

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
ANA CRISTINA CORRÊA MUNARETTO

*H*-módulo e *H*-comódulo álgebras com unidades locais

CURITIBA  
2016

Ana Cristina Corrêa Munaretto

*H*-módulo e *H*-comódulo álgebras com unidades locais

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves  
Coorientador: Prof. Dr. Joost Vercruyse

CURITIBA  
2016

Munaretto, Ana Cristina Corrêa  
*H*-módulo e *H*-comódulo álgebras com unidades locais / Ana  
Cristina Munaretto. – Curitiba, 2016.  
70 f. : il.; tabs.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor  
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Orientador: Marcelo Muniz Silva Alves  
Coorientador: Joost Vercruyse  
Bibliografia: p.62-63

1. Hopf, Álgebra de. 2. Topologia algébrica. 3. Matemática  
aplicada. I. Alves, Marcelo Muniz Silva. II. Vercruyse, Joost.  
III. Título

CDD 512.55



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor CIÊNCIAS EXATAS  
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA  
Código CAPES: 40001016041P1

### TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Doutorado de **ANA CRISTINA CORREA MUNARETTO**, intitulada: "**H-módulo e H-comódulo álgebras com unidades locais**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua A PROVAÇÃO.

Curitiba, 19 de Fevereiro de 2016.

  
Prof MARCELO MUNIZ SILVA ALVES (UFPR)  
(Presidente da Banca Examinadora)

  
Prof ALVERI ALVES SANT ANA (UFRGS)

  
Prof ANTÔNIO PAQUES (UFRGS)

  
Prof FERNANDO ARAÚJO BORGES (UFPR)

  
Prof MIKHAILO DOKUCHAEV (USP)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor CIÊNCIAS EXATAS  
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA  
Código CAPES: 40001016041P1

## ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TESE PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia dezenove de Fevereiro de dois mil e dezesseis às 15:00 horas, na sala Anfiteatro B, Blocos das PCs, Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição da doutoranda **ANA CRISTINA CORREA MUNARETTO** para a Defesa Pública de sua Tese intitulada: "**H-módulo e H-comódulo álgebras com unidades locais**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Professores Doutores: MARCELO MUNIZ SILVA ALVES (UFPR), ALVERI ALVES SANT ANA (UFRGS), ANTÔNIO PAQUES (UFRGS), FERNANDO ARAÚJO BORGES (UFPR), MIKHAILO DOKUCHAEV (USP). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra a discente, para que a mesma expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. A aluna respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e a doutoranda deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO da aluna. A doutoranda foi convidada a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora, outorgando-lhe o Grau de **Doutor em MATEMÁTICA**. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, MARCELO MUNIZ SILVA ALVES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 19 de Fevereiro de 2016.

  
Prof MARCELO MUNIZ SILVA ALVES (UFPR)  
(Presidente da Banca Examinadora)

  
Prof FERNANDO ARAÚJO BORGES (UFPR)

  
Prof ALVERI ALVES SANT ANA (UFRGS)

  
Prof ANTÔNIO PAQUES (UFRGS)

  
Prof MIKHAILO DOKUCHAEV (USP)

# Agradecimentos

Nesses longos anos de doutoramento foram inúmeras pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Começo agradecendo ao Marcelo, meu esposo, meu porto seguro. Obrigada por acreditar em mim, não apenas com palavras, mas principalmente com atitudes. Inúmeras! Razão do meu sucesso.

Aos meus filhos Rafael e Felipe que abriram mão de muitos finais de semana para que eu pudesse estudar. Hoje eles demonstram seu orgulho por mim e eu sou eternamente grata por poder ser um exemplo para eles.

Ao meu bebê Tiago que chegou ao final dessa jornada e trouxe ainda mais alegria para a minha vida.

À minha mãe que dedicou muitas de suas tardes aos cuidados com o Tiago enquanto eu escrevia a minha interminável tese.

Ao meu orientador, Professor Marcelo, por toda a paciência e compreensão. Não poderia haver alguém com uma maneira de trabalhar tão similar à minha. Sem cobranças de ambos os lados. Cada um fez o que foi possível. Confiança mútua foi a chave dessa parceria. E que venham muitas outras.

Ao coorientador Joost Vercruyse por me aceitar como aluna visitante e contribuir enormemente com os resultados deste trabalho.

Aos meus sogros Romeu e Reny por tão grande incentivo.

Por fim, o maior agradecimento é à Deus. Fonte de inspiração. Luz para os meus caminhos.

## Resumo

Neste trabalho consideramos ações e co-ações de álgebras de Hopf em álgebras com unidades locais e estendemos a caracterização de extensões  $H$ -fendidas de álgebras unitárias como produtos cruzados para este caso. Este resultado é obtido por meio de colimites em categorias. Esta ferramenta também nos permite estender, com algumas restrições, o teorema de Doi e Takeuchi sobre a caracterização de extensões de Galois com a propriedade da base normal. No entanto, o fato da extensão  $A^{coH} \subset A$  ser  $H$ -Galois não implica que as extensões das subálgebras unitárias de  $A$  sejam  $H$ -Galois. Neste sentido, estendemos o conceito de conexões fortes para  $H$ -comódulo álgebras com unidades locais e mostramos que se  $A$  possui conexão forte, então a condição de Galois em  $A$  transmite esta mesma condição às suas partes unitárias.

**Palavras-chave:** Álgebras de Hopf. Extensões de Hopf-Galois. Álgebras com unidades locais. Conexões fortes.

## Abstract

In this work we consider actions and co-actions of Hopf algebras on algebras with local units and we extend the characterization of  $H$ -cleft extensions of unital algebras as crossed products in this case. This result is obtained using colimits in categories. This tool also allows us to extend, with some restrictions, the Doi and Takeuchi theorem about the characterization of Galois extensions with the normal basis property. However, if the extension  $A^{coH} \subset A$  is  $H$ -Galois it doesn't imply that the extensions of the unital subalgebras are  $H$ -Galois. In this sense we extend the concept of strong connections to  $H$ -comodule algebras with local units and we show that if  $A$  has strong connection, then the Galois condition in  $A$  transmits the same condition to its unital parts.

**Keywords:** Hopf algebras. Hopf-Galois extensions. Algebras with local units. Strong connections.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>15</b>
1.1 Categorias monoidais . . . . .	15
1.1.1 Definições e exemplos . . . . .	15
1.1.2 Álgebras em categorias monoidais . . . . .	17
1.2 Limites em categorias . . . . .	18
<b>2 Álgebras com unidades locais</b>	<b>21</b>
2.1 Definições e exemplos . . . . .	21
2.2 Produtos Cruzados . . . . .	27
2.2.1 Definições e exemplos . . . . .	28
2.2.2 Extensões fendidas e produtos cruzados . . . . .	31
2.2.3 Equivalências de produtos cruzados . . . . .	36
2.3 Extensões de Galois . . . . .	38
<b>3 Conexões fortes</b>	<b>41</b>
3.1 Multiplicadores da álgebra . . . . .	41
3.2 Conexões fortes e extensões principais em álgebras com unidades locais . .	45
3.3 Conexões fortes e subálgebras unitárias . . . . .	56
<b>Referências</b>	<b>62</b>
<b>A Álgebras de Hopf</b>	<b>64</b>
<b>B Categorias e Funtores</b>	<b>69</b>

# Introdução

Consideremos  $\mathbf{k}$  um anel comutativo. Por uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}$  ou  $\mathbf{k}$ -categoria entendemos que os objetos  $\mathcal{C}_0$  formam um conjunto, o conjunto dos morfismos  ${}_y\mathcal{C}_x$  de um objeto  $x$  em um objeto  $y$  é um  $\mathbf{k}$ -módulo e a composição de morfismos é  $\mathbf{k}$ -bilinear.

Seja  $G$  um grupo e  $\mathcal{C}$  uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear. Uma  **$G$ -gradação de  $\mathcal{C}$**  é uma decomposição de  $\mathcal{C}$  em soma direta; isto é, cada espaço de morfismos  ${}_y\mathcal{C}_x$  é soma direta de subespaços vetoriais  ${}_y\mathcal{C}_x^s$  indexados pelos elementos  $s \in G$ :

$${}_y\mathcal{C}_x = \bigoplus_{g \in G} {}_y\mathcal{C}_x^g$$

satisfazendo  ${}_y\mathcal{C}_z^s \cdot {}_z\mathcal{C}_x^t \subset {}_y\mathcal{C}_x^{st}$  para todo  $x, y, z \in \mathcal{C}_0$  e para todo  $s, t \in G$ .

Em [CM], C. Cibils e E. Marcos mostraram que a cada  $G$ -gradação de uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}$  pode-se associar a seguinte categoria produto smash  $\mathcal{C} \# G$ :

A **categoria produto smash  $\mathcal{C} \# G$**  de uma categoria  $G$ -graduada  $\mathcal{C}$  tem como objetos  $\mathcal{C}_0 \times G$ . Para  $(x, s), (y, t) \in (\mathcal{C} \# G)_0$ , o  $\mathbf{k}$ -módulo de morfismos é definido por:

$$({}_{y,t})(\mathcal{C} \# G)_{(x,s)} = {}_y\mathcal{C}_x^{t^{-1}s}.$$

A composição provém da composição de  $\mathcal{C}$ :

$$({}_{z,u})(\mathcal{C} \# G)_{(y,t)} \otimes ({}_{y,t})(\mathcal{C} \# G)_{(x,s)} \longrightarrow ({}_{z,u})(\mathcal{C} \# G)_{(x,s)}$$

onde, do lado esquerdo tem-se  ${}_z\mathcal{C}_y^{u^{-1}t} \otimes {}_y\mathcal{C}_x^{t^{-1}s}$  e do lado direito tem-se  ${}_z\mathcal{C}_x^{u^{-1}s}$ .

Se  $\mathbf{k}$  é um corpo, podemos considerar a categoria de Kronecker  $\mathcal{K}$ , dada por dois objetos  $s, t$ , espaços de morfismos  ${}_s\mathcal{K}_s$  e  ${}_t\mathcal{K}_t$  uni-dimensionais,  ${}_s\mathcal{K}_t = 0$  e  $\dim_{\mathbf{k}} {}_t\mathcal{K}_s = 2$ . Escolhendo uma base  $\{\alpha, \beta\}$  de  ${}_t\mathcal{K}_s$ , podemos representar  $\mathcal{K}$  pelo seguinte diagrama:

$$s \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} t$$

Uma  $\mathbb{Z}$ -gradação de  $\mathcal{K}$  pode ser dada por:

$$\begin{array}{ll} {}_t\mathcal{K}_s^0 = \langle \alpha \rangle, & (\mathbf{k}\text{-espaço gerado por } \alpha) \\ {}_t\mathcal{K}_s^{-1} = \langle \beta \rangle, & (\mathbf{k}\text{-espaço gerado por } \beta) \\ {}_t\mathcal{K}_s^n = 0, & \text{se } n \neq 0, -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
{}_s\mathcal{K}_s^0 &= {}_s\mathcal{K}_s, \\
{}_s\mathcal{K}_s^n &= 0, \quad n \neq 0, \\
{}_t\mathcal{K}_t^0 &= {}_t\mathcal{K}_t, \\
{}_t\mathcal{K}_t^n &= 0, \quad n \neq 0.
\end{aligned}$$

A categoria produto smash  $\mathcal{K}\#\mathbb{Z}$  tem por objetos os pares  $(s, n)$ ,  $(t, n)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , e espaços de morfismos:

$$\begin{aligned}
{}_{(t,n)}(\mathcal{K}\#\mathbb{Z})_{(s,n)} &= {}_t\mathcal{K}_s^{-n+n} = {}_t\mathcal{K}_s^0 = \langle \alpha \rangle, \\
{}_{(t,n+1)}(\mathcal{K}\#\mathbb{Z})_{(s,n)} &= {}_t\mathcal{K}_s^{-n-1+n} = {}_t\mathcal{K}_s^{-1} = \langle \beta \rangle, \\
{}_{(t,n_2)}(\mathcal{K}\#\mathbb{Z})_{(s,n_1)} &= 0, \quad \text{se } n_1 \neq n_2, n_2 - 1, \\
{}_{(s,n)}(\mathcal{K}\#\mathbb{Z})_{(s,n)} &= {}_s\mathcal{K}_s^{-n+n} = {}_s\mathcal{K}_s^0 = {}_s\mathcal{K}_s, \\
{}_{(t,n)}(\mathcal{K}\#\mathbb{Z})_{(t,n)} &= {}_t\mathcal{K}_t^{-n+n} = {}_t\mathcal{K}_t^0 = {}_t\mathcal{K}_t,
\end{aligned}$$

Podemos representar esta categoria pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& \vdots & \\
& \nearrow & \vdots \\
(s, 2) & \xrightarrow{\alpha_2} & (t, 2) \\
& \nearrow \beta_1 & \\
(s, 1) & \xrightarrow{\alpha_1} & (t, 1) \\
& \nearrow \beta_0 & \\
(s, 0) & \xrightarrow{\alpha_0} & (t, 0) \\
& \nearrow & \\
& \vdots & \vdots
\end{array}$$

Agora, para  $G = \mathbb{Z}_2$ , uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $\mathcal{K}$  pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
{}_t\mathcal{K}_s^0 &= \langle \alpha \rangle, \\
{}_t\mathcal{K}_s^1 &= \langle \beta \rangle, \\
{}_s\mathcal{K}_s^0 &= {}_s\mathcal{K}_s, \\
{}_t\mathcal{K}_t^0 &= {}_t\mathcal{K}_t.
\end{aligned}$$

A categoria produto smash  $\mathcal{K}\#\mathbb{Z}_2$  tem por objetos os pares  $(s, 0)$ ,  $(s, 1)$ ,  $(t, 0)$  e  $(t, 1)$  e podemos representar esta categoria pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& (t, 1) & \\
& \nearrow \beta_1 & \nwarrow \alpha_1 \\
(s, 0) & & (s, 1) \\
& \searrow \alpha_0 & \swarrow \beta_0 \\
& (t, 0) &
\end{array}$$

A categoria produto smash é uma  $G$ -categoria livre, isto é, é uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear com uma ação de  $G$  nos objetos e morfismos de  $\mathbf{k}$ -módulos  $s : {}_y\mathcal{C}_x \rightarrow {}_{sy}\mathcal{C}_{sx}$  para cada  $s \in G$

e para cada par de objetos  $x$  e  $y$  verificando  $s(gf) = (sg)(sf)$ , quando a composição de  $f$  e  $g$  faz sentido. Além disso, para elementos  $t, s \in G$  e um morfismo  $f$ , tem-se  $(ts)f = t(sf)$  e  $1f = f$ , onde  $1$  é o elemento neutro de  $G$ . Se a ação de  $G$  é livre em  $\mathcal{C}_0$ , isto é, se  $sx = x$  implica que  $s = 1$ , então, dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma  $G$ -categoria livre.

A **categoria quociente**  $\mathcal{C}/G$  de uma  $G$ -categoria  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathbf{k}$  é a categoria sobre  $\mathbf{k}$  cujos objetos são as  $G$ -órbitas de  $\mathcal{C}_0$ . Para duas órbitas  $\alpha$  e  $\beta$  o  $\mathbf{k}$ -módulo de morfismos de  $\alpha$  em  $\beta$  é

$${}_{\beta}(\mathcal{C}/G)_{\alpha} = \left( \bigoplus_{x \in \alpha, y \in \beta} {}_y\mathcal{C}_x \right) / G.$$

A composição em  $\mathcal{C}/G$  é deduzida da composição em  $\mathcal{C}$  e está bem definida porque a ação de  $G$  nos objetos é livre. Por definição, um **recobrimento de Galois** é o funtor projeção de uma  $G$ -categoria livre em seu quociente  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ .

No artigo citado acima, os autores mostraram que se  $\mathcal{C}$  é uma categoria  $G$ -graduada, então,  $(\mathcal{C} \# G)/G = \mathcal{C}$ . Assim, a categoria produto smash  $\mathcal{C} \# G$  define um recobrimento de Galois de  $\mathcal{C}$ .

Assim, se  $G = \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{K}$  é a categoria de Kronecker, temos um recobrimento de Galois  $F : \mathcal{K} \# \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{K}$  dado por:

$$\begin{aligned} F((s, n)) &= s, \\ F((t, n)) &= t, \\ F(\alpha_n) &= \alpha, \\ F(\beta_n) &= \beta, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Neste mesmo artigo, [CM], os autores definem a categoria skew  $\mathcal{C}[G]$ , um análogo da álgebra de grupo skew, e mostram que existe uma Dualidade de Cohen-Montgomery conectando estas construções:

Seja  $\mathcal{C}$  uma  $G$ -categoria sobre  $\mathbf{k}$ . A **categoria skew**  $\mathcal{C}[G]$  tem os mesmos objetos de  $\mathcal{C}$  e morfismos  ${}_y(\mathcal{C}[G])_x = \bigoplus_{s \in G} {}_y\mathcal{C}_{sx}$ . A composição de morfismos provém da composição de  $\mathcal{C}$  com o devido ajuste. Para tornar clara a localização dos morfismos usa-se a notação  $f = f_s$  para  $f \in {}_y\mathcal{C}_{sx}$ . Assim, se  $sx = s'x$  com  $s \neq s'$ , temos que  $f_s \neq f_{s'}$ . Seja  $g = g_t \in {}_z\mathcal{C}_{ty}$  e  $f = f_s \in {}_y\mathcal{C}_{sx}$ . Então,  $gf = g \circ (tf)$ .

No mesmo ano, os conceitos de ações e coações de uma álgebra de Hopf em categorias são apresentados por C. Cibils e A. Solotar em [CS] como um meio de compreender os resultados anteriormente citados em um contexto mais abrangente:

Uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}$  é uma  **$H$ -módulo categoria** se cada espaço de morfismos é um  $H$ -módulo, cada álgebra de endomorfismos é uma  $H$ -módulo álgebra e as composições são morfismos de  $H$ -módulos, onde o produto tensorial de  $H$ -módulos é considerado como um  $H$ -módulo via a comultiplicação de  $H$ . De maneira análoga, define-se  $H$ -comódulo categoria.

Então, a seguinte definição de **produto smash**  $\mathcal{C} \# H$  é introduzida:

Seja  $H$  uma álgebra de Hopf e  $\mathcal{C}$  uma  $H$ -módulo categoria. A categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}\#H$  tem como objetos os mesmos objetos de  $\mathcal{C}$  e morfismos  ${}_y(\mathcal{C}\#H)_x = {}_y\mathcal{C}_x \otimes H$ . A composição de morfismos

$${}_z(\mathcal{C}\#H)_y \otimes {}_y(\mathcal{C}\#H)_x \longrightarrow {}_z(\mathcal{C}\#H)_x$$

é dada por

$$({}_y\varphi_y \otimes h) \circ ({}_y\psi_x \otimes h') = \sum {}_z\varphi_y \circ (h_1 {}_y\psi_x) \otimes h_2 h',$$

onde a comultiplicação  $\Delta$  de  $H$  é dada por  $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$  e  $\circ$  denota a composição em  $\mathcal{C}$ .

Consideremos a álgebra de Hopf  $H = (\mathbf{k}\mathbb{Z}_2)^*$ . O produto smash  $\mathcal{K}\#(\mathbf{k}\mathbb{Z}_2)^*$  tem como objetos os mesmo objetos de  $\mathcal{K}$ , isto é,  $(\mathcal{K}\#(\mathbf{k}\mathbb{Z}_2)^*)_0 = \{s, t\}$  e morfismos  ${}_y\mathcal{K}_x \otimes (\mathbf{k}\mathbb{Z}_2)^*$ , com  $x, y \in \{s, t\}$ . Em diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & s & \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{array} & t & \circlearrowright \end{array}$$

Esta definição é muito mais próxima da definição original para álgebras e, mostra-se que, se  $\mathcal{C}$  é uma  $H$ -módulo categoria com um número finito de objetos e  $a(\mathcal{C})$  é a  $\mathbf{k}$ -álgebra obtida pela soma direta de todos os  $\mathbf{k}$ -módulos de morfismos de  $\mathcal{C}$ , isto é,

$$a(\mathcal{C}) = \bigoplus_{x, y \in \mathcal{C}_0} {}_y\mathcal{C}_x,$$

munido do produto usual de matrizes  $({}_y a_x)({}_y b_x) = (\sum {}_z a_z \circ {}_z b_x)$  combinado com a composição de  $\mathcal{C}$ , então, as  $\mathbf{k}$ -álgebras  $a(\mathcal{C})\#H$  e  $a(\mathcal{C}\#H)$  são canonicamente isomorfas. Mesmo que  $\mathcal{C}$  não seja finita, o resultado continua válido, porém, neste caso, as álgebras não possuem unidade. Essas álgebras possuem unidades locais, como veremos adiante.

Agora, seja  $G$  um grupo finito e consideremos  $\mathbf{k}^G$ , a álgebra de grupo dual do grupo  $G$ , que é uma álgebra de Hopf. Se  $\mathcal{C}$  é uma  $\mathbf{k}$ -categoria  $G$ -graduada, então  $\mathcal{C}$  é uma  $\mathbf{k}^G$ -módulo categoria. Cibils e Solotar consideraram a categoria  $\mathcal{C}\#\mathbf{k}^G$  e mostraram que a categoria smash  $\mathcal{C}\#G$  e o produto smash  $\mathcal{C}\#\mathbf{k}^G$  não são isomorfos, talvez nem equivalentes, mas são sempre Morita equivalentes. O mesmo vale para o par  $\mathcal{C}[G]$  e  $\mathcal{C}\#\mathbf{k}^G$  quando  $\mathcal{C}$  é uma  $\mathbf{k}G$ -módulo categoria. Novamente, vale uma Dualidade de Cohen-Montgomery para o produto smash. A demonstração é surpreendentemente semelhante à demonstração original para álgebras. A vantagem em considerar o produto smash  $\mathcal{C}\#\mathbf{k}^G$  ao invés da categoria smash  $\mathcal{C}\#G$ , é que esta última não possui uma estrutura de  $\mathbf{k}G$ -módulo, enquanto que a primeira é uma  $\mathbf{k}G$ -módulo categoria usando a estrutura de  $\mathbf{k}G$ -módulo à esquerda de  $\mathbf{k}^G$  fornecida por  $t\delta_s = \delta_{st^{-1}}$ . Assim, os autores associam ao recobrimento de Galois  $\mathcal{C}\#G$  de  $\mathcal{C}$  a extensão smash  $(\mathcal{C}\#\mathbf{k}^G) \rightarrow (\mathcal{C}\#\mathbf{k}^G)\#\mathbf{k}^G$ .

No ano seguinte, Herscovich e Solotar, [HS], definem extensões de Galois para catego-

rias: Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorias  $\mathbf{k}$ -lineares, onde  $\mathcal{D}$  é uma  $H$ -comódulo categoria e  $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{coH}$ , ou seja,  ${}_y\mathcal{C}_x = ({}_y\mathcal{D}_x)^{coH} = \{f \in {}_y\mathcal{D}_x \mid \rho(f) = f \otimes 1_H\}$  para todo  $x, y \in \mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_0$ , onde  $\rho$  define a estrutura de  $H$ -comódulo. Diz-se que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  é uma **extensão de Galois** se a transformação natural  $\beta: \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \otimes H$  definida por,

$$\begin{aligned} {}_x\beta_y: {}_x(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D})_y &\longrightarrow {}_x(\mathcal{D} \otimes H)_y \\ f \otimes_{\mathcal{C}} g &\longmapsto (f \circ g_0) \otimes g_1 \end{aligned}$$

é um isomorfismo, para  $x, y \in \mathcal{C}_0$ ,  $f \in {}_x\mathcal{D}_z$ ,  $g \in {}_z\mathcal{D}_y$ . O produto tensorial sobre  $\mathcal{C}$  é definido como segue:

$$M \otimes_{\mathcal{C}} N = \left( \bigoplus_{x \in \mathcal{C}_0} M_x \otimes_x N \right) / \langle \{m \cdot f \otimes n - m \otimes f \cdot n : m \in M_x, n \in {}_yN, f \in {}_x\mathcal{C}_y\} \rangle$$

onde  $M$  e  $N$  são  $\mathcal{C}$ -módulos à direita e à esquerda, respectivamente, isto é,  $N$  é uma coleção de  $\mathbf{k}$ -espaços vetoriais  $\{{}_xN\}_{x \in \mathcal{C}_0}$  com uma ação à esquerda

$${}_y\mathcal{C}_x \otimes_x N \rightarrow {}_yN,$$

onde a imagem de  ${}_y f_x \otimes_x n$  é denotada por  ${}_y f_x \cdot_x n$ , satisfazendo os axiomas usuais

$${}_z f_y \cdot ({}_y g_x \cdot_x n) = ({}_z f_y \cdot_y g_x) \cdot_x n,$$

$${}_x 1_x \cdot_x n = {}_x n.$$

Os morfismos de  $\mathcal{C}$ -módulos à esquerda são transformações naturais e da mesma forma define-se  $\mathcal{C}$ -módulo à direita.

Os autores consideraram a álgebra de Hopf  $H = \mathbf{k}G$  com sua estrutura usual e mostraram que se  $\mathcal{D}$  é uma categoria  $G$ -graduada e  $\mathcal{C}$  é a componente  $\mathcal{D}^1$ , isto é, a categoria dos coinvariantes de  $\mathcal{D}$ , então,  $\mathcal{D}$  é fortemente graduada se, e somente se,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  é  $\mathbf{k}G$ -Galois. Por categoria fortemente graduada entende-se uma  $\mathbf{k}G$ -comódulo categoria  $\mathcal{C}$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathcal{C}_0} {}_z\mathcal{C}_y^s \cdot_y \mathcal{C}_x^t &= {}_z\mathcal{C}_x^{st}, & \forall x, z \in \mathcal{C}_0, \forall s, t \in G, \text{ ou equivalentemente,} \\ \sum_{y \in \mathcal{C}_0} {}_x\mathcal{C}_y^{s^{-1}} \cdot_y \mathcal{C}_x^s &= {}_x\mathcal{C}_x^1, & \forall s \in G. \end{aligned}$$

Os autores ainda citam diversas propriedades da extensão de Galois  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  que são análogas ao caso de álgebras com unidade.

A teoria de  $H$ -módulo/comódulo categorias continuou a ser desenvolvida, mais recentemente, por Stănescu; *On Hopf-Galois extensions of linear categories*, [S], e Stănescu e Ştefan; *Cleft Comodule Categories*, [SS]. Mais uma vez, vários resultados importantes da teoria clássica, como a caracterização das extensões de Hopf-Galois para álgebras graduadas e a caracterização de extensões fendidas ("cleft extensions") como produtos cruzados, são válidos neste contexto e as demonstrações seguem na mesma linha das provas originais.

Esta situação sugere que deve haver algo mais forte do que uma simples analogia com a teoria clássica. De fato, uma  $H$ -(co)módulo categoria é sempre o colimite de suas  $H$ -(co)módulo subcategorias plenas tendo um número finito de objetos, e estes, podem ser identificados com  $H$ -(co)módulos álgebras unitárias com um sistema de idempoten-

tes ortogonais. Além disso, muitas construções clássicas, tais como o produto smash, são funtoriais, e vários isomorfismos da teoria de  $H$ -(co)módulo álgebras são isomorfismos naturais entre esses funtores e, portanto, induzem isomorfismos entre os colimites apropriados.

Estendendo estes conceitos, introduzimos ações e coações de uma álgebra de Hopf em álgebras com unidades locais, definimos produtos cruzados e analisamos extensões fendidas neste contexto. No Capítulo 2, os principais resultados são a correspondência entre extensões fendidas e produtos cruzados, a classificação de produtos cruzados e o teorema da base normal para  $H$ -extensões. Desta forma, estendemos alguns dos principais resultados de [SS] a respeito de  $H$ -comódulo categorias usando uma técnica completamente diferente deste e de outros artigos previamente publicados envolvendo  $H$ -ações e coações em categorias lineares.

Vale ressaltar que nem tudo pode ser estendido por meio de colimites. Não se pode esperar, por exemplo, que uma extensão de Galois seja simplesmente o colimite de extensões de Galois de subálgebras unitárias. Motivados por esta questão, encontramos uma interessante condição que torna válida esta afirmação. Trata-se da conexão forte. Em [BH04], mostra-se que, para caso de álgebras com unidade, uma  $H$ -comódulo álgebra tem conexão forte se, e somente se, ela é principal, ou seja, é  $H$ -Galois e  $H$ -equivariante projetiva. No Capítulo 3, estendemos este conceito para álgebras com unidades locais e mostramos que se a álgebra possui uma conexão forte, as subálgebras unitárias também possuem, o que torna a afirmação em questão verdadeira.

# 1 Pré-requisitos

## 1.1 Categorias monoidais

### 1.1.1 Definições e exemplos

As estruturas de álgebra, coálgebra, (bi)-módulo e (bi)-comódulo podem ser estendidas para categorias. Para isto, consideraremos categorias  $\mathbf{k}$ -lineares  $\mathcal{C}$  onde  $\mathbf{k}$  é um corpo, ou seja, categorias em que o conjunto de morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  é um  $\mathbf{k}$ -espaço vetorial, para todo  $X, Y \in \mathcal{C}_0$ , e as composições de morfismos são aplicações  $\mathbf{k}$ -bilineares. Além disso, precisamos de um funtor que traduza para o ponto de vista categórico as propriedades de um produto tensorial entre espaços vetoriais. A categoria que possui tal funtor é chamada de categoria monoidal. Maiores detalhes podem ser vistos em [ML].

**Definição 1.1.1** *Uma categoria monoidal (ou tensorial) é uma sextupla  $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$  onde,  $\mathcal{C}$  é uma categoria,  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é um funtor,  $I \in \mathcal{C}_0$  é um objeto de  $\mathcal{C}$  (unidade) e*

$$a(X, Y, Z) : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$$

$$r_X : X \otimes I \rightarrow X, \quad l_X : I \otimes X \rightarrow X$$

são isomorfismos functoriais em  $X, Y, Z \in \mathcal{C}_0$ , satisfazendo:

- *Axioma do pentágono*

$$\begin{array}{ccc}
 & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & \\
 & \nearrow^{a_{W \otimes X, Y, Z}} & \searrow^{a_{W, X, Y \otimes Z}} \\
 ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\
 \downarrow^{a_{W, X, Y \otimes Z}} & & \uparrow^{W \otimes a_{X, Y, Z}} \\
 (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z & \xrightarrow{a_{W, X \otimes Y, Z}} & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z)
 \end{array}$$



- *Axioma do triângulo*

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a} & X \otimes (I \otimes Y) \\
 \searrow r_{X \otimes Y} & & \swarrow X \otimes l_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

Quando não houver confusão, a notação  $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r)$  será abreviada simplesmente por  $\mathcal{C}$ .

Uma categoria monoidal  $\mathcal{C}$  é dita **estrita** se os isomorfismos  $a, l$  e  $r$  são as identidades.

**Observação 1.1.2** A unidade de uma categoria monoidal é única, a menos de isomorfismo.

**Exemplo 1.1.3** Seja  $\mathbf{k}$  um corpo. A categoria  $\text{Vec}_{\mathbf{k}}$  de todos os  $\mathbf{k}$ -espaços vetoriais é uma categoria monoidal onde  $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$ ,  $1 = \mathbf{k}$  e os morfismos  $a, l, r$  são os naturais.

Generalizando, podemos trocar  $\mathbf{k}$  por um anel comutativo com unidade e definir a categoria  $R\text{-mod}$  dos  $R$ -módulos.

**Exemplo 1.1.4** Seja  $\mathbf{k}$  um corpo e  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. A categoria  ${}_A\mathcal{M}_A$  dos  $A$ -bimódulos é uma categoria monoidal com o produto tensorial  $\otimes_A$  de  $A$ -bimódulos. A unidade é  $I = A$  e os isomorfismos de associatividade e unidade são os naturais.

**Exemplo 1.1.5** Seja  $H$  uma biálgebra sobre  $\mathbf{k}$ . Se  $M$  e  $N$  são  $H$ -módulos à esquerda, então, o produto tensorial  $M \otimes_{\mathbf{k}} N$  é um  $H$ -módulo à esquerda com a aplicação  $\cdot$  dada por:

$$h \cdot (m \otimes n) = \sum (h_1 \cdot m) \otimes (h_2 \cdot n).$$

(A demonstração pode ser vista na Proposição A.16).

Assim, a categoria  ${}_H\mathcal{M}$  dos  $H$ -módulos à esquerda (veja Exemplo B.3) é uma categoria monoidal com  $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$ ,  $1 = \mathbf{k}$  com a estrutura de  $H$ -módulo trivial, a associatividade é dada por  $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$  e os morfismos  $r_X$  e  $l_X$  são os isomorfismos canônicos. Analogamente, a categoria  $\mathcal{M}_H$  dos  $H$ -módulos à direita é também monoidal.

**Exemplo 1.1.6** Analogamente ao exemplo acima, a categoria  $\mathcal{M}^H$  dos  $H$ -comódulos à direita (veja Exemplo B.4) é uma categoria monoidal. A estrutura de  $H$ -comódulo do produto tensorial  $M \otimes N$  é dada por:

$$\rho(m \otimes n) = \sum m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

(A demonstração pode ser vista na Proposição A.20).

De maneira análoga, a categoria  ${}^H\mathcal{M}$  dos  $H$ -comódulos à esquerda também é uma categoria monoidal.

Em particular, podemos considerar o caso em que  $H = \mathbf{k}G$ , isto é,  $H$  é álgebra de grupo do grupo  $G$  (veja Exemplo A.10).

### 1.1.2 Álgebras em categorias monoidais

Seja  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear monoidal.

**Definição 1.1.7** Uma **álgebra** (não unitária) em  $\mathcal{C}$  é uma dupla  $(A, m)$ , onde  $A \in \mathcal{C}_0$  e  $m : A \otimes A \rightarrow A$  é um morfismo em  $\mathcal{C}$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{a} & A \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{A \otimes m} & A \otimes A \\ m \otimes A \downarrow & & & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & & & A \end{array} \quad (1.1)$$

**Observação 1.1.8** Uma **álgebra unitária** em  $\mathcal{C}$  é uma tripla  $(A, m, u)$ , onde  $(A, m)$  é uma álgebra em  $\mathcal{C}$  e  $u : I \rightarrow A$  é um morfismo  $\mathbf{k}$ -linear tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & u \otimes A \nearrow & \downarrow m & \nwarrow A \otimes u & \\ I \otimes A & & & & A \otimes I \\ & l \searrow & & \nearrow r & \\ & & A & & \end{array} \quad (1.2)$$

**Exemplo 1.1.9** Observe que, pela definição de  $\mathbf{k}$ -álgebras, as álgebras (unitárias) na categoria  $Vec_{\mathbf{k}}$  são exatamente as  $\mathbf{k}$ -álgebras (unitárias).

Recorde que uma  $H$ -módulo álgebra à esquerda é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra que é um  $H$ -módulo à esquerda satisfazendo  $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$  e  $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$ , para todo  $h \in H$  e  $a, b \in A$ .

**Proposição 1.1.10** Seja  $H$  uma biálgebra. Então, uma  $\mathbf{k}$ -álgebra  $A$  é uma  $H$ -módulo álgebra à esquerda se, e somente se,  $A$  é uma álgebra em  ${}_H\mathcal{M}$ .

**Demonstração:** Pela Proposição A.16, o produto tensorial  $A \otimes A$  é  $H$ -módulo via  $h \cdot (a \otimes b) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$ . Temos que,  $m$  é morfismo de  $H$ -módulo se, e somente se, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} H \otimes A \otimes A & \xrightarrow{H \otimes m} & H \otimes A \\ \cdot_{A \otimes A} \downarrow & & \downarrow \cdot_A \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

Isto significa que  $m$  é morfismo de  $H$ -módulo se, e somente se,  $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$ .

Da mesma forma, temos que  $u$  é um morfismo de  $H$ -módulo se, e somente se, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} H \otimes \mathbf{k} & \xrightarrow{H \otimes u} & H \otimes A \\ \downarrow \cdot \mathbf{k} & & \downarrow \cdot A \\ K & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

isto é,  $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$ , onde  $\mathbf{k}$  é  $H$ -módulo via  $h \otimes k \mapsto \varepsilon(h)k$ .

◇

**Observação 1.1.11** De maneira análoga, dizer que uma  $\mathbf{k}$ -álgebra  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra é equivalente a dizer que  $A$  é uma álgebra em  $\mathcal{M}^H$ .

**Exemplo 1.1.12** A unidade  $I$  de uma categoria monoidal  $\mathcal{C}$  é uma álgebra em  $\mathcal{C}$ . Neste caso, o morfismo  $m : I \otimes I \rightarrow I$  procurado será o morfismo  $l_I$  (ou  $r_I$ , pois pode-se mostrar que  $l_I = r_I$ ). A unidade será  $u = Id_I$ .

## 1.2 Limites em categorias

Os limites serão de fundamental importância ao longo deste trabalho. Por meio dele poderemos estender resultados conhecidos de álgebras com unidades para álgebras com unidades locais. Porém, isto pode ser feito usando os resultados conhecidos, ou seja, não se trata de provar tudo novamente para o novo caso, mas sim, usar o que já temos e estender usando esta ferramenta: os limites.

**Definição 1.2.1** *Seja  $(I, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado. Um sistema direto sobre  $I$  em uma categoria  $\mathcal{C}$  é um par  $((A_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  onde os  $A_i$ 's são objetos de  $\mathcal{C}$  e  ${}_j\alpha_i : A_i \rightarrow A_j$  são morfismos em  $\mathcal{C}$  tais que:*

i)  ${}_i\alpha_i = 1_{A_i}, \forall i \in I,$

ii) *Se  $i \leq j \leq k$ , então,  ${}_k\alpha_j \cdot {}_j\alpha_i = {}_k\alpha_i$ , isto é, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{{}_k\alpha_i} & A_k \\ & \searrow {}_j\alpha_i & \uparrow {}_k\alpha_j \\ & & A_j \end{array}$$

**Definição 1.2.2** *Seja  $I$  um conjunto parcialmente ordenado e  $((A_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  um sistema direto em  $\mathcal{C}$ . O Colimite do sistema  $\{A_i, {}_j\alpha_i\}$  é um par  $(A, (\alpha_i)_{i \in I})$ , onde  $A$  é um objeto de  $\mathcal{C}$  e  $\alpha_i : A_i \rightarrow A$  são morfismos tais que:*

i)  $\alpha_j \cdot {}_j\alpha_i = \alpha_i$  sempre que  $i \leq j$ ; isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{\alpha_i} & A \\
 \downarrow j\alpha_i & \nearrow \alpha_j & \\
 A_j & & 
 \end{array}$$

ii) Se  $X$  é um objeto de  $\mathcal{C}$  e  $f_i : A_i \rightarrow X$  são morfismos tais que  $f_j \circ \alpha_i = f_i$ , para  $i \leq j$ , então, existe um único  $\theta : A \rightarrow X$  que faz o diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \exists! \theta & & \\
 & \curvearrowright & \text{---} & \curvearrowleft & \\
 A & \xleftarrow{\alpha_i} & A_i & \xrightarrow{f_i} & X \\
 & \searrow \alpha_j & \downarrow j\alpha_i & \nearrow f_j & \\
 & & A_j & & 
 \end{array}$$

Neste caso, usaremos a notação:  $\varinjlim ((A_i)_{i \in I}, (j\alpha_i)_{i \leq j}) = (A, (\alpha_i)_{i \in I})$ , ou simplesmente  $\varinjlim A_i = A$ , quando os morfismos forem facilmente identificados.

**Observação 1.2.3** O colimite, quando existe, é único.

**Exemplo 1.2.4** Em uma categoria linear  $\mathcal{C}$ , o **pushout** (ou soma amalgamada)  $(P, \{p_1, p_2\})$  de dois morfismos  $f_1 : Z \rightarrow X$  e  $f_2 : Z \rightarrow Y$  é o colimite do sistema direto  $((X, Y, Z), (f_1, f_2))$ .

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xleftarrow{p_2} & Y \\
 p_1 \uparrow & & \uparrow f_2 \\
 X & \xleftarrow{f_1} & Z
 \end{array}$$

De fato, desde que  $p_2 \circ f_2 = p_1 \circ f_1$ , a condição *i*) da Definição 1.2.2 é satisfeita. Além disso, se existe um objeto  $Q$  e morfismos  $q_1, q_2$  que fazem o diagrama abaixo comutar, então, existe um único  $u : P \rightarrow Q$  que também faz o diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & & & & \\
 \uparrow q_2 & & & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 & & P & \xleftarrow{p_2} & Y \\
 & & p_1 \uparrow & & \uparrow f_2 \\
 & & X & \xleftarrow{f_1} & Z \\
 & \uparrow q_1 & & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

**Observação 1.2.5** De maneira dual, podemos definir um sistema inverso sobre  $I$ :  $((B_i)_{i \in I}, (i\beta_j)_{i \leq j})$ , neste caso,  $i\beta_j : B_j \rightarrow B_i$  sempre que  $i \leq j$ . O **limite** (ou limite inverso) deste sistema será um par  $(B, (\beta_i)_{i \in I})$  que satisfaz as mesmas condições do colimite invertendo-se as flechas. Neste caso, teremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \exists! \theta & & \\
 & \swarrow & \cdots & \searrow & \\
 B & \xrightarrow{\beta_i} & B_i & \xleftarrow{g_i} & X \\
 & \searrow & \uparrow & \swarrow & \\
 & & B_j & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

$\beta_j$  (arrow from  $B$  to  $B_j$ ),  $i\beta_j$  (arrow from  $B_j$  to  $B_i$ ),  $g_j$  (arrow from  $X$  to  $B_j$ )

O **pullback** (ou produto fibrado)  $(Q, \{q_1, q_2\})$  de dois morfismos  $g_1 : X \rightarrow Z$  e  $g_2 : Y \rightarrow Z$  é o limite do sistema inverso  $((X, Y, Z), (g_1, g_2))$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 P & & & & \\
 \downarrow p_1 & \searrow u & & \searrow p_2 & \\
 & Q & \xrightarrow{q_2} & Y & \\
 & \downarrow q_1 & & \downarrow g_2 & \\
 & X & \xrightarrow{g_1} & Z & 
 \end{array}$$

## 2 Álgebras com unidades locais

Ao longo deste capítulo,  $\mathbf{k}$  denotará um corpo,  $\mathcal{C}$  será uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear monoidal,  $H$  será uma álgebra de Hopf e  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra sem unidade (salvo quando mencionado o contrário).

### 2.1 Definições e exemplos

Usaremos a definição de  $\mathbf{k}$ -álgebras com unidades locais de acordo com a definição de anéis com unidades locais encontrada em [W].

**Definição 2.1.1** *Uma  $\mathbf{k}$ -álgebra  $A$  será dita uma  **$\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais** se existir um conjunto  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\} \subset A$  tal que,*

*i)  $e_i e_i = e_i$  para todo  $i \in I$ , isto é, cada  $e_i$  é idempotente;*

*ii) para cada subconjunto finito  $F \subset A$ , existe  $e_i \in \mathbf{u}$  tal que  $e_i a = a e_i = a$  para todo  $a \in F$ .*

*O conjunto  $\mathbf{u}$  satisfazendo as condições i) e ii) é chamado de **sistema de unidades locais para  $A$** .*

**Observação 2.1.2** Encontramos na literatura, veja por exemplo [DES], a seguinte definição de álgebra com unidades locais: Diz-se que uma álgebra  $R$  tem unidades locais se para cada  $r \in R$  existe  $e^2 = e \in R$  tal que  $r \in eRe$ , ou de modo equivalente,  $re = er = r$ . Esta definição é equivalente à dada acima. De fato, suponhamos que  $\{r_1, \dots, r_m\}$  seja um subconjunto finito de  $R$ . Primeiro vamos mostrar que existe  $y \in R$  tal que  $r_i y = r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Observe que dados  $a, b \in R$ , existem,  $x_1, x_2 \in R$  tais que  $ax_1 = a$  e  $(bx_1 - b)x_2 = bx_1 - b$ . Tomemos  $y = x_1 + x_2 - x_1 x_2$ . Note que  $y$  não é necessariamente idempotente. No entanto, temos que:

$$ay = ax_1 + ax_2 - ax_1 x_2 = a + ax_2 - ax_2 = a, \quad e,$$

$$by = bx_1 + bx_2 - bx_1 x_2 = bx_1 - (bx_1 x_2 - bx_2) = bx_1 - (bx_1 - b) = b$$

Logo, podemos mostrar esta propriedade para um número finito de elementos, isto é, existe  $y \in R$  tal que  $r_i y = r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Agora, seja  $f = f^2$  tal que  $yf = y$ . Então,  $r_i = r_i y = r_i y f = r_i f$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Consideremos o conjunto finito  $\{r_1, \dots, r_m, f\} \subset R$ . Podemos mostrar, de modo análogo ao que

fizemos acima, que existe  $x \in R$  tal que  $xr_i = r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $xf = f$ . Tomemos  $e^2 = e \in R$  tal que  $ex = x$ . Então, temos que  $r_i = xr_i = exr_i = er_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $f = xf = exf = ef$ .

Finalmente, seja  $e' = e + f - fe$ . Então, pode-se verificar que  $e'$  é idempotente e:

$$r_i e' = r_i(e + f - fe) = r_i e + r_i f - r_i f e = r_i e + r_i f - r_i e = r_i,$$

$$e' r_i = (e + f - fe)r_i = e r_i + f r_i - f e r_i = r_i + f r_i - f r_i = r_i,$$

$i = 1, \dots, m$ , isto é,  $r_i \in e' R e'$ ,  $i = 1 \dots, m$ .

**Proposição 2.1.3** *Cada subálgebra de  $A$  definida por  $A_i = e_i A e_i$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra unitária, com unidade dada por  $u_i(k) = k e_i$ .*

**Demonstração:** A multiplicação em  $A_i$  é dada por  $m_i = m|_{A_i}$ . De fato,  $m(A_i \otimes A_i) \subset A_i$ , pois  $m(e_i a e_i \otimes e_i b e_i) = e_i a e_i b e_i \in A_i$ . Por outro lado,  $m_i(u_i(k) \otimes e_i a e_i) = k e_i a e_i = m_i(e_i a e_i \otimes u_i(k))$ .

◇

**Definição 2.1.4** *Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado  $I$  é **direcionado** se para cada subconjunto finito  $F \subset I$ , existe  $i \in I$ , tal que  $f \leq i$  para todo  $f \in F$ .*

Se  $A$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$  e  $e_i \neq e_j$  sempre que  $i \neq j$ , podemos definir uma ordem parcial em  $I$ . Diremos que  $i \leq j$  se, e somente se,  $e_i e_j = e_j e_i = e_i$ . Observe que  $I$  é um conjunto parcialmente ordenado direcionado. De fato, se  $F = \{i_k\}_{k=1}^n$  é um subconjunto finito de  $I$ , consideremos as unidades locais  $e_{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Então, o conjunto  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$  é um subconjunto finito de  $A$ , logo, existe  $e_t \in \mathbf{u}$  tal que  $e_t e_{i_k} = e_{i_k} e_t = e_{i_k}$ , para todo  $k = 1, \dots, n$ , ou seja,  $i_k \leq t$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$ . Logo, cada coleção finita de subálgebras  $A_i$  está contida em uma outra subálgebra  $A_t$ . Além disso, as subálgebras  $A_i$  formam um sistema direto sobre  $I = (I, \leq)$  de maneira canônica: se  $i \leq j$ , o morfismo associado  ${}_j \alpha_i : A_i \rightarrow A_j$  é a inclusão.

Estamos interessados em introduzir o conceito de álgebras com unidades locais nas categorias de  $H$ -módulos e  $H$ -comódulos, onde  $H$  é uma álgebra de Hopf. Não encontramos estas definições na literatura e, então, propomos uma definição de álgebras com unidades locais em categorias monoidais em termos de colimites.

**Exemplo 2.1.5** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria pequena, isto é,  $\mathcal{C}_0$  é um conjunto. Define-se a  $\mathbf{k}$ -álgebra  $a(\mathcal{C})$  por:

$$a(\mathcal{C}) = \bigoplus_{x, y \in \mathcal{C}_0} {}_y \mathcal{C}_x,$$

onde o produto é dado pelo produto usual de matrizes  $({}_y a_x)({}_y b_x) = (\sum_z {}_y a_z \circ {}_z b_x)$  combinado com a composição de  $\mathcal{C}$ . Se  $\mathcal{C}_0$  é infinito,  $a(\mathcal{C})$  tem uma família de idempotentes ortogonais indexados pelos objetos de  $\mathcal{C}$ : para  $x \in \mathcal{C}_0$ , tomemos  $E_x \in a(\mathcal{C})$  o elemento com a identidade de  $x$  na posição  $(x, x)$  e zero nas demais. Seja  $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{C}_0)$  o conjunto dos subconjuntos finitos de  $\mathcal{C}_0$ . Então, para cada  $i = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{C}_0)$ , define-se a soma

finita  $E_i = \sum_{j=1}^n E_{x_j}$ . O conjunto  $\mathbf{u} = \{E_i \mid i \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{C}_0)\}$  forma um sistema de unidades locais para  $a(\mathcal{C})$ .

**Definição 2.1.6** *Uma álgebra  $A$  em uma categoria monoidal  $\mathcal{C}$  será dita uma **álgebra com unidades locais** em  $\mathcal{C}$  se existe um conjunto parcialmente ordenado direcionado  $I$  e uma tripla  $((A_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  tal que:*

- i)  $A_i$  é uma álgebra com unidade em  $\mathcal{C}$ , para todo  $i \in I$ ;
- ii)  $\alpha_i : A_i \rightarrow A$  são monomorfismos de álgebras em  $\mathcal{C}$ , para todo  $i \in I$ ;
- iii)  ${}_j\alpha_i : A_i \rightarrow A_j$  são morfismos de álgebras em  $\mathcal{C}$ , sempre que  $i \leq j$ , tal que,  $((A_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  forma um sistema direto em  $\mathcal{C}$ ;
- iv)  $\varinjlim (A_i, {}_j\alpha_i) = (A, \alpha_i)$ .

**Proposição 2.1.7**  *$A$  é uma álgebra com unidades locais em  $\mathcal{C} = \text{Vec}_{\mathbf{k}}$  se, e somente se,  $A$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ): Pelo Exemplo 1.1.9, dada uma álgebra com unidades locais  $A$  em  $\mathcal{C}$ , temos que  $A$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra.

Seja  $((A_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  a tripla que satisfaz as condições da Definição 2.1.6. Desde que  $A_i$  é uma álgebra unitária em  $\mathcal{C}$ , existe uma unidade  $u_i : \mathbf{k} \rightarrow A_i$ . Denotemos  $u_i(1_{\mathbf{k}}) = e_i$ , para cada  $i \in I$  e, então, definimos:

$$\bar{e}_i = \alpha_i(e_i).$$

Assim, cada  $\bar{e}_i$  é idempotente. De fato,  $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = \alpha_i(e_i) \cdot \alpha_i(e_i) = \alpha_i(e_i \cdot e_i) = \alpha_i(e_i) = \bar{e}_i$ .

Agora, para cada  $i \in I$ , definimos:

$$\bar{A}_i = \alpha_i(A_i) \quad \text{e} \quad \bar{A} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \subset A.$$

Deste modo  $\bar{A}$  é uma subálgebra de  $A$ . Com efeito, sejam  $a, b \in \bar{A}$ . Então,  $a = \alpha_i(a')$  para algum  $a' \in A_i$  e  $b = \alpha_j(b')$  para algum  $b' \in A_j$ . Desde que  $I$  é direcionado, existe  $t \in I$  tal que  $a', b' \in A_t$ . Então,  $a \cdot b = \alpha_i(a') \cdot \alpha_j(b') = \alpha_t({}_t\alpha_i(a')) \cdot \alpha_t({}_t\alpha_j(b')) = \alpha_t({}_t\alpha_i(a') \cdot {}_t\alpha_j(b')) \in \bar{A}_t \subset \bar{A}$ .

Queremos definir  ${}_j\bar{\alpha}_i : \bar{A}_i \rightarrow \bar{A}_j$ , para todo  $i \leq j$ , de modo que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \bar{A}_i \\ \downarrow {}_j\alpha_i & & \downarrow {}_j\bar{\alpha}_i \\ A_j & \xrightarrow{\alpha_j} & \bar{A}_j \end{array} \quad (2.1)$$



Desde que cada  $\alpha_i$  é monomorfismo (e monomorfismo em  $Vec_{\mathbf{k}}$  é função injetora) e  $\overline{A_i} = \alpha_i(A_i)$ , podemos definir:

$${}_j\overline{\alpha_i} = \alpha_j \circ {}_j\alpha_i \circ \alpha_i^{-1}.$$

Deste modo,  $((\overline{A_i})_{i \in I}, ({}_j\overline{\alpha_i})_{i \leq j})$  é um sistema direto sobre  $I$ . De fato,

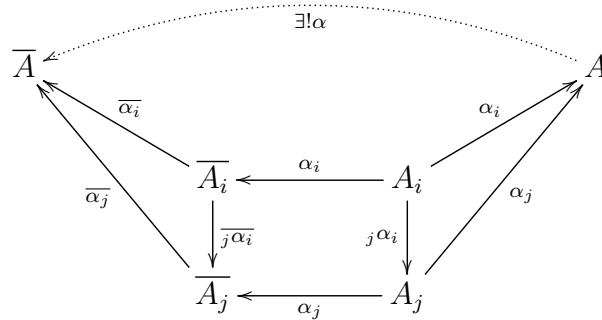
i)  ${}_i\overline{\alpha_i} = \alpha_i \circ {}_i\alpha_i \circ \alpha_i^{-1} = \alpha_i \circ 1_{A_i} \circ \alpha_i^{-1} = 1_{\overline{A_i}}$ , para todo  $i \in I$ ;

ii) dados  $i \leq j \leq k$ , temos,

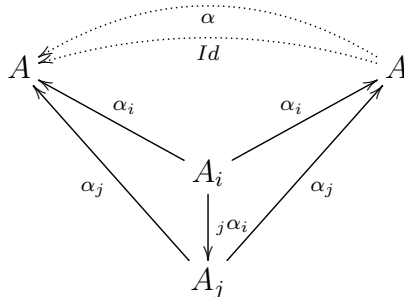
$$\begin{aligned} {}_k\overline{\alpha_j} \circ {}_j\overline{\alpha_i} &= \alpha_k \circ {}_k\alpha_j \circ \alpha_j^{-1} \circ \alpha_j \circ {}_j\alpha_i \circ \alpha_i^{-1} \\ &= \alpha_k \circ {}_k\alpha_j \circ {}_j\alpha_i \circ \alpha_i^{-1} \\ &= \alpha_k \circ {}_k\alpha_i \circ \alpha_i^{-1} \\ &= {}_k\overline{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Por construção,  $\varinjlim (\overline{A_i}, ({}_j\overline{\alpha_i})) = (\overline{A}, (\overline{\alpha_i}))$ , onde  $\overline{\alpha_i} : \overline{A_i} \rightarrow \overline{A}$  são dadas pelas inclusões para todo  $i \in I$ .

Como  $A$  é o colimite dos  $A_i$ 's e o diagrama 2.1 comuta, existe um único morfismo  $\alpha : A \rightarrow \overline{A} \subset A$  que faz o diagrama abaixo comutar:



Assim, temos dois morfismos que fazem o diagrama abaixo comutar:



Logo,  $\alpha = Id$  e, portanto,  $\overline{A} = A$ .

Observe que se  $i \leq j$ , então,  $\overline{A_i} \subset \overline{A_j}$ . De fato, se  $x \in \overline{A_i}$ , existe  $a \in A_i$  tal que  $x = \alpha_i(a) = \alpha_i(e_i a e_i) = \alpha_j({}_j\alpha_i(e_i a e_i)) = \alpha_j({}_j\alpha_i(a)) \in \overline{A_j}$ , pois,  ${}_j\alpha_i(a) \in A_j$ .

Para finalizar, seja  $F$  um subconjunto finito de  $A$ . Então,  $F \subset \cup_{j=1}^n \overline{A_{i_j}}$ . Como  $I$  é direcionado, existe  $t \in I$  tal que  $i_j \leq t$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Assim,  $F \subset \overline{A_t}$ , logo,

$f\bar{e}_t = \bar{e}_t f = f$  para todo  $f \in F$ .

Portanto,  $\mathbf{u} = \{\bar{e}_i \mid i \in I\}$  é um sistema de unidades locais para  $A$ , ou seja,  $A$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais.

( $\Leftarrow$ ) : Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Então,  $I$  é um conjunto parcialmente ordenado direcionado,  $A$  é uma álgebra em  $\mathcal{C}$  e cada subálgebra unitária  $A_i = e_i A e_i$  é uma álgebra unitária em  $\mathcal{C}$ . Os monomorfismos  $\alpha_i : A_i \rightarrow A$  e  ${}_j\alpha_i : A_i \rightarrow A_j$ , quando  $i \leq j$ , são as inclusões. Assim,  $((A_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  forma um sistema direto. Resta mostrar que  $\varinjlim (A_i, {}_j\alpha_i) = (A, \alpha_i)$ . Primeiro observe que  $\alpha_j \circ {}_j\alpha_i = \alpha_i$  sempre que  $i \leq j$ . Agora suponha que  $X$  é um objeto de  $Vec_{\mathbf{k}}$  e, para cada  $i \in I$ ,  $f_i : A_i \rightarrow X$  é um morfismo tal que  $f_j \circ {}_j\alpha_i = f_i$ , sempre que  $i \leq j$ . Seja  $a \in A$ , então, existe  $i \in I$  tal que  $a \in A_i$ . Definimos  $\theta : A \rightarrow X$  por:  $\theta(a) = f_i(a)$ . Assim,  $\theta$  está bem definida, pois, se  $a \in A_j$  com  $i \neq j$ , existe  $t \in I$  tal que  $i \leq t$  e  $j \leq t$ , e, portanto,  $f_i(a) = f_t({}_t\alpha_i(a)) = f_t(a)$ . Analogamente,  $f_j(a) = f_t({}_t\alpha_j(a)) = f_t(a)$ , ou seja,  $f_i(a) = f_j(a)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \exists! \theta & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 A & \xleftarrow{\alpha_i} & A_i & \xrightarrow{f_i} & X \\
 & \searrow \alpha_j & \downarrow {}_j\alpha_i & \nearrow f_j & \\
 & & A_j & & 
 \end{array}$$

Pela definição,  $\theta$  faz o diagrama acima comutar. Resta mostrar que  $\theta$  é única. Seja  $\varphi$  um morfismo tal que para todo  $i \in I$ ,  $\varphi \circ \alpha_i(a) = f_i(a)$  para todo  $a \in A_i$ . Assim, se  $a \in A$ , então,  $a \in A_i$  para algum  $i \in I$ , e

$$\varphi(a) = \varphi \circ \alpha_i(a) = f_i(a) = \theta(a).$$

Logo, segue que  $\varinjlim (A_i, {}_j\alpha_i) = (A, \alpha_i)$ . Portanto,  $A$  é uma álgebra com unidades locais em  $\mathcal{C}$ . ◇

Passaremos a estudar agora os  $H$ -módulos e  $H$ -comódulos álgebras com unidades locais que são os nossos principais objetos de estudo.

**Proposição 2.1.8** *Se  $A$  é uma álgebra com unidades locais em  $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}$ , então,  $A$  possui um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{\bar{e}_i \mid i \in I\}$  e cada  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  é uma  $H$ -módulo álgebra, isto é,  $\forall h \in H$  e  $\forall i \in I$ , temos:*

$$h \cdot \bar{e}_i = \varepsilon(h) \bar{e}_i. \quad (2.2)$$

**Demonstração:** Desde que  $A$  é uma álgebra com unidades locais em  ${}_H\mathcal{M}$ , existe uma tripla  $((A_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i)_{i \leq j})$  que satisfaz as condições da Definição 2.1.6. Consideremos o funtor esquecimento  $U : {}_H\mathcal{M} \rightarrow Vec_{\mathbf{k}}$ . Então, pela Proposição 2.1.7, temos que  $A$  é uma

$\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{\bar{e}_i \mid i \in I\}$ , onde  $\bar{e}_i = \alpha_i(e_i)$  e  $e_i$  é a unidade de  $A_i$ . Assim, cada  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra unitária, ou ainda, uma álgebra com unidade em  $Vec_{\mathbf{k}}$ .

Agora, a ação de  $H$  em  $A$  restrita à  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  faz desta subálgebra um  $H$ -módulo e, como a multiplicação  $m : A \otimes A \rightarrow A$  é um morfismo em  ${}_H\mathcal{M}$ , a restrição  $m_i = m|_{\bar{e}_i A \bar{e}_i}$  é um morfismo de  $H$ -módulos. Além disso, consideremos a unidade de  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  dada por  $\bar{u}_i(k) = k\bar{e}_i = k\alpha_i(e_i) = \alpha_i(ke_i)$ . Como  $\alpha_i$  é um morfismo em  ${}_H\mathcal{M}$ , temos que  $\bar{u}_i$  é também um morfismo de  $H$ -módulos, logo, pela Proposição 1.1.10,  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  é uma  $H$ -módulo álgebra. Pela Definição A.24, temos que  $h \cdot \bar{e}_i = \varepsilon(h)\bar{e}_i$ .

◇

**Proposição 2.1.9** *Se  $A$  é uma álgebra com unidades locais em  $\mathcal{C} = \mathcal{M}^H$ , então,  $A$  possui um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{\bar{e}_i \mid i \in I\}$  e cada  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  é uma  $H$ -comódulo álgebra, isto é,  $\forall i \in I$ , temos:*

$$\rho(\bar{e}_i) = \bar{e}_i \otimes 1_H. \quad (2.3)$$

**Demonstração:** A demonstração segue de forma similar à proposição anterior, temos que  $\bar{e}_i A \bar{e}_i$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra unitária e os morfismos  $m_i = m|_{\bar{e}_i A \bar{e}_i}$  e  $\bar{u}_i$  são morfismos de  $H$ -comódulo álgebras. Isto significa que temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \bar{e}_i A \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i A \bar{e}_i & \xrightarrow{m_i} & \bar{e}_i A \bar{e}_i \\ \downarrow \rho_{\otimes} & & \downarrow \rho_{\bar{e}_i A \bar{e}_i} \\ \bar{e}_i A \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i A \bar{e}_i \otimes H & \xrightarrow{m_i \otimes H} & \bar{e}_i A \bar{e}_i \otimes H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{k} & \xrightarrow{\bar{u}_i} & \bar{e}_i A \bar{e}_i \\ \downarrow \rho_{\mathbf{k}} & & \downarrow \rho_{\bar{e}_i A \bar{e}_i} \\ \mathbf{k} \otimes H & \xrightarrow{\bar{u}_i \otimes H} & \bar{e}_i A \bar{e}_i \otimes H \end{array}$$

Aplicando o segundo diagrama em  $1_{\mathbf{k}}$  obtemos a equação desejada:  $\rho(\bar{e}_i) = \bar{e}_i \otimes 1_H$ .

◇

Cibils e Solotar [CS] definem uma  $H$ -módulo categoria  $\mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear e  $H$  é uma álgebra de Hopf. Esta definição se equipara à definição de uma  $H$ -módulo álgebra:

**Definição 2.1.10** *Uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}$  é uma  $H$ -módulo categoria se cada espaço de morfismos  ${}_y\mathcal{C}_x$  é um  $H$ -módulo, cada  $\mathbf{k}$ -álgebra de endomorfismos  ${}_x\mathcal{C}_x$  é uma  $H$ -módulo álgebra e as composições são morfismos de  $H$ -módulos, onde o produto tensorial de  $H$ -módulos é considerado um  $H$ -módulo via a ação padrão.*

Em outras palavras, existe uma família de morfismos  $\mathbf{k}$ -lineares  $\mu = \{\mu_{(y,x)} : H \otimes_y \mathcal{C}_x \rightarrow {}_y\mathcal{C}_x \mid x, y \in \mathcal{C}_0\}$ , onde  $h \otimes f \mapsto h \triangleright f$ , que definem uma estrutura de  $H$ -módulo para cada  ${}_y\mathcal{C}_x$ , tais que:

$$\begin{aligned} h \triangleright (f \circ g) &= (h_1 \triangleright f) \circ (h_2 \triangleright g), & \text{para cada } f \in {}_z\mathcal{C}_y, g \in {}_y\mathcal{C}_x \\ h \triangleright_x 1_x &= \varepsilon(h)_x 1_x, & \text{para cada identidade } {}_x 1_x. \end{aligned}$$

**Observação 2.1.11** Se  $\mathcal{C}$  é uma  $H$ -módulo categoria com  $\mathcal{C}_0$  finito,  $a(\mathcal{C})$  é uma  $H$ -módulo álgebra via  $h \triangleright ({}_y a_x) = (h \triangleright {}_y a_x)$ . Se  $\mathcal{C}_0$  não é finito,  $a(\mathcal{C})$  tem um sistema de unidades locais, veja o Exemplo 2.1.5. Neste caso, as unidades locais satisfazem  $h \triangleright E_i = \varepsilon(h)E_i$  para cada  $i \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{C}_0)$ . Portanto, cada subálgebra  $A_i = E_i a(\mathcal{C}) E_i$  é uma  $H$ -módulo álgebra e  $a(\mathcal{C})$  é uma  $H$ -módulo álgebra com unidades locais.

Analogamente, uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}$  é uma  $H$ -comódulo categoria se existe uma família de morfismos  $\mathbf{k}$ -lineares  $\rho = (\{\rho_{y,x} : {}_y \mathcal{C}_x \rightarrow {}_y \mathcal{C}_x \otimes H\})_{x,y \in \mathcal{C}_0}$  que definem uma estrutura de  $H$ -comódulo para cada  ${}_y \mathcal{C}_x$  tais que:

$$\begin{aligned} \rho_{z,x}(fg) &= \rho_{z,y}(f)\rho_{y,x}(g), & \text{para cada } f \in {}_z \mathcal{C}_y, g \in {}_y \mathcal{C}_x \\ \rho_{x,x}({}_x 1_x) &= {}_x 1_x \otimes 1, & \text{para cada identidade } {}_x 1_x \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1.12** Seja  $G$  um grupo. Uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $G$ -graduada, definida em [CM], é uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{C}$  tal que cada espaço de morfismos  ${}_y \mathcal{C}_x$  é a soma direta de subespaços vetoriais  ${}_y \mathcal{C}_x^s$ , indexados por elementos  $s \in G$  tais que  ${}_y \mathcal{C}_z^t \cdot {}_z \mathcal{C}_x^s \subseteq {}_y \mathcal{C}_x^{ts}$ , para todo  $x, y \in \mathcal{C}_0$  e para todo  $s, t \in G$ . Consideremos álgebra de Hopf  $H = \mathbf{k}G$  com sua estrutura usual. Então, a estrutura de  $\mathbf{k}G$ -comódulo categoria dada por  $\rho_{y,x} : {}_y \mathcal{C}_x \rightarrow {}_y \mathcal{C}_x \otimes \mathbf{k}G$  onde  $\rho_{y,x}$  leva  $f \in {}_y \mathcal{C}_x^g$  em  $f \otimes g \in {}_y \mathcal{C}_x^g \otimes \mathbf{k}G$ , corresponde à definição de categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $G$ -graduada. Observe que, neste caso,  $a(\mathcal{C})$  é uma álgebra  $G$ -graduada onde cada unidade local tem grau  $e$  (o neutro de  $G$ ).

## 2.2 Produtos Cruzados

Para uma ação fraca de uma álgebra de Hopf  $H$  em uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear  $\mathcal{D}$  e um 2-cociclo  $\sigma$ , Stănescu e Ştefan [SS] definiram um produto cruzado de categoria  $\mathcal{D} \#_{\sigma} H$ . Para isso, os seguintes conceitos foram introduzidos:

Uma família de morfismos  $\mathbf{k}$ -lineares  $({}_y \cdot_x : H \otimes {}_y \mathcal{D}_x \rightarrow {}_y \mathcal{D}_x)_{x,y \in \mathcal{D}_0}$  define uma ação fraca de  $H$  em  $\mathcal{D}$  se satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} h \cdot_x (f \circ f') &= \sum (h_1 \cdot_x f) \circ (h_2 \cdot_x f'); \\ h \cdot_x 1_x &= \varepsilon(h)1_x; \\ 1_H \cdot_x f &= f, \end{aligned}$$

para cada  $f \in {}_y \mathcal{D}_z, f' \in {}_z \mathcal{D}_x$  e  $h \in H$ .

Uma família de morfismos  $\sigma = (\sigma_x : H \otimes H \rightarrow {}_x \mathcal{D}_x)_{x \in \mathcal{D}_0}$  define um 2-cociclo se:

$$\sum (h_1 \cdot \sigma_x(h'_1, h''_1)) \circ \sigma_x(h_2, h'_2 h''_2) = \sum \sigma_x(h_1, h'_1) \circ \sigma_x(h_2 h'_2, h''_2)$$

para cada  $h, h', h'' \in H$  e  $x \in \mathcal{D}_0$ . Um 2-cociclo  $\sigma$  em  $\mathcal{D}$  se diz normalizado se para todo  $h \in H$ , temos:

$$\sigma_x(1_H, h) = \sigma_x(h, 1_H) = \varepsilon(h)1_x.$$

Um cociclo  $\sigma$  é invertível se cada morfismo  $\sigma_x$  é invertível por convolução e, diz-se que

a ação fraca satisfaz a condição de  $H$ -módulo torcido se para todo  $h, h' \in H$  e  $f \in {}_x\mathcal{D}_y$ , a seguinte condição é satisfeita:

$$\sum (h_1 \cdot (h'_1 \cdot f)) \circ \sigma_y(h_2, h'_2) = \sum \sigma_x(h_1, h'_1) \circ ((h_2 h'_2) \cdot f).$$

Agora, definindo as transformações lineares  ${}_x\sigma_z^y : ({}_x\mathcal{D}_y \otimes H) \otimes ({}_y\mathcal{D}_z \otimes H) \rightarrow ({}_x\mathcal{D}_z \otimes H)$  por:

$$(f \otimes h) {}_x\sigma_z^y (f' \otimes h') = \sum f \circ (h_1 \cdot f') \circ \sigma_z(h_2, h'_1) \otimes h_3 h'_2$$

tem-se que o produto cruzado  $\mathcal{D} \#_\sigma H$  é uma categoria  $\mathbf{k}$ -linear, onde  $(\mathcal{D} \#_\sigma H)_0 := \mathcal{D}_0$  e  ${}_x(\mathcal{D} \#_\sigma H)_y := {}_x\mathcal{D}_y \otimes H$ , tal que  $\{1_x \otimes 1_H\}_{x \in \mathcal{D}}$  são os morfismos identidade e as composições são dadas por  ${}_x\sigma_z^y$ . Disto segue que  $\mathcal{D} \#_\sigma H$  é uma  $H$ -comódulo categoria e as categorias lineares  $(\mathcal{D} \#_\sigma H)^{coH}$  e  $\mathcal{D}$  são isomorfas.

Observe que, para cada  $x \in \mathcal{D}_0$ , a álgebra de Hopf  $H$  age fracamente na álgebra  ${}_x\mathcal{D}_x$  e  $\sigma_x : H \otimes H \rightarrow {}_x\mathcal{D}_x$  é um 2-cociclo normalizado que satisfaz a condição de módulo torcido. Em particular, para cada  $x \in \mathcal{D}_0$ , pode-se construir o produto cruzado de álgebra  ${}_x\mathcal{D}_x \#_{\sigma_x} H$ .

Os autores mostraram, no referido artigo, que uma  $H$ -comódulo categoria é isomorfa à um produto cruzado de categoria se, e somente se, ela é fendida. Com este resultado provaram que produtos cruzados de categorias são aquelas que são extensões de Galois de categorias lineares e possuem a propriedade da base normal. No presente trabalho mostramos resultados análogos para álgebras com unidades locais, ou seja, estendemos os resultados de Stănescu e Ştefan, no sentido de que, se  $\mathcal{C}$  é uma  $H$ -comódulo categoria, então,  $a(\mathcal{C})$  é uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais.

### 2.2.1 Definições e exemplos

Para definir o produto cruzado em uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais  $A$ , precisamos observar como uma álgebra de Hopf  $H$  age em  $A$  de maneira que, ao restringir esta ação em cada subálgebra  $A_i = e_i A e_i$ , tenhamos uma ação em  $A_i$ .

**Definição 2.2.1** *Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra não unitária com um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Dizemos que  $H$  mede  $A$  por  $H \otimes A \rightarrow A$  denotada por  $h \otimes a \mapsto h \triangleright a$  se:*

- i)  $h \triangleright ab = (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)$ ;
- ii)  $h \triangleright e_i = \varepsilon(h)e_i$ .

para todo  $a, b \in A$ ,  $h \in H$  e  $i \in I$ .

Note que esta definição fornece uma medida para cada  $A_i$ . De fato,

$$\begin{aligned} h \triangleright (e_i a e_i) &= (h_{(1)} \triangleright e_i)(h_{(2)} \triangleright a)(h_{(3)} \triangleright e_i) \\ &= \varepsilon(h_{(1)})e_i(h_{(2)} \triangleright a)\varepsilon(h_{(3)})e_i \\ &= e_i(h \triangleright a)e_i \in A_i; \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

Agora, consideremos uma família  $\sigma = (\sigma_i) \in \prod \text{Hom}(H \otimes H, A_i)$  onde cada  $\sigma_i : H \otimes H \rightarrow A_i$  é um 2-cociclo normalizado para  $A_i$ , ou seja:

- i)  $(h_1 \triangleright \sigma_i(k_1, l_1))\sigma_i(h_2, k_2 l_2) = \sigma_i(h_1, k_1)\sigma_i(h_2 k_2, l)$ ;
- ii)  $\sigma_i(h, 1) = \sigma_i(1, h) = \varepsilon(h)e_i$ .

para todo  $h, k, l \in H$ .

Além disso, queremos que, ao definir o produto cruzado  $A \#_{\sigma} H$ , cada produto cruzado  $A_i \#_{\sigma_i} H$  seja uma subálgebra deste produto e as inclusões  $A_i \#_{\sigma_i} H \hookrightarrow A_j \#_{\sigma_j} H$  sejam morfismos de álgebras sempre que  $i \leq j$ . Para isso, precisamos de uma compatibilidade sobre os  $\sigma'_i$ s:

**Definição 2.2.2** *Um 2-cociclo normalizado para uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais  $A$  é uma família  $\sigma = (\sigma_i) \in \prod \text{Hom}(H \otimes H, A_i)$  tal que, cada  $\sigma_i$  é um 2-cociclo normalizado para  $A_i$  satisfazendo:*

$$e_i \sigma_j(h, k) = \sigma_i(h, k), \quad \forall i \leq j, \quad \forall h, k \in H.$$

*Dizemos ainda que  $A$  é um  $H$ -módulo torcido com respeito a  $\sigma$  se cada  $A_i$  é um  $H$ -módulo torcido com respeito a  $\sigma_i$ , ou seja,  $1 \triangleright a = a$ , para todo  $a \in A_i$  e:*

$$(h_1 \triangleright (k_1 \triangleright a))\sigma_i(h_2, k_2) = \sigma_i(h_1, k_1)(h_2 k_2 \triangleright a),$$

para todo  $h, k \in H$  e  $a \in A_i$ .

Agora consideremos as inclusões  ${}_j \beta_i : A_i \#_{\sigma_i} H \rightarrow A_j \#_{\sigma_j} H$ . Então, temos que

$$\begin{aligned} {}_j \beta_i(a \# h) {}_j \beta_i(b \# k) &= a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_j(h_{(2)}, k_{(1)}) \# h_{(3)} k_{(2)} \\ &= a(h_{(1)} \triangleright b)e_i \sigma_j(h_{(2)}, k_{(1)}) \# h_{(3)} k_{(2)} \\ &= a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_i(h_{(2)}, k_{(1)}) \# h_{(3)} k_{(2)} \\ &= {}_j \beta_i(a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_i(h_{(2)}, k_{(1)}) \# h_{(3)} k_{(2)}) \\ &= {}_j \beta_i((a \# h)(b \# k)). \end{aligned}$$

Assim, desde que os  ${}_j \beta_i$  são apenas inclusões, é simples verificar que formam, de fato, um sistema direto de álgebras.

**Definição 2.2.3** Seja  $(A, \mathbf{u})$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais tal que  $H$  mede  $A$  por  $\triangleright$ , e seja  $\sigma$  um 2-cociclo normalizado para  $A$ . O **produto cruzado**  $A\#_{\sigma}H$  é o espaço vetorial  $A \otimes H$  com a seguinte multiplicação: Dados  $a \otimes h$  e  $b \otimes k$  em  $A\#_{\sigma}H$ , existe  $i \in I$  tal que  $a \otimes h$  e  $b \otimes k$  estão em  $A_i \otimes H$ . Então, o produto de  $a \otimes h$  por  $b \otimes k$  é dado por:

$$(a \otimes h)(b \otimes k) = a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_i(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)}.$$

Daqui em diante os elementos  $a \otimes b$  em  $A\#_{\sigma}H$  serão denotados por  $a\#b$ .

O produto está bem definido por causa da compatibilidade exigida para os  $\sigma'_i$ 's. De fato, se existe  $j \neq i$  tal que  $a\#h$  e  $b\#k$  estão em  $A_j \otimes H$ , então, existe  $t \in I$ , com  $i \leq t$  e  $j \leq t$ , tal que  $a\#h$  e  $b\#k$  estão em  $A_t \otimes H$ . Assim,

$$\begin{aligned} a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_i(h_{(2)}, k_{(1)})\#h_{(3)}k_{(2)} &= a(h_{(1)} \triangleright b)e_i\sigma_t(h_{(2)}, k_{(1)})\#h_{(3)}k_{(2)} \\ &= a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_t(h_{(2)}, k_{(1)})\#h_{(3)}k_{(2)}. \end{aligned}$$

Analogamente,  $a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_j(h_{(2)}, k_{(1)})\#h_{(3)}k_{(2)} = a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma_t(h_{(2)}, k_{(1)})\#h_{(3)}k_{(2)}$ .

Além disso, este produto é associativo, pois, dados  $a\#h$ ,  $b\#k$  e  $c\#l$  em  $A\#H$ , podemos escolher  $i \in I$  tal que  $a\#h$ ,  $b\#k$  e  $c\#l$  pertencem a  $A_i \otimes H$ . Portanto,  $A\#_{\sigma}H$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. Agora, considere  $\mathbf{u}' = \{e_i\#1 \mid i \in I\}$ . Então,  $\mathbf{u}'$  é um sistema de unidades locais para  $A\#_{\sigma}H$  e cada subálgebra

$$(A\#H)_i = (e_i\#1)(A\#_{\sigma}H)(e_i\#1) = A_i\#_{\sigma_i}H$$

é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra unitária.

**Exemplo 2.2.4** (Cociclo trivial)

Suponha que  $H$  mede uma álgebra com unidades locais  $A$ . Considere a família  $\sigma = (\sigma_i) \in \prod \text{Hom}(H \otimes H, A_i)$  das aplicações  $\sigma_i(h, k) = \varepsilon(hk)e_i$ . Então:

- i)  $\sigma = (\sigma_i)$  é um 2-cociclo normalizado para  $A$ ;
- ii)  $A$  é um  $H$ -módulo torcido com respeito à  $\sigma$  se, e somente se,  $(h \triangleright (k \triangleright a)) = hk \triangleright a$ ;
- iii) o produto cruzado  $A\#_{\sigma}H$  coincide com o produto smash.

**Observação 2.2.5** Seja  $A$  uma álgebra com unidades locais em  $\mathcal{M}^H$ . Desde que  $A\#_{\sigma}H$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais e um  $H$ -comódulo á direita via  $\rho = \text{Id} \otimes \Delta$ , temos que,  $A\#_{\sigma}H$  é uma álgebra com unidades locais em  $\mathcal{M}^H$ . Seja  $\text{Alg}(\mathcal{M}^H)$  a subcategoria de  $\mathcal{M}^H$  cujos objetos são as álgebras em  $\mathcal{M}^H$  e seus morfismos. Então, o par  $((A_i\#_{\sigma_i}H)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \leq j})$  forma um sistema direto sobre  $I$  em  $\text{Alg}(\mathcal{M}^H)$  e,  $\varinjlim ((A_i\#_{\sigma_i}H)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \leq j}) = ((A\#_{\sigma}H), (\beta_i)_{i \in I})$  em  $\text{Alg}(\mathcal{M}^H)$ , onde  $\beta_i : A_i\#_{\sigma_i}H \rightarrow A\#_{\sigma}H$  são as inclusões.

## 2.2.2 Extensões fendidas e produtos cruzados

Doi e Takeuchi [DT] mostraram que, no caso de  $H$ -comódulo álgebras unitárias, uma extensão fendida é um produto cruzado com cociclo invertível. A recíproca também é verdadeira, e foi mostrado por Blattner e Montgomery [BM], estendendo uma versão mais fraca apresentada anteriormente em [BCM]. Pretendemos estender este resultado para o caso de  $H$ -comódulo álgebras com unidades locais.

Já vimos que uma álgebra  $A$  na categoria dos  $H$ -comódulos é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. Além disso, pela Proposição 2.1.9, se  $A$  é uma álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$  em  $\mathcal{M}^H$ , cada subálgebra  $e_i A e_i$  é uma  $H$ -comódulo álgebra. Isto nos sugere a seguinte definição:

**Definição 2.2.6** *Seja  $H$  uma álgebra de Hopf. Dizemos que  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra com unidade locais se  $A$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais e um  $H$ -comódulo à direita via  $\rho : A \rightarrow A \otimes H$  tal que, para todo  $a, b \in A$ :*

$$i) \quad \rho(ab) = \rho(a)\rho(b);$$

$$ii) \quad \rho(e_i) = e_i \otimes 1_H, \text{ para todo } i \in I,$$

onde  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$  é o sistema de unidades locais para  $A$ .

Usaremos a notação  $\rho(a) = a_0 \otimes a_1$ , assim, se  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais, temos  $\rho(ab) = a_0 b_0 \otimes a_1 b_1$ . O conjunto dos coinvariantes de  $H$  em  $A$  será denotado por  $A^{coH}$ , isto é,

$$A^{coH} = \{a \in A \mid \rho(a) = a \otimes 1_H\}.$$

Observe que cada  $A_i = e_i A e_i$  é uma  $H$ -comódulo álgebra unitária com  $\rho_i = \rho|_{A_i}$ . De fato, temos que  $\rho(e_i a e_i) = \rho(e_i)\rho(a)\rho(e_i) = (e_i \otimes 1)\rho(a)(e_i \otimes 1) = e_i \rho(a) e_i$ . Desde que as inclusões  ${}_j \alpha_i : A_i \rightarrow A_j$  são morfismos de álgebras e aplicações  $H$ -colineares à direita, segue que  $(A_i, {}_j \alpha_i)$  é um sistema direto em  $\mathcal{M}^H$ . Além disso, as aplicações  ${}_j \alpha_i$  são  $A_i^{coH}$ -lineares a esquerda. Por outro lado, temos que  ${}_j \alpha_i(A_i^{coH}) \subset A_j^{coH}$ . Logo,  $((A_i)^{coH}, {}_j \alpha_i|_{A_i^{coH}})$  é também um sistema direto de álgebras em  $\mathcal{M}^H$ . A fim de organizar todas estas informações em um único sistema direto introduziremos uma nova categoria:

**Definição 2.2.7** *Definimos a categoria dos pares  $\mathcal{C} = (\Lambda, \Gamma)$  como sendo a categoria cujos objetos são dados por pares  $(A, M)$ , onde  $A$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra e  $M$  é uma  $H$ -comódulo álgebra à direita e um  $A$ -módulo à esquerda. Os morfismos  $(A', M') f_{(A, M)} : (A, M) \rightarrow (A', M')$  são pares  $f = (f_1, f_2)$  onde  $f_1 : A \rightarrow A'$  é um morfismo de álgebras e  $f_2 : M \rightarrow M'$  é um morfismo de  $H$ -comódulo álgebras e de  $A$ -módulos, considerando a estrutura de  $A$ -módulo em  $M'$  dada por  $f_1$ . A composição de  $(A', M') f_{(A, M)} = (f_1, f_2)$  e  $(A'', M'') g_{(A', M')} = (g_1, g_2)$  é dada por:  $g \circ f = (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2)$ .*



**Proposição 2.2.8** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Então,*

$$\varinjlim ((A_i^{coH}, A_i)_{i \in I}, ({}_j\alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)})_{i \leq j}) = ((A^{coH}, A), (\alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)})_{i \in I})$$

em  $(\Lambda, \Gamma)$ , com  ${}_j\alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)} : (A_i^{coH}, A_i) \rightarrow (A_j^{coH}, A_j)$  dada por  ${}_j\alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)} = ({}_j\alpha_i|_{A_i^{coH}}, {}_j\alpha_i)$  onde  ${}_j\alpha_i : A_i \rightarrow A_j$  é a inclusão, sempre que  $i \leq j$ ; e,  $\alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)} : (A_i^{coH}, A_i) \rightarrow (A^{coH}, A)$  é dada por  $\alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)} = (\alpha_i|_{A_i^{coH}}, \alpha_i)$ , onde  $\alpha_i : A_i \rightarrow A$  é a inclusão, para todo  $i \in I$ .

**Demonstração:** Denotemos por  $\overline{A}_i = A_i^{coH}$  e  ${}_j\overline{\alpha}_i = {}_j\alpha_i|_{\overline{A}_i}$ .

Seja  $(B, M) \in (\Lambda, \Gamma)$  e suponhamos que, para todo  $i \in I$ , existem morfismos  $(f_i, g_i) : (\overline{A}_i, A_i) \rightarrow (B, M)$  em  $(\Lambda, \Gamma)$ , tais que, para  $i \leq j$ , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (\overline{A}_i, A_i) & \xrightarrow{(f_i, g_i)} & (B, M) \\ {}_{({}_j\overline{\alpha}_i, {}_j\alpha_i)} \downarrow & \nearrow (f_j, g_j) & \\ (\overline{A}_j, A_j) & & \end{array}$$

Queremos mostrar que existe um único morfismo  $(f, g) \in (\Lambda, \Gamma)$  que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} (A^{coH}, A) & \overset{(f, g)}{\dashrightarrow} & (B, M) \\ & \swarrow \scriptstyle{({}_i\overline{\alpha}_i, \alpha_i)} & \nearrow \scriptstyle{(f_i, g_i)} \\ & (\overline{A}_i, A_i) & \end{array}$$

**Existência:** Como  $A^{coH} = \varinjlim A_i^{coH}$  em  $\mathbf{k}\text{-Alg}$ , existe um único morfismo  $f : A^{coH} \rightarrow B$  em  $\mathbf{k}\text{-Alg}$ , tal que  $f \circ \overline{\alpha}_i = f_i$ . Da mesma forma, como  $A = \varinjlim A_i$  em  $\text{Alg}(\mathcal{M}^H)$ , existe um único morfismo  $g : A \rightarrow M$  em  $\text{Alg}(\mathcal{M}^H)$ , tal que,  $g \circ \alpha_i = g_i$ . Agora, para ver que  $(f, g) \in (\Lambda, \Gamma)$ , resta mostrar que  $g$  é um morfismo de  $A^{coH}$ -módulos: De fato, se  $x \in A_i$ , então, por construção,  $g(x) = g_i(x)$ . Sejam  $a \in A^{coH}$  e  $x \in A$ , então, existem  $i, j \in I$  tais que  $a \in A_i^{coH}$ ,  $x \in A_j$  e existe  $k \in I$  tal que  $i, j \leq k$ . Assim,  $a \in A_k^{coH}$ ,  $x \in A_k$ ,  $ax \in A_k$  e temos que:  $g(ax) = g_k(ax) = ag_k(x) = ag(x)$ , desde que  $g_k : A_k \rightarrow B$  é  $A_k^{coH}$ -linear.

**Unicidade:** Qualquer morfismo  $(f, g) : (A^{coH}, A) \rightarrow (B, M)$  fornece morfismos  $f : A^{coH} \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow M$  que são soluções dos problemas correspondentes (de limites) em  $\mathbf{k}\text{-Alg}$  e  $\text{Alg}(\mathcal{M}^H)$  que tem solução única.

◇

**Proposição 2.2.9** *Seja  $A = B \#_{\sigma} H$  uma  $H$ -comódulo álgebra com um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Então,*

$$\varinjlim ((B_i, B_i \#_{\sigma_i} H)_{i \in I}, ({}_j\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)})_{i \leq j}) = ((B, B \#_{\sigma} H), (\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)})_{i \in I}),$$

onde  ${}_j\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)} = ({}_j\alpha_i|_{B_i}, {}_j\beta_i|_{B_i \#_{\sigma_i} H})$ , sempre que  $i \leq j$ , e  $\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)} = (\alpha_i|_{B_i}, \beta_i|_{B_i \#_{\sigma_i} H})$ , para todo  $i \in I$ .

**Demonstração:** Desde que  $A^{coH} = B$ ,  $A_i = B_i \#_{\sigma_i} H$  e  $A_i^{coH} = B_i$ , o colimite segue pela proposição anterior. ◇

Se  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra com unidade, diz-se que a extensão  $A^{coH} \subset A$  é fendida se existe um morfismo de  $H$ -comódulos  $\gamma : H \rightarrow A^{coH}$  invertível por convolução. Agora, para uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais vamos pedir que cada extensão  $A_i^{coH} \subset A_i$  seja fendida e que haja uma compatibilidade entre os respectivos morfismos sempre que  $i \leq j$ :

**Definição 2.2.10** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais. Dizemos que a  $H$ -extensão  $A^{coH} \subset A$  é **fendida** via  $\gamma = (\gamma_i) \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(H, A_i)$  se:*

- i)  $A_i^{coH} \subset A_i$  é fendida via  $\gamma_i$ ,  $\forall i$ ;
- ii)  $\gamma_i = e_i \gamma_j = \gamma_j e_i$ , sempre que  $i \leq j$ ;
- iii)  $\gamma_i^{-1} = e_i \gamma_j^{-1}$ , sempre que  $i \leq j$ , onde  $\gamma_i^{-1}$  é a inversa por convolução de  $\gamma_i$ , para todo  $i \in I$ .

Esta definição nos permitirá estender para  $\mathbf{k}$ -álgebras com unidades locais, o resultado de Doi e Takeuchi [DT] citado anteriormente. Em [M, pág 106], podemos encontrar uma demonstração deste teorema para as álgebras unitárias. Por um lado, a ideia da prova consiste em mostrar que se a  $H$ -extensão  $B \subset A$  é fendida por uma aplicação  $H$ -colinear  $\gamma : H \rightarrow A$ , com  $\gamma(1) = 1$ , temos uma ação de  $H$  em  $B$  dada por  $h \triangleright b = \gamma(h_1)b\gamma^{-1}(h_2)$  e um cociclo invertível dado por  $\sigma(h, k) = \gamma(h_1)\gamma(k_1)\gamma^{-1}(h_2k_2)$ . Assim, o produto cruzado  $B \#_{\sigma} H$  é um  $H$ -comódulo à direita via  $b \# h \mapsto b \# h_1 \otimes h_2$  e temos o isomorfismo  $\Phi : B \#_{\sigma} H \rightarrow A$  dado por  $b \# h \mapsto b\gamma(h)$  que é morfismo de  $B$ -módulo à esquerda e de  $H$ -comódulo à direita. A saber, a inversa de  $\Phi$  é  $\Psi : A \rightarrow B \#_{\sigma} H$  definida por  $\Psi(a) = a_0\gamma^{-1}(a_1) \# a_2$ . Por outro lado, se  $A$  é isomorfo a  $B \#_{\sigma} H$ , define-se  $\gamma : H \rightarrow B \#_{\sigma} H$  por  $\gamma(h) = 1 \# h$ . Assim,  $\gamma$  é invertível por convolução com a inversa dada por  $\gamma^{-1}(h) = \sigma^{-1}(S(h_2), h_3) \# S(h_1)$ .

**Teorema 2.2.11** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com um sistema de unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . A extensão  $A^{coH} \subset A$  é fendida se, e somente se, existe um isomorfismo*

$$\theta : A^{coH} \#_{\sigma} H \rightarrow A$$

de  $H$ -comódulo álgebras e  $A^{coH}$ -módulos à esquerda, onde  $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$  é uma família de cociclos invertíveis por convolução tais que  $e_i \sigma_j^{-1} = \sigma_i^{-1}$ , sempre que  $i \leq j$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ): Suponha que  $A^{coH} \subset A$  é fendida por  $\gamma = (\gamma_i)$ . Assim, cada extensão  $A_i^{coH} \subset A_i$  é fendida por  $\gamma_i : H \rightarrow A_i$  e, desde que  $A_i$  é unitária para todo  $i$ , temos os isomorfismos

$$\begin{aligned} \theta_i : A_i^{coH} \#_{\sigma_i} H &\rightarrow A_i \\ a \#_{\sigma_i} h &\mapsto a\gamma_i(h) \end{aligned}$$

de  $H$ -comódulo álgebras à direita e  $A_i^{coH}$ -módulos à esquerda como explicitado acima, onde  $\sigma_i(h, k) = \gamma_i(h_1)\gamma_i(k_1)\gamma_i^{-1}(h_2k_2)$  é um cociclo invertível para  $A_i$  e  $H$  mede cada  $A_i$  por  $h \triangleright_i a = \gamma_i(h_1)a\gamma_i^{-1}(h_2)$ .

Definimos a aplicação  $\triangleright : H \otimes A \rightarrow A$  por

$$h \triangleright a = h \triangleright_i a,$$

onde  $a \in A_i$  para algum  $i \in I$ . De fato esta aplicação está bem definida pois, se existe  $j \neq i$  tal que  $a \in A_j$ , então, existe  $t \in I$  tal que  $i \leq t$  e  $j \leq t$ . Logo,

$$\begin{aligned} h \triangleright_i a &= \gamma_i(h_1)a\gamma_i^{-1}(h_2) = \gamma_t(h_1)e_i a e_i \gamma_t^{-1}(h_2) = \gamma_t(h_1)a\gamma_t^{-1}(h_2). \text{ Analogamente,} \\ h \triangleright_j a &= \gamma_j(h_1)a\gamma_j^{-1}(h_2) = \gamma_t(h_1)e_j a e_j \gamma_t^{-1}(h_2) = \gamma_t(h_1)a\gamma_t^{-1}(h_2). \end{aligned}$$

Além disso, a família  $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$  é um 2-cociclo normalizado para  $A$ . Com efeito, se  $i \leq j$  temos a compatibilidade:

$$\begin{aligned} \sigma_i(h, k) &= \underbrace{\gamma_i(h_1)}_{e_i \gamma_j(h_1)} \underbrace{\gamma_i(k_1)}_{\gamma_j(k_1) e_i} \underbrace{\gamma_i^{-1}(h_2 k_2)}_{e_i \gamma_j^{-1}(h_2 k_2)} \\ &= e_i \gamma_j(h_1) \gamma_j(k_1) e_i \gamma_j^{-1}(h_2 k_2) \\ &= e_i \gamma_j(h_1) \gamma_j(k_1) e_i \gamma_j^{-1}(h_2 k_2) \\ &= e_i \gamma_j(h_1) e_i \gamma_j(k_1) \gamma_j^{-1}(h_2 k_2) \\ &= e_i e_i \gamma_j(h_1) \gamma_j(k_1) \gamma_j^{-1}(h_2 k_2) \\ &= e_i \gamma_j(h_1) \gamma_j(k_1) \gamma_j^{-1}(h_2 k_2) \\ &= e_i \sigma_j(h, k). \end{aligned}$$

Desde que  $\sigma_i^{-1}(h, k) = \gamma_i(h_1 k_1) \gamma_i^{-1}(k_2) \gamma_i^{-1}(h_2)$ , segue que  $e_i \sigma_j^{-1} = \sigma_i^{-1}$  sempre que  $i \leq j$ .

Agora consideremos os morfismos  $\theta_i^{(\Lambda, \Gamma)} : (A_i^{coH}, A_i^{coH} \#_{\sigma_i} H) \rightarrow (A_i^{coH}, A_i)$  em  $(\Lambda, \Gamma)$  dados por  $\theta_i^{(\Lambda, \Gamma)} = (Id_{A_i^{coH}}, \theta_i)$ . Podemos verificar que o diagrama abaixo comuta sempre que  $i \leq j$ :

$$\begin{array}{ccc} (A_i^{coH}, A_i^{coH} \#_{\sigma_i} H) & \xrightarrow{\theta_i^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_i^{coH}, A_i) \\ \downarrow \beta_j^{(\Lambda, \Gamma)} & & \downarrow \alpha_i^{(\Lambda, \Gamma)} \\ (A_j^{coH}, A_j^{coH} \#_{\sigma_j} H) & \xrightarrow{\theta_j^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_j^{coH}, A_j) \end{array}$$

basta ver que se  $a \in A_i^{coH}$ , temos:

$$\theta_j({}_j\beta_i(a\#_{\sigma_i}h)) = \theta_j(a\#_{\sigma_j}h) = a\gamma_j(h) = ae_i\gamma_j(h) = a\gamma_i(h) = \theta_i(a\#_{\sigma_i}h) = {}_j\alpha_i(\theta_i(a\#_{\sigma_i}h)).$$

Pelas Proposições 2.2.8 e 2.2.9 e pela condição do colimite, existe um único  $\theta^{(\Lambda, \Gamma)} = (I, \theta) : (A^{coH}, A^{coH} \#_{\sigma} H) \rightarrow (A^{coH}, A)$  que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\exists! \theta^{(\Lambda, \Gamma)}} & \\
 (A^{coH}, A^{coH} \#_{\sigma} H) & & (A^{coH}, A) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 (A_i^{coH}, A_i^{coH} \#_{\sigma_i} H) & \xrightarrow{\theta_i^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_i^{coH}, A_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (A_j^{coH}, A_j^{coH} \#_{\sigma_j} H) & \xrightarrow{\theta_j^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_j^{coH}, A_j)
 \end{array}$$

Portanto, temos  $\theta : A^{coH} \#_{\sigma} H \rightarrow A$  que é um morfismo de  $H$ -comódulo álgebras e  $A^{coH}$ -módulos à esquerda.

Podemos proceder analogamente com as aplicações  $\theta_i^{-1}$ , isto é, temos morfismos  $(\theta_i^{-1})^{(\Lambda, \Gamma)} = (Id_{A_i^{coH}}, \theta_i^{-1}) : (A_i^{coH}, A_i) \rightarrow (A_i^{coH}, A_i^{coH} \#_{\sigma_i} H)$  e, novamente pela propriedade do colimite, existe um único  $(\theta^{-1})^{(\Lambda, \Gamma)} = (I, \theta^{-1}) : (A^{coH}, A) \rightarrow (A^{coH}, A^{coH} \#_{\sigma} H)$ . Neste caso,  $\theta^{-1}$  é a inversa de  $\theta$ .

( $\Leftarrow$ ): Queremos mostrar que a extensão  $A^{coH} \subset A$  é fendida. Desde que  $A$  é isomorfo à  $A^{coH} \#_{\sigma} H$ , vamos mostrar que para qualquer produto cruzado  $B \#_{\sigma} H$ , a extensão  $B \subset B \#_{\sigma} H$  é fendida. Assumindo que  $B$  possui unidades locais  $\{e_i\}_{i \in I}$ , defina  $\gamma_i(h) = e_i \#_{\sigma_i} h$ , para todo  $i \in I$ . Assim,  $\gamma_i$  é invertível por convolução com inversa dada por  $\gamma_i^{-1}(h) = \sigma_i^{-1}(S(h_2), h_3) \#_{\sigma_i} S(h_1)$ , isto é, cada extensão  $B_i \subset B_i \#_{\sigma_i} H$  é fendida. Além disso, sempre que  $i \leq j$ , temos:

- $e_i \gamma_j(h) = (e_i \# 1)(e_j \#_{\sigma_j} h)$ 

$$= e_i(1 \triangleright e_j) \sigma_j(1, h_1) \#_{\sigma_j} 1.h_2$$

$$= e_i \varepsilon(1) e_j \varepsilon(h_1) e_j \#_{\sigma_j} h_2$$

$$= e_i e_j \#_{\sigma_j} h = e_i \#_{\sigma_j} h = e_i \#_{\sigma_i} h = \gamma_i(h);$$
- $\gamma_j(h) e_i = (e_j \#_{\sigma_j} h)(e_i \# 1)$ 

$$= e_j(h_1 \triangleright e_i) \sigma_j(h_2, 1) \#_{\sigma_j} h_3.1$$

$$= e_j \varepsilon(h_1) e_i \varepsilon(h_2). e_j \#_{\sigma_j} h_3$$

$$= e_j e_i e_j \#_{\sigma_j} h = e_i \#_{\sigma_j} h = e_i \#_{\sigma_i} h = \gamma_i(h);$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad e_i \gamma_j^{-1}(h) &= (e_i \# 1)(\sigma_j^{-1}(S(h_2), h_3) \#_{\sigma_j} S(h_1)) \\
&= e_i(1 \triangleright \sigma_j^{-1}(S(h_2), h_3)) \sigma_j(1, S(h_1)_1) \# S(h_1)_2 \\
&= e_i \sigma_j^{-1}(S(h_2), h_3) \varepsilon(S(h_1)_1) e_j \# S(h_1)_2 \\
&= e_i \sigma_j^{-1}(S(h_2), h_3) e_j \# \varepsilon(S(h_1)_1) S(h_1)_2 \\
&= e_i \sigma_j^{-1}(S(h_2), h_3) \# S(h_1) \\
&= \sigma_i^{-1}(S(h_2), h_3) \# S(h_1) \\
&= \gamma_i^{-1}(h).
\end{aligned}$$

Portanto,  $B \subset B \#_{\sigma} H$  é fendida por  $\gamma = (\gamma_i)$ .

◇

### 2.2.3 Equivalências de produtos cruzados

O teorema a seguir nos fornece condições necessárias e suficientes para que dois produtos cruzados sejam isomorfos. Novamente, para o caso de  $\mathbf{k}$ -álgebras com unidades locais, precisamos de uma compatibilidade para termos a analogia com o caso clássico mostrado por Doi em [D89]. Uma demonstração deste teorema pode ser visto em [M, Teorema 7.3.4].

**Teorema 2.2.12** *Seja  $A$  um  $H$ -módulo torcido por  $(\triangleright, \sigma)$  e por  $(\blacktriangleright, \tau)$  e  $\phi : A \#_{\sigma} H \rightarrow A \#_{\tau} H$  um isomorfismo de  $H$ -comódulo álgebras com unidades locais que é  $A$ -linear à esquerda e fixa os idempotentes  $e_i \# 1$ . Então, existem morfismos invertíveis por convolução  $u_i \in \text{Hom}(H, A_i)$  tais que para todo  $a \in A_i$ ,  $h, k \in H$ ,*

$$i) \quad \phi(a \#_{\sigma} h) = a u_i(h_{(1)}) \#_{\tau} h_{(2)},$$

$$ii) \quad h \blacktriangleright a = u_i^{-1}(h_{(1)})(h_{(2)} \triangleright a) u_i(h_{(3)}),$$

$$iii) \quad \tau_i(h, k) = u_i^{-1}(h_{(1)})(h_{(2)} \triangleright u_i^{-1}(k_{(1)})) \sigma_i(h_{(3)}, k_{(2)}) u_i(h_{(4)} k_{(3)}),$$

$$iv) \quad u_i = e_i u_j \text{ se } i \leq j.$$

*Reciprocamente, se existem morfismos invertíveis por convolução  $u_i \in \text{Hom}(H, A_i)$  que satisfazem (ii), (iii) e (iv), então, o morfismo  $\phi$  em (i) é um isomorfismo de  $H$ -comódulo álgebras com unidades locais.*

#### Demonstração:

( $\Rightarrow$ ): Definimos  $u_i(h) = (Id \otimes \varepsilon)\phi(e_i \# h)$ . Desde que  $\phi$  fixa os idempotentes, temos  $u_i : H \rightarrow A_i$ . Então, pela demonstração para o caso clássico mostrado em [M, Teorema 7.3.4], obtemos imediatamente (i), (ii) e (iii) para cada  $i \in I$ . Para mostrar (iv), observe

que se  $i \leq j$ , então,

$$\begin{aligned}
u_i(h) &= (Id \otimes \varepsilon)\phi(e_i \# h) \\
&= (Id \otimes \varepsilon)\phi(e_i e_j \# h) \\
&= (Id \otimes \varepsilon)[(e_i \otimes 1)\phi(e_j \# h)] \\
&= e_i u_j(h).
\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ): Suponhamos que valem (ii), (iii) e (iv). Então, do caso clássico, temos que para cada  $i \in I$ , as aplicações  $\phi_i : A_i \#_{\sigma_i} H \rightarrow A_i \#_{\tau_i} H$  dadas por  $\phi_i(a \#_{\sigma_i} h) = au_i(h_{(1)}) \#_{\tau_i} h_{(2)}$ , para todo  $a \in A_i$  e  $h \in H$ , são isomorfismos de  $H$ -comódulos à direita que são  $A_i$ -lineares à esquerda. Consideremos, sempre que  $i \leq j$ , as inclusões  ${}_j\beta_i : A_i \#_{\sigma_i} H \hookrightarrow A_j \#_{\sigma_j} H$  e  ${}_j\gamma_i : A_i \#_{\tau_i} H \hookrightarrow A_j \#_{\tau_j} H$ , então, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
A_i \#_{\sigma_i} H & \xrightarrow{\phi_i} & A_i \#_{\tau_i} H \\
\downarrow {}_j\beta_i & & \downarrow {}_j\gamma_i \\
A_j \#_{\sigma_j} H & \xrightarrow{\phi_j} & A_j \#_{\tau_j} H
\end{array}$$

De fato, sejam  $a \in A_i$  e  $h \in H$ . Então,

$$\begin{aligned}
{}_j\gamma_i(\phi_i(a \#_{\sigma_i} h)) &= {}_j\gamma_i(au_i(h_1) \#_{\tau_i} h_2) \\
&= au_i(h_1) \#_{\tau_j} h_2 \\
&= ae_i u_j(h_1) \#_{\tau_j} h_2 \\
&= au_j(h_1) \#_{\tau_j} h_2 \\
&= \phi_j(a \#_{\sigma_j} h) \\
&= \phi_j({}_j\beta_i(a \#_{\sigma_i} h)).
\end{aligned}$$

Assim, se  $\phi_i^{(\Lambda, \Gamma)} = (Id_{A_i}, \phi_i) : (A_i, A_i \#_{\sigma_i} H) \rightarrow (A_i, A_i \#_{\tau_i} H)$  na categoria  $(\Lambda, \Gamma)$ , temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
(A_i, A_i \#_{\sigma_i} H) & \xrightarrow{\phi_i^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_i, A_i \#_{\tau_i} H) \\
\downarrow {}_j\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)} & & \downarrow {}_j\gamma_i^{(\Lambda, \Gamma)} \\
(A_j, A_j \#_{\sigma_j} H) & \xrightarrow{\phi_j^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_j, A_j \#_{\tau_j} H)
\end{array}$$

onde,  ${}_j\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)} = ({}_j\alpha_i, {}_j\beta_i)$  e  ${}_j\gamma_i^{(\Lambda, \Gamma)} = ({}_j\alpha_i, {}_j\gamma_i)$ .

Além disso, na categoria dos pares  $(\Lambda, \Gamma)$  temos que  $\varinjlim (A_i, A_i \#_{\sigma_i} H) = (A, A \#_{\sigma} H)$  e  $\varinjlim (A_i, A_i \#_{\tau_i} H) = (A, A \#_{\tau} H)$ . Logo, desde que cada  $\phi_i^{(\Lambda, \Gamma)}$  é um isomorfismo, temos que existe um único isomorfismo  $\phi^{(\Lambda, \Gamma)} : (A, A \#_{\sigma} H) \rightarrow (A, A \#_{\tau} H)$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{\exists! \phi^{(\Lambda, \Gamma)}} & \\
(A, A \#_{\sigma} H) & & (A, A \#_{\tau} H) \\
& \swarrow \beta_i^{(\Lambda, \Gamma)} & \nearrow \gamma_i^{(\Lambda, \Gamma)} \\
& (A_i, A_i \#_{\sigma_i} H) & \xrightarrow{\phi_i^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_i, A_i \#_{\tau_i} H) \\
& \searrow \beta_j^{(\Lambda, \Gamma)} & \downarrow j\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)} & \downarrow j\gamma_i^{(\Lambda, \Gamma)} & \nearrow \gamma_j^{(\Lambda, \Gamma)} \\
& (A_j, A_j \#_{\sigma_j} H) & \xrightarrow{\phi_j^{(\Lambda, \Gamma)}} & (A_j, A_j \#_{\tau_j} H)
\end{array}$$

ou seja, se  $a \in A_i$  e  $h \in H$ , temos que,  $\gamma_i^{(\Lambda, \Gamma)}(\phi_i^{(\Lambda, \Gamma)}(a, a \#_{\sigma_i} h)) = \phi^{(\Lambda, \Gamma)}(\beta_i^{(\Lambda, \Gamma)}(a, a \#_{\sigma_i} h))$ .

Está claro que se  $\phi^{(\Lambda, \Gamma)} = (f, \phi)$ , então,  $f = Id_A$ . Por outro lado, temos que,

$$\phi(\beta_i(a \#_{\sigma_i} h)) = \gamma_i(\phi_i(a \#_{\sigma_i} h)),$$

isto é,  $\phi(a \#_{\sigma} h) = \gamma_i(au_i(h_1) \#_{\tau_i} h_2)$  e, portanto, temos o isomorfismo

$$\phi(a \#_{\sigma} h) = au_i(h_1) \#_{\tau} h_2,$$

quando  $a \in A_i$ .

◇

## 2.3 Extensões de Galois

Para uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais  $A$ , usaremos a notação:  $B = A^{coH}$  e  $B_i = (A_i)^{coH} (= e_i A^{coH} e_i)$ .

Lembremos que se  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra à direita com unidade, com coação dada por  $\rho : A \rightarrow A \otimes H$ , então diz-se que a extensão  $B = A^{coH} \subset A$  é  $H$ -Galois se a aplicação canônica  $\text{can} : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$  dada por  $a \otimes b \mapsto (a \otimes 1)\rho(b)$  é bijetiva. Usaremos esta mesma definição para  $H$ -comódulo álgebras sem unidade.

Em geral, se  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ , segue que:

$$\text{can}(e_i A \otimes_B A e_i) \subset A_i \otimes H,$$

pois  $\text{can}$  é um morfismo de  $A$ -bimódulos. Tomando as restrições  $\text{can}_i = \text{can}|_{e_i A \otimes_B A e_i}$ , para todo  $i \in I$ , temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{\text{can}} & \\
A \otimes_B A & & A \otimes H \\
& \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\
e_i A \otimes_B A e_i & \xrightarrow{\text{can}_i} & A_i \otimes H \\
& \downarrow & \downarrow \\
e_j A \otimes_B A e_j & \xrightarrow{\text{can}_j} & A_j \otimes H
\end{array}$$

considerando as respectivas inclusões. Como  $\varinjlim(e_i A \otimes_B A e_i) = A \otimes_B A$  e  $\varinjlim(A_i \otimes H) = A \otimes H$ , temos que, se as restrições  $\text{can}_i$  são bijetivas, então,  $\text{can} : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$  também é bijetiva, ou seja, a extensão  $A^{coH} \subset A$  é  $H$ -Galois.

**Definição 2.3.1** *A  $H$ -extensão  $B \subset A$  será chamada **extensão  $H$ -Galois com unidades locais** se cada extensão  $B_i \subset A_i$  é  $H$ -Galois, i.e., se os morfismos  $\text{can}_i : A_i \otimes_{B_i} A_i \rightarrow A_i \otimes H$  dados por  $\text{can}_i(a \otimes b) = a\rho(b)$  são isomorfismos.*

Para o próximo teorema precisamos definir a propriedade da base normal para  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais. Novamente pediremos uma certa compatibilidade sempre que  $i \leq j$ .

**Definição 2.3.2** *Se  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais, dizemos que a extensão  $B \subset A$  tem a **propriedade da base normal** se existe um isomorfismo  $H$ -colinear à direita e  $B$ -linear à esquerda  $\phi : B \otimes H \rightarrow A$  tal que:*

- i)  $\phi(B_i \otimes H) \subset A_i$ ,  $\forall i \in I$ , e as restrições  $\phi_i = \phi|_{B_i \otimes H} : B_i \otimes H \rightarrow A_i$  são isomorfismos  $B_i$ -lineares;
- ii)  $\phi_j(e_j \otimes h)e_i = \phi_i(e_i \otimes h)$  para todo  $h \in H$  sempre que  $i \leq j$ .

O próximo resultado é a caracterização de extensões fendidas que estende o conhecido teorema de Doi e Takeuchi [DT, Thm 9], onde mostra-se a equivalência entre extensões fendidas e extensões de Galois com a propriedade da base normal para o caso de álgebras com unidade. Supondo que a extensão  $B \subset A$  é fendida por  $\gamma$ , tem-se diretamente que  $A$  é isomorfo ao produto  $B \#_\sigma H$ , logo, segue que  $A$  tem a propriedade da base normal. Para mostrar que  $A$  é  $H$ -Galois, constrói-se a inversa da aplicação canônica  $\text{can}(a \otimes b) = a\rho(b)$ . Esta aplicação é dada por  $\alpha(a \otimes h) = a\gamma^{-1}(h_1) \otimes \gamma(h_2)$ . Por outro lado, se a extensão  $B \subset A$  é  $H$ -Galois e tem a propriedade da base normal, então,  $\text{can}$  é bijetiva e existe um isomorfismo  $\phi : B \otimes H \rightarrow A$  que é morfismo de  $A$ -módulo à esquerda e  $H$ -comódulo à direita. Neste caso, define-se  $\gamma : H \rightarrow A$  por  $\gamma(h) = \phi(1 \otimes h)$ . O fato da extensão ser  $H$ -Galois se faz necessária para mostrar que  $\gamma$  é invertível por convolução; sua inversa é dada por  $\mu(h) = m(\text{Id} \otimes g)\text{can}^{-1}(1 \otimes h)$ , onde  $g = (\text{Id} \otimes \varepsilon) \circ \phi^{-1}$ . Maiores detalhes desta demonstração podem ser vistos em [M, Thm 8.2.4].



**Teorema 2.3.3** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais,  $B = A^{coH}$ ,  $A_i = e_i A e_i$  e  $B_i = (A_i)^{coH}$ , para cada  $i \in I$ . Então são equivalentes:*

*i) A  $H$ -extensão  $B \subset A$  é fendida,*

*ii) A  $H$ -extensão  $B \subset A$  é uma extensão  $H$ -Galois com unidades locais e satisfaz a propriedade da base normal.*

**Demonstração:**

$(i \Rightarrow ii)$  : Suponhamos que  $B \subset A$  é fendida por  $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$ . Então, cada extensão  $B_i \subset A_i$  é fendida por  $\gamma_i$  e temos a compatibilidade  $\gamma_i = e_i \gamma_j = \gamma_j e_i$ , sempre que  $i \leq j$ . Do caso clássico, segue que cada extensão  $B_i \subset A_i$  é  $H$ -Galois e, portanto, a extensão  $B \subset A$  é  $H$ -Galois com unidades locais. Agora, pelo Teorema 2.2.11, temos um isomorfismo  $\theta : B \#_\sigma H \rightarrow A$  que é morfismo de  $H$ -comódulo álgebras à direita e  $B$ -módulos à esquerda. Pela construção de  $\theta$ , temos que,  $\theta(B_i \otimes H) \subset A_i$  e os morfismos  $\theta_i = \theta|_{B_i \otimes H} : B_i \otimes H \rightarrow A_i$  são isomorfismos  $B_i$ -lineares para todo  $i$ . Além disso, se  $i \leq j$ , temos,

$$\theta_j(e_j \otimes h)e_i = e_j \gamma_j(h)e_i = \gamma_j(h)e_i = \gamma_i(h)e_i = e_i \gamma_i(h) = \theta_i(e_i \otimes h).$$

Portanto,  $B \subset A$  tem a propriedade da base normal.

$(ii \Rightarrow i)$  : Se  $B \subset A$  é  $H$ -Galois com unidades locais, temos que, para todo  $i \in I$ , a extensão  $B_i \subset A_i$  é  $H$ -Galois. Além disso, se  $B \subset A$  tem a propriedade da base normal, existe um isomorfismo  $\phi : B \otimes H \rightarrow A$  que é  $H$ -colinear à direita e  $B$ -linear à esquerda, tal que, para cada  $i \in I$ ,  $\phi_i = \phi|_{B_i \otimes H} : B_i \otimes H \rightarrow A_i$  é um isomorfismo  $B_i$ -linear e  $\phi_j(e_j \otimes h)e_i = \phi_i(e_i \otimes h)$  sempre que  $i \leq j$ . Assim, do caso clássico, temos que cada extensão  $B_i \subset A_i$  é fendida por  $\gamma_i(h) = \phi_i(e_i \otimes h)$ . Agora, seja  $i \leq j$ . Então,

$$e_i \gamma_j(h) = e_i \phi_j(e_j \otimes h) = e_i \phi(e_j \otimes h) = \phi(e_i e_j \otimes h) = \phi(e_i \otimes h) = \phi_i(e_i \otimes h) = \gamma_i(h),$$

desde que  $\phi$  é  $B$ -linear. Por outro lado, temos que  $\gamma_j(h)e_i = \phi_j(e_j \otimes h)e_i = \phi_i(e_i \otimes h) = \gamma_i(h)$ . Portanto,  $B \subset A$  é fendida por  $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$ .

◇

O próximo capítulo será dedicado a mostrar uma condição para a álgebra  $A$  tal que, se a extensão  $B \subset A$  é  $H$ -Galois, então, cada extensão  $B_i \subset A_i$  é  $H$ -Galois, ou seja,  $A$  é  $H$ -Galois com unidades locais. Trata-se de uma conexão forte para  $A$ .

## 3 Conexões fortes

Uma vez que a extensão  $A^{coH} \subset A$  é  $H$ -Galois, nada se pode afirmar a respeito das extensões  $A_i^{coH} \subset A_i$ , onde cada  $A_i$  é uma subálgebra unitária de  $A$ . A finalidade deste capítulo é mostrar uma condição suficiente para a  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais  $A$  tal que a condição de Galois em  $A$  implica na condição de Galois para as suas partes  $A_i$ . Veremos adiante que a conexão forte para  $A$  cumpre este papel. Porém, encontramos na literatura esta condição apenas para álgebras com unidade, mas, o que se precisa, mais especificamente, é que o espaço vetorial  $A \otimes H$  possua elementos (denotaremos por  $(1 \otimes h)_M$ ) que preservem a estrutura de  $A$ -bimódulo no seguinte sentido:

$$a \cdot (1 \otimes h)_M = a \otimes h,$$

$$(1 \otimes h)_M \cdot a = a_0 \otimes ha_1,$$

para todo  $a \in A$  e  $h \in H$ .

Isto é possível utilizado-se o conceito de multiplicadores da álgebra para bimódulos. Este será o tema da próxima seção.

### 3.1 Multiplicadores da álgebra

A principal referência para esta seção é [D-A08].

Sejam  $\mathbf{k}$  um anel comutativo e  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com ou sem unidade. Diremos que um  $A$ -módulo à esquerda (ou à direita)  $X$  é não-degenerado se  $x = 0$  sempre que  $ax = 0$  (ou  $xa = 0$ ) para todo  $a \in A$ . Um  $A$ -bimódulo  $X$  é dito não-degenerado se é não-degenerado como  $A$ -módulo à esquerda e como  $A$ -módulo à direita.

**Definição 3.1.1** *Sejam  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com ou sem unidade sobre  $\mathbf{k}$  e  $X$  um  $A$ -bimódulo não-degenerado. Denotaremos por  $M_A(X)$  o espaço dos pares  $(l, r)$  de aplicações  $\mathbf{k}$ -lineares de  $A$  em  $X$  satisfazendo:*

$$al(a') = r(a)a'$$

para todo  $a, a' \in A$ .

Agora, para todo  $(l, r) \in M_A(X)$  e  $a, a', a'' \in A$ , temos que

$$r(aa')a'' = aa'l(a'') = ar(a')a''.$$

Como  $X$  é não-degenerado (como um módulo à direita), temos  $r(aa') = ar(a')$ . Analogamente, como  $X$  é não-degenerado como um módulo à esquerda, temos  $l(aa') = l(a)a'$ .

Usaremos a seguinte notação: Se  $w = (l, r) \in M_A(X)$  denotaremos:

$$\begin{aligned} w \cdot a &= l(a), \\ a \cdot w &= r(a). \end{aligned}$$

Assim,  $w \cdot (aa') = (w \cdot a)a'$ ,  $(aa') \cdot w = a(a' \cdot w)$  e  $(a \cdot w)a' = a(w \cdot a')$ .

**Proposição 3.1.2** *Sejam  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra e  $X$  um  $A$ -bimódulo não-degenerado. Então,  $M_A(X)$  é um  $A$ -bimódulo com as seguintes ações: Sejam  $w \in M_A(X)$  e  $b \in A$ , então,  $bw$  é dado por:*

$$i) \quad bw \cdot a = (b \cdot w)a;$$

$$ii) \quad a \cdot bw = a(b \cdot w), \quad \forall a \in A.$$

Analogamente, sejam  $w \in M_A(X)$  e  $b' \in A$ , então,  $wb'$  é dado por:

$$iii) \quad wb' \cdot a = (w \cdot b')a;$$

$$iv) \quad a \cdot wb' = a(w \cdot b'), \quad \forall a \in A.$$

**Demonstração:** Primeiro, vejamos que  $bw \in M_A(X)$ . De fato,

$$a(bw \cdot a') = a((b \cdot w)a') = (a(b \cdot w))a' = (a \cdot bw)a'.$$

Analogamente,  $wb \in M_A(X)$ . Agora, sejam  $b, b' \in A$ , então  $(bw)b' = b(wb')$ . De fato, se  $a \in A$ , então,

$$(bw)b' \cdot a = (bw \cdot b')a = ((b \cdot w)b')a = (b(w \cdot b'))a = (b \cdot (wb'))a = b(wb') \cdot a.$$

E, da mesma forma,  $a \cdot (bw)b' = a \cdot b(wb')$ . Portanto,  $M_A(X)$  é um  $A$ -bimódulo.  $\diamond$

**Definição 3.1.3** *Para cada  $x \in X$ , definimos de maneira natural  $\iota(x) \in M_A(X)$  da seguinte maneira: Se  $\iota(x) = (l_x, r_x)$ , então,*

$$\begin{aligned} l_x(a) &= xa \\ r_x(a) &= ax \end{aligned}$$

para todo  $a \in A$ .

Pelas propriedades de bimódulos,  $\iota(x)$  está bem definido:  $r_x(a)a' = (ax)a' = a(xa') = al_x(a')$ .

**Proposição 3.1.4** *A aplicação  $\iota_X : X \rightarrow M_A(X)$  dada por  $x \mapsto \iota(x)$  é uma aplicação injetiva de bimódulos.*

**Demonstração:** A aplicação  $\iota_X$  é injetiva pois  $X$  é um módulo não-degenerado.

Além disso, dados  $x \in X$  e  $a \in A$ , temos:

$$\iota(ax) \cdot a' = (ax)a' = (a \cdot \iota(x))a' = a\iota(x) \cdot a'; \text{ e,}$$

$$a' \cdot \iota(ax) = a'(ax) = a'(a \cdot \iota(x)) = a' \cdot a\iota(x), \text{ para todo } a' \in A.$$

Portanto,  $\iota(ax) = a\iota(x)$ . Analogamente, podemos provar que  $\iota(xa) = \iota(x)a$ .

◇

**Observação 3.1.5** Se  $A$  é uma álgebra unitária e  $X$  é um  $A$ -bimódulo unitário, isto é,  $1_A \cdot x = x = x \cdot 1_A$ , para todo  $x \in X$ , podemos identificar  $X$  com  $M_A(X)$ . Primeiro, observe que  $w \cdot 1_A = 1_A \cdot w$  para todo  $w \in M_A(X)$ , de fato,  $w \cdot 1_A = 1_A(w \cdot 1_A) = (1_A \cdot w)1_A = 1_A \cdot w$ . Agora, defina uma aplicação  $\pi : M_A(X) \rightarrow X$  onde  $\pi(w) = w \cdot 1_A$  (ou  $1_A \cdot w$ ). Então,

i)  $\iota \circ \pi = \text{Id}_{M_A(X)}$ . De fato,

$$\iota(\pi(w)) \cdot a = \iota(w \cdot 1_A) \cdot a = (w \cdot 1_A)a = w \cdot (1_A a) = w \cdot a$$

$$a \cdot \iota(\pi(w)) = a \cdot \iota(1_A \cdot w) = a(1_A \cdot w) = (a1_A) \cdot w = a \cdot w$$

Assim,  $\iota(\pi(w)) = w$ , para todo  $w \in M_A(X)$ .

ii)  $\pi \circ \iota = \text{Id}_X$ . De fato,

$$\pi(\iota(x)) = \iota(x) \cdot 1_A = x \cdot 1_A = x, \text{ para todo } x \in X.$$

**Definição 3.1.6** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo de  $A$ -bimódulos. Definimos a extensão  $\bar{f} : M_A(X) \rightarrow M_A(Y)$  como segue:*

$$\begin{aligned} \bar{f}(w) \cdot a &= f(w \cdot a) \\ a \cdot \bar{f}(w) &= f(a \cdot w) \end{aligned}$$

para todo  $w \in M_A(X)$  e  $a \in A$ .

Podemos ver que  $\bar{f}(w) \in M_A(Y)$ . De fato,  $(a \cdot \bar{f}(w))a' = f(a \cdot w)a' = f((a \cdot w)a') = f(a(w \cdot a')) = af(w \cdot a') = a(\bar{f}(w) \cdot a')$ .

**Proposição 3.1.7**  *$\bar{f}$  é um morfismo de  $A$ -bimódulos.*

**Demonstração:** Se  $w \in M_A(X)$  e  $a, a' \in A$ , temos,

$$\begin{aligned} \bar{f}(aw) \cdot a' &= f(aw \cdot a') = f((a \cdot w)a') = f(a \cdot w)a' = (a \cdot \bar{f}(w))a' = a\bar{f}(w) \cdot a', \text{ e} \\ a' \cdot \bar{f}(aw) &= f(a' \cdot aw) = f(a'(a \cdot w)) = a'f(a \cdot w) = a'(a \cdot \bar{f}(w)) = a' \cdot a\bar{f}(w). \end{aligned}$$

Portanto,  $\overline{f}(aw) = a\overline{f}(w)$ . Analogamente, podemos mostrar que  $\overline{f}(wa) = \overline{f}(w)a$ .

◇

**Exemplo 3.1.8** Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com a estrutura de comódulo dada por  $\rho$ . Desde que  $A \otimes A$  e  $A \otimes A \otimes H$  são  $A$ -bimódulos via:

$$\begin{aligned} a(a' \otimes a'') &= aa' \otimes a'' & e & & a(a' \otimes b \otimes h) &= aa' \otimes b \otimes h \\ (a' \otimes a'')a &= a' \otimes a''a & & & (a \otimes b' \otimes h)b &= a \otimes b'b_0 \otimes hb_1 \end{aligned}$$

temos que  $\text{Id} \otimes \rho: A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes H$  é um morfismo de  $A$ -bimódulos e pode ser estendida à:  $\overline{\text{Id} \otimes \rho}: M_A(A \otimes A) \rightarrow M_A(A \otimes A \otimes H)$ , que é também um morfismo de  $A$ -bimódulos.

**Proposição 3.1.9** Se  $f: X \rightarrow Y$  é um morfismo de  $A$ -bimódulos, então  $\overline{f} \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$ , i.e., o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \iota_X & & \downarrow \iota_Y \\ M_A(X) & \xrightarrow{\overline{f}} & M_A(Y) \end{array}$$

**Demonstração:** Sejam  $x \in X$  e  $a \in A$ , então

$$\begin{aligned} \overline{f}(\iota_X(x)) \cdot a &= f(\iota_X(x) \cdot a) = f(xa) = f(x)a = \iota_Y(f(x)) \cdot a, \text{ e} \\ a \cdot \overline{f}(\iota_X(x)) &= f(a \cdot \iota_X(x)) = f(ax) = af(x) = a \cdot \iota_Y(f(x)). \end{aligned}$$

◇

**Proposição 3.1.10** Sejam  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  morfismos de  $A$ -bimódulos. Então,  $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$ .

**Demonstração:** Para cada  $w \in M_A(X)$  e  $a \in A$ :

$$\begin{aligned} \overline{g \circ f}(w) \cdot a &= (g \circ f)(w \cdot a) = g(f(w \cdot a)) = g(\overline{f}(w) \cdot a) = \overline{g}(\overline{f}(w)) \cdot a = (\overline{g} \circ \overline{f})(w) \cdot a, \text{ e} \\ a \cdot \overline{g \circ f}(w) &= (g \circ f)(a \cdot w) = g(f(a \cdot w)) = g(a \cdot \overline{f}(w)) = a \cdot \overline{g}(\overline{f}(w)) = a \cdot (\overline{g} \circ \overline{f})(w). \end{aligned}$$

◇

Com estes resultados podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.11** Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. Então,

- i)  $M_A: {}_A\mathcal{M}_A \rightarrow {}_A\mathcal{M}_A$  é um funtor,
- ii)  $\iota: \text{Id}_{{}_A\mathcal{M}_A} \rightarrow M_A$  é uma transformação natural.

◇

## 3.2 Conexões fortes e extensões principais em álgebras com unidades locais

Daqui em diante,  $H$  será uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e  $A$  será uma  $H$ -comódulo álgebra à direita com a estrutura de comódulo dada por  $\rho : A \rightarrow A \otimes H$  denotada por  $\rho(a) = a_0 \otimes a_1$ . A existência da inversa da antípoda nos permite definir uma coação à esquerda  $\lambda : A \rightarrow H \otimes A$  dada por  $a \mapsto S^{-1}(a_1) \otimes a_0$ . Isto faz de  $A$  um  $H$ -comódulo à esquerda e uma  $H^{op}$ -comódulo álgebra à esquerda. A subálgebra de coinvariantes em relação à  $\lambda$  é a mesma em relação à  $\rho$ , a qual denotamos por  $B = A^{coH}$ .

**Observação 3.2.1** Vimos no Exemplo 3.1.8 que a aplicação  $\text{Id} \otimes \rho : A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes H$  pode ser estendida aos multiplicadores:  $\overline{\text{Id} \otimes \rho} : M_A(A \otimes A) \rightarrow M_A(A \otimes A \otimes H)$ . Da mesma forma, podemos estender  $\lambda \otimes \text{Id} : A \otimes A \rightarrow H \otimes A \otimes A$  à  $\overline{\lambda \otimes \text{Id}} : M_A(A \otimes A) \rightarrow M_A(H \otimes A \otimes A)$ , onde a estrutura de  $A$ -bimódulo de  $H \otimes A \otimes A$  é dada por:

$$\begin{aligned} a(h \otimes b \otimes c) &= hS^{-1}(a_1) \otimes a_0 b \otimes c, \\ (h \otimes a \otimes c)b &= h \otimes a \otimes cb. \end{aligned}$$

Uma conexão forte em uma  $H$ -comódulo álgebra unitária [H-PM96], onde  $H$  é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e  $\widetilde{\text{can}}$  é o levantamento de  $\text{can}$  a  $A \otimes A$ , é uma aplicação linear  $\ell : H \rightarrow A \otimes A$  satisfazendo:

- i)  $(\text{Id} \otimes \rho) \circ \ell = (\ell \otimes \text{Id}) \circ \Delta$ ;
- ii)  $(\lambda \otimes \text{Id}) \circ \ell = (\text{Id} \otimes \ell) \circ \Delta$ ;
- iii)  $\widetilde{\text{can}} \circ \ell = 1 \otimes \text{Id}$ .

Ou ainda, uma conexão forte  $\ell$  satisfaz os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \text{i)} & \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\ell} & A \otimes A \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \text{Id} \otimes \rho \\ H \otimes H & \xrightarrow{\ell \otimes \text{Id}} & A \otimes A \otimes H \end{array} & \text{ii)} & \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\ell} & A \otimes A \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \lambda \otimes \text{Id} \\ H \otimes H & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \ell} & H \otimes A \otimes A \end{array} \\ & & & & \text{iii)} & \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\ell} & A \otimes A \\ & \searrow 1 \otimes \text{Id} & \downarrow \widetilde{\text{can}} \\ & & A \otimes H \end{array} \end{array}$$

Usando a notação de Heyneman-Sweedler  $\ell(h) = \ell(h)^{\langle 1 \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle 2 \rangle}$ , podemos escrever as propriedades acima da seguinte forma:

$$\text{i)} \quad \ell(h)^{\langle 1 \rangle} \otimes \ell(h)_0^{\langle 2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle 2 \rangle} = \ell(h_1)^{\langle 1 \rangle} \otimes \ell(h_1)^{\langle 2 \rangle} \otimes h_2,$$

- ii)  $S^{-1}(\ell(h)_1^{<1>}) \otimes \ell(h)_0^{<1>} \otimes \ell(h)^{<2>} = h_1 \otimes \ell(h_2)^{<1>} \otimes \ell(h_2)^{<2>},$   
 iii)  $\ell(h)^{<1>} \ell(h)_0^{<2>} \otimes \ell(h)_1^{<2>} = 1 \otimes h.$

Aplicando  $\text{Id} \otimes \varepsilon$  na última equação obtemos a fórmula:

$$\ell(h)^{<1>} \ell(h)^{<2>} = \varepsilon(h).$$

**Observação 3.2.2** Se  $B$  é unitário, o produto cruzado  $B \#_{\sigma} H$  possui uma conexão forte. De fato, temos que a extensão  $B \subset A$  é fendida, digamos por  $\gamma$ . Se  $\delta$  é a inversa por convolução de  $\gamma$ , então,  $\ell(h) = \delta(h_1) \otimes \gamma(h_2)$  define uma conexão forte para  $A$ :

$$\begin{aligned} \text{i) } ((\text{Id} \otimes \rho) \circ \ell)(h) &= (\text{Id} \otimes \rho)(\delta(h_1) \otimes \gamma(h_2)) \\ &= \delta(h_1) \otimes (\rho \circ \gamma)(h_2) \\ &= \delta(h_1) \otimes ((\gamma \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(h_2) \quad (\gamma \text{ é morfismo de } H\text{-comódulo}) \\ &= \delta(h_1) \otimes \gamma(h_{21}) \otimes h_{22} \\ &= \delta(h_{11}) \otimes \gamma(h_{12}) \otimes h_2 \\ &= \ell(h_1) \otimes h_2 \\ &= (\ell \otimes \text{Id})(h_1 \otimes h_2) \\ &= ((\ell \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(h) \end{aligned}$$

ii) Primeiro vejamos que:

$$S^{-1}(\delta(h)_1) \otimes \delta(h)_0 = h_1 \otimes \delta(h_2). \quad (3.1)$$

De fato, seja  $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  a aplicação torção dada por  $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$  para quaisquer dois  $\mathbf{k}$ -espaços  $V$  e  $W$ . Então,

$$\begin{aligned} S^{-1}(\delta(h)_1) \otimes \delta(h)_0 &= (S^{-1} \otimes \text{Id})(\delta(h)_1 \otimes \delta(h)_0) \\ &= ((S^{-1} \otimes \text{Id}) \circ \tau \circ (\rho \circ \delta))(h) \\ &\stackrel{*}{=} ((S^{-1} \otimes \text{Id}) \circ \tau \circ [(\delta \otimes S) \circ \tau \circ \Delta])(h) \\ &= ((S^{-1} \otimes \text{Id}) \circ \tau \circ (\delta \otimes S))(h_2 \otimes h_1) \\ &= ((S^{-1} \otimes \text{Id}) \circ \tau)(\delta(h_2) \otimes S(h_1)) \\ &= (S^{-1} \otimes \text{Id})(S(h_1) \otimes \delta(h_2)) \\ &= h_1 \otimes \delta(h_2) \end{aligned}$$

\* Uma demonstração de que  $\rho \circ \delta = (\delta \otimes S) \circ \tau \circ \Delta$  pode ser vista em [M, pag 106]

Daí, temos que:

$$\begin{aligned} ((\lambda \otimes \text{Id}) \circ \ell)(h) &= (\lambda \otimes \text{Id})(\delta(h_1) \otimes \gamma(h_2)) \\ &= S^{-1}(\delta(h_1)_1) \otimes \delta(h_1)_0 \otimes \gamma(h_2) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} h_{11} \otimes \delta(h_{12}) \otimes \gamma(h_2) \\ &= h_1 \otimes \delta(h_{21}) \gamma(h_{22}) \\ &= h_1 \otimes \ell(h_2) \\ &= ((\text{Id} \otimes \ell) \circ \Delta)(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } (\widetilde{\text{can}} \circ \ell)(h) &= \widetilde{\text{can}}(\delta(h_1) \otimes \gamma(h_2)) \\
&= \delta(h_1)\rho(\gamma(h_2)) \\
&= \delta(h_1)(\gamma \otimes \text{Id})(\Delta(h_2)) \\
&= \delta(h_1)\gamma(h_{21}) \otimes h_{22} \\
&= \varepsilon(h_1)1 \otimes h_2 \\
&= 1 \otimes h
\end{aligned}$$

A propriedade de conexão forte, para o caso em que se tem unidade, está intimamente relacionada com o conceito de principalidade [BH04]. Usaremos, para o caso sem unidade, a mesma definição de comódulo álgebras principais que se tem para álgebras unitárias:

**Definição 3.2.3** *Seja  $A$  uma comódulo álgebra à esquerda (com ou sem unidade) sobre uma álgebra de Hopf  $H$  com antípoda bijetiva, e seja  $B := A^{\text{co}H}$  a subálgebra dos coinvariantes. A comódulo álgebra  $A$  é chamada **principal** se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. a extensão  $B \subset A$  é  $H$ -Galois;
2. a comódulo álgebra  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva à direita como um  $B$ -módulo à esquerda, i.e., existe uma cisão da multiplicação  $B \otimes A \rightarrow A$  que é  $H$ -colinear à direita e  $B$ -linear à esquerda.

**Observação 3.2.4** Se  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva à direita como um  $B$ -módulo à esquerda, existe uma cisão da multiplicação  $m : B \otimes A \rightarrow A$  que é  $H$ -colinear à direita e  $B$ -linear à esquerda, isto é, existe  $s : A \rightarrow B \otimes A$  tal que  $m \circ s = \text{Id}$ . Logo, se  $A$  é principal,  $\text{can} : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$  e  $\text{can}^{-1} : A \otimes H \rightarrow A \otimes_B A$  podem ser levantados à  $\widetilde{\text{can}} : A \otimes A \rightarrow A \otimes H$  e  $\widetilde{\text{can}}^{-1} : A \otimes H \rightarrow A \otimes A$ , respectivamente, conforme podemos observar nos diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes_B A & \xrightarrow{\text{can}} & A \otimes H \\
\text{Id} \otimes_B m \uparrow & & \nearrow \widetilde{\text{can}} \\
A \otimes_B B \otimes A & & \\
\cong \uparrow & & \\
A \otimes A & & 
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A \otimes H & \xrightarrow{\text{can}^{-1}} & A \otimes_B A \\
\searrow \widetilde{\text{can}}^{-1} & & \downarrow \text{Id} \otimes_B s \\
& & A \otimes_B B \otimes A \\
& & \cong \downarrow \\
& & A \otimes A
\end{array}$$

Assim,  $\widetilde{\text{can}} \circ \widetilde{\text{can}}^{-1} = \text{Id}_{A \otimes H}$ .

Desde que  $\widetilde{\text{can}}$  e  $\widetilde{\text{can}}^{-1}$  são morfismos de  $A$ -bimódulos, com a estrutura de  $A$ -bimódulo de  $A \otimes H$  dada por:

$$\begin{aligned}
a(a' \otimes h) &= aa' \otimes h, \\
(a' \otimes h)a &= a'a_0 \otimes ha_1,
\end{aligned}$$

podemos estender estes morfismos aos multiplicadores:  $\widetilde{\text{can}} : M_A(A \otimes A) \rightarrow M_A(A \otimes H)$  e  $\widetilde{\text{can}}^{-1} : M_A(A \otimes H) \rightarrow M_A(A \otimes A)$ .



Se  $A$  é principal (com unidade), pode-se mostrar que  $\ell(h) = \widetilde{\text{can}}^{-1}(1 \otimes h)$  define uma conexão forte em  $A$ . Agora, dada uma conexão forte  $\ell$  em  $A$ , a aplicação:

$$\begin{aligned} A \otimes H &\rightarrow A \otimes_B A \\ a \otimes h &\mapsto a\ell(h)^{\langle 1 \rangle} \otimes_B \ell(h)^{\langle 2 \rangle}, \end{aligned}$$

define a inversa da aplicação canônica  $\text{can}$ , ou seja,  $A$  é  $H$ -Galois e a aplicação:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B \otimes A \\ a &\mapsto a_0\ell(a_1)^{\langle 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)^{\langle 2 \rangle}, \end{aligned}$$

define uma cisão da multiplicação  $B \otimes A \rightarrow A$ . Logo,  $A$  é principal. Assim, temos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em [BH04]:

**Teorema 3.2.5** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com unidade. Então,  $A$  possui uma conexão forte se, e somente se, a extensão  $A^{\text{co}H} \subset A$  é principal.*

◇

Adaptando a definição de conexão forte para álgebras com unidades locais, obtemos um resultado análogo sob algumas condições e, mesmo que o conjunto  $I$  seja infinito, mostramos que a propriedade de conexão forte em  $A$  mune cada  $A_i$  com a mesma propriedade. Porém, desde que  $A$  não tenha unidade, como dito anteriormente, recorreremos aos multiplicadores e precisamos das seguintes aplicações:

**Definição 3.2.6** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra à direita. Definimos as aplicações lineares:*

i)  $\mathcal{F} : M_A(A \otimes A) \otimes H \rightarrow M_A(A \otimes A \otimes H)$ , dada por,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega \otimes h) \cdot a &= \omega \cdot a_0 \otimes ha_1 \\ a \cdot \mathcal{F}(\omega \otimes h) &= a \cdot \omega \otimes h \end{aligned}$$

para todo  $a \in A$ ,  $\omega \in M_A(A \otimes A)$  e  $h \in H$ .

ii)  $\mathcal{G} : H \otimes M_A(A \otimes A) \rightarrow M_A(H \otimes A \otimes A)$ , dada por,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(h \otimes \omega) \cdot a &= h \otimes \omega \cdot a \\ a \cdot \mathcal{G}(h \otimes \omega) &= hS^{-1}(a_1) \otimes a_0 \cdot \omega \end{aligned}$$

para todo  $a \in A$ ,  $\omega \in M_A(A \otimes A)$  e  $h \in H$ .

De fato,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  estão bem definidas:

$$\begin{aligned} \text{i) } (a \cdot \mathcal{F}(\omega \otimes h))a' &= (a \cdot \omega \otimes h)a' = (a \cdot \omega)a'_0 \otimes ha'_1 = a(\omega \cdot a'_0) \otimes ha'_1 = a(\omega \cdot a'_0 \otimes ha'_1) = \\ &= a(\mathcal{F}(\omega \otimes h) \cdot a'), \end{aligned}$$

$$\text{ii) } (a \cdot \mathcal{G}(h \otimes \omega))a' = (hS^{-1}(a_1) \otimes a_0 \cdot \omega)a' = hS^{-1}(a_1) \otimes (a_0 \cdot \omega)a' = hS^{-1}(a_1) \otimes a_0(\omega \cdot a') = a(h \otimes \omega \cdot a') = a(\mathcal{G}(h \otimes \omega) \cdot a').$$

**Definição 3.2.7** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra à direita. Definimos, para cada  $h \in H$ , um elemento  $(1 \otimes h)_M$  em  $M_A(A \otimes H)$  dado por,*

$$(1 \otimes h)_M \cdot a = a_0 \otimes ha_1,$$

$$a \cdot (1 \otimes h)_M = a \otimes h,$$

para todo  $a \in A$ .

De fato,  $(1 \otimes h)_M$  está bem-definido:

$$(a \cdot (1 \otimes h)_M)a' = (a \otimes h)a' = aa'_0 \otimes ha'_1 = a(a'_0 \otimes ha'_1) = a((1 \otimes h)_M \cdot a').$$

Com estas aplicações e com o elemento da Definição 3.2.7, podemos definir conexões fortes para álgebras com unidades locais.

**Definição 3.2.8** *Seja  $H$  uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva e  $\overline{\text{can}} : M_A(A \otimes A) \rightarrow M_A(A \otimes H)$  a extensão do levantamento de  $\text{can}$  à  $A \otimes A$ . Então, uma **conexão forte** em uma  $H$ -comódulo álgebra à direita  $A$  (não unitária) é uma aplicação linear  $\ell : H \rightarrow M_A(A \otimes A)$  satisfazendo,*

$$\text{i) } \overline{\text{Id}}_A \otimes \rho \circ \ell = \mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}_H) \circ \Delta,$$

$$\text{ii) } \overline{\lambda} \otimes \overline{\text{Id}}_A \circ \ell = \mathcal{G} \circ (\text{Id}_H \otimes \ell) \circ \Delta,$$

$$\text{iii) } \overline{\text{can}} \circ \ell = (1 \otimes \text{Id})_M.$$

Em diagramas, temos:

i)

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \Delta \swarrow & & \searrow \ell \\ H \otimes H & & M_A(A \otimes A) \\ \ell \otimes \text{Id} \downarrow & & \downarrow \overline{\text{Id}} \otimes \rho \\ M_A(A \otimes A) \otimes H & \xrightarrow{\mathcal{F}} & M_A(A \otimes A \otimes H) \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \Delta \swarrow & & \searrow \ell \\ H \otimes H & & M_A(A \otimes A) \\ \text{Id} \otimes \ell \downarrow & & \downarrow \overline{\lambda} \otimes \text{Id} \\ H \otimes M_A(A \otimes A) & \xrightarrow{\mathcal{G}} & M_A(H \otimes A \otimes A) \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{\ell} & M_A(A \otimes A) \\
& \searrow (1 \otimes \text{Id})_M & \downarrow \overline{\text{can}} \\
& & M_A(A \otimes H)
\end{array}$$

Para o próximo resultado precisaremos do seguinte lema:

**Lema 3.2.1** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra e  $\psi : H \otimes A \rightarrow A \otimes H$  a aplicação dada por  $\psi(h \otimes a) = a_0 \otimes ha_1$ , então, se  $A$  é  $H$ -Galois, temos:*

$$i) \quad (\text{Id} \otimes \rho) \circ \text{can}^{-1} = (\text{can}^{-1} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta) \quad (3.2)$$

$$ii) \quad (\lambda \otimes \text{Id}) \circ \text{can}^{-1} = (\text{Id} \otimes \text{can}^{-1}) \circ (\psi^{-1} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta) \quad (3.3)$$

**Demonstração:**

i) Temos que,

$$\begin{aligned}
((\text{can} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \rho))(a \otimes b) &= (\text{can} \otimes \text{Id})(a \otimes \rho(b)) \\
&= \text{can}(a \otimes b_0) \otimes b_1 \\
&= a\rho(b_0) \otimes b_1 \\
&= a((\rho \otimes \text{Id})\rho(b)) \\
&= a((\text{Id} \otimes \Delta)\rho(b)) \\
&= (\text{Id} \otimes \Delta)a\rho(b) \\
&= (\text{Id} \otimes \Delta)\text{can}(a \otimes b) \\
&= ((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \text{can})(a \otimes b)
\end{aligned}$$

Compondo à esquerda por  $\text{can}^{-1} \otimes \text{Id}$  e à direita por  $\text{can}^{-1}$ , obtemos a expressão desejada.

ii) Primeiro observe que, se  $\psi(h \otimes a) = a_0 \otimes ha_1$ , então,  $\psi$  tem inversa dada por  $\psi^{-1}(a \otimes h) = hS^{-1}(a_1) \otimes a_0$ . De fato,

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \psi^{-1})(a \otimes h) &= \psi(hS^{-1}(a_1) \otimes a_0) \\
&= a_{00} \otimes hS^{-1}(a_1)a_{01} \\
&= a_0 \otimes h\varepsilon(a_1) \\
&= a \otimes h
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\psi^{-1} \circ \psi)(h \otimes a) &= \psi^{-1}(a_0 \otimes ha_1) \\
&= ha_1S^{-1}(a_{01}) \otimes a_{00} \\
&= h\varepsilon(a_1) \otimes a_0 \\
&= h \otimes a
\end{aligned}$$

Agora, temos que,

$$\begin{aligned}
((\psi \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \text{can}) \circ (\lambda \otimes \text{Id}))(a \otimes b) &= ((\psi \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \text{can}))(S^{-1}(a_1) \otimes a_0 \otimes b) \\
&= (\psi \otimes \text{Id})(S^{-1}(a_1) \otimes \text{can}(a_0 \otimes b)) \\
&= (\psi \otimes \text{Id})(S^{-1}(a_1) \otimes a_0 b_0 \otimes b_1) \\
&= a_{00} b_{00} \otimes S^{-1}(a_1) a_{01} b_{01} \otimes b_1 \\
&= a_0 b_{00} \otimes \varepsilon(a_1) b_{01} \otimes b_1 \\
&= a b_{00} \otimes b_{01} \otimes b_1 \\
&= \text{can}(a \otimes b_0) \otimes b_1 \\
&= ((\text{can} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \rho))(a \otimes b) \\
&= ((\text{Id} \otimes \Delta) \circ \text{can})(a \otimes b)
\end{aligned}$$

Compondo à esquerda por  $(\text{Id} \otimes \text{can}^{-1}) \circ (\psi^{-1} \otimes \text{Id})$  e à direita por  $\text{can}^{-1}$ , obtemos a expressão desejada.

◇

**Teorema 3.2.9** *Se  $A$  é principal então  $A$  tem uma conexão forte.*

**Demonstração:** Desde que  $A$  é principal,  $A$  é  $H$ -Galois, i.e., existe uma inversa da aplicação canônica  $\text{can} : A \otimes_B A \rightarrow A \otimes H$ . Definimos:  $\ell : H \rightarrow M_A(A \otimes A)$  por:

$$\ell(h) = \overline{\text{can}^{-1}((1 \otimes h)_M)}.$$

Então,  $\ell$  é uma conexão forte em  $A$ .

De fato,

$$\text{i) } \overline{\text{Id}_A \otimes \rho} \circ \ell = \mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}_H) \circ \Delta:$$

$$\begin{aligned}
((\overline{\text{Id} \otimes \rho}) \circ \ell)(h) \cdot a &= \overline{\text{Id} \otimes \rho}(\overline{\text{can}^{-1}((1 \otimes h)_M)}) \cdot a \\
&= (\text{Id} \otimes \rho)(\overline{\text{can}^{-1}((1 \otimes h)_M \cdot a)}) \\
&= (\text{Id} \otimes \rho)(\overline{\text{can}^{-1}(a_0 \otimes ha_1)}) \\
&\stackrel{(3.2)}{=} (\overline{\text{can}^{-1}} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta)(a_0 \otimes ha_1) \\
&= (\overline{\text{can}^{-1}} \otimes \text{Id})(a_0 \otimes h_1 a_{11} \otimes h_2 a_{12}) \\
&= (\overline{\text{can}^{-1}} \otimes \text{Id})(a_{00} \otimes h_1 a_{01} \otimes h_2 a_1) \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}(a_{00} \otimes h_1 a_{01}) \otimes h_2 a_1 \\
a \cdot ((\overline{\text{Id} \otimes \rho}) \circ \ell)(h) &= a \cdot \overline{\text{Id} \otimes \rho}(\overline{\text{can}^{-1}((1 \otimes h)_M)}) \\
&= (\text{Id} \otimes \rho)(a \cdot \overline{\text{can}^{-1}((1 \otimes h)_M)}) \\
&= (\text{Id} \otimes \rho)(\overline{\text{can}^{-1}(a \cdot (1 \otimes h)_M)}) \\
&= (\text{Id} \otimes \rho)(\overline{\text{can}^{-1}(a \otimes h)}) \\
&\stackrel{(3.2)}{=} (\overline{\text{can}^{-1}} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta)(a \otimes h) \\
&= (\overline{\text{can}^{-1}} \otimes \text{Id})(a \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}(a \otimes h_1) \otimes h_2
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(h) \cdot a &= (\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}))(h_1 \otimes h_2) \cdot a \\
&= \mathcal{F}(\overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_1)_M) \otimes h_2) \cdot a \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_1)_M) \cdot a_0 \otimes h_2 a_1 \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_1)_M \cdot a_0) \otimes h_2 a_1 \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}(a_{00} \otimes h_1 a_{01}) \otimes h_2 a_1 \\
a \cdot (\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}) \circ \Delta)(h) &= a \cdot (\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}))(h_1 \otimes h_2) \\
&= a \cdot \mathcal{F}(\overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_1)_M) \otimes h_2) \\
&= a \cdot \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_1)_M) \otimes h_2 \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}(a \cdot (1 \otimes h_1)_M) \otimes h_2 \\
&= \overline{\text{can}^{-1}}(a \otimes h_1) \otimes h_2
\end{aligned}$$

$$\text{ii) } \overline{\lambda \otimes \text{Id}_A} \circ \ell = \mathcal{G} \circ (\text{Id}_H \otimes \ell) \circ \Delta$$

$$\begin{aligned}
((\overline{\lambda \otimes \text{Id}}) \circ \ell)(h) \cdot a &= (\overline{\lambda \otimes \text{Id}})(\overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h)_M)) \cdot a \\
&= (\lambda \otimes \text{Id})(\overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h)_M \cdot a)) \\
&= (\lambda \otimes \text{Id})(\overline{\text{can}^{-1}}(a_0 \otimes h a_1)) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}}) \circ (\psi^{-1} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta)(a_0 \otimes h a_1) \\
&= (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}}) \circ (\psi^{-1} \otimes \text{Id})(a_0 \otimes h_1 a_{11} \otimes h_2 a_{12}) \\
&= (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}})(h_1 a_{11} S^{-1}(a_{01}) \otimes a_{00} \otimes h_2 a_{12}) \\
&= (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}})(h_1 \epsilon(a_1) \otimes a_0 \otimes h_2 a_2) \\
&= (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}})(h_1 \otimes a_0 \otimes h_2 a_1) \\
&= h_1 \otimes \overline{\text{can}^{-1}}(a_0 \otimes h_2 a_1) \\
a \cdot ((\overline{\lambda \otimes \text{Id}}) \circ \ell)(h) &= a \cdot (\overline{\lambda \otimes \text{Id}})(\overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h)_M)) \\
&= (\lambda \otimes \text{Id})(a \cdot \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h)_M)) \\
&= (\lambda \otimes \text{Id})(\overline{\text{can}^{-1}}(a \cdot (1 \otimes h)_M)) \\
&= (\lambda \otimes \text{Id})(\overline{\text{can}^{-1}}(a \otimes h)) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}}) \circ (\psi^{-1} \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta)(a \otimes h) \\
&= (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}}) \circ (\psi^{-1} \otimes \text{Id})(a \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= (\text{Id} \otimes \overline{\text{can}^{-1}})(h_1 S^{-1}(a_1) \otimes a_0 \otimes h_2) \\
&= h_1 S^{-1}(a_1) \otimes \overline{\text{can}^{-1}}(a_0 \otimes h_2)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G} \circ (\text{Id} \otimes \ell) \circ \Delta)(h) \cdot a &= (\mathcal{G} \circ (\text{Id} \otimes \ell))(h_1 \otimes h_2) \cdot a \\
&= \mathcal{G}(h_1 \otimes \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_2)_M)) \cdot a \\
&= h_1 \otimes \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_2)_M) \cdot a \\
&= h_1 \otimes \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_2)_M \cdot a) \\
&= h_1 \otimes \overline{\text{can}^{-1}}(a_0 \otimes h_2 a_1) \\
a \cdot (\mathcal{G} \circ (\text{Id} \otimes \ell) \circ \Delta)(h) &= a \cdot (\mathcal{G} \circ (\text{Id} \otimes \ell))(h_1 \otimes h_2) \\
&= a \cdot \mathcal{G}(h_1 \otimes \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_2)_M)) \\
&= h_1 S^{-1}(a_1) \otimes a_0 \cdot \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h_2)_M) \\
&= h_1 S^{-1}(a_1) \otimes \overline{\text{can}^{-1}}(a_0 \cdot (1 \otimes h_2)_M) \\
&= h_1 S^{-1}(a_1) \otimes \overline{\text{can}^{-1}}(a_0 \otimes h_2)
\end{aligned}$$

iii)  $\overline{\text{can}} \circ \ell = (1 \otimes \text{Id})_M$

De fato,  $\overline{\text{can}} \circ \ell(h) = \overline{\text{can}} \circ \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h)_M) = \overline{\text{can}} \circ \overline{\text{can}^{-1}}((1 \otimes h)_M) = \overline{\text{Id}}((1 \otimes h)_M) = (1 \otimes h)_M$

◇

Usaremos as seguintes notações para o par de aplicações de  $\ell(h)$ :

$$\begin{aligned}
a \cdot \ell(h) &= \ell(h)^{\langle a,1 \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle a,2 \rangle} \\
\ell(h) \cdot b &= \ell(h)^{\langle 1,b \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle 2,b \rangle}
\end{aligned}$$

Usando estas notações, a expressão i) da definição de conexão forte nos dá a seguinte fórmula:

$$\ell(h_1)^{\langle a,1 \rangle} \otimes \ell(h_1)^{\langle a,2 \rangle} \otimes h_2 = \ell(h)^{\langle a,1 \rangle} \otimes \ell(h)_0^{\langle a,2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle a,2 \rangle} \quad (3.4)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
a \cdot ((\overline{\text{Id}}_A \otimes \rho) \circ \ell)(h) &= a \cdot (\overline{\text{Id}}_A \otimes \rho)(\ell(h)) \\
&= (\text{Id}_A \otimes \rho)(a \cdot \ell(h)) \\
&= (\text{Id}_A \otimes \rho)(\ell(h)^{\langle a,1 \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle a,2 \rangle}) \\
&= \ell(h)^{\langle a,1 \rangle} \otimes \ell(h)_0^{\langle a,2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle a,2 \rangle}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
a \cdot (\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}_H) \circ \Delta)(h) &= a \cdot (\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}_H))(\Delta(h)) \\
&= a \cdot (\mathcal{F} \circ (\ell \otimes \text{Id}_H))(h_1 \otimes h_2) \\
&= a \cdot \mathcal{F}(\ell(h_1) \otimes h_2) \\
&= a \cdot \ell(h_1) \otimes h_2 \\
&= \ell(h_1)^{\langle a,1 \rangle} \otimes \ell(h_1)^{\langle a,2 \rangle} \otimes h_2
\end{aligned}$$

De maneira análoga, aplicando  $a$  do lado direito desta mesma expressão, obtemos a fórmula:

$$\ell(h_1)^{\langle 1, b_0 \rangle} \otimes \ell(h_1)^{\langle 2, b_0 \rangle} \otimes h_2 b_1 = \ell(h)^{\langle 1, b \rangle} \otimes \ell(h)_0^{\langle 2, b \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle 2, b \rangle} \quad (3.5)$$

A expressão ii) da definição de conexão forte nos dá as fórmulas:

$$h_1 S^{-1}(a_1) \otimes \ell(h_2)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(h_2)^{\langle a_0, 2 \rangle} = S^{-1}(\ell(h)_1^{\langle a, 1 \rangle}) \otimes \ell(h)_0^{\langle a, 1 \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle a, 2 \rangle} \quad (3.6)$$

$$h_1 \otimes \ell(h_2)^{\langle 1, b \rangle} \otimes \ell(h_2)^{\langle 2, b \rangle} = S^{-1}(\ell(h)_1^{\langle 1, b \rangle}) \otimes \ell(h)_0^{\langle 1, b \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle 2, b \rangle} \quad (3.7)$$

E, com esta notação, a expressão iii) fornece:

$$\ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \ell(h)_0^{\langle a, 2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle a, 2 \rangle} = a \otimes h \quad (3.8)$$

$$\ell(h)^{\langle 1, b \rangle} \ell(h)_0^{\langle 2, b \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle 2, b \rangle} = b_0 \otimes h b_1 \quad (3.9)$$

De fato, temos que  $a \cdot (1 \otimes h)_M = a \otimes h$ , e, por outro lado,

$$\begin{aligned} a \cdot (\overline{\text{can}} \circ \ell)(h) &= a \cdot (\overline{\text{can}}(\ell(h))) \\ &= \overline{\text{can}}(a \cdot \ell(h)) \\ &= \overline{\text{can}}(\ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \otimes \ell(h)^{\langle a, 2 \rangle}) \\ &= \ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \ell(h)_0^{\langle a, 2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle a, 2 \rangle} \end{aligned}$$

Aplicando  $\text{Id} \otimes \varepsilon$  na equação (3.8) temos a fórmula:

$$\ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \ell(h)^{\langle a, 2 \rangle} = a \varepsilon(h) \quad (3.10)$$

Para a recíproca do Teorema 3.2.9 precisamos pedir que o  $\mathbf{k}$ -módulo  $A$  seja  $\mathbf{k}$ -plano, veja a Definição B.8. Observe que, se  $\mathbf{k}$  é um corpo, esta condição é satisfeita, isto é, todo  $\mathbf{k}$ -espaço é  $\mathbf{k}$ -plano quando  $\mathbf{k}$  é um corpo, logo, a recíproca do teorema é verdadeira.

**Teorema 3.2.10** *Se  $A$  tem uma conexão forte e  $A$  é  $\mathbf{k}$ -plano, então,  $A$  é principal.*

**Demonstração:** Dada uma conexão forte  $\ell : H \rightarrow M_A(A \otimes A)$  em  $A$ , definimos:

$$\begin{aligned} s : A &\rightarrow A \otimes A \\ a &\mapsto a_0 \cdot \ell(a_1) = \ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle}. \end{aligned}$$

Então,

$$m(s(a)) = m(\ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle}) = \ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle} = a_0 \varepsilon(a_1) = a.$$

Assim,  $s$  é uma cisão da multiplicação  $m : A \otimes A \rightarrow A$ . Precisamos de uma cisão da restrição de  $m$  ao domínio  $B \otimes A$ . Denotando esta restrição por  $m_B$ , temos que  $m_B = m \circ i$ , onde  $i : B \otimes A \rightarrow A \otimes A$  é a inclusão.

Temos ainda que  $s$  é  $B$ -linear à esquerda. De fato, sejam  $b \in B = A^{coH}$  e  $a \in A$ , então, usando o fato de que  $\ell(h) \in M_A(A \otimes A)$  para todo  $h \in H$ , temos:

$$\begin{aligned} s(ba) &= (ba)_0 \cdot \ell((ba)_1) \\ &= (ba_0) \cdot \ell(1 \cdot a_1) \\ &= (ba_0) \cdot \ell(a_1) \\ &= b(a_0 \cdot \ell(a_1)) \\ &= bs(a) \end{aligned}$$

Pelo item ii) da Definição 3.2.8, temos:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot \mathcal{G}(\text{Id} \otimes \ell)\Delta(a_1) &= a_0 \cdot \mathcal{G}(a_1 \otimes \ell(a_2)) \\ &= a_2 S^{-1}(a_1) \otimes a_0 \cdot \ell(a_3) \\ &= \epsilon(a_1) 1_H \otimes a_0 \cdot \ell(a_2) \\ &= 1_H \otimes \epsilon(a_1) a_0 \cdot \ell(a_2) \\ &\stackrel{*}{=} 1_H \otimes a_0 \cdot \ell(a_1) \\ &= 1_H \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_0 \cdot (\overline{\lambda \otimes \text{Id}})\ell(a_1) &= (\lambda \otimes \text{Id})(a_0 \cdot \ell(a_1)) \\ &= (\lambda \otimes \text{Id})(\ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle}) \\ &= \lambda(\ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle}) \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle} \end{aligned}$$

\*  $\epsilon(a_1)a_0 = \epsilon(S^{-1}(a_1))a_0 = \epsilon(a_{-1})a_0 = a$ , onde  $\lambda(a) = a_{-1} \otimes a_0$ .

Portanto,  $((1_H \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}) \circ s)(a) = ((\lambda \otimes \text{Id}) \circ s)(a)$ .

Observe agora que  $A$  tem a mesma subálgebra de coinvariantes com relação à  $\rho$  e à  $\lambda$  e, portanto,  $B = A^{coH}$  é o equalizador de  $\lambda$  e  $1_H \otimes \text{Id}$ , (veja Definição A.22 e Observação A.23).

$$B \hookrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda} \\ \xrightarrow{1_H \otimes \text{Id}} \end{array} H \otimes A$$

Assim, desde que  $A$  é  $\mathbf{k}$ -plano, temos que  $B \otimes A$  é o equalizador de  $\lambda \otimes \text{Id}$  e  $1_H \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}$ , veja a Observação B.9. Logo, existe  $\bar{s}: A \rightarrow B \otimes A$  tal que  $i \circ \bar{s} = s$ . Temos que  $m_B \circ \bar{s} = (m \circ i) \circ \bar{s} = m \circ (i \circ \bar{s}) = m \circ s = \text{Id}_A$ , e, portanto,  $\bar{s}$  é uma cisão da multiplicação  $B \otimes A \rightarrow A$ .

$$\begin{array}{ccc} B \otimes A & \xrightarrow{i} & A \otimes A \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda \otimes \text{Id}} \\ \xrightarrow{1_H \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}} \end{array} & H \otimes A \otimes A \\ \uparrow \bar{s} & \nearrow s & & \\ A & & & \end{array}$$

Como  $\bar{s}(A) \subset B \otimes A$ , podemos mostrar que  $\bar{s}$  é  $H$ -colinear à direita: Seja  $a \in A$ , então,



$$\begin{aligned}
(\rho \circ \bar{s})(a) &= \rho(\bar{s}(a)) \\
&= \rho(a_0 \cdot \ell(a_1)) \\
&= \rho(\ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)^{\langle a_0, 2 \rangle}) \\
&= \ell(a_1)_0^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)_0^{\langle a_0, 2 \rangle} \otimes \ell(a_1)_1^{\langle a_0, 1 \rangle} \ell(a_1)_1^{\langle a_0, 2 \rangle} \\
&= \ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)_0^{\langle a_0, 2 \rangle} \otimes 1 \cdot \ell(a_1)_1^{\langle a_0, 2 \rangle} \\
&= \ell(a_1)^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_1)_0^{\langle a_0, 2 \rangle} \otimes \ell(a_1)_1^{\langle a_0, 2 \rangle} \\
&\stackrel{(3.4)}{=} \ell(a_{11})^{\langle a_0, 1 \rangle} \otimes \ell(a_{11})^{\langle a_0, 2 \rangle} \otimes a_{12} \\
&= \ell(a_{01})^{\langle a_{00}, 1 \rangle} \otimes \ell(a_{01})^{\langle a_{00}, 2 \rangle} \otimes a_1 \\
&= a_{00} \cdot \ell(a_{01}) \otimes a_1 \\
&= \bar{s}(a_0) \otimes a_1 \\
&= (\bar{s} \otimes \text{Id})(\rho(a)) \\
&= ((\bar{s} \otimes \text{Id}) \circ \rho)(a)
\end{aligned}$$

Portanto,  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva.

Seja  $\pi_B : A \otimes A \rightarrow A \otimes_B A$  a sobrejeção canônica. Definimos:  $\theta : A \otimes H \rightarrow A \otimes_B A$  por

$$\theta(a \otimes h) = \pi_B(a \cdot \ell(h)) = \ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \otimes_B \ell(h)^{\langle a, 2 \rangle}.$$

Então,  $\theta$  é inversa da aplicação canônica  $\text{can}$ , isto é,  $A$  é  $H$ -Galois. De fato,

$$\begin{aligned}
(\text{can} \circ \theta)(a \otimes h) &= \text{can}(\ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \otimes_B \ell(h)^{\langle a, 2 \rangle}) \\
&= \ell(h)^{\langle a, 1 \rangle} \ell(h)_0^{\langle a, 2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle a, 2 \rangle} \\
&\stackrel{(3.8)}{=} a \otimes h.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\theta \circ \text{can})(a \otimes_B b) &= \theta(ab_0 \otimes b_1) = a \ell(b_1)^{\langle b_0, 1 \rangle} \otimes_B \ell(b_1)^{\langle b_0, 2 \rangle} \\
&= a \otimes_B \ell(b_1)^{\langle b_0, 1 \rangle} \ell(b_1)^{\langle b_0, 2 \rangle} \stackrel{(3.8)}{=} a \otimes_B b_0 \varepsilon(b_1) \\
&= a \otimes_B b.
\end{aligned}$$

Portanto,  $A$  é principal. ◇

### 3.3 Conexões fortes e subálgebras unitárias

Em [HKMZ], os autores mostram que a propriedade de conexão forte de uma  $H$ -comódulo álgebra unitária fornece esta mesma propriedade a um número finito de  $H$ -comódulo álgebras unitárias  $\{A_i \mid i \in I\}$  desde que,  $\pi_i : A \rightarrow A_i$  sejam sobrejeções e  $\bigcap_{i \in I} \ker A_i = \{0\}$ . A recíproca também é verdadeira. A fim de estender este resultado para álgebras com unidades locais, onde podemos ter infinitas subálgebras, precisaremos colocar uma

condição sobre as projeções  $\pi_i$ :

Seja  $A$  uma álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$  e considere as subálgebras  $A_i = e_i A e_i$ . Vamos supor que cada projeção  $\pi_i : A \rightarrow A_i$  dada por  $\pi_i(a) = e_i a e_i$  é um morfismo de álgebras, isto é,  $e_i a e_i b e_i = e_i a b e_i$  para todo  $a, b \in A$ .

**Exemplo 3.3.1** Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Se os idempotentes  $e_i$  são centrais, para todo  $i \in I$ , então, as projeções  $\pi_i : A \rightarrow A_i$  são morfismos de álgebras.

**Exemplo 3.3.2** Considere a  $\mathbf{k}$ -álgebra das matrizes triangulares superiores, com índices em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , com um número finito de entradas não nulas. Então,  $\mathbf{u} = \{E^n = \sum_{i=1}^n E_i \mid n \in \mathbb{N}\}$ , onde  $E_i$  é a matriz que tem a unidade na posição  $(i, i)$  e zero em todas as outras, é um sistema de unidades locais idempotentes. Observe que, em geral,  $E^n A \neq A E^n$ , mas, se  $\pi_n(A) = E^n A E^n$ , então,  $\pi_n$  é um morfismo de álgebras, ou seja,  $E^n A E^n B E^n = E^n A B E^n$ .

Para o próximo teorema, observe que, desde que cada  $A_i$  é uma álgebra unitária,  $A_i$  é principal se, e somente se,  $A_i$  tem uma conexão forte (no sentido clássico).

**Teorema 3.3.3** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Se  $A$  tem uma conexão forte e as projeções  $\pi_i : A \rightarrow A_i$  dadas por  $\pi_i(a) = e_i a e_i$ , são morfismos de álgebras, para todo  $i \in I$ , então, cada  $A_i$  tem uma conexão forte.*

**Demonstração:** Seja  $\ell : H \rightarrow M_A(A \otimes A)$  uma conexão forte em  $A$  e defina  $\ell_i : H \rightarrow A_i \otimes A_i$  por  $\ell_i(h) = (\pi_i \otimes \pi_i)(e_i \cdot \ell(h))$ . Então,  $\ell_i$  é uma conexão forte em  $A_i$ . De fato,

$$\begin{aligned}
i) \quad (\text{Id} \otimes \rho) \circ \ell_i(h) &= (\text{Id} \otimes \rho)(\pi_i \otimes \pi_i)(e_i \cdot \ell(h)) \\
&= (\text{Id} \otimes \rho)(e_i \ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h)^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i) \\
&= e_i \ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h)_0^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i \otimes \ell(h)_1^{\langle e_i, 2 \rangle} \\
&\stackrel{(3.4)}{=} e_i \ell(h_1)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h_1)^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i \otimes h_2 \\
&= (\pi_i \otimes \pi_i)(\ell(h_1)^{\langle e_i, 1 \rangle} \otimes \ell(h_1)^{\langle e_i, 2 \rangle}) \otimes h_2 \\
&= (\pi_i \otimes \pi_i)(e_i \cdot \ell(h_1)) \otimes h_2 \\
&= (\ell_i \otimes \text{Id})(h_1 \otimes h_2) \\
&= (\ell_i \otimes \text{Id}) \circ \Delta(h); \\
ii) \quad (\lambda \otimes \text{Id}) \circ \ell_i(h) &= (\lambda \otimes \text{Id})(\pi_i \otimes \pi_i)(e_i \cdot \ell(h)) \\
&= (\lambda \otimes \text{Id})(e_i \ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h)^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i) \\
&= S^{-1}(\ell(h)_1^{\langle e_i, 1 \rangle}) \otimes e_i \ell(h)_0^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h)^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i \\
&\stackrel{(3.6)}{=} h_1 S^{-1}(1) \otimes e_i \ell(h_2)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h_2)^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i \\
&= h_1 \otimes (\pi_i \otimes \pi_i)(e_i \cdot \ell(h_2)) \\
&= (\text{Id} \otimes \ell_i)(h_1 \otimes h_2) \\
&= (\text{Id} \otimes \ell_i) \circ \Delta(h);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad \widetilde{\text{can}} \circ \ell_i(h) &= \widetilde{\text{can}}(e_i \ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \otimes e_i \ell(h)^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i) \\
&= e_i \ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} e_i \ell(h)_0^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i \otimes \ell(h)_1^{\langle e_i, 2 \rangle} \\
&= e_i \ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} \ell(h)_0^{\langle e_i, 2 \rangle} e_i \otimes \ell(h)_1^{\langle e_i, 2 \rangle}, \quad (\pi_i \text{ é morfismo de álgebras}) \\
&= e_i (\ell(h)^{\langle e_i, 1 \rangle} \ell(h)_0^{\langle e_i, 2 \rangle} \otimes \ell(h)_1^{\langle e_i, 2 \rangle}) e_i \\
&\stackrel{(3.8)}{=} e_i (e_i \otimes h) e_i \\
&= e_i \otimes h.
\end{aligned}$$

◇

Enfim, a principalidade de  $A$  transmite esta mesma condição às suas partes  $A_i$ , em particular, a condição de Galois em  $A$  implica na condição de Galois em  $A_i$ , para todo  $i$ :

**Corolário 3.3.4** *Seja  $A$  uma  $H$ -comódulo álgebra com unidades locais  $\mathbf{u} = \{e_i \mid i \in I\}$ . Se  $A$  é principal e as projeções  $\pi_i : A \rightarrow A_i$  dadas por  $\pi_i(a) = e_i a e_i$ , são morfismos de álgebras, para todo  $i \in I$ , então, cada  $A_i$  é principal.*

**Demonstração:** Se  $A$  é principal, então, pelo Teorema 3.2.9,  $A$  tem uma conexão forte. Assim, pelo Teorema 3.3.3, cada  $A_i$  tem uma conexão forte. Desde que cada  $A_i$  é unitária, temos que cada  $A_i$  é principal.

◇

Consideremos agora as inclusões  $\alpha_i : A_i \rightarrow A$ ,  $\forall i \in I$  e  ${}_j \alpha_i : A_i \rightarrow A_j$ ,  $\forall i \leq j$ . Então, temos que  $\alpha_j \circ {}_j \alpha_i = \alpha_i$ , sempre que  $i \leq j$  e podemos estender as conexões fortes dos  $A_i$ 's para  $A$  desde que tenhamos uma certa compatibilidade:

**Teorema 3.3.5** *Se cada  $A_i$  tem uma conexão forte  $\ell_i : H \rightarrow A_i \otimes A_i$  tal que  $({}_j \alpha_i \otimes {}_j \alpha_i) \circ \ell_i = \ell_j$  sempre que  $i \leq j$ , então,  $A$  tem uma conexão forte.*

**Demonstração:** Uma conexão forte  $\ell : H \rightarrow M_A(A \otimes A)$  para  $A$ , pode ser dada como segue:

Para  $h \in H$  e  $a \in A$ , existe  $i \in I$  tal que  $a \in A_i$ . Então, definimos:

$$a \cdot \ell(h) = a(\alpha_i \otimes \alpha_i) \ell_i(h).$$

Esta aplicação está bem definida. De fato, se  $a \in A_j$  com  $i \neq j$ , existe  $t \in I$  tal que  $i \leq t$  e  $j \leq t$ . Então,

$$a(\alpha_i \otimes \alpha_i) \ell_i(h) = a(\alpha_t \circ {}_i \alpha_i \otimes \alpha_t \circ {}_i \alpha_i) \ell_i(h) = a(\alpha_t \otimes \alpha_t)({}_i \alpha_i \otimes {}_i \alpha_i) \ell_i(h) = a(\alpha_t \otimes \alpha_t) \ell_t(h).$$

Analogamente,

$$a(\alpha_j \otimes \alpha_j) \ell_j(h) = a(\alpha_t \circ {}_j \alpha_j \otimes \alpha_t \circ {}_j \alpha_j) \ell_j(h) = a(\alpha_t \otimes \alpha_t)({}_j \alpha_j \otimes {}_j \alpha_j) \ell_j(h) = a(\alpha_t \otimes \alpha_t) \ell_t(h).$$

Portanto,  $a(\alpha_i \otimes \alpha_i) \ell_i(h) = a(\alpha_j \otimes \alpha_j) \ell_j(h)$ .

De forma similar, para  $h \in H$  e  $a' \in A$ , existe  $j \in I$  tal que  $a' \in A_j$  e definimos:

$$\ell(h) \cdot a' = (\alpha_j \otimes \alpha_j) \ell_j(h) a'.$$

Agora, para cada  $h \in H$ , temos que  $\ell(h) \in M_A(A \otimes A)$ . Com efeito, dados  $a, a' \in A$ , existe  $i \in I$  tal que  $a, a' \in A_i$ , então:

$$a(\ell(h) \cdot a') = a((\alpha_i \otimes \alpha_i)\ell_i(h)a') = (a(\alpha_i \otimes \alpha_i)\ell_i(h))a' = (a \cdot \ell(h))a'.$$

Observe que  $\widetilde{\text{can}} \circ (\alpha_i \otimes \alpha_i) = \widetilde{\text{can}}_i$ . Então, se  $a \in A$ , existe  $i \in I$ , tal que  $a \in A_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} a \cdot (\widetilde{\text{can}} \circ \ell)(h) &= a \cdot (\widetilde{\text{can}}(\ell(h))) = \widetilde{\text{can}}(a \cdot \ell(h)) \\ &= \widetilde{\text{can}}(a(\alpha_i \otimes \alpha_i)\ell_i(h)) = a \cdot \widetilde{\text{can}}((\alpha_i \otimes \alpha_i)\ell_i(h)) \\ &= a \cdot \widetilde{\text{can}}_i(\ell_i(h)) = a \cdot (e_i \otimes h) \\ &= a \otimes h = a \cdot (1 \otimes h)_M \\ &= a \cdot (1 \otimes \text{Id})_M(h) \end{aligned}$$

As demais igualdades para mostrar que  $\ell$  é uma conexão forte para  $A$  seguem de maneira similar. ◇

Finalmente, é natural perguntar se vale a recíproca do Corolário 3.3.4, ou seja, se cada  $A_i$  ser principal implica que  $A$  é principal. Em geral, a  $H$ -equivariante projetividade dos  $A_i$ 's não implica a  $H$ -equivariante projetividade de  $A$ , precisaremos novamente de uma compatibilidade.

Seja  $s_i : A_i \rightarrow B_i \otimes A_i$  a cisão da multiplicação  $B_i \otimes A_i \rightarrow A_i$  para cada  $i \in I$ . Suponha que  ${}_j\beta_i \circ s_i = s_j \circ {}_j\alpha_i$ , sempre que  $i \leq j$ , onde  ${}_j\beta_i$  é a inclusão  $B_i \otimes A_i \hookrightarrow B_j \otimes A_j$ . Assim, temos que  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva, pois, podemos estender por colimite.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\exists! s} & \\ & \text{---} & \\ A & & B \otimes A \\ & \swarrow & \searrow \\ & A_i & \xrightarrow{s_i} & B_i \otimes A_i \\ & \downarrow {}_j\alpha_i & & \downarrow {}_j\beta_i \\ & A_j & \xrightarrow{s_j} & B_j \otimes A_j \end{array}$$

**Proposição 3.3.6** *Se cada  $A_i$  é  $H$ -equivariante projetiva e  ${}_j\beta_i \circ s_i = s_j \circ {}_j\alpha_i$ , sempre que  $i \leq j$ , então,  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva.* ◇

**Exemplo 3.3.7** Considere um produto cruzado  $A \#_{\sigma} H$ . Cada subálgebra  $A_i \#_{\sigma_i} H$  é principal, desde que as extensões  $A_i \subset A_i \#_{\sigma_i} H$  são  $H$ -Galois, para todo  $i \in I$ . Temos as seguintes cisões da multiplicação:

$$\begin{aligned} s_i : A_i \#_{\sigma_i} H &\rightarrow A_i \otimes A_i \#_{\sigma_i} H \\ a \#_{\sigma_i} h &\rightarrow a \otimes e_i \#_{\sigma_i} h \end{aligned}$$

No entanto, ao considerarmos as inclusões como no teorema acima, não temos a compatibilidade desejada, pois, se  $i \leq j$  e  $a \in A_i$ , temos,

$$\begin{aligned} {}_j\beta_i \circ s_i(a \# h) &= a \otimes e_i \# h \\ s_j \circ {}_j\alpha_i(a \# h) &= a \otimes e_j \# h \end{aligned}$$

**Corolário 3.3.8** *Se  $A$  possui um sistema ortogonal de idempotentes que é uma  $\mathbf{k}$ -base para  $A$  e cada  $A_i$  é  $H$ -equivariante projetiva, então,  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva.*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.3.6, basta mostrar que existem cisões  $s_i$  das multiplicações  $m_i : B_i \rightarrow A_i$ , tais que, se  $i \leq j$ , então,  ${}_j\beta_i \circ s_i = s_j \circ {}_j\alpha_i$ .

Seja  $\{u_l\}$  um sistema de idempotentes ortogonais para  $A$ . Então, se  $i \in I$ , existem  $l_1, \dots, l_n$ , com  $l_s \neq l_t$  sempre que  $s \neq t$ , tais que  $e_i = u_{l_1} + \dots + u_{l_n}$ . Se  $a \in A_i$ ,  $a$  se escreve de maneira única como combinação  $\mathbf{k}$ -linear de  $\{u_{l_1}, \dots, u_{l_n}\}$ :

$$a = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{l_k},$$

onde  $\lambda_k \in \mathbf{k}$ , para  $k = 1, \dots, n$ .

Definimos

$$s_i(a) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k}).$$

Então,  $s_i(a) \in B_i \otimes A_i$ , pois,  $s_i(a) = \sum_{k=1}^n u_{l_k} \otimes \lambda_k u_{l_k}$  e  $u_{l_k} \in B_i$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Assim,  $s_i$  é uma cisão da multiplicação  $m_i : B_i \otimes A_i \rightarrow A_i$ . Com efeito,

$$(m_i \circ s_i)(a) = m_i(s_i(a)) = m_i\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k})\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{l_k} = a.$$

Temos ainda que  $s_i$  é  $B_i$ -linear à esquerda e  $H$ -colinear à direita. De fato, se  $b \in B_i$ ,  $b = \sum_{k=1}^n \delta_k u_{l_k}$ , com  $\delta_k \in \mathbf{k}$  para,  $k = 1, \dots, n$ . Daí,  $ba = \sum_{k=1}^n \delta_k \lambda_k u_{l_k}$  e

$$s_i(ba) = \sum_{k=1}^n \delta_k \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k}).$$

Por outro lado,

$$b s_i(a) = \left(\sum_{k=1}^n \delta_k u_{l_k}\right) \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k})\right) = \sum_{k=1}^n \delta_k \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k}).$$

Para mostrar a  $H$ -colinearidade observe que:

$$(\rho \circ s_i)(a) = \rho\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k})\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k} \otimes 1), \text{ e,}$$

$$\begin{aligned}
((s_i \otimes \text{Id}) \circ \rho)(a) &= (s_i \otimes \text{Id})(\rho(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_{l_k})) = (s_i \otimes \text{Id})(\sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes 1)) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k} \otimes 1)
\end{aligned}$$

Agora, se  $i \leq j$ , existe  $t \in I$  tal que  $e_j = e_i + e_t$  com  $e_i e_t = 0$ . Suponhamos que  $e_t = \sum_{k=n+1}^m u_{l_k}$ , então,  $e_j = \sum_{k=1}^m u_{l_k}$ .

Se  $a \in A_i$ , então,  $a = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{l_k} = \sum_{k=1}^m \lambda_k u_{l_k}$  com  $\lambda_k = 0$ ,  $k = n+1, \dots, m$ .

Assim,

$$s_j(a) = \sum_{k=1}^m \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (u_{l_k} \otimes u_{l_k}) = s_i(a).$$

Portanto, se  $i \leq j$ , temos a compatibilidade  ${}_j\beta_i \circ s_i = s_j \circ {}_j\alpha_i$ , e, portanto,  $A$  é  $H$ -equivariante projetiva.

◇

Observe que apenas a compatibilidade da cisão exigida na Proposição 3.3.6 não garante que a principalidade das subálgebras  $A'_i$ s implique na principalidade de  $A$ , pois faltaria verificar a condição de Galois. Até o presente momento não foi possível provar que se as extensões  $A_i^{coH} \subset A_i$  são  $H$ -Galois para todo  $i \in I$ , então, a extensão  $A^{coH} \subset A$  é também  $H$ -Galois. Tampouco encontramos exemplos onde esta condição não se verifica. Este problema será alvo de nossos estudos em trabalhos futuros.

# Referências

- [AAB] E. Alvares, M. M. S. Alves and E. Batista; *Partial Hopf module categories*, Journal of Pure and Applied Algebra 217 (2013) 1517-1534.
- [BH04] T. Brzeziński and P. M. Hajac; *The Chern-Galois character*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004), 113-116.
- [BM] R. Blattner and S. Montgomery; *Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras*, Pac. J. Math., 137(1989): 37-54.
- [BCM] R. J. Blattner, M. Cohen and S. Montgomery; *Crossed products and inner actions of Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 298 (1986), 671-711.
- [CM] C. Cibils and E. Marcos; *Skew category, Galois covering and smash product of a category over a ring*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 1, 39-50.
- [CS] C. Cibils and A. Solotar; *Galois coverings, Morita equivalence and smash extensions of categories over a field*, Doc. Math. 11 (2006), 143-159.
- [D89] Y. Doi; *Equivalent Crossed Products for a Hopf algebra*, Comm. Alg. 17 (1989), 3053-3085.
- [D-A08] A. Van Daele; *Tools for working with multiplier Hopf algebras*, The Arabian Journal for Science and Engineering. Section B, Engineering, 33 (2C) (2008), 505-527.
- [DES] M. Dokuchaev, R. Exel, J. J. Simón; *Crossed products by twisted partial actions and graded algebras*, Journal of Algebra, 320 (2008) (8), 3278-3310.
- [DT] Y. Doi and M. Takeuchi; *Cleft comodule algebras for a bialgebra*, Comm. Algebra, 14 (1986), 801-817.
- [HKMZ] P. Hajac, U. Krähmer, R. Matthes and B. Zieliński; *Piecewise principal comodule algebras*, J. Noncommut. Geom. 5 (2011), 591-614.
- [H-PM96] P. M. Hajac; *Strong connections on quantum principal bundles*, Comm. Math. Phys. 182 (1996), 579-617.

- [HS] E. Herscovich and A. Solotar; *Hochschild-Mitchell cohomology and Galois extensions*, J. of Pure and Appl. Alg. 209 (2007), no. 1, 37-55.
- [M] S. Montgomery; *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 82 (1993), American Mathematical Society.
- [ML] S. Mac Lane; *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (2010).
- [S] A. Stănescu; *On Hopf-Galois extensions of linear categories*, An. St. Univ. Ovidius Constanta 20(3) (2012) 111-130.
- [SS] A. Stănescu and D. Ştefan; *Cleft Comodule Categories*, Comm. Alg. 41 (2013) 1697-1726.
- [W] R. Wisbauer; *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, Paris (1991).



# A Álgebras de Hopf

Por todo este apêndice,  $\mathbf{k}$  denotará um corpo e o produto tensorial  $\otimes$  será sobre o corpo  $\mathbf{k}$ , salvo quando mencionado o contrário.

**Definição A.1** Uma  **$\mathbf{k}$ -álgebra** (com unidade ou unitária) é um  $\mathbf{k}$ -espaço vetorial  $A$  com duas aplicações  $\mathbf{k}$ -lineares: a multiplicação  $m : A \otimes A \rightarrow A$  e a unidade  $u : \mathbf{k} \rightarrow A$ , tais que os seguintes diagramas comutam:

a) associatividade

b) unidade

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes A \\
 \downarrow id \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & & \\
 & u \otimes id & \nearrow & id \otimes u & \\
 \mathbf{k} \otimes A & & A \otimes A & & A \otimes \mathbf{k} \\
 & \wr & \downarrow m & & \wr \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

**Observação A.2** Uma **álgebra sem unidade** é um  $\mathbf{k}$ -espaço vetorial com uma multiplicação associativa, porém, não possui uma aplicação unidade que satisfaça a comutatividade do segundo diagrama acima.

Apenas neste Apêndice, quando nos referirmos a uma  $\mathbf{k}$ -álgebra será considerado uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com unidade.

Para a multiplicação, utilizaremos a notação  $m(a \otimes b) = ab$ .

**Definição A.3** Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. Dizemos que  $B \subset A$  é uma subálgebra de  $A$  se  $B$  é um  $\mathbf{k}$ -subespaço vetorial de  $A$  e  $B$  é uma  $\mathbf{k}$ -álgebra com as restrições da multiplicação e da unidade de  $A$ .

**Definição A.4** Para dois  $\mathbf{k}$ -espaços  $V$  e  $W$  a aplicação torção  $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  é dada por  $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ .

**Definição A.5** Dada uma  $\mathbf{k}$ -álgebra  $A$ , chamamos de álgebra oposta de  $A$  e denotamos por  $A^{op}$  a álgebra obtida usando  $A$  como espaço vetorial mas com uma nova multiplicação dada por  $m^{op} = m \circ \tau$ . Se  $A$  possui unidade, então,  $A^{op}$  possui a mesma unidade de  $A$ .

**Definição A.6** Uma **k-coálgebra** (com co-unidade) é um **k-espaço vetorial**  $C$  com duas aplicações **k-lineares**: a comultiplicação  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  e a co-unidade  $\varepsilon : C \rightarrow \mathbf{k}$ , tais que os seguintes diagramas comutam:

a) co-associatividade

b) co-unidade

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes id \\
 C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \swarrow \cong & \downarrow \Delta & \searrow \cong \\
 \mathbf{k} \otimes C & & C \otimes \mathbf{k} \\
 \swarrow \varepsilon \otimes C & & \searrow C \otimes \varepsilon \\
 & C \otimes C &
 \end{array}$$

Usaremos a notação  $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$  e, caso não haja margem para dúvidas, escreveremos apenas  $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ .

**Proposição A.7** Sejam  $(A, m, u)$  uma **k-álgebra** e  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma **k-coálgebra**. Então  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$  é uma **k-álgebra** com o produto convolução  $*$  dado por  $(f * g)(c) = m(f \otimes g)\Delta(c)$  e unidade dada por  $u \circ \varepsilon$ .

◇

Podemos escrever o produto convolução da seguinte forma:

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2).$$

**Definição A.8** Seja **k** um corpo.

1. Dadas duas **k-álgebras**  $(A, m_A, u_A)$  e  $(B, m_B, u_B)$ , dizemos que a aplicação  $f : A \rightarrow B$  é um **morfismo de álgebras** se  $f \circ m_A = m_B \circ (f \otimes f)$  e  $f \circ u_A = u_B$ .
2. Dadas duas **k-coálgebras**  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$  e  $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ , dizemos que a aplicação  $g : C \rightarrow D$  é um **morfismo de coálgebras** se  $(g \otimes g) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ g$  e  $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ g$ .

**Definição A.9** Um **k-espaço vetorial**  $B$  será chamado de **biálgebra** se  $(B, m, u)$  for uma **k-álgebra**,  $(B, \Delta, \varepsilon)$  for uma **k-coálgebra** e uma das condições (equivalentes) abaixo for satisfeita:

1.  $\Delta$  e  $\varepsilon$  são morfismos de álgebras.
2.  $m$  e  $u$  são morfismos de coálgebras.

**Exemplo A.10** Seja  $G$  um grupo. A álgebra de grupo  $\mathbf{k}G$  é uma **k-álgebra** e também uma **k-coálgebra** com  $\Delta(g) = g \otimes g$  e  $\varepsilon(g) = 1_{\mathbf{k}}$ , para todo  $g \in G$ . Além disso,  $\Delta$  e  $\varepsilon$  são morfismos de álgebras. Portanto,  $\mathbf{k}G$  é uma biálgebra.

**Definição A.11** *Seja  $H$  uma biálgebra. Uma aplicação  $\mathbf{k}$ -linear  $S : H \rightarrow H$  é chamada uma **antípoda em  $H$**  se  $S$  é a inversa da identidade  $I : H \rightarrow H$  com respeito ao produto convolução da  $\mathbf{k}$ -álgebra  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(H, H)$ , ou seja,  $S * I = I * S = u \circ \varepsilon$ .*

Em outras palavras, isto significa que,

$$\varepsilon(h)1_H = (S * I)(h) = \sum S(h_1)h_2$$

$$\varepsilon(h)1_H = (I * S)(h) = \sum h_1S(h_2),$$

ou ainda,

$$\sum h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H = \sum S(h_1)h_2. \quad (\text{A.1})$$

**Definição A.12** *Uma biálgebra que possui uma antípoda é chamada de **álgebra de Hopf**.*

**Exemplo A.13** Vimos no Exemplo A.10 que  $\mathbf{k}G$  possui uma estrutura de biálgebra. A aplicação  $S : \mathbf{k}G \rightarrow \mathbf{k}G$  definida por  $S(g) = g^{-1}$ , para todo  $g \in G$ , satisfaz a equação A.1. Logo,  $\mathbf{k}G$  é uma álgebra de Hopf.

**Definição A.14** *Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. Um  **$A$ -módulo à esquerda**  $M$  é um  $\mathbf{k}$ -espaço com uma aplicação  $\mathbf{k}$ -linear  $\cdot : A \otimes M \rightarrow M$  tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{m \otimes M} & A \otimes M \\ A \otimes \downarrow & & \downarrow \cdot \\ A \otimes M & \xrightarrow{\cdot} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{k} \otimes M & \xrightarrow{u \otimes M} & A \otimes M \\ & \searrow \cong & \downarrow \cdot \\ & & M \end{array}$$

**Definição A.15** *Sejam  $M$  e  $N$  dois  $A$ -módulos à esquerda. Dizemos que  $f : M \rightarrow N$  é um morfismo de  $A$ -módulos se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{A \otimes f} & A \otimes N \\ \cdot_M \downarrow & & \downarrow \cdot_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

**Proposição A.16** *Seja  $H$  uma álgebra de Hopf. Se  $M$  e  $N$  são  $H$ -módulos à esquerda, então, o produto tensorial  $M \otimes_{\mathbf{k}} N$  é um  $H$ -módulo à esquerda com a aplicação  $\cdot$  dada por:*

$$h \cdot (m \otimes n) = \sum (h_1 \cdot m) \otimes (h_2 \cdot n).$$

◇

**Definição A.17** *Seja  $C$  uma  $\mathbf{k}$ -coálgebra. Um  **$C$ -comódulo à direita**  $M$  é um  $\mathbf{k}$ -espaço*

com uma aplicação  $\mathbf{k}$ -linear  $\rho: M \rightarrow M \otimes C$  tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ \rho \downarrow & & \downarrow M \otimes \Delta \\ M \otimes C & \xrightarrow{\rho \otimes C} & M \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ & \searrow r & \downarrow M \otimes \varepsilon \\ & & M \otimes \mathbf{k} \end{array}$$

Usaremos a notação  $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1 \in M \otimes C$ , ou simplesmente  $\rho(m) = m_0 \otimes m_1$ .

**Exemplo A.18** Qualquer  $\mathbf{k}$ -coálgebra  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita usando  $\rho = \Delta$ .

**Exemplo A.19** Se  $C = \mathbf{k}G$ , então,  $M$  é um  $\mathbf{k}G$ -comódulo à direita se, e somente se,  $M$  é um espaço vetorial  $G$ -graduado, isto é,  $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ .

**Proposição A.20** Seja  $H$  uma álgebra de Hopf. Se  $M$  e  $N$  são  $H$ -comódulos à direita, então, o produto tensorial  $M \otimes N$  é um  $H$ -comódulo à direita com a aplicação  $\rho$  dada por:

$$\rho(m \otimes n) = \sum m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

◇

**Definição A.21** Seja  $M$  um  $H$ -comódulo à direita. Então, o conjunto  $M^{coH} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$  é chamado de **coinvariantes de  $H$  em  $M$** .

**Definição A.22** Dados dois morfismos  $f, g: B \rightarrow C$ , o **equalizador de  $f$  e  $g$**  é um par ordenado  $(A, e)$ , com  $f \circ e = g \circ e$  que é universal com esta propriedade, isto é, se  $q: X \rightarrow B$  satisfaz  $f \circ q = g \circ q$ , então existe um único  $q': X \rightarrow A$  com  $e \circ q' = q$ .

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{e} & B & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & C \\ \uparrow \lambda & & \nearrow q & & \\ q' \downarrow & & X & & \end{array}$$

**Observação A.23** Em  ${}_{\mathbf{k}}\mathcal{M}$  (veja B.3), o equalizador de  $f$  e  $g$  é  $(\ker(f - g), e)$  onde  $e: \ker(f - g) \rightarrow B$  é a inclusão. Assim,  $(B = A^{coH}, B \hookrightarrow A)$  é o equalizador de  $\rho$  e  $\text{Id} \otimes 1_H$ .

$$B \hookrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{\rho} \\ \xrightarrow{\text{Id} \otimes 1_H} \end{array} A \otimes H$$

De fato,  $a \in \ker(\rho - (\text{Id} \otimes 1_H)) \Leftrightarrow \rho(a) - a \otimes 1_H = 0 \Leftrightarrow \rho(a) = a \otimes 1_H \Leftrightarrow a \in B$ .

**Definição A.24** Dizemos que uma  $\mathbf{k}$ -álgebra  $A$  é uma  $H$ -módulo álgebra à esquerda se,

i)  $A$  é um  $H$ -módulo à esquerda, via  $h \otimes a \rightarrow h \cdot a$ ;

$$ii) h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b);$$

$$iii) h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A,$$

para todo  $h \in H, a, b \in A$ .

**Observação A.25** Dizemos que  $H$  **mede**  $A$  se ii) e iii) da definição acima forem satisfeitas.

**Definição A.26** Uma  $\mathbf{k}$ -álgebra  $A$  é uma  $H$ -comódulo álgebra à direita se:

$$i) A \text{ é um } H\text{-comódulo à direita, via } \rho(a) = \sum a_0 \otimes a_1;$$

$$ii) \rho(ab) = \sum a_0 b_0 \otimes a_1 b_1, \text{ para todo } a, b \in A;$$

$$iii) \rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H.$$

# B Categorias e Funtores

**Definição B.1** Uma categoria  $\mathcal{C}$  consiste nos seguintes elementos:

- 1) uma classe de objetos  $\mathcal{C}_0$ ;
- 2) para cada par ordenado de objetos  $(X, Y)$  de  $\mathcal{C}_0$ , uma classe de morfismos denotada por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ou  ${}_Y\mathcal{C}_X$ ;
- 3) para cada  $X \in \mathcal{C}_0$ , um elemento  $1_X \in \text{Hom}(X, X)$ ;
- 4) para cada tripla  $(X, Y, Z)$  de  $\mathcal{C}_0$ , uma aplicação:

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

sujeitos aos seguintes axiomas:

- a) para  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  e  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- b) para cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ :

$$1_Y \circ f = f \circ 1_X$$

**Exemplo B.2** Os objetos na categoria **Sets** são os conjuntos, os morfismos são funções e a composição é a composição usual de funções.

**Exemplo B.3** Seja  $A$  uma  $\mathbf{k}$ -álgebra. A categoria  ${}_A\mathcal{M}$  tem como objetos os  $A$ -módulos à esquerda e como morfismos os morfismos de  $A$ -módulos com a composição usual. Analogamente, podemos definir a categoria dos  $A$ -módulos à direita  $\mathcal{M}_A$ , ou ainda, a categoria dos  $A$ -bimódulos  ${}_A\mathcal{M}_A$ , onde os morfismos são os morfismos de  $A$ -bimódulos.

**Exemplo B.4** Seja  $C$  uma  $\mathbf{k}$ -coálgebra. A categoria  ${}^C\mathcal{M}$  tem como objetos os  $C$ -comódulos à esquerda e como morfismos os morfismos de  $C$ -módulos com a composição usual. Analogamente, podemos definir a categoria dos  $C$ -módulos à direita  $\mathcal{M}^C$ .

**Definição B.5** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias.

1) Um **funtor covariante**  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  associa a cada objeto  $X \in \mathcal{C}_0$  um objeto  $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{D}_0$  e a cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  um morfismo  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  em  $\mathcal{D}$  tal que:

a) para cada  $X \in \mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ ;

b) para cada par  $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ , temos  $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ .

2) Um **funtor contravariante**  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  associa a cada objeto  $X \in \mathcal{C}_0$  um objeto  $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{D}_0$  e a cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  um morfismo  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  em  $\mathcal{D}$  tal que:

a) para cada  $X \in \mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ ;

b) para cada par  $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ , temos  $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ .

**Definição B.6** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias e  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  dois funtores covariantes. Um **morfismo funtorial** (ou transformação natural)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  associa a cada objeto  $X \in \mathcal{C}_0$  um morfismo  $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  em  $\mathcal{D}$  tal que para cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{G}(X) \\ \downarrow f & \Rightarrow & \mathcal{F}(f) \downarrow \qquad \downarrow \mathcal{G}(f) \\ Y & & \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\varphi_Y} \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

Dizemos que o morfismo funtorial  $\varphi$  é um **isomorfismo funtorial** se  $\varphi_X$  é um isomorfismo para cada  $X \in \mathcal{C}_0$ .

**Definição B.7** Um funtor covariante  $T : \mathbf{k}\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Ab}$  é um **funtor exato** se para cada sequencia exata de  $\mathbf{k}$ -módulos

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

a sequencia

$$0 \longrightarrow T(N') \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(N'') \longrightarrow 0$$

é exata.

**Definição B.8** Dizemos que um  $\mathbf{k}$ -módulo  $M$  é  **$\mathbf{k}$ -plano** se o funtor  $M \otimes -$  é exato.

**Observação B.9** Desde que o funtor  $M \otimes -$  preserva cokernels, então,  $M$  é  $\mathbf{k}$ -plano sempre que uma aplicação injetiva  $i : N' \rightarrow N$  implica que a aplicação  $\text{Id} \otimes i : M \otimes N' \rightarrow M \otimes N$  também é injetiva. Assim, se  $M$  é  $\mathbf{k}$ -plano, então, o funtor  $M \otimes -$  preserva Kernels.