# O SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO

Ensaio para definição do vetor de orientação

Geocêntrica através da Geodésia Física

*MAURO PEREIRA DE MELLO*

Engº Cartógrafo

**1 9 7 3**

CDU: 526,7
CDD: 526,7

MAURO PEREIRA DE MELLO
ENGº CARTÓGRAFO

# O SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO

*Ensaio para definição do vetor de orientação Geocêntrica através da Geodésia Física*

Tese apresentada ao Instituto de Geociências da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências

CURITIBA
Maio / 1973

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um ensaio visando a definição dos parâmetros de orientação geocêntrica para o Sistema Geodésico Brasileiro (datum Chuá). O problema é tratado segundo os princípios da Geodésia Física. Uma discussão do método físico é realizada com o objetivo de apresentar um texto de iniciação a quantos venham necessitar de informações básicas sobre o assunto. Modelos gráficos e analíticos para o cálculo do vetor de orientação geocêntrica são apresentados. Sendo que os analíticos são abordados a título de notícia, já que o autor não teve acesso a dados suficientes para testar a confiabilidade dos modelos. Resultados numéricos são expostos para Chuá e outros pontos astrogeodésicos em suas imediações. Os resultados não devem ser encarados como definitivos, trabalhos complementares de campo possibilitarão a obtenção de valores mais precisos. Na forma de adendos são discutidos temas de interesse geodésico, destacando-se o que dá uma visão do estado atual dos levantamentos gravimétricos no Brasil e o último em que se conjugam dois métodos de ajuste polinomial para obtenção de valores médios.

## RESUMÉE

Dans ce travail on a en vue de présenter un essai afin de définir les paramètres d'orientation géocentrique pour le Sustème Geodési que Brésilen (datum Chuá). Le probléme est apporté selon les principes de la geodésie gravimétrique. On fait une discussion de la méthode gravimétri que en vue de présenter un ouvrage d'initiation à tous ceux que viennent à se préocuper avec le probléme. Des modéles graphiques et analytiques pour le calcul du vecteur d'orientation géocentrique sont présentés. On appelé l'attention sur le fait que les méthodes analytiques sont traités d'une maniére génerale, dés que l'auteur n'en a pas des donnés suffisants pour pouvoir confier dans les modéles. Des résultats numériques sont exposés pour Chuá et pour des autres points, astregéodésiques proches. On ne peut pas considérer les résultat conme definitives. D'autres travails devront être entrepris dans le sens d'amélioner les donnés pour obtenir des résultats plus précis. On a soin, d'autre part, de traiter en forme d'adendum plusieur sujets important pour l'utilization de la méthode gravimétrique. On appelle l' attention surtout pour le dernier, qui substitue deux méthodes de polynômes d'ajustment em vue d'arriver a des valeurs moyennes.

AGRADECIMENTOS:

A enumeração de todos os que tornaram possível a elaboração deste trabalho seria por demais extensa, e possivelmente terminaríamos por omitir alguns. Contudo não poderíamos deixar de agradecer:

– ao Prof. CAMIL GEMAEL como orientador acadêmico, por seus conselhos e sugestões; como coordenador do CPGCG - UFPR, pelos recursos que tornaram possível a manipulação de grande parte dos dados necessários à definição dos valores apresentados neste ensaio;

– à Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística pela cessão dos dados que tornaram possível o cálculo dos parâmetros de orientação para o Sistema Geodésico Brasileiro;

– à PETROBRAS e ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro pela cessão dos dados Gravimétricos que possibilitaram o cálculo de anomalias médias para o território brasileiro;

– ao Instituto de Pesquisas Espaciais - CNPq pelo apoio financeiro, na forma de bolsa de estudos, que possibilitou o autor a conclusão do curso de pós-graduação.

CURITIBA
Maio / 1973

ÍNDICE

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos uma quantidade expressiva de estações gravimétricas tem sido acumulada na área do datum Chuá, numa tentativa de se obter um lastro de informações que possibilite a definição do vetor de orientação geocêntrica para o Sistema Geodésico Brasileiro.

A quantidade e distribuição das estações gravimétricas motivou-nos a ensaiar uma caracterização do vetor geocêntrico através da Geodésia Física.

Nesta pesquisa procuramos descrever as técnicas utilizadas e os resultados obtidos. Contudo, não temos a pretensão de apresentá-los de uma forma definitiva, mas sim obter indicadores que possibilitem o planejamento de trabalhos complementares de campo e gabinete visando maior precisão nas determinações futuras.

A falta de uma bibliografia geodésica nacional que sirva de orientação aos estudantes e profissionais que militam no campo cartográfico, nesta espécie de atividade, motivou-nos a redigir este texto de maneira que os conceitos fundamentais da Geodésia Física ficassem registrados. Não tivemos a pretensão de apresentar um compêndio sobre o assunto, mas apenas reunir os elementos necessários para iniciar o leitor em Geodésia Física.

Dentro deste pensamento os conceitos foram grupados em seis capítulos e quatro adendos.

No primeiro capítulo procuramos introduzir o conceito de Sistema de Coordenadas em Geodésia e Sistema Geodésico, caracterizando as diferentes relações entre Sistemas de Coordenadas e Transformações entre Sistemas Geodésicos.

No segundo capítulo tratamos os conceitos envolvidos na definição do campo gravitacional terrestre. Destacando-se o uso do desenvolvimento em harmônicos esféricos do geo e esferopotencial, além da obtenção do elipsóide gravimétrico.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo das diversas correntes que tratam o problema de obtenção do vetor de orientação geocêntrica do ponto de vista teórico e prático. Destacando-se a notícia a respeito dos métodos analíticos.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo dos diferentes modelos de redução gravimétrica e seu uso em geodésia.

No quinto capítulo é apresentada uma técnica que recorrendo a dados mixtos; astros-geodésicos e gravimétricos, possibilita a obten ção das componentes do desvio da vertical devidas ao efeito das zonas distantes. O nivelamento astro-gravimétrico é encarado do ponto de vista teórico-prático.

O sexto capítulo é a síntese do trabalho; nele são discutidas as facetas da caracterização do Sistema Geodésico Brasileiro, os dados existentes para obtenção do vetor de orientação geocêntrica e as providências a serem adotadas para a definição de parâmetros mais precisos.

Os adendos são constituídos por quatro capítulos em que são apresentados elementos complementares aos anteriores. Destacando-se o adendo 10, onde é apresentada uma técnica de ajuste polinomial de alto rendimento e precisão na obtenção de valores médios para o campo anômalo.

Os nossos objetivos com este trabalho são modestos e esperamos que seja de valia a quantos a ele recorram.

# 1. SISTEMAS DE COORDENADAS EM GEODÉSIA

## 1.1 - CONCEITO DE POSIÇÃO:

Os objetivos da geodésia são primariamente geométricos, ou seja: a determinação dos parâmetros definidores da forma e dimensões da Terra e o estabelecimento de pontos de controle que sirvam de apoio às tarefas de mapeamento. Para que estes objetivos sejam atingidos é necessário que se defina um sistema de coordenadas que sirva de referência e, desde que os problemas geodésicos ocorrem no espaço, um sistema tri-dimensional em que todos os pontos de controle serão locados.

A posição de um ponto sobre a superfície terrestre é definida como sendo a posição relativa à uma superfície de referência, utilizada em mapeamento como uma substituta da real. Em geodésia as superfícies comumente utilizadas como referência são: a do elipsóide (bi ou tri-axial) e as superfícies equipotenciais do campo gravitacional terrestre.

O sistema de coordenadas ideal será aquele em que a superfície terrestre seja apresentada com o maior grau de aproximação possível pela referência. A superfície adotada deverá permitir a redução imediata das medidas de campo e os cálculos correspondentes à determinação de posições, sem grande dificuldades.

## 1.2 - COORDENADAS ASTRONÔMICAS:

O sistema de coordenadas astronômicas é um sistema natural em que a posição de um ponto sobre a superfície terrestre é definida pela orientação da vertical e a cota geopotencial.

Uma superfície perpendicular em todos os seus pontos à direção da vertical será uma superfície equipotencial do campo gravitacional terrestre. A cada ponto da superfície terrestre corresponde uma e somente uma equipotencial.

A superfície equipotencial que mais se aproxima do nível médio dos mares em repouso é denominada geóide, sendo utilizada como referência em geodésia (geóide físico).

Desde que a forma de uma superfície equipotencial do campo gravitacional depende da irregular distribuição da massa terrestre, sua aparência será irregular mas sem discontinuidades.

Contudo, a curvatura apresentar-se-á descontínua onde a densidade das massas contidas pela equipotencial variar. A vertical terá as mesmas propriedades; será uma curva irregular no espaço, porém sem descontinuidades, sua curvatura as admitirá onde a densidade das massas interceptadas variar. A tangente à vertical contém a direção do vetor gravidade, sendo denominada de vertical astronômica.

As coordenadas curvilíneas neste sistema serão definidas segundo a direção fundamental da vertical e o plano do equador instantâneo, definido pelo eixo polar instantâneo de rotação.

A **Latitude Astronômica** é definida pelo ângulo formado entre a vertical astronômica e sua projeção no plano do equador, fig.(1.2. - 1)

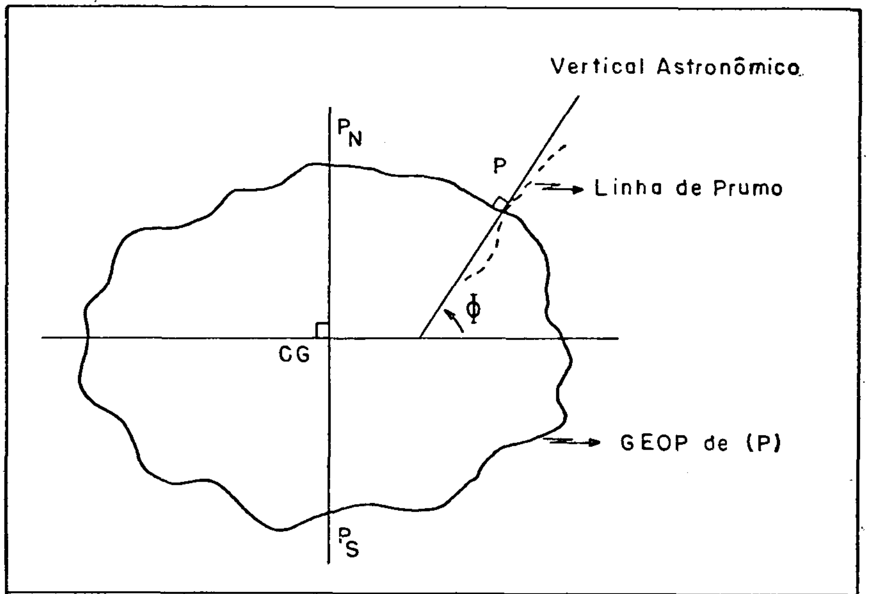



FIG.( I.2 — I )— A LATITUDE ASTRONÔMICA

O plano que contém a vertical astronômica em (P) e é paralelo ao eixo instantâneo de rotação denomina-se plano meridiano astronômico de (P).

O plano meridiano de Greenwich, como fixado pelo "Bureau Internacional de l' heure", e definido como sendo o plano paralelo ao do meridiano de Greenwich, é utilizado como origem de contagem das longitudes, estando posicionado a 0",418 E do observatório de mesmo nome, BOMFORD, pág.92.

O ângulo ($\Lambda$) entre o plano meridiano médio de GREENWICH e o meridiano de (P), é denominado de longitude astronômica.

As longitudes são contadas positivamente para Oeste de 0º a 180º e negativas para Leste de 0º a 180º, pelos astrônomos. Os geodesistas, principalmente os europeus, admitem como positivas as longitudes de 0º a 180º à Leste do meridiano de Greenwich e negativas a Oeste.

Em 1967 na Assembléia Geral de Lucerne a AIG padronizou a contagem de longitudes de Leste para Oeste de 0º a 360º.

Pontos da mesma latitude (mesma longitude) estão situados no mesmo paralelo (meridiano). Os paralelos e meridianos astronômicos não serão curvas regulares; terão irregularidades devidas às variações de massa.

Os polos astronômicos são definidos como os pontos de interseção do eixo instantâneo de rotação com a superfície equipotencial passante pelo ponto em que se realizam as observações.

O plano ortogonal à vertical astronômica em (P) é o plano do horizonte do lugar. Os planos que contêm a vertical são denominados de planos verticais.

O **azimute astronômico** de um ponto (P) em relação a (Q) é definido como sendo o ângulo formado pelo plano meridiano de (P)e o plano vertical de (P) que contêm (Q), é medido no plano do horizonte de (P) e contado de 0º a 360º SONE.

A terceira coordenada é definida pela cota geopotencial, obtida a partir de medidas gravimétricas associadas à determinação de altitudes em relação ao geóide (nivelamento geométrico). A cota geopotencial é expressa em unidades geopotenciais (ugp). As **altitudes ortométricas** (H) definem, aproximadamente, a terceira coordenada no sistema astronômico.

No sistema astronômico as coordenadas são obtidas por observações diretas.

A principal desvantagem para o uso geodésico intensivo do sistema astronômico está vinculada às suas propriedades métricas, que de modo geral envolvem cálculos complexos de difícil utilização prática, MARUSSI/79/.

As coordenadas astronômicas como definidas anteriormente são denominadas instantâneas ou observadas. Variam com o tempo em função do movimento do eixo polar; migração do polo. Desde que para diferentes pontos de observação temos diferentes superfícies equipotenciais, as observações astronômicas dar-se-ão segundo diferentes superfícies de referência. Devido a estes fatos as coordenadas não são utilizadas diretamente como observadas, tornando-se necessária a definição das **coordenadas média ou reduzidas.**

As coordenadas reduzidas são definidas como anteriormente, sendo que o plano fundamental é o do equador médio, definido pelo polo médio da época 1900-05 na forma fixada pelo "Internacional Polar Motion Service". O geóide é a superfície de referência a que são reduzidos os valores observados através da correção de altitude.

## 1.3 - COORDENADAS GEODÉSICAS:

No sistema de coordenadas geodésicas a superfície de referência é a do elipsóide (bi ou tri-axial) melhor adaptado ao geóide; esta última condição embora desnecessária do ponto de vista teórico é desejável na prática.

O elipsóide de revolução é definido por seus semi-eixos; maior (a) e menor (b).

Outra maneira de se definir o elipsóide é através da dimensão de um dos seus semi-eixos, (a) por exemplo, e por uma das quantidades auxiliares, |9|:

. achatamento: $f = \frac{a-b}{a}$

. primeira excentricidade: $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{2f - f^2}$ ...(1.3.1)

. segunda excentricidade: $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$

A direção fundamental neste sistema é a da normal à superfície elipsoidal. O plano fundamental é o do equador geodésico, definido como sendo o plano ortogonal ao eixo de rotação do elipsóide, e que contém o seu centro de gravidade.

Um ponto (P) na superfície do elipsóide é definido pelas coordenadas:
($\phi$) latitude e ($\lambda$) longitude geodésicas.

A latitude geodésica é representada pelo ângulo formado entre a normal no ponto (P) e sua projeção no plano do equador. A longitude geodésica é definida pelo ângulo entre o plano meridiano paralelo ao de GREENWICH, tomado como origem de contagem, e o meridiano do lugar.

Comumente nos cálculos geodésicos introduzimos duas latitudes auxiliares, fig. (1.3.1). A **latitude geocêntrica** ($\psi$) definida pelo ângulo formado entre o raio vetor de (P) e sua projeção no plano do equador. A **latitude reduzida** ($\mu$) definida pelo raio do círculo envolvente da elipse meridiana, orientado em direção a (P), e sua projeção sobre o equador. As relações entre estas e a latitude geodésica são |31| e |74|:

$$\text{tag. } \psi = \frac{a}{b} \cdot \text{ tag } \mu = \frac{b}{a^2} \cdot \text{ tag } \phi$$

$$\text{tag. } \psi = (1 - f). \text{ tag } \mu = (1 - f)^2. \text{ tag } \phi$$

$$\text{tag. } \psi = \sqrt{1 - e^2}. \text{ tag } \mu = (1 - e^2). \text{ tag } \phi \qquad ...(1.3.2)$$

Os planos que contém a normal geodésica de um ponto são denominados de planos geodésicos normais. Suas interseções com a superfície do elipsóide definem as seções normais. Os dois principais raios de curvatura são: o da seção normal coincidente com o meridiano geodésico e o da seção que lhe é ortogonal. Estes raios de curvatura são denominados de raio de curvatura meridiana (M) e raio de curvatura transversal ou primeiro vertical (N).

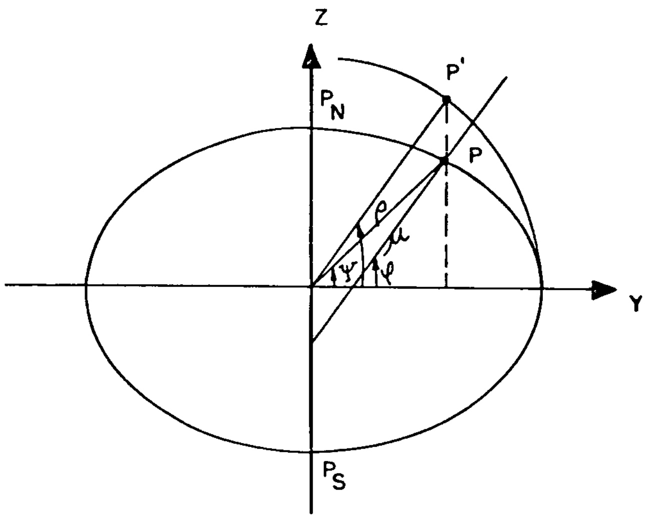



FIG.( 1.3-1 )- LATITUDES AUXILIARES

Os raios de curvatura podem ser calculadas a partir das relações, |31|:

$$M = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2.\text{sen}^2\,\phi)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2.\text{sen}^2\,\phi)^{1/2}} \qquad ...(1.3.3)$$

O azimute geodésico ($\alpha$) de um ponto (P) em relação a outro (Q) é definido pelo ângulo entre o plano do meridiano geodésico de (P) e o plano normal de (P) que contém (Q). O azimute é medido no horizonte geodésico de (P), e contado de 0º a 360º no sentido SONE, fig. (1.3.2).

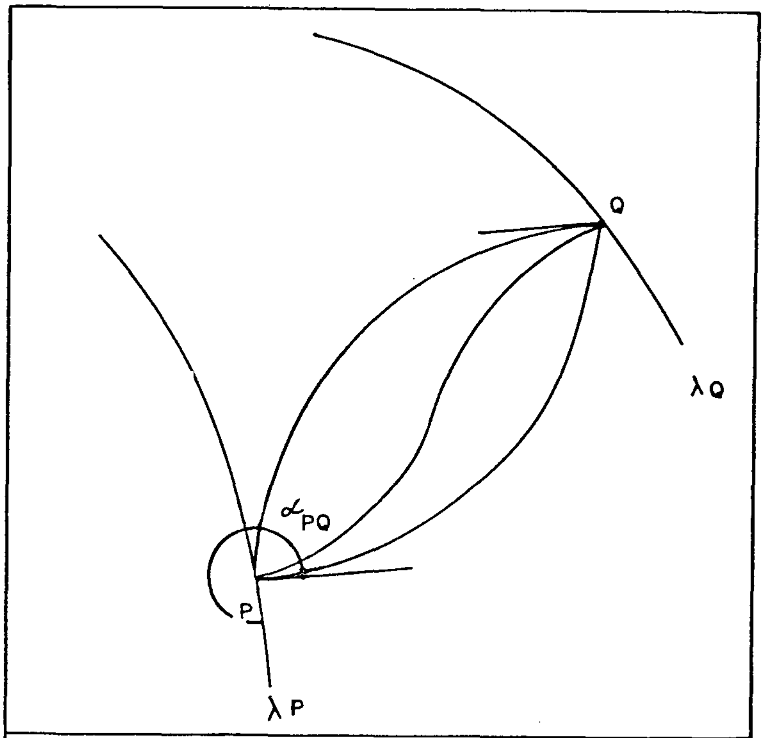



FIG.( 1.3 – 2 )– AZIMUTE GEODÉSICO

A terceira coordenada neste sistema é a **altitude elipsoidal** (h), que define o afastamento ao longo da normal, entre o ponto na superfície terrestre e sua projeção sobre o elipsóide, fig. (1.4.2.1).

Neste sistema as coordenadas são obtidas a partir de observações indiretas. As posições são definidas a partir do transporte de coordenadas ao longo das redes de triangulação, trilateração ou caminhamentos poligonais de precisão. Para a realização do transporte de coordenadas é necessário que se definam as coordenadas geodésicas de um ponto que será tomado como origem: o datum.

Os sistemas de coordenadas geodésicas e astronômicas não admitem qualquer expressão analítica que possibilite a transformação direta de coordenadas, contudo suas diferenças em coordenadas:

$$\Phi - \phi = \xi$$
$$(\Lambda - \lambda).\cos\Phi = \eta \qquad \ldots(1.3.4)$$

denominadas componentes do desvio da vertical (afastamento angular entre a vertical astronômica e a normal geodésica) e a diferença de cotas:

$$H - h = N \qquad \ldots(1.3.5)$$

denominada de ondulação geoidal ou geo-ondulação (afastamento entre as superfícies de referência nos dois sistemas); podem ser determinadas, permitindo a transformação de coordenadas entre os sistemas.

A conhecida equação de LAPLACE relaciona o azimute geodésico ($\alpha$) ao astronômico (A):

$$\alpha = A - \eta . \text{ tag } \phi \qquad ...(1.3.6)$$

As relações anteriores deixam antever a possibilidade de se definir as coordenadas geodésicas do datum a partir das astronômicas médias e das diferenças ($\xi$), ($\eta$) e (N).

## 1.4 - SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS

### 1.4.1 - COORDENADAS CARTESIANAS TERRESTRES

Para definirmos as coordenadas geodésicas e astronômicas recorremos a duas aproximações para a forma da Terra: o elipsóide e a equipotencial coincidente com o nível médio dos mares — o geóide. Associemos, agora, à superfície terrestre um terno cartesiano, de maneira a distinguirmos:

(a) - COORDENADAS CARTESIANAS TERRESTRES INSTANTÂNEAS:

Definidas segundo um terno cartesiano com a origem coincidente com o centro de massa da Terra.

O eixo das cotas é direcionado para o polo norte instantâneo, o eixo das abcissas é orientado para a interseção do meridiano astronômico médio de GREENWICH com o equador instantâneo; o eixo das ordenadas é orientado a 90º do anterior, para Leste.

As coordenadas (U, V, W) de um ponto na superfície terrestre, neste sistema, variam em função do movimento do polo.

(b) - COORDENADAS CARTESIANAS TERRESTRES MÉDIAS

Definidas segundo o terno cartesiano com a origem coincidente com o centro de massa da Terra. O eixo das cotas é dirigido para o polo médio da época 1 900-05, conforme definição do IPMS; o eixo das abcissas é direcionado paralelamente ao plano meridiano astronômico de GREENWICH e o eixo das ordenadas é plotado a 90º do anterior, no sentido Este-Oeste.

As coordenadas (u, v, w) de um ponto na superfície terrestre são invariáveis, abstraindo-se as marés da crosta e a deriva continental.

A fig. (1.4.1.1) representa os sistemas anteriormente descritos. A transformação de coordenadas entre estes pode ser facilmente obtida a partir de duas rotações; uma em torno do eixo das abcissas do sistema terrestre médio e outra em torno do eixo das ordenadas do mesmo sistema.

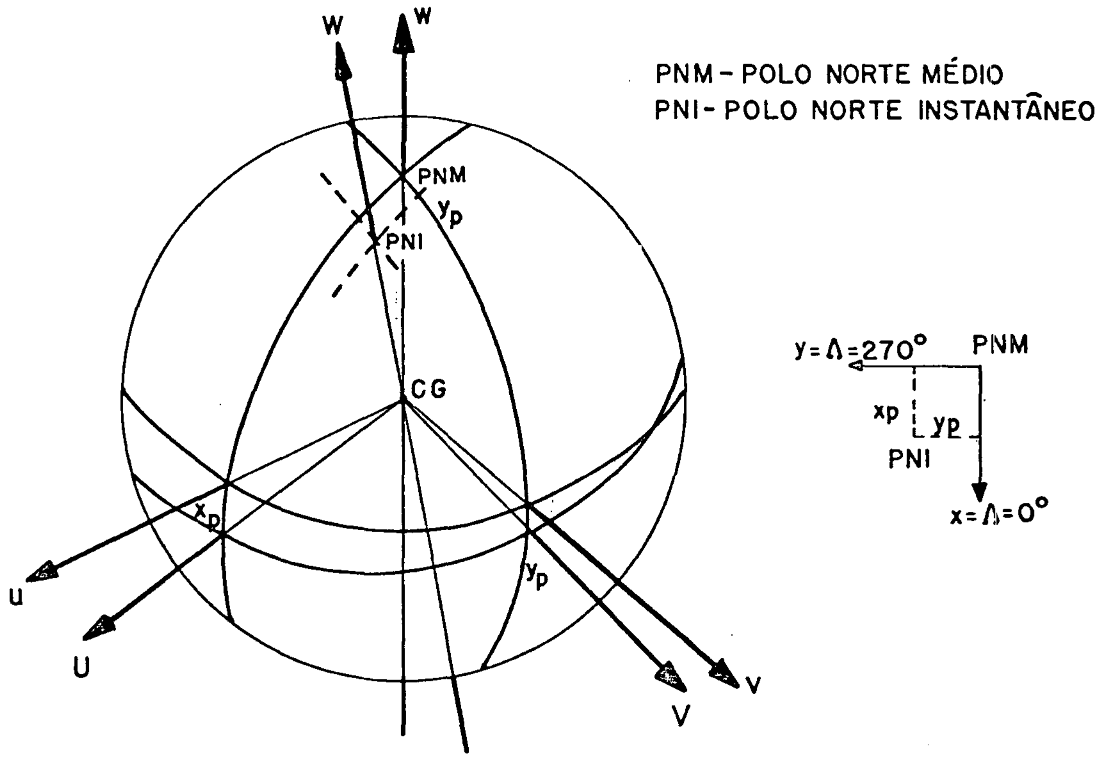



FIG.(1.4.1.1)-OS SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS TERRESTRES.

Antes de expressarmos matematicamente as relações, iremos introduzir o conceito de matriz de rotação $R_i$ ($\Theta$).

A matriz $R_i$ ($\Theta$) rota um sistema coordenado cartesiano ao redor de seu eixo (i) de um ângulo ($\Theta$). As expressões das matrizes de rotação para um sistema cartesiano dextrógiro e ($\Theta$) no sentido anti-horário são, MUELLER |92|:

$$R_1(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \mathrm{sen}\Theta \\ 0 & -\mathrm{sen}\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

$$R_2(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\mathrm{sen}\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \qquad \ldots(4.1.2)$$

$$R_3(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \mathrm{sen}\Theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observando a figura anterior podemos escrever a relação:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R_2(-x_p).\ R_1(-y_p).\ \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.4.1.2)$$

em que $(x_p$ e $y_p)$ são as coordenadas do polo instantâneo em relação ao médio. Estas coordenadas são publicadas pelo IPMS (relatório anual) e pelo BIH(circular da série D).

As relações entre as coordenadas astronômicas instantâneas e médias são também expressas em função das componentes $(x_p,\ y_p)$através das relações, MUELLER |92|:

$$\Phi_m - \Phi_i = y_p\ .\ \text{sen}\ \Lambda_i - x_p\ .\ \cos\ \Lambda_i$$

$$\Phi_m - \Phi_i = -(x_p.\ \text{sen}\ \Lambda_i + y_p\ .\ \cos\ \Lambda_i).\ \text{tag}\ \Phi_m \qquad \ldots(1.4.1.3)$$

$$A_m - A_i = -(x_p.\ \text{sen}\ A_m + y_p\ .\ \cos\ A_m).\ \sec\ \Phi_i$$

### 1.4.2 - COORDENADAS CARTESIANAS GEODÉSICAS:

O sistema cartesiano geodésico é definido em relação ao elipsóide. O centro de gravidade do sólido é a origem. O eixo das cotas é tomado coincidente com o eixo menor do elipsóide e dirigido positivamente para o norte; o eixo das abcissas é posicionado no plano do equador, interseção com o meridiano de GREENWICH, e o eixo das ordenadas é tomado a 90º Este do anterior.

Podemos distingüir três tipos de coordenadas cartesianas geodésicas: as absolutas, as relativas e as locais.

Um sistema cartesiano geodésico absoluto, origem coincidente com o centro de massa da Terra e do elipsóide, dá origem às coordenadas geocêntricas.

As relações entre as coordenadas geodésicas $(\phi)$,$(\lambda)$,$(h)$e as cartesianas $(x,\ y,\ z)$ podem ser obtidas da fig. (1.4.2.1).

$$X = (N^* + h).\ \cos\phi\ .\ \cos\ \lambda$$

$$Y = (N^* + h).\ \cos\phi\ .\ \text{sen}\ \lambda$$

$$Z = |N^*\ (1-e^2) + h|.\ \text{sen}\ \phi \qquad \ldots(1.4.2.1)$$

ou em termos do raio vetor e latitude geocêntrica (não confundir a latitude geocêntrica com a latitude geodésica geocêntrica):

$$X = (\rho + h).\ \cos\psi.\ \cos\lambda$$

$$Y = (\rho + h).\ \cos\psi.\ \text{sen}\lambda$$

$$Z = (\rho + h).\ \text{sen}\ \psi \qquad ...(1.4.2.2)$$

A transformação inversa é bem mais complexa, em virtude de ($N^*$) ser uma função da latitude geodésica.

A longitude é obtida a partir da relação entre a abcissa e ordenada, LEVALLOIS |74|:

$$\frac{Y}{X} = \text{tag}\ \lambda$$

o que nos dá:

$$\lambda = \text{arc tag}\ Y/X \qquad ...(1.4.2.3)$$

Quadrando (X) e (Y) e somando vem:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h).\ \cos\phi \qquad ...(1.4.2.4)$$

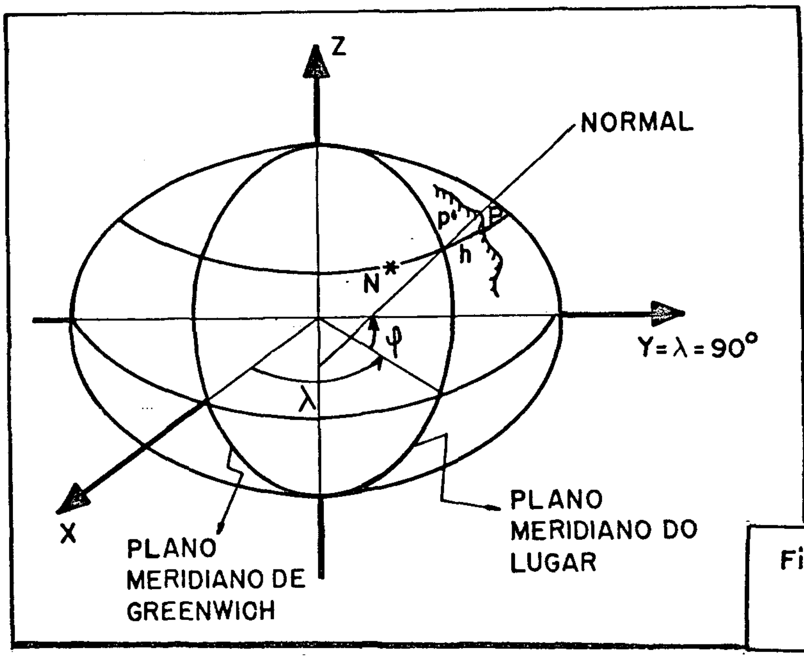



Fig. (1.4.2-1) - O SISTEMA CARTESIANO GEODÉSICO

da expressão para (Z) nas (1.4.2.1) tiramos

$$Z + N^*.\ e^2.\ \text{sen}\phi = (N^* + h).\ \text{sen}\phi \qquad ...(1.4.2.5)$$

tomando-se a razão entre a (1.4.2.5) e a (1.4.2.4) vem:

$$\tan\phi = \frac{Z + N^*.\ e^2.\ \text{sen}\ \phi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \qquad ...(1.4.2.6)$$

um processo iterativo quando aplicado à expressão anterior converge rapidamente, fornecendo o valor de ($\phi$).

A altitude elipsoidal é obtida a partir das expressões para (X) ou (Y) nas (1.4.2.1):

$$h = X.\ \sec\phi\ .\ \sec\lambda - N^*$$
$$h = Y.\ \sec\phi\ .\ \cos\lambda - N^* \qquad ...(1.4.2.7)$$

As coordenadas cartesianas geodésicas relativas e locais, definem-se da mesma forma que as anteriores, somente que a origem do terno cartesiano não coincidirá com o centro de massa da Terra. No item (1.5) retornaremos ao assunto.

### 1.4.3 - COORDENADAS CARTESIANAS TOPOCÊNTRICAS:

O sistema topocêntrico é caracterizado por ter sua origem na superfície terrestre ou no ponto correspondente sobre o elipsóide ou o geóide. Desta forma distingüiremos:

(a) - COORDENADAS CARTESIANAS TOPOCÊNTRICAS ASTRONÔMICAS:

São definidas para um terno cartesiano cujo eixo das cotas é tomado coincidente com a direção da vertical astronômica e orientado para o exterior da superfície terrestre. Os eixos ($x^*$) e ($y^*$) pertencem ao plano ortogonal à vertical e tangente à origem. O eixo das abcissas é tomado tangente ao meridiano da origem e orientado positivamente para o Sul e o eixo das ordenadas é tomado a 90º oeste do anterior. Veja fig. (1.4.3.1)

(b) - COORDENADAS CARTESIANAS TOPOCÊNTRICAS GEODÉSICAS:

São definidas para um terno cartesiano cujo eixo das cotas é tomado coincidente com a normal geodésica e orientado positivamente para o exterior. O eixo das abcissas ($x'$) é tomado ao meridiano geodésico da origem e orientado para o sul; o eixo das ordenadas ($y'$) é orientado a 90º oeste do anterior. Veja fig. (1.4.3(a)).

A transformação das coordenadas entre os sistemas topocêntricos é realizada através das componentes do desvio da vertical; ($\eta$) no plano do meridiano e ($\xi$) no primeiro vertical, e da geo-ondulação (N), (1.4.3.1(b)).

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = R_1(-\eta).\ R_2\ (-\xi).\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{bmatrix} \qquad \text{...(4.3.1)}$$

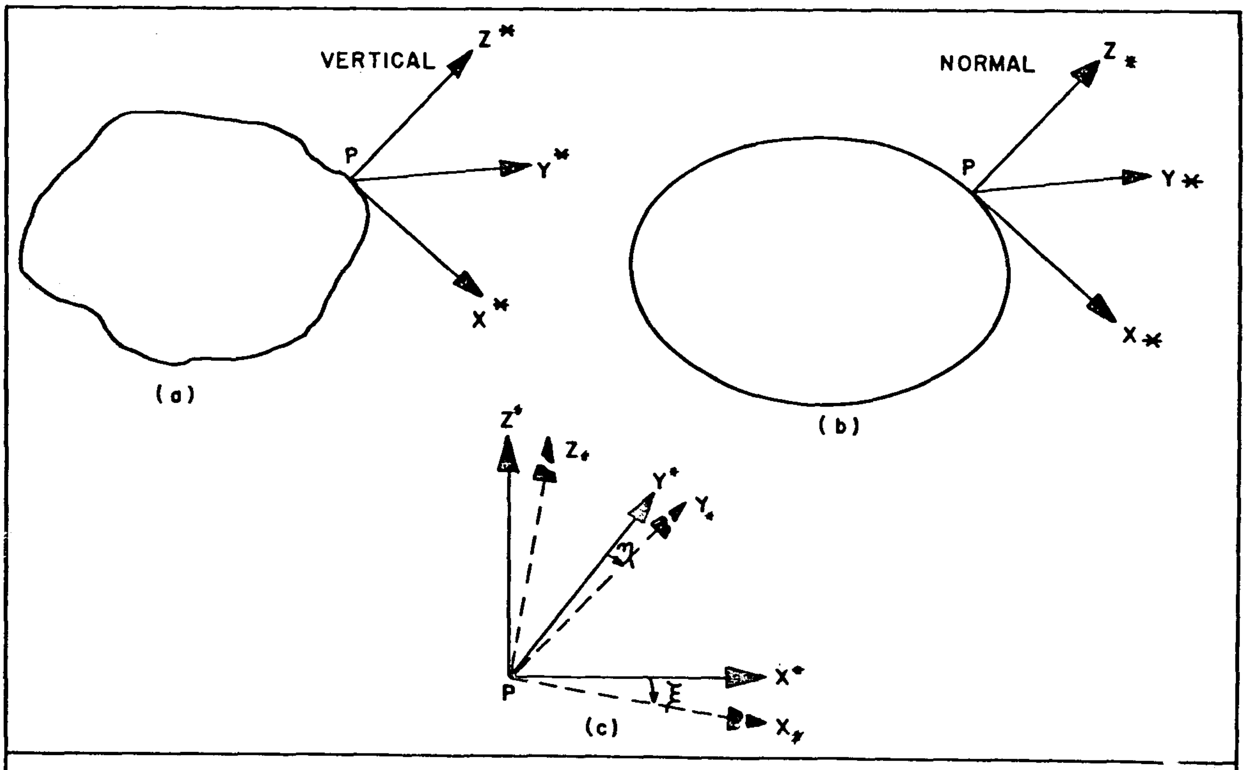



Fig.(I.4.3.I)–SISTEMAS DE COORDENADAS TOPOCÊNTRICAS.

## 1.5 - CONCEITO DE SISTEMA GEODÉSICO:

Um sistema geodésico é caracterizado pelo conjunto das coordenadas geodésicas de todos os pontos de controle (rede geodésica fundamental) referidas a um só datum e superfície de referência.

Destarte definimos um sistema geodésico a partir de cinco parâmetros:

a) - dois definidores do elipsóide utilizado como figura geométrica da Terra, por exemplo, o semi-eixo maior (a) e o achatamento (f);

b) - três que fornecem a orientação do elipsóide no ponto datum, que podem ser representados pelo vetor de orientação geocêntrica ($\xi_o$, $\eta_o$, $N_o$), pelas coordenadas geodésicas do datum ($\phi_o$, $\lambda_o$, $h_o$) ou ainda pelas coordenadas cartesianas geodésicas ($X_o$, $Y_o$, $Z_o$) do datum.

O método de determinação das quantidades fundamentais ($\xi_o$, $\eta_o$, $N_o$) qualifica o sistema geodésico; distingüimos entre sistemas **absolutos**, **relativos** e **locais**.

Um sistema geodésico local define-se com anteriormente, só que as coordenadas do datum são tomadas idênticas às astronômicas, ou seja, definimos:

$$\xi_o = \eta_o = N_o = 0$$

o que equivale a tomar o elipsóide tangente ao geóide no datum; coinciden cia da vertical astronômica com a normal-elipsóidica, fig. (1.5.1). Este procedimento é arbitrário, já que dificilmente as igualdades anteriores se verificarão, entretanto é plenamente justificado se for utilizado em caráter provisório até a definição do vetor de orientação geocêntrica.

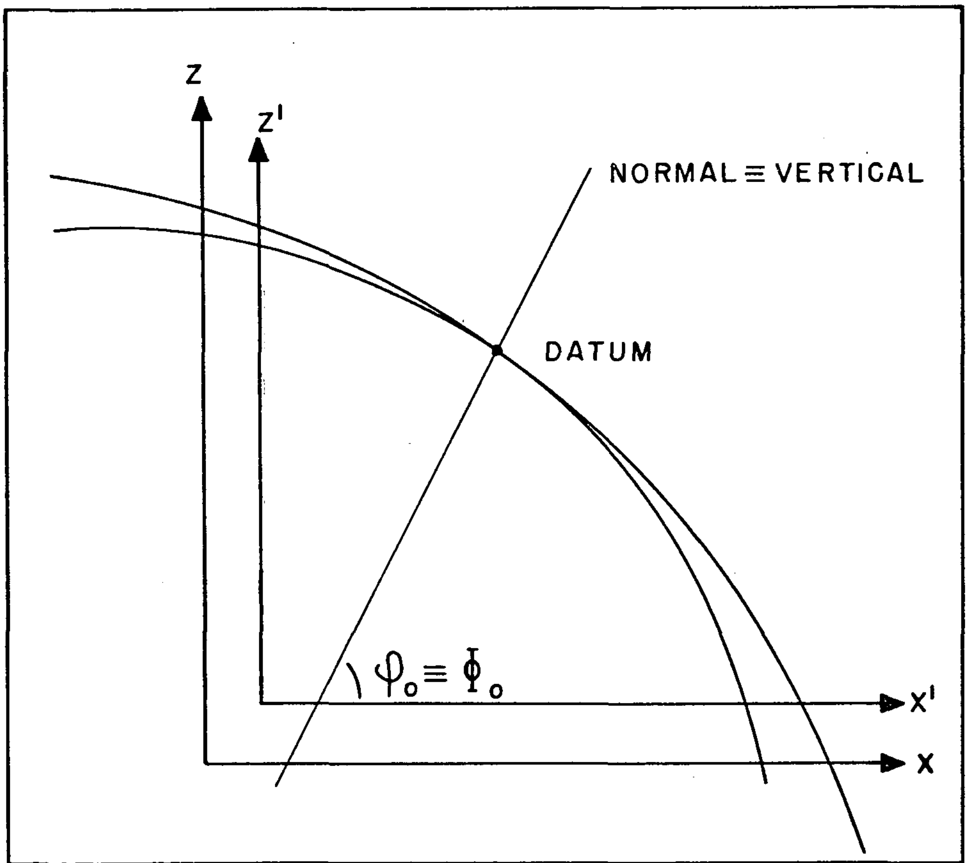



Fig. (1.5.1) — SISTEMA GEODÉSICO LOCAL

No Brasil podemos citar, a título de exemplo, como sistemas geodésicos locais:

- O sistema geodésico Córrego Alegre, que tem como datum o vértice Córrego Alegre da Triangulação do paralelo 20º, e o elipsóide internacional de 1927 (HAYFORD) como superfície de referência. As coordenadas geodésicas do datum foram arbitradas idênticas as geodésicas, ou seja, ($\xi_o = \eta_o = N_o = 0$);

- O sistema geodésico da Comissão da Carta Geral do Brasil, que tem como datum o Observatório da Carta em Porto Alegre, o elipsóide de Hayford é a superfície de referência, e as coordenadas geodésicas do datum são idênticas as astronômicas;

- O sistema geodésico Chuá Astronômico, que tem como datum o vértice Chuá da Triangulação do paralelo 20º, o elipsóide internacional de Hayford como superfície de referência, da mesma forma que os anteriores foi imposta a coincidência da normal com a vertical.

### 1.5.1 - DETERMINAÇÃO DO VETOR DE ORIENTAÇÃO:

A definição do vetor de orientação pode se processar através de qualquer dos três métodos geodésicos; o geométrico, o gravimétrico ou físico e o celeste, ou ainda através de qualquer combinação apropriada destes.

Todos os métodos apresentam vantagens e desvantagens de aplicação, além de erros característicos aos processos de cálculo, que impedirão a definição precisa do vetor de orientação.

(a) - O MÉTODO GEOMÉTRICO. O azimute astronômico e sua correspondente redução ao geóide no ponto datum garantem a orientação da rede geodésica fundamental. Contudo,os erros de observação introduzidos no desenrolar das redes tendem a deteriorar aquela orientação inicial. A introdução dos pontos astronômicos, mais conhecidos na prática como pontos de LAPLACE, a intervalos relativamente curtos, minimiza os erros no transporte de coordenadas e possibilita a reorientação dos esquemas fundamentais. Nos pontos em que se realizam determinações deste tipo temos as duas classes de coordenadas, o que lhe garante a denomincação de pontos **Astro-Geodésicos.**

Os pontos astro-geodésicos permitem o cálculo de duas das componentes do vetor de orientação, ($\xi$) e ($\eta$) através das fórmulas (1.3.4). A terceira é calculada em função das anteriores componentes astro-geodésicas do desvio da vertical, através do **Nivelamento Astro-Geodésico.**

Considerando dois pontos infinitamente próximos e ligados por um arco elementar (ds), o desnível (dN) do geóide em relação ao elipsóide escreve-se:

$$dN = i.\ ds \qquad \text{...(1.5.1.1)}$$

Sendo (i) a componente do desvio segundo (ds), cujo azimute é ($\alpha$). Considerando dois pontos (1) e (2) não muito afastados, entre os quais possamos admitir uma variação linear da componente do desvio, vem:

$$N_1 - N_2 = \int_{(1)}^{(2)} i.\ ds \qquad \text{...(1.5.1.2)}$$

onde $$i = \xi.\ \cos\alpha + \eta.\ \mathrm{sen}\ \alpha$$

expressão que representa a essência do nivelamento astro-geodésico.

Como este procedimento baseia-se no cálculo de desníveis, à semelhança do nivelamento geométrico, teremos que conhecer a altitude geoi dal de um ponto de partida. Por outro lado as componentes do desvio- geodésico da vertical dependem das coordenadas do ponto datum e dos parâmetros definidores da superfície de referência.

Um sistema geodésico caracterizado por um vetor de orientação determinado por este procedimento será **relativo.** A terminologia é plenamente justificada já que as quantidades fundamentais assim determinadas serão dependentes da cota inicial ($N_0$), relativa.

As componentes do desvio da vertical ($\xi$) e ($\eta$) no datum podem ser determinadas a partir de uma geo-ondulação ($N_0$) pré-fixada, combinando-se convenientemente os dados astro-geodésicos em grandes regiões. Um exemplo de sistema geodésico relativo de muito interesse para o Brasil é o Sistema Geodésico Sul-Americano de 1969 (SAD-69).

O SAD-69 foi determinado com base em extensos trabalhos de determinações astronômicas, cobrindo as malhas Triangulares de quase todos os países Sul-Americanos. FISCHER |27| define:

SISTEMA GEODÉSICO SUL-AMERICANO DE 1969:

(i) - Superfície de Referência:
**Elipsóide Internacional de 1967:**

a = 6 378 160 m

f = 1/298,25

(ii)- Ponto Origem:
**Vértice Chuá** da rede de triangulação brasileira(projeto paralelo 20º):

**Coordenadas Astronômicas:**

$\Phi$= - 19º 45' 41'', 34 ± 0'' ,05

$\Lambda$= 48º 06' 07'', 80 W.Gr ± 0'' ,08

$\alpha$= 271º 30' 05'', 42 ± 0'',21(SONE-para o vértice UBERABA)

**Coordenadas Geodésicas** inferidas com base nos pontos astro-geodésicos de todo o continente Sul-Americano:

$\Phi$= - 19º 45' 41'',6527

$\lambda$= 48º 06' 04'',0639 W.Gr

A= 271º 30' 04'',05 (SONE)

ondulação geoidal (imposta) = $N_0$ = 0m

(b) - O MÉTODO FÍSICO: A utilização das anomalias da gravidade ($\Delta g$) em transformações que recorrem à análise dos harmônicos esféricos ou a aplicação da integral de Stokes, possibilita o cálculo das ondulações geoidais. Da mesma maneira que as fórmulas de Vening-Meinesz fornecem as componentes do desvio da vertical.

O método físico recorrendo às formulações citadas possibilita a determinação do vetor de orientação geocêntrica, i. é, a definição absoluta de um sistema geodésico.

As dificuldades para aplicação deste método estão vinculadas ao fato de que as observações gravimétricas existentes não são uniformemente distribuídas sobre a superfície terrestre, além de existirem extensas áreas sem informações desta natureza, sendo a maior de todas em território brasileiro (adendo 7).

Sendo o erro em posição horizontal maior do que o vertical e sendo os valores de ($\Delta g$) de maior influência nas proximidades do ponto de cálculo sobre as fórmulas de Vening-Meinesz que sobre a de Stokes, Heiskanen e outros geodesistas têm defendido a tese de que o método gravimétrico deverá ser aplicado com cautela e em pontos convenientemente escolhidos, nas áreas com intensa distribuição de estações gravimétricas, HEISKANEM § VENING -MEINESZ |47|.

As mais extensivas aplicações do método foram realizadas por RICE |98| em 16 estações do território dos Estados Unidos e SZABO |111| em 6 estações nos Estados Unidos e 23 na Eurásia.

As determinações limitadas às áreas de denso material gravimétrico tem provavelmente plotado os sistemas geodésicos, em relação ao centro de massa da Terra, com erros inferiores a ± 30 m, KAULA |59|. A estimativa deste erro é por demais difícil; a influência das variações sazonais do campo gravitacional não são perfeitamente conhecidas.

Geodesistas de diversas partes do globo tem tentado minimizar as variações sazonais realizando os cálculos por comparação de dados astro-geodésicos e gravimétricos, em escala mundial. Os principais trabalhos foram realizados por FISCHER |24| e KAULA |58|.

No estado atual de distribuição dos dados gravimétricos em escala mundial, não se pode esperar grande precisão nas determinações com o método físico.

A caracterização de um sistema geodésico absoluto, através do emprego da metodologia física, admite a seqüência de operação esquematizadas na fig. (1.5.1.1).

O primeiro item, definição da fórmula da gravidade a ser adotada, caracteriza a superfície elipsoidal de referência, os demais referem-se à posição do ponto de origem em relação à superfície de referência.

DEFINIÇÃO DA FÓRMULA DA GRAVIDADE

↓

DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS ASTRONÔMICAS DO PONTO DATUM E DO AZIMUTE ASTRONÔMICO

↓

CÁLCULO DAS QUANTIDADES FUNDAMENTAIS

| $\xi_o$ | $\eta_o$ | $N_o$ |
|---|---|---|

↓

CÁLCULO DAS COORDENADAS GEODÉSICAS ABSOLUTAS DO DATUM

$$\Phi_o = \Phi_o - \xi_o$$

$$\lambda_o = \Lambda_o - \eta_o . \sec\phi_o$$

$$\alpha_o = A_o - \eta_o . \mathrm{tag}\phi_o$$

$$h_o = H_o - N_o$$

FIG.(1.5.1.1) - DEFINIÇÃO DO SISTEMA GEODÉSICO ABSOLUTO

(c) - O MÉTODO CELESTE: O avanço da tecnologia aeroespacial, principalmente em satelização para fins científicos, gerou uma nova linha de ação na tentativa de se caracterizar um sistema geodésico.

Os procedimentos dinâmicos com uso de satélites artificiais tem possibilitado a obtenção dos coeficientes no desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos, com alto grau de precisão. A uti lização destes resultado tem conduzido a definição das ondulações geoidais em escala mundial. Sendo no momento o mais completo trabalho neste sentido o desenvolvimento por GASPOSCHKIN & LAMBECK |30|.

O potencial utilizado nos cálculos orbitais admite alguns termos do desenvolvimento em harmônios esféricos como nulos, o que equivale a confundir o centro de massa da figura de referência com o da Terra. Como a transformação das posições geodésicas das estações de rastreio para o sistema coordenado inercial do satélite realiza-se a partir de uma simples rotação em torno do eixo polar terrestre, ao escrevermos as equações de observações para a órbita, estaremos obrigando que as coordenadas das estações pertençam ao mesmo sistema do satélite, ou seja ao sistema de coordenadas com origem no centro de massa da Terra.

A determinação das coordenadas da estação de acompanhamento do satélite, através do método orbital, é absoluta. Quando o processo da Triangulação ou da Trilateração Espacial for aplicado à determinação de posições, as coordenadas não serão geocêntricas, a menos que sejam as estações de enlace.

O procedimento a satélites não está livre de erros; duas dificuldades limitam sua precisão: (1) - erros na definição da posição das estações de rastreio em relação ao sistema geodésico convencional e (2) – o grande número de fatores perturbadores do plano orbital, gerados principalmente pelo campo gravitacional.

A mais recente aplicação do método celeste,com uso de satélites artificiais na caracterização de um sistema geodésico, foi realizada nos Estados Unidos sob a supervisão do Prof. MULLER |93|.

A precisão do processo está em torno de $\pm$ 10 m, em relação ao centro de massa da Terra, KAULA |59|.

Dentro do método celeste a utilização de câmeras lunares MARKOWITZ |78|, e das técnicas de ocultação LAMBERT |68|, merecem menção como possíveis elementos para definição de um sistema absoluto.

Neste trabalho iremos desenvolver a teoria e modelos práticos somente para o método físico, pormenores sobre os demais serão obtidos nas referências bibliográficas anteriores.

### 1.5.2 - Transformação de coordenadas entre sistemas geodésicos:

A redução das coordenadas dos pontos de controle de um sistema geodésico para outro é relativamente simples, e poderá ser processada através das coordenadas geodésicas. Contudo a introdução das coordenadas cartesianas no espaço facilita o tratamento numérico, principalmente em ter mos de computação eletrônica.

Fórmulas para redução através das coordenadas geodésicas poderão ser encontradas nos textos clássicos, como por exemplo o BOMFORD |9|; neste trabalho utilizaremos as transformações por coordenadas cartesianas.

Três modelos para redução de "data" utilizando coordenadas cartesianas foram desenvolvidos pelos geodesistas BURSA |16|, MOLODENSKII |86| e VEISS |121|. O tratamento mais geral, do problema transformação, e utilizando formulação matricial é apresentado por BADEKAS |4|.

Os três modelos são matematicamente equivalentes e a seleção de qualquer um deles deve ser baseada sobre outras considerações que não matemáticas.

O modelo de VEISS é o mais acessível às mudanças de data, já que associa o terno cartesiano topocêntrico geodésico a um dos pontos datum envolvido na transformação.

De MULLER |93| temos a expressão para transformação de coordenadas cartesianas geodésicas em terrestres médias:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} d\,u_o \\ d\,v_o \\ d\,w_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_o^* \\ y_o^* \\ z_o^* \end{bmatrix} + R_t \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad \text{...(1.5.2.1)}$$

onde

(u, v, w) - coordenadas de qualquer ponto (Q) da superfície terrestre no **Sistema cartesiano terrestre médio**;

(X', Y', Z') - coordenadas do mesmo ponto (Q) no **Sistema cartesiano geodésico local**;

($du_o$, $dv_o$, $dw_o$) - coordenadas geocêntricas da origem do terno cartesiano geodésico, corrigido, no sistema terrestre médio;

($x_o^*$, $y_o^*$, $z_o^*$)- coordenadas do datum no sistema cartesiano geodésico local;

($R_t$) - matriz que realiza as rotações necessárias a transformação de coordenadas.

($\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$) - vetor das diferenças entre coordenadas cartesianas geodésicas locais de um ponto qualquer(Q) e as do datum:

$$\Delta X = X' - x_o^*$$

$$\Delta Y = Y' - y_o^*$$

$$\Delta Z = Z' - z_o^* \quad \text{...(1.5.2.2)}$$

$\varepsilon$ - coeficiente para redução de escala.

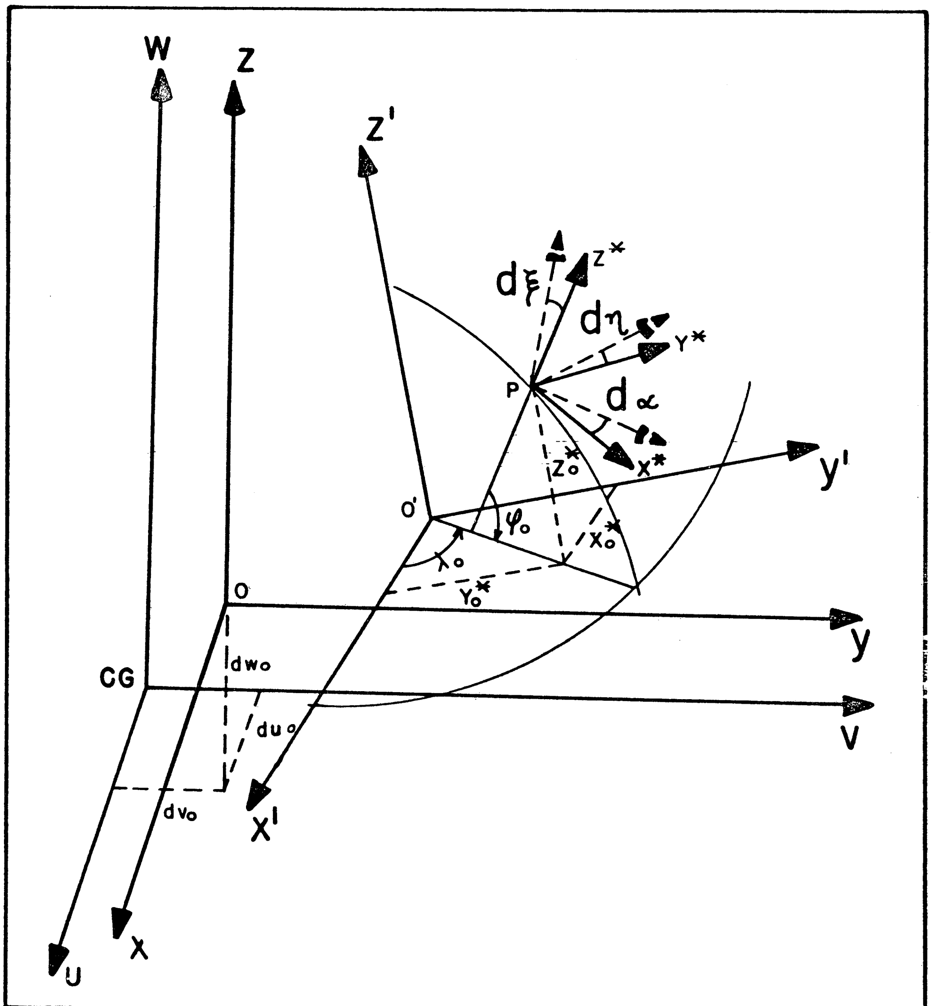



FIG.(1-5-2-1)- ESQUEMA DA TRANSFORMAÇÃO ENTRE SISTEMAS GEODÉSICOS

No desenvolvimento das atividades geodésicas sobre um determinado sistema geodésico local ou relativo, as coordenadas cartesianas geodésicas relativas ou locais são diferentes das terrestres médias.

A adoção de valores distorcidos para as componentes do desvio da vertical no ponto datum; erros na determinação da latitude e longitude astronômica e a introdução de uma superfície de referência inadequada, introduzem um deslocamento da origem do sistema cartesiano geodésico em relação ao geocentro. Os erros na determinação do azimute astronômico no datum introduzem rotações entre dois sistemas. Principalmente na passagem de coordenadas de um sistema geodésico para outro, o fator escala deve ser considerado.

Como estes erros se refletem não só na definição do datum, mas em todas as coordenadas do sistema geodésico, eles deverão ser convenientemente considerados nas fórmulas de transformação.

Consideremos a fig. (1.5.2.1), inicialmente vamos introduzir uma transformação de maneira que o terno cartesiano geodésico local(X', Y', Z'), correspondente ao topocêntrico ($x^*$, $y^*$, $z^*$), torne-se paralelo ao terrestre.

Apliquemos uma translação de modo que o sistema (X') se desloque para a origem do ($X^*$):

$$\begin{aligned} \Delta X &= X' - x_o^* \\ \Delta Y &= Y' - y_o^* \\ \Delta Z &= Z' - z_o^* \end{aligned} \qquad \ldots(1.5.2.3)$$

As rotações $R_3\ (-\lambda_o)$ e $R_2\ |-(90º - \phi_o)|$ tornam os eixos coincidentes em direção, a menos dos erros em azimute ($d\alpha$) e as perturbações locais das componentes do desvio ($d\xi$) e ($d\eta$). Como as quantidades anteriores são de pequeno valor numérico, podemos associá-las aos senos e valor 1 aos seus co-senos, de maneira que:

$$\{\Delta\} = R_1\ (d\eta)\ R_2\ (d\xi)\ R_3\ (d\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & d\alpha & -d\xi \\ -d\alpha & 1 & d\eta \\ d\xi & -d\eta & 1 \end{bmatrix}$$

...(1.5.2.4)

rotações que deverão ser consideradas para se obter a coincidência dos termos cartesianos. O paralelismo com o sistema terrestre estará garantido pelas rotações $R_3\ (\lambda_o)\ R_2\ (90º - \phi_o)$, desta forma podemos escrever as coordenadas no sistema cartesiano geodésico paralelo ao terrestre:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_3\ (-\lambda_o) R_2 |-(90º - \phi_o)|\ \{\Delta\} R_3(\lambda_o) R_2(90º - \phi_o) \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^*_o \\ y^*_o \\ z^*_o \end{bmatrix}$$

...(1.5.2.5)

ou realizando os produtos matriciais

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{11} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{13} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^*_o \\ y^*_o \\ z^*_o \end{bmatrix} \qquad \ldots(1.5.2.6)$$

$R_{11} = 1$

$R_{12} = \text{sen}\Phi_o\ d\alpha - \cos\Phi_o\ \ d$

$R_{13} = -\cos\phi_o\ \text{sen}\ \lambda_o\ d\alpha - \cos\ \lambda_o\ d\eta - \text{sen}\ \phi_o\ \text{sen}\ \lambda_o\ d\xi$

$R_{21} = -\text{sen}\phi_o\ d\alpha + \cos\phi_o\ d\eta$

$R_{22} = 1$

$R_{23} = \cos\phi_o \cos\lambda_o \, d\alpha - \operatorname{sen}\lambda_o \, d\eta + \operatorname{sen}\phi_o \cos\lambda_o \, d\xi$

$R_{31} = \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o \, d\alpha + \cos\lambda_o \, d\eta + \operatorname{sen}\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o \, d\xi$

$R_{32} = -\cos\phi_o \, d\alpha + \operatorname{sen}\lambda_o d\alpha + \operatorname{sen}\lambda_o \, d\eta - \operatorname{sen}\phi_o \cos\lambda_o \, d\xi$

$R_{33} = 1$ ...(1.5.2.7)

As coordenadas cartesianas terrestres serão obtidas a partir de uma translação da origem:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} du_o \\ dv_o \\ dw_o \end{pmatrix} \quad ...(1.5.2.8)$$

O vetor $(du_o, dv_o, dw_o)$ pode ser decomposto em duas partes, VEISS |121|; uma devida as componentes do desvio da vertical e a altitude geoidal, outra que traduz as variações dos parâmetros definidores da superfície de referência:

$$\begin{aligned} du_o &= \overset{1}{du}_o + \overset{2}{du}_o \\ dv_o &= \overset{1}{dv}_o + \overset{2}{dv}_o \\ dw_o &= \overset{1}{dw}_o + \overset{2}{dw}_o \end{aligned} \quad ...(1.5.2.9)$$

A primeira parcela é dada por:

$$\begin{pmatrix} du_o^1 \\ dv_o^1 \\ dw_o^1 \end{pmatrix} = R_3\,(\lambda_o).\ R_2\,(90° - \phi_o) \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ N_o \end{pmatrix} \quad ...(1.5.2.10)$$

onde $(\xi_o, \eta_o, N_o)$ é o vetor de orientação geocêntrica determinado através das fórmulas de Vening-Meinesz e Stokes. Realizando os produtos vem:

$$\begin{pmatrix} du_o^1 \\ dv_o^1 \\ dw_o^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o \cdot \cos\lambda_o & \operatorname{sen}\lambda_o & -\cos\phi_o \cdot \cos\lambda_o \\ \operatorname{sen}\phi_o \cdot \operatorname{sen}\lambda_o & -\cos\lambda_o & -\cos\phi_o \cdot \operatorname{sen}\lambda_o \\ -\cos\phi_o & 0 & -\operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ N_o \end{bmatrix} \quad ...(1.5.2.11)$$

com $(\xi_o)$ e $(\eta_o)$ em unidades lineares.

As expressões anteriores refletem o deslocamento da origem do sistema cartesiano geodésico local quando se introduz o vetor de orientação geocêntrica.

Se a superfície de referência for alterada, uma outra parcela será introduzida; a contribuição das diferenças dos parâmetros definidores das superfícies de referência. Esta parcela é dada pelo vetor ($du_o^2$, $dv_o^2$, $dw_o^2$) representado pelas relações:

$$\begin{bmatrix} du_o^2 \\ dv_o^2 \\ dw_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial X'/\partial a \\ \partial Y'/\partial a \\ \partial Z'/\partial a \end{bmatrix} . da + \begin{bmatrix} \partial X'/\partial e^2 \\ \partial Y'/\partial e^2 \\ \partial Z'/\partial e^2 \end{bmatrix} . de^2 \qquad \text{...(1.5.2.12)}$$

onde as derivadas parciais são calculadas a partir das expressões (1.4.2.1) no ponto datum:

$$\begin{bmatrix} \partial X'/\partial a \\ \partial Y'/\partial a \\ \partial Z'/\partial a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_o . \cos\lambda_o /(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi_o)^{1/2} \\ \cos\phi_o . \operatorname{sen}\lambda_o /(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi_o)^{1/2} \\ \operatorname{sen}\phi_o .(1-e^2) /(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi_o)^{1/2} \end{bmatrix} = |S| \qquad \text{...(1.5.2.13)}$$

e

$$\begin{bmatrix} \partial X'/\partial e^2 \\ \partial Y'/\partial e^2 \\ \partial Z'/\partial e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \operatorname{sen}^2\phi_o \cos\phi_o \cos\lambda_o /2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_o)^{3/2} \\ a \operatorname{sen}^2\phi_o \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o /2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_o)^{3/2} \\ (\frac{M}{2} \operatorname{sen}^2\phi_o - N^*_o) \operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} = |T| \qquad \text{...(1.5.2.14)}$$

onde ($M_o$) e ($N^*_o$) são os raios de curvatura das seções normais principais no datum. As quantidades (da) e ($de^2$) são dadas por:

$$da = a_{novo} - a_{antigo}$$

$$de = 2(1 - f\ antigo)\ (f_{novo} - f_{antigo})$$

Desta forma podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} du_o \\ dv_o \\ dw_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o . \cos\lambda_o & \operatorname{sen}\lambda_o & -\cos\phi_o . \cos\lambda_o \\ \operatorname{sen}\phi_o . \operatorname{sen}\lambda_o & -\cos\lambda_o & -\cos\phi_o . \operatorname{sen}\lambda_o \\ -\cos\phi_o & & \operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ N_o \end{bmatrix} + |S|.da + |T|.de^2 \qquad \text{...(1.5.2.16)}$$

Caso uma redefinição da escala do sistema geodésico tenha sido realizada, torna-se necessária a introdução do termo corretivo.

$$\begin{bmatrix} X' - x^*_o \\ Y' - y^*_o \\ Z' - z^*_o \end{bmatrix} . \varepsilon \qquad \ldots(1.5.2.17)$$

É fácil verificar que em todas as deduções anteriores consideramos a transformação de um sistema geodésico local em absoluto. Contudo este procedimento não invalida a generalização das expressões anteriores.

Resumindo, podemos estabelecer o roteiro para transformação de um sistema geodésico local em absoluto quando há alteração dos parâmetros da superfície de referência, erros sensíveis em azimute e nas componentes do desvio, além de alteração da escala:

(a) - Cálculo das coordenadas cartesianas geodésicas locais a partir das fórmulas (1.4.2.1) ou (1.4.2.2) para o datum:

$$x^*_o = (N^*_o + h_o) \cos\phi_o \cos\lambda_o$$
$$y^*_o = (N^*_o + h_o) \cos\phi_o \operatorname{sen}\lambda_o$$
$$z^*_o = \left| N^*_o \ (1 - e^2) + h \right| \operatorname{sen}\phi_o$$

(b) - Cálculo das coordenadas cartesianas geodésicas locais de todos os pontos de controle; pelas relações (1.4.2.1) ou (1.4.2.2), e cálculo das diferenças (1.5.2.2);

(c) - Cálculo da matriz de transformação $|R_t|$ a partir da (1.5.2.7);

(d) - Cálculo das coordenadas cartesianas geodésicas, corrigidas, (X, Y, Z) pela (1.5.2.5);

(e) - Cálculo da posição da origem do sistema corrigido pela expressão (1.5.2.16).

(f) - Cálculo da correção de escala pela (1.5.2.17);

(g) - Cálculo das coordenadas cartesianas geodésicas absolutas (idênticas às terrestres médias, a menos dos erros na obtenção do vetor de orientação geocêntrica), através da soma $|(b) + (d) + (e) + (f)|$;

A transformação de um sistema geodésico local (A) noutro absoluto (B) realiza-se dentro do mesmo esquema, somente que na matriz $|R_t|$ o termo $(d\alpha)$ é a diferença entre os erros independentes. No cálculo das coordenadas da origem do terno geodésico considera-se a diferença entre os parâmetros das superfícies de referência, se forem diferentes, no esquema:

$$da = a_B - a_A$$

$$de^2 = 2(1 - f_A)(f_B - f_A)$$

A transformação de um sistema geodésico relativo em absoluto obedece ao mesmo esquema, somente que no cálculo das coordenadas da origem teremos:

$$\begin{bmatrix} du_o^1 \\ dv_o^1 \\ dw_o^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\phi_o \cdot \cos\lambda_o & \text{sen}\lambda_o & -\cos\phi_o \cdot \cos\lambda_o \\ \text{sen}\phi_o \cdot \text{sen}\lambda_o & -\cos\lambda_o & -\cos\phi_o \cdot \text{sen}\lambda_o \\ -\cos\phi_o & 0 & \text{sen}\phi_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_B - \xi_A \\ \eta_B - \eta_A \\ N_B - N_A \end{bmatrix} \qquad \ldots(1.5.2.18)$$

Para a transformação de um sistema relativo (A) no absoluto (B) vale a observação anterior.

A expressão geral (1.5.2.1) pode ser reduzida. A simples consideração de que as malhas geodésicas apresentam-se com uma consistência interna da ordem de $10^{-5}$ em posição, e que os erros de orientação e escala são menores, da ordem de $10^{-6}$, reduz a (1.5.2.1) a um significado puramente teórico. Conseqüentemente podemos expressar as fórmulas de transformação por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o^* \\ y_o^* \\ z_o^* \end{bmatrix} + R_3(\phi_o)\, R_2(90° - \phi_o) \begin{bmatrix} \xi_o \text{ ou } \Delta\xi \\ \eta_o \text{ ou } \Delta\eta \\ N_o \text{ ou } \Delta N \end{bmatrix} + |S|\, da + |T|\, de^2 \qquad \ldots(1.5.2.19)$$

quando houver alteração dos parâmetros da superfície elipsoidal de referência, caso contrário podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o^* \\ y_o^* \\ z_o^* \end{bmatrix} + R_3(\phi_o)\, R_2(90° - \phi_o) \cdot \begin{bmatrix} \xi_o \text{ ou } \Delta\xi \\ \eta_o \text{ ou } \Delta\eta \\ N_o \text{ ou } \Delta N \end{bmatrix} \qquad \ldots(1.5.2.20)$$

Quando a posição do datum for determinada pelo método celeste teremos que deduzir as quantidades fundamentais para que possamos aplicar as fórmulas anteriores na redução de outros sistemas geodésicos a este novo sistema.

O método celeste permite a obtenção direta de $(u_o, v_o, w_o)$ no datum, que a menos dos erros de determinação coincidem com as coordenadas cartesianas geodésicas absolutas $(X_o, Y_o, Z_o)$. Com isso podemos calcular $(\phi_o, \lambda_o, h_o)$ a partir das (1.4.2.3), (1.4.2.6) e (1.4.2.7). Os parâmetros de orientação serão dados pela (1.5.2.11):

$$\begin{bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ N_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o . \cos\lambda_o & \operatorname{sen}\phi_o . \operatorname{sen}\lambda_o & -\cos\phi_o \\ \operatorname{sen}\lambda_o & -\cos\lambda_o & 0 \\ -\cos\phi_o . \cos\lambda_o & -\cos\phi_o . \operatorname{sen}\lambda_o & -\operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_o \\ dv_o \\ dw_o \end{bmatrix} \quad \ldots(1.5.2.21)$$

Com esta explanação introdutória do conceito de sistemas de coordenadas em geodésia, estamos em condição de analisar a potencialidade do método físico aplicado à obtenção do vetor de orientação geocêntrica de um sistema geodésico.

## 2. O CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE

### 2.1 - A GRAVIDADE

Tomemos sobre a superfície terrestre um ponto material (A); na aproximação esférica temos a situação representada na fig. (2.1-1). O ponto material está sujeito a ação de duas forças (abstraindo-se a atração luni-solar): a de atração ($\overline{F}$) e a centrífuga ($\overline{P}$), dirigida perpendicularmente ao eixo de rotação. A resultante dessas duas forças é que denominamos de gravidade e passaremos a representar por ($\overline{g}$).

De acordo com a definição anterior podemos expressar a gravidade pela soma vetorial.

$$\overline{g} = \overline{F} + \overline{P} \qquad \ldots(2.1\text{-}1)$$

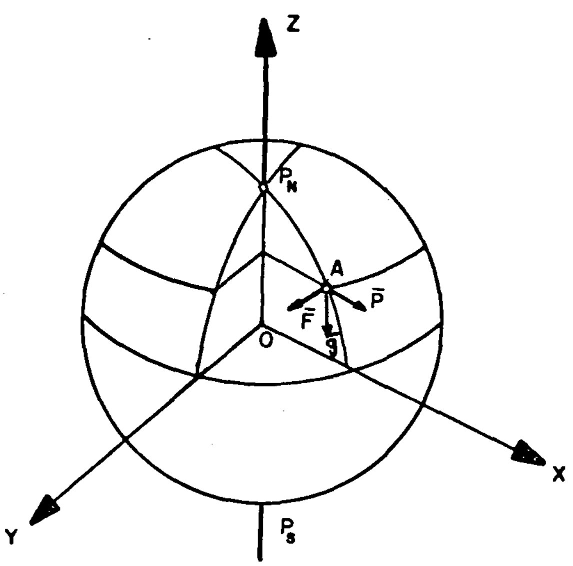



Fig.(2.1-1) — ATRAÇÃO E FORÇA CENTRÍFUGA

Supondo a Terra esférica e introduzindo as designações: (m), massa de um ponto material (A) na superfície terrestre e (M) a massa da Terra de raio (R), a **força atrativa** é dada pela Lei Newtoniana da Gravitação:

$$\overline{F} = G \cdot \frac{Mm}{R^2} \qquad \ldots(2.1\text{-}2)$$

onde (G) é a constante universal da gravitação.

Nas mesmas condições a intensidade da **força centrífuga** é definida:

$$\overline{P} = m\,\omega^2 r \qquad \ldots(2.1\text{-}3)$$

onde, (r) é a distância do ponto (A) ao eixo de rotação e ($\omega$) é a velocidade de rotação.

A rigor deveríamos considerar uma terceira força, **Força de Coriolis**, que age sobre um corpo em movimento. A força de Coriolis expressa a relação entre a velocidade de deslocamento de um corpo de massa(m)e a velocidade de rotação do sistema de referência. Se tomarmos o corpo em repouso na superfície terrestre esta força será anulada. Como em Geodésia, comumente, lidamos como instrumentos em repouso relativo à Terra, esta força não será considerada nos desenvolvimentos. Desde que se considerem somente as situações em que os processos de medição são estáticos. Convém observar que nas medições efetuadas com instrumental em bases móveis, teremos que levar em conta os efeitos da força de Coriólis, tal é o caso das medidas gravimétricas marítimas e aéreas.

## 2.2 - O POTENCIAL ATRATIVO

Consideremos dois pontos materiais (A) e (B), de coordenadas (x, y, z) e (x', y', z'), fig. (2.2-1). A massa em (A) é representada por (m) e a de (B) tomada unitária, afastada de (A) por uma distância (r).

A atração mútua (A) - (B) é dada por:

$$F = \frac{G\,m}{r^2} \qquad \ldots(2.2\text{-}1)$$

em que:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \qquad \ldots(2.2\text{-}2)$$

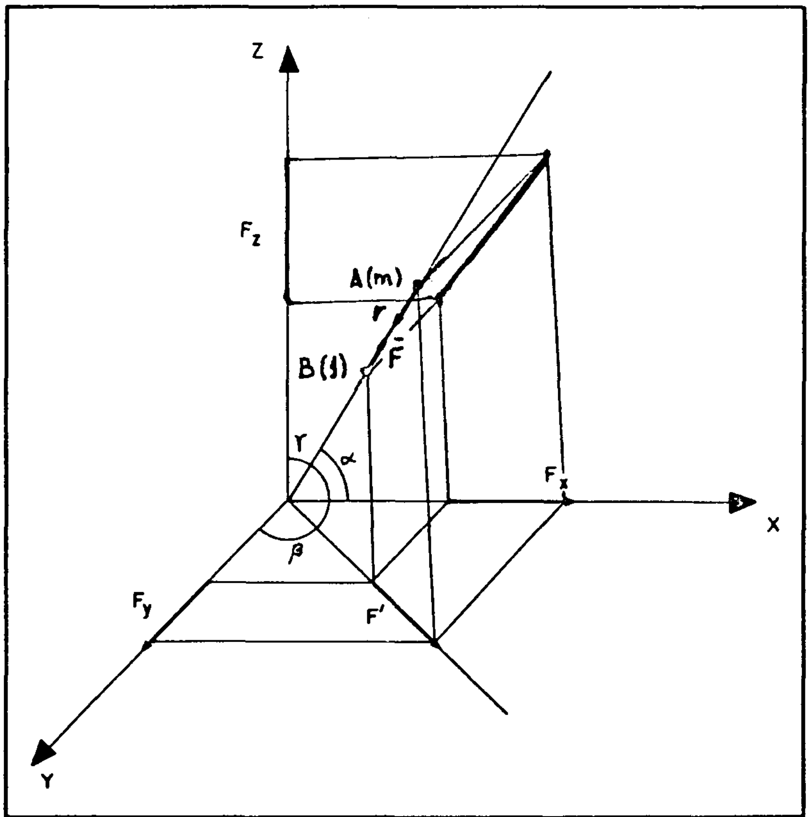



Fig. ( 2.2-1 ) – COMPONENTES DA ATRAÇÃO

e as componentes segundo os eixos coordenados:

$$F_x = F.\cos\alpha$$
$$F_y = F.\cos\beta$$
$$F_z = F.\cos\gamma \qquad \text{...(2.2-3)}$$

onde $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são os ângulos diretores, dados por:

$$\cos\alpha = \frac{x - x'}{r}$$
$$\cos\beta = \frac{y - y'}{r}$$
$$\cos\gamma = \frac{z - z'}{r} \qquad \text{...(2.2-4)}$$

Substituindo em (2.2-3):

$$F_x = G\,m\,\frac{x - x'}{r^3}$$
$$F_y = G\,m\,\frac{y - y'}{r^3}$$
$$F_z = G\,m\,\frac{z - z'}{r^3} \qquad \text{...(2.2-5)}$$

Definamos agora uma nova função:

$$V = G\,\frac{m}{r} \qquad \text{...(2.2-6)}$$

pesquisemos suas derivadas em relação aos eixos coordenados:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\,G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \qquad \text{...(2.2-7)}$$

onde $(\partial r/ \partial x)$ é obtida a partir da fórmula (2.2-2):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\,\frac{x - x'}{r} \qquad \text{...(2.2-8)}$$

substituindo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G\,m\,\frac{x - x'}{r^3}$$

analogamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= G\,m\,\frac{y - y'}{r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= G\,m\,\frac{z - z'}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.2\text{-}9)$$

Comparando com a (2.2-5) vem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} &= F_z \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.2\text{-}10)$$

A função (V) cujas derivadas parciais ao longo dos eixos coordenados são iguais às componentes da força de atração ao longo dos mesmos eixos, denominamos de função potencial ou simplesmente potencial atrativo.

Se o ponto (B) é atraído não mais por um ponto material(A), mas sim por uma distribuição discreta de n partículas de massa $m_i$, a resultante será obtida a partir da composição vetorial das atrações individuais através do Teorema de CARNOT, $F = \Sigma F_i$, de maneira que:

$$F_i = G\,\frac{m_i}{r^2} \qquad \ldots(2.2\text{-}11)$$

tendo em vista as expressões (2.2-3) e (2.2-4) vem:

$$\left.\begin{aligned} F_{ix} &= G\,m_i\,\frac{(x_i - x')}{r^3} \\ F_{iy} &= G\,m_i\,\frac{(y_i - y')}{r^3} \\ F_{iz} &= G\,m_i\,\frac{(z_i - z')}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.2\text{-}12)$$

A resultante terá suas componentes dadas pelas somas das componentes individuais:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= G \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{(x_i - x')}{r^3} \\ F_y &= G \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{(y_i - y')}{r^3} \\ F_z &= G \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{(z_i - z')}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad ...(2.2\text{-}13)$$

Se considerarmos a distribuição contínua, as somatórias passam a ser definidas pelas integrais:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= G \int_M \frac{x - x'}{r^3}\, dm \\ F_y &= G \int_M \frac{y - y'}{r^3}\, dm \\ F_z &= G \int_M \frac{z - z'}{r^3}\, dm \end{aligned}\right\} \qquad ...(2.2\text{-}14)$$

onde o índice (M) nos símbolos de integração indicam que o processo é aplicado a todos os pontos da distribuição. Por outro lado o potencial será:

$$V = G \int_M \frac{dm}{r} \qquad ...(2.2\text{-}15)$$

Se a massa volumétrica é expressa por ($\delta$), temos, |77|:

$$dm = \delta\, dx.dy.dz \qquad ...(2.2\text{-}16)$$

e o potencial:

$$V = G \iiint_{(M)} \frac{\delta}{r}\, dx\, dy\, dz \qquad ...(2.2\text{-}17)$$

Procuremos uma correlação física para o potencial. Suponhamos que o ponto (B), de massa unitária, move-se na direção (B A) para uma nova posição ($B_1$), devido a atração exercida pela massa (m) concentrada em (A) e seja ($r_1$) a distância de ($B_1$) à (A). O trabalho realizado pela força ($\bar{F}$) para mover a unidade de massa em (B) para ($B_1$), será expresso pela somatória dos trabalhos elementares, de maneira que:

$$\Gamma = \int_{r}^{r_1} F \; dr = G \int_{r}^{r_1} \frac{m}{r^2}\, dr \qquad \text{...(2.2-18)}$$

integrando

$$\Gamma = G\,m \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \qquad \text{...(2.2.-19)}$$

a medida que $r_1$ tende ao infinito temos:

$$\Gamma = G\,\frac{m}{r} \qquad \text{...(2.2-20)}$$

Comparando com a (2.2-6), concluímos: **O potencial atrativo é igual ao trabalho realizado pela atração para deslocar a massa por uma distância infinita.**

## 2.3 - O POTENCIAL CENTRÍFUGO

Fazendo-se m = 1 na expressão (2.1 - 3) obtemos:

$$P = \omega^2\, r \qquad \text{...(2.3-1)}$$

Consideremos um sistema coordenado cartesiano de maneira que o eixo dos (z) coincida com o eixo de rotação e o plano (xy) confunda-se com o do paralelo que contém (A), fig. (2.3 - 1). A componente desta força segundo o eixo dos (Z) será nula. Pela figura vemos que as componentes da força centrífuga serão:

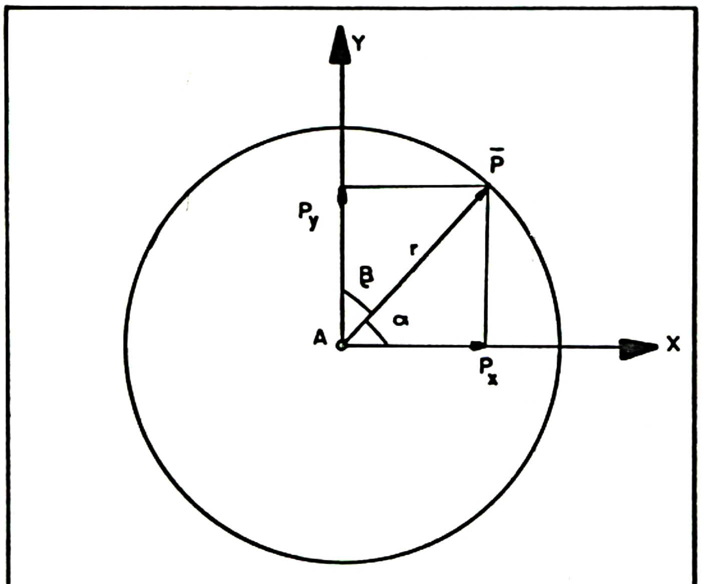



Fig.(2.3-1) — COMPONENTES DA FORÇA CENTRÍFUGA.

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P\cos\alpha \\ P_y &= P\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(2.3-2)}$$

como:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(2.3-3)}$$

e pela (2.3-1) vem:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \omega^2\, r\cos\alpha = \omega^2\, x \\ P_y &= \omega^2\, r\cos\beta = \omega^2\, y \\ P_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(2.3-4)}$$

As componentes são as derivadas parciais, em relação à orientação dos eixos coordenados, da função:

$$Z = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \qquad \text{...(2.3-5)}$$

que representa o potencial centrífugo, senão vejamos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= \omega^2\, x = P_x \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= \omega^2\, y = P_y \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(2.3-6)}$$

## 2.4 - O POTENCIAL GRAVITACIONAL:

Conforme vimos em (2.1) a gravidade é definida como a resultante das forças atrativa e centrífuga. Designando o vetor gravidade por $\overline{g}$ e de acordo com (2.1-1)

$$\overline{g} = \overline{F} + \overline{P}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} g_x &= F_x + P_x = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \\ g_y &= F_y + P_y = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \\ g_z &= F_z + P_y = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(2.4-1)}$$

Consideremos a função:

$$W = V + Z = G\int_M \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \qquad \text{...(2.4-2)}$$

tomando suas derivadas primeiras em relação a x, y e z e tendo em vista as relações (2.4-1) vem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} = g_x \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} = g_y \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial z} = g_z \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.4\text{-}3)$$

de acordo com o conceito de potencial emitido em (2.2) e considerando que a função (W) é a soma dos potenciais atrativo e centrífugo, a (2.4-2) representa o **Potencial Gravitacional.**

O vetor gravidade em função de suas componentes é dado:

$$\bar{g} = g_x \bar{i} + g_y \bar{j} + g_z \bar{K} \qquad \ldots(2.4\text{-}4)$$

em que $\bar{i}$, $\bar{j}$ e $\bar{K}$ são os versores fundamentais; tendo em vista a (2.4-3) vem:

$$\bar{g} = \frac{\partial W}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{K} \qquad \ldots(2.4\text{-}5)$$

utilizando o operador gradiente, cartesianamente dado por $\frac{\partial}{x}\bar{i} + \frac{\partial}{y}\bar{j} + \frac{\partial}{z}\bar{K}$, vem:

$$\bar{g} = \text{Grad } W$$

**O gradiente da função potencial gravitacional caracteriza o vetor gravidade.**

## 2.5 - Superfícies Equipotenciais e Linhas de Força

Consideremos um ponto (A) de coordenadas (x, y, z) e um ponto (A'), de coordenadas (x + dx, y + dy, z + dz), afastado de (A) por uma distância elementar ds, fig. (2.5-1).

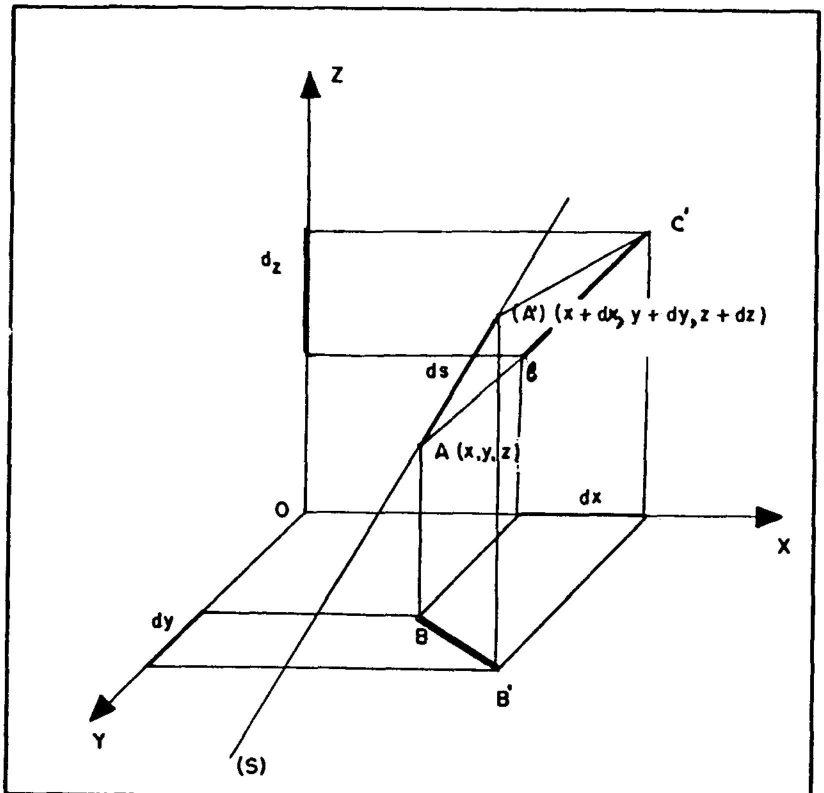



Fig.( 2.5-1) - QUANTIDADES ELEMENTARES

Definindo os ângulos (s, x), (s, y) e (s,z) como os diretores de (s), vem:

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds \cos(s, x) \\ dy &= ds \cos(s, y) \\ dz &= ds \cos(s, z) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.5\text{-}1)$$

O potencial gravitacional em (A'), será obtido a partir dos incrementos sofridos durante o deslocamento (A A'):

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \qquad \ldots(2.5\text{-}2)$$

ou

$$dW = g_x dx + g_y dy + g_z dz \qquad \ldots(2.5\text{-}3)$$

Substituindo na anterior as relações (2.5-1) vem:

$$dW = \left[g_x \cos(s, x) + g_y \cos(s, y) + g_z \cos(s, z)\right] ds \qquad \ldots(2.5\text{-}4)$$

mas o termo abrangido pelos colchetes nada mais é do que a componente da gravidade segundo uma dada orientação (s), então:

$$dW = g \cos(g, s)\, ds = g_s ds \qquad ...(2.5\text{-}5)$$

$$\frac{dW}{ds} = g_s \qquad ...(2.5\text{-}6)$$

A componente da gravidade numa direção qualquer pode ser obtida a partir da derivada, segundo esta direção, do potencial gravitacional.

Consideremos o caso particular em que cos (g, s) = 0, situação em que o deslocamento (A A') é ortogonal à direção da gravidade:

$$\frac{dW}{ds} = 0 \qquad ...(2.5\text{-}7)$$

em decorrência

$$W\ (x, y, z) = c.^{te} \qquad ...(2.5\text{-}8)$$

Como (W) é uma função de x, y, z a equação (2.5-8) representa uma família de superfícies que serão obtidas a partir dos valores da constante. As superfícies definidas pela equação anterior são denominadas **Superfícies Equipotenciais** ou de **Nível**.

As superfícies equipotenciais apresentam uma propriedade importantíssima para a Geodésia; a imagem geométrica do vetor intensidade de campo é tangente à linha de força, em qualquer ponto da superfície. Em conseqüência, não existem componentes jacentes no plano tangente.

Da família de superfícies equipotenciais do campo gravitacional terrestre a mais importante é a definida pelo nível médio dos mares em repouso, livre das singularidades climáticas e suposta prolongada analiticamente sob os continentes. Esta superfície particular foi proposta por GAUSS como a "Figura Matemática da Terra", c.f. |48|, e mais tarde denominada GEÓIDE por Listing.

As linhas de força do campo gravitacional terrestre são denominadas **Linhas de Prumo**, sendo o vetor gravidade tangente em qualquer de seus pontos. Na fig. (2.5-2) representamos esquematicamente as superfícies equipotenciais e linhas de prumo do campo gravitacional.

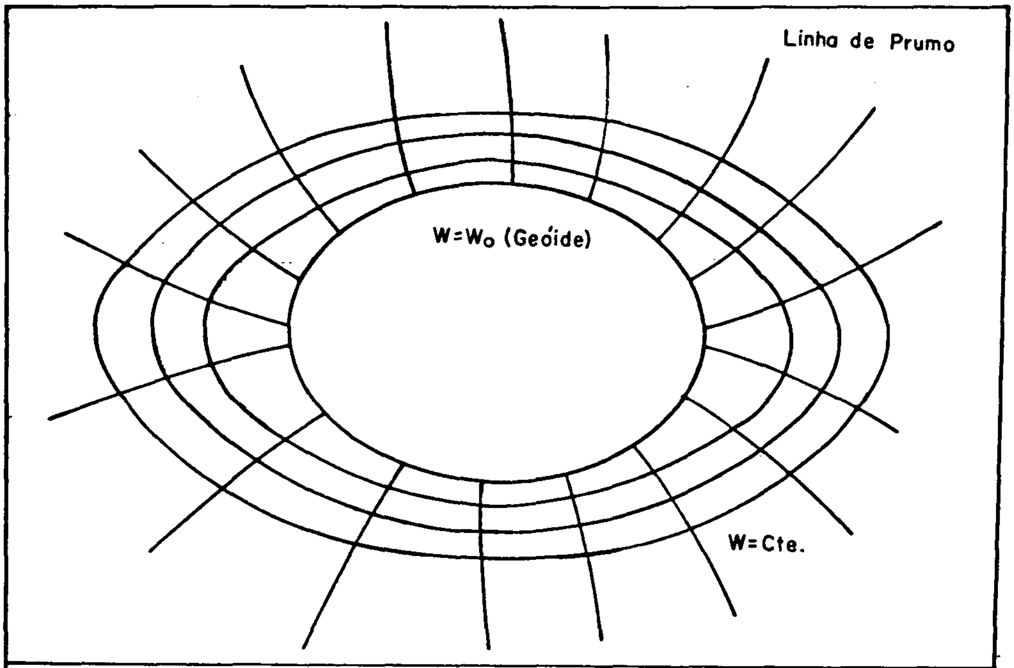



Fig.(2.5-2) ___ SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS E LINHA DE PRUMO.

## 2.6 - As funções Harmônicas

Antes de prosseguirmos no estudo do campo gravitacional terrestre torna-se necessário estabelecer alguns conceitos importantes com relação à certas funções, comumente denominadas harmônicas.

Uma função (S) contínua juntamente com suas primeiras derivadas, é dita harmônica, numa região (R) do espaço, se satisfaz a equação de LAPLACE:

$$\Delta^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{...(2.6-1)}$$

Existe uma grande variedade de funções que satisfazem estes requisítos, em conseqüência, diversas funções harmônicas. Em geral são funções transcendentais que não admitem representação por meio de funções simples, relacionadas a um número finito de operações aritméticas elementares. São freqüentemente expressas em séries, sendo, portanto, conveniente termos um conjunto de funções harmônicas a partir das quais possamos exprimir as séries. Contudo, não existe um conjunto de harmônicas melhor adaptado a qualquer expansão em séries, mas sim grupamentos de funções que atendem à determinadas aplicações. As mais importantes, do ponto de vista geodésico, são as harmônicas esféricas ou de Laplace e as elipsoidais de Lamé, além destas, poderemos citar as cilíndricas ou de Bessel, e as toroidais de Hicks. Neste tópico nos ocuparemos das harmônicas esféricas; pormenores podem ser obtidos em |17| |77| e |97|.

### 2.6.1 - Harmônicos Esféricos

Um harmônico esférico é uma função harmônica, homogênea em x, y e z. O grau de homogeneidade (n), poderá ser real ou complexo e será denominado de grau da função. As condições para que uma função seja harmônica foram comentadas anteriormente; para que seja homogênea é necessário que satisfaça a correlativa equação de Euler, |77| e |97|. Se (S) é uma função harmônica de grau (n), ela satisfaz as equações:

— de Laplace:

$$\Delta^2 S = 0 \qquad \ldots(2.6.1\text{-}1)$$

— de Euler:

$$\frac{\partial S}{\partial X} x + \frac{\partial S}{\partial Y} y + \frac{\partial S}{\partial Z} z = n\ s \qquad \ldots(2.6.1\text{-}2)$$

A equação de Laplace em coordenadas polares (v, colatitude; λ, longitude; r, raio vetor), escreve-se; |17| e |48|:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left( r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial v}\left( \text{sen } v \frac{\partial s}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 s}{\text{sen}^2 v \partial \lambda} = 0 \qquad \ldots(2.6.1\text{-}3)$$

fazendo a substituição, $S = r^n y_n$, onde $y_n$ é independente de (r), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left( r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) = n\ (n+1)\ r^n\ y_n \qquad \ldots(2.6.1\text{-}4)$$

levando a (2.6.1-4) em (2.6.1-3) e eliminando o fator comum $r^n$ vem:

$$n(n+1)\ y_n + \frac{\partial^2 y_n}{\partial v^2} + \text{ctg } v \frac{\partial y_n}{\partial v} + \frac{1}{\text{sen}^2 v} \frac{\partial^2 y_n}{\partial \lambda^2} = 0 \qquad \ldots(2.6.1\text{-}5)$$

Qualquer solução ($y_n$) da equação anterior é denominada de **Harmônico Esférico de Superfície ou Função de Laplace**. Realizando a substituição (n) por -(n+1), o fator n(n+1) permanece inalterado, portanto, existem duas soluções da (2.6-3) das quais $y_n$ é um fator, ou seja, $r^n\ y_n$ e $r^{-(n+1)} y_n$, denominadas de **Harmônicos Esféricos Sólidos** de grau (n)e -(n+1), respectivamente.

Como o grau de homogeneidade (n) pode assumir qualquer valor real; $r^1\ y_1$, $r^2\ y^2$, ..., serão soluções da (2.6.1-5) e como a combinação linear das soluções parciais é também uma solução, |21|, vem:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad S_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\ Y_n(v, \lambda) \\ &\text{b)} \quad S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n\ (v,\lambda)}{r^{(n+1)}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.6.1\text{-}6)$$

que são as expressões gerais de um **Harmônico Esférico Sólido**. Demonstra-se,

|17| e |77|, que uma função harmônica no interior de um sólido é representada pela (2.6.1-6(a)) e no exterior pela (2.6.1-6(b)).

### 2.6.1.1 - Harmônicos Esféricos de Superfície

No tópico anterior estabelecemos a expressão geral de um harmônico sólido como a solução da equação de Laplace, onde os termos parciais são os harmônicos esféricos de superfície ($Y_n$), para os quais procuraremos um desenvolvimento.

Como ($Y_n$) é uma função de v e λ podemos expressá-lo na forma:

$$Y\,(v,\,\lambda) = f(v)\;F\,(\lambda) \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}1)$$

substituindo na (2.6.1-5) e multiplicando por $\frac{\text{sen}^2\, v}{f(v)\; F(\lambda)}$ temos:

$$\frac{\text{sen}\; v}{f(v)}\left[\text{sen}\; v.f''(v) + \cos\; v.f'(v) + n(n+1).\;\text{sen}\; v.f(v)\right] = -\frac{F''(\lambda)}{F\,(\lambda)} \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}2)$$

em que (') representam a ordem das derivadas. Como cada membro da (2.6.1.1-2) é expresso em termos de uma das incógnitas, poderemos igualá-los a uma constante ($m^2$):

$$\left.\begin{aligned} &a)\; -\frac{F''\,(\lambda)}{F\,(\lambda)} = m^2 \\ &b)\; \frac{\text{sen}\; v}{f(v)}\left[\text{sen}\; v.f''\,(v) + \cos v\; f'(v) + n(n+1)\;\text{sen} v\; f\,(v)\right] = m^2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}3)$$

ou ainda

$$\left.\begin{aligned} &a)\; F''\,(\lambda) + m^2\, F(\lambda) = 0 \\ &b)\; \text{sen} v\; f''(v) + \cos v\; f'(v) + \left[n(n+1)\;\text{sen} v - \frac{m^2}{\text{sen}\; v}\right] f(v) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}4)$$

com estes artifícios obtivemos uma equação a derivadas parciais,(2.6.1.1-2), em termos de duas equações diferenciais ordinárias (2.6.1.1-4). A(2.6.1.1-4(a)) é uma equação diferencial linear de 2ª ordem, de solução imediata:

$$\left.\begin{aligned} F\,(\lambda) &= \cos\, m\lambda \\ F\,(\lambda) &= \text{sen}\; m\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}5)$$

que poderão ser verificadas mediante simples substituição.

A (2.6.1.1-4(b)) é a conhecida equação diferencial de Legendre, que só tem significado quando **m** e **n** são inteiros e se $m \leqslant n$, |17|. Uma das soluções é obtida a partir das funções de Legendre $P_{nm}(\cos v)$, |21|:

$$f(v) = P_{nm}\,(\cos v) \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}6)$$

Desta maneira as soluções da (2.6.1.1-2) serão da forma:

$$\left.\begin{aligned} f(v)\,F\,(\lambda) &= P_{nm}\,(\cos v)\cos m\lambda \\ f(v)\,F\,(\lambda) &= P_{nm}\,(\cos v)\,\mathrm{sen}\, m\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}7)$$

como (n) e (m) podem assumir quaisquer valores reais, a combinação linear das soluções parciais será também uma solução, de maneira que:

$$Y_n(v,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[a_{nm}P_{nm}(\cos v)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\cos v)\,\mathrm{sen}\, m\lambda\right] \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}8)$$

onde $(a_{nm})$ e $(b_{nm})$ são coeficientes constantes. A fórmula (2.6.1.1-8)representa o desenvolvimento dos harmônicos esféricos de superfície. Substituindo nas (2.6.1-6) obtemos o desenvolvimento dos harmônicos sólidos:

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad S_n = \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty} r^n(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\,\mathrm{sen}\, m\lambda)\,P_{nm}(\cos v) \\ &b)\quad S_n = \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}}\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\,\mathrm{sen}\, m\lambda)\,P_{nm}(\cos v) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.6.1.1\text{-}9)$$

Resta-nos obter as expressões das Funções de Legendre $P_{nm}$ (cos v).

### 2.6.1.2 - As Funções de Legendre

As funções $P_{nm}(\cos v)$ introduzidas como solução da equação diferencial (2.6.1.1-4(b)) são denominadas **Funções de Legendre**, e os índices (n) e (m) representam o grau e a ordem da função, respectivamente.

Para simplificar a notação introduzimos a convenção (cos v = t), e as funções $P_{nm}$ (t) serão obtidas a partir da fórmula, |17|:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^{(n+m)}}{dt^{(n+m)}}(t^2-1)^n \qquad \ldots(2.6.1.2\text{-}1)$$

ou explicitamente, |33|:

$$P_{nm}(t) = 2^{-n}(1-t^2)^{m/2} \sum_{k=o}^{\left|\frac{n-m}{2}\right|} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{(n-m-2k)}$$

...(2.6.1.1-2)

onde $\left|\frac{n-m}{2}\right|$ significa o maior inteiro contido em (n-m/2). A fórmula(2.6.1.2 -2) oferece vantagens sobre a (2.6.1.2-1), já que evita a obtenção das derivadas de ordem (n+m), o que é de grande importância na utilização em computadores eletrônicos.

No estabelecimento da solução da equação diferencial de Legendre, foi feita a menção de que **n** e **m** deveriam ser inteiros, além de $n \leqslant m$, sendo (n) o grau da função e (m) a ordem; três situações peculiares se apresentam, ou seja: $m = 0$, $m = n$ e $m < n$; analisemos cada caso:

- As funções de Legendre $P_{nm}(t)$ de ordem nula(m=0) são de grande importância em Geodésia, e são normalmente expressas por $P_{no}(t) = P_n(t)$ e denominadas de **Polinômios de Legendre.** Os polinômios são obtidos a partir da fórmula (2.6.1.2-1) fazendo-se m=0:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

...(2.6.1.2-3)

conhecida como fórmula de Rodrigues. Da mesma maneira que a (2.6.1.2-1) temos que determinar as derivadas de ordem igual ao grau do polinômio que se pretende representar. Em termos de cálculo eletrônico é conveniente a obtenção dos polinômios a partir da fórmula de recorrência, |33|:

$$P_n(t) = -\frac{(n+1)}{t(2n+1)} P_{n+1}(t) - \frac{n}{t(2n+1)} P_{n-1}(t)$$

...(2.6.1.2-4)

Os Polinômios de Legendre são funções harmônicas em (t) de grau (n), apresentando-se com (n) zeros reais e pertencentes ao intervalo |-1, +1|, o que poderá ser concluído após a substituição dos valores particulares de v ($0 \leq v \leq \pi$), nas expressões obtidas a partir de uma das fórmulas anteriores. Os harmônicos variam de sinal (n) vêzes no intervalo |-1, +1|. Representando sobre uma esfera os polinômios, esta será dividida em (n) zonas, retratando cada uma a região de predominância do sinal, fig.(2.6.1.2-1 (a)). Estas funções são conhecidas também como **Harmônicos Zonais ou de Zona.**

- Os harmônicos em que $n \geq m$, para $m \neq 0$, são denominados de **Funções Associadas de Legendre.** Distingüindo-se para m=n os **Harmônicos Setoriais** e para $n > m$ os **Harmônicos Tesserais.**

As funções associadas de Legendre mudam de sinais (n-m) vêzes no intervalo ($0 \leq v \leq \pi$), |17|, enquanto que ($\cos m\lambda$) e ($\operatorname{sen} m\lambda$) apresentam-se com (2m) zeros no intervalo. Quando representamos a harmônica com n= m sobre uma esfera, só teremos variações de sinal em longitude, e esta será dividida em (2m) setores ou fusos, fig. (2.6.1.2-1(b)). Para n < m a superfície será dividida segundo uma malha de quadriláteros esféricos (tessera), dados por (n-m) e (2m).

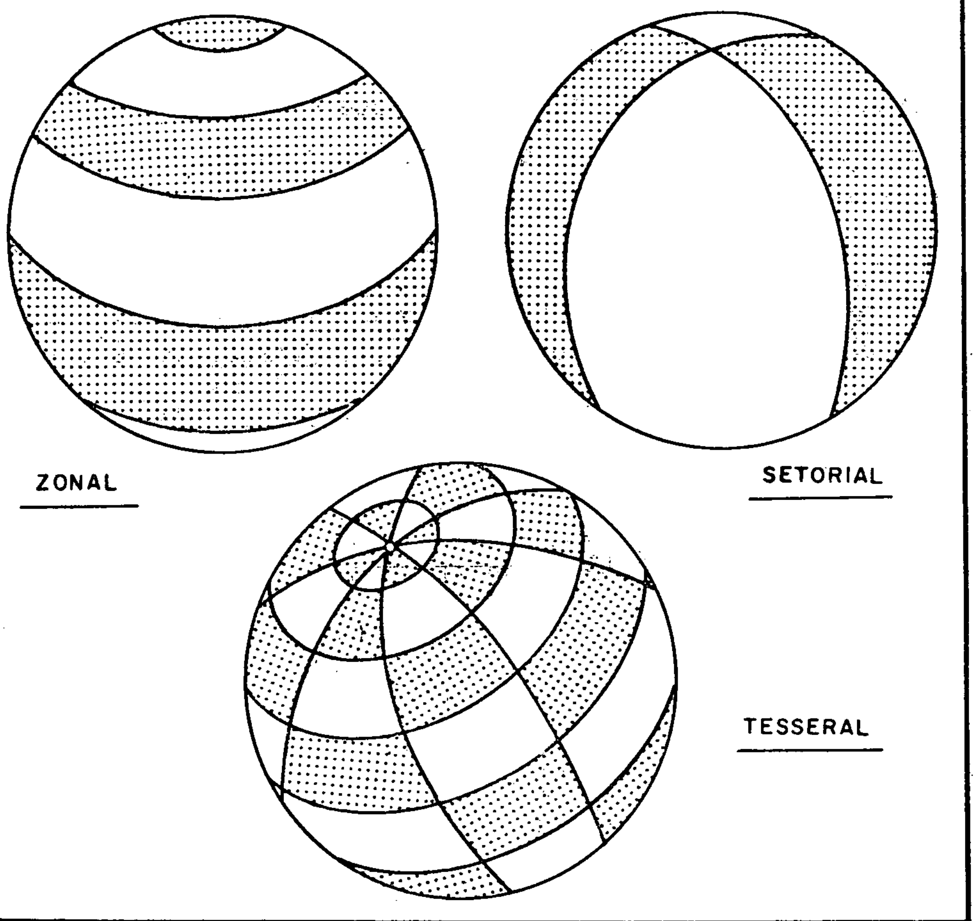



Fig. (2.6.1.2-1) — AS FUNÇÕES DE LEGENDRE.

Podemos facilmente verificar que um Harmônico Esférico de superfície ($Y_n$) possue (2n+1) Funções de Legendre, assim distribuídas, |97|:

- 1 harmônico de Zona de grau n;
- 2 harmônicos setoriais de grau n e ordem m(n=m);
- (2n-2) harmônicos Tesserais de grau n e ordem variando de 0 a m, ($m \neq n$),

com o total de (2n+1) termos no desenvolvimento de um determinado grau.

Resta-nos obter os coeficientes constantes $a_{nm}$ e $b_{nm}$. Consideremos as relações de ortogonalidade das funções de Legendre, que expressam o fato de ser nula a integral, sobre a esfera de raio unitário, do produto de duas quaisquer funções harmônicas.

$$\left.\begin{array}{l}\int_\sigma P_{nm}(t)\ P_{sr}(t)\ \cos m\lambda\ \cos r\lambda\ d\sigma = 0 \\ \int_\sigma P_{nm}(t)\ P_{sr}(t)\ \text{sen}\ m\lambda\ \text{sen}\ r\lambda\ d\sigma = 0\end{array}\right\} \quad \text{se } s \neq n \text{ ou } r \neq m \text{ ou ambos}$$

$$\int_\sigma P_{nm}(t)\ P_{sr}(t)\ \cos m\lambda\ \text{sen}\ r\lambda\ d\sigma = 0 \quad \text{(para qualquer caso)}$$

...(2.6.1.2-5)

Para o produto de duas funções iguais temos:

$$\int_\sigma P_{nm}(t)\ \cos m\lambda\ \ P_{nm}(t)\ \cos m\lambda\ d\sigma = 4\pi\ /(2n+1)$$

$$\int_\sigma P_{nm}(t)\ \text{sen}\ m\lambda\ \ P_{nm}(t)\ \text{sen}\ m\lambda\ d\sigma = \frac{2\pi}{(2n+1)}\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\ (m \neq 0)$$

...(2.6.1.2-6)

Multiplicando a (2.6.1.1-8) membro a membro por $P_{sr}(t)\cos r\lambda = T_{sr}(v, \lambda)$, fazendo-se $f(v, \lambda) = Y_n(v, \lambda)$ e integrando sobre a esfera de raio unitário, temos:

$$\iint_\sigma f(v, \lambda)\ T_{sr}(v, \lambda)\ d\sigma = a_{sr} \iint_\sigma \left[ T_{sr}(v, \lambda)\right]^2 d\sigma$$

...(2.6.1.2-7)

Tendo em vista as relações de ortogonalidade, o segundo membro da (2.6.1.2-7) será dado pela (2.6.1.2-6). Analogamente para $b_{sr}$, multiplicando por uma $o_{sr}(v, \lambda) = P_{sr}(t)$ sen $r\lambda$, e integrando sobre a esfera de raio unitário, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} a_{no} = \dfrac{2n+1}{4\pi} \displaystyle\iint_\sigma f(v, \lambda)\ P_n(t)\ d\sigma \\ a_{nm} = \dfrac{2n+1}{2\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} \displaystyle\iint_\sigma f(v, \lambda)\ P_{nm}(t)\ \cos m\lambda\ d\sigma \\ b_{nm} = \dfrac{2n+1}{2\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} \displaystyle\iint_\sigma f(v, \lambda)\ P_{nm}(t)\ \text{sen}\ m\lambda\ d\sigma \end{array}\right\}$$

...(2.6.1.2-8)

em que $\int\sigma$ indica que o processo de integração é realizado na superfície da esfera de raio unitário, onde $d\sigma$ é um elemento de superfície.

## 2.7 - O Potencial Gravitacional em Harmônicos Esféricos

O potencial gravitacional é dado pela soma dos potenciais atrativo e centrífugo:

$$W = V + Z \qquad ...(2.7\text{-}1)$$

onde, (2.4-2):

$$\left.\begin{aligned} V &= G \int_M \frac{dm}{r} \\ Z &= \frac{1}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} \qquad ...(2.7\text{-}2)$$

O potencial centrífugo é de obtenção imediata, enquanto que o atrativo é mais complexo. Como o potencial atrativo é uma função analítica, poderemos desenvolvê-lo em séries. O desenvolvimento ideal é obtido em séries de harmônicos esféricos, para tanto consideremos as propriedades gerais de uma função potencial, que segundo |RAMSEY, 97|, enunciam-se:

a) A atração, por unidade de massa, é o gradiente de uma função potencial (U) tanto para o interior quanto exterior da massa geradora do campo:

b) Em qualquer ponto do espaço não ocupado pela massa atrativa a função potencial satisfaz a equação de Laplace, $\Delta 2U = 0$;

c) Em qualquer ponto do espaço em que existe matéria, de massa volumétrica $\delta$, o potencial satisfaz a equação de Poisson, $\Delta^2 U = 4\pi\delta$, ou seja:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\delta;$$

d) Quando existe uma superfície simples, limite da distribuição de massas, a função potencial assume os valores $U_1$ e $U_2$ nos lados opostos da superfície, mas na superfície elas satisfazem as condições:

$$U_1 = U_2$$

e

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} - \frac{\partial U_2}{\partial n} = -4\pi m,$$

em que (m) é a massa específica da matéria e ($\partial n$) é um elemento da normal dirigida do espaço externo (1) para o interno (2)".

O potencial atrativo, em pontos externos à Terra, poderá ser desenvolvido em séries harmônicas, propriedade (b). E sua expressão geral será, (2.6.1.1-9(b)):

$$V(v, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{r^{(n+1)}} (a_{mn} \cos m\lambda + b_{nm} \operatorname{sen} m\lambda)\, P_{nm}(\cos v) \qquad ...(2.7.1\text{-}3)$$

em que as constantes $a_{nm}$ e $b_{nm}$ dependem da massa encerrada pela superfície terrestre.

### 2.7.1 - O Potencial Atrativo em Harmônicos Esféricos

Consideremos a fig. (2.7.1-1); o sistema coordenado (x, y, z) é tomado geocêntrico e de maneira que o eixo dos (z) coincida com o eixo instantâneo de rotação da Terra, orientado positivamente para o norte. Os eixos x e y são tomados ortogonais e jacentes no plano equatorial. A posição da unidade de massa é dada pelas coordenadas (x, y, z) retangulares ou esféricas ($\phi$, $\lambda$, $\rho$). A posição da massa elementar atraída é dada pelas coordenadas (x', y', z').

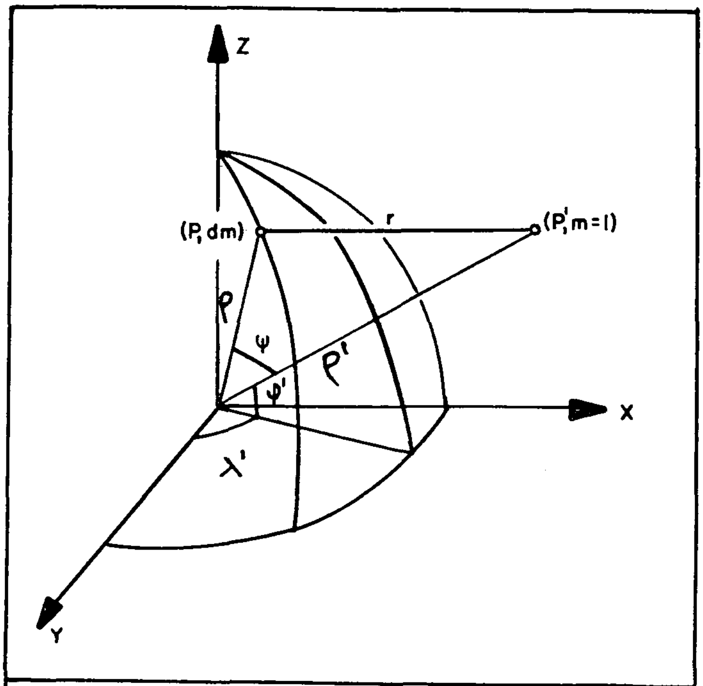



Fig. (2.7.1-1) — DISTRIBUIÇÃO DE MASSAS E PONTO EXTERNO.

$$V = G \int_M \frac{dr}{r} \qquad \ldots(2.7.1\text{-}1)$$

do $\Delta$OPP' tiramos as relações:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\psi \\ &b)\ r^2 = \rho^2 \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2} - 2\frac{\rho}{\rho'} \cos\psi\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1\text{-}2)$$

fazendo-se $\left(s = \frac{\rho'^2}{\rho^2} - 2\frac{\rho'}{\rho}\cos\psi\right)$ e substituindo vem:

$$r = \rho(1+s)^{1/2} \qquad \ldots(2.7.1\text{-}3)$$

tomando-se o inverso da distância:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\,(1+s)^{-1/2} \qquad \text{...(2.7.1-4)}$$

desenvolvendo em série o binômio $(1+s)^{-1/2}$ vem:

$$(1+s)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}s + \frac{3}{8}s^2 - \frac{5}{16}s^3 + \frac{35}{128}s^4 - \frac{63}{256}s^5 + \ldots \qquad \text{...(2.7.1-5)}$$

considerando-se o valor de (s) e substituindo em (2.7.1-4)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{\rho'}{\rho}\cos\psi + \frac{3}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\left(\cos^2\psi - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3\left(\cos^3\psi - \frac{3}{5}\cos\psi\right) + \ldots\right] \qquad \text{...(2.7.1-6)}$$

fazendo ($\cos\psi = t$) e tendo em vista que:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{3}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \\ P_3(t) &= \frac{5}{2}\left(t - \frac{3}{5}\,t\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \text{...(2.7.1-7)}$$

são os Polinômios de Legendre; a (2.7.1-6) escreve-se, para ($\rho \geq 0$);

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n P_n(t) \qquad \text{...(2.7.1-8)}$$

Substituindo na (2.7.1-1) vem:

$$V = G\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{(n+1)}}\int_M \rho'^n\, P_n(t)\,dm \qquad \text{...(2.7.1-9)}$$

A relação do segundo membro com as coordenadas v e $\lambda$ é estabelecida através da distância angular $\psi$. Na fig.(2.7.1-2), onde a esfera tem raio unitário, do triângulo esférico $P_N PP'$ vem:

$$\cos\psi = \cos v\ \cos v' + \operatorname{sen} v\ \operatorname{sen} v'\ \cos(\lambda - \lambda') \qquad \text{...(2.7.1-10)}$$

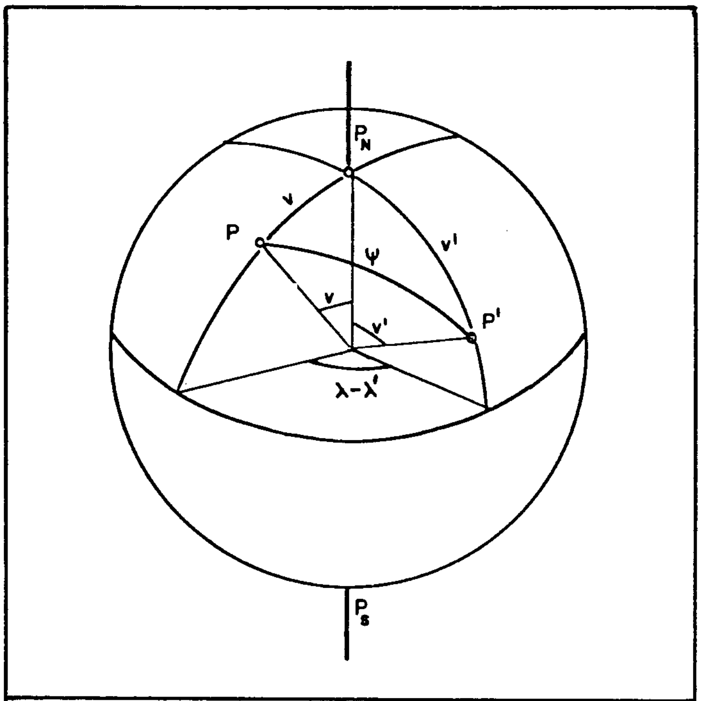



Fig. (2.7.1-2) — DISTANCIA ESFÉRICA ψ.

A fórmula (2.7.1-9) demonstra a possibilidade de se desenvolver o potencial atrativo em harmônicos esféricos de Zona, demonstração que poderá ser estendida ao mais geral harmônico esférico de superfície.

Pela fórmula de decomposição de um harmônico de zona, |3, pág. 370|:

$$P_n(\cos\psi)=P_n(\cos v)P_n(\cos v')+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\Big[(\cos m\lambda\cos m\lambda' + \operatorname{sen} m\lambda$$

$$\operatorname{sen} m\lambda')\, P_{nm}(\cos v)\, P_{nm}(\cos v')\Big] \qquad \ldots(2.7.1\text{-}11)$$

a (2.7.1.-8) escreve-se:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=o}^{\infty} \left\{ \frac{P_n(\cos v)}{\rho^{(n+1)}} \rho'^n P_n(\cos v') + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left| \frac{\rho'^n}{\rho^{(n+1)}} (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{sen} m\lambda \operatorname{sen} m\lambda') P_{nm}(\cos v)\, P_{nm}(\cos v') \right| \right\} \qquad \ldots(2.7.1\text{-}12)$$

substituindo na (2.7.1-1) vem:

$$V = G \int_M \left[ \sum_{n=o}^{\infty} \left\{ \frac{P_n(\cos v)}{\rho^{(n+1)}} \rho'^n P_n(\cos v') + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left| \frac{\rho'^n}{\rho^{(n+1)}} (\cos m\lambda \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cos m\lambda' + \operatorname{sen} m\lambda \;\; \operatorname{sen} m\lambda') P_{nm}(\cos v)\, P_{nm}(\cos v') \right| \right\} \right] dm$$

$$\ldots(2.7.1\text{-}13)$$

fazendo-se

$$\left.\begin{aligned} A_{no} &= G \int_M \rho'^n P_n(\cos v')\, dm \\ \begin{Bmatrix} A_{no} \\ B_{no} \end{Bmatrix} &= 2\, \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, G \int_M \rho'^n \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \operatorname{sen} m\lambda' \end{Bmatrix} P_{nm}(\cos v')\, dm \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1\text{-}14)$$

obtemos:

$$V = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \left[ (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen} m\lambda)\, P_{nm}(\cos v) \right]$$

$$\ldots(2.7.1\text{-}15)$$

A fórmula (2.7.1-15) é análoga a (2.7.1-9), e representa o desenvolvimento do potencial atrativo em harmônicos esféricos de superfície.

A convergência das séries de harmônicos esféricos pode ser analisada a partir dos critérios enumerados em (2.7), para o potencial atrativo, de maneira que estas séries convergirão para pontos externos à distribuição de massas e serão divergentes na superfície e no interior da distribuição. Estudos dos critérios de convergência são realizados em |17| e |48|.

### 2.7.1.1 - O significado dos Termos de Baixo Grau

O desenvolvimento do potencial atrativo em termos de harmônicos esféricos não deve ser interpretado como mero artifício mate mático, principalmente no que concerne aos termos de baixo grau, que admitem uma interpretação físico-geométrica.

Considerando o desenvolvimento da (2.7.1-15) restrito aos termos de 2º grau, com cos v = t, vem:

$$V = \frac{A_{00}\,P_{00}(t)}{\rho} + \frac{A_{10}\,P_{10}(t)}{\rho^2} + \frac{A_{20}\,P_{20}(t)}{\rho^3} + \frac{A_{11}\cos\lambda P_{11}(t)}{\rho^2} + \frac{B_{11}\operatorname{sen}\lambda\, P_{11}(t)}{\rho^2} +$$

$$+ \frac{A_{21}\cos\lambda P_{21}(t)}{\rho^3} + \frac{B_{21}\operatorname{sen}\lambda P_{21}(t)}{\rho^3} + \frac{A_{22}\cos 2\lambda P_{22}(t)}{\rho^3} + \frac{B_{22}\cos 2\lambda P_{22}(t)}{\rho^3} + \ldots$$

...(2.7.1.1-1)

utilizando as fórmulas (2.7.1-14) e considerando que:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \rho'\ \operatorname{sen}v'\ \cos\lambda' \\ y' &= \rho'\ \operatorname{sen}v'\ \operatorname{sen}\lambda' \\ z' &= \rho'\ \cos v' \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2.7.1.1\text{-}2)$$

$$A_{00} = G\int_M dm = GM$$

$$A_{10} = G\int_M \rho'\ \cos v'\ dm = G\int_M z'\ dm$$

$$A_{11} = G\int_M \rho'\ \cos\lambda'\ \operatorname{sen}v'\ dm = G\int_M x'\ dm \qquad B_{11} = G\int_M \rho'\ \operatorname{sen}\lambda'\ \operatorname{sen}v' dm = G\int_M y' dm$$

$$A_{20} = G\int \rho'^2\left(\cos^2 v' - \frac{1}{3}\right) dm = \frac{G}{2}\int_M (-x'^2 - y'^2 + 2z'^2)\ dm$$

$$A_{21} = G\int_M \rho'^2\ \cos\lambda'\ \operatorname{sen}v'\ \cos v'\ dm = G\int_M x'\ z'\ dm \qquad B_{21} = G\int_M \rho'^2\ \operatorname{sen}\lambda'\ \operatorname{sen}v'\ \cos v'\ dm = G\int_M y'\ z'\ dm$$

$$A_{22} = \frac{1}{4}\,G\int_M \rho'^2\cos\lambda'\ \operatorname{sen}^2 v'\ dm = \frac{G}{4}\int (x'^2 - y'^2)\ dm \qquad B_{22} = \frac{1}{4}\,G\int_M \rho'^2\ \operatorname{sen}2\lambda'\ \operatorname{sen}^2 v'\ dm = \frac{G}{4}\int_M x'\ y'\ dm$$

...(2.7.1.1-3)

O termo A é o produto da massa da Terra (M) pela constante da gravitação (G).

As integrais $\int x' \, dm$, $\int y' \, dm$ e $\int z' \, dm$, que aparecem nos termos $A_{10}$ $A_{11}$ e $B_{11}$, correspondem às coordenadas do centro de gravidade da massa atrativa. Se o sistema de coordenadas é escolhido de maneira que a origem coincida com o centro de massa, estes termos serão nulos. Nas aplicações geodésicas o sistema coordenado é comumente geocêntrico, justificando o abandono destes termos no desenvolvimento:

$$A_{10} = A_{11} = B_{11} = 0 \qquad \ldots(2.7.1.1\text{-}4)$$

Da mecânica clássica, |113|, sabemos que os produtos de inércia são expressos por:

$$\left.\begin{aligned} D &= \int x' \, y' \, dm \\ E &= \int x' \, z' \, dm \\ F &= \int y' \, z' \, dm \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1.1\text{-}5)$$

comparando estas expressões com as de $A_{21}$, $B_{21}$ e $B_{22}$ em (2.7.1.1-3) vem:

$$\left.\begin{aligned} A_{21} &= G\,E \\ B_{21} &= G\,F \\ B_{22} &= GD/2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1.1\text{-}6)$$

Os momentos de inércia são definidos, |113|:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_M (y'^2 + z'^2) \, dm \\ B &= \int_M (x'^2 + z'^2) \, dm \\ C &= \int_M (x'^2 + z'^2) \, dm \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1.1\text{-}7)$$

combinando os momentos, vem:

$$\left.\begin{aligned} A + B - 2C &= \int_M (-\,x'^2 - y'^2 + 2z'^2) \, dm \\ B - A &= \int_M (x'^2 - y'^2) \, dm \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1.1\text{-}8)$$

comparando com as relações de (2.7.1.1-3) vem:

$$\left.\begin{aligned} A_{20} &= \frac{G}{2}\,(A + B - 2C) \\ A_{22} &= \frac{G}{4}\,(B - A) \end{aligned}\right\} \qquad ...(2.7.1.1\text{-}9)$$

Se o sistema coordenado for orientado de maneira que os eixos coincidam com os principais de inércia, os produtos de inércia D, E e F serão nulos. No nosso caso o eixo dos (Z) coincide com eixo instantâneo de rotação, que se confunde com o eixo de inércia máxima, os produtos E e F serão nulos. Se for admitida a simetria rotacional de massas, o produto de inércia referente ao plano coordenado (xy), será nulo e os momentos de inércia A e B serão iguais. No caso da Terra este produto será nulo admitindo-se a simetria rotacional, ou melhor, se um dos eixos principais de inércia estiver contido no plano meridiano da elipticidade equatorial. Admitindo-se o sistema coordenado nas condições:

- origem coincidente com o centro de massa da Terra;
- o eixo de rotação coincidente com um dos de inércia;

os coeficientes dados em (2.7.1.1-3) escrevem-se

$$\begin{array}{l|l} A_{00} = G\,M & B_{00} = B_{10} = B_{11} = 0 \\ A_{10} = A_{11} = 0 & B_{20} = B_{21} = 0 \\ A_{20} = \frac{G}{2}\,(A + B - 2C) & B_{22} = \frac{GD}{2} \\ A_{21} = 0 & \\ A_{22} = \frac{G}{4}\,(B - A) & \end{array} \qquad ...(2.7.1.1\text{-}10)$$

com estes coeficientes o potencial atrativo dado por (2.7.1-15) será

$$V = \frac{GM}{\rho} + \frac{G}{\rho^3}\left|\,\frac{1}{4}\,(A+B-2C)\,(1 - 3\cos^2 v) + \frac{3}{4}\,(B - A)\,\mathrm{sen}^2 v\right.$$

$$\left.\cos 2\lambda + \frac{3}{2}\,D\,\mathrm{sen}^2 v\,\mathrm{sen} 2\lambda\,\right| + \text{ termos de ordem mais elevada}$$

$$...(2.7.1.1\text{-}11)$$

Podemos observar que o primeiro termo da expressão anterior nada mais é que o potencial atrativo num ponto externo a uma distribuição esférica de matéria, |77|. Se tomássemos a aproximação esférica como a forma da Terra, o seu potencial atrativo seria expresso mediante a consideração, na série (2.7.1.1-11), somente do primeiro termo. Podemos encarar os demais termos como correções à aproximação esférica.

Procuremos estabelecer uma correspondência geométrica para os termos do desenvolvimento em harmônicos do potencial atrativo.

O significado geométrico poderá ser obtido a partir da análise de sinais das funções envolvidas no desenvolvimento, e da distribuição de massas. Consideremos a Terra representada numa projeção cilíndrica, onde as massas continentais nos fornecerão a base de comparação. Este tipo de comparação tem sido utilizada por diversos autores no estabelecimento da expressão do potencial atrativo, |35| e |117| são exemplos.

Consideremos a parte geométrica das relações(2.7.1.1-3), de maneira que:

$$\left.\begin{aligned} &A_{10} \not\# f\,(\cos v') \\ &A_{11} \not\# f\,(\text{sen } v' \cos \lambda') \\ &B_{11} \not\# f\,(\text{sen } v' \text{ sen } \lambda') \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2.7.1.1\text{-}12)$$

onde:

$$0^\circ \leqslant v \leqslant 180^\circ \quad \text{ou} \quad -90^\circ \leqslant v \leqslant 90^\circ$$
$$0^\circ \leqslant \lambda \leqslant 360^\circ \quad \text{ou} \quad -180^\circ \leqslant \lambda \leqslant +180^\circ$$

em conseqüência:

$$A_{10}\begin{cases} > 0 \text{ no hemisfério Norte} \\ < 0 \text{ no hemisfério Sul} \end{cases}$$

$$B_{11}\begin{cases} > 0 \text{ no hemisfério Ocidental} \\ < 0 \text{ no hemisfério Oriental} \end{cases}$$

$$A_{11}\begin{cases} > 0 \text{ para } 0^\circ < \lambda < 90^\circ \text{ e } 0^\circ > \lambda > -90^\circ \\ < 0 \text{ para } 90^\circ < \lambda < 180^\circ \text{ e } -90^\circ > \lambda > -180^\circ \end{cases}$$

representados graficamente na fig. (2.7.1.1-1).

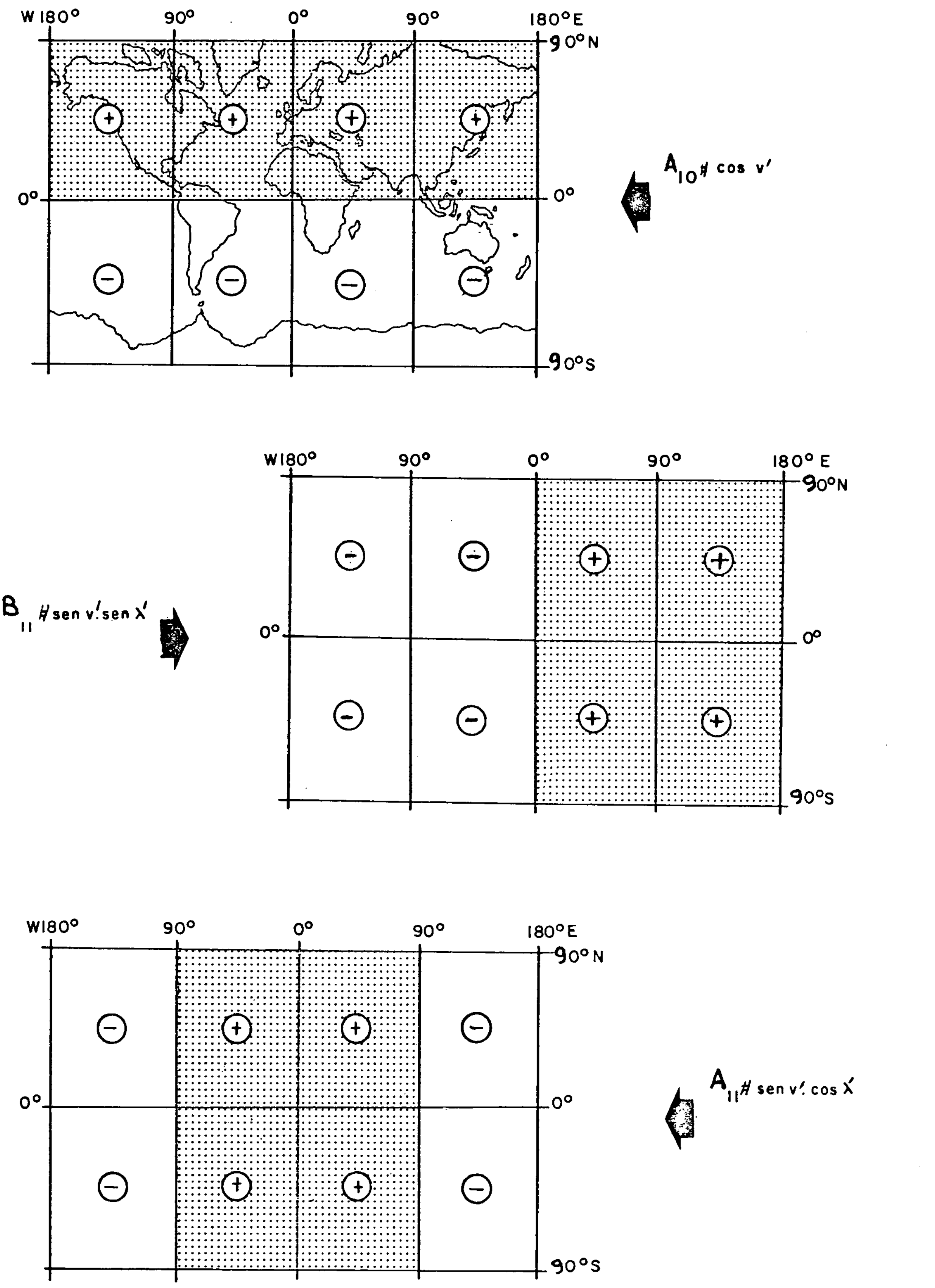



Fig.(2.711-1) — REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS TERMOS DE GRAU UM NO DESENVOLVIMENTO DO POTENCIAL ATRATIVO EM HARMÔNICOS ESFÉRICOS.

Se considerarmos o sinal (+) como correspondente a um excesso de massa e o (-) como deficiência de massa podemos interpretar as figuras (2.7.1.1-1).

O excesso de massa em determinados hemisférios implica num deslocamento do centro de gravidade em sua direção. A existência destes coeficientes está vinculada à oscilação do centro de massa da Terra. Tendo um sistema coordenado geocêntrico como condição inicial, justifica-se o abandono destes coeficientes no desenvolvimento do potencial.

Os termos de segundo grau pelas relações (2.7.1.1-3) são:

$$\left.\begin{array}{l} A_{20} \# \frac{3}{2}\left[\cos^2 v' - \frac{1}{3}\right] \\ A_{21} \# \operatorname{sen} v' \cos v' \cos \lambda' \\ A_{22} \# \operatorname{sen}^2 v' \cos 2\lambda' \\ B_{21} \# 3 \operatorname{sen} v' \cos v' \operatorname{sen}\lambda' \\ B_{22} \# \operatorname{sen}^2 v' \operatorname{sen} 2\lambda' \end{array}\right\} \quad \ldots(2.7.1.1\text{-}13)$$

analisando os sinais:

$$A_{20} \begin{cases} (0 < v' < 54^o\ 44') \ (125^o\ 16' < v' < 180^o) \\ (54^o\ 44' < v' < 125^o\ 16') \end{cases}$$

$$A_{21} \begin{cases} < 0 \ (0º < \lambda < \pm 90º \text{ com } 0º < v < 90º) \text{ e } (\pm 90º < \lambda < \pm 180º \text{ com } 90º < v < 180º) \\ > 0 \ (0º < \lambda < \pm 90º \text{ com } 90º < v < 180º) \text{ e } (\pm 90º < \lambda < \pm 180º \text{ com } 0º < v < 90º) \end{cases}$$

$$A_{22} \begin{cases} > 0 \ (0º < \lambda < \pm 45º) \text{ e } (\pm 135º < \lambda < \pm 180º) \\ < 0 \ (\pm 45º < \lambda < \pm 135º) \end{cases}$$

$$B_{21} \begin{cases} > 0 \ (0º < v < 90º \text{ com } 0º < \lambda < 180º) \text{ e } (90º < v < 180º \text{ com } -180º < \lambda < 0º) \\ < 0 \ (0º < v < 90º \text{ com } -180º < \lambda < 0º) \text{ e } (90º < v < 180º \text{ com } 0º < \lambda < 180º) \end{cases}$$

$$B_{22} \begin{cases} > 0 \ (0º < \lambda < 90º) \text{ e } (-180º < \lambda < -90º) \\ < 0 \ (90º < \lambda < 180º) \text{e } (-90º < \lambda < 0º) \end{cases}$$

a representação encontra-se nas fig. (2.7.1.1 - 2).

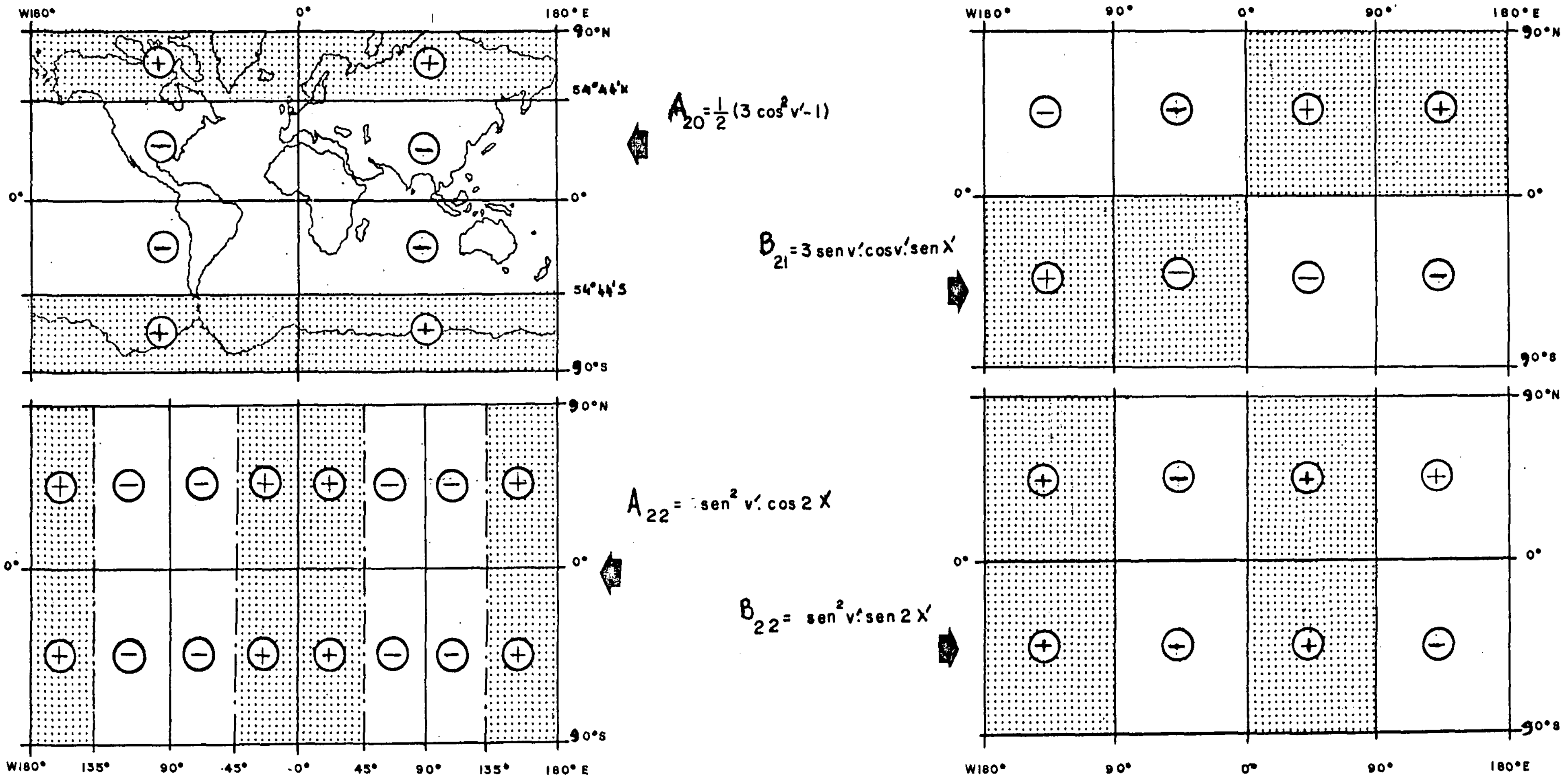



Fig.(2.711-2) — REPRESENTAÇAO GEOMÉTRICA DOS TERMOS DE GRAU DOIS NO DESENVOLVIMENTO DO POTENCIAL ATRATIVO EM HARMÔNICOS.

O coeficiente ($A_{20}$), representando um excesso de massa na Zona equatorial, limitada por 55ºN e 55ºS, nos sugere o achatamento terrestre, representado por uma deficiência de massas nas regiões polares. No desenvolvimento do potencial é o termo de maior valor, devendo sempre ser considerado.

O coeficiente ($A_{21}$) apresenta-se positivo no hemisfério Norte entre as longitudes de 90º E à 90º W e no semi-hemisfério diametralmente oposto. De imediato esta situação nos sugere o movimento do eixo principal de inércia em torno do eixo de rotação, i.e., a não coincidência do eixo de rotação com um dos principais de inércia. O movimento é real e apresenta características de periodicidade, dependente da elasticidade do material componente da Terra. Lambert, |67|, calculando o desvio dos eixos encontrou 0,1", justificando desta maneira o abandono deste termo no desenvolvimento. O coeficiente ($B_{21}$) nos leva à idênticas conclusões.

O coeficiente ($A_{22}$) depende somente da longitude, apresentando-se positivo de 45º E à 45º W e de 135º E à 135º W em longitude. O excesso de massa nestes setores opostos tendo o meridiano de Greenwich como central, sugere a elipticidade equatorial. O ($B_{22}$) nos levará à idênticas conclusões somente que o meridiano central apresenta-se deslocado de 45º, dando uma outra idéia quanto à orientação da elipticidade equatorial.

O coeficiente do zonal de 3º grau leva-nos a consideração da **Terra Piriforme** ("pear-shape") segundo a teoria desenvolvida por O'Keefe, |95|, a partir das análises orbitais do satélite "Vanguard".

$$A_{30} \# \frac{5}{2} (\cos^3 v' - \frac{3}{5} \cos v')$$

da análise de sinais

$$A_{30} \begin{cases} > 0 \; (+ 50º\,46' < v < 90º) e (-50º\,46' < v' < 0º) \\ < 0 \; (0º < v' < + 50º\,46') \; e (-50º\,46' < v' < 90º) \end{cases}$$

Representado, esquematicamente, na fig. (2.7.1.1 - 3).

## 2.7.2 - O Geopotencial

O potencial centrífugo pode ser expresso em termos do raio vetor ($\rho$), considerando a fig. (2.7.2 - 1) vem:

$$Z = \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \mathrm{sen}^2 v \qquad \text{...(2.7.2-1)}$$

Levando em consideração as explanações anteriores, podemos escrever o potencial atrativo:

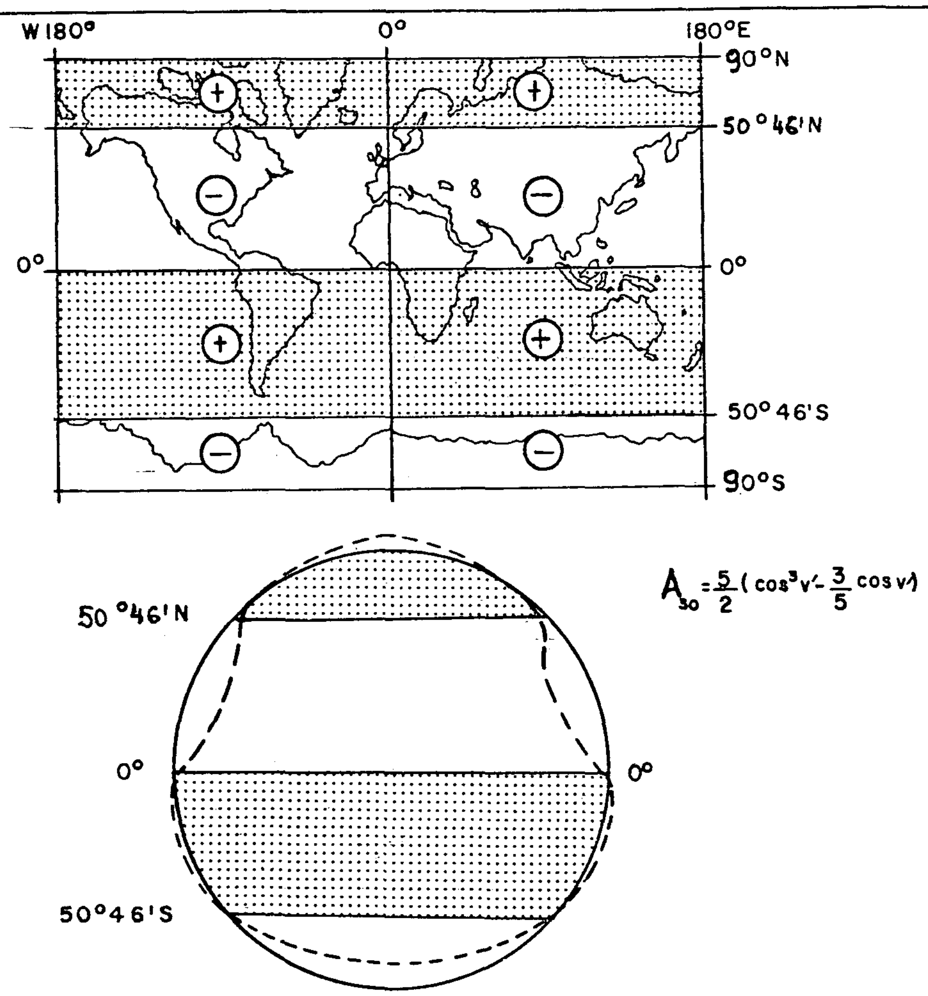



Fig.(2711-3) —— O HARMÔNICO ZONAL DE GRAU TRÊS E A TERRA "PIRIFORME".

$$V = \frac{GM}{\rho} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \left[ (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen} m\lambda)\, P_{nm}(\cos v) \right]$$

sem o 21 ...(2.7.2-2)

de acordo com a (2.7 - 1) obtemos para o potencial gravitacional da Terra real:

$$W = \frac{GM}{\rho} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \left[ (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen} m\lambda)\, P_{nm}(\cos v) \right] + \frac{1}{2}\omega^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 v$$

sem o 21

...(2.7.2-3)

Ao potencial dado pela (2.7.2 - 3) passaremos a dominar de **GEOPOTENCIAL**.

A (2.7.2 - 3) tem sido apresentada nas publicações geodésicas com diversas notações, das quais a mais usual é:

$$W = \frac{GM}{\rho}\left\{1 + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{sem } 021}}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \left[C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\operatorname{sen} m\lambda\right] P_{nm}(\cos v)\right\}$$

...(2.7.2-4)

em que, (a) é o raio equatorial da Terra e os coeficientes $C_{nm}$ e $S_{nm}$ relacionam-se aos anteriores pelas fórmulas, |33|:

$$A_{nm} = + GM\, a^n\, C_{nm}$$

$$B_{nm} = + GM\, a^n\, S_{nm} \qquad ...(2.7.2\text{-}5)$$

Nos trabalhos de Geodésia Celeste é comum expressar o Geopotencial em termos dos **coeficientes de massa**; $(J_{nm})$ e $(K_{nm})$, com:

$$J_{nm} = - C_{nm}$$

$$K_{nm} = - S_{nm} \qquad ...(2.7.2\text{-}6)$$

e a (2.7.2 - 4) escrita na forma:

$$W = \frac{GM}{\rho}\left\{1 - \sum_{\substack{n=2 \\ \text{sem } 021}}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \left[J_n\, P_n(\cos v) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\operatorname{sen} m\lambda)\, P_{nm}(\cos v)\right]\right\}$$

...(2.7.2-7)

Observando as relações (2.7.1 - 14) vemos que os coeficientes $A_{nm}$ e $B_{nm}$ são dimensionados; no sistema CGS são expressos em $cm^2 s^{-2}$ ou Gal.cm. Os coeficientes $C_{nm}$, $S_{nm}$, $J_{nm}$ e $K_{nm}$ são adimensionais, o que pode ser verificado pelas (2.7.2 - 5), este fato justifica a mudança de notação e a conveniência de expressar o desenvolvimento do Geopotencial em termos das constantes $C_{nm}$ e $S_{nm}$ ou $J_{nm}$ e $K_{nm}$.

## 2.8 - O Campo Normal

Até o momento lidamos com conceitos e formulações ligadas à Terra real. Da mesma maneira que em Geodésia Geométrica, definiremos uma Terra normal que encera a mesma massa da real, porém limitada por uma superfície geométrica conhecida. Evidentemente as massas normais gerarão um campo normal. Neste item estaremos interessados em definir o campo normal e suas entidades representativas.

### 2.8.1 - O Esferopotencial

Se admitirmos a simetria rotacional e equatorial de massas e se definirmos o eixo de rotação como o principal de inércia, teremos:

$$A = B$$

$$D = E = F = 0$$

e $A_{nm} = B_{nm} = 0$ para (m) maior que zero. E, ainda, se limitarmos o desenvolvimento do potencial atrativo aos termos de quarto grau, teremos definido a **Terra normal**. O potencial da Terra normal será denominado de **ESFERO POTENCIAL**, e se representarmos por U vem:

$$U = \frac{1}{\rho^{(n+1)}}\left[A_{00}P_{00}(\cos v)+A_{20}P_{20}(\cos v)+A_{40}P_{40}(\cos v)\right]+\frac{1}{2}\omega^2\rho^2\,\mathrm{sen}^2 v$$

A superfície equipotencial $U = c.^{te}$ é denominada de superfície esferopotencial ou "Esferop".

A superfície do esferóide terrestre é utilizada em Geodésia como a forma teórica da Terra. Pode-se demonstrar, |86|, que negligenciando os termos da ordem da segunda potência do achatamento, a superfície do esferóide coincide com a do elipsóide de rotação.

Um esferóide não precisa ser, necessariamente, um elipsóide, entretanto, os elipsóides de revolução e o escaleno são utilizados como esferóides terrestres.

O esferopotencial do elipsóide escaleno não será dado pela (2.8.1 - 1), diante do abandono do termo $A_{22}$ que garante a elipticidade equatorial. Limitando o desenvolvimento a quarta ordem podemos escrever para o esferopotencial do elipsóide escaleno:

$$U_e = \frac{1}{\rho^{(n+1)}}\left[A_{00}P_{00}(\cos v) + A_{20}P_{20}(\cos v) + A_{22}P_{22}(\cos v)\cos 2\lambda + B_{22}P_{22}(\cos v)\cos 2\lambda + A_{40}P_{40}(\cos v)\right] + \frac{1}{2}\rho^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2 v \quad ...(2.8.1\text{-}2)$$

Sempre que nos referirmos a esferopotencial ficará subentendido o potencial gravitacional de um elipsóide de revolução, a menos que explicitamente façamos referências ao contrário.

O esferopotencial pode ser expresso em termos dos coeficientes de massa ($J_{nm}$):

$$U = \frac{GM}{\rho}\left[1 - \frac{a^2}{\rho^2}J_2\,P_2(\cos v) - \frac{a^4}{\rho^4}J_4P_4(\cos v)\right] + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\,\mathrm{sen}^2 v \quad ...(2.8.1\text{-}3)$$

Tendo em vista as (2.7.1.1 - 10) e as condições (2.7.2 - 5) e (2.7.2 - 6) vem:

$$J_2 = \frac{C - A}{M\,a^2} \quad ...(2.8.1\text{-}4)$$

denominado na literatura mundial como fator de achatamento dinâmico, expresso em termos da diferença dos momentos de inércia e do semi-eixo maior do esferóide.

### 2.8.2 - A Gravidade Normal

Da mesma maneira que definimos para a Terra real as superfícies equipotenciais:

$$W\ (x,\ y,\ z) = c.^{te} \qquad \ldots(2.8.2\text{-}1)$$

e o vetor intensidade de campo, a gravidade, como:

$$\bar{g} = \text{grad } W, \qquad \ldots(2.8.2\text{-}2)$$

podemos definir as superfícies equipotenciais da Terra normal como:

$$U\ (x,\ y,\ z) = c.^{te} \qquad \ldots(2.8.2\text{-}3)$$

e a **gravidade normal**:

$$\bar{\gamma} = \text{grad } U$$

ou $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots(2.8.2\text{-}4)$

$$\bar{\gamma} = \frac{\partial U}{\partial n}\,\bar{n},$$ onde $\partial n$ é um elemento da normal cujo versor é $\bar{n}$.

#### 2.8.2.1 - Relações de Clairaut

A gravidade normal caracterizando um campo gravitacional teórico será obtida a partir de expressões matemáticas, ao contrário da gravidade real, determinada a partir de medidas efetuadas na superfície física da Terra.

A gravidade normal pode ser calculada a partir da (2.8.2 - 4), com U dado pela (2.8.1 - 3). Dentro de uma precisão admissível, podemos confundir a normal com o raio vetor, sendo o erro introduzido da ordem de 5 ppm no cálculo da gravidade |48|. De maneira que:

$$\frac{\partial U}{\partial n}\,\bar{n} \cong \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\bar{\rho} \cong \bar{\gamma} \qquad \ldots(2.8.2.1\text{-}11)$$

realizando a derivação e limitando o desenvolvimento ao 2º grau:

$$\bar{\gamma} = \frac{GM}{\rho^2} - \frac{3\ GMa^2\ J_2\ P_2\ (\cos\ v)}{\rho^4} + \omega^2\ \rho\ \text{sen}^2 v \qquad \ldots(2.8.2.1\text{-}\ 2)$$

considerando a derivação realizada na superfície de um elipsóide e a (2.8.1 - 4), |35| temos:

$$\frac{GMa^2\ J_2}{\rho^3} = \frac{2GM\ f}{a} - \omega^2\ a^2 \qquad \ldots(2.8.2.1\text{-}\ 3)$$

em que f é o achatamento. Substituindo na (2.8.2 - 6) e tomado $\rho \cong a$ vem:

$$\gamma = \frac{GM}{a^2}\left[1 + f - \frac{3a^2\ \omega^2}{2GM}\right] + \cos^2 v\left[\frac{5a\ \omega^2}{2} - 3\ \frac{GM}{a^2}\ f\right] \quad \ldots(2.8.2.1\text{- }4)$$

representando a razão entre a força centrífuga no equador e a gravidade equatorial por (m) vem:

$$m = \frac{a\,\omega^2}{\gamma_e} \quad \ldots(2.8.2.1\text{- }5)$$

para uma esfera de raio (a):

$$\gamma_e \cong \frac{GM}{a^2} \quad ,,,(2.8.2.1\text{- }6)$$

substituindo em (2.8.2.1 - 5):

$$m \cong \frac{a^3\ \omega^2}{GM} \quad \ldots(2.8.2.1\text{-}7)$$

a (2.8.2.1 - 4) escreve-se:

$$\gamma = \frac{GM}{a^2}\left[1 + f - \frac{3}{2}\ m\right] + \left[\frac{5}{2}\ a\ \omega^2 - \frac{3GM}{a^2}\ f\right]\cos^2 v \quad \ldots(2.8.2.1\text{-}8)$$

para um ponto equatorial:

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2}\left[1 + f - \frac{3}{2}\ m\right] \quad \ldots(2.8.2.1\text{-}9)$$

comparando com a (2.8.2.1 - 8) vem:

$$\gamma = \gamma_e + \left[\frac{5\ a\ \omega^2}{2} - \frac{3\ GM}{a^2}\ f\right]\cos^2 v$$

pela (2.8.2.1 - 7):

$$\gamma = \gamma_e + \frac{GM}{a^2}\left[\frac{5}{2}\ m - f\right]\cos^2 v \quad \ldots(2.8.2.1\text{-}10)$$

considerando a (2.8.2.1 - 6) e com o mesmo grau de aproximação:

$$\gamma = \gamma_e\left[1 + \left(\frac{5}{2}\ m - f\right)\cos^2 v\right] \quad \ldots(2.8.2.1\text{-}11)$$

fazendo-se:

$$\frac{5}{2}m - f = \beta \quad \ldots(2.8.2.1\text{-}12)$$

e considerando que $\phi$ = 90º - v temos:

$$\gamma = \gamma_e \; (1 + \beta \,\text{sen}^2\phi) \qquad \text{...(2.8.2.1-13)}$$

para pontos polares:

$$\gamma p = \gamma_e (1+\beta) \qquad \text{...(2.8.2.1-14)}$$

donde:

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2} m - f \qquad \text{...(2.8.2.1-15)}$$

As relações (2.8.2.1-13) e (2.8.2.1-15) são conhecidas como **RELAÇÕES DE CLAIRAUT**, deduzidas por este notável cientista em 1743 ("Theorie de la figure de la Terre"). Estas relações são de grande importância para Geodésia, possibilitando o cálculo da gravidade teórica na superfície da Terra normal, além de permitirem o cálculo do achatamento terrestre (f) em função dos valores da gravidade equatorial e polar.

Evidentemente as relações de Clairaut possibilitam o cálculo da forma do esferóide terrestre, em conseqüência, permitem a obtenção de um dos parâmetros necessários à definição de um sistema geodésico, o achatamento (f). Convém ressaltar que o método gravimétrico possibilita o cálculo da forma mas não das dimensões do esferóide.

Um método prático para a determinação da gravidade equatorial e polar será discutido no tópico (2.8.2.5), quando ficará demonstrada a possibilidade de determinação da forma do esferóide terrestre, através da Geodésia Física.

### 2.8.2.2 - Relações de Ordem Superior

As relações apresentadas no tópico anterior são consideradas de primeira ordem, pois em suas deduções os termos da ordem do quadrado do achatamento foram negligenciados.

No século passado Laplace e Stokes desenvolveram expressões mais precisas que as (2.8.2.1 - 13/15), sem introduzirem qualquer hipótese simplificativa. Neste século maiores atenções foram dispensadas à dedução de uma fórmula para a gravidade normal, destacando-se os trabalhos de Somigliana e Pizzetti, cujos desenvolvimentos podem ser encontrados em |19|, |48|, |55| e |75|.

Dentro da aproximação de segunda ordem, BOMFORD |09| e CASSINIS |20|, apresentam a seguinte fórmula para o cálculo da gravidade:

$$\gamma = \gamma_e \; (1+\beta \;\text{sen}^2\phi + \beta_1 \;\text{sen}^2 2\phi) \qquad \text{...(2.8.2.2-1)}$$

onde:

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \frac{5}{2} m - f - \frac{17}{14} mf \\
\beta_1 &= \frac{f^2}{8} - \frac{5}{8} mf \\
\gamma_e &= \frac{GM}{a^2} \left[1 - \frac{3}{2} m + f + \frac{9}{4} m^2 - \frac{27}{14} mf + f^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(2.8.2.2\text{-}2)$$

A fórmula de SOMIGLIANA, de terceira ordem, é apresentada na forma, |55|:

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2\phi + b\gamma_p \operatorname{sen}^2\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \operatorname{sen}^2\phi}} \quad \ldots(2.8.2.2\text{-}3)$$

onde **a** e **b** são os semi-eixos do elipsóide. Numa forma mais explícita, |20| e |70|, temos:

$$\gamma = \gamma_e \left(1 + \beta \operatorname{sen}^2\phi + \beta_1 \operatorname{sen}^2 2\phi + \beta_2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2 2\phi\right) \quad \ldots(2.8.2.2\text{-}4)$$

com

$$\beta_1 = \frac{1}{8} f (f - 2\beta)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{8} f^2 (2f + 3\beta) - \frac{1}{32} f^3 (3f + 4\beta)$$

$$\beta = \left(\frac{5}{2} m - f\right) \Phi(f)$$

$$\Phi(f) = 1 - \frac{17}{35} f - \frac{1}{245} f^2 - \frac{13}{18.865} f^3 - \ldots$$

para $m = \dfrac{\omega^2 a}{\gamma_e}$ ...(2.8.2.2-5)

### 2.8.2.3 - A Gravidade no Elipsóide Escaleno

Na dedução de uma fórmula para a gravidade sobre um elipsóide escaleno teremos que considerar os termos dependentes da longitude. CASSINIS |20| e SILVA |108|, apresentam o termo em longitude como sendo da forma:

$$\frac{1}{2} f_e \cos^2\phi \cos 2(\lambda - \lambda_o)$$

onde $(f_e)$ é o achatamento da elipse equatorial e $(\lambda_o)$ é a orientação do semi-eixo maior. Considerando a (2.8.2.1-1) com o termo em longitude vem:

$$\gamma = \gamma_e \left[1 + \beta \operatorname{sen}^2\phi + \beta_1 \operatorname{sen}^2 2\phi + \frac{1}{2} f_e \cos^2\phi \cos 2(\lambda - \lambda_o)\right] \quad \ldots(2.8.2.3\text{-}1)$$

fórmula que nos permite o cálculo da gravidade sobre um elipsóide triaxial.

Considerando a relação de CLAIRAUT (2.8.2.1-15) e acrescentando o termo dependente da longitude, |35|, obtemos:

$$f_\lambda = \frac{5}{2} m - \beta + \frac{1}{2} f_e \cos 2(\lambda - \lambda_o) \qquad ...(2.8.2.3\text{-}2)$$

expressão que possibilita o cálculo da elipticidade meridiana. No tópico (2.8.2.5) retornaremos ao assunto segundo uma visão prática.

### 2.8.2.4 - Fórmula Internacional da Gravidade

Com o objetivo de garantir a homogeneidade das determinações gravimétricas em todo o globo, a UGGI através da Assembléia Geral de Stockholm em 1930, tendo por base os trabalhos desenvolvidos por CASSINIS |20|, Lambert |70|, Silva |108| e Heiskanen |43|, definiu o campo gravitacional normal através da Fórmula Internacional da Gravidade, cujos parâmetros básicos são:

$$\gamma_e = 978\ 049{,}9 \text{ mgal}$$
$$\beta = 0{,}0052884$$
$$\beta_1 = 0{,}0000059$$

o achatamento para o esferóide calculado com estes parâmetros é de 1/297 análogo ao do elipsóide de referência de Hayford, que dentro da precisão de primeira ordem pode ser tomado como o esferóide terrestre.

Com isso temos:

$$\boxed{\gamma = 978\ 049{,}0 \left[1 + 0{,}0052884 \operatorname{sen}^2\phi + 0{,}0000059 \operatorname{sen}^2 2\phi\right]} \qquad ...(2.8.2.4.1)$$

os parâmetros secundários para:

$$\left.\begin{aligned} G &= 6{,}673 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2 \\ M &= 5.973 \times 10^{27} \text{ g} \\ W &= 0{,}72821151 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}\right\} |116|$$

são definidos:

$$GM = 3{,}986\ 329 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2$$
$$U = 6\ 263\ 978{,}7 \text{ kgal metros}$$
$$J_2 = 0{,}0010920$$
$$J_4 = -0{,}0000243.$$

Os valores fixados para a fórmula Internacional foram calculados por Heiskanem em 1928, utilizando o material gravimétrico disponível naquela época, correspondendo à definição de valores médios para cerca de 1600 quadriláteros de 1º x 1º.

Resultados mais recentes, apoiados em maior número de dados e, principalmente, com elementos obtidos a partir dos métodos celestes, vieram demonstrar estarem os valores anteriores necessitando de uma atualização e uma redefinição dos parâmetros internacionais, com o que na Assembléia Geral de Lucerne, em 1967, foram redefinidos os parâmetros de referência, não só físicos como geométricos, passando-se aos valores , |116, pág.57-9|:

$$\gamma_e = 978\ 031{,}8 \text{ mgal}$$

$$\beta = 0{,}0053024$$

$$\beta_1 = 0{,}0000059$$

correspondentes ao elipsóide de Referência 1967, nova superfície de referência internacional, de parâmetros:

$$a = 6\ 378\ 160{,}0 \text{ m}$$

$$t = 1/298{,}25$$

Com estes dados a fórmula da gravidade passa a ser:

$$\boxed{\gamma = 978\ 031{,}8\ (1 + 0{,}005324 \text{ sen}^2\phi - 0{,}0000059 \text{ sen}^2\ 2\phi)} \quad ...(2.8.2.4\text{-}2)$$

para a qual temos:

$$J_2 = 0{,}001\ 082\ 7$$

Neste trabalho todos os resultados práticos encontram-se no antigo sistema.

### 2.8.2.5 - A Determinação do Elipsóide Gravimétrico

As relações de Clairaut expressam a possibilidade de se determinar a forma da Terra normal melhor adaptada à real a partir do conhecimento da gravidade equatorial ($\gamma_e$). Heiskanen |43|, ao desenvolver os trabalhos para a obtenção de uma fórmula para a gravidade, criou uma sistemática de cálculo que tem possibilitado a atualização do valor equatorial da gravidade e, indiretamente, o cálculo da forma do esferóide correspondente, contudo, é necessário pré-fixar o valor do semi-eixo maior.

Consideremos a fórmula:

$$\gamma = \gamma_e \ (1 + \beta \ sen^2\phi + \beta_1 sen^2 2 \ \phi) \qquad ...(2.8.2.5.1)$$

como sendo a que se pretende reavaliar. Suponhamos que x e y sejam as correções a serem aplicadas a $\gamma_e$ e $\beta$, de maneira que a fórmula reavaliada escreve-se:

$$\gamma' = (\gamma_e + x) \left[1 + (\beta + y) \ sen^2\phi + \beta_1 \ sen^2 2\phi\right]$$
$$...(2.8.2.5.2)$$

subtraindo membro a membro a (2.8.2.5-1) da (2.8.2.5-2), vem:

$$\gamma' - \gamma = \Delta\gamma = x + x\beta \ sen^2\phi + xy \ sen^2\phi + y\gamma_e sen^2\phi + \beta_1 sen^2 \ 2 \ \phi$$

desprezando as quantidades de segunda ordem:

$$\Delta\gamma = x + y \ \gamma_e \ sen^2 \ \phi \qquad ...(2.8.2.5.3)$$

como os dados que contribuem para a avaliação são expressos em termos de anomalias da gravidade ($\Delta g = g - \gamma$), podemos escrever:

$$\Delta' g = g - \gamma' = g - (y + \Delta\gamma) = g - \gamma - \Delta\gamma = \Delta g - \Delta\gamma \qquad ...(2.8.2.5\text{-}4)$$

assimilando $\Delta' g$ a um resíduo e $\Delta g$ a erros de observação, podemos determinar as correções mais prováveis x e y através do MMQ. Substituindo (2.8.2.5 - 3) em (2.8.2.5 - 4) vem:

$$\Delta' g = \Delta g - x + y\gamma_e \ \ sen^2\phi$$

ou

$$x + y\gamma_e \ sen^2\phi - \Delta g = - \ v \qquad ...(2.8.2.5\text{-}5)$$

para cada anomalia conhecida corresponderá uma equação do tipo(2.8.2.5-5), considerando (n) valores conhecidos temos:

$$\begin{cases} x + y\gamma_e sen^2\phi_1 - \Delta g_1 = - \ v_1 \\ x + y\gamma_\ell sen^2\phi_2 - \Delta g_2 = - \ v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x + y \ \ sen^2\phi_n - \Delta g_n = - \ v_n \end{cases} \qquad ...(2.8.2.5\text{-}6)$$

que corresponderá ao sistema de equações normais:

$$\begin{cases} n \ x + \gamma_e \sum_1^n sen^2\phi_n y = \sum_1^n \Delta g_n \\ \sum_1^n sen^2\phi_n \ x + \gamma_e \ \sum_1^n \Delta g_n sen^2\phi_n \ \sum_1^n \ \Delta g_n \ sen^2 \ \phi_n \end{cases}$$
$$...(2.8.2.5\text{-}7)$$

expressando:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n \\ 0 & \gamma_e \sum_1^n \operatorname{sen}^4\phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n \Delta g_n \\ \sum_1^n \Delta g_n \operatorname{sen}^2\phi_n \end{bmatrix}$$

$$[A]\ [X]=[C] \qquad \ldots(2.8.2.5\text{-}8)$$

cuja solução será da forma:

$$[X]=[A^{-1}][C] \qquad \ldots(2.8.2.5\text{-}9)$$

onde $[A^{-1}]$ é a matriz inversa de [A].

Resolvendo a (2.8.2.5) encontramos as correções à $\gamma_e$ e $\beta$, que representaremos por $\gamma'_e$ e $\beta'$, com estes novos valores introduzidos na (2.8.2.5 - 1) e fazendo $\phi$ = 90º, obtemos o valor da gravidade polar $\gamma'_p$. Utilizando a relação (2.8.2.1 - 20) podemos calcular o achatamento do elipsóide correspondente aos novos parâmetros $\gamma'_e$ $\gamma'_p$ ou seja:

$$f = \frac{\gamma'_p - \gamma'_e}{\gamma'_e} - \frac{5}{2}m \qquad \ldots(2.8.2.5\text{-}10)$$

onde (m) é dado pela (2.8.2.1-5).

Os valores de $(\Delta g)$ usados na obtenção das equações (2.8.2.5 - 6) são valores médios calculados a partir de observações realizadas em quadriláteros de 1º x 1º ou 5º x 5º.

Para a determinação do elipsóide tri-axial o procedimento é idêntico, somente que:

$$\gamma = \gamma_e \left[1 + \beta \operatorname{sen}^2\phi + \beta_1 \operatorname{sen}^2 2\phi + 0{,}5\, f_e \cos^2\phi \cos^2(\lambda - \lambda_o)\right]$$

$$\ldots(2.8.2.5\text{-}11)$$

para a qual obtemos as equações de observação:

$$x + y\gamma_e \operatorname{sen}^2\phi + 0{,}5\ {}_e\cos^2\phi \cos 2\,(\lambda-\lambda_o) f_e - \Delta g = -v$$

$$\ldots(2.8.2.5\text{-}12)$$

devolvendo cos $2(\lambda-\lambda_{\_})$ e fazendo-se:

$$\left.\begin{array}{l} y^* = \gamma_e \ \lambda \\ z \ = \dfrac{\gamma e}{2} \ f_e \cos 2\lambda_o \\ w \ = \dfrac{\gamma e}{2} \ f_e \operatorname{sen} 2\lambda_o \end{array}\right\} \qquad \ldots(2.8.2.5\text{-}13)$$

obtemos

$$x + y^* \operatorname{sen}^2\phi_i + \cos^2\phi_i \cos 2\lambda_i Z + \cos^2\phi_i \ \operatorname{sen} 2\lambda_i w - \Delta g_i = - v_i$$

$$i = (1,\ 2,\ \ldots\ n) \qquad \ldots(2.8.2.5\text{-}14)$$

para as quais obtemos o sistema normal em notação matricial:

$$|A_1| \ |X_1| = |C_1| \qquad \ldots(2.8.2.5\text{-}15)$$

onde

$$|A_1| = \begin{bmatrix} n & \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n & \sum_1^n \cos^2\phi_n \cos 2\lambda_n & \sum_1^n \cos^2\phi_n \operatorname{sen} 2\lambda \\ \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n & \sum_1^n \operatorname{sen}^4\phi_n & \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n \cos^2\phi_n \cos 2\lambda_n & \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n \cos^2\phi_n \operatorname{sen} 2\lambda_n \\ \sum_1^n \cos^2\phi_n \cos 2\lambda_n & \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n \cos^2\phi_n \cos 2\lambda_n & \sum_1^n \cos^4\phi_n \cos 2\lambda_n & \sum_1^n \cos^4\phi_n \cos 2\lambda_n \operatorname{sen} 2\lambda_n \\ \sum_1^n \cos^2\phi_n \operatorname{sen} 2\lambda_n & \sum_1^n \operatorname{sen}^2\phi_n \cos^2\phi_n \operatorname{sen} 2\lambda_n & \sum_1^n \cos^4\phi_n \cos 2\lambda_n \operatorname{sen} 2\lambda_n & \sum_1^n \cos^4\phi_n \operatorname{sen}^2 2\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ y^* \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left[C_1\right] = \begin{bmatrix} \sum_1^n \Delta g_n \\ \sum_1^n \Delta g_n \ \operatorname{sen}^2\phi_n \\ \sum_1^n \Delta g_n \ \cos^2\phi_n \cos 2\lambda_n \\ \sum_1^n \Delta g_n \ \cos^2\phi_n \operatorname{sen} 2\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\ldots(2.8.2.5\text{-}16)$$

e cuja solução será:

$$\left[X_1\right] = \left[A_1^{-1}\right] \quad \left[C_1\right]$$

Resolvido o sistema, os resultados serão introduzidos nas (2.8.2.5-13) a partir das quais obtemos os valores de $\gamma'_e$ , $\beta$, $f_e$ e $\lambda_o$.

# 3. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA GEODÉSIA FÍSICA

## 3.1 - O Potencial Perturbador, Ondulações Geoidais e Desvio da Vertical:

No capítulo anterior procuramos desenvolver os conceitos de Geopotencial e Esferopotencial, como sendo gerado pelas massas rotantes da Terra Real e da Terra Normal, respectivamente.

O esferóide terrestre, por definição, tem a mesma massa da Terra Real, com a restrição de que estas são distribuídas uniformemente. Como a Terra apresenta irregularidades internas (variação de densidade) e externas (topografia), justifica-se a desigualdade dos potenciais.

A diferença existente entre o geopotencial e o esferopotencial denomina-se de POTENCIAL PERTURBADOR, gerado pelas massas anômalas internas e externas.

Com as considerações anteriores podemos escrever:

$$T\ (x,\ y,\ z) \triangleq W\ (x,\ y,\ z) - U\ (x,\ y,\ z) \qquad \ldots(3.1.1)$$

onde T é o potencial perturbador.

Considerando a fig. (3.1.1), em que o ponto P na superfície geoidal (W=Wo) é projetado ao longo da normal ao elipsóide de referência(U ≡ Wo), a distância PQ será o afastamento entre o geóide e o elipsóide; quantidade denominada ALTITUDE GEOIDAL ou GEO-ONDULAÇÃO (N).

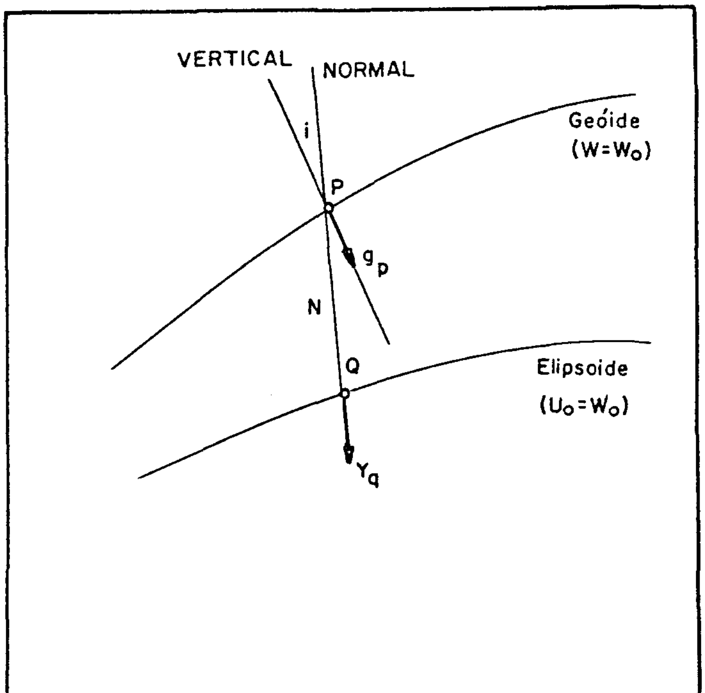



Fig.( 3.1-1 ) ___ GEO-ONDULAÇÃO

A gravidade real em (P) é definida vetorialmente por $(g_p)$ e a normal em (Q) por $(\gamma_Q)$. ANOMALIA DA GRAVIDADE é definida como sendo a diferença entre os vetores intensidade do campo real e do normal:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

A diferença em direção (i) é denominada DESVIO DA VERTICAL.

### 3.2 - A Equação Diferencial da Geodésica Física:

O esferopotencial em P, pode ser expresso em termos esferopotencial em Q, acrescido da taxa de variação ao longo da normal, ou seja:

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q N \qquad \ldots(3.2.1)$$

como a derivada direcional da função esferopotencial, ao longo da normal, caracteriza a gravidade normal, vem:

$$U_P = U_Q - \gamma N \qquad \ldots(3.2.2)$$

Pela definição do potencial perturbador, temos:

$$W_P = U_Q - \gamma N + T \qquad \ldots(3.2.3)$$

como $W_P = U_Q = Wo$, vem:

$$\boxed{N = \frac{T}{\gamma}} \qquad \ldots(3.2.4)$$

expressão conhecida como **Fórmula de Bruns**; de grande importância para a Geodésia Física, pois relaciona as geo-ondulações (N) com o potencial perturbador (T).

Considerando a expressão (3.2.3) e derivando segundo à normal, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} \qquad \ldots(3.2.5)$$

como

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n} &= - g \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= - \gamma \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.2.6)$$

substituindo vem:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = - g + \gamma + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} \qquad \ldots(3.2.7)$$

pela definição de anomalia da gravidade:

$$\Delta g = g - \gamma = - \frac{\partial T}{\partial n} + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} \qquad \ldots(3.2.8)$$

equação fundamental da geodésia física. Relaciona as anomalias da gravidade, calculadas com a gravidade avaliada na superfície da Terra e reduzida ao geóide, com o potencial perturbador. É interessante observar que as anomalias existem, em parte, como conseqüência de g e $\gamma$ referirem-se a superfícies equipotenciais distintas, fato expresso pelo termo de Bruns($N\ \partial\gamma/\partial n$). O outro termo demonstra as influências das massas anômalas, representadas pelo potencial perturbador.

Analisando a equação (3.2.8) vemos que esta é uma equação diferencial à derivadas parciais, resolvível desde que se conheça $\Delta g$ em todo o campo gravitacional. Como $\Delta g$ é avaliado somente na superfície do geóide, a equação só poderá ser usada como uma **condição de contorno.**

Substituindo a fórmula de BRUNS em (3.2.8) vem:

$$\Delta g = \frac{1}{\gamma}\ \frac{\partial\gamma}{\partial n}\ T - \frac{\partial T}{\partial n} \qquad \ldots(3.2.9)$$

equação equivalente à fundamental.

Considerando que g é conhecido sobre a superfície do geóide e que (T) e ($\partial T/\partial n$), na (3.2.9), formam uma combinação linear sobre este, a obtenção de (T) se dará através da terceira condição de contorno da Teoria do Potencial, |77| e |97|. Com isso as geo-ondulações podem ser calculadas através da fórmula de BRUNS.

Introduzamos a condição de contorno — a normal confunde-se com o raio vetor de qualquer ponto da superfície, o que equivale a se tomar a Terra esférica. Desta forma podemos escrever:

$$\frac{1}{\gamma}\ \frac{\partial\gamma}{\partial n} \cong \frac{1}{\gamma}\ \frac{\partial\gamma}{\partial R} \qquad \ldots(3.2.10)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial n} \cong \frac{\partial T}{\partial R} \qquad \ldots(3.2.11)$$

como $\gamma \cong \frac{GM}{R^2}$ vem:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial R} = - \frac{2\gamma}{R} \qquad \ldots(3.2.12)$$

com estas expressões escrevemos:

$$\boxed{- \Delta g = \frac{2T}{R} + \frac{\partial T}{\partial R}} \qquad \ldots(3.2.13)$$

A expressão (3.2.13) é idêntica a (3.2.8), somente que válida para uma aproximação esférica.

O elipsóide de refência afasta-se da esfera por quantidades da ordem do achatamento ($\cong 1/300$). Contudo, se tratarmos o elipsóide de re ferência como uma esfera nas equações que relacionem quantidades do campo anômalo, teremos introduzido erros relativos da ordem de $3.10^{-3}$, o que é perfeitamente permitido para N, T e $\Delta g$. O efeito absoluto deste erro relativo, sobre a altitude geoidal, será da ordem de $3.10^{-3}$ x N, como N, comumente, não excede 100 m, este efeito será inferior a 1 m. O que torna perfeitamente válida a aproximação.

Desde que o potencial perturbador é uma harmônica, podemos expandí-lo em Harmônicos Esféricos, aliás o que nos garante a terceira condição de contorno expressa pela (3.2.13); conforme |48, pg 37| teremos para representá-lo:

$$T\ (\rho,\ v,\ \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} Yn(v,\ \lambda) \qquad \ldots(3.2.14)$$

onde $Y_n(v,\ \lambda)$ é o mais geral harmônico de superfície.

A (3.2.14) é uma das soluções de nosso problema, que na forma integral corresponde à Fórmula de STOKES, outra solução, considerada na literatura geodésica como clássica.

### 3.3 - O Potencial Perturbador em Harmônicos Esféricos:

O geopotencial (W) pode ser expresso pela equação(2.7.2.3), onde considerando o zonal de 4º grau explicitamente, temos:

$$W = \frac{1}{\rho^{n+1}} \left| A_{oo}\ P_{oo}(\cos\ v) + A_{20}\ P_{20}(\cos\ v) + A_{40}\ P_{40}(\cos\ v) \right| + \underset{\text{sem } 20.21.40}{\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n}} \left| (A_{nm} \cos\ m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen}\ m\ \lambda)\ P_{nm}(\cos\ v) \right| + \frac{1}{2} \omega^2\ \rho^2\ \operatorname{sen}^2\ v \qquad \ldots(3.3.1)$$

o esferopotencial limitado aos termos de quarto grau (2.8.1.1)

$$U = \frac{1}{\rho^{n+1}} \left| A_{oo}\ P_{oo}(\cos\ v) + A_{20}\ P_{20}(\cos\ v) + A_{40}\ P_{40}(\cos\ v) \right| + \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 v \qquad \ldots(3.3.2)$$

Pela definição de potencial perturbador e fazendo-se $\rho$=R, vem:

$$\boxed{T_n(R,\ v,\ \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \frac{1}{R^{n+1}} (A_{nm} \cos\ m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen}\ m\lambda)\ P_{nm}(\cos\ v)} \qquad \ldots(3.3.3)$$

expressão que representa o potencial perturbador em harmônicos esféricos, portanto atendendo a (3.2.14) e em conseqüência sendo uma solução do nosso problema.

Como normalmente desconhecemos os coeficientes do desenvolvimento anterior, torna-se necessário relacioná-los a quantidades conhecidas que nos facilitem os cálculos. Sendo as anomalias da gravidade o ente mais representativo do campo e avaliadas diretamente, procuraremos o seu desenvolvimento em harmônicos.

Pesquisemos a derivada da (3.3.3) segundo o raio vetor ($\cong$ normal).

$$\frac{\partial T}{\partial n} \cong \frac{\partial T}{\partial R} = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \frac{(n+1)}{R^{n+2}} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \text{sen } m\lambda) P_{nm}(\cos v) \qquad \ldots(3.3.4)$$

Substituindo a anterior na (3.2.13), juntamente com a (3.3.3) vem:

$$- \Delta g = \frac{2}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \frac{1}{R^{n+1}} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \text{sen } m\lambda) P_{nm}(\cos v) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n}$$

$$\frac{(n+1)}{R^{(n+2)}} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \text{sen } m\lambda) P_{nm}(\cos v) \qquad \ldots(3.3.5)$$

realizando a transposição de (R) para o somatório vem:

$$\boxed{\Delta g\ (v,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \frac{(n-1)}{R^{(n+2)}} \left| A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \text{sen } m\lambda \right| P_{nm}\ (\cos v)}$$

sem o 20,21,40

$$\ldots(3.3.6)$$

fórmula que representa as anomalias da gravidade em harmônicos esféricos. Resta-nos pesquisar os coeficientes (Anm) e (Bnm) que poderão ser obtidos para cada ponto em que se conheça ($\Delta g$).

Considerando as expressões gerais dos coeficientes, (2.6.1. 2.8), e tendo em vista que agora $f(v, \lambda) = \Delta g(v, \lambda)$ vem:

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2-\delta n,m) \int_{v=o}^{\pi} \int_{\lambda}^{2\pi} \Delta g(v, \lambda) P_{nm}(\cos v) \cos m\lambda \text{ sen } v dv\, d\lambda$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2-\delta n,m) \int_{v=o}^{\pi} \int_{\lambda=o}^{2\pi} \Delta g(v, \lambda) P_{nm}(\cos v) \text{sen } m\lambda \text{ sen } v dv\, d\lambda$$

$$\ldots(3.3.7)$$

em que $\delta n, m$ é nulo para $n \neq m$ e unitário se $m = o$.

Matematicamente o problema está resolvido, só que temos uma restrição; não conhecemos $\Delta g$ em toda a Terra (domínio de integração nas (3.3.7)), e em conseqüência não poderemos determinar precisamente os coeficientes.

Este tipo de desenvolvimento foi utilizado pela primeira vez em 1952, por ZHONGOLOVICH| The external gravity field of the Earth and the fundamental constants connected with it. Leningrado, **Acd. Sci. Publ. Inst. Teor. Astron**|, para calcular as ondulações geoidais com o material gravimétrico existente naquela época. Os valores conhecidos ($\Delta g$)foram utilizados no cálculo dos coeficientes ($A_{nm}$) e ($B_{nm}$). Os valores calculados foram transformados pelo MMQ de maneira a se tornarem os mais representativos do campo gravitacional terrestre. Os coeficientes assim determinados, foram introduzidos na (3.3.6) para a estima de ($\Delta g$) nas áreas onde não se possuía valores anômalos.

Para melhor compreensão do procedimento utilizado por Zhongolovich, tomemos as (3.3.7) aplicadas sobre uma distribuição discreta de valores anômalos:

$$\left\{\begin{matrix} A_{nm} \\ \\ B_{nm} \end{matrix}\right\} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2-\delta n,m) \sum_{v=o}^{\pi} \sum_{\lambda=o}^{2\pi} \Delta g_i(v,\lambda) P_{nm}(\cos v) \left\{\begin{matrix} \cos m\lambda \\ \\ \operatorname{sen} m\lambda \end{matrix}\right\}. \operatorname{sen} v.$$

$$.\Delta v.\Delta\lambda \qquad \ldots(3.3.8)$$

onde $\Delta v$ e $\Delta\lambda$ representam as dimensões de uma quadrilátero na superfície da Terra, para o qual determinamos a anomalia média $\Delta g_i$ ($V$, $\lambda$). Desta maneira para um determinado grau e ordem ($n$, $m$) podemos calcular os coeficientes para cada ponto conhecido ($\Delta g_i$) e através do MMQ obter valores representativos para toda a Terra.

Com estes coeficientes calculados podemos obter o potencial perturbador pela (3.3.3) e mediante a fórmula de Bruns calcular as ondulações geoidais ($N$).

Diante dos resultados obtidos somos levados à pesquisa de um desenvolvimento em harmônicos para ($N$).

Pela fórmula de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

considerando a (3.3.3) vem:

$$\boxed{N = \frac{1}{\gamma_T} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \frac{1}{R^{n+1}} \left| A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\operatorname{sen} m\lambda \right| P_{nm}(\cos v)}$$

Sem o 20,21,40

$$\ldots(3.3.9)$$

onde $\gamma_T$ é o valor da gravidade teórica média para a Terra.

Como muitas vêzes é conveniente expressar as ondulações em termos das anomalias da gravidade, multipliquemos e dividamos a (3.3.9)por

R(n-1):

$$N = \frac{1}{\gamma_T} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n-1}{R^{n+2}} \frac{R}{(n-1)} \left| A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen} m\lambda \right| P_{nm} (\cos v)$$

comparando com a (3.3.6) vem:

$$\boxed{N(v, \lambda) = \frac{R}{\gamma_T} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n(v,\lambda)}{n-1}} \quad \ldots(3.3.10)$$

Desta maneira resolvemos o problema do cálculo das ondulações geoidais sem recorrer ao potencial perturbador.

Diversos trabalhos como por exemplo Kaula|58| e Uotila|118|, sugerem a utilização destes desenvolvimentos no cálculo das ondulações geoidais.

Como o desenvolvimento em harmônicos esféricos na superfície da Terra tem características de divergência, a utilização das fórmulas anteriores deve ser encarada com um certo cuidado. Heiskanem & Moritz |48|, aconselham limitar o desenvolvimento entre o quarto e oitavo grau, onde as características de divergência não se manifestam intensamente.

O problema da limitação dos desenvolvimentos aos termos de baixo grau tem sido contornado pela utilização dos procedimentos dinâmicos da Geodésia Celeste, principalmente a partir de análises orbitais de satélites artificiais, associadas aos valores médios calculados na superfície terrestre, servindo como exemplo o recente trabalho de Gaposchkin & Lambeck |30|, onde o desenvolvimento atinge os termos de 22º grau e 14ª ordem.

### 3.4 - A Fórmula de Stokes:

A integral ou fórmula de Stokes, publicada pela primeira vez em 1849, expressa a possibilidade de se determinar a forma de uma superfície equipotencial (S), que encerra a massa geradora do campo, a partir de uma outra (S') conhecida em forma e avaliável matematicamente, desde que se determinem os valores do vetor intensidade de campo em todos os pontos de (S).

Esta fórmula integral possibilita a determinação do geóide a partir do esferóide de referência, ou seja, as ondulações geoidais (N) calculadas como função de ($\Delta g$) a partir da fórmula integral de Stokes, ponto a ponto.

Para o estabelecimento da fórmula de Stokes, seguiremos as deduções apresentadas em |35| e |47|. Um estudo mais completo poderá ser realizado em |19|, |48| ou |55|. Laplace e Dirichilet demonstraram a possibilidade de uma função de posição qualquer, contínua sobre uma esfera, ser desenvolvível em harmônicos, |17, pg.386-90|, através da relação:

$$F(v, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\tau} P_n(\cos \psi')F(v', \lambda')d\tau \qquad ...(3.4.1)$$

em que $(d\tau)$ é um elemento de superfície da esfera de raio unitário.

Desde que a anomalia da gravidade é uma função de posição (depende da latitude e longitude), podemos aplicar a (3.4.1) com a distância angular $(\psi)$ expressando o afastamento entre o ponto de cálculo $(v, \lambda)$ e o elemento de superfície $(v', \lambda')$:

$$\Delta g\ (v, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\tau} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi)\ \Delta g_{\tau}(V', \lambda')\ d\tau \qquad ...(3.4.3)$$

fazendo-se:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\ n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) = S\ (\psi) \qquad ...(3.4.4)$$

que desenvolvendo, nos dá, |48|:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos\psi - 3 \cos\psi\ \operatorname{Ln}(\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}) \qquad ...(3.4.5)$$

a conhecida **função de Stokes**, em que (Ln) indica logarítimo neperiano.

De acordo com a (3.4.4) podemos escrever a (3.4.3)

$$\boxed{N(v, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma_{\tau}} \int_{\tau} \Delta g_{\tau}\ (v', \lambda)\ S\ (\psi)\ d_{\tau}} \qquad ...(3.4.6)$$

expressão conhecida como **fórmula ou integral de Stokes** e na forma que aparece em |Stokes, G. G. - On the variation of Gravity at the Surface of the earth, In: **Mathematical and Physical Papers**, Vol. II, Cambridge, 1883|.

A integral representada em (3.4.6) pode ser colocada numa forma mais conveniente, introduzindo um sistema de coordenadas polares sobre a esfera, representado pela distância angular $\psi$ e o azimute $\alpha$. Considerando a fig. (3.4.1) em que (P) é o ponto de cálculo, com coordenadas

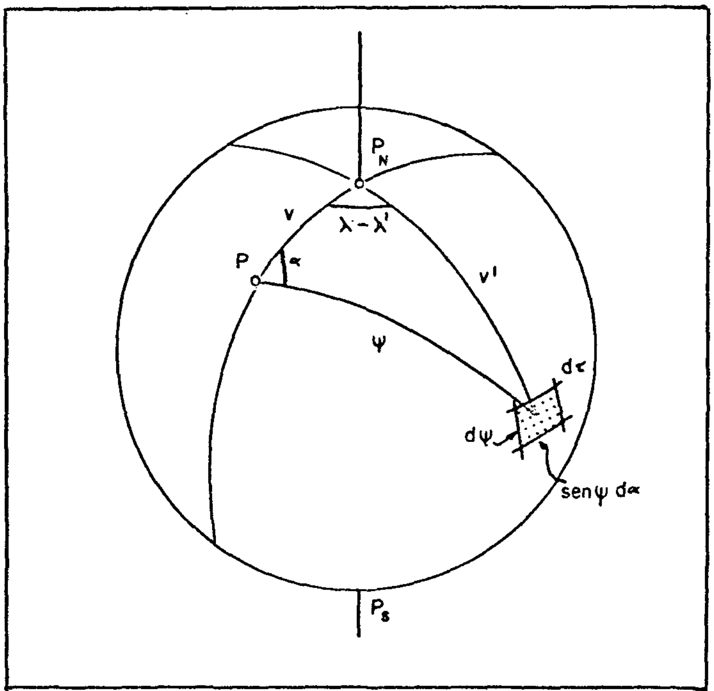



Fig.(3.4-1) ___ A DISTANCIA ANGULAR ψ E O ELEMENTO DE SUPERFÍCIE dτ:

(v, λ) no qual está centrado o sistema coordenado polar, podemos escrever, para a esfera de raio unitário:

$$d\tau = \text{sen}\ \psi d\psi\ \ d\alpha \qquad \ldots(3.4.7.)$$

e substituindo

$$\int\int_{\tau} \rightarrow \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi}$$

vem:

$$\boxed{N(\psi,\ \alpha) = \frac{R}{4\pi\gamma_T} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi,\ \alpha)\ S\ (\psi)\ \text{sen}\psi d\psi\ \ d\alpha}$$

...(3.4.8)

Algumas vezes é conveniente expressar as ondulações em termos de coordenadas geodésicas (ϕ, λ). Fazendo-se:

$$d\tau = \cos\phi d\phi d\lambda$$

e

$$\int\int_{\tau} \rightarrow \int_{\phi=-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi}$$

com isso a (3.4.6) escreve-se:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{4}{4\,\pi\gamma_T} \int_{\lambda'=o}^{2\pi} \int_{\phi'=-\Pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda')\, S(\psi) \cos\phi'\, d\phi'\, d\lambda' \qquad \ldots(3.4.9)$$

com $\psi$ expresso pela (2.7.1.16)

$$\cos\psi = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\phi' + \cos\phi \cos\phi' \cos(\lambda' - \lambda) \qquad \ldots(3.4.10)$$

Utilizando qualquer das fórmulas anteriores para o cálculo das ondulações, podemos determinar o geóide ponto a ponto, a partir do elipsóide tomado como referência.

As fórmulas anteriores foram estabelecidas para uma aproximação esférica, portanto tem o mesmo valor teórico da (3.3.9). O erro introduzido pela aproximação está em torno de ± 1m, atendendo a maioria dos propósitos práticos da geodésia |47| e |48|.

Desenvolvimentos mais precisos podem ser realizados com a introdução da condição de elipticidade, a exemplo de MOLODENSKII |86| e BJERHAMMAR |8|. As fórmulas desenvolvidas por BJERHAMMAR são as mais precisas e foram exaustivamente comparadas com outras, estando a precisão em torno da metade da obtida nas mesmas condições pela aproximação esférica.

Convém ressaltar que as ondulações calculadas com as fórmulas anteriores fornecem valores válidos para as seguintes situações das duas superfícies:

1. O esferopotencial na superfície do elipsóide é igual ao geopotencial na superfície do geóide, Uo = Wo;

2. O geóide encerra uma massa numericamente igual a da Terra M = M';

3. Os centros de gravidade do geóide e do elipsóide são coincidentes.

A dedução da fórmula de STOKES pressupõe a gravidade medida diretamente sobre o geóide e a inexistência de massas perturbadoras externas e internas. Como as medidas gravimétricas são realizadas na superfície terrestre, sujeitas à ação das massas anômalas, torna-se necessária a redução das mesmas ao geóide e a eliminação do efeito de massas; são diversos os modelos de redução e serão objeto de estudos no capítulo 4. Por enquanto adiantaremos que estes processos de uma maneira ou de outra alteram o potencial e/ou a massa do geóide; em conseqüência, as condições não são perfeitamente obedecidas.

Com o objetivo de corrigir as distorções impostas pelos processos de redução e manter válida a fórmula de STOKES, elementos corretivos foram acrescentados por PIZZETI e HIRVONEN, que segundo |48| e |75| escrevem-se; para (M) e (M') definindo as massas real e alterada durante a regularização:

— Se M' = M, mas Wo ≠ Uo:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_T} \int\int_{\tau} \Delta g \left| S(\psi) - \frac{1}{2} \right| d\tau \qquad \text{...(3.4.11)}$$

no caso de se manter a igualdade de massas a integral original apresenta um termo corretivo desenvolvido por PIZZETTI:

$$Nc = \frac{-R}{4\pi\gamma_T} \int\int_{\tau} \frac{\Delta g}{2} d\tau \qquad \text{...(3.4.12)}$$

— Se M' ≠ M, masWo = Uo:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_T} \int\int_{\tau} \Delta g \left| S(\psi) - 1 \right| d\tau \qquad \text{...(3.4.13)}$$

no caso de se manter a igualdade de potenciais a integral original apresenta um termo corretivo, para massas, desenvolvido por HIRVONEN:

$$Nc = \frac{-R}{4\pi\gamma_T} \int\int_{\tau} \Delta g \, d\tau \qquad \text{...(3.4.14)}$$

As fórmulas (3.4.11) e (3.4.13) são mais precisas que a desenvolvida por STOKES, entretanto são válidas somente na condição dos potenciais ou das massas se manterem iguais. Contudo quase todos os processos de redução alteram as duas condições, invalidando, também,as fórmulas anteriores.

HEISKANEN & MORITZ em |48| apresentam uma discussão com a respectiva solução, para o caso em que a contração ou extensão de uma das superfícies dá-se paralela a outra, reduzindo a solução do problema a simples colocação em escala. Embora este estudo represente um grande passo, não é a solução definitiva.

HEISKANEN & VENING-MEINESZ em |47| afirmam que estas distorções podem ocasionar o deslocamento da ordem de 1m na coincidência dos centros de gravidade das figuras, portanto da mesma ordem do erro esperado no cálculo das ondulações.

### 3.2 - Fórmulas de Vening-Meinesz

No tópico (3.1) caracterizamos a direção do vetor anomalia da gravidade pelo desvio da vertical. Este desvio apresenta-se com duas componentes, uma meridiana, Norte-Sul ($\xi$) e uma primeiro vertical, Leste-Oeste ($\eta$) fig. (3.5.1)

Como a direção da normal é definida diretamente pelas coordenadas geodésicas, latitude ($\phi$) e longitude ($\lambda$), as componentes $\xi$ e $\eta$ poderão ser expressas em termos destas. A direção da vertical (linha de prumo) ou do vetor gravidade, pode ser determinada astronomicamente, através das coordenadas ($\Phi$) latitude e ($\Lambda$) longitude astronômicas.

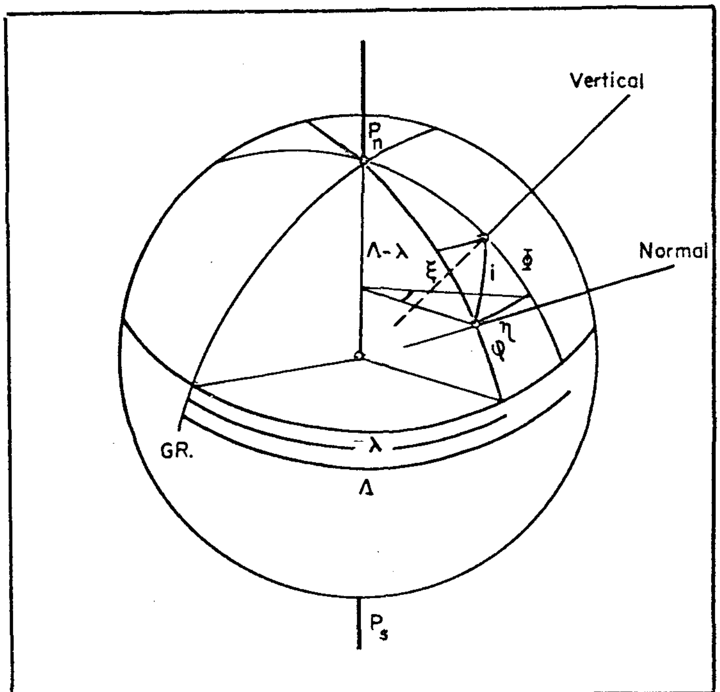



Fig.(3.5-1) —— O DESVIO DA VERTICAL

A simples inspeção da fig. (3.5.1) nos permite escrever:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Phi - \phi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda)\cos\phi \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.1)$$

expressões que relacionam as componentes do desvio da vertical às coordenadas astronômicas e geodésicas.

Consideremos a fig. (3.5.2), em que representamos um corte transversal do geóide e elipsóide, por um plano de azimute qualquer. Se $\varepsilon$ é a componente da deflexão nesta direção, da figura vem:

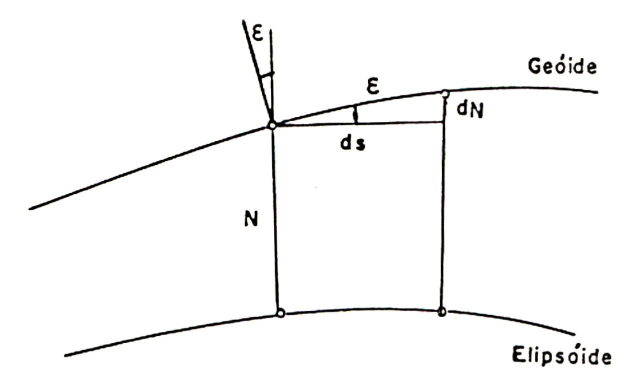



Fig.(3.5-2) ___ COMPONENTE DO DESVIO DA VERTICAL.

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds} \qquad \ldots(3.5.2)$$

onde o sinal é uma convenção arbitrária que torna compatíveis os resultados aqui obtidos com os da (3.5.1). Se o corte for tomado na direção Norte-Sul, teremos:

$$\varepsilon = \xi \text{ e } \quad ds = ds_\phi = Rd\phi$$

na direção Leste-Oeste:

$$\varepsilon = \eta \text{ e } \quad ds = ds_\lambda = R\cos\phi\, d\lambda$$

Os elementos $ds_\phi$ e $ds_\lambda$ são obtidos a partir da aproximação esférica, considerando a (3.5.2) vem:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{dN}{ds_\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \phi} \\ \eta &= -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R\cos\phi}\frac{\partial N}{\partial \lambda} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.3)$$

que expressam a relação existente entre as componentes do desvio da vertical e as geo-ondulações (N).

Consideremos (N) dado pela fórmula (3.4.9) e derivando em relação a $\phi$ e $\lambda$ obtemos:

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{sen}\psi\frac{\partial\psi}{\partial\phi} &= \cos\phi \; \operatorname{sen}\phi' - \operatorname{sen}\phi \cos\phi' \cos(\lambda'-\lambda) \\ -\operatorname{sen}\psi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} &= \cos\phi \; \cos\phi' \operatorname{sen}(\lambda'-\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.4)$$

considerando a fig. (3.4.1) vem:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\psi \; \cos\alpha &= \cos\phi \; \operatorname{sen}\phi' - \operatorname{sen}\phi \cos\phi' \cos(\lambda'-\lambda) \\ \operatorname{sen}\psi \; \operatorname{sen}\alpha &= \cos\phi' \operatorname{sen}(\lambda'-\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.5)$$

comparando a (3.5.4) com a (3.5.5), temos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} &= -\cos\alpha \\ \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} &= -\cos\phi \;\; \mathrm{sen}\;\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.6)$$

desde que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S(\psi)}{\partial\phi} &= \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\;\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\ \frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda} &= \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\;\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.7)$$

obtemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S(\psi)}{\partial\phi} &= \frac{-\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos\alpha \\ \frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda} &= \frac{-\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos\phi\;\mathrm{sen}\;\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.5.8)$$

derivando (N) dado pela (3.4.9) em relação a $\phi$ e $\lambda$ vem;

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial N}{\partial\phi} \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial\lambda} \end{matrix}\right\} = \frac{R}{4\pi\gamma_T}\int_{\lambda'}\int_{\phi'} \Delta g(\phi',\lambda') \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial S(\psi)}{\partial\phi} \\[2ex] \dfrac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda} \end{matrix}\right\} \cos\phi'\,d\phi'\,d\lambda' \qquad \ldots(3.5.9)$$

Substituindo as (3.5.8) na anterior, vem:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \xi\;(\phi,\;\lambda) \\[2ex] \eta\;(\phi,\;\lambda) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi\gamma_T}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi',\lambda') \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos\alpha \\[2ex] \dfrac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\,\mathrm{sen}\alpha \end{matrix}\right\} \cos\phi' d\phi'\,d\lambda'} \qquad \ldots(3.5.10)$$

estas expressões são denominadas FÓRMULAS DE VENING-MEINESZ, e surgiram pe la primeira vez na literatura geodésica mundial em 1928.

O termo $\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}$ é conhecido como função de Vening-Meinesz, é obtido a partir da derivação da função de Stokes (3.4.5), |47|:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi} = &- \frac{\cos(\psi/2)}{2\mathrm{sen}^2(\psi/2)} + 8\;\mathrm{sen}\psi - 6\;\cos\;(\psi/2) - 3\;\frac{1-\mathrm{sen}(\psi/2)}{\mathrm{sen}\;\psi} + \\ &+ 3\;\mathrm{sen}\psi\;\;\mathrm{Ln}\;\left|\mathrm{sen}\;(\psi/2) + \mathrm{sen}^2\;(\psi/2)\right| \end{aligned}} \qquad \ldots(3.5.11)$$

As restrições quanto à fórmula de Stokes aplicam-se às de Vening-Meinesz. A importância destas fórmulas para a geodésia justifica-se por sua simples inspeção — o desvio da vertical obtido a partir da fórmula (3.5.10) é **absoluto**, não dependendo do Sistema Geodésico.

Da mesma maneira que a (3.4.8), podemos expressar as componentes do desvio em termos das coordenadas polares sobre a esfera ($\psi$, $\alpha$):

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\xi\\ \\ \eta\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta g(\psi,\alpha)\begin{Bmatrix}\cos\alpha\\ \\ \operatorname{sen}\alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\operatorname{sen}\psi\, d\psi\, d\alpha}$$

...(3.5.12)

## 3.6 - O Co-Geóide

Anteriormente comentamos que a utilização da Fórmula de Stokes pressupõe a inexistência de massas perturbadoras em relação a superfície geoidal, surgindo em decorrência a necessidade das reduções gravimétricas.

Os processos de redução consistem basicamente na eliminação ou transferência de massas, sendo fácil compreender que ora ocorrerá uma alteração do potencial ora de massas ou de ambos.

As ondulações geoidais obtidas a partir da fórmula de Stokes com valores anômalos reduzidos, representam a separação entre o elipsóide e a superfície geoidal resultante do processo de regularização. Esta superfície limitante das massas regularizadas é que denominamos de CO-GEÓIDE.

A cada processo de redução corresponde um co-geóide, que dificilmente coincidirá com o geóide real.

Com estas considerações introduzimos um novo problema, a determinação do afastamento geóide-co-geóide, fig. (3.6.1). A correção a que nos conduz a solução deste problema denomina-se EFEITO INDIRETO ou EFEITO BOWIE, obtida a partir do gradiente da gravidade entre as suas superfícies, |42|.

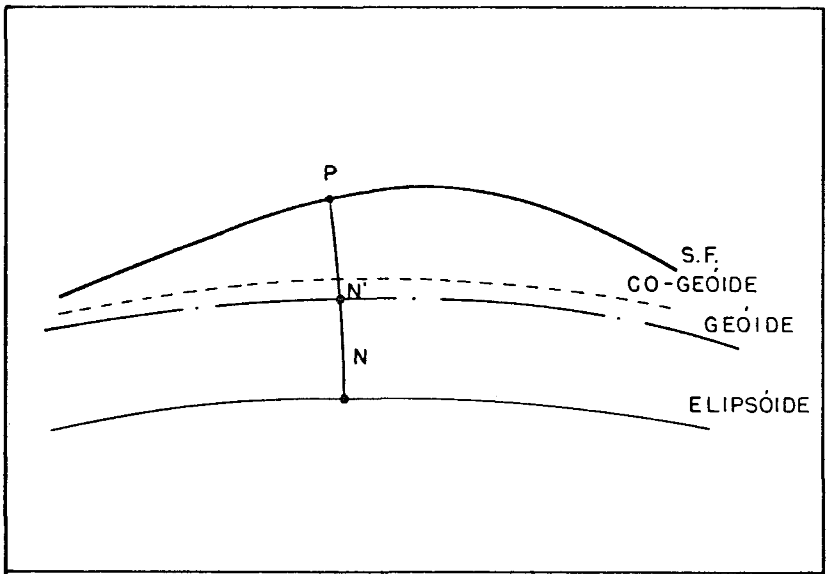



FIG.( 3.6-1 ) — O CO – GEÓIDE

Para analogia com a fórmula de BRUNS, (3.2.4), obtemos:

$$N' = \frac{\Delta W}{g} \qquad \ldots(3.6.1)$$

onde $\Delta W$ expressa a variação da potencial decorrente do processo redutivo.

A geo-ondulação é dada por: $N = N_S + N'$

onde Ns é a geo-ondulação calculada pela aplicação direta da integral de Stokes.

Da mesma maneira, o efeito indireto deve ser levado em conta no cálculo do desvio da vertical. Assim a (3.5.2) escreve-se:

$$\varepsilon = -\frac{\partial N}{\partial s} = -\frac{\partial Ns}{\partial s} - \frac{\partial N'}{\partial s} \qquad \ldots(3.6.2)$$

e de acordo com as (3.5.3):

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= -\frac{1}{R}\frac{\partial N'}{\partial \phi} \\ \eta' &= -\frac{1}{R\cos\phi}\frac{\partial N'}{\partial \lambda} \end{aligned}\right| \qquad \ldots(3.6.3)$$

correçõe que aplicadas ao desvio calculado pelas fórmulas de Vening-Meinesz nos conduzem às componentes referidas ao geóide, de maneira que:

$$\left(\begin{aligned} \xi &= \xi_v + \xi' \\ \eta &= \eta_v + \eta' \end{aligned}\right) \qquad \ldots(3.6.4)$$

em que $(\xi_v)$ e $(\eta_v)$ são as componentes calculadas pelas fórmulas de Vening-

Meinesz.

### 3.7 . Teorias Modernas

#### 3.7.1 - Generalidades

As ondulações geoidais e as componentes do desvio da vertical obtidas a partir das fórmulas de Stokes e Vening-Meinesz referem-se ao co-geóide, havendo a necessidade de introduzir o efeito indireto para reduzir os valores calculados ao geóide. A afirmativa de que o efeito indireto conduz a valores referidos ao geóide é válida dentro de certos limites de precisão, |48|, a rigor deveríamos considerar o efeito das massas existentes entre o geóide e o co-geóide, pois a aplicação das fórmulas anteriores pressupõe a inexistência de massas externas ao co-geóide; introduzimos desta maneira o conceito de efeito indireto secundário. Da mesma forma que o potencial gravitacional é alterado na redução ao geóide, o será na redução ao co-geóide, surgindo o denominado co-geóide secundário. Poderíamos prosseguir aplicando reduções e correções a cada novo passo, melhorando sensivelmente os resultados de cálculo, contudo nunca chegaríamos a valores definitivos.

Devido a estas limitações nada mais natural que se procurasse a redefinição do principal problema da Geodésia-Física, de maneira que a incógnita fundamental passasse a ser a superfície física da Terra e não mais o geóide. Dentro desta filosofia expressivos desenvolvimentos têm sido acrescentados à literatura geodésica,principalmente, pelos geodesistas russos.

A primeira solução, completa, do problema da determinação da superfície física, sem a introdução do geóide, foi estabelecida por N.D.MOISEEV, |82| em 1933, que obteve a equação integral definidora daquela superfície a partir das identidades de Green. A vantagem da utilização da superfície física fica demonstrada quando consideramos que os dados gravimétricos podem ser usados diretamente e nenhuma hipótese ou conjectura a respeito da distribuição interna de massas é necessária. Um tratamento mais efetivo dos conceitos firmados por Moiseev foi realizado por MALKINS em 1934 e MOLODENSKII em 1936.

A solução mais precisa da equação integral, introduzida por Moiseev, foi obtida por MOLODESNKII em 1945 |83|, a partir de algumas modificações introduzidas nas identidades de Green. A solução difere fundamentalmente das iniciais, onde o cálculo de uma superfície equipotencial interna tornava-se necessário, entretanto esta utiliza uma superfície auxiliar, intermediária, cognominada de **Quase-Geóide**.

Recentemente algumas tentativas têm sido realiza das para a obtenção da equação integral, destacando-se os trabalhos de LEVALLOIS, apresentado na Assembléia Geral da UGGI em Toronto no ano de 1957, e comentada em |75|. Levallois procurou estabelecer uma linha de desenvolvimento para a obtenção da equação integral, de maneira a tornar desnecessária a superfície intermediária. Infelizmente nenhuma metodologia para alcançar uma solução é apresentada, a não ser a sugestão de uma técnica de aproximações sucessivas.

ARNOLD |1| apresenta uma equação integral obtida a partir das identidades de Green sem qualquer modificação. Contudo os estudos referem-se ao geóide no sentido clássico, embora os resultados possam ser aplicados à superfície física, levando à soluções semelhantes às obtidas por MOLODENSKII. Outro trabalho que merece atenção especial é o de HIRVONEN, |52|, desenvolvido em 1960, com a introdução de um superfície intermediária cognominada de **Teluróide**, caracterizada por seu potencial ser idêntico ao potencial na superfície física (V=W), fig. 3.71-1(b)).

Os trabalhos citados anteriormente basearam-se em resolventes esféricas; outras soluções foram ensaiadas com resolventes elipsoidais, destacando-se o trabalho pioneiro |ZAGREBIN, D. - Stoke's formula for the case of an elipsoid level surface, **Bill de L'Tust. Astr. de L' acad de Sciences de la USSR.** N.52, 1955|, seguindo dos trabalhos de MONIN |87| em 1962 e BJERHAMMAR, |8| no mesmo ano; embora os trabalhos tenham sido apresentados independentemente os resultados são análogos. Bjerhammar demonstrou que a solução dada através da integral de Stokes terá uma precisão de ± 1m sobre qualquer geóide, portanto, perfeitamente compatível com a maioria das aplicações práticas.

O geóide é utilizado como superfície intermediária na redução das medidas lineares e angulares, executadas na superfície física, ao elipsóide de referência. Desde que se consiga determinar uma superfície de referência que mantenha relações geométricas e/ou físicas com a superfície terrestre e o elipsóide, poderemos abandonar o geóide como intermediária.

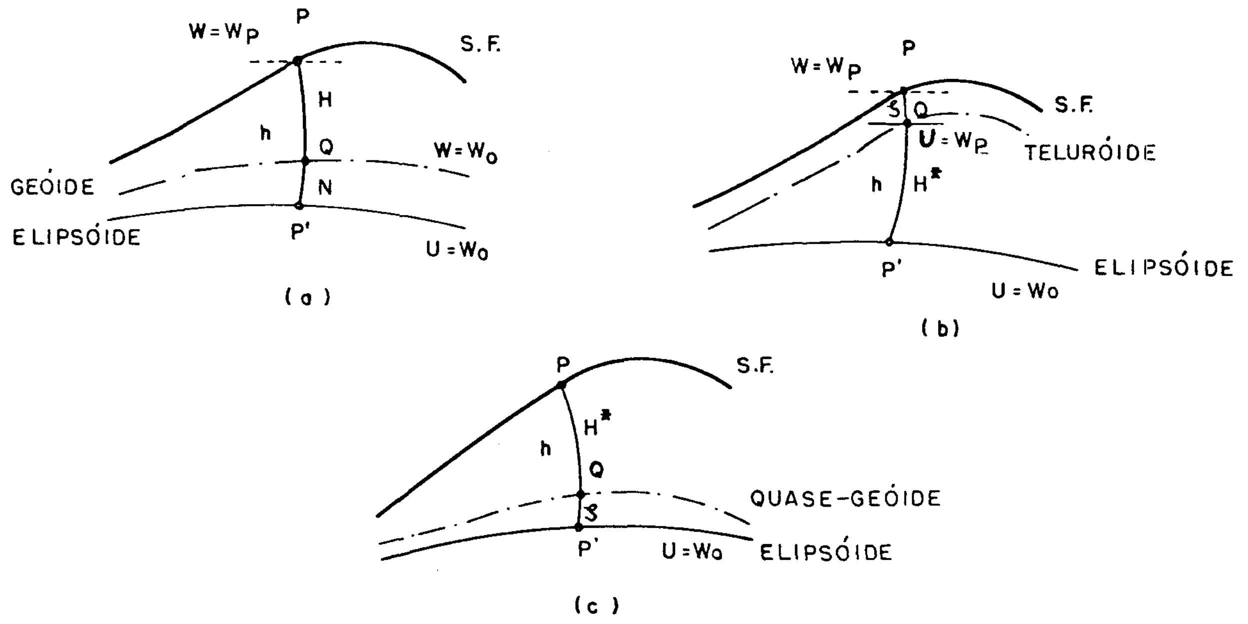



FIG.(3.71-1)— DIFERENTES SUPERFÍCIES INTERMEDIÁRIAS EM GEODÉSIA.

Na fig. (3.7.1.1) representamos as superfícies que tem servido como intermediárias nas reduções de dados geodésicos. Resumidamente o método geral de redução consiste em se projetar um ponto(P) pertencente à superfície física, ao longo da normal sobre a superfície de referência, em (P'). Tendo em vista as figuras podemos escrever as relações:

$$a) - h = H + N$$

$$b) - h = \zeta + H^*$$

$$c) - h = \zeta + H^* \qquad \ldots(3.7.1.1)$$

onde (h) é a altitude geométrica tomada a partir da superfície de referência geométrica, (H) é a altitude ortométrica, ($H^*$) a altitude normal e ($\zeta$) a anomalia de altitude, que nas teorias modernas substitui a ondulação geoidal (N).

A diferença conceitual básica entre as duas teorias está no fato de que as anomalias da gravidade ($\Delta g$), não são mais calculadas em relação à superfície do geóide, mas o são diretamente na superfície física:

$$\Delta g = g_p - \gamma_Q^*$$

onde $\gamma^*$ corresponde à gravidade no Teluróide ou no quase-geóide, conforme tomemos a altitude normal $H^*$.

HEISKANEN & MORITZ, apresentam na página 293 de

|48| a fórmula

$$\gamma^* = \gamma\left|1 - 2(1+f + m - 2f \text{ sen}^2 )\frac{H^*}{a} + 3(\frac{H^*}{a})^2\right| \qquad ...(3.7.1.2)$$

para o cálculo da gravidade teórica, onde $\gamma$ é a gravidade normal sobre o elipsóide de achatamento (f) e semi-eixo maior (a).

De acordo com a fórmula de BRUNS, deduzida no item 3.2 podemos escrever:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma^*}$$

sendo (T) o potencial perturbador referido à superfície física.

Com estas idéias é de se esperar que ($\zeta$) seja dada por uma fórmula análoga a de Stokes; como o Teluróide e o Quase - geóide não são superfícies geométricas regulares, a expressão para ($\zeta$) não é tão simples; contudo o problema pode ser resolvido por iterações em que a fórmula de Stokes corresponde a uma primeira aproximação.

### 3.7.2 - A Teoria de Molodenskii

#### 3.7.2.1 - Anomalias de Altitude

O primeiro passo para o estabelecimento da equação integral da geodésia física consiste em se aplicar a terceira identidade de GREEN, |97|, ao potencial gravitacional, que nos permite escrever |37| e |48, pág. 296|.

$$-2\pi W + \iint_S \left| W \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{\ell}) - \frac{1}{\ell}\frac{\partial W}{\partial n}\right| ds + 2\pi\ \omega^2(x^2 + y^2) + 2\ \omega^2 \iiint_{\text{TERRA}} \frac{dv}{\ell'} = o \qquad ...(3.7.2.1.1)$$

onde (S) é a superfície física da Terra, ($\ell$) a distância entre um ponto fixo P, ao qual são referidos o primeiro e terceiro termos, e um elemento de superfície (ds), (n) é a normal externa à superfície física em ds, ($\partial W/\partial n$) é a componente do vetor gravidade, (z) é o eixo de rotação da Terra, ($\omega$) é a velocidade angular de rotação e ($\ell'$) é a distância de P ao elemento de volume (dv).

A expressão (3.7.2.1.1) representa a formulação matemática do problema da determinação gravimétrica da superfície terrestre, ou seja do problema de contorno da geodésia física. Nesta fórmula as quantidades (W) e ($\partial W/\partial n$) são obtidas gravimetricamente e ($\ell$), ($\ell'$), (x) e (y) são determinadas para (S) através de medidas astronômicas. Concluindo, podemos ver que esta equação de alguma maneira pode ser resolvida de modo a nos fornecer (S); sua única incógnita. Vemos que o problema reduziu-se ao cálculo da superfície física da Terra a partir de elementos geométricos (determinados astronomicamente) e físicos (o gepotencial e o vetor gravidade).

A equação básica (3.7.2.1.1) pode ser colocada na forma:

$$F\ (S,\ W,\ \frac{\partial W}{\partial n}) = 0 \qquad \ldots(3.7.2.1.2)$$

e teremos que resolvê-la para (S).

Lamentavelmente esta é uma **equação integral não linear** e não pode ser resolvida diretamente. Entretanto podemos aplicar qualquer processo de linearização a partir de valores aproximados; neste caminho o potencial W é substituído pelo potencial $W_o$ e a solução aproximada de (S) será o quase-geóide.

Tem sido a preocupação dos geodesistas nos últimos anos, a obtenção de uma equação integral linear que expresse a possibilidade de se determinar a forma da Terra. Destacamos os trabalhos de KOCH, |60|, |62|, MATHER, |80| e de GRAAF-HUNTER, |37|, em que a equação é estabelecida a partir das identidades de Green.Molodenskii |86| e KOCH, |64| procuraram o desenvolvimento a partir das características do potencial de uma simples camada material. Neste trabalho seguiremos o desenvolvimento de |86| com as modificações introduzidas em |61|.

Se considerarmos o potencial perturbador expresso em termos do potencial de uma simples camada material de densidade ($\mu$), de acordo com |97| podemos escrever:

$$T = \int_Q\int \frac{\mu}{r}\, dQ \qquad \ldots(3.7.2.1.3)$$

onde $\int_Q\int$ indica que o processo de integração de desenvolve na superfície do Quase-geóide, (r) é a distância de um ponto fixo (P) a um variável (Q) que percorre a superfície do Quase-geóide (Q).

Diferenciando a (3.7.2.1.3) numa direção qualquer (s) teremos:

$$\frac{\partial T\ (P)}{\partial s} = \int_Q\int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) \mu\ d\ Q - 2\ \pi\mu \cos\beta \qquad \ldots(3.7.2.1.4)$$

em que ($\beta$) é o ângulo entre a direção arbitrária e a normal (n) à superfície (Q) em P. Podemos relacionar as anomalias da gravidade ao potencial perturbador pela condição de contorno (3.2.13), em que temos uma esfera como superfície de referência, sendo o raio (R) e considerando a altitude normal H*:

$$-\ \Delta g = \frac{\partial T}{\partial H^*} + \frac{2T}{(R+H^*)} \qquad \ldots(3.7.2.1.5)$$

Substituindo a anterior e a (3.7.2.1.3) na (3.7.2.1.4) teremos:

$$\boxed{2\pi\mu \cos \beta - \iint_Q \left| \frac{\partial}{\partial H^*}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2}{r(R+H^*)} \right| \mu \, dQ = \Delta g} \qquad \ldots(3.7.2.1.6)$$

expressão conhecida como equação integral de Molodesnkii para o potencial perturbador, |86, pg. 104|. A vantagem desta equação é que ela envolve somente anomalias da gravidade; nenhuma consideração quanto às componentes do desvio da vertical foi introduzida.

Podemos escrever a equação (3.7.2.1.6) numa outra forma, desde que consideremos a condição de contorno dada por:

$$- \frac{\partial T}{\partial hp} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h_p} T = \Delta g \qquad \ldots(3.7.2.1.7)$$

realizando a substituição da anterior e a (3.7.2.1.3) em (3.7.2.1.4) vem:

$$2\pi \cos \beta - \iint_Q \left| \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\gamma p} \frac{\partial \gamma}{\partial h_p} \frac{1}{r} \right| \mu dQ = \Delta g \qquad \ldots(3.7.2.1.8)$$

em que $h_p$ é a altitude geométrica do ponto P.

A equação (3.7.2.1.8) é uma equação integral linear de segunda espécie; da mesma maneira que a (3.7.2.1.6) suas soluções podem ser obtidas a partir de qualquer método de resolução de equações integrais, |76|. Utilizaremos o método das aproximações sucessivas.

Procuremos escrever a (3.7.2.1.8) como uma aproximação esférica, o que significa em tomar o elipsóide de referência como uma esfera e não o Quase-geóide.

Considerando a fig. (3.7.2.1.1) vemos que os raios vetores de P e dQ serão:

$$\left. \begin{aligned} r_p &= R + h_p \\ \ell &= R + h \end{aligned} \right\} \qquad \ldots(3.7.2.1.9)$$

onde (R) é o raio médio para a Terra e (h) a altitude geométrica ou dentro do mesmo grau de aproximação a altitude ortométrica ou mesmo a altitude normal.

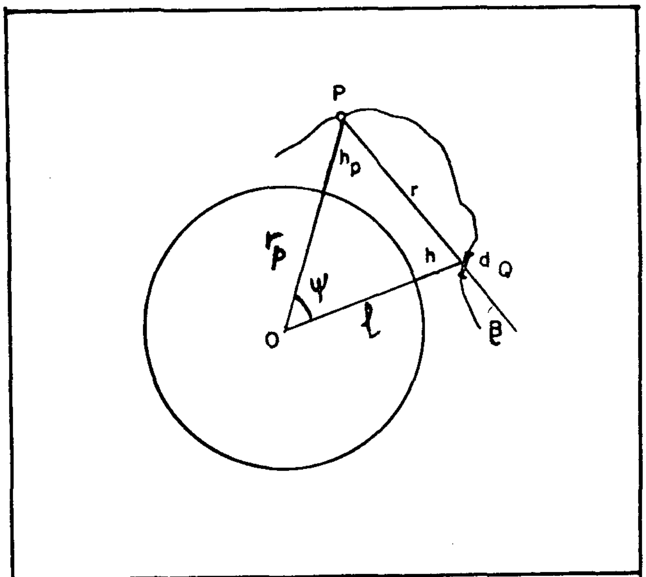



Fig.(3.721-1)___ APROXIMAÇÃO ESFÉRICA

Considerando o Δ OPdQ vem:

$$r = \sqrt{r_p^2 + \ell^2 - 2r_p\, \ell \cos\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial hp}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r_p}\left(\frac{1}{r}\right) = - \frac{r_p - \ell\cos\psi}{r^3}$$

$$\frac{1}{\gamma_p}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_p}\right) = \frac{2}{r_p} \qquad \ldots(3.7.2.1.10)$$

Substituindo na (3.7.2.1.7) vem:

$$\frac{\partial}{\partial h_p}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\gamma_p}\,\frac{\partial\gamma}{\partial h_p}\,\frac{1}{r} = \frac{3}{2r_p r} + \frac{\ell^2 - r^2_p}{2r_p\, r^3}$$

Desta maneira podemos escrever a (3.7.2.1.8) na forma:

$$2\pi\mu\cos\beta \iint_Q \left(\frac{3}{2\, r_p r} + \frac{\ell^2 - r^2_p}{2\, r_p\, r^3}\right)\mu\, dQ = \Delta g \qquad \ldots(3.7.2.1.12)$$

Pela fig. (3.7.2.1-1) vemos que a projeção de dQ no **plano do horizonte** (prolongamento de r) é dada por (dQ cos β), como ($\ell$) é o raio vetor de dQ e considerando dσ como um elemento de ângulo sólido, |97|, podemos escrever ($\ell^2 d\sigma$), com isso:

$$dQ = \ell^2 \sec\beta\, d\sigma \qquad \ldots(3.7.2.1.13)$$

Substituindo em (3.7.2.1.12) vem:

$$2\pi\mu\cos\beta - \iint_\sigma \left(\frac{3}{2r} + \frac{\ell^2 - r_p^2}{2\, r^3}\right)\frac{\ell^2}{r_p}\sec\beta\, d\sigma = \Delta g \qquad \ldots(3.7.2.1.14)$$

Se $\mu$ é conhecido então T e $\zeta$ podem ser determinados pela (3.7.2.1.13) e podemos escrever:

$$T = \gamma\,\zeta = \int_\sigma\int \frac{\mu}{r}\,\ell^2 \sec\beta\, d\sigma \qquad \ldots(3.7.2.1.15)$$

Consideremos agora uma outra aproximação, a equação (3.7.2.1.14) aplicada ao geóide normalizado (livre de massas perturbadoras), temos:

$$h = h_p = \beta = 0$$

$$\ell = r_p = R$$

e a equação integral escreve-se:

$$2\pi\mu - \frac{3R}{2}\int_\sigma\int \frac{\mu}{ro}\, d\sigma = \Delta g \qquad \ldots(3.7.2.1.16)$$

onde

$$ro = 2R \operatorname{sen}\frac{\psi}{2} \qquad \ldots(3.7.2.1.17)$$

T e N são agora expressos em termos de $\mu$ e pela (3.7.2.1.15) temos:

$$T = \gamma_T N = R^2 \int_\sigma\int \frac{\mu}{ro}\, d\sigma \qquad \ldots(3.7.2.1.18)$$

onde $\gamma_T$ é o valor médio da gravidade para a Terra. Substituindo a anterior na (3.7.2.1.16) vem:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta g + \frac{3}{2R}\,T\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta g + \frac{3\gamma T}{2R}\,N\right) \qquad \ldots(3.7.2.1.19)$$

Como N, na aproximação esférica, é dado pela Integral de Stokes, temos:

$$2\pi\mu = \Delta g + \frac{3}{8\pi}\int_\sigma\int \Delta g\, S(\psi)\, d\sigma \qquad \ldots(3.7.2.1.20)$$

Como esta fórmula representa $\mu$ em termos de anomalias da gravidade ela será uma solução da (3.7.2.1.16). Explicitando (T) na (3.7.2.1.19) vem:

$$T = \frac{2R}{3}\,(2\pi\mu - \Delta g) \qquad \ldots(3.7.2.1.21)$$

considerando a (3.7.2.1.9)

$$\ell = R + h = R\left(1 + \frac{h}{R}\right) \qquad \ldots(3.7.2.1.22)$$

vemos que ($\ell$) difere de (R) por uma quantidade menor que $10^{-3}$, portanto menor que o erro introduzido pela aproximação esférica. Da mesma maneira te mos r em relação a R:

$$\frac{\ell^2}{r_p} = \frac{(R+h)^2}{(R+h_p)} \cong \frac{R^2}{R} = R \qquad \ldots(3.7.2.1.23)$$

$$\ell^2 - r^2_p = (h - h_p)\ (\ell + r_p) = 2R(h-hp)$$

Substituindo as relações anteriores na (3.7.2.1.14) vem:

$$2\pi\mu \cos \beta - \iint_\sigma \left(\frac{3R}{2r} + \frac{R^2(h-{}^hP)}{r^3}\right)\sec \beta \, d\sigma = \Delta g$$

$$\ldots(3.7.2.1.24)$$

Podemos também simplificar (r), consideremos a (3.4.7.2.1.10-a)

$$r^2 = \ell^2 + r^2_p - 2r_p \ \ell \cos \psi$$

$$r^2 = (R + h_p)^2 + (R + h)^2 - 2(R + h_p)(R + h) \cos \psi$$

$$r^2 = 4R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}\left(1 + \frac{h+h_p}{R} + \frac{h_p h}{R^2}\right) + (h - h_p)^2$$

tendo em vista a (3.7.2.1.17) vem:

$$r^2 = ro^2 + (h - h_p)^2$$

ou

$$r = ro \sqrt{1 + \left(\frac{(h-hP)}{ro}\right)^2} \qquad \ldots(3.7.2.1.25)$$

com estas considerações estamos habilitados a resolver a equação integral (3.7.2.1.24). O princípio básico é utilizar uma expansão em série de potências das quantidades

$$\frac{h - hp}{ro} \quad \text{e } tg\beta \qquad \ldots(3.7.2.1.26)$$

A solução da (3.7.2.1.24) será dada por aproximações sucessivas, primeiramente consideremos as quantidades (3.7.2.1.26) desprezíveis, de maneira que a (3.7.2.1.24) escreve-se:

$$2\pi\mu_o - \frac{3R}{2} \iint_\sigma \frac{\mu_O}{ro} \, d\sigma = G_o \qquad \ldots(3.7.2.1.27)$$

onde substituímos $\Delta g$ por $G_o$. Se considerarmos esta aproximação como sendo de ordem zero em $\mu$, teremos:

$$2\pi\mu_o = G_o + \frac{3R}{2} \iint_\sigma \frac{\mu o}{ro} \, d\sigma \qquad \ldots(3.7.2.1.28)$$

esta equação é análoga a (3.7.2.1.16) cuja solução é a (3.7.2.1.20), então por analogia:

$$\boxed{2\pi\mu_o = G_o + \frac{3}{8\pi}\iint_\sigma G_o\, S\,(\psi)\, d\sigma} \qquad ...(3.7.2.1.29)$$

Se limitarmos essa aproximação à primeira ordem, vem:

$$\mu \cong \mu_o + \mu_1$$

portanto, resta-nos encontrar uma solução par $\mu_1$, para tal desenvolvamos as quantidades (3.7.2.1.26) em série:

$$r = ro\sqrt{1 + (\frac{h-h_p}{ro})^2} = ro\left|1 + \frac{1}{2}\,(\frac{h - h_p}{ro})^2 + \ldots\right|$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\,\beta}} = 1\,\frac{1}{2}\,tg^2\,\beta + \ldots$$

negligenciando os termos quádricos (característica da aproximação de segunda ordem) temos:

$$r \cong ro$$

$$\cos\beta \cong \sec\beta \cong 1$$

e a (3.7.2.1.24) escreve-se:

$$2\pi\,(\mu_o + \mu_1) - \frac{3R}{2}\iint_\sigma \frac{\mu_o + \mu_1}{ro}\,d\sigma - R^2\iint_\sigma \frac{h - h_p}{ro^3}\,(\mu_o + \mu_1)\,d\sigma = \Delta g \qquad ...(3.7.2.1.30)$$

desprezando os quadrados e produtos cruzados de quantidades de primeira ordem vem:

$$2\pi\,\mu_o - \frac{3R}{2}\iint_\sigma \frac{\mu_o}{ro}\,d\sigma + 2\pi\,\mu_1 - \frac{3R}{2}\iint_\sigma \frac{\mu_1}{ro}\,d\sigma - R^2\iint_\sigma \frac{h-h_p}{ro^3}\,\mu_o\,d\sigma = G_o \qquad ...(3.7.2.1.31)$$

comparando com a (3.7.2.1.28) vem:

$$2\pi\mu_1 - \frac{3R}{2}\iint_\sigma \frac{\mu_1}{ro}\,d\sigma - R^2\iint_\sigma \frac{h-hp}{ro^3}\,\mu_o\,d\sigma = 0 \qquad ...(3.7.2.1.32)$$

como somente os dois primeiros termos dependem de $\mu$, podemos escrever:

$$2\pi\mu_1 - \frac{3R}{2}\iint_\sigma \frac{\mu_1}{ro}\,d\sigma = G_1 \qquad ...(3.7.2.1.33)$$

cuja solução é da forma (3.7.2.1.20), donde:

$$\boxed{2\pi\mu_1 = G_1 + \frac{3}{8\pi}\iint_\sigma G_1\,S\,(\psi)\,d\sigma} \qquad ...(3.7.2.1.34)$$

e $G_1$ é dado pelos termos remanescentes da (3.7.2.1.32):

$$\boxed{G_1 = R^2 \iint_\sigma \frac{h - h_p}{ro^3} \mu_o \, d\sigma}$$

...(3.7.2.1.35)

Agora estamos em condições de estruturar uma solução para o potencial perturbador (T) em termos de $\mu$. Consideremos a solução (3.7.2.1.15) obtida para uma aproximação esférica da superfície de referência e fazendo $\ell \cong R$:

$$T = R^2 \iint_\sigma \frac{\mu}{r} \sec \beta \, d\sigma$$

...(3.7.2.1.36)

ou

$$T = R^2 \iint_\sigma \frac{\mu_o}{r} d\sigma + R^2 \iint \frac{\mu_1}{r} d\sigma + \ldots = T_o + T_1 + \ldots$$

...(3.7.2.1.37)

Desde que $\mu o$ e $\mu_1$ satisfaçam equações do tipo da (3.7.2.1.16) e se relacionam a To e $T_1$ através de equações da forma (3.7.2.1.18) por aplicação da (3.7.2.1.21) obtemos:

$$To = \frac{2R}{3} (3\pi\mu_o - G_o)$$

$$T_1 = \frac{2R}{3} (2\pi\mu_1 - G_1)$$

...(3.7.2.1.38)

inserindo os valores dados nas (3.7.2.1.29) e (3.7.2.1.34) vem:

$$To = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma Go \; S\,(\psi) \, d\sigma$$

...(3.7.2.1.39)

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma G_1 \; S\,(\psi) \, d\sigma$$

Pela fórmula de Bruns, $\zeta = T/\gamma$, vem:

$$\boxed{\zeta = \zeta o + \zeta_1 = \frac{R}{4\pi\gamma T} \iint_\sigma \Delta g \; S\,(\psi) \, d\gamma + \frac{R}{4\pi\gamma T} \iint_\sigma G_1 \; S\,(\psi) \, d\sigma}$$

...(3.7.2.1.40)

onde $G_1$ é dado pela (3.7.2.1.35), substituindo Go pela (3.7.2.1.29) temos:

$$\boxed{G = \frac{R^2}{2\pi} \iint_\sigma \frac{h - h_p}{ro^3} \left(\Delta g + \frac{3\gamma T}{2R} \zeta o\right) d\sigma}$$

...(3.7.2.1.41)

A equação (3.7.2.1.40) é conhecida como **fórmula de MOLODENSKII para o cálculo das anomalias de altitude**, em substituição às geo-ondulações (N).

Observemos que na (3.7.2.1.40) o termo $\zeta o$ é dado pela fórmula de Stokes, sofrendo um refinamento através da segunda parcela, função de $G_1$ dada pela (3.7.2.1.41)

### 3.7.2.2 - O Desvio da Vertical

Anteriormente deduzimos as expressões para as componentes do desvio da vertical em relação ao geóide, como sendo dadas por:

$$\xi = - \frac{\partial N}{\partial s_\phi} = - \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi} \qquad \text{...(3.7.2.2.1)}$$

$$N = - \frac{\partial N}{\partial s_\lambda} = - \frac{1}{R \cos\phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}$$

da mesma maneira estas compnentes na superfície da Terra serão dadas por:

$$\xi = - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \qquad \text{...(3.7.2.2.2)}$$

$$N = - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda}$$

Convém ressaltar que a diferenciação agora ocorre segundo uma superfície de nível (W=WP) passante pelo ponto de cálculo P. Por outro lado na resolução da equação de Molodesnkii obtivemos as anomalias de altitude ao longo da superfície física da Terra (S).

Supondo que (S) é dado por uma expressão da forma:

$$S = W\ (\phi, \lambda) \qquad \text{...(3.7.2.2.3)}$$

que é o potencial da superfície física, em termos das coordenadas geodésicas ($\phi$) e ($\lambda$), as anomalias de altitude ao longo de S podem ser expressas por:

$$\zeta = \zeta\ (\phi, \lambda, W) \qquad \text{...(3.7.2.2.4)}$$

derivando em relação a $\phi$ ao longo de (S) vem:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)_S = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)_{W=WP} + \frac{\partial \zeta}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \phi} \qquad \text{...(3.7.2.2.5)}$$

como ($\partial W/\partial h = - g$) podemos escrever:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)_S = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)_{W=WP} + \frac{\partial \zeta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \phi}$$

ou

$$\left(\frac{\partial \zeta}{}\right)_{W=WP} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)_S - \frac{\partial \zeta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \phi}$$

$$\text{...(3.7.2.2.6)}$$

a derivada parcial $\frac{\partial \zeta}{\partial h}$ é dada por:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial h} = - \frac{\Delta g}{\gamma} \qquad ...(3.7.2.2.7)$$

e como

$$\frac{1}{R} \ \frac{\partial h}{\partial \phi} = \frac{\partial h}{\partial S_\phi} = \text{tg } \beta_1 \qquad ...(3.7.2.2.8)$$

onde $\beta_1$ é a inclinação em relação ao horizonte do perfil Norte-Sul do terreno, vem:

$$(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi})_{W=WP} = (\frac{\partial \zeta}{\partial \phi})_S + R \frac{\Delta g}{\gamma} \text{ tg } \beta_1 \qquad ...(3.7.2.2.9)$$

considerando as (3.7.2.2.2) vem:

$$\xi = - (\frac{1}{R} \ \frac{\partial \zeta}{\partial \phi})_S - \frac{\Delta g}{\gamma} \text{ tg } \beta_1$$

$$\eta = - (\frac{1}{R \cos\phi} \ \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda})_S - \frac{\Delta g}{\gamma} \text{ tg } \beta_2$$

...(3.7.2.2.10)

em que $\beta_2$ é definido como $\beta_1$ para o perfil Leste-Oeste, fig.(3.7.2.2.1)

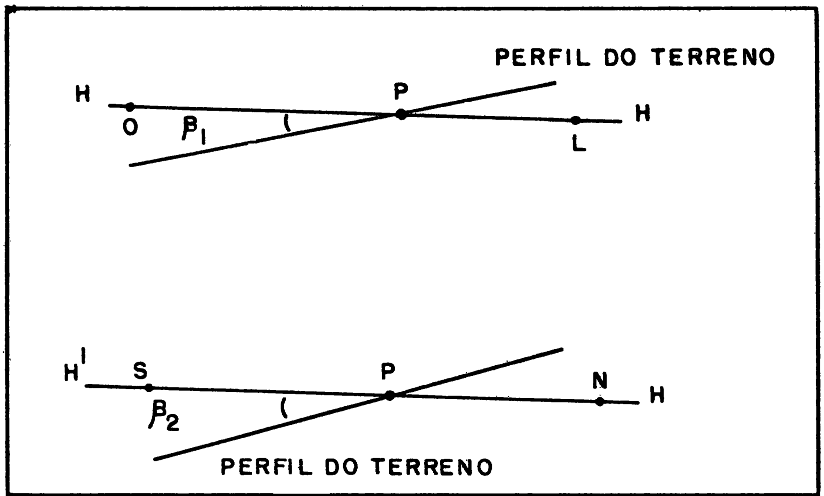



FIG.(3.722-1) — DECLIVES: N-S E L-O

Considerando as anomalias de altitude dadas pela (3.7.2.1.40), em notação abreviada:

$$\zeta = \frac{R}{4 \pi \gamma_T} \int_\sigma \int (\Delta g + G_1) \ S \ (\psi) \ d\sigma$$

...(3.7.2.2.11)

A derivação processa-se analogamente à obtenção das fórmulas de Vening-Meinesz, de maneira que considerando nas fórmulas do tópico (3.5) ($\Delta g$) como ($\Delta g + G_1$), obtemos:

| |
|---|
| $\xi = - \frac{1}{4 \pi \gamma_T} \int\int_\sigma (\Delta g + G_1) \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \cos \alpha \, d\sigma - \frac{\Delta g}{\gamma} \text{tg } \beta_1$ |
| $N = - \frac{1}{4 \pi \gamma_T} \int\int_\sigma (\Delta g + G_1) \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \text{sen } \alpha \, d\sigma - \frac{\Delta g}{\gamma} \text{tg } \beta_2$ |

...(3.7.2.2.12)

que são as expressões de Molodenskii para o cálculo das componentes do desvio da vertical |110|, agora referidas à superfície física e não mais ao geóide.

### 3.8 - O Geóide e as Anomalias de Altitude

Vimos que as anomalias de altitude nos conduzem à determinação da superfície física da Terra da mesma maneira que podemos orientar a vertical nesta, através das componentes do desvio a partir das anomalias referidas à superfície terrestre. Por outro lado,o nivelamento geométrico possibilita o cálculo das altitudes ortométricas, que quando plotadas sobre à vertical, a partir da superfície terrestre, nos conduzem ao geóide com uma simples inversão de sinais. Estas considerações levam-nos a pensar numa associação das teorias clássica e moderna.

Considerando a fig. (3.7.1.1(a)) podemos escrever:

$$h = H + N$$

...(3.8.1)

sendo h a altitude geométrica contada a partir do elipsóide de referência. De acordo com a teoria de Molodenskii podemos escrever:

$$h = H^* + \zeta$$

...(3.8.2)

comparando as expressões anteriores temos:

$$N - \zeta = H^* - H$$

...(3.8.3)

Concluímos que a diferença existente entre as geondulações e as anomalias de altitude são idênticas àquelas entre as altitudes ortométrica e normal.

Pela teoria das altitudes científicas, |6|, podemos escrever:

$$H = \frac{C_p}{\overline{g}} \quad e \quad H^* = \frac{C_p}{\overline{\gamma}}$$

...(3.8.4)

em que $C_p$ é a cota ou número geopotencial; $\overline{g}$ é o valor médio da gravidade ao longo da vertical; $\overline{\gamma}$ é o valor médio da gravidade teórica, ao longo da normal, tomado entre o elipsóide e o quase-geóide.

Subtraindo H* de H e eliminando $C_p$ vem:

$$H - H^* = \frac{\overline{g} - \overline{\gamma}}{\overline{\gamma}} H \qquad ...(3.8.5)$$

comparando a anterior com a (3.8.3) vem:

$$N = \zeta + \frac{\overline{g} - \overline{\gamma}}{\overline{\gamma}} H \qquad ...(3.8.6)$$

considerando ($\zeta$) como dado pela (3.7.2.1.40) vem:

$$\boxed{N = \frac{R}{4\pi\gamma_T} \iint_\sigma (\Delta g + G_1) S(\psi)\, d\sigma + \frac{\overline{g} - \overline{\gamma}}{\overline{\gamma}} H} \qquad ...(3.8.7)$$

Podemos notar que a fórmula (3.8.7) corresponde à aplicação da integral de Stokes, com anomalias referidas à superfície física e não ao geóide, acompanhada de dois termos corretivos; um em função de $G_1$ que corresponde a uma correção ao efeito da topografia como dado pela (3.7.2.1.41); o outro $\overline{g}$ e $\overline{\gamma}$ corresponde a separação entre o geóide e o quase-geóide.

O cálculo de $\overline{g}$ e $\gamma$ e realizado através das fórmulas, segundo |6|:

$$\overline{g} = g + 0{,}0424\ H \qquad ...(3.8.8)$$

onde g e H referem-se ao ponto de cálculo P e o termo constante(0,0424) corresponde a densidade padrão de 2,67 g/cm³.

$$\overline{\gamma} = \gamma \left| 1 - (1+f+m-2\ f\ \text{sen}^2\ \phi)\ \frac{H^*}{a} + \frac{H^*}{a^2} \right| \qquad ...(3.8.9)$$

em que $\gamma$ é tomado segundo o elipsóide de referência, dado por a e f; no ponto de cálculo de latitude $\phi$ com altitude normal H*. (m) tem o mesmo sentido do capítulo (2) relação entre a força centrífuga no equador e a gravidade equatorial.

Para o elipsóide de Hayford temos:

a = 6.378 388 m

f = 1/297

m = 0,00 344 986

A principal vantagem deste método para a determinação das geondulações (N) é que a densidade das massas acima do geóide entra indiretamente como um efeito sobre a altitude ortométrica do ponto de cálculo.

Em conseqüência, as geondulações obtidas pelo método são tão precisas quanto as altitudes ortométricas, HEISKANEN & MORITZ |48, pg. 327|.

### 3.9 - Tratamento Prático das Equações Fundamentais

A integral de Stokes e as fórmulas de Vening-Meinesz possibilitam o cálculo das geondulações e componentes do desvio da vertical a partir de valores de contorno sobre a superfície do geóide. A principal vantagem desta formulação vincula-se ao fato do geóide ser uma superfície definível fisicamente, materializada pelo nível dos mares em repouso e suposta prolongada analiticamente sob os continentes, permitindo a elaboração de modelos e formulação de correlações geométricas na resolução dos problemas geodésicos de caráter aplicado. Sua maior desvantagem está relacionada ao desconhecimento da lei de variação das densidades crustais, acarretando uma certa imprecisão nos métodos de regularização utilizados na transformação dos valores de contorno para a superfície geoidal. Esta imprecisão não chega afetar a colimação da maioria dos objetivos práticos da geodésia.

A teoria de Molodenskii, utilizando valores de contorno sobre a superfície física, independe da distribuição interna de massas. A possibilidade de se comparar valores obtidos sobre e externamente à face da Terra constitui sua principal vantagem. A formulação de modelos e correlações é por demais complexa e nem sempre atingível.

A decisão de que teoria deve ser utilizada, dependerá dos objetivos e precisões pré-fixadas para os resultados finais. No caso da definição de um sistema geodésico, em caráter preliminar, qualquer das teorias poderá ser utilizada, a margem de imprecisão será semelhante e estará condicionada ao algorítimo de cálculo utilizado.

Neste trabalho apresentaremos resultados obtidos a parti da formulação clássica. Os procedimentos de cálculo poderão ser adaptados à formulação de Molodenskii, mediante a introdução de valores anômalos referidos à superfície física. Ao leitor interessado recomendamos |13|, |86| e |110| dentre outras que tratam os aspectos práticos das fórmulas envolvidas na teoria de Molodenskii.

#### 3.9.1 - Divisão em Zonas de Cálculo

As fórmulas fundamentais pressupõem os processos de integração realizando-se sobre toda a Terra. Como longe estamos de conhecer integralmente o campo gravitacional terrestre (adendo 7) e diante da impossibilidade de obtê-lo continuamente a partir de medidas terrestres, torna-se necessária a introdução de algorítimos discretos que possibilitem o cálculo preciso das integrais.

Em geral os algorítimos de cálculo aproximam os valores das integrais numa região em torno do ponto em que estamos calculando as quantidades fundamentais, a partir de levantamentos gravimétricos intensivos. As anomalias das regiões distantes do globo são compactadas em blocos e seus efeitos calculados por processos aproximados.

O uso de algorítimos que pressupõem a divisão da superfície terrestre em regiões é garantido pelo comportamento das funções S ($\psi$) e S' ($\psi$).

Considerando as fórmulas (3.4.5) e (3.5.4) podemos ver que (csc $\psi/2$) tende ao infinito a medida que nos aproximamos do ponto de cálculo ($\psi \to 0$). Este comportamento implica em efeitos menores, sobre as quantidades fundamentais, a medida que nos afastamos do ponto de cálculo. Conseqüentemente as anomalias gravimétricas em regiões distantes poderão ser menos precisas que as das zonas mais próximas.

A prática tem demonstrado que a partir de valores mais ou menos elevados de ($\psi$) o efeito das zonas distantes varia muito pouco podendo em conseqüência serem tomados como constantes em todos os pontos de um elemento finito de área sobre a superfície terrestre. As contribuições poderão ser definidas para os limites desta área elementar e o efeito médio poderá ser estimado por simples interpolação.

Iremos considerar a Terra dividida em três zonas de cálculo; a primeira imediatamente vizinha ao ponto de cálculo, onde as funções esféricas S ($\psi$) e S' ($\psi$) são substituídas convenientemente por uma aproximação plana que elimine a influência dos valores elevados de(csc$\psi/2$). A segunda é denominada de zona próxima e estende-se dos limites da primeira até a transição para a terceira que envolve o restante do globo.

### 3.9.2 - Efeito das Zonas Distantes

Nos cálculos numéricos as integrais (3.4.9) e (3.5.10) são substituídas pelas somas:

$$N = \frac{R}{4\,\pi\gamma_T} \sum_{\phi-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \Delta g_m(\phi,\,\lambda) S\left|\psi(\phi,\,\lambda)\right| Q(\phi,\,\lambda) \qquad \text{...(3.9.2.1)}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \\ N'' \end{Bmatrix} = \frac{\rho''}{4\pi\gamma_T} \sum_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \Delta g_m(\phi,\lambda)\, S'\left|\psi(\phi,\,\lambda)\right| \begin{Bmatrix} \cos\alpha(\phi,\lambda) \\ \\ \operatorname{sen}\alpha(\phi,\lambda) \end{Bmatrix} Q\;(\phi,\,\lambda) \qquad \text{...(3.9.2.2)}$$

onde Q ($\phi$, $\lambda$) é um elemento de superfície que tem para valor anômalo médio $\Delta g_m(\phi,\,\lambda)$ e dimensões $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$.

A substituição das integrais pelas somatórias é perfeitamente justificada já que a continuidade do campo gravitacional é substituída pela distribuição discreta de valores anômalos médios.

O uso de anomalias médias e valores médios das funções S($\psi$) e S'($\psi$) causa certos erros nos resultados finais. O erro será função das dimensões da área para a qual os valores médios são tomados e da distância ao ponto de cálculo; contudo o erro final não deve ser atribuído exclusivamente ao processo numérico. A falta de informações gravimétricas contribui sensivelmente para a imprecisão dos resultados finais. UOTILLA|117| considera o método suficientemente preciso se o erro causado pelo processo numérico não for maior que ± 1m, para o cálculo das geondulações e ± 0,5" para o das componentes do desvio. Desde que existem alguns milhares de elementos de superfície, cada um contribuindo com a mesma parcela para os resultados, a precisão com que cada contribuição será calculada é da ordem de ± 1cm e ± 0,1", |51|.

Na prática é comum admitirmos elementos de superfície representados por trapézios esféricos de 1º x 1º e de 5º x 5º. Este procedimento permite a elaboração de cartas mundiais com valores anômalos médios, evitando-se a manipulação de dados gravimétricos em escala mundial para cada ponto de cálculo. O material mais atualizado, e recentemente distribuído à comunidade mundial, foi catalogado pelo ACIC em |120| para trapézios de 1º x 1º e pelo BGI em |115| para 5º x 5º.

A análise estatística seletiva de precisões x dimensões realizada por HIRVONEN |51|,definindo os trapézios de 1º x 1º e de 5º x 5º como de uso ideal em geodésia, tem sido aceita mundialmente. O mais completo estudo da distribuição dos trapézios segundo zonas em função da distância esférica ($\psi$), foi realizado por UOTILLA |117|, que fixa a distribuição:

— Para as áreas distantes serão admitidas duas sub-zonas:

(a.1) - No interior do "retângulo" de 20º x 30º em torno do ponto de cálculo os efeitos serão avaliados segundo trapézios de 1º x 1º, excluída a zona próxima;

(a.2) - Na área externa a anterior, que envolve o restante do globo, os cálculos serão desenvolvidos a partir de elementos médios para trapézios de 5º x 5º.

Dentro deste esquema elaboramos um programa em linguagem FORTRAN IV para o computador BURROUGHS-6700, que realiza o cálculo do efeito das zonas distantes segundo valores médios de 1º x 1º e de 5º x 5º. O programa foi denominado GEOZOD e sua lógica acompanha o diagrama de blocos da fig. (3.9.2.1)

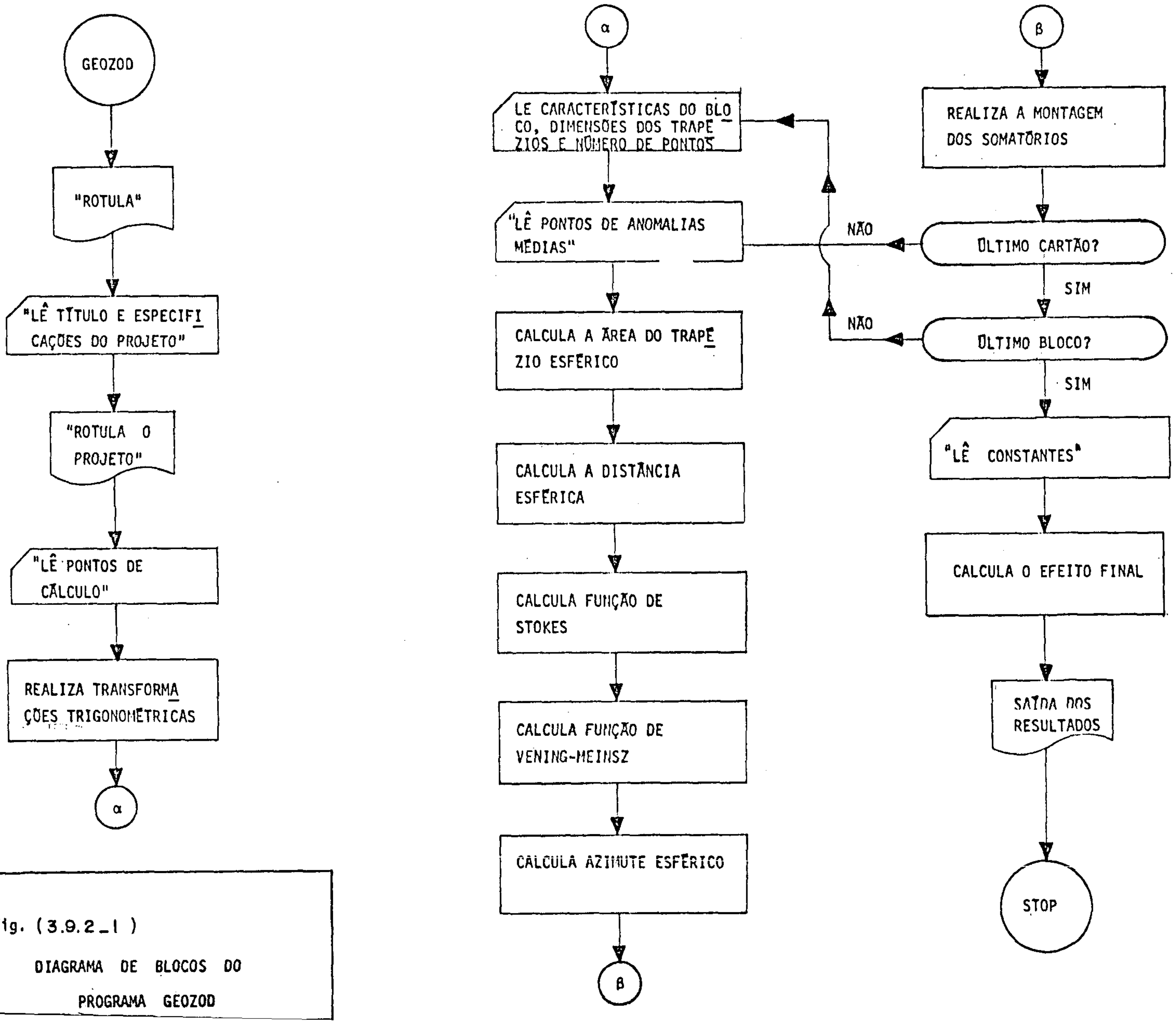



Fig. (3.9.2_1)

DIAGRAMA DE BLOCOS DO PROGRAMA GEOZOD

As fórmulas auxiliares utilizadas no cálculo das áreas, distância esférica ($\psi$) e azimute esférico ($\alpha$) foram |107|:

$$Q\ (\phi,\ \lambda) = \Delta\lambda \left| \text{sen}\,(\phi_m + \frac{1}{2}\Delta\phi) - \text{sen}(\phi_m - \frac{1}{2}\Delta\phi) \right| \qquad \ldots(3.9.2.3)$$

onde $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$ são as dimensões esféricas do trapézio.

$$\cos\psi = \text{sen}\ \phi\ \text{sen}\,\phi_m + \cos\phi \cos\phi_m \cos\,(\lambda_m - \lambda) \qquad \ldots(3.9.2.4)$$

onde ($\phi$, $\lambda$) são as coordenadas do ponto de cálculo.

O azimute esférico.

$$\cos\alpha = \frac{\text{sen}\,\phi m - \cos\psi\ \text{sen}\phi}{\text{sen}\psi\ \cos\phi} \qquad \ldots(3.9.2.5)$$

Os valores numéricos adotados para os termos constantes ($R/4\pi\gamma\tau$) e ($\rho\ /4\pi\gamma\tau$) foram:

$R$ = 6.371 000,0 m

$\rho''$ = 206 264,8062

$\gamma$ = 979 800,0 magl

Estes valores garantem a geondulação expressa em metros e as componentes do desvio em segundos, sendo as anomalias médias dimensionadas em (mgal) o que nos dá os somatórios em m/mgal no cálculo de (N) e "/mgal para ($\xi$) e ($\eta$).

Um dos trabalhos mais recentes em que se recorreu à formulação anterior é o de SIENBENHUNER|107|.

No capítulo 5 apresentaremos um outro método para o cálculo do efeito das zonas distantes sobre as componentes do desvio da vertical.

### 3.9.3 - Efeito das Zonas Próximas

A zona próxima é considerada como sendo a contida num círculo de raio $\psi \cong 3°$, onde se realizam levantamentos gravimétricos de detalhes. Da mesma forma que a anterior esta região será dividida em trapézios e os efeitos serão avaliados segundo valores médios das funções S ($\psi$), S'($\psi$) e das anomalias.

O estabelecimento do raio limite desta zona tem sido motivo de polêmica no meio geodésico internacional. RICE |98| baseando-se em estudos realizados sobre 16 vértices astro-geodésicos da triangulação norte-americana, concluiu serem estáveis os resultados acima de $\psi$ = 3°. MOLODENSKII et ali|86|a partir de consierações teóricas e resultados práticos fixa este limite em torno de $\psi$ = 10º, da mesma forma que ZAKATOV|128|.

O raio da zona de influência a ser considerada no cálculo das quantidades fundamentais, depende da situação posicional do ponto de cálculo em relação às massas topográficas e as internas de compensação, que possam produzir valores anômalos elevados. Com isso a extensão da área de influência será variável de uma estação de cálculo para outra, tendendo a ser menor nas regiões menos acidentadas topograficamente, ou de equilíbrio isostático mais acentuado. Desta forma uma vez atingido o limite além do qual as influências externas se equilibram, o resultado final pouco será influenciado pelos aumentos sucessivos do raio da zona.

O procedimento mais conveniente em programas que tem como objetivo o cálculo das quantidades fundamentais, é estender progressivamente os limites da zona até que se verifique uma estabilização dos resultados finais. Contudo existem limites que podem ser fixados previamente, enquadrados pelos trabalhos anteriormente citados. O raio mínimo deverá ser de 300 km, abaixo do qual possivelmente perturbações mesmo locais terão influências sensíveis. O limte máximo será de 2000 km, somente aproximado em áreas de intensa perturbação. De início os levantamentos gravimétricos deverão ser realizados no interior do círculo de 300 km, devendo-se estar preparado para ampliar este limite à medida que as análises progressivas de resultados a aconselhar. O estudo simultâneo de vários pontos contíguos da rede geodésica é outra providência aconselhável, pois permitirá a comparação de resultados e facilitará a identificação de influências locais.

O levantamento gravimétrico necessariamente cobrirá toda área, contudo a densidade em áreas das estações poderá ser decrescente, a medida que nos afastamos do ponto de cálculo. No adendo 7, tabela (7.0.2)apresentamos um critério para seleção do número de estações por área de levantamento. A tabela é perfeitamente aplicável a programas deste tipo, sendo o objetivo principal do levantamento permitir a elaboração das cartas de isoanômalas para o cálculo de valores médios.

Os modelos numéricos para o cálculo da influência desta zona baseiam-se nas fórmulas (3.5.8) e (3.5.12), e na grande maioria são modelos gráfico-geométricos. Podemos destacar os modelos de HAYFORD|40| para o cálculo das geondulações, o de RICE |98| ideal para o cálculo das componentes do desvio da vertical, podendo também ser utilizado nos de geo-ondulações, e finalmente o de MOLODENSKII|86| aplicável com a mesma margem de precisão no cálculo das quantidades fundamentais.

Dentre os modelos analíticos podemos citar o de TSUBOI, |Tsuboi, C. - A new and simple method for calculating the deflections of the vertical from gravity anomalies with the aid of the Bessel-Fourier series. **Proc: of the Japan Academy**, 30(6), 1954|, onde o desenvolvimento em séries de Bessel-Fourier é utilizado na simulação do campo gravitacional; mais recentemente temos os trabalhos de BURSA |14| e |16|, onde a simulação é realizada segundo polinômios ortogonais.

Tanto os modelos analíticos quanto os gráfico-geométricos baseiam-se na sub-divisão da zona próxima em trapézios esféricos, dimensionados de maneira a permitir que a distribuição anômala possa ser substituída por valores médios sem comprometer a precisão final dos resultados e, no caso dos geométricos, a facilidade dos cálculos finais.

### 3.9.3.1 - Um modelo gráfico de malha circular (Modelo de Rice)

Um dos métodos mais usuais para gerar uma malha de trapézios esféricos consiste em se subdividir a zona próxima com círculos concêntricos e linhas radiais.

Numa malha deste tipo a contribuição de cada trapézio pode ser escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi''_i \\ \\ \Delta\eta''_i \end{Bmatrix} = \frac{\rho''}{4\pi\gamma_T} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Bmatrix} d\alpha \int_{\psi_i}^{\psi_i+1} \Delta g \; S'(\psi) \operatorname{sen}\psi \; d\psi \qquad \ldots(3.9.3.1.1)$$

$$\Delta N = \frac{R}{4\pi\gamma_T} \int_{\psi_i}^{\psi_i+1} \Delta g \;\; S\,(\psi)\; \operatorname{sen}\psi \;\; d\psi \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} d\alpha \qquad \ldots(3.9.3.1.2)$$

onde (i) é o código do trapézio, ($\alpha$i)e ($\alpha$i+1)são os azimutes das radiais que o limitam lateralmente, ($\psi$i) e ($\psi$i+1) são os raios dos círculos limites, fig. (3.9.3.1.1).

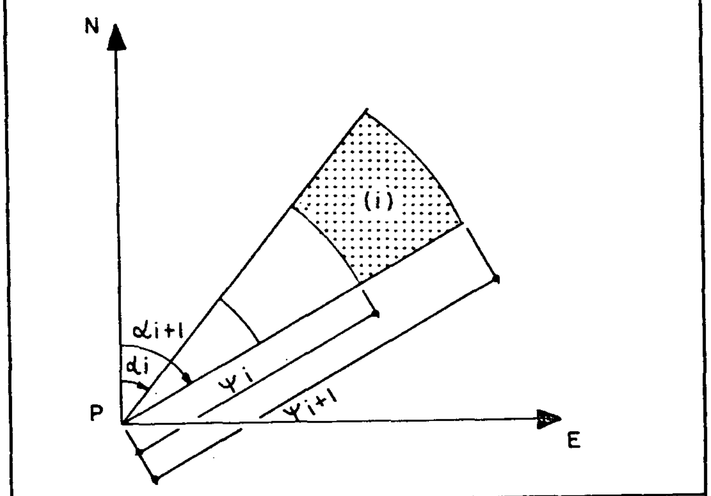



FIG.(3.9.3.1-1) — POSIÇÃO DO TRAPÉZIO ESFÉRICO

Os valores médios anômalos são obtidos a partir de interpolação para o baricentro dos trapézios, em cartas de isoanômalas.

As integrais de $S(\psi)$ e $S'(\psi)$ envolvidas nas fórmulas anteriores poderão ser calculadas a partir de:

$$\int_{\psi i}^{\psi i+1} S(\psi)\,\mathrm{sen}\psi\, d\psi = \Big| -\cos\psi + \frac{7}{4}\cos^2\psi + 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\psi}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\psi + \frac{1}{2}\right) - $$

$$- \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\psi\,\mathrm{Ln}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\psi}{2} + \mathrm{sen}^2\,\frac{\psi}{2}\right)\Big|_{\psi i}^{\psi i+1}$$

...(3.9.3.1.3)

$$\int_{\psi i}^{\psi i+1} S'(\psi)\,\mathrm{sen}\psi\, d\psi = \Big|\frac{7}{4}\,\psi + \cos\frac{\psi}{2} - \frac{13}{2}\mathrm{sen}\,\frac{\psi}{2}\,\cos\frac{\psi}{2} - 6\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + $$

$$+ 13\,\mathrm{sen}^3\,\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - 2\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{tag}\,\frac{\psi}{4} + \left(\frac{3}{2}\psi - 3\,\mathrm{sen}\,\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + 6\,\mathrm{sen}^3\,\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right).$$

$$.\mathrm{Ln}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\psi}{2} + \mathrm{sen}^2\,\frac{\psi}{2}\right)\Big|_{\psi i}^{\psi i+1} -$$

$$- 3\int_{\psi i}^{\psi i+1} \frac{\psi}{2}\,\frac{\cos\psi/2}{\mathrm{sen}\psi/2}\, d\,\frac{\psi}{2} + 3\int_{\psi i}^{\psi i+1} \frac{\psi}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\,\psi/2}{\cos\,\psi/2}\, d\,\frac{\psi}{2} - 3\int_{\psi i}^{\psi i+1} \frac{\psi}{2}\,\frac{1}{\cos\psi/2}\, d\,\frac{\psi}{2}$$

...(3.9.3.1.4)

A soma das três últimas parcelas pode ser escrita na forma de série:

$$\Big| -\frac{3}{2}\,\psi - \frac{3}{8}\,\psi^2 + \frac{1}{6}\,\psi^3 - \frac{3}{128}\,\psi^4 + \frac{1}{150}\,\psi^5 - \frac{5}{3072}\,\psi^6 + \ldots \Big|\Big|_{\psi i}^{\psi i+1}$$

...(3.9.3.1.5)

SOLLINS|109|, para ($\psi$) variando de 0,01º a 180º, tabelou os valores das funções $f'(\psi)$ sen $\psi$, $f(\psi)$ sen $\psi$ e suas respectivas integrais. Estas funções são relacionadas a $S(\psi)$ e $S'(\psi)$ através das expressões:

$$\left.\begin{aligned} f(\psi) &= \frac{1}{2} S(\psi) \\ f'(\psi) &= \frac{1}{2} S'(\psi) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.9.3.1.6)$$

As tabelas de Sollins evitam o cálculo das expressões (3.9.3.1.3)e(3.9.3.1.4)

Nos métodos gráfico-geométricos os limites($\psi i$) e ($\psi i+1$), bem como os azimutes ($\alpha i$) e ($\alpha i+1$) são fixados de maneira que qualquer trapézio esférico, independente de suas dimensões e posição contribua com o mesmo quinhão por miligal de anomalia no cálculo de uma das quantidades fundamentais. No modelo de Rice estes limites são fixados de maneira que cada compartimento contribua com a mesma parcela no cálculo das componentes do desvio. Hayford desenvolveu o modelo em que cada compartimento contribui com 1 mm/mgal no cálculo das geondulações. Estas características de desenvolvimento de modelos, embora desejáveis do ponto de vista de cálculo, não são essenciais em sua elaboração, tanto que no de Molodenskii a condição fixa é a de mesmo tamanho para os trapézios e suas contribuições são variáveis.

Na expressão (3.9.3.1.1) se considerarmos o desvio como sendo dado segundo uma direção radial de azimute ($\alpha$) qualquer e, também, as relações (3.9.3.1.5) poderemos escrever:

$$\Delta\xi''_{\alpha} = \frac{\Delta\xi''}{\cos\alpha} = \frac{\rho''}{2\pi\gamma T} \int_{\alpha i}^{\alpha i+1} d\alpha \int_{\psi i}^{\psi i+1} \Delta g \; f'(\psi) \operatorname{sen}\psi \; d\psi. \qquad \ldots(3.9.3.1.7)$$

fixando os limites da primeira integral de maneira que ($\alpha i+1 - \alpha i = 10º$), vem:

$$\frac{\rho''}{2\pi\gamma_T} \int_{\alpha i}^{\alpha i+1} d\alpha = 0{,}005840'' \qquad \ldots(3.9.3.1.8)$$

a contribuição (3.9.3.1.7) escreve-se agora:

$$\Delta\xi''_{\Delta} = 0{,}005840 \int_{\psi i}^{\psi i+1} \Delta g \; f'(\psi) \operatorname{sen}\psi \; d\psi \qquad \ldots(3.9.3.1.9)$$

impondo as condições:

$$\Delta g = 1 \text{ mgal}$$

$$\Delta\xi''_{\Delta} = 0{,}001''$$

temos

$$\int_{\psi i}^{\psi i+1} f'(\psi)\ \mathrm{sen}\psi\ d\psi = 0{,}1712168 \qquad \ldots(3.9.3.1.10)$$

recorrendo às tabelas de Sollins,podemos obter os limites de integração ($\psi i$) e ($\psi i+1$) que deverão ser tomados como raios na divisão da zona próxima, para que qualquer compartimento contribua com 0,001" por miligal de anomalia média.

Com este procedimento, RICE calculou a tabela (3.9.3.1.1),a qual permite elaborar gabaritos em material transparente, representativos da zona próxima, que aplicados às cartas de isoanômalas permite o cálculo de anomalias médias. Os valores anômalos médios divididos por mil e multiplicados por cos $\alpha$(sen$\alpha$) fornecem a contribuição $\Delta\xi''_i(\Delta\eta i'')$, o valor final será dado por:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \\ \eta'' \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{Zona} \\ \text{próxima}}} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_i & \Delta\xi''_i \\ \\ \sum\limits_i & \Delta\eta''_i \end{Bmatrix} \qquad \ldots(3.9.3.1.11)$$

As contribuições para as geo-ondulações são obtidas multiplicando-se pela constante correspondente da tabela (3.9.3.1.1) o valor anômalo médio do comportamento.

Na figura (3.9.3.1.2) é apresentado esquematicamente o gabarito de Rice.

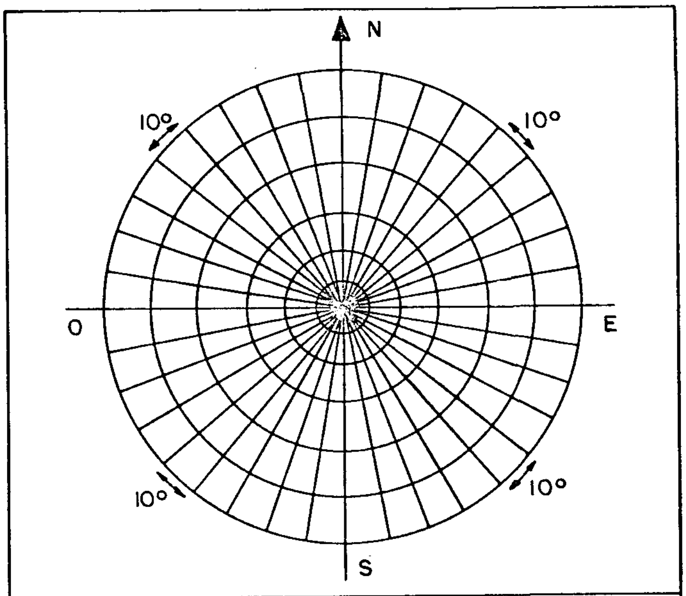



FIG. (3.9.3.1-2) – GABARITO DO MODÊLO DE RICE.

A principal vantagem do método de Rice prende-se ao fato de que com uma única aplicação do gabarito poderemos interpolar os valores médios anômalos e calcular as quantidades fundamentais.

Os gabaritos de HAYFORD e MOLODENSKII poderão ser elaborados com base nas tabelas (3.9.3.1.2) e (3.9.3.1.3), as indicações de uso constam das mesmas

### 3.9.3.2 - Um modelo gráfico de malha retangular

Malhas de trapézios esféricos formados por arcos de paralelos e meridianos também têm sido utilizadas no cálculo das componentes do desvio da vertical e geo-ondulações, ver CAMPBELL |18| ou FISCHER |25|.

Dois tipos de malhas retangulares têm sido utilizados: (a) malhas de espaçamento constante e (b) malhas em expansão. Além de ser o ponto de cálculo colocado em duas situações peculiares, ou no centro de um dos trapézios ou num dos nós da malha. Nas fig.(3.9.3.2.1) representamos, esquematicamente os dois tipos de malhas:

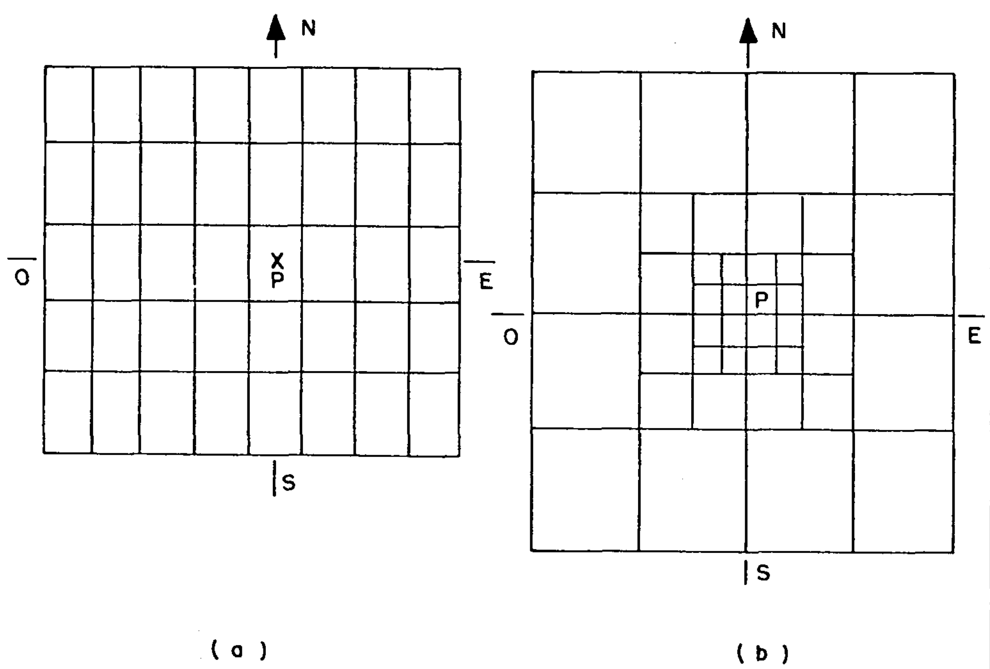



FIG. ( 3.9.3.2-1 ) – TIPOS DE MALHAS RETANGULARES.

TABELA (3.9.3.1 - 1)

Raios e Contribuições para o Cálculo das Geondulações
e Componentes do Desvio da Vertical no Modelo de Rice

| Nº da Zona | Raio Interno (km) | Nº de Trapézios | Influência para Δg = 1 mgal | | | Nº da Zona | Raio Interno (km) | Nº de Trapézios | Influência para Δg = 1 mgal | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ξ | η | N(mm/mgal) | | | | ξ | η | N(mm/mgal) |
| 1 | 0,119 | | | | | 26 | 8,560 | | | | 1,62 |
| 2 | 0,141 | | | | | 27 | 10,150 | | | | 1,95 |
| 3 | 0,167 | | | | | 28 | 12,05 | | | | 2,28 |
| 4 | 0,198 | | | | | 29 | 14,29 | | | | 2,54 |
| 5 | 0,235 | | | | | 30 | 16,94 | | | | 3,25 |
| 6 | 0,279 | | | | | 31 | 20,09 | | | | 3,70 |
| 7 | 0,331 | | | | 1,36 | 32 | 23,83 | | | | 4,69 |
| 8 | 0,393 | | | | | 33 | 28,25 | | | | 5,52 |
| 9 | 0,467 | | | | | 34 | 33,48 | | | | 6,57 |
| 10 | 0,554 | | | | | 35 | 39,67 | | | | 7,87 |
| 11 | 0,657 | | | | | 36 | 47,00 | | | | 9,62 |
| 12 | 0,780 | | | | | 37 | 55,66 | | | | 10,73 |
| 13 | 0,926 | | 0,001" x cos $A'_m$ para todas | 0,001" x sen $A_m$ para todas | | 38 | 65,90 | | 0,001" x cos $A_m$ para todas | 0,001" x sen $A_m$ para todas | 13,46 |
| 14 | 1,099 | 10 para todas | | | | 39 | 77,97 | 10 para todas | | | 15,60 |
| 15 | 1,304 | | | | 0,27 | 40 | 92,22 | | | | 18,21 |
| 16 | 1,547 | | | | 0,32 | 41 | 109,0 | | | | 21,85 |
| 17 | 1,836 | | | | 0,33 | 42 | 128,7 | | | | 26,65 |
| 18 | 2,179 | | | | 0,45 | 43 | 151,9 | | | | 30,51 |
| 19 | 2,586 | | | | 0,52 | 44 | 179,1 | | | | 37,12 |
| 20 | 3,068 | | | | 0,59 | 45 | 210,9 | | | | 42,92 |
| 21 | 3,641 | | | | 0,71 | 46 | 248,0 | | | | 51,17 |
| 22 | 4,320 | | | | 0,85 | 47 | 291,2 | | | | 59,63 |
| 23 | 5,125 | | | | 0,97 | 48 | 341,2 | | | | 69,77 |
| 24 | 6,081 | | | | 1,24 | 49 | 399,0 | | | | 81,41 |
| 25 | 7,216 | | | | 1,43 | 50 | 465,5 | | | | 93,32 |

TABELA (3.9.3.1 - 2)

Raio e Contribuição para o Cálculo

das Geondulações no Modelo de HAYFORD

| Nº da Zona | Raio Externo (graus) | Nº de Trapézios | Efeito de um Trapézio (mm/mgal) | Nº da Zona | Raio Externo (graus) | Nº de Trapézios | Efeito de um Trapézio (mm/mgal) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,175 | 4 | 5 | 16 | 2,341 | 18 Trapézios para todas | 1 para todas! |
| 2 | 0,325 | 18 Trapézios para todas | 1 para todas | 17 | 2,480 | | |
| 3 | 0,480 | | | 18 | 2,620 | | |
| 4 | 0,630 | | | 19 | 2,760 | | |
| 5 | 0,775 | | | 20 | 2,900 | | |
| 6 | 0,920 | | | 21 | 3,040 | | |
| 7 | 1,070 | | | 22 | 3,170 | | |
| 8 | 1,225 | | | 23 | 3,300 | | |
| 9 | 1,360 | | | 24 | 3,430 | | |
| 10 | 1,505 | | | 25 | 3,450 | | |
| 11 | 1,645 | | | 26 | 3,695 | | |
| 12 | 1,785 | | | 27 | 3,830 | | |
| 13 | 1,925 | | | | | | |
| 14 | 2,065 | | | | | | |
| 15 | 2,203 | | | | | | |

OBS.: A primeira zona é dividida em 4 quadrantes em vez de 18 compartimentos como nas demais.

TABELA (3.9.3.1 - 3)

Raios e Contribuições para o Cálculo das Geondulações e Componentes do Desvio da Vertical no Modelo de MOLODENSKII

| Nº da Zona | Raio Interno (km) | Nº de Trapézios | Influência para $\Delta g$ = 1 mgal | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\xi$ | $\eta$ | $N.10^{-5}$ |
| 1 | 5,0 | | | | 15 |
| 2 | 7,3 | | | | 22 |
| 3 | 10,7 | | | | 32 |
| 4 | 15,7 | | | | 47 |
| 5 | 22,8 | 16 | 0",005 cos(A - 180º) | 0",005 sen(A - 180º) | 69 |
| 6 | 33,3 | | | | 101 |
| 7 | 48,5 | | | | 149 |
| 8 | 70,6 | | | | 219 |
| 9 | 102,6 | | | | 118 |
| 10 | 128,0 | | | | 148 |
| 11 | 159,6 | | | | 186 |
| 12 | 198,6 | 24 | 0",002 cos(A - 180º) | 0",002 sen(A - 180º) | 232 |
| 13 | 246,7 | | | | 288 |
| 14 | 305,4 | | | | 262 |
| 15 | 357,8 | | | | 304 |
| 16 | 418,1 | | | | 353 |
| 17 | 487,4 | 24 | 0",0015 cos(A - 180º) | 0",0015 sen(A - 180º) | 408 |
| 18 | 566,6 | | | | 467 |
| 19 | 656,6 | | | | 529 |
| 20 | 758,0 | | | | 596 |

Em nossas deduções iremos considerar um modelo de malha com espaçamento constante. Contudo o tratamento é geral e poderá ser estendido ao outro tipo.

Consideremos na fig. (3.9.3.2.2) a representação de uma malha retangular de 2c x 2d trapézios esféricos e $(P)_{c,d}$ como ponto de cálculo e (Bi, j) o baricentro do trapézio (i, j) de área $(\Delta Q_{ij})$.

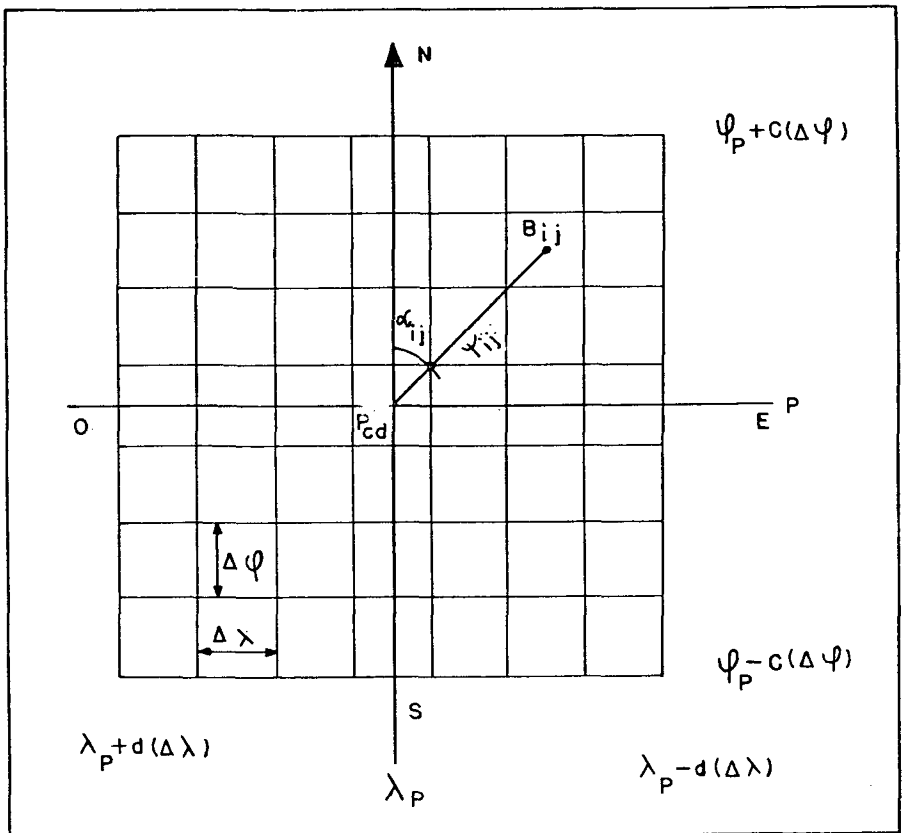



FIG.(3.9.3.2-2)– O PONTO DE CÁLCULO E A INFLUÊNCIA DE UM TRAPÉZIO NA MALHA RETANGULAR.

A contribuição de um trapézio genérico ao cálculo das quantidades fundamentais no ponto $(P_{c,d})$ será da forma:

$$\left\{ \begin{matrix} Z_{i,j,c,d} \\ \\ Z'_{i,j,c,d} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\Delta Q_{i,j}} \int_{\Delta Q} \Delta g \; S'(\psi) \; \mathrm{sen}\,\psi \left\{ \begin{matrix} \cos \alpha \\ \\ \mathrm{sen}\,\alpha \end{matrix} \right\} dQ \qquad \ldots(3.9.3.2.1)$$

para as componentes do desvio e

$$T_{i,j,c,d} = \frac{1}{\Delta Q_{i,j}} \int_{\Delta Q} \Delta g \; S(\psi) \; \mathrm{sen}\psi \; dQ \qquad \ldots(3.9.3.2.2)$$

para as geondulações.

Desde que não temos uma distribuição contínua do campo anômalo no interior do trapézio, mas sim uma discreta, podemos escrever a contribuição do trapézio (i,j) a menos da área:

$$\left\{\begin{matrix} Z_{i,j,c,d} \\ \\ z'_{i,j,c,d} \end{matrix}\right\} = S'(\psi_{i,j,c,d}) \; sen\psi_{i,j,c,d} \left\{\begin{matrix} \cos\alpha_{i,j,c,d} \\ \\ sen\alpha_{i,j,c,d} \end{matrix}\right\} \Delta g_{ij}$$

...(3.9.3.2.3)

$$T_{ijcd} = S(\psi_{i,j,c,d}) \; sen\psi_{ijcd} \; \Delta g_{ij}$$

...(3.9.3.2.4)

A contribuição total da zona próxima no cálculo final será:

$$\left\{\begin{matrix} \xi'' \\ \\ \eta'' \end{matrix}\right\} = \frac{\rho''}{4\pi\gamma T} \sum_{i=1}^{2c} \sum_{j=1}^{2d} \sum_{j=1}^{2d} \left\{\begin{matrix} Z_{i,j,c,d} \\ \\ Z'_{i,j,c,d} \end{matrix}\right\} \Delta Q_{ij} \; (1 - \partial_{ic} \; \partial_{jn})$$

...(3.9.3.2.5)

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_T} \sum_{i=1}^{2c} \sum_{j=1}^{2d} T_{i,j,c,d} \; \Delta Q_{ij} \; (1 - \partial ic \; \partial jn)$$

...(3.9.3.2.6)

onde ($\partial$) é o operador delta de Kronecher que tem as propriedades

$$\partial ic = \begin{cases} 1 \text{ para } i = c \\ 0 \text{ para } i \neq c \end{cases}$$

$$\partial jd = \begin{cases} 1 \text{ para } j = d \\ 0 \text{ para } j \neq d, \end{cases}$$

a introdução deste operador nas fórmulas (3.9.3.2.5) e (3.9.3.2.6) tem a finalidade de eliminar o trapézio que contém o ponto (Pc, d) a ser tratado no cálculo do efeito da zona vizinha.

Os ângulos esféricos ($\psi$) e ($\alpha$) são calculados pelas fórmulas (3.9.2.4) e (3.9.2.5) e a área do trapézio dada por (3.9.2.3). As funções S ($\psi$) e S'($\psi$) podem ser calculadas através das fórmulas (3.4.5) e (3.5.11) ou substituídas por f($\psi$) e f'($\psi$) e os valores extraídos das tabelas de Sollins.

O modelo de malha retangular é por demais complexo de ser executado rotineiramente, envolvendo manipulação de tabelas e maior volume de cálculos que nos modelos circulares. Sua principal vantagem liga-se ao fato de que as anomalias médias calculadas para uma malha de espaçamento constante, por exemplo 5' x 5', o são uma única vez. A mesma divisão pode ser utilizada para qualquer outro ponto nas proximidades do primeiro, mediante uma simples alteração nos limites da zona vizinha.

Uma observação feita por HENRIKSON & NASH |49| merece citação destacada: — a malha não será necessariamente simétrica em relação ao meridiano e paralelo do ponto de cálculo.

Os limites da superfície dividida em trapézios merecem as mesmas observações feitas em (3.9.2); dependerão das características topográficas e geodésicas da área em estudo.

### 3.9.3.3 - Modelo Analítico

Tanto o modelo gráfico circular quanto o retangular apresentam um grande inconveniente, interpolação de valores anômalos médios a partir de mapas representativos das anomalias. A obtenção destes valores médios é a principal dificuldade no cálculo das quantidades fundamentais.

A procura de um método analítico que possibilite a simulação do campo anômalo e a obtenção dos valores médios sem a manipulação de cartas, tem sido a preocupação dos geodesistas nos últimos tempos. O desenvolvimento do campo anômalo em harmônicos esféricos com coeficientes calculados a partir de dados orbitais de satélites artificiais é a grande esperança para o desenvolvimento de modelos globais, contudo sua aplicação em áreas restritas deve ser encarada com cuidado. A obtenção de outras representações em séries numéricas ou a partir de modelos estatísticos |13|, são bem mais representativas.

No momento estamos desenvolvendo um modelo analítico para simulação do campo anômalo em séries polinomiais. Iremos apresentar, somente, a idéia em linhas gerais; resultados mais exatos serão divulgados oportunamente.

Num modelo analítico poderemos aproveitar os conceitos de malha circular ou retangular e qualquer dos modelos poderá ser utilizado. A única substituição é na fase de interpolação de valores médios, realizada analiticamente.

Modelos polinomiais podem ser gerados por grupos de trapézios esféricos através de qualquer método numérico de ajuste de curvas a pontos dados. O MMQ; o desenvolvimento em polinômios ortogonais; séries de Fourier e outros poderão ser utilizados com sucesso nesta tarefa.

Encarando-se $(\Delta g)$ como função de posição, podemos obter funções polinomiais a partir das distâncias esféricas $(\psi)$ e, posteriormente, calculando-se a distância média dos trapézios, poderemos obter a partir dos polinômios o valor anômalo médio. Os valores assim obtidos poderão ser usados com os esquemas dos modelos gráfico-analíticos, ou segundo uma outra malha em que se usem as fórmulas integradas.(3.9.3.1.3) e (3.9.3.1.4).

No adendo 10 apresentamos um método de geração polinomial que poderá ser utilizado. A consistência do ajuste poderá ser verificada segundo os blocos de trapézios, a partir da exclusão de alguns valores conhecidos durante o ajuste; posteriormente os valores substituídos nos pclinômios permitirão a verificação da qualidade da geometrização.

Infelizmente não podemos dispor de dados suficientes para testar a eficiência desta idéia em tempo hábil de ser apresentado neste trabalho. Contudo as pesquisas em desenvolvimento serão divulgadas tão logo tenhamos oportunidade.

### 3.9.4 - Efeito da Zona Vizinha

Na avaliação da contribuição da zona vizinha para o cálculo das quantidades fundamentais,utilizaremos a aproximação plana.

O raio ($\psi o$),limite desta zona é tomado segundo uma distância linear de uns poucos quilômetros, sendo em conseqüência,perfeitamente válida a aproximação plana.

Recorramos às coordenadas polares no plano ($r$, $\alpha$) com:

$$r \cong R\psi \cong R \operatorname{sen}\psi \cong 2 R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}$$

um elemento de área será expresso na forma:

$$R^2 \, d \gamma = r \, dr \, d\alpha$$

com estas considerações podemos escrever:

$$\left.\begin{aligned} S(\psi) &\cong \frac{2R}{r} \\ S'(\psi) &\cong \frac{2R^2}{r^2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3.9.4.1)$$

Tanto na integral de Stokes quanto nas fórmulas de Vening -Meinesz o erro relativo desta aproximação fica em torno de 1% para $r \cong 10$km e 3% para $r \cong 30$km, |47|.

As fórmulas integrais poderão ser escritas na forma:

$$N_V = \frac{1}{2\pi\gamma_T} \int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha \int_{r=0}^{ro} \Delta g \, r \, dr$$

...(3.9.4.2)

$$\left\{\begin{matrix}\xi'' \\ \eta''\end{matrix}\right\}_V = - \frac{\rho''}{2\ \pi\gamma_T} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left\{\begin{matrix}\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\end{matrix}\right\} d\alpha \int_{r=0}^{ro} \frac{\Delta g}{r}\, dr \qquad ...(3.9.4.3)$$

Considerando-se um sistema coordenada cartesiano bi-dimensional com origem no ponto (P) de cálculo e o eixo dos x coincidente com a direção Norte-Sul, podemos expressar as anomalias ($\Delta g$) através do desenvolvimento em série de Taylor no ponto (P):

$$\Delta g = \Delta g_p + xg_x + yg_y + \frac{1}{2!}\left(x^2 g_{xx} + 2xyg_{xy} + y^2 g_{yy}\right) + \ldots \qquad ...(3.9.4.4)$$

onde

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \operatorname{sen} \alpha$$

$$g_x = \left(\frac{\partial\ \Delta g}{\partial x}\right)_P; \quad gy = \left(\frac{\partial\ \Delta g}{\partial y}\right)_P$$

$$g_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2}\right)_P; \quad g_{yy} = \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial y^2}\right)_P$$

ou escrevendo a (3.9.4.4) de outra forma:

$$\Delta g = \Delta g_p + r(g_x \cos x + g_y \operatorname{sen} x) + \frac{r^2}{2}(g_{xx}\cos^2\alpha + 2g_{xx}\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + g_{yy}\operatorname{sen}^2\alpha) + \ldots \qquad ...(3.9.4.5)$$

Substituindo nas integrais (3.9.4.2 e 3) e integrando as funções trigonométricas vem:

$$N_y = \frac{1}{\gamma_T} \int_0^{ro} \left| \Delta g_p + \frac{r^2}{4}(g_{xx} + g_{yy}) + \ldots \right| dr \qquad ...(3.9.4.6)$$

$$\left\{\begin{matrix}\xi'' \\ \eta''\end{matrix}\right\}_V = - \frac{\rho''}{2\gamma_T} \int_0^{ro} \left\{\begin{matrix} gx + \ldots \\ gy + \ldots \end{matrix}\right\} dr$$

integrando em r obtemos:

$$\boxed{N_V = \frac{ro}{\gamma_T}\ \Delta g_p} \qquad ...(3.9.4.7)$$

vemos que a contribuição da zona vizinha ao cálculo das geondulações depende do valor anômalo no ponto de cálculo e do raio limite da zona:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix}_V = - \frac{\rho'' ro}{2\gamma_T} \begin{Bmatrix} gx \\ gy \end{Bmatrix}}$$

...(3.9.4.8)

a contribuição da zona vizinha ao cálculo das componentes do desvio da vertical dependerá diretamente dos gradientes norte-sul (gx) e leste oeste(gy) do campo anômalo em relação ao ponto de cálculo (P).

$$\left.\begin{aligned} g_x &= \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)_P = \frac{\Delta g_S - \Delta g_N}{2ro} \\ g_y &= \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)_P = \frac{\Delta g_0 - \Delta g_E}{2ro} \end{aligned}\right\} \quad \text{....(3.9.4.9)}$$

a fórmula (3.9.4.8) pode ser escrita em função dos valores anômalos nas direções básicas.

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix} = \frac{\rho''}{4\gamma_T} \begin{Bmatrix} \Delta g_S & - & \Delta g_N \\ \Delta g_0 & - & \Delta g_E \end{Bmatrix}}$$

...(3.9.4.10)

As fórmulas (3.9.4.10) são válidas na suposição de serem as isoanômalas regulares, i.é, de serem os gradientes constantes no interior do círculo (P, ro). Em regiões perturbadas,esta característica dificilmente é manifesta e a aplicação das (3.9.4.10) conduz a valores distorcidos.

### 3.9.4.1 - O método dos três gradientes

RICE |96| sugere para eliminar as possíveis distorções da aproximação (3.9.4.8),o denominado método dos três gradientes que,essencialmente,consiste no cálculo de três gradientes na direção norte--sul e na direção leste-oeste, adotando-se para cada direção fundamental a média ponderada dos gradientes.

Pela figura (3.9.4.1) vem:

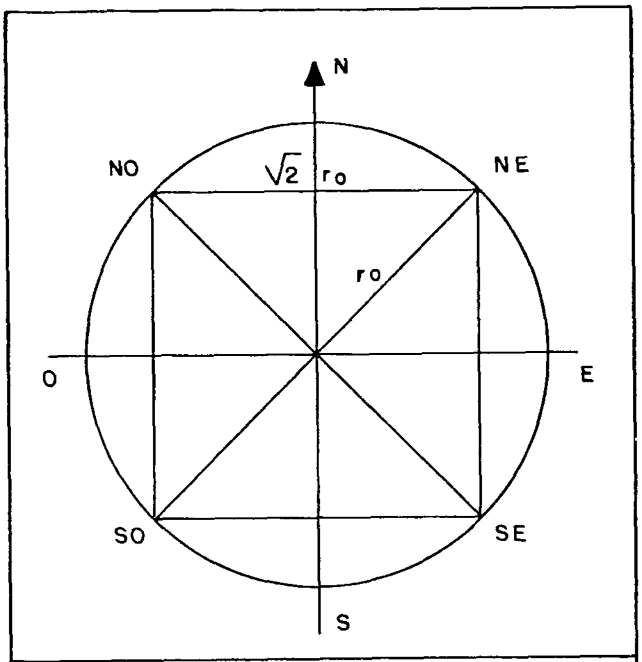



FIG.( 3.9.4-1 )– MÉTODO DOS TRÊS GRADIENTES

$$g_x = \left| \frac{\Delta g_S - \Delta g_N}{2\ ro}\, p + \frac{\Delta g_{SE} - \Delta g_{NE}}{\sqrt{2}\ ro}\, p' + \frac{\Delta g_{SO} - \Delta g_{NO}}{\sqrt{2}\ ro}\, p' \right| \frac{1}{p + 2p'}$$

...(3.9.4.1.1)

$$g_y = \left| \frac{\Delta g_O - \Delta g_E}{2\ ro}\, p + \frac{\Delta g_{SO} - \Delta g_{SE}}{\sqrt{2}\ ro}\, p' + \frac{\Delta g_{NO} - \Delta g_{NE}}{\sqrt{2}\ ro}\, p' \right| \frac{1}{p + 2p'}$$

...(3.9.4.1.2)

adotando-se os pesos p = 1 e p' = 0,5 e sendo $\gamma_T$ = 979 800,0 mgal, podemos escrever:

$$\xi''v = 0{,}02625(\Delta g_S - \Delta g_N) + 0{,}01856(\Delta g_{SE} - \Delta g_{NE} + \Delta g_{SO} - \Delta g_{NO})$$

$$\eta''v = 0{,}02625(\Delta g_S - \Delta g_E) + 0{,}01856(\Delta g_{SO} - \Delta g_{SE} + \Delta g_{NO} - \Delta g_{NE})$$

...(3.9.4.1.3)

Uma rede gravimétrica densa em torno da estação e um pequeno são as garantias de melhor precisão na obtenção dos valores fornecidos pelas expressões (3.9.4.1.3). O raio (ro) será condicionado pelo comportamento do campo anômalo, em princípio o raio ro = 5 km é o ideal, |47|.

### 3.9.4.2 - Um modelo analítico para avaliação do efeito da zona vizinha

Na avaliação do efeito da zona vizinha sobre as componentes do desvio da vertical, a aplicação de fórmulas de quadratura de alta precisão numérica tem sido utilizada com bons resultados, ver BURSA |14|.

Se considerarmos a zona vizinha dividida em ($\nu$) setores esféricos de azimutes ($\alpha i$), podemos escrever as expressões para o cálculo das componentes do desvio da vertical dadas pela (3.9.3.1.1) na forma:

$$\left\{\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}_{\nu} \cong \frac{\rho''}{2\pi\gamma_T} \sum_{i=1}^{\nu} \left| \int_{0}^{ro} \frac{\Delta g(r)}{r}\, dr \right|_i \left\{\begin{matrix}(\operatorname{sen}\alpha j - \operatorname{sen}\alpha k)\ i\\ (\cos\alpha k - \cos\alpha j)\ i\end{matrix}\right\} \qquad ...(3.9.4.2.1)$$

em que ($\alpha j$) e ($\alpha k$) são os azimutes das radiais limitantes do setor, dentro do esquema da fig. (3.9.3.1.1).

A forma do integrando na expressão anterior, onde a parcela ($r^{-1}$) dá a sua principal característica, garante a aplicação das fórmulas de quadratura.

O inverso da distância pode ser considerada como uma função peso $p(r) = r^{-1}$, no intervalo $|\rho, ro|$, com ($\rho$) suficientemente pequeno mas não nulo. Nestas condições p(r) preenche todas as condições para uma função peso no intervalo $\rho \leq r \leq ro \Rightarrow p(r) > o$, além de ser integrável em todo o domínio e ter seus momentos ($M_S = \int_{\rho}^{ro} p(r)\, r^S\, dr$) finitos para todo $\rho > o$ e qualquer $\rho \neq o$. Sendo a função $\Delta g\,(r)$ contínua no mesmo intervalo temos garantida todas as condições suficientes para dar início ao processo de integração numérica, HILDEBRAND |50|.

Nosso problema é encontrar uma fórmula de integração:

$$I\ (\rho,\ ro) = \int_{\rho}^{ro} r^{-1}\ \Delta g(r)\ dr = \int_{\rho}^{ro} p(r)\ \Delta g\ (r)\ dr =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_S\ \Delta g(r_s) + Rn \qquad ...(3.9.4.2.2)$$

em que o resto Rn seja mínimo.

Na expressão anterior temos (2n) parâmetros opcionais ou seja n nodos $r_s$ e n coeficientes $C_S$, conseqüentemente o resto Rn será mínimo se $\Delta g(r)$ for um polinômio de ordem (2n-1), LANCZOS |71|.

Como $\Delta g(r)$ é uma função de posição, nada nos impede de expressá-lo na forma polinomial em potências de (r).

$$\Delta g = \beta_o + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \ldots + \beta_{2n-1}\ r^{2n-1} \qquad ...(3.9.4.2.3)$$

onde ($\beta i$) são coeficientes constantes.

Uma das fórmulas de quadratura de alta precisão mais usual é a de GAUSS-LEGENDRE. Desde que consideremos o intervalo de integração $|-1, +1|$ e a função peso $p(r) \equiv 1$, poderemos transformar a (3.9.4.2.2) numa forma possível de se aplicar o citado método de quadratura. Alterando o intervalo de integração e o argumento (r) da (3.9.4.2.2) podemos escrever.

$$r_S = \frac{1}{2}(ro - \rho)\, x_S + \frac{1}{2}(\rho + ro)$$

...(3.9.4.2.4)

$$I\,(\rho, ro) = \frac{1}{2}(ro - \rho) \sum_{s=1}^{n} C_s\, r_s^{-1}\, \Delta_g(r_s) + Rn$$

...(3.9.4.2.5)

os coeficientes de peso ($C_s$) serão dados por, |50|.

$$C_S = \frac{1}{P'n(X_s)} \int_{-1}^{+1} \frac{Pn\,(x)}{x - x_S}\, dx$$

...(3.9.4.2.6)

onde os argumentos ($x_s$) são as raízes do polinômio de Legendre Pn (x).

Os argumentos ($x_s$) e os correspondentes valores dos coeficientes de peso ($C_S$) têm sido tabelados em diversas obras que versam sobre análise matemática, destacamos as tabelas de SECREST & STROUD |105|.

Desde que ($X_S$) e ($C_S$) são constantes para qualquer intervalo, $|\rho, ro|$ podemos escrever:

$$\overline{C}_S = -\frac{\rho''}{4\pi\gamma_T}(ro - \rho)\, r_s^{-1}\, C_S \begin{Bmatrix} (\operatorname{sen}\alpha j - \operatorname{sen}\alpha k) \\ (\cos\alpha k - \cos\alpha j) \end{Bmatrix}$$

...(3.9 4.2.7)

para cada setor ($\alpha j$, $\alpha k$)

O efeito total poderá ser obtido a partir de:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix}_V = \begin{Bmatrix} \xi''\ (0, \rho) \\ \eta''\ (0, \rho) \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{\nu} \left| \sum_{s=1}^{n} \overline{C}_S\, \Delta g(r_S) \right|_i}$$

...(3.9.4.2.8)

O resto Rn será nulo se $\Delta g(r)$ for um polinômio de grau superior a 2n com exceção de n=o.

O comportamento dos nodos ($r_S$) é irregular em relação à variação da função integrando, diminui à medida que (r) aumenta.

Este comportamento pode ser eliminado dividindo o intervalo $|\rho,\ ro|$ em (n) partes e aplicando a fórmula de quadratura para cada uma das partes com n=1. Para os intervalos parciais$(\rho_t, \rho_u)$ podemos escrever:

$$C_S' = \frac{2(\rho_u - \rho_t)}{(\rho_u + \rho_t)} \qquad \ldots(3.9.4.2.9)$$

e

$$\bar{C}_S' = - \frac{\rho''}{4\pi\gamma_T} \quad C_S' \begin{Bmatrix} (\text{sen}\,\alpha j - \text{sen}\,\alpha k) \\ (\cos\alpha k - \cos\alpha j) \end{Bmatrix} \qquad \ldots(3.9.4.2.10)$$

Para nodos

$$r_S = \frac{1}{2}\,(\rho u + \rho t)$$

podemos escrever:

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix}_V = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{s=1}^{\nu} \bar{C}_S' \quad \Delta g\ (r_s) \right|_i \qquad \ldots(3.9.4.2.11)$$

Podemos agora fixar modelos de aplicação para o método, em intervalos $|\rho t,\ \rho u|$.

A divisão em setores poderá ser realizada, a semelhança do método dos três gradientes, para $\nu = 8$ ou em maior número; na fig. (3.9.4.2.1) apresentamos o diagrama para $\nu = 8$.

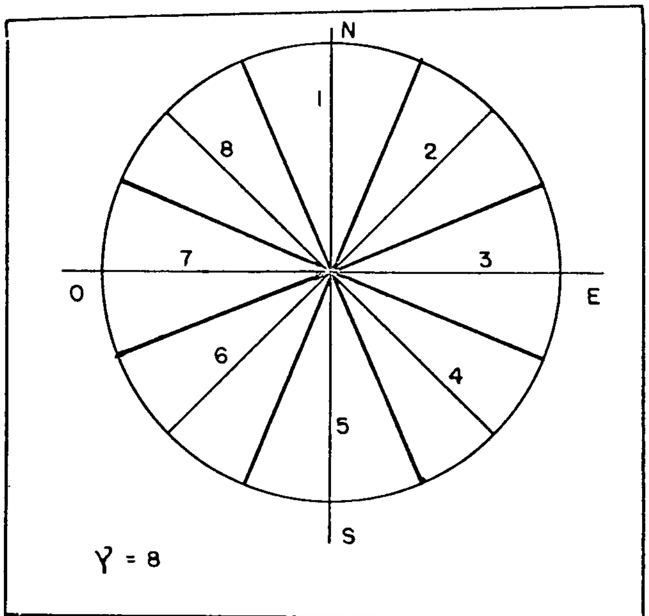



FIG. (3.9.4.2-1) — GRÁFICO DOS SETORES NA MALHA ANALÍTICA

Estabelecendo raios limites $\rho_t$, $\rho_u$ podemos arbitrar o número de partes por setores e calcular tabelas para valores $\overline{C}'_S$ por setores. BURSA|14, pág. 38-9| apresenta tabelas para $\nu = 8$ e n variando de 3 a 7.

Gabaritos podem ser elaborados para interpolar os valores anômalos em cartas de isoanômalas para os nodos ($r_S$), em função dos raios ($\rho_t$) e ($\rho_u$).

Outra maneira de se obter os valores anômalos dos nodos consiste em se gerar funções polinomiais para ($\Delta g$) a partir dos valores anômalos das estações localizadas nos setores.

A distribuição das estações gravimétricas em radiais coincidentes com os azimutes médios dos setores, parece ser a ideal para a obtenção dos polinômios de interpolação.

O método que hora apresentamos carece de testes reais. Estamos trabalhando na obtenção destes dados em diversas partes do país, posteriormente divulgaremos os resultados desta pesquisa.

# 4. Redução dos Valores Gravimétricos

## 4.1 - O significado das reduções:

A gravidade é, normalmente, determinada sobre a superfície física da Terra; algumas vezes o é subcontinentalmente(minas e túneis); outras no ar com equipamento aerotransportado, ou ainda sob ou sobre as águas oceânicas e lacustres. Os valores observados não podem ser comparados na forma em que são obtidos, e não é possível usá-los para discutir a distribuição de massas e suas influências sobre as quantidades geodésicas.

A gravidade observada depende basalmente da posição da estação (latitude, longitude e altitude) e secundariamente da topografia em torno da estação e da distribuição de densidades nas camadas componentes da crosta terrestre.

A fórmula de Stokes, da mesma forma que a de Vening-Meinesz, pressupõe a gravidade observada sobre o geóide e a inexistência de massas externas ao mesmo. Como o valor medido está referido à superfície terrestre e influenciado pelas massas externas e internas à superfície geoidal, surge a necessidade de eliminarmos estas influências.

Os métodos de redução, na literatura geodésica, são classificados segundo a consideração ou não do conceito de isostasia. Sintetizando temos as reduções mais usuais:

(a) - Reduções não isostáticas:
- . Redução do ar-livre;
- . Redução de Bouguer;
- . Redução por inversão de massas ou de RUDSKY;
- . Redução por condensação de massas ou de HELMERT.

(b) - Reduções isostáticas:
- . Redução no modelo Pratt-Hayford;
- . Redução no modelo Airy-Heiskanen;
- . Redução regional de Vening-Meinesz.

Cada método possui vantagens e desvantagens que podem ser aproveitadas para fins de prospecção geológica ou geodésicos. Nos itens que seguem estaremos interessados na discussão sucinta de cada uma das reduções anteriores e suas vantagens do ponto de vista geodésico.

## 4.2 - Reduções não isostáticas:

### 4.2.1 - Redução do ar-livre:

A primeira redução que se faz necessária é a que torne possível a comparação dos valores observado sobre uma mesma superfície ou nível, consagrada na literatura mundial como redução do ar-livre.

Esta primeira redução deverá eliminar a influência do afastamento entre as duas superfícies, o que é possível mediante o conhecimento da taxa de variação, gradiente vertical, do vetor gravidade no caminho A B, fig. (4.21.1).

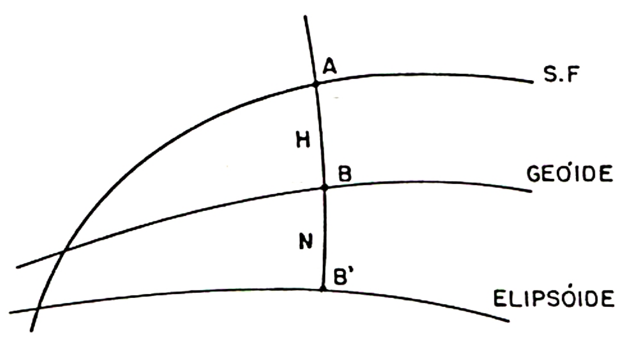



Fig. (4.2.1-1) — O SIGNIFICADO DAS REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS

A experiência tem demonstrado que a gravidade diminui a medida que a altitude aumenta, este fato é plenamente justificável já que a medida que nos afastamos das massas de atração o seu efeito diminui; além disso,a força centrífuga aumenta. Como o efeito da atração e da força centrífuga são antagônicos, justifica-se a diminuição da gravidade.

Em paralelo ao efeito da altitude, as massas existentes entre a superfície geoidal e real exercerão uma certa influência, entretanto na dedução das fórmulas representativas desta redução partiremos do princípio de que estas massas não acarretam qualquer efeito. Este procedimento é aproximado, justificando-se a denominação de ar-livre para o processo.

O potencial gravitacional terrestre é composto de duas partes; uma devida a atração e a outra resultante do movimento de rotação terrestre. Conforme vimos no capítulo 2, poderemos escrever o geopotencial:

$$W = V + Z \qquad \ldots(4.2.1.1)$$

onde

$$Z = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)\,\omega^2 \qquad \ldots(4.2.1.2)$$

e o seu laplaciano é escrito:

$$\Delta^2 Z = +\,2\,\omega^2 \qquad \ldots(4.2.1.3)$$

com isso temos:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = + 2\ \omega^2 \qquad ...(4.2.1.4)$$

já que $\Delta^2 V=0$.

Consideremos uma superfície equipotencial $W = c^{\underline{te}}$, representada pela equação diferencial:

$$\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial\ y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = 0 \qquad ...(4.2.5)$$

para o plano xPz, fig. (4.21.2), temos que dy = 0 e da (4.21.5) tiramos:

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{dz}{dx} \qquad ...(4.2.1.6)$$

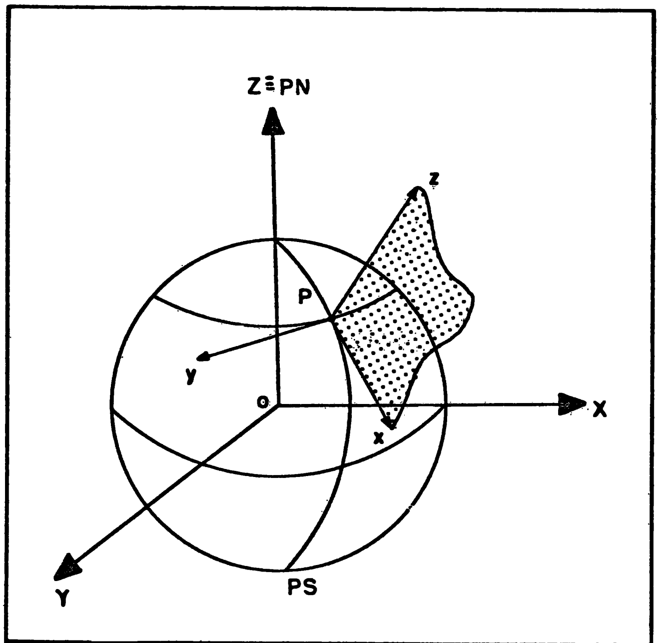



Fig. (4.2.1-2) — SECÇÕES NORMAIS

O raio de curvatura (M) da interseção do plano xPZ com a superfície W= $c^{\underline{te}}$, tangente a origem, é dado por, |31| ou |74|:

$$\frac{1}{M} = - \frac{d^2 z}{dx^2} \qquad ...(4.2.1.7)$$

na origem:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ e } (\frac{\partial w}{\partial x})_o = 0 \qquad ...(4.2.1.8)$$

donde vem:

$$\frac{1}{M} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad ...(4.2.1.9)$$

de maneira análoga, tomando o plano $y\underline{P}z$ e dx=o vem:

$$\frac{1}{N^*} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad ...(4.2.1.10)$$

Substituindo as (4.2.1.9/10) na (4.2.1.4), obtemos o gradiente vertical da gravidade.

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{d\gamma}{dz} = - \gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N^*}\right) - 2\,\omega^2 \qquad ...(4.2.1.11)$$

tendo em vista as expressões de M e N*, |62|:

$$N^* = \frac{a}{(1-e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad \text{e} \quad M = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1-e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^{3/2}} \qquad ...(4.2.1.12(a))$$

a expressão da gravidade normal:

$$\gamma = \gamma_e(1 + \quad \mathrm{sen}^2\ \phi) \qquad ...(4.2.1.12(b))$$

e os valores numéricos usuais (HAYFORD):

$$a = 6\ 378\ 388{,}0\ \mathrm{m} \qquad \gamma_e = 9{,}78049\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

$$e^2 = 0{,}00672267 \qquad \beta = 0{,}00528838$$

$$\omega = 729212 \times 10^{-10}\ \mathrm{rad\ s^{-1}} \qquad ...(4.2.1.12(c))$$

resulta para o gradiente vertical por metro:

$$\frac{d\gamma}{dz} = - 0{,}30855 - 0{,}00021 \cos 2\phi\ \mathrm{mgal/m} \qquad ...(4.2.1.13)$$

sendo (g) o valor observado na altitude (H), o valor reduzido ao nível médio dos mares será:

$$\boxed{g_a = g + (0{,}30855 + 0{,}00021 \cos 2\phi)\ H\ \mathrm{mgal}} \qquad ...(4.2.1.14)$$

A fórmula anterior foi deduzida para a superfície de referência, contudo a experiência tem demonstrado que pode ser utilizada, em altitudes médias (±1000m) sem perda de precisão. Quando necessário maior rigor, o gradiente não poderá ser admitido constante, e a introdução de um termo corretivo faz-se necessário, |67| e |72|.

$$- 0{,}000\ 072 \left(\frac{H}{1000}\right)^2$$

Com este podemos escrever a fórmula rigorosa da redução do ar-livre:

$$\boxed{g_a = g + (0{,}30855 + 0{,}00021 \cos 2\phi - 72.10^{-9}\ H)\ H\ \text{mgal}}$$

...(4.2.1.15)

As anomalias obtidas a partir do valor ($g_a$) dado pelas (4.2.1.14 ou 15) são denominadas **Anomalias do ar-livre**:

$$\boxed{\Delta g_a = g_a - \gamma}$$

...(4.2.1.16)

### 4.2.2 - Redução de Bouguer:

No item anterior estabelecemos a expressão que nos permite eliminar a influência da altitude sobre os valores observados da gravidade; evidentemente a hipótese simplificativa imposta, inexistência de massas entre o geóide e a superfície física, é irreal. As massas entre superfícies não são negligenciáveis e deverão ter seus efeitos eliminados.

Consideremos, numa primeira aproximação, que a estação de observação P situa-se sobre uma lâmina material de espessura (H)tangente em (P'); correspondente de (P) na superfície geoidal, fig. (4.2.2.1).

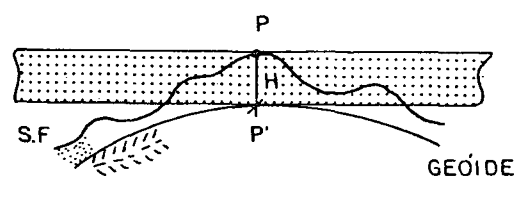



Fig (4.2.2-1)— LÂMINA DE BOUGUER

A introdução da lâmina de massa (M) tende a **aumentar** o valor da gravidade observada; em conseqüência a eliminação deste efeito far-se-á através de uma **correção subtrativa** ao valor observado da gravidade.

A atração exercida por uma lâmina infinita, homogênea de densidade ($\delta$), é relativamente fácil de calcular. Considerando a fig.(4.2.2.2), podemos expressar a componente vertical da atração, em módulo, exercida pelo elemento de volume dx dy dz, pela expressão, |72|:

$$dA = G\delta \frac{dx\ dy\ dz}{x^2 + y^2 + z^2} \cos\alpha \qquad ...(4.2.2.1)$$

como

$$\cos\alpha = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad ...(4.2.2.2)$$

temos:

$$dA = G\,\delta \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz \qquad ...(4.2.2.3)$$

Estendendo-se a toda a lâmina:

$$A = 4G\,\delta \int_0^z dz \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{z\,dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad ...(4.2.2.4)$$

realizando as integrações:

$$A = 4G\,\delta \int_0^z dz \left| \text{arc tg} \frac{x}{z} \right|_0^\infty \qquad ...(4.2.2.5)$$

$$A = 2\pi G\,\delta z \qquad ...(4.2.2.6)$$

Podemos eliminar na expressão anterior a constante da gravitação (G), usando a gravidade (g) que aproximadamente é dada por:

$$g = G \frac{M_T}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \Delta R \qquad ...(4.2.2.7)$$

onde (R) é um valor médio para o raio da Terra e ($\Delta$) o valor médio da densidade. Desta maneira obtemos para A,

$$\boxed{A = \frac{3}{2} \frac{\delta}{\Delta} \frac{g}{R} H} \qquad ...(4.2.2.8)$$

onde (H) é a altitude da estação, em substituição a (z) na expressão geral (4.2.2.6).

Introduzindo os valores numéricos: $\delta = 2,67$ e $\Delta = 5,576$ e o raio médio para o elipsóide de Hayford vem:

$$\boxed{A = 0,1118\ H} \qquad ...(4.2.2.9)$$

O termo corretivo anterior, calculado a partir da lâmina material, deverá ser associado com a redução do ar-livre. A gravidade reduzida será escrita:

$$g_B = g_a - A \qquad ...(4.2.2.10)$$

e a **anomalia Bouguer** será:

$$\boxed{\Delta g_B = \Delta g_a - A} \qquad ...(4.2.2.11)$$

A expressão anterior é denominada na literatura geodésica de **Anomalia Bouguer simplificada.** Foi originalmente deduzida por BOUGUER em 1749 |BOUGUER, P. - **La Figure de la Terre**, Paris 1749|.

A expressão (4.2.2.6) foi deduzida para um platô de espessura (H) e horizontalmente infinito. Evidentemente esta concepção é válida para uma Terra plana.

A introdução da curvatura terrestre implica em considerarmos a chamada calota de Bouguer, i é, uma porção da superfície esférica que se estende do ponto estação por uma distância arbitrária (normalmente 166,7 km, coincidente com o limite da zona "O" de Hayford).

A introdução da calota é realizada indiretamente, considerando-se na (4.2.2.10) mais um termo (B) que reduz o platô à calota. Na verdade esta parcela resulta da diferença entre a componente vertical da atração exercida pelo platô e a da calota (B); é conhecida na literatura geodésica como "**Termo de Bullard**" e encontra-se tabelado em |32| e |47|.

Na introdução do platô de Bouguer e posteriormente na redução à calota esférica, tomamos a espessura igual a altitude da estação. Com este procedimento desprezamos as massas acima da cota da estação e considerarmos como tendo massa, as áreas de cota inferior a de (P), fig.(4.2.2.3). Torna-se necessária a eliminação destas massas excedentes, o que é realizado através da **correção do terreno.**

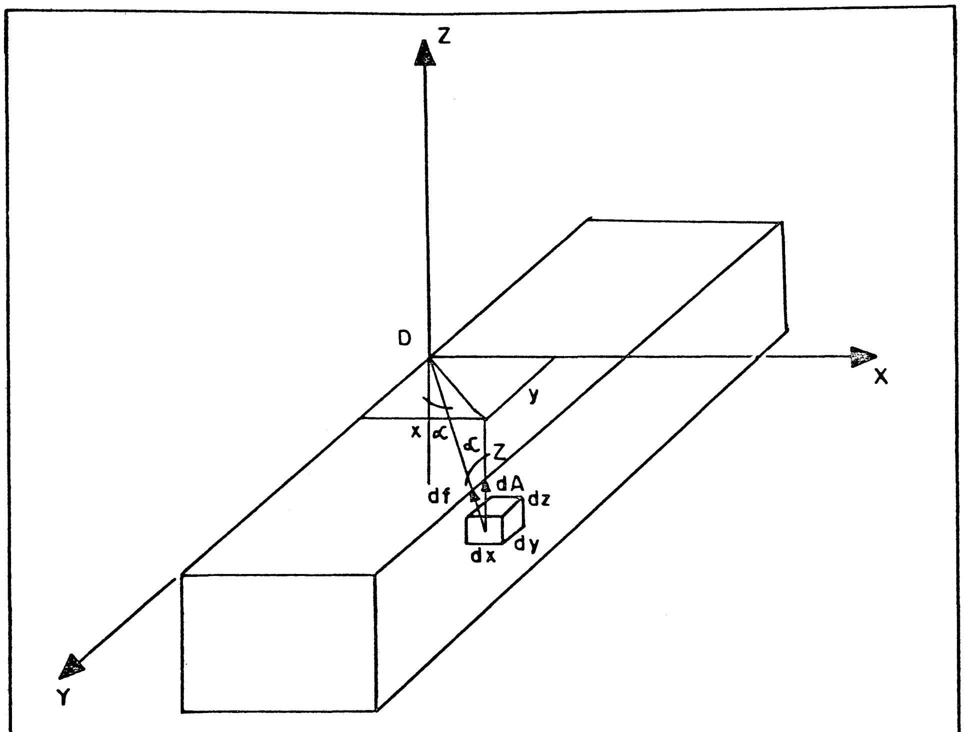



Fig. (4.2.2-2) — ATRAÇÃO EXERCIDA POR UM VOLUME ELEMENTAR.

A correção do terreno é de amplitude menor que a correspondente associação das anteriores, contudo exige maior volume de cálculo e boas cartas topográficas em grandes escalas.

O excesso de massa dos maciços montanhosos ou dos vales preenchidos com a introdução do platô, tende a **diminuir** o valor observado da gravidade, o que acarreta **correções aditivas** na eliminação dos efeitos.

A consideração do efeito do relevo é realizada em duas etapas. A primeira compreende o cálculo do efeito correspondente ao relevo da área limitada pela calota; a segunda leva em consideração o restante da Terra e o cálculo é efetuado simultaneamente com a do efeito isostático, esta parcela é normalmente denominada correção **topo-isostática.**

No cálculo do efeito do relevo em torno da estação, comumente consideramos esta área dividida em prismas curvilíneos. A contribuição de cada prisma é calculada a partir de expressões analíticas considerando suas espessuras; diferença entre a altitude média do prisma e a da estação de cálculo, como constantes. O efeito global é calculado a partir das contribuições prismáticas individuais.

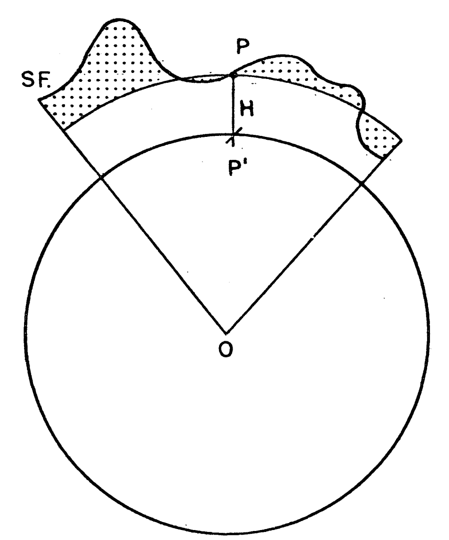



Fig. (4.2.2-3)-CALOTA DE BOUGUER

A divisão do terreno em prismas curvilíneos é realizada com o uso de gabaritos do tipo apresentado na fig. (4.2.2.4). No interior de cada trapézio esférico, correspondente à face superior do prisma, é estimada a altitude média a partir de cartas topográficas. A diferença, altitude média menos altitude da estação, é tomada como altura do prisma e a contribuição para a componente vertical da atração é calculada.

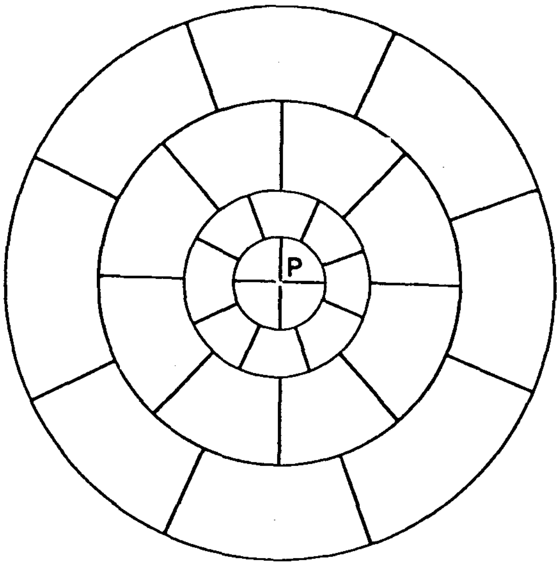



FIG.(4.2.2-4)- EXEMPLO DE UM GABARITO PARA O CÁLCULO DA CORREÇÃO TOPOGRÁFICA

Consideremos a fig. (4.2.2.5) em que desejamos calcular a atração do prisma (a b c d a' b' c' d'). Se denominarmos por ($r_i$) e ($r_{i+1}$) os raios dos círculos limites; (h) a diferença de altitude e por ($\delta$) a densidade, a componente vertical da atração será dada por, |103|:

$$F_i = G\delta \text{ arco } \alpha_i \left| \sqrt{r_i^2 + h^2} - \sqrt{r_{i+1}^2 + h^2} + r_{i+1} - r_i \right| \qquad \ldots(4.2.2.12)$$

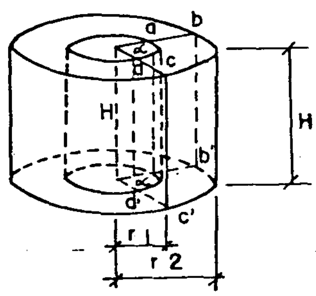



Fig.(4.2.2-5)—ATRAÇÃO DE UM PRISMA CILÍNDRICO

Existem diversos procedimentos para divisão do terreno em zonas concêntricas; o mais usual é o desenvolvido por Hayford, cujos raios são apresentados na tabela (4.2.2.1). São consideradas duas regiões de cálculo; uma limitada pelo círculo de 166,735 km de raio e a outra estendendo-se so limite anterior por toda a Terra. Na primeira região as zonas são denominadas por letras de A a O(zonas literais de Hayford) e na segunda por números de 18 a 1 (zonas numeradas).

O cálculo do efeito de cada compartimento é realizado a partir de tabelas; a mais usual é a de LEJAY |172|, desenvolvida a partir das fundamentais de CASSINIS, e aplica-se às zonas literais de Hayford. Em |32| é apresentada a tabela devida a Bullard para o cálculo da correção do terreno.

O efeito total será representado por:

$$C = \sum_{i=1}^{n} G\delta \text{ arco } \alpha i \left(\sqrt{ri^2 + h^2} - \sqrt{r^2_{i+1} + h^2} + r_{i+1} - r_i\right) \quad \ldots(4.2.2.13)$$

e a gravidade reduzida, levando em consideração as três correções, será:

$$\boxed{g_{BC} = g_a - A - B + C} \quad \ldots(4.2.2.14)$$

TABELA (4.2.2.1)

DIVISÃO EM ZONAS SEGUNDO HAYFORD

| ZONA | RAIO EXTERNO | Nº DE COMPARTIMENTO | ZONA | RAIO EXTERNO | Nº DE COMPARTIMENTO |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 1 | 18 | 1º41'13" | 1 |
| B | 68 | 4 | 17 | 1 54 52 | 1 |
| C | 230 | 4 | 16 | 2 11 53 | 1 |
| D | 590 | 6 | 15 | 2 33 46 | 1 |
| E | 1280 | 8 | 14 | 3 03 05 | 1 |
| F | 2290 | 10 | 13 | 4 19 13 | 16 |
| G | 3520 | 12 | 12 | 5 46 34 | 10 |
| H | 5240 | 16 | 11 | 7 51 30 | 8 |
| I | 8440 | 20 | 10 | 10 44 | 6 |
| J | 12400 | 16 | 9 | 14 09 | 4 |
| K | 18800 | 20 | 8 | 20 41 | 4 |
| L | 28800 | 24 | 7 | 26 41 | 2 |
| M | 58800 | 14 | 6 | 35 58 | 18 |
| N | 99000 | 16 | 5 | 51 04 | 16 |
| O | 166700 | 28 | 4 | 72 13 | 12 |
| | (1º29'58") | | 3 | 105 48 | 10 |
| | | | 2 | 150 56 | 6 |
| | | | 1 | 180 00 | 1 |

e a correspondente anomalia:

$$\boxed{\Delta g_{BC} = \Delta g_a - A - B + C} \quad \ldots(4.2.2.15)$$

denominada **Anomalia Bouguer completa:**

### 4.2.3 - Redução por Condensação ou de Helmert:

A redução de Bouguer realiza a eliminação das massas externas ao geóide, transferindo-as para o infinito. Neste procedimento a massa da Terra é alterada, o que implica na modificação do potencial. Segundo |47|

as variações introduzidas no geóide, com o uso das anomalias de Bouguer, podem atingir em alguns lugares 500 m, o que invalida o uso destas para propósitos geodésicos.

Com o intuito de contornar as impossibilidades de uso da redução de Bouguer,na eliminação das massas anômalas, HELMERT | Helmert, F.R. - Die mathematischen und physicalischen theorien derlöheren Geodäsie, vol. 2 Leipzig, B. G. Teubner, 1884 (Reimpresso em 1962)| idealizou um método em que estas não seriam mais transferidas e sim condensadas na superfície do geóide.

A topografia agora é condensada de maneira a formar uma camada material sobre o geóide, fig. (4.2.3.1) de densidade

$$\delta = \rho H$$

de maneira que a massa da Terra permanece inalterada. As massas são deslocadas, prensadas, ao longo da vertical.

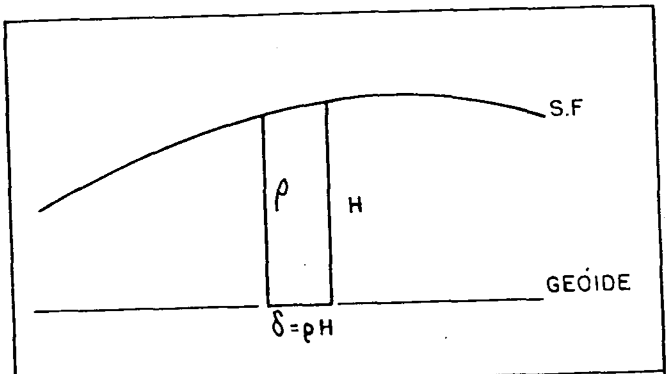



Fig.(4.2.3.1) REDUÇÃO DE HELMERT

O método desenvolvido por Helmert, admite as seguintes fases, |35|:

- Remoção do platô de Bouguer $-A = -2\ G\ \pi\ \rho\ H$
- Redução do "ar-livre" $\Delta g_a$
- Redução topográfica $+C$
- Condensação do platô e cálculo de sua atração em (P')$+2G\ \pi\ (\rho\ H)$

ou seja:

$$\boxed{\Delta g_H = \Delta g_a + C} \qquad \ldots(4.2.3.1)$$

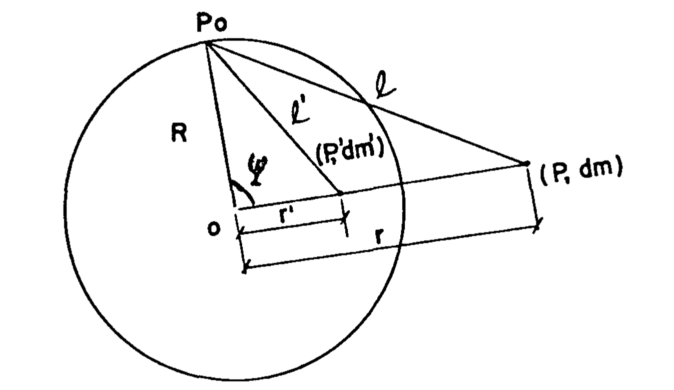
em regiões de topografia pouco acidentada, em que $C \cong 0$, a anomalia de condensação será idêntica à anomalia do "ar-livre". Com isso podemos afirmar, a simples redução do "ar-livre" pode ser considerada como uma ótima aproximação na obtenção de valores de contorno sobre o geóide. Com o mesmo grau de aproximação o co-geóide "ar-livre" coincidirá com o geóide.

Na aplicação da redução por condensação podemos esperar afastamentos entre as figuras, inferiores a 3m |10| e |59|. Em países como o Brasil, em que a topografia é pouco movimentada pode-se esperar deformações inferiores a 25 cm, |32|.

### 4.2.4 - Redução por Inversão ou de Rudsky

Rudsky em 1905 propôs um método para eliminação das massas topográficas, em que estas seriam transferidas para a posição especular no interior da superfície geoidal, sem qualquer alteração no potencial, BAESCHLIN |5|.

Consideremos o geóide como uma esfera de raio R, fig. (4.2.4.1). Suponhamos que o elemento de massa (dm) em (P), é deslocado para um elemento (dm) num certo ponto (P') no interior do geóide sobre o mesmo raio vetor.




FIG(4.2.4.1)REDUÇÃO DE RUDSKY

O potencial devido a estes elementos de massa no ponto geoidal ($P_o$) é:

$$d\,W_p = G\,\frac{dm}{\ell} = \frac{G\,dm}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\psi}} \qquad \ldots(4.4.1)$$

$$d\,W_{p'} = G\,\frac{dm'}{\ell'} = \frac{G\,dm'}{\sqrt{r'^2 + R^2 - 2Rr'\cos\psi}}$$

como o potencial não deve se alterar temos:

$$d\,W_p = d\,W_{p'}$$

o que é verificado se:

$$dm' = \frac{R}{r}\, d\, m \qquad \ldots(4.4.2)$$

e

$$r' = \frac{R^2}{r}$$

A segunda condição

$$r\, r' = R^2 = \underline{cte}$$

nos prova serem P e P' pontos inversos.

Da primeira condição vem:

$$dm' = dm.\ R$$

e como $r > R$ resulta $dm' < dm$, significando que a invariabilidade do potencial exige que uma pequena parte das massas topográficas não seja transferida. Normalmente negligenciamos esta diferença e fazemos $dm=dm'$.

Desde que o potencial é mantido e a massa aproximadamente, também é; o co-geóide de inversão e o geóide coincidirão; contudo o campo externo à superfície da Terra é alterado, o que invalida as comparações com os valores obtidos por geodésia celeste. A redução por inversão não tem qualquer significado geofísico, |48|.

## 4.3 - Modelos Isostáticos:

As anomalias de Bouguer nas áreas elevadas de topografia suave são quase sempre negativas. Nas regiões oceânicas em que substituímos a lâmina d'água por um platô material com densidade igual à média da crosta, as anomalias de Bouguer são quase sempre positivas. Nas áreas litorâneas planas as anomalias de Bouguer são quase nulas, fato que implica em considerarmos a distribuição de massas como homogênea, a qualquer profundidade da superfície do geóide.

As considerações anteriores levam-nos a afirmar que às regiões elevadas correspondem subcorticalmente regiões de material menos denso que as correspondentes profundidades oceânicas com laterial mais denso.

Com estas considerações podemos enunciar o postulado da isostasia, que nos fala do estado de equilíbrio da litosfera sob a ação da gravidade. Aos excessos de massa das áreas continentais se contrapõem deficiências de massa em relação à superfície geoidal, verificando-se o inverso nas áreas de deficiência,oceânicas.

Desta maneira podemos dizer que uma região encontra-se isostaticamente compensada quando o equilíbrio isostático é atingido ($\Delta g \cong 0$).

Quando o equilíbrio está se processando a região é sub-com -

pensada ($\Delta g < 0$). As regiões em que o equilíbrio foi ultrapassado denominamos de super compensadas ($\Delta g > 0$).

Admitindo o equilíbrio isostático, aceita-se a igualdade em módulo, dos valores das massas topográficas e de compensação. Como as singularidades da superfície topográfica e as correspondentes de compensação apresentam efeitos de grande amplitude embora de sinais contrários, o efeito conjunto será de pequena amplitude, o que de início nos coloca em posição vantajosa para o uso de altitudes médias extraídas de cartas topográficas e batimétricas de precisão variável.

Duas diferentes teorias para explicar os princípios de compensação foram desenvolvidas. Em 1854 J. H. Pratt apresentou ao mundo científico os resultados de suas análises da triangulação indiana, principalmente sobre as discrepâncias encontradas entre as coordenadas geodésicas e astronômicas dos vértices Kalianpur e Kaliana da referida triangulação; contudo nenhuma conclusão ou teoria para explicar o fenômeno foi apresentada. Posteriormente, em 1859, apresentou o sistema isostático que recebe o seu nome. Em 1855, G. B. Airy utilizando os dados divulgados por Pratt em 1854 estabeleceu a teoria que leva o seu nome.

**O SISTEMA PRATT-HAYFORD**, foi desenvolvido por Pratt e tratado praticamente por Hayford, que o usou sistematicamente para propósitos geodésicos.

O princípio do sistema está representado na figura (4.3.1). O sistema admite uma profundidade de compensação constante, segundo a qual processa-se o equilíbrio isostático a partir das variações de densidade das camadas internas a superfície geoidal, i é, sob as massas topográficas existe uma deficiência de densidade e abaixo das bacias oceânicas um excesso em relação ao valor padrão correspondente às massas superficiais.

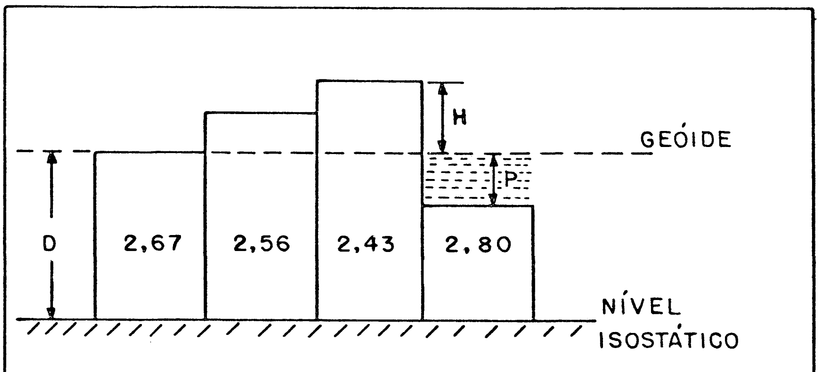



Fig. (4.3-1) — SISTEMA ISOSTÁTICO PRATT — HAYFORD

Supondo que (D) seja a profundidade do nível de compensação, tomado a partir do geóide, e considerando ($\delta o$) como a densidade de uma colu na de altitude (D), então a densidade ($\delta$) de uma coluna (D + H) satisfaz à equação:

$$(D + H)\,\delta = D\,\delta o$$

que representa a condição de igualdade de massas. Tomando-se para ($\delta o$) o valor médio 2,67 g/cm³, a densidade ($\delta$) terá que ser menor que a padrão, conseqüentemente existirá uma deficiência de massas que será dada por:

$$\Delta\,\delta = \delta o - \delta = \frac{H}{D+H}\,\delta o \qquad \ldots(4.3.1)$$

Para as áreas oceânicas a condição será dada por:

$$(D - P)\delta + P\,\delta_A = D\,\delta o \qquad \ldots(4.3.2)$$

onde $\delta_A$=1,027 g/cm³, corresponde à densidade da água e (P) a profundidade oceânica. O excesso de massa da coluna suboceânica será dado por:

$$\delta - \delta o = \frac{P}{D - P}\,(\delta o - \delta_A) \qquad \ldots(4.3.3)$$

Este modelo de compensação é puramente teórico e esquemático, e sua idealização na natureza só é conseguida aproximadamente. Valores para a profundidade de compensação são tomados, arbitrariamente, em torno de 100 km.

**O SISTEMA AIRY-HEISKANEN**, o modelo foi proposto por Airy, e Heiskanen deu-lhe uma formulação precisa para propósitos geodésicos.

Na fig. (4.5.2) encontra-se representado o princípio do sistema. Os objetivos deste são os mesmos do anteriormente descrito, variando somente a forma com que são atingidos. Enquanto no modelo de Pratt a densidade era suposta variar, mantendo-se constante a profundidade de compensação, no de Airy as densidades são fixadas e o nível isostático é considerado variável.

As massas topográficas, de densidade constante ($\delta_1$=2,67) flutuam sobre um material de densidade constante superior ao das massas superficiais ($\delta_2$=3,27).

Se representarmos a diferença de densidades, $\delta_2 - \delta_1$, por $\Delta\delta$, com os valores numéricos anteriores temos:

$$\Delta\delta = 0{,}6 \text{ g/cm}^3$$

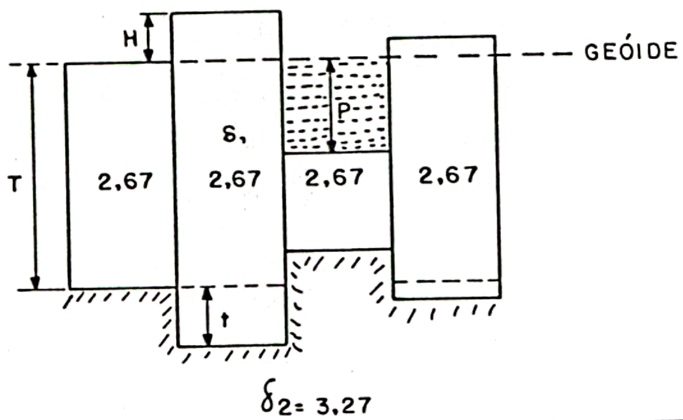



Fig. (4.3 - 2) —— SISTEMA ISOSTÁTICO AIRY — HEISKANEN

a altitude da topografia por H e a espessura da correspondente "raiz" por (t), a condição de equilíbrio será:

$$t \, \Delta\delta = H \, \delta_1 \qquad \ldots(4.3.4)$$

de maneira que:

$$t = \frac{\delta 1}{\Delta\delta} H = 4,45 \; H \qquad \ldots(4.3.5)$$

Para os oceanos a condição é:

$$t' \, \Delta\delta = P(\delta_1 - \delta_A)$$

com isso

$$t' = \frac{\delta_1 - \delta_A}{\delta_2 - \delta_1} P = 2,74 \; P \qquad \ldots(4.3.6)$$

A espessura normal da crosta é representada por (T), valores numéricos em torno de 30 km são utilizados como representativos.

**O SISTEMA REGIONAL DE VENING-MEINESZ** não utiliza os mesmos princípios dos anteriores. Neste sistema em vez de consideramos a compensação como sendo local, massas de compensação imediatamente abaixo das topográficas, é utilizada a concepção regional.

Vening-Meinesz partindo da concepção de Airy de um SIAl flutuando sobre um magma fluído e mais denso, encarou as elevações topográficas como esforços capazes de deformarem a litosfera. Baseado nos estudos de HERTZ, estipulou valores médios para a espessura e características estáticas da crosta terrestre, estabelecendo com isso uma curva de flexão. Admitiu que as massas de compensação estendiam-se horizontalmente até uma distância R (raio da regionalidade) da estação de cálculo, enquanto que a densidade de compensação, máxima na vertical da estação, diminuia proporcionalmente às ordenadas da curva de flexão, anulando-se à distância (R). Na fig. (4.3.3) representamos esquematicamente a comparação entre compensação local e regional.

O modelo criado por Vening-Meinesz é mais realista que os anteriores, contudo bem mais complexo nas aplicações práticas.

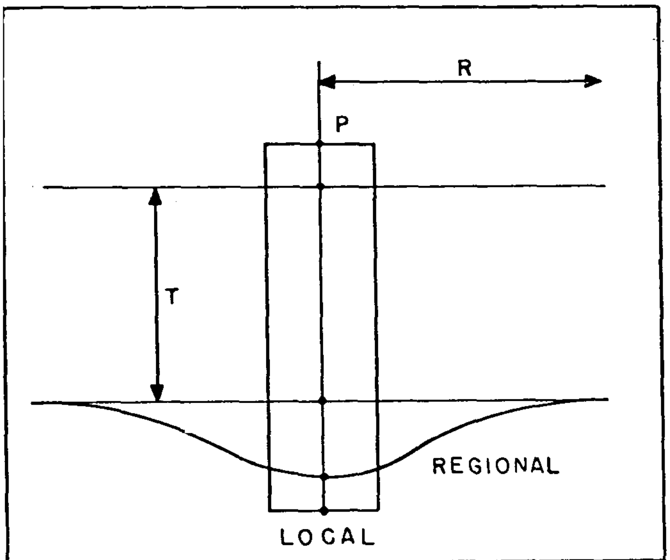



Fig. (4.3-3) — SISTEMA ISOSTÁTICO REGIONAL DE VENING-MEINSZ

## 4.4 - Reduções isostáticas

O objetivo das reduções isostáticas é regularizar a crosta terrestre de acordo com um dos modelos anteriores. As massas topográficas não são completamente eliminadas como na redução de Bouguer, elas são transferidas para o interior do geóide de modo a equilibrar as deficiências de massas que existem sob os continentes. No modelo isostático de Pratt-Hayford as massas topográficas são distribuídas entre o nível de compensação e o nível do mar, transformando as densidades crustais variáveis no valor padrão. No sistema Airy-Heiskanen as massas topográficas superficiais são transferidas para as suas raízes, transformando a densidade crustal constante para o valor do magma ($3{,}27\ g/cm^3$).

Em suma, a topografia é removida junto com as correspondentes massas de compensação e o resultado final, ideal, é uma crosta homogênea de densidade igual a padrão e espessura constante (D) ou (T).

O processo de redução realiza-se segundo três aspectos básicos:

(a) - a topografia é removida;

(b) - as massas de compensação são removidas;

(c) - o valor observado é reduzido ao geóide (redução do ar-livre).

Os tópicos (a) e (c) processam-se como na redução de Bouguer, o (b) pode ser alcançado procedendo-se de maneira análoga à obtenção da correção topográfica.

A região em torno da estação de cálculo é dividida em zonas circulares concêntricas e por radiais, formando compartimentos nos quais estimamos a altitude média por comparação com cartas topográficas existentes. A contribuição de cada compartimento é obtida a partir de valores tabelados para constantes (T) ou (D) pré-fixados.

Para o modelo Pratt-Hayford, temos a contribuição, para a atração, de cada compartimento dada pela expressão, |42|.

$$\Delta F = \frac{2\pi}{n} G\delta \left| \sqrt{r_{i+1}^2 + H^2} - \sqrt{r_i^2 + H^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{r_{i+1}^2 + (D + H)^2} + \sqrt{r_i^2 + (D + H)^2} \right|$$

...(4.4.1)

em que (n) é o número de compartimentos em que a zona está dividida, ($r_i$) e ($r_{i+1}$) são os raios limites da zona, (H) a altitude média e (D) a profundidade de compensação. Evidentemente a atração final será:

$$F_T = \Sigma \, \Delta \, F$$

Para a divisão em zonas dada por Hayford(tabela 4.2.2.1); profundidade de compensação D = 113,7 km e densidade padrão $\delta$ = 2,67 g/cm³, HAYFORD e BOWIE apresentam em |42| uma tabela em função de (H) e dos raios limites da zona, que fornece o valor da contribuição do compartimento por metro de altitude, evitando-se o cálculo da expressão (4.4.1). A tabela é original; posteriormente sofreu modificações por LAMBERT, que considerou a convergência dos lados prismáticos em função da curvatura terrestre |101|.

Para o modelo Airy-Heiskanen, a atração dos compartimentos é dada por:

$$\Delta F = \frac{2}{n} G\delta \left| \sqrt{r^2_{i+1} + (H+T)^2} - \sqrt{r^2_i + (H+T^2)} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{r^2_{i+1} + (H+T+t)^2} + \sqrt{r^2_i + (H+T+t)^2} \right|$$

...(4.4.2)

onde as quantidades envolvidas tem o mesmo sentido da (4.4.1), a exceção de (T) que é tomado em torno de 30 km e (t) altitude da "raiz" dado pela (4.3.5).

À semelhança da anterior, os seus valores por compartimen -

tos são tabelados em função de (H) e para T = 20, 30, 40 e 60 km, por HEISKANEN em |44|.

Tabelas para a redução regional de Vening-Meinesz são dadas em |122|.

Desde que o efeito combinado das massas topográficas e de compensação para as zonas numeradas de Hayford entre 1 e 18 varie linearmente, podemos representá-lo na forma de mapas de isocorreções, evitando o uso de gabaritos. A elaboração de mapas deste tipo foi realizada pela primeira vez em 1938 por HEISKANEN e NUOTIO, os mais recentes datam de 1961, |56|.

As anomalias isostáticas são definidas a partir da gravidade reduzida:

$$\boxed{g_I = g_a - A - B + C + C_I} \qquad \ldots(4.4.3)$$

onde ($C_I$) é a correção isostática, os demais tem o mesmo significado dos itens anteriores. A anomalia é dada por:

$$\boxed{\Delta g_I = \Delta g_a - A - B + C + C_I} \qquad \ldots(4.4.4)$$

### 4.5 - Efeito Indireto

Ao remover ou transferir as massas envolvidas nas reduções, o potencial gravitacional é alterado, em conseqüência o geóide. Esta alteração do geóide é o **efeito indireto** das reduções gravimétricas.

Como a utilização da fórmula de Stokes e Vening - Meinesz pressupõe a inexistência de massas perturbadoras, bem como sejam mantidas relações rígidas de potencial e massa, entre a Terra e o geóide, a introdução destas anomalias não nos conduzirá a determinação do geóide, mas ao co-geóide. A cada tipo de redução corresponderá um co-geóide diferente.

Supondo que a geondulação do co-geóide é (N'), a ondulação (N) do geóide real será:

$$N = N' + dN$$

onde dN é uma componente gerada pelo efeito indireto e é dada pela derivada da fórmula de Bruns (3.2.4) em que temos:

$$dN = \frac{dW}{\gamma}$$

onde dW é a alteração do potencial do geóide.

A variação do potencial (dW) é difícil de ser calculada, entretanto existem tabelas que facilitam os cálculos, como é o caso das de LAMBERT |69| e as de LEJAY |73|. Como a variação do efeito indireto entre pontos na superfície terrestre é linear, HEISKANEN e NISKANEN, |46|, elaboraram mapas mundiais em isolinhas que permitem a sua obtenção. Os mapas foram elaborados com base na malha de Hayford.

O efeito indireto é mais sensível nas anomalias de Bouguer, |48|. Nas anomalias isostáticas é sensível, exigindo correções fornecidas pelas tabelas e mapas anteriormente comentados. As anomalias do ar-livre apresentam efeito indireto desprezível, |47|.

Ao final fica uma indagação, **que método de redução usar para propósitos geodésicos?**

**Em princípio**, todas as reduções são equivalentes e todas, conduzem ao mesmo geóide, quando é considerado o efeito indireto. Contudo na escolha do tipo de redução a adotar devemos ter em vista alguns requisitos que devem ser atendidos. Segundo HEISKANEN & MORITZ, |48, pg. |151|, enumeram-se:

(a) - As anomalias obtidas a partir dos valores reduzidos deverão ser as mais representativas possíveis da área em sua vizinhança;

(b) - A redução deve ter significado geodésico;

(c) - O efeito indireto não deverá ser grande.

As anomalias de Bouguer, de grande significado geofísico e com boas propriedades para interpolação e extrapolação, não se prestam ao cálculo do geóide pelo grande efeito indireto que apresentam.

A anomalia de Rudsky não tem nenhum efeito indireto, entretanto o processo de redução altera o potencial extermo, de grande significado para a geodésia celeste e que deve ser mantido. As anomalias não tem qualquer significado geofísico; o uso geodésico deste tipo deve ser evitado.

A redução por condensação ou de Helmert, é simples de ser calculada, já que podemos condundí-la com a redução do "ar-livre". As anomalias resultantes têm efeito indireto negligenciável, além de possuirem significado geodésico. A estreita dependência destas em relação à topografia praticamente as proscrevem para as técnicas de interpolação.

As anomalias isostáticas têm significativo interesse geofísico, além de serem ideais para o uso de técnicas de interpolação, o seu efeito indireto é relativamente pequeno.

Dentro deste esquema as anomalias do "ar-livre" e isostática devem ser consideradas como as melhores para o uso geodésico. As anomalias do "ar-livre" apresentam uma grande vantagem sobre as isostáticas, a facilidade de cálculo, não estando na dependência da existência de cartas topográficas e batimétricas para a sua obtenção.

O material gravimétrico representativo do campo gravitacional terrestre, catalogado e distribuido, está expresso em termos de anomalias do "ar-livre", sendo indubitavelmente uma grande condicionante do uso da redução do "ar-livre" em detrimento da isostática.

# 5. NIVELAMENTO ASTRO-GRAVIMÉTRICO

## 5.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores procuramos expor os princípios da determinação do geóide através do método físico; nenhuma restrição foi imposta quanto aos parâmetros definidores do sistema geodésico em que se realizam os cálculos, o que garante a característica **absoluta** do método, sua principal vantagem. Processando-se as integrações sobre toda a Terra é fácil perceber a desvantagem do mesmo; longe estamos de conhecer o campo gravitacional terrestre em sua totalidade, pois inúmeras são as regiões do globo em que se desconhece ou precariamente se conhece o comportamento do campo, o que acarreta imprecisões nas determinações físicas.

Conforme comentamos no primeiro capítulo, a Geodésia Geométrica através do nivelamento **astro-geodésico** nos conduz à determinação do geóide embora de maneira **relativa**, já que os valores das geo-ondulações determinadas por este procedimento alterar-se-ão com a mudança dos parâmetros definidores do ponto datum e da figura de referência. Sua principal vantagem é que o desvio da vertical e a geo-ondulação calculados num determinado ponto encerram a influência de toda a Terra.

Como ambos os métodos apresentam vantagens e desvantagens em suas aplicações, nada mais natural do que procurar um procedimento mixto, que aproveite as vantagens de ambos.

As determinações pelo método astro-geodésico envolvem o efeito da influência de toda a Terra, enquanto que o gravimétrico só poderá ser utilizado com segurança numa região restrita, em que se tenha perfeito conhecimento das anomalias da gravidade. Aproveitando os elementos astro-geodésicos de uma região de trabalho conhecida gravimetricamente, poderemos utilizar o nivelamento astro-geodésico para calcular os efeitos da região externa a de trabalho (estendida dos limites desta a toda a Terra), e o método físico para avaliação no interior da primeira. Desta maneira conceituamos o **nivelamento Astro-Gravimétrico**, introduzindo em 1935 por KRASSOWSKI e desenvolvido por MOLODENSKII, |66| e |84|.

A grande vantagem do método é expressa pelo fato de que quando aplicado em paralelo com o gravimétrico poderemos dispensar a análise das anomalias na região externa à de trabalho.

## 5.2 - Fundamentos do nivelamento Astro-Gravimétrico:

Consideremos uma região ($\sigma$) na qual pretendemos calcular as componentes do desvio da vertical para um determinado ponto P. Nesta região deverão existir alguns pontos astro-geodésicos, além do conhecimento extenso das anomalias da gravidade. Envolvendo ($\sigma$) consideremos uma região

(S), conhecida gravimetricamente; e uma (S') que se estende dos limites de (S) à toda a Terra.

O desvio astro-geodésico de qualquer ponto P pertencente à região ($\sigma$) envolverá três componentes: uma resultante das anomalias da gravidade em (S); uma resultante das anomalias em (S') e a última resultante da diferença angular, no ponto de cálculo, entre o elipsóide utilizado como superfície matemática e o esferóide normal da fórmula da gravidade teórica.

Caso as duas superfícies coincidam, a última componente deixará de existir.

Consideremos a fig. (5.2-1) em que temos representadas estas regiões, e no interior de ($\sigma$) encontram-se dois pontos astro-geodésicos (A) e (B), além do ponto de cálculo P. Os limites de (S) e (S') serão estabelecidos de maneira que a variação da influência da região (S'), em qualquer direção no interior de ($\sigma$), possa ser considerada como linear.

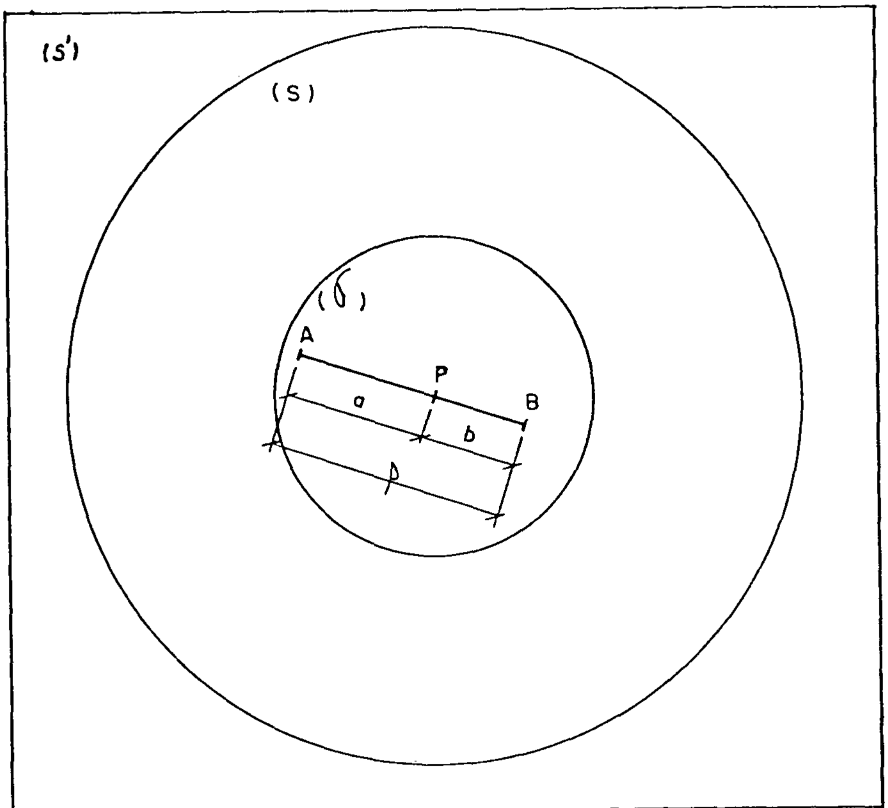



FIG.(5.2-1)— REGIÕES ENVOLVIDAS NO NIVELAMENTO ASTRO-GRAVIMÉTRICO

O efeito das zonas distantes (S') é obtido indiretamente a partir do desvio astro-geodésico (S+S'), menos o gravimétrico de (S) somado ao ângulo entre as normais ao elipsóide e ao esferóide.

Antes de deduzirmos as fórmulas para o método, devemos estabelecer algumas denominações com base nas idéias anteriores. O desvio da vertical será representado pela letra (i) sobreposta aos índices (a) quando a sua determinação for astronômica, (g) quando gravimétrico e (ig) quando resultante do nivelamento astro-gravimétrico, destas considerações vem:

- ia, (M) - a determinação do desvio astro-geodésico num ponto genérico M;
- ig, (M, S) - a componente do desvio emM, obtida a partir das anomalias da gravidade em (S);
- $i_g$(M, S') - a componente do desvio em M, obtida a partir das anomalias em (S');
- $i_g$(M) = ig (M, S') + ig (M, S) - o desvio total gravimétrico como obtido em(M) a partir da soma das componentes em (S')e(S);
- $i_{ig}$(M, S) - a componente do desvio interpolado deduzido a partir da consideração das anomalias em(S);
- $\Delta i$ (M) = $i_a$ (M) - $i_g$(M) - a componente do ângulo formado pelas normais ao elipsóide e ao esferóide em M.

Inicialmente nas deduções consideraremos um caso particular, cujo resultado generalizaremos em seguida.

Pela fig. (5.2-1) e tendo em vista as considerações anteriores,podemos escrever o desvio total ($i_i$) num ponto P situado sobre a reta AB como sendo:

$$i_i(P) = i_g\ (P, S) + i_g\ (P, S') + \Delta i\ (P) \qquad \ldots(5.2.1)$$

com as considerações de variação linear no interior de ($\sigma$), do efeito global de (S'), podemos escrever:

$$i_g(P, S') = i_g\ (A, S') + \frac{a}{s} \left| i_g(B, S') - i_g\ (A, S') \right| \qquad \ldots(5.2.2)$$

de maneira que a (5.2.1) toma a forma:

$$i_i(P) = i_g(P, S) + i_g(A, S') - \frac{a}{s} \left| -i_g(B,S') + i_g(A,S') \right| + \Delta i(P) \qquad \ldots(5.2.3)$$

como

$$i_g\ (A, S') = i_g\ (A) - i_g\ (A, S)$$

e

$$i_g(A) = i_a(A) + \Delta i\ (A)$$

vem:

analogamente

$$\left.\begin{aligned} i_g(A, S') &= i_a(A) - i_g(A, S) - \Delta i\ (A) \\ i_g(B, S') &= i_a(B) - ig(B, S) - \Delta i\ (B) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(5.2.4)$$

substituindo as (5.2.4) em (5.2.3) vem:

$$i_i(P) = i_g(P, S) + i_a(A) - i_g(A, S) - \Delta i\ (A) - \frac{a}{s}\left| i_a(A) - i_g(A, S) - \Delta i(A) - \right.$$

$$\left. - i_a(B) + i_g(B, S) + \Delta i\ (B) \right| + \Delta i\ (P) \quad \ldots(5.2.5)$$

Resolvendo o colchete:

$$i_i(P) = i_g(P, S) + i_a(A) - \frac{a}{s} i_a(A) - i_g(A, S) + \frac{a}{s} i_g(A, S) - \Delta i\ (A) -$$

$$- \frac{a}{s} \Delta i\ (a) - \frac{a}{s}\left| i_a(B) - i_g(B, S) - \Delta i\ (B) + \Delta i\ (P) \right. \quad \ldots(5.2.6)$$

considerando as reduções dos termos semelhantes e tendo em vista que (s-a)= = b vem:

$$i_i(P) = ig\ (P, S) + \frac{b}{s}\left| ia(A) - ig(A, S)\right| - \frac{a}{s}\left| i_a(B) - i_g(B, S)\right| + \left|\Delta i\ (P) -\right.$$

$$\left. - \frac{b}{s}\Delta i\ (A) - \frac{a}{s}\Delta i\ (B)\right| \quad \ldots(5.2.7)$$

Os únicos termos desconhecidos na expressão anterior são os ângulos entre as normais, porém desde que se considerem pontos (A) e (B) afastados de 100 a 200 km, estes ângulos poderão ser desprezados, |84|. Por outro lado, caso as figuras coincidam, justifica-se o abandono destas quantidades. Com isso podemos escrever:

$$i_i(P) = i_g(P,S) + \frac{b}{s}\left| i_a(A) - i_g(A,S)\right| + \frac{a}{s}\left| i_a(B) - i_g(B, S)\right| \quad \ldots(5.2.8)$$

O erro $\varepsilon$ do desvio da vertical interpolado, no que depende da extensão de (S'), é dado pela diferença entre $i_i(P, S)$ e $i_i(P, S + S')$:

$$\varepsilon(P) = i_g(P, S') - \frac{b}{s} i_g(A, S') - \frac{a}{s} i_g(B, S') \quad \ldots(5.2.9)$$

O valor exato de $\varepsilon(P)$ só poderá ser determinado quando se conhece a distribuição da gravidade em (S'). Para o valor máximo E (P) de $\varepsilon(P)$, MOLODENSKII, |84 e 86|, apresenta a fórmula empírica para o cálculo:

$$E(P) = 0'',12 \frac{\ell^2 - \overline{CP}^2}{\rho^2} \Delta g_{max} \qquad \ldots(5.2.10)$$

em que $\Delta g_{max}$ é o valor máximo da anomalia da gravidade em (S'), tomado nas imediações de (S), e expresso em (mgal); ($\ell=\overline{AB}/2$); ($\overline{CP}$) é a distância do centro da reta $\overline{AB}$ ao ponto P e ($\rho$) é o diâmetro da região (S).

Os resultados obtidos para a interpolacão do desvio sobre uma reta ligando dois pontos astro-geodésicos podem ser generalizados segundo um procedimento bem simples. Suponhamos conhecidos em ($\sigma$) alguns pontos astro-geodésicos (no mínimo de três não alinhados), além de ser limitada por um círculo de diâmetro ($\ell$), o menor possível. A segunda região, que contém ($\sigma$), é limitada por um círculo concêntrico ao primeiro de diâmetro ($\rho$) = $2\ell$. A precisão estará garantida na escolha dos raios dos círculos limitantes, já que a influência de (S') deverá ser linear no interior de ($\sigma$), o erro, nestas condições, será inferior ao calculado pela (5.2.10). Garantida a variação linear em ($\sigma$) podemos escrever:

$$i_g\ (M,\ S') + \Delta i\ (M) = Ax + By + C \qquad \ldots(5.2.11)$$

onde A, B e C são constantes para a região ($\rho$) e (x, y) são as coordenadas do ponto (M). Como $\Delta i$ (M) e $i_g$ (M, S') são normalmente desconhecidas e como estes atendem à relação:

$$\Delta i\ (M) + i_g\ (M,S') \overset{\Delta}{=} i_a\ (M) - i_g\ (M,\ S) \qquad \ldots(5.2.12)$$

em que as quantidades à direita são conhecidas para todos os pontos astro-geodésicos em ($\sigma$). Com mais de três pontos não alinhados em ($\sigma$) podemos escrever para cada um, uma equação do tipo:

$$Ax + By + C = i_a\ (M) - i_g\ (M,\ S) \qquad \ldots(5.2.13)$$

em que as quantidades A, B e C poderão ser obtidas pelo MMQ.

Com as constantes calculadas podemos escrever:

$$\boxed{i_i(P) = i_g\ (P,\ S) + Ax_p + By_p + C} \qquad \ldots(5.2.14)$$

expressão que nos permite obter o desvio interpolado em P.

Resumindo podemos estabelecer as operações envolvidas no cálculo do desvio da vertical pelo método do nivelamento astro-gravimétrico:

a) - Cálculo dos desvios gravimétricos devido a região (S), para todos os pontos cujos desvios astro-geodésicos são conhecidos e também para aqueles em que queremos realizar a interpolação;

b) - Cálculos dos coeficientes A, B e C pelo MMQ, em que as equações de observação são do tipo (5.2.13); no cálculo serão envolvidos todos os pontos em que o desvio astro-geodésico é conhecido;

c) - Cálculo dos desvios interpolados mediante a fórmula ...(5.2.14).

## 5.3 - O Cálculo das ondulações geoidais:

De posse do desvio interpolado $i_i(P)$, calculado no perfil $\overline{AB}$, fig. (5.3.1), podemos calcular as ondulações geoidais em qualquer ponto do perfil pela integral:

$$\Delta N = \int_A^B i_i(P)\, ds \qquad ...(5.3.1)$$

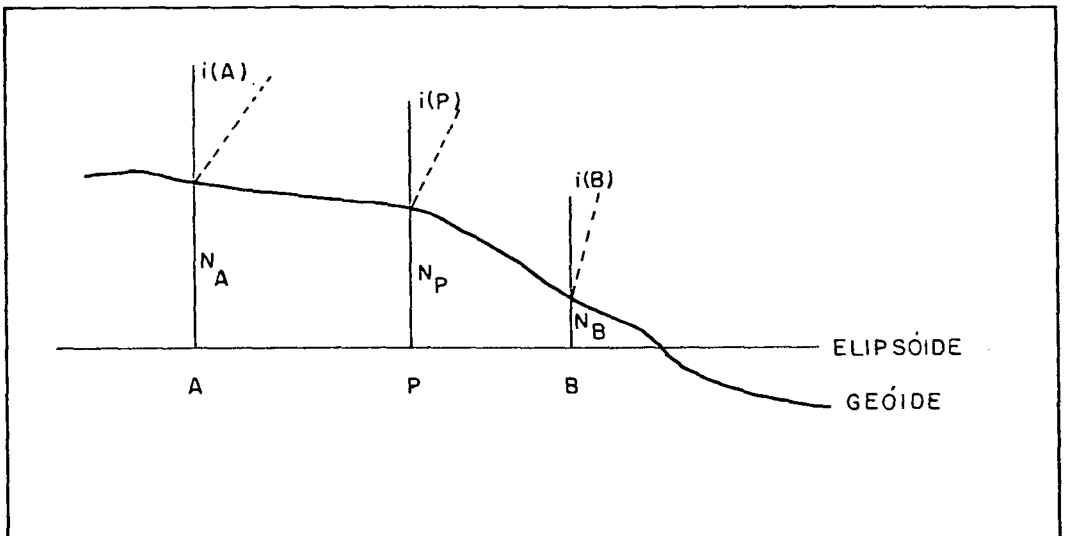



FIG. (5.3-1) – AS ONDULAÇÕES GEOIDAIS E O NIVELAMENTO ASTRO-GRAVIMÉTRICO.

Para resolvermos esta integral, consideraremos um sistema coordenado cartesiano centrado no ponto médio do segmento AB e com o eixo das abcissas (x) coincidente com o segmento; desta maneira a distância AB será S = 2 ℓ, e podemos escrever:

$$\Delta N = \int_{-\ell}^{+\ell} \left| \frac{x+\ell}{2\ell}\, i_g\ (A, S') + \frac{\ell+x}{2\ell}\, i_g\ (B, S') + i_g\ (P, S) + \Delta i\ (P) \right| dx \qquad ...(5.3.2)$$

integrando vem:

$$\Delta N = \ell \left| i_g\ (A, S') + i_g\ (B, S') \right| + \Delta N_s + \Delta N_\rho \qquad ...(5.3.3)$$

em que $(\Delta N_s)$ é a diferença de altura geoidal entre A e B, decorrente das anomalias conhecidas em (S), e ($\Delta N_\rho$) é a variação de altura entre o elipsói de e o esferóide, no segmento $\overline{AB}$.

Substituindo as (5.2.4) em (5.3.2) vem:

$$\Delta N = \left| i_a (A) - i_g (A,S) - \Delta i (A) + i_a (B) - i_g(B,S) + \Delta i (B) \right| \ell + \Delta N_s + \Delta N_\rho \qquad \ldots(5.3.4)$$

grupando os termos semelhantes:

$$\Delta N = \left| i_a (A) + i_a (B) \right| \ell + \left\{ \Delta N_s - \ell \left| i_g (A, S) + i_g (B, S) \right| \right\} + \left\{ \Delta N_\rho - \ell \left| \Delta i (A) + \Delta i (B) \right| \right\} \qquad \ldots(5.3.5)$$

A interpretação da expressão anterior deverá ser feita por partes: a primeira parcela corresponde ao resultado do nivelamento Astro - geodésico com interpolação linear dos desvios astro-geodésicos; a segunda dependente da distribuição da gravidade em (S), corresponde a uma correção gravimétrica do valor astro-geodésico; a terceira corresponde ao efeito do ângulo formado pelas normais ao elipsóide e ao esferóide, expresso em termos dos valores extremos da linha. Normalmente esta terceira parcela poderá ser negligenciada, |80|.

A segunda parcela da (5.3.4) poderá ser calculada a partir do emprego das fórmulas de Stokes e Vening-Meinesz, tomando-se a Terra segundo uma aproximação plana, caso a distância AB seja inferior a 100 km, |84| e |85|.

MOLODENSKII em |84| apresenta um método gráfico que possibilita o cálculo imediato da (5.3.4) sem o problema de cálculos duplos de A para B e de B para A, introduzindo um sistema de hipérboles e elipses confocais, cujos focos coincidem com os extremos do segmento em que se realiza a interpolação.

O procedimento gráfico de Molodenskii foi alterado com grandes vantagens em 1958 por FAN CZJUN que introduziu em lugar da malha de cônicas uma retangular. Em 1961, ARNOLD, |02|, introduziu um novo procedimento de cálculo com a utilização de uma malha dupla de círculos concêntricos.

Não exporemos os métodos citados anteriormente, já que o nosso interesse, no presente trabalho, restringe-se ao cálculo do desvio da vertical.

## 5.4 - O NAG e o cálculo do efeito das zonas distantes sobre as componentes do desvio da vertical.

A potencialidade do Nivelamento Astro-gravimétrico verifica-se, principalmente, no cálculo do efeito das zonas distantes sobre as componentes do desvio da vertical, já que evita a manipulação de dados gravimétricos de todo o globo e o cálculo de anomalias médias na área externa a de trabalho.

Neste tópico apresentamos a sistemática adotada na utilização do NAG para o cálculo do efeito das zonas distantes em três regiões: a primeira contendo (n) pontos astro-geodésicos e conhecida gravimetricamente a segunda, também, conhecida gravimetricamente e mantendo com a primeira a relação de 3/1 nos raios limites e a terceira representando o restante da Terra, cujo efeito queremos calcular.

Tomemos a expressão (5.2.13) desmembrada em duas componentes ($\xi$ e $\eta$), sendo o ponto genérico dado por suas coordenadas geodésicas em graus, de maneira que:

$$A_1\phi_M^o + B_1\lambda_M^o + C_1 = \xi_a\ (M) - \xi_g\ (M,\ S)$$

$$A_2\phi_M^o + B_2\lambda_M^o + C_2 = \eta_a\ (M) - \eta_g\ (M,\ S) \qquad \text{...(5.4.1)}$$

são as expressões gerais obtidas para cada ponto astro-geodésico. Adotando este procedimento podemos formar para cada ponto astro-geodésico dois sistemas de equações de observação, um para ($\xi$) e o outro para ($\eta$).

Considerando o sistema em ($\xi$) podemos escrever:

$$\begin{cases} A_1\phi_1{}^o + B_1\lambda_1{}^o + C_1 = \xi_a\ (1) - \xi_g\ (1,S) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\phi m^o + B_1\lambda m^o + C_1 = \xi_a\ (M) - \xi_g\ (M,S) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\phi_n{}^o + B_1\lambda_n{}^o + C_1 = \xi_a\ (n) - \xi_g\ (n,S) \end{cases} \qquad \text{...(5.4.2)}$$

Quando associamos o sistema (5.4.2) a um sistema de equações de observação, poderemos aplicar o MMQ para obter os termos constantes $A_1$, $B_1$ e $C_1$, os mais representativos para a primeira região. Com isso podemos escrever o sistema normalizado; em notação matricial:

$$\begin{vmatrix} \sum_1^n \phi_n{}^2 & \sum_1^n \phi_n\lambda_n & \sum_1^n \phi_n \\ & \sum_1^n \lambda_n^2 & \sum_1^n \lambda_n \\ & & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_1^n \Delta\xi(M)\phi_n \\ \sum_1^n \Delta\xi(M)\lambda_n \\ \sum_1^n \Delta\xi(M) \end{vmatrix} \qquad \text{...(5.4.3)}$$

em que $\Delta\xi(M) = \xi_a(M) - \xi_g(M,S)$. Em notação sintética:

$$|A| \quad |X1| = |TI1| \qquad ...(5.4.4)$$

cuja solução é da forma:

$$|A| = |A|^{-1} \quad |TI1| \qquad ...(5.4.5)$$

Analogamente obtemos o sistema para ($\eta$) cuja solução é da forma:

$$|X2| = |A|^{-1} \quad |TI2| \qquad ...(5.4.6)$$

Obtidos os termos constantes podemos aplicá-los a qualquer ponto (P) no interior da região ($\sigma$) e obter:

$$\xi_i \ (P,S') = A_1\phi_p o + B_1\lambda_p o + C_1$$

$$\eta_i \ (P,S') = A_2\phi_p o + B_2\lambda_p o + C_2 \qquad ...(5.4.7)$$

Podemos estimar os erros devido ao procedimento, facilmente, a partir das diferenças:

$$\varepsilon_\xi = |\xi_a(P) - \xi_g(P,S)| - \xi_i(P,S')$$

$$\varepsilon_\eta = |\eta_a(P) - \eta_g(P,S)| - \eta_i(P,S') \qquad ...(5.4.8)$$

utilizando as expressões para o cálculo do erro médio de uma observação isolada |102| vem:

| |
|---|
| $M\xi = \pm \sqrt{\dfrac{\Sigma\varepsilon^2 \ \xi}{n-1}}$ |
| $M\eta = \pm \sqrt{\dfrac{\Sigma\varepsilon^2 \ \eta}{n-1}}$ |

...(5 4.9)

Para utilização do método em computador, elaboramos o programa GEONAG em FORTRAN IV, cuja estrutura baseia-se no diagrama de blocos apresentado na fig. (5.4.1).

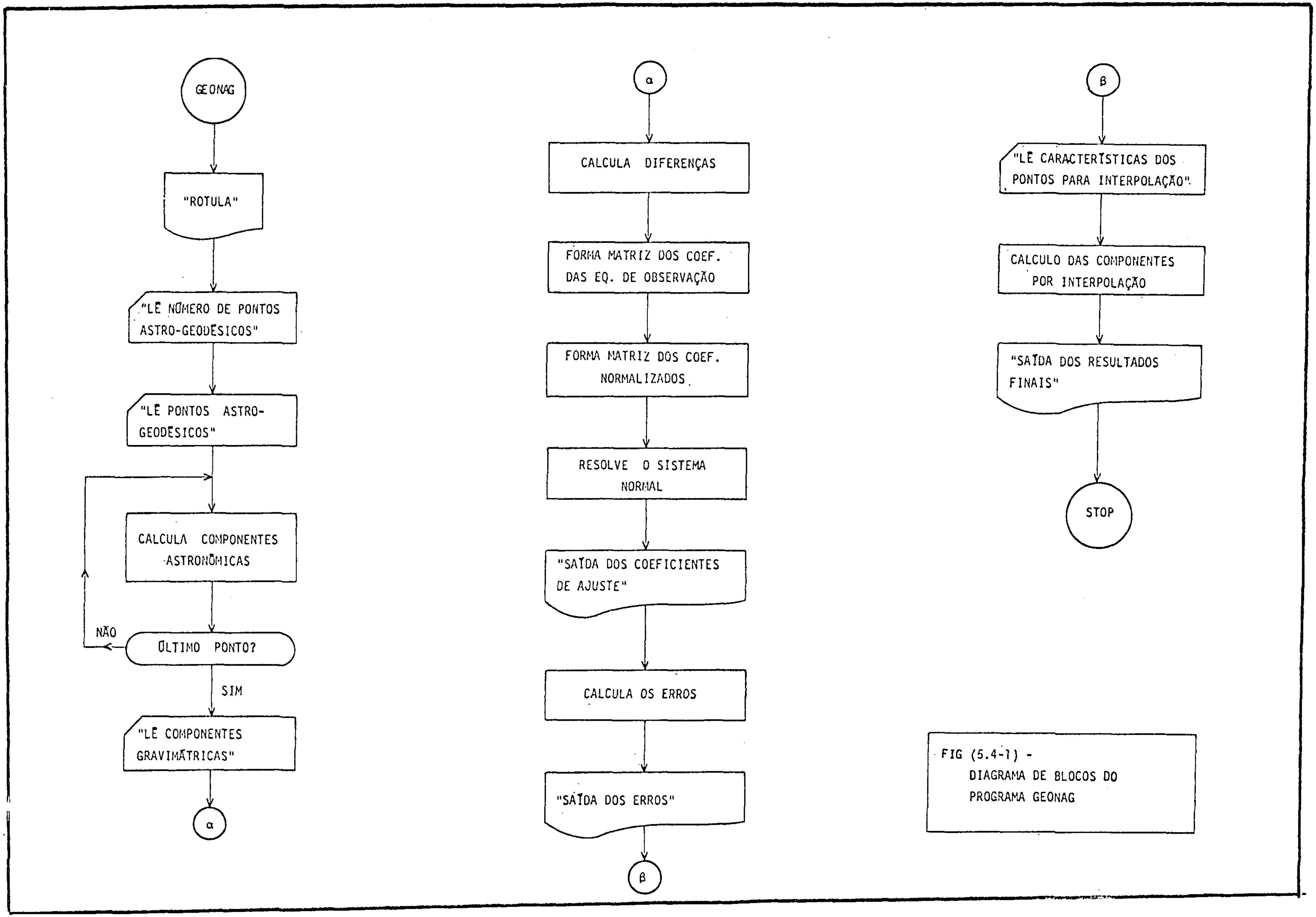



FIG (5.4-1) -
DIAGRAMA DE BLOCOS DO
PROGRAMA GEONAG

## 6. O SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO - Ensaio para orientação:

### 6.1 - Considerações Iniciais

No Brasil as atividades geodésicas de caráter sistemático e amplitude nacional, foram iniciadas nos idos de 1940 com a estruturação da atual Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. De início dois requisitos tiveram que ser atendidos para o perfeito desenvolvimento da rede geodésica fundamental; adoção de uma superfície de referência e o estabelecimento do ponto inicial da triangulação - o datum horizontal.

A UGGI na Assembléia Geral de Madrid, em 1924, havia proposto a adoção do elipsóide de Hayford como superfície de referência internacional, principalmente para os países em que as atividades geodésicas começavam a esboçar-se. Nada mais natural do que adotar-se esta superfície como modelo geométrico dos trabalhos brasileiros.

O procedimento normal para o estabelecimento do datum era eleger um dos vértices da rede de triangulação, em que se tivessem processado determinações astronômicas de 1ª ordem, e impor a coincidência da normal com a vertical; tangência entre as superfícies do elipsóide e do geóide. **O vértice Córrego Alegre** da cadeia fundamental do paralelo 20ºS foi escolhido como datum; tendo as determinações astronômicas sido processadas em 1948.

Com estes elementos começou a ser desenvolvido o Sistema Geodésico Brasileiro,caracterizado pelos parâmetros:

(a) - Superfície de Referência:

. Elipsóide Internacional de 1924 (Hayford)

Semi-eixo maior = 6 378 388,0 m
achatamento = 1/297

(b) - Datum

. Vértice CÓRREGO ALEGRE
coordenadas*, |10|:

$\phi_o = \Phi_o = -19º\ 50'\ 14'',91 \pm 0'',07$

$\lambda_o = \Lambda_o = 311º\ 02'\ 18'',02 \pm 0'',07$ EGR

$h_o = H_o = 683,81$ m (NMM-Imbituba)

(c) - Orientação elipsóide-geóide:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_o = o \\ \eta_o = o \\ N_o = o \end{array}\right\} \text{pré-fixados}$$

* As coordenadas são as astronômicas determinadas em 1948 e reduzidas ao geóide, porém sem correção para o polo médio (CIO) 1900-05.

O procedimento adotado no estabelecimento do datum era perfeitamente válido para a época. Contudo o desenvolvimento tecnológico alcançado nos últimos anos vem exigindo da Geodésia a definição de um Sistema Mundial, na pesquisa do qual faz-se necessária a substituição dos sistemas geodésicos locais por absolutos. Preocupado em acompanhar as correntes mundiais, o IBGE em 1956 deu início ao programa para a determinação do vetor de orientação geocêntrica para o SGB. O método físico selecionado como resolvente, os trabalhos de campo foram iniciados dentro das recomendações do IPGH, |11|.

O vértice **Chuá**, da mesma cadeia do ponto datum atual, foi escolhido como nova origem.

Dentro do esquema da fig. (1.5.1.1), para ensaiar a orientação absoluta, temos:

(a) - Adoção de uma fórmula para a gravidade teórica:

. Sendo o elipsóide internacional de 1924 o adotado no país, e por conseguinte a fórmula internacional de 1930 para o campo normal, não levaremos a contendo os cálculos de uma nova fórmula. (Voltamos a frisar que na Assembléia Geral de Lucerne, em 1967, a UGGI passou a recomendar o Elipsóide de Referência 1967 como a nova superfície geométrica da Terra. A adoção desta superfície, e da correspondente fórmula da gravidade, deverá ser realizada ao menos para estudos científicos).

(b) - Determinar as coordenadas astronômicas de Chuá.

. Em 1966 o IBGE realizou as observações necessárias para a definição das coordenadas astronômicas de Chuá.

. Segundo uma lista de coordenadas do citado órgão temos:

$\Phi = -19^{\circ}\ 45'\ 41'',16 \pm 0'',05$

$\Lambda = 311^{\circ}\ 53'\ 52'',44 \quad 0'',08$ EGR

$H = 763{,}18$ m (NMM-Imbituba)

. As reduções ao polo médio 1900-05 foram por nós calculadas:

$\Delta\Phi = -0'',102$

$\Delta\Lambda = +0'',036$

(c) - Cálculo das quantidades fundamentais em Chuá e o correspondente vetor de orientação geocêntrica:

- Os resultados da pesquisa ora apresentada pretendem atender esta última exigência. Não temos a pretensão de apresentar resultados definitivos, mas somente elementos que possibilitem o levantamento das necessidades de complementação de campo, visando resultados mais coerentes.

## 6.2 - Dados utilizados no ensaio

### 6.2.1 - Dados gravimétricos:

Os levantamentos gravimétricos necessários à aplicação do método físico foram realizados pelo IBGE na área limitada pelos meridianos de 309º e 315º EGR e os paralelos 17º e 22º 30'S.

As estações gravimétricas foram estabelecidas com espaçamento de aproximadamente 15 km ao longo da rede viária da região. Todos os testemunhos geodésicos de possível ocupação foram utilizados. Dentro deste esquema foram fixadas 2113 estações. Na fig. (6.21.1) apresentamos,esquematicamente,a distribuição das mesmas.

A ocupação de testemunhos geodésicos simplifica os trabalhos complementares de campo, i.e., os vértices de triangulação, poligonais e referências de nível, evitam as determinações de posição e/ou altitude. Como os testemunhos são em pequeno número, na maioria das estações a obtenção direta ou indireta dos elementos complementares teve que ser realizada.

As determinações de altitude foram realizadas segundo a metodologia do nivelamento geométrico, para um grande número de estações. Este procedimento não pode ser estendido à todas e o nivelamento barométrico foi utilizado com resultados satisfatórios. Por ocasião da manipulação destes dados tivemos que abandonar 300 estações por falta de altitude ou com esta determinada precariamente; erros superiores a 1 m.

O problema mais crítico foi o da determinação de posições, os métodos convencionais de campo tornaram-se inoperantes diante do grande número de pontos a serem determinados. As técnicas de aerotriangulação e interpolação em cartas topográficas,possibilitando a obtenção de coordenadas com erros melhores que 0',5, limite de precisão fixado por SHOKIN |106| em levantamentos desta natureza, são perfeitamente aplicáveis à obtenção destes elementos.

O material inicialmente cedido pelo IBGE apresentava 255 estações com coordenadas determinadas no campo e cerca de 420 por aerotriangulação. Posteriormente recebemos 80 pares de coordenadas resultantes de aerotriangulações executadas pela GEOFOTO S.A.. Com o intuito de ampliar este número, recorremos à interpolação em cartas topográficas, chegando a

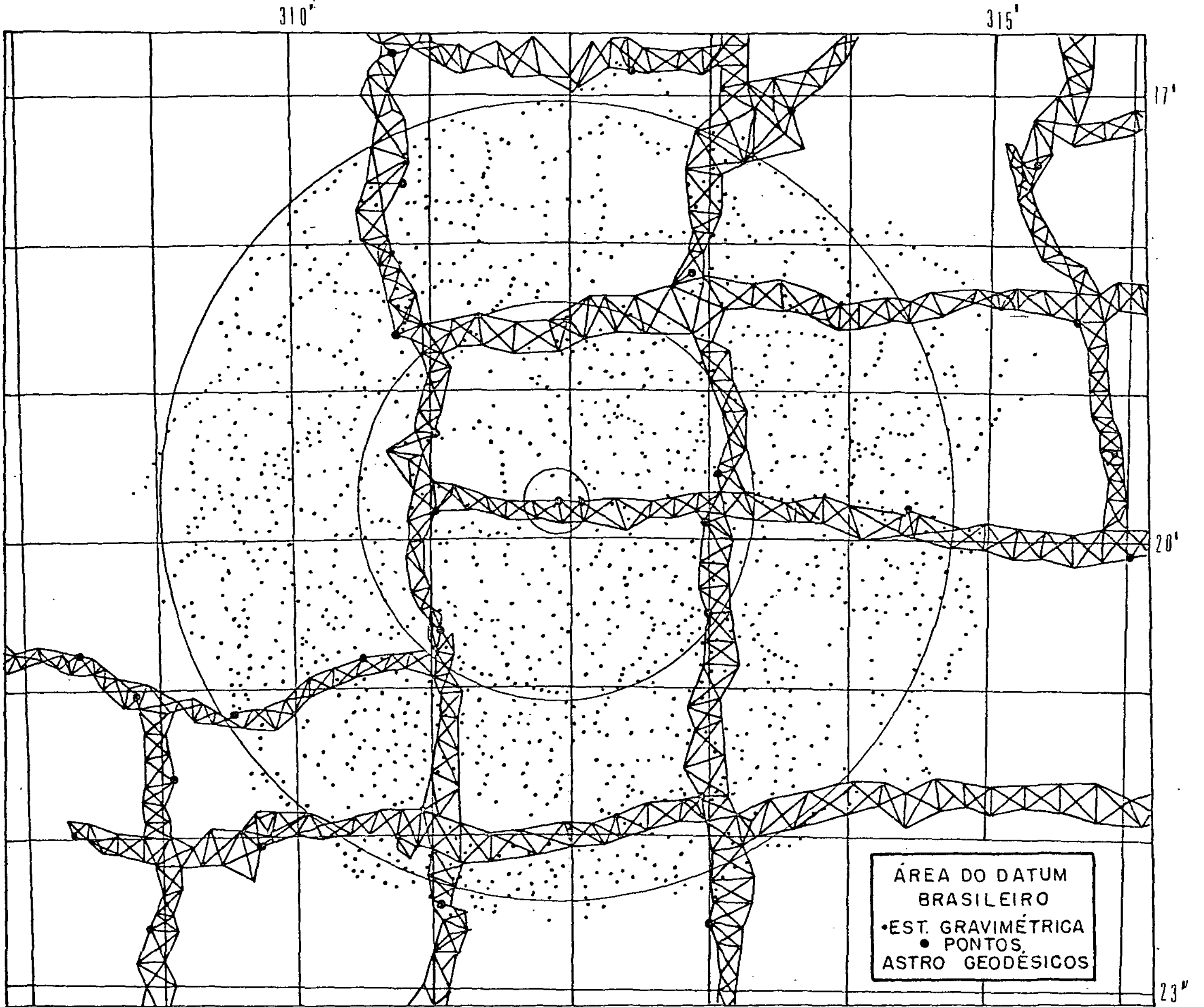



FIG. (6.2.1_1) — ÁREA DO DATUM GEODÉSICO COM A DISTRIBUIÇÃO APROXIMADA DAS ESTAÇÕES GRAVIMÉTRICAS, RÊDE DE TRIANGULAÇÃO E PONTOS-ASTROS GEODÉSICOS.

obtenção de 987 pares de coordenadas. As áreas em que foram utilizados os procedimentos de gabinete encontram-se representadas na fig. (6.21-2).

Considerando o abandono de estações por falta de altitude e/ou coordenadas, o número inicial ficou reduzido a 1742.

A existência de alguns circuitos de reconhecimento executados pela PETROBRAS, a sudoeste do enquadramento citado, elevou o total anterior em mais 379 estações.

O efeito da área externa ao enquadramento, anteriormente citado, foi avaliado através de anomalias médias para blocos de 1º x 1º e 5º x 5º. As anomalias médias para o território brasileiro foram calculadas com base em 500 estações gravimétricas em 274 quadriláteros de 1º x 1º; resultados apresentados no adendo 9. Para o restante do globo foram utilizados os dados catalogados em |115| e |120|. Na fig. (7.0.9) do adendo 7, podemos visualizar a área coberta por estes dados.

Os dados correspondentes às zonas encontram-se arquivados, na forma de cartões perfurados, no CEPG-UFPR e no INPE-Projeto GEOS. O catálogo |115| está contido em 2582 cartões e o |120| em 37700.

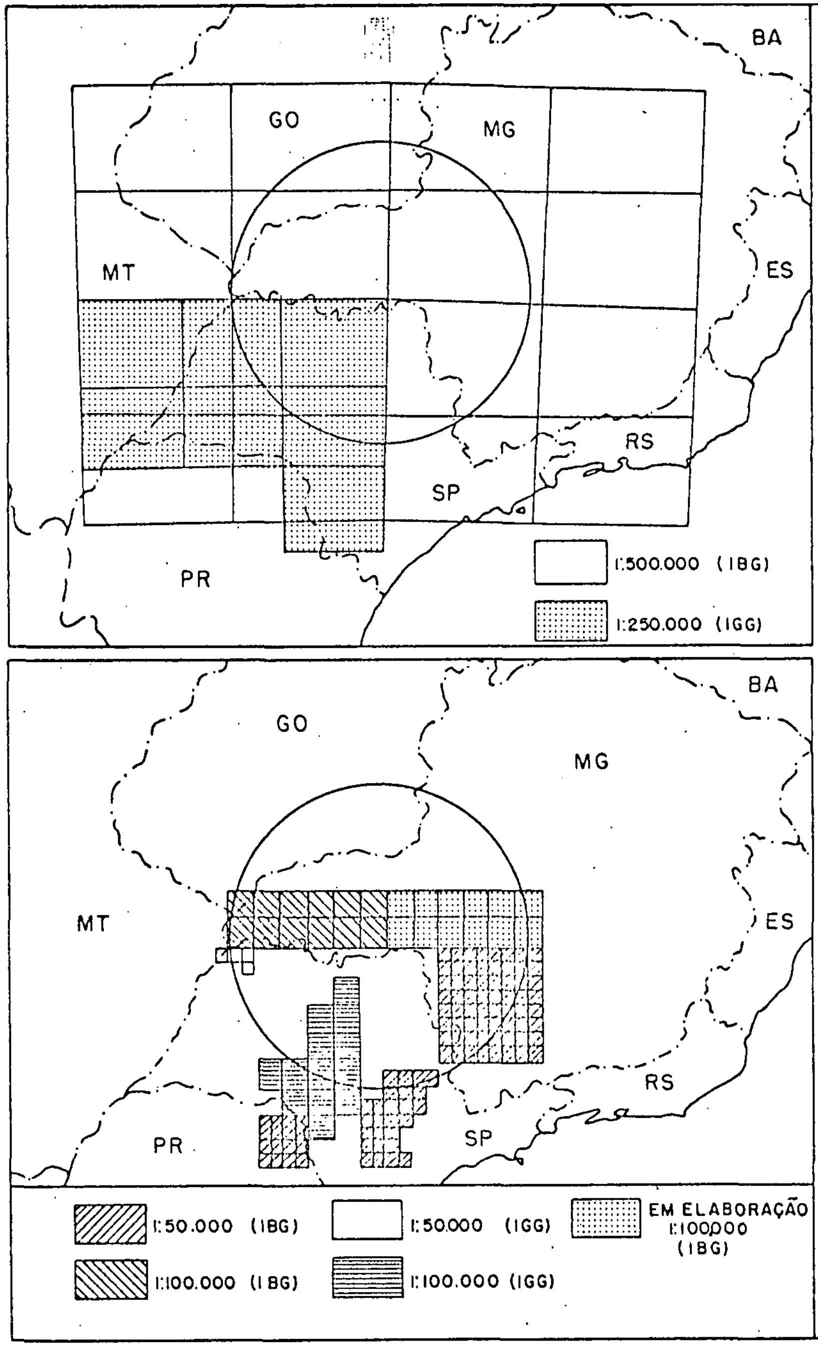
As estações do IBGE e PETROBRAS utilizadas na avaliação do efeito da zona próxima tiveram que sofrer uma série de manipulações até poderem ser utilizadas de maneira racional. Além do processo complementar para determinação de posições, as estações foram classificadas e codificadas segundo o sistema internacional do BGI (adendo 8). Os cálculos de anomalias foram realizados com o auxílio do computador IBM-1130 da UFPR. Na tabela (6.21.1) apresentamos alguns resultados selecionados dentre as 2121 estações calculadas.

### 6.2.2 - Dados Astro-Geodésicos

Embora não tenhamos recorrido à metodologia do nivelamento astro-geodésico, os pontos de Laplace são essenciais à aplicação do nivelamento Astro-gravimétrico.

Na fig. (6.21.1) encontram-se representados os pontos astro-geodésicos subtendidos pelo círculo de 300 km em torno de Chuá.

Com o objetivo de utilizar o procedimento descrito no capítulo 5, selecionamos o raio da região mais interna com 150 km; no interior desta encontram-se os sete pontos apresentados na tabela (6.22.1).



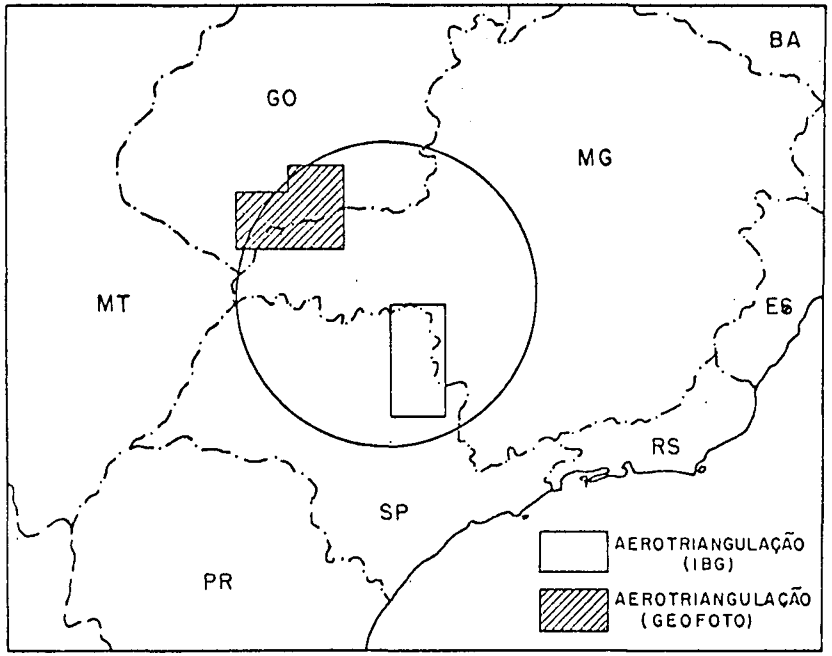




FIG. (6.2.1_2) — MATERIAL CARTOGRÁFICO UTILIZADO NA INTERPOLAÇÃO DE COORDENADAS DAS ESTAÇÕES GRAVIMÉTRICAS DA ÁREA DO "DATUM BRASILEIRO."

TABELA (6.21.1)

ALGUNS VALORES GRAVIMÉTRICOS DA ÁREA EM TORNO DO PONTO DATUM CHUÁ

| Estação | Coordenadas | | Altitude H(m) | Anomalia do ar livre | Anomalia de Bouguer * |
|---|---|---|---|---|---|
| | φ | λ | | | |
| EG- 263 | 19º 28',33 | 48º 12',81 | 867,86 | - 32,5 | - 129,5 |
| EG- 380 | 19º 38',27 | 47º 51',58 | 803,62 | - 29,1 | - 118,9 |
| EG- 531 | 20º 37',57 | 47º 07',03 | 1018,08 | + 12,0 | - 101,7 |
| EG- 672 | 20º 15',38 | 46º 59',43 | 726,62 | - 23,7 | - 113,9 |
| EG- 728 | 18º 50',54 | 47º 54',35 | 982,70 | - 4,0 | - 113,9 |
| EG- 824 | 18º 53',19 | 49º 08',95 | 670,22 | - 27,0 | - 102,0 |
| EG- 909 | 20º 37',30 | 49º 13',06 | 526,06 | + 19,0 | - 56,7 |
| EG- 958 | 20º 58',92 | 48º 50',10 | 552,44 | - 18,2 | - 79,9 |
| EG-1085 | 20º 26',92 | 47º 08',49 | 1058,31 | + 20,9 | - 107,4 |
| EG-1102 | 20º 36',12 | 47º 12',12 | 840,76 | - 6,2 | - 100,2 |
| EG-1508 | 20º 37',94 | 49º 42',56 | 529,39 | - 3,9 | - 63,1 |
| EG-1737 | 19º 52',79 | 48º 15',20 | 680,00 | - 40,3 | - 116,3 |
| EG-1980 | 19º 45',70 | 48º,06',07 | 763,83 | - 36,1 | - 121,5 |

* Simplificada

TABELA (6.22.1)

PONTOS ASTRO-GEODÉSICOS SUBTENDIDOS PELO CÍRCULO DE
150 km EM TORNO DE CHUÃ:

| ESTAÇÃO | COORDENADAS ASTRONÔMICAS* | | COORDENADAS GEODÉSICAS** | | Altitude H (m) | Ano da DET. AST. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\phi$ S | $\Delta$ EGR | $\phi$ S | $\lambda$ EGR | | |
| Córrego Alegre | -19°50'14",910 | 48°57'41",980 | 14",910 | 18",020 | 683,81 | 1948 |
| Chuã | -19°45'41",160 | 48°06'07",560 | 42",225 | 55",743 | 763,18 | 1966 |
| Uberaba | -19°45'54",450 | 47°57'43",080 | 54",552 | 20",593 | 805,95 | 1950 |
| Araxá | -19°35'36",540 | 46°55'24",160 | 42",277 | 39",955 | 1048,19 | 1950 |
| Rib. dos Santos | -20°38'20",960 | 48°55'15",810 | 20",705 | 43",487 | 587,41 | 1949 |
| Lagoinha | -20°31'09",940 | 46°59'40",260 | 11",321 | 13",210 | 1249,21 | 1954 |
| Mangaba | -18°37'11",110 | 47°39'18",850 | 16",198 | 46",334 | 911,48 | 1966 |

FONTE: Arquivos do IBGE e [10].

* As coordenadas astronômicas não estão reduzidas ao polo médio.

**Datum Córrego Alegre.

### 6.2.3 - Crítica aos Dados Existentes:

Na delimitação da área de estudos em torno de Chuá não houve preocupação em se fixar uma área de pesquisa, para no interior desta realizar todos os ensaios necessários à procura de novos modelos de cálculo. A área foi delimitada de acordo com as recomendações do IPGH, baseadas no trabalho do Rice |98|, conforme |11|.

A escolha do datum foi mais ou menos arbitrária, as únicas condições impostas foram as de que o ponto e a área dos trabalhos estivessem localizados numa região com levantamentos geodésicos bem desenvolvidos e livre das influências das massas andina e atlântica, |11|.

A região levantada foi dividida em duas zonas; uma vizinha ao datum, delimitada por um círculo de 300 m e a outra estendendo-se dos limites da anterior até 300 km.

Na zona vizinha foram realizados caminhamentos gravimétricos segundo radiais defasadas de 45º em azimute e estações afastadas de 30m. Na fig. (6.2.3-1) apresentamos o mapa de iso-anômalas do ar-livre correspondente a este levantamento.

Na zona próxima os levantamentos deveriam obedecer a uma distribuição dispersiva dos limites da zona para a periferia do círculo de 300 km. Contudo em Chuá este critério não foi observado, embora a dispersão esteja garantida, a concentração na zona 20 km < r < 300m não o está. Para 20 km < r < 300 m podemos observar pela fig. |6.3.2.2(a)| a existência de somente 12 estações, número insuficiente para se identificar a existência de qualquer perturbação local. Deste limite em diante a distribuição, excetuando-se os vazios ocasionados pelo abandono de estações e o quadrante NE da área levantada, apresenta-se mais ou menos uniforme.

O recomendável na determinação das quantidades fundamentais pelo método físico é a aplicação dos procedimentos de cálculo em diversos pontos da área de trabalho. A distribuição das estações gravimétricas e os limites impostos evidenciam que esta recomendação não foi observada. A existência de sete pontos astro-geodésicos nas proximidades de Chuá dá condições ao desenvolvimento de determinações paralelas, como controle ao cálculo das quantidades fundamentais em Chuá.

## 6.3 - Resultados:

Utilizando o material gravimétrico anteriormente descrito, realizamos os cálculos de acordo com os modelos apresentamos nos capítulos 3 e 5.

Os modelos foram aplicados aos sete pontos astro-geodési-

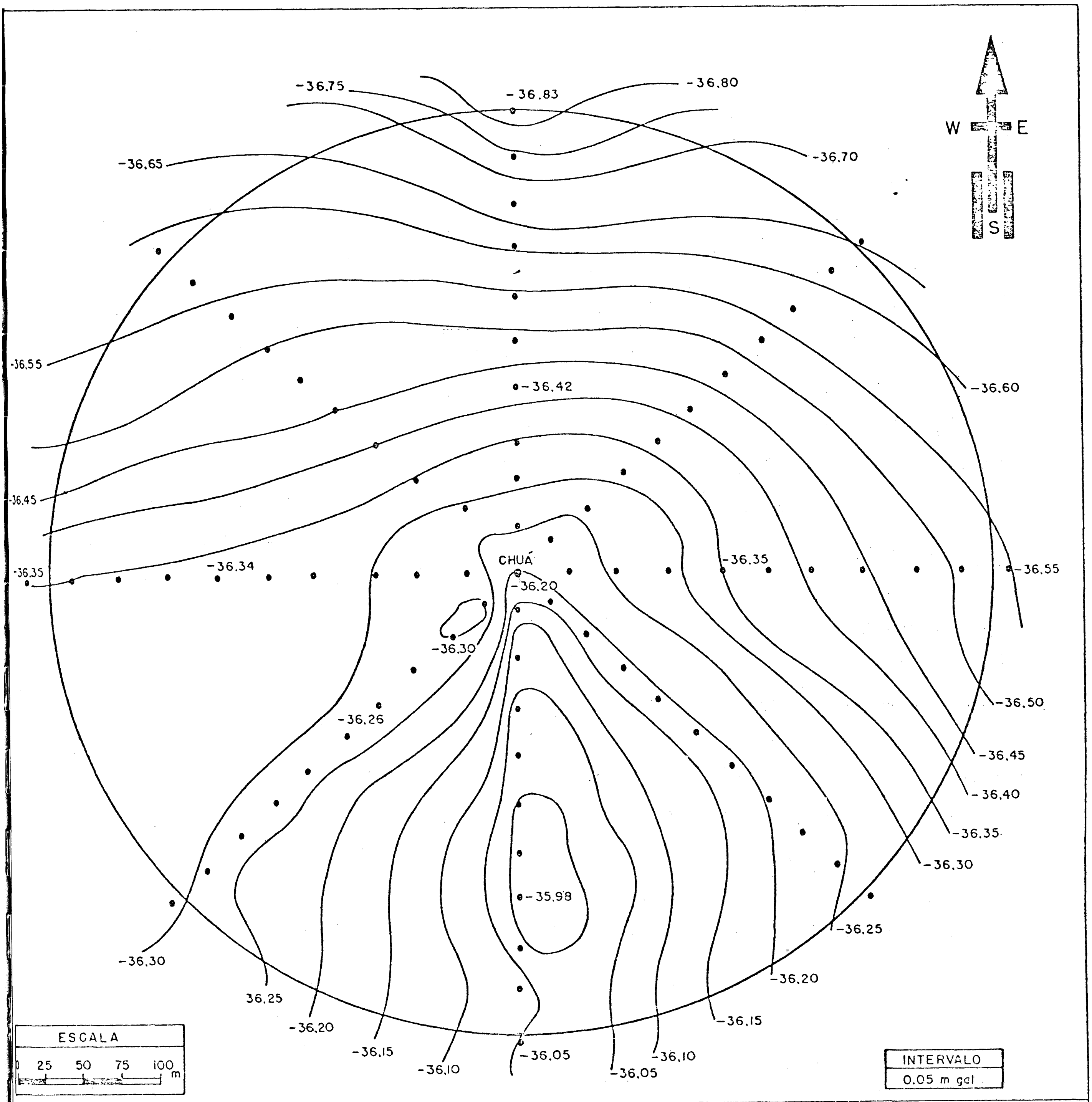



Fig.(6.2.3-1) - ISO-ANÔMALAS DO AR-LIVRE NO INTERIOR DO CÍRCULO DE 300 m EM TORNO DE CHUÁ cos existentes no interior do círculo de 150 km. Os resultados serão expostos em conjunto e segundo zonas de cálculo.

### 6.3.1 - Avaliação do efeito das zonas distantes:

O efeito das massas distantes foi calculado segundo os procedimentos da divisão em blocos de anomalias médias e do nivelamento astro-gravimétrico.

O cálculo pelo método dos "quadrados" foi apoiado em 648 valores anômalos para trapézios de 1º x 1º; a área envolvida foi de 20ºx20º em torno de Chuá. Além desta foram utilizados 2550 trapézios de 5º x 5º com anomalias dadas pelos catálogos |115| e |120|. O programa GEOZOD, apresentado no capítulo 3, foi utilizado no processamento destes dados. O elipsóide de Hayford e o de Referência 1967 foram utilizados como superfície geométrica nos cálculos finais apresentados na tabela (6.31.1).

O nivelamento astro-gravimétrico foi igualmente aplicado aos sete pontos, o programa GEONAG foi utilizado para os cálculos. Os resultados finais são apresentados na tabela (6.31-2).

Comparando as tabelas anteriores verificamos discrepâncias sensíveis entre os pares de valores obtidos pelos diferentes métodos. Estes afastamentos podem ser atribuídos, em parte, aos "vazios" gravimétricos existentes na área de 20º x 40º em torno de Chuá. No cálculo consideramos apenas 74,6% da área como conhecida gravimetricamente, aos 25,4% restantes atribuiu-se anomalia média nula (vazio). Convém ressaltar que a maior área de desconhecimento está em território brasileiro, nas imediações da zona de cálculo, vide fig. (9.9.1).

Por outro lado a distribuição dos pontos astro-geodésicos não é a ideal para aplicação do nivelamento. Tendo em vista as observações dos parágrafos anteriores, somos levados a atribuir maior grau de incerteza aos resultados obtidos pelo método dos "quadrados".

Os erros médios para o nivelamento astro-gravimétrico foram:

$$\varepsilon_\xi = \pm\ 1{,}0''$$

$$\varepsilon_\eta = \pm\ 1{,}6''$$

para o elipsóide de Hayford e

$$\varepsilon_\xi = \pm\ 1{,}2''$$

$$\varepsilon_\eta = \pm\ 1{,}4''$$

para o elipsóide de referência 1967.

TABELA (6.3.1.1)

EFEITO DAS ZONAS DISTANTES - MÉTODO DOS "QUADRADOS"

| ESTAÇÃO | ELIPSÓIDE DE HAYFORD | | | ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA 1967 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N m | ξ" | η" | N m | ξ" | η" |
| Chuá | 4,37 | + 2,569 | - 2,509 | 23,26 | + 1,059 | - 1,317 |
| Córrego Alegre | 3,06 | + 1,385 | - 1,787 | 21,85 | + 1,002 | - 2,678 |
| Uberaba | 4,55 | + 2,511 | - 1,963 | 23,44 | + 1,994 | - 1,084 |
| Araxá | 4,69 | + 3,807 | - 1,993 | 23,75 | + 5,246 | - 1,192 |
| Lagoinha | 7,08 | + 5,501 | + 1,908 | 25,21 | + 4,190 | + 1,378 |
| Rib.dos Santos | 5,32 | - 1,172 | + 1,932 | 23,32 | - 3,065 | + 3,348 |
| Mangaba | 6,06 | + 7,580 | -12,352 | 26,35 | + 7,971 | -12,302 |

TABELA (6.3.1.2)

EFEITO DAS ZONAS DISTANTES

NIVELAMENTO ASTRO-GRAVIMÉTRICO

| ESTAÇÃO | ELIPSÓIDE DE HAYFORD | | ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA 1967 | |
|---|---|---|---|---|
| | ξ" | η" | ξ" | η" |
| Chuá | + 4,392 | - 3,022 | + 2,467 | - 2,936 |
| Córrego Alegre | + 1,618 | - 2,692 | + 0,065 | - 2,727 |
| Uberaba | + 4,808 | - 2,967 | + 2,819 | - 2,862 |
| Araxá | + 8,390 | - 3,898 | + 5,958 | - 3,644 |
| Lagoinha | + 6,037 | + 2,306 | + 3,474 | + 2,542 |
| Rib.dos Santos | - 0,067 | + 2,704 | - 1,785 | + 2,669 |
| Mangaba | + 8,319 | -10,600 | + 6,403 | -10,444 |

Na caracterização dos resultados para Chuá e os demais pontos iremos considerar os valores dados pelo nivelamento para as componentes do desvio da vertical e os do método dos "quadrados" para as geo-ondulações.

### 6.3.2 - Avaliação do Efeito da Zona próxima:

Na avaliação do efeito da zona próxima o método de Rice, com gabarito circular aplicado sobre um mapa de iso-anômalas do ar-livre, foi utilizado.

Esta zona para efeito de cálculo foi subdividida em duas;

20 km < r < 3,08 km e 300 km < r < 20 km. Na primeira, os cálculos de valores médios para os compartimentos foram realizados sobre um mapa de iso-anômalas na escala de 1/100 000, com as curvas espaçadas de 5 mgal; os mapas utilizados são apresentados nas figuras (6.32.1). Na segunda utilizamos um mapa na escala de 1/1.000.000,com as curvas espaçadas de 5 mgal; um trecho do mapa é apresentado na fig. (6.32.2).

O procedimento foi aplicado a todos os sete pontos. O programa GEORIC foi utilizado no cálculo e os resultados obtidos são apresentados na tabela (6.3.2.1).

O método gráfico com malha retangular foi aplicado somente para Chuá. O gabarito foi utilizado sobre os mesmos mapas, cobrindo uma área de 6º x 6º dividida em trapézios de 5' x 5'. Como a área levantada corresponde ao interior do círculo de 300 km, diversos compartimentos ficaram sem anomalias médias, o que acarretou grande margem de imprecisão para os resultados finais. Obtivemos para o elipsóide de Hayford:

$$N = -20{,}2 \text{ m}$$
$$\xi'' = -0'',931 \text{ m}$$
$$\eta'' = +0'',562$$

O método analítico comentado no capítulo 3, foi utilizado segundo a malha circular de Rice e a retangular. Os valores médios foram obtidos pelo programa descrito no adendo 10, com trapézios em blocos de 6. As áreas periféricas sem levantamentos e aquelas em que abandonamos estações apresentaram-se com ajuste inconsistente. Resultados na tabela (6.3.2.2).

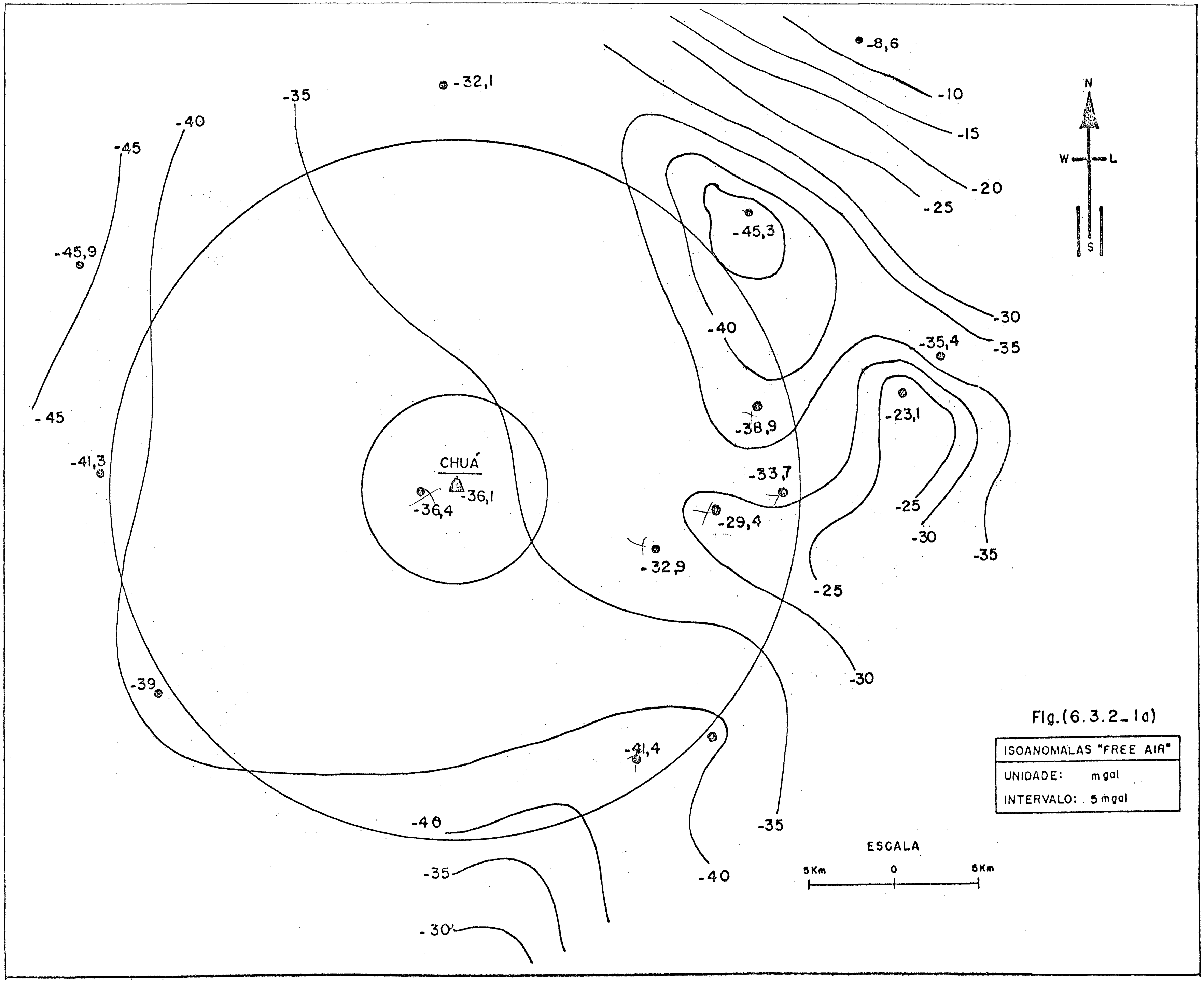
Consideramos como grau de ajuste a média das diferenças encontradas entre o valor calculado pelo ajuste polinomial ou interpolação visual, e o observado para o mesmo ponto.

Quando comparamos o ajuste numérico para o cálculo de valores médios com o erro de interpolação nos mapas de iso-anômalas,verificamos que apesar da inconsistência do primeiro nas bordas, da área de trabalho, o grau de ajuste é melhor. Para comparações 12 mgal no numérico e 19 mgal na interpolação.

A impossibilidade de calcular as quantidades fundamentais para os demais pontos a partir dos últimos três métodos, levou-nos a considerar somente os resultados da tabela (6.3.2.1)

### 6.3.3 - Avaliação da Zona Vizinha:

Na avaliação da zona vizinha empregamos o método dos três gradientes. Para os sete pontos o círculo de 3,08 km de raio foi tomado como limite.


-8,6
-10
-15
-20
-25
-32,1
-35
-40
-45
-45,9
-45,3
-40
-30
-35
-35,4
-23,1
-45
-41,3
CHUÁ
-36,1
-36,4
-38,9
-33,7
-29,4
-32,9
-25
-30
-35
-25
-30
-39
-41,4
-35
-40
-35
-40
-30
N
W
L
S
ISOANOMALAS "FREE AIR"
UNIDADE: mgal
INTERVALO: 5 mgal
ESCALA
5Km
0
5Km
Fig.(6.3.2_1a)

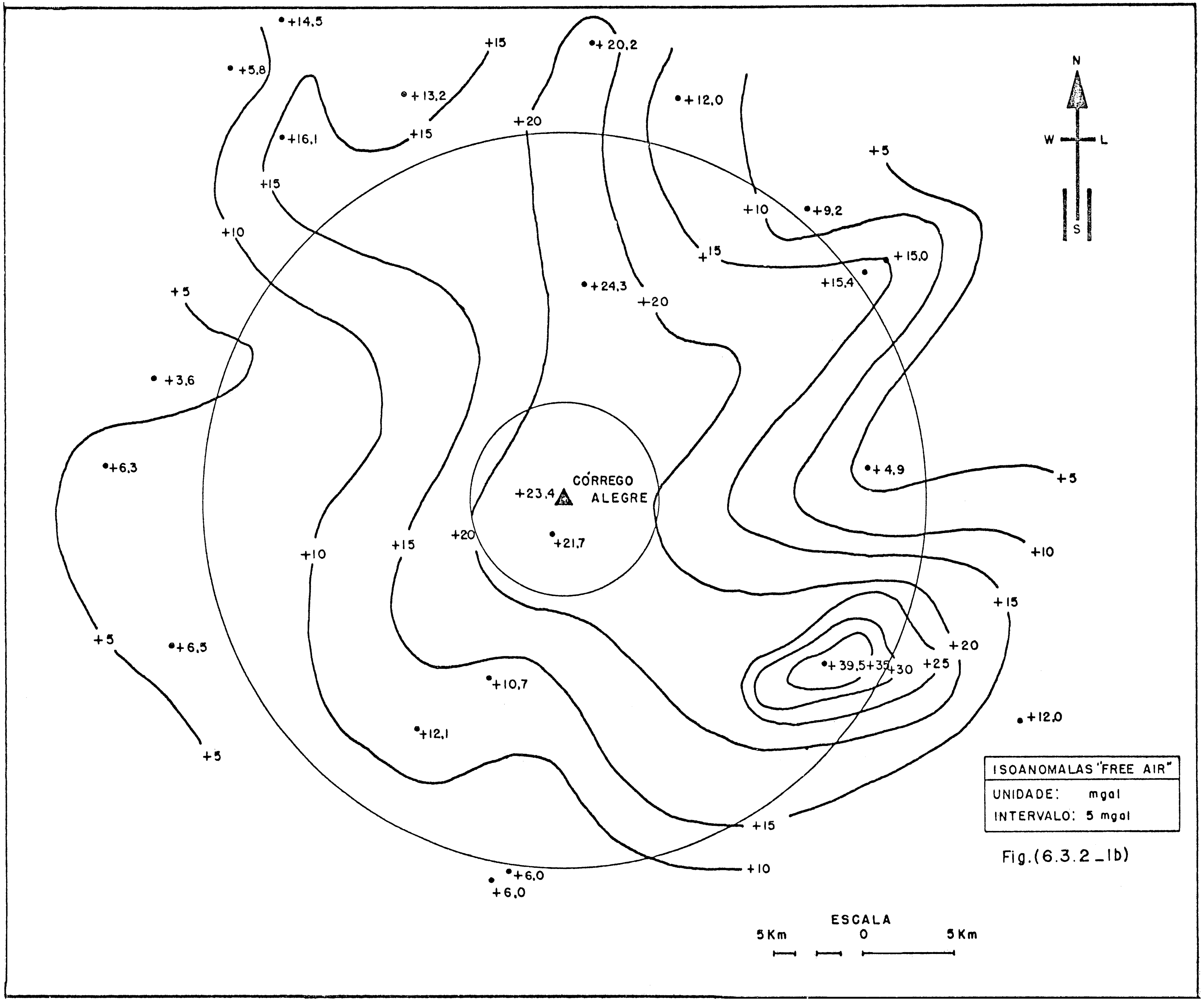

ISOANOMALAS "FREE AIR"
UNIDADE: mgal
INTERVALO: 5 mgal
CÓRREGO ALEGRE
N
W
L
S
ESCALA
5 Km
0
5 Km
+14,5
+5,8
+13,2
+20,2
+12,0
+16,1
+9,2
+15,0
+15,4
+24,3
+3,6
+6,3
+23,4
+21,7
+4,9
+6,5
+10,7
+12,1
+39,5
+12,0
+6,0
+6,0
+5
+10
+15
+20
+25
+30
+35

Fig.(6.3.2_1b)

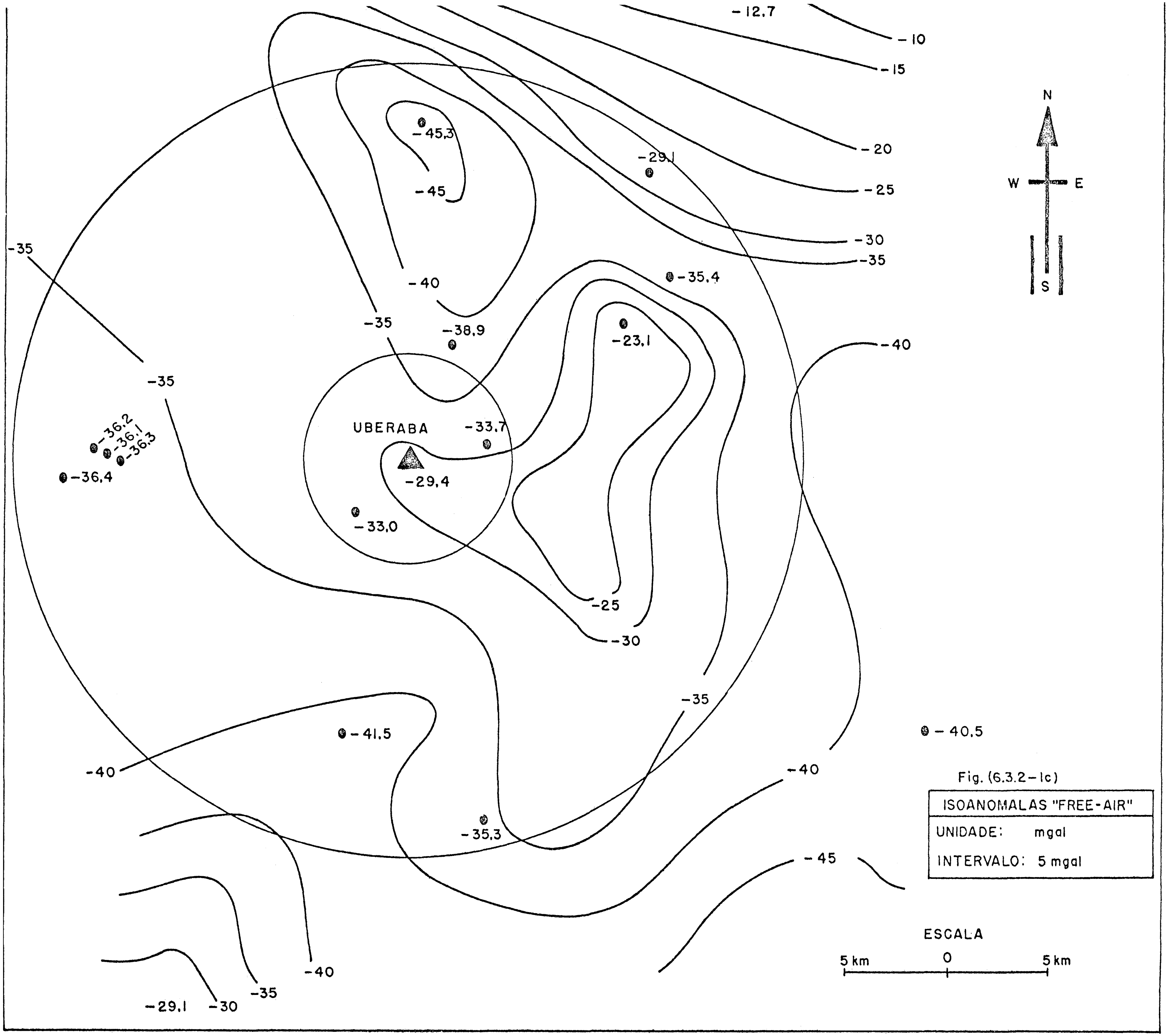



Fig. (6.3.2-1c)

ISOANOMALAS "FREE-AIR"

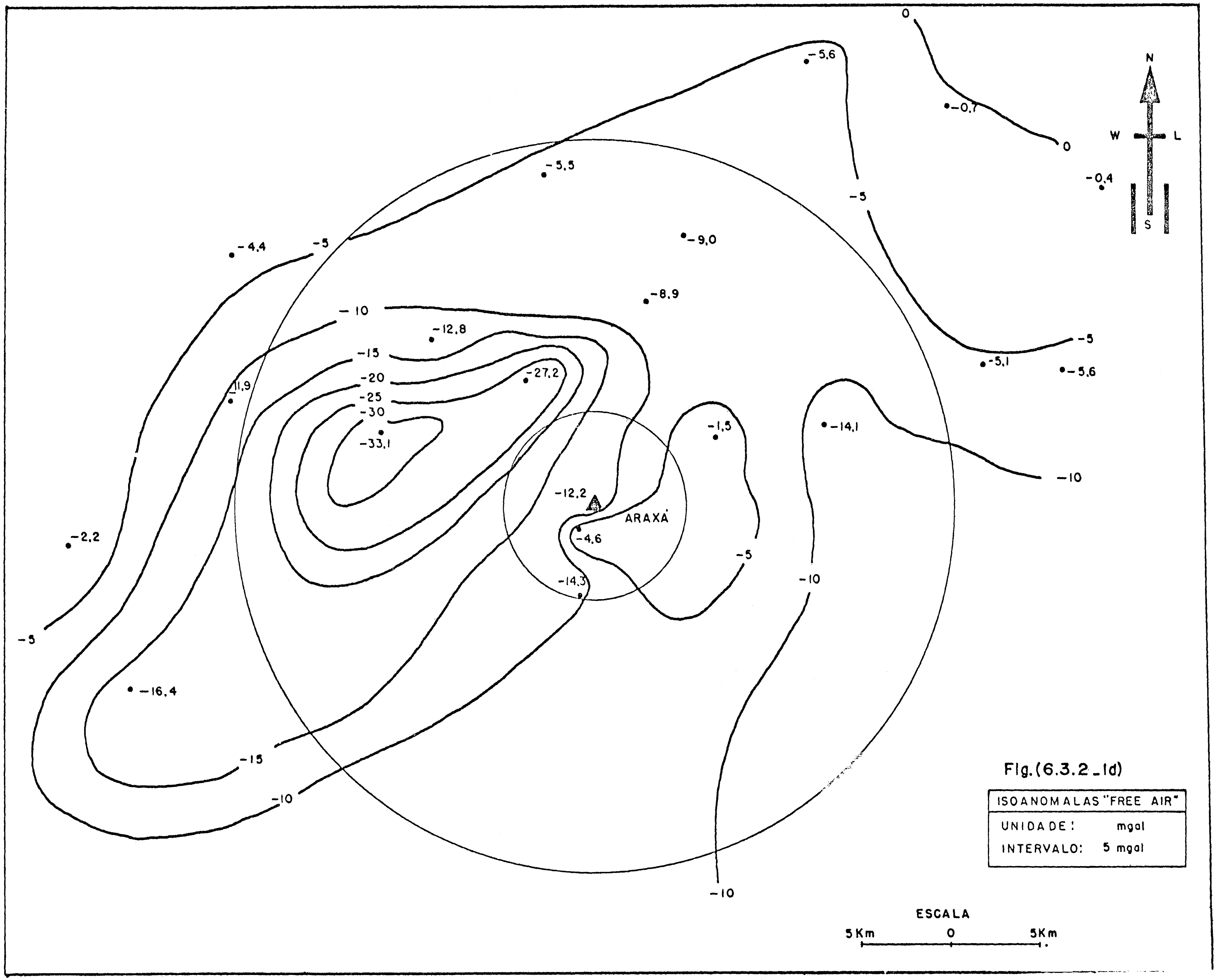



Fig.(6.3.2_1d)

| ISOANOMALAS "FREE AIR" | |
|---|---|
| UNIDADE: | mgal |
| INTERVALO: | 5 mgal |

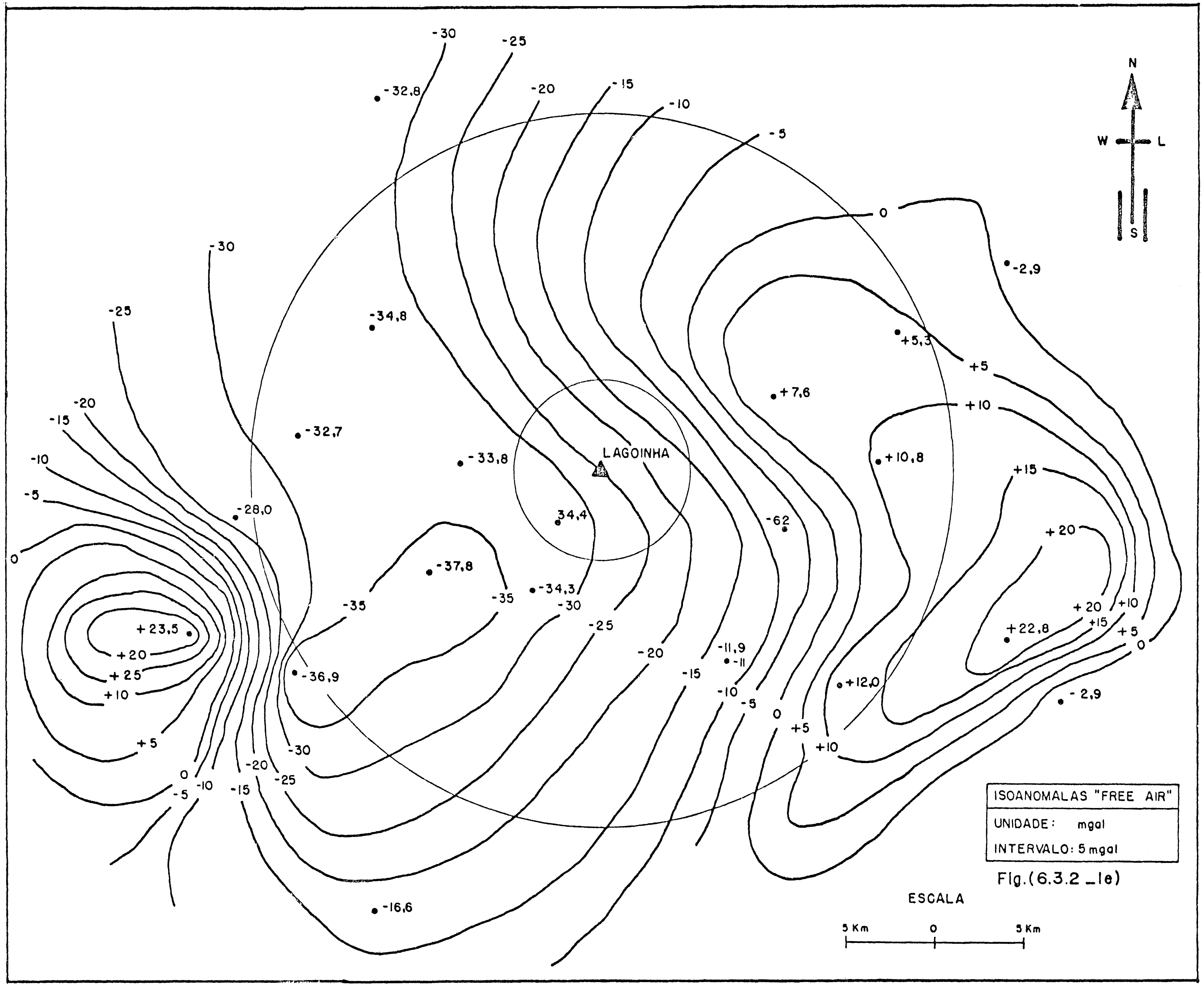
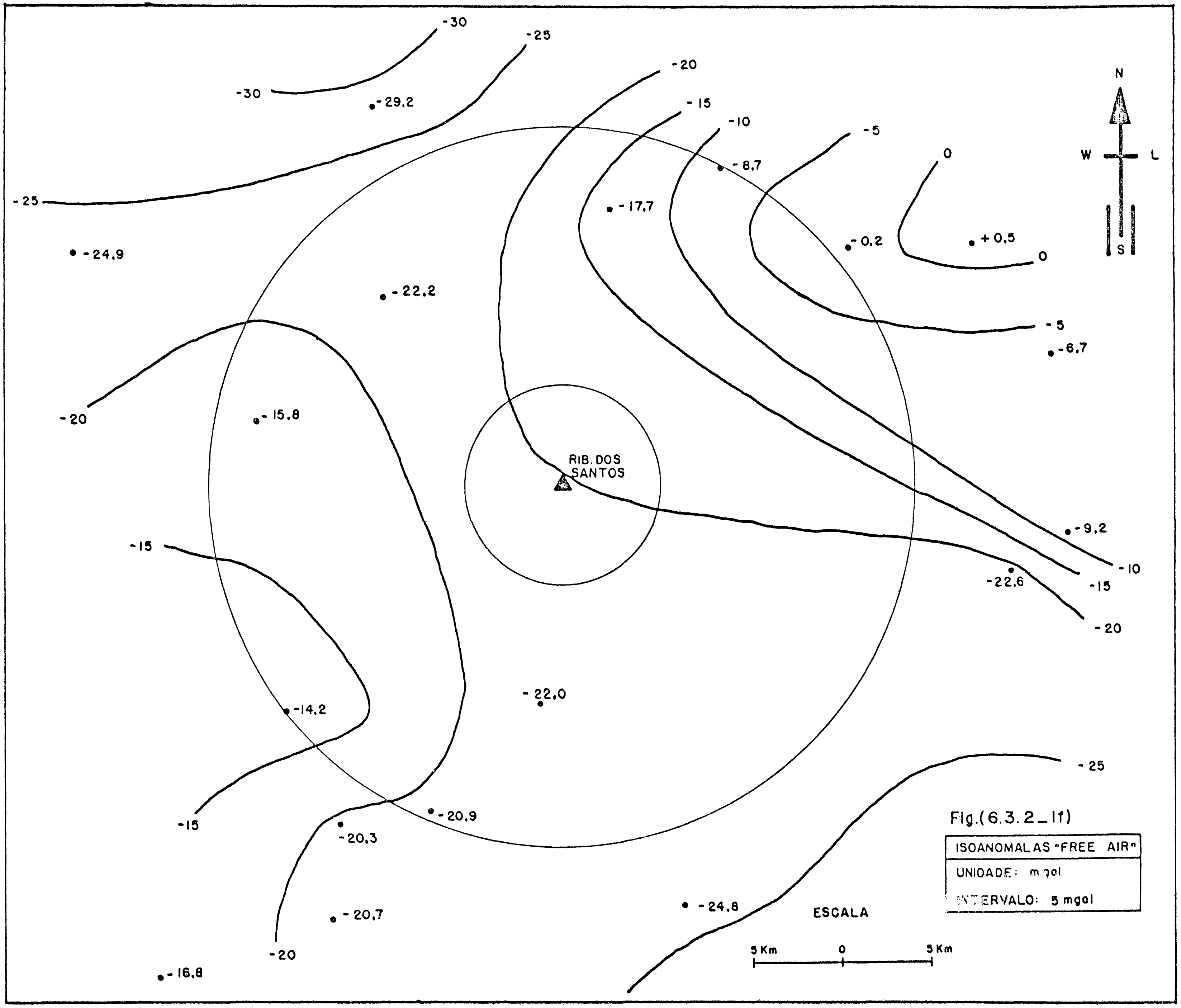

N
W
L
S
LAGOINHA
-32,8
-34,8
-32,7
-33,8
-28,0
34,4
-37,8
-34,3
-36,9
-16,6
+23,5
+7,6
+5,3
-2,9
+10,8
-62
-11,9
-11
+12,0
+22,8
- 2,9
ISOANOMALAS "FREE AIR"
UNIDADE: mgal
INTERVALO: 5 mgal
ESCALA
5 Km
0
5 Km

Fig.(6.3.2 _1e)



-30
-30
-25
-25
-20
-15
-10
-5
0
0
-5
-20
-15
-10
-15
-20
-20
-15
-25
-29,2
-24,9
-22,2
-17,7
-8,7
-0,2
+0,5
-6,7
-15,8
RIB. DOS SANTOS
-9,2
-22,6
-22,0
-14,2
-20,9
-20,3
-20,7
-16,8
-24,8
N
W
L
S
ESCALA
5 Km
0
5 Km
ISOANOMALAS "FREE AIR"
UNIDADE: mgal
INTERVALO: 5 mgal


Fig.(6.3.2_1f)

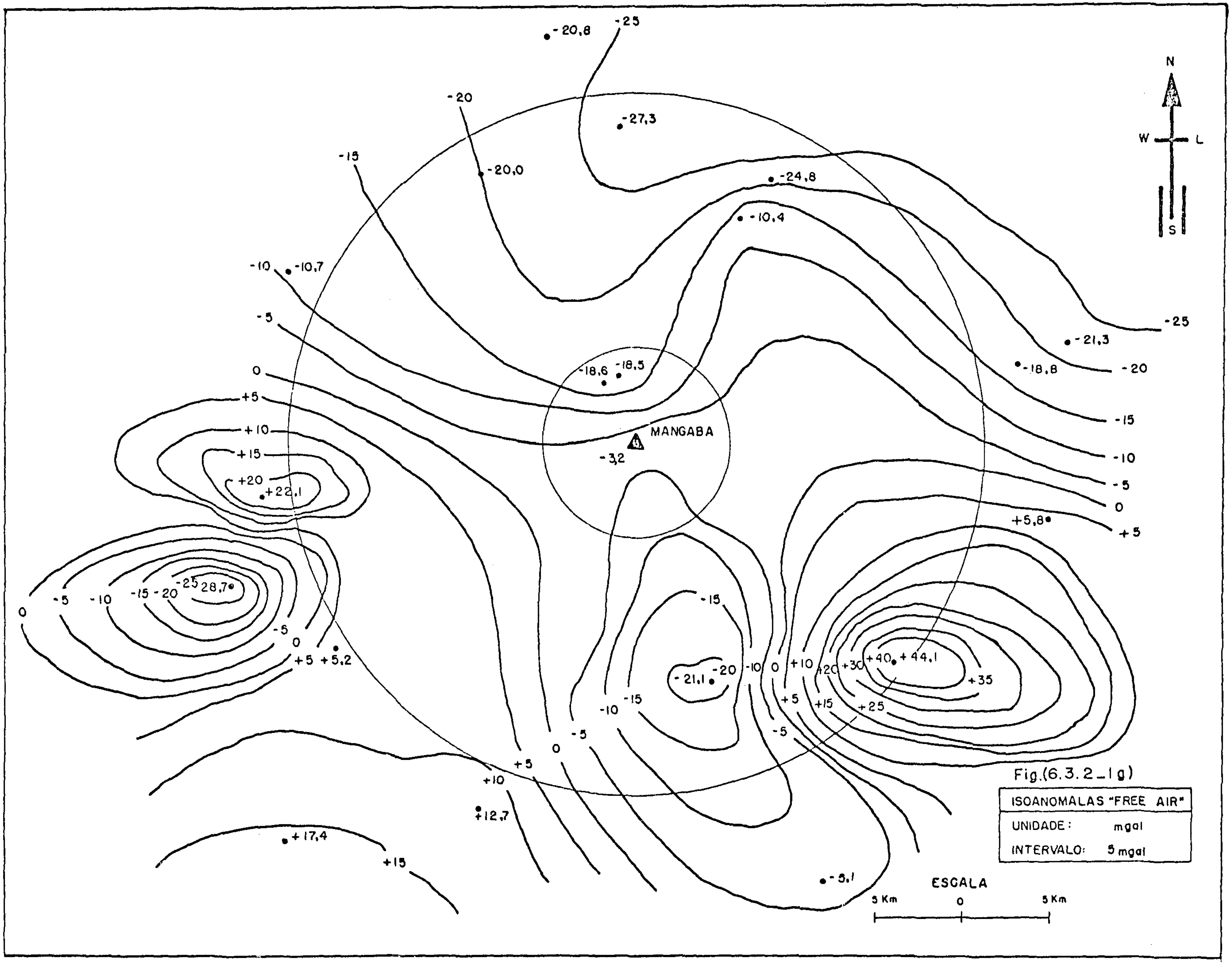

N
W
L
S
MANGABA
ISOANOMALAS "FREE AIR"
UNIDADE: mgal
INTERVALO: 5 mgal
ESCALA
5 Km 0 5 Km

Fig.(6.3.2_1g)

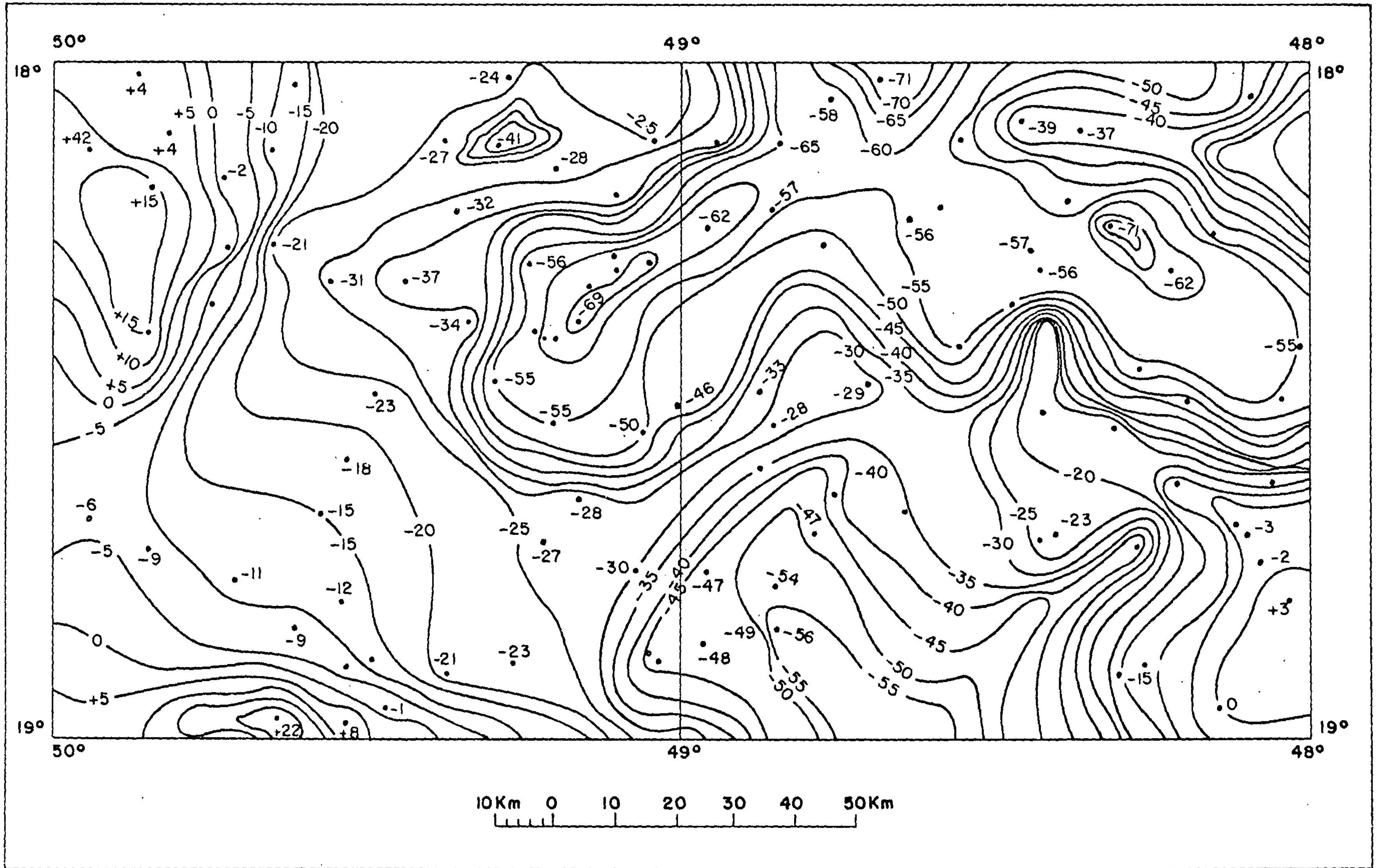



FIG (6.3.2-2) – TRECHO DO MAPA DE ISOANÔMALAS DO AR-LIVRE, ESCALA ORIGINAL 1:1.000.000

TABELA (6.3.2.1)

EFEITO DA ZONA 300 km < r < 3 km-MÉTODO DE RICE

| ESTAÇÃO | ELIPSÓIDE DE HAYFORD | | | ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA 1967 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N m | ξ" | η" | N m | ξ" | η" |
| Chuã | -24,39 | - 0,730 | + 0,683 | - 21,37 | - 0,741 | + 0,686 |
| Córrego Alegre | -19,50 | + 1,100 | + 0,406 | - 16,84 | + 1.102 | + 0,412 |
| Uberaba | -23,90 | - 0,268 | + 2,130 | - 21,22 | - 0,271 | + 2,133 |
| Araxá | -12,35 | - 1,006 | + 3,792 | - 9,62 | - 1,009 | + 3,798 |
| Lagoinha | - 6,72 | - 2,828 | + 0,289 | - 4,23 | - 2,829 | + 0,292 |
| Rib.dos Santos | -19,88 | + 0,478 | - 0,373 | - 17,42 | + 0,481 | - 0,380 |
| Mangaba | -17,74 | - 2,672 | + 3,603 | - 14,79 | - 2,678 | + 3,610 |

TABELA (6.3.2.2)

ZONA PRÓXIMA - MÉTODO ANALÍTICO

(CHUÃ)

| | Malha Circular | Malha Retangular |
|---|---|---|
| ξ" | - 0,942 | - 0,934 |
| η" | + 0,675 | + 0,622 |
| N m | -16,3 | -20,7 |
| grau de ajuste | 12 mgal | 9 mgal |

TABELA (6.3.3.1)

EFEITO DA ZONA 3 km < r < 0km

MÉTODO DOS TRÊS GRADIENTES

| ESTAÇÃO | ELIPSÓIDE DE HAYFORD | | | ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA 1967 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N m | ξ" | η" | N m | ξ" | η" |
| Chuã | - 0,11 | + 0,028 | - 0,042 | - 0,11 | + 0,028 | - 0,042 |
| Córrego Alegre | + 0,07 | - 0,078 | - 0,093 | + 0,08 | - 0,079 | - 0,095 |
| Uberaba | - 0,10 | + 0,069 | - 0,109 | - 0,09 | + 0,069 | - 0,109 |
| Araxá | - 0,04 | + 0,246 | - 0,533 | - 0,03 | + 0,245 | - 0,531 |
| Lagoinha | - 0,08 | + 0,390 | - 0,652 | - 0,07 | + 0,388 | - 0,651 |
| Rib.dos Santos | - 0,06 | - 0,018 | - 0,028 | - 0,06 | - 0,018 | - 0,028 |
| Mangaba | - 0,03 | + 0,202 | - 0,107 | - 0,02 | + 0,202 | - 0,107 |

Os resultados encontram-se na tabela (6.3.3.1). O programa GEORIC foi utilizado nos cálculos.

A dispersão das estações nesta área não deu margem a utilização do método analítico. Para Chuá, limite de 300 m, a integração e o método dos três gradientes apresentaram os mesmos resultados:

$$\xi'' = +\ 0'',015$$

$$\eta'' = -\ 0'',031$$

$$N = -\ 0,05\ m$$

## 6.4 - Resultados Finais

Na tabela (6.4.1) são apresentados os resultados finais para os sete pontos astro-geodésicos. Na fig. (6.4.1) estão representados graficamente os mesmos resultados.

TABELA (6.4.1)
RESULTADOS FINAIS

| ESTAÇÃO | ELIPSÓIDE DE HAYFORD | | | ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA 1967 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N m | $\xi''$ | $\eta''$ | N m | $\xi''$ | $\eta''$ |
| Chuá | - 20,13 | + 3,690 | - 2,381 | + 1,78 | + 1,754 | - 2,292 |
| Córrego Alegre | - 16,37 | + 2,640 | - 2,379 | + 5,09 | + 1,088 | - 2,410 |
| Uberaba | - 19,45 | + 4,609 | - 0,946 | + 2,13 | + 2,617 | - 0,838 |
| Araxá | - 7,70 | + 7,630 | - 0,639 | + 14,10 | + 5,194 | - 0,377 |
| Lagoinha | + 0,28 | + 3,599 | + 1,934 | + 20,91 | + 1,033 | + 2,183 |
| Rib.dos Santos | - 14,62 | + 0,393 | + 2,303 | + 5,84 | - 1,322 | + 2,261 |
| Mangaba | - 11,71 | + 5,849 | - 7,104 | + 11,54 | + 3,927 | - 6,941 |

Com estes elementos temos a definição da orientação elipsóide de Hayford-geóide no vértice Chuá:

$$\xi''_o = +\ 3'',690$$

$$\eta''_o = -\ 2'',381 \qquad \text{...(6.4.1)}$$

$$N_o = -\ 20,13\ m$$

Com as fórmulas de transformação apresentadas no capítulo (1.0) poderemos calcular o vetor de orientação geocêntrica do atual SGB - datum Córrego Alegre em relação ao SGB - datum Chuá (calculado):

$$du_o = -\ 47.633 \text{ m}$$

$$dv_o = +\ 19{,}388 \text{ m} \qquad \ldots(6.4.2)$$

$$dw_o = -\ 69{,}170 \text{ m}$$

As coordenadas geodésicas absolutas para Chuá são agora definidas (Hayford):

$$\phi_o = 19^{\circ}\ 45'\ 44'',850 \text{ S}$$

$$\lambda_o = 311^{\circ}\ 53'\ 54'',970 \text{ EGR} \qquad \ldots(6.4.3)$$

$$h_o = 743{,}050 \text{ m}$$

A estima dos erros médios dos valores apresentados na tabela (6.4.1) é complexa, já que temos diferentes distribuições de estações gravimétricas para cada ponto astro-geodésico.

Molodenskii |86| apresenta uma fórmula direta para estimar o erro médio das componentes do desvio do vertical, calculadas a partir de modelos gráficos apoiados em mapas de iso-anômalas:

$$m_{\xi}'' = m_{\eta}'' \doteq 0'',15\ \delta g$$

onde ($\delta g$) é o erro médio de representação, i é, a precisão do mapa de iso-anômalas utilizado na interpolação de valores médios.

A fórmula anterior só é válida para as zonas vizinha e próxima, além de pressupor que o levantamento gravimétrico cobre uniformemente toda a área em estudo. No caso presente esta não é a situação e a fórmula não poderá ser aplicada.

Mather |80| apresenta um método de avaliação que poderá ser utilizado. O método consiste em se calcular as quantidades fundamentais para cada ponto astro-geodésico através do nivelamento astronômico, os valores são então comparados com os gravimétricos e os erros médios calculados através das expressões:

$$m_{\xi}'' = \pm \sqrt{\frac{(\xi_a - \xi_g)^2}{n - 1}}$$

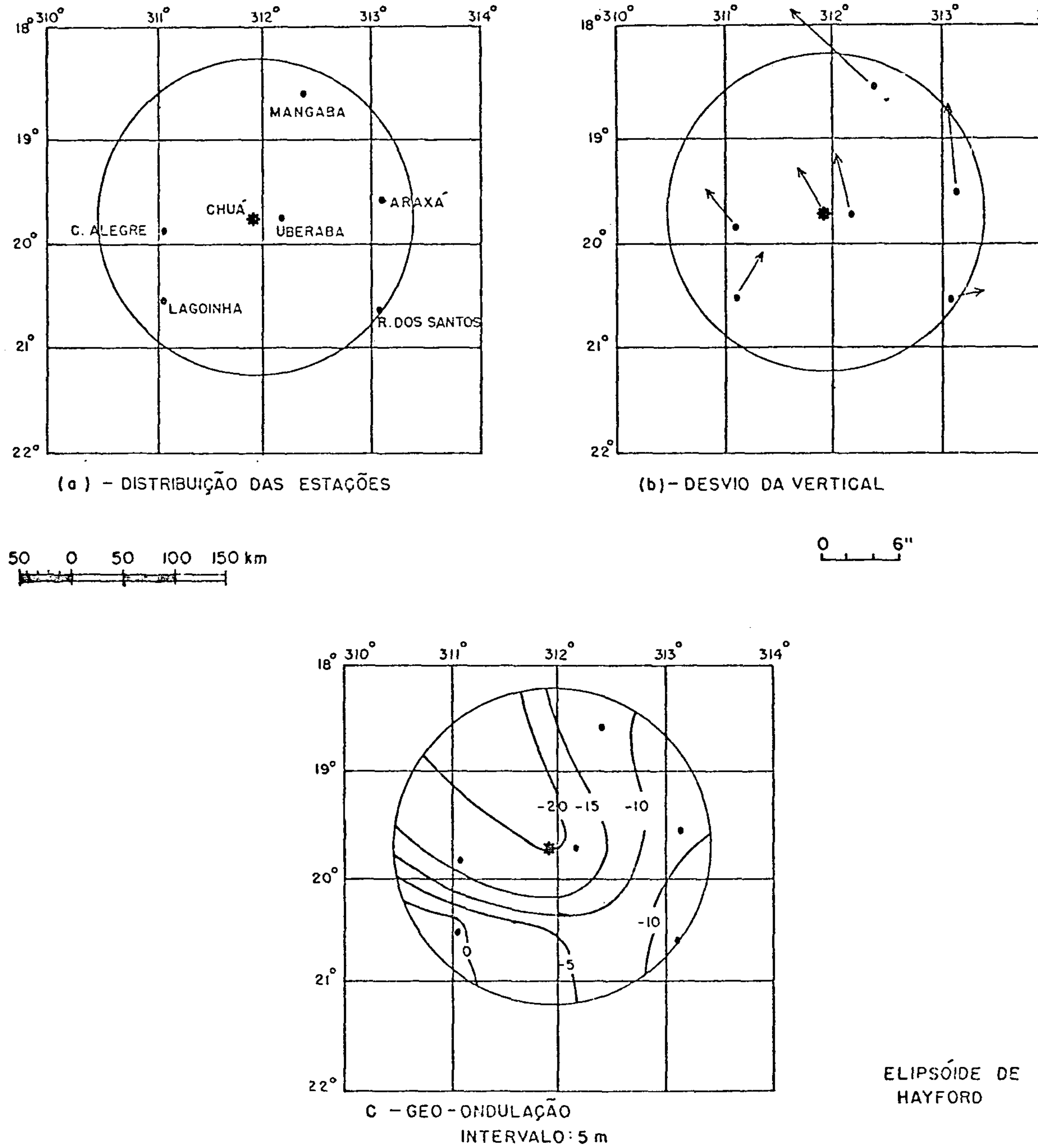



Fig. (6.4.1(a)) - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS FINAIS PARA O ELIPSOIDE DE HAYFORD.

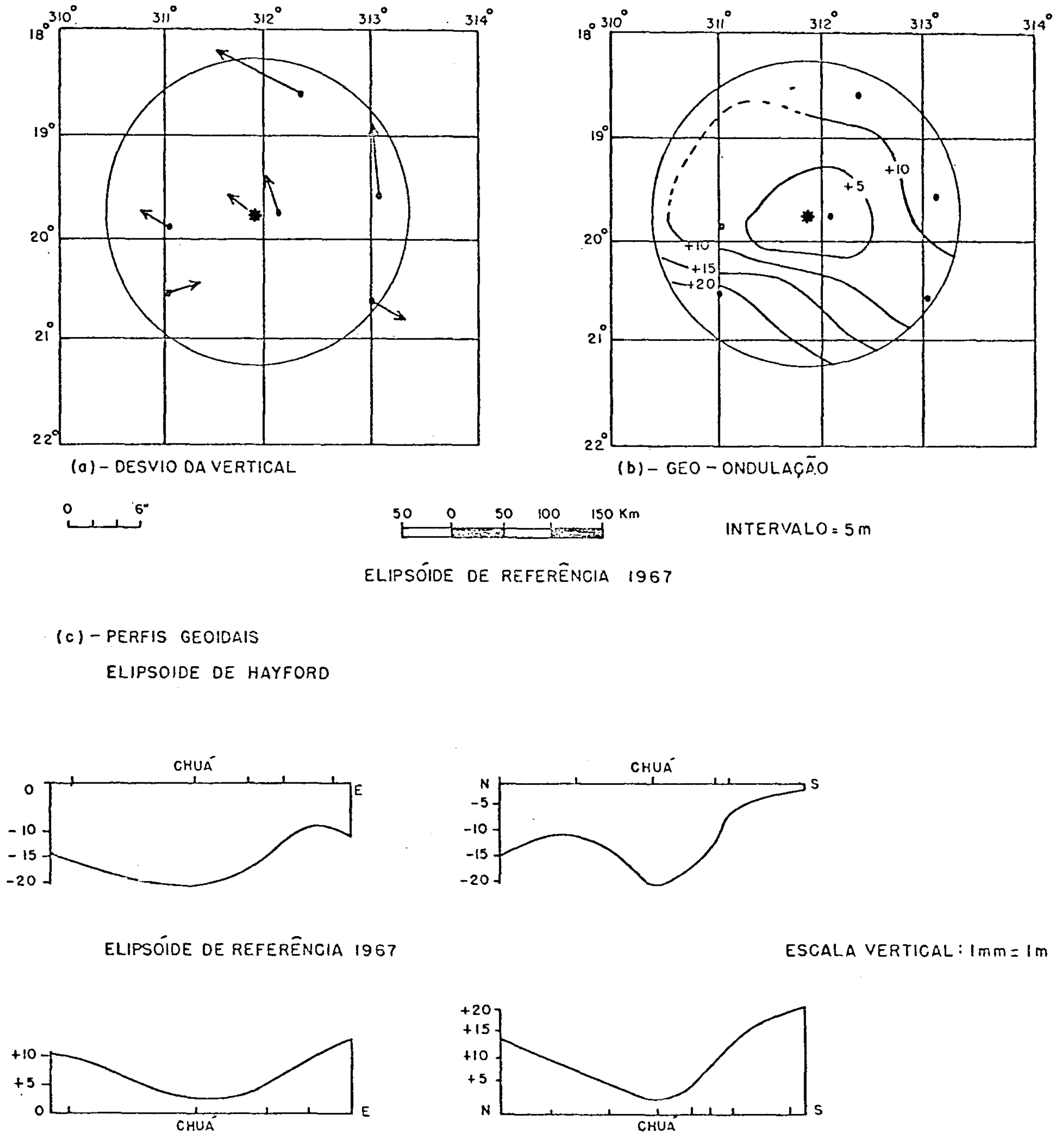



Fig.(6.4-1)(b) - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS FINAIS PARA O ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA 1967.

$$m_{\eta}'' = \pm \sqrt{\frac{(\eta_a - \eta_g)^2}{n - 1}} \qquad \ldots(6.4.4)$$

$$m_N = \pm \sqrt{\frac{(N_a - N_g)^2}{n - 1}}$$

Para aplicar o procedimento consideramos os valores(6.4.1) e calculamos as coordenadas geodésicas dos demais vértices em relação ao ponto datum-Chuá. Com estes elementos e as coordenadas astronômicas foi utilizado o nivelamento astronômico na forma desenvolvida por Ney |94|, para obtenção de ($\xi_a$, $\eta_a$ e $N_a$) em cada ponto astro-geodésico. Os resultados obtidos foram:

$$m_{\xi} = \pm\ 0'',6$$

$$m_{\eta} = \pm\ 0'',6 \qquad \ldots(6.4.5)$$

$$m_N = \pm\ 0,8\ m$$

### 6.5 - Conclusões:

Os resultados apresentados no item anterior são suficientes para justificar uma série de recomendações, que apresentaremos em seguida, visando a obtenção de valores mais consistentes em análises futuras.

(a) - Como tivemos oportunidade de expor no item (6.2.3), a primeira providência a ser adotada é complementar o levantamento gravimétrico no interior do círculo de 300 km de raio. A determinação de altitudes e coordenadas das estações abandonadas nesta análise, será um dos aspectos a ser abordado de imediato;

(b) - Intensificação dos levantamentos gravimétricos nas imediações de todos os pontos astro-geodésicos; num círculo de 5 km de raio;

(c) - Determinações astronômicas complementares, visando a formação de um polígono inscrito no círculo de 150km de raio. Esta providência permitirá a aplicação do Nivelamento astro-gravimétrico com maior segurança. De início mais 3 estações astronômicas possibilitam a formação de um octágono irregular no interior do círculo;

(d) - Ampliação da área de levantamento de maneira a se obter um recobrimento homogêneo para todos os pontos astro-geodésicos.

Acreditamos que estas providências tornarão as futuras determinações bem mais precisas que a atual.

# A D E N D O S

## 7. PANORAMA GRAVIMÉTRICO MUNDIAL E EM PARTICULAR DO BRASIL

As anomalias da gravidade constituem a principal ferramenta do método físico em Geodésia, representando o afastamento do campo gravitacional normal em relação ao real. A gravidade real é obtida a partir de medidas efetuadas na superfície da Terra, enquanto que a normal mediante fórmulas matemáticas em função da posição do ponto de cálculo.

A determinação da aceleração da gravidade processa-se mediante análise de fenômenos físicos que estejam em sua dependência direta ou indireta, tais como: o movimento de queda livre dos corpos no vácuo, num líquido, ou no ar; a oscilação de um pêndulo; a elongação de uma mola sujeita à ação de uma carga; a ascenção de um líquido num tubo capilar; a freqüência de oscilação de uma mola e outros. Entretanto, somente alguns destes fenômenos possibilitam determinações precisas, compatíveis com os objetivos da Geodésia ou de outras ciências aplicadas que utilizem medidas gravimétricas na consecução de seus objetivos. Resultados satisfatórios são obtidos a partir da observação do movimento oscilatório de um pêndulo, da queda livre, oscilação de uma mola de lâmina e da elongação ou qualquer outra deformação sofrida por uma mola.

Os métodos utilizados na medição da gravidade costumam ser divididos em dinâmicos e estáticos, de acordo com o princípio físico utilizado na determinação. Os métodos dinâmicos, são aqueles em que o movimento de um corpo é observado e o tempo ou período do movimento é medido diretamente. A análise do movimento de queda livre, do período de oscilação de um pêndulo ou de uma mola são exemplos de características dinâmicas utilizadas na medida da gravidade, |47|. Nos métodos estáticos a posição de equilíbrio de uma massa sustentada por uma mola é observada e o deslocamento linear ou angular da massa é medido, este é o princípio utilizado nos gravímetros modernos.

Qualquer que seja o método de avaliação da gravidade, as medidas gravimétricas são classificadas em relativas e absolutas.

As medidas absolutas são conduzidas de modo a fornecerem o valor da gravidade diretamente no local da observação. Para a sua execução são necessários; o conhecimento do tempo e de uma grandeza linear; por exemplo, o comprimento de um pêndulo ou o caminho percorrido no movimento de queda livre. As determinações absolutas são caracterizadas por sua complexidade e por instrumental pesado, não transportável. São normalmente realizadas em laboratórios sob condições especiais. No mundo existem pouco mais de uma dezena de estações absolutas.

As medidas relativas são aquelas em que determinamos a diferença da gravidade entre dois pontos; sendo que num deles o valor real deverá ser conhecido, o do outro, após a medida, será obtido por simples soma algébrica ao conhecido da diferença avaliada.

## . O SISTEMA DE REFERÊNCIA INTERNACIONAL - POTSDAN

Para a realização de medidas relativas necessitamos conhecer um valor absoluto que sirva de partida ao desenvolvimento dos trabalhos de campo, em conseqüência, qualquer país ao iniciar suas atividades gravimétricas deve estabelecer uma estação "absoluta", para servir como referência de seus trabalhos. Estas referências nacionais são ligadas umas às outras por medidas relativas, diversas vêzes, de maneira a se conseguir valores os mais homogêneos possíveis. Não é necessário que as referências nacionais tenham sido determinadas por medidas absolutas, podendo o valor absoluto de referência ser determinado por procedimentos relativos.

Devido a situações peculiares, as determinações absolutas realizadas em lugares distintos, quando reduzidas relativamente, não são compatíveis, i. é., apresentam desvios, que pelas características de precisão utilizadas nas medidas relativas, só podem ser atribuídos ao processo de medição.

Com o objetivo de evitar a realização dos trabalhos de campo em sistemas absolutos distintos, a UGGI elegeu dentre as estações absolutas existentes no mundo, a do "POTSDAN GEODETIC INSTITUTE", na Alemanha, como o **Datum Gravimétrico Mundial**, i.é., estação a qual deveram estar conectados os "data" nacionais, de modo a se obter um conjunto uniforme de valores da gravidade em todo o globo.

A estação Potsdan teve para primeiro valor da gravidade, 981 174,0 ± 3 mgal, |117|, conforme determinação realizada em 1906 por Kühnen e Futwängler, utilizando um dispositivo multi-pendular. Em 1936, Heyl e Cook, realizaram determinações com pêndulos reversíveis em Washington, obtendo o valor g = 980 081,6 ± 1,2 mgal, |103|. Em 1938, Clark em ledding ton utilizando, também, pêndulos reversíveis encontraram o valor 981 183,1 ± ± 0,6 mgal. Quando reduzidos ao mesmo ponto, por medidas relativas, estes valores diferiram um do outro de 4 mgal e em relação a Potsdan por 17 e 13 mgal respectivamente. Determinações posteriores, em diversas partes do mundo, quando reduzidas a Potsdan apresentaram discrepâncias entre -9 e -17 mgal, sugerindo uma correção ao valor determinado em 1906. Em 1949, Berroth, revisando as medidas realizadas em 1906 chegou ao valor de 981 263,3 mgal para Potsdan, o que veio confirmar as suspeitas de correção ao antigo valor. Em 1957 a UGGI, através da Assembléia Geral de Toronto, recomendou que se fizessem novas determinações absolutas, não só em Potsdan como em todo o mundo, e as respectivas reduções ao datum mundial.

Na tabela (7.0.1) apresentamos algumas estações absolutas com os valores observados e a respectiva redução a Potsdan, analisando as diferenças antevemos uma correção de - 12,6 mgal.

Recentemente, novas medidas foram realizadas por dois grupos de cientistas, encarregados da correção do sistema mundial; um dos grupos obteve resultados a partir da análise do movimento de queda livre e o outro utilizou as técnicas de movimento simétrico. O valor médio da correção obtida por queda livre foi de -12,7±0,6 mgal e o do movimento simétrico de -13,8 ± 0,04 mgal, |103|.

Com base nas pesquisas realizadas a UGGI, através da Resolução nº 22 da Assembléia Geral de Lucerne em 1967, redefiniu o Datum Gravimétrico Mundial. Segundo os elementos extraídos de |47|, |103| e |117|, define-se:

*A aceleração do movimento de queda livre de um corpo mergulhado no campo gravitacional terrestre é de:*

$$g = 981\ 260,0 \text{ mgal}$$

*no ponto médio entre as duas colunas no canto Norte da sala do pêndulo, ao nível do solo, do "Potsdan Geodetic Institute", Alemanha, tendo para coordenadas:*

$$\phi = 52^{\circ}\ 22',\ 86\ N$$

$$\lambda = 13^{\circ}\ 04',\ 06\ E\ Gr.$$

$$H = 86,24\ m$$

onde o valor de **g** é expresso com uma correção de -14 mgal em relação ao de 1906, |117|.

**. ESTAÇÕES GRAVIMÉTRICAS:**

Existem diversos sistemas de classificação para estações gravimétricas, segundo critérios de precisão, finalidades e de características. O sistema mais geral é o de características, envolvendo em sub-classes os de precisão e finalidades, sendo assim o apresentaremos com algumas modificações. Neste sistema as estações são classificadas em:

- Absolutas;
- de Referência Internacional;
- de Referência Nacional;
- de Detalhes.

TABELA 7.0.1

ALGUMAS DETERMINAÇÕES ABSOLUTAS DA GRAVIDADE

| ESTAÇÃO | MÉTODO | gobs (mgal) | g reduzido ã Potsdan | Diferença(mgal) | Ano da Determinação |
|---|---|---|---|---|---|
| Potsdan | Pêndulo reversível | 981 274,0±3,0 | 981 274,0 | 0,0 | 1906 |
| Washington | Pêndulo reversível | 980 081,6 | 981 257,2 | - 16,8 | 1936 |
| | Queda livre | 101,8±0,3 | 260,8 | - 13,2 | 1965 |
| Teddington | Pêndulo reversível | 981 183,2±0,6 | 261,2 | - 12,8 | 1938 |
| | Movimento simétrico | 181,8±0,13 | 260,3 | - 13,7 | 1967 |
| Leningrado | Queda livre | 981 921,5±1,6 | 265,2 | - 8,4 | 1956 |
| | Queda livre | 918,7±0,4 | 261,9 | - 12,1 | 1956 |
| Buenos Aires | Pêndulo composto | 979 696,0 | 265,0 | - 9,0 | 1956 |
| Paris | Queda livre | 980 927,7 | 261,2 | - 12,8 | 1958 |
| Ottawa | Queda livre | 980 613,4 | 260,3 | - 13,7 | 1960 |
| Princeton | Queda livre | 980 160,4±0,7 | 259,9 | - 14,1 | 1965 |
| | | | Média | - 12,6 | |

**Estações Absolutas** - A finalidade do estabelecimento de estações absolutas é montar um esquema de seleção e controle do datum gravimétrico mundial. As dificuldades de operação e manutenção, limitam sua existência em pouco mais de uma dezena de lugares no mundo, normalmente em instituições científicas. Na fig. 7.0.1,elaborada com os elementos de |103|, |112| e |117|, apresentamos a distribuição das estações absolutas no globo.

A precisão de uma determinação absoluta está condicionada ao método empregado e aos seus erros característicos. O método pendular, o mais utilizado, apresenta resultados com um erro médio de ± 1,0 mgal, sendo sobrepujado em precisão, pela análise do movimento de queda livre, cuja precisão está em torno de ± 0,5 mgal, |103|. A análise do movimento de queda livre tem suas próprias fontes de erro, em princípio diferentes das apresentadas pelo método pendular, resultados mais exatos, da ordem de ± 0,1 mgal, são atualmente obtidos pela análise do movimento simétrico.

**Estação de Referência Internacional** - As redes mundiais de estações de referências têm por objetivo o estabelecimento de "data" nacionais e estações de controle vinculadas ao sistema internacional, as estações de redes mundiais são geralmente desenvolvidas por medidas relativas, através de dispositivos pendulares e gravimétricos de alta precisão. De três a cinco instrumentos são utilizados simultaneamente em cada estação, com este procedimento afasta-se a possibilidade da existência dos erros sistemáticos inerentes a um determinado instrumental.

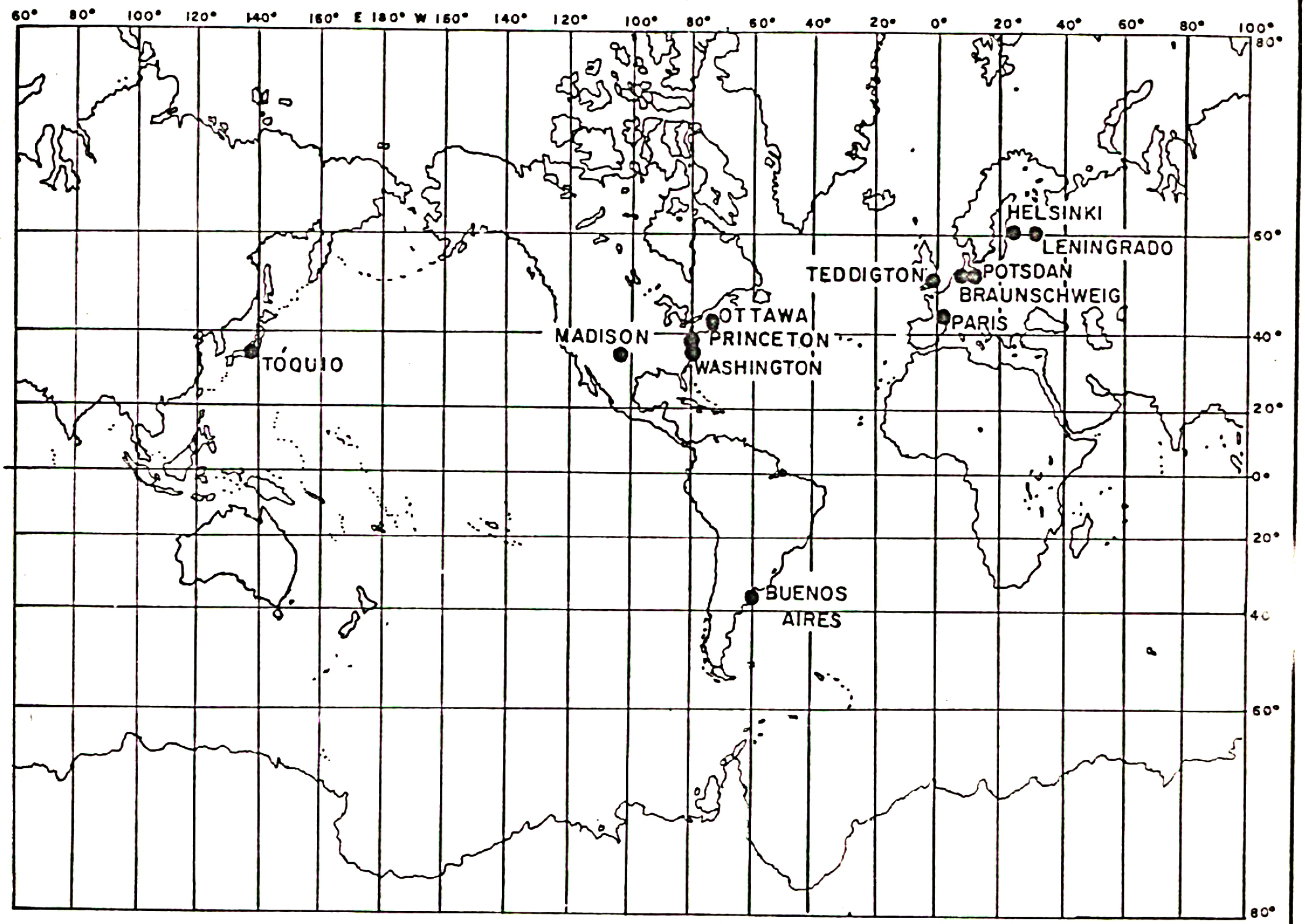



Fig.( 7.0-1 ) ___ ESTAÇÕES ABSOLUTAS NO MUNDO

Atualmente existem mais de uma centena de estações gravimétricas vinculadas à redes mundiais. Destas, cerca de 80 possuem aproximadamente 500 medidas diferentes, o que garantiu o ensaio de ajustamento global realizado por UOTILLA em 1958, tendo sido os erros médios quadráticos inferiores a 0,45 mgal, |103| e |117|. Convém ressaltar que o ajustamento foi preliminar; a inclusão de novas estações e reocupação de outras possibilitará um outro ajuste. Na fig. 7.0.2, apresentamos a que vem sendo considerada como rede mundial de primeira ordem |88|.

Não poderíamos deixar de registrar algumas informações a respeito das atividades desenvolvidas pelo grupo de trabalho do Prof. George Woolard, no estabelecimento de uma rede mundial de referência. O projeto de ligação de aproximadamente 600 estações gravimétricas em todo o mundo iniciou-se em 1948 sob os auspícios do "Office of Naval Research - U.S.A.", cobrindo as Américas, Europa, África, Sudoeste da Ásia, Austrália e principais ilhas oceânicas. Esta fase inicial do projeto foi encerrada em 1951 e

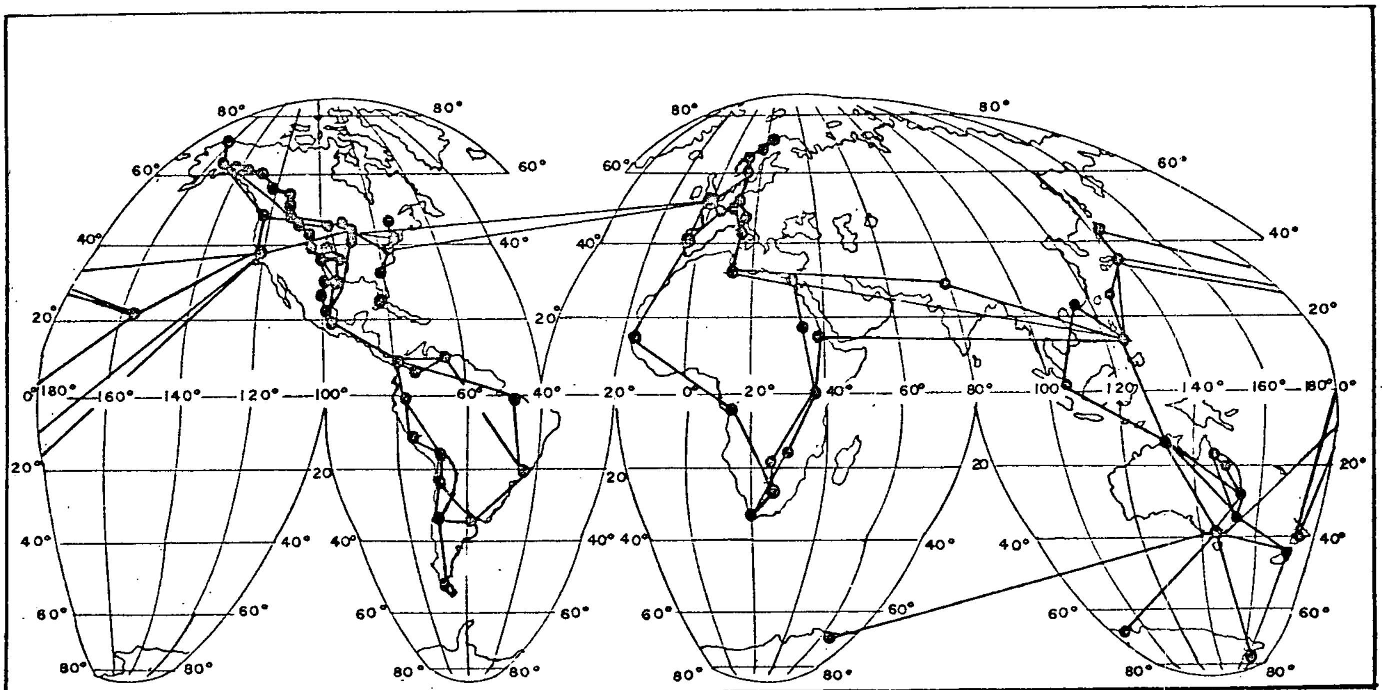



Fig. (7.0-2) ___ PRINCIPAIS ESTAÇÕES DE REFERÊNCIA INTERNACIONAL.

os resultados publicados em 1952 |127|, apresentando-se as estações com um erro médio de ± 1 mgal, embora alguns circuitos tivessem sido abandonados no cálculo final. Por ocasião do "Ano Geofísico Internacional", 1957-8, sob o patrocínio da Universidade de Wisconsin, as atividades foram reiniciadas com a ocupação de novas estações, principalmente nas Américas, África, Antártida e Ásia. As operações desenvolveram-se até 1962 e em 1963 os dados foram publicados |124|, os resultados apresentam-se um pouco mais consistentes que os da campanha anterior, o erro médio gira em torno de ± 0,8 mgal. A América do Sul e Central, áreas onde se verificaram fortes discrepâncias, foram trabalhadas até 1963, sendo os resultados finais e descrição das estações publicados em 1966, |126|.

**Estações de Referência Nacional** - As redes nacionais de referências são executadas isoladamente ou não das demais, mas sempre vinculadas ã uma estação da rede mundial selecionada como datum. O objetivo das redes nacionais é formar um arcabouço gravimétrico que possibilite levantamentos regionais ou locais sem ligações constantes ao datum. Representam para a gravimetria o mesmo papel das redes de triangulação para a Geodésia Geométrica.

As redes nacionais são normalmente classificadas de acordo com a precisão alcançada nos trabalhos de campo, destacando-se as de primeira ordem ou fundamentais, de alta precisão, ± 0,05 mgal, |12|, onde as estações são espaçadas de 100 a 30 km, desenvolvendo-se principalmente ao longo da rede rodoviária. As de segunda ordem ou regionais, correspondendo ã densificação da fundamental, tem precisão elevada, ± 0,10 mgal, e as estações são espaçadas de 50 a 10 km.

**Estações de Detalhes** - Constituem o levantamento gravimétrico em toda acepção do termo. São estações vinculadas a qualquer das classes anteriores, a precisão com que são determinadas depende do fim almejado com o levantamento. SHOKIN, |106|, comentando os critérios de precisão, afirma - ... "para a solução da maioria dos problemas geodésicos e geológicos a precisão de ± 1 mgal é suficiente". Quando se utiliza o mapeamento de isoanômalas não se deve esquecer a relação entre escala e densidade areal de estações, condicionantes da precisão.

Em Geodésia, a precisão dos levantamentos de detalhes variará com a escala do mapa de isoanômalas a ser elaborado em apoio ao cálculo das geondulações e componentes do desvio da vertical. Não existe um critério absoluto para a fixação do número de estações para atender um determinado fim, as características topográficas e geológicas variam de um local para outro, dificultando a fixação dos limites de precisão e densidade, o que se procura fazer é gerar limites mínimos que nos garantam uma determinada precisão. Analisando critérios publicados em diversas obras, principalmente em |12|, |64|, |103| e |106| elaboramos a tabela 7.0.2, onde procuramos estabelecer valores mínimos, a topografia e geologia da área de trabalho deverão ser cuidadosamente analisadas para que se atinja estes valores.

A distribuição das estações de detalhes por todo o globo é que expressam o grau de conhecimento do campo gravitacional terrestre. A sua distribuição global é de grande importância para a Geodésia física, já que nos processos de integração a Terra é o domínio de variação.

Em 1950 na "OHIO STATE UNIVERSITY", tendo a frente o Dr. W. A. Heiskanen, foi dado o passo inicial para a revisão de todo o material gravimétrico existente no mundo. Era a primeira iniciativa no sentido de grupar e calcular anomalias médias em todo o globo, com o objetivo de fornecer aos geodesistas os elementos essenciais ao cálculo das quantidades necessárias à definição de sistemas geodésicos e definição do geóide por métodos físicos. A esta iniciativa seguiu-se o estabelecimento do Bureau Gravimétrico Internacional, por parte da UGGI. Os resultados mais recentes destes esforços foram publicados em Agosto de 1971 pelo "Aeronautical Chart Information Center", |120|, onde se encontram registradas anomalias médias em áreas de 1º x 1º, os cálculos foram realizados com o material coletado pela OSU. Com estes dados elaboramos a fig. 7.0.3, que representa o conhecimento gravimétrico da Terra.

**. LINHAS DE CALIBRAÇÃO**

A constante de um gravímetro é definida como sendo o coefi

TABELA 7.0.2

UM CRITÉRIO PARA SELEÇÃO DE PRECISÃO E DENSIDADE
DE ESTAÇÕES NUM LEVANTAMENTO GRAVIMÉTRICO:

| Escala da Carta Final | Intervalo das Isoanômalas (mgal) | Precisão das Estações * (mgal) | Densidade de Estações | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 Estação por ($km^2$) | Distância entre Estações (m) |
| 1:2 500 000<br>1:1 000 000 | 10 | ± 0,50 | 150 - 400 | 5 000 - 10 000 |
| 1:1 000 000<br>1: 500 000 | 5 | ± 0,30 | 25 - 100 | 2 500 - 5 000 |
| 1: 250 000<br>1: 100 000 | 2 | ± 0,25 | 4 - 10 | 1 000 - 2 000 |
| 1: 100 000<br>1: 50 000 | 1 | ± 0,20 | 1 - 4 | 500 - 1 000 |
| 1: 50 000<br>1: 25 000 | 0,5 | ± 0,15 | 0,2 - 1,0 | 200 - 500 |
| 1: 10 000<br>1: 5 000 | 0,2 - 0,25 | ± 0,10 | 0,02- 0,1 | 50 - 150 |
| 1: 5 000<br>1: 2 000<br>1: 1 000 | 0,1 | ± 0,05 | 0,002- 0,01 | 20 - 50 |

* O erro inerente à estação de referência não está incluído.

ciente de redução dos resultados observados a um sistema de medidas absolutas CGS (mgal), expresso em divisões da escala do dispositivo de medidas, sendo uma característica de montagem do instrumento. Com o uso contínuo, pequenas deformações do sistema elástico alteram a escala, em conseqüência, a constante de redução, havendo necessidade de se determinar uma correção ao sistema, o que se consegue através da calibração.

Nos gravímetros cujas escalas são lineares, podemos representar a diferença da gravidade medida entre dois pontos, pela expressão:

$$(\Delta g) = k \, (\ell_i - \ell_o) \qquad \ldots(7.0.1)$$

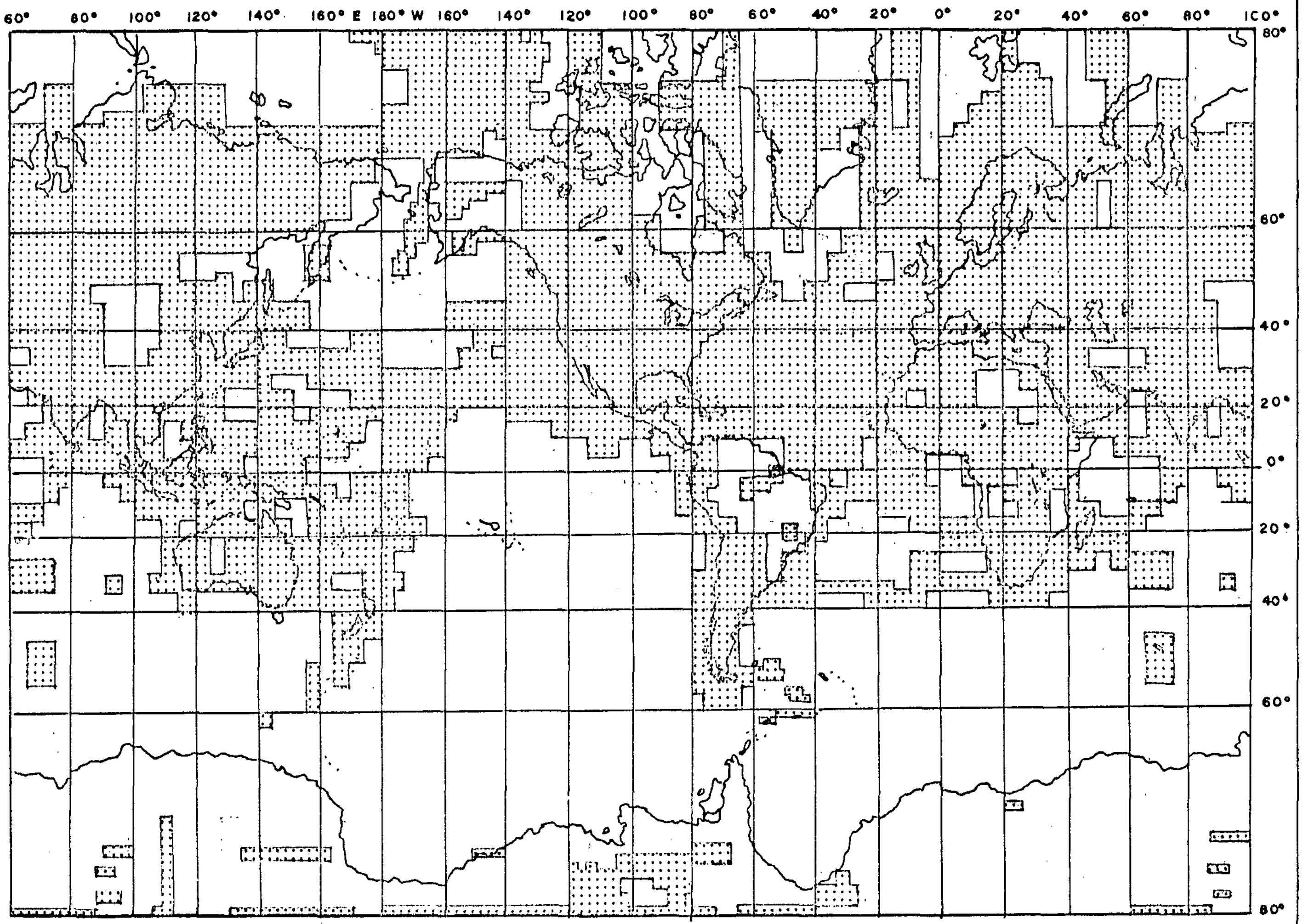



Fig.( 7.0-3 ) —— ÁREAS GRAVIMETRICAMENTE LEVANTADAS NO GLOBO onde k é a constante do gravímetro ou fator multiplicativo de escala do dispositivo de medida; $\ell_i$ é a leitura da escala num ponto qualquer (i); $\ell_0$ a leitura num ponto inicial.

Na calibração procuramos determinar a constante multiplicativa (k). Existem três métodos de calibração; dois de laboratório(inclinação e suspensão de uma massa) e um de campo (ocupação de estações cujos valores gravimétricos são conhecidos precisamente). O método de campo é o mais preciso, oferecendo ótimos resultados tanto para sistemas de escalas lineares quanto angulares.

A calibração pelo método de ocupação de estações com valores conhecidos é relativamente simples, entretanto complexo na montagem da infra-estrutura necessária a sua utilização. Em essência o método consiste em ocupar duas estações com valores conhecidos ($g_1$ e $g_2$), onde são realizadas leituras de escalas ($\ell_1$ e $\ell_2$). Segundo |106|, a constante de multiplicação será dada por:

$$k = \frac{g_2 - g_1}{\ell_2 \quad \ell_1} = \frac{(\Delta g)}{\Delta \ell} \qquad \ldots(7.0.2)$$

Aplicando a lei de propagação dos erros, |102|, à expressão anterior, obtemos para o erro cometido na determinação da constante:

$$m_k = \frac{1}{\Delta \ell} \sqrt{m^2_{(\Delta g)} + m^2_{\Delta \ell}} \qquad \ldots(7.0.3)$$

onde $m^2{}_{(\Delta g)}$ é o erro na determinação da diferença de gravidade, conhecido a "piori", entre as estações de calibração, e

$m^2_{\Delta \ell}$ é o erro cometido no cálculo da diferença de leituras nas escalas.

O erro cometido na determinação da constante, $m_k$, será um erro sistemático para toda diferença de gravidade que se meça com o instrumento calibrado. Exemplificando, a calibração é realizada com um erro relativo de $\frac{m_k}{k} = 1.10^{-4}$, a diferença medida, $(\Delta g) = 1$ gal, terá um erro sistemático $m_{(\Delta g)} = \pm 0{,}1$ mgal, que não poderá ser reduzido com a repetição das observações.

Com o objetivo de minimizar os erros acidentais, cometidos durante a operação de calibração, é comum observar-se diversos pares de estações, para tanto circuitos especiais de calibração são criados. Os valores da gravidade nestas estações são medidos por meio de pêndulos de alta precisão e gravímetros com coeficientes de escala de confiança, a estes circuitos é que denominamos de **LINHAS DE CALIBRAÇÃO**.

O estabelecimento de linhas de calibração vem sendo considerado como fundamental à obtenção do campo gravitacional terrestre o mais homogêneo possível, não basta que conheçamos o valor da gravidade em diversos pontos numa única referência mundial, é também necessário que estes pontos tenham sido determinados com instrumentos que apresentem o mesmo valor de escala para 1 mgal, pois só assim estará garantida a unidade de medida.

No momento encontram-se estabelecidas três linhas principais de calibração e três secundárias,de caráter mundial.

. **Linha Americana para Calibração** - (American Calibration Line - ACL) - Estende-se de "Point-Barrow", no Alaska, pela costa leste da América do Norte passando através da América Central e costa oeste da América do Sul até Buenos Aires. A ACL compreende três lances; o primeiro de Point Barrow até a cidade do México com 33 estações, sua amplitude é de 5 129 mgal, apresentando um erro relativo de ± $3,5.10^{-4}$, |103|. O segundo da cidade do México até La Paz, as observações foram conduzidas com pêndulos "Gulf M" e"Cambridge", os resultados finais ainda não foram publicados. O terceiro de La Paz a Buenos Aires, observado pelo APCS com gravímetros "La Coste-Romberg", cujos resultados finais não são de nosso conhecimento.

. **Linha Euro-Africana para Calibração** - (Euro-African Calibration Line-EACL) Estende-se de "Hammerfest", na Noruega, até 'Mowbray", na África do Sul. Da mesma maneira que a anterior, a EACL foi observada em dois lances. O primeiro conhecido como linha européia de calibração, de Hammerfest até Roma, sua amplitude é de 2 500 mgal, apresentando um erro relativo de ± $3.10^{-4}$, |103|. O segundo de Roma pela costa leste da África até Mowbray, estando totalmente observado com pêndulos e gravímetros, mas, ainda não foram divulgados os resultados.

. **Linha Pacífico Oeste para Calibração** - (West Pacific Calibration Line - WPCL) - A mais recente linha mundial, seu estabelecimento iniciou-se em 1965 por iniciativa do "Geophysical Survey Institute, Tokyo, Japan" com pêndulos japoneses "GSJ" e "Gulf M". A linha iniciou-se em "Fairbanks",passando por Tóquio, Manila, Singapura, Brisbane e encerrando-se em Melburne, na Austrália, posteriormente foi estendida até Mc Murdo na Antártida.

Na fig. 7.0.4 representamos as linhas principais de calibração com os elementos de |89|, |112| e |114|.

As linhas secundárias de calibração foram estabelecidas entre 1965 e 1968 pelo "Army Photographic and Charting Service-USA", utilizando quatro gravímetros "La Coste-Romberg", com o objetivo de atender as áreas onde não existiam pontos de passagem das linhas principais e propiciar e lementos para novas ligações das principais, |116|.

. **Linha Secundária Americana para Calibração** - (ASCL) - Partindo de "Denver", estação pendular da ACL, passando por Miami, Caracas, Belém, Rio de Janeiro e terminando em Buenos Aires. As estações foram estabelecidas em 1965 e 1967, com resultados publicados em |119|, as estações são intervaladas de ± 100 mgal.

. **Linha Secundária Euro-Africana para Calibração** - (EASCL) - Partindo de Roma, estação da EACL, passando por Argel, M'Bour, Lagos, Leopoldville, e encerrando-se em Mowbray. As estações, também, espaçadas de ± 100 mgal.

. **Linha Centro-Asiática para Calibração** - (Central Asian Calibration Line - CACL) - Foi estabelecida no sentido Norte-Sul, partindo de Nova Delhi e terminando no Ceilão.A maior parte das estações componentes da linha, são da rede mundial estabelecida por Woollard em 1962 e reocupadas por APCS em 1967. As estações são desigualmente espaçadas, com um intervalo médio de 75 mgal.

Na fig. 7.0.4, encontram-se representadas as linhas secundárias de calibração.

. **PANORAMA GRAVIMÉTRICO DO BRASIL**

No Brasil não existe uma organização encarregada do planejamento, execução e controle de levantamentos gravimétricos com objetivo geodésico. Os trabalhos realizados por alguns organismos governamentais, o foram por esforços individuais de tecnólogos interessados na matéria, sem seguir um plano gravimétrico nacional.

No momento em que as esferas científicas de todo o mundo voltam-se para o problema gravimétrico em termos de pesquisas e fomento aos levantamentos das áreas de "vazio", seria de bom alvitre a estruturação de uma política gravimétrica nacional, já que o Brasil é um dos maiores vazios gravimétricos continental do mundo. Não seria necessária a criação de um órgão executor, os organismos cartográficos, como o IBGE que já tem experiência em levantamentos gravimétricos, poderiam ter suas funções ampliadas, de modo a se tornarem aptos à execução de levantamentos desta categoria. Os levantamentos além de atenderem à pesquisa geodésica, poderão servir de elementos controladores e de apoio às tarefas cartográficas, além de serem de grande valor à pesquisa geológica.

Convém frisar que as críticas acima referem-se a execução e controle da gravimetria sistemática de caráter extensivo, no campo específico (aplicações geofísicas) não poderíamos criticar o extraordinário traba

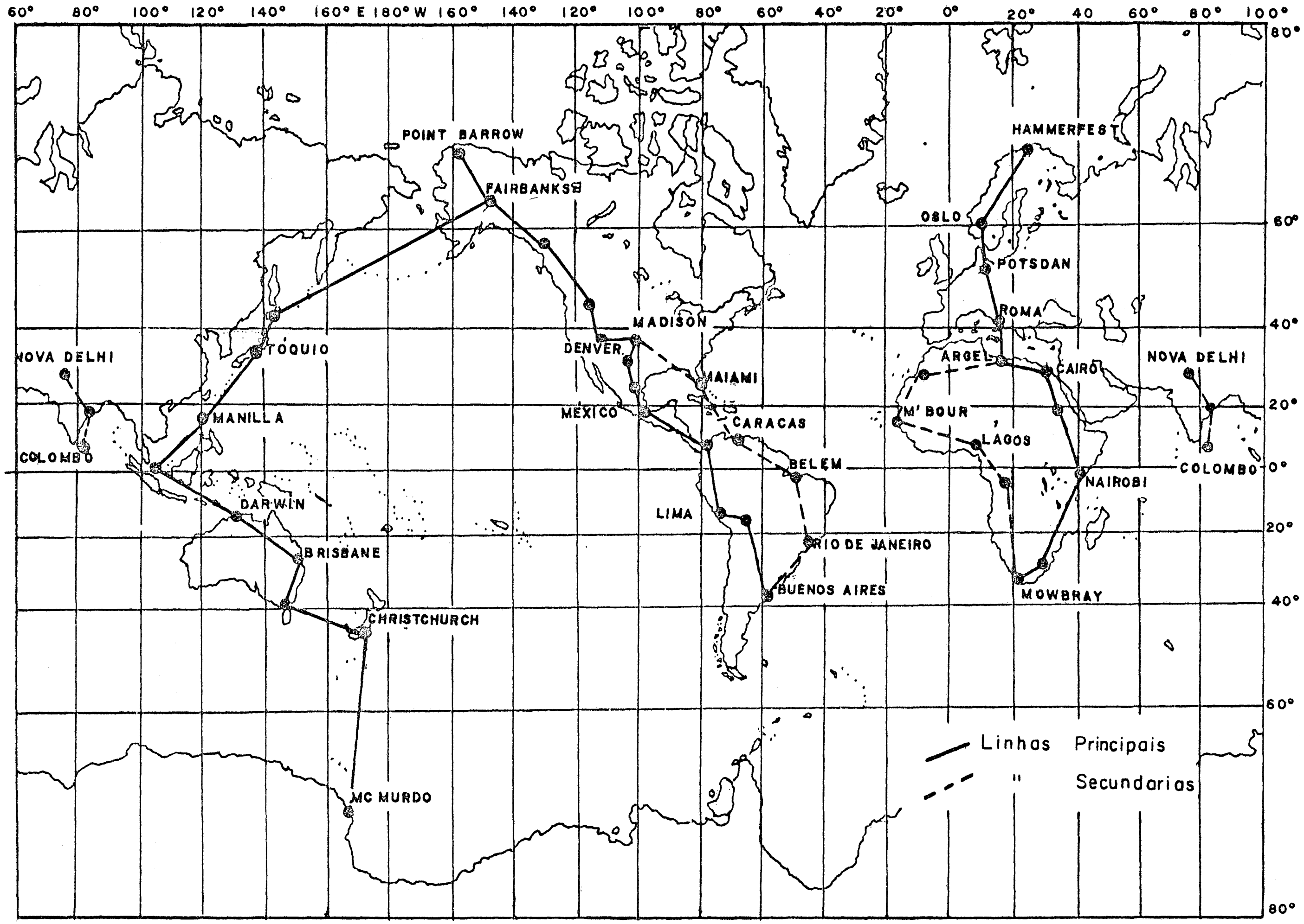



Fig. ( 7.0-4) — LINHAS MUNDIAIS PARA CALIBRAÇÃO lho desenvolvido pela PETROBRAS. Os levantamentos executados por essa companhia estão restritos às bacias sedimentares de interesse geológico, sem caráter extensivo nacional. Com o encerramento de suas atividades, nesta área, o vácuo gravimétrico existente se manterá, a menos que se defina uma estrutura gravimétrica nacional.

## . O DATUM GRAVIMÉTRICO BRASILEIRO

No início desta exposição tivemos a oportunidade de comentar que das redes de referências internacionais deveriam ser escolhidas as estações "data" nacionais. No Brasil existem duas estações da rede mundial de primeira ordem, localizadas nas cidades de Belém e do Rio de Janeiro, |88|. A estação do Observatório Nacional do Rio de Janeiro é, segundo MORELLI |88|, a mais precisa, estando a de Belém carecendo de observações. A estação internacional do Rio de Janeiro tem sido utilizada como datum em alguns trabalhos desenvolvidos pelo ON e IBGE. Embora em muitos trabalhos venha sendo citada como datum brasileiro, nenhuma decisão oficial foi tomada pelas entidades científicas envolvidas no labor gravimétrico, esta é a razão porque a consideraremos como o provável **Datum Gravimétrico Brasileiro**, sendo descrita por |29|, |88| e |124|.

> *A estação gravimétrica internacional do Rio de Janeiro é definida pelo topo, rente ao solo, de um pilar assentado na rocha à entrada da ante sala dos sismógrafos, no andar térreo do Observatório Nacional. Tendo para valor da aceleração da gravidade:*
>
> $$g = 978\ 791{,}0 \text{ mgal} \qquad (*)$$
>
> *e tendo para coordenadas:*
>
> $$\phi = 22^{\circ}\ 53'\ 42'',2S$$
>
> $$\lambda = 43^{\circ}\ 13'\ 22'',5W\ GR$$
>
> $$H = 29 \text{ m (aprox.)}$$
>
> (*) *valor no sistema Potsdan 1967.*

Na estação internacional do Rio de Janeiro foram realizadas determinações pendulares e gravimétricas, vinculadas à redes mundiais, em épocas diversas. A primeira determinação data de 1948, tendo sido realizada por SHELTON do USCGS, utilizando um dispositivo pendular BROWN. Seguiram-se determinações em diferentes datas pelo grupo de trabalho WOOLLARD, utilizando pêndulos "Gulf M" e "Cambridge" além de gravímetros "Worden".

A última determinação foi realizada em 1967 pela USAF-APCS no estabelcimento da ASCL com gravímetros "La Coste-Romberg". Na tabela 7.0.3 são apresentadas as principais determinações.

TABELA (7.0.3)

**Determinações Gravimétricas no Observatório Nacional**

| ANO | AUTOR | g (mgal) (* | DISPOSITIVO |
|---|---|---|---|
| 1949 | Shelton | 978 790,8 | Pêndulo Brown |
| 1949 | Hardin | 792,0 | Gravímetro Worden |
| 1951 | Bonini | 791,3 | Gravímetro Worden |
| 1952 | Black | 792,3 | Gravímetro Worden |
| 1958 | Iverson | 790,6 | Pêndulo Gulf"M" |
| 1958 | Jackson | 791,0 | Pêndulo Cambridge |
| 1958 | Jackson | 791,2 | Pêndulo Cambridge |
| 1961 | Kozlozky-Longfield | 789,7 | Gravímetro LaCoste-Romberg |
| 1963 | Woolard | 790,8 | Pêndulo Cambridge |
| 1963 | Woolard | 790,7 | Gravímetro Worden |
| 1963 | J. Rose | 790,3 | Pêndulo Cambridge |
| 1967 | ASCL | 790,8 | Gravímetro LaCoste-Romberg |

(* valores na referência Potsdan 1967.

A estação internacional de Belém, está localizada ao lado do tanque de tratamento d'água, da perfeitura municipal, sendo sua posição, |124|:

$$\phi = 01^{\circ}\ 23'S$$

$$\lambda = 48^{\circ}\ 29'W\ Gr$$

$$H = 10.7\ m\ (aprox.)$$

com valor para a gravidade:

$$g = 978\ 023{,}0\ mgal,\ |114|.$$

A tabela (7.0.4) representa as determinações mais recentes executadas nesta estação, os elementos são os apresentados em |125| e |126|.

TABELA (7.0.4)

Determinações Gravimétricas, Recentes, em Belém

| ANO | AUTOR | g (mgal) | DISPOSITIVO |
|---|---|---|---|
| 1963 | Woollard | 978 023,0 | Pêndulo Cambridge |
| 1963 | Woollard | 023,0 | Gravímetro Worden |
| 1963 | J. Rose | 023,4 | Pêndulo Cambridge |
| 1967 | ASCL | 023,1 | Gravímetro LaCoste-Romberg |

## REDE BÁSICA

Analogamente ao que ocorre na Geodésia Geométrica, estabelecimento de redes de referências, nos levantamentos gravimétricos necessitamos de referências básicas que facilitem o desenvolvimento dos trabalhos regionais e locais, estas redes é que são denominadas básicas.

A inexistência de uma política gravimétrica não constituiu uma barreira ao desenvolvimento de redes de referências. Órgãos como o Observatório Nacional e o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, embora lutando com grandes dificuldades, têm conduzido levantamentos de campo com o objetivo de estabelecer estações de referência.

Instituições internacionais, dentro do programa gravimétrico mundial, contribuiram expressivamente na estruturação de algumas referências em nosso território, tal é o caso do grupo de trabalho Woollard e do APCS.

Reunindo os elementos isolados podemos afirmar que cerca de 40% do território nacional tem suas necessidades gravimétricas atendidas por redes básicas, embora este atendimento não seja homogêneo..

. **Rede de Referência do Observatório Nacional** - Em 1955, tendo a frente dos trabalhos o Dr. Lélio I. Gama, o ON iniciou uma série de levantamentos gravimétricos que cobrem cerca de 30% de nosso território. Embora o objetivo inicial, definido em |7| e |29|, não fosse o estabelecimento de redes de referências, as precisões obtidas e as características dos circuitos desenvolvidos, facilmente credenciaram as estações de referência. No momento encontram-se levantadas aproximadamente 2 800 estações, distribuídas ao longo das principais estradas do país, acompanhando a rede de nivelamento de alta precisão, desde Pelotas (RS) a São Luís do Maranhão.

Na fig. (7.0.5) apresentamos, esquematicamente, a situação da rede básica do ON, as referências estabelecidas integram quatro projetos - Nordeste, Centro-Leste, Sul e Extensão da rede do Nordeste. Os trabalhos de campo foram realizados com gravímetros Worden e LaCoste-Romberg.

O projeto Nordeste ou Rede de Referência do Nordeste foi desenvolvido em 5 circuitos com 91 bases e 241 estações de passagem, um total de 332 estações distribuídas desde Salvador até Fortaleza em 3 linhas. Os erros de fechamento por circuitos foram sempre inferiores a 0,045 mgal, credenciando a rede como de primeira ordem. As descrições de localização foram publicadas em |39|, os valores medidos e critérios de compensação em |29|.

O projeto Centro-Leste, compreendendo a ligação da rede do nordeste ao ON, é formado por 9 circuitos com 62 estações desde o Rio até Salvador, distribuídas em 5 linhas. Os erros de fechamento não permitem a classificação desta rede como de primeira ordem, já que 3 circuitos apresentaram erros de fechamento superiores a 0,05 mgal, no entanto a precisão é compatível com a classificação de segunda ordem. As descrições e resultados são apresentados em |29| e |39|, respectivamente.

O projeto de extensão da rede do Nordeste compreende 5 circuitos com 7 linhas e 450 estações, estendendo-se desde Feira de Santana(BA) a Fortaleza(CE), passando por Teresina (PI). O trabalho encontra-se em fase final de ajustamento, devendo os resultados e descrições serem publicados este ano.

O projeto Sul é o mais antigo, tendo as operações de campo sido iniciadas em 1955 com um gravímetro "Worden", posteriormente diversas estações foram reocupadas e novos circuitos incorporados ao projeto inicial, tendo sido os trabalhos complementares executados com um gravímetro"LaCoste-Romberg". As redes Sul e Centro-Sul compreendem 10 circuitos e 5 ramais com um total aproximado de 1500 estações. Os resultados do projeto serão publicados nos próximos meses.

**Rede de Referência do Instituto Brasileiro de Geografia**

Em 1956, ao serem iniciadas as atividades gravimétricas para a determinação do datum brasileiro, o IBGE desenvolveu uma série de caminhamentos gravimétricos ao longo das principais rodovias do Sul; o objetivo era estruturar uma linha de calibração que atendesse à manutenção do instrumental a ser utilizado nos levantamentos extensivos, |100|. A precisão dos resultados, entretanto, possibilita a utilização destas estações como referências.


Fig. ( 7.0-5 ) ____ RÊDE DE REFERÊNCIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL.

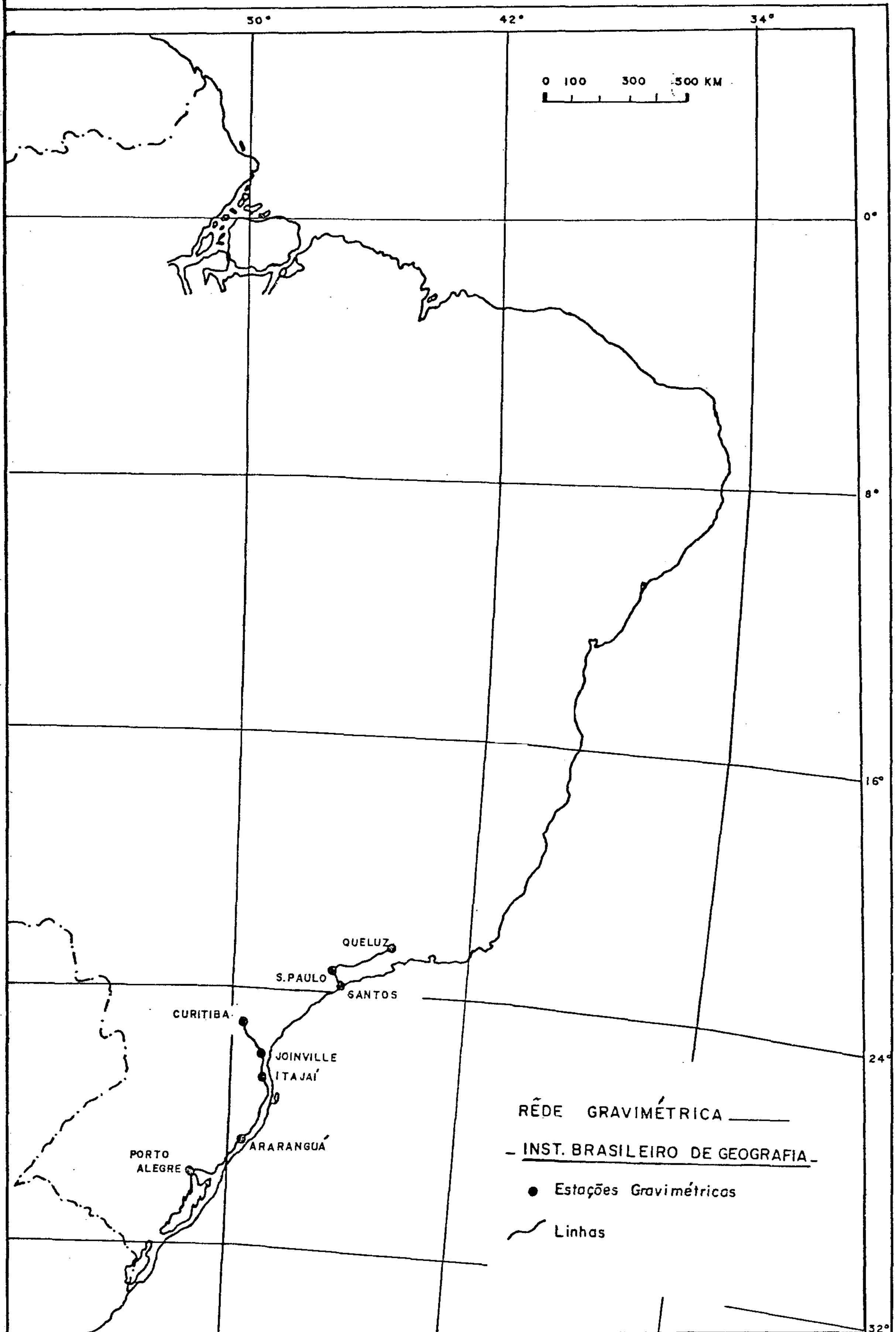



Fig.( 7.0-6 ) —— RÊDE DE REFERÊNCIA DO IBG.

As estações estão distrbuídas em 4 linhas; a primeira de São Paulo a Santos, com 7 estações ao longo da antiga rodovia de ligação entre as duas cidades (Caminho do Mar), a segunda de Queluz a Itatiaia com 10 estações distribuídas nas RN ao longo da rodovia Presidente Dutra, a terceira de Curitiba a Porto Alegre com 81 estações e a quarta de São Paulo a Queluz com 9 estações. Os itinerários e valores são apresentados em |101|. Na fig. (7.0.6) procuramos esquematizar a rede.

**. Rede Woollard de Referência**

Anteriormente tivemos oportunidade de comentar a respeito das redes mundiais estabelecidas pelo grupo de trabalho Woollard, no Brasil encontramos perto de uma centena de referências estabelecidas pelo grupo.

As primeiras atuações, em nosso país, datam de 1949 quando Harding utilizando um gravímetro "Worden" fixou 14 estações, publicadas em 1952, |127|. Seguiram-se as determinações de Black em 1952 que reocupou as anteriores e estabeleceu 33 novas estações. Embora as observações efetuadas por Harding tivessem se apresentado com erros máximos de fechamento em torno de 0,5 mgal, quando comparadas com os resultados obtidos por Black surgiram discrepâncias da ordem de 2 mgal, |125|, para dirimir as dúvidas, Iverson em 1958 executou nova campanha pelas Américas; infelizmente devido à falhas instrumentais os resultados foram abandonados. No mesmo ano Jackson utilizando pêndulos "Cambridge" iniciou uma campanha de ligação das principais referências à estações absolutas, destacando-se em nosso país a ligação do Rio de Janeiro a Buenos Aires; os resultados foram publicados em 1959, |53|.

Em 1960 Kozlosky e Longfield, em cooperação com o IAGS, voltaram às atividades em nosso país, ocupando 20 estações dos trabalhos anteriores. As condições em que se desenvolveram os trabalhos garantiu a precisão de ± 0,1 mgal em todos os circuitos. Com base nestas observações definiram-se os erros existentes nos trabalhos de Harding e Black, o que possibilitou uma seleção e uma compensação preliminar, |125|.

Data de 1962-63 a última campanha, desenvolvida por Woollard e Rose utilizando gravímetros "Worden" e pêndulos "Cambridge". Em 1966, |125|, foram apresentados os resultados finais correspondentes ao ajustamento geral realizado para as Américas, em 1967 foram divulgadas as estações e os valores selecionados em 1966, |126|. De posse destes elementos elaboramos a fig. (7.0.7).

**. Rede APCS no Brasil**

Em 1964 o "Air Photographic and Charting Service" através

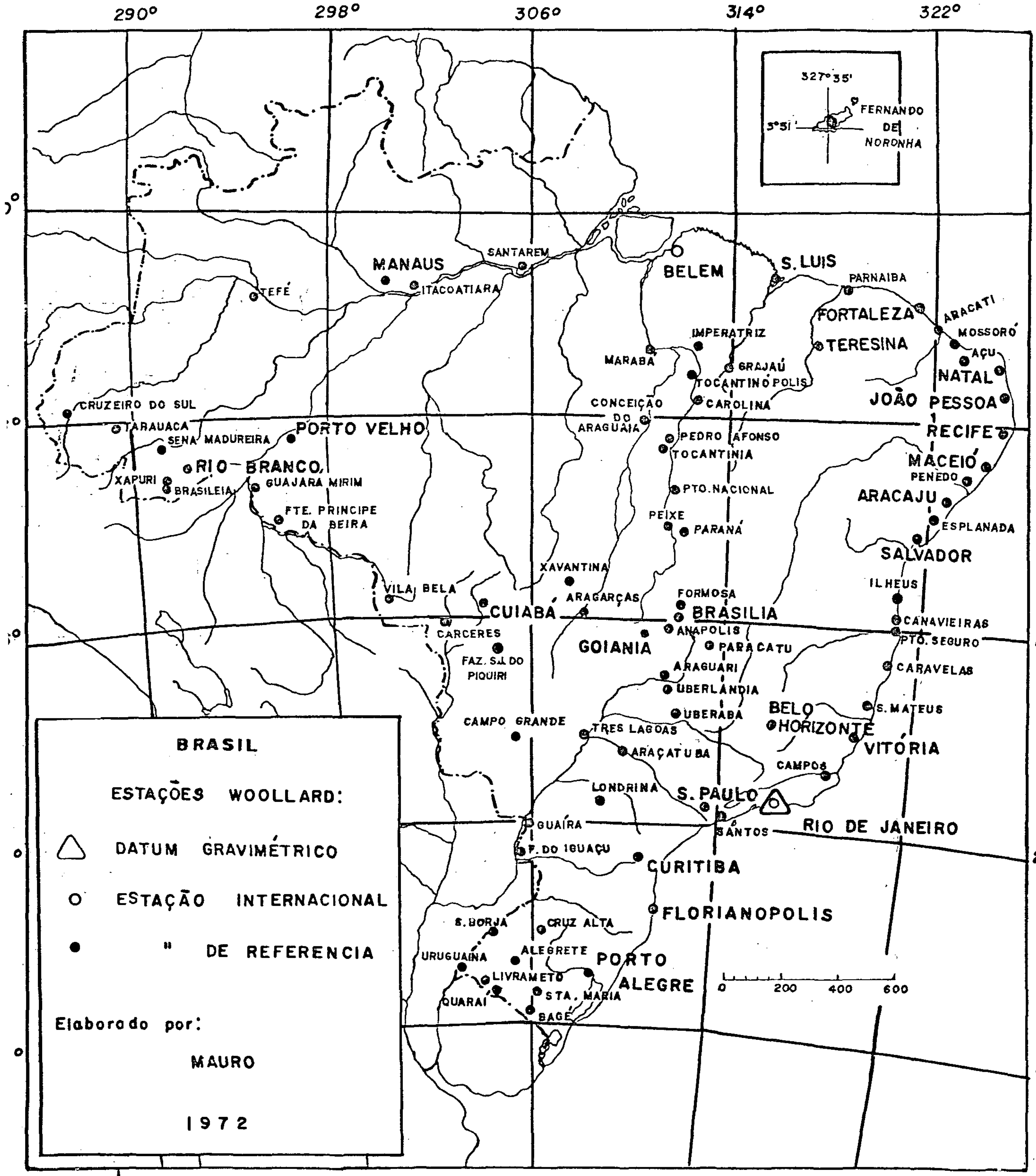



FIG. (7.0-7) —— DISTRIBUIÇÃO DAS ESTAÇÕES WOOLLARD NO BRASIL.

do "1381 st Geodetic Squadron of the USAF" iniciou o estabelecimento de uma série de conexões gravimétricas dos aeroportos brasileiros, utlizando gravímetros LaCoste-Romberg, fixando 55 referências. Os erros de fechamento são inferiores a 0,05 mgal, |119|. Em |124| e |125| estas estações são apresentadas englobadas à rede Woollard, no entanto achamos conveninete separá-las, já que foram executadas em programas e com precisões diferentes. Na fig. (7.0.8) é representada esta rede.

**. Linhas de Calibração**

Em fevereiro de 1955 um equipe do Serviço de gravimetria do ON estabeleceu uma linha de controle para gravímetros, partindo do datum gravimétrico até o Alto do Corcovado (Rio), era a primeira tentativa de se estruturar um circuito no qual fossem aferidos os instrumentos utilizados em todo o país. Em |28| é feita um apresentação do circuito e os valores das estações; na pag. 7, lê-se - ..."Não se destina esta base à calibração de gravímetros, mas apenas a verificação das condições de estabilidade dos instrumentos durante cada campanha, visto que a variação máxima de g nesse percurso não é suficiente para uma determinação precisa dos fatores gravimétricos".

O circuito é formado por nove estações, com uma amplitude de 153 mgal. Pequenas discrepâncias de caráter sistemático ou defeito do micrômetro já serão acusados no percurso da linha, possibilitando alguns reajustes.

Em 1956 o IBGE, através da 4ª Divisão de Levantamentos, sediada em São Paulo, estabeleceu o circuito anteriormente descrito em "Rede de Referência do IBGE", com o objetivo de calibração dos gravímetros utilizados na área do datum geodésico brasileiro. O circuito apresenta-se com 116 estações e uma amplitude de 1137 mgal, |101|.

Pelas consultas realizadas somos levados a afirmar serem estes os únicos trabalhos existentes com o objetivo de calibração, realizados por organismos nacionais. O Serviço de Gravimetria do Observatório Nacional tem como projeto para os próximos anos a reocupação de diversas estações de sua rede de referência, entre Fortaleza (CE) e Pelotas (RS) numa só linha, utilizando diversos instrumentos com constantes de confiança, procurando formar uma linha de calibração nacional.

O"Air Photographic and Charting Service" dentro do programa internacional de uma linha de calibração secundária para as Américas, em 1967,estabeleceu no Brasil cerca de 14 estações, de Belém a Porto Alegre, pelo litoral. Na tabela (7.0.5) apresentamos a relação destas estações com seus respectivos valores.

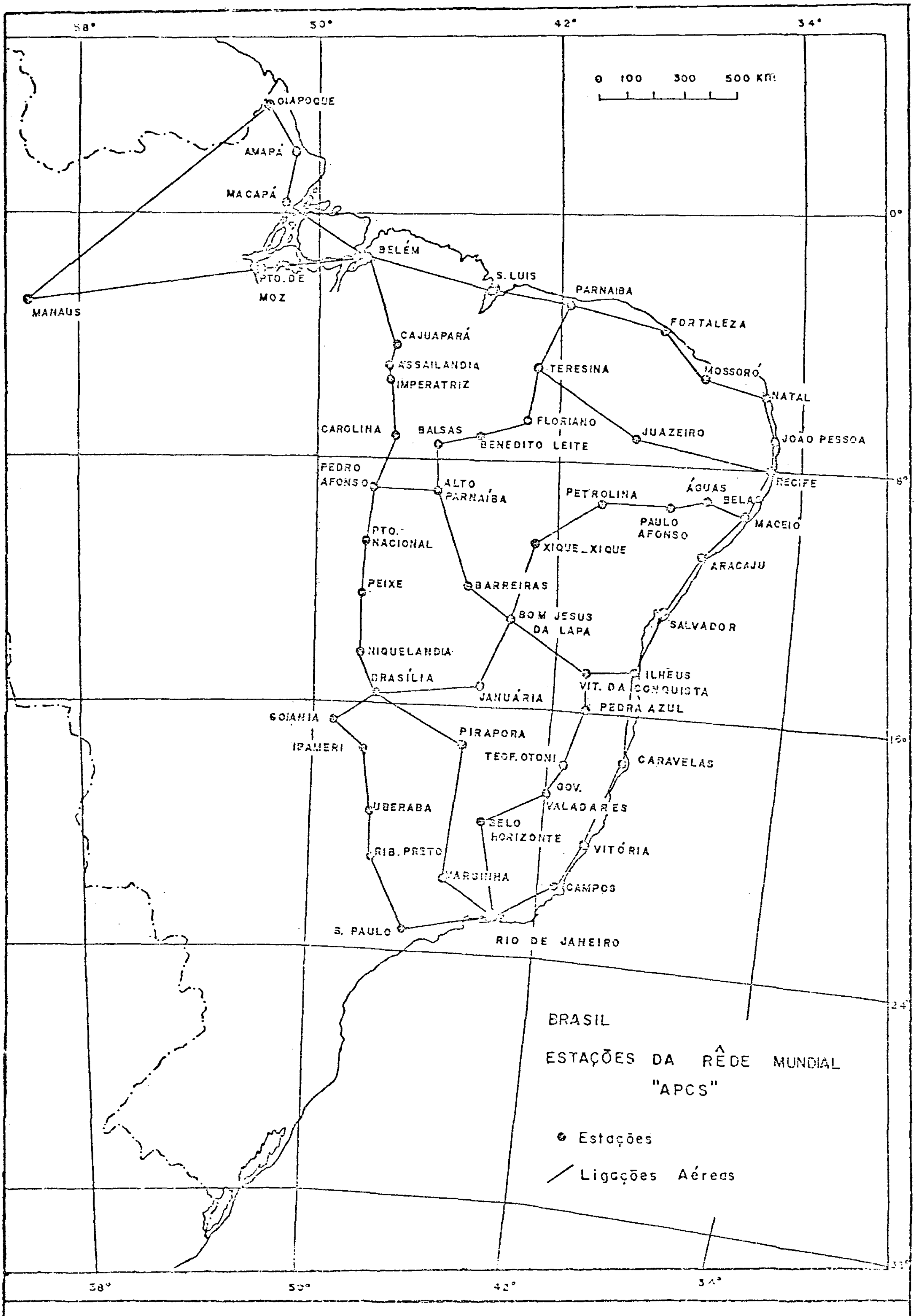



Fig.( 7.0-8 ) ___ ESTAÇÕES DE REFERENCIA DA RÊDE MUNDIAL "APCS".

TABELA (7.0.5)

Estações da ASCL no Brasil

| ESTAÇÃO | COORDENADAS | | g(mgal) |
|---|---|---|---|
| | LAT. S | LONG. WGr | |
| Belém | 01º 23' | 48º 28',5 | 978 020,20 + |
| Fortaleza J | 03º 47',7 | 38º 32',4 | 069,26 |
| Recife J | 08º 08',9 | 34º 57',2 | 152,58 |
| Salvador B | 12º 59',0 | 38º 31' | 312,57 |
| Salvador J | 12º 54',5 | 38º 21' | 332,67 |
| Caravelas B | 17º 44',2 | 39º 15',9 | 512,41 |
| Caravelas J | 17º 44',2 | 39º 58',2 | 512,69 |
| Vitória B | 20º 18',2 | 39º 57',5 | 643,04 |
| Vitória J | 20º 15',9 | 40º 17',2 | 639,42 |
| Campos B | 21º 46',2 | 41º 19',5 | 722,29 |
| Campos J | 21º 43',8 | 41º 21',4 | 718,58 |
| Rio de Janeiro A | 22º 53',7 | 43º 13',3 | 790.80 |
| São Paulo | 23º 32' | 46º 39',2 | 636,78 + |
| Porto Alegre | 29º 59',5 | 51º 10',5 | 979 301,81 + |

+ valores dependentes de confirmação.

## . LEVANTAMENTOS EXTENSIVOS

A inexistência de uma política gravimétrica nacional tem restringido os levantamentos extensivos às áreas de interesse geológico ou mais precisamente de pesquisa petrolífera, o que tem nos garantido a denominação, pouco lisonjeira, de um dos maiores "vazios gravimétricos" do mundo.

Os levantamentos gravimétricos existentes, intensivos, foram executados pela PETROBRAS ao longo das principais bacias sedimentares e umas poucas regiões de interesse geológico. Ao encerrar suas atividades gravimétricas possui em seus arquivos aproximadamente 400 000 estações continentais e cerca de 60 000 oceânicas (plataforma continental). Mais de 200 000, destas estações, estão localizadas na Bacia Amazônica, 150 000 no Recôncavo Baiano e as restantes 50 000 em circuitos de reconhecimento ao longo das demais bacias e outras áreas de interesse geológico mais restrito.

As 60 000 na plataforma continental distribuem-se desde o delta do São Francisco à desembocadura do Rio Doce. Os números são bastante expressivos, lamentavelmente em outras áreas não houve preocupação de pelo menos atingir uma parcela do esforço desenvolvido pela PETROBRAS.

Não poderíamos deixar de citar o trabalho desenvolvido pelo IBGE numa área de 6º x 6º na região do datum geodésico brasileiro, onde encontramos uma concentração de aproximadamente 2 000 estações. O Centro de Estudos e Pesquisas em Geodésia da UFPR, embora sendo um centro de formação acadêmica, já contribui para o conhecimento gravimétrico do país com cerca de 1 200 estações na área de Curitiba (PR) e Florianópolis (SC), além de outros levantamentos no Paraná.

Seria fatidiosa a citação de trabalhos isolados, achamos conveniente apresentar ao leitor uma visão global da situação gravimétrica através da fig. (7.0.9). Lamentavelmente não nos foi possível apresentar uma distribuição quantitativa mais precisa, embora a PETROBRAS possua o maior acervo gravimétrico do país, por razões de segurança e sigilo não pode ceder os dados integralmente, a distribuição é restrita ao máximo de 15 estações por área de 1º x 1º. Este fato justifica a nossa consideração de áreas gravimetricamente conhecidas àquelas em que existam no mínimo três estações em (1º x 1º), sem hierarquização de densidade areal.

Encerrando, enumeraremos algumas atividades gravimétricas, que deverão ser realizadas tão logo se definam as diretrizes de levantamentos no Brasil:

- Redução das redes de referência isoladas numa única; dentro do possível ampliando-se o número de estações. A realização desta atividade implica em reocupações e ligações das estações existentes, com a execução de um ajustamento global, pois, só desta maneira estaremos garantindo a uniformidade dos levantamentos gravimétricos no país.

- Como decorrência natural da anterior surge a necessidade de reduzir as estações de detalhes, de todos os levantamentos já executados, à escala das redes de referências ajustadas.

- Classificação de todos os levantamentos já executados no país, com o objetivo de se iniciar o mapeamento gravimétrico, que de início poderá ser realizado na escala de 1:1 000 000.

- Realização de trabalhos de campo visando a fixação de pelo menos cinco estações em áreas de 1º x 1º, em que não existam levantamentos gravimétricos. O objetivo desta atividade é fornecer os elementos essenciais à colimação do objetivo do item anterior, além de possibilitar o cálculo de anomalias médias.

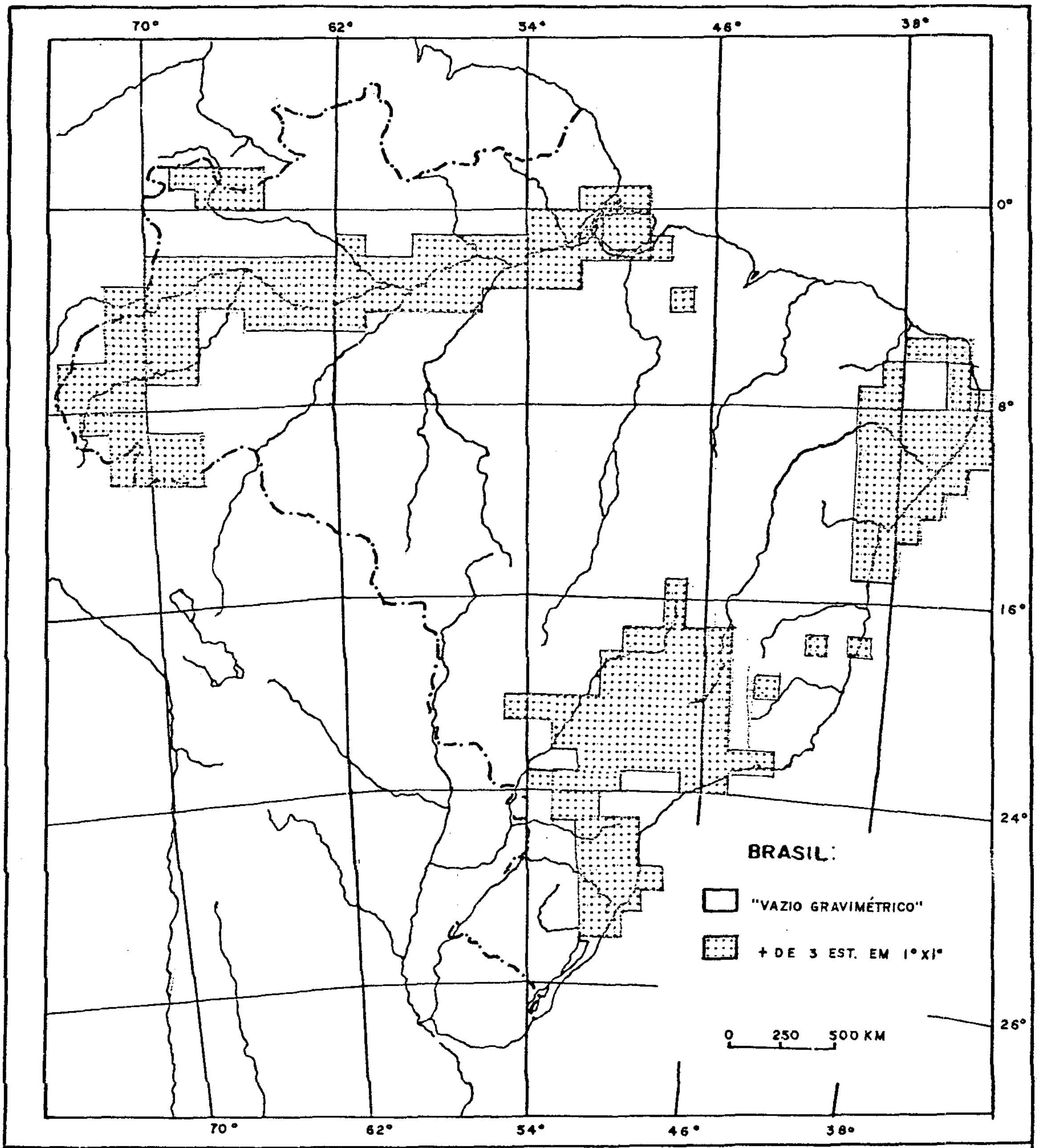



Fig.( 7.0-9) —— ESTAÇÕES DE DETALHE —— ÁREAS DE LEVANTAMENTOS.

# 8. O ARQUIVO DE DADOS GRAVIMÉTRICOS

Em gravimetria podemos distingüir duas espécies de arquivos; **o descritivo** e **o numérico**. Basalmente o objetivo dos dois sistemas é o mesmo, gerar um tipo de codificação que permita a interpretação e o uso dos elementos levantados no campo, em qualquer época.

Os sistemas diferem quanto ao veículo utilizado na codificação. No primeiro o lançamento é realizado em fichas descritivas, normalmente preenchidas à máquina, onde constam informações sobre o instrumental, posição plani-altimétrica da estação, as quantidades gravimétricas e o roteiro de localização; é utilizado, comumente, pelos organismos executores. O segundo, é formado por cartões perfurados, de uso imediato em computadores, dos quais constam informações numéricas de posição e gravidade. É mais utilizado em instituições científicas, embora alguns executores mantenham este tipo de arquivo em paralelo ao primeiro.

No Brasil os arquivos descritivos são mais utilizados, e nas mais variadas formas de fichas. O problema do arquivo descritivo começa na coleta de dados, como as fichas são usadas dos dois lados, a compilação torna-se dispendiosa. Na fig.(8.0.1) apresentamos um modelo de ficha em que só um dos lados é ocupado.

Da existência de arquivos numéricos temos notícia do implantado no CEPG da UFPR, onde a padronização seguida é a recomendada pelo "Bureau Gravimetrique International". Com a difusão do processamento eletrônico de dados, surgiram diversos modelos de cartões gravimétricos; com o intuito de normalizar o uso deste tipo de arquivo, a UGGI através do BGI, fixou um modelo de codificação em que são utilizados dois tipos de cartões, um **índice** e o outro **complementar**. Do cartão índice constam os elementos caracterizadores da posição e gravidade, do complementar constam elementos referentes à geologia e topografia da região em que está localizada a estação e outros dados necessários. Na fig. (8.0.2) são apresentados os dois modelos.

. **CARTÃO ÍNDICE** - faremos uma breve descrição do cartão índice com os respectivos códigos. Seria de todo interessante que os órgãos executores, que disponham de equipamento para processamento eletrônico, adotassem este modelo de arquivo, o que auxiliaria a cessão e aproveitamento de dados.

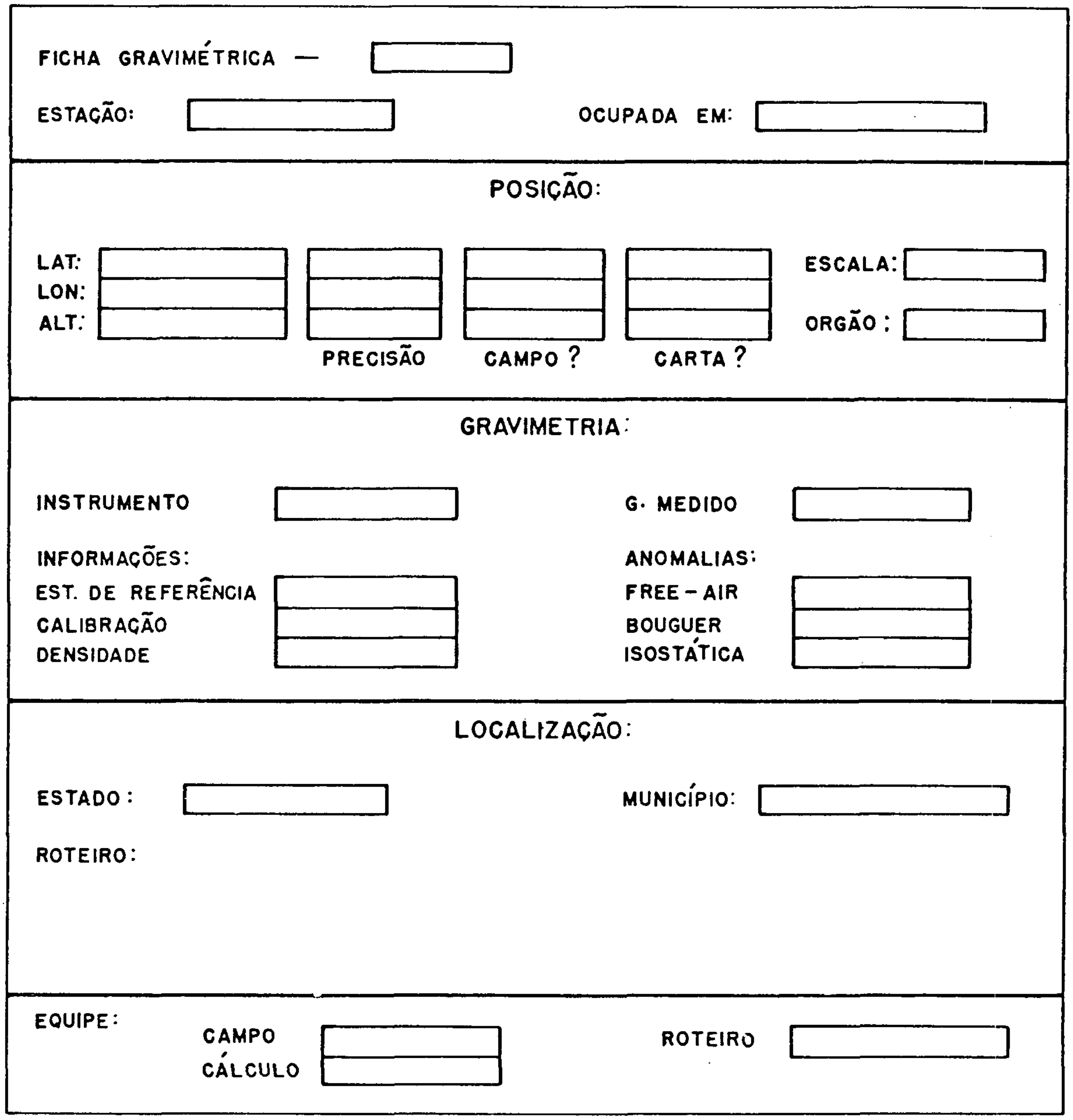
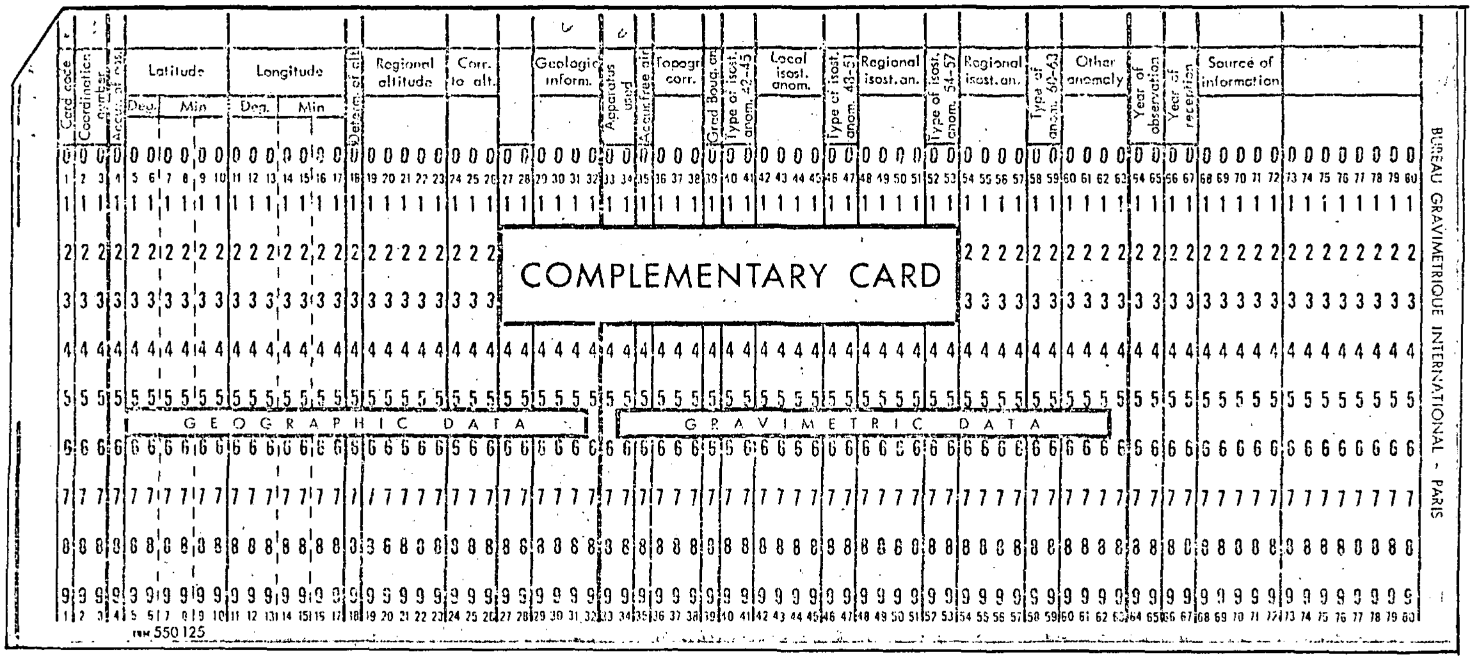



FIG. (8.0-1) - MODELO DE FICHA GRAVIMÉTRICA.



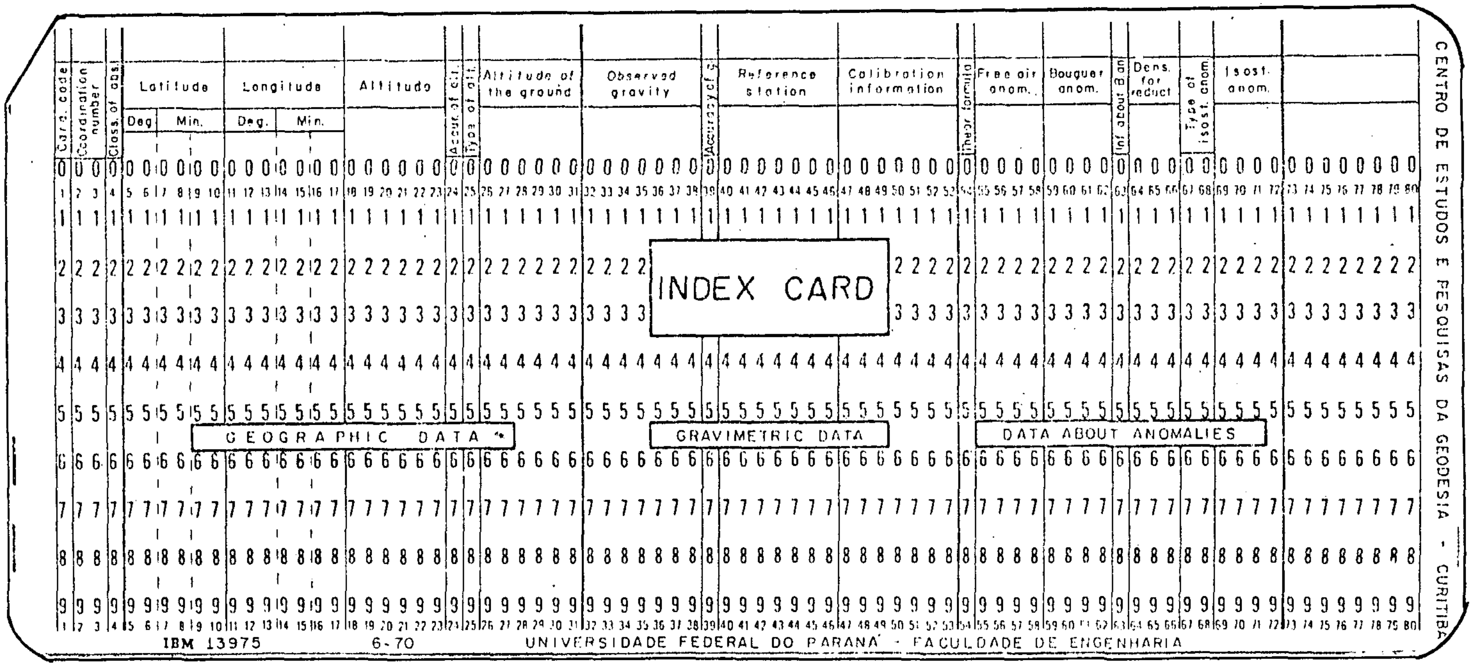




FIG. (8.0-2) - CARTÕES TIPO BGI

A descrição apresentada segue o roteiro; designação do campo, as colunas abrangidas e as informações a serem lançadas.

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| Código do cartão | 1 | O número:<br>1. cartão índice<br>2. cartão complementar<br>3. ..................................<br>...................................... |
| Número de coordenação | 2 - 3 | Pode-se usar estas colunas para estabelecer as relações entre o cartão índice e o complementar. |
| Tipo de observação | 4 | Código:<br>0 - estações comuns de detalhes e levantamentos de 3ª e 4ª ordem:<br>1. estações nacionais de 2ª ordem;<br>2. estações nacionais de 1ª ordem;<br>3. estações pertencentes à linhas de calibração;<br>4. Observação isolada no mar;<br>5. Observação no mar ou ar, obtida por interpolação em observações contínuas;<br>6. Observações costeiras comuns;<br>7. Observações em portos<br>8. ..................................<br>9. Observações constantes de trabalhos internacionais,obtidas de publicações especializadas.<br>A distinção entre estação pendular e gravimétrica pode ser feita através de um sobre-furo nesta coluna. |
| Latitude | 5 -10 | Deve ser lançada em graus, minutos e centésimos de minuto. O ponto ou vírgula decimal não é utilizada, os dados entram como inteiros.<br>O sinal pode ser colocado na forma de sobre-furo na coluna 5 ou através de código nas colunas 73 - 80. |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| Longitude | 11 - 17 | Em graus, minutos e centésimos de minutos, sendo válidas as observações do anterior. |
| Altitude do ponto de observação | 18 - 23 | A unidade é o **metro**.<br>O ponto decimal é omitido, e é lançada até o centímetro. O sinal será especificado na coluna 25. |
| Precisão da altitude | 24 | O erro (e) da altitude é definido da seguinte maneira:<br>1. $e \leqslant 0{,}1$ m<br>2. $0{,}1 \leqslant e \leqslant 1$<br>3. $1 \leqslant e \leqslant 2$<br>4. $2 \leqslant e \leqslant 5$<br>5. $5 \leqslant e \leqslant 10$<br>6. $10 \leqslant e \leqslant 20$<br>7. $20 \leqslant e \leqslant 50$<br>8. $50 \leqslant e \leqslant 100$<br>9. $e > 100$ |
| Tipo da altitude | 25 | $H > 0$<br>0 - medidas na superfície física da Terra;<br>1. Torre ou edifícios (sobre furo para med. no ar);<br>2. Mina ou túnel;<br>3. Em barco sobre um lago;<br>4. Na superfície de um lago;<br>5. Sobre uma geleira.<br>$H < 0$<br>6. Em terra, abaixo do nível zero;<br>7. Sobre a plataforma continental;<br>8. Em barco marítimo ou lacustre(submerso);<br>$H = 0$<br>9. À superfície do mar. |
| Altitude ao nível do solo | 26 - 31 | A unidade é o **metro**.<br>Algumas vezes a altitude do ponto obser |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | vado não é a mesma do solo e como esta é importante nas reduções, serão especificadas neste campo. As altitudes aqui definidas são dependentes do código lançado na coluna 25:<br>0 a 6 - mesmo valor das (18 - 23);<br>1, 2 e 7 - a altitude é a externa;<br>3 e 8 - altitude da superfície d'água;<br>4 e 9 - altitude do barco;<br>5 - altitude da superfície rochosa.<br>O ponto decimal não é utilizado e o sinal é sobre furado na 26. |
| Valor da gravidade observada | 32 - 38 | O nove inicial é desprezado e os valores são lançados ao centésimo do miligal. O ponto decimal não é utlizado.<br>Ex.: 9\|78 272,57 mgal<br>valor lançado sem a vírgula |
| Precisão da gravidade | 39 | Código<br>0 - 1g < 0,05 mgal<br>1 - 0,05 < 1g < 0,1<br>2 - 0,1 < 1g < 0,5<br>3 - 0,5 < 1g < 1,0<br>4 - 1,0 < 1g < 3,0<br>5 - 3,0 < 1g < 5,0<br>6 - 5,0 < 1g < 10,0<br>7 - 10,0 < 1g < 15,0<br>8 - 15,0 < 1g < 20,0<br>9 - 1g > 20,0<br>O erro é retirado do fechamento dos circuitos durante a compensação. |
| Est. de Referência | 40 - 46 | Esta estação é a **base** à qual esta vinculada a lançada. Esta estação será:<br>- Uma estação da rede de Referência Nacional;<br>- Uma estação primária das redes mundiais;<br>- Em poucos casos, uma estação qualquer |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | que posteriormente será conectada às estações de Referência Nacional. |

O sistema de classificação está assim estruturado:

- 6 colunas para definir a posição da estação;
- a sétima para diferenciar os vários valores adotados em cada estação.

A) - Definição de posição:

a) primeiras três colunas - localização do quadrado de 10º x 10º em que se enquadra a estação de referência, segundo as expressões:

Quadrante I - $36 + 36\ (\phi_x) - \lambda_x$

Quadrante II - $1 + 36\ (\phi_x) + \lambda_x$

Quadrante III $-325 + 36\ (\phi_x) + \lambda_x$

Quadrante IV $-360 + 36\ (\phi_x) - \lambda_x$

| 180ºW | 0º → | 180ºE | |
|---|---|---|---|
| | | | 90ºN |
| I | II | | |
| | | | 0º |
| III | IV | | |
| | | | 90ºS |

$\phi_x$ - algarismo da dezena de grau em latitude. Sem sinal;

$\lambda_x$ - algarismo da dezena de grau em longitude com o algarismo da centena de graus. Sem sinal;

b) - as duas posições seguintes:
4º - unidades do grau em latitude;
5º - unidades do grau em longitude;

c) - o sexto dígito - é usado para distingüir a situação da estação. Código de A a I - estações estáveis (observatórios, institutos, ...), as demais para locais não fixos.

B) - Valor:
O sétimo dígito caracteriza o va-

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | lor adotado para a estação, dentre diversas determinações.<br>Exemplo: - suponhamos que num determinado serviço o Observatório Nacional do Rio de Janeiro é a estação de referência.<br>$\phi$ = 22º 53' 42",2S<br>$\lambda$ = 43º 13' 22",5W Gr<br>Quadrante III<br>325 + 36(2) + 4: 401<br>4º 2<br>5º 3<br>código: 40123<br>como a estação é estável e o valor adotado é o de SHELTON, p. ex., vem:<br>4 0 1 2 3 A1 = cód. - ON |
| Informação de calibração | 47 - 53 | Está zona permite conhecer a escala da rede do trabalho gravimétrico, da qual a estação faz parte. O código ainda está por ser estipulado. |
| Fórmula teórica | 54 | Código:<br>0 - Internacional de 1930<br>1 - Helmert de 1901<br>2 - Bowie 1917<br>3 - ...<br>4 - ...<br>5 - Helmert de 1915<br>6 - Heiskanen de 1924<br>7 - ...<br>.......................... |
| Anomalia Free-Air | 55 - 58 | É lançada em mgal, até o centésimo e sem o ponto decimal. O sinal é sobre furado na coluna 55. |
| Anomalia Bouguer | 59 - 62 | idem ao anterior, sendo o sinal sobre furado na 59. |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
| --- | --- | --- |
| Informações sobre a Anomalia Bouguer | 63 | Código:<br>Platô horizontal sem o termo Bullard.<br>0 - sem a correção topográfica<br>1 - correção topográfica para r= 5 km<br>2 - correção topográfica para r= 30 km<br>3 - correção topográfica para r=100 km<br>4 - correção topográfica para r=167 km<br>Platô horizontal com o termo de Bullard<br>5 - sem correção topográfica<br>6 - idem 1<br>7 - idem 2<br>8 - idem 3<br>9 - idem 4 |
| Densidade | 64 - 66 | É lançada ao centésimo e o ponto decimal é omitido. |
| Tipo de red.isostática | 67 - 68 | Códigos:<br>0 - Sistema Pratt-Hayford<br>01 - 50 km + efeito ind. (tab Lejay)<br>02 - 56.9 km<br>03 - 56.9 km + efeito ind.(tab Lejay)<br>04 - 80 km<br>05 - 96 km + efeito ind. (tab. Lejay)<br>06 - 96 km<br>07 - 113,7 km + efeito ind.(tab.Lejay)<br>08 - 113,7 km<br>1 - Sistema Airy-Heiskanen<br>10 - T = 20km (tab.Heisk./31)<br>11 - T = 20km + efeito ind.(Lejay ou Heisk./38)<br>12 - T = 30 (idem 10)<br>13 - T = 30 + efeito indireto(idem 11)<br>14 - T = 40 (idem 10)<br>15 - T = 40 + efeito indireto(idem 11)<br>16 - T = 60 (idem 10)<br>17 - T = 60 + efeito ind.(idem 11)<br>2 - Regional de Vening-Meinesz<br>T = 20 km T = 30 km T = 40 km<br>20 - R = 0 km 30 R = 0 km 40 R=0 km |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | 21 - 29,05 31 29,05 41 29,05<br>22 - 58,10 32 58,10 42 58,10<br>23 - 116,20 33 116,20 43 116,20<br>24 - 174,30 34 174,30 44 174,30<br>25 - 232,40 35 232,40 45 232,40<br>.... ... ...<br>6 - Anomalias combinadas ou quase isostáticas.<br>66 - Bouguer modificada<br>R = 166,7 km; T = 30 km<br>8 - várias hipóteses<br>80 - Helmert (21 km)<br>81 - Helmert (condensação ao nível do mar)<br>...<br>84 - Rudzki - (Tabela de Klavido's) |
| Anomalia isostática | 69 - 72 | É lançada em mgal até o centésimo sem o sinal e o ponto ou vírgula decimal. Sinal em sobre furo na 69. |
| | 73 - 80 | Estas colunas são deixadas livre para lançamento de códigos pela instituição que usará o cartão. (Ver nota que segue). |

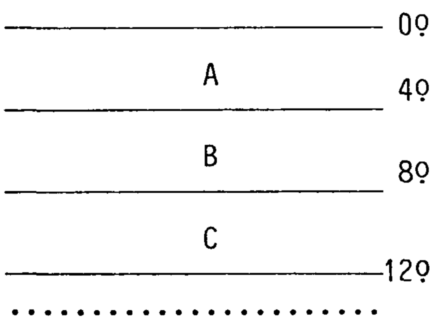
NOTA: - O BGI ao definir o tipo de cartão índice para dados gravimétricos, deixou livre o campo (73 - 80) para que os usuários estabelecessem qualquer tipo de codificação, que atendessem um determinado fim particular.

Ao desenvolvermos o arquivo gravimétrico do CEPG da UFPR, procuramos classificar as estações dentro de um esquema que melhor se adaptasse ao uso geodésico mundial, onde as utilizamos, normalmente, segundo áreas de 1º x 1º. O código da Carta Internacional ao Milionésimo abrange toda a Terra, possibilitando classificações de qualquer espécie, dentro de uma área de 4º x 6º. Aproveitando o código, o desmembramos a exemplo da classificação de cartas na escala de 1:250 000, de modo a cobrir áreas de 1º x 1º; o código contém cinco figuras, por exemplo:

S F - 22 - k

- A letra (S) especifica o hemisfério no qual está localizada a estação, ao mesmo tempo que possibilita uma codificação para o sinal da latitude, negativa ao sul (S) e positiva ao Norte (N).

- A letra (F) enquadra a faixa de 4º em latitude, na qual está contida a estação. A partir do equador são desenvolvidas faixas de 4º, sendo atribuídas a cada uma, uma letra do alfabeto, ex.:




- Os dois dígitos seguintes enquadram o fuso com 6º de amplitude que envolve a estação. Os números indicativos do fuso, podem ser calculados a partir da expressão:

$$\text{FUSO} = 30 - \frac{\lambda}{6}$$

Exemplo:

$$30 - \frac{48º}{6} = 22$$

onde λ representa os graus em longitude e o cálculo é efetuado com números inteiros.

- A letra (k), quinta figura, representa a área de 1º x 1º enquadrada na original de 4º x 6º, ver fig. (8.0 - 3).

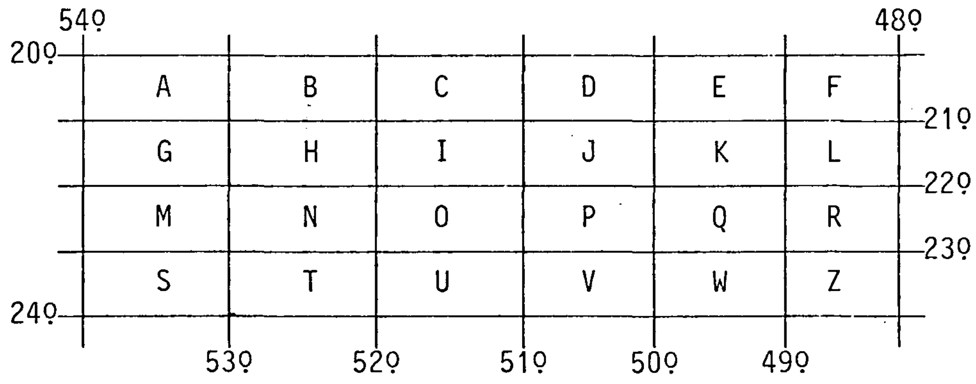



FIG.(8.0-3) ENQUADRAMENTO DE ESTAÇÕES GRAVIMÉTRICAS EM 1ºx1º

- **CARTÃO COMPLEMENTAR** - O cartão complementar é utilizado como um apêndice do anteriormente descrito; contém informações de interesse geológico e topográfico, necessários ao cálculo de reduções, estabelecimento de correlações e outras aplicações específicas.

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| código do cartão | 1 | 1 - índice<br>2 - complementar |
| Número de coordenação | 2 - 3 | Análogo ao do cartão anterior. |
| Precisão da determinação Geográfica | 4 | Utilizado somente para medidas aéreas e marítimas<br>0 - observações terrestres<br>1 - r < 20 m<br>2 20 < r < 100<br>3 - 100 < r < 200<br>4 - 200 < r < 500<br>5 - 500 < r <1000<br>6 - 1000 < r <2000<br>7 - 2000 < r <5000<br>8 - 5000 < r |
| Latitude | 5 -10 | Idem cartão índice |
| Longitude | 11 -17 | Idem cartão índice |
| Altitude | 18 | Códigos de classificação para a determinação de altitudes<br>$\overline{0}$ - não há informações<br>0 - levantamento geométrico<br>1 - levantamento barométrico<br>2 - levantamento trigonométrico<br>3 - interpolação em mapas<br>4 - dados apreciados diretamente ao nível dos mares<br>5 - medidas de depressão do horizonte<br>6 - sondagem marítima<br>7 - profundidade medida diretamente<br>8 - medida com radar ou rádio-altímetro |
| Altitude média da região vizinha | 19 -23 | A altitude da região vizinha pode ser avaliada em cartas topográficas segundo raios de:<br>r = 10 km - nenhum sobrefuro<br>r = 100 km - sobrefuro 2 - x<br>r = 200 km - sobrefuro 12- R |
| Correção à altitude | 24 -26 | Eventualmente uma correção seria somada à altitude medida (18-23 do cartão índice), |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | caso esta tenha sido referida a um nível totalmente arbitrário como, por exemplo, alguns nivelamentos na Antártida.<br>O ponto decimal não é perfurado e o lançamento é feito ao decímetro. |
| | 27 - 28 | Campo livre para futuras correções, de ordem geodésica, às coordenadas geográficas. |
| Informações Geológicas | 29 - 32 | A serem definidas pelo BGI. |
| Instrumento utilizado na medida de g | 33 - 34 | Códigos:<br>0- Pêndulos construídos antes de 1932<br>00- Repsold<br>01- Defforges<br>02- Sterneck (1º instrumento)<br>03- Sterneck (c/espiral de Helmotz)<br>04- Mendenhall - USCGS (bronze)<br>05- idem (ínvar)<br>06- Lenox - Conyngham<br>07- Mioni<br>08- ...<br>09- Tripendular de Vening-Meinesz<br>1- Pêndulos recentemente construidos<br>10- Askania (4 pêndulos, ínvar s/espiral de Helmotz)<br>11- Askania (idem com a espiral de Helmotz)<br>12- Cambridge (3 pêndulos, ínvar, s/ espiral)<br>13- Cambridge (idem c/espiral)<br>14- USCGS - Mendenhall (4 pêndulos)<br>15- Dominion (2 pêndulos)<br>16- Comissão Geodésica Italiana<br>17- Gulf (2 pêndulos)<br>18- GSI (3 pêndulos), japoneses<br>19- PAS (6 pêndulos), russo<br>3- Gravímetros (continentais)<br>30- Thyasm (balança de Torsão) |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | 31 - Ising e Holweck-Lejay (Haste elástica) |
| | | 32 - ... |
| | | 33 - Haalck (a gás) |
| | | 34 - Rindbald |
| | | 35 - Gilbert (corda vibrante) |
| | | 36 - ... |
| | | 37 - ... |
| | | 38 - Schweyden, Baroth, Tomascheck(sistema de dois fios) |
| | | 4 - Gravímetros c/mola de metal(continentais) |
| | | 40 - Hartley, Atlas, Matt-Schimidt |
| | | 41 - ... |
| | | 42 - Askania (GS - 4, 9, 11 e 12) |
| | | 43 - Gulf, Hoyt (mola helicoidal) |
| | | 44 - North American |
| | | 45 - Ocident |
| | | 46 - ... |
| | | 47 - LaCoste-Romberg |
| | | 48 - ... |
| | | 49 - ... |
| | | 5 - Gravímetros c/mola de quartzo(continentais) |
| | | 51 - Frost |
| | | 52 - Norgard |
| | | 53 - GAE-3 |
| | | 54 - Worden normal |
| | | 55 - Worden (c/termostato) |
| | | 56 - Worden geodésico |
| | | 57 - GAK (317, 419, 6M, HP) |
| | | 58 - ... |
| | | 59 - ... |
| | | 6 - Gravímetros submergíveis |
| | | 60 - Gulf |
| | | 61 - ... |
| | | 62 - Ocident |
| | | 63 - North American |
| | | 64 - LaCoste-Romberg |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | 65 - ...<br>66 - Worden<br>67 - ...<br>7 - Gravímetros p/medidas em superfícies aquosas<br>70 - Graf-Askania<br>71 - ...<br>72 - LaCoste-Romberg<br>73 - ...<br>74 - Gal e Gal F<br>75 - ...<br>76 - Tokio Surface Ship Gravity Meter<br>8 - Gravímetros p/medidas aéreas<br>80 - LaCoste-Romberg<br>81 - ...<br>82 - ... Graff-Askania<br>... |
| Informações nas reduções de anomalias | 35 | Precisão da Anomalia Free-Air<br>0 - $e \leqslant 0{,}05$<br>1 - $0{,}05 < e \leqslant 0{,}1$<br>2 - $0{,}1 < e \leqslant 0{,}5$<br>3 - $0{,}5 < e \leqslant 1{,}0$<br>4 - $1{,}0 < e \leqslant 3{,}0$<br>5 - $3{,}0 < e \leqslant 5{,}0$<br>6 - $5{,}0 < e \leqslant 10{,}0$<br>7 - $10{,}0 < e \leqslant 15{,}0$<br>8 - $15{,}0 < e \leqslant 20{,}0$<br>9 - $e > 20{,}0$ |
| Correção topográfica | 36 - 38 | Valor da correção topográfica em décimos de mgal, sem o ponto decimal. O valor do raio de cálculo é enquadrado na coluna 63 do cartão índice. |
| Gradiente da Anomalia Bouguer | 39 | O gradiente, variação de $\Delta g$/km calculado na direção normal das isoanômalas para uma distância de 5 km, é enquadrado no código.<br>0 - grad $\leqslant 0{,}01$ mgal/km<br>1 - $0{,}01 <$ grad $\leqslant 0{,}05$ |

| CAMPO | COLUNAS | OBSERVAÇÕES |
|---|---|---|
| | | 2 - 0,05 < grad ⩽ 0,1<br>3 - 0,1 < grad ⩽ 0,5<br>4 - 0,5 < grad ⩽ 1,0<br>5 - 1,0 < grad ⩽ 2,0<br>6 - 2,0 < grad ⩽ 3,0<br>7 - 3,0 < grad ⩽ 4,0<br>8 - 4,0 < grad ⩽ 5,0<br>9 - grad > 5,0 mgal/km |
| Tipos locais de Anomalias isostáticas | 40 - 41 | Mesmos códigos do cartão índice quanto ao tipo de anomalia, ressalvando que agora são calculadas para uma área restrita, com densidade particular. |
| Anomalia isostática local | 42 -45 | Lançada até o décimo do mgal, sem o ponto decimal, o sinal é sobre-furado na 42. |
| Tipos regionais de anomalias isostáticas | 46 - 47 | Mesmos códigos do cartão índice, normalmente 30, 33 e 35. |
| | 48 - 51 | Valor da regional. |
| | 52 - 53 | Outros tipos de isostáticas. |
| | 54 - 57 | Valor da segunda regional. |
| Outras anomalias | 58 - 59 | Código de tipo idêntico ao do cartão índice. |
| | 60 - 63 | Valor da anomalia. |
| Referências gerais | | |
| Ano da observação | 64 - 65 | É lançada a dezena e unidade característica do ano, para o século XX.<br>Quando a observação for do século XIX, o algarismo da dezena (64) deverá conter um sobrefuro. |
| Ano de registro | 66 - 67 | Lançar o ano em que o cartão for perfurado. |
| Origem da Informação | 68 - 72 | Será codificado de acordo com as necessidades do arquivista. Não está preso a qualquer convenção internacional. |
| | 73 - 80 | Livres para codificações especiais. |

## 9. ANOMALIAS MÉDIAS EM ÁREAS DE 1º x 1º EM TERRITÓRIO BRASILEIRO

A anomalia média é definida como sendo o valor anômalo médio mais representativo da área analisada. São normalmente calculadas para trapézios esféricos de 1º x 1º ou de 5º x 5º e a redução do ar-livre é mais largamente utilizada na obtenção de valores anômalos.

As anomalias do ar-livre podem ser consideradas como isostásticas, tomando-se a espessura da crosta como nula. Já que a compensação isostática não ocorre ao nível do mar, mas a profundidade entre 20 e 50 km, as anomalias são localmente correlacionadas às elevações do terreno. A observação tem demonstrado serem as anomalias de maior valor algébrico nas regiões montanhosas que nos vales vizinhos. Esta relação se mantém também para as regiões oceânicas; às grandes profundidades correspondem anomalias menores que nas áreas vizinhas mais elevadas. A correlação sugere a semelhança das curvas de isoanômalas do ar-livre em relação aos planos de nível, representativos da topografia da região em que se dá a análise gravimétrica.

Geodesistas de diversas épocas têm chamado atenção para a dependência dos valores anômalos em relação a altitude. O valor medido da gravidade sobre a superfície terrestre é uma função das coordenadas do ponto de observação:

$$g = F(\phi, \lambda)$$

e desde que a altitude do mesmo ponto (H) pode ser considerada, também como uma função das coordenadas:

$$H = f(\phi, \lambda)$$

podemos admitir que o valor observado de **g** é uma função complexa das coordenadas geodésicas associadas à altitude (H). Conseqüentemente, podemos expressar as anomalias ($\Delta g$) em séries com a ajuda de funções esféricas, ainda que a existência dos termos de mais alta ordem possam intervir na convergência. Desprezando os termos perturbadores de ordem elevada podemos representar ($\Delta g$) como a soma de duas componentes:

$$\Delta g = a(\phi, \lambda) + b(\phi, \lambda)\ H \qquad \text{...(9.0.1)}$$

uma das quais expressa a dependência em relação às coordenadas geodésicas $\left[a(\phi, \lambda)\right]$, a outra em relação à altitude.

Análises práticas comprobatórias da validade da expressão (9.0.1) foram exaustivamente realizadas por UOTILA|117| que após analisar valores de 131 compartimentos em todo o globo chegou a conclusão de que o valor numérico de $b(\phi, \lambda)$, para áreas continentais, aproxima-se da constante utilizada na redução de Bouguer (0,1119 mgal/m), que como o esperado representa uma aproximação do equilíbrio isostático. As mesmas conclusões foram estendidas às regiões oceânicas onde o valor médio de(b)é 0.069 mgal/m Estas conclusões apóiam o uso da expressão (9.0.1) no cálculo de valores anômalos médios.

Para regiões em que existe farto material gravimétrico podemos encontrar valores constantes das funções a($\phi$, $\lambda$)e b($\phi$, $\lambda$) mais representativos, a partir de equações do tipo (9.0.1) aplicadas às diferentes estações gravimétricas em que tenhamos associadas altitudes e anomalias. Os valores médios representativos poderão ser obtidos a partir do MMQ se associarmos as equações (9.0.1) à "equações de observação".

O sistema considerado como de observação para as estações em que se conhecem (H) e ($\Delta$g) será da forma:

$$\begin{cases} A + BH_1 = \Delta g_1 \\ A + BH_2 = \Delta g_2 \\ A + BH_3 = \Delta g_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A + BH_n = \Delta g_n \end{cases} \qquad \ldots(9.0.2)$$

que normalizado e resolvido por qualquer algorítimo de cálculo numérico fornecerá os valores mais prováveis de (A) e (B) para a região em análise. Obtendo-se o valor médio da altitude ($H_m$) para a mesma região, a partir de cartas onde a topografia seja representada por isolinhas ou gamas hipsométricas, poderemos calcular

$$\Delta g_m = A + BH_m \qquad \ldots(9.0.3)$$

onde ($\Delta g_m$) **é a anomalia média;**

O procedimento deve ser encarado com certo cuidado,pois a distribuição das estações gravimétricas, de valores ($\Delta$g) conhecidos, influirá sensivelmente nos resultados finais. Os valores mais representativos serão obtidos quando as estações forem bem distribuídas em altitude e posição, além de serem em número suficiente para a resolução dos sistemas.

Teoricamente dois pontos possibilitam resolver o sistema, contudo a aplicação do MMQ exige a superabundância de observações, que no caso é garantida para 3 ou mais estações gravimétricas. Esta condição não deve ser encarada pelo mínimo necessário;dificilmente três estações representarão a topografia da região, sendo necessário um número superior.

Na obtenção de anomalias em trapézios de 1º x 1º para o território brasileiro seguimos o roteiro:

1 - Cálculo de altitudes médias dos trapézios a partir de

cartas em escalas diversas.

As folhas da carta de 1:500 000 e 1:1 000 000 do IBGE e as de 1:1 000 000 da USAF, foram as mais utilizadas. Com este material obtivemos 885 valores (Hm) médios em território brasileiro, os resultados encontram-se arquivados no CEPG-UFPR na forma de cartões perfurados, sendo a classificação adotada segundo as coordenadas do baricentro do trapézio;

2 - Cálculo de anomalias médias a partir de 8500 estações gravimétricas. O material utilizado foi o descrito no adendo 7.

Os resultados finais estão representados na fig.(9.01) e cobrem "quadriláteros" de 1º x 1º. Os valores médios foram obtidos diretamente através de cálculos numéricos pelo computador IBM-1130, com os dados codificados em cartões tipo BGI,como descrito no adendo 8. O programa necessário à execução dos cálculos foi escrito em linguagem FORTRAN,segundo o diagrama de blocos apresentando na fig. (9.0.2), um exemplo de saída pode ser observado na fig. (9.0.3).

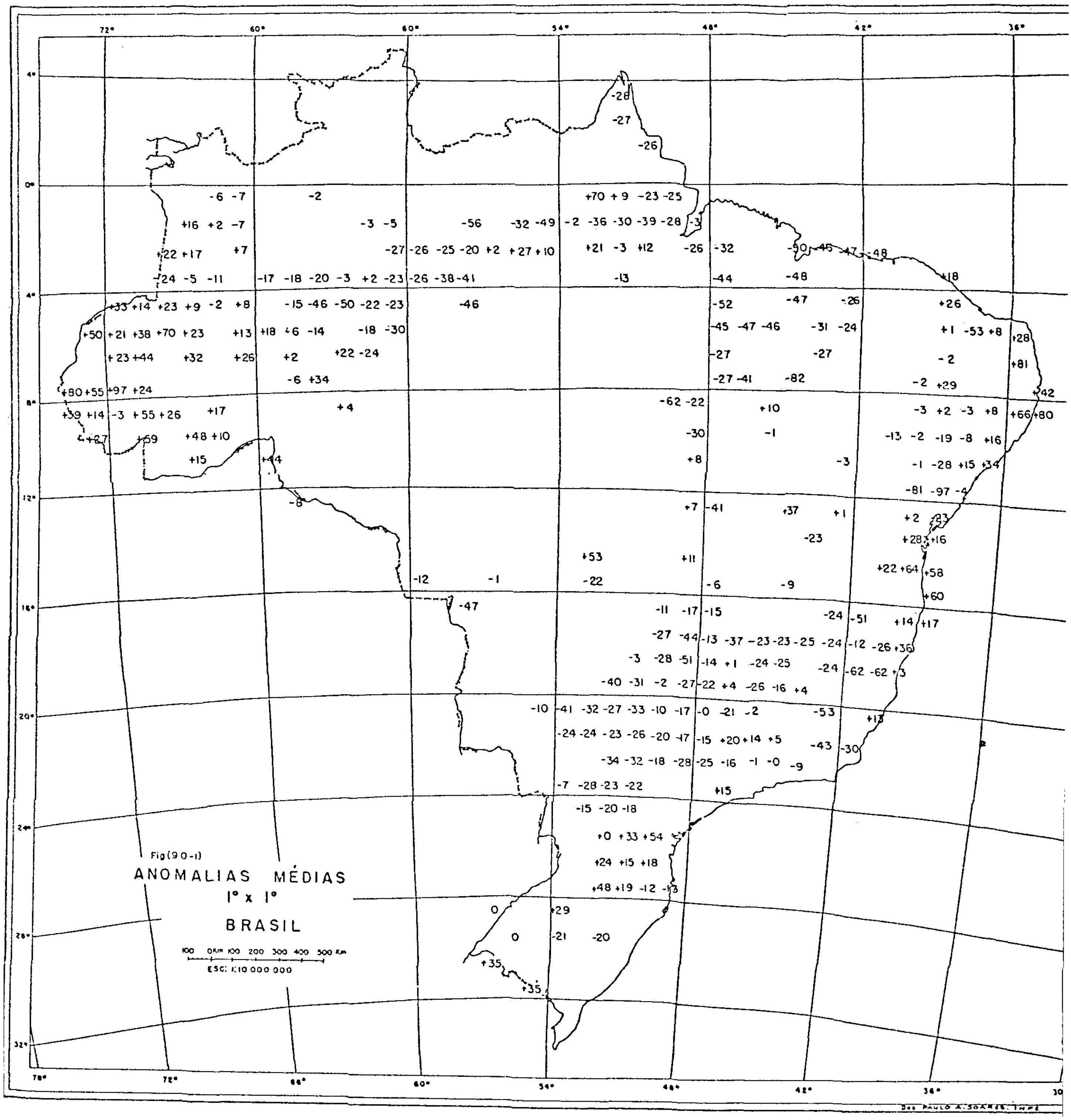
O ajustamento linear foi utilizado para trapézios com no mínimo três estações.

Para os que possuiam menos estações ou o ajustamento era impraticável, o valor médio foi calculado segundo a média aritmética das anomalias. Este procedimento não tem nenhum fundamento teórico-matemático, o adotamos já que a consideração de valores nulos (ausência de valor anômalo médio), na maioria dos casos conduziria a um erro bem maior que a consideração de valores médios aritméticos.

Foram consideradas como de ajuste linear impraticável os trapézios que apresentavam estações gravimétricas mal distribuídas; concentradas em níveis topográficos particulares ou numa determinada parte da região em estudo. Com este procedimento eliminamos a possibilidade de valores não representativos.

Nos gráficos das fig.|(9.0.4) - G e H| podemos observar,as condições de péssimo ajuste quando da ocorrência de níveis e posições particulares.

Os gráficos da fig. |(9.0.4) A, B, C, D, E, F| representam os casos de ajuste aceitável.


Fig(90-1)
ANOMALIAS MÉDIAS
1° x 1°
BRASIL
100 0Km 100 200 300 400 500 Km
ESC: 1:10 000 000
DES. PAULO A. SOARES. INPE

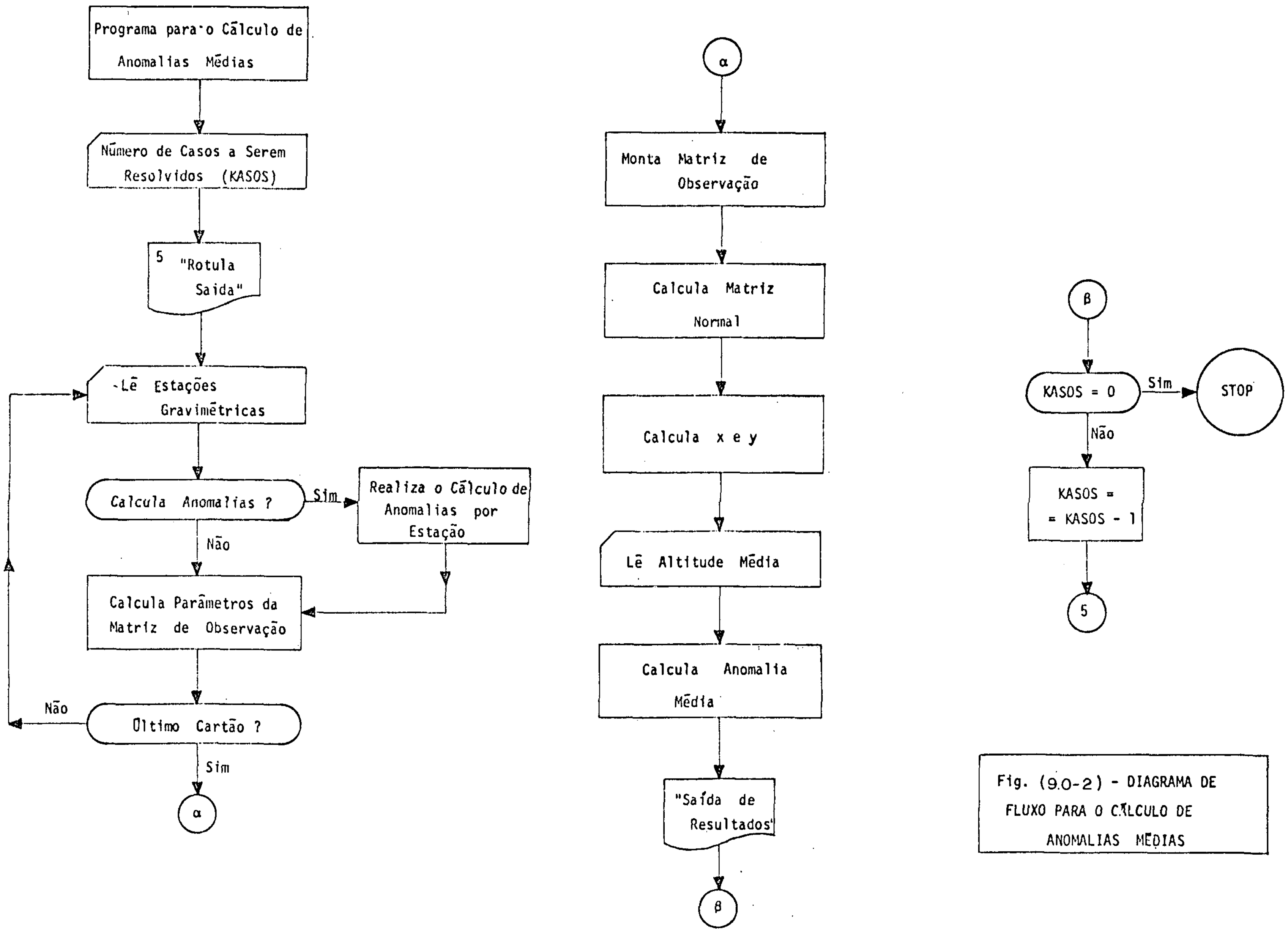



Fig. (9.0-2) - DIAGRAMA DE FLUXO PARA O CÁLCULO DE ANOMALIAS MÉDIAS

| LOCALIZACAO | LATITUDE | LONGITUDE | ALTITUDE | G MEDIDO | ANOMALIAS FREE-AIR | ANOMALIAS BOUGUER | DENSIDADE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NA-22-X | 0 0.20 | 49 52.33 | 2.29 | 978038.41 | -9.88 | -10.13 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 0.27 | 49 21.37 | 0.36 | 978027.67 | -21.21 | -21.25 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 1.08 | 49 41.10 | 2.71 | 978025.27 | -22.89 | -23.19 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 3.43 | 49 36.40 | 2.97 | 978022.65 | -25.43 | -25.76 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 3.92 | 49 39.17 | 2.87 | 978022.36 | -25.75 | -26.08 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 4.15 | 49 24.58 | -0.76 | 978026.13 | -23.11 | -23.02 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 4.53 | 49 48.83 | 2.71 | 978029.63 | -18.53 | -18.84 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 5.32 | 49 32.95 | -1.14 | 978021.60 | -27.56 | -27.43 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 5.33 | 49 29.33 | 0.17 | 978022.13 | -26.82 | -26.84 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 5.67 | 49 53.52 | 2.07 | 978036.59 | -11.78 | -12.01 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 15.77 | 49 59.08 | 1.50 | 978048.88 | 0.23 | 0.06 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 8.08 | 49 45.67 | 0.10 | 978024.63 | -24.36 | -24.37 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 9.67 | 49 56.83 | 3.95 | 978035.21 | -12.60 | -13.05 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 10.17 | 49 36.08 | 0.65 | 978016.53 | -32.31 | -32.38 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 11.75 | 49 45.10 | 2.27 | 978020.45 | -27.90 | -28.16 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 12.53 | 49 40.85 | 2.22 | 978017.35 | -31.03 | -31.28 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 12.67 | 49 39.75 | 2.30 | 978016.80 | -31.55 | -31.81 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 14.68 | 49 38.00 | 1.76 | 978014.59 | -33.95 | -34.15 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 16.15 | 49 43.87 | 2.53 | 978016.54 | -31.79 | -32.07 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 17.47 | 49 50.93 | -0.34 | 978021.42 | -27.81 | -27.78 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 18.00 | 49 47.75 | 1.70 | 978019.99 | -28.62 | -28.81 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 18.50 | 49 56.43 | 1.00 | 978044.64 | -4.19 | -4.31 | 2.67 |
| NA-22-X | 0 21.32 | 49 30.52 | -11.57 | 978052.75 | -0.02 | 1.27 | 2.67 |

ESTATISTICA DO QUADRILATERO

COORDENADAS MEDIAS LATITUDE = 0.5
COORDENADAS MEDIAS LONGITUDE = 310.5
ALTITUDE MEDIA = -8.00
NUMERO DE ESTACOES = 23
ANOMALIA FREE-AIR MEDIA = -10.69 MGAL
ANOMALIA BOUGUER MEDIA = -9.79 MGAL

FIG. (9.0-3) - EXEMPLO DE SAÍDA DO PROGRAMA GEOANM

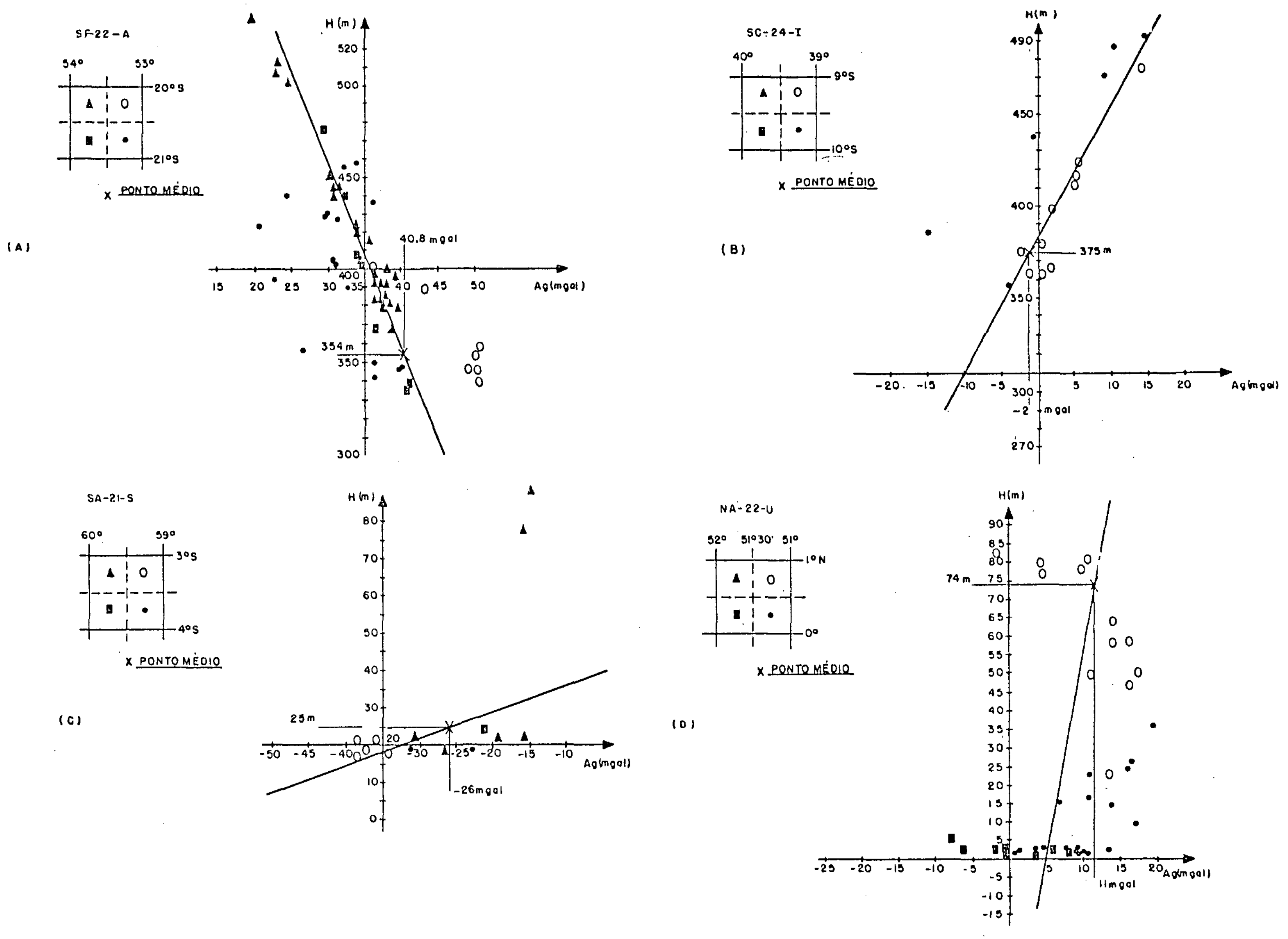
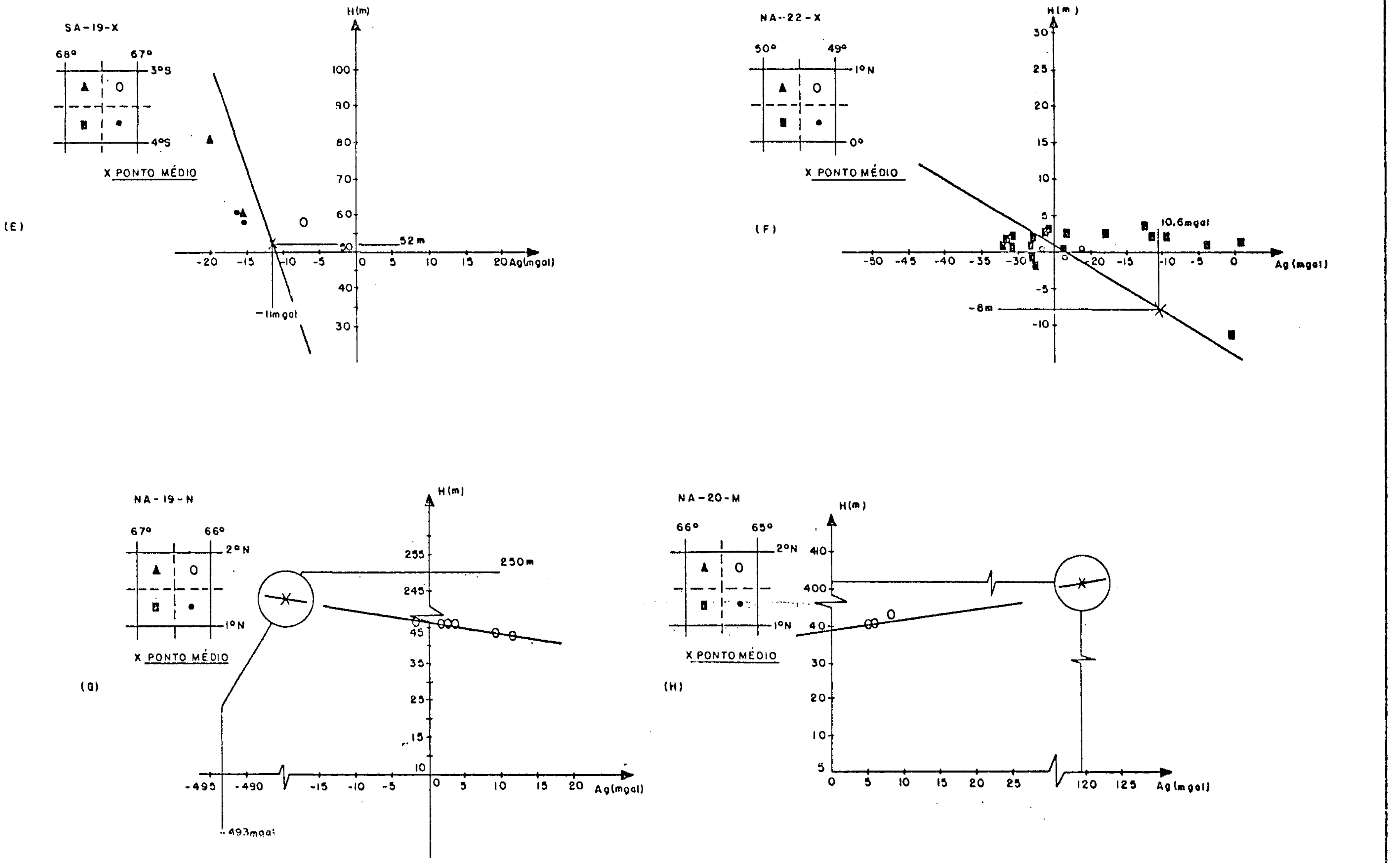



FIG.(9.0-4) – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE ANOMALIAS DO "AR LIVRE" EM ÁREAS DE 1° x 1°.




CONTINUAÇÃO DA
FIG.(9.0-4)

## 10. UM MÉTODO DE AJUSTE POLINOMIAL PARA O CÁLCULO DE VALORES MÉDIOS

Em muitos problemas corriqueiros de análise científica é necessário encontrar funções representativas de resultados obtidos experimentalmente. Os resultados comumente vêm expressos em termos de dois ou mais conjuntos de valores em que um deles é dependente dos demais.

A obtenção de funções representativas pode ser encarada sob dois aspectos: (1) encontrar a função que representa uma curva passante por todos os pontos resultados ou;(2) encontrar uma curva que mostre a tendência de dispersão dos resultados sem necessariamente passar por todos os pontos.

O primeiro problema é resolvido pelos polinômios de interpolação, ver KOPAL |63| ou outro método semelhante; o segundo que nos interessa no momento; pode ser resolvido pelo MMQ, partição de dados em conjuntos parciais ("spline-functions") e outros métodos, ver SCARBOROUGH|104|.

O método mais geral e comumente usado para obtenção da equação de uma curva que mostre a tendência de um certo conjunto de pontos dados, é o do MMQ aplicado na minimização das distâncias verticais dos pontos à curva; fig. (10.0.01).

Se $|X_i, Y_i|$ é um conjunto de (n) pontos e

$$Y = a_o + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots + a_m X^m \qquad \dots(10.0.1)$$

é uma curva com (m) parâmetros (m,n), então o MMQ dará os valores dos coeficientes que minimizam:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left| yi - Y(xi) \right|^2 \qquad \dots(10.0.2)$$

O que pode ser obtido anulando-se as derivadas parciais com respeito aos coeficientes, ou seja:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = - 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y(x_i) \cdot \frac{\partial Y(x_i)}{\partial a_j} = 0 \qquad \dots(10.0.3)$$

$$(j = 0,1,2\dots m)$$

ou explicitamente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a_o} = \sum_{i=1}^{n} 2(a_o + a_1 x_1 + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(a_o + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial E}{\partial a_m} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^m(a_o + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) = 0 \end{cases}$$

donde obtemos o sistema de (m+1) equações simultâneas ou normais(em notação matricial):

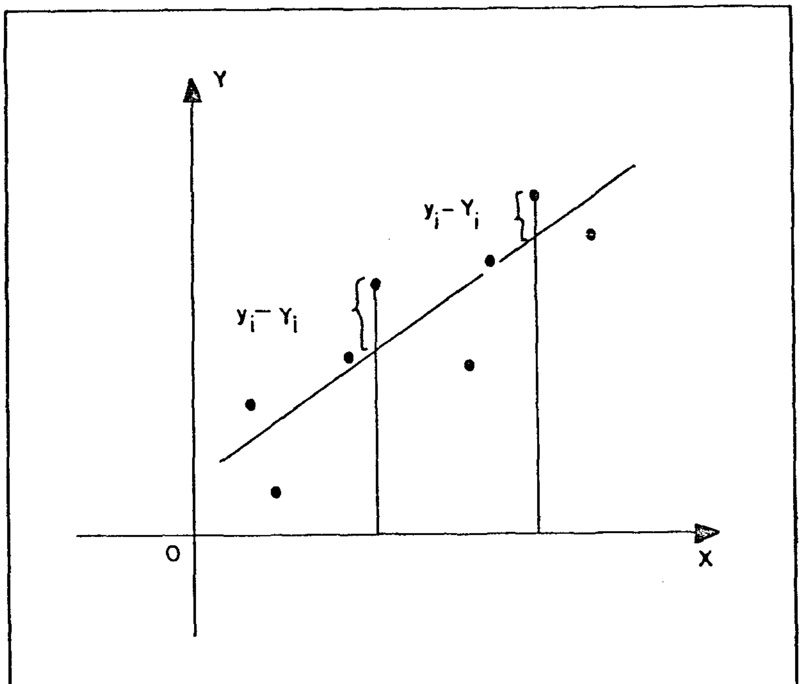



FIG.( 10.0 -1 )– DISTÂNCIA VERTICAL NO AJUSTE PELO MMQ.

$$|C| . |A| = |T| \qquad ...(10.0.5)$$

onde

$$\underset{(m \times m)}{|C|} = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \cdots & \Sigma x_i^m \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \cdots & \Sigma x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Sigma x_i^m & \Sigma x_i^{m+1} & \Sigma x_i^{m+2} & \cdots & \Sigma x_i^{2m} \end{vmatrix}$$

e

$$\underset{(m \times 1)}{|A|} = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{vmatrix} \quad e \quad \underset{(m \times 1)}{|T|} = \begin{vmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_i^m y_i \end{vmatrix} \qquad ...(10.0.6)$$

cuja solução será:

$$|A| = |C|^{-1} \; |T| \qquad ...(10.0.7)$$

Se considerarmos o conjunto $|x_i, y_i|$ com diferentes pesos

$$\underset{(m \times m)}{|W|} = \begin{bmatrix} W & o & o \dots o \\ o & W_2 & o \dots o \\ o & o & W_3 \dots o \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ o & o & o \dots W_m \end{bmatrix}$$

vem:

$$|A| = |C^{*T} . W. C^*|^{-1} . |C^{*T} . W. B| \qquad \dots(10.0.8)$$

Sendo a matriz $C^*$ a dos coeficientes das equações normais ponderadas.

As equações (10.0.7) e (10.0.8) fornecem os coeficientes $(a_i)$ da expressão polinomial (10.0.1), que representa a tendência de dispersão do conjunto $|x_i, y_i|$.

Quando os $|x_i, y_i|$ apresentam-se com erros similares em ordenada e abcissa, é conveniente realizar a minimização da distância normal de cada ponto à curva, em vez da distância vertical. Este mínimo corresponde ao comprimento da normal, subtendido entre o ponto e a curva, ver fig. (10.0.2).

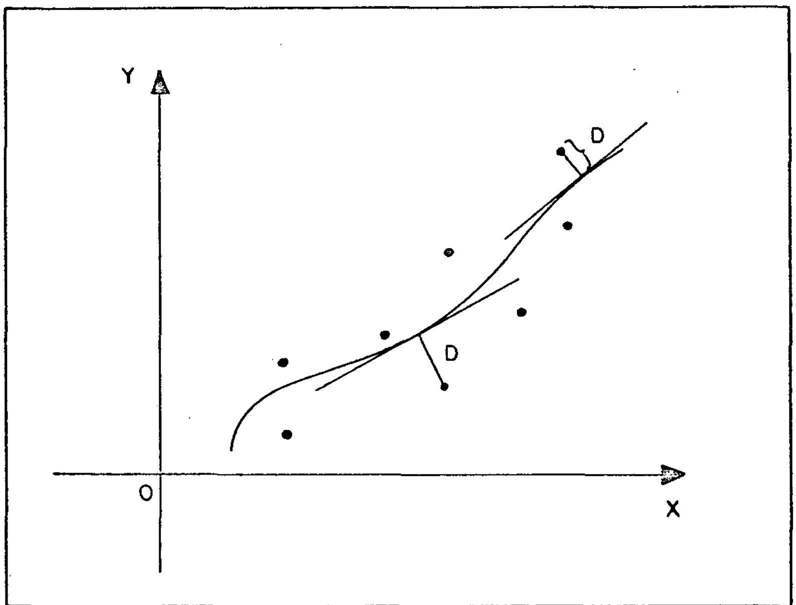



FIG. ( 10.0-2 ) – DISTÂNCIA DO PONTO DADO À CURVA.

SCARBOROUGH|104| apresenta um método de ajustamento pelo MMQ que minimiza a soma dos quadrados das distâncias normais, contudo o procedimento é limitado aos termos de primeiro grau. A seguir apresentamos um método que realiza o ajuste seguindo este esquema para polinômios de qualquer grau.

O cálculo da distância é fundamental. Existem dois métodos para realizá-lo; um deles minimiza a distância da curva ao ponto e o outro procura a perpendicular da curva ao ponto dado.

A distância de qualquer ponto sobre a curva $Y = f(X)$ ao ponto $(x_i, y_i)$ é:

$$D_i = \sqrt{(Y - y_i)^2 + (X - x_i)^2} \qquad \ldots(10.0.9)$$

O $(x_i)$ que torne $(D_i)$ mínima é encontrado a partir de:

$$\frac{\partial D_i}{\partial X_i} = 0 \qquad \ldots(10.0.10)$$

para $D_i \neq 0$. Quando $D_i = 0$ a solução é trivial $(X_i = x_i$ e $Y_i = y_i)$. Segundo (10.0.10) $(X_i)$ deve satisfazer:

$$|Y_i - y_i| \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} + (X_i - x_i) = 0 \qquad \ldots(10.0.11)$$

uma vez encontrado o $(X_i)$ obtemos $Y_i = f(X_i)$ e a equação (10.0.9)poderá ser usada no cálculo de $(D_i)$.

O segundo método pode ser denominado das tangentes sucessivas. Inicialmente um ponto sobre a curva, nas vizinhanças do ponto dado, é encontrado. Esta aproximação inicial pode ser designada $|X_i, f(X_i)|$, e uma linha reta é traçada neste ponto, tangente à curva. Isto pode ser feito usando $f(X_i)$ e $f'(X_i)$ ou $f'(X_i)$ e $f(X_i + \Delta X)$. Neste último caso $\Delta X$ é um incremento arbitrariamente pequeno. Uma vez encontrada a tangente é traçada a perpendicular à curva passando por $(x_i, y_i)$. Este processo é repetido até que dois sucessivos $(x_i)$ possibilitem o cálculo de duas $(D_i)$ cuja diferença seja inferior a uma taxa de precisão pré-definida.

O ajuste será baseado em:

$$E = \sum_{i=1}^{n} w_i \, D_i^2 \qquad \ldots(10.0.12)$$

sendo $(D_i)$ dado pela (10.0.10). Para minimizar a equação anterior é necessário resolver um conjunto de (m) equações normais:

$$\frac{E}{a_j} = 2 \sum_{i=1}^{n} w_i \, D_i \frac{\partial D_i}{\partial a_j} \qquad \ldots(10.0.13)$$

$$(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m)$$

Em geral este sistema é não linear, para resolvê-lo um processo iterativo é algumas vezes usado (método das correções diferenciais),

|104|. Inicialmente uma expansão em Série de Taylor para $(D_i)$ é realizada em termos de $\bar{a}_o, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_m$. Desde que $(D_i)$ é uma função conhecida, a expansão pode ser escrita:

$$D_i(a_o, a_1, a_2, \ldots, a_m) = \bar{D}_i + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial a_r} + \frac{1}{2} \sum_{r,\ell=1} \frac{\partial^2 \bar{D}i}{\partial a_r \partial a_\ell} \Delta a_r \quad \Delta a_\ell \qquad \ldots(10.0.14)$$

onde

$$\left.\begin{aligned} \bar{D}_i &= D_i(\bar{a}_o, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \\ &\text{e} \\ \Delta a_r &= a_r - \bar{a}_r \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(10.0.15)$$

admitindo somente os termos de baixa ordem em $\Delta a$ e substituindo a (10.0.14) em (10.0.13) vem:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i(\bar{D}_i + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial a_r} \Delta a_r) \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial a_j} = 0 \qquad \ldots(10.0.16)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

Pela (10.0.9) vem:

$$\frac{\partial \bar{D}_i}{\partial a_r} = \frac{\bar{Yi} - \bar{yi}}{\bar{D}_i} \cdot \frac{\partial \bar{Yi}}{\partial a_r} \qquad \ldots(10.0.17)$$

onde

$$\bar{Y}_i = \bar{a}_o + \bar{a}_1 X_i + \bar{a}_2 X_i^2 + \ldots \bar{a}_m X_i^m \qquad \ldots(10.0.18)$$

Agora podemos escrever:

$$\left.\begin{aligned} A_j &= -\sum_{i=1}^{n} w_i (Y_i - y_i) \frac{\partial \bar{Y}_i}{\partial a_j} \\ &\text{e} \\ C_{jr} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{\bar{Y}_i - \bar{y}_i}{D_i}\right) \frac{\partial \bar{Y}_i}{\partial a_r} \frac{\partial \bar{Y}_i}{\partial a_j} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(10.0.19)$$

e a equação (10.0.16) torna-se:

$$A_j = \sum_{r=1}^{m} C_{jr} \Delta a_r \qquad \ldots(10.0.20)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

Com isso encontramos a equação procurada para o ajuste do conjunto de (n) pontos $|x_i, y_i|$.

O procedimento para ser aplicado pressupõe o conhecimento dos parâmetros iniciais $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m)$. As distâncias de cada ponto dado à curva serão encontradas usando um dos métodos anteriormente comentados, e $(A_j)$ e $(C_{jr})$ a partir das equações anteriores e resolvidas para $\Delta a_o$, $\Delta a_1$, ... $\Delta a_m$. Os novos coeficientes são calculados:

$$\bar{\bar{a}}_r = \bar{a}_r + \Delta a_r \qquad \ldots(10.0.21)$$

Este novo conjunto de parâmetros é então utilizado como iniciais de um novo ciclo. As iterações são realizadas até que $a_r$ convirja ($\Delta a_r <<< a_r$).

Para realizar os cálculos necessários aos dois métodos anteriores elaboramos um programa em linguagem FORTRAN-IV denominado "sistema SAJMMQ", para ser utilizado no computador Burroughs-6700.

A árvore da estrutura do programa encontra-se representada na fig. (10.0.3). O sistema consta de um programa principal denominado SAJMMQ que desempenha o papel de supervisor. Sua função é controlar a armazenagem de dados e a chamada das subrotinas de primeiro nível, segundo especificações do usuário.

Os cartões típicos de dados encontram-se esquematizados na fig. (10.0.4).

As principais variáveis do programa são: (N) número de pontos dados; (M) grau do polinômio a ser encontrado; (LL) número de casos analisados com o mesmo conjunto de dados; (NPERFU), variável-lógica que indica se a perfuração dos resultados será ou não realizada; (AJUS)variável-lógica que indica se o ajustamento pelo segundo método aqui descrito será realizado, (AEST) variável-lógica que indica se uma análise estatística rudimentar será realizada.

A variável (LL) é uma alternativa interessante, permite a manipulação de (LL) conjuntos $(y_i)$ para o mesmo $(x_i)$. Nos problemas geodésicos de simulação do campo anômalo está variável é importante já que para uma mesma abcissa poderemos atribuir dois ou mais valores (máximo de quatro) de ordenadas.

O diagrama de fluxo do programa SAJMMQ e das respectivas subrotinas são apresentados nas figuras anexas.

ORDENA-Subrotina que realiza a ordenação dos dados de entrada segundo dois níveis (x e y). Ocorrendo valores duplos de ordenadas para uma mesma abcissa, a subrotina armazena em (x) a média das ordenadas.

RESOLV-Subrotina que utiliza a técnica inicialmente descrita para distâncias verticais. A Subrotina de segundo nível IESMAT é chama

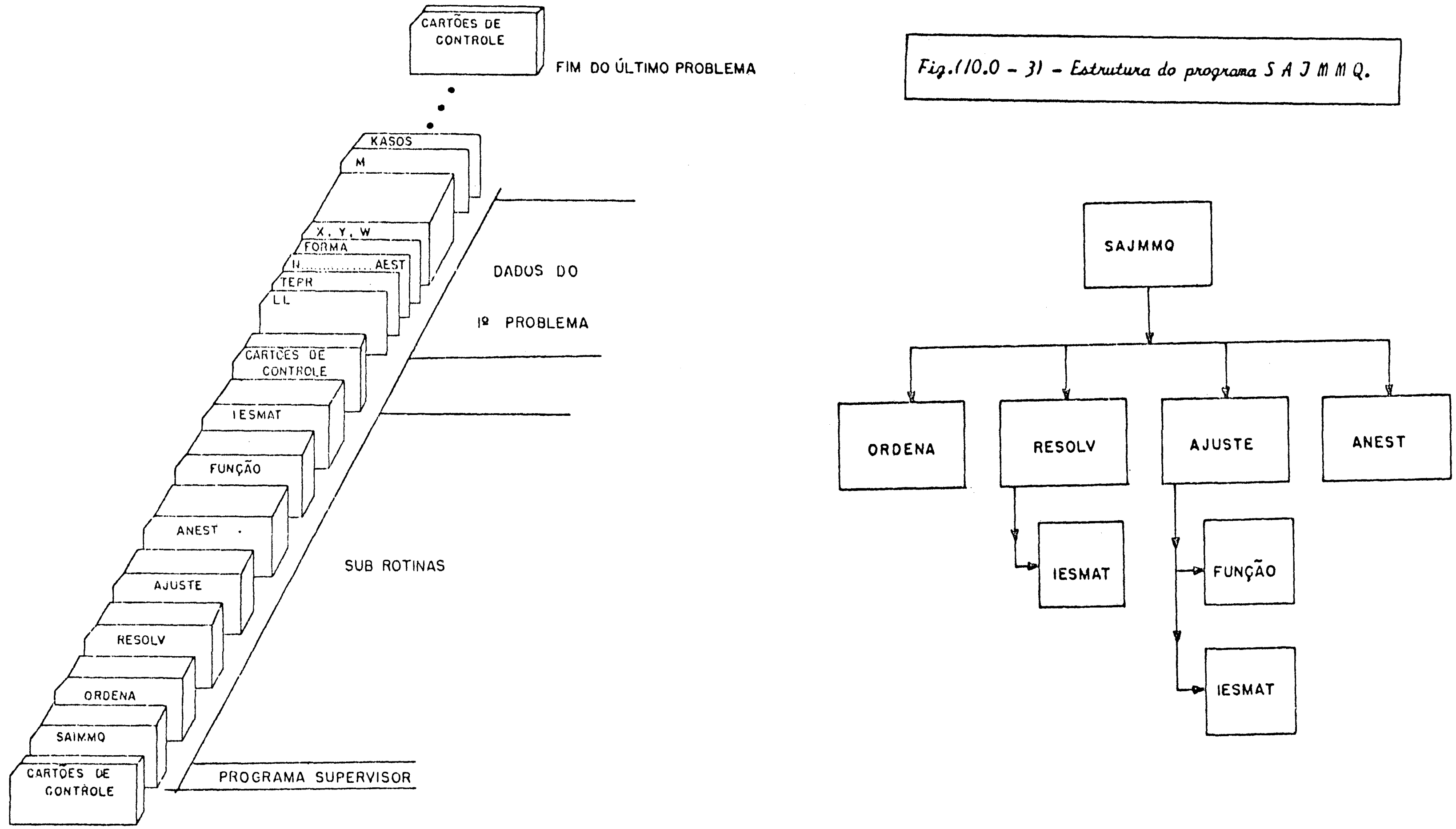
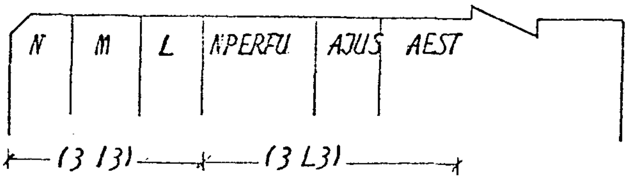



Fig.(10.0 - 3) - Estrutura do programa S A J M M Q.

1º tipo — LL (I3) — Número de casos analisados com o mesmo "deck" de dados.

2º tipo — TEPR (12 A6) — Cartão que contém o título e especificações do projeto em que o programa está sendo utilizado.

3º tipo — N ... AEST (3 I3, 3 L3) — Dados gerais necessários as decisões do programa.




4º tipo — FORMA (12 A6) — Formato variável com o qual serão lidos os dados.

5º tipo — X,Y,W (FORMA) — São (N) cartões deste tipo, com os campos definidos pela variável FORMA.

6º tipo — KASOS (I3) — Número de casos analisados .

7º tipo — M (I3) — Grau do polinomio seguinte.

Fig.(10.0 - 4) - Cartões típicos para o programa SAJMMQ.

da para resolver o sistema de equações normais. Esta subrotina consta de diversos manuais de programação, a aqui utilizada encontra-se descrita em McCALLA. |81|

ANEST-realiza uma análise estatística rudimentar dos resultados da subrotina RESOLV, será utilizada somente se a variável AEST for "verdade". Calcula as distâncias verticais e realiza o cálculo dos elementos estatísticos: erro relativo, variância, desvio padrão e coeficiente de correlação.

A Subrotina AJUSTE é opcional, utilizando os resultados de RESOLV como parâmetros iniciais realiza o ajuste dos dados pelo método das distâncias normais. Para a sua realização chama as subrotinas de segundo nível; IESMAT e FUNÇÃO.

A subrotina FUNÇÃO realiza os cálculos de valores característicos $y_i = f(x_i)$ e as suas derivadas.

As técnicas de cálculo utilizadas em cada subrotina poderão ser facilmente compreendidas mediante inspeção dos fluxogramas apresentados.

O sistema ora apresentado foi desenvolvido para atender ao cálculo de valores anômalos médios nos métodos analíticos comentados no capítulo 3. Os resultados obtidos mostram ser o primeiro método (RESOLV) de características muito gerais, devendo ser utilizado somente quando se pretende obter as características de dispersão dos resultados. O segundo, embora tenha a tendência de aproximar mais a curva ao conjunto de dados, não obtem uma função representativa de todos os pontos; mantém as características de tendência só que particularizando ocorrências da distribuição.

Fig. (10.0.5) - Conjunto das subrotinas integrantes do sistema SAJMMQ.

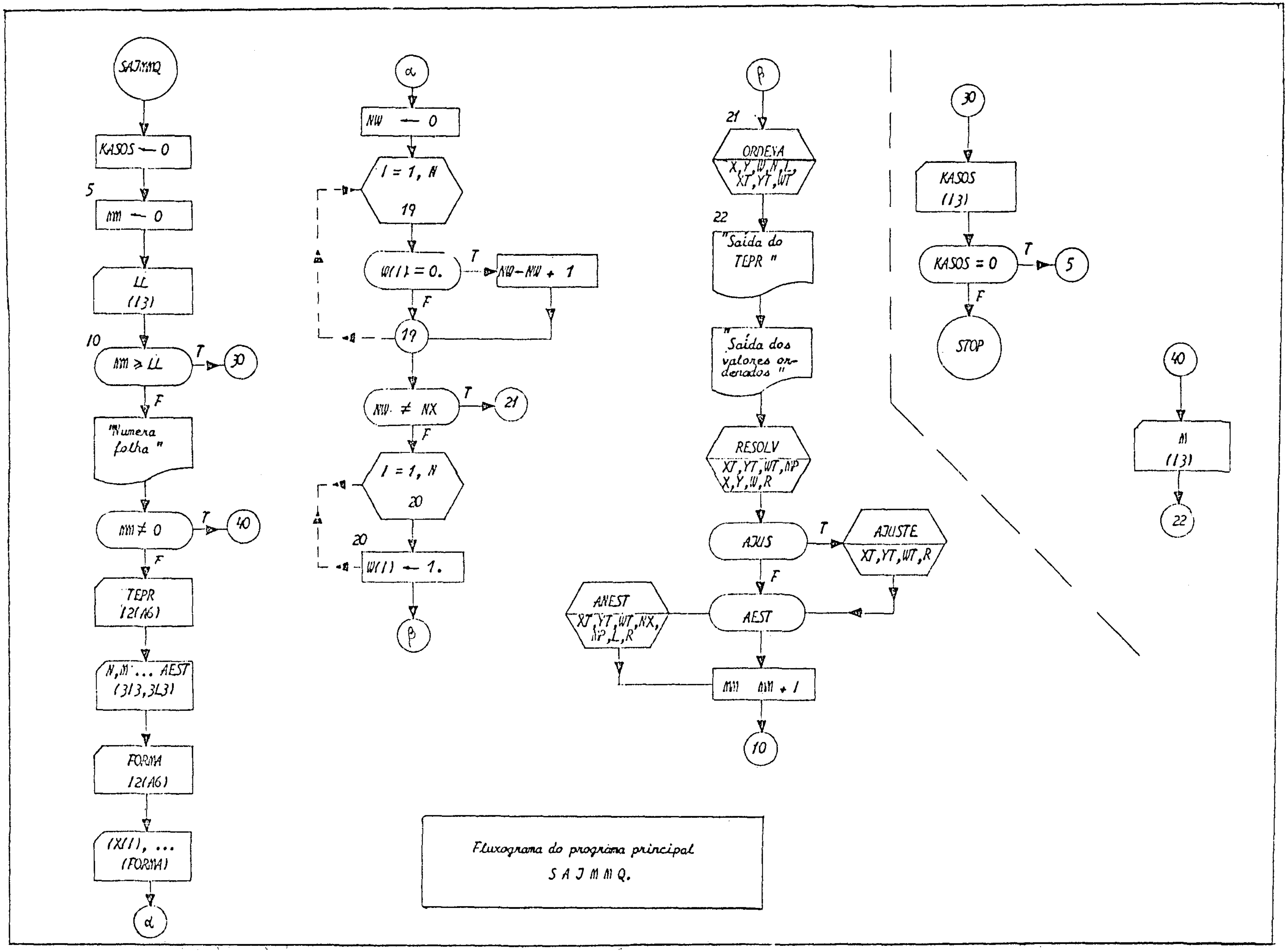
(a) - Programa principal

(b) - Subrotina ORDENA

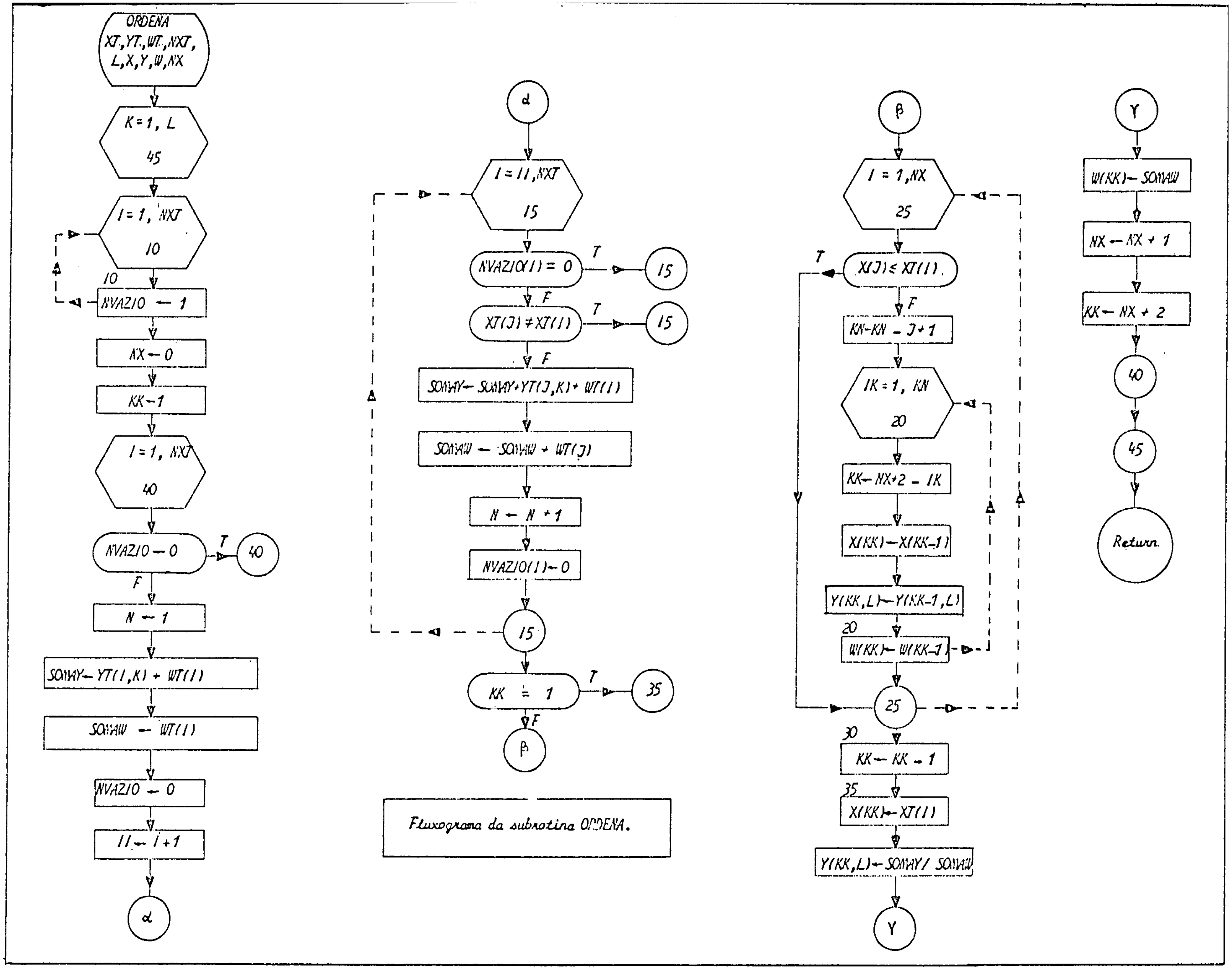
(c) - Subrotina RESOLV

(d) - Subrotina AJUSTE

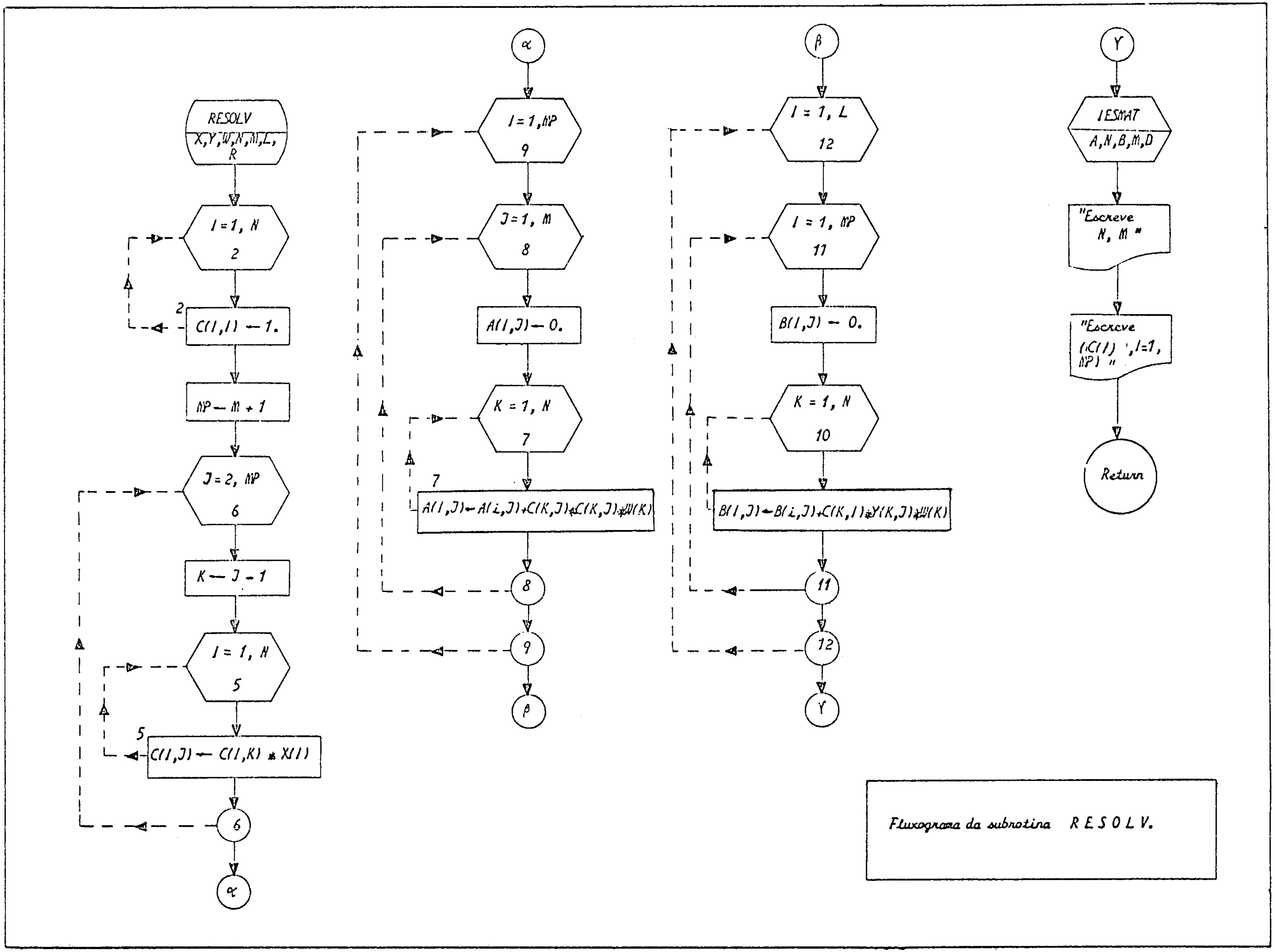
(e) - Subrotina FUNÇÃO



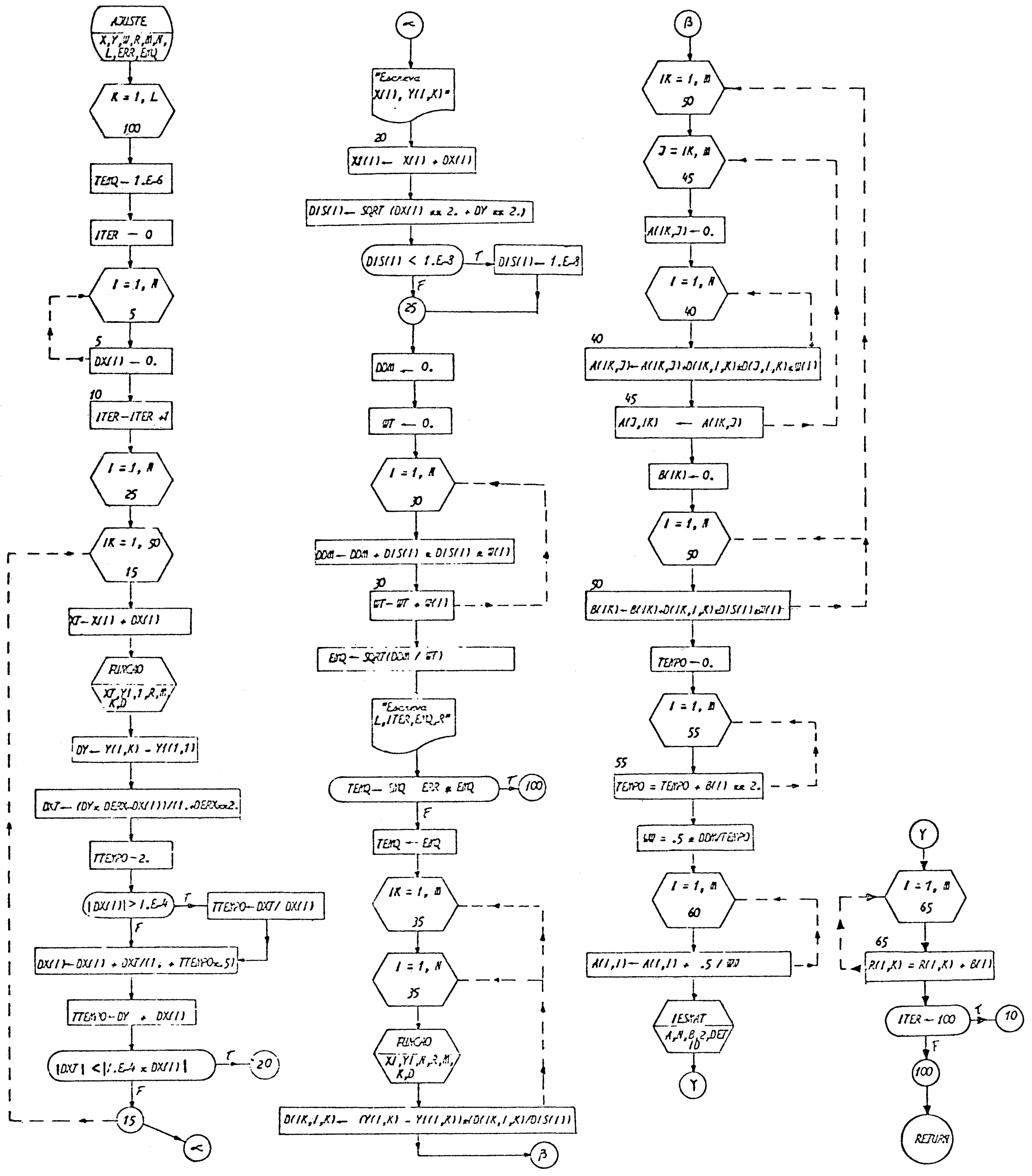

Fluxograma do programa principal
S A J M M Q.



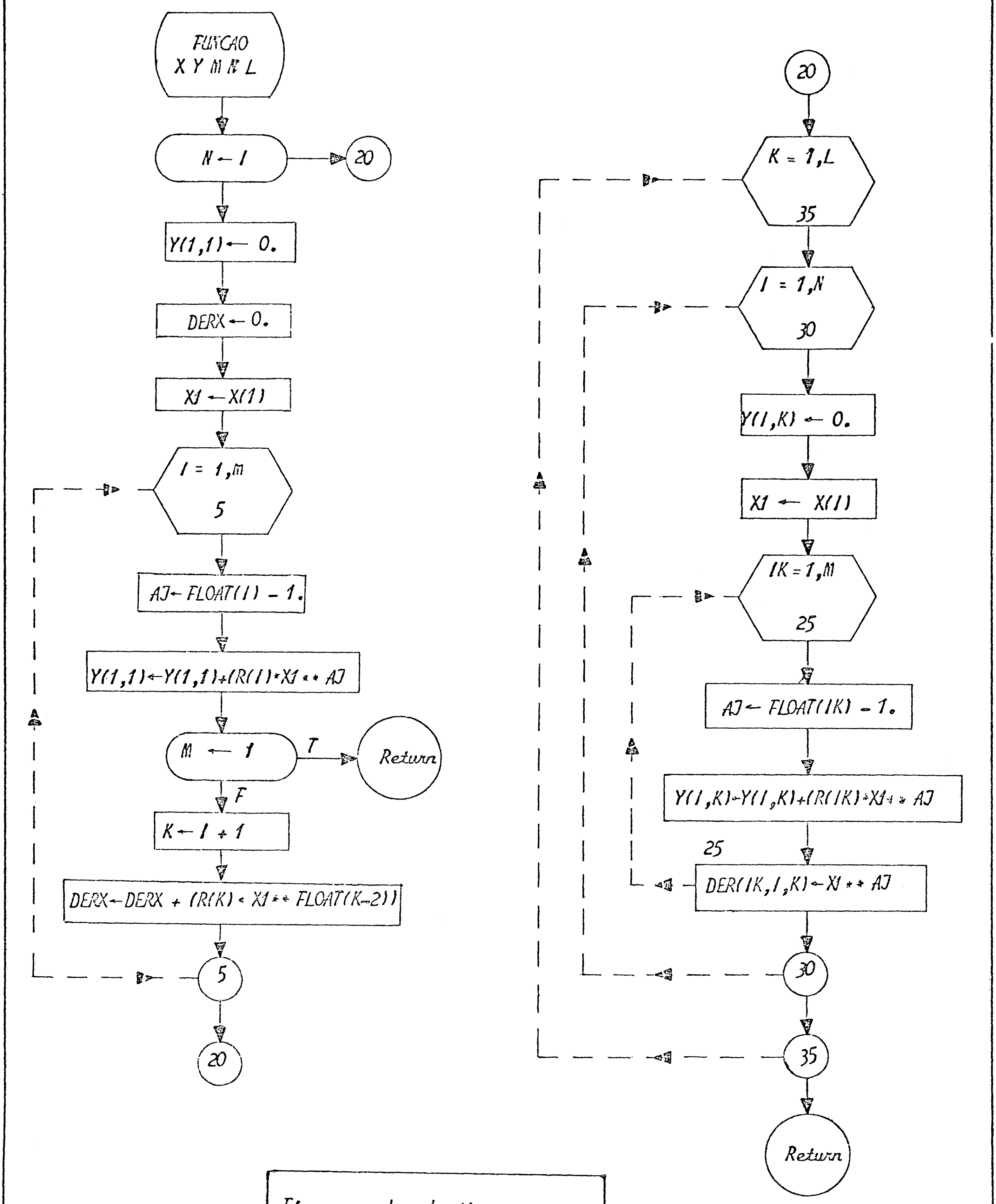

Fluxograma da subrotina ORDENA.




Fluxograma da subrotina R E S O L V.



Fluxograma da subrotina A J U S T E




Fluxograma da subrotina
FUNCAO.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

|001| - ARNOLD, K. - Zur Bestimenung der Geoidundulationen aus Feiluftanomalien. **Veröf. der Geod. Inst. Potsdan**, Berlin, N. 12 1959.

|002| - .......... - Ein Graphisches Hilfsmittel Zur Gravimetrischen Verbesserung Astronomischen Nivellements. **Veröf. der Geod. Inst.** Potsdan, Berlin, N. 18, 1961.

|003| - .......... - Zur Kovergenz der Kugelfunktionsenturcklung für das Potential der Erde in Außenraum. **Gerlands Beiträge Zur Geophysik**. Leipzig 78 (5): 369-72, 1969.

|004| - BADEKAS, S.- **Investigations Related to the Establishment of a World Geodetic System.** Ohio State Univ. Inst. Geod., Photogram. and Cartog. Report nº 124, 1969.

|005| - BAESCHLIN, C. F. - **Lerbuch der Geodäsie.** Zürich, Orell-Füssli, 1948.

|006| - .......... - Rapport spéciale sur le Nivellement et la Pesanteur. **Bull. Geodésique**, Paris, (N.S.) N.57:245-8, 1960.

|007| - BARRETO, L.M. - **Trabalhos Gravimétricos do Observatório Nacional.** Comunicação apresentada na 1ª Conferência Nacional de Geografia e Cartografia, Rio de Janeiro, set. 1968.

|008| - BJERHAMMAR, A.- **On a Explicit solution of the Gravimetric Boundary Value Problem for an Ellipsoidal Surface of Reference.** Nac. Thec. Inf. Serv., Virginia, 1962 (NTIS - AD 296 827).

|009| - BOMFORD, G. - **Geodesy.** 3 ed, London, Oxford Univ. Press. 1971.

|010| - BRASIL - Conselho Nacional de Geografia. **Coordenadas dos vértices da triangulação de 1ª ordem**/Rio de Janeiro/CNG. 1961.

|011| - .......... - Instituto Brasileiro de Geografia. **Trabalhos técnicos** Rio de Janeiro/IBG, 1972.

|012| - ........... - Petróleo Brasileiro S.A. **Manual de Gravimetria**./Rio de Janeiro/PETROBRAS, 1959.

|013| - BURSA, M. - On Pratical Aplication of the solution of the Molodensky's Integral Equation in the First Approximation **Studia Geoph. et Geod.**, Praha, N. 9:144-9, 1965.

|014| - ........... - On the Determination of Gravimetric Deflections of the Vertical for the Center Area. **Travaux Geophysiques**, Praha, N. 15:13-48, 1967.

|015| - ........... - On the Determination of the Direction of the Minor Axis of the Reference Ellipsoid and the Plane the Initial Geodetic Meridian from Observations of Artificial Earth satellites. **Studia Geophy., et Geod.**, Praha, 9 (1): 14-22, 1965.

|016| - ........... - Theoretical and Pratical Achivements in Determining the Figure of the Earth and External Gravitational Field. In. **Travaux de l'AIG**. Praha, Tome 23:293-357,1968.

|017| - BYERLY, W.E.- **Fourier's Series**. New York, Dover Pub., 1959.

|018| - CAMPBELL,A.C. - Rigorous Solution for the Determination of the Deflection of the Vertical for the Center Area. **Bull. Geodesique**, Paris, (N.S.) N.69:281-91, sept. 1963.

|019| - CAPUTO, M. - **The Gravity Field of the Earth**. New York, Academic Press 1967. (International Geophysics Series, v.10).

|020| - CASSINIS, G.- Sur l'Adoption d'une Formule Internationale pour la Pesauteur Normale. **Bull Geodésique**, Paris, N.26:40-9, 1930.

|021| - DAVIS, H.T. - **Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations**. New York, Dover Pub. 1962.

|022| - DOBRIN,M.B. - **Introduction to Geophysical Prospecting**. 2 ed. Tokio, Mc Graw - Hill, c.1960(International Student series).

|023| - EISENHART, L.P. - **A Treatise on the Differential Geometry of Curves and surfaces**. New York, Dover Pub., 1960.

|024| - FISCHER, I. - A tentative world datum from geoidal heights based on the Hough Ellipsoid and the Columbus Geoid. **J.Geophys. Research**, 64 (1): 73-84, 1959.

|025| - ........... - Gravimetric Interpolation of Deflections of the Vertical by Eletronic Computer. **Bull Geodésique**, Paris, (N.S.) N.81:267-76, sept. 1966.

|026| - ........... - An Astrogeodetic World datum geoidal heigts based on the flattering f = 298,3. **J.Geophys. Research**.65 (7): 2067-76, 1960.

|027| - ........... - **The geoid in south America referred to various reference systems**. Presented to XI Pan American Consulation on Cartography, IPGH, Washington, 1969.

|028| - GAMA, L. e GUALDA, J. - Base Gravimétrica do Corcovado. **Publ.Serv. Gravimétrico do Observatório Nacional**, Rio de Janeiro, N.1, 1968.

|029| - ........... - Valores da Gravidade no Nordeste e Região Centro-leste do Brasil. **Publ. Serv. Gravimétrico do Observatório Nacional**, Rio de Janeiro, N.2, 1971.

|030| - GAPOSCHKIN, E. M. and LAMBECK, K. - Earth's Gravity Field to the sixteen degree and station coordinates from satellite and terrestrial data. **J. Geophys Research** 76(20):4855-83, 1971.

|031| - GEMAEL, C. - **Geodésia Elementar**. Curitiba, DAEP, 1954.

|032| - ........... - Forma e Dimensões da Terra. **Bol. Univ. Paraná**, Curitiba, Geodésia (8), 1963.

|033| - ........... - Spherical Harmonics in Geodesy. **Bol. Univ. Paraná**, Curitiba, Geodésia (11), 1970.

|034| - ............ - **CG - 142 - Geodésia II.** Curitiba, Univ.Fed. Paraná Curs. Pós-Graduação Cienc. Geod., 1971 (mimeografado)

|035| - ............ - **CG - 155 - Geodésia Física.** Curitiba, Univ.Fed. Paraná - Curs. Pós-Graduação Cienc. Geod., 1972(mimeografado).

|036| - GENTRY, D.E. and NASH.R.A. - A statistical algorithm for computing vertical deflections gravimetrically. **J.Geophys Research**, 77(26):4912-19,sept 1972.

|037| - GRAFF-HUNTER, J. de - The shape of the Earth's surface expressed in terms of gravity at ground lever. **Bull. Geodésique**, Paris, (N.S.) N.56:191-200, 1960.

|038| - GROTEN, E. - On the sperical Harmonics series of Geopotential at the Earth's surface. **Bull. Geodésique**, Paris,(N.S.) N.88:227-40, 1968.

|039| - GUALDA, J. - Levantamentos Gravimétricos no Nordeste e Região Centro-Leste do Brasil: descrição das estações. **Publ. Serv. Gravimétrico do Observatório Nacional**,N.3,1971.

|040| - HAYFORD, J.F.- **The figure of the earth and isostasy from measurements in the U.S.** Washington, Coast and Geodetic Survey, 1909.

|041| - ............ - **Supplementary investigation in 1909 of the figure the earth and isostasy**. Washington, Coast and Geodetic Survey, 1910.

|042| - and BOWIE, W.- **The effect of topography and isostatic** compensation **upon the intensity of gravity.** Washington, Coast and Geodetic Survey, sp. Pub. N. 10, 1912.

|043| - HEISKANEN,W.A- Investigation on the gravity formula. **Publs. Isost. Inst. IAG**, Helsink, N.1, 1938.

|044| - ............ - New isostatic tables for the reduction of the gravi

ty values calculated on the basis of Airy's hypothesis. **Publ. Isost. Inst. IAG**, Helsink, N.2, 1938.

|045| - ............ - Problems and Achievements of the Physical Geodesy. **Bol. Univ. Paraná**, Curitiba, Geodésia N.1, 1961.

|046| - ............ and NISKENEN, E. - World maps for the indirect effect of the ondulations of the geoid on gravity anomalies. **Publ. Isost.IAG** Helsinkie, N.7, 1941.

|047| - ............ and VENING-MEINESZ, F.A - **The Earth and its gravity field.** New York, McGraw-Hill, 1958(Mc Graw Hill Series in the Geological Sciences).

|048| - ............ and MORITZ, H. - **Physical Geodesy.** San Francisco,W.H. Freeman, 1967 (c).

|049| - HENRIKSON, P. and NASH, R.A. - A statistical analysis of errors in gravimetrically computed vertical deflections. **J. Geophys.Research**, 75 (20): 4017-28, July 1970.

|050| - HILDEBRAND, F.B. - **Introduction to numerical analysis.** New York, Mc Graw-Hill, 1956.

|051| - HIRVONEN, R.A. - On the precision of the gravimetric determination of the geoid. **Trans. Amer. Geophys. Union** 37 (1), 1956.

|052| - ............ - **New theory of gravimetric Geodesy.** Ohio State University, Inst. Geod. Photogram. Cartog. Report N.6, 1960.

|053| - JACKSON, S.E - Observations with the Cambridge pendulum apparatus in North, Central and South American 1958. **Geophys. J. Royal Astron. Soc.** N.2:337-47, 1959.

|054| - JEFFREYS, H. - An aplication of the free-air reductions of gravity. **Gerlands Beitr.Zur Geophys.**, Leipzig, 1931.

|055| - KAMELA, Czeslaw - **Dynamic Geodesy**, Trad: Israel Program for Scien tific Translation, Washington, Dep. of. Comm.1964, V.1.

|056| - KARKI, P. et alii - Topographic - isostatic reduction maps for the world for the Hayford Zones 18-1, Airey - Heiska nen T = 30 km. **Publ. Isost. Inst. IAG**, Helsinki N.35, 1961.

|057| - KAULA, W.M. - **Theory of satellite Geodesy**. Massachussets,Blais dell Publ., 1966 (c).

|058| - ............... - A geoid and World Geodetic system based on a com binations of gravimetric, astro-geodetic and sa tellite data. **J. Geophys. Research** 66(6): 1799-1812, 1961.

|059| - ............... - World Geodetic System. In: RUNCORN, S.K. - **International Dictionary of Geophysics**, Oxford, Perga mon Press, V.2:1682-1685, 1967 (c).

|060| - KOCH, R.R. - **Determination of the first derivation of the dis turbing potential by Green's fundamental formulas.** Ohio State University, Inst. Geod. Photogram. Car tog. Report N. 15, 1967.

|061| - ............... - **Model computation for different solutions of the geodetic Boundary - value problem.** Ohio State Uni versity, Inst. Geod., Photogram. Cartog. Report N. 18, 1968.

|062| - ............... - **Solution of the geodetic boundary value problem in case of a reference elipsoid.** Ohio State Univ., Inst. Geod. Photogram. Cartog. Report N.20, 1968.

|063| - KOPAL, Z. - **Numerical analysis.** 2 ed. London, Chapenan and Hall, 1961.

|064| - KOTLIAREVSKII,B.V. - Evaluating the acuracy of a gravimetric survey selecting the rational density of the observa

tion network and cross section of isoanomalies of the force of gravity. In: RAST, N.-**Apllied Geophysics in USSR**. New York, Pergamon, 1966 (c) p. 139 - 166.

|065| - KRASSOWSKY, T.N. - Alguns nuevos fundamentos para el estabelecimento de las equaciones y programas de mediciones del grado. **Fol. Divulgacion, Inst. Geog. Militar**, Buenos Aires, N.11:15-18, 1951.

|066| - ............ - Empleo de material astronomico-geodesico y gravimetrico para la determinacion de la forma del geoide. **Fol. Divulgacion Inst. Geogr. Militar**, Buenos Aires N. 11:15-18, 1951.

|067| - LAMBERT, W.D.- The reductions for observed values of gravity to sea lever. **Bull. Geodēsique**, Paris, (N.S.) N.26, 1930.

|068| - ............ - Geodetic applications of eclipses and ocultations. **Bull. Geodesique**, Paris.(N.S.) N.13:276-92, 1949.

|069| - ............ and DARLING, F.W. - **Tables for determining the form of the geoid and its indirect effect on gravity**. Coast and Geodetic Survey, Washington, Sp. Publ.N.199, 1936.

|070| - ............ - The international gravity formula. **Am. J. Sci.** Washington, N.243:360-92,1945.

|071| - LANCZOS, C. - **Applied Analysis**. London, Pitman, 1957.

|072| - LEJAY, P. - **Development modernes de la gravimetrie**. Paris, Gauthier-Villars, 1947.

|073| - ............ - Tables four le calcul de l'effect indirect et la deformation du geoide. **Bull. Geodesique**, Paris,(N.S) N.8:99-163, 1948.

|074| - LEVALLOIS, J.J. - **La geometrie des le elipsoide**. Paris, Eyrolles, 1970. (Gēodēsie Gēnērale, Tome II).

|075| - ............. - **Le Champ de la pesanteur.** Paris, Eyrolles, 1970 (Géodésie Générale, Tome III).

|076| - LOVITT, W.V. - **Linear integral equations.** New York, Dover Publ., 1950. (Reprint of 1924 ed. Mc Graw-Hill).

|077| - MACMILLAN, W.D- **The Theory of potential.** New York, Dover Publ.1958.

|078| - MARKOWITZ, W. - Photographic determination of the moon's position and applications to the measure of time, rotation of the earth and geodesy. **The Astron. J.** 59(2):69-73, 1954.

|079| - MARUSSI, A. - Inner geometry of gravity field. In: RUNCORN, S.K. **International dictionary of geophysics.** Oxford, Perganon, 1967.

|080| - MATHER, R.S. - **The Australian geodetic datum in earth space.** Univ. of New South Walles, Kensington, Report N.19, 1970.

|081| - McCALLA, J.R. - **Introduction to numerical methods and Fortran programming.** New York, John Willey and sons, 1967.

|082| - MOISEEV, N.D. - The determination of the deflection of the vertical for the regularized earth. **Astron. Zhurnal**, Berlin, 11(4), 1934.

|083| - MODELINSKII, M.S. - O principal problema da geodésia gravimétrica. (Trad. do russo). **Trudy IS NIIGAIR**, Moscow, Geodezizdat N.42, 1945.

|084| - ............. - Determinacion de la forma del geoide mediante el empleo de desviaciones de la vertical astronomica - Geodesicas y anomalias de la gravidad. **Fol. Divulgacion Inst. Geogr. Militar**, Buenos Aires, N. 11, 1958, p. 20-38.

|085| - ............. and GOROKHOVA, V.S. - The possibility of increasing the distance between astronomic stations in astronomic gravime

tric levelling. **Geodesy and Cartography**, Am. Geophys. Union, Washington , N.9/10:401-3.sept/ oct. 1960.

|086| - ........... et alii - **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth.** Trad: Israel Program for Scientific Translation, Washington, Depc. Comm. 1962.

|087| - MONIN, I.F. - A method for study of the figure of the earth without using a normal field. **Geodesy and Aerophotography**, Am. Geophys. Union, Washington, N.3, 1962.

|088| - MORELLI, C. - **Catalogue of pendulum stations and executers for the first order world gravity net and principal related stations.** Paris, Int. Assoc. Geod. - Bureau Gravimetrique International, 1965 (2 vol.).

|089| - ........... - **Gravimetria.** Udin, Ed. Del Bianco, 1968 (Collana di scienze Terrestri).

|090| - MORITZ, H. - Eine integralgleichung des Geoids. **Gerlands Beiträge Zur Geophysics**, Leipzig, N.70, 1961.

|091| - MULLER, I.I.- **Introduction to Satellite geodesy.** New York, Frederich Ungar, 1964 (c).

|092| - ............- **A introduction to spherical and pratical astronomy with applied to geodesy.** New York, Frederich Ungar - 1967(c).

|093| - ........... - et alii - **The North American datum in view of GEOS I observation.** Ohio State Univ., Inst. Geod. Photog. Cartog., Report N. 125, June 1969.

|094| - NEY, C. H. - Contours of the geoid for south eastern Canada. **Bull. Geodésique**, Paris (N.S.) N.23:73-109, 1952.

|095| - O'KEEFE, J.A.- et alii - Vanguard measurements give pear-Shaped com

ponent of the earth's figure. **Science** 129 (3348):566-6, 1959.

|096| - OSTACHI, O.M. - On the procedure of astro-gravimetric levelling. **Stud. Geophys. et Geod.** Praha, N. 14(2):222-5, 1970.

|097| - RAMSEY, A.S. - **Newtoniam Attraction.** Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1964.

|098| - RICE, D. - Deflections of the vertical from gravity anomalies. **Bull. Geodésique**, Paris, (N.S.) N.25:285-312, 1952.

|099| - RODRIGUEZ, L.V. - **O problema do datum geodésico.** Tese de concurso, São Paulo, Esc. Polit. Univ. S. Paulo, 1957.

|100| - ............. - **Base gravimétrica.** Comunicação ao I Congresso Brasileiro de Cartografia, Salvador, 1962.

|101| - ............. - **Lista de Estações gravimétricas** - 1ª parte, São Paulo, Inst. Bras. Geogr., 1964 (mimeografado).

|102| - SABOYA, V.E. - **Noções de estatística e teoria dos erros.** Rio de Janeiro, Univ. Est. Guanabara - Deptº Eng. Cartog., 1969.

|103| - SAZHINA, N. and GRUSHINSKI, N. - **Gravity Prospecting.** Trad: CHATTERJEE, A.R. Moscow, Ed. Mir. 1971.

|104| - SCARBOROUGH, J.B. - **Numerical mathematical analysis.** 5 ed., Baltimore, John Hopkins, 1962.

|105| - SECREST, D. and STROUD, D.H. - **Gaussian quadrature formulas.** New Jersey, Prentice-Hill, 1966.

|106| - SHOKIN, P.F. - **Gravimetry.** Trad: Israel Program for Scientific ../ Translation. Washington, Deptº of Comm 1963 (c).

|107| - SIEBENHUNER, H. - A new determination of the european datum. **Studia Geophys et Geod.**, Praha, N.13(4):478 481, 1969.

|108| - SILVA, G. - Sulla formola della Gravitã Normale. **Rend. della R.Acc. dei Lincei** N.11:641-4, 1930.

|109| - SOLLINS, A.D. - Tables for computation of deflections of the vertical from gravity anomalies. **Bull. Géodésique**,Paris (N.S.) N.6:279-300, 1947.

|110| - STOYKOV.V.P. - **On the problem of determining the deflections of the vertical on the basic of Molodenskii theory.** Trad: Aeronautical Chart and information Center. Washington, Deptº Comm.1967, 22 p.(ACIC-TC-1202).

|111| - SZABO, B. - Comparison of the deflection of the vertical components computed by astro-geodetic, gravimetric and topographic-isostatic techniques. **Bull Geodésique**, Paris, (N.S:) N.65:227-42, sept. 1962.

|112| - ............. - Geodesy and Gravimetry. In: **Handbook of Geophysics and space Enviroments.** New York, McGraw-Hill,1971.

|113| - TARG, S. - **Theoretical Mechanics: a short course.** (Trad), Moscow, ed. Mir., 1968.

|114| - UGGI, Int. Assoc. of Geodesy - **Bulletin d'information.**/Paris/,N.11, Nov. 1965.

|115| - ............. - **Bulletin d'information**/Paris/, N. 17, Nov. 1970.

|116| - ............. - **System Geodésique de Reference 1967.**/Paris/, Int. Assoc. Geod., Sp. Publ. N.3, 1971.

|117| - UOTILA, U. - **Investigations of Gravity field and shape of the earth.** Ohio State Univ., Inst. Geod. Photogram Cartog., Report N.6, 1959.

|118| - ............. - Harmonic Analysis of world-gravity material. **Publ. Isostat. Inst. Assoc. Geod.**, Helsink, N.33, 1962.

|119| - USAF - Air Photographic and Charting service. **Report of**

**results, project 54-AFS50.**/Washington/,Deptº Comm., 1967(vol. V).

|120| - ............ - Aeronautical Chart and information Center. **1º x 1º mean free-air gravity anomalies.**/St. Louis/, ACIC, aug. 1971.

|121| - VEISS, G. - Precise aspects of terrestrial and celestial reference frames. In: **The use of artificial satellites for Geodesy.** Amsterdan, North-Holland Publ., 1963(vol.I)

|122| - VENING-MEINESZ,F.A. - Tables for regional and local isostatic reduction Airy System. **Publ. Neth, Geod. Comm.** Delft., 1941.

|123| - ............ - New formulas para systems of deflections of the plumb-line and Laplace's theorem. Changes of deflections of the plumb-line brought by a change of the reference ellipsoid. **Bull. Geodésique** Paris,(N.S.) N.15:33-51. 1950.

|124| - WOOLARD, G.P.- **International Gravity measurements.** Wiscosin. soc. Explor. Geophys., 1963.

|125| - ............ - et alii - Una rede de bases modernas para control de gravidade en las Americas Central y del sur. **Geofísica International**, México City, N.2(6), 1966.

|126| - ............ - et alii - Catalogo de estaciones gravimetricas em América Latina. **Geofísica International**, México City N.3/4 (7), Jun/Dec. 1967.

|127| - ............ - et alii-**World wide gravity measurements conducted during the period 1949-52.** Massachussets, Woods Hole Oceanographic Inst., 1952. (Technical report).

|128| - ZAKATOV, P.S.- **An Course in higher geodesy.** Trad: Israel Program for Scientific Translation - Washington Deptº. Comm., 1961.

*****

jo/...

# ÍNDICE DE FIGURAS

## ÍNDICE DE TABELAS

## LISTA DE SIGLAS

ACIC - Aeronautical Chart and Information Center

APCS - Air Photographic and Charting Service

BGI - Bureau Gravimétrique International

BIH - Bureau International de l'Heure

CEPG-UFPR - Centro de Estudos e Pesquisas em Geodésia da Universidade Federal do Paraná

CIM - Carta Internacional ao Milionésimo

COCEX - Comissão de Cartografia do Exército

DHN - Diretoria de Hidrografia e Navegação

IAG - International Association of Geodesy

IAGS - Inter American Geodetic Survey

IBG - Instituto Brasileiro de Geografia

INPE - Instituto de Pesquisas Espaciais

IPMS - International Polar Motion Service

MMQ - Método dos Mínimos Quadrados

ON - Observatório Nacional do Rio de Janeiro

OSU - Ohio State University

SBC - Sociedade Brasileira de Cartografia

SGB - Sistema Geodésico Brasileiro

UEG - Universidade do Estado da Guanabara

USAF - United State Air Force

USCGS - United State Coast and Geological Survey

IGGI - União Geodésica e Geofísica Internacional

MPM/jo...