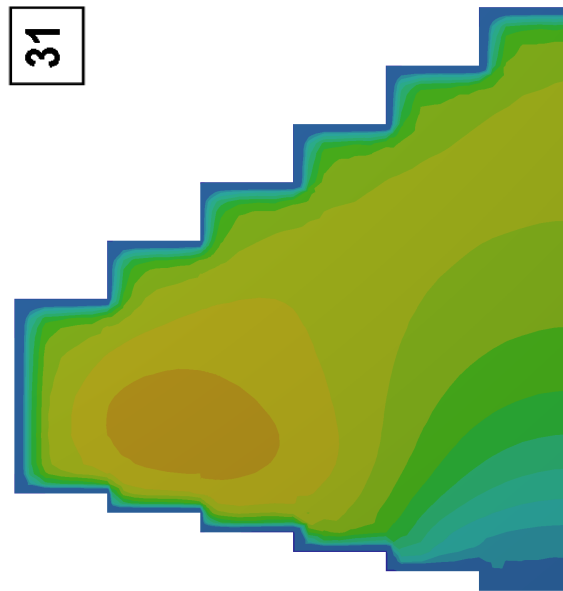
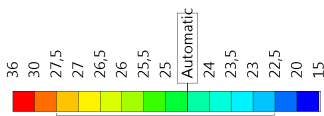
30

(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Maio.

(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Junho.

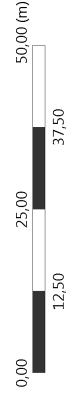
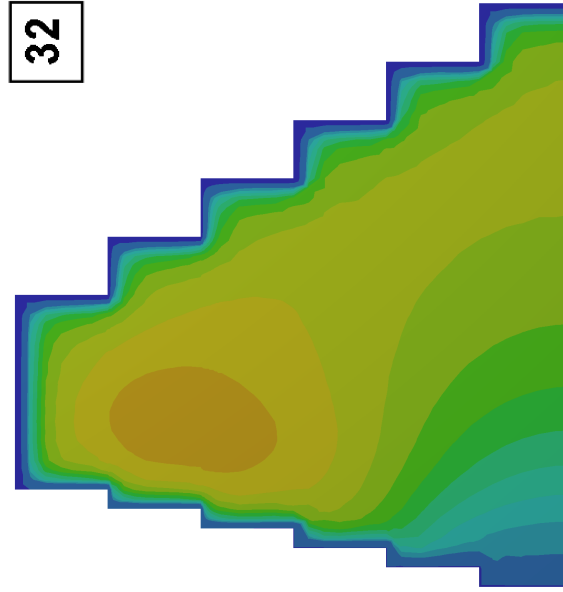
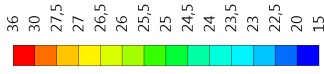
Continuação na próxima página

**C: Transient Thermal**  
 Temperature 19 - 31 Julho  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 49852800  
 Custom  
 Max: 27,313  
 Min: 19,609  
 17/03/2016 10:58



(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Julho.

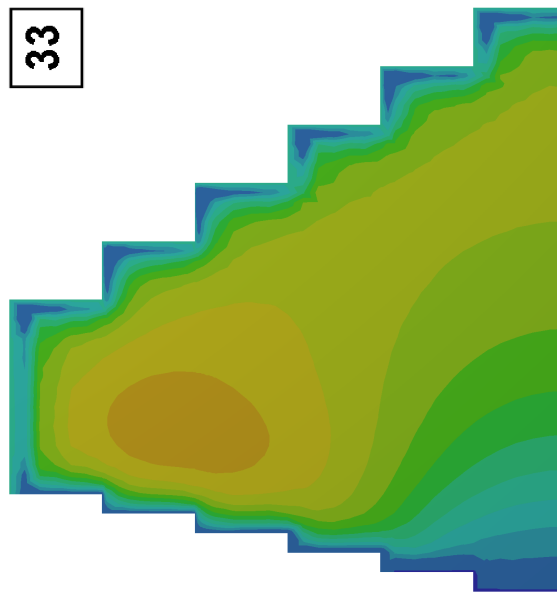
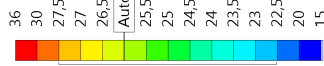
**C: Transient Thermal**  
 Temperature 20 - 31 Agosto  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 52531200  
 Custom  
 Max: 27,29  
 Min: 17,487  
 17/03/2016 10:58



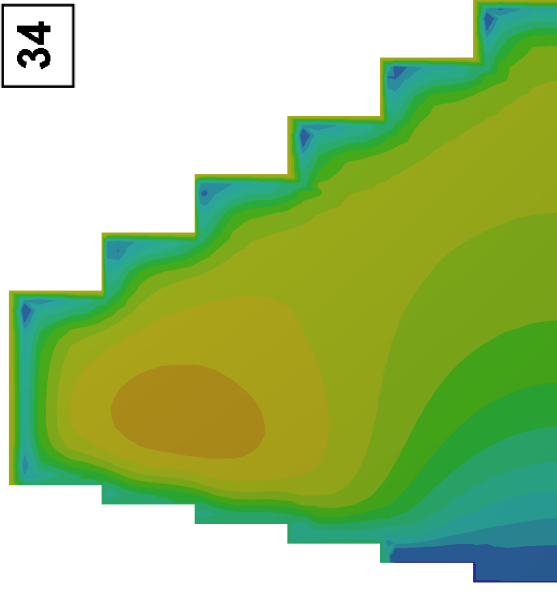
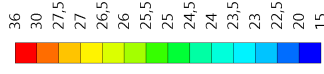
(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Agosto.

Continuação na próxima página

**C: Transient Thermal**  
 Temperature 21 - 30 Setembro  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 55123200  
 Custom  
 Max: 27,269  
 Min: 19,565  
 17/03/2016 10:58



**C: Transient Thermal**  
 Temperature 22 - 31 Outubro  
 Type: Temperature  
 Unit: °C  
 Time: 57801600  
 Custom  
 Max: 27,248  
 Min: 19,764  
 17/03/2016 10:58



**34**

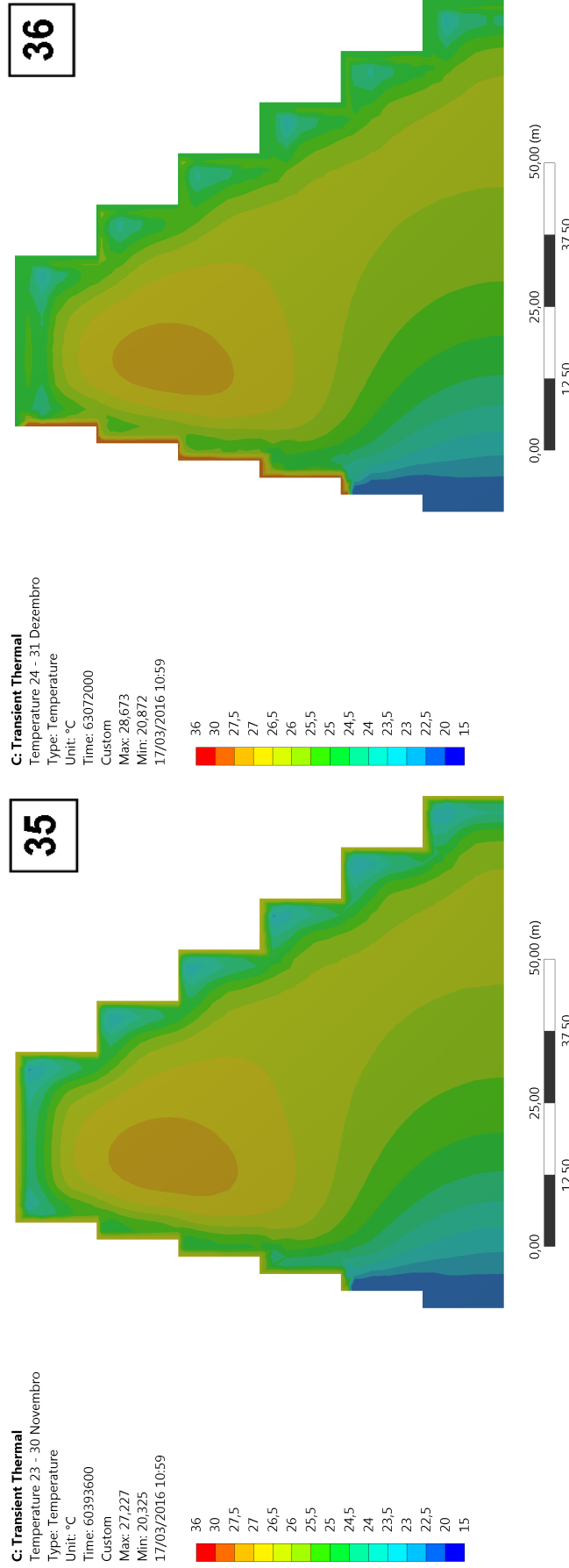
**33**

(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Setembro.

(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Outubro.

Continuação na próxima página

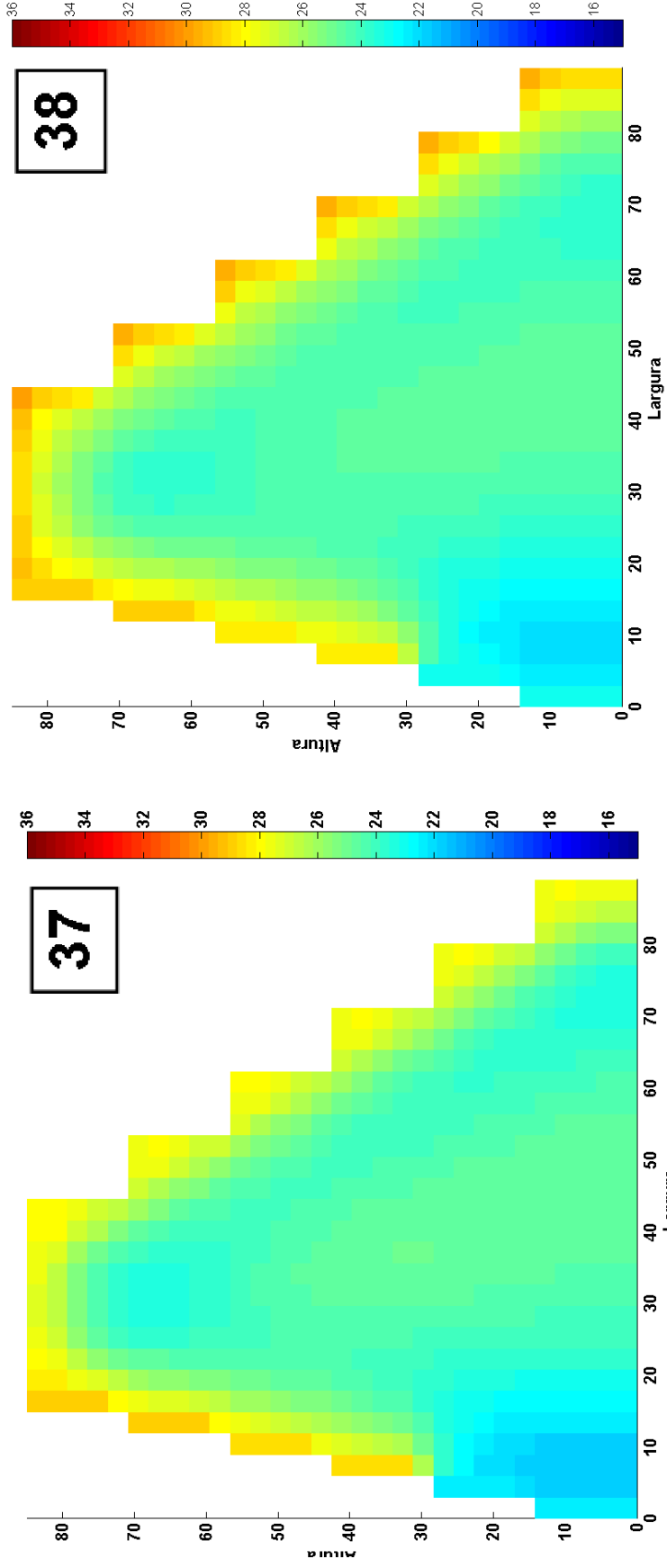




(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Novembro.

(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Dezembro.

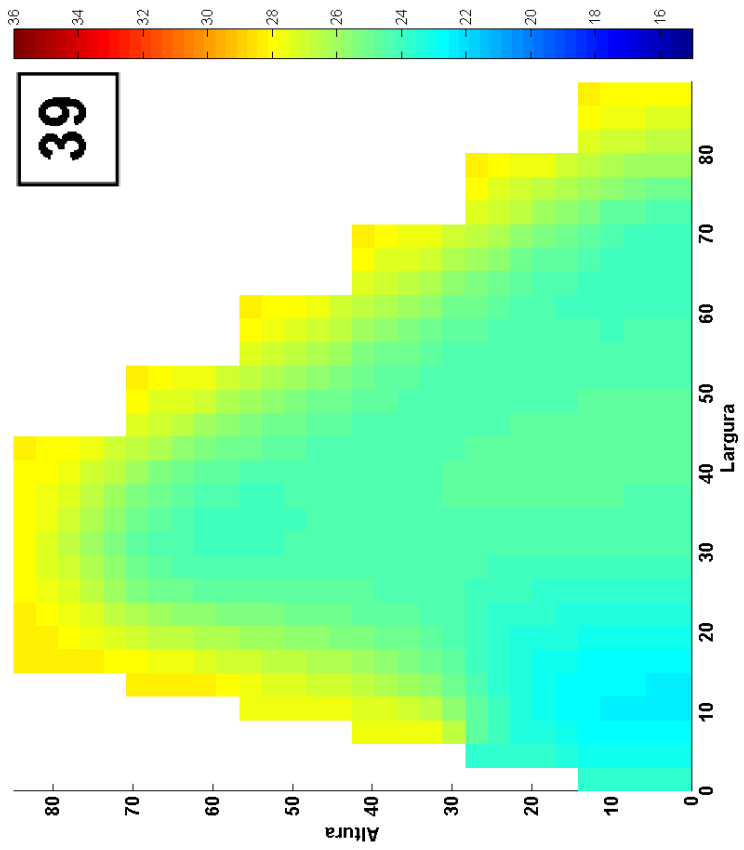
FIGURA 35 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSUAIS PARA O 'ANO MÉDIO' 2005-2014 VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.  
 FONTE: O Autor (2016).



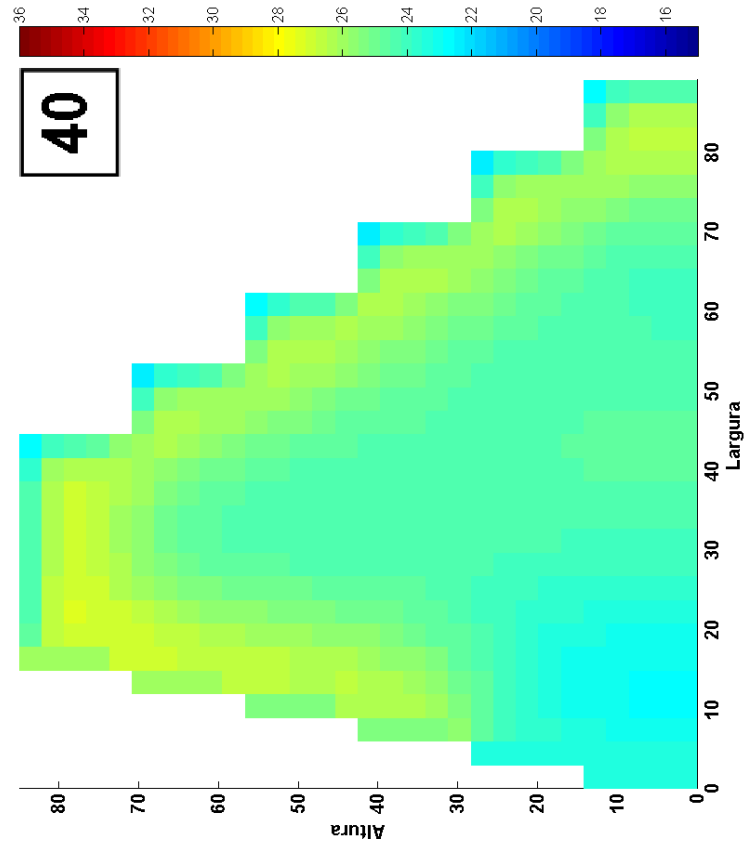
(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Janeiro.

(b) Campo de Temperatura Dia 28 de Fevereiro.

Continuação na próxima página

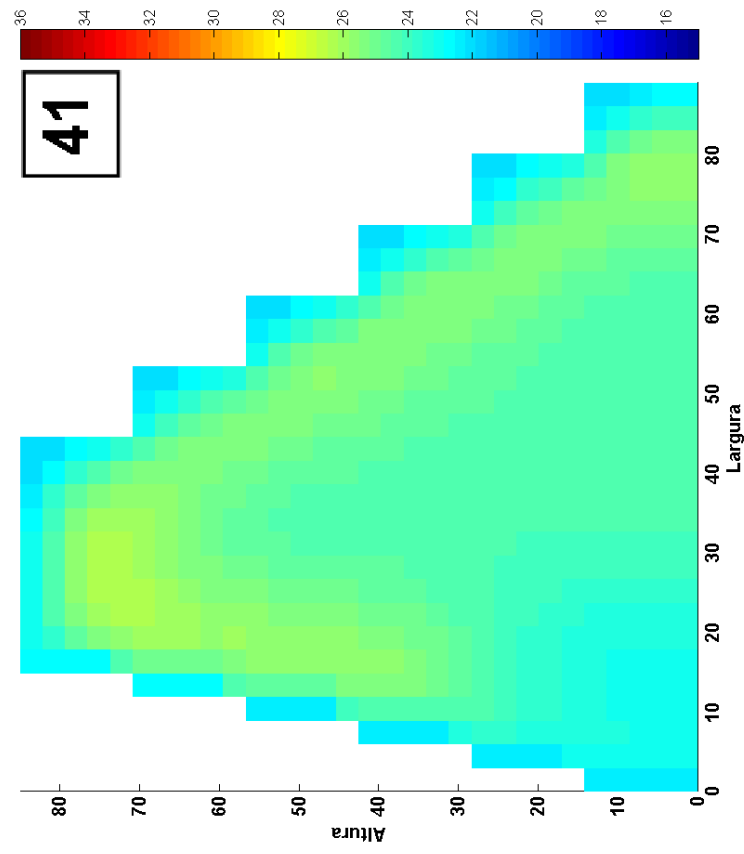


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Março.

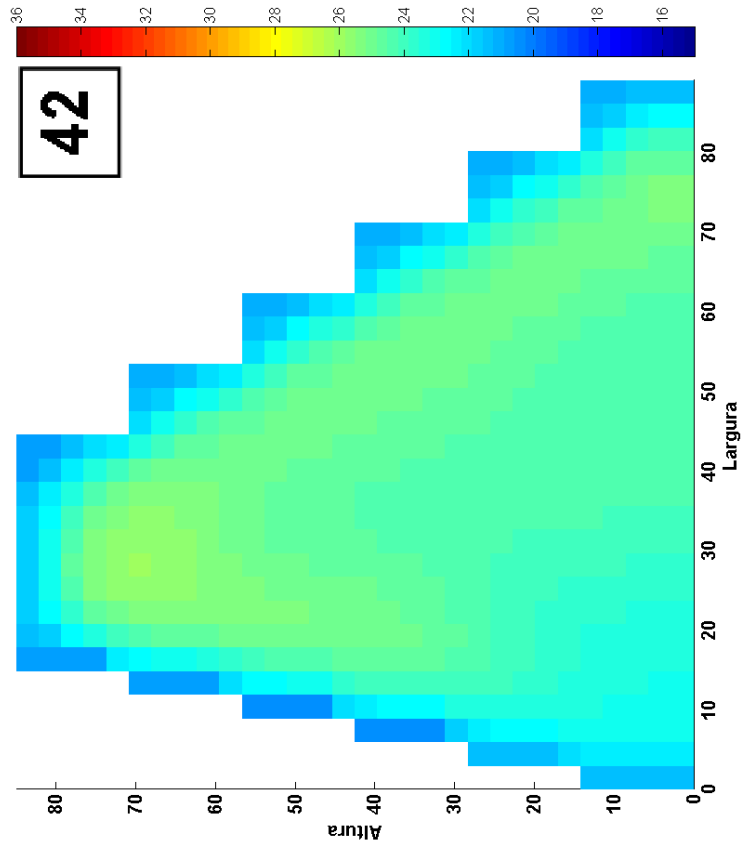


(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Abril.

Continuação na próxima página

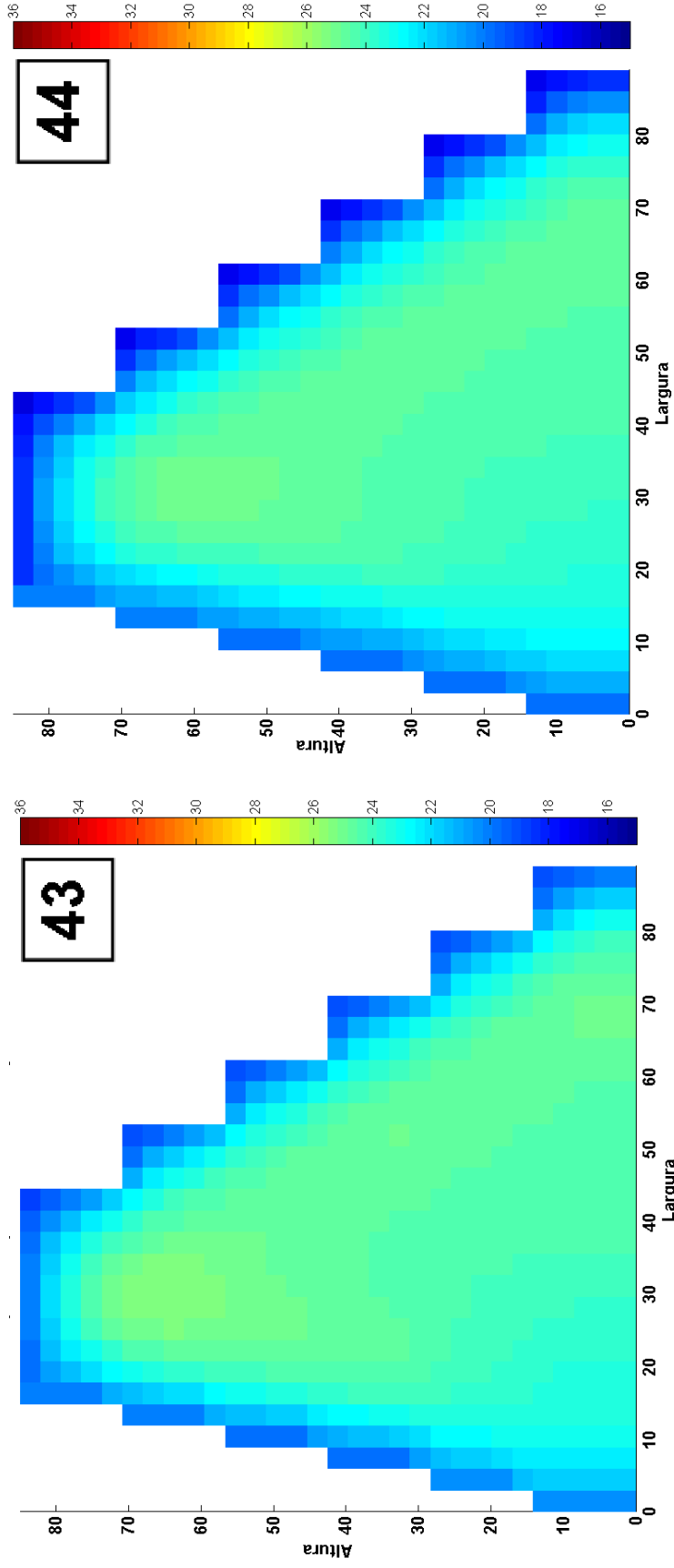


(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Maio.



(b) Campo de Temperatura Dia 30 de Junho.

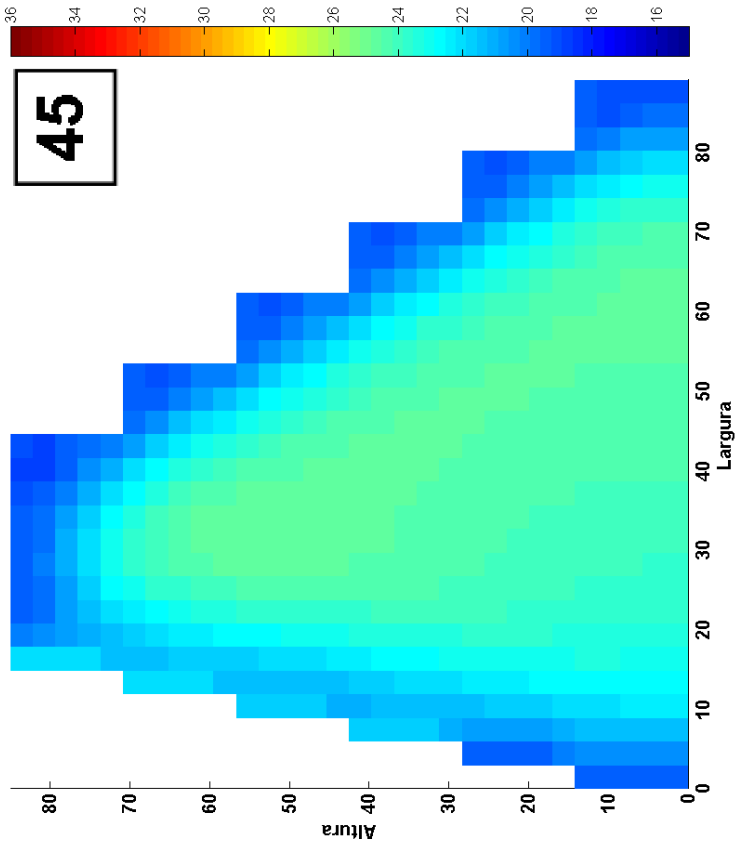
Continuação na próxima página



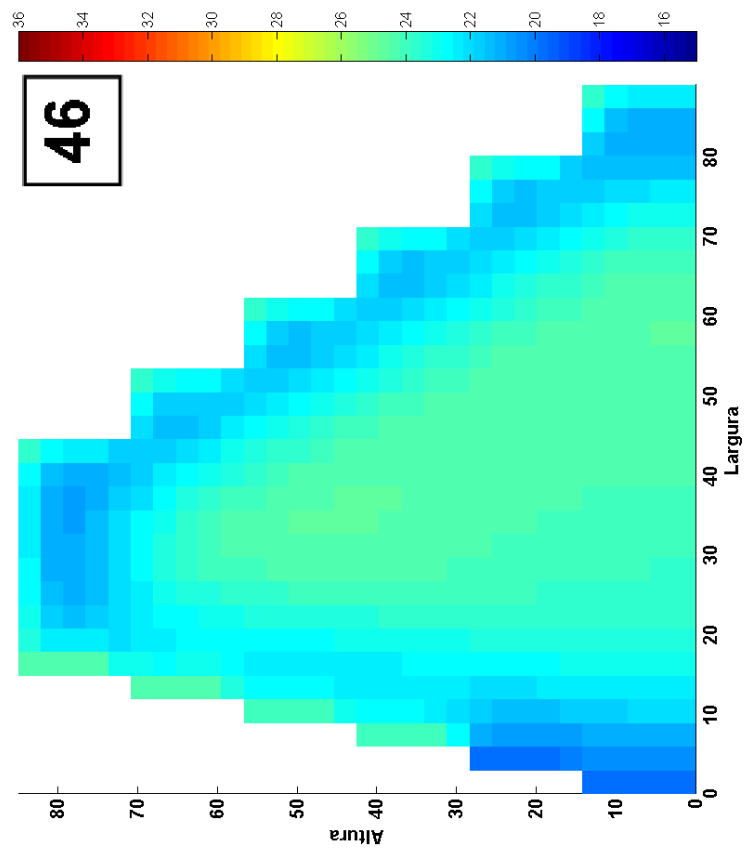
(a) Campo de Temperatura Dia 31 de Julho.

(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Agosto.

Continuação na próxima página

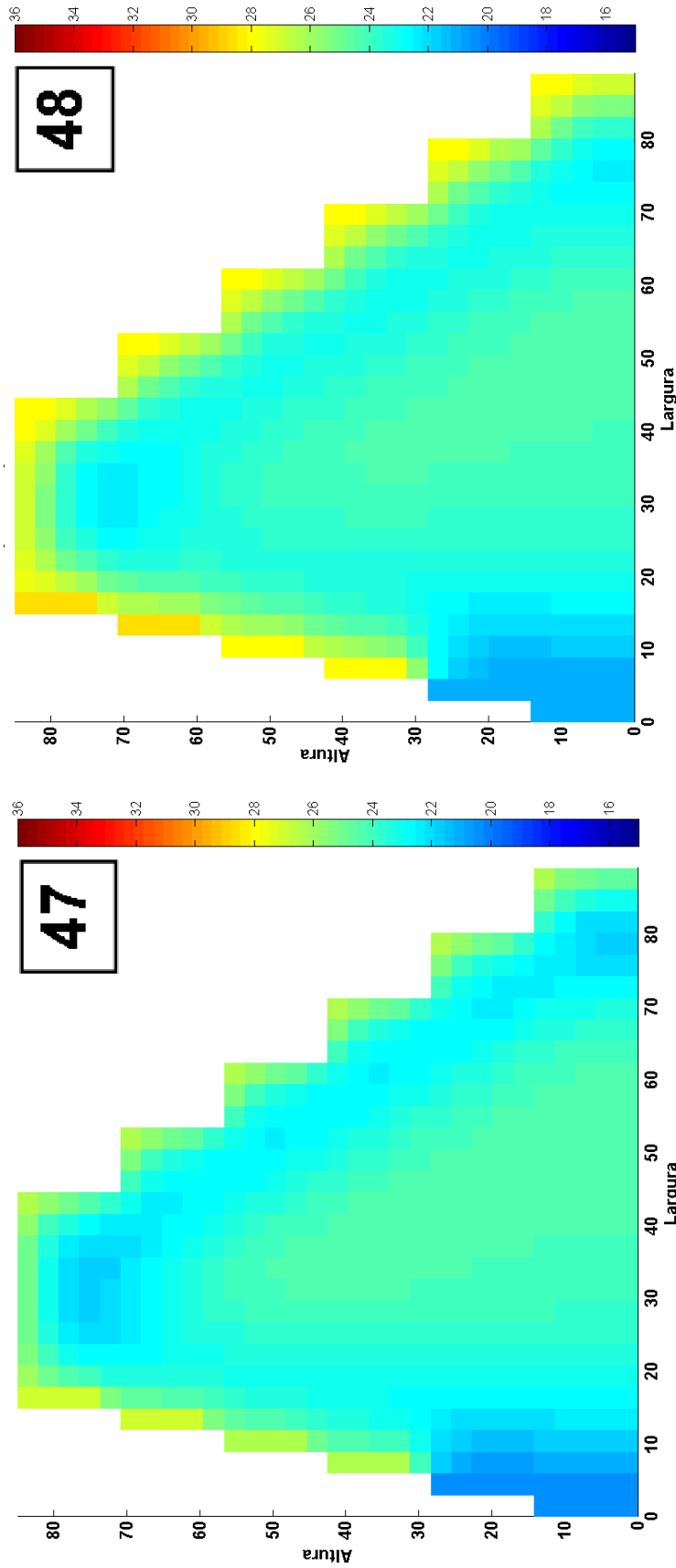


(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Setembro.



(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Outubro.

Continuação na próxima página



(a) Campo de Temperatura Dia 30 de Novembro.

(b) Campo de Temperatura Dia 31 de Dezembro.

FIGURA 36 – CAMPOS DE TEMPERATURAS MENSIAIS PARA O 'ANO MÉDIO' 2005-2014 VIA MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS FRACIONÁRIAS. FONTE: O Autor (2016).

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Um método numérico-computacional para determinar uma aproximação dos parâmetros térmicos do concreto (condutividade térmica, massa específica e calor específico) necessários para a solução do modelo térmico, foi apresentado nesta tese. Em um estudo de caso da barragem da UHI, dados observados de 7 termômetros instalados em um bloco de contraforte foram utilizados e ajustados por meio séries de Fourier a fim de que os termômetros superficiais fossem utilizados como condições de contorno e os internos para calibração e validação dos parâmetros.

Realizadas as devidas simulações numéricas, observou-se que em ambas as fases de calibração e validação, de acordo com os parâmetros térmicos determinados, o MAPE calculado foi inferior a 6% nos três pontos de prova. Como a tolerância assumida a princípio era de 10%, o método teve resultado eficiente.

Após as etapas de calibração e validação finalizadas, observou-se que grandes variações de temperatura ocorrem nas faces em contato com o ambiente à jusante e na face em contato com o reservatório. Já a propagação de calor na região interna do bloco e na base do contraforte (onde se localizam os termômetros internos) é baixa ao longo de todo o ano o que era de se esperar, pois o concreto é um material com dissipação de energia relativamente lenta.

Ao analisar as curvas do termômetro TS-D-5 (FIGURAS 24 e 28) nos meses de janeiro e fevereiro a temperatura é mais elevada e nos meses de junho e julho se verifica uma queda na mesma. Consequentemente, devido à inércia térmica, os termômetros internos apresentam curvas que retratam a situação inversa ao termômetro TS-D-5, ou seja, apresentando nos meses de janeiro e dezembro temperaturas mais baixas e nos meses de junho e julho temperaturas mais altas, como pode ser visto nos gráficos das FIGURAS 25, 29 e 33. Comportamento similar pôde ser visto nos pontos de monitoramento adicionais, cujas temperaturas mais elevadas encontraram-se entre os meses de março e maio e temperaturas mais baixas nos meses de agosto e setembro (ver FIGURAS 26 e 30). Este fenômeno se deve à baixa transferência de calor no concreto.

Salienta-se que as curvas de temperatura das séries de Fourier e as obtida pelo método dos elementos finitos seguem a física do fenômeno térmico, uma vez que os picos tendem a crescer na mesma temporada. Adicionado a este fato, por meio dos processos de calibração e validação do modelo térmico do bloco de contraforte da Usina Hidrelétrica de Itaipu foi possível entender a dinâmica do bloco quando este está sob o efeito da temperatura sazonal e tal estudo pode ser aplicado em outros blocos da barragem, bem como em outras barragens.

Com relação à modelagem térmica do bloco de contraforte E-6 da barragem da UHI em termos de derivada fracionária em conjunto com um método fracionário de solução, ficou evidente o que a literatura havia constatado para outros estudos. Ou seja, as técnicas do Cálculo Fracionário, em particular os modelos térmicos fracionários, podem trazer uma representação mais refinada dos fenômenos físicos e para este caso o processo de difusão do calor é não linear, fato confirmado através das simulações numéricas onde a ordem da derivada temporal foi maior do que 1.



Além disso, os gráficos mensais dos modelo térmicos tradicional e fracionário (FIGURAS 27, 31, 35 e 36) mostraram que as regiões com temperatura mais elevadas são provenientes da época de verão, e estas podem gerar na jusante deformações de dilatação e as temperaturas mais baixas são provenientes da época de inverno que cria na estrutura deformações de contração à jusante.

Pode-se dizer que para a geometria, condições de contorno (dados observados e ajustados por séries de Fourier) e as propriedades do concreto, o modelo térmico fracionário apresentou um resultado mais próximo à realidade do bloco em estudo, interpretação esta concluída quando comparou-se as temperaturas internas obtidas através do método das diferenças finitas fracionárias e aquelas das séries de Fourier dos termômetros internos. Com este resultado espera-se que os estudos relativos à modelagem térmica fracionária em barragem de concreto sejam ainda mais evidenciadas na literatura e outros resultados favoráveis a tal modelagem podem surgir, demonstrando sua aplicabilidade além de técnicas numéricas de solução.

O objetivo geral, visto na Seção 1.2, foi assim alcançado, além de instigar ainda mais o leitor ao estudo do Cálculo Fracionário, que a princípio pode se tratar de uma técnica com uma fundamentação teórica matemática um pouco mais complexa, mas ainda totalmente acessível e que merece atenção para futuras aplicações em problemas reais.

## 5.1 TRABALHOS FUTUROS

Com relação à modelagem térmica por elementos finitos em bloco de contraforte, algumas sugestões para trabalhos futuros são:

- Ampliar, junto à superintendência de engenharia da barragem da UHI, o número de termômetros internos e superficiais para monitoramento da temperatura do bloco como forma de aproximar ainda mais o modelo numérico ao modelo térmico real;
- Inserir termômetros na fundação e no reservatório da barragem para considerá-los em futuras análises térmicas;
- Realizar ensaios em laboratório para ajustar melhor os coeficientes térmicos do concreto e da fundação;
- Desenvolver análises termo-estruturais no bloco e comparar os resultados com instrumentos inseridos no bloco, como tensômetros e pêndulos;
- Aplicar ferramentas estatísticas para analisar a segurança estrutural da barragem através dos resultados encontrados na análise termo-estrutural.

Relacionado à modelagem térmica fracionária em bloco de contraforte, sugestões para trabalhos futuros são:

- Usar geometria e malha bidimensional mais refinadas para aplicação do método de diferenças finitas fracionárias;

- Aplicar e realizar comparações com outros métodos numéricos para solução do modelo de difusão do calor fracionário, como elementos finitos fracionários e inclusive outras variações do método das diferenças finitas que são obtidas por meio de diferentes aproximações da derivada fracionária de Caputo;
- Trabalhar com outros modelo de difusão fracionária, como aqueles em que a derivada espacial também é fracionária e abordar métodos numéricos de solução para estes.

## REFERÊNCIAS

- ABBAS, S.; BENCHOHRA, M.; N'GUEREKATA, G. M. *Topics in Fractional Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2012.
- ANSELL, A. et al. Crack propagation in buttress dams: Application of non-linear models-part ii. *Elforsk*, 2010.
- ANSYS, INC. *ANSYS Mechanical APDL Thermal Analysis Guide*. Canonsburg, PA, 2015. 100 p.
- ANSYS, INC. *ANSYS Mechanical User's Guide*. Canonsburg, PA, 2015. 1822 p.
- ATALLAH, S. A. *A Finite Element Method for Time Fractional Partial Differential Equations*. [S.l.]: University of Chester, 2011.
- ATANACKOVIC, T. M. et al. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.
- ATANGANA, A.; SECER, A. A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions. v. 2013, 2013.
- BERGHEAU, J.-M.; FORTUNIER, R. *Finite element simulation of heat transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- BITTERNCOURT, M. L. *Análise Computacional de Estruturas*. [S.l.]: Unicamp, 2010.
- CAMARGO, R. d. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2009.
- CAO, J.; WANG, Z. The finite element approximations for space fractional diffusion equation. In: IEEE. *Electronics, Computer and Applications, 2014 IEEE Workshop on*. [S.l.], 2014. p. 805–808.
- CAPUTO, M.; MAINARDI, F. Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, Springer, v. 1, n. 2, p. 161–198, 1971.
- CARPINTERI, A.; MAINARDI, F. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997.
- CENGEL, Y. A.; PÉREZ, J. H. *Heat Transfer: A Practical Approach*. [S.l.]: México.: McGraw-Hill, 2004.
- CHAO, J. et al. Analyses of thermal stress field of high concrete dams during the process of construction. In: IEEE. *Power and Energy Engineering Conference (APPEEC), 2010 Asia-Pacific*. [S.l.], 2010.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2011.
- COELHO, N. A. *Um Estudo Numérico do Efeito Térmico em Concreto Massa*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Tecnologia - Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, Abril 2012.
- CUI, M. Compact finite difference method for the fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 20, p. 7792–7804, 2009.

- DAOUD, M.; GALANIS, N.; BALLIVY, G. Calculation of the periodic temperature field in a concrete dam. *Canadian Journal of Civil Engineering*, NRC Research Press, v. 24, n. 5, p. 772–784, 1997.
- DAS, S. *Functional Fractional Calculus*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- EN.DT; ENC.DT; ENCC.DT. Blocos de contrafortes: Comportamento do trecho e. 2007.
- ESEN, A. et al. Solving fractional diffusion and fractional diffusion-wave equations by petrov-galerkin finite element method. *Journal of Applied and Engineering Mathematics*, TWMS, v. 4, n. 2, p. 155–168, 2014.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer Berlin, 2002.
- FORD, N. J.; XIAO, J.; YAN, Y. A finite element method for time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Springer, v. 14, n. 3, p. 454–474, 2011.
- GONÇALVES, G. et al. Difusão anômala e equações fracionárias de difusão. *Acta Scientiarum. Technology*, Universidade Estadual de Maringá, v. 27, n. 2, p. 123–131, 2005.
- GORENFLO, R. et al. Time fractional diffusion: A discrete random walk approach. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 29, n. 1-4, p. 129–143, 2002.
- GRUPO CONSULTOR ALTO PARANÁ. Análise de tensões de origem térmica pelo método dos elementos finitos. 1976.
- GUO, B.; PU, X.; HUANG, F. *Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions*. [S.l.]: World Scientific, 2015.
- HICKMANN, T. et al. Solução analítica e numérica da equação da condução de calor aplicada a barragem de concreto. Foz do Iguaçu, Brasil, 2015.
- HILFER, R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. [S.l.: s.n.], 2000.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2007.
- HUANG, H.-C.; USMANI, A. S. *Finite element analysis for heat transfer*. [S.l.]: Springer, 1994.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. et al. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- JAFARI, R. M. *Dynamic analysis of arch dams: effect of thermal loading*. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 2016.
- KELOW, S. P.; HAYDEN, K. M. Particular solution to a time-fractional heat equation. *Journal of Undergraduate Research in Physics*, 2013.
- KHADER, M.; SWEILAM, N.; MAHDY, A. An efficient numerical method for solving the fractional diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, v. 1, n. 2, p. 1–12, 2011.
- KILBAS, A. A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. [S.l.]: Elsevier Science Limited, 2006.

- KISELA, T. *Fractional Differential Equations and Their Applications*. Tese (Doutorado) — Faculty of Mechanical Engineering-Institute of Mathematics, University of Technology, Brno, 2008.
- KRÜGER, D. A. V. *Análise Térmica Transiente de Estruturas de Concreto Executadas por Camadas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2001.
- LATAWIEC, K. J.; ŁUKANISZYN, M.; STANISŁAWSKI, R. *Advances in Modelling and Control of Noninteger-order Systems*. [S.l.]: Springer, 2014.
- LEGER, P.; SEYDOU, S. Seasonal thermal displacements of gravity dams located in northern regions. *Journal of performance of constructed facilities*, American Society of Civil Engineers, v. 23, n. 3, p. 166–174, 2009.
- LEGER, P.; VENTURELLI, J.; BHATTACHARJEE, S. S. Seasonal temperature and stress distributions in concrete gravity dams. part 1: Modelling. *Canadian journal of civil engineering*, NRC Research Press, v. 20, n. 6, p. 999–1017, 1993a.
- LEGER, P.; VENTURELLI, J.; BHATTACHARJEE, S. S. Seasonal temperature and stress distributions in concrete gravity dams. part 2: Behaviour. *Canadian journal of civil engineering*, NRC Research Press, v. 20, n. 6, p. 1018–1029, 1993b.
- LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. [S.l.]: Siam, 2007.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- LI, C.; ZENG, F. Finite difference methods for fractional differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 22, n. 04, 2012.
- LI, C.; ZENG, F. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. [S.l.]: CRC Press, 2015.
- LIN, Y.; XU, C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 225, n. 2, p. 1533–1552, 2007.
- LUCHKO, Y.; MAINARDI, F.; POVSTENKO, Y. Propagation speed of the maximum of the fundamental solution to the fractional diffusion–wave equation. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 66, n. 5, p. 774–784, 2013.
- MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 1140–1153, 2011.
- MADENCI, E.; GUVEN, I. *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®*. 2. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2015.
- MAKEN, D. D.; LÉGER, P.; ROTH, S. N. Seasonal thermal cracking of concrete dams in northern regions. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, American Society of Civil Engineers, v. 28, n. 4, 2013.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. 2. ed. [S.l.]: LTC, 2014.
- MALKAWI, A. I. H.; MUTASHER, S. A.; QIU, T. J. Thermal-structural modeling and temperature control of roller compacted concrete gravity dam. *Journal of performance of constructed facilities*, American Society of Civil Engineers, v. 17, n. 4, p. 177–187, 2003.

- MALM, R.; ANSELL, A. Cracking of concrete buttress dam due to seasonal temperature variation. *ACI Structural Journal*, ACI, v. 108, n. 1, 2011.
- MALM, R. et al. Evaluating stability failure modes due to cracks in a concrete buttress dam. In: US SOCIETY ON DAMS. *Changing Times: Infrastructure Development to Infrastructure Management*. [S.l.], 2013. p. 415–424.
- MEERSCHAERT, M. M.; TADJERAN, C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier, v. 56, n. 1, p. 80–90, 2006.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.
- MIRZABOZORG, H. et al. Mathematical modeling and numerical analysis of thermal distribution in arch dams considering solar radiation effect. *The Scientific World Journal*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.
- MOAVENI, S. *Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS*. 3. ed. [S.l.]: Pearson Education India, 2008.
- MOLLIQ, Y.; NOORANI, M.; HASHIM, I. Variational iteration method for fractional heat-and-wave-like equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 10, n. 3, p. 1854–1869, 2009.
- NAKASONE, Y.; YOSHIMOTO, S.; STOLARSKI, T. A. *Engineering Analysis with ANSYS Software*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2006.
- NOORZAEI, J. et al. Thermal and stress analysis of kinta rcc dam. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 28, n. 13, p. 1795–1802, 2006.
- OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus*. [S.l.]: Academic Press, New York, 1974.
- ÖZDEMİR, N. et al. Optimal boundary control of thermal stresses in a plate based on time-fractional heat conduction equation. *Journal of Thermal Stresses*, Taylor & Francis, v. 37, n. 8, p. 969–980, 2014.
- OZISIK, M. N. *Heat Conduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.
- PEDRON, I. T. *Estudos em Difusao Anômala*. Tese (Doutorado) — Departamento de Física - Universidade Estadual de Maringá, 2003.
- PETRONILHO, C. S. E. Concreto refrigerado: Princípios fundamentais para projetar estruturas duráveis em concreto refrigerado. 2011.
- PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. [S.l.]: Academic press, 1998.
- POVSTENKO, Y. Fractional radial heat conduction in an infinite medium with a cylindrical cavity and associated thermal stresses. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 436–440, 2010.
- POVSTENKO, Y. Dirichlet problem for time-fractional radial heat conduction in a sphere and associated thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*, Taylor & Francis, v. 34, n. 1, p. 51–67, 2011b.

- POVSTENKO, Y. Theories of thermal stresses based on space-time-fractional telegraph equations. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 64, n. 10, p. 3321–3328, 2012.
- POVSTENKO, Y. Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress. *Journal of Thermal Stresses*, Taylor & Francis, v. 28, n. 1, p. 83–102, 2004.
- POVSTENKO, Y. Z. Fundamental solutions to central symmetric problems for fractional heat conduction equation and associated thermal stresses. *Journal of thermal stresses*, Taylor & Francis, v. 31, n. 2, p. 127–148, 2007.
- POVSTENKO, Y. Z. Fundamental solutions to three-dimensional diffusion-wave equation and associated diffusive stresses. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 961–972, 2008.
- POVSTENKO, Y. Z. Thermoelasticity that uses fractional heat conduction equation. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer, v. 162, n. 2, p. 296–305, 2009a.
- POVSTENKO, Y. Z. Theory of thermoelasticity based on the space-time-fractional heat conduction equation. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2009, n. T136, p. 014017, 2009b.
- ROSSO, J. A.; FIORINI, A. S.; PORTO, E. C. Barragem de itaipu - lições aprendidas com o comportamento térmico das estruturas do tipo gravidade aliviada e contraforte. Comitê Brasileiro de Grandes Barragens - XXII Seminário Nacional de Grandes Barragens, p. 161–176, 1997.
- SA, E. C. E. B. *Critérios de projeto civil de usinas hidrelétricas*. [S.l.]: Rio de Janeiro, 2003.
- SABATIER, J.; AGRAWAL, O. P.; MACHADO, J. A. T. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. [S.l.]: Springer, 2007.
- SAEDPANAH, F. *The Finite Element Method for Fractional Order Viscoelasticity and the Stochastic Wave Equation*. Tese (Doutorado) — Chalmers University of Technology and University of Gothenburg,, 2009.
- SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. [S.l.: s.n.], 1993.
- SHEIBANY, F.; GHAEMIAN, M. Effects of environmental action on thermal stress analysis of karaj concrete arch dam. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 132, n. 5, p. 532–544, 2006.
- SHUKLA, K. N. *Mathematical Principles of Heat Transfer*. [S.l.]: Begell House, 2005.
- SILVA, M. T. Q. S. *Análise Térmica Transiente e de Tensões em Estruturas Executadas em Camadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2003.
- SILVA, R. Direct coupled thermal-structural analysis in ansys workbench. In: ESSS. *2013 Esss Conference & Ansys Users Meeting*. Atibaia, SP, 2013.
- SMITH, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. [S.l.]: Oxford university press London, 1985.
- TALER, J.; DUDA, P. *Solving direct and inverse heat conduction problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- TURUT, V.; GÜZEL, N. On solving partial differential equations of fractional order by using the variational iteration method and multivariate padé approximations. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, p. 147–171, 2013.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. [S.l.]: Pearson Education, 2007.

VLAHOS, L. et al. Normal and anomalous diffusion: A tutorial. *arXiv preprint arXiv:0805.0419*, 2008.

WU, G.-c.; LEE, E. Fractional variational iteration method and its application. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 374, n. 25, p. 2506–2509, 2010.

ZHANG, Y. A finite difference method for fractional partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 215, n. 2, p. 524–529, 2009.

ZHAO, Z.; ZHENG, Y. Leapfrog/finite element method for fractional diffusion equation. *The Scientific World Journal*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2005.

ŽVANUT, P.; TURK, G.; KRYŽANOWSKI, A. Effects of changing surrounding conditions on the thermal analysis of the moste concrete dam. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, American Society of Civil Engineers, 2015.



## APÊNDICES

## APÊNDICE A – FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

A função gama é dada pela seguinte integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (\text{A.1})$$

A qual converge no lado direito do plano complexo, ou seja, quando  $Re(z) > 0$ . A partir de (A.1) pode-se mostrar que:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (\text{A.2})$$

É possível escrever a função gama em termos de limites:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}. \quad (\text{A.3})$$

A prova disto pode ser vista em (PODLUBNY, 1998). Em complemento à função Gama, existe a chamada função gama incompleta, que é escrita como:

$$\Gamma^*(z, \xi) = \frac{1}{\Gamma(z)} \xi^z \int_0^{\xi} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (\text{A.4})$$

A função beta é definida por uma integral com dois parâmetros:

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad (\text{A.5})$$

para  $z$  e  $w$  satisfazendo as condições:  $Re(z) > 0$  e  $Re(w) > 0$ .

Através da transformada de Laplace para covoluções, obtém-se uma relação entre as funções gama e beta:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (\text{A.6})$$

A demonstração desta relação também pode ser vista em (PODLUBNY, 1998), e evidencia que  $B(z, w) = B(w, z)$ . Por meio da função beta (A.5), algumas relações importantes são obtidas para a função gama, como as que segue:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}, \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z), \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (\text{A.9})$$

A função de Mittag-Leffer é definida por uma expansão em série:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (\text{A.10})$$

A partir da função (A.10) tem-se as seguintes relações:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (\text{A.11})$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}. \quad (\text{A.12})$$

Generalizando,

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (\text{A.13})$$

A função Wright é definida por:

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (\text{A.14})$$

**APÊNDICE B – PROGRAMA EM PASCAL DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS  
FINITAS FRACIONÁRIAS**

edbf2

```
program edbf2;
{
  Sol. da eq. da difusão bi dimensional fracionária
}

{$mode objfpc}{$H+}

uses
  {$IFDEF UNIX}{$IFDEF UseCThreads}
  cthreads,
  {$ENDIF}{$ENDIF}
  Classes, SysUtils, CustApp, dos;

{$OPTIMIZATION OFF}

type
  v1 = array[-5..-1] of double;
  v2 = array[1..1000] of double;
  v3 = array[0..5000] of double;
  m2 = array[1..1000] of ^v2;
  tcc = record
    n, i : integer;
    y0 : double;
    a, b : array[1..20] of double;
  end;

var
  arq,
  brq : text;
  narq : string;
  nx, ny,
  nt,
  i, j, m : integer;
  dx, dy,
  dtd,
  dt, g,
  alfa : double;
  v : array[0..50, 0..50] of integer;
  ni, nj : array[1..1000] of integer;
  cc : tcc;
  omg : ^v3;
  b : ^v2;
  a : m2;
  tpcc : array[0..5000] of ^v1;
  tpcal : array[0..5000] of ^v2;

const
  eps : double = 1.0e-20;
  eps1 : double = 1.0e-10;
  eps2 : double = 1.0e-07;

function norivet(n: integer; var x: v2): double;

var
  i : integer;
  max : double;

begin
  max := 0.0;
  for i := 1 to n do
    if max < abs(x[i])
    then
```

Page 1

edbf2

```
max := abs(x[i]);
nori vet := max;
end;
procedure gaussjacobi (n: integer; var a: m2; var b, x: v2; var rc: integer);
var
  i, j,
  it : integer;
  s : extended;
  nx, nz : double;
  y, z, d : v2;
const
  nit : integer = 1000;
begin
  rc := 1;
  for i := 1 to n do
    begin
      if abs(a[i]^i) < eps
      then
        exit;

      d[i] := 1.0e0/a[i]^i;
      x[i] := 0.0;
    end;

  rc := 0;
  it := 0;
  repeat

    for i := 1 to n do
      y[i] := x[i];

    for i := 1 to n do
      begin
        s := b[i];
        for j := 1 to i-1 do
          s := s - a[i]^j*y[j];
        for j := i+1 to n do
          s := s - a[i]^j*y[j];
        x[i] := s*d[i];
        z[i] := x[i] - y[i];
      end;

    nx := nori vet(n, x);
    nz := nori vet(n, z);

    if nz < eps1
    then
      exit;

    if nx < eps
    then
      begin
        rc := it;
        exit;
      end;
  end;
```

Page 2

edbf2

```
if nz < eps2*nx
then
  exit;

it := it + 1;
until it > nit;

if it > nit
then
  rc := it;

end;
```

procedure gaussseidel (n: integer; var a: m2; var b, x: v2; var rc: integer);

```
var
  i, j,
  it : integer;
  s : extended;
  nx, nz : double;
  y, z, d : v2;

const
  nit : integer = 10000;

begin
  rc := 1;
  for i := 1 to n do
    begin
      if abs(a[i]^i) < eps
      then
        exit;

      d[i] := 1.0/a[i]^i;
      x[i] := 0.0;
    end;

  rc := 0;
  it := 0;
  repeat

    for i := 1 to n do
      y[i] := x[i];

    for i := 1 to n do
      begin
        s := b[i];
        for j := 1 to i-1 do
          s := s - a[i]^j*x[j];
        for j := i+1 to n do
          s := s - a[i]^j*y[j];
        x[i] := s*d[i];
        z[i] := x[i] - y[i];
      end;

    nx := nori vet(n, x);
    nz := nori vet(n, z);

    if nz < eps1
```

Page 3

edbf2

```
    then
      exit;

  if nx < eps
  then
    begin
      rc := it;
      exit;
    end;

  if nz < eps2*nx
  then
    exit;

  it := it + 1;
  until it > nit;

  if it > nit
  then
    rc := it;

end;
```

procedure omega;

```
var
  g1,
  kg, z : double;
  k      : integer;
```

function lngama(z: double): double;

```
var
  a,
  s, x : double;
  i     : byte;
```

const

```
  c : array[0..14] of double = (0.99999999999999709182, 57.156235665862923517,
    -59.597960355475491248, 14.136097974741747174,
    -0.49191381609762019978, 0.33994649984811888699e-4,
    0.46523628927048575665e-4, -0.98374475304879564677e-4,
    0.15808870322491248884e-3, -0.21026444172410488319e-3,
    0.21743961811521264320e-3, -0.16431810653676389022e-3,
    0.84418223983852743293e-4, -0.26190838401581408670e-4,
    0.36899182659531622704e-5);
```

```
  gm1 : double = 5.242187500000000E0;
  s2p : double = 2.50662827463100E0;
```

begin

```
  x := z + gm1;
  a := (z+0.5e0)*ln(x) - x;
```

```
  s := c[0];
```

```
  x := z;
```

```
  for i := 1 to 14 do
```

```
    begin
```

```
      x := x + 1.0e0;
```

```
      s := s + c[i]/x;
```

```
    end;
```

Page 4



edbf2

```
    lngama := a + ln(s2p*s/z);
end;
begin
  assign (brq, narq+' .omg');
  rewrite(brq);
  new(omg);
  g1 := lngama(g+1.0e0);
  omg^[0] := 1.0e0;
  omg^[1] := -g;
  for k := 0 to 1 do
    writeln(brq, k: 10, nt: 10, g: 10: 2, ' ', omg^[k]);
  for k := 2 to nt do
    begin
      kg := k - g;
      z := sin(pi *kg)*exp(g1 + lngama(kg) - lngama(k+1.0e0))/pi;
      if (k mod 2) <> 0
      then
        omg^[k] := -z
      else
        omg^[k] := z;
      writeln(brq, k: 10, nt: 10, g: 10: 2, ' ', omg^[k]);
    end;
  close(brq);
end;
procedure dados;
var
  i, j, u,
  nee, ned,
  nde, ndd : integer;
  ax, ay   : double;
  c        : v1;
  s        : string;
procedure pontos;
var
  i, j,
  k, u,
  i1, i2 : integer;
  h       : double;
procedure i1i2(j: integer);
begin
  i1 := 0;
```

edbf2

```
while v[i1,j] = 0 do
  i1 := i1 + 1;

i2 := nx;
while v[i2,j] = 0 do
  i2 := i2 - 1;

while v[i2,j] < 0 do
  i2 := i2 - 1;

end;

begin

c[-4] := ay + ay;
c[-5] := c[-4];

for i := 0 to nx do
  for j := 0 to ny do
    v[i,j] := 0;

i := 0;
j := 0;
u := -2;
h := 0.0;
repeat

  k := 0;
  while (k < nee) and (j < ny) do
    begin

      h := h + dy;
      k := k + 1;
      j := j + 1;

      if h > c[u]
      then
        u := u - 1;

      v[i,j] := u;

      end;

    if j < ny
    then
      for k := 1 to nde-1 do
        begin
          i := i + 1;
          v[i,j] := u;
          end;

        i := i + 1;

      until j >= ny;

i := nx;
j := 0;
u := -5;
repeat

  k := 0;
  while (k < ned) and (j < ny) do
    begin
```

Page 6

edbf2

```
k := k + 1;
j := j + 1;

v[i, j] := u;

end;

if j < ny
then
  for k := 1 to ndd-1 do
  begin
    i := i - 1;
    v[i, j] := u;
  end;

  i := i - 1;

  until j >= ny;

v[0, 0] := -2;
v[nx, 0] := -5;

i1i2(ny);

for i := i1 to i2 do
  v[i, ny] := -5;

k := 0;
for j := 0 to ny-1 do
  begin
    i1i2(j);

    for i := i1+1 to i2 do
      begin
        k := k + 1;

        v[i, j] := k;

        ni[k] := i;
        nj[k] := j;

      end;

    end;

  m := k;

  end;

procedure calc_cc;

var
  teta,
  t, sf : double;
  i, k : integer;

begin
  for i := 0 to nt do
    begin
```

Page 7

edbf2

```
t := 2.0e0*pi*i*dtd/365.25e0;
sf := cc.y0;
for k := 1 to cc.n do
  begin
    teta := t*k;
    sf := sf + cc.a[k]*cos(teta) + cc.b[k]*sin(teta);
  end;
tpcc[i]^[cc.i] := sf;
end;
end;
begin
  assign(arq, narq+'.txt');
  reset(arq);
  readln(arq, s);
  readln(arq, ax, ay, c[-2], c[-3]);
  readln(arq, s);
  readln(arq, nx, ny);
  readln(arq, s);
  readln(arq, nde, ndd, nee, ned);
  readln(arq, s);
  readln(arq, nt, dtd);
  readln(arq, s);
  readln(arq, alfa, g);
  close(arq);
  for i := 0 to nt do
    begin
      new(tpcc[i]);
      new(tpcal[i]);
    end;
  dx := ax/nx;
  dy := ay/ny;
  dt := 86400.0*dtd;
  pontos;
  assign(arq, 'tcc1.txt');
  reset(arq);
  for u := 1 to 4 do
    begin
      readln(arq, cc.i, cc.n);
      readln(arq, cc.y0);
      for j := 1 to cc.n do
        begin
          readln(arq, cc.a[j]);
          readln(arq, cc.b[j]);
        end;
      cal c_cc;
```

edbf2

```
end;

close(arq);

new(b);
for i := 1 to m do
  new(a[i]);
end;

procedure t_bloco;

var
  u, n,
  rc : integer;
  dk,
  k1, k2 : double;

procedure sistema(n: integer);

var
  i, j,
  k, u : integer;

begin
  for i := 1 to m do
    begin
      b^[i] := 0.0e0;
      for j := 1 to m do
        a[i]^j := 0.0e0;
      end;
    end;

  for u := 1 to nx-1 do
    begin
      a[u]^u := 1.0e0;

      i := ni[u];
      j := nj[u];

      a[u]^v[i, j+1] := -1.0e0;
    end;

  for u := nx to m do
    begin
      i := ni[u];
      j := nj[u];

      for k := 1 to n-1 do
        b[u] := b[u] + omg^[n-k]*(tpcal[0]^u - tpcal[k]^u);

      if v[i+1, j] < 0
      then
        b[u] := b[u] + k1*tpcc[n]^v[i+1, j]
      else
        a[u]^v[i+1, j] := -k1;

      if v[i-1, j] < 0
      then
        b[u] := b[u] + k1*tpcc[n]^v[i-1, j]
```

Page 9

```

                                edbf2
    else
        a[u]^[v[i-1,j]] := -k1;
    if v[i,j+1] < 0
        then
            b^[u] := b^[u] + k2*tpcc[n]^[v[i,j+1]]
        else
            a[u]^[v[i,j+1]] := -k2;
    if v[i,j-1] < 0
        then
            b^[u] := b^[u] + k2*tpcc[n]^[v[i,j-1]]
        else
            a[u]^[v[i,j-1]] := -k2;
    a[u]^u := dk;
end;
end;
procedure imp(n: integer);
begin
    writeln(arq);
    writeln(arq);
    write (arq,n*dtd,' ',n*dt);
    for j := ny downto 0 do
        begin
            writeln(arq);
            for i := 0 to nx do
                if v[i,j] > 0
                    then
                        write(arq, tpcal [n]^[v[i,j]]: 8: 3)
                    else
                        if v[i,j] < 0
                            then
                                write(arq, tpcc[n]^[v[i,j]]: 8: 3)
                            else
                                write(arq,' 0.000');
            end;
        end;
    end;
begin
    omega;
    k2 := alfa*exp(g*ln(dt));
    k1 := k2/(dx*dx);
    k2 := k2/(dy*dy);
    dk := 2.0e0*(k1 + k2);
    sistema(0);
    gausssei del (m, a, b^, tpcal [0]^, rc);
    writeln(0: 5, rc: 5);
    (*
    if rc <> 0

```

edbf2

```
    then
      readln;
*)
imp(0);
for n := 1 to nt do
  begin
    sistema(n);
    for u := nx to m do
      begin
        a[u]^u := a[u]^u + omg^0;
        b[u] := b[u] + omg^0*tpcal[0]^u;
      end;
    gaussseidel(m, a, b, tpcal[n]^, rc);
    writeln(n:5, rc:5);
  (*
    if rc <> 0
      then
        readln;
  *)
    imp(n);
  end;
end;
begin
  writeln('Digitar o nome dos arquivos (sem extensão):');
  readln(narq);
  if length(narq) < 2
    then
      narq := 'edbf2';
  dados;
  assign(arq, narq+'.rel');
  rewrite(arq);
  for j := ny downto 0 do
    begin
      writeln(arq);
      for i := 0 to nx do
        write(arq, v[i, j]:4);
      end;
    writeln(arq);
    writeln(arq);
    for i := 1 to m do
      writeln(arq, i:5, ni[i]:5, nj[i]:5);
    writeln(arq);
    for i := 0 to nt do
      begin
        writeln(arq);
```

Page 11

edbf2

```
write (arq, i: 5);
for j := -2 downto -5 do
  write(arq, tpcc[i]^[j]: 10: 3);
end;

close(arq);
(*
writeln(' F ');
readln;
*)
assign (arq, narq+'. sol ');
rewrite(arq);

t_bloco;

close(arq);

end.
```



## APÊNDICE C – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER

TABELA 16 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS SUPERFICIAIS  
PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO

<b>TS-D-5</b>		<b>TS-D-903</b>		<b>TS-D-904</b>		<b>TS-E-1</b>	
<b>y0</b>	22.092	<b>y0</b>	24.072	<b>y0</b>	24.473	<b>y0</b>	21.569
<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>
7.806	2.151	3.630	2.936	3.729	3.002	0.025	2.646
-0.106	-0.196	-0.319	-0.397	-0.342	-0.379	-0.420	-0.213
-0.433	-0.531	0.113	-0.131	0.128	-0.112	0.039	-0.043
-0.742	0.010	0.016	0.073	0.006	0.093	-0.035	-0.001
-1.608	0.175	-0.037	-0.017	-0.046	-0.031	-0.016	-0.011
-1.322	0.066	-0.033	0.043	-0.052	0.031	-0.058	0.005
-1.324	0.683	-0.075	0.025	-0.054	0.038	-0.040	0.030
-0.725	0.502	-0.071	-0.033	-0.063	-0.019	-0.050	0.031
-0.893	1.102	0.011	0.020	-0.010	0.035	0.026	0.013
-0.118	0.764	0.014	0.116	0.013	0.108	-0.067	0.048
-0.105	0.737						
-0.525	0.262						
-0.210	1.026						
-0.403	0.536						
-0.601	0.104						
-0.185	0.498						
-0.224	-0.020						
-0.127	0.442						
-0.208	0.607						
-0.077	0.686						
-0.448	0.876						
0.140	1.353						
-0.521	0.634						
0.046	0.178						
-0.541	0.353						
0.063	0.572						

Continuação na próxima página

TABELA 17 – CONTINUAÇÃO DA TABELA ANTERIOR

TS-D-5		TS-D-903		TS-D-904		TS-E-1	
y0	22.092	y0	24.072	y0	24.473	y0	21.569
ai	bi	ai	bi	ai	bi	ai	bi
0.362	-0.125						
0.052	0.175						
0.361	0.238						
0.154	0.635						
-0.229	0.218						
-0.260	0.595						
-0.411	0.671						
-0.020	0.514						
0.044	0.292						
0.426	0.096						
0.117	-0.150						
0.195	0.054						
0.578	0.409						
-0.058	0.306						
-0.141	-0.016						
0.212	0.432						
-0.516	-0.255						
0.060	-0.076						
-0.253	-0.149						

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 18 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE CALIBRAÇÃO

<b>TI-E-1</b>		<b>TI-E-2</b>		<b>TI-E-3</b>	
<b>y0</b>	21.7775	<b>y0</b>	21.9947	<b>y0</b>	22.5277
<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>
-0.7439	-0.1337	-0.5693	1.5801	-0.9695	0.7677
0.0457	0.0085	0.062	-0.0702	-0.0052	0.0043
0.0071	-0.0111	0.0236	0.0534	0.0023	0.0033
0.0372	-0.02	0.1056	-0.1093	0.0416	-0.053
0.0163	-0.0106	-0.0235	-0.0536	0.0058	-0.0403

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 19 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS SUPERFICIAIS PARA A FASE DE VALIDAÇÃO

<b>TS-D-5</b>		<b>TS-D-903</b>		<b>TS-D-904</b>		<b>TS-E-1</b>	
<b>y0</b>	23.7382	<b>y0</b>	24.3556	<b>y0</b>	24.7589	<b>y0</b>	21.4447
<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>
6.1249	1.9149	3.8136	2.7359	3.913	2.8477	-0.079	2.0561
0.6593	-0.4213	-0.1873	-0.2546	-0.1707	-0.2598	-0.1728	-0.0606
-1.3429	-0.3303	0.0804	-0.1958	0.0916	-0.2279	-0.0184	-0.0152
0.5289	-0.6504	0.0964	0.1131	0.1029	0.1127	0.0157	0.0394
0.395	-0.2007	-0.022	0.0114	-0.0059	-0.0292	-0.0668	-0.0016
-0.5116	-0.1825						
-0.0225	-0.3969						
0.4488	0.4138						
-1.0427	0.545						
-0.4733	0.2252						
-2.1245	0.5081						
1.0651	0.1542						
-0.9885	0.7825						
-0.6586	0.1539						
-0.9484	0.8536						

FONTE: O Autor (2016).

TABELA 20 – COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER DOS TERMÔMETROS INTERNOS PARA A FASE DE VALIDAÇÃO

<b>TI-E-1</b>		<b>TI-E-2</b>		<b>TI-E-3</b>	
<b>y0</b>	21.7586	<b>y0</b>	22.2459	<b>y0</b>	22.4608
<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>	<b>ai</b>	<b>bi</b>
-0.6038	-0.124	-0.4449	1.1991	-0.965	0.7363
0.1016	0.0352			0.121	0.091
0.0187	0.0066			-0.023	-0.0137
				0.3408	-0.1411

FONTE: O Autor (2016).