UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Wagner Augusto Almeida de Moraes

HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA OPERADORES FORTEMENTE INVARIANTES

Curitiba, 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Wagner Augusto Almeida de Moraes

HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA OPERADORES FORTEMENTE INVARIANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov.

Curitiba

Fevereiro de 2016

M827h Moraes, Wagner Augusto Almeida de
Hipoeliticidade global para operadores fortemente invariantes/ Wagner Augusto Almeida de Moraes. – Curitiba, 2016.
49 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Alexandre Kirilov .
Bibliografia: p. 48-49.

1. Operadores diferenciais. 2. Invariantes. 3. Estimativas. I. Universidade Federal do Paraná. II.Kirilov, Alexandre. III. Título.

CDD: 515.7242

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES**, intitulada: "**HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA OPERADORES FORTEMENTE INVARIANTES**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 26 de Fevereiro de 2016.

Prof ALEXANDRE KIRILOV (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof FERNANDO DE AVILA SILVA (UFPR)

Prof GUSTAVO HOEPFNER (UFSCAR)

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia vinte e seis de Fevereiro de dois mil e dezesseis às 14:00 horas, na sala Auditório do Departamento de Informática, Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada: "**HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA OPERADORES FORTEMENTE INVARIANTES**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Professores Doutores: ALEXANDRE KIRILOV (UFPR), FERNANDO DE AVILA SILVA (UFPR), GUSTAVO HOEPFNER (UFSCAR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela ......APROVAÇÃO...... do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora, outorgando-lhe o Grau de **Mestre em MATEMÁTICA**. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, ALEXANDRE KIRILOV, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 26 de Fevereiro de 2016.

Prof ALEXANDRE KIRILOV (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof FERNANDO DE AVILA SILVA (UFPR)

Prof GUSTAVO HOEPFNER (UFSCAR)

Agradecimentos

A Deus, por ter estado presente durante toda essa jornada, tanto nos momentos felizes quanto nos de dificuldades, e por ter derramado todos os dons do Espiríto Santo sobre mim.

Aos meus pais, Agostinho e Tereza, e minha irmã, Danieli, por apoiarem minha decisão de sair de Laranjeiras do Sul e buscar meu sonho em Curitiba. Por toda a palavra de incentivo que me fez almejar sempre melhorar e nunca desistir.

À minha família, por sempre me ajudarem quando necessário e pela compreensão de minha ausência, por estar estudando, em alguns momentos.

Aos meus amigos por se fazerem presentes em todos os instantes, tanto estudando em conjunto quanto nos momentos de descontração.

Aos professores, pela paciência e dedicação em não somente ensinar os conteúdos, mas também compartilhar conselhos e experiências para me tornar um bom profissional. Em especial, agradeço ao professor Alexandre Kirilov, pelo vínculo de amizade que construímos e por me orientar durante todos esses anos

Aos professores Fernando de Ávila Silva, Gustavo Hoepfner, Jurandir Ceccon e Pedro Danizete Damázio, por aceitarem fazer parte da banca examinadora desse trabalho.

“ It’s the questions we can’t answer that teach us the most. They teach us how to think. If you give a man an answer, all he gains is a little fact. But give him a question and he’ll look for his own answers. ”

Patrick Rothfuss, The Wise Man’s Fear

Resumo

A partir do conceito de operadores invariantes em relação a uma decomposição de um espaço de Hilbert em subespaços de dimensão finita, introduzimos o símbolo do operador em relação a essa decomposição. Esse símbolo é uma sequência de matrizes cujas propriedades permitem, por exemplo, afirmar se o operador está em alguma classe de Schatten-von Neumann e se é possível estendê-lo a um operador limitado. Usamos esses resultados para decompor o espaço de Hilbert $L^2(M)$, sobre uma variedade suave compacta orientável sem bordo M, como soma direta de autoespaços de um operador diferencial elítico autoadjunto positivo e estudamos propriedades que os operadores invariantes possuem neste espaço. Por fim, obtemos resultados acerca da hipoeliticidade global de operadores invariantes sobre M analisando seu símbolo.

Palavras-chave: estimativas subelíticas, hipoeliticidade global, operadores invariantes, variedades fechadas.

Abstract

From the idea of invariant operators relative to a fixed partition of a Hilbert space into a direct sum of finite dimensional subspaces, we introduce the operator's symbol relative to this decomposition. This symbol is a sequence of matrices whose properties allow us, for example, to state if the operator belong to some Schatten-von Neumann class and if it can be extended to a bounded operator. We apply this results to decompose the Hilbert space $L^2(M)$, where M is a orientable compact smooth manifold without boundary, as direct sum of eigenspaces of a positive self-adjoint elliptic differential operator and then we study some properties that the invariants operators have in this space. Finally, we obtain results about global hypoellipticity of invariant operators on M analyzing their symbol.

Keywords: closed manifolds, global hypoellipticity, invariants operators, subelliptic estimates.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a regularidade das soluções de operadores diferenciais definidos sobre uma variedade fechada. Mais precisamente, se M é uma variedade suave compacta orientável e sem bordo, $\mathcal{D}'(M)$ é o espaço das distribuições definidas sobre M e $P : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$ é um operador diferencial, estamos interessados em estabelecer condições que possam garantir $u \in C^\infty(M)$ sempre que tivermos $Pu \in C^\infty(M)$.

Essa propriedade é conhecida como hipoeliticidade global e uma consequência interessante dela é a seguinte: se P é um operador diferencial linear globalmente hipoelítico em M, então $\ker P \subset C^\infty(M)$, pois $0 \in C^\infty(M)$, logo podemos garantir que o $\ker P$ possui dimensão finita (ver [10]).

A hipoeliticidade global tem sido largamente estudada nos últimos anos, principalmente no caso em que a variedade fechada M é o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, basta ver a impressionante lista de autores e revistas respeitáveis que têm publicado artigos abordando esse assunto, por exemplo: [2], [3], [4], [8], [9], [10], [11], [15], [16], [19] e tantas outras referências citadas nesses artigos.

Mesmo no caso do toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, investigar a hipoeliticidade global dos operadores diferenciais lineares mais simples, como os campos vetoriais, é um problema desafiador que ainda possui questões em aberto. Talvez a pergunta sem resposta mais famosa e aparentemente distante de uma solução seja a conjectura de Greenfield-Wallach, que afirma o seguinte: se uma variedade suave, compacta, sem bordo e orientável admite um campo vetorial globalmente hipoelítico, então esta variedade é difeomorfa a um toro e este campo vetorial é $C^\infty-$conjugado a um campo vetorial constante cujos coeficientes satisfazem uma condição diofantina. (ver [6] e [11]).

A maioria dos trabalhos que abordam a questão da hipoeliticidade global no toro fazem uso da análise de Fourier como principal ferramenta para obter resultados de regularidade, a partir de condições impostas ao símbolo ou aos coeficientes do operador.

Uma das referências mais citada nessa área, o trabalho de S. Greenfield e N. Wallach de 1972, usa apenas a série de Fourier em $\mathbb{T}^n$ para caracterizar a hipoeliticidade global de um operador diferencial através de seu símbolo, e apresenta pela primeira vez a famosa aplicação: $L = \partial_x + \alpha\partial_y,\ \alpha \in \mathbb{R}$ é globalmente hipoelítico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, α é um irracional não Liouville. Ver [9]

Baseado nesse histórico de uso da análise de Fourier para obter propriedades de regularidade no toro, o ideal seria introduzir uma ferramenta similar em uma variedade fechada qualquer para recuperar esses resultados, sempre que isso fosse possível.

O primeiro passo nessa direção foi dado por S. Greenfield e N. Wallach em [10]. Inspirados pelas ideias de R. Seeley [21], os autores construiram uma espécie de série de Fourier em M e, a partir disso, generalizaram os resultados sobre operadores diferenciais que comutam com um operador elítico normal fixado provados em [9].

Mais recentemente, J. Delgado e M. Ruzhansky, ver [5], generalizaram a ideia de operadores invariantes para espaços de Hilbert, através da decomposição do espaço em soma direta de subespaços de dimensão finita. Desse modo, é possível associar um símbolo a cada operador invariante densamente definido. Tal símbolo é na verdade uma sequência de matrizes, definidas nos subespaços de dimensão finita dessa decomposição, que carrega informações sobre o operador.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 fixamos as principais notações e resultados referentes a espaços de Hilbert e teoria espectral. Em especial, exibimos uma maneira de decompor o espaço $L^2(M)$ como soma direta de autoespaços de um operador diferencial elítico positivo. Além disso, fazemos uma síntese sobre a classe de operadores de Schatten-von Neumann, listando os principais resultados da teoria necessários nas aplicações que apresentamos no capítulo seguinte.

No capítulo 2, apresentamos a teoria geral sobre operadores invariantes em espaços de Hilbert e mostramos que algumas propriedades desses operadores podem ser caracterizadas por seus símbolos. Em seguida, no capítulo 3, recuperamos a teoria de R. Seeley para introduzir uma noção de análise de Fourier associada a um operador elítico e usamos esses conceitos para analisar operadores invariantes no espaço $L^2(M)$.

Por fim, no capítulo 4, estudamos operadores diferenciais invariantes e apresentamos algumas condições que garantem a hipoeliticidade global desses operadores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados e definições de Análise Funcional e de Operadores Diferenciais que utilizamos no desenvolvimento deste trabalho.

Iniciamos estabelecendo algumas notações. Denotamos por $\mathbb{N} = \{1,\, 2\, \cdots\}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dada uma $n-$upla $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de inteiros não negativos, também chamada de multi-índice, e um vetor $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos x^α como

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

De maneira análoga, definimos o operador diferencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

no qual

$$|\,\alpha\,| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

é a ordem do multi-índice α e $\frac{\partial}{\partial x_j}$ é a $j-$ésima derivada parcial.

Além disso, δ_{jk} denota o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{jk} = 1$ para $j = k$ e $\delta_{jk} = 0$ para $j \neq k$.

1.1 Espaços de Hilbert

Definição 1.1. *Um conjunto $\mathcal{H}$ é um Espaço de Hilbert se satisfizer as seguintes condições:*

1. *$\mathcal{H}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$);*

2. *$\mathcal{H}$ é munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$;*

3. *$\mathcal{H}$ é completo em relação à métrica induzida por esse produto interno;*

4. *$\mathcal{H}$ é separável.*

Definição 1.2. *Dizemos que os elementos x e y de $\mathcal{H}$ são ortogonais se $\langle x, y\rangle = 0$. Um subconjunto B de $\mathcal{H}$ é dito ortogonal se quaisquer dois elementos distintos de B são ortogonais. Além disso, se $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 1$ para todo $x \in B$, dizemos que B é um subconjunto ortonormal.*

Definição 1.3. *Um subconjunto B de um espaço com produto interno $\mathcal{H}$ é uma base (de Hilbert) se B é um conjunto ortonormal e o subespaço* $\text{span}(B)$ *é denso em $\mathcal{H}$.*

A maioria dos livros de Análise Funcional, como [17] e [20], costumam definir espaço de Hilbert sem a condição de separabilidade que exigimos acima. Porém, ao exigir essa propriedade é possível garantir que todo espaço de Hilbert possui uma base de Hilbert enumerável.

Teorema 1.4 (Identidade de Parseval)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $B = \{e_j; j \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Então, B é uma base de Hilbert se, e somente se, para cada $x \in \mathcal{H}$, vale*

$$\|x\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle x, e_j\rangle|^2. \tag{1.1}$$

Definição 1.5. *Seja $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ um operador linear em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$ densamente definido, isto é, $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$. O operador adjunto de Hilbert T^* é definido da seguinte forma: o domínio $\mathcal{D}(T^*)$ de T^* consiste de todos os elementos $y \in \mathcal{H}$ tais que existe $y^* \in \mathcal{H}$ satisfazendo*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Assim, para cada $y \in \mathcal{D}(T^*)$, defina

$$T^*y \doteq y^*.$$

Se $T = T^*$, dizemos que T é autoadjunto.

Definição 1.6. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado autoadjunto. Dizemos que T é positivo se*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.7. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado autoadjunto positivo em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$. Um operador linear limitado autoadjunto A é chamado de raíz quadrada de T se*

$$A^2 = T.$$

Se A for um operador positivo, então A será dito raíz quadrada positiva de T e denotado por

$$A = \sqrt{T}.$$

Teorema 1.8. *Todo operador linear limitado autoadjunto positivo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ possui uma única raiz quadrada positiva A. Este operador A comuta com todo operador linear limitado em $\mathcal{H}$ que comuta com T.*

Um dos conceitos que aparecem em nosso estudo é a decomposição de um espaço de Hilbert em subespaços de dimensão finita, especialmente o espaço de funções de quadrado integrável L^2. O próximo resultado garante o caminho inverso.

Teorema 1.9. *Seja $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de espaços de Hilbert. Então*

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} H_j \doteq \left\{ (h_j)_{j\in\mathbb{N}};\ h_j \in H_j \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|_{H_j}^2 < \infty \right\}$$

é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$\langle (h_j)_{j\in\mathbb{N}}, (g_j)_{j\in\mathbb{N}} \rangle \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \langle h_j, g_j \rangle_{H_j}.$$

1.2 Teoria Espectral

Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T : \mathcal{D}(T) \to X$ um operador linear cujo domínio $\mathcal{D}(T)$ é um subespaço de X. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, defina o operador

$$T_\lambda \doteq T - \lambda I,$$

no qual I é o operador identidade em $\mathcal{D}(T)$. Se o operador T_λ possuir inversa, a denotamos por $R_\lambda(T)$, isto é,

$$R_\lambda(T) \doteq T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1},$$

e dizemos que $R_\lambda(T)$ é o operador resolvente de T.

Definição 1.10. *Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T : \mathcal{D}(T) \to X$ um operador linear. Um número complexo λ é um valor regular de T se:*

1. *$R_\lambda(T)$ existe;*

2. *$R_\lambda(T)$ é limitado;*

3. *$R_\lambda(T)$ é densamente definido em X.*

O conjunto resolvente $\rho(T)$ consiste de todos os valores regulares de T. Chamamos de espectro de T o complementar do conjunto resolvente de T e o denotamos por $\mathrm{spec}(T)$*, ou seja,* $\mathrm{spec}(T) \doteq \mathbb{C}\backslash\rho(T)$.

Podemos particionar $\mathrm{spec}(T)$ *em três conjuntos disjuntos:*

(a) O espectro pontual, denotado por $\mathrm{spec}_p(T)$*, que consiste dos valores λ para os quais $R_\lambda(T)$ não existe. Se $\lambda \in \mathrm{spec}_p(T)$, existe $u \in \mathcal{D}(T)$, com $u \neq 0$, tal que $Tu = \lambda u$. Dizemos que λ é um autovalor de T e u é um autovetor de T associado a λ.*

(b) O espectro residual, denotado por $\mathrm{spec}_r(T)$*, que consiste dos valores λ para os quais $R_\lambda(T)$ existe, mas não é densamente definido.*

(c) O espectro contínuo, denotado por $\mathrm{spec}_c(T)$*, que consiste dos valores λ para os quais $R_\lambda(T)$ existe e é densamente definido, porém não é limitado.*

Teorema 1.11 (Teorema Espectral para Operadores Limitados)**.** *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa numa vizinhança de* $\mathrm{spec}(T)$*, então*

$$f(\mathrm{spec}(T)) = \mathrm{spec}(f(T)).$$

O resultado acima não é válido ao tomar T não limitado. Porém, em alguns casos, como $f(z) = z^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, ainda vale

$$f(\mathrm{spec}(T)) = \mathrm{spec}(f(T)).$$

1.3 Operadores Elíticos

Começamos essa seção estabelecendo algumas notações que usamos no trabalho todo:

- M é uma variedade diferenciável de classe C^∞ compacta, orientável e sem bordo. Na maioria das vezes vamos nos referir a M apenas como uma variedade fechada;
- $C^\infty(M)$ é o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis definidas em M;
- $\mathcal{D}'(M)$ é o espaço das distribuições sobre M, ou seja, é o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $C^\infty(M)$;

- $H^s(M)$, com $s \in \mathbb{R}$, é o espaço de Sobolev usual sobre a variedade fechada M;
- $L^2(M)$ é o espaço das funções mensuráveis definidas em M tais que

$$\int_M |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Recordamos que $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert em relação ao produto interno e norma

$$\langle f, h \rangle = \int_M f(x)\overline{g(x)}dx \quad \text{e} \quad \|f\| = \int_M |f(x)|^2 dx.$$

Além disso, $C^\infty(M)$ é denso em $L^2(M)$ em relação a essa norma e temos

$$\bigcap_s H^s(M) = C^\infty(M) \quad \text{e} \quad \bigcup_s H^s(M) = \mathcal{D}'(M) \tag{1.2}$$

Dizemos que $P = P(x, D)$ é um operador diferencial de ordem m sobre M se

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

com coeficientes $a_\alpha \in C^\infty(M)$, tal que $a_\beta \neq 0$, para algum $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\beta| = m$, no qual $D^\alpha \doteq \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$. O símbolo do operador $P = P(x, D)$ é o polinômio

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e o símbolo principal é

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.12. *Dizemos que o operador diferencial P é elítico se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$P_m(x, \xi) \geqslant C|\xi|, \ \forall (x, \xi) \in M \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

ou equivalentemente, o símbolo principal de P satisfaz a condição

$$P_m(x, \xi) \neq 0, \ \forall (x, \xi) \in M \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Proposição 1.13. *Seja E um operador diferencial elítico de ordem e.*

(a) Se $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $Eu \in H^s(M)$ então $u \in H^{s+e}(M)$;

(b) $f \in H^s(M)$ se, e somente se, $(I + E)^{s/e} f \in L^2(M)$;

(c) $f \in C^{\infty}(M)$ *se, e somente se,* $(I+E)^N f \in L^2(M)$*, para todo* $N \in \mathbb{N}_0$.

O item (a) dessa proposição segue do corolário 7.1 do livro do Shubin (veja [22] p.54), e tem como consequênca que todo operador elítico é globalmente hipoelítico, devido a (1.2).

O próximo resultado é fundamental no desenvolvimento desse trabalho e segue do Teorema 8.4 de [22] e do fato dos autovalores de um operador autoadjunto serem todos reais.

Teorema 1.14. *Se* E *é um operador elítico autoadjunto de ordem* e*, então* $\operatorname{spec}(E) = \operatorname{spec}_p(E)$ *e é um subconjunto discreto de* $\mathbb{R}$ *sem pontos de acumulação.*

Além disso, para cada $\lambda \in spec(E)$ *vale a decomposição*

$$L^2(M) = H_\lambda \oplus H'_\lambda$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $H_\lambda \subset C^\infty(M)$ *é um subespaço de dimensão finita tal que* $(E-\lambda I)^N H_\lambda = 0$*, para algum* $N > 0$ *e é invariante em relação a* E*. Em outras palavras, o operador* $E|_{H_\lambda}$ *tem somente o autovalor* λ *e é igual a soma direta de blocos de Jordan de dimensão menor ou igual a* N*.*

2. H'_λ *é um subespaço fechado de* $L^2(M)$*, invariante com respeito a* E *e, se denotarmos por* E'_λ *a restrição* $E|_{H'_\lambda}$ *então* $E'_\lambda - \lambda I$ *tem uma inversa limitada (em outras palavras,* $\lambda \notin \operatorname{spec}(E|_{H'_\lambda})$*).*

Esse teorema garante (por indução) que o espaço $L^2(M)$ pode ser decomposto em autoespaços $H_{\lambda_j} \subset C^\infty(M)$ de dimensão finita d_j associados a cada um dos autovalores $\lambda_j \in \operatorname{spec}(E)$, e assim

$$L^2(M) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} H_{\lambda_j}$$

1.4 Classes de Operadores de Schatten-von Neumann

Introduziremos agora as classes de Operadores de Schatten-von Neumann, que aparecem como generalização das classes de operadores Hilbert-Schmidt e das classes traciais e que possuem similaridades com os espaços L^p. Faremos um breve resumo dos principais resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [18].

Definição 1.15. *Dizemos que um operador linear $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador Hilbert-Schmidt se existe uma base ortonormal $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{H}$ tal que*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|T\psi_j\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty. \tag{1.3}$$

Denotamos por $S_2(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores Hilbert-Schmidt.

É possível demonstrar que a soma (1.3) independe da escolha da base ortonormal $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ e, portanto, está bem definida a norma Hilbert-Schmidt:

$$\|T\|_{S_2(\mathcal{H})} \doteq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|T\psi_j\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Listamos agora algumas propriedades dos operadores Hilbert-Schmidt, lembrando que $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Proposição 1.16. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador linear.*

(a) $T \in S_2(\mathcal{H}) \Leftrightarrow |T| \in S_2(\mathcal{H})$ e

$$\|T\|_{S_2(\mathcal{H})} = \||T|\|_{S_2(\mathcal{H})}; \tag{1.5}$$

(b) $T \in S_2(\mathcal{H}) \Leftrightarrow T^* \in S_2(\mathcal{H})$ e

$$\|T\|_{S_2(\mathcal{H})} = \|T^*\|_{S_2(\mathcal{H})}; \tag{1.6}$$

(c) Se $T \in S_2(\mathcal{H})$, então T é compacto. Em particular, T é limitado e vale

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{S_2(\mathcal{H})}. \tag{1.7}$$

(d) Se $T \in S_2(\mathcal{H})$ e $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, então $ST, TS \in S_2(\mathcal{H})$ e

$$\|ST\|_{S_2(\mathcal{H})} \leq \|S\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}\|T\|_{S_2(\mathcal{H})}; \tag{1.8}$$

$$\|TS\|_{S_2(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{S_2(\mathcal{H})}\|S\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}. \tag{1.9}$$

Teorema 1.17. *O espaço de operadores Hilbert-Schmidt $S_2(\mathcal{H})$ é um espaço de Hilbert, com respeito ao produto interno*

$$\langle S, T\rangle_{S_2(\mathcal{H})} \doteq \sum_{j=0}^{\infty} \langle S\psi_j, T\psi_j\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{1.10}$$

o qual independe da escolha da base ortonormal $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{H}$.

Proposição 1.18. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador linear. Então $T \in S_2(\mathcal{H})$ se, e somente se, T é compacto e*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^2 < \infty, \tag{1.11}$$

em que $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é a sequência de autovalores de $|T|$, chamados de valores singulares de T, contando multiplicidade. Além disso,

$$\|T\|_{S_2(\mathcal{H})} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.12}$$

Definição 1.19. *Dizemos que um operador linear limitado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é operador classe tracial se $\sqrt{|T|} \in S_2(\mathcal{H})$.*

Denotamos por $S_1(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores classe traciais e para cada $T \in S_1(\mathcal{H})$, definimos o traço de T como

$$\text{Tr}\,(T) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} \langle T\psi_j, \psi_j\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{1.13}$$

no qual $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. O Tr (T) *independe da escolha da base ortonormal de $\mathcal{H}$.*

Proposição 1.20. *O espaço $S_1(\mathcal{H})$ é um subespaço linear de $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ e $T \in S_1(\mathcal{H})$ se, e somente se, T é compacto e*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j < \infty, \tag{1.14}$$

em que $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é a sequência de valores singulares de T, contando multiplicidade. Além disso, se $T \in S_1(\mathcal{H})$ e $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ são seus autovalores, contando multiplicidade, então

$$\text{Tr}\,(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j, \tag{1.15}$$

Proposição 1.21. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador linear limitado.*

(a) $T \in S_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow |T| \in S_1(\mathcal{H})$;

(b) $T \in S_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow T^* \in S_1(\mathcal{H})$ e

$$\text{Tr}\,(T^*) = \overline{\text{Tr}\,(T)}; \tag{1.16}$$

(c) Se $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ e $T \in S_1(\mathcal{H})$, então $ST, TS \in S_1(\mathcal{H})$ e

$$\text{Tr}\,(TS) = \text{Tr}\,(ST). \tag{1.17}$$

Definição 1.22. *A norma classe tracial de um operador $T \in S_1(\mathcal{H})$ é definida como*

$$\|T\|_{S_1(\mathcal{H})} = \text{Tr}\,(|T|). \tag{1.18}$$

Proposição 1.23. *Se $T \in S_1(\mathcal{H})$, então $T \in S_2(\mathcal{H})$ e*

$$\|T\|^2_{S_2(\mathcal{H})} = \text{Tr}\,(|T|^2); \tag{1.19}$$

$$\|T\|_{S_2(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{S_1(\mathcal{H})}. \tag{1.20}$$

Além disso,

$$|\text{Tr}\,(T)| \leq \text{Tr}\,(|T|) = \|T\|_{S_1(\mathcal{H})}; \tag{1.21}$$

$$\|T^*\|_{S_1(\mathcal{H})} = \|T\|_{S_1(\mathcal{H})}, \tag{1.22}$$

e para todo $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$,

$$\|ST\|_{S_1(\mathcal{H})} \leq \|S\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}\|T\|_{S_1(\mathcal{H})}; \tag{1.23}$$

$$\|TS\|_{S_1(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{S_1(\mathcal{H})}\|S\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}. \tag{1.24}$$

Por fim,

$$\|T\|_{S_1(\mathcal{H})} = \sup\{|\text{Tr}\,(ST)|;\ S \in \mathscr{L}(\mathcal{H}), \|S\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} = 1\}. \tag{1.25}$$

Proposição 1.24. *O espaço $S_1(\mathcal{H})$ é um espaço de Banach com respeito a norma classe tracial.*

Definição 1.25. *Seja $1 \leq p < \infty$ e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador linear limitado. Dizemos que T pertence à Classe de Schatten-von Neumann p, denotada por $S_p(\mathcal{H})$, se para alguma base ortonormal $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{H}$, temos*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\langle T\psi_j, \psi_j\rangle_{\mathcal{H}}|^p < \infty. \tag{1.26}$$

Proposição 1.26. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado. Então:*

(a) $T \in S_p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow |T| \in S_p(\mathcal{H})$;

(b) $T \in S_p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow T^* \in S_p(\mathcal{H})$;

(c) Se $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ e $T \in S_p(\mathcal{H})$, então $ST, TS \in S_p(\mathcal{H})$.

Proposição 1.27. *$T \in S_p(\mathcal{H})$ se, e somente se, T é compacto e*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^p < \infty, \tag{1.27}$$

em que $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é a sequência de valores singulares de T, contando multiplicidade.

Corolário 1.28. *Se $T \in S_p(\mathcal{H})$, então $|T|^p \in S_1(\mathcal{H})$.*

Definição 1.29. *Em $S_p(\mathcal{H})$, definimos a norma p de Schatten-von Neumann como*

$$\|T\|_{S_p(\mathcal{H})} \doteq (\mathrm{Tr}\,(|T|^p))^{\frac{1}{p}}\,. \tag{1.28}$$

Assim, sendo $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ a sequência de valores singulares de T, contando multiplicidade, temos

$$\|T\|_{S_p(\mathcal{H})} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.29}$$

Proposição 1.30. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador linear compacto.*

1. $\|T\|_{S_p(\mathcal{H})} = \||T|\|_{S_p(\mathcal{H})}$, *para todo $1 \leq p < \infty$.*

2. $\|T\|_{S_p(\mathcal{H})} = \|T^*\|_{S_p(\mathcal{H})}$, *para todo $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.31. *Para todo $1 \leq p < \infty$, o espaço $S_p(\mathcal{H})$ é um espaço de Banach com relação à norma $\|\cdot\|_{S_p(\mathcal{H})}$.*

Teorema 1.32. *Suponha que $1 \leq p, q, r < \infty$ satisfazem a relação $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Se $T \in S_p(\mathcal{H})$ e $S \in S_q(\mathcal{H})$, então $TS \in S_r(\mathcal{H})$ e*

$$\|TS\|_{S_r(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{S_p(\mathcal{H})}\|S\|_{S_q(\mathcal{H})}. \tag{1.30}$$

Capítulo 2

Operadores Invariantes em Espaços de Hilbert

Neste capítulo apresentamos de maneira mais abstrata o conceito de operador invariante, ou multiplicador de Fourier, em espaços de Hilbert. A ideia geral é estabelecer várias caracterizações desses operadores e aplicar essas noções para descrever algumas propriedades dos operadores, por exemplo, pertencer a alguma classe de Schatten-von Neumann e a limitação.

Essa diversidade de caracterizações de um operador invariante será fundamental no próximo capítulo, no qual apresentamos uma decomposição conveniente do espaço de Hilbert $L^2(M)$, sendo M uma variedade suave fechada.

2.1 Análise de Fourier e Operadores Invariantes em Espaços de Hilbert

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ subespaço vetorial denso de $\mathcal{H}$. Sejam $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência de números naturais e $\{e_j^k;\ j \in \mathbb{N}_0 \text{ e } 1 \leq k \leq d_j\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que $e_j^k \in \mathcal{H}^\infty$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$.

Denotando $H_j \doteq \text{span}\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$, obtemos a decomposição de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} H_j, \tag{2.1}$$

em soma direta de subespaços de dimensão finita d_j. Dessa forma, qualquer $f \in \mathcal{H}$, pode ser escrito como

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \langle f, e_j^k \rangle_{\mathcal{H}} e_j^k, \tag{2.2}$$

com a convergência da série em $\mathcal{H}$.

Denotando $\widehat{f}(j,k) \doteq \langle f, e_j^k \rangle_{\mathcal{H}}$, para todo $f \in \mathcal{H}$, podemos escrever (2.2) como

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k) e_j^k \tag{2.3}$$

e chamamos de coeficientes de Fourier de f os números $\widehat{f}(j,k)$.

Seja

$$\ell^2(\mathbb{N}_0, \{d_j\}) = \left\{ h : \mathbb{N}_0 \to \prod_d \mathbb{C}^d; h(j) \in \mathbb{C}^{d_j} \text{ e } \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |h(j,k)|^2 < \infty \right\}, \tag{2.4}$$

com a norma

$$\|h\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0, \{d_j\})} \doteq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |h(j,k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Note que o espaço $\ell^2(\mathbb{N}_0, \{d_j\})$ é isomorfo ao espaço $\ell^2(\mathbb{C})$ e depende da escolha da sequência $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$.

Dessa forma, como $\{e_j^k;\ j \in \mathbb{N}_0 \text{ e } 1 \leq k \leq d_j\}$ é base ortonormal, pelo Teorema 1.4, obtemos a Fórmula de Plancherel

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\langle f, e_j^k \rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{f}(j,k)|^2 = \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0, \{d_j\})}^2 \tag{2.6}$$

e $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{N}_0, \{d_j\})$, para todo $f \in \mathcal{H}$.

Estabelecida a notação básica, podemos agora passar aos principais resultados desse capítulo.

Teorema 2.1. *Seja $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(A) Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, temos $T(H_j) \subset H_j$.

(B) Para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$, existe uma matriz $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ tal que para todo elemento da base e_j^k e $1 \leq m \leq d_\ell$, vale

$$\widehat{Te_j^k}(\ell, m) = \sigma(\ell)_{mk} \delta_{j\ell}.$$

Demonstração.

$(A) \Rightarrow (B)$:

Por hipótese, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, temos que $T(H_j) \subset H_j$. Considere $T\big|_{H_j} : H_j \to H_j$ e seja $\sigma(j) \in \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ a matriz de $T\big|_{H_j}$ com respeito à base ortonormal $\mathscr{B}_j = \{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$.

Deste modo,

$$Te_j^k = \sum_{i=1}^{d_j} \sigma(j)_{ik} e_j^i$$

e a matriz $\sigma(j)$ é definida por

$$\sigma(j)_{mk} = \langle Te_j^k, e_j^m \rangle = \widehat{Te_j^k}(j, m). \tag{2.7}$$

Assim,

$$\widehat{Te_j^k}(\ell, m) = \langle Te_j^k, e_\ell^m \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{d_j} \sigma(j)_{ik} e_j^i, e_\ell^m \right\rangle = \sum_{i=1}^{d_j} \sigma(j)_{ik} \langle e_j^i, e_\ell^m \rangle = \sigma(j)_{mk} \delta_{j\ell} = \sigma(\ell)_{mk} \delta_{j\ell}.$$

$(B) \Rightarrow (A)$:

Como $e_j^k \in \mathcal{H}^\infty$, para cada $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, o elemento Te_j^k está bem definido e $Te_j^k \in \mathcal{H}$. Logo

$$Te_j^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \widehat{Te_j^k}(\ell, m) e_\ell^m = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \sigma(\ell)_{mk} \delta_{j\ell} e_\ell^m = \sum_{m=1}^{d_j} \sigma(j)_{mk} e_j^m \in H_j,$$

para todo $1 \leq k \leq d_j$. Como $\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$ gera H_j, então $T(H_j) \subset H_j$.

$\square$

Teorema 2.2. *Seja $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ um operador linear e, para cada $f \in \mathcal{H}^\infty$, denotemos por $\widehat{f}(j) \in \mathbb{C}^{d_j}$ o vetor coluna cujas entradas são $\widehat{f}(j, k)$, com $1 \leq k \leq d_j$. Se*

(C) para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$, existe uma matriz $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ tal que

$$\widehat{Tf}(\ell) = \sigma(\ell) \widehat{f}(\ell), \quad \forall f \in \mathcal{H}^\infty,$$

então valem as propriedades (A)-(B) do Teorema 2.1 e as matrizes $\sigma(\ell)$ em (B) e em (C) coincidem.

Além disso, se supormos que $e_j^k \in \mathcal{D}(T^*)$, para todo $j > 0$ e $1 \leq k \leq d_j$, então $(A) - (C)$ são equivalentes.

Demonstração.

$(C) \Rightarrow (B)$:

Por hipótese, temos que para todo $f \in \mathcal{H}^\infty$ e todo $\ell \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{Tf}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)$. Em particular,

$$\widehat{Te_j^k}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{e_j^k}(\ell).$$

Note que

$$\widehat{e_j^k}(\ell, m) = \langle e_j^k, e_\ell^m \rangle = \delta_{j\ell}\delta_{km}.$$

Assim,

$$\widehat{Te_j^k}(\ell, m) = \left(\sigma(\ell)\widehat{e_j^k}(\ell)\right)_m = \sum_{i=1}^{d_\ell} \sigma(\ell)_{mi}\widehat{e_j^k}(\ell, i) = \sum_{i=1}^{d_\ell} \sigma(\ell)_{mi}\delta_{j\ell}\delta_{ki} = \sigma(\ell)_{mk}\delta_{j\ell}.$$

$(B) \Rightarrow (C)$:

Suponha agora que $e_j^k \in \mathcal{D}(T^*)$, para todo $j > 0$ e $1 \leq k \leq d_j$ e seja $f \in \mathcal{H}^\infty$. Logo,

$$\begin{aligned}
\widehat{Tf}(\ell, m) &= \langle Tf, e_\ell^m \rangle = \langle f, T^* e_\ell^m \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)e_j^k, T^* e_\ell^m \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)\left\langle e_j^k, T^* e_\ell^m \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)\left\langle Te_j^k, e_\ell^m \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)\widehat{Te_j^k}(\ell, m) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)\sigma(\ell)_{mk}\delta_{j\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{d_j} \sigma(\ell)_{mk}\widehat{f}(\ell, k) \\
&= \left(\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)\right)_m,
\end{aligned}$$

ou seja, $\widehat{Tf}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)$, com $\sigma(\ell)$ como na propriedade (B), para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

$\square$

Observação 1. *Para conseguir a equivalência $(A) - (C)$ foi necessário supor que o domínio de T^* contenha e_j^k, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$. Como $\{e_j^k\}$ é uma base para $\mathcal{H}$, segue que $\mathcal{D}(T^*)$ é denso em $\mathcal{H}$. Em particular, T é um operador fechável.*

Convém ressaltar que esta condição não é restritiva para a análise posterior, uma vez que é satisfeita nas aplicações que serão apresentadas. Deste modo, a partir de agora vamos supor que $\{e_j^k\} \subset \mathcal{D}(T^*)$.

Teorema 2.3. *Sejam* $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ *um operador linear e* $P_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_j$ *a projeção ortogonal de* $\mathcal{H}$ *sobre* H_j. *A condição*

(D) para cada $j \in \mathbb{N}_0$, *temos*

$$TP_j = P_jT \text{ em } \mathcal{H}^\infty,$$

implica as propriedades $(A) - (C)$ *dos teoremas anteriores.*

Além disso, se pudermos estender T *a um operador linear limitado* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, *então as propriedades* $(A) - (D)$ *serão equivalentes.*

Demonstração.

$(D) \Rightarrow (A)$:

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, temos $TP_j = P_jT$ em $\mathcal{H}^\infty$. Como $H_j = \text{span}\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$ e cada e_j^k pertence à $\mathcal{H}^\infty$, temos $H_j \subset \mathcal{H}^\infty$.

Seja $f \in H_j$, logo $P_jf = f$. Assim,

$$Tf = T(P_jf) = (TP_j)f = (P_jT)f = P_j(Tf) \in H_j,$$

e, portanto, $T(H_j) \subset H_j$.

$(A) \Rightarrow (D)$:

Suponha agora que T pode ser estendido a um operador limitado $T \in \mathscr{L}(H)$. Como $H_j \subset \mathcal{H}^\infty$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$, pela propriedade (A) temos que $T(H_j) \subset H_j$. Mostremos primeiramente que sob essas hipóteses, $T(H_j^\perp) \perp H_j$.

Seja $g \in H_j^\perp$, então podemos escrever g como

$$g = \sum_{\ell \neq j} \sum_{k=1}^{d_\ell} \langle g, e_\ell^k \rangle e_\ell^k.$$

Pela continuidade de T em $\mathcal{H}$ temos,

$$Tg = \sum_{\ell \neq j} \sum_{k=1}^{d_\ell} \langle g, e_\ell^k \rangle Te_\ell^k.$$

Como $Te_\ell^k \in H_\ell \subset H_j^\perp$, para $\ell \neq j$, então

$$\langle Tg, f \rangle = \left\langle \sum_{\ell \neq j} \sum_{k=1}^{d_\ell} \langle g, e_\ell^k \rangle Te_\ell^k, f \right\rangle = \sum_{\ell \neq j} \sum_{k=1}^{d_\ell} \langle g, e_\ell^k \rangle \langle Te_\ell^k, f \rangle = 0,$$

para cada $f \in H_j$. Logo $Tg \in H_j^{\perp}$.

Sejam $f \in \mathcal{H}^{\infty}$ e $j \in \mathbb{N}_0$. Podemos escrever $f = h_j + g_j$, com $h_j \in H_j$ e $g_j \in H_j^{\perp}$. Dessa forma, $h_j = P_j f$ e tanto h_j, quanto g_j estão em $\mathcal{H}^{\infty}$. Por hipótese e pelo que foi mostrado anteriormente, $Th_j \in H_j$ e $Tg_j \in H_j^{\perp}$. Assim

$$P_j T f = P_j T(h_j + g_j) = P_j T h_j + P_j T g_j = T h_j = T P_j f,$$

uma vez que $P_j T g_j = 0$. Portanto $P_j T = T P_j$ em $\mathcal{H}^{\infty}$. $\square$

Definição 2.4. *Um operador linear $T : \mathcal{H}^{\infty} \to \mathcal{H}$ é dito invariante, ou um multiplicador de Fourier em relação a decomposição $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ estabelecida em* (2.1)*, se T satisfaz uma das propriedades equivalentes $(A) - (C)$ do Teorema 2.1. Quando a decomposição $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ estiver fixada, dizemos simplesmente que T é invariante, ou que T é um multiplicador de Fourier.*

Observação 2. *Note que a matriz $\sigma(\ell)$ depende da partição* (2.1) *e também da escolha da base ortonormal $\{e_j^k;\ j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j\}$. De fato, por* (2.7)*, temos que*

$$\sigma(j)_{mk} = \langle T e_j^k, e_j^m \rangle.$$

Logo, uma simples reordenação dos elementos da base de H_j irá modificar a matriz $\sigma(j)$.

Essa característica abre a possibilidade de, em aplicações concretas da teoria, poder escolher bases convenientes em cada um dos espaços H_j de modo que as matrizes $\sigma(j)$ sejam, por exemplo, triangulares, revelando assim os autovalores do operador, ou ainda diagonais, quando possível.

Definição 2.5. *Seja $T : \mathcal{H}^{\infty} \to \mathcal{H}$ um operador linear invariante. O símbolo matricial de T em relação a decomposição $\{H_j\}$ e a base $\{e_j^k\}$ é a família das matrizes $\sigma_T = \{\sigma(j)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ dadas pelas propriedades (B) e (C) do Teorema 2.1.*

O símbolo matricial de T, ou apenas símbolo de T, é uma sequência de matrizes, cujas dimensões podem variar em função da decomposição do espaço. Vamos denotar a classe de símbolos por

$$\Sigma \doteq \{\sigma : \mathbb{N}_0 \ni \ell \mapsto \sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}\}.$$

Quando necessário, indicamos a dependência de σ em relação a uma base ortonormal $\{e_\alpha\}$ escrevendo $(\sigma, \{e_\alpha\})$. Além disso, escrevemos T_σ para indicar um operador T cujo símbolo é σ e escrevemos σ_T para o símbolo de um operador T.

Exemplo 2.6. *Para o operador identidade $T = I$, temos $\sigma_I(j) = I_{d_j}$, sendo $I_{d_j} \in \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ a matriz identidade. Note que as dimensões d_j dependem da decomposição de $\mathcal{H}$ e não necessariamente $d_j = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$.*

Vamos estabelecer agora a relação existente entre os símbolos de um operador invariante em relação a diferentes bases ortonormais. Sejam $\{e_\alpha\}$ e $\{f_\alpha\}$ bases ortonormais de $\mathcal{H}$ e $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ um operador invariante. Considere o operador unitário U determinado por $Ue_\alpha = f_\alpha$. Assim, temos que

$$\langle Te_\alpha, e_\beta\rangle = \langle UTe_\alpha, Ue_\beta\rangle = \langle UTU^*Ue_\alpha, Ue_\beta\rangle = \langle UTU^* f_\alpha, f_\beta\rangle.$$

Portanto, obtemos a relação

$$(\sigma_T, \{e_\alpha\}) = (\sigma_{UTU^*}, \{f_\alpha\}). \tag{2.8}$$

Nas principais aplicações da teoria apresentada neste trabalho precisamos considerar operadores não limitados definidos em $\mathcal{H}$. Nosso objetivo é estudar propriedades dos operadores invariantes em relação a uma decomposição do espaço e, para distinguir do caso geral, no próximo teorema utilizamos a notação E_0 para operadores limitados.

Teorema 2.7. *Seja $E_0 \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ um operador linear contínuo tal que cada H_j seja o autoespaço associado ao autovalor λ_j, ou seja, $E_0 e_j^k = \lambda_j e_j^k$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$. Nessas condições, as afirmações $(A) - (C)$ dos Teorema 2.1 e 2.2 são equivalentes à*

(E) Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, temos

$$TE_0 e_j^k = E_0 T e_j^k.$$

Além disso, se T pode ser estendido a um operador linear limitado $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, então as propriedades $(A) - (E)$ são equivalentes à

(F) $TE_0 = E_0 T$ em $\mathcal{H}$,

Demonstração.

Mostraremos que (A) é equivalente a (E). Em seguida, ao supor que $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, pelo Teorema 2.3, concluiremos que as propriedades $(A) - (E)$ são equivalentes. Deste modo, mostraremos que (E) é equivalente a (F) para concluir a demonstração.

$(A) \Rightarrow (E)$:

Fixemos $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, então $e_j^k \in H_j$ e, por $(A) - (C)$, temos que

$$Te_j^k = \sum_{i=1}^{d_j} \sigma(j)_{ik} e_j^k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E_0Te_j^k &= E_0\sum_{i=1}^{d_j}\sigma(j)_{ik}e_j^k = \sum_{i=1}^{d_j}\sigma(j)_{ik}E_0e_j^k \\ &= \lambda_j\sum_{i=1}^{d_j}\sigma(j)_{ik}e_j^k = \lambda_jTe_j^k = T\lambda_je_j^k = TE_0e_j^k. \end{aligned}$$

Como e_j^k é arbitrário, concluímos que vale (E).

$(E) \Rightarrow (A)$:

Como $\{e_j^k;\ 1 \leq k \leq d_j\}$ é uma base ortonormal para H_j, basta mostrar que $Te_j^k \in H_j$. Se $Te_j^k = 0$, não há o que provar. Considere $Te_j^k \neq 0$. Como $E_0e_j^k = \lambda_je_j^k$, por (E), temos que

$$E_0Te_j^k = TE_0e_j^k = T\lambda_je_j^k = \lambda_jTe_j^k,$$

ou seja, Te_j^k é autovetor de E_0 associado ao autovalor λ_j. Portanto $Te_j^k \in H_j$.

Suponha agora que T pode ser estendido a um operador limitado $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Pelo Teorema 2.3, temos que as propriedades $(A)-(D)$ são equivalentes. Desta maneira, pelo que foi mostrado anteriormente, concluímos que as condições $(A)-(E)$ são equivalentes. Evidentemente (F) implica (E). Mostremos agora que (E) implica (F) para concluir a demonstração.

$(E) \Rightarrow (F)$:

Como $E_0 \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, temos que TE_0 e E_0T pertencem à $\mathscr{L}(\mathcal{H})$. Deste modo, para $f \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} E_0Tf &= E_0T\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}\widehat{f}(j,k)e_j^k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}\widehat{f}(j,k)E_0Te_j^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}\widehat{f}(j,k)TE_0e_j^k \\ &= TE_0\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}\widehat{f}(j,k)e_j^k\right) \\ &= TE_0f. \end{aligned}$$

Portanto, $E_0T = TE_0$ em $\mathcal{H}$. $\square$

2.2 Propriedades do Símbolo de um Operador Invariante

Nesta seção pretendemos explorar algumas propriedades de operadores invariantes analisando o seu símbolo. Como vimos nos Teoremas 2.3 e 2.7, é possível obter informações adicionais sobre um operador quando esse operador puder ser estendido a um operador limitado. Logo é conveniente saber quais condições o símbolo de um operador deve ter para que seja possível estendê-lo a um elemento de $\mathscr{L}(\mathcal{H})$.

O primeiro passo nessa direção é verificar que o símbolo de uma extensão coincide com o símbolo original. Obteremos também uma fórmula para o símbolo da composição de operadores invariantes.

Seja $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ um operador invariante que possui uma extensão a um operador linear limitado $\widetilde{T}$, ou seja, $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ e $\widetilde{T}|_{\mathcal{H}^\infty} = T$. Como T é um operador invariante, então $T(H_j) \subset H_j$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Do fato de $H_j \subset \mathcal{H}^\infty$, temos que $\widetilde{T}(H_j) = T(H_j) \subset H_j$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Portanto, $\widetilde{T}$ também é um operador invariante. Além disso, $\sigma_T = \sigma_{\widetilde{T}}$. De fato, por (2.7),

$$\sigma_{\widetilde{T}}(j)_{mk} = \langle \widetilde{T}e_j^k, e_j^m \rangle = \langle Te_j^k, e_j^m \rangle = \sigma_T(j)_{mk},$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k, m \leq d_j$.

Teorema 2.8. *Um operador linear invariante $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ pode ser estendido a um operador linear limitado se, e somente se, seu símbolo σ satisfaz*

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} < \infty.$$

Além disso, denotando a extensão ainda por T, vale

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}.$$

Demonstração.

($\Leftarrow$) Vamos supor primeiramente que existe $C > 0$ tal que

$$\|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq C, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Pela Fórmula de Plancherel (2.6), temos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\widehat{Tf}\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0,\Sigma)}^2 \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\widehat{Tf}(\ell)\|_{\ell^2(\mathbb{C}^{d_\ell})}^2 \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)\|_{\ell^2(\mathbb{C}^{d_\ell})}^2 \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}^2 \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{C}^{d_\ell})}^2 \\
&\leq \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{C}^{d_\ell})}^2 \\
&= \left(\sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}\right)^2 \|f\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ e

$$\|T\| \leq \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}. \tag{2.9}$$

($\Rightarrow$) Suponha agora que $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Assim,

$$\|Tf\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|,$$

para todo $f \in \mathcal{H}$ com $\|f\|_{\mathcal{H}} = 1$. Deste modo, $T\big|_{H_j} \in \mathscr{L}(H_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. De fato, se $f \in H_j$ é tal que $\|f\|_{H_j} = 1$, então $\|f\|_{\mathcal{H}} = 1$ e

$$\|T\big|_{H_j} f\,\|_{H_j} = \|Tf\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|,$$

logo $T\big|_{H_j} \in \mathscr{L}(H_j)$ e $\|T\big|_{H_j}\|_{\mathscr{L}(H_j)} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Como $\|T\big|_{H_j}\|_{\mathscr{L}(H_j)} = \|\sigma(j)\|_{\mathscr{L}(H_j)}$, temos que $\|\sigma(j)\|_{\mathscr{L}(H_j)} \leq \|T\|_{\mathcal{H}}$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Logo

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \|\sigma(j)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq \|T\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.10}$$

Por (2.9) e (2.10), concluímos que

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}.$$

□

Teorema 2.9. *Sejam $S,\ T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ operadores invariantes com respeito a mesma decomposição de $\mathcal{H}$. Se o domínio de $S \circ T$ contém $\mathcal{H}^\infty$, então $S \circ T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ também é invariante* *com respeito a essa mesma decomposição. Além disso, se σ_S e σ_T denotam, respectivamente, os símbolos de S e T com respeito a mesma base ortonormal, então*

$$\sigma_{S\circ T} = \sigma_S \sigma_T,$$

ou seja, $\sigma_{S\circ T}(j) = \sigma_S(j)\sigma_T(j)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Pela propriedade (C) do Teorema 2.1, para cada $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\widehat{(S \circ T)} f(j) = \widehat{S(Tf)}(j) = \sigma_S(j)\widehat{Tf}(j) = \sigma_S(j)\sigma_T(j)\widehat{f}(j),$$

para todo $f \in \mathcal{H}^\infty$. Assim, pelo Teorema 2.1, o operador $S \circ T$ é invariante e vale

$$\sigma_{S\circ T} = \sigma_S \sigma_T.$$

□

2.3 Operadores de Schatten-von Neumann Invariantes

Nesta seção, mostramos que sob certas condições sobre o símbolo de um operador invariante T, pode-se garantir que T pertença à classe de Schatten $S_r(\mathcal{H})$, além de exibir uma fórmula para o traço de T quando $T \in S_1(\mathcal{H})$.

Primeiramente, observe que classes de Schatten podem ser caracterizadas em termos de projeções sobre os autoespaços H_ℓ, tendo em vista que

$$\|T\|_{S_r(\mathcal{H})} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \|T\,|_{H_\ell}\,\|_{S_r(H_\ell)}^r \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.11}$$

De fato, como $\|T\|_{S_r(\mathcal{H})} = \||T|\|_{S_r(\mathcal{H})}$ pela Proposição 1.30, podemos assumir sem perda de generalidade que T é positivo definido. Note que λ é autovalor de T se, e somente se, λ é um autovalor de $T\Big|_{H_{\ell(\lambda)}}$, para algum $\ell(\lambda)$. De fato, se λ é autovalor de T, existe $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ tal que $T\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$. Pela propriedade (D) do Teorema 2.1, temos que

$$TP_j\varphi_\lambda = P_jT\varphi_\lambda = \lambda P_j\varphi_\lambda,$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Como $\varphi_\lambda \neq 0$, existe $\ell(\lambda) \in \mathbb{N}_0$, tal que $P_{\ell(\lambda)}\varphi_\lambda \neq 0$. Assim, como $P_{\ell(\lambda)}\varphi_\lambda \in H_{\ell(\lambda)}$, temos que λ é autovalor de $T\Big|_{H_{\ell(\lambda)}}$:

$$T\Big|_{H_{\ell(\lambda)}} (P_{\ell(\lambda)}\varphi_\lambda) = T(P_{\ell(\lambda)}\varphi_\lambda) = \lambda P_{\ell(\lambda)}\varphi_\lambda.$$

Por outro lado, qualquer autovalor de $T\Big|_{H_{\ell(\lambda)}}$ é autovalor de T, pois se $T\Big|_{H_{\ell(\lambda)}}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, para algum $\varphi_\lambda \in H_{\ell(\lambda)}\backslash\{0\}$, então

$$T\Big|_{H_{\ell(\lambda)}}\varphi_\lambda = T\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda.$$

Teorema 2.10. *Seja $0 < r < \infty$. Um operador invariante $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ com símbolo σ pertence à classe de Schatten $S_r(\mathcal{H})$ se, e somente se, $\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma(\ell)\|^r_{S_r(H_\ell)} < \infty$. Além disso,*

$$\|T\|_{S_r(\mathcal{H})} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma(\ell)\|^r_{S_r(H_\ell)}\right)^{1/r}. \tag{2.12}$$

Em particular, se T pertence a classe de traço $S_1(\mathcal{H})$, então temos a fórmula para o traço de T

$$\text{Tr}(T) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \text{Tr}(\sigma(\ell)). \tag{2.13}$$

Demonstração.

Como $\|T\,|_{H_\ell}\,\|_{S_r(H_\ell)} = \|\sigma(\ell)\|_{S_r(H_\ell)}$, por (2.11), temos

$$\|T\|^r_{S_r(\mathcal{H})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma(\ell)\|^r_{S_r(H_\ell)},$$

o que prova a primeira afirmação do teorema. Para provar a fórmula para o traço de T quando $T \in S_1(\mathcal{H})$, usamos a propriedade (B) para escrever

$$\text{Tr}(T) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell}\langle Te_j^k, e_j^k\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell}\widehat{Te_j^k}(j,k) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell}\sigma(\ell)_{kk} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\text{Tr}(\sigma(\ell)).$$

□

Observação 3. *O fato de um operador $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ pertencer a uma classe de Schatten $S_r(\mathcal{H})$ ou poder ser estendido a um operador linear contínuo não depende da escolha da decomposição em subespaços H_j, porém, a invariância do operador T depende. Por isso na definição deixamos claro que a invariância é com respeito a decomposição H_j. No próximo capítulo exibimos um exemplo no qual a decomposição do espaço de duas maneiras distintas geram operadores invariantes com respeito a apenas uma.*

Capítulo 3

Operadores Invariantes em $L^2(M)$

Neste capítulo aplicamos a teoria geral desenvolvida no capítulo anterior para o caso $\mathcal{H} = L^2(M)$ e $\mathcal{H}^\infty = C^\infty(M)$, no qual M é uma variedade fechada. Convém observar que todos os resultados da seção 2.1 são imediatamente aplicáveis nesse caso, a menos do Teorema 2.7, no qual foi necessário supor que o operador é limitado. Na versão deste teorema para o espaço $L^2(M)$, consideramos E um operador diferencial elítico, que em geral não é limitado.

Além disso, não iremos supor a extensibilidade do operador T a um operador limitado para obtermos resultados análogos para as propriedades (D) e (F) dos teoremas do capítulo anterior, pois esta condição é muito restritiva no ponto de vista de operadores diferenciais. Veremos que para o estudo no espaço $L^2(M)$, é suficiente assumir que T pode ser estendido a um operador contínuo no espaço das distribuições em M $\mathcal{D}'(M)$ para obtermos as mesmas conclusões.

3.1 Análise de Fourier associada a um Operador Elítico

Seja M variedade suave, compacta, orientável, sem bordo, de dimensão n, com uma medida de volume fixa dx. Considere E um operador diferencial elítico autoadjunto positivo em M de ordem e. Os autovalores de E, sem contar sua multiplicidade, formam uma sequência de números reais que pode ser ordenada como

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$$

Para cada autovalor λ_j, o autoespaço H_j correspondente está contido em $C^\infty(M)$ e possui dimensão finita d_j, devido a eliticidade do operador E. Além disso,

$$\sum_{j=0}^{\infty} d_j(1+\lambda_j)^{-2n} < \infty. \tag{3.1}$$

Seja $\{e_j^k;\ j \in \mathbb{N}_0 \text{ e } 1 \leq k \leq d_j\}$ uma base ortonormal fixada para o espaço de Hilbert $L^2(M)$ tal que $\{e_j^k\}^{1\leq k\leq d_j}$ é uma base ortonormal para H_j, para cada $j \in \mathbb{N}_0$.

Obtemos assim uma decomposição para $L^2(M)$, como no capítulo anterior, e valem os resultados obtidos, a excessão do Teorema 2.7, pois o operador E aqui considerado não é limitado.

Para obter resultados análogos aos Teoremas 2.3 e 2.7, vamos supor que T pode ser estendido a um operador contínuo definido em $\mathcal{D}'(M)$.

Como $C^\infty(M)$ é denso em $\mathcal{D}'(M)$ (ver Teorema 4.1.5 de [14]), para cada $u \in \mathcal{D}'(M)$, existe sequência $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, com $u_i \in C^\infty(M)$, tal que $u_i \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(M)$.

Definição 3.1. *Para cada $u \in \mathcal{D}'(M)$, definimos*

$$\hat{u}(j,k) \doteq u(\overline{e_j^k}),$$

para $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$.

A definição acima estende naturalmente a definição de $\hat{f}(j,k)$ em $C^\infty(M)$, pois para $f \in C^\infty(M)$, temos

$$f(\overline{e_j^k}) = \int_M f(x)\overline{e_j^k}(x)\,dx = \langle f, e_j^k\rangle = \hat{f}(j,k).$$

Proposição 3.2. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C^\infty(M)$ tal que $u_i \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(M)$. Então, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, temos*

$$\hat{u}_i(j,k) \longrightarrow \hat{u}(j,k).$$

Demonstração.

Como $u_i \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(M)$, temos que $u_i(\overline{e_j^k}) \longrightarrow u(\overline{e_j^k})$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$. Como $u(\overline{e_j^k}) = \hat{u}(j,k)$ e $u_i \in C^\infty(M)$, temos

$$u_i(\overline{e_j^k}) = \int_M u_i(x)\overline{e_j^k}(x)\,dx = \langle u_i, e_j^k\rangle = \hat{u}_i(j,k).$$

Portanto $\hat{u}_i(j,k) \longrightarrow \hat{u}(j,k)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$.

□

Vejamos agora como caracterizar funções suaves e distribuições através de seus coeficientes de Fourier.

Proposição 3.3. *Seja M uma variedade fechada. Então*

(a) $f \in C^\infty(M) \Longleftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0;\ \|\hat{f}(\ell)\| \leq C_N \sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^{-N}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N};$

(b) $f \in H^s(M) \Longleftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{d_j} (1+\lambda_j)^{2s/e} |\widehat{f}(j,k)|^2 < \infty;$

(c) $u \in \mathcal{D}'(M) \Longleftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0;\ \|\hat{u}(\ell)\| \leq C\sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^N, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$

Demonstração.

(a) $(\Rightarrow)$

Utilizaremos o fato de que se $f \in C^\infty(M)$, então $(I+E)^N f \in L^2(M)$, para todo $N \in \mathbb{N}_0$. Fixado $N \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{(I+E)^N f}(\ell,m) &= \langle (I+E)^N f, e_\ell^m \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} E^i f, e_\ell^m \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} E^i \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k) e_j^k, e_\ell^m \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k) \left\langle E^i e_j^k, e_\ell^m \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k) \lambda_j^i \left\langle e_j^k, e_\ell^m \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k) \lambda_j^i \delta_{j\ell} \delta_{km} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \lambda_\ell^i \widehat{f}(\ell,m) \\
&= (1+\lambda_\ell)^N \widehat{f}(\ell,m).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(1+\lambda_\ell)^N |\widehat{f}(\ell,m)| &= |\widehat{(I+E)^N f}(\ell,m)| \\
&= |\langle (I+E)^N f, e_\ell^m \rangle| \\
&\leq \|(I+E)^N f\|_{L^2(M)} \|e_\ell^m\|_{L^2(M)} \\
&= \|(I+E)^N f\|_{L^2(M)} = C_N,
\end{aligned}$$

ou de forma equivalente,

$$|\widehat{f}(\ell,m)| \leq C_N (1+\lambda_\ell)^{-N},$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq m \leq d_\ell$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}(\ell)\|^2 &= \sum_{m=1}^{d_\ell} |\widehat{f}(\ell, m)|^2 \\
&\leq \sum_{m=1}^{d_\ell} C_N^2 (1+\lambda_\ell)^{-2N} \\
&= d_\ell C_N^2 (1+\lambda_\ell)^{-2N},
\end{aligned}$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$. Portanto

$$\|\widehat{f}(\ell)\| \leq C_N \sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^{-N}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0.$$

$(\Leftarrow)$

Fixado $N \in \mathbb{N}$, temos que

$$(I+E)^N f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} (1+\lambda_j)^N \widehat{f}(j,k) e_j^k. \tag{3.2}$$

Provemos que a série em (3.2) converge absolutamente, e portanto $(I+E)^N f \in L^2(M)$.

Considere $M \in \mathbb{N}$ tal que $(M-N) > 2n$. Pela hipótese, existe $C_M > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}(j)\| \leq C_M \sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^{-M},$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Para $j \in \mathbb{N}_0$ fixado, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{d_j} \|(1+\lambda_j)^N \widehat{f}(j,k) e_j^k\|_{L^2(M)} &= \sum_{k=1}^{d_j} |(1+\lambda_j)^N \widehat{f}(j,k)| \\
&= (1+\lambda_j)^N \|\widehat{f}(j)\|_1 \\
&\leq (1+\lambda_j)^N \sqrt{d_j} \|\widehat{f}(j)\| \\
&\leq C_M d_j (1+\lambda_j)^{N-M} \\
&\leq C_M d_j (1+\lambda_j)^{-2n}.
\end{aligned}$$

Assim, pela convergência da série em (3.1), concluímos que a série (3.2) converge absolutamente. Pelo fato de $L^2(M)$ ser um Espaço de Hilbert, temos que $(I+E)^N f \in L^2(M)$.

Deste modo, como a escolha de $N \in \mathbb{N}$ é arbitrária, $(I+E)^N f \in L^2(M)$, para todo $N \in \mathbb{N}$ e pela Proposição 1.13, concluímos que $f \in C^\infty(M)$.

(b)

Note que $f \in H^s(M)$ se, e somente se, $(I+E)^{s/e}f \in L^2(M)$. Pela fórmula de Plancherel, temos que $(I+E)^{s/e}f \in L^2(M)$ se, e somente se, $\{(1+\lambda_j)^{s/e}\widehat{f}(j)\}_j \in \ell^2(\mathbb{N}_0, \{d_j\})$, isto é, se, e somente se,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}(1+\lambda_j)^{2s/e}|\widehat{f}(j,k)|^2 < \infty.$$

(c) $(\Rightarrow)$

Se $u \in \mathcal{D}'(M)$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $u \in H^s(M)$. Usando o fato de que se $t < s$, então $H^s(M) \subset H^t(M)$, escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $-Ne < s$. Logo, pelo item anterior,

$$C^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}(1+\lambda_j)^{-2N}|\widehat{u}(j,k)|^2 < \infty.$$

Como é uma série de termos positivos, temos que

$$(1+\lambda_j)^{-2N}|\widehat{u}(j,k)|^2 \leq C^2,$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$. Assim,

$$\|\widehat{u}(\ell)\| \leq \sqrt{d_\ell}\|\widehat{u}(\ell)\|_\infty \leq C\sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^N,$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$.

$(\Leftarrow)$

Seja $u = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{d_j}\widehat{u}(j,k)e_j^k$, tal que $\exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ satisfazendo

$$\|\widehat{u}(\ell)\| \leq C\sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^N, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$|\widehat{u}(j,k)| \leq C\sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^N,$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$. Desta forma, pelo item anterior, $u \in H^{-(n+N)e}$, pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}(1+\lambda_j)^{2(-n+N)e/e}|\widehat{u}(j,k)|^2 &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}(1+\lambda_j)^{2(-(n+N)}C^2 d_j(1+\lambda_j)^{2N} \\ &= C^2\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j}d_j(1+\lambda_j)^{-2n} < \infty.\end{aligned}$$

Como $\bigcup\limits_s H^s(M) = \mathcal{D}'(M)$, concluímos que $u \in \mathcal{D}'(M)$.

$\square$

3.2 Operadores Invariantes em $L^2(M)$

Nesta seção recuperamos os resultados obtidos no capítulo anterior para o caso $\mathcal{H}^\infty = C^\infty(M)$ e $\mathcal{H} = L^2(M)$, sendo M uma variedade fechada. Como visto na seção anterior, considerando E um operador diferencial elítico autoadjunto positivo, podemos decompor o espaço $L^2(M)$ como

$$L^2(M) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} H_j,$$

em que cada H_j é o autoespaço de E associado ao autovalor λ_j com dimensão finita d_j.

Seja $\{e_j^k;\ j \in \mathbb{N}_0 \text{ e } 1 \leq k \leq d_j\}$ uma base ortonormal fixada para o espaço de Hilbert $L^2(M)$ tal que $\{e_j^k\}^{1\leq k\leq d_j}$ é uma base ortonormal para H_j, para cada $j \in \mathbb{N}_0$. Assim, qualquer $f \in L^2(M)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \langle f, e_j^k\rangle e_j^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k) e_j^k, \end{aligned}$$

sendo $\widehat{f}(j,k) = \langle f, e_j^k\rangle = \displaystyle\int_M f(x)\overline{e_j^k(x)}\,dx$.

Teorema 3.4. *Seja M uma variedade fechada e $T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ um operador linear. Supondo que o domínio de T^* contém $C^\infty(M)$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, temos $T(H_j) \subset H_j$.

(ii) Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, temos $TEe_j^k = ETe_j^k$.

(iii) Para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$, existe uma matriz $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ tal que, para todo e_j^k,

$$\widehat{Te_j^k}(\ell, m) = \sigma(\ell)_{mk}\delta_{j\ell}.$$

(iv) Para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$, existe uma matriz $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ tal que

$$\widehat{Tf}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{f}(\ell),$$

para todo $f \in C^\infty(M)$,

Além disso, se T pode ser estendido a um operador linear contínuo $T : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$, as propriedades $(i)-(iv)$ também são equivalentes às condições:

(v) Para cada $j \in \mathbb{N}_0$*, temos* $TP_j = P_jT$ *em* $C^\infty(M)$*.*

(vi) $TE = ET$ *em* $L^2(M)$*.*

Demonstração.

A equivalência entre (i), (iii) e (iv) e as implicações $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(iv) \Rightarrow (ii)$ são consequências diretas dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3, pois não dependem da estrutura do espaço. Faremos a demonstração de $(ii) \Rightarrow (i)$, $(ii) \Rightarrow (iv)$ e a equivalência entre (i) e (iv), pois alguns detalhes precisam ser vistos com mais cuidado, como a boa definição de ETe_j^k e TEe_j^k no item (ii) e a extensão de $T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ para um operador contínuo $T : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$:

Mostremos primeiramente que ET e TE estão bem definidos em cada e_j^k. De fato, como E é operador diferencial elítico e $e_j^k \in C^\infty(M)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, temos que $Ee_j^k \in C^\infty(M)$ e, portanto, TEe_j^k está bem definido. Além do mais, $Te_j^k \in L^2(M)$ e, como $L^2(M) \subset \mathcal{D}'(M)$, ETe_j^k também está bem definido.

A implicação segue da demonstração $(E) \Rightarrow (A)$ dada no Teorema 2.7 na página 19.

$(v) \Rightarrow (i)$:

Tomemos $f \in H_j$. Assim, $P_jf = f \in C^\infty(M)$, uma vez que $H_\ell \subset C^\infty(M)$, para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$Tf = TP_jf = P_jTf \in H_j.$$

Logo $T(H_j) \subset H_j$.

$(i) \Rightarrow (v)$:

Assumimos agora T contínuo em $\mathcal{D}'(M)$. Seja $g \in H_j^\perp \subset L^2(M)$. Por (2.2), podemos escrever

$$g = \sum_{\ell \neq j} \sum_{k=1}^{d_\ell} \langle g, e_\ell^k \rangle e_\ell^k,$$

com a convergência em $L^2(M)$. Como T é contínuo, temos

$$Tg = \sum_{\ell \neq j} \sum_{k=1}^{d_\ell} \langle g, e_\ell^k \rangle Te_\ell^k,$$

com a convergência em $\mathcal{D}'(M)$. Por (i), $Te_\ell^k \in H_\ell \subset H_j^\perp$, para $\ell \neq j$. Logo $Tg \in H_j^\perp$ e, em particular, $P_jTg = 0$.

Mostremos agora que $TP_j = P_jT$ em $C^\infty(M)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Seja $f \in C^\infty(M)$ e escreva $f = h_j + g_j$, com $h_j = P_jf$ e $g_j \in H_j^\perp$. Note que $h_j = P_jf$ e como $h_j \in H_j \subset C^\infty(M)$, temos que $g_j \in C^\infty(M)$ e, por (i), $Th_j \in H_j$. Assim,

$$P_jTf = P_jT(h_j + g_j) = P_jTh_j + P_jTg_j = Th_j = TP_jf,$$

uma vez que $P_jTg_j = 0$ pela propriedade mostrada acima.

$(ii) \Rightarrow (vi)$:

Temos

$$f = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \langle f, e_j^k\rangle e_j^k,$$

com convergência em $L^2(M)$, e consequentemente em $\mathcal{D}'(M)$. Assumindo T contínuo em $\mathcal{D}'(M)$, como E também é contínuo em $\mathcal{D}'(M)$, temos ET e TE também contínuos em $\mathcal{D}'(M)$. Assim,

$$\begin{aligned} ETf &= ET\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)e_j^k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)ETe_j^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)TEe_j^k \\ &= TE\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)e_j^k\right) \\ &= TEf. \end{aligned}$$

$\square$

Se $T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ é um operador que satisfaz alguma das propriedades $(i) - (iv)$, dizemos que T é invariante, ou um multiplicador de Fourier, em relação a E, ou ainda que T é $E-$invariante ou um $E-$multiplicador de Fourier. Note que isso recupera a noção de operadores invariantes com respeito a decomposição H_j dada pelo Teorema 2.1. Neste caso, os espaços H_j são os autoespaços do operador elítico E.

Definição 3.5. *Se T for um operador invariante em relação a E e puder ser estendido a um operador contínuo $T : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$, dizemos que T é fortemente invariante em relação a E.*

O símbolo matricial de T, ou apenas símbolo de T, é uma sequência de matrizes, possivelmente de diferentes dimensões, dadas pelas propriedades (iii) e (iv). Vamos denotar por σ_T o símbolo do operador T e a classe de símbolos por

$$\Sigma \doteq \{\sigma : \mathbb{N}_0 \ni \ell \mapsto \sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}\}.$$

Observação 4. *Seja F uma função para a qual vale o teorema espectral e $T = F(E)$, então*

$$\sigma_{F(E)}(j) = F(\lambda_j)I_{d_j},$$

sendo $I_{d_j} \in \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ a matriz identidade.

De fato, para $j \in \mathbb{N}_0$ fixado, obtemos

$$\sigma_{F(E)}(j)_{mk} = \langle F(E)e_j^k, e_j^m \rangle = \langle F(\lambda_j)e_j^k, e_j^m \rangle = F(\lambda_j)\delta_{km}.$$

Logo $\sigma(j) = F(\lambda_j)I_{d_j}$.

Como a expressão para o símbolo depende apenas da decomposição do espaço, esta noção de símbolo de T coincide com a que vimos no capítulo anterior.

Definição 3.6. *Dizemos que $\sigma \in \Sigma$ possui crescimento moderado se existem $N \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que*

$$\|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq C(1 + \lambda_\ell)^N,$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$. A classe dos símbolos de crescimento moderado é denotada por $\mathcal{S}'(\Sigma)$

Proposição 3.7. *O operador invariante T_σ associado ao símbolo σ pode ser escrito da seguinte maneira:*

$$T_\sigma f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} (\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell))_m e_\ell^m(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)\right]^\top e_\ell(x), \tag{3.3}$$

para todo $f \in C^\infty(M)$, em que $e_\ell(x) = (e_\ell^1(x), \cdots, e_\ell^m(x))^\top$. Em particular,

$$T_\sigma e_j^k(x) = \sum_{m=1}^{d_j} \sigma(j)_{mk} e_j^m(x). \tag{3.4}$$

Além disso, se $\sigma \in \mathcal{S}'(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(M)$, a convergência em (3.3) é uniforme.

Demonstração. A fórmula (3.3) segue do item (iv) do Teorema 3.4, pois

$$\begin{aligned} T_\sigma f(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \widehat{T_\sigma f}(\ell, m) e_\ell^m(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} [\widehat{T_\sigma f}(\ell)]^\top e_\ell(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)\right]^\top e_\ell(x). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
T_\sigma e_j^k(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}[\sigma(\ell)\widehat{e_j^k}(\ell)]^\top e_\ell(x)\\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{d_\ell}(\sigma(\ell)\widehat{e_j^k}(\ell))_m e_\ell^m(x)\\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{d_\ell}\left(\sum_{i=1}^{d_\ell}\sigma(\ell)_{mi}\widehat{e_j^k}(\ell,i)\right)e_\ell^m(x)\\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{d_\ell}\sum_{i=1}^{d_\ell}\sigma(\ell)_{mi}\delta_{j\ell}\delta_{ki}e_\ell^m(x)\\
&= \sum_{m=1}^{d_j}\sigma(j)_{mk}e_j^m(x).
\end{aligned}$$

Vejamos agora que quando $\sigma \in \mathcal{S}'(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(M)$ a convergência da série em (3.3) é uniforme.

Como $\sigma \in \mathcal{S}'(\Sigma)$, existem $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq C(1+\lambda_\ell)^N,$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Note que

$$\|(\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell))_m e_\ell^m\|_{L^2(M)} = |(\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell))_m|\|e_\ell^m\|_{L^2(M)} = |(\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell))_m|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{d_\ell}\|(\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell))_m e_\ell^m\|_{L^2(M)} &= \sum_{m=1}^{d_\ell}|(\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell))_m|\\
&= \|\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)\|_1\\
&\leq \sqrt{d_\ell}\|\sigma(\ell)\widehat{f}(\ell)\|\\
&\leq \sqrt{d_\ell}\|\sigma(\ell)\|\,\|\widehat{f}(\ell)\|\\
&\leq C\sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^N\|\widehat{f}(\ell)\|.
\end{aligned}$$

Considere $M \in \mathbb{N}$ tal que $M - N > 2n$. Como $f \in C^\infty(M)$, existe C_M tal que, para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$,

$$\|\widehat{f}(\ell)\| \leq C_M\sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^{-M}.$$

Deste modo,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}C\sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^N\|\widehat{f}(\ell)\| \leq \sum_{\ell=0}^{\infty}CC_M d_\ell(1+\lambda_\ell)^{-(M-N)}$$

$$\leq \quad K \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell (1+\lambda_\ell)^{-2n} < \infty.$$

Portanto, pelo M-teste de Weierstrass, segue o resultado. $\square$

O próximo resultado é uma versão do Teorema 2.8 adapatado para operadores invariantes em $L^2(M)$.

Teorema 3.8. *Um operador invariante $T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ pode ser estendido a um operador linear limitado de $L^2(M)$ em $L^2(M)$ se, e somente se, seu símbolo σ satisfaz*

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} < \infty,$$

em que $\|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}$ denota a norma do operador em H_ℓ induzido pela matriz $\sigma(\ell)$. Além disso, temos

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^2(M))} = \sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}.$$

Podemos ainda mostrar que sob certas condições sobre o crescimento de $\|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)}$, é possível extender o operador T para espaços de Sobolev. Para isso, será útil a seguinte proposição, que é consequência direta da Proposição 2.9:

Proposição 3.9. *Sejam $S, T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ operadores invariantes com respeito a E. Se o domínio de $S \circ T$ contém $C^\infty(M)$, então $S \circ T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ também é invariante com respeito a E. Além disso, se σ_S e σ_T denotam, respectivamente, os símbolos de S e T com respeito a mesma base ortonormal, então*

$$\sigma_{S\circ T} = \sigma_S \sigma_T,$$

ou seja, $\sigma_{S\circ T}(j) = \sigma_S(j)\sigma_T(j)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Corolário 3.10. *Seja $T : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ um operador linear E-invariante, com símbolo σ_T, para o qual existam $C > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\sigma_T(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq C(1+\lambda_\ell)^{\frac{m}{e}},$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$, sendo e a ordem de E. Então T pode ser estendido a um operador linear limitado de $H^s(M)$ em $H^{s-m}(M)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Mostremos primeiramente que $Tf \in H^{s-m}(M)$, para todo $f \in H^s(M)$. Pelo item (c) da Proposição 3.3, temos que

$$Tf \in H^{s-m}(M) \Leftrightarrow (I+E)^{(s-m)/e} Tf \in L^2(M) \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_j)^{2(s-m)/e} \|\widehat{Tf}(j)\|^2 < \infty.$$

Como $f \in H^s(M)$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_j)^{2(s-m)/e} \|\widehat{Tf}(j)\|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_j)^{2(s-m)/e} \|\sigma(j)\widehat{f}(j)\|^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_j)^{2(s-m)/e} \|\sigma(j)\|^2_{\mathscr{L}(H_j)} \|\widehat{f}(j)\|^2 \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_j)^{2s/e} \|\widehat{f}(j)\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $Tf \in H^{s-m}(M)$.

Pela Proposição 3.3, a condição de $T : H^s(M) \to H^{s-m}(M)$ ser limitado é equivalente ao operador $S \doteq (I+E)^{(s-m)/e} \circ T \circ (I+E)^{-s/e}$ ser limitado em $L^2(M)$. Pelas Proposições 3.9 e 3.3, temos

$$\sigma_S(\ell) = (1+\lambda_\ell)^{(s-m)/e} I_{d_\ell} \cdot \sigma_T(\ell) \cdot (1+\lambda)^{-s/e} I_{d_\ell} = (1+\lambda_j)^{-m/e} \sigma_T(\ell).$$

Como $\|\sigma_T(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq C(1+\lambda_\ell)^{\frac{m}{e}}$, para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$, concluímos que

$$\|\sigma_S(\ell)\|_{\mathscr{L}(H_\ell)} \leq C.$$

Assim, pelo Teorema 3.8, o operador S é limitado e, portanto, $T : H^s(M) \to H^{s-m}(M)$ é limitado. $\square$

Podemos ainda traduzir para o contexto de operadores invariantes em $L^2(M)$ a caracterização das classes de Schatten, feita no Teorema 2.10.

Teorema 3.11. *Seja $0 < r < \infty$. Um operador invariante $T : L^2(M) \to L^2(M)$ pertence à $S_r(L^2(M))$ se, e somente se, $\sum_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma_T(\ell)\|^r_{S_r} < \infty$. Neste caso,*

$$\|T\|^r_{S_r(L^2(M))} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\sigma_T(\ell)\|^r_{S_r}.$$

Em particular, para a classe de traço $S_1(L^2(M))$, temos

$$\text{Tr}(T) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \text{Tr}(\sigma_T(\ell)).$$

Exemplo 3.12. *Seja $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^n)$ sendo $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ o toro flat n-dimensional. Considere a decomposição de $L^2(M)$ nos subespaçoes de dimensão 1*

$$H_j = \text{span}\{e^{2\pi i j\cdot x}\}, \quad j \in \mathbb{Z}^n.$$

Os operadores invariantes com respeito a decomposição $\{H_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ são as translações invariantes no toro $\mathbb{T}^n$. Considere agora os autoespaços $\widetilde{H_\ell}$ do operador Laplaciano em $\mathbb{T}^n$, isto é,

$$\widetilde{H_\ell} = \bigoplus_{|j|^2=\ell} H_j = \text{span}\{e^{2\pi i j\cdot x};\ j \in \mathbb{Z}^n \textit{ e } |j|^2 = \ell\}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Assim, os operadores invariantes em $\mathbb{T}^n$ com respeito à partição $\{H_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ também são invariantes em relação a decomposição $\{\widetilde{H_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}_0}$. Além disso, podemos ainda construir operadores invariantes em relação a decomposição $\{\widetilde{H_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ como combinações lineares de translações invariantes compostas com phase shifts e conjugações complexas.

Capítulo 4

Hipoeliticidade Global para Operadores Fortemente Invariantes

Neste capítulo iremos estudar a hipoeliticidade global de operadores diferenciais invariantes através de propriedades de seu símbolo. Para isso, iremos recuperar os resultados obtidos por Greenfield-Wallach em [10] utilizando a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores.

4.1 Operadores Diferenciais Invariantes

Denotamos por E um operador diferencial elítico autoadjunto positivo de ordem e definido sobre a variedade fechada M. Seja $L : C^\infty(M) \longrightarrow L^2(M)$ um operador diferencial linear que comuta com o operador elítico E. Como L satisfaz a condição (vi) do Teorema 3.4, segue da definição 3.5 da página 32, que L é um operador fortemente invariante em relação a E. Assim, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ tal que

$$\widehat{Lf}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{f}(\ell),$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

Vejamos que a relação acima ainda é satisfeita para elementos de $\mathcal{D}'(M)$.

Proposição 4.1. *Seja L um operador diferencial linear em $\mathcal{D}'(M)$ fortemente invariante em relação a E. Então, para todo $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $\ell \in \mathbb{N}_0$,*

$$\widehat{Lu}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{u}(\ell). \tag{4.1}$$

Demonstração.

Seja $u \in \mathcal{D}'(M)$ e $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C^\infty(M)$ tal que $u_i \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(M)$. Como L é um operador diferencial, temos que $Lu_i \in C^\infty(M)$ e, pela continuidade de L em $\mathcal{D}'(M)$, obtemos $Lu_i \longrightarrow Lu$ em $\mathcal{D}'(M)$. Fixados $j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq d_j$, temos

$$\widehat{Lu_i}(j,k) \longrightarrow \widehat{Lu}(j,k).$$

Como L é fortemente invariante com relação a E, por (4.1), temos que

$$\widehat{Lu_i}(j,k) = \left(\sigma(j)\widehat{u}_i(j)\right)_k,$$

e, pela Proposição 3.2,

$$\widehat{u}_i(j,k) \longrightarrow \widehat{u}(j,k).$$

Assim,

$$\widehat{Lu_i}(j,k) \longrightarrow \left(\sigma(j)\widehat{u}(j)\right)_k.$$

Logo $\widehat{Lu}(j,k) = \left(\sigma(j)\widehat{u}(j)\right)_k$ e, portanto,

$$\widehat{Lu}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{u}(\ell).$$

□

4.2 Condição LMR

Definição 4.2. *Seja P um operador diferencial em M. Dizemos que P é globalmente hipoelítico em M se para todo $u \in \mathcal{D}'(M)$, a condição $Pu \in C^\infty(M)$ implica que $u \in C^\infty(M)$.*

Por exemplo, o operador identidade $I : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ é globalmente hipoelítico. Além disso, operadores diferencias elíticos também são globalmente hipoelíticos. Ver o comentário após a Proposição 1.13.

Vejamos agora como a hipoeliticidade global de um operador invariante está relacionada com seu símbolo. Para isso, consideremos os seguintes números associados ao símbolo do operador P.

Definição 4.3. *Sejam $P : C^\infty(M) \to L^2(M)$ um operador invariante com relação à E e σ seu símbolo. Definimos, para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$, os seguintes números:*

$$m(\sigma(\ell)) \doteq \inf\{\|\sigma(\ell)v\|; v \in \mathbb{C}^{d_\ell} \text{ } e \text{ } \|v\| = 1\},$$

$$M(\sigma(\ell)) \doteq \sup\{\|\sigma(\ell)v\|; v \in \mathbb{C}^{d_l} \text{ } e \text{ } \|v\| = 1\}.$$

Note que $M(\sigma(\ell)) = \|\sigma(\ell)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_\ell})}$ e que $\sigma(\ell)$ é invertível se, e somente se, $m(\sigma(\ell)) \neq 0$. Além disso, se $\sigma(\ell)$ é invertível, então $M(\sigma(\ell)^{-1}) = m(\sigma(\ell))^{-1}$.

Vejamos agora como caracterizar a hipoeliticidade global de um operador diferencial invariante através de seu símbolo.

Teorema 4.4. *Seja $P : C^\infty(M) \to L^2(M)$ um operador diferencial fortemente invariante em relação a E. Então P é globalmente hipoelítico se, e somente se, existem constantes L, M e R, com $L > 0$, tais que*

$$m(\sigma(j)) \geq L(1+\lambda_j)^{\frac{M}{e}}, \quad \forall j \geq R. \tag{4.2}$$

Demonstração.

($\Leftarrow$) Como $m(\sigma(j)) \geq L(1+\lambda_j)^{\frac{M}{e}}$, para todo $j \geq R$, temos que $m(\sigma(j)) \neq 0$ e, portanto $\sigma(j)$ é invertível para todo $j \geq R$.

Seja $u \in \mathcal{D}'(M)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(M)$. Pela Proposição 4.1, temos que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f}(\ell) = \sigma(\ell)\widehat{u}(\ell).$$

Por hipótese, para $j \geq R$, o símbolo $\sigma(j)$ é invertível e podemos escrever

$$\widehat{u}(j) = \sigma(j)^{-1}\widehat{f}(j).$$

Deste modo, para $j \geq R$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(j)\| &= \|\sigma(j)^{-1}\widehat{f}(j)\| \\ &\leq \|\sigma(j)^{-1}\|\,\|\widehat{f}(j)\| \\ &= m(\sigma(\ell))^{-1}\|\widehat{f}(j)\| \\ &\leq \frac{1}{L}(1+\lambda_j)^{-\frac{M}{e}}\|\widehat{f}(j)\|. \end{aligned}$$

Dado $N \in \mathbb{N}$, considere $K \in \mathbb{N}$ tal que $K > N - \frac{M}{e}$. Como $f \in C^\infty(M)$, pelo item 1 da Proposição 3.3, existe $C_K > 0$ tal que $\|\widehat{f}(j)\| \leq C_K\sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^{-K}$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Assim, para $j \geq R$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(j)\| &\leq \frac{1}{L}(1+\lambda_j)^{-\frac{M}{e}}\|\widehat{f}(j)\| \\ &\leq \frac{C_K}{L}\sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^{-\frac{M}{e}-K} \\ &\leq \frac{C_K}{L}\sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^{-N}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.3, concluímos que $u \in C^\infty(M)$ e, portanto, o operador P é globalmente hipoelítico.

($\Rightarrow$) Procedendo por contradição, construiremos um elemento $f \in \mathcal{D}'(M)\backslash C^\infty(M)$ tal que $Pf \in C^\infty(M)$, o que provará que P não é globalmente hipoelítico, gerando uma contradição com a hipótese.

Suponha que para quaisquer $L,\ M$ e R dados, seja possível encontrar $j_{_{LMR}} > R$ tal que

$$m(\sigma(j_{_{LMR}})) < L(1+\lambda_{j_{_{LMR}}})^{\frac{M}{e}}.$$

Assim, para $L = R = 1$ e $M = -e$, existe $j_1 > 1$ tal que $m(\sigma(j_1)) < (1+\lambda_{j_1})^{-1}$, logo existe $a_{j_1} \in \mathbb{C}^{d_{j_1}}$ com $\|a_{j_1}\| = 1$ e $\|\sigma(j_1)a_{j_1}\| < (1+\lambda_{j_1})^{-1}$.

A seguir, para $L = 1$, $M = -2e$ e $R = j_1$, existe $j_2 > j_1$ tal que $m(\sigma(j_2)) < (1+\lambda_{j_2})^{-2}$, logo existe $a_{j_2} \in \mathbb{C}^{d_{j_2}}$ com $\|a_{j_2}\| = 1$ e $\|\sigma(j_2)a_{j_2}\| < (1+\lambda_{j_2})^{-2}$.

Prosseguindo desse modo, por indução, obtemos uma sequência $\{a_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $a_{j_k} \in \mathbb{C}^{d_{j_k}}$ e $\|a_{j_k}\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que se $l > k$, então $j_l > j_k$ e

$$\|\sigma(j_k)a_{j_k}\| < (1+\lambda_{j_k})^{-k}. \tag{4.3}$$

Agora considere

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{d_\ell} \widehat{f}(\ell,m)e_\ell^m,$$

sendo

$$\widehat{f}(\ell) = \begin{cases} a_{j_k}, & \text{se } \ell = j_k, \text{para algum } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{se } \ell \neq j_k, \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Note que

- $\|\widehat{f}(\ell)\| = 0$, se $\ell \neq j_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $\|\widehat{f}(\ell)\| = 1$, se $\ell = j_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Assim, $\|\widehat{f}(\ell)\| \leq (1+\lambda_\ell)$, para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$ e segue do item 2 da Proposição 3.3 que $f \in \mathcal{D}'(M)$.

Além disso, como visto na página 25, a série (3.1) converge, logo

$$\lim_{\ell\to\infty} \sqrt{d_\ell}(1+\lambda_\ell)^{-2n} = 0$$

. Pelo item 1 da Proposição 3.3 concluímos que $f \notin C^\infty(M)$, pois caso contrário, $\|\widehat{f}(\ell)\| \to 0$, o que leva a uma contradição, pois $\|\widehat{f}(j_k)\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Mostremos agora que $Pf \in C^\infty(M)$. Como P é fortemente invariante em respeito a E, temos que

$$Pf = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d_{j_k}} \widehat{Pf}(j_k,i)e_{j_k}^i$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d_{j_k}}(\sigma(j_k)\widehat{f}_k(j_k))_i e^i_{j_k}.$$

Assim, por (4.3), temos que

$$\|\widehat{Pf}(j_k)\| = \|\sigma(j_k)\widehat{f}(j_k)\| \leq (1+\lambda_{j_k})^{-k}.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$. Para $k \geq N$, temos que

$$\|\widehat{Pf}(j_k)\| \leq (1+\lambda_{j_k})^{-k} \leq (1+\lambda_{j_k})^{-N},$$

pois $1+\lambda_{j_k} \geq 1$. Para $k \leq N$,

$$\|\widehat{Pf}(j_k)\| \leq (1+\lambda_{j_k})^{-k} = (1+\lambda_{j_k})^{N-k}(1+\lambda_{j_k})^{-N}.$$

Seja $C_N = \max\limits_{1\leq k\leq N}\{(1+\lambda_{j_k}^{N-k}\}$ e note que $C_N \geq 1$. Assim, obtemos

$$\|\widehat{Pf}(j_k)\| \leq C_N(1+\lambda_{j_k})^{-N} \leq C_N d_{j_k}(1+\lambda_{j_k})^{-N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 3.3, $Pf \in C^\infty(M)$, o que conclui a prova. $\square$

Definição 4.5. *O expoente de hipoeliticidade $h(P)$ de um operador diferencial P globalmente hipoelítico é o supremo dentre todos os $M \in \mathbb{R}$ tais que a condição* (4.2) *é satisfeita. Se P não é globalmente hipoelítico, definimos $h(P) = -\infty$.*

Note que se P é um operador diferencial fortemente invariante em relação a E e globalmente hipoelítico, então a propriedade (4.2) vale para todo $M \leq h(P)$.

4.3 Estimativas Subelíticas

Nesta seção apresentamos algumas propriedades que operadores fortemente invariantes e globalmente hipoelíticos possuem. Primeiro, recordemos os seguintes resultados bastante conhecidos, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1] e [10].

Lema 4.6 (Rellich-Kondrachov)**.** *Se $t < s$, então a inclusão $i : H^s(M) \hookrightarrow H^t(M)$ é compacta.*

Lema 4.7. *Se P é um operador diferencial em M e $\ker P \subset C^\infty(M)$, então $\ker P$ possui dimensão finita.*

Proposição 4.8. *Seja P um operador diferencial fortemente invariante em relação a E. Então, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $C_j > 0$ tal que*

$$\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\| \geq C_j \|\widehat{f}(j)\|,$$

para todo $f \perp \ker P$ em $H^s(M)$.

Demonstração. Provemos primeiramente que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\| \neq 0,$$

para todo $f \perp \ker P$ em $H^s(M)$, com $\widehat{f}(j) \neq 0$.

De fato, suponha que existe $j \in \mathbb{N}$ e $f \perp \ker P$ em $H^s(M)$ com $\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\| = 0$ e $\widehat{f}(j) \neq 0$. Considere $\tilde{f} = \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j,k)e_j^k$. Note que, por construção, $P\tilde{f} = (\sigma(j)\widehat{f}(j))^\top e_j = 0$. Desta maneira, $\tilde{f} \in \ker P$ e, uma vez que $f \perp \ker P$, concluímos que $\langle f, \tilde{f}\rangle_s = 0$. Portanto $\widehat{f}(j) = 0$, o que gera uma contradição.

Provemos agora a proposição procedendo por contradição. Fixado $j \in \mathbb{N}$, suponha que exista sequência $\{f_k\}$ com $f_k \perp \ker P$ em $H^s(M)$ e $\widehat{f_k}(j) \neq 0$, tal que

$$\|\sigma(j)\widehat{f_k}(j)\| \leq \frac{1}{k}\|\widehat{f_k}(j)\|.$$

Assim, para $h_k = \frac{1}{\|\widehat{f_k}(j)\|} \sum_{i=1}^{d_j} \widehat{f_k}(j,i)e_j^i$, temos que $h_k \neq 0$ e

$$\|\sigma(j)\widehat{h_k}(j)\| \leq \frac{1}{k}. \tag{4.4}$$

Ainda, temos que

$$\|h_k\|_t^2 = \sum_{i=1}^{d_j}(1+\lambda_j)^{2t/e}|\widehat{h_k}(j,i)|^2 = d_j(1+\lambda_j)^{2t/e},$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Deste modo, a sequência $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^t(M)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo Lema 4.6, temos que $\{h_k\}$ possui, para cada $t \in \mathbb{R}$, uma subsequência convergente. Em particular, denotando ainda por $\{h_k\}$ a subsequência convergente, existe $g \in H^s(M)$ tal que $h_k \to g$, em $H^s(M)$, o que implica que $\|g\|_s = \sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^{s/e}$.

Como $h_k \perp \ker P$, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que $g \perp \ker P$. Pela continuidade de P, temos que $Ph_k \to Pg$. Por (4.4), temos $Ph_k \to 0$. Deste modo, $Pg = 0$ e $g \in \ker P$. Portanto $g = 0$, contradizendo o fato de $\|g\|_s = \sqrt{d_j}(1+\lambda_j)^{s/e}$.

□

Proposição 4.9. *Seja P um operador diferencial fortemente invariante em relação a E e globalmente hipoelítico. Então existe $C > 0$, tal que para todo $m < h(P)$,*

$$\|Pf\|_s \geq C\|f\|_{s+m}, \quad \textit{quando } f \perp \ker P \textit{ em } H^s(M) \textit{ e } \ker P \subset C^\infty(M). \tag{4.5}$$

Demonstração.

Como P é fortemente invariante em relação a E, podemos expressar a norma de Pf em $H^s(M)$ como

$$\begin{aligned} \|Pf\|_s^2 &= \sum_{j=0}^{\infty}(1+\lambda_j)^{2s/e}\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\|^2 \\ &\geq \sum_{j=0}^{R-1}(1+\lambda_j)^{2s/e}\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\|^2 + \sum_{j=R}^{\infty}(1+\lambda_j)^{2s/e}m(\sigma(j))^2\|\widehat{f}(j)\|^2. \end{aligned}$$

O operador P sendo globalmente hipoelítico, a condição (4.2) do Teorema 4.4 é satisfeita. Assim, tomando $m < h(P)$, temos

$$m(\sigma(j)) \geq L(1+\lambda_j)^{m/e},$$

para todo $j \geq R$.

Como $f \perp \ker P$ em $H^s(M)$, temos que $\widehat{f}(0) = 0$ e considere $\widetilde{C} = \min\limits_{1\leq j<R}\{C_j(1+\lambda_j)^{-m/e}\}$, no qual C_j são as constantes dadas pela Proposição anterior. Finalmente, para $C = \min\{\widetilde{C}, L\}$, temos que $C > 0$ e

$$\begin{aligned} \|Pf\|_s^2 &= \sum_{j=0}^{\infty}(1+\lambda_j)^{2s/e}\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\|^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^{R-1}(1+\lambda_j)^{2s/e}\|\sigma(j)\widehat{f}(j)\|^2 + \sum_{j=R}^{\infty}(1+\lambda_j)^{2s/e}m(\sigma(j))^2\|\widehat{f}(j)\|^2 \\ &\geq \widetilde{C}^2\sum_{j=1}^{R-1}(1+\lambda_j)^{2(s+m)/e}\|\widehat{f}(j)\|^2 + L^2\sum_{j=R}^{\infty}(1+\lambda_j)^{2(s+m)/e}\|\widehat{f}(j)\|^2 \\ &\geq C^2\sum_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j)^{2(s+m)/e}\|\widehat{f}(j)\|^2 = C^2\|f\|_{s+m}^2. \end{aligned}$$

□

Nosso objetivo agora é mostrar que todo operador diferencial P que satisfaz a desigualdade (4.5) é globalmente hipoelítico.

Proposição 4.10. *Para qualquer operador diferencial P definido na variedade fechada M e $m > 0$, a propriedade (4.5) é equivalente a existir $K > 0$ tal que*

$$\|f\|_{s+m} \leq K(\|f\|_s + \|Pf\|_s), \quad \forall\, f \in C^\infty(M). \tag{4.6}$$

Demonstração.

(4.5) $\Rightarrow$ (4.6):

Se $f \in C^\infty(M)$, podemos escrever $f = f_1 + f_2$, com $f_1 \in \ker P$ e $f_2 \perp \ker P$ em $H^s(M)$. Note que $Pf = Pf_2$ e $\|f\|_s^2 = \|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_s^2$. Em particular, $\|f\|_s \geq \|f_1\|_s$.

Como $\ker P \subset C^\infty(M)$, pelo Lema 4.7, $\ker P$ tem dimensão finita e, portanto, todas as normas em $\ker P$ são equivalentes. Assim, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\|g\|_{s+m} \leq K_1 \|g\|_s, \quad \forall\, g \in \ker P.$$

Por (4.5), $\|Pf_2\|_s \geq C\|f_2\|_{s+m}$. Logo, tomando $K = \max\{C^{-1}, K_1\}$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{s+m} &\leq \|f_1\|_{s+m} + \|f_2\|_{s+m} \\
&\leq K_1\|f_1\|_s + C^{-1}\|Df_2\|_s \\
&\leq K_1\|f\|_s + C^{-1}\|Df\|_s \\
&\leq K(\|f\|_s + \|Df\|_s).
\end{aligned}$$

(4.6) $\Rightarrow$ (4.5):

Mostremos primeiramente que $\ker P \subset C^\infty(M)$. Seja $f \in \ker P$. Assim, $f \in \mathcal{D}'(M)$ e $Pf = 0$. Como $\mathcal{D}'(M) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(M)$, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $f \in H^s(M)$. Assim, (4.6) implica que $f \in H^{s+m}(M)$ e, utilizando novamente (4.6), temos que $f \in H^{s+2m}$. Assim, obtemos que $f \in \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(M) = C^\infty(M)$. Portanto, $\ker P \subset C^\infty(M)$.

Provemos agora a desigualdade em (4.5). Suponha que a desigualdade é falsa, assim, podemos construir uma sequência $\{f_j\}_j$ com $f_j \perp \ker P$ em $H^s(M)$ e $\|f_j\|_{s+m} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tal que $\|Pf_j\|_s \to 0$. Como $\{f_j\}$ é limitada em $H^{s+m}(M)$, pelo Lema 4.6, existe subsequência (que ainda denotamos por $\{f_j\}$) convergente em $H^s(M)$: $f_j \to g \in H^s(M)$. Como P é contínuo, $Pf_j \to Pg$ em $H^{s-d}(M)$. Como $\|Pf_j\|_s \to 0$, temos que $\|Pf_j\|_{s-d} \to 0$. Logo, $Pg = 0$ e, portanto, $g \in \ker P$.

Como $f_j \perp \ker P$ em $H^s(M)$ e $f_j \to g \in H^s(M)$, temos que $g \perp \ker P$ em $H^s(M)$. Assim, $g \in \ker P \cap (\ker P)^\perp$, logo $g = 0$. Por outro lado, por (4.6),

$$1 = \|f_j\|_{s+m} \leq K(\|f_j\|_s + \|Pf_j\|_s).$$

Fazendo $j \to \infty$, temos que $1 \leq K\|g\|_s = 0$, o que gera uma contradição. Portanto vale a desigualdade em (4.5).

$\square$

Proposição 4.11. *Seja P um operador diferencial definido na variedade fechada M e $m > 0$. Então* (4.6) *implica que*

$$\ker P \subset C^\infty(M) \text{ e } P(C^\infty(M)) \text{ é fechado em } C^\infty(M) \text{ com a topologia relativa de } \mathcal{D}'(M), \tag{4.7}$$

ou seja, se $Pf_j \to g$ em algum $H^s(M)$, com $f_j, g \in C^\infty(M)$, então $g = Ph$, para algum $h \in C^\infty(M)$.

Demonstração.

A demonstração de que $\ker P \subset C^\infty(M)$ é a mesma dada na Proposição 4.10. Mostremos que $P(C^\infty(M))$ é fechado em $C^\infty(M)$ com a topologia relativa de $\mathcal{D}'(M)$.

Seja $\{f_j\}_j \subset C^\infty(M)$ tal que $Pf_j \to g$ em $H^s(M)$, com $g \in C^\infty(M)$. Podemos ainda supor $f_j \perp \ker P$ em $H^s(M)$. De fato, para toda $f_j \in C^\infty(M)$, podemos escrever $f_j = f_{1j} + f_{2j}$, com $f_{1j} \in \ker P$ e $f_{2j} \perp \ker P$ em $H^s(M)$. Como $\ker P \subset C^\infty(M)$ e $f_j \in C^\infty(M)$, temos que $f_{2j} \in C^\infty(M)$ e, além disso, $Pf_{2j} = Pf_j \to g$.

Primeiramente, suponha que a sequência $\{\|f_j\|_s\}$ é limitada. Como $\{Pf_j\}$ é convergente em $H^s(M)$, a sequência $\{\|Pf_j\|_s\}$ é limitada. Logo, por (4.6), concluímos que $\{\|f_j\|_{s+m}\}$ é limitado. Assim, pelo Lema 4.6, a sequência $\{f_j\}$ possui subsequência convergente em $H^s(M)$, a qual ainda continuamos denotando por $\{f_j\}$: $f_j \to h \in H^s(M)$. Pela continuidade de P, obtemos $Pf_j \to Ph$ em $H^{s-d}(M)$. Como $Pf_j \to g$ em $H^s(M)$ e $s-d < s$, temos que $Ph = g$. Por fim, mostremos que $h \in C^\infty(M)$. Por (4.6),

$$\|h\|_{s+m} \leq K(\|h\|_s + \|Ph\|_s) = K(\|h\|_s + \|g\|_s).$$

Como $g \in C^\infty(M)$, temos que $h \in H^{s+m}(M)$. Continuando esse processo, concluímos que $h \in \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(M) = C^\infty(M)$.

Suponha agora que $\{\|f_j\|_s\}$ não é limitada. Assim, podemos extrair uma subsequência (a qual ainda denotamos por f_j) tal que $\|f_j\|_s \to \infty$. Defina $\widetilde{f_j} = \dfrac{f_j}{\|f_j\|_s}$. Como $Pf_j \to g$ em $H^s(M)$, a sequência $\{\|Pf_j\|_s\}$ é limitada. Dessa forma,

$$\|P\widetilde{f_j}\|_s = \frac{\|P\widetilde{f_j}\|_s}{\|f_j\|_s} \to 0,$$

logo $P\widetilde{f_j} \to 0$ em $H^s(M)$. Por 4.6,

$$\|\widetilde{f_j}\|_{s+m} \leq K(\|\widetilde{f_j}\|_s + \|P\widetilde{f_j}\|_s),$$

o que implica que $\{\|\widetilde{f_j}\|_{s+m}\}$ é limitada e, pelo Lema 4.6, possui subsequência convergente em $H^s(M)$, a qual continuamos denotando por $\{\widetilde{f_j}\}$. Assim, $\widetilde{f_j} \to t \in H^s(M)$ e $Pt = 0$, logo

$t \in \ker P$. Porém, $\widetilde{f_j} \perp \ker P$ em $H^s(M)$, logo $t \perp \ker P$ e, portanto, $t = 0$. Por outro lado,

$$\|t\|_s = \lim_{j\to\infty} \|\widetilde{f_j}\|_s = 1,$$

o que contradiz $t = 0$. Logo $\{\|f_j\|_s\}$ deve ser limitado, após tomarmos como perpendicular a $\ker P$. □

Teorema 4.12. *Qualquer operador diferencial definido na variedade fechada M que satisfaça a condição* (4.7) *é globalmente hipoelítico.*

Demonstração. Seja P um operador diferencial definido em M e suponha que $Pf = g$, com $f \in \mathcal{D}'(M)$ e $g \in C^\infty(M)$. Como $\mathcal{D}'(M) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(M)$, temos $f \in H^s(M)$, para algum $s \in \mathbb{R}$. Pela densidade de $C^\infty(M)$ em $H^s(M)$, obtemos uma sequência $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $C^\infty(M)$ tal que $f_j \to f$ em $H^s(M)$, e portanto $Pf_j \to Pf = g$ em $H^{s-d}(M)$. Logo, por (4.7), existe $h \in C^\infty(M)$ tal que $Ph = g$ e

$$P(f-h) = Pf - Ph = g - g = 0,$$

ou seja, $f - h \in \ker P$. Como $\ker P \subset C^\infty(M)$, temos que $f - h \in C^\infty(M)$. Logo, $f = (f-h) + h \in C^\infty(M)$ e P é globalmente hipoelítico. □

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. FOURNIER, J. J. F. ***Sobolev Spaces***. Academic Press, 2003.

[2] BERGAMASCO, A. P. ***Perturbations of globally hypoelliptic operators***. J. Differential Equations 114 , no. 2, 513–526, 1994.

[3] BERGAMASCO, A. P. CORDARO, P. D. PETRONILHO, G. ***Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus***. Comm. Partial Differential Equations 29, no. 5–6, 785–819, 2004.

[4] CHEN, W. CHI, M.Y. ***Hypoelliptic vector fields and almost periodic motions on the torus*** T^n. Comm. Partial Differential Equations 25, no. 1–2, 337–354, 2000.

[5] DELGADO, J. RUZHANSKY, M. ***Fourier multipliers, symbols and nuclearity on compact manifolds***. `arXiv:1404.6479v2 [math.FA]`, 1–41, 2015.

[6] FORNI, G. ***On the Greenfield-Wallach and Katok conjectures in dimension three***. Geometric and probabilistic structures in dynamics. Contemp. Math., 469, 197–213, 2008.

[7] GOLDBERG, S. ***Unbounded linear operators: theory and applications***. McGraw-Hill series in higher mathematics. University of California, 1966.

[8] GRAMCHEV, T. POPIVANOV, P. YOSHINO, M. ***Global solvability and hypoellipticity on the torus for a class of differential operators with variable coefficients***. Proc. Japan Acad. 68, 53–57, 1992.

[9] GREENFIELD, S. J. WALLACH, N. R. ***Global hypoellipticity and Liouville numbers***. Proc. Amer. Math. Soc., 31:112–114, 1972.

[10] GREENFIELD, S. J. WALLACH, N. R. ***Remarks on global hypoellipticity***. Trans. Amer. Math. Soc., 183:153–164, 1973.

[11] GREENFIELD, S. WALLACH, N. R. ***Globally hypoelliptic vector field***. Topology 12, 247–253, 1973.

[12] HAASE, M. ***Spectral Mapping Theorems for Holomorphic Functional Calculi***. J. London Math. Soc., (2) 71, 723–739, 2005.

[13] HOFFMAN, K. KUNZE, R. ***Linear Algebra***. Englewood Cliffs, New Jersey. 1971.

[14] HÖRMANDER, L. ***The analysis of linear partial differential operators, vol I***. Springer-Verlag, 1985.

[15] HOUNIE, J. ***Globally hypoelliptic and globally solvable first-order evolution equations.*** Trans. Amer. Math. Soc. 252, 233–248, 1979.

[16] HOUNIE, J. ***Globally hypoelliptic vector field on compact surfaces***. Comm. Partial Differential Equations, 7(4), 343–370, 1982.

[17] KREYSZIG, E. ***Introductory functional analysis with applications.*** New York: wiley, 1989.

[18] NICOLA, F. RODINO, L. ***Global Pseudo-differential Calculus on Euclidean Spaces***. Pseudo-Differential Operators. Birkhäuser Basel. 2011.

[19] PETRONILHO, G. ***Global Hypoellipticity, Global Solvability and Normal Form for a Class of Real Vector Fields on a Torus and Application***. Trans. Amer. Math. Soc. 363, no. 12, 6337–6349, 2011.

[20] RUDIN, W. ***Functional Analysis***. McGraw-Hill, second edition, 1991.

[21] SEELEY, R. T. ***Integro-differential operators on vectors bundles***. Trans. Amer. Math. Soc., 117:167–204, 1965.

[22] SHUBIN, M. A. ***Pseudodifferential operators and spectral theory***. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001. Translated from the 1978 Russian original by Stig I. Andersson.

[23] STEIN, E. M. SHAKARCHI, R. ***Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.*** Princeton, Princeton University Press, 2005.