UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Lucas de Siqueira

DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE CORDAS VIBRANTES COM AMORTECIMENTOS DISTINTOS

Curitiba, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Lucas de Siqueira

DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE CORDAS VIBRANTES COM AMORTECIMENTOS DISTINTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

Curitiba, 2016

S618d

Siqueira, Lucas de
Diferenças no comportamento assintótico de cordas vibrantes com amortecimentos distintos/ Lucas de Siqueira. – Curitiba, 2016.
57 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Higidio Portillo Oquendo .
Bibliografia: p. 56-57.

1. Sobolev, Espaço de. 2. Análise funcional. 3. Semigrupos de operadores. I. Universidade Federal do Paraná. II.Oquendo, Higidio Portillo. III. Título.

CDD: 515.782

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia vinte e cinco de Fevereiro de dois mil e dezesseis às 16:00 horas, na sala Anfiteatro B, Blocos das PCs, Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **LUCAS DE SIQUEIRA** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada: "**Diferenças no comportamento assintótico de cordas vibrantes com amortecimentos distintos**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Professores Doutores: HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR), CELENE BURIOL (UFSM), JURANDIR CECCON (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela ...APROVAÇÃO......... do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora, outorgando-lhe o Grau de **Mestre em MATEMÁTICA**. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, HIGIDIO PORTILLO OQUENDO, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 25 de Fevereiro de 2016.

Prof HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof JURANDIR CECCON (UFPR)

Celene Buriol
Prof CELENE BURIOL (UFSM)

Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA | UFPR
Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR - Curitiba - Paraná - Brasil"
CEP 81531990 - Tel: (041) 3361 3026 - Fax: (041) 3361 3026 - E-mail: pgmat@ufpr.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LUCAS DE SIQUEIRA**, intitulada: "**Diferenças no comportamento assintótico de cordas vibrantes com amortecimentos distintos**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua..APROVAÇÃO......, completando-se assim todos os requisitos previstos nas normas desta Instituição para a obtenção do Grau de **Mestre em MATEMÁTICA**.

Curitiba, 25 de Fevereiro de 2016.

Prof HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof CELENE BURIOL (UFSM)

Prof JURANDIR CECCON (UFPR)

Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA | UFPR
Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR - Curitiba - Paraná - Brasil"
CEP 81531990 - Tel: (041) 3361 3026 - Fax: (041) 3361 3026 - E-mail: pgmat@ufpr.br

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Criador que me ajudou nas situações em que não se via saída.

Agradeço à minha família pelo apoio material, emocional e espiritual e pela ajuda para manter o foco.

Agradeço aos meus amigos, os quais também posso chamar de irmãos que sempre se preocuparam comigo, com quem sei que posso contar; aqueles com quem já passei momentos de decepção e sofrimento mas também muitos momentos de alegria.

Agradeço aos professores do PPGM pela paciência e profissionalismo que me garantiram uma boa formação.

Por fim, agradeço ao Professor Higidio pela paciência ao me orientar neste trabalho.

Feliz o homem que acha sabedoria
e o homem que obtém discernimento;
Ganhar sabedoria é melhor do que ganhar prata,
e obtê-la é melhor do que obter ouro.
(Bíblia Sagrada, Provérbios 3:13,14)

Resumo

Neste trabalho estudamos as diferenças no comportamento de cordas elásticas cujas dissipações são de dois tipos: dissipação friccional e dissipação do tipo Kelvin-Voigt. Para isso associaremos cada problema a um semigrupo e usaremos este para discernir o comportamento das soluções. Dois desses problemas elásticos estarão munidos de uma dissipação friccional, isto é, quando as equações são da forma

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_t = 0.$$

O primeiro problema tem uma dissipação globalmente distribuída e no segundo caso a dissipação é parcial e considerada em um problema de transmissão. Veremos que nesses dois casos a solução existe e o semigrupo associado a eles decai exponencialmente. O terceiro e quarto problema tem uma dissipação mais forte: dissipação do tipo Kelvin-Voigt, isto é, quando as equações são da forma

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_{xxt} = 0.$$

Estes últimos casos apresentam grandes diferenças: quando a dissipação é globalmente distribuída o semigrupo associado não somente decai exponencialmente; mais ainda, o semigrupo é analítico. Porém, quando distribuído parcialmente num problema de transmissão, o semigrupo perde estabilidade exponencial (e portanto não é analítico). Mas provamos que este é polinomialmente estável.

Abstract

In this paper one can analyze the behavior differences of elastic strings with two kinds of damping: frictional damping and Kelvin-Voigt damping. To do that, one can associate each problem to a semigroup wich can be used discern the solutions behavior. To two of these elastic problems will be provided a frictional damping, that is, when the equations have this configuration:

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_t = 0.$$

The first problem has a globally distributed damping and in the second case the dissipation is partial and considered in a transmission problem. We will realize that in these two cases exists a solution and the semigroup associated with it has exponencial decay. The third and fourth problems have a stronger dissipation: the Kelvin-Voigt damping, that is, when the equations have the following configuration:

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_{xxt} = 0.$$

These last cases present huge differences. When the dissipation is global the semigroup associated not just decay in an exponencial order but this semigroup is analitic. However, in a parcially distributed transmission problem, the semigroup associated with the solution does not have exponencial stability (therefore is not analitic). But one can prove that it is polynomially stable.

Sumário

Introdução

Esse trabalho se concentra na estabilidade exponencial e analiticidade de semigrupos de classe C_0 associados a vários sistemas dissipativos provenientes da mecânica.

Uma das mais importantes motivações para estudar estabilidade exponencial vem da teoria de controle. Há vários tipos de amortecimentos num sistema mecânico, como condução de calor, viscosidade, fricção, etc. Note que o sistema mecânico correspondente é dissipativo. Certamente, há muitas razões práticas para o problema de controle correspondente. Por exemplo, materiais viscoelásticos tem a propriedade de, como o nome diz, serem elásticos e viscosos que faz com que, quando aplicado uma tensão, sua deformação se dissipa com o tempo. Materiais como metal e vidro derretido tem essas propriedades. Por meio do sistema viscoelástico de Kelvin-Voigt, que veremos neste trabalho, conseguimos provar, por meio de semigrupos de classe C_0, a sua estabilidade exponencial.

Por outro lado, o leitor verá que a propriedade de analiticidade é mais sensível e mais difícil de se conseguir. Mais especificamente, conseguimos essa propriedade em apenas um dos problemas considerados.

Veremos que os métodos usados embora um tanto simples se apresentam de forma poderosa.

Neste trabalho estudaremos as diferenças no comportamento de cordas elásticas cujas dissipações são de dois tipos: dissipação friccional e dissipação do tipo Kelvin-Voigt. Para isso associaremos cada problema a um semigrupo e usaremos este para discernir o comportamento das soluções. Dois desses problemas elásticos estarão munidos de uma dissipação friccional, isto é, quando as equações são da forma

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_t = 0.$$

O primeiro problema tem uma dissipação globalmente distribuída e no segundo caso a dissipação é parcial e considerada em um problema de transmissão. A pergunta que queremos responder é: em quais casos a solução existe e o semigrupo associado a eles decai exponencialmente?

O terceiro e quarto problema tem uma dissipação mais forte: dissipação do tipo Kelvin-Voigt, isto é, quando as equações são da forma

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_{xxt} = 0.$$

Veremos que estes últimos casos apresentam grandes diferenças. Mas ainda queremos saber se, quando a dissipação é globalmente distribuída, o semigrupo associado não somente decai exponencialmente; mais ainda, será que o semigrupo é analítico? Porém, quando distribuído parcialmente num problema de transmissão, o semigrupo perde estabilidade exponencial (e portanto não é analítico). Mas será que ele se estabiliza de alguma maneira?

Para respondermos estas perguntas precisaremos, obviamente, entender o que são semigrupos e como eles se comportam dadas certas hipóteses, as quais serão satisfeitas pelos semigrupos associados aos problemas mencionados. Também, visto que estudaremos as soluções fracas dos problemas, precisaremos entender o que são essas soluções fracas e onde elas estão definidas, ou seja, os espaços de Sobolev, como também suas normas e propriedades. A base do conceito de espaços de Sobolev é o conceito de derivadas fracas, que também veremos.

Em todos os casos, por questões técnicas, vamos supor que as soluções assumem valores complexos. Fazendo isso, sabemos que tanto a parte real como a parte imaginária das soluções também são soluções individualmente pois os coeficientes das equações são reais.

Como neste trabalho serão feitas muitas contas, usaremos muitas ferramentas poderosas; em especial muitas desigualdades úteis para chegarmos às estimativas desejadas como, por exemplo, desigualdade de Poincaré.

Foi comentado que um dos objetivos é mostrar que os problemas admitem solução no espaço em questão. Uma das principais ferramentas que será usada para isso será o teorema de Lax-Milgram. Por isso também precisaremos de alguns resultados de análise funcional.

Por fim, o leitor verá que é difícil obter a estabilidade exponencial e analiticidade de um operador pela definição. Por esta razão consideraremos alguns resultados de estabilidade e analiticidade que facilitarão essa tarefa. Vejamos então alguns desses resultados preliminares.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Como comentado, uma das principais ferramentas usada neste trabalho é a teoria de semigrupos, para resolver os sistemas de equações diferenciais parciais. Mas também usaremos muito a teoria dos espaços de Sobolev e alguns teoremas essenciais para garantir a estabilidade e analiticidade de alguns semigrupos. Vejamos algumas dessas preliminares antes de partir para os problemas principais.

1.1 Espaços de Sobolev

No que se segue consideraremos $I \subset \mathbb{R}$ aberto.

Definição 1.1 *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(I)$. Dizemos que v é a j-ésima derivada fraca de u, isto é, $\frac{d^j u}{dx^j} = v$, quando*

$$\int_I u \frac{d^j \Phi}{dx^j} dx = (-1)^j \int_I v \Phi dx$$

para todas as funções testes $\Phi \in C_c^\infty(I)$.

Definição 1.2 *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(I)$ consiste de todas as funções $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integráveis tais que para cada índice j com $0 \leq j \leq k$, $\frac{d^j u}{dx^j}$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(I)$. Quando $p = 2$, denotaremos $H^k(I) = W^{k,2}(I)$.*

Para $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{k,p}(I)$ definimos a norma de u por

$$\|u\|_{W^{k,p}(I)} = \left(\sum_{j \leq k} \int_I \left| \frac{d^j u}{dx^j} \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definição 1.3 *Denotamos por $W_0^{k,p}(I)$ o fecho de $C_c^\infty(I)$ em $W^{k,p}(I)$.*

Interpretamos $W_0^{k,p}(I)$ como conjunto das funções $u \in W^{k,p}(I)$ tais que $\frac{d^j u}{dx^j} = 0$ em ∂I para todo $0 \leq j \leq k-1$ como será explicado no teorema 1.4 a seguir.

Costumamos denotar $H_0^k(I) = W_0^{k,2}(I)$.

Teorema 1.4 *Assuma que I é limitado e $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u|_{\partial I} = 0$.*

Demonstração: Veja a seção 5.5 de [Ev].

Teorema 1.5 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha que I seja um intervalo aberto e limitado em $\mathbb{R}$. Assuma $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C, que depende apenas de p e de I, tal que*

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}$$

para cada função $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Demonstração: Veja a proposição 8.13 de [Br].

Teorema 1.6 (Desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg) *Seja $u \in L^p(I) \cap W^{2,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $u \in W^{2,p}(I)$ e*

$$\|u'\|_{L^p(I)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(I)}^{1/2}\|u\|_{L^p(I)}^{1/2}.$$

Demonstração: Veja a seção 9.8, página 313 de [Br].

Definição 1.7 *Denotamos por $H^{-1}(I)$ o espaço dual de $H_0^1(I)$.*

Em outras palavras, f está em $H^{-1}(I)$ se f é um funcional linear limitado definido em $H_0^1(I)$.

Definição 1.8 *Dado $f \in H^{-1}(I)$, definimos a norma de $H^{-1}(I)$ por*

$$\|f\|_{H^{-1}(I)} = \sup\left\{\langle f, u\rangle; u \in H_0^1(I), \|u\|_{H_0^1(I)} \leq 0\right\}.$$

Teorema 1.9 (Caracterização de H^{-1}) **(i)** *Suponha que $f \in H^{-1}(I)$. Então existem funções f_0, f_1 em $L^2(I)$ tais que*

$$\langle f, v\rangle = \int_I f_0 v + f_1 v' dx \quad (v \in H_0^1(I)). \tag{1.1}$$

(ii) *Além disso,*

$$\|f\|_{H^{-1}(I)} = \inf\left\{\left(\int_I |f_1|^2 + |f_2|^2 dx\right)^{1/2}; f \quad \textit{satisfaz (1.1) e} \quad f_0, f_1 \in L^2(I)\right\}$$

Escrevemos $f = f_0 - f_1'$ sempre que (1.1) vale.

Demonstração: Veja o teorema 1 da seção 5.9 de [Ev].

Definição 1.10 *Uma solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} -u'' = f \quad em \quad]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

é uma função $u \in H_0^1(I)$*, sendo* $I = [a,b]$*, que satisfaz*

$$\int_a^b u'v'dx = \int_a^b fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Teorema 1.11 *Dados* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $f \in L^2(a,b)$*, então existe uma única função* $u \in H^2(a,b)$ *que satisfaz*

$$\begin{cases} -u'' = f \quad em \quad]a,b[\\ u(a) = \alpha \quad e \quad u(b) = \beta. \end{cases}$$

Demonstração: Veja o teorema 3 da seção 6.2 de [Ev].

1.2 Resultados de Análise Funcional

Nesta seção colocaremos alguns resultados importantes de análise que serão usados no trabalho, como algumas desigualdades que facilitarão as muitas contas que serão feitas.

Definição 1.12 *Sejam* X *e* Y *espaços normados e* $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ *um operador linear, sendo* $\mathcal{D}(T) \subset X$*. Dizemos que o operador* T *é limitado se existe um número real c tal que, para todo* $x \in \mathcal{D}(T)$*,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

Nesse caso dizemos que a norma de T *é*

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad com \quad x \neq 0.$$

Definição 1.13 *Seja* $X \neq \{0\}$ *um espaço normado complexo e* $T : \mathcal{D}(T) \to X$ *um operador linear com domínio* $\mathcal{D}(T) \subset X$*. Um valor regular* λ *de* T *é um número complexo tal que*

(i) $(\lambda I - T)^{-1}$ *existe,*

(ii) $(\lambda I - T)^{-1}$ *é limitado,*

(iii) $(\lambda I - T)^{-1}$ *está definido num subconjunto denso em* X*.*

O conjunto resolvente $\rho(T)$ *de* T *é o conjunto de todos os valores regulares* λ *de* T*. Seu complementar* $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ *no plano complexo* $\mathbb{C}$ *é chamado de espectro de* T*, e* $\lambda \in \sigma(T)$ *é chamado de valor espectral de* T*.*

Teorema 1.14 (Lax-Milgram) *Seja* $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma forma sesquilinear para a qual existe constantes* $\alpha, \beta > 0$ *tais que*

(i) $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ *para todos* $u, v \in H$*;*

(ii) $\beta \|u\|^2 \leq B[u, u]$ *para todo* $u \in H$*.*

Além disso, seja $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional linear limitado em H. Então existe um único elemento* $u \in H$ *tal que*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle,$$

para todo $v \in H$*.*

Demonstração: Veja a seção 6.2.1 de [Ev].

Lema 1.15 (Desigualdade de Cauchy) *Sejam a e b números reais. Então*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Demonstração: Veja o apêndice B de [Ev].

Lema 1.16 (Desigualdade de Cauchy com ϵ**)** *Sejam* a*,* b *e* ϵ *números reais positivos. Então*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Demonstração: Veja o apêndice B de [Ev].

Teorema 1.17 (Desigualdade de Holder) *Seja* $I \subset \mathbb{R}$*. Assuma que* $1 \leq p, q \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então, se* $u \in L^p(I)$ *e* $v \in L^q(I)$*, temos que*

$$\int_I |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(I)} \|v\|_{L^q(I)}$$

Demonstração: Veja o apêndice B de [Ev].

Definição 1.18 (Operador fechado) *Seja* $A : \mathcal{D}(A) \to N$ *um operador linear, sendo que* $\mathcal{D}(A) \subset M$ *e* M *e* N *são espaços normados. Dizemos que* A *é um operador fechado se para qualquer sequência* (x_k) *em* $\mathcal{D}(A)$ *com* $x_k \to x$ *e* $Ax_k \to y$*, então* $x \in \mathcal{D}(A)$ *e* $Ax = y$*.*

1.3 Semigrupos de operadores lineares

Definição 1.19 *Uma família S(t),* $0 \leq t < \infty$, *de operadores lineares num espaço de Banach H é dito fortemente contínuo, ou um semigrupo de classe* C_0, *se*

(i) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \forall t_1, t_2 \geq 0,$

(ii) $S(0) = I,$

(iii) *Para cada* $x \in H$, $S(t)x$ *é contínuo em* $[0, \infty[$.

Para um semigrupo $S(t)$ assim, definimos um operador A com domínio $\mathcal{D}(A)$ consistindo de todos os pontos x tais que o limite

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{x}$$

existe. Então A é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$. Dado um operador A, se A coincide com o gerador infinitesimal de $S(t)$, então dizemos que A gera um semigrupo fortemente contínuo $S(t)$, $t \geq 0$. Às vezes também denotaremos $S(t)$ por e^{At}.

Suponha que o operador linear A gere um semigrupo de classe C_0, $S(t)$, num espaço de Hilbert H. Então valem os seguintes resultados:

Definição 1.20 *Seja H um espaço de Hilbert real ou complexo com o produto interno* $\langle , \rangle$ *e a norma induzida* $\|\cdot\|$. *Seja A um operador densamente definido em H, isto é,* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ *com* $\mathcal{D}(A)$ *denso em H. Dizemos que A é dissipativo se para qualquer* $x \in \mathcal{D}(A), Re\langle Ax, x \rangle \leq 0.$

Teorema 1.21 (Hille-Yosida) *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0, $t \geq 0$, *se e somente se:*

(i) *A é fechado e* $\overline{D(A)} = H$.

(ii) *O conjunto resolvente* $\rho(A)$ *de A contém* $\mathbb{R}^+$ *e para todo* $\lambda > 0$,

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Veja a seção 1.4 de [Go].

Teorema 1.22 (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear com domínio* $\mathcal{D}(A)$ *denso num espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e existe um* $\lambda_0 > 0$ *tal que* $\mathcal{I}m(\lambda_0 I - A) = H$, *então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0 *em H.*

Demonstração: Veja a seção 1.4 de [Go].

Teorema 1.23 *Seja A um operador linear fechado com domínio* $\mathcal{D}(A)$ *denso num espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e* $0 \in \rho(A)$, *então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0 *em H.*

Demonstração: Veja a seção 1.2 de [LZ].

1.4 O Problema de Cauchy

Definição 1.24 *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, para $u_0 \in X$ consideremos o problema de valor inicial abstrato*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Por solução entende-se toda função $u : [0, \infty[\to X$ contínua para $t \geq 0$, tal que, para $t > 0$ seja diferenciável e $u(t) \in D(A)$, e que satisfaça o problema de valor inicial (1.2).

Teorema 1.25 *Se A é gerador de um semigrupo C_0, então para cada $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ o problema de valor inicial (1.2) tem uma única solução. Alem disso,*

$$u \in C([0, \infty[, D(A)) \cap C^1([0, \infty[, X).$$

Demonstração: Veja o capítulo 2 de [Go].

1.5 Propriedades assintóticas de semigrupos

Definição 1.26 *o semigrupo e^{At} é dito exponencialmente estável se existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Se M=1, dizemos que e^{At} é um semigrupo de contrações de classe C_0.

A partir daqui, também usaremos a notação $\|\cdot\|$ para denotar a norma em $L(H, H)$ quando não houver confusão.

Definição 1.27 *O semigrupo e^{At} é dito analítico se e^{At} admite uma extensão $T(\lambda)$ com $\lambda \in \Delta_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad |\arg \lambda| < \theta\}$ para algum $\theta > 0$ tal que $\lambda \mapsto T(\lambda)$ é analítica e*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta_\theta \ni \lambda \to 0} \|T(\lambda)z - z\| = 0, \forall z \in H, \\ T(\lambda + \mu) = T(\lambda)T(\mu), \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta. \end{cases}$$

ou, equivalentemente existe uma constante K>0 tal que

$$\|Ae^{At}\| \leq Kt^{-1}, \quad \forall t > 0.$$

Teorema 1.28 *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 num espaço de Hilbert. Então S(t) é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{1.3}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| < \infty. \tag{1.4}$$

Demonstração: Veja a seção 1.3 de [LZ].

Teorema 1.29 *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 num espaço de Hilbert. Suponha que*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Então, S(t) é analítico se, e somente se,

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \left\| \beta(i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty. \tag{1.6}$$

Demontração: Veja a seção 1.3 de [LZ].

Teorema 1.30 (Borichev e Tomilov) *Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 definido num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com um gerador A tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então para qualquer real $\alpha > 0$ fixado, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^{\alpha}), \quad \lambda \to \infty.$

(b) $\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty.$

Demonstração: Veja o teorema 2.4 de [Bo].

Capítulo 2

Equações de onda com dissipação do tipo friccional

O objetivo deste capítulo é mostrar a estabilidade exponencial para os sistemas com dissipação friccional. Note que o método usado será sempre o de associar o sistema a um semigrupo e estudar a estabilidade deste.

2.1 Vibrações com dissipação friccional globalmente distribuída

Considere a equação de uma corda vibrante com amortecimento: $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}^+$,

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma u_t = 0, \quad a, \gamma > 0. \tag{2.1}$$

Assuma que a corda esteja presa nas duas extremidades $x = 0$ e $x = l$, isto é,

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{2.2}$$

e que inicialmente é dada pelas funções

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{2.3}$$

Para converter esse problema numa equação de evolução de 1ª ordem, denotamos $\mathcal{H} = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l)$ o espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle (u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_1, v_1\rangle_{H_0^1} + \langle u_2, v_2\rangle_{L^2}$$

onde $H_0^1 = \{u \in H^1 \quad \text{tal que} \quad u(0) = u(l) = 0\}$ com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_0^l a u_x \overline{v}_x dx.$$

Então, considerando $\eta = u_t$, o sistema (2.1)-(2.3) pode ser colocado como um problema de valor inicial para uma equação de evolução de 1ª ordem abstrata em $\mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad \forall t > 0, \quad y(x,0) = (u_0, u_1)^T, \tag{2.4}$$

em que y e o operador A são dados por

$$y = \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix} \eta \\ au_{xx} - \gamma\eta \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Consideraremos $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sendo que

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ y \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad \eta \in H_0^1, u \in H^2 \Big\} \tag{2.6}$$

Note que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$. De fato, basta ver que $H_0^1(0,l)$ é denso em $L^2(0,l)$ e $H^2(0,l)$ é denso em $H_0^1(0,l)$.

2.1.1 Existência de soluções

Nesta seção o objetivo é mostrar que o sistema (2.1)-(2.3) tem solução. Este será atingido usando a teoria de semigrupos. Em particular, usaremos o teorema 1.23.

Teorema 2.1 *O operador A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Note que se $y \in \mathcal{D}(A)$, por integração por partes temos que

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (\eta, au_{xx} - \gamma\eta), (u, \eta) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta, u \rangle_{H_0^1} + \langle au_{xx} - \gamma\eta, \eta \rangle_{L^2} \\ &= \int_0^l a\eta_x \overline{u_x} dx + \int_0^l (au_{xx} - \gamma\eta)\overline{\eta} dx \\ &= \int_0^l a\eta_x \overline{u_x} dx + [au_x\overline{\eta}]_0^l - \int_0^l au_x \overline{\eta_x} dx - \int_0^l \gamma |\eta|^2 dx. \end{aligned}$$

Pela definição do domínio de A, isto é, pelos valores de contorno $\eta(0) = \eta(l) = 0$ temos que o segundo termo acima é nulo e assim

$$\langle Ay, y \rangle_{\mathcal{H}} = 2Im \int_0^l a\eta_x \overline{u_x} dx - \int_0^l \gamma |\eta|^2 dx, \tag{2.7}$$

ou seja,

$$Re\langle Ay, y \rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l \gamma |\eta|^2 dx \leq 0, \forall y \in \mathcal{H}. \tag{2.8}$$

Logo, A é dissipativo. Vamos provar agora que $0 \in \rho(A)$, lembrando que nosso objetivo é usar o teorema 1.23. Para todo $F = (f, g)^T \in \mathcal{H}$, considere as equações

$$Ay = F,$$

ou seja,

$$\eta = f \in H_0^1 \quad \text{e} \quad au_{xx} - \gamma\eta = g \in L^2. \tag{2.9}$$

Logo

$$-au_{xx} = -\gamma f - g \in H^{-1} \tag{2.10}$$

onde H^{-1} é dual de H_0^1. Podemos associar essa equação (2.10) à forma sesquilinear $B : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{C}$ com

$$B[u,v] = a\int_0^l u_x \overline{v}_x dx,$$

e ao funcional linear $\Phi : H_0^1 \to \mathbb{C}$ com

$$\Phi(v) = -\gamma \int_0^l f_x \overline{v}_x dx - \int_0^l g\overline{v} dx.$$

Note que B e Φ satisfazem as condições do teorema de Lax-Milgram pois, pela desigualdade de Holder

$$B[u,v] \leq \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}, \quad B[u,u] = \|u\|_{H_0^1}^2,$$

e Φ é limitado pois, também pela desigualdade de Holder

$$|\Phi(v)| \leq \frac{\gamma}{a}\|f\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} + \|g\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \left(\frac{\gamma}{a}\|f\|_{H_0^1} + \frac{C_p}{a^2}\|g\|_{L^2}\right)\|v\|_{H_0^1}$$

e pela desigualdade de Poincaré na segunda desigualdade. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram existe uma única $u \in H_0^1$ tal que $B[u,v] = \Phi(v)$, $\forall v \in H_0^1$. Ou seja, existe uma única $u \in H_0^1$ solução de (2.10). Verifica-se facilmente que $u_{xx} \in L^2$ portanto $u \in H^2$. Tomando $\eta = f$, temos que $\eta \in H_0^1$. Assim, obtemos um único $y = (u,\eta)^T \in \mathcal{H}$ com $y \in \mathcal{D}(A)$ que satisfaz as equações de (2.9). Isso nos diz que A é bijetiva e existe A^{-1}.

Além disso, A^{-1} é limitada pois por (2.10) e por integração por partes

$$-\int_0^l au_{xx}\overline{u}dx = -\int_0^l (\gamma f + g)\overline{u}dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^l a|u_x|^2 dx = -\int_0^l \gamma f\overline{u}dx - \int_0^l g\overline{u}dx,$$

e usando as desigualdades de Holder, Cauchy com ϵ e Poincaré, nesta ordem, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^l a|u_x|^2 dx = \|u\|_{H_0^1}^2 &\leq \gamma\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \\ &\leq 2\epsilon\|u\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma^2}{4\epsilon}\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|g\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{2\epsilon C_p}{a}\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{\gamma^2 C_p}{4a\epsilon}\|f\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|g\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Para um ϵ apropriado obtemos que

$$\delta(\epsilon)\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{\gamma^2 C_p}{4a\epsilon}\|f\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|g\|_{L^2}^2,$$

onde $\delta(\epsilon) > 0$. Então, somando $\|\eta\|^2_{L^2}$ $(= \|f\|^2_{L^2})$ nos dois lados da desigualdade acima temos que

$$\|u\|^2_{H^1_0} + \|\eta\|^2_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2} + \frac{\gamma^2 C_p}{4a\epsilon\delta(\epsilon)}\|f\|^2_{H^1_0} + \frac{1}{4\epsilon\delta(\epsilon)}\|g\|^2_{L^2}$$

e, por fim, pela desigualdade de Poincaré novamente obtemos

$$\|u\|^2_{H^1_0} + \|\eta\|^2_{L^2} \leq C(\|f\|^2_{H^1_0} + \|g\|^2_{L^2})$$

que implica

$$\|(u,\eta)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|(f,g)\|_{\mathcal{H}}.$$

A desigualdade anterior diz que A é sobrejetor, e que A^{-1} é limitado. Portanto $0 \in \rho(A)$. Por fim, precisamos provar que A é fechado. Tome $(u_k, \eta_k) = y_k \in \mathcal{D}(A)$, $(u,\eta) = y \in \mathcal{H}$ e $(z_1, z_2) = z \in \mathcal{H}$ tais que $y_k \to y$ e $Ay_k \to z$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} u_k \\ \eta_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \eta_k \\ au_{k,xx} - \gamma\eta_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

Note que $\eta_k \to \eta$ em L^2 e $\eta_k \to z_1$ em H^1_0. Logo, pela definição de derivadas fracas, isto é, se olharmos para $\eta_{k,x}$ no sentido das distribuições obtemos

$$\int_0^l \eta_k \Phi_x dx = -\int_0^l \eta_{k,x}\Phi dx,$$

e temos que

$$\int_0^l \eta_k \Phi_x dx \to \int_0^l \eta\Phi_x dx \quad \text{e} \quad \int_0^l \eta_{k,x}\Phi dx \to \int_0^l z_1 \Phi dx.$$

Da igualdade dos limites acima temos que $\eta \in H^1_0$ e $\eta_x = z_1$. Além disso, $au_{k,xx} - \gamma\eta_k \to z_2$ em L^2. Então podemos afirmar que

$$u_{k,xx} \to \frac{z_2 + \gamma\eta}{a} = w \quad \text{em} \quad L^2$$

e $w \in H^2$ pois $u_k \in H^2$ que é um espaço de Banach. Se olharmos para $u_{k,xx}$ no sentido das distribuições, teremos que

$$\int_0^l u_k \mathit{\Phi}_{xx} dx = \int_0^l u_{k,xx}\mathit{\Phi} dx, \quad \forall \mathit{\Phi} \in C^\infty,$$

porém, como $u_k \to u$ em H^1_0, temos

$$\int_0^l u_k \mathit{\Phi}_{xx} dx \to \int_0^l u\mathit{\Phi}_{xx} dx$$

e como $u_{k,xx} \to w$ em L^2, temos

$$\int_0^l u_{k,xx}\mathit{\Phi} \to \int_0^l w\mathit{\Phi} dx.$$

Logo,

$$\int_0^l u\Phi_{xx}dx = \int_0^l w\Phi dx,$$

isto é, $u_{xx} = w$, o que nos diz que $u \in H^2$ e

$$au_{k,xx} - \gamma\eta_k \to u_{xx} - \gamma\eta \quad \text{em} \quad L^2.$$

Portanto, $y \in \mathcal{D}(A)$ e $Ay_k \to Ay$, ou seja, A é fechado. Assim, pelo Teorema 1.23, este teorema está provado.

■

2.1.2 Decaimento Exponencial

Nesta seção, mostraremos via teorema 1.28 que o semigrupo definido na demonstração do teorema anterior tem um bom comportamento assintótico, ou seja, é assintoticamente estável. Veja o resultado a seguir.

Teorema 2.2 *O semigrupo S(t), gerado por A, é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes* $M \geq 1$ *e* $\alpha > 0$ *tais que* $\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$.

Demontração: Vamos usar o teorema 1.28. Para isso, primeiro precisamos provar que $\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$.

Já provamos no teorema anterior que $0 \in \rho(A)$. Agora note que para qualquer número real β tal que $|\beta| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, o operador $i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$ é invertível. De fato, $(i\beta A^{-1} - I)$ é injetora se $|\beta| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ pois se supormos que não é injetora, então existe $x \in \mathcal{D}(A)$ tal que $i\beta A^{-1}x = x$, ou seja, vale que

$$\|x\| = \|i\beta A^{-1}x\| = |\beta|\|A^{-1}x\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|A^{-1}\|\|x\|.$$

Então concluímos que $\|x\| < \|x\|$. Contradição! Além disso, $i\beta I - A$ é sobrejetora pois seu domínio deve ser $\mathcal{D}(A)$ também, com valores em $\mathcal{H}$ $(i\beta I - A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H})$. Logo $i\beta A^{-1} - I$ deve estar definida em $\mathcal{D}(A)$ e sua imagem também é $\mathcal{D}(A)$ $(i\beta A^{-1} - I : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A))$. Como $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ é bijetora, concluímos que $i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$ é sobrejetora.

Além disso, $\|(i\beta I - A)^{-1}\|$ é uma função contínua em β no intervalo $]\frac{-1}{\|A^{-1}\|}, \frac{1}{\|A^{-1}\|}[$.

Suponha por absurdo que $\rho(A) \not\supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$, ou seja, existe $\omega \in \mathbb{R}$ com $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\omega| < \infty$ tal que $\{i\beta : |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(A)$ mas $\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\| : |\beta| < |\omega|\} = \infty$. Então existe uma sequência $\beta_k \in \mathbb{R}$ com $\beta_k \to \omega$, $|\beta_k| < |\omega|$ e uma sequência de funções vetoriais complexas $y_k = (u_k, \eta_k)^t \in \mathcal{D}(A)$ com norma unitária em $\mathcal{H}$ tal que $\|(i\beta_k I - A)y_k\|_{\mathcal{H}} \to 0$, ou seja,

$$i\beta_k u_k - \eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1, \tag{2.11}$$

$$i\beta_k \eta_k - a u_{k,xx} + \gamma \eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad L^2. \tag{2.12}$$

Tomando o produto interno de $(i\beta_k I - A)y_k$ com y_k em $\mathcal{H}$, por (2.7) temos

$$\begin{aligned}\langle (i\beta_k I - A)y_k, y_k\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle i\beta_k y_k, y_k\rangle_{\mathcal{H}} - \langle Ay_k, y_k\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= i\beta_k + 2Im \int_0^l a\eta_x \overline{u_x} dx + \gamma\|\eta_k\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

e tomando sua parte real, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$Re\,\langle (i\beta_k I - A)y_k, y_k\rangle = \gamma\|\eta_k\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

ou seja, $\eta_k \to 0$ em L^2. Então, por (2.12), obtemos que $u_k \to 0$ em H^2. Da desigualdade de Poincaré tiramos que $u_k \to 0$ em H_0^1. Isso contradiz a hipótese de que y_k é unitário para todo k. Portanto $\rho(A) \supseteq i\mathbb{R}$.

Vamos provar agora que $\overline{\lim\limits_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$. Suponha por absurdo que isso não vale. Então existe uma sequência β_k com $|\beta_k| \to \infty$ e uma sequência de funções unitárias $y_k \in \mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{H}$ tais que $\|(i\beta_k I - A)y_k\|_{\mathcal{H}} \to 0$. Então, basta repetirmos as contas anteriores que novamente teremos que $\gamma\|\eta_k\|_{L^2}^2 \to 0$, ou seja, $\eta_k \to 0$ em L^2. Note que (2.11) e (2.12) também valem nesse caso e então

$$f_k = i\beta_k u_k - \eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1, \tag{2.13}$$

$$g_k = i\beta_k \eta_k - a u_{k,xx} + \gamma \eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad L^2. \tag{2.14}$$

De (2.13) nós temos que $f_k \to 0$ em H_0^1 e concluímos que $f_k \to 0$ em L^2. Já vimos que $\eta_k \to 0$ em L^2. Então $\beta_k u_k \to 0$ em L^2 de onde concluímos que $u_k \to 0$ em L^2. Além disso, como estamos tomando $\|y_k\|_{\mathcal{H}} = 1$, temos que $u_k \to 1/a$ em H_0^1. Logo, o lado direito da equação acima tende a zero.

Tomando o produto interno de g_k com u_k e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_0^l g_k \overline{u}_k dx &= i\int_0^l \beta_k \eta_k \overline{u}_k dx - a\int_0^l u_{k,xx}\overline{u}_k dx + \gamma\int_0^l \eta_k \overline{u}_k dx \\ &= i\int_0^l \beta_k \eta_k \overline{u}_k dx - a[u_{k,x}\overline{u}_k]_0^l + a\int_0^l |u_{k,x}|^2 dx + \gamma\int_0^l \eta_k \overline{u}_k dx. \\ &= i\int_0^l \beta_k \eta_k \overline{u}_k dx + a\int_0^l |u_{k,x}|^2 dx + \gamma\int_0^l \eta_k \overline{u}_k dx.\end{aligned}$$

Note que o lado esquerdo da equação vai pra zero. Por outro lado, o primeiro e o terceiro termos do lado direito também vão pra zero. Logo

$$\int_0^l a|u_{k,x}|^2 dx \to 0,$$

ou seja, $u_k \to 0$ em H_0^1. Isso contradiz a hipótese de y_k ser unitário. Portanto

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \left\| (i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty,$$

o que completa a prova.

■

2.2 Vibrações com dissipação friccional distribuída somente em uma parte do seu domínio

Considere o deslocamento transversal de uma corda elástica constituída por dois materiais distintos, isto é, o deslocamento w é da forma

$$w = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in (0, l_0), \\ v(x) & \text{se} \quad x \in (l_0, l), \end{cases}$$

sendo $0 < l_0 < l$ e cada componente satisfaz

$$\rho_1 u_{tt} - k_1 u_{xx} - \gamma u_t = 0 \quad \text{em} \quad (0, l_0) \times (0, \infty), \tag{2.15}$$

$$\rho_2 v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (l_0, l) \times (0, \infty), \tag{2.16}$$

com k_1, k_2 e γ denotando constantes elásticas positivas; ρ_1 e ρ_2 denotam densidades de massa. Aqui consideraremos as condições de contorno de Dirichlet, que podem ser escritas como

$$u(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{2.17}$$

As condições de transmissão na interface l_0 são dadas por

$$u(l_0, t) = v(l_0, t), \quad k_1 u_x(l_0, t) = k_2 v_x(l_0, t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.18}$$

Por fim, os dados iniciais são prescritos pelas funções

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad (0, l_0) \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{em} \quad (l_0, l). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Agora vamos usar semigrupos para estudar o comportamento do sistema (2.15)-(2.19). Defina

$$\mathbb{H}^m = H^m(0, l_0) \times H^m(l_0, l), \quad m = 1, 2, \quad \mathbb{L}^2 = L^2(0, l_0) \times L^2(l_0, l)$$

$$\mathbb{H}_*^1 = \left\{ (u, v) \in \mathbb{H}^1; u(0) = v(l) = 0, u(l_0) = v(l_0) \right\}.$$

Defina o espaço $\mathcal{H} = \mathbb{H}^1_* \times \mathbb{L}^2$. Note que, ele equipado com o produto interno

$$\langle (u_1, v_1, \eta_1, \zeta_1), (u_2, v_2, \eta_2, \zeta_2) \rangle_{\mathcal{H}}$$
$$= k_1 \int_0^{l_0} u_{1,x}\overline{u}_{2,x} dx + k_2 \int_{l_0}^{l} v_{1,x}\overline{v}_{2,x} dx + \rho_1 \int_0^{l_0} \eta_1 \overline{\eta_2} dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_1 \overline{\zeta}_2 dx$$

é um espaço de Hilbert. Considere também o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \frac{1}{\rho_1}(k_1 u_{xx} - \gamma\eta) \\ \frac{k_2}{\rho_2} v_{xx} \end{pmatrix},$$

cujo domínio $\mathcal{D}(A)$ é dado por

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ X \in \mathcal{H}; (\eta, \zeta) \in \mathbb{H}^1_*, (u, v) \in \mathbb{H}^2, k_1 u_x(l_0) = k_2 v_x(l_0) \Big\}$$

sendo $X = (u, v, \eta, \zeta)^T$. Tomando $u_t = \eta$ e $v_t = \zeta$, (2.15)-(2.19) pode ser transformado no seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t), \quad \forall t > 0, \quad X(0) = X_0$$

sendo $X(t) = (u, v, u_t, v_t)^T$ e $X_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)^T$.

2.2.1 Existência de soluções

Nesta seção, o objetivo é novamente usar semigrupos para mostrar que o sistema (2.15)-(2.19) tem solução.

Teorema 2.3 *O operador A gera um semigrupo $S_A(t)$ de contrações de classe C_0 no espaço $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Note que usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \left(\eta, \zeta, \frac{1}{\rho_1}(k_1 u_{xx} - \gamma\eta), \frac{k_2}{\rho_2} v_{xx} \right), (u, v, \eta, \zeta) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= k_1 \int_0^{l_0} \eta_x \overline{u}_x dx + \rho_1 \int_0^{l_0} \frac{1}{\rho_1}(k_1 u_{xx} - \gamma\eta)\overline{\eta} dx + k_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_x \overline{v}_x dx \\
&\quad + \rho_2 \int_{l_0}^{l} \frac{k_2}{\rho_2} v_{xx} \overline{\zeta} dx \\
&= k_1 \int_0^{l_0} \eta_x \overline{u}_x dx + [k_1 u_x \overline{\eta}]_0^{l_0} - k_1 \int_0^{l_0} u_x \overline{\eta}_x dx - \gamma \int_0^{l_0} |\eta|^2 dx + k_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_x \overline{v}_x dx \\
&\quad + [k_2 v_x \overline{\zeta}]_{l_0}^{l} - k_2 \int_{l_0}^{l} v_x \overline{\zeta}_x dx
\end{aligned}$$

e pelas condições de contorno (2.17) e de transmissão (2.18), temos

$$\begin{aligned}\langle AX, X\rangle_{\mathcal{H}} &= k_1 u_x(l_0,t)\overline{\eta}(l_0,t) - k_2 v_x(l_0,t)\overline{\zeta}(l_0,t)\\ &\quad + 2Im\left(k_1\int_0^{l_0}\eta_x\overline{u_x}dx\right) + 2Im\left(k_2\int_{l_0}^{l}\zeta_x\overline{v_x}dx\right) - \gamma\int_0^{l_0}|\eta|^2dx\\ &= 2Im\left(k_1\int_0^{l_0}\eta_x\overline{u_x}dx\right) + 2Im\left(k_2\int_{l_0}^{l}\zeta_x\overline{v_x}dx\right) - \gamma\int_0^{l_0}|\eta|^2dx.\end{aligned}$$

Então

$$Re\langle AX, X\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma\int_0^{l_0}|\eta|^2dx \leq 0, \quad \forall X \in \mathcal{D}(A), \tag{2.20}$$

ou seja, A é um operador dissipativo.

Note que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$. Resta provar que $0 \in \rho(A)$ e que o operador A é fechado para usarmos o teorema 1.23.

Tome $F = (f, g, p, q) \in \mathcal{H}$. Vamos provar que existe um único $X = (u, v, \eta, \mu) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $AX = F$, ou seja,

$$\eta = f, \quad \text{em} \quad H^1(0, l_0), \tag{2.21}$$

$$\zeta = g, \quad \text{em} \quad H^1(l_0, l), \tag{2.22}$$

$$k_1 u_{xx} - \gamma\eta = \rho_1 p, \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0), \tag{2.23}$$

$$k_2 v_{xx} = \rho_2 q, \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{2.24}$$

Além disso, pela definição de $\mathcal{D}(A)$ devemos ter

$$u(0) = v(l) = 0, \quad u(l_0) = v(l_0)$$

$$\eta(0) = \mu(l) = 0, \quad \eta(l_0) = \mu(l_0)$$

$$k_1 u_x(l_0) = k_2 v_x(l_0)$$

De (2.21)-(2.24) concluímos que

$$-k_1 u_{xx} = -k_2 f - \rho_1 p \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0) \quad \text{e} \quad -k_3 v_{xx} = -\rho_2 q \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{2.25}$$

Assim, podemos definir a forma sesquilinear $B : \mathbb{H}^1_* \times \mathbb{H}^1_* \longrightarrow \mathbb{C}$ associada a essas equações por

$$B[(u, v), (\varphi, \psi)] = k_1\int_0^{l_0} u_x\varphi_x dx + k_2\int_{l_0}^{l} v_x\psi_x dx,$$

e o funcional linear $\Phi : \mathbb{H}^1_* \longrightarrow \mathbb{C}$ associado, por

$$\Phi(\varphi, \psi) = -\rho_1\int_0^{l_0} p\varphi dx - \gamma\int_0^{l_0} f_x\varphi_x dx - \rho_2\int_{l_0}^{l} q\psi dx.$$

Note que B é coerciva pois $B[(u,v),(u,v)] = \|(u,v)\|^2_{\mathbb{H}^1_l}$. Além disso B é contínua. De fato, aplicando a desigualdade de Holder obtemos

$$\begin{aligned}
|B[(u,v),(\varphi,\psi)]| &\leq k_1 \int_0^{l_0} |u_x\varphi_x|dx + k_2 \int_{l_0}^{l} |v_x\psi_x|dx \\
&\leq \|u\|_{H^1_0}\|\varphi\|_{H^1_0} + \|v\|_{H^1_0}\|\psi\|_{H^1_0} \\
&= \Big(\|u\|^2_{H^1_0}\|\varphi\|^2_{H^1_0} + 2\|u\|_{H^1_0}\|\varphi\|_{H^1_0}\|v\|_{H^1_0}\|\psi\|_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0}\|\psi\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
|B[(u,v),(\varphi,\psi)]| &\leq \Big(\|u\|^2_{H^1_0}\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|u\|^2_{H^1_0}\|\psi\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0}\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0}\|\psi\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\|u\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2}\Big(\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|\psi\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2} \\
&= \|(u,v)\|_{\mathbb{H}^1_*}\|(\varphi,\psi)\|_{\mathbb{H}^1_*}.
\end{aligned}$$

Além disso, Φ é limitado pois, pelas desigualdades de Holder e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
|\Phi(\varphi,\psi)| &\leq \rho_1 \int_0^{l_0} |p\varphi|dx + \gamma \int_0^{l_0} |f_x\varphi_x|dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l} |q\psi|dx \\
&\leq \|p\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \frac{\gamma}{k_1}\|f\|_{H^1_0}\|\varphi\|_{H^1_0} + \|q\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
&\leq \left(\frac{C_p}{k_1^2}\|p\|_{L^2} + \frac{\gamma}{k_1}\|f\|_{H^1_0}\right)\|\varphi\|_{H^1_0} + \frac{C_p}{k_1^2}\|q\|_{L^2}\|\psi\|_{H^1_0}.
\end{aligned}$$

E denotando por

$$\alpha = \frac{C_p}{k_1^2}\|p\|_{L^2} + \frac{\gamma}{k_1}\|f\|_{H^1_0}, \quad \beta = \frac{C_p}{k_1^2}\|q\|_{L^2}$$

obtemos, pela desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
|\Phi(\varphi,\psi)| &\leq \Big(\alpha^2\|\varphi\|^2_{H^1_0} + 2\alpha\beta\|\varphi\|_{H^1_0}\|\psi\|_{H^1_0} + \beta^2\|\psi\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\alpha^2\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \alpha^2\|\psi\|^2_{H^1_0} + \beta^2\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \beta^2\|\psi\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\alpha^2+\beta^2\Big)^{1/2}\Big(\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|\psi\|^2_{H^1_0}\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\alpha^2+\beta^2\Big)^{1/2}\|(\varphi,\psi)\|_{\mathbb{H}^1_l}.
\end{aligned}$$

Então, pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único $(u,v) \in \mathbb{H}^1_*$ tal que $B[(u,v),(\varphi,\psi)] = \Phi(\varphi,\psi), \quad \forall(\varphi,\psi) \in \mathbb{H}^1_*$. De forma similar ao caso da seção anterior, verifica-se que $(u,v) \in \mathbb{H}^2$. Tomando $(\eta,\zeta) = (f,g)$ temos que $(\eta,\zeta) \in \mathbb{H}^1_*$. Ou seja, dado $F \in \mathcal{H}$ existe um único $X \in \mathcal{D}(A)$ que satisfaz $AX = F$. Isso nos diz que A é bijetiva e existe A^{-1}. Para provar que $0 \in \rho(A)$, resta mostrar que A^{-1} é limitado. De (2.25) concluímos que

$$-\int_0^{l_0} k_1u_{xx}\overline{u}dx - \int_{l_0}^{l} k_2v_{xx}\overline{v}dx = -\int_0^{l_0}(\gamma f + \rho_1 p)\overline{u}dx - \int_{l_0}^{l}\rho_2 q\overline{v}dx.$$

Integrando por partes no lado esquerdo obtemos

$$
\begin{aligned}
-k_1u_x(l_0)u(l_0)+\int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx+k_2v_x(l_0)v(l_0)+\int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx=&\\
=-\int_0^{l_0}(\gamma f+\rho_1 p)\overline{u}dx-\int_{l_0}^{l}\rho_2 q\overline{v}dx.&
\end{aligned}
$$

Pela definição de $\mathcal{D}(A)$ sabemos que $-k_1u_x(l_0)u(l_0)+k_2v_x(l_0)v(l_0)=0$. Logo, obtemos

$$
\int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx+\int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx\leq\int_0^{l_0}\gamma|f\overline{u}|dx+\int_0^{l_0}\rho_1|p\overline{u}|dx+\int_{l_0}^{l}\rho_2|q\overline{v}|dx,
$$

e aplicando as desigualdades de Holder, Cauchy com ϵ e Poincaré, nessa ordem, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx+\int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx &\leq C\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}+\|p\|_{L^2}\|u\|_{L^2}+\|q\|_{L^2}\|v\|_{L^2}^2\\
&\leq 2\epsilon\|u\|_{L^2}^2+\frac{C}{4\epsilon}\|f\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2+\epsilon\|v\|_{L^2}^2\\
&\leq 2C_p\epsilon\|u\|_{H_0^1}^2+\frac{C_p}{4\epsilon}\|f\|_{H_0^1}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2\\
&\quad+C_p\epsilon\|v\|_{H_0^1}^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|u\|_{H_0^1}^2+\|v\|_{H_0^1}^2\leq 2C_p\epsilon\|u\|_{H_0^1}^2+\frac{C_p}{4\epsilon}\|f\|_{H_0^1}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2+C_p\epsilon\|v\|_{H_0^1}^2.
$$

Então, para um ϵ apropriado teremos

$$
\delta(\epsilon)\|u\|_{H_0^1}^2+\delta(\epsilon)\|v\|_{H_0^1}^2\leq\frac{C_p}{4\epsilon}\|f\|_{H_0^1}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2,
$$

sendo que $\delta(\epsilon)>0$. E somando $\|\eta\|_{L^2}^2+\|\zeta\|_{L^2}^2$ $(=\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2)$ nos dois lados da desigualdade acima e aplicando a desigualdade de Poincaré obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H_0^1}^2+\|v\|_{H_0^1}^2+\|\eta\|_{L^2}^2+\|\zeta\|_{L^2}^2 &\leq C(\epsilon)\left(\|f\|_{H_0^1}^2+\|p\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}^2+\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq C\left(\|f\|_{H_0^1}^2+\|g\|_{H_0^1}^2+\|p\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}^2\right),
\end{aligned}
$$

e então

$$
\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}}=\|X\|_{\mathcal{H}}\leq C\|F\|_{\mathcal{H}},
$$

ou seja, A^{-1} é limitado e portanto $0\in\rho(A)$. Resta provar que o operador A é fechado.

Sejam $X_k=(u_k,v_k,\eta_k,\zeta_k)\in\mathcal{D}(A)$, $X=(u,v,\eta,\zeta)\in\mathcal{H}$ e $F=(f,g,p,q)\in\mathcal{H}$ tais que $X_k\to X$ e $AX_k\to F$. Ou seja,

$$
\begin{pmatrix}u_k\\v_k\\\eta_k\\\zeta_k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}u\\v\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad A\begin{pmatrix}u_k\\v_k\\\eta_k\\\zeta_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_k\\\zeta_k\\\frac{1}{\rho_1}(k_1u_{k,xx}-\gamma\eta_k)\\\frac{k_2}{\rho_2}v_{k,xx}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}f\\g\\p\\q\end{pmatrix}.
$$

Note que $\eta_k \to \eta$ em L^2 e $\eta_k \to f$ em H^1. Então, pela definição de derivadas fracas temos que

$$\int_0^{l_0} \eta_k \Phi_x dx = -\int_0^{l_0} \eta_{k,x} \Phi dx,$$

e ainda

$$\int_0^{l_0} \eta_k \Phi_x dx \to \int_0^{l_0} \eta \Phi_x dx \quad \text{e} \quad \int_0^{l_0} \eta_{k,x} \Phi dx \to \int_0^{l_0} f \Phi dx.$$

Pela igualdade dos limites acima temos que $\eta \in H^1$ e $\eta_x = f$. Analogamente temos que $\zeta \in H^1$ e $\zeta_x = g$. Além disso

$$u_{k,xx} \to \frac{1}{k_1}(\gamma\eta + \rho_1 p) = w \quad \text{em} \quad L^2 \tag{2.26}$$

e

$$v_{k,xx} \to \frac{\rho_2}{k_2} q = z \quad \text{em} \quad L^2. \tag{2.27}$$

Mas como $u_k \to u$ em H_0^1, pela desigualdade de Poincaré podemos concluir que $u_k \to u$ em L^2 e, para qualquer $\Phi \in C_c^\infty$, temos

$$\int_0^{l_0} u_k \Phi_{xx} dx \to \int_0^{l_0} u \Phi_{xx} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{l_0} u_{k,xx} \Phi dx \to \int_0^{l_0} w \Phi dx.$$

Lembre que, pela definição de derivada fraca, tem-se que

$$\int_0^{l_0} u_k \Phi_{xx} dx = \int_0^{l_0} u_{k,xx} \Phi dx.$$

É fácil ver que, pela equação anterior e pela unicidade dos limites acima, vale que

$$\int_0^{l_0} u \Phi_{xx} dx = \int_0^{l_0} w \Phi dx,$$

ou seja, $u \in H^2$ e $u_{xx} = w$. Logo, sabendo que $u_{k,xx} \to u_{xx}$ e $\eta_k \to \eta$ em L^2, podemos concluir que

$$\frac{1}{\rho_1}(k_1 u_{k,xx} - \gamma\eta_k) \to \frac{1}{\rho_1}(k_1 u_{xx} - \gamma\eta) \quad \text{em} \quad L^2.$$

Por outro lado, como $v_k \to v$ em H_0^1, então $v_k \to v$ em L^2 e, para qualquer $\Phi \in C_c^\infty$, temos

$$\int_{l_0}^{l} v_k \Phi_{xx} dx \to \int_{l_0}^{l} v \Phi_{xx} dx \quad \text{e} \quad \int_{l_0}^{l} v_{k,xx} \Phi dx \to \int_{l_0}^{l} z \Phi dx.$$

Lembre novamente que, pela definição de derivada fraca, tem-se

$$\int_{l_0}^{l} v_k \Phi_{xx} dx = \int_{l_0}^{l} v_{k,xx} \Phi dx.$$

Pela equação anterior e pelos limites acima obtemos que

$$\int_{l_0}^{l} v\Phi_{xx}dx = \int_{l_0}^{l} z\Phi dx,$$

ou seja, $u \in H^2$ e $v_{xx} = z$. Logo

$$\frac{k_2}{\rho_2}v_{k,xx} \to \frac{k_2}{\rho_2}v_{xx} \quad \text{em} \quad L^2.$$

Note ainda que, como $X_k \in \mathcal{D}(A)$, então $k_1 u_{k,x}(l_0) = k_2 v_{k,x}(l_0)$, para todo k. Pelo teorema do traço segue que $k_1 u_x(l_0) = k_2 v_x(l_0)$. Portanto $X \in \mathcal{D}(A)$ e $AX_k \to AX$, isto é, A é fechado. Pelo teorema 1.23, este teorema está provado.

■

2.2.2 Decaimento Exponencial

Nesta seção, mostraremos via teorema 1.28 que o semigrupo definido na demonstração do teorema anterior tem um bom comportamento, ou seja, um comportamento de estabilidade. Veja o resultado a seguir.

Teorema 2.4 *O semigrupo gerado por A, $S(t) = e^{At}$, é exponencialmente estável. Isto é, existem constantes $M \geq 1$ e $\alpha > 0$ tais que $\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$.*

Demonstração: Da mesma forma que no problema anterior vamos usar o teorema 1.28.

Primeiramente vamos provar que $\overline{\lim\limits_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$. Suponha por absurdo que isso não vale. Então existe uma sequência β_k com $|\beta_k| \to \infty$ e uma sequência de funções unitárias $X_k \in \mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{H}$ tais que $\|(i\beta_k I - A)X_k\|_{\mathcal{H}} \to 0$. Nesse caso vale o seguinte:

$$f_k = i\beta_k u_k - \eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad H^1(0, l_0) \tag{2.28}$$

$$g_k = i\beta_k v_k - \zeta_k \to 0 \quad \text{em} \quad H^1(l_0, l) \tag{2.29}$$

$$p_k = i\beta_k \eta_k - \frac{k_1}{\rho_1}u_{k,xx} + \frac{\gamma}{\rho_1}\eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0) \tag{2.30}$$

$$q_k = i\beta_k \zeta_k - \frac{k_2}{\rho_2}v_{k,xx} \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{2.31}$$

Note que aqui também vale (2.20) e novamente teremos que $\gamma\|\eta_k\|^2_{L^2} \to 0$, ou seja, $\eta_k \to 0$ em L^2. De (2.28) e (2.30) concluímos que

$$p_k + i\beta_k f_k - \frac{\gamma}{\rho_1}\eta_k = -\beta_k^2 u_k - \frac{k_1}{\rho_1}u_{k,xx}. \tag{2.32}$$

Multiplicando o lado direito desta equação por $hu_{k,x}$, sendo $h \in C^1$, e integrando por partes obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle hu_{k,x}, -\beta_k^2 u_k - \frac{k_1}{\rho_1} u_{k,xx}\rangle &= -\frac{\beta_k^2}{2}\int_0^{l_0} h\frac{\partial |u_k|^2}{\partial x}dx - \frac{k_1}{2\rho_1}\int_0^{l_0} h\frac{\partial |u_{k,x}|^2}{\partial x}dx \\
&= -\frac{1}{2}h(l_0)|\beta_k u_k(l_0)|^2 - \frac{k_1}{2\rho_1}h(l_0)|u_{k,x}(l_0)|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^{l_0} h'|\beta_k u_k|^2 dx + \frac{k_1}{2\rho_1}h(0)|u_{k,x}(0)|^2 \\
&\quad + \frac{k_1}{2\rho_1}\int_0^{l_0} h'|u_{k,x}|^2 dx.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Por outro lado, multiplicando o lado esquerdo por $hu_{k,x}$ e integrando por partes obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle hu_{k,x}, p_k + i\beta_k f_k - \frac{\gamma}{\rho_1}\eta_k\rangle &= \int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{p}_k dx - i\beta_k\int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{f}_k dx - \frac{\gamma}{\rho_1}\int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{\eta}_k dx \\
&= \int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{p}_k dx - i\beta_k u_k(l_0)\overline{f}_k(l_0)h(l_0) \\
&\quad + i\beta_k\int_0^{l_0} u_k(\overline{f}_k h)_x dx - \frac{\gamma}{\rho_1}\int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{\eta}_k dx.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Das equações (2.32) a (2.34), da desigualdade de Cauchy com ϵ e tomando $h(x) = x$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{l_0}{2}|\beta_k u_k(l_0)|^2 + \frac{k_1 l_0}{2\rho_1}|u_{k,x}(l_0)|^2 = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^{l_0} |\beta_k u_k|^2 dx + \frac{k_1}{2\rho_1}\int_0^{l_0}|u_{k,x}|^2 dx - i\int_0^{l_0}\beta_k u_k(\overline{f}_{k,x}h + \overline{f}_k)dx \\
&\qquad - \int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{p}_k dx + l_0 i\beta_k u_k(l_0)\overline{f}_k(l_0) + \frac{\gamma}{\rho_1}\int_0^{l_0} hu_{k,x}\overline{\eta}_k dx \\
&\quad \le \frac{1}{2}\int_0^{l_0}|\beta_k u_k|^2 dx + \frac{k_1}{2\rho_1}\int_0^{l_0}|u_{k,x}|^2 dx + \int_0^{l_0}|hu_{k,x}\overline{p}_k|dx + \epsilon|\beta_k u_k(l_0)|^2 \\
&\qquad + \frac{l_0^2}{4\epsilon\beta_k^2}|f_k(l_0)|^2 + \int_0^{l_0}|\beta_k u_k\overline{f}_{k,x}h|dx + \int_0^{l_0}|\beta_k u_k\overline{f}_k|dx \\
&\qquad + \frac{\gamma}{\rho_1}\int_0^{l_0}|hu_{k,x}\overline{\eta}_k|dx.
\end{aligned}
$$

Para um ϵ suficientemente pequeno temos que

$$
\begin{aligned}
&|\beta_k u_k(l_0)|^2 + |u_{k,x}(l_0)|^2 \le \\
&\quad \le C\int_0^{l_0}|\beta_k u_k|^2 dx + C\int_0^{l_0}|u_{k,x}|^2 dx + C\int_0^{l_0}|hu_{k,x}\overline{p}_k|dx + \frac{C}{\beta_k^2}|f_k(l_0)|^2 \\
&\qquad + C\int_0^{l_0}|\beta_k u_k\overline{f}_{k,x}h|dx + C\int_0^{l_0}|\beta_k u_k\overline{f}_k|dx + C\int_0^{l_0}|hu_{k,x}\overline{\eta}_k|dx.
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Pelo teorema do traço e (2.28) temos que $f_k(l_0)$ é limitada. Logo a expressão do lado direito é limitada e consequentemente do lado esquerdo também. Daí concluímos que

$u_{k,x}(l_0)u_k(l_0)$ tende a zero pois $\beta_k u_k(l_0)$ e $u_{k,x}(l_0)$ são limitadas e

$$|u_{k,x}(l_0)u_k(l_0)| = \frac{1}{\beta_k}|u_{k,x}(l_0)\beta_k u_k(l_0)| \leq \frac{1}{\beta_k}\left(\epsilon|u_{k,x}(l_0)|^2 + C_\epsilon|\beta_k u_k(l_0)|^2\right)$$

Assim, se multiplicarmos (2.32) por u_k teremos

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{\rho_1}\int_0^{l_0}|u_{k,x}|^2dx = {}& \frac{k_1}{\rho_1}u_{k,x}(l_0)u_k(l_0) + \int_0^{l_0}|\beta_k u_k|^2dx + \int_0^{l_0}u_k\overline{p}_kdx + i\int_0^{l_0}\beta_k u_k\overline{f}_kdx \\ &+ \frac{\gamma}{\rho_1}\int_0^{l_0}u_k\overline{\eta}_kdx\end{aligned}$$

Portanto, como o lado direito dessa equação vai pra zero, temos que o lado esquerdo também vai pra zero, isto é, $u_{k,x} \to 0$ em L^2. Além disso, de (2.35) temos que $u_{k,x}(l_0) \to 0$ e $\beta_k u_k(l_0) \to 0$. Assim, pelas condições de transmissão temos que $v_{k,x}(l_0) \to 0$ e $\beta_k v_k(l_0) \to 0$.

Analogamente, de (2.29) e (2.31) temos que

$$q_k + i\beta_k g_k = -\beta_k^2 v_k - \frac{k_2}{\rho_2}v_{k,xx}. \tag{2.36}$$

Multiplicando o lado direito desta equação por $hu_{k,x}$, sendo $h \in C^1$, e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\langle hv_{k,x}, -\beta_k^2 v_k - \frac{k_2}{\rho_2}v_{k,xx}\rangle &= -\frac{\beta_k^2}{2}\int_{l_0}^{l}h\frac{\partial|v_k|^2}{\partial x}dx - \frac{k_2}{2\rho_2}\int_{l_0}^{l}h\frac{\partial|v_{k,x}|^2}{\partial x}dx \\ &= \frac{1}{2}h(l_0)|\beta_k v_k(l_0)|^2 + \frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}h'|\beta_k v_k|^2dx - \frac{k_2}{2\rho_2}h(l)|v_{k,x}(l)|^2 \\ &\quad + \frac{k_2}{2\rho_2}h(l_0)|v_{k,x}(l_0)|^2 + \frac{k_2}{2\rho_2}\int_{l_0}^{l}h'|v_{k,x}|^2dx.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Por outro lado, multiplicando o lado esquerdo por $hv_{k,x}$ e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\langle hv_{k,x}, q_k + i\beta_k g_k\rangle &= \int_{l_0}^{l}hv_{k,x}\overline{q}_kdx - i\beta_k\int_{l_0}^{l}hv_{k,x}\overline{g}_kdx \\ &= \int_{l_0}^{l}hv_{k,x}\overline{q}_kdx + i\beta_k v_k(l_0)\overline{g}_k(l_0)h(l_0) + i\beta_k\int_{l_0}^{l}v_k(\overline{g}_kh)_xdx.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Logo, de (2.36)-(2.38) e tomando $h(x) = x - l$ temos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}|\beta_k v_k|^2dx + \frac{k_2}{2\rho_2}\int_{l_0}^{l}|v_{k,x}|^2dx = \\ &\qquad = \frac{(l-l_0)}{2}|\beta_k v_k(l_0)|^2 + \frac{k_2(l-l_0)}{2\rho_2}|v_{k,x}(l_0)|^2 + \int_{l_0}^{l}hv_{k,x}\overline{q}_kdx \\ &\qquad\quad + i(l_0-l)\beta_k v_k(l_0)\overline{g}_k(l_0) + i\int_{l_0}^{l}\beta_k v_k\overline{g}_{k,x}hdx + i\int_{l_0}^{l}\beta_k v_k\overline{g}_{k,x}hdx \\ &\qquad\quad + i\int_{l_0}^{l}\beta_k v_k\overline{g}_kdx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular, a desigualdade de Holder e a desigualdade de Cauchy com ϵ obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0}^{l} |\beta_k v_k|^2 dx + \int_{l_0}^{l} |v_{k,x}|^2 dx \leq \\
&\leq C|\beta_k v_k(l_0)|^2 + C|v_{k,x}(l_0)|^2 + C\|hv_{k,x}\|_{L^2}\|q_k\|_{L^2} + C|\beta_k v_k(l_0)||g_k(l_0)| \\
&\quad + C\|\beta_k v_k\|_{L^2}\|g_{k,x}h\|_{L^2} + C\|\beta_k v_k\|_{L^2}\|g_k\|_{L^2} \\
&\leq C|\beta_k v_k(l_0)|^2 + C|v_{k,x}(l_0)|^2 + C\|hv_{k,x}\|_{L^2}\|q_k\|_{L^2} + C|\beta_k v_k(l_0)||g_k(l_0)| \\
&\quad + \epsilon C\|\beta_k v_k\|_{L^2} + \frac{C}{4\epsilon}\|g_{k,x}h\|_{L^2} + \epsilon C\|\beta_k v_k\|_{L^2} + \frac{C}{4\epsilon}\|g_k\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Daí, para um ϵ suficientemente pequeno, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0}^{l} |\beta_k v_k|^2 dx + \int_{l_0}^{l} |v_{k,x}|^2 dx &\leq C|\beta_k v_k(l_0)|^2 + C|v_{k,x}(l_0)|^2 + C\|hv_{k,x}\|_{L^2}\|q_k\|_{L^2} \\
&\quad + C|\beta_k v_k(l_0)||g_k(l_0)| + \frac{C}{4\epsilon}\|g_{k,x}h\|_{L^2} + \frac{C}{4\epsilon}\|g_k\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Note que, pelo teorema do traço, $|g_k(l_0)|$ é limitada. Portanto o lado direito vai pra zero e por isso o lado esquerdo vai pra zero, ou seja, $\beta_k v_k \to 0$ em L^2 e $v_k \to 0$ em H^1. De (2.29) concluímos que $\zeta_k \to 0$ em H^1 e pela desigualdade de Poincaré temos que $\zeta_k \to 0$ em L^2. Logo $X_k \to 0$ em $\mathcal{H}$. Isso contradiz a hipótese de X_k ser unitário. Então $\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$.

Para o próximo passo precisamos provar que $\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$. Já provamos no teorema anterior que $0 \in \rho(A)$. Note que para qualquer número real β tal que $|\beta| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, o operador $i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$ é invertível (pelos mesmos argumentos usados no teorema 2.2). Além disso, $\|(i\beta I - A)^{-1}\|$ é uma função contínua em β no intervalo $]\frac{-1}{\|A^{-1}\|}, \frac{1}{\|A^{-1}\|}[$.

Suponha por absurdo que $\rho(A) \not\supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$, ou seja, existe $\omega \in \mathbb{R}$ com $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\omega| < \infty$ tal que $\{i\beta : |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(A)$ mas $\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\| : |\beta| < |\omega|\} = \infty$. Então existe uma sequência $\beta_k \in \mathbb{R}$ com $\beta_k \to \omega$, $|\beta_k| < |\omega|$ e uma sequência de funções complexas $X_k \in \mathcal{D}(A)$ com norma unitária em $\mathcal{H}$ tal que $\|(i\beta_k I - A)X_k\|_{\mathcal{H}} \to 0$, ou seja, neste caso também valem as equações (2.28)-(2.31).

Lembre que de (2.20) temos que $\eta_k \to 0$ em L^2. Note que pela desigualdade de Poincaré e por (2.28) temos que $f_k \to 0$ em L^2. Logo, como β_k é limitada, $u_k \to 0$ em L^2. Além disso, de (2.30) tiramos que $u_{k,xx} \to 0$ em L^2. Como $\|u\|_{H^1}$ é limitada, pois X_k é unitário, temos que $\|u\|_{H^2}$ é limitada. Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg temos que

$$\|u_{k,x}\|_{L^2} \leq \|u_k\|_{H^2}\|u_k\|_{L^2},$$

o que nos diz que $u_k \to 0$ em H^1. De (2.35) temos que $|u_k(l_0)| \to 0$ e $|u_{k,x}(l_0)| \to 0$. Das condições de transmissão tiramos que $|v_k(l_0)| \to 0$ e $|v_{k,x}(l_0)| \to 0$. Portanto, de

(2.39) temos que $v_k \to 0$ em L^2 e em H^1 e de (2.29) tiramos que $\zeta_k \to 0$ em H^1. Consequentemente, pela desigualdade de Poincaré, $\zeta_k \to 0$ em L^2. Assim, $X_k \to 0$, o que contradiz o fato de X_k ser unitário.

Pelo teorema 1.28, o resultado deste teorema está provado.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Equações de onda com dissipação do tipo Kelvin-Voigt

Já vimos que a equação de onda com dissipação friccional tanto em todo o domínio como em parte dele tem decaimento exponencial. Veremos neste capítulo que isso também ocorre na equação de onda com dissipação do tipo Kelvin-Voigt em todo o domínio. Mais do que isso, também conseguimos obter uma certa regularidade para a solução. Em contraste com isso, quando temos a equação de onda com dissipação do tipo Kelvin-Voigt somente numa parte do seu domínio, suas soluções não são exponencialmente estáveis e, consequentemente, não é possível obter a regularidade obtida no caso anterior. No entanto, é possível obter decaimento polinomial. Vejamos primeiro o problema quando a dissipação é globalmente distribuída.

3.1 Vibrações com dissipação do tipo Kelvin-Voigt globalmente distribuída

Considere a equação linear viscoelástica: $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}^+$,

$$u_{tt} - au_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0, \quad a, \gamma > 0. \tag{3.1}$$

Assuma que a corda esteja presa nas duas extremidades $x = 0$ e $x = l$, e que valem as condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{3.2}$$

e valores iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3.3}$$

Para converter esse problema numa equação de evolução de 1ª ordem, defina $\eta = u_t$ e seja $\mathcal{H} = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l)$ o espaço de Hilbert já considerado anteriormente.

Então, do problema de valor de contorno (3.1) - (3.3) obtemos o seguinte problema de valor inicial para uma equação funcional em $\mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \forall t > 0, \quad y(x,0) = (u_0, u_1)^T \tag{3.4}$$

com

$$y = \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix} \eta \\ \frac{\partial}{\partial x}(au_x + \gamma\eta_x) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

e

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ y \in \mathcal{H} : \eta \in H_0^1, (au_x + \gamma\eta_x) \in H^1 \right\} \tag{3.6}$$

Verifica-se de forma similar às seções anteriores que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$.

3.1.1 Existência de soluções

Novamente, usando a teoria de semigrupos veremos que o sistema (3.1) - (3.3) tem soluções.

Teorema 3.1 *O operador A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Note que se $y \in \mathcal{D}(A)$, por integração por partes temos que

$$\begin{aligned}
\langle Ay, y\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle(\eta, au_{xx} + \gamma\eta_{xx}), (u,\eta)\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \eta, u\rangle_{H_0^1} + \langle au_{xx} + \gamma\eta_{xx}, \eta\rangle_{L^2} \\
&= \int_0^l a\eta_x\overline{u_x}dx + \int_0^l (au_{xx} + \gamma\eta_{xx})\overline{\eta}dx \\
&= \int_0^l a\eta_x\overline{u_x}dx + [au_x\overline{\eta}]_0^l - \int_0^l au_x\overline{\eta_x}dx + [\gamma\eta_x\overline{\eta}]_0^l - \int_0^l \gamma|\eta_x|^2dx.
\end{aligned}$$

Pela definição do domínio de A, isto é, pelos valores de contorno $\eta(0) = \eta(l) = 0$ temos que o segundo e o quarto termos acima são nulos e assim

$$\langle Ay, y\rangle_{\mathcal{H}} = 2Im\int_0^l a\eta_x\overline{u_x}dx - \int_0^l \gamma|\eta_x|^2dx, \tag{3.7}$$

ou seja,

$$Re\langle Ay, y\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l \gamma|\eta_x|^2dx \leq 0, \forall y \in \mathcal{H}. \tag{3.8}$$

Logo, A é dissipativo. Vamos provar agora que $0 \in \rho(A)$, lembrando que nosso objetivo é usar o teorema 1.23. Para todo $F = (f,g)^T \in \mathcal{H}$, considere as equações

$$Ay = F, \quad \text{ou seja,} \quad \eta = f \quad \text{e} \quad au_{xx} + \gamma\eta_{xx} = g, \tag{3.9}$$

sendo que $f \in H_0^1$ e $g \in L^2$. Logo, pelo teorema 1.9

$$-au_{xx} = \gamma f_{xx} - g \in H^{-1} \tag{3.10}$$

onde H^{-1} é dual de H_0^1. Podemos associar essa equação (3.10) à forma bilinear

$$B[u,v] = a\int_0^l u_x \overline{v_x} dx,$$

e ao funcional linear

$$\Phi(v) = -\gamma \int_0^l f_x \overline{v_x} dx - \int_0^l g\overline{v} dx.$$

Note que B e Φ satisfazem as condições do teorema de Lax-Milgram pois

$$B[u,v] \leq \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}, \quad B[u,u] = \|u\|_{H_0^1}^2$$

e Φ é limitado pois

$$|\Phi(v)| \leq \frac{\gamma}{a}\|f\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} + \|g\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \left(\frac{\gamma}{a}\|f\|_{H_0^1} + \frac{1}{a^2}\|g\|_{L^2}\right)\|v\|_{H_0^1}$$

pela desigualdade de Poincaré na segunda desigualdade. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram existe uma única $u \in H_0^1$ tal que $B[u,v] = \Phi(v)$, $\forall v \in H_0^1$. Ou seja, existe uma única $u \in H_0^1$ solução de (3.10). Tomando $\eta = f$, temos que $\eta \in H_0^1$. De $-au_{xx} = \gamma f_{xx} - g$ tiramos que $au_{xx} + \gamma\eta_{xx} = g \in L^2$, ou seja, $au_x + \gamma\eta_x = g \in H^1$. Assim, obtemos um único $y = (u,\eta)^T \in \mathcal{H}$ com $y \in \mathcal{D}(A)$ que satisfaz as equações de (3.9). Isso nos diz que A é bijetiva e existe A^{-1}. Além disso, A^{-1} é limitada pois por (3.10) e por integração por partes obtemos

$$-\int_0^l au_{xx}u dx = \int_0^l u(f_{xx} - g)dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^l a|u_x|^2 dx = \int_0^l u(f_{xx} - g)dx,$$

novamente por integração por partes

$$\int_0^l a|u_x|^2 dx = \int_0^l u f_{xx} dx - \int_0^l ug dx = -\int_0^l u_x f_x dx - \int_0^l ug dx$$

e usando as desigualdades de Holder, Cauchy com ϵ e Poincaré nesta ordem obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^l a|u_x|^2 dx &\leq \|u_x\|_{L^2}\|f_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \\ &\leq \epsilon\int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_0^l |f_x|^2 dx + \epsilon\int_0^l |u|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_0^l |g|^2 dx \\ &\leq \frac{\epsilon + C_p\epsilon}{a}\int_0^l a|u_x|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon a}\int_0^l a|f_x|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_0^l |g|^2 dx.\end{aligned}$$

Para um ϵ apropriado obtemos que

$$\delta(\epsilon)\int_0^l a|u_x|^2 dx \leq \frac{1}{4\epsilon a}\int_0^l a|f_x|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_0^l |g|^2 dx,$$

ou seja,

$$\delta(\epsilon)\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{4\epsilon a}\|f\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|g\|_{L^2}^2.$$

Então, dividindo a equação acima por $\delta(\epsilon)$ obtemos

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq C\left(\|f\|_{H_0^1}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

Se somarmos $\|\eta\|_{L^2}^2 (= \|f\|_{L^2}^2)$ nos dois lados da desigualdade acima obtemos

$$\|u\|_{H_0^1}^2 + \|\eta\|_{L^2}^2 \leq C(\|f\|_{H_0^1}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2).$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré no segundo termo do lado direito obtemos

$$\|u\|_{H_0^1}^2 + \|\eta\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|f\|_{H_0^1}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right)$$

que implica

$$\|A^{-1}(f,g)\|_{\mathcal{H}} = \|(u,\eta)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|(f,g)\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto $0 \in \rho(A)$. Por fim, precisamos provar que A é fechado. Tome $(u_k, \eta_k) = y_k \in \mathcal{D}(A)$, $(u,\eta) = y \in \mathcal{H}$ e $(z_1, z_2) = z \in \mathcal{H}$ tais que $y_k \to y$ e $Ay_k \to z$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} u_k \\ \eta_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \eta_k \\ a u_{k,xx} + \gamma \eta_{k,xx} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Note que $\eta_k \to z_1$ em H_0^1 e por isso $\eta_k \to z_1$ em L^2. Pela definição de derivadas fracas temos que

$$\int_0^l \eta_k \Phi_x dx = -\int_0^l \eta_{k,x}\Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty$$

ao mesmo tempo que

$$\int_0^l \eta_k \Phi_x dx \to \int_0^l \eta \Phi_x dx \quad \text{e} \quad \int_0^l \eta_{k,x}\Phi dx \to \int_0^l z_1 \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty.$$

Pela unicidade dos limites temos que

$$\int_0^l \eta \Phi_x dx = -\int_0^l z_1 \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty,$$

ou seja, $\eta \in H_0^1$ e $\eta_x = z_1$. Além disso

$$z_k := a u_{k,x} + \gamma \eta_{k,x} \in H^1,$$

pois $y_k \in \mathcal{D}(A)$. Mas veja que $\eta_{k,x} \to \eta_x = z_{1,x}$ em L^2. Ainda, $u_{k,x} \to u_x$ em L^2. Portanto,

$$z_k := a u_{k,x} + \gamma \eta_{k,x} \to a u_x + \gamma \eta_x := w \quad \text{em} \quad L^2.$$

Logo, $w = au_x + \gamma\eta_x \in H^1$ pois H^1 é um espaço de Banach. Isso que dizer que $y \in \mathcal{D}(A)$. Agora, pela definição de derivadas fracas e sabendo que $z_{k,x} \to z_2$ em L^2 e $z_k \to w$ em L^2, temos que

$$\int_0^l z_{k,x}\Phi dx = \int_0^l z_k \Phi_x dx \to \int_0^l w\Phi_x dx = \int_0^l w_x \Phi dx$$

mas também obtemos

$$\int_0^l z_{k,x}\Phi dx \to \int_0^l z_2 \Phi dx.$$

Logo, dos dois limites acima concluímos que $w_x = z_2$, ou seja, $z_2 = au_{xx} + \gamma\eta_{xx}$. Concluímos que o $Ay = z$ e operador A é fechado. Portanto, pelo teorema 1.23, este teorema está provado.

■

3.1.2 Decaimento exponencial

Teorema 3.2 *O semigrupo $S(t)$, gerado por A, é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes $M \geq 1$ e $\alpha > 0$ tais que $\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$.*

Demontração: Vamos usar o teorema 1.28. Para isso, primeiro precisamos provar que $\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$. Já provamos no teorema anterior que $0 \in \rho(A)$. Note que para qualquer número real β tal que $|\beta| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, o operador $i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$ é invertível (pelos mesmos argumentos usados no teorema 2.2). Além disso, $\|(i\beta I - A)^{-1}\|$ é uma função contínua em β no intervalo $]\frac{-1}{\|A^{-1}\|}, \frac{1}{\|A^{-1}\|}[$.

Suponha por absurdo que $\rho(A) \not\supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$, ou seja, existe $\omega \in \mathbb{C}$ com $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\omega| < \infty$ tal que $\{i\beta : |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(A)$ mas $\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\| : |\beta| < |\omega|\} = \infty$. Então existe uma sequência $\beta_k \in \mathbb{R}$ com $\beta_k \to \omega$, $|\beta_k| < |\omega|$ e uma sequência de funções vetores complexas $y_k \in \mathcal{D}(A)$ com norma unitária em $\mathcal{H}$ tal que $\|(i\beta_k I - A)y_k\|_{\mathcal{H}} \to 0$, ou seja,

$$i\beta_k u_k - \eta_k \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1 \tag{3.11}$$

$$i\beta_k \eta_k - \frac{\partial}{\partial x}(au_{k,x} + \gamma\eta_{k,x}) \to 0 \quad \text{em} \quad L^2. \tag{3.12}$$

Tomando o produto interno de $(i\beta_k I - A)y_k$ com y_k em $\mathcal{H}$, lembrando que y_k é unitário e por (3.7) temos

$$\begin{aligned}\langle (i\beta_k I - A)y_k, y_k\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle i\beta_k y_k, y_k\rangle_{\mathcal{H}} - \langle Ay_k, y_k\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= i\beta_k + 2Im\int_0^l a\eta_x \overline{u_x} dx + \gamma\|\eta_k\|_{H_0^1}^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Tomando sua parte real, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$Re\,\langle (i\beta_k I - A)y_k, y_k\rangle = \gamma \|\eta_k\|^2_{H_0^1} \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

Pela desigualdade de Poincaré, temos que $\eta_k \to 0$ em L^2. Então, por (3.11), obtemos que $u_k \to 0$ em H_0^1. Isso contradiz a hipótese de que y_k é unitário para todo k. Portanto $\rho(A) \supseteq i\mathbb{R}$.

Vamos provar agora que $\overline{\lim\limits_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$. Suponha por absurdo que isso não vale. Então existe uma sequência β_k com $|\beta_k| \to \infty$ e uma sequência de funções unitárias $y_k \in \mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{H}$ tais que $\|(i\beta_k I - A)y_k\|_{\mathcal{H}} \to 0$. Então, novamente teremos que $\gamma\|\eta_k\|^2_{H_0^1} \to 0$ por (3.14), ou seja, $\eta_k \to 0$ em H_0^1. Pelos mesmos argumentos anteriores temos que $\eta_k \to 0$ em L^2. Assim

$$i\beta_k u_k - \eta_k \to 0 \quad \Rightarrow \quad iu_k - \frac{\eta_k}{\beta_k} \to 0 \quad \Rightarrow \quad u_k \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1$$

o que contradiz o fato de que y_k é unitária. Portanto $\overline{\lim\limits_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$.

■

3.1.3 Efeito regularizante

Nesta seção veremos que o sistema (3.1) - (3.3) tem efeito regularizante, isto é, o semigrupo associado é analítico.

Teorema 3.3 *O semigrupo S(t), gerado por A, é analítico.*

Demonstração: Com base na demonstração do teorema anterior no qual provamos que $\rho(A) \supseteq i\mathbb{R}$, pelo teorema 1.29 só precisamos provar que

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \left\|\beta(i\beta I - A)^{-1}\right\| < \infty.$$

Suponha por absurdo que isso não vale. Então existe $(\beta_k) \subset \mathbb{R}$ com $\beta_k \to \infty$ e uma sequência de funções complexas $y_k \in \mathcal{D}(A)$ unitárias em $\mathcal{H}$ tais que

$$\left\|\beta_k(i\beta_k I - A)^{-1} y_k\right\|_{\mathcal{H}} \to \infty$$

o que é equivalente a

$$\left\|\left(iI - \frac{A}{\beta_k}\right)^{-1} y_k\right\|_{\mathcal{H}} \to \infty,$$

ou seja,

$$\left\|\left(iI - \frac{A}{\beta_k}\right) y_k\right\|_{\mathcal{H}} \to 0 \tag{3.15}$$

quando $k \longrightarrow \infty$, isto é,

$$iu_k - \frac{\eta_k}{\beta_k} \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1 \quad \text{e} \quad i\eta_k - \frac{1}{\beta_k}\frac{\partial}{\partial x}(au_{k,x} + \gamma\eta_{k,x}) \to 0 \quad \text{em} \quad L^2. \tag{3.16}$$

Como na demonstração do teorema anterior [veja (3.7), (3.13) e (3.14)], temos que

$$\frac{1}{\beta_k}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{3.17}$$

Note que, por y_k ser unitária temos que u_k é limitada. Então, por (3.16) temos que

$$0 \leftarrow \left\langle u_k + \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} = \|u_{k,x}\|_{L^2}^2 + \left\langle \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1}.$$

No entanto, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\|u_k\|_{H_0^1}^2 = \|u_{k,x}\|_{L^2}^2 &= \left\langle u_k + \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} - \left\langle \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} \\
&\leq \left\langle u_k + \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} + \frac{1}{\beta_k}\left|\langle \eta_k, u_k\rangle_{H_0^1}\right| \\
&\leq \left\langle u_k + \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} + \frac{1}{\beta_k}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}\|u_{k,x}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy no segundo termo da última linha obtemos

$$\frac{1}{a}\|u_k\|_{H_0^1}^2 \leq \left\langle u_k + \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} + \frac{1}{2\beta_k^2}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2a}\|u_k\|_{H_0^1}^2,$$

ou seja,

$$\|u_k\|_{H_0^1}^2 \leq 2a\left\langle u_k + \frac{i\eta_k}{\beta_k}, u_k \right\rangle_{H_0^1} + \frac{a}{\beta_k^2}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2.$$

Segue de (3.16) e (3.17) que $u_k \to 0$ em H_0^1. Analogamente, note que por (3.16) e por integração por partes

$$0 \leftarrow \left\langle \eta_k + \frac{i}{\beta_k}\frac{\partial}{\partial x}(au_{k,x} + \gamma\eta_{k,x}), \eta_k \right\rangle_{L^2} = \|\eta_k\|_{L^2}^2 - \frac{ia}{\beta_k}\langle u_{k,x}, \eta_{k,x}\rangle_{L^2} - \frac{i\gamma}{\beta_k}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2,$$

pois η_k é limitada em L^2, visto que y_k é unitária. Logo

$$\begin{aligned}
\|\eta_k\|_{L^2}^2 &= \left\langle \eta_k + \frac{i}{\beta_k}\frac{\partial}{\partial x}(au_{k,x} + \gamma\eta_{k,x}), \eta_k \right\rangle_{L^2} + \frac{i}{\beta_k}\langle u_k, \eta_k\rangle_{H_0^1} + \frac{i\gamma}{\beta_k}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left|\left\langle \eta_k + \frac{i}{\beta_k}\frac{\partial}{\partial x}(au_{k,x} + \gamma\eta_{k,x}), \eta_k \right\rangle_{L^2}\right| + \frac{a}{\beta_k}\left|\langle u_k, \eta_k\rangle_{H_0^1}\right| + \frac{\gamma}{\beta_k}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy no segundo termo da última linha obtemos

$$\|\eta_k\|_{L^2}^2 \leq \left|\left\langle \eta_k + \frac{i}{\beta_k}\frac{\partial}{\partial x}(au_{k,x} + \gamma\eta_{k,x}), \eta_k \right\rangle_{L^2}\right| + \frac{1}{2}\|u_k\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2\beta_k^2}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{\beta_k}\|\eta_{k,x}\|_{L^2}^2.$$

Note o lado direito da desigualdade acima tende à zero. Daí concluímos que o lado esquerdo também tende a zero, ou seja, que $\eta_k \to 0$ em L^2. Isso contradiz o fato de y_k ser unitária em $\mathcal{H}$. Portanto, pelo teorema 1.29, este teorema está provado.

■

3.2 Vibrações com dissipação do tipo Kelvin-Voigt distribuída somente numa parte do domínio

Considere o deslocamento longitudinal w dividido em duas partes

$$w = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in (0, l_0), \\ v(x) & \text{se} \quad x \in (l_0, l), \end{cases}$$

sendo $0 < l_0 < l$ e cada componente satisfaz

$$\rho_1 u_{tt} - k_1 u_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0 \quad \text{em} \quad (0, l_0) \times (0, \infty), \tag{3.18}$$

$$\rho_2 v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (l_0, l) \times (0, \infty), \tag{3.19}$$

com k_1, k_2 e γ denotando constantes elásticas positivas; ρ_1 e ρ_2 denotam densidades de massa. Aqui consideraremos as condições de contorno de Dirichlet, que podem ser escritas como

$$u(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{3.20}$$

As condições de transmissão são dadas por

$$u(l_0, t) = v(l_0, t), \quad k_1 u_x(l_0, t) + \gamma u_{xt}(l_0, t) = k_2 v_x(l_0, t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.21}$$

Por fim, os dados iniciais são

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad (0, l_0), \tag{3.22}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{em} \quad (l_0, l). \tag{3.23}$$

Agora, vamos usar a teoria de semigrupos para estudar o comportamento do sistema (3.18)-(3.23). Defina

$$\mathbb{H}^m = H^m(0, l_0) \times H^m(l_0, l), \quad m = 1, 2, \quad \mathbb{L}^2 = L^2(0, l_0) \times L^2(l_0, l);$$

$$\mathbb{H}^1_* = \Big\{(u, v) \in \mathbb{H}^1 : u(0) = v(l) = 0, u(l_0) = v(l_0)\Big\}.$$

Defina o espaço $\mathcal{H} = \mathbb{H}^1_* \times \mathbb{L}^2$. Note que, ele equipado com o produto interno

$$\begin{aligned} \langle (u_1, v_1, \eta_1, \zeta_1), (u_2, v_2, \eta_2, \zeta_2) \rangle_{\mathcal{H}} = k_1 \int_0^{l_0} u_{1,x} \overline{u}_{2,x} dx + k_2 \int_{l_0}^{l} v_{1,x} \overline{v}_{2,x} dx \\ + \rho_1 \int_0^{l_0} \eta_1 \overline{\eta}_2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_1 \overline{\zeta}_2 dx \end{aligned}$$

é um espaço de Hilbert. Considere também o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x}(k_1 u_x + \gamma \eta_x) \\ \frac{k_2}{\rho_2} v_{xx} \end{pmatrix},$$

cujo domínio $\mathcal{D}(A)$ é dado por

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ X \in \mathcal{H} : (\eta, \zeta) \in \mathbb{H}^1_*, (k_1 u + \gamma\eta, v) \in \mathbb{H}^2, k_1 u_x(l_0) + \gamma\eta_x(l_0) = k_2 v_x(l_0) \right\}$$

sendo $X = (u, v, \eta, \zeta)^T$. Tomando $u_t = \eta$ e $v_t = \zeta$, (3.18)-(3.22) pode ser transformado no seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t), \quad \forall t > 0, \quad X(0) = X_0$$

sendo $X(t) = (u, v, u_t, v_t)^T$ e $X_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)^T$.

3.2.1 Existência de soluções

A seguir, vamos usar semigrupos para analisar a existência de soluções do sistema (3.18)-(3.23).

Teorema 3.4 *O operador A gera um semigrupo $S_A(t)$ de contrações de classe C_0 no espaço $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Note que usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \left(\eta, \zeta, \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x}(k_1 u_x + \gamma \eta_x), \frac{k_2}{\rho_2} v_{xx} \right), (u, v, \eta, \zeta) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= k_1 \int_0^{l_0} \eta_x \overline{u}_x dx + \rho_1 \int_0^{l_0} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x}(k_1 u_x + \gamma \eta_x) \overline{\eta} dx + k_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_x \overline{v}_x dx \\
&\quad + \rho_2 \int_{l_0}^{l} \frac{k_2}{\rho_2} v_{xx} \overline{\zeta} dx \\
&= k_1 \int_0^{l_0} \eta_x \overline{u}_x dx + [k_1 u_x \overline{\eta}]_0^{l_0} - k_1 \int_0^{l_0} u_x \overline{\eta}_x dx + [\gamma \eta_x \overline{\eta}]_0^{l_0} - \gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx \\
&\quad + k_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_x \overline{v}_x dx + [k_2 v_x \overline{\zeta}]_{l_0}^{l} - k_2 \int_{l_0}^{l} v_x \overline{\zeta}_x dx
\end{aligned}$$

e pelas condições de contorno (3.20) e de transmissão (3.21), temos

$$\begin{aligned}
\langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} &= k_1 u_x(l_0, t) \overline{\eta}(l_0, t) + \gamma \eta_x(l_0, t) \overline{\eta}(l_0, t) - k_2 v_x(l_0, t) \overline{\zeta}(l_0, t) \\
&\quad + 2Im \left(k_1 \int_0^{l_0} \eta_x \overline{u}_x dx \right) + 2Im \left(k_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_x \overline{v}_x dx \right) - \gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx \\
&= 2Im \left(k_1 \int_0^{l_0} \eta_x \overline{u}_x dx \right) + 2Im \left(k_2 \int_{l_0}^{l} \zeta_x \overline{v}_x dx \right) - \gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx.
\end{aligned}$$

Então

$$Re\langle AX, X \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx \leq 0, \quad \forall X \in \mathcal{D}(A), \tag{3.24}$$

ou seja, A é um operador dissipativo.

Note que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$ pois $\mathbb{H}^2$ é denso em $\mathbb{H}^1_*$ o qual é denso em $\mathbb{L}^2$. E A é um operador fechado. De fato, tome uma sequência com elementos $X_k \in \mathcal{D}(A)$, $X \in \mathcal{H}$ e $F \in \mathcal{H}$ tais que $X_k \to X$ e $AX_k \to F$. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_k \\ \zeta_k \\ \frac{1}{\rho_1}(k_1 u_{k,xx} - \gamma \eta_{k,xx}) \\ \frac{k_2}{\rho_2} v_{k,xx} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f \\ g \\ p \\ q \end{pmatrix}.$$

Note que $\eta_k \to \eta$ em L^2, $\eta_k \to f$ em H^1 e que, pela definição de derivadas fracas temos

$$\int_0^{l_0} \eta_k \Phi_x dx = -\int_0^{l_0} \eta_{k,x} \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty.$$

Sabendo disso, observe que

$$\int_0^{l_0} \eta_k \Phi_x dx \to \int_0^{l_0} \eta \Phi_x dx \quad \text{e} \quad \int_0^{l_0} \eta_{k,x} \Phi dx \to \int_0^{l_0} f \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty.$$

Logo, pela unicidade de limites temos que

$$\int_0^{l_0} \eta \Phi_x dx = -\int_0^{l_0} f \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty,$$

ou seja, $\eta \in H^1$ e $\eta_x = f$. Analogamente $\zeta \in H^1$ e $\zeta_x = g$. Além disso, $(k_1 u_{k,xx} - \gamma \eta_{k,xx}) \to \rho_1 p$ em L^2 e $u_k \to u$ em H^1. Então, pela definição de derivadas fracas, obtemos

$$\int_0^{l_0} (k_1 u_k - \gamma \eta_k) \Phi_{xx} dx = \int_0^{l_0} (k_1 u_{k,xx} - \gamma \eta_{k,xx}) \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty.$$

Ao mesmo tempo, temos que

$$\int_0^{l_0} (k_1 u_k - \gamma \eta_k) \Phi_{xx} dx \to \int_0^{l_0} (k_1 u - \gamma \eta) \Phi_{xx} dx \quad \text{e}$$

$$\int_0^{l_0} (k_1 u_{k,xx} - \gamma \eta_{k,xx}) \Phi dx \to \int_0^{l_0} \rho_1 p \Phi dx, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty.$$

Pela unicidade dos limites obtemos que $k_1 u - \gamma \eta \in H^2$ e $k_1 u_{xx} - \gamma \eta_{xx} = \rho_1 p$. Analogamente obtemos que $v \in H^2$ e $k_2 v_{xx} = \rho_2 q$. Portanto $X \in \mathcal{D}(A)$ e $AX = F$.

Resta provar que $0 \in \rho(A)$ para usarmos o teorema 1.23. Tome $F = (f, g, p, q) \in \mathcal{H}$. Vamos provar que existe um único $X = (u, v, \eta, \zeta) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $AX = F$, ou seja,

$$\eta = f, \quad \text{em} \quad H^1(0, l_0), \quad \zeta = g, \quad \text{em} \quad H^1(l_0, l), \tag{3.25}$$

$$k_1 u_{xx} + \gamma \eta_{xx} = \rho_1 p, \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0), \quad k_2 v_{xx} = \rho_2 q, \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{3.26}$$

Além disso, pela definição de $\mathcal{D}(A)$ devemos ter

$$u(0) = v(l) = 0, \quad u(l_0) = v(l_0)$$

$$\eta(0) = \zeta(l) = 0, \quad \eta(l_0) = \zeta(l_0)$$

$$k_1 u_x(l_0) + \gamma \eta_x(l_0) = k_2 v_x(l_0)$$

De (3.25) e (3.26) tiramos que

$$-k_1 u_{xx} = \gamma f_{xx} - \rho_1 p \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0) \quad \text{e} \quad -k_2 v_{xx} = -\rho_2 q \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{3.27}$$

Assim, podemos definir a forma bilinear $B : \mathbb{H}^1_* \times \mathbb{H}^1_* \longrightarrow \mathbb{C}$ associada a essas equações por

$$B[(u,v),(\varphi,\psi)] = k_1 \int_0^{l_0} u_x \overline{\varphi}_x dx + k_2 \int_{l_0}^{l} v_x \overline{\psi}_x dx,$$

e o funcional linear $\Phi : \mathbb{H}^1_* \longrightarrow \mathbb{C}$ associado, por

$$\Phi(\varphi,\psi) = -\rho_1 \int_0^{l_0} p\overline{\varphi} dx - \gamma \int_0^{l_0} f_x \overline{\varphi}_x dx - \rho_2 \int_{l_0}^{l} q\overline{\psi} dx.$$

Note que B é coerciva pois $B[(u,v),(u,v)] = \|(u,v)\|^2_{\mathbb{H}^1_*}$. Além disso B é contínua. De fato, aplicando a desigualdade de Holder obtemos

$$\begin{aligned}
|B[(u,v),(\varphi,\psi)]| &\leq k_1 \int_0^{l_0} |u_x \varphi_x| dx + k_2 \int_{l_0}^{l} |v_x \psi_x| dx \\
&\leq \|u\|_{H^1_0} \|\varphi\|_{H^1_0} + \|v\|_{H^1_0} \|\psi\|_{H^1_0} \\
&= \left(\|u\|^2_{H^1_0} \|\varphi\|^2_{H^1_0} + 2\|u\|_{H^1_0} \|\varphi\|_{H^1_0} \|v\|_{H^1_0} \|\psi\|_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} \|\psi\|^2_{H^1_0} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
|B[(u,v),(\varphi,\psi)]| &\leq \left(\|u\|^2_{H^1_0} \|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|u\|^2_{H^1_0} \|\psi\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} \|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} \|\psi\|^2_{H^1_0} \right)^{1/2} \\
&= \left(\|u\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} \right)^{1/2} \left(\|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|\psi\|^2_{H^1_0} \right)^{1/2} \\
&= \|(u,v)\|_{\mathbb{H}^1_*} \|(\varphi,\psi)\|_{\mathbb{H}^1_*}.
\end{aligned}$$

Além disso, Φ é limitado pois, pelas desigualdades de Holder e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
|\Phi(\varphi,\psi)| &\leq \rho_1 \int_0^{l_0} |p\varphi| dx + \gamma \int_0^{l_0} |f_x \varphi_x| dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l} |q\psi| dx \\
&\leq \|p\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \frac{\gamma}{k_1} \|f\|_{H^1_0} \|\varphi\|_{H^1_0} + \|q\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\
&\leq \left(\frac{C_p}{k_1^2} \|p\|_{L^2} + \frac{\gamma}{k_1} \|f\|_{H^1_0} \right) \|\varphi\|_{H^1_0} + \frac{C_p}{k_1^2} \|q\|_{L^2} \|\psi\|_{H^1_0}.
\end{aligned}$$

E denotando por

$$\alpha = \frac{C_p}{k_1^2} \|p\|_{L^2} + \frac{\gamma}{k_1} \|f\|_{H^1_0}, \quad \beta = \frac{C_p}{k_1^2} \|q\|_{L^2}$$

obtemos, pela desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
|\Phi(\varphi,\psi)| &\leq \Big(\alpha^2\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + 2\alpha\beta\|\varphi\|_{H_0^1}\|\psi\|_{H_0^1} + \beta^2\|\psi\|_{H_0^1}^2\Big)^{1/2}\\
&\leq \Big(\alpha^2\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \alpha^2\|\psi\|_{H_0^1}^2 + \beta^2\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \beta^2\|\psi\|_{H_0^1}^2\Big)^{1/2}\\
&= \Big(\alpha^2+\beta^2\Big)^{1/2}\Big(\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2\Big)^{1/2}\\
&= \Big(\alpha^2+\beta^2\Big)^{1/2}\|(\varphi,\psi)\|_{\mathbb{H}_l^1}.
\end{aligned}$$

Então, pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único $(u,v)\in\mathbb{H}_*^1$ tal que

$$B[(u,v),(\varphi,\psi)] = \Phi(\varphi,\psi),$$

para todo $(\varphi,\psi)\in\mathcal{H}$. Pelo teorema de regularidade em H^2 temos que $(u,v)\in\mathbb{H}^2$. Tomando $(\eta,\zeta)=(f,g)$ temos que $(\eta,\zeta)\in\mathbb{H}_*^1$. Assim, obtemos um único $X=(u,v,\eta,\zeta)^T\in\mathcal{H}$ com $X\in\mathcal{D}(A)$ que satisfaz as equações de (3.27). Isso nos diz que A é bijetiva e existe A^{-1}. Resta provar que A^{-1} é limitado. Tome $X\in\mathcal{D}(A)$. De (3.26) concluímos que

$$-\int_0^{l_0} k_1u_{xx}\overline{u}dx - \int_0^{l_0} k_1\eta_{xx}\overline{u}dx - \int_{l_0}^{l} k_2v_{xx}\overline{v}dx = \int_0^{l_0}\rho_1p\overline{u}dx - \int_{l_0}^{l}\rho_2q\overline{v}dx.$$

Integrando por partes no lado esquerdo obtemos

$$\begin{aligned}
&-k_1u_x(l_0)\overline{u}(l_0) + \int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx - \gamma\eta_x(l_0)\overline{u}(l_0) + \int_0^{l_0}\gamma|\eta_x|^2dx\\
&\qquad\qquad + k_2v_x(l_0)\overline{v}(l_0) + \int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx \leq \int_0^{l_0}\rho_1|p\overline{u}|dx + \int_{l_0}^{l}\rho_2|q\overline{v}|dx,
\end{aligned}$$

pois $u(0)=v(0)=0$. Lembrando que $u(l_0)=v(l_0)$ e que $k_1u(l_0)+\gamma\eta(l_0)=k_2v(l_0)$ obtemos

$$\int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx + \int_0^{l_0}\gamma|\eta_x|^2dx + \int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx \leq \int_0^{l_0}\rho_1|p\overline{u}|dx + \int_{l_0}^{l}\rho_2|q\overline{v}|dx.$$

Aplicando no lado direito as desigualdades de Holder, Cauchy com ϵ e Poincaré, nessa ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx + \int_0^{l_0}\gamma|\eta_x|^2dx + \int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx &\leq \|p\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + \|q\|_{L^2}\|v\|_{L^2}^2\\
&\leq \frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2 + \epsilon\|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2 + \epsilon\|v\|_{L^2}^2\\
&\leq \frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2 + C_p\epsilon\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2\\
&\qquad + C_p\epsilon\|v\|_{H_0^1}^2,
\end{aligned}$$

ou seja, escrevendo as integrais do lado esquerdo como normas e sabendo que $\|\eta\|_{L^2}\leq C_p\|\eta\|_{H_0^1}$ obtemos

$$\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 + \frac{\gamma}{C_pk_1}\|\eta\|_{L^2} \leq \frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2 + C_p\epsilon\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2 + C_p\epsilon\|v\|_{H_0^1}^2.$$

Então, para um ϵ apropriado teremos

$$\delta(\epsilon)\|u\|_{H_0^1}^2+\delta(\epsilon)\|v\|_{H_0^1}^2+\frac{\gamma}{C_pk_1}\|\eta\|_{L^2}\leq\frac{1}{4\epsilon}\|p\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\epsilon}\|q\|_{L^2}^2,$$

sendo que $\delta(\epsilon)>0$. E somando $\|\eta\|_{L^2}^2+\|\zeta\|_{L^2}^2$ $(=\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2)$ nos dois lados da desigualdade acima e aplicando a desigualdade de Poincaré obtemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_0^1}^2+\|v\|_{H_0^1}^2+\|\eta\|_{L^2}^2+\|\zeta\|_{L^2}^2&\leq C(\epsilon)\left(\|p\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}^2+\|f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\right)\\&\leq C\left(\|f\|_{H_0^1}^2+\|g\|_{H_0^1}^2+\|p\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

e então

$$\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}}=\|X\|_{\mathcal{H}}\leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

ou seja, A^{-1} é limitado e portanto $0\in\rho(A)$. Pelo teorema 1.23 este teorema está provado.

$\blacksquare$

Teorema 3.5 *Para todo $X_0\in\mathcal{H}$, existe uma única solução suave $X(t)=(u,v,u_t,v_t)$ de (3.18)-(3.22) satisfazendo $(u,v,u_t,v_t)\in C([0,\infty):\mathbb{H}_*^1\times\mathbb{L}^2)$. Se $X_0\in\mathcal{D}(A)$, então X é uma solução forte satisfazendo $(u,v,u_t,v_t)\in C^1([0,\infty):\mathbb{H}_*^1\times\mathbb{L}^2)\cap C([0,\infty):\mathcal{D}(A))$.*

Demonstração: Veja o teorema 1.3 da seção 4.1 de [Pazy].

3.2.2 Decaimento Polinomial

Nesta seção, vamos mostrar o decaimento polinomial da solução do sistema (3.18)-(3.22). Para fazer isso, vamos usar o teorema 1.30 atribuído a A. Borichev e Y. Tomilov.

Teorema 3.6 *O semigrupo $(S_A(t))_{t\geq0}$ associado ao problema (3.18)-(3.22) decai polinomialmente com*

$$\|S_A(t)X_0\|\leq\frac{C}{t^2}\|X_0\|_{\mathcal{D}(A)},$$

para um t suficientemente grande.

Observação: Pode-se provar que a desigualdade acima pode ser estendida para

$$\|S_A(t)X_0\|\leq\frac{C}{t^{2k}}\|X_0\|_{\mathcal{D}(A^k)},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Em outras palavras, quanto maior a regularidade dos dados iniciais, mais rápido é o decaimento da energia.

Demonstração do teorema 3.6: Vamos provar primeiro que $i\mathbb{R}\subset\rho(A)$. Como A é um operador fechado (provado no teorema anterior) e A^{-1} é um operador compacto (veja que $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^1_* \subset\subset \mathbb{H}^1_* \times \mathbb{L}^2$), concluímos que o espectro de A consiste apenas de autovalores (ver teorema 8.4-4 do [Kr]).

Suponha que existam autovalores imaginários $i\lambda$, $\lambda \neq 0$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $AX = i\lambda X$. Então teremos que

$$Re\langle AX, X\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx = 0.$$

Logo, $\|\eta_x\|_{L^2} = 0$. Então, pela desigualdade de Poincaré

$$\|\eta\|_{L^2} \leq C_p \|\eta_x\|_{L^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\eta\|_{L^2} = 0,$$

ou seja, $\eta = 0$. De (3.28) (a seguir) concluímos que $i\lambda u = \eta = 0$, isto é, $u = 0$. De (3.29), (3.31) (a seguir) temos que $\lambda^2 v + v_{xx} = 0$; e da definição de $\mathcal{D}(A)$ vemos que v satisfaz $v(l_0) = u(l_0) = 0$ e $v_x(l_0) = 0$. Mas a única solução para essa EDO é $v = 0$. Logo, $X = 0$, o que contradiz o fato de A ser sobrejetora. Portanto, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Note agora que dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (f, g, p, q) \in \mathcal{H}$, existe $X = (u, v, \eta, \zeta) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $i\lambda X - AX = F$ pois o operador A é fechado e $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. De fato, $\mathcal{D}(i\lambda I - A)^{-1} = \overline{\mathcal{D}(i\lambda I - A)^{-1}} = \mathcal{H}$. Então

$$i\lambda u - \eta = f \quad \text{em} \quad H^1(0, l_0), \tag{3.28}$$

$$i\lambda v - \zeta = g \quad \text{em} \quad H^1(l_0, l), \tag{3.29}$$

$$i\lambda \eta - k_1 u_{xx} - \gamma \eta_{xx} = \rho_1 p \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0), \tag{3.30}$$

$$i\lambda \zeta - k_2 v_{xx} = \rho_2 q \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{3.31}$$

De (3.24) deduzimos que

$$Re\langle (i\lambda I - A)X, X\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\langle AX, X\rangle_{\mathcal{H}} = \gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx = Re\langle F, X\rangle_{\mathcal{H}}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\gamma \int_0^{l_0} |\eta_x|^2 dx \leq \|X\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.32}$$

Nosso próximo passo é provar que o operador resolvente está proporcionalmente limitado por $\lambda^{1/2}$. Note que por (3.28), $i\lambda u_x = \eta_x + f_x$. Logo $|\lambda| \|u_x\|_{L^2} = \|\eta_x + f_x\|_{L^2}$. Pela desigualdade triangular e pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx &\leq \|\eta_x\|^2_{L^2} + 2\|\eta_x\|_{L^2} \|f_x\|_{L^2} + \|f_x\|^2_{L^2} \\ &\leq 2\|\eta_x\|^2_{L^2} + 2\|f_x\|^2_{L^2} \\ &\leq 2\|\eta_x\|^2_{L^2} + 2\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

De (3.32)

$$|\lambda|^2 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx \leq C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad |\lambda| > 1. \tag{3.33}$$

De (3.30), (3.32) e da conta que leva a (3.33) temos que

$$\begin{aligned}
|\lambda|\|\eta\|_{H^{-1}} &\leq C\|u_x\|_{L^2} + C\|\eta_x\|_{L^2} + C\|p\|_{L^2} \\
&\leq C\|\eta_x\|_{L^2} + C\|f_x\|_{L^2} + C\|\eta_x\|_{L^2} + C\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\|\eta_x\|_{L^2} + C\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\|X\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

ou seja, temos que

$$|\lambda|\|\eta\|_{H^{-1}} \leq C\|X\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.34}$$

Além disso, usando interpolação, a desigualdade anterior e a desigualdade (3.32) respectivamente temos

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_{L^2}^2 &\leq C\|\eta\|_{H^{-1}}\|\eta\|_{H^1} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|}\left[\|X\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}}\right]\|\eta\|_{H^1} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|}\left(\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|X\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/2}\right), \quad |\lambda| > 1.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Multiplicando a equação (3.30) por $(x+l)(\overline{k_1u_x + \gamma\eta_x})$, integrando e tomando a sua parte real, chegamos a

$$\begin{aligned}
Re\left(i\lambda\int_0^{l_0}\eta(x+l)(\overline{k_1u_x+\gamma\eta_x})dx\right) - Re\int_0^{l_0}(x+l)(k_1u_{xx}+\gamma\eta_{xx})\overline{(k_1u_x+\gamma\eta_x)}dx \\
= \rho_1 Re\int_0^{l_0}(x+l)p(\overline{k_1u_x+\gamma\eta_x})dx
\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned}
Re\left(i\lambda\int_0^{l_0}\eta(x+l)(\overline{k_1u_x+\gamma\eta_x})dx\right) - \frac{1}{2}\int_0^{l_0}(x+l)\frac{d}{dx}|k_1u_x+\gamma\eta_x|^2dx = \\
= \rho_1 Re\int_0^{l_0}(x+l)p(\overline{k_1u_x+\gamma\eta_x})dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes no segundo termo do lado esquerdo e rearranjando os termos obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{l}{2}|k_1u_x(l_0)+\gamma\eta_x(l_0)|^2 = k_1 Re\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{u_x}dx - \rho_1 Re\int_0^{l_0}(x+l)p(\overline{k_1u_x+\gamma\eta_x})dx \\
+ \frac{1}{2}\int_0^{l_0}|k_1u_x+\gamma\eta_x|^2dx + \gamma Re\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{\eta_x}dx.
\end{aligned}$$

Novamente, derivando a equação (3.28), multiplicando por $k_1(x+l)\eta$, integrando e tomando sua parte real obtemos

$$k_1 Re\left(\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{u_x}dx\right)-k_1Re\int_0^{l_0}(x+l)\eta\overline{\eta_x}dx=k_1Re\int_0^{l_0}(x+l)\eta\overline{f_x}dx$$

que é equivalente a

$$k_1 Re\left(\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{u_x}dx\right)-\frac{1}{2}k_1\int_0^{l_0}(x+l)\frac{d}{dx}|\eta|^2dx=k_1Re\int_0^{l_0}(x+l)\eta\overline{f_x}dx.$$

Integrando por partes o segundo termo do lado esquerdo e rearranjando os termos tiramos que

$$\frac{l}{2}k_1|\eta(l_0)|^2=k_1Re\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{u_x}dx+\frac{1}{2}k_1\int_0^{l_0}|\eta|^2dx-k_1\int_0^{l_0}(x+l)\eta\overline{f_x}dx$$

Defina o funcional

$$I_u=\frac{l}{2}\left[k_1|\eta(l_0)|^2+|k_1u_x(l_0)+\gamma\eta_x(l_0)|^2\right],$$

e, das equações anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned}I_u=&2k_1Re\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{u_x}dx+\gamma Re\lambda i\int_0^{l_0}\eta(x+l)\overline{\eta_x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{l_0}|k_1u_x+\gamma\eta_x|^2dx\\&+\frac{1}{2}k_1\int_0^{l_0}|\eta|^2dx-\rho_1Re\int_0^{l_0}(x+l)p(\overline{k_1u_x+\gamma\eta_x})dx-k_1\int_0^{l_0}(x+l)\eta\overline{f_x}dx.\end{aligned}$$

Se notarmos que $x+l\leq l_0+l$ em $[0,l_0]$ e sempre tomarmos por C a maior constante que precede as integrais, obtemos

$$\begin{aligned}I_u\leq&|\lambda|C\int_0^{l_0}|\eta\overline{u_x}|dx+|\lambda|C\int_0^{l_0}|\eta\overline{\eta_x}|dx+C\int_0^{l_0}|\eta|^2dx+C\int_0^{l_0}|k_1u_x+k_2\eta_x|^2dx\\&+C\int_0^{l_0}|p\overline{u_x}|dx+C\int_0^{l_0}|p\overline{\eta_x}|dx+C\int_0^{l_0}|\eta\overline{f_x}|dx;\end{aligned}$$

usando a desigualdade $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ no quarto termo e a desigualdade de Holder nos outros, teremos que

$$\begin{aligned}I_u\leq&|\lambda|C\|\eta\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}+|\lambda|C\|\eta\|_{L^2}\|\eta_x\|_{L^2}+C\|\eta\|_{L^2}^2+C\|u_x\|_{L^2}^2+C\|\eta_x\|_{L^2}^2\\&+C\|p\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}+C\|p\|_{L^2}\|\eta_x\|_{L^2}+C\|\eta\|_{L^2}\|f_x\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy no segundo e sétimo termos, a desigualdade de Poincaré no terceiro, tomando $1<|\lambda|$ e vendo que o sexto e o oitavo termos são majorados por $C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$, temos

$$\begin{aligned}I_u\leq&C\|\eta\|_{L^2}^2+C|\lambda|^2\|u_x\|_{L^2}+C|\lambda|\|\eta\|_{L^2}\|\eta_x\|_{L^2}+C\|\eta_x\|_{L^2}^2+C|\lambda|^2\|u_x\|_{L^2}^2+C\|\eta_x\|_{L^2}^2\\&C\|p\|_{L^2}^2+C\|\eta_x\|_{L^2}^2+C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Poincaré no primeiro termo, juntando alguns termos e usando $\|p\|_{L^2}^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}^2$, então

$$I_u \leq C|\lambda|\|\eta\|_{L^2}\|\eta_x\|_{L^2} + C\|\eta_x\|_{L^2}^2 + C|\lambda|^2\|u_x\|_{L^2} + C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

logo, usando as desigualdades (3.32), (3.33) e (3.35) chegamos a

$$I_u \leq C|\lambda|^{1/2}\Big(\|X\|_{\mathcal{H}}^2\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \|X\|_{\mathcal{H}}^{3/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/2}\Big)^{1/2} + C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

e usando a desigualdade $(a+b)^{1/2} \leq a^{1/2} + b^{1/2}$ obtemos

$$I_u \leq C|\lambda|^{1/2}\Big(\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|X\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\Big) + C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Mas note que $C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda| \left(\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|X\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/2}\right)$. Portanto

$$I_u \leq C|\lambda|^{1/2}\left(\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|X\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right) + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{3.36}$$

para $|\lambda| > 1$.

Olhando agora para a equação (3.31), multiplicando por $(x-l)\overline{v}_x$ e integrando obtemos

$$i\lambda \int_{l_0}^{l} \zeta(x-l)\overline{v}_x dx - k_2 \int_{l_0}^{l} v_{xx}(x-l)\overline{v}_x dx = \rho_2 \int_{l_0}^{l} q(x-l)\overline{v}_x dx.$$

Tomando a parte real dessa equação e usando (3.29), a saber que $\overline{v}_x = i/\lambda(\overline{u}_x + \overline{g}_x)$ temos que

$$-Re\int_{l_0}^{l} \zeta\overline{\zeta}_x(x-l)dx - Re\int_{l_0}^{l}(x-l)\zeta\overline{g}_x dx - \frac{k_2}{2}\int_{l_0}^{l}\frac{d}{dx}|v_x|^2(x-l)dx = \rho_2 Re\int_{l_0}^{l} q(x-l)\overline{v}_x dx;$$

vendo que $\zeta\overline{\zeta}_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\zeta|^2$ e integrando por partes o primeiro e terceiro termos do lado esquerdo

$$\left[-\frac{1}{2}(x-l)|\zeta|^2\right]_{l_0}^{l} + \frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}|\zeta|^2 dx - \left[\frac{k_2}{2}(x-l)|v_x|^2\right]_{l_0}^{l} + \frac{k_2}{2}\int_{l_0}^{l}|v_x|^2 dx$$
$$= \rho_2 Re\int_{l_0}^{l} q(x-l)\overline{v}_x dx + Re\int_{l_0}^{l}(x-l)\zeta\overline{g}_x dx$$

e rearranjando os termos

$$\frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}(|\zeta|^2 + k_2|v_x|^2)dx =$$
$$= \frac{l-l_0}{2}(|\zeta(l_0)|^2 + k_2|v_x(l_0)|^2) + \rho_2 Re\int_{l_0}^{l} q(x-l)\overline{v}_x dx + Re\int_{l_0}^{l}(x-l)\zeta\overline{g}_x dx.$$

Note que

$$\frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}(|\zeta|^2 + k_2|v_x|^2)dx$$
$$\leq \frac{l-l_0}{2}(|\zeta(l_0)|^2 + k_2|v_x(l_0)|^2) + \rho_2(l-l_0)\int_{l_0}^{l}|q\overline{v}_x|dx + (l-l_0)\int_{l_0}^{l}|\zeta\overline{g}_x|dx.$$

Pela desigualdade de Holder obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}(|\zeta|^2+k_2|v_x|^2)dx \leq C(|\zeta(l_0)|^2+k_2|v_x(l_0)|^2)+C\|q\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}+C\|\zeta\|_{L^2}\|g_x\|_{L^2}$$
$$\leq C(|\zeta(l_0)|^2+k_2|v_x(l_0)|^2)+C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Então, da definição de $\mathcal{H}$ (mais especificamente, das condições de transmissão) temos que

$$\frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}(|\zeta|^2+k_2|v_x|^2)dx \leq C\left(|\eta(l_0)|^2+|k_1u_x(l_0)+\gamma\eta_x(l_0)|^2\right)+C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$$
$$\leq CI_u+C\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Pela estimativa (3.36) obtemos

$$\int_{l_0}^{l}(|\zeta|^2+|v_x|^2)dx \leq C|\lambda|^{1/2}\left(\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\|X\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right)+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Somando $\|u_x\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{L^2}^2$ dos dois lados dessa desigualdade e usando as estimativas (3.32) e (3.33) temos que

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^{1/2}\left(\|X\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\|X\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right)+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Usando a desigualdade de Young obtemos

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\epsilon\|X\|_{\mathcal{H}}^2+C|\lambda|\|F\|_{\mathcal{H}}^2+C\epsilon\|X\|_{\mathcal{H}}^2+C|\lambda|^{4/5}\|F\|_{\mathcal{H}}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

ou seja,

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\left(|\lambda|+|\lambda|^{4/5}+1\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

pois $|\lambda|>1$. Portanto

$$\|X\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

O resultado sai do teorema anterior.

■

3.2.3 Perda da estabilidade exponencial

Vimos que todos os problemas anteriormente estudados tem estabilidade exponencial. No caso do problema de transmissão com dissipação do tipo Kelvin-Voigt já provamos que existe estabilidade polinomial. Vejamos agora que, apesar disso, este problema não admite estabilidade exponencial.

Teorema 3.7 *A taxa de decaimento no teorema anterior é ótima na classe das taxas de decaimento polinomial. Então, o semigrupo correspondente não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, basta mostrarmos que dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência limitada (F_n) em $\mathcal{H}$ e uma sequência (λ_n) em $\mathbb{R}$ com $\lambda_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2-\epsilon}} \|(i\lambda_n I - A)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (0,0,0,q) \in \mathcal{H}$, existe $X = (u, v, \eta, \zeta) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(i\lambda I - A)X = F$, isto é,

$$i\lambda u - \eta = 0 \quad \text{em} \quad H^1(0, l_0), \tag{3.37}$$

$$i\lambda v - \zeta = 0 \quad \text{em} \quad H^1(l_0, l), \tag{3.38}$$

$$i\rho_1 \lambda \eta - k_1 u_{xx} - \gamma \eta_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad L^2(0, l_0), \tag{3.39}$$

$$i\rho_2 \lambda \zeta - k_2 v_{xx} = \rho_2 q \quad \text{em} \quad L^2(l_0, l). \tag{3.40}$$

De (3.37) temos que $\eta_{xx} = i\lambda u_{xx}$ e substituindo em (3.39) obtemos

$$(k_1 + i\gamma\lambda) u_{xx} + \rho_1 \lambda^2 u = 0$$

o que é equivalente a

$$u_{xx} + \alpha^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \tag{3.41}$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{\rho_1 \lambda^2}{k_1 + i\gamma\lambda} = \frac{\rho_1 \lambda^2 (k_1 - i\gamma\lambda)}{k_1^2 + \gamma^2 \lambda^2}$$

Sabemos que a solução dessa equação tem a forma $u(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x$. Usando o valor de contorno temos que $a = 0$ e $b = u(l_0)/\sin \alpha l_0$. Então

$$u(x) = \frac{u(l_0) \sin \alpha x}{\sin \alpha l_0}.$$

Note que

$$\alpha^2 = \frac{\rho_1 \lambda^2}{\sqrt{k_1^2 + \gamma^2 \lambda^2}} \left(\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + \gamma^2 \lambda^2}} - i \frac{\gamma\lambda}{\sqrt{k_1^2 + \gamma^2 \lambda^2}} \right) = \frac{\rho_1 \lambda^2}{\sqrt{k_1^2 + \gamma^2 \lambda^2}} (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Além disso, temos que

$$\sin \theta \to -1, \quad \cos \theta \to 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty$$

Então, pela 2ª fórmula de Moivre, α pode ser escrito como

$$\alpha = \frac{\rho_1^{1/2}\lambda}{\sqrt[4]{k_1^2 + \gamma^2\lambda^2}} e^{i\theta/2}$$

sendo que

$$e^{i\theta/2} \to \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty.$$

Olhando agora para (3.38) e substituindo em (3.40) obtemos que $-\rho_2\lambda^2 v - k_2 v_{xx} = q$, ou seja,

$$v_{xx} + \beta^2 v = -\frac{q}{k_2}, \quad v(l_0) = u(l_0), \quad v(l) = 0 \tag{3.42}$$

com

$$\beta^2 = \frac{\rho_2}{k_2}\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que $v(x) = \nu(x) + V(x)$, sendo ν a solução da parte homogênea da equação acima que tem a configuração $\nu(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ e V a solução da parte não homogênea. Por outro lado, se olharmos para a solução $V(x)$ da parte não homogênea, sabemos que ela tem a forma

$$V(x) = \cos\beta x \int_{l_0}^{x} \frac{q(s)\sin\beta s}{k_2\beta} ds - \sin\beta x \int_{l_0}^{x} \frac{q(s)\cos\beta s}{k_2\beta} ds,$$

ou seja,

$$V(x) = -\int_{l_0}^{x} \frac{q(s)\sin\beta(x-s)}{k_2\beta} ds.$$

Logo

$$v(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x - \int_{l_0}^{x} \frac{q(s)\sin\beta(x-s)}{k_2\beta} ds.$$

Usando os valores de contorno associados descobrimos que

$$a = \frac{u(l_0)\sin\beta l}{\sin\beta(l-l_0)} - \frac{\sin\beta l_0}{\sin\beta(l-l_0)} \int_{l_0}^{l} \frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{k_2\beta} ds$$

e

$$b = -\frac{u(l_0)\cos\beta l}{\sin\beta(l-l_0)} + \frac{\cos\beta l_0}{\sin\beta(l-l_0)} \int_{l_0}^{l} \frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{k_2\beta} ds.$$

Então

$$\begin{aligned} v(x) = {} & \frac{u(l_0)\sin\beta l}{\sin\beta(l-l_0)}\cos\beta x - \frac{\sin\beta l_0 \cos\beta x}{\sin\beta(l-l_0)} \int_{l_0}^{l} \frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{k_2\beta} ds \\ & - \frac{u(l_0)\cos\beta l}{\sin\beta(l-l_0)}\sin\beta x + \frac{\cos\beta l_0 \sin\beta x}{\sin\beta(l-l_0)} \int_{l_0}^{l} \frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{k_2\beta} ds \\ & - \int_{l_0}^{x} \frac{q(s)\sin\beta(x-s)}{k_2\beta} ds. \end{aligned}$$

Juntando alguns termos obtemos

$$v(x) = \frac{u(l_0)\sin\beta(l-x)}{\sin\beta(l-l_0)} + \frac{\sin\beta(x-l_0)}{\sin\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l}\frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{k_2\beta}ds - \int_{l_0}^{x}\frac{q(s)\sin\beta(x-s)}{k_2\beta}ds.$$

Note que da condição de transmissão $k_1u_x(l_0)+\gamma\eta_x(l_0) = k_2v_x(l_0)$ e de (3.37) obtemos que $(k_1+i\gamma\lambda)u_x(l_0) = k_2v_x(l_0)$, o que implica

$$\frac{(k_1+i\gamma\lambda)\alpha u(l_0)\cos\alpha l_0}{\sin\alpha l_0} = -\frac{k_2\beta u(l_0)\cos\beta(l-l_0)}{\sin\beta(l-l_0)} + \frac{\beta}{\sin\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l}\frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{\beta}ds,$$

isto é,

$$(k_1+i\gamma\lambda)\alpha u(l_0)\cot\alpha l_0\sin\beta(l-l_0) + k_2\beta u(l_0)\cos\beta(l-l_0) = \int_{l_0}^{l} q(s)\sin\beta(l-s)ds.$$

Colocando $u(l_0)$ em evidência do lado direito concluímos que

$$u(l_0) = \frac{1}{(k_1+i\gamma\lambda)\alpha\cot\alpha l_0\sin\beta(l-l_0) + k_2\beta\cos\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l} q(s)\sin\beta(l-s)ds.$$

Então, se tomarmos

$$c_0(\lambda) = \frac{1}{(k_1+i\gamma\lambda)\alpha\cot\alpha l_0\sin\beta(l-l_0) + k_2\beta\cos\beta(l-l_0)} \tag{3.43}$$

teremos que

$$\begin{aligned}\beta v(x) = {} & \frac{c_0(\lambda)\beta\sin\beta(l-x)}{\sin\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l} q(s)\sin\beta(l-s)ds \\ & + \frac{\sin\beta(x-l_0)}{\sin\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l}\frac{q(s)\sin\beta(l-s)}{k_2}ds - \int_{l_0}^{x}\frac{q(s)\sin\beta(x-s)}{k_2}ds,\end{aligned}$$

isto é, se tomarmos

$$Q(x) = \int_{l_0}^{x} q(s)\sin\beta(x-s)ds. \tag{3.44}$$

temos que

$$\beta v(x) = \left(\frac{c_0(\lambda)k_2\beta\sin\beta(l-x) + \sin\beta(x-l_0)}{k_2\sin\beta(l-l_0)}\right)Q(l) - Q(x). \tag{3.45}$$

De agora em diante nosso objetivo é estimar, para determinada q(s), cada termo de (3.45) e mostrar que (3.45) diverge. Tome β_n tal que $\beta_n(l-l_0) = 2n\pi + 1/\sqrt{n}$. Apenas note que

$$\beta_n = \frac{2n\pi}{l-l_0} + \frac{1}{(l-l_0)\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}}\lambda_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = c_1\left(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Então, aplicando a função seno em $\beta_n(l-l_0)$ e expandindo sua série de potência obtemos

$$\sin(\beta_n(l-l_0)) = \sin\left(2n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k+1},$$

ou seja,

$$\sin(\beta_n(l-l_0)) = \frac{1}{\sqrt{n}} + a_n \tag{3.46}$$

sendo que $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo

$$\begin{aligned}
\alpha_n \sin(\beta_n(l-l_0)) &= \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} + \alpha_n a_n = \frac{\sqrt{\rho_1}\lambda_n e^{i\theta_n/2}}{\sqrt{n}\sqrt[4]{k_1^2+\gamma^2\lambda_n^2}} + \frac{\sqrt{\rho_1}\lambda_n e^{i\theta_n/2} a_n}{\sqrt[4]{k_1^2+\gamma^2\lambda_n^2}} \\
&= \frac{\sqrt{\rho_1}c_1\left(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)e^{i\theta_n/2}}{\sqrt[4]{k_1^2n^2+\gamma^2n^2c_1^2\left(4n^2+4\sqrt{n}\pi^2+\frac{1}{n}\right)}} \\
&\quad + \frac{\sqrt{\rho_1}c_1\left(2n\pi+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)e^{i\theta_n/2}a_n}{\sqrt[4]{k_1^2n^2+\gamma^2n^2c_1^2\left(4n^2+4\sqrt{n}\pi^2+\frac{1}{n}\right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\rho_1}c_1\left(2\pi+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)e^{i\theta_n/2}}{\sqrt[4]{4\gamma^2c_1^2\pi^2+\frac{k_1^2}{n^2}+\frac{4\gamma^2c_1^2\pi}{n^2\sqrt{n}}+\frac{\gamma^2c_1^2}{n^3}}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\sqrt{\rho_1}c_1\left(2\pi+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)e^{i\theta_n/2}}{\sqrt[4]{4\gamma^2c_1^2\pi^2n^{4k}+k_1^2n^{4k-2}+\frac{4\gamma^2c_1^2\pi n^{4k-2}}{\sqrt{n}}+\gamma^2c_1^2n^{4k-3}}} \\
&= \frac{\sqrt{\rho_1}c_1\left(2\pi+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)e^{i\theta_n/2}}{\sqrt[4]{4\gamma^2c_1^2\pi^2+\frac{k_1^2}{n^2}+\frac{4\gamma^2c_1^2\pi}{n^2\sqrt{n}}+\frac{\gamma^2c_1^2}{n^3}}} + b_n
\end{aligned}$$

sendo que $b_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo

$$\alpha_n \sin(\beta_n(l-l_0)) \to \sqrt{\frac{2c_1\pi\rho_1}{\gamma}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = c_2 \tag{3.47}$$

quando $n \to \infty$.

Ainda, note que $\alpha_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Defina $x_n = Re\{\alpha_n l_0\}$ e $y_n = Im\{\alpha_n l_0\}$. Então, sabendo que $\cos(a) = \cosh(ia)$, $\cos(ia) = \cosh(a)$, $i\sin(a) = \sinh(ia)$ e $\sin(ia) = i\sinh(a)$ temos

$$\begin{aligned}
\cot(\alpha_n l_0) &= \frac{\cos(\alpha_n l_0)}{\sin(\alpha_n l_0)} = \frac{\cos(x_n+iy_n)}{\sin(x_n+iy_n)} \\
&= \frac{\cos(x_n)\cos(iy_n)-\sin(x_n)\sin(iy_n)}{\sin(x_n)\cos(iy_n)+\cos(x_n)\sin(iy_n)} \\
&= \frac{\cos(x_n)\cosh(y_n)-i\sin(x_n)\sinh(y_n)}{\sin(x_n)\cosh(y_n)+i\cos(x_n)\sinh(y_n)}.
\end{aligned}$$

Multiplicando pelo conjugado do denominador obtemos

$$\begin{aligned}
\cot(\alpha_n l_0) &= \frac{\sin(x_n)\cos(x_n)\left(\cosh^2(y_n)-\sinh^2(y_n)\right)}{\sin^2(x_n)\cosh^2(y_n)+\cos^2(x_n)\sinh^2(y_n)} \\
&\quad - i\frac{(\sin^2(x_n)+\cos^2(x_n))\sinh(y_n)\cosh(y_n)}{\sin^2(x_n)\cosh^2(y_n)+\cos^2(x_n)\sinh^2(y_n)}.
\end{aligned}$$

Ainda, se usarmos que $\cos^2(x_n) + \sin^2(x_n) = 1$ e que $\cosh^2(y_n) - \sinh^2(y_n) = 1$ tanto no numerador como no denominador obtemos

$$\begin{aligned}
\cot(\alpha_n l_0) &= \frac{\cos(x_n)\sin(x_n) - i\cosh(y_n)\sinh(y_n)}{\cosh^2(y_n) - \cos^2(x_n)} \\
&= \frac{\cos(x_n)\sin(x_n)}{\cosh^2(y_n) - \cos^2(x_n)} - i\frac{\tanh(y_n)}{\frac{\cos^2(x_n)}{\cosh^2(y_n)} - 1}.
\end{aligned}$$

Visto que as funções seno e cosseno são limitadas, temos que

$$\cot(\alpha_n l_0) \to i \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.48}$$

Vamos usar isso para estimar $c_0(\lambda_n)$. Lembrando que $\lambda_n = c\beta_n$ e usando (3.43) temos que

$$\begin{aligned}
c_0(\lambda_n) &= \frac{1}{(k_1 + i\gamma c\beta_n)\cot(\alpha_n l_0)\alpha_n \sin\beta_n(l - l_0) + k_2\beta_n\cos\beta_n(l - l_0)} \\
&= \frac{1}{\beta_n}\frac{1}{(\frac{k_1}{\beta_n} + i\gamma c)\cot(\alpha_n l_0)\alpha_n \sin\beta_n(l - l_0) + k_2\cos\beta_n(l - l_0)}.
\end{aligned}$$

Usando (3.46), (3.47) e (3.48) temos, para um n suficientemente grande, que

$$\frac{1}{(\frac{k_1}{\beta_n} + i\gamma c)\cot(\alpha_n l_0)\alpha_n \sin\beta_n(l - l_0) + k_2\cos\beta_n(l - l_0)} \approx \frac{1}{k_2 - k_2 c c_2} = c_3.$$

Logo

$$c_0(\lambda_n) \approx \frac{c_3}{\beta_n}. \tag{3.49}$$

Vamos usar essas estimativas posteriormente. Por enquanto tome $q(s) = \sin(\beta(s - l_0))$ em (3.44). Calculando $Q(x)$ temos

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \int_{l_0}^{x} \sin(\beta(s - l_0))\sin\beta(x - s)ds \\
&= \int_{l_0}^{x} \sin(\beta(s - l_0))\sin(\beta x)\cos(\beta s)ds - \int_{l_0}^{x} \sin(\beta(s - l_0))\sin(\beta s)\cos(\beta x)ds \\
&= \sin(\beta x)\cos(\beta l_0)\int_{l_0}^{x} \sin(\beta s)\cos(\beta s)ds - \sin(\beta x)\sin(\beta l_0)\int_{l_0}^{x} \cos^2(\beta s)ds \\
&\quad - \cos(\beta x)\cos(\beta l_0)\int_{l_0}^{x} \sin^2(\beta s)ds + \cos(\beta x)\sin(\beta l_0)\int_{l_0}^{x} \cos(\beta s)\sin(\beta s)ds \\
&= \frac{\cos(\beta l_0)\sin^3(\beta x)}{2\beta} - \frac{\sin(\beta x)\cos(\beta l_0)\sin^2(\beta l_0)}{2\beta} - \frac{(x - l_0)\sin(\beta x)\sin(\beta l_0)}{2} \\
&\quad - \frac{\sin^2(\beta x)\cos(\beta x)\sin(\beta l_0)}{2\beta} + \frac{\sin(\beta x)\sin^2(\beta l_0)\cos(\beta l_0)}{2\beta} \\
&\quad - \frac{(x - l_0)\cos(\beta x)\cos(\beta l_0)}{2} + \frac{\cos(\beta l_0)\sin(\beta x)\cos^2(\beta x)}{2\beta} \\
&\quad - \frac{\cos(\beta x)\sin(\beta l_0)\cos^2(\beta l_0)}{2\beta} + \frac{\sin^2(\beta x)\cos(\beta x)\sin(\beta l_0)}{2\beta} \\
&\quad - \frac{\cos(\beta x)\sin^3(\beta l_0)}{2\beta};
\end{aligned}$$

Note que, nessa última parte, o segundo termo se anula com o quinto e o quarto termo se anula com o nono. Além disso, usando que $\cos^2(\beta x) = 1 - \sin^2(\beta x)$ no sétimo e no oitavo termos teremos

$$\begin{aligned} Q(x) = &\frac{\cos(\beta l_0)\sin^3(\beta x)}{2\beta} + \frac{\cos(\beta l_0)\sin(\beta x)(1-\sin^2(\beta x))}{2\beta} \\ &- \frac{\cos(\beta x)\sin(\beta l_0)(1-\sin^2(\beta x))}{2\beta} - \frac{\cos(\beta x)\sin^3(\beta l_0)}{2\beta} \\ &- \frac{(x-l_0)(\sin(\beta x)\sin(\beta l_0) + \cos(\beta x)\cos(\beta l_0))}{2} \\ = &\frac{\cos(\beta l_0)\sin(\beta x) - \cos(\beta x)\sin(\beta l_0)}{2\beta} - \frac{(x-l_0)\cos(\beta(x-l_0))}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, pela soma se arcos obtemos

$$Q(x) = \frac{\sin(\beta(x-l_0))}{2\beta} - \frac{(x-l_0)\cos(\beta(x-l_0))}{2}.$$

Logo

$$Q(l) = \frac{\sin(\beta(l-l_0))}{2\beta} - \frac{(l-l_0)\cos(\beta(l-l_0))}{2}.$$

Então, se trocarmos β por β_n e usarmos a estimativa (3.46) teremos que, para um n suficientemente grande, o primeiro termo se aproxima de zero e $\cos(\beta(l-l_0))$ se aproxima de um. Então teremos

$$Q(l) \approx -\frac{l-l_0}{2}. \tag{3.50}$$

Vamos agora estimar a norma de $Q(x)$ em $L^2(l_0, l)$.

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^{l} |Q(x)|^2 dx = &\int_{l_0}^{l} \frac{\sin^2(\beta(x-l_0))}{4\beta^2} dx - \int_{l_0}^{l} \frac{(x-l_0)\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{4\beta} dx \\ &+ \int_{l_0}^{l} \frac{(x-l_0)^2\cos^2(\beta(x-l_0))}{4} dx. \end{aligned}$$

Calculando separadamente essas integrais teremos

$$\int_{l_0}^{l} \frac{\sin^2(\beta(x-l_0))}{4\beta^2} dx = \left[\frac{x-l_0}{8\beta^2} - \frac{\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{8\beta^3} \right]_{l_0}^{l}.$$

usando integração por partes temos

$$\begin{aligned} &\int_{l_0}^{l} \frac{(x-l_0)\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{4\beta} dx = \\ &= \left[\frac{(x-l_0)\sin^2(\beta(x-l_0))}{8\beta^2} - \frac{x-l_0}{16\beta^2} + \frac{\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{16\beta^3} \right]_{l_0}^{l}. \end{aligned}$$

Por fim, também usando integração por partes temos

$$\int_{l_0}^{l} \frac{(x-l_0)^2\cos^2(\beta(x-l_0))}{4}dx =$$
$$= \left[\frac{(x-l_0)^3}{24} + \frac{(x-l_0)^2\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{8\beta} - \frac{(x-l_0)\sin^2(\beta(x-l_0))}{8\beta^2}\right]_{l_0}^{l}$$
$$+ \left[\frac{x-l_0}{16\beta^2} - \frac{\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{16\beta^3}\right]_{l_0}^{l}.$$

Logo, juntando essas integrais obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0}^{l} |Q(x)|^2 dx = &\frac{l-l_0}{8\beta^2} - \frac{\sin(\beta(l-l_0))\cos(\beta(l-l_0))}{8\beta^3} - \frac{(l-l_0)\sin^2(\beta(l-l_0))}{8\beta^2} + \frac{l-l_0}{16\beta^2}\\ &- \frac{\sin(\beta(l-l_0))\cos(\beta(l-l_0))}{16\beta^3} + \frac{(l-l_0)^2\sin(\beta(l-l_0))\cos(\beta(l-l_0))}{8\beta}\\ &+ \frac{l-l_0}{16\beta^2} - \frac{(l-l_0)^2\sin(\beta(l-l_0))}{8\beta^2} - \frac{\sin(\beta(l-l_0))\cos(\beta(l-l_0))}{16\beta^3}\\ &+ \frac{(l-l_0)^3}{24}.\end{aligned}$$

Portanto, juntando alguns termos acima obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0}^{l} |Q(x)|^2 dx = &\frac{(l-l_0)^3}{24} + \frac{(l-l_0)}{4\beta^2} - \frac{\sin(\beta(l-l_0))\cos(\beta(l-l_0))}{4\beta^3}\\ &- \frac{(l-l_0)^2\sin(\beta(l-l_0))}{8\beta^2} + \frac{(l-l_0)^2\sin(\beta(l-l_0))\cos(\beta(l-l_0))}{8\beta}\\ &- \frac{(l-l_0)\sin^2(\beta(l-l_0))}{8\beta^2}.\end{aligned}$$

Note que se substituirmos β por β_n e usarmos a estimativa (3.46) teremos que

$$\int_{l_0}^{l} |Q(x)|^2 dx = \frac{(l-l_0)^3}{24} + d_n$$

sendo que $d_n \to 0^+$ quando $n \to \infty$. Logo, para um n suficientemente grande temos

$$\int_{l_0}^{l} |Q(x)|^2 dx \approx \frac{(l-l_0)^3}{24} \tag{3.51}$$

Agora, vamos estimar o termo entre parênteses de (3.45).

$$\int_{l_0}^{l} \left|\frac{c_0(\lambda)k_2\beta\sin\beta(l-x) + \sin\beta(x-l_0)}{k_2\sin\beta(l-l_0)}\right|^2 dx =$$
$$= \frac{|c_0(\lambda)|^2\beta^2}{\sin^2\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l}\sin^2\beta(l-x)dx + \frac{2Re\{c_0(\lambda)\}\beta}{\sin\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l}\sin\beta(l-x)\sin\beta(x-l_0)dx$$
$$+ \frac{1}{k_2^2\sin^2\beta(l-l_0)}\int_{l_0}^{l}\sin^2\beta(x-l_0)dx.$$

Vamos calcular essas integrais separadamente. Fazendo uma mudança de variável ou integrando por partes concluímos que

$$\int_{l_0}^{l} \sin^2 \beta(l-x)dx = \left[\frac{x-l}{2} + \frac{\sin(\beta(l-x))\cos(\beta(l-x))}{2\beta}\right]_{l_0}^{l}$$

$$\int_{l_0}^{l} \sin^2 \beta(x-l_0)dx = \left[\frac{x-l_0}{2} - \frac{\sin(\beta(x-l_0))\cos(\beta(x-l_0))}{2\beta}\right]_{l_0}^{l};$$

$$\int_{l_0}^{l} \sin \beta(l-x) \sin \beta(x-l_0)dx = 0$$

Juntando esses resultados temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0}^{l} \left|\frac{c_0(\lambda)k_3\beta \sin \beta(l-x) + \sin \beta(x-l_0)}{k_3 \sin \beta(l-l_0)}\right|^2 dx = \\
&= \frac{|c_0(\lambda)|^2\beta^2(l-l_0)}{2\sin^2 \beta(l-l_0)} - \frac{|c_0(\lambda)|^2\beta \cos \beta(l-l_0)}{2} + \frac{l-l_0}{k_3^2 \sin^2 \beta(l-l_0)} \\
&\quad - \frac{\cos \beta(l-l_0)}{k_3^2\beta \sin \beta(l-l_0)}.
\end{aligned}$$

Note que se substituirmos β por β_n e usarmos a estimativa (3.49) teremos

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0}^{l} \left|\frac{c_0(\lambda_n)k_2\beta_n \sin \beta_n(l-x) + \sin \beta_n(x-l_0)}{k_2 \sin \beta_n(l-l_0)}\right|^2 dx \approx \\
&\approx \frac{|c_3|^2(l-l_0)}{2\sin^2 \beta_n(l-l_0)} - \frac{c_3^2 \cos \beta_n(l-l_0)}{2\beta_n} + \frac{l-l_0}{k_2^2 \sin^2 \beta_n(l-l_0)} - \frac{\cos \beta_n(l-l_0)}{k_2^2\beta_n \sin \beta_n(l-l_0)} \\
&= \frac{k_2^2c_3^2(l-l_0) + 2(l-l_0)}{2k_2^2 \sin^2 \beta_n(l-l_0)} - \left(\frac{c_3^2 \cos \beta_n(l-l_0)}{2\beta_n} + \frac{\cos \beta_n(l-l_0)}{k_2^2\beta_n \sin \beta_n(l-l_0)}\right) \\
&= \frac{c_4}{\sin^2 \beta_n(l-l_0)} - e_n
\end{aligned}$$

sendo que $e_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, usando a estimativa (3.46) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0}^{l} \left|\frac{c_0(\lambda_n)k_2\beta_n \sin \beta_n(l-x) + \sin \beta_n(x-l_0)}{k_2 \sin \beta_n(l-l_0)}\right|^2 dx &\approx \frac{c_4}{\frac{1}{n} + \frac{2a_n}{\sqrt{n}} + a_n^2} - e_n \\
&= \frac{c_4 n}{1 + 2\sqrt{n}a_n + na_n^2} - e_n.
\end{aligned}$$

Note que $2\sqrt{n}a_n + na_n^2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Basta ver que

$$\sqrt{n}a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k} \quad \text{e} \quad na_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2k-1}.$$

Assim, para um n suficientemente grande temos

$$\int_{l_0}^{l} \left|\frac{c_0(\lambda_n)k_2\beta_n \sin \beta_n(l-x) + \sin \beta_n(x-l_0)}{k_2 \sin \beta_n(l-l_0)}\right|^2 dx \approx c_4 n. \tag{3.52}$$

Por fim, vamos estimar

$$Re\int_{l_0}^{l}\left(\frac{c_0(\lambda)k_2\beta\sin\beta(l-x)+\sin\beta(x-l_0)}{k_2\sin\beta(l-l_0)}\right)Q(x)dx$$

que é o que falta para conseguirmos estimar

$$\int_{l_0}^{l}|\beta v(x)|^2dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0}^{l}\left(\frac{c_0(\lambda)k_2\beta\sin\beta(l-x)+\sin\beta(x-l_0)}{k_2\sin\beta(l-l_0)}\right)Q(x)dx=\\
&\quad=\int_{l_0}^{l}\frac{c_0(\lambda)\beta\sin\beta(l-x)\sin\beta(x-l_0)}{2\beta\sin\beta(l-l_0)}dx+\int_{l_0}^{l}\frac{\sin^2\beta(x-l_0)}{2k_2\beta\sin\beta(l-l_0)}dx\\
&\qquad-\int_{l_0}^{l}\frac{c_0(\lambda)\beta(x-l_0)\sin\beta(l-x)\cos\beta(x-l_0)}{2\sin\beta(l-l_0)}dx\\
&\qquad-\int_{l_0}^{l}\frac{(x-l_0)\sin\beta(x-l_0)\cos\beta(x-l_0)}{2k_2\sin\beta(l-l_0)}dx\\
&\quad=\frac{l-l_0}{4k_2\beta\sin\beta(l-l_0)}-\frac{3\cos\beta(l-l_0)}{8k_2\beta^2}-\frac{c_0(\lambda)\beta(l-l_0)}{4}+\frac{c_0(\lambda)\beta(l^2-l_0^2)}{8}\\
&\qquad-\frac{(l-l_0)\sin\beta(l-l_0)}{4k_2\beta}+\frac{l-l_0}{8k_2\beta\sin\beta(l-l_0)}.
\end{aligned}$$

Logo, se substituirmos β por β_n, tomando um n suficientemente grande e usando as estimativas (3.46) e (3.49) teremos que

$$\int_{l_0}^{l}\left(\frac{c_0(\lambda_n)k_2\beta_n\sin\beta_n(l-x)+\sin\beta_n(x-l_0)}{k_2\sin\beta_n(l-l_0)}\right)Q(x)dx\approx\frac{l^2-2l+2l_0-l_0^2}{8}=c_5.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{l_0}^{l}|\beta_n v(x)|^2dx&=Q^2(l)\int_{l_0}^{l}\left|\frac{c_0(\lambda_n)k_2\beta_n\sin\beta_n(l-x)+\sin\beta_n(x-l_0)}{k_2\sin\beta_n(l-l_0)}\right|^2dx\\
&\quad-2Q(l)Re\int_{l_0}^{l}\left(\frac{c_0(\lambda_n)k_2\beta_n\sin\beta_n(l-x)+\sin\beta_n(x-l_0)}{k_2\sin\beta_n(l-l_0)}\right)Q(x)dx\\
&\quad+\int_{l_0}^{l}|Q(x)|^2dx\\
&\approx\frac{c_4(l-l_0)^2n}{4}+(l-l_0)c_5+\frac{(l-l_0)^3}{24}\\
&\geq Cn+C.
\end{aligned}$$

Então, para um n suficientemente grande

$$\frac{1}{n}\int_{l_0}^{l}|\beta_n v(x)|^2dx\geq C.$$

Note que

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2=\int_0^{l_0}k_1|u_x|^2dx+\int_{l_0}^{l}k_2|v_x|^2dx+\int_0^{l_0}\rho_1|\eta|^2dx+\int_{l_0}^{l}\rho_2|\zeta|^2dx$$

e usando (3.37) e (3.38) e a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C_p \int_0^{l_0} |u|^2 dx + C_p \int_{l_0}^{l} |v|^2 dx + \int_0^{l_0} \rho_1 |\lambda_n u|^2 dx + \int_{l_0}^{l} \rho_2 |\lambda_n v|^2 dx.$$

Da definição de β obtemos

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C_p \int_0^{l_0} |u|^2 dx + C_p \int_{l_0}^{l} |v|^2 dx + \frac{k_2}{\rho_2} \int_0^{l_0} \rho_1 |\beta_n u|^2 dx + \frac{k_2}{\rho_2} \int_{l_0}^{l} \rho_2 |\beta_n v|^2 dx.$$

Então, como o primeiro, o segundo e o terceiro termos são positivos, temos que

$$\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{k_2}{\rho_2} \int_{l_0}^{l} |\beta_n v|^2 dx.$$

Logo, usando o que descobrimos anteriormente e colocando k_3/ρ_2 na constante C

$$\frac{1}{n}\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{k_2}{\rho_2 n} \int_{l_0}^{l} |\beta_n v(x)|^2 dx \geq C$$

e multiplicando tudo por n^ϵ, sendo $\epsilon > 0$ qualquer, obtemos

$$\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\|X\|_{\mathcal{H}}^2 \geq Cn^\epsilon.$$

Finalmente, tirando a raiz obtemos

$$\frac{1}{n^{1/2-\epsilon/2}}\|(i\lambda_n I - A)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{n^{1/2-\epsilon/2}}\|X\|_{\mathcal{H}} \geq Cn^{\epsilon/2}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{n^{1/2-\epsilon/2}}\|(i\lambda_n I - A)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \geq Cn^{\epsilon/2},$$

o que mostra que o semigrupo não decai exponencialmente.

■

Conclusões

Nos capítulos anteriores vimos que, quando a dissipação é friccional global, isto é, em todo o domínio, numa equação de onda, as soluções decaem exponencialmente. Esta propriedade se preserva se a dissipação age somente numa parte do seu domínio.

Quando a dissipação é do tipo Kelvin-Voigt e globalmente distribuída, as soluções também decaem exponencialmente. Mais ainda, as soluções tem o chamado "efeito regularizante". Porém, quando a dissipação age somente em uma parte do seu domínio, as soluções se comportam de forma completamente diferente. Neste caso, há perda do decaimento exponencial das soluções e, consequentemente, não tem "efeito regularizante". Mas pelo menos consegue-se decaimento polinomial das soluções.

Referências Bibliográficas

[ARS] M. Alves, J. M. Rivera, M. Sepúlveda, O. V. Villagrán, M. Z. Garay: *The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity*, Math. Nachr., 287, No. 5-6, 483-497, 2014.

[LkEx] M. Alves, J. M. Rivera, M. Sepúlveda, O. V. Villagrán: *The lack of exponencial stability in certain transmission problems with localized Kelvin-Voigt dissipation*, Siam J. Appl. Math., Vol. 74, No. 2, pp. 345-365, 2014.

[Bo] A. Borichev, Y. Tomilov: *Optimal polinomial decay of funtions and operator semigroups*, Math. Ann., 347, 455-478, 2010.

[BD] W. E. Boyce, R. C. DiPrima: *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, 9ª Edição, 2010.

[Br] H. Brezis: *Funcional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[SpSt] S. Chen, K. Liu, Z. Liu: *Spectrum end stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt Damping*, Siam J. Appl. Math., Vol. 59, No. 2, pp. 651-668, 1998.

[Ev] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society.

[Semi] K.-J. Engel, R. Nagel: *A short course on operator semigroups*, Springer, 2006.

[SeGr] J. A. Goldstein: *Semigroups of linear operators an applications*, Oxford University Press, Clerendon Press, 1985.

[Go] A. M. Gomes: *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2ª Edição, 1999.

[Has] F. Hassine: *Stability of elastic transmission systems with a local Kelvin-Voigt damping*, European Journal of Control, 2015.

[Kr] E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley Classics Library, 1978.

[ExDc] K. Liu, Z. Liu: *Exponencial decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping*, Siam J. Control Optim, Vol. 36, No. 3, pp. 1086-1098, 1998.

[LZ] Z. Liu, S. Zheng: *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, 1999.

[Nak] M. Nakao: *Decay of solutions of the wave equation with some localized dissipations*, Nonlinear analysis, theory , methods & applications, Vol. 30, No. 6, 3775-3784, 1997.

[Pazy] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.