

SANDRO ELY DE SOUZA PINTO

PLATÔS DE SINCRONIZAÇÃO EM REDES DE SISTEMAS DINÂMICOS COM TEMPO DISCRETO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

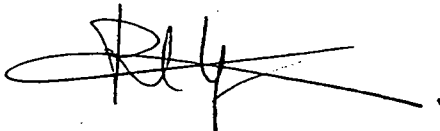
CURITIBA

2000

TERMO DE ACEITAÇÃO

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Mestrado do estudante Sandro Ely de Souza Pinto, consideram aprovada a redação final da dissertação de Mestrado cujo título é “PLATÔS DE SINCRONIZAÇÃO EM REDES DE SISTEMAS DINÂMICOS COM TEMPO DISCRETO”.

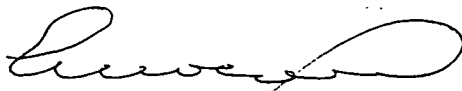
Curitiba, 20 de MARÇO de 2000



Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador Presidente)



Prof. LEONARDO GREGORY BRUNET
(UFRGS)



Prof. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU
(INPE)

À minha mãe Zeny.

À Luciane, a mulher da minha vida.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Dr. Ricardo Luiz Viana pela orientação e paciência;
- ao meu grande amigo Adriano Roberto de Lima (arlima) pelo incentivo, confiança, companheirismo e preciosas dicas computacionais;
- ao colega de orientação Antônio Marcos Batista pelas importantes discussões a respeito deste trabalho;
- ao Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes pelas dicas computacionais;
- aos colegas da pós-graduação.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar a sincronização de frequências em redes de mapas seno-círculo. A forma de acoplamento utilizada é governada por dois parâmetros: um responsável pela intensidade e outro pelo alcance da interação entre os elementos da rede, fazendo com que o acoplamento varie de global (campo médio) a local (primeiros vizinhos). É observado que quando estes parâmetros são variados, ocorre uma transição entre um estado completamente sincronizado e um estado não-sincronizado. A medida da sincronização foi feita através da comparação entre os valores do número de rotação de cada mapa. Esta comparação indica a existência de platôs formados por sítios adjacentes que apresentam valores iguais para o número de rotação. Foi encontrada uma lei de distribuição exponencial para o tamanho destes platôs para uma rede com acoplamento local.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Redes de Mapas Acoplados	6
2.1	Sistemas Espacialmente Extensos	6
2.2	Tipos de Acoplamento	10
2.3	Fenomenologia de Mapas Acoplados em Rede	13
3	Mapa do Seno-Círculo	16
3.1	Motivação Física	16
3.2	A Dinâmica do Mapa do Seno-Círculo	20
3.3	A Rede de Mapas do Seno-Círculo	25
4	Sincronização em Redes de Mapas do Seno-Círculo	32
4.1	Sincronização	32
4.2	Perfis do Número de Rotação	35
4.3	Dispersão dos Números de Rotação	38
4.4	Parâmetro de Ordem e Espectro de Potência Correspondente.	42
5	Estrutura dos Platôs de Sincronização	52
5.1	Grau de Sincronização	52
5.2	Grau de Sincronização Modificado	56
5.3	Distribuição dos Comprimentos de Platôs	58
5.4	Discussão	63
6	Conclusões	67
A	Derivação do Acoplamento Local	70

Lista de Figuras

2.1	Diagrama $x_n^{(i)} \times i$ para $\varepsilon = 0,2$ e $N = 50$ mapas logísticos. Foram sobrepostas 50 iterações após 1000 iterações transientes. Quando $r = 3,3$	14
2.2	Diagrama $x_n^{(i)} \times i$ para $r = 3,5$, $\varepsilon = 0,2$ e $N = 50$. Foram sobrepostas 50 iterações após 1000 iterações transientes.	14
2.3	Diagrama $x_n^{(i)} \times i$ com $r = 3,9$ e $\varepsilon = 0,2$ e $N = 50$. Foram sobrepostas 50 iterações após 1000 iterações transientes.	15
2.4	Diagrama $x_n^{(i)} \times i$ com $r = 3,75$ e $\varepsilon = 0,1$ e $N = 50$. Foram sobrepostas 50 iterações após 1000 iterações transientes.	15
3.1	Duas fontes de voltagem senoidais forçando um resistor não-linear. . .	16
3.2	Representação de uma trajetória, com frequências f_1 e f_2 , confinada à superfície de um torus, juntamente com o corte de Poincaré do mesmo. Leia-se na figura $\omega_1 = f_2$ e $\omega_2 = f_1$. Fonte: [Schuster, 1984]	17
3.3	Seção de Poincaré de um torus bidimensional. Cada ponto sobre o círculo representa uma perfuração do plano utilizado para fazer o corte. 18	
3.4	Diagramas de retorno para a primeira iteração do mapa do seno-círculo, com $\Omega = 0,5$ e quatro valores diferentes de K : (a) $K = 0,0$, (b) $K = 0,5$, (c) $K = 1$ e (d) $K = 3,0$	19
3.5	Diagramas de retorno para a primeira iteração do mapa do seno-círculo, com $K = 0,5$ e quatro valores diferentes de Ω : (a) $\Omega = 0,1$, (b) $\Omega = 0,3$, (c) $\Omega = 0,7$ e (d) $\Omega = 0,9$	20
3.6	Diagrama de bifurcação e diagrama do expoente de Lyapunov <i>versus</i> o parâmetro de controle K para $\Omega = 0,5$	22
3.7	Diagrama de bifurcação e diagrama do expoente de Lyapunov contra o parâmetro K para $\Omega = 0,606661$	23

3.8	Diagramas de primeiro retorno que mostram as trajetórias próximas aos pontos fixos: (a) $K = 0,5$ e $\Omega = 0,05$; (b) $K = 0,5$ e $\Omega = 0,95$. $\theta_0 = 0,55$	24
3.9	Séries temporais para o mapa do seno-círculo: (a) $K = 0,5$ e $\Omega = 0,05$; (b) $K = 0,5$ e $\Omega = 0,95$. Ambos os diagramas foram construídos com $\theta_0 = 0,55$	25
3.10	(a) Série temporal para o mapa do seno-círculo com $\theta_0 = 0,3$; (b) diagrama de retorno para a primeira iteração com $\theta_0 = 0,3$; diagrama de retorno para a segunda iteração com duas condições iniciais distintas: $\theta_0 = 0,3$ e $\theta_0 = 0,33$. Os parâmetros utilizados foram $K = 0,8$ e $\Omega = 0,5$	26
3.11	(a) Série temporal para o mapa do seno-círculo. $K = 0,5$, $\Omega = 0,6180339$ e $\theta_0 = 0,35$. (b) Diagrama de retorno para a primeira iteração do mapa do seno-círculo referente à série temporal.	26
3.12	Diagrama no espaço de parâmetros $K - \Omega$ (linguas de Arnold). As regiões escuras correspondem ao "mode-locking". Fonte [Ott, 1994].	27
3.13	A <i>Escada do Diabo</i> para o mapa do seno-círculo para $K = 1,0$	28
3.14	Diagrama $\theta_1^{(i)} \times i$ para uma condição inicial aleatória, $\varepsilon = 0,95$, $K = 0,5$, $\Omega = 0,5$ e $N = 128$. A figura corresponde à sobreposição de 32 iterações, a partir de 2000 iterações transientes desprezadas.	28
3.15	Diagrama $\theta_1^{(i)} \times i$ para uma condição inicial aleatória, $\varepsilon = 0,55$, $K = 0,5$, $\Omega = 0,5$ e $N = 128$. A figura corresponde à sobreposição de 32 iterações, a partir de 2000 iterações transientes desprezadas.	29
3.16	Ampliação da região entre os sítios 78 e 128 da figura (3.15).	29
3.17	Diagrama em três dimensões da evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo. $K = 1,2566751$, $\varepsilon = 0,4$ e $\Omega = 0,3$. Os valores de $\theta_n^{(i)}$ foram plotados a cada 4 iterações.	30
3.18	Diagrama em três dimensões da evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo. $K = 1,2754866$, $\varepsilon = 0,4$ e $\Omega = 0,3$. Os valores de $\theta_n^{(i)}$ foram plotados a cada 4 iterações.	31
3.19	Diagrama em três dimensões da evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo. $K = 1,37$, $\varepsilon = 0,4$ e $\Omega = 0,3$. Os valores de $\theta_n^{(i)}$ foram plotados a cada 4 iterações.	31
4.1	Sincronização de fases entre dois pêndulos mostrada em quatro instantes de tempo diferentes.	33

4.15	As fases $\theta_n^{(i)}$ distribuídas sobre um círculo unitário, sendo cada uma delas associadas a um vetor \vec{y}_i . O módulo da soma vetorial $\sum \vec{y}_i$ dividido por N nos dá o valor de R_n	45
4.16	(a) Magnitude do parâmetro de ordem $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,0$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem. (d.e.p. = densidade espectral de potência, em unidades arbitrárias.) .	46
4.17	(a) Magnitude do parâmetro de ordem $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 2000$ e $\varepsilon = 0,0$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem. (d.e.p. = densidade espectral de potência, em unidades arbitrárias.) .	47
4.18	Evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo: $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,9$. Com 5000 iterações após desprezar 4975 iterações transientes.	48
4.19	(a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,9$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.	48
4.20	(a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 2000$ e $\varepsilon = 0,9$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.	49
4.21	Evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo: $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,7$. Com 5000 iterações após desprezar 4950 iterações transientes.	49
4.22	(a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,7$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.	50
4.23	(a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 2000$ e $\varepsilon = 0,7$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.	50
4.24	Evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo: $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,9$. Com 5000 iterações após desprezar 4950 iterações transientes.	51
4.25	(a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 100,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,9$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.	51
5.1	Número de platôs de sincronização como função do parâmetro α : $N = 3000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,9$. Para uma rede de mapas do seno-círculo. .	53
5.2	Grau de sincronização p como função do parâmetro α : $N = 3000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,9$. $\alpha_c \approx 1,08$. Esta figura foi obtida através de três distribuições de frequências e condições iniciais diferentes, obtendo-se sempre o mesmo resultado.	54

Capítulo 1

Introdução

O fenômeno de sincronização foi observado e estudado pela primeira vez em 1665 pelo holandês Christiaan Huygens, físico e inventor do relógio de pêndulo. Certo dia, ao observar dois dos seus relógios, ambos colocados numa mesma parede, ele notou que, à medida que o tempo passava, seus pêndulos sincronizavam, ou seja, as variáveis angulares que descreviam o movimento de cada pêndulo apresentavam o mesmo valor em cada instante de tempo. Mesmo depois de perturbá-los, de alguma forma, eles voltavam a sincronizar após algum tempo. Quando Huygens afastou os relógios, colocando-os em paredes diferentes, ele notou que depois de um determinado intervalo de tempo, seus pêndulos não estavam mais em sincronia. Depois de diversas observações sistemáticas como esta, ele iniciou um estudo matemático detalhado destes sistemas, dando início à teoria de osciladores acoplados. Devemos ressaltar que existem basicamente dois tipos de sincronização: a sincronização de fases, que foi descrita acima e a sincronização de frequências, onde podemos observar valores diferentes de variáveis angulares, mas o mesmo valor para as frequências individuais. Neste trabalho nos ocuparemos da última forma de sincronização citada. Os osciladores acoplados podem ser encontrados em toda a natureza, inclusive nos seres vivos. Um exemplo pode ser visto no comportamento coletivo de algumas espécies de vaga-lumes que, na época do acasalamento, apagam e acendem suas luzes sincronizadamente [Strogatz e Stewart, 1993]. A sincronização de osciladores biológicos pode ser encontrada nos mecanismos de geração dos ritmos cardíacos e respiratórios, e nos ritmos circadianos e de locomoção-respiração [Glass e Mackey, 1997].

A motivação física para este trabalho vem dos resultados observados nas cadeias de junções Josephson acopladas [Wiesenfeld *et al.*, 1996], [Wiesenfeld e

um determinado valor a partir do qual o mapa torna-se não-inversível. Neste trabalho nos concentraremos somente na região em que o mapa é inversível. Estudos que definem as principais características sobre este mapa podem ser encontrados em [Jensen *et al.*, 1983] e [Jensen *et al.*, 1984]. A literatura que trata destas redes apresenta estudos sobre fenômenos como "*mode-locking*" [Alstrøm e Ritala, 1986], caos espaço-temporal [Kaneko, 1991] e turbulência solitônica [Crutchfield e Kaneko, 1987], [Kaneko, 1989 (2)], [Kaneko, 1993], além da sincronização [Chatterjee e Gupte, 1996].

Os elementos de uma rede de mapas acoplados interagem segundo uma prescrição especificada. Tal prescrição pode exibir um ou mais parâmetros, permitindo que os elementos da rede interajam mais ou menos intensamente. Quando os parâmetros assumem valores adequados, o fenômeno de sincronização pode surgir. As regras de interação, ou de acoplamento, são diferenciadas pela maneira como os elementos da rede interagem com seus vizinhos. O acoplamento que utilizaremos é caracterizado por um parâmetro de alcance, que faz com que a intensidade de acoplamento decaia com a distância ao longo da rede, de acordo com uma lei de potência, além de um parâmetro que regula a intensidade do acoplamento, responsável pelo efeito difusivo na rede. O parâmetro de alcance pode fazer com que o acoplamento varie desde o local (apenas os primeiros vizinhos interagem) até o global (todos os elementos da rede interagem mutuamente). Esta forma de acoplamento foi introduzida originalmente para redes de osciladores com tempo contínuo em [Rogers e Wille, 1996] e para uma rede de mapas em [Viana e Batista, 1998].

O objetivo deste trabalho é estudar a sincronização como função do parâmetro de alcance e da intensidade do acoplamento. Isto será feito através de vários diagnósticos. Estes diagnósticos utilizam-se de uma quantidade chamada número de rotação, que é a frequência perturbada de cada elemento da rede. Quando ocorre a sincronização de frequências, os mapas mais próximos tendem a apresentar o mesmo valor do número de rotação, formando assim os ditos platôs de sincronização [Rogers e Wille, 1996], [Viana e Batista, 1998]. Estudaremos também a distribuição de tais platôs como função da quantidade de elementos existente em cada um.

A dissertação foi segmentada da seguinte forma:

No Capítulo 2, primeiramente faremos um apanhado geral sobre os sistemas dinâmicos espacialmente extensos mais populares: os autômatas celulares, as cadeias de osciladores com tempo contínuo e as equações diferenciais parciais,

além, é claro, das redes de mapas acoplados. Depois abordaremos os principais tipos de acoplamento existentes para redes unidimensionais e os principais aspectos da fenomenologia destas redes.

O mapa que utilizaremos, o do seno-círculo, será apresentado no Capítulo 3 através da introdução de um circuito elétrico composto de dois geradores AC que estão conectados em série com um resistor variável. Neste mesmo capítulo estudamos a dinâmica deste mapa, e posteriormente mostraremos os principais fenômenos que ocorrem em redes compostas por estes mapas.

O Capítulo 4 trata do fenômeno de sincronização nas redes de mapas do seno-círculo acoplados, através do estudo dos perfis dos números de rotação. Neste capítulo também introduzimos algumas das quantidades utilizadas para diagnosticar os estados de sincronização, são elas: o desvio quadrático médio e o parâmetro de ordem complexo.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentaremos duas novas quantidades, chamadas grau de sincronização e grau de sincronização modificado, que levam em conta os platôs de sincronização. Estas quantidades identificam transições entre estados sincronizados e não-sincronizados como funções dos parâmetros de acoplamento. A última parte deste capítulo apresentará um estudo sobre a distribuição dos platôs de sincronização, mostrando a dependência com o alcance e com a intensidade do acoplamento no limite termodinâmico para o acoplamento de primeiros vizinhos.

Capítulo 2

Redes de Mapas Acoplados

2.1 Sistemas Espacialmente Extensos

A teoria de caos em *sistemas dinâmicos* vem obtendo um grande desenvolvimento através do estudo de sistemas de baixa dimensão, ou seja, sistemas que possuem poucos graus de liberdade. Entretanto, problemas que apresentam *caos espaço-temporal* [Crutchfield e Kaneko, 1987], como turbulência em fluidos, ergodicidade em mecânica estatística, formação de padrões em fenômenos naturais, sólitons, reações químicas, ondas químicas, dinâmica populacional e redes de neurônios possuem muitos graus de liberdade. Assim, na busca de uma concordância, tanto com o número de graus de liberdade, quanto com a geometria de tais problemas, foram introduzidos sistemas dinâmicos que apresentam extensão espacial, de forma a modelar e caracterizar o comportamento dos processos citados anteriormente. Tais sistemas são descritos através do tempo, do espaço e da variável de estado local, sendo que cada uma das três quantidades citadas pode assumir um caráter discreto ou contínuo. Obtemos deste modo uma classificação com oito sistemas, dos quais apenas quatro recebem maior atenção. São eles: as equações diferenciais parciais, as cadeias de osciladores, as redes de mapas acoplados e os autômatas celulares. Isto pode ser visualizado mais claramente na tabela 2.1.

As *equações diferenciais parciais* (EDP) surgem ligadas a vários problemas físicos e geométricos, quando as funções em jogo dependem de duas ou mais variáveis. Estas variáveis podem ser o tempo e uma ou mais coordenadas espaciais. Tanto as variáveis independentes, quanto as funções que representam o estado local do sistema físico num instante de tempo, devem variar continuamente dentro de intervalos estabelecidos de acordo com a natureza do problema. Equações como

<i>Modelo</i>	<i>Espaço</i>	<i>Tempo</i>	<i>Variável de Estado</i>
Autômata Celulares	D	D	D
Redes de Mapas Acoplados	D	D	C
Cadeias de Osciladores	D	C	C
Equações Diferenciais Parciais	C	C	C

Tabela 2.1: Principais sistemas dinâmicos espacialmente extensos. Sendo C \equiv *contínuo* e D \equiv *discreto*.

a de Poisson, de Laplace, da difusão, de Helmholtz, entre outras, são exemplos bem conhecidos das EDP's aplicadas a problemas físicos. Estas equações também são freqüentemente estudadas como modelo para caos espaço-temporal. Um exemplo é a equação de Ginzburg-Landau [Kaneko, 1991]

$$\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \gamma \phi(\vec{r}, t) - g |\phi|^2 + D \nabla^2 \phi(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

que descreve processos do tipo reação-difusão; sendo $\phi(\vec{r}, t)$ a variável de estado, \vec{r} a posição, t o tempo, D a constante de difusão, γ e g os coeficientes de reação. Outras EDP s são bastante utilizadas para estudar o comportamento caótico em hidrodinâmica, física de plasmas [Tham e Sen, 1992] e outras áreas da física. Um outro exemplo de EDP que apresenta caos espaço-temporal pode ser encontrado em sistemas que representam ondas interagindo de forma não-linear [Lopes e Rizzato, 1998].

As *cadeias de osciladores acoplados* apresentam o tempo e a variável de estado contínuos e o espaço discreto. A discretização do espaço é facilmente obtida através da construção de uma rede, na qual são distribuídos N osciladores de forma que cada um esteja a uma mesma distância dos seus vizinhos adjacentes. O local da rede onde um único oscilador está é denominado sítio. Os N elementos da rede interagem seguindo alguma regra estabelecida, que pode ser o acoplamento introduzido em [Kuramoto, 1984]:

$$\dot{\theta}_i = \Omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.2)$$

sendo θ_i e Ω_i , respectivamente, a fase e a freqüência natural do i -ésimo oscilador, e K é a constante de acoplamento. Uma aplicação das cadeias de osciladores acoplados em biologia é descrita em [Sompolinski *et al.*, 1991], onde é simulada uma rede

de neurônios associados à região do cérebro de um gato, responsável pelo processamento visual. Há também um grande interesse na descrição de redes de junções Josephson [Wiesenfeld e Hadley, 1989], [Wiesenfeld *et al.*, 1996] e *lasers* [Hohl *et al.*, 1997]. Redes de osciladores Rössler, devido à sua dinâmica bastante rica, aparecem freqüentemente na literatura [Osipov *et al.*, 1997], [Brunnet e Chaté, 1998].

Um *autômato celular* é essencialmente uma representação de um conjunto de muitos objetos que interagem simultaneamente, sendo que o espaço, o tempo e a variável de estado local são discretos. Tal sistema dinâmico tem as seguintes propriedades:

- (a) O espaço é representado por uma rede regular em uma, duas ou três dimensões;
- (b) cada sítio da rede pode estar em apenas um dos finitos estados acessíveis ao sistema. Os estados são representados por números inteiros;
- (c) os valores de todos os sítios na rede são atualizados sincronizadamente em cada instante de tempo;
- (d) os valores dos sítios são atualizados usando um conjunto de regras que levam em conta os valores do sítio e de seus vizinhos.

Grande parte dos estudos que estão relacionados a estes sistemas estão direcionados, principalmente, para a sincronização [Morelli e Zanette, 1998] e a auto-organização [Medvedev e Diamond, 1998]. Na modelagem de fenômenos físicos, este sistema dinâmico é bastante usado para simular o comportamento estatístico de sistemas do tipo modelo de Ising [Hemmingsson *et al.*, 1993].

Neste trabalho voltaremos a nossa atenção para as *redes de mapas acoplados*. Este sistema, que apresenta o espaço e o tempo discretos e a variável de estado local contínua, foi introduzido por Kaneko em [Kaneko, 1983] como um modelo simples para *caos espaço-temporal*. Inicialmente estas redes eram unidimensionais, mais tarde, Kaneko estendeu este modelo a redes bidimensionais [Kaneko, 1989 (2)]. A modelagem e caracterização de tal aspecto é importante no estudo da turbulência como um fenômeno geral [Kaneko, 1989], [Cosenza e Parravano, 1996], que não está restrito apenas à dinâmica de fluidos, mas ocorre em outras áreas da ciência fundamental aplicada, como exemplo: física do estado sólido, óptica, química, problema da formação de padrões e biologia [Kaneko, 1990]. *Caos espaço-temporal* pode ser observado na convecção e Bénard, convecção em cristal líquido, problemas de reação-difusão em química e cadeias de junções Josephson.

A *rede de mapas acoplados* é construída da seguinte forma [Crutchfield e Kaneko, 1987]: uma variável x_n^i é distribuída sobre uma rede espacial d -dimensional (em nosso caso $d = 1$); sendo n o tempo e i a posição do sítio na rede ($i = 1, 2, \dots, N = \text{tamanho da rede}$). Podemos optar dentre diversos tipos de condições de contorno, mas aqui optamos por trabalhar com condições de contorno periódicas ($x_n^{i \pm N} = x_n^i$). A evolução da variável de estado é governada pela dinâmica local, que evolui com o tempo, e pela forma de acoplamento com os outros sítios. Isto pode ser exemplificado através da seguinte *rede de mapas acoplados*

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) = A [f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (2.3)$$

sendo A a constante de acoplamento e $f(x_n^{(i)})$ a dinâmica local da rede, ou seja, uma função não-linear que corresponde a um mapa unidimensional.

Como veremos no Apêndice A, podemos derivar uma das formas de acoplamento a partir de uma EDP de segunda ordem, que descreve processos de reação-difusão. O fato de derivarmos uma *rede de mapas acoplados* de uma equação que modela um processo físico, além de ser uma grande motivação, contribui para a popularidade da qual estes sistemas dinâmicos gozam atualmente. Podemos lembrar também de uma característica importante, que é o fato destes sistemas serem um modelo simples para *caos espaço-temporal*. Tal simplicidade é devida à facilidade com que estas redes podem ser implementadas computacionalmente, além do tempo de processamento ser muito reduzido em relação às EDP e às *cadeias de osciladores*. Por estas razões, muitos trabalhos surgiram, dentre os quais podemos citar [Grassberger e Schreiber], [Keller *et al.*, 1992], [Marcq *et al.*, 1997], que estudam a transição de fase em *redes de mapas acoplados*. Outra aplicação na física é estudada através da simulação do comportamento termodinâmico de modelos de Ising [Andrade, 1999]. Além das aplicações físicas, há trabalhos cuja atenção está voltada para a fenomenologia das redes, como em [Jánosi e Gallas, 1999], onde é feita uma análise da dinâmica de campo médio de mapas que apresentam mais de um atrator. A sincronização é outro aspecto extensivamente estudado, como é visto em [Viana e Batista, 1998], onde é explorada a sincronização de frequências entre sistemas de ciclo-limite e [Chatterjee e Gupte, 1996], que mostra resultados analíticos a respeito da sincronização de fases entre mapas do seno-círculo acoplados.

2.2 Tipos de Acoplamento

Na seção anterior, mencionamos brevemente que os sistemas que apresentam discretização espacial - as *redes de mapas acoplados*, no nosso caso - são regidos por uma regra matemática de itneração chamada acoplamento. Há várias formas de acoplamento, mas independentemente do tipo utilizado, devemos explicitar a maneira como será feita a atualização das variáveis de estado a cada iteração. Nós optamos por atualizar todos os elementos da rede simultaneamente, diferente do que é feito em [Abramson e Zanette, 1998] que apresenta duas formas de atualização não simultânea. Quando fazemos a escolha da função que representa o acoplamento devemos deixar claro a maneira como abordamos as variáveis de estado; temos duas alternativas à nossa mão quando partimos do acoplamento gera:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \xi[g(x_n^{(j)})] \quad (j = 0, \dots, N - 1) \quad e \quad (j \neq i).$$

Sendo ξ uma função de $g(x_n^{(i)})$ (acoplamento).

- (a) *Acoplamento linear*: tem a forma $g(x) = x$, sendo $g(x)$ a função que representa o acoplamento e x a variável de estado correspondente à iteração anterior;
- (b) *Acoplamento futuro*: neste tipo de função utiliza-se o valor da variável de estado correspondente à iteração atual, ou seja, trocamos x por $f(x)$. Aqui $f(x)$ é a dinâmica local da rede. Deste modo, temos uma função geral do tipo $g(x) = f(x)$.

Este trabalho abordará três tipos de acoplamento, todos futuros: o *acoplamento local*, o *acoplamento global* e um tipo de acoplamento que varia entre o *local* e o *global* à medida que um parâmetro de alcance é mudado continuamente.

Quando Kaneko introduziu as *redes de mapas acoplados* [Kaneko, 1983], ele o fez apresentando o acoplamento local como um modelo que determina a dinâmica local do sítio i em função da dinâmica dos sítios $i - 1$ e $i + 1$ e do próprio sítio. Por este motivo ele também pode ser chamado de acoplamento entre primeiros vizinhos e tem a forma (usando o tipo (b) acima):

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (2.4)$$

sendo ε a constante de acoplamento. Esta função também pode ser chamada de *acoplamento laplaceano*, devido ao fato de podermos obter a rede de mapas exposta

acima de uma EDP de segunda ordem. isto pode ser visto em [Lichtenberg e Lieberman, 1992], onde a EDP utilizada descreve processos de reação-difusão (Apêndice A).

Apresentaremos agora o acoplamento global, que foi introduzido por Kaneko em [Kaneko, 1989 (3)]. Ele tem a forma

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1; j \neq i}^N f(x_n^{(j)}). \quad (2.5)$$

Este acoplamento envolve todos os sítios da rede a cada iteração, sem que haja um sítio com tratamento distinto dos demais. O segundo termo de (2.5) deixa claro que devemos tomar o cuidado de excluir o termo que está sob a ação da contribuição média dos outros sítios.

O terceiro e último tipo de acoplamento, a ser visto neste trabalho, foi introduzido originalmente para cadeias de osciladores não-lineares [Rogers e Wille, 1996]. Mais tarde, este acoplamento foi utilizado, pela primeira vez, em *redes de mapas acoplados* [Viana e Batista, 1998].

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \{f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})\}, \quad (2.6)$$

sendo $N' = (N - 1)/2$, e

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha}$$

um fator de normalização. Isto vem do fato da somatória na equação (2.6) ser uma média ponderada dos termos dentro das chaves. Deste modo, o fator $\eta(\alpha)$ é a soma dos correspondentes pesos estatísticos.

O parâmetro α é um número real positivo responsável pela transição entre o acoplamento global e local, à medida que é aumentado de 0 até ∞ . Consideraremos agora os casos limites para a prescrição acima:

(a) Para $\alpha = 0$: Calculamos primeiro o termo de normalização

$$\begin{aligned} \eta(\alpha) &= 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} = 2 \left\{ \frac{1}{1^\alpha + \frac{1}{2^\alpha}} + \dots + \frac{1}{N'^\alpha} \right\} \\ \eta(0) &= 2 \underbrace{\{1 + 1 + \dots + 1\}}_{N'} = 2N' = (N - 1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Agora, o somatório, que denotaremos por \mathcal{S}

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} \{f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})\} = \\
&= \frac{1}{1^0} \{f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)})\} + \dots \\
&+ \frac{1}{N'^0} \{f(x_n^{(i+N')}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-N')})\} \\
\mathcal{S} &= \{f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)})\} + \dots \\
&+ \{f(x_n^{(i+N')}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-N')})\} = \\
&= -2N'f(x_n^{(i)}) + \{f(x_n^{(i-N')}) + \dots + f(x_n^{(i+N')})\} \\
&= -(N-1)f(x_n^{(i)}) + \sum_{j \neq i; j=1}^N f(x_n^{(j)}) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

E agora, substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6)

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) - \varepsilon f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j \neq i; j=1}^N f(x_n^{(j)}), \\
x_{n+1}^{(i)} &= (1-\varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j \neq i; j=1}^N f(x_n^{(j)}),
\end{aligned}$$

recuperamos a Eq.(2.5).

(b) Para $\alpha \rightarrow \infty$: Como

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} = 1,$$

somente o termo com $j=1$ sobrevive, portanto, temos

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{N'} \{f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})\} \\
x_{n+1}^{(i)} &= (1-\varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \tag{2.9}
\end{aligned}$$

que é o acoplamento local visto anteriormente na equação 2.4.

2.3 Fenomenologia de Mapas Acoplados em Rede

Nesta seção faremos uma sucinta apresentação, de forma qualitativa, da dinâmica de mapas acoplados em rede - estudos de maior profundidade podem ser encontrados em [Crutchfield e Kaneko, 1987], [Kaneko, 1989] e [Kaneko, 1991]. Estas redes possuem uma rica variedade de fenômenos, entre eles estão a formação de domínios espaciais - regiões da rede onde os mapas apresentam um comportamento espacial semelhante -, coexistência de domínios com dinâmica caótica e regular, movimento aleatório das fronteiras dos domínios, intermitência espaço-temporal, estruturas *zigzag* etc. Utilizaremos, para exemplificar como dinâmica local da rede, o mapa logístico

$$f(x_n) = x_n = rx_n(1 - x_n), \quad (2.10)$$

e o acoplamento laplaceano futuro (2.4).

À medida que r é aumentado o mapa logístico sofre uma cascata de duplicação do período, começando em $r = 3,0$ até atingir o comportamento caótico em $r_\infty = 3,59$. Para N mapas acoplados, com condições de contorno periódicas, com $r < 3,0$, qualquer conjunto de condições iniciais leva a uma solução única, que é o ponto fixo estável de período 1 para o mapa isolado. Para $r > 3,0$, o sistema pode organizar-se em domínios nos quais a variável x sofre uma transição espacial para cima ou para baixo, formando assim as paredes que separam os domínios. Tais paredes são chamadas de *kinks* (transição "para cima") e *antikinks* (transição "para baixo"). A configuração dos domínios depende das condições iniciais e para $r < r_\infty$ as paredes são fixas no tempo. Para $r = 3,3$, ocorre a duplicação de período dentro dos domínios (figura 2.1). Isoladamente, cada um dos mapas aproxima-se assintoticamente da solução estável de período 2, devido à dependência das condições iniciais, pode ocorrer que os sítios tenham soluções diferentes no mesmo instante de tempo. Para o sistema acoplado esta estrutura persiste. A figura 2.2 ilustra este comportamento para a região de período 4.

O movimento caótico pode ocorrer dentro de cada domínio individualmente quando r está próximo de r_∞ . Este comportamento depende da intensidade do acoplamento. Se r é aumentado demasiadamente a partir de r_∞ as paredes dos domínios movem-se e eventualmente colidem. Quando isto acontece *kinks* e *antikinks* são aniquilados, e não existem valores bem definidos para as soluções em diferentes regiões da rede. Deste modo, as regiões regulares desaparecem com o aumento de r (figura 2.3).

A transição de um padrão ordenado da rede para outro que apresenta

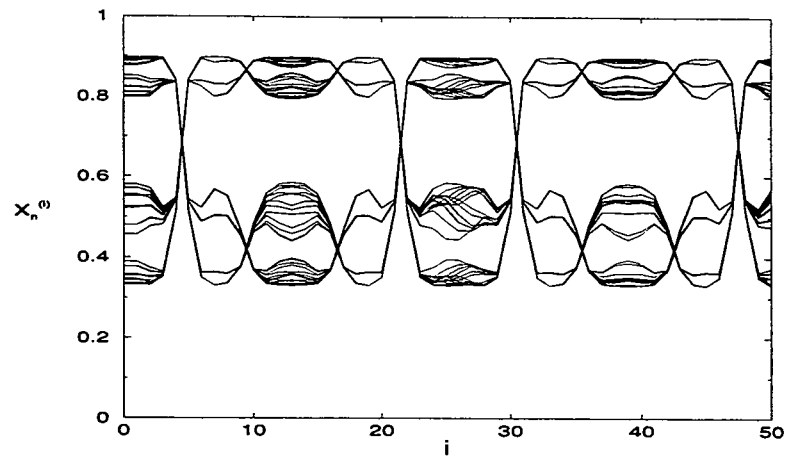


Figura 2.3: Diagrama $x_n^{(i)} \times i$ com $r = 3,9$ e $\varepsilon = 0,2$ e $N = 50$. Foram sobrepostas 50 iterações após 1000 iterações transientes.

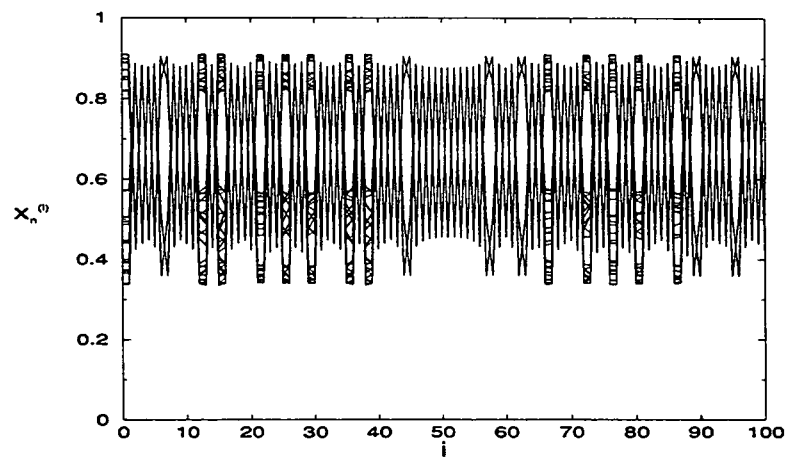


Figura 2.4: Diagrama $x_n^{(i)} \times i$ com $r = 3,75$ e $\varepsilon = 0,1$ e $N = 50$. Foram sobrepostas 50 iterações após 1000 iterações transientes.

$R = R(V)$. Como as fontes de voltagem estão em série, temos $V = v_1 \text{sen}(f_1 t + \theta_0^{(1)}) + v_2 \text{sen}(f_2 t + \theta_0^{(2)})$. A corrente que passa pelo resistor, $I(t) = V/R(V)$, é uma função não-linear de V . Como os fatores $f_1 t$ e $f_2 t$ aparecem somente como argumento dos senos, podemos tomá-los como ângulos: $\theta^{(1)} = f_1 t + \theta_0^{(1)}$ e $\theta^{(2)} = f_2 t + \theta_0^{(2)}$. Deste modo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} &= f_1, \\ \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} &= f_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Os ângulos $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$, e o comportamento das freqÜências f_1 e f_2 podem ser descritos por trajetórias confinadas à superfície de um torus. A freqÜência f_1 é associada com o movimento na circunferência externa, enquanto que a freqÜência f_2 é associada ao corte de seção do torus (figura 3.2).

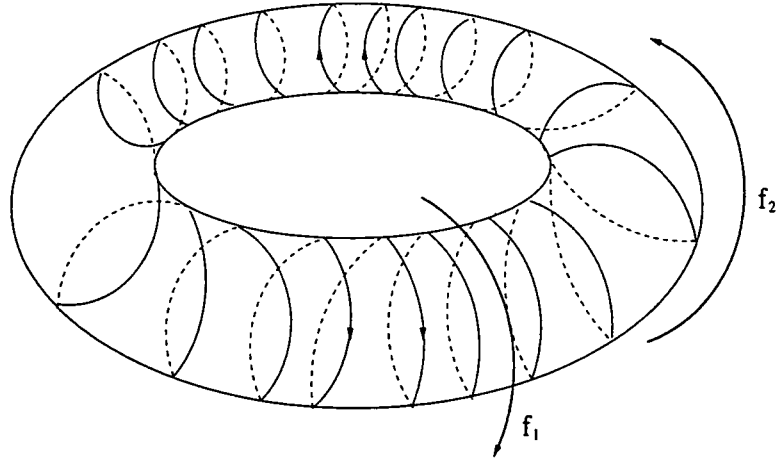


Figura 3.2: Representação de uma trajetória, com freqÜências f_1 e f_2 , confinada à superfície de um torus, juntamente com o corte de Poincaré do mesmo. Leia-se na figura $\omega_1 = f_2$ e $\omega_2 = f_1$. Fonte: [Schuster, 1984]

Assumimos que os valores dos ângulos $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ permanecem no intervalo $(0,0;1,0]$, ou seja, se um determinado valor é maior ou igual a 1,0, então subtraímos 1,0 até que a parte inteira seja igual a zero. Tal operação é chamada de módulo 1 (mod 1). Podemos escrever matematicamente esta operação numa forma mais geral

$$a \text{ mod } b = N - \frac{a}{b}.$$

Sendo N o menor inteiro satisfazendo $Nb \geq a$.

não-linear, representado por uma função $g(\theta)$. Arnold [Arnold, 1965] introduziu o mapa

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) + \Omega - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n), \quad (3.3)$$

que é igual ao mapa (3.2) menos o termo não-linear $g(\theta)$, que neste caso é igual a $-K/2\pi \text{sen}(2\pi\theta_n)$. Fisicamente, $g(\theta)$ modela o efeito de acoplamento não-linear no circuito. Na forma em que está, a equação é chamada de *mapa do seno-círculo* e foi, posteriormente, detalhadamente estudado por Jensen *et al.* [Jensen *et al.*, 1983] dentre outros. Sendo $K \in [0, \infty]$ o parâmetro de controle da não-linearidade do mapa. Para $K \leq 1,0$ o mapa é inversível, ou seja, cada valor de $f(\theta_n)$ corresponde a um único valor de θ_n ; para $K > 1,0$ o mapa não é inversível, isto é, $f(\theta_n)$ pode apresentar mais de um valor para cada valor de θ_n . Temos assim, um mapa que depende de dois parâmetros: Ω e K . A figura 3.4 mostra diagramas de primeiro retorno para $\Omega = 0,5$ e quatro valores diferentes de K .

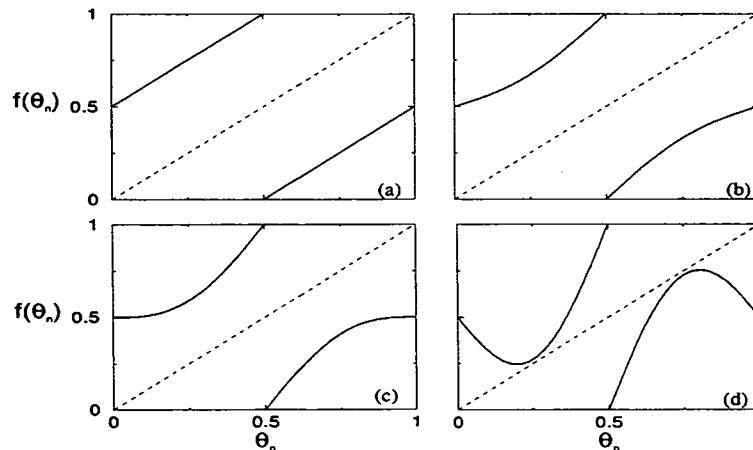


Figura 3.4: Diagramas de retorno para a primeira iteração do mapa do seno-círculo, com $\Omega = 0,5$ e quatro valores diferentes de K : (a) $K = 0,0$, (b) $K = 0,5$, (c) $K = 1$ e (d) $K = 3,0$.

A figura 3.5 mostra o comportamento do mapa para valores diferentes de Ω na região de K onde $f(\theta)$ é inversível. A descontinuidade na função que aparece nas figuras 3.4 e 3.5 é aparente. Quando o valor do ângulo excede 1,0, subtraímos 1,0 do valor e o mesmo retorna para a parte inferior do diagrama.

Existem trabalhos que tentam reproduzir alguns sistemas físicos através destes mapas, por exemplo: modelagem de junções Josephson, reação química de Belusov-Zhabotinsky, oscilações em um condutor iônico [Lichtenberg e Lieberman,

onde o movimento depende sensivelmente das condições iniciais.

Faremos um estudo de cada um dos três casos acima utilizando o expoente de Lyapunov que apresenta valores positivos quando o movimento é caótico, valores negativos quando o movimento é periódico e é igual a zero quando há quase-periodicidade. Uma outra quantidade que temos à nossa mão e que é usada para descrever a dinâmica dos mapas do círculo e do N -torus é o *número de rotação* [Bergé *et al.*, 1984], definido por

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta_0) - \theta_0}{n}. \quad (3.4)$$

sendo $f^n(\theta_0)$ a n -ésima iteração do mapa (sem a operação mod 1, neste caso). O número de rotação $K \leq 1,0$ não depende das condições iniciais θ_0 e converge para um determinado valor. O mesmo não acontece para $K > 1,0$, sendo tal quantidade dependente das condições iniciais e não convergindo necessariamente para um mesmo valor, resultando num valor diferente a cada iteração. Para o mapa linear ($K = 0$), representado pela equação (3.2), w e Ω apresentam o mesmo valor, como podemos ver abaixo

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\Omega + \theta_0 - \theta_0}{n} = \Omega.$$

Neste trabalho, calculamos o número de rotação da seguinte maneira: esperamos um tempo transiente $n = m_0$ até que o sistema atinja o estado estacionário e fazemos o cálculo de $n = m_0$ até $n = m$. Sempre usaremos $m_0 = 2000$ e $m = 5000$. Para diminuir os erros numéricos fazemos a diferença a cada iteração. Temos, portanto, a seguinte forma

$$w = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - m_0} \sum_{n=m_0}^{m-1} |\theta_{n+1} - \theta_n|. \quad (3.5)$$

Para $0 \leq K \leq 1,0$, w e Ω não são necessariamente iguais, mas o fato de w ser racional ou irracional continua indicando se o movimento é periódico ou quase-periódico.

Vamos ilustrar o comportamento do mapa através das figuras 3.6 e 3.7, cada uma delas apresentando os diagramas $f(\theta) \times K$ e do expoente de Lyapunov *versus* K . O expoente de Lyapunov é definido como

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{T-1} \ln|f'(x_i)|, \quad (3.6)$$

sendo T o número total de iterações e $f'(x_i)$ a derivada da função que descreve o mapa.

Na figura 3.6 observamos que para $K \approx 0,0$ até aproximadamente 1,415, encontramos uma região de período 2, na qual o número de rotação é $w = 0,5$, e a partir de 1,415 existem alguns valores do parâmetro de controle da não-linearidade para os quais o movimento é quase periódico e algumas regiões onde observamos o expoente de Lyapunov positivo, indicando assim o movimento caótico; utilizamos $\Omega = p/q = 1/2$. Diferentemente da figura 3.6 a figura 3.7 apresenta o movimento quase-periódico sobre toda a região na qual o mapa é inversível ($0 \leq K \leq 1,0$). O número de rotação para este caso é irracional. A razão deste comportamento é a escolha de $\Omega = 0,606661$, que é uma boa aproximação para um número irracional. A partir de $K = 1,0$ observamos uma alternância entre regiões periódicas, quase-periódicas e caóticas.

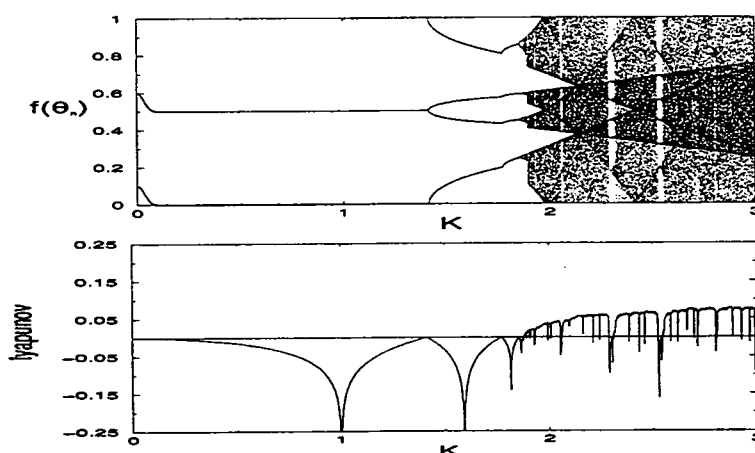


Figura 3.6: Diagrama de bifurcação e diagrama do expoente de Lyapunov *versus* o parâmetro de controle K para $\Omega = 0,5$.

A análise dos pontos fixos do mapa também é bastante útil na caracterização da dinâmica do mesmo. Um ponto fixo deve satisfazer a equação

$$\theta^* = f(\theta^*), \quad (3.7)$$

ou (sendo M um inteiro)

$$\theta^* = \theta^* + \Omega - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^*) + M. \quad (3.8)$$

A ocorrência dos pontos fixos se dá mediante certas combinações de K e Ω . Examinaremos agora o comportamento das trajetórias nas vizinhanças dos pontos fixos,

A figura 3.10 mostra o movimento com período 2 utilizando como parâmetros: $K = 0,8$, $\Omega = 0,5$. O primeiro diagrama (figura 3.10 (a)) é uma série temporal para $\theta_0 = 0,3$. No gráfico (b) temos o diagrama de retorno para a primeira iteração do mapa com $\theta_0 = 0,3$. O Gráfico (c) apresenta o digrama de retorno para a segunda iteração do mapa com duas condições iniciais diferentes: $\theta_0 = 0,3$ e $\theta_0 = 0,33$. Este último diagrama mostra o comportamento das trajetórias próximo aos pontos fixos. Os pontos fixos estáveis são $\theta = 0,0$ e $\theta = 0,5$. Aqui temos o travamento de frequência com $w = 1/2$.

A figura 3.11 apresenta uma caso de quase-periodicidade. O diagrama (a) mostra a série temporal do mapa com $K = 0,5$, $\Omega = 0,6180339$ e $\theta = 0,35$. (b) apresenta o diagrama de retorno para a primeira iteração do mapa utilizando-se dos mesmos parâmetros. O número de rotação para este caso é igual a $0,621690$. Na figura 3.11, nós deixamos o sistema evoluir somente até a iteração $n = 200$. Se iterássemos mais vezes, a trajetória preenchida todo o diagrama.

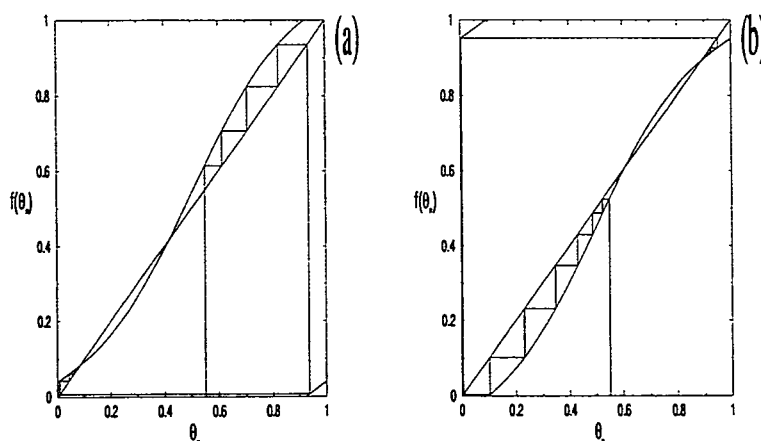


Figura 3.8: Diagramas de primeiro retorno que mostram as trajetórias próximas aos pontos fixos: (a) $K = 0,5$ e $\Omega = 0,05$; (b) $K = 0,5$ e $\Omega = 0,95$. $\theta_0 = 0,55$

Para ilustrar as regiões onde ocorrem o travamento de frequência é usualmente utilizado um diagrama no espaço de parâmetros $K - \Omega$, onde são observadas áreas sombreadas que representam as regiões de travamento de frequência. Tais regiões são denominadas *línguas de Arnold* [Arnold, 1965]. A figura 3.12 mostra estas regiões com K variando de $0,0$ a $1,5$. Existem regiões de travamento de frequência para todas as razões p/q entre inteiros e positivos. Em $K = 0$, a maioria dos Ω produz um comportamento quase-periódico. À medida que K é aumentado as

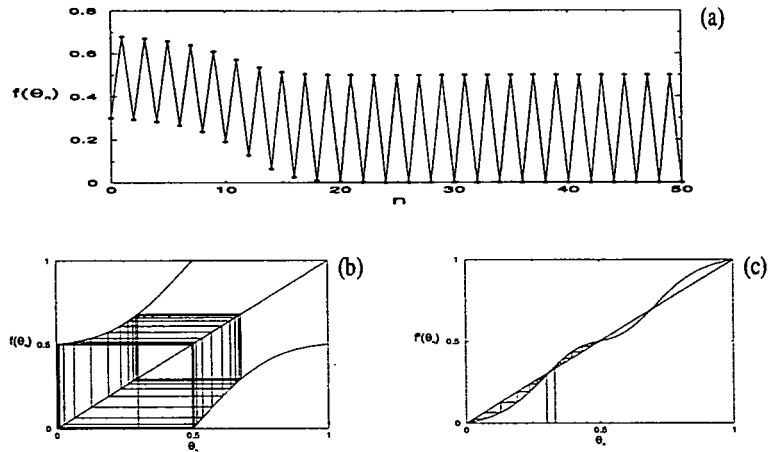


Figura 3.10: (a) Série temporal para o mapa do seno-círculo com $\theta_0 = 0,3$; (b) diagrama de retorno para a primeira iteração com $\theta_0 = 0,3$; diagrama de retorno para a segunda iteração com duas condições iniciais distintas: $\theta_0 = 0,3$ e $\theta_0 = 0,33$. Os parâmetros utilizados foram $K = 0,8$ e $\Omega = 0,5$.

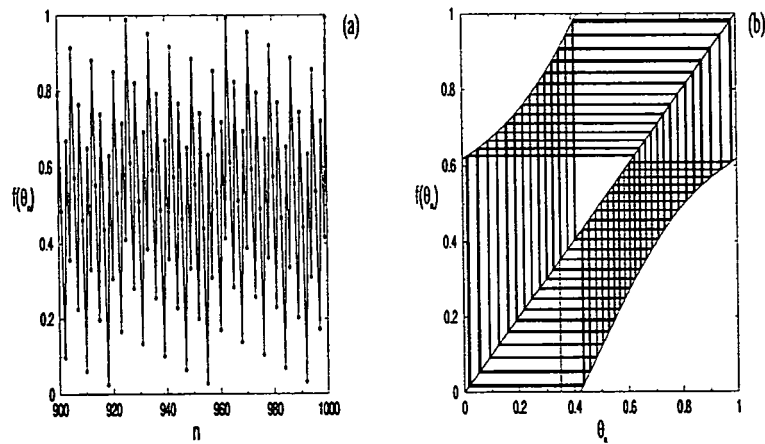


Figura 3.11: (a) Série temporal para o mapa do seno-círculo. $K = 0,5$, $\Omega = 0,6180339$ e $\theta_0 = 0,35$. (b) Diagrama de retorno para a primeira iteração do mapa do seno-círculo referente à série temporal.

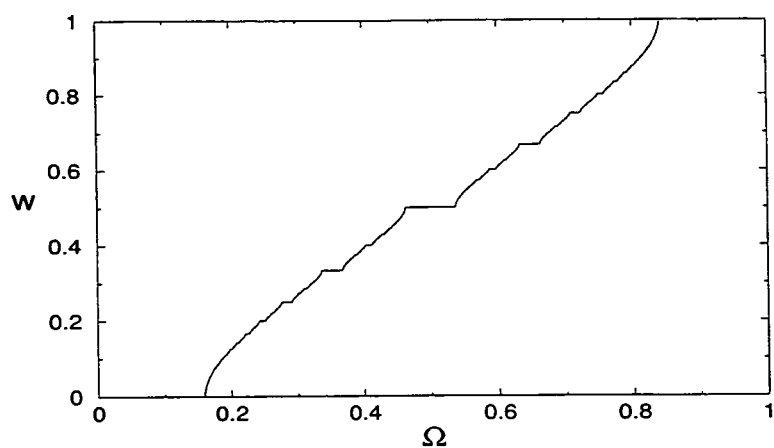


Figura 3.13: A *Escada do Diabo* para o mapa do seno-círculo para $K = 1, 0$.

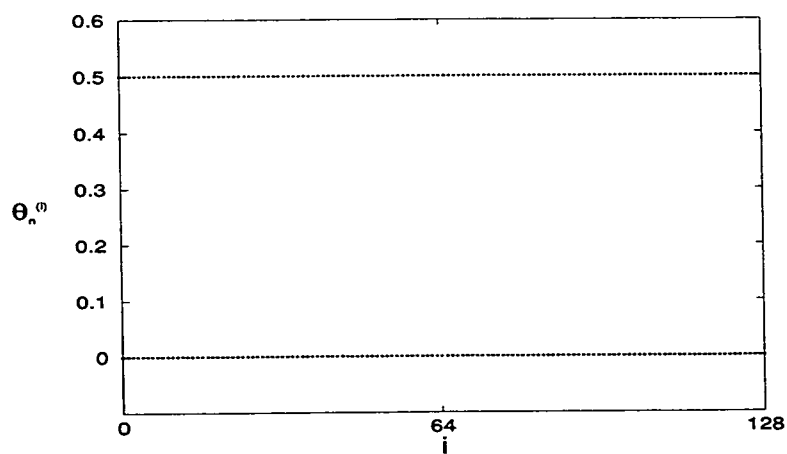


Figura 3.14: Diagrama $\theta_i^{(i)} \times i$ para uma condição inicial aleatória, $\varepsilon = 0, 95$, $K = 0, 5$, $\Omega = 0, 5$ e $N = 128$. A figura corresponde à sobreposição de 32 iterações, a partir de 2000 iterações transientes desprezadas.

- (b) *turbulência solitônica* (figura 3.18): as estruturas de *kinks* e *anti-kinks* permanecem e um comportamento aperiódico surge devido à colisão entre *kinks* e *anti-kinks*. Foi utilizado $K = 1,2754866$, $\varepsilon = 0,4$ e $\Omega = 0,3$.
- (c) *turbulência completamente desenvolvida* (figura 3.19): Podemos observar todos os domínios que apresentavam periodicidade desapareceram devido à colisão de *kinks* e *anti-kinks*. Para este caso foi utilizado $K = 1,37$, $\varepsilon = 0,4$ e $\Omega = 0,3$.

Nas figuras 3.17 à 3.19 os valores de $\theta_n^{(i)}$ nos gráficos computados a cada 4 iterações.

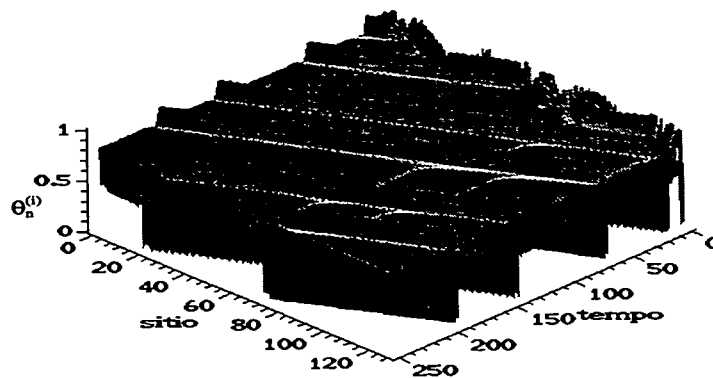


Figura 3.17: Diagrama em três dimensões da evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo. $K = 1,2566751$, $\varepsilon = 0,4$ e $\Omega = 0,3$. Os valores de $\theta_n^{(i)}$ foram plotados a cada 4 iterações.

Capítulo 4

Sincronização em Redes de Mapas do Seno-Círculo

4.1 Sincronização

Para sistemas espacialmente extensos há dois tipos de sincronização:

- (a) *Sincronização de fases*: Neste tipo de sincronização, as variáveis x_1, x_2, \dots, x_N , que representam o estado de cada ente do sistema, assumem os mesmos valores para quaisquer instantes de tempo n , como é mostrado na figura 4.1, que mostra a sincronização de fases entre dois pêndulos em quatro instantes de tempo diferentes ($t = 0, \dots, 3$).

A sincronização de fases não ocorre somente em sistemas nos quais as variáveis de estado são representadas por ângulos, como por exemplo em [Shinbrot, 1994], onde a sincronização de mapas logísticos globalmente acoplados (equações (2.5) e (2.10)) é estudada, e em [Hemmingsson *et al.*, 1993], [Morelli e Zanette, 1998] e [Grassberger, 1999] que apresentam estudos sobre a sincronização de autômatas celulares. Há uma quantidade razoável de trabalhos sobre sincronização de fases tanto em redes de osciladores [Kuramoto, 1984], [Vieira *et al.*, 1994], [Osipov], [Hohl *et al.*, 1997], quanto em redes de mapas acoplados [Pikovsky *et al.*, 1997], [Gade e Amritkar, 1993], [Chatterjee e Gupte, 1996], sendo que os dois últimos são trabalhos analíticos sobre a estabilidade e a sincronização em redes de mapas acoplados, respectivamente.

Um tipo especial de sincronização de fases é bastante estudado hoje em dia. Tal fenômeno é chamado de sincronização de caos e caracteriza-se por sistemas

transições de estados não-sincronizados para estados sincronizados que estão em concordância com os resultados teóricos de Kuramoto [Kuramoto, 1984]. A equivalência entre estas redes e o modelo de Kuramoto foi mostrada em [Wiesenfeld e Hadley, 1989]. As junções Josephson são dispositivos supercondutores capazes de gerar oscilações com frequências muito altas, entre 10^{10} e 10^{11} Hz. Elas têm uma grande aplicação tecnológica como amplificadores, moduladores de voltagem, detectores e dispositivos de mudanças rápidas em circuitos digitais. Estas junções podem detectar potenciais elétricos da ordem de 10^{-15} volts, e são usadas também para detectar radiação na faixa do infravermelho distante vindas de galáxias longínquas. Embora precisemos da mecânica quântica para explicar a origem do efeito Josephson, podemos descrever a dinâmica destes dispositivos através da equação de um pêndulo amortecido forçado.¹

Os estudos desenvolvidos nesta dissertação levam em conta, para o mapa do seno-círculo, somente a sincronização de frequência, como foi feito em [Rogers e Wille, 1996], [Wiesenfeld *et al.*, 1996] e [Viana e Batista, 1998].

4.2 Perfis do Número de Rotação

A partir deste ponto analisaremos o comportamento das redes de mapas de seno-círculo através de uma série de quantidades que caracterizam a sincronização. Nesta seção, mostraremos o comportamento da rede através de diagramas do número de rotação w (que representa a frequência perturbada para os mapas acoplados) contra a posição na rede i e a evolução temporal da rede de mapas através de diagramas em três dimensões. O acoplamento utilizado é o representado pela

¹A equação do pêndulo amortecido e forçado é:

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\text{sen}\theta = \Gamma. \quad (4.1)$$

Sendo θ o ângulo, m a massa, L o comprimento da haste, Γ o torque aplicado, b o coeficiente de amortecimento e o termo mgL o torque gravitacional máximo.

A equação para uma junção Josephson em circuito é:

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR}p\dot{\phi} + I_c\text{sen}\phi = I. \quad (4.2)$$

Sendo ϕ a diferença de fases, $\hbar C/2e$ o potencial, C a capacitância, I a corrente aplicada, $1/R$ a condutância e I_c a corrente crítica e \hbar a constante de Planck dividida por 2π .

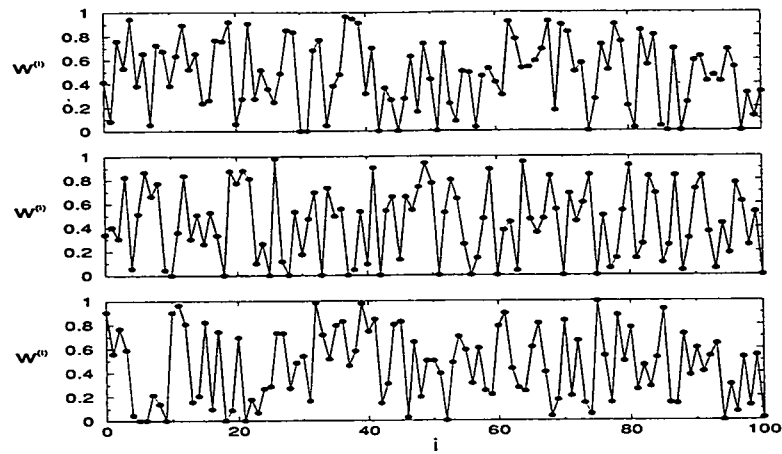


Figura 4.3: Três diferentes perfis do número de rotação para valores diferentes da semente utilizada para a geração da distribuição de frequências aleatória $\Omega^{(i)}$ e das condições iniciais $\theta_0^{(i)}$. Com $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,0$, $N = 100$, $\alpha = 0,0$.

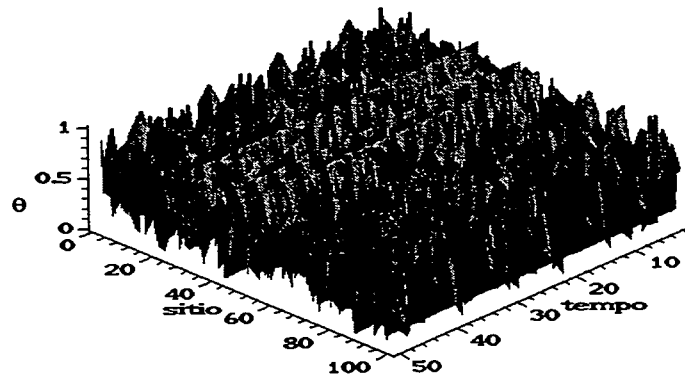


Figura 4.4: Diagrama em três dimensões mostrando a evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo acoplados. $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,0$, $N = 100$, $\alpha = 0,0$. Com condições iniciais e frequências aleatórias, e condições de contorno periódicas.

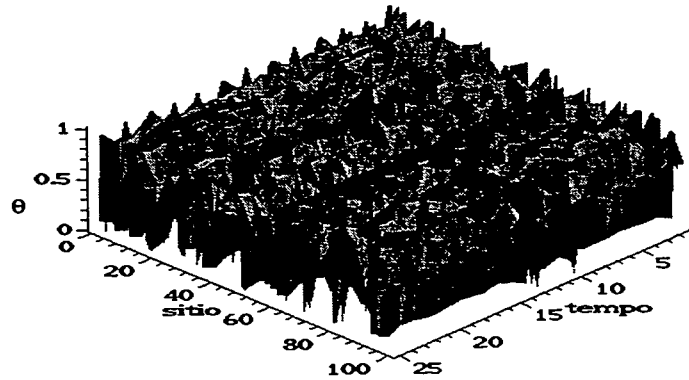


Figura 4.6: Diagrama em três dimensões mostrando a evolução temporal de uma rede de mapas. $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,5$, $N = 100$, $\alpha = 0,0$.

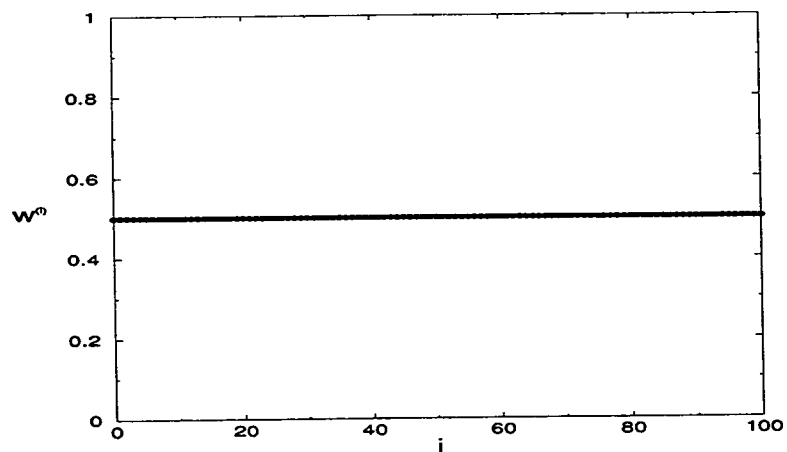


Figura 4.7: Três diferentes perfis do número de rotação para valores diferentes da semente utilizada para a geração da distribuição de frequências $\Omega^{(i)}$ e das condições iniciais $\theta_0^{(i)}$. Com $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,65$, $N = 100$, $\alpha = 0,0$. Aqui há a sobreposição dos três conjuntos de dados, obtidos a partir de sementes diferentes.

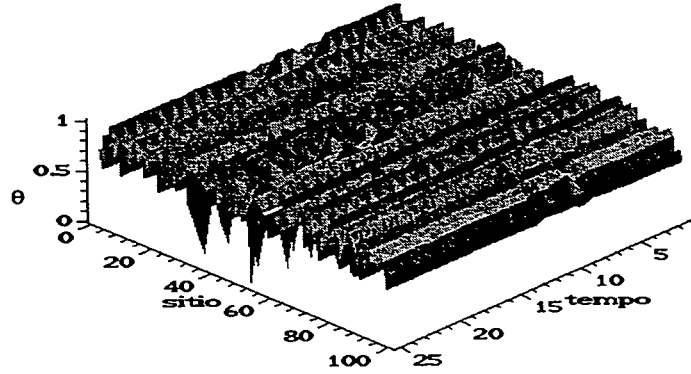


Figura 4.10: Perfil dos números de rotação para $\alpha = 100,0$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,7$, $N = 100$.

nização, que no nosso caso é o valor médio do número de rotação. A medida de dispersão que utilizaremos é o desvio quadrático médio:

$$\delta\omega = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (\omega^{(i)} - \langle \omega \rangle)^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

que nos diz essencialmente o quão distantes os valores do número de rotação estão do seu valor médio $\langle \omega \rangle = (1/N) \sum_i \omega^{(i)}$.

As redes com as quais trabalhamos, nesta seção, possuem 2001 mapas e a constante de não-linearidade $K = 0,25$. Primeiramente faremos a análise de dois casos da dispersão quando variamos α . A figura 4.11 foi obtida utilizando $\varepsilon = 0,7$. Encontramos uma região entre $\alpha = 0,0$ e $\alpha = 1,0$, onde os valores de $\delta\omega$ permanecem num valor constantes e próximos a zero ($\sim 10^6$), indicando a existência de um estado completamente sincronizado. Na região em que α assume os valores entre 1,1 e 2,0, há um crescimento bastante rápido dos valores de $\delta\omega$ em função de α ; esta região apresenta estados parcialmente sincronizados como é mostrado na figura 4.12(b) para $\alpha = 1,3$. Há um terceiro conjunto de valores de α , que se encontram acima de 2,0, onde os valores de $\delta\omega$ mostram uma pequena oscilção, apresentando uma dispersão dos valores de ω aproximadamente igual a 7% em relação ao valor médio do número de rotação, caracterizando um estado completamente não-sincronizado (figura 4.12(a)).

A figura 4.13 não exibe uma região de transição, onde existem estados parcialmente sincronizados, entre a total sincronização da rede e um estado

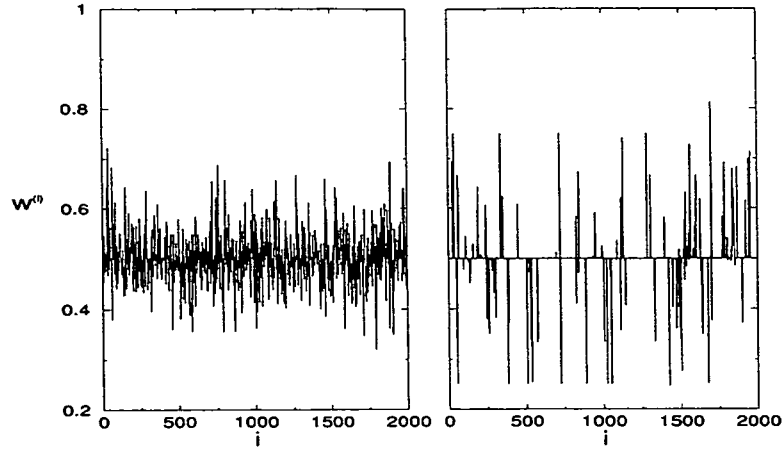


Figura 4.12: Perfis do número de rotação para dois valores diferentes do parâmetro α : (a) $N = 2000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,7$ e $\alpha = 4,0$; (b) $N = 2000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,7$ e $\alpha = 1,3$.

rede. Tal quantidade é chamada de *parâmetro de ordem* e foi utilizada originalmente por Kuramoto [Kuramoto, 1984] em cadeias de osciladores com tempo contínuo.

O parâmetro de ordem é utilizado na mecânica estatística [Kubo *et al.*, 1981], [Stanley e Guyon, 1990], [Ma, 1985] para diagnosticar o estado de ordenamento de um sistema físico e pode ser utilizado para caracterizar transições de fase nestes sistemas. O parâmetro de ordem complexo é definido para redes de mapas acoplados [Viana e Batista, 1998] como

$$z_n = R_n e^{i\phi_n} \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp[i2\pi\theta_n^{(j)}], \quad (4.4)$$

sendo $\theta_n^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) o padrão da rede num tempo n . Uma representação pictórica desta quantidade pode ser feita através de um círculo unitário, sobre o qual as fases $\theta_n^{(i)}$ são distribuídas e cada uma delas é associada a um vetor de estado \vec{y}_j de módulo $|\vec{y}_j| = |\exp[i2\pi\theta_n^{(j)}]|$, como é mostrado na figura 4.15.

Para ilustrar, consideremos duas situações extremas: no primeiro caso as fases $\theta_n^{(j)}$ estão descorrelacionadas de tal forma que podem ser consideradas como variáveis aleatórias - isto acontece, por exemplo, quando tomamos o acoplamento $\varepsilon = 0,0$. Assim, podemos tomar o parâmetro de ordem como sendo uma média espacial que se anula sobre toda a rede

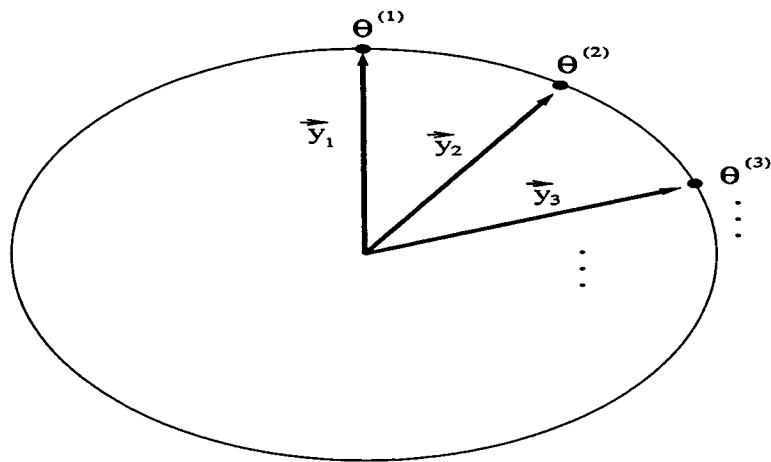


Figura 4.15: As fases $\theta_n^{(i)}$ distribuídas sobre um círculo unitário, sendo cada uma delas associadas a um vetor \vec{y}_i . O módulo da soma vetorial $\sum \vec{y}_i$ dividido por N nos dá o valor de R_n .

$$z_n = \langle \exp(i2\pi\theta_n^{(j)}) \rangle_{\text{espaço}} = \langle \cos(2\pi\theta_n^{(j)}) \rangle_j + i \langle \text{sen}(2\pi\theta_n^{(j)}) \rangle = 0. \quad (4.5)$$

Esta situação pode ser visualizada através da figura 4.4, que mostra a evolução temporal de uma rede com 101 mapas, no limite de α para o qual o acoplamento é global ($\alpha = 0, 0$) e sem interações entre os sítios ($\varepsilon = 0, 0$). Encontramos um comportamento global não ordenado, mas individualmente não existe caos pois nesta região do parâmetro de não-linearidade ($K = 0, 25$) o mapa é inversível e não pode apresentar comportamento caótico. Desta forma, os mapas não estão totalmente não-correlacionados, conforme observaremos através do espectro de potência para estes casos. A figura 4.16(a) apresenta a série temporal para a magnitude do parâmetro de ordem: encontramos uma oscilação irregular em torno de 0,1. Quando aumentamos o número de sítios na rede, observamos que o valor ao redor do qual R_n oscila irregularmente, aproxima-se de zero, como é previsto pela equação 4.4 (figura 4.17 (a)).

Para caracterizar de forma mais precisa a evolução temporal do parâmetro de ordem, utilizaremos a densidade espectral de potências (*d.e.p.*) [Bergé *et al.*, 1984], [Schuster, 1984], a qual identifica processos regulares, distinguindo-os daqueles não-regulares. Para o caso de sinais periódicos de período T , o espectro de potências apresenta um pico bem definido na frequência w correspondente a esse período e, em geral, picos menores nos harmônicos dessa frequência, isto é, $4/T, 6/T, \dots, 2n/T$.

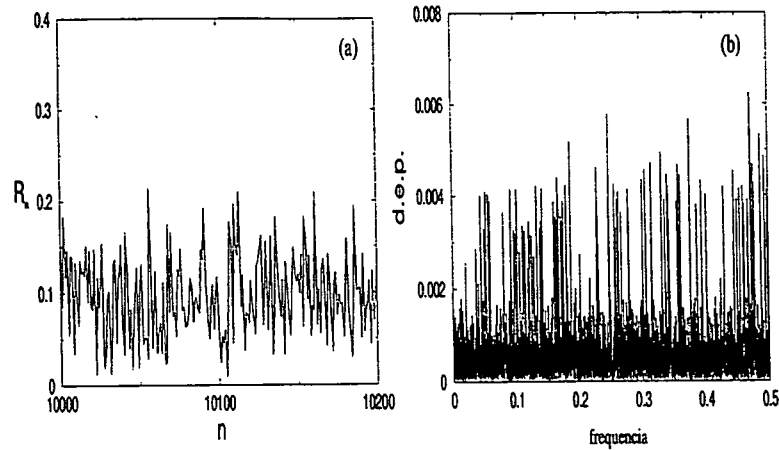


Figura 4.16: (a) Magnitude do parâmetro de ordem $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,0$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem. (d.e.p. = densidade espectral de potência, em unidades arbitrárias.)

Se o sinal não é periódico, resultado da superposição de movimentos periódicos incommensuráveis, o espectro de potência pode ser bem complicado, mas ainda assim será formado por picos bem localizados nas frequências associadas aos períodos de cada oscilação independente do movimento. No entanto, sinais aperiódicos apresentam espectros de potência contínuos. Um espectro de potências contínuo define um sinal caótico quando exibem aumento da *d.e.p.* se a frequência tende a zero (ruído $1/f$).

No segundo caso, todos os sítios têm o mesmo valor $\theta_n^{(j)}$ em cada instante de tempo, levando a um estado totalmente sincronizado. Assim, observamos que $R_n = 1$ para qualquer tempo n . Entretanto, não é necessário que todas as fases sejam iguais para que haja a sincronização de frequências. Deste modo, esperamos que para estados sincronizados o módulo do parâmetro de ordem R_n seja uma constante próxima de 1 (para redes infinitas) ou apresente um valor que flutue ao redor de um valor fixo (para redes finitas). A figura 4.18 mostra, para uma rede de 101 mapas, um estado no qual há sincronização de frequências, mas as fases mostram uma pequena oscilação temporal regular, que é mostrada pela série temporal do parâmetro de ordem na figura 4.19 (a). A figura 4.20 (a) mostra a mesma situação para uma rede com $N = 2000$, onde notamos o mesmo tipo de flutuação próximo a $R_n = 1$. Existem ainda os casos em que as fases não são iguais em todos os instantes de tempo (figura 4.21), mas ocorre a sincronização de frequências. Neste caso observamos um valor alto para R_n , mas não há uma oscilação periódica em torno do mesmo. Isto é

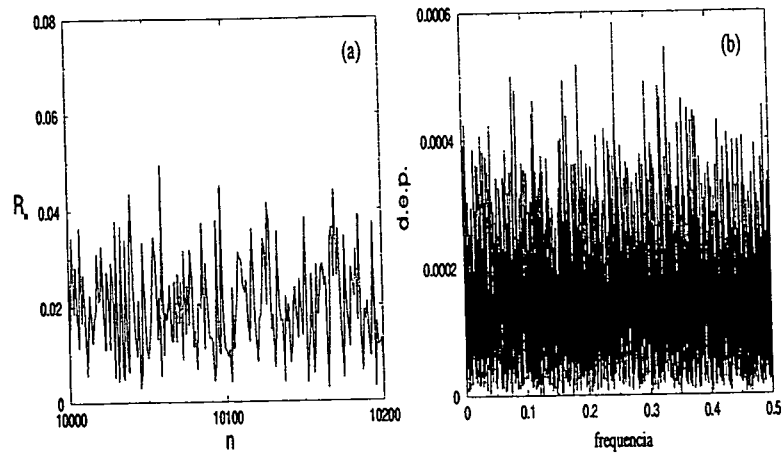


Figura 4.18: Evolução temporal de uma rede de mapas do seno-círculo: $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,9$. Com 5000 iterações após desprezar 4975 iterações transientes.

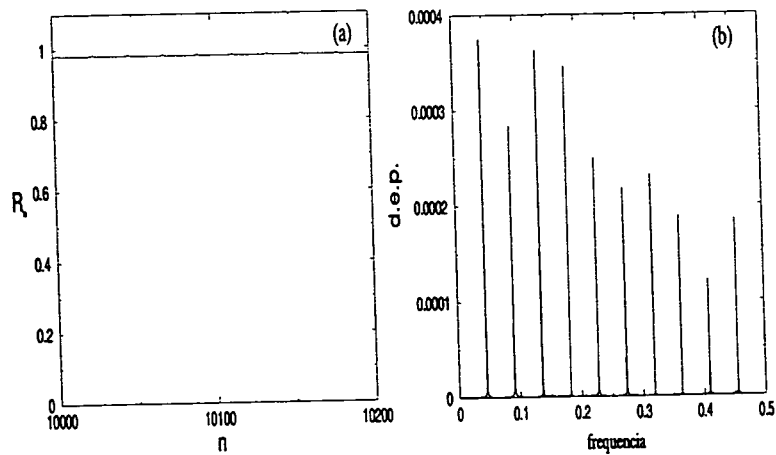


Figura 4.19: (a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,9$. (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.

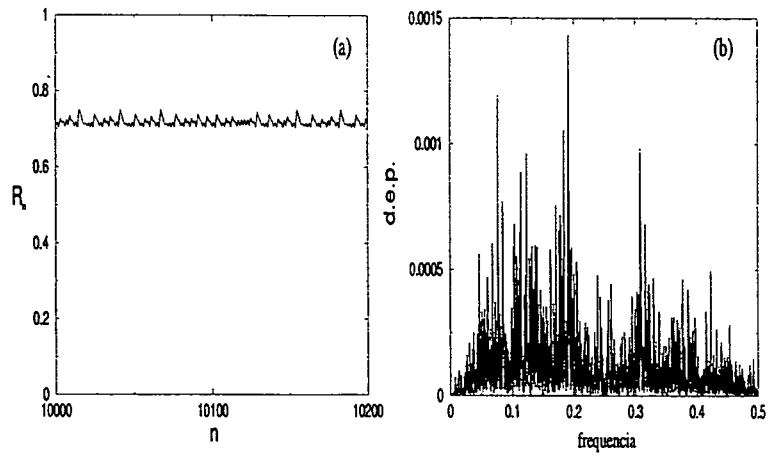


Figura 4.22: (a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0,7$.
 (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.

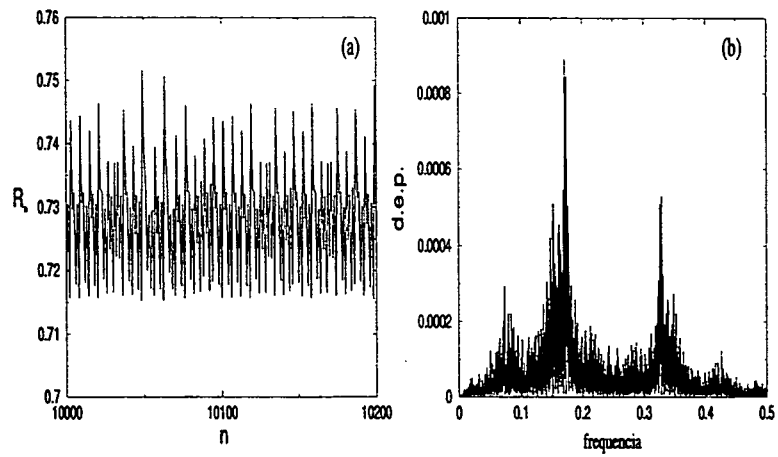


Figura 4.23: (a) Parâmetro de ordem para $K = 0,25$, $\alpha = 0,0$, $N = 2000$ e $\varepsilon = 0,7$.
 (b) Espectro de potências referente ao parâmetro de ordem.

Capítulo 5

Estrutura dos Platôs de Sincronização

5.1 Grau de Sincronização

Um estado totalmente sincronizado é caracterizado por um perfil do número de rotação que apresenta apenas um platô de sincronização contendo todos os elementos da rede. À medida que aumentamos α ou diminuimos ε , esta estrutura começa a se desfazer, aumentando o número de platôs. Isto acontece ou porque alguns sítios adjacentes sincronizaram em outros valores de w , ou porque alguns sítios isolados "descarraram-se" do platô principal, ou ainda porque ambos os processos ocorreram ao mesmo tempo. A figura 5.1 mostra como o número de platôs é modificada quando aumentamos o valor de α à partir de zero. Trabalharemos com redes contendo 3.000 sítios.

Juntamente com as medidas de dispersão, estes diagramas acusam a existência de uma região para certos valores de α onde não é registrada a ocorrência de um estado completamente sincronizado, mas, pelo contrário, uma situação que apresenta uma dispersão grande em torno do valor médio de w e um número muito grande de platôs, ou poucos platôs, ou nenhum platô. A transição de um estado totalmente sincronizado para um estado não-sincronizado, ocorre em duas etapas, quando variamos α acima do valor específico: (a) num primeiro momento o número de platôs n aumenta de 1 para valores entre 2 e 10; (b) posteriormente há um aumento brusco do número de platôs, indicando um regime de sincronização parcial.

Para uma melhor caracterização desta transição, utilizaremos o *grau de sincronização* p [Rogers e Wille, 1996], que nos dá uma medida da sincronização

isolados. Este tipo de transição já foi observada em redes de osciladores com tempo contínuo [Rogers e Wille, 1996] e em redes de mapas que representam osciladores forçados [Viana e Batista, 1998]. Apresentamos também o desvio quadrático médio δw contra o parâmetro de alcance α para a mesma rede na figura 5.3 e notamos a transição ocorrendo no mesmo ponto ($\sim 1,08$). Assumimos como ponto crítico (α_c) o primeiro ponto que apresenta o valor de p diferente de 1.

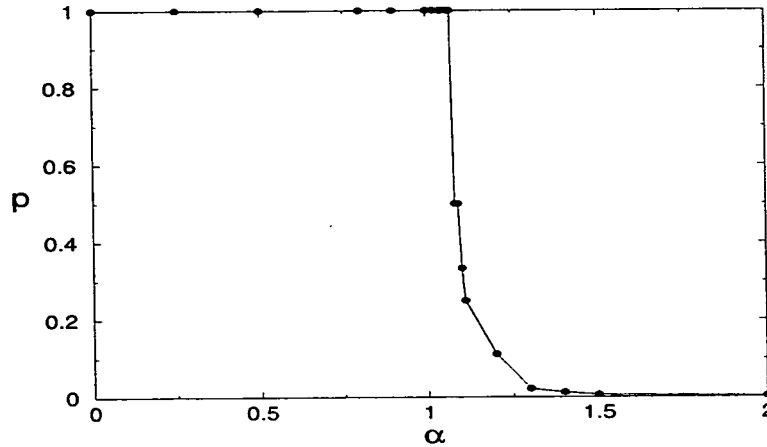


Figura 5.2: Grau de sincronização p como função do parâmetro α : $N = 3000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,9$. $\alpha_c \approx 1,08$. Esta figura foi obtida através de três distribuições de frequências e condições iniciais diferentes, obtendo-se sempre o mesmo resultado.

Uma outra transição ocorre quando variamos p em função de ε , como é visto na figura 5.4. Nesta transição observamos que o valor de p vai de 0,0 até 1,0, quando tomamos um valor de ε ligeiramente acima de $\approx 0,59$. Portanto, não observamos um regime de sincronização parcial. Neste caso nós mantivemos o acoplamento global ($\alpha = 0,0$).

O caso para $N = 2000$ também foi analisado do ponto de vista de p como função de ε para $\alpha = 0,0$ (acoplamento global) e de p como função de α com $\varepsilon = 0,9$. Estas duas situações são mostradas nas figuras 5.5 e 5.6 respectivamente. Na figura 5.5 observamos uma situação idêntica à apresentada na figura 5.4, onde há uma transição abrupta de um estado totalmente dessincronizado para um estado totalmente sincronizado, sem que haja um estado intermediário de sincronização parcial. Observamos que o ponto de transição (ε_c) não é o mesmo, apesar de estarem próximos a 0,6 nas duas situações. O valor crítico da intensidade do acoplamento ε_c é considerado como o primeiro valor de p que é igual a 1.

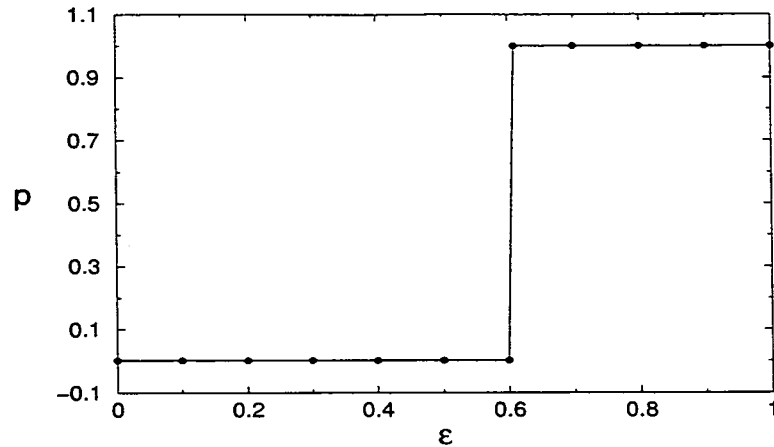


Figura 5.5: Grau de sincronização p como função do parâmetro ε : $N = 2000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,9$ e $\alpha = 0,0$.

Na figura 5.6 notamos que a transição de um estado totalmente sincronizado para um estado dessincronizado, qualitativamente, ocorre da mesma forma que para o caso onde $N = 3000$ (figura 5.2). Mas, quantitativamente obtemos um valor de α , para o qual ocorre a transição (α_c), diferente ($\alpha = 1,02$) e o valor de p referente a este valor de α também é diferente ($p \approx 0,25$). Encontramos também um valor diferente para α_c ($\alpha_c \approx 0,98$) quando mudamos o valor de ε , conforme a figura 5.7.

5.2 Grau de Sincronização Modificado

O diagnóstico que apresentaremos agora é uma versão modificada do grau de sincronização p , que considera, para efeito de cálculo, todos os sítios que apresentam valores de $\omega^{(i)}$ iguais como pertencentes a um mesmo platô, mesmo que estejam distantes ente si na rede. Portanto, o *grau de sincronização modificado*, que chamamos q , mede o estado de sincronização independentemente do fato de haver ou não platôs de sincronização.

A figura 5.8 mostra uma situação hipotética na qual não existem platôs de sincronização, ou seja, temos um estado totalmente dessincronizado do ponto de vista da quantidade p , que, neste caso, tem valor 0,0. No entanto, do ponto de vista do grau de sincronização modificado q , temos uma situação de sincronização parcial, pois metade da rede apresenta um valor para $\omega^{(i)}$ (0,25) e os outros sítios

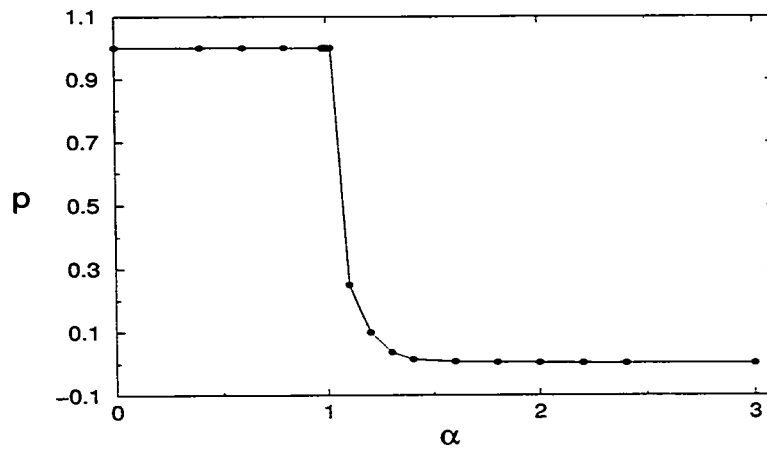


Figura 5.6: Grau de sincronização p como função do parâmetro α : $N = 2000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,9$. $\alpha_c \approx 1,02$. Esta figura foi obtida através de três distribuições de frequências e condições iniciais diferentes, obtendo-se sempre o mesmo resultado.

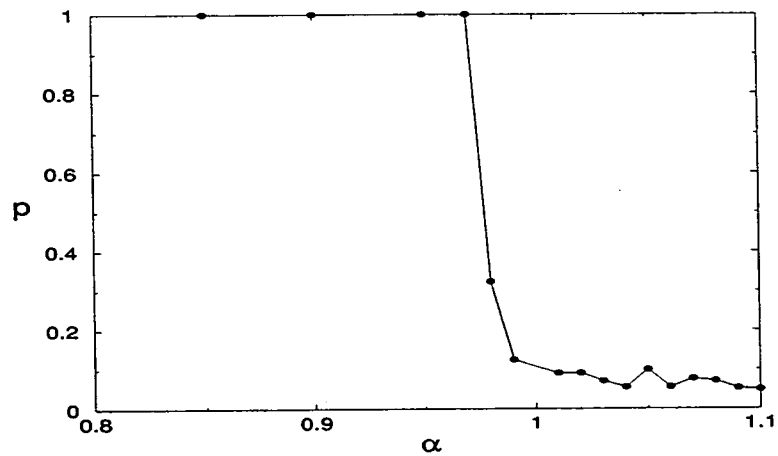


Figura 5.7: Grau de sincronização p como função do parâmetro α : $N = 3000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,8$. $\alpha_c \approx 0,99$. Esta figura foi obtida através de três distribuições de frequências e condições iniciais diferentes, obtendo-se sempre o mesmo resultado.

têm um outro valor de $\omega^{(i)}$ que é o mesmo para todos os sítios (0,75). Para este último caso temos $q = 0,5$.

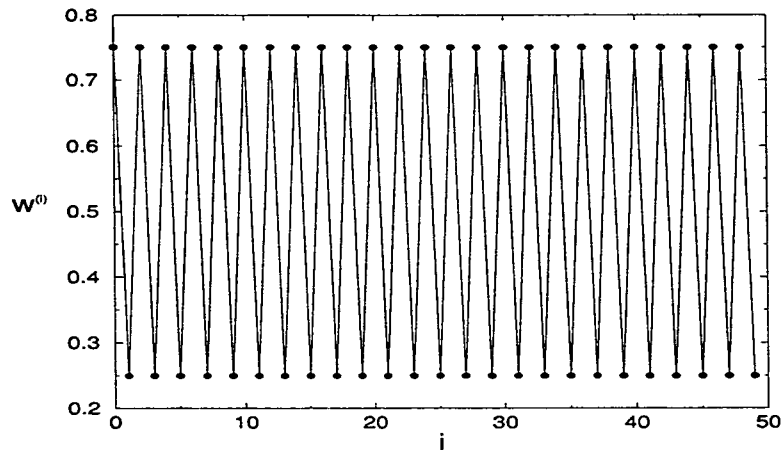


Figura 5.8: Situação hipotética do perfil do número de rotação. Não existem platôs de sincronização, mas existem somente dois valores de $\omega^{(i)}$ apresentados pela rede.

A figura 5.9 apresenta um diagrama do grau de sincronização modificado q como função do parâmetro espacial α , para o mesmo caso representado pela figura 5.2. Vemos uma situação parecida: primeiramente temos uma região de sincronização total de valores entre $q = 0,0$ e $q \approx 1,14$. Em seguida observamos uma região de sincronização parcial dos valores de $\omega^{(i)}$ com valores de q variando de $\alpha \approx 1,16$ até $\alpha \approx 1,35$. Para valores suficientemente grandes de α , temos um regime dessincronizado que apresenta um perfil em que a maioria dos sítios não têm o mesmo valor de $\omega^{(i)}$.

5.3 Distribuição dos Comprimentos de Platôs

Até agora nos preocupamos em caracterizar estados sincronizados através de quantidades que fornecem um diagnóstico do comportamento de nosso sistema, quando variamos determinados parâmetros. E, utilizando este procedimento, observamos três regimes diferentes: (a) completamente sincronizado; (b) parcialmente sincronizado; (c) completamente dessincronizado. Entretanto, não exploramos detalhadamente a distribuição dos platôs na rede como função de seus comprimentos.

O acoplamento local ($\alpha \rightarrow \infty$) favorece a sincronização total para um determinado conjunto de valores da constante de acoplamento ε (figura 5.4). À

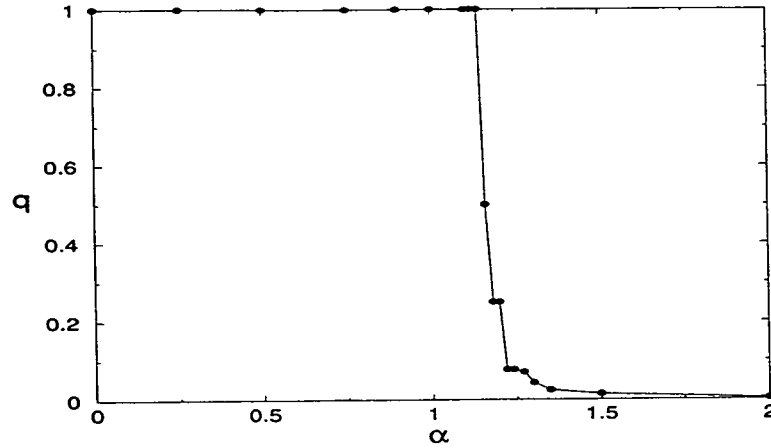


Figura 5.9: Grau de sincronização modificado q como função do parâmetro de alcance α . Com $N = 3000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,9$. $\alpha_c \approx 1,16$. Esta figura foi obtida através de três distribuições de frequências e condições iniciais diferentes, obtendo-se sempre o mesmo resultado.

medida que tomamos valores suficientemente pequenos de ε , surgem vários platôs de tamanhos diferentes. O mesmo ocorre quando aumentamos α a partir de um determinado valor. Estatisticamente esta distribuição de platôs apresenta um perfil melhor quando temos um grande número de sítios N . Porém, redes muito grandes, utilizando o acoplamento de alcance variável, demandam um tempo computacional muito grande, pois o número de operações aritméticas necessárias é proporcional a N^2 (todos os sítios acoplam com todos os sítios). Como podemos ver na figura 5.10 (a). Por este motivo, utilizaremos a forma do acoplamento local (2.4)

$$\theta_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(\theta_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(\theta_n^{(i-1)}) + f(\theta_n^{(i+1)})],$$

que utiliza um tempo computacional proporcional a N (figura 5.10 (b)), reduzindo bastante o tempo de processamento. As redes com as quais trabalhamos têm até 800.000 sítios.

A figura 5.11 mostra o histograma de frequências para o número de platôs n contra seus respectivos comprimentos N_i , para $\varepsilon = 0,4$. Mostramos em um mesmo gráfico, semi-log, os histogramas de frequências para vários valores de ε na figura 5.12.

Estas distribuições são ajustadas por retas que indicam uma dependência exponencial do tipo

$$n(N_i, \varepsilon) = ke^{-m(\varepsilon)N_i}, \quad (5.2)$$

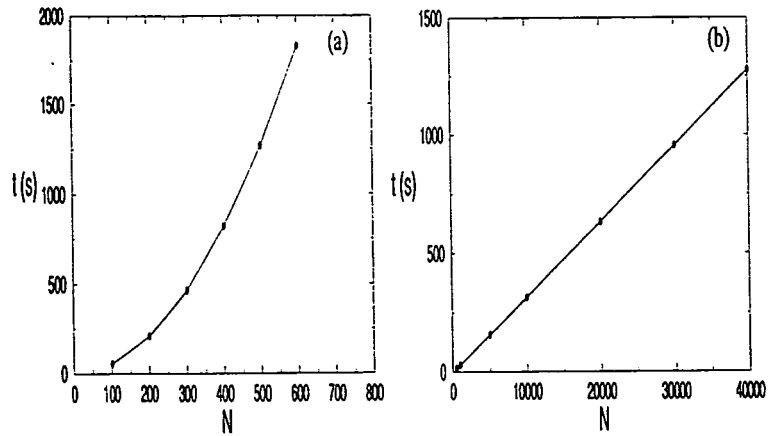


Figura 5.10: Tempo de computação para o cálculo do número de rotação: (a) utilizando o acoplamento com alcance variável α ; (b) utilizando o acoplamento local.

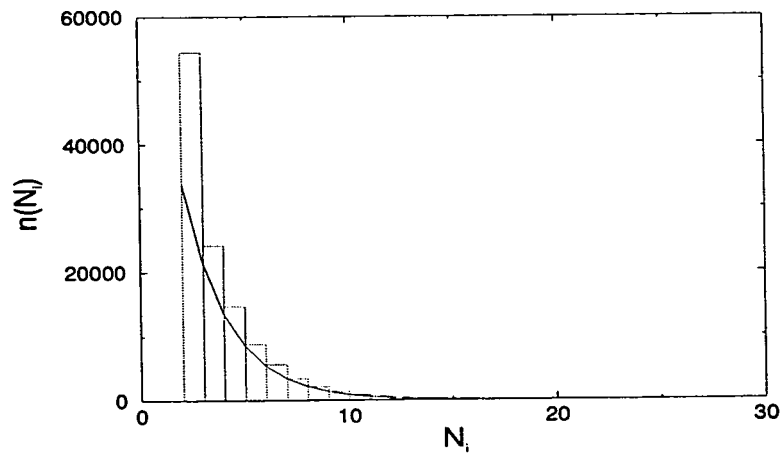


Figura 5.11: Histograma de freqüências para os comprimentos dos platôs, com $\varepsilon = 0,4$ e $m = 0,461 \pm 0,094$.

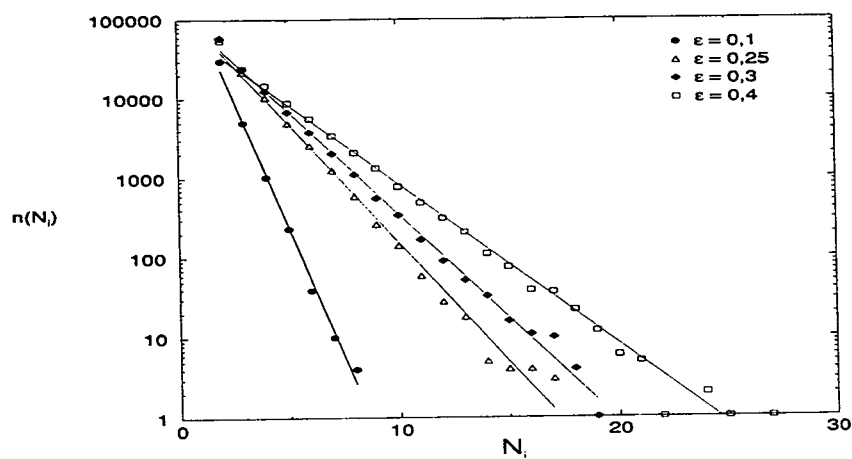


Figura 5.12: Histogramas de freqüências: (a) $\epsilon = 0,10$ e $m = 1,514 \pm 0,053$; (b) $\epsilon = 0,25$ e $m = 0,690 \pm 0,020$; (c) $\epsilon = 0,30$ e $m = 0,597 \pm 0,002$ e (d) $\epsilon = 0,40$ e $m = 0,461 \pm 0,094$.

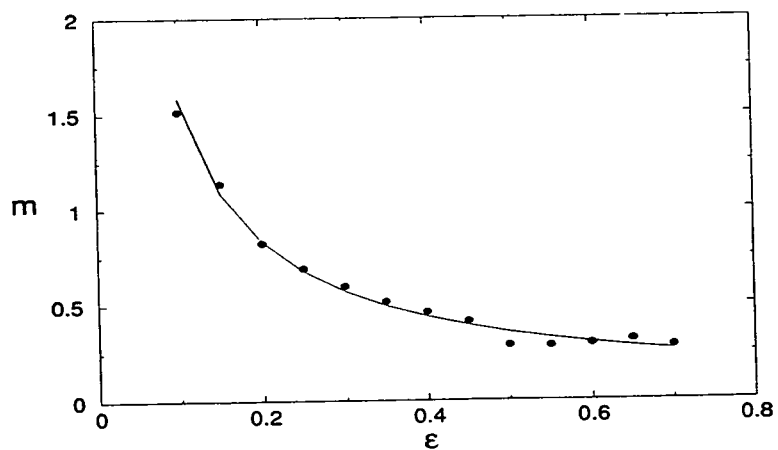


Figura 5.13: Variação das inclinações dos histogramas de freqüência com a intensidade do acoplamento no caso local ($\alpha \rightarrow \infty$).

5.4 Discussão

A análise que fizemos da sincronização das redes de mapas do seno-círculo acoplados nos mostrou alguns aspectos de tal fenômeno, que podem ser classificados em dois grupos: (a) a transição de um estado totalmente sincronizado para um estado parcialmente sincronizado ou totalmente dessincronizado; (b) a distribuição exponencial de platôs de sincronização na rede.

Primeiramente analisaremos os resultados encontrados no estudo da transição entre dois estados. Para tal investigação utilizaremos quatro quantidades, que nos mostram o comportamento coletivo da rede: o desvio quadrático médio δw ; o parâmetro de ordem complexo e seu respectivo espectro de potência; o grau de sincronização p ; o grau de sincronização modificado q .

O desvio quadrático médio δw nos fornece a dispersão dos valores do número de rotação $\omega^{(i)}$ em torno do valor médio $\langle \omega^{(i)} \rangle$. Observamos que o valor de δw permanece próximo a zero ($\sim 10^{-6}$) para os estados totalmente sincronizados e apresentam um valor aproximado $\delta w \sim 0,06$ quando o estado é totalmente dessincronizado em todos os casos estudados.

O primeiro caso que estudamos foi uma rede com $N = 2000$, $K = 0,25$, $\varepsilon = 0,7$ e variamos α desde 0,0 até 4,0. Observamos que entre o estado totalmente sincronizado e o totalmente dessincronizado, existe um conjunto de valores de α para os quais δw apresenta valores intermediários entre $\sim 0,0$ e $\sim 0,06$. Isto não acontece para o segundo caso estudado, que mantém os valores dos parâmetros utilizados anteriormente com exceção do valor do acoplamento ε , que passou a ser 0,9. Neste caso há uma transição abrupta de $\delta w \approx 0,0$ para $\delta w \approx 0,06$. Quando aumentamos o tamanho da rede para o mesmo conjunto anterior de parâmetros, notamos que valores intermediários voltam a aparecer.

Estes valores intermediários podem estar relacionados a um estado de sincronização parcial da rede. Dizemos "podem" pois a rede pode apresentar um perfil de vários platôs com diferentes valores de $\omega^{(i)}$ ou um perfil sem platôs de sincronização mas onde todos os sítios têm valores diferentes $\omega^{(i)}$ que não apresentam um grau de dispersão muito elevado em relação a $\langle \omega^{(i)} \rangle$.

A discussão acima nos indica que o cálculo do grau de dispersão da rede não é suficientemente confiável em certas situações. Para obtermos um diagnóstico mais robusto utilizamos juntamente com o cálculo de δw a magnitude R_n do parâmetro de ordem. O parâmetro de ordem nos dá a indicação da sincronização de fases da rede, fornecendo valores de R_n passa a oscilar de maneira irregular em

torno de valores mais baixos, há uma indicação de que a rede está descorrelacionada, ou seja, não há mais a sincronização de fases. Mas devemos atentar para o fato de que pode haver sincronização de frequências sem que haja a sincronização de fases, como acontece no caso representado pelas figuras 4.22 e 4.23.

Na tentativa de surpreender as falhas que as grandezas anteriores apresentam, em determinadas situações, nós passamos a analisar a sincronização nas redes do ponto de vista dos platôs de sincronização, através do grau de sincronização p . Esta análise foi feita de duas formas: (a) primeiramente mantivemos o parâmetro de alcance α igual a zero, caracterizando um acoplamento global, e aumentamos o valor do acoplamento ε a partir de 0,0 (p como função de ε); (b) posteriormente variamos α e mantivemos ε fixo (p como função de α).

Para o caso em que $N = 3000$, $K = 0,25$ e $\varepsilon = 0,9$, o diagrama de p como função de ε (figura 5.4) apresenta uma transição abrupta de um estado totalmente dessincronizado ($p \approx 10^{-6}$) para caso totalmente sincronizado ($p = 10$), quando aumentamos ε . O valor de ε para o qual ocorre a transição (ε_c) é $\sim 0,61$. O estado totalmente sincronizado é caracterizado por apenas um platô de sincronização, enquanto o estado totalmente dessincronizado pode apresentar um perfil com muitos platôs pequenos ou nenhum platô. Devemos salientar que não ocorrem estados parcialmente sincronizados neste tipo de transição, ou seja, estados onde há poucos platôs mas com comprimentos grandes. Para $N = 2000$, $K = 0,25$ e $\varepsilon = 0,9$ (figura 5.5), observamos a transição descrita acima novamente, mas mesmo com uma variação não muito grande no tamanho da rede, encontramos um valor diferente, $\varepsilon \approx 0,6$.

A análise de p como função de α , também mostra a existência de uma transição, quando o parâmetro de alcance excede um determinado valor crítico α_c . Esta transição apresenta uma característica diferente da transição descrita no parágrafo anterior. Primeiramente, ocorre uma transição de um estado totalmente sincronizado para um estado parcialmente sincronizado, onde existem poucos platôs grandes. Gradativamente, à medida que aumentamos α , estes platôs são destruídos, dando lugar a uma configuração que representa um estado totalmente dessincronizado. Para $N = 3000$, $K = 0,25$ e $\varepsilon = 0,9$ (figura 5.2) encontramos $\alpha_c \approx 1,08$. Novamente registramos a mudança de α_c quando alteramos o tamanho da rede, pois numa rede com $N = 2000$ e mantendo os mesmos parâmetros de caso anterior, temos $\alpha_c \approx 1,02$ (5.6). Observamos também a mudança de α_c quando mudamos a constante de acoplamento ε , conforme é visto na figura 5.7.

Devemos ressaltar que o grau de sincronização p não é estatisticamente robusto, pois é instável e pode levar a resultados ambíguos sob certas condições. Por exemplo, se a rede apresenta um perfil em que metade dos sítios da rede está sincronizada em um mesmo platô e a outra metade apresenta um valor diferente de $\omega^{(i)}$ para cada sítio, o valor de p será igual a 0,5. O mesmo valor para p é obtido se a rede apresenta apenas dois sítios, não adjacentes, que estão fora do platô. Por esta razão, utilizaremos p juntamente com a medida da dispersão, obtida através do desvio quadrático médio $\delta\omega$, e observamos a concordância entre os pontos de transição para os dois diagnósticos; confirmando, deste modo, a existência de uma transição entre os estados de sincronização.

Com o objetivo de estudar o comportamento dos valores $\omega^{(i)}$ durante a transição entre os estados observada anteriormente, introduzimos o grau de sincronização modificado q , que não leva em conta os platôs de sincronização. Observamos na figura 5.9 a existência de uma transição, onde primeiro encontramos valores de q referentes a sincronização parcial de valores e posteriormente uma região de dessincronização total. Vemos que o diagnóstico fornecido por essa figura, apresenta uma concordância, na região de sincronização parcial de valores, com o diagrama de dispersão para o mesmo caso (figura 5.3). O α_c difere do valor encontrado quando utilizamos a medida p - para q encontramos $\alpha_c \approx 1,16$. Na região dos valores de α , entre os valores críticos para p e q , encontramos $q \approx 0,99$, indicando que existem sítios que estão em valores diferentes da maioria dos sítios. Este último resultado vem a confirmar a validade da medida obtida por p , pois mostra que os sítios com valores diferentes, citados anteriormente, estão distribuídos de tal forma na rede, fazendo com que p assumam valores baixos.

O acoplamento entre os elementos da rede ocorre mediante uma perturbação que é feita quando atribuímos valores a constante de acoplamento ε , causando, deste modo, um efeito difusivo na rede. Quando $\varepsilon = 0,0$ temos uma desordem na rede que é inerente à distribuição aleatória das frequências $\Omega^{(i)}$ para cada mapa. Quando aumentamos o valor da constante de acoplamento, surge a competição entre os dois processos citados anteriormente. Quando o acoplamento sobrepuja a desordem nas frequências, a sincronização pode ocorrer. Para valores baixos de α , nós temos um comportamento condizente com o acoplamento global, no qual cada sítio está acoplado com muitos outros sítios. Neste caso, o efeito de acoplamento, para certos valores, é suficientemente forte para vencer o efeito da desordem, fazendo com que sítios distantes ajustem suas frequências perturbadas $\omega^{(i)}$, dando lugar

à sincronização. Por outro lado, um acoplamento local (α grande) conecta apenas os vizinhos mais próximos, sendo este efeito muito fraco para produzir a sincronização entre sítios distantes. É interessante ressaltar que encontramos uma transição abrupta entre os estados de sincronização.

Nas seções precedentes, nós arbitramos que uma rede está totalmente sincronizada quando apresentasse $p = 1,0$ e estaria totalmente dessincronizada quando $p \approx 0,0$. No entanto, para este último caso, que aparentemente está desorganizado, encontramos uma regra para a distribuição de platôs, denotada pela equação 5.2. Esta lei foi encontrada para um acoplamento local ($\alpha \rightarrow \infty$) e para valores baixos do acoplamento. Quando aumentamos o valor de ε , a partir de um certo valor, não obtemos tal distribuição.

O primeiro resultado que observamos, diz respeito à distribuição de comprimentos de platôs que foi colocada na forma de histogramas de frequências, mostrados nas figuras 5.11 e 5.12. A última figura mostra vários histogramas para diferentes valores de ε . Para um valor baixo do acoplamento ($\varepsilon = 0,1$), não encontramos platôs grandes. Como os platôs maiores são mais raros, eles contribuem para uma estatística pobre, o que pode ser visto nas figuras citadas acima. No entanto, na região onde os platôs são pequenos, obtemos um ajuste linear melhor.

O parâmetro característico da distribuição de comprimentos de platôs é a inclinação m dos histogramas. Encontramos que m é uma função de ε do tipo lei de potência (equação 5.3), conforme vemos na figura 5.3. Encontramos tal comportamento no intervalo entre $\varepsilon = 0,1$ e $0,7$. Para $\varepsilon < 0,1$ isto não ocorre devido à destruição dos platôs e para $\varepsilon > 0,7$, o surgimento de um número maior de platôs grandes contribui para uma estatística ruim, não permitindo o ajuste adequado das curvas correspondentes.

Trabalhamos com redes contendo 80.000 mapas em todos os cálculos. Esta escolha foi baseada nos resultados apresentados pela figura 5.14 que mostra a variação da inclinação m em relação ao tamanho da rede, para dois valores de ε . Como os valores não mudam apreciavelmente entre ~ 200.000 e 800.000 , nós esperamos que nossos resultados sejam de maneira geral válidos no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$).

Os resultados apresentados neste capítulo foram aceitos para publicação [Pinto e Viana, 2000].

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos alguns aspectos da formação de platôs de sincronização em redes de mapas do seno-círculo acoplados. O mapa com o qual trabalhamos depende, basicamente, de dois parâmetros: a frequência intrínseca do mapa e o parâmetro de não-linearidade. As frequências foram distribuídas, para cada mapa na rede, aleatoriamente e de modo uniforme, dentro de um intervalo especificado, e o parâmetro de não-linearidade foi escolhido de tal forma que o mapa fosse sempre reversível. A forma de acoplamento que utilizamos é caracterizada por um parâmetro de intensidade da interação entre os mapas e por um parâmetro de alcance espacial, que faz com que a intensidade do acoplamento decaia ao longo da rede, de acordo com uma lei de potência.

Os platôs de sincronização são encontrados, sob certas condições, quando observamos o perfil do número de rotação da rede, sendo o número de rotação a frequência perturbada do mapa. Para estudar, de forma mais detalhada, tais perfis, utilizamos a dispersão dos números de rotação em torno de seu valor médio, o parâmetro de ordem complexo, o grau de sincronização, que fornece uma medida relativa do tamanho médio dos platôs e o grau de sincronização modificado, que não leva em conta a correlação espacial dos mapas, para caracterizar estados totalmente sincronizados e estados não-sincronizados. Observamos a transição, no regime de acoplamento global, entre um estado completamente dessincronizado e um estado totalmente sincronizado, quando aumentamos a intensidade do acoplamento. Também encontramos uma transição entre um estado completamente sincronizado e um estado totalmente dessincronizado, à medida que variamos o parâmetro de alcance de um regime global para um regime local.

Tais transições são resultados da competição entre a desordem "con-

gelada” da rede, devida à distribuição aleatória das frequências, e o efeito da difusão que é causado pela intensidade do acoplamento. Quando a intensidade do acoplamento é suficientemente forte para anular a desordem da rede, podemos observar a sincronização. No entanto, se a intensidade do acoplamento é baixa ou se o parâmetro de alcance do acoplamento é muito alto (acoplamento local), não observamos a sincronização da rede, pois prevalece a desordem original das frequências dos mapas.

Estudamos a distribuição de platôs de sincronização como função de seus tamanhos e encontramos que tal distribuição obedece a um decaimento exponencial, isto é, à medida que o comprimento de platôs aumenta, o número de platôs diminui. Tal característica foi observada para o acoplamento local, dentro de um determinado intervalo dos valores da intensidade do acoplamento. Dentro deste intervalo, o parâmetro característico da distribuição exponencial, denotado pela inclinação da curva, apresenta um decréscimo segundo uma lei de potência. Alguns resultados obtidos mostraram que as redes que estudamos, eram suficientemente grandes para reproduzir o comportamento no limite termodinâmico (infinitos platôs).

Durante o desenvolvimento deste trabalho, observamos que os melhores resultados foram encontrados à medida que aumentávamos o tamanho das redes. Por exemplo, para redes pequenas transições entre os estados de sincronização apresentavam regiões de oscilação, as quais podiam ocorrer, ou não, dependendo da escolha da semente utilizada para gerar a distribuição de frequências e condições iniciais. A partir do momento que aumentamos o tamanho da rede (2000 e 3000 mapas), estas oscilações desapareceram e não encontramos mais a dependência dos valores das sementes. Não foi possível analisar tais transições para o limite termodinâmico, pois o acoplamento com alcance espacial variável realiza operações algébricas que envolvem todos os elementos da rede (N^2). Este fato também nos impediu de estudar a distribuição de platôs numa rede sob um regime de acoplamento variável, mas estudos preliminares (que não estão neste trabalho) esboçaram a existência de uma certa lei de distribuição. Porém, o acoplamento local dispense um tempo de computação muito menor, que é proporcional a N , agilizando enormemente o trabalho numérico. Esperamos contornar este problema computacional através da otimização dos nossos algoritmos, ou através do uso de computadores mais eficientes.

Como trabalhos futuros, pretendemos estudar a sincronização das redes de mapas do seno-círculo quando distribuirmos as frequências intrínsecas dos elementos da rede, de tal modo que a cada iteração, o valor da frequência de um mesmo sítio seja modificado dentro de um subintervalo especificado. Outra coisa a

ser feita é desenvolver um método mais adequado para a caracterização dos pontos críticos α_c (parâmetro de alcance crítico) e ε_c (intensidade do acoplamento crítica), bem como as suas dependências com ε e α , respectivamente e com o tamanho da rede N . Uma sugestão de trabalho futuro é feita no parágrafo precedente: pesquisar a distribuição de platôs de sincronização para o parâmetro de alcance variável.

Apêndice A

Derivação do Acoplamento Local

A EDP que mencionamos na seção 2.2 é uma equação homogênea periodicamente forçada e unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(t)R(u), \quad (\text{A.1})$$

sendo $u(x, t)$ a variável de estado, d o coeficiente de difusão, $R(u)$ o termo de reação e não-linearidade e $G(t)$ é uma função do tempo. Escolhemos uma perturbação impulsiva com período τ

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau). \quad (\text{A.2})$$

O primeiro passo agora é integrar a equação (A.1) sobre o intervalo de tempo $t \in [n\tau - \epsilon, n\tau + \epsilon]$ (figura A.1). A variável de estado $u(x, t)$ é contínua através de uma função delta de Dirac, mas sua derivada temporal é descontínua. Para calcular o salto na derivada temporal, fazemos a consideração de que a derivada espacial de u , de qualquer ordem, é contínua através da função delta, então

$$\int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} dt = D \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt + \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} G(t)R(u) dt \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} u[t = n\tau + \epsilon] - u[t = n\tau - \epsilon] &\cong D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{t=n\tau - \epsilon} \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} dt + \\ &+ R[u(t = n\tau - \epsilon)] \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} \sum_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} \delta(t - k\tau) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Podemos transformar a equação acima numa igualdade quando fazemos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Assim, temos

Sobre o próximo intervalo de tempo $t \in [n\tau + \epsilon, (n+1)\tau - \epsilon]$, o termo $R(u)G(t)$ desaparece devido à função delta e somente o termo de difusão atua. Neste caso devemos integrar a equação neste intervalo de tempo, obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{A.11})$$

A derivada temporal em (A.11) dentro do segundo intervalo é

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x,t=n\tau)} = \frac{u[x, t = (n+1)\tau - \epsilon] - u[x, t = n\tau + \epsilon]}{\Delta t}, \quad (\text{A.12})$$

sendo $\Delta t = (n+1)\tau - \epsilon - (n\tau + \epsilon) = n\tau + \tau - \epsilon - n\tau - \epsilon = \tau - 2\epsilon$. Então, fazendo o limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x=i\omega, t)} \doteq \frac{u_{n+1}(x) - u_n^*(x)}{\tau} \quad (\text{A.13})$$

O próximo passo é discretizar o espaço introduzindo uma rede $x \equiv i\omega$, sendo ω o intervalo entre os sítios i e $i+1$. A derivada parcial é deste modo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x=i\omega, t)} \doteq \frac{u[x = (i+1)\omega, t] - u[x = i\omega, t]}{\omega} - \frac{u[x = i\omega, t] - u[x = (i-1)\omega, t]}{\omega} \quad (\text{A.14})$$

e a derivada segunda é uma combinação simétrica das derivadas primeiras

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \doteq \frac{(\partial u / \partial x)[x = (i+1)\omega, t] - (\partial u / \partial x)[x = i\omega, t]}{\omega} \\ &= \left[\frac{u[x = (i+1)\omega, t] - u[x = i\omega, t]}{\omega^2} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{u[x = i\omega, t] - u[x = (i-1)\omega, t]}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{u[x = (i+1)\omega, t] - 2u[x = i\omega, t] + u[x = (i-1)\omega, t]}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Agora calculamos a derivada temporal em $x = i\omega$ e em $t = n\tau$ e definimos

$$u_t^{(i)} \equiv u[x = i\omega, t], \quad (\text{A.16})$$

tal que (A.13) nos dá

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x=i\omega, t=n\tau)} &= \frac{u_{n+1}[x = i\omega] - u_n^*[x = i\omega]}{\tau} \\ &= \frac{u_{n+1}^{(i)} - u_n^{*(i)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Da mesma forma, calculamos a derivada espacial (A.15) em $t = n\tau + \epsilon$ e $x = i\omega$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= \frac{u[x = (i+1)\omega, t = n\tau + \epsilon] - 2u^{(i)}[x = i\omega, t = n\tau + \epsilon]}{\omega} + \\ &+ \frac{u[x = (i-1)\omega, t = n\tau + \epsilon]}{\omega^2} \\ &= \frac{u^{(i+1)}[(t = n\tau + \epsilon)] - 2u^{(i)}[t = n\tau + \epsilon] + u^{(i-1)}[t = n\tau + \epsilon]}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Tomando o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ e usando (A.7)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x=i\omega, t=n\tau)} = \frac{u_n^{*(i+1)} - 2u_n^{*i} + u_n^{*(i-1)}}{\omega^2}. \quad (\text{A.19})$$

Combinando (A.17) e (A.19) em (A.11), obtemos

$$\frac{u_{n+1}^{(i)} - u_n^{*(i)}}{\tau} = \frac{D}{\omega^2} [u_n^{*(i+1)} - 2u_n^{*(i)} + u_n^{*(i-1)}] \quad (\text{A.20})$$

Aplicando (A.9) para $x = i\omega$

$$u_n^{*(i)} = u_n^{(i)} + R[u_n^{(i)}] \quad (\text{A.21})$$

Com a substituição de (A.21) em (A.20), obtemos

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{(i)} - u_n^{(i)} + R[u_n^{(i)}] &= \\ &= \frac{D\tau}{\omega^2} \left\{ u_{n+1}^{(i)+R(u_n^{(i+1)})} - 2[u_n^{(i)} + R(u_n^{(i-1)})] + u_n^{(i-1)} + R(u_n^{(i-1)}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Definindo a constante de acoplamento

$$\epsilon \equiv \frac{2D\tau}{\omega^2}$$

e a função que representa o mapa

$$f(u) \equiv u + R(u)$$

podemos escrever

$$u_{n+1}^{(i)} - f(u_n^{(i)}) = \frac{\epsilon}{2} [f(u_n^{(i-1)}) - 2f(u_n^{(i+1)})],$$

ou

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon) - f(u_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} [f(u_n^{(i-1)}) + f(u_n^{(i+1)})]. \quad (\text{A.23})$$

E desta forma temos o mesmo acoplamento representado pela Eq. (2.4), com $u_n^{(i)}$ no lugar de $x_n^{(i)}$.

Bibliografia

- [Abramson e Zanette, 1998] Abramson, G. and Zanette, D.H. (1998): *Globally coupled maps with asynchronous updating*, Physical Review E, **58**, 4454-4460.
- [Alstrøm e Ritala, 1986] Alstrøm, P. and Ritala, R. (1986): *Mode locking in an infinite set of coupled circle maps*, Physical Review A, **35**, 300-312.
- [Andrade, 1999] Andrade, R.F. (1999): *Thermodynamical behavior of aperiodic Ising models on hierarchical lattices*, Physical Review E, **59**, 150-157.
- [Arnold, 1965] Arnold, V.I. (1965): *Small denominators I. Mappings of the circumference onto itself*, Am. math. Soc. Trans. Ser. 2, **46**, 213.
- [Bergé et al., 1984] Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal, C. (1984): *Order within chaos*, John Wiley & Sons.
- [Brunnet e Chaté, 1998] Brunnet, L.G. and Chaté, H. (1998): *Phase coherence in chaotic oscillatory media*, Physica A, **257**, 347-356.
- [Chatterjee e Gupte, 1996] Chatterjee, N. and Gupte, N. (1996): *Synchronization in coupled sine circle maps*, Physical Review E, **53**, 4457-4466.
- [Cosenza e Parravano, 1996] Cosenza, M.G. and Parravano, A. (1989): *Turbulence in globally coupled maps*, Physical Review E, **53**, 6032-6037.
- [Crutchfield e Kaneko, 1987] Crutchfield, J.P. and Kaneko, K. (1987): *Phenomenology spatiotemporal chaos*, in: *Direction in chaos*, Vol. 1, Ed. Hao Bai-lin, World Scientific, Singapore.
- [Ernst et al., 1998] Ernst, U., Palwelzik, K. and Geisel, T. (1998): *Delay-induced multistable synchronization of biological oscillators*, Physical Review E, **57**, 2150-2162.

- [Gade e Amritkar, 1993] Gade, P.M. and Amritkar, R.E. (1993): *Spatially periodic orbits in coupled-map lattices*, Physical Review E, **47**, 143-154.
- [Gang e Kaifen, 1993] Gang, H. and Kaifen, H. (1993): *Controlling chaos in systems by partial differential equations*, Physical Review letters, **71**, 3794-3797.
- [Glass e Mackey, 1997] Glass, L. and Mackey, M.C. (1997): *Dos relógios ao caos: Os ritmos da vida*, Editora da Universidade de São Paulo.
- [Grassberger e Schreiber] Grassberger, P. and Schreiber, T. (1991): *Phase transition in coupled map lattices*, Physica D, **50**, 177-188.
- [Grassberger, 1999] Grassberger, P. (1999): *Synchronization of coupled systems with spatiotemporal chaos*, Physical Review E, **59**, R2520-R2522.
- [Hemmingsson et al., 1993] Hemmingsson, J., Sorensen, A., Flyvbjerg, H. and Hermann, H.J. (1993): *What synchronization?*, Europhysics Letters, **23**, 629-634.
- [Hilborn, 1994] Hilborn, R.G. (1994): *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford: Oxford University Press.
- [Hohl et al., 1997] Hohl, A., Erneux, T. and Kovanis, V. (1997): *Localized synchronization in two coupled nonidentical semiconductor lasers*, Physical Review Letters, **78**, 4745-4748.
- [Jánosi e Gallas, 1999] Jánosi, I.M. and Gallas, J.A.C. (1999): *Globally coupled multiattractor maps: Mean field dynamics controlled by the number of elements*, Physical Review E, **59**, R28-R31.
- [Jensen et al., 1983] Jensen, M.H., Bak, P. and Bohr, T. (1983): *Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of Mode-Locking structure in the circle map*, Physical Review Letters, **50**, 1637-1639.
- [Jensen et al., 1984] Jensen, M.H., Bak, P. and Bohr, T. (1984): *Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems I. Circle maps*, Physical Review A, **30**, 1960-1969.
- [Kaneko, 1983] Kaneko, K. (1983): *Collapse of a tori and genesis of chaos in dissipative systems*, Ph. D. thesis (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1986).

- [Marcq *et al.*, 1997] Marcq, P., Chaté, H. and Manneville, P. (1997): *Universality in Ising-like phase transitions of lattices of coupled chaotic maps*, Physical Review E, **55**, 2606-2627.
- [Medvedev e Diamond, 1998] Medvedev, M.V. and Diamond, P.H. (1998): *Self-organized states in cellular automata: Exact solution*, Physical Review E, **58**, 6824-6827.
- [Morelli e Zanette, 1998] Morelli, L.G. and Zanette, D. (1998): *Synchronization of stochastically coupled cellular automata*, Physical Review E, **58**, R8-R11.
- [Osipov *et al.*, 1997] Osipov, G.V., Pikovsky, A.S., Roseblum, M.G. and Kurths, J. (1997): *Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillator*, Physical Review E, **55**, 2353-2361.
- [Ott, 1994] Ott, E. (1994): *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, 1994.
- [Pecora e Carrol, 1990] Pecora, L.M. and Carrol, T.L. (1990): *synchronization in chaotic systems*, Physical Review Letters, **64**, 821-824.
- [Pecora, 1998] Pecora, L.M. (1998): *Synchronization conditions and desynchronization patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems*, Physical Review E, **58**, 347-360.
- [Pikovsky *et al.*, 1997] Pikovsky, A., Osipov, G., Roseblum, M. Zaks, M. and Kurths, J. (1997): *Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization*, Physical Review Letters, **79**, 47-50.
- [Pinto e Viana, 2000] Pinto, S.E.D and Viana, R.L. (2000): *Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps*, Physical Review E, **61**, 5154-5161.
- [Press *et al.*, 1992] Press, W.H., Teukolsky, S.A, Vetterling, W.T. and Flannery, B.P. (1992): *Numerical Recipes in C: The art of Scientific Computing*, p280, Cambridge University Press, 1992.
- [Rogers e Wille, 1996] Rogers, L.J. and Wille, L.T. (1996): *Phase transitions in nonlinear oscillator chains*, Physical Review E, **54**, R2193-R2196.
- [Shinbrot, 1994] Shinbrot, T. (1994): *Synchronization of coupled maps and stable windows*, Physical Review E, **50**, 3230-3233.

- [Schuster, 1984] Schuster, H.G. (1984): *Deterministic chaos: an introduction*, Physik-Verlag.
- [Sompolinski *et al.*, 1991] , H., Golomb, D. and Kleinfeld, D. (1991): *Cooperative dynamics in visual processing*, Physical Review A, **43**, 6990-7011.
- [Stanley e Guyon, 1990] Stanley, H.E. and Guyon, E. (1990): *Statistical models for the fracture of disordered media*, Editado por Hans J.Herrmann e Stephane Roux.
- [Strogatz e Mirollo, 1988] Strogatz, S.H. and Mirollo, R.E. (1988): *Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies*, Physica D, **31**, 143-168.
- [Strogatz e Stewart, 1993] Strogatz, S.H and Stewart, I. (1993): *Coupled oscillators and biological synchronization*, Scientific american, **269**, 102-109.
- [Strogatz, 1994] Strogatz, S.H. (1994): *Nonlinear dynamics and chaos*, Perseus Books, new York.
- [Tanaka *et al.*, 1997] Tanaka, T., Lichtenberg, A.J. and Oishi, S. (1997): *First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems*, Physical Review Letters, **78**, 2104-2107.
- [Tham e Sen, 1992] Tham, P. and Sen, A.K. (1992): *Remote multimode feedback stabilization of plasma instabilities*, Physical Review A, **46**, R4520-R4523.
- [Viana e Batista, 1998] Viana, R.L. and Batista, A.M. (1998): *Synchronization of coupled kicked limit cycle systems*, Chaos, Solitons and Fractals, **9**, 1931-1944.
- [Vieira *et al.*, 1994] Vieira, M. de S., Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A. (1994): *Self-synchronization of many oscillators*, International Journal of bifurcation and Chaos, **4**, 1563-1577.
- [Wiesenfeld e Hadley, 1989] Wiesenfeld, K. and Hadley, P. (1989): *Attractor crowding in oscillator arrays*, Physical Review Letters, **62**, 1335-1338.
- [Wiesenfeld *et al.*, 1996] Wiesenfeld, K. Colet, P. and Strogatz, S.H. (1996): *Synchronization transitions in a disordered Josephson series array*, Physical Review Letters, **76**, 404-407.