

PAULO CESAR DO NASCIMENTO SCARPA

Efeito Posterior em Dielétricos Sólidos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre.

CURITIBA
1989



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. PAULO CESAR DO
NASCIMENTO SCARPA

Em sessão pública de defesa de tese iniciada
às 09:00 horas, nesta data, após um seminário sobre o assun
to da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Con
ceito A.

Curitiba, 10 de outubro de 1989.

Banca Examinadora:

Prof. RENÉ ROBERT

Presidente - UFPR

Prof. GUILHERME FONTES LEAL FERREIRA

IFQSC/USP

Prof. CRISTIANO JOHANES FRIEDRICH GRAF

UFPR

FICHA CATALOGRÁFICA

537.24 SCARPA, Paulo Cesar do Nascimento.
S286e

Efeito posterior em dielétricos
sólidos. Curitiba, UFPR, 1989.

p. 198

Dissertação de Mestrado para
obtenção do grau de Mestre em
Física.

1. Dielétrico. 2. Absorção
dielétrica. 3. Relaxação die-
létrica. 4. Teoria de dielé-
trico. 5. Característica die-
létrica.

Aos meus pais,
ã minha espôsa
e, ao
Paulinho
e
Orlandinho.

AGRADECIMENTOS

Desejo exprimir, com grande satisfação, os meus agradecimentos a todas pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial agradeço:

Ao professor René Robert, pela orientação e dedicação.

Aos professores Bin. K. Cheng, Cristiano J. F. Graf, Germano B. Afonso e Sérgio L. M. Berleze, pelo incentivo constante e pelas críticas construtivas.

À COPEL - Companhia Paranaense de Energia, na pessoa dos engenheiros L. F. Ciscato, Reni A. Silva, M. R. Bertoni e Humberto S. Netto, da Diretoria de Distribuição e também ao LAC - Laboratório Central de Eletrotécnica e Eletrônica - convênio COPEL/UFPR, em especial aos engenheiros Rogério R. Moro, J. Gonçalves Neto, David S. Rezende e Ademir L. Sã, pela oportunidade e pelo apoio sempre presente.

Ao engenheiro Sérgio L. S. Cabral, da CESP - Companhia Energética de São Paulo, pelo incentivo constante.

À INEPAR S/A - Indústria e Construções, pelo apoio em equipamentos e instrumentação, necessários para a concretização da parte experimental.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio em instrumentação utilizada.

Ao engenheiro Carlos Y. Nakaguishi, pelo auxílio com o idioma japonês.

Ao Departamento Físico Químico do LAC, pelo auxílio na obtenção e interpretação dos espectros infra-vermelho de celulose e óleo impregnante.

Ao técnico Claudinê F. Souza, pela ajuda valiosa na parte experimental.

Aos desenhistas J. Rodrigues e Adelson R. Moreira, pela confecção dos desenhos e ilustrações aqui apresentados.

A todos que, embora não relacionados aqui, sempre nos dirigiram palavras de estímulo e consideração.

SUMÁRIO

	<u>RESUMO</u>	ix
	<u>ABSTRACT</u>	x
	<u>INTRODUÇÃO</u>	1
1	<u>ASPECTOS HISTÓRICOS</u>	7
2	<u>EFEITO POSTERIOR</u>	22
2.1	ABORDAGEM PELA TEORIA DE CIRCUITO.....	22
2.2	ABORDAGEM PELA TEORIA DE CAMPO.....	55
2.3	MODELOS DE PLANO DE CAMPO-ZERO.....	68
3	<u>RELAXAÇÃO DIELÉTRICA</u>	81
3.1	ABSORÇÃO DIELÉTRICA.....	81
3.2	FUNÇÕES DE RELAXAÇÃO DIELÉTRICA.....	87
3.3	FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS DE RELAXAÇÃO E DE ENERGIAS DE ATIVAÇÃO.....	99
4	<u>PERDAS DIELÉTRICAS</u>	107
4.1	TIPOS DE PERDAS DIELÉTRICAS.....	107
4.2	PERDAS PARA EXCITAÇÕES SENOIDAIS.....	108
4.3	PERDAS PARA EXCITAÇÕES NÃO-SENOIDAIS.....	115
5	<u>GENERALIZAÇÕES</u>	125
6	<u>DETERMINAÇÕES EXPERIMENTAIS E ANALÍTICAS</u>	132
6.1	DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE CURVAS DE TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITORES.....	132
6.2	ALGUMAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE SCHWEIDLER-GROSS.....	154

<u>CONCLUSÕES</u>	161
<u>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</u>	164
<u>APÊNDICE A</u> : EQUIVALÊNCIA ENTRE AS ABORDAGENS PELA TEORIA DE CIRCUITO E TEORIA DE CAMPO.....	166
<u>APÊNDICE B</u> : RELAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS DIELÉ- TRICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO E NO DO- MÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	173
<u>APÊNDICE C</u> : A TRANSFORMAÇÃO DE HILBERT E AS RE- LAÇÕES DE KRAMERS-KRONIG.....	176
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	182

RESUMO

A macro e a micro-estrutura dos materiais dielétricos são sensíveis à sua história térmica, mecânica e elétrica. Foi estudada, do ponto de vista teórico e experimental, a teoria da resposta dielétrica de Curie-Schweidler-Gross, vista tanto pela abordagem da teoria de circuito como da teoria de campo. O assunto é visto dentro da teoria geral da relaxação dielétrica, particularmente o efeito posterior em materiais dielétricos sólidos. O efeito posterior compreende a descarga interna de dielétricos previamente carregados e sua dependência com o intervalo de tempo de carga e a formação de uma tensão de retorno em dielétricos previamente carregados, e curto-circuitados por um intervalo de tempo finito. São apresentados resultados de ensaios de determinação de curvas de tensão de retorno em capacitores com dielétrico de celulose, polipropileno, mica e poliéster.

ABSTRACT

The macro and micro-structure of the dielectric materials are sensitive to their thermal, mechanical and electrical history. The Curie-Schweidler-Gross's dielectric response theory, on both theoretical and experimental standpoint, was studied on the approach of the circuit theory and field theory. The subject is considered with the help of dielectric relaxation general theory, specially, the after-effect on dielectric materials. The after-effect embraces not only the internal discharge of dielectrics with previous charge and its dependence on charging time, but also the build-up of a return voltage in dielectrics with previous charge and short circuited for a finite time. Return voltage curves are given for capacitors with dielectric made of cellulose, polypropylene, mica and polyester.

INTRODUÇÃO

Segundo Maxwell (p.450)¹⁰⁹, dielétrico é o meio no qual, como consequência da aplicação de um campo elétrico, ocorrem os fenômenos de indução e condução, simultaneamente. O material dielétrico é, portanto, diferenciado tanto do isolante perfeito (onde só ocorre a indução) quanto do condutor perfeito (onde só ocorre a condução).

É dentro desta definição que será utilizado aqui o termo dielétrico. Além disso, os dielétricos podem ser divididos em ideal (perfeito, não-absortivo), com resposta rápida à aplicação de um campo elétrico, e real (não-ideal, não-perfeito ou absortivo), aqueles que além da resposta rápida, apresentam uma resposta lenta, originando os fenômenos que serão tratados aqui. Neste sentido, um capacitor ideal é aquele formado com um dielétrico ideal, e um capacitor real, com um dielétrico real. A menos que se especifique o contrário, o termo dielétrico sem nenhuma indicação adicional, será usado aqui para designar os dielétricos reais.

O objetivo principal aqui é mostrar o estudo do efeito posterior ("after-effect") em dielétricos sólidos reais. O efeito posterior, denominação dos fenômenos de tensões de circuito aberto, compreende a descarga interna de dielétricos previamente carregados e sua dependência com o intervalo de tempo de carga e também, a formação de uma tensão de retorno

em dielétricos previamente carregados e curto-circuitados por um intervalo de tempo finito. O efeito posterior diferencia profundamente um dielétrico real de um ideal; o dielétrico ideal não apresenta o efeito posterior (sua descarga interna independe do intervalo de tempo de carga e não se observa o aparecimento da tensão de retorno).

O efeito posterior é um efeito separado porém, intimamente relacionado com a forma da resposta dielétrica a uma excitação. É fundamental observar-se que qualquer teoria da resposta dielétrica terá que, necessariamente, prever e explicar a ocorrência do efeito posterior.

A principal característica da resposta dielétrica é o efeito memória, pelo qual o comportamento no tempo presente depende da história passada do dielétrico. O efeito memória nos dielétricos é finito, significando que excitações ocorridas em um passado remoto não afetam o estado atual (um exemplo de efeito memória infinito é o fusível, o qual jamais "esquece" a corrente que ultrapassou seu valor nominal de interrupção). A existência do efeito memória nos dielétricos é explicada normalmente pelo princípio de superposição. Quando um campo elétrico é aplicado ao dielétrico, seus constituintes sofrem um deslocamento da posição de equilíbrio e ocorre a polarização elétrica, que pode ser de vários tipos; ao ser retirada a excitação, o equilíbrio se restabelece após um intervalo de tempo finito, denominado tempo de relaxação. Nos dielétricos reais, a componente lenta da resposta implica em um grande tempo de relaxação, possibilitando variações apreciáveis do campo aplicado durante este intervalo de tempo, de modo que a

relação excitação-resposta pode adquirir um caráter de não-instantaneidade, ocasionando o efeito memória, ou como também é conhecido, a dispersão temporal. Neste sentido, o valor da polarização elétrica no instante de tempo atual depende de valores do campo elétrico em instantes de tempo passados, e esta "memória" pode se estender, na prática, a intervalos de tempo tão longos como horas, dias ou mesmo mais.

No caso geral, a resposta dielétrica é não-linear com a excitação. Entretanto, todo tratamento citado aqui é feito na aproximação linear, supondo-se válido o princípio de superposição. Além disso, outra hipótese básica assumida é a validade do princípio de causalidade, pelo qual o efeito é sempre posterior à causa.

Na física dos materiais dielétricos o fenômeno de relaxação é a interação mais importante entre campo e matéria. Contudo, uma característica interessante no estudo da relaxação é que não se está restrito aos dielétricos, isto é, os fenômenos de relaxação podem ser também, mecânicos, magnéticos, óticos, nucleares e outros. Tal fato faz com que os métodos de estudo sejam necessariamente interdisciplinares, e o entendimento dos vários mecanismos de relaxação nos materiais em uso atualmente (geralmente, de estrutura complexa) seja fonte de pesquisas as mais diversas.

Apesar de algumas considerações sobre a estrutura microscópica dos dielétricos ser feita, o tratamento da resposta dielétrica citado aqui está basicamente dentro do escopo da teoria fenomenológica. Neste contexto, o dielétrico é visto como uma "caixa preta" e os fenômenos aí existentes são

descritos em termos de variáveis observáveis, tais como a corrente e a tensão. Neste sentido, não se está preocupado com a estrutura interna microscópica do material dielétrico, e utiliza-se modelos que relacionem as variáveis observáveis e conduzam a resultados compatíveis com a experimentação |Bunge (p.67-90)¹³|.

As equações de Maxwell são compostas de quatro equações fundamentais, às quais se juntam outras, descrevendo o comportamento nos diversos meios, denominadas relações constitutivas. Os novos materiais em uso atualmente são meios para os quais relações constitutivas simples não são válidas. O objetivo do estudo dos dielétricos é justamente o estabelecimento de relações constitutivas que mais se aproximem do comportamento dielétrico real.

Algumas restrições são feitas aqui. Assim, o estudo é restrito aos dielétricos sólidos, sendo entendido por sólidos aqueles que apresentam estrutura não só cristalina mas também, amorfa ou parcialmente amorfa. O comportamento dos gases e líquidos pode, muitas vezes, ser profundamente diverso do citado aqui e, no caso dos líquidos, estes se aproximam muito mais do comportamento previsto por Debye para um dielétrico, do que os sólidos. Outra restrição feita é a consideração apenas de fenômenos isotérmicos. Assim, para o caso não-isotérmico, são citados apenas de passagem as correntes térmicamente estimuladas e o efeito eletreto, o qual origina uma polarização permanente em dielétricos.

No capítulo 1 é mostrada uma retrospectiva histórica, desde o início do século até os dias de hoje, do estudo de alguns aspectos do comportamento dielétrico. Neste capítulo não se está particularmente interessado nos fenômenos em si, nem se tenta esclarecê-los definindo todos os termos empregados. Basicamente, é com a cronologia dos acontecimentos e descobertas, por assunto, que se está interessado.

No capítulo 2 é mostrado o estudo do efeito posterior em dielétricos. A abordagem é feita tanto pela teoria de circuito como pela teoria de campo e, além disso, são apresentados modelos de plano de campo-zero que tentam explicar a formação da tensão de retorno. As teorias do efeito memória e dos fenômenos de relaxação preveem e tentam explicar a ocorrência do efeito posterior.

No capítulo 3 faz-se uma revisão de alguns aspectos do estado atual do estudo dos fenômenos de absorção dielétrica (aparecimento de uma corrente de longa duração no dielétrico, após a aplicação de um campo em forma de função degrau), e de relaxação dielétrica. O estudo da relaxação se faz com o uso de funções de relaxação dielétrica que descrevem a resposta dielétrica a uma excitação em forma de pulso unitário. O efeito posterior é causado pela absorção dielétrica e esta, por sua vez, está intimamente relacionada com a relaxação dielétrica.

No capítulo 4 é mostrado o estudo das perdas dielétricas. Com o uso da teoria da resposta dielétrica pode-se determinar as perdas no dielétrico real, considerando desta forma não só as perdas pela corrente de condução (efeito Joule) mas

também, as perdas por relaxação, perdas por ressonância e perdas por heterogeneidades (efeito Maxwell-Wagner). O estudo citado compreende perdas para excitações senoidais e não-senoidais.

No capítulo 5 é mostrada a expressão geral da resposta dielétrica e a partir dela, as hipóteses necessárias que permitem tomar-se a aproximação linear, como um caso particular.

No capítulo 6 são mostrados resultados experimentais do levantamento de curvas de tensão de retorno em capacitores com dielétricos de vários tipos, e algumas soluções da equação integro-diferencial de Schweidler-Gross para o efeito posterior, considerando para a função de relaxação dielétrica a forma exponencial.

No apêndice A é mostrada a equivalência das abordagens pela teoria de circuito e teoria de campo do efeito posterior em dielétricos.

No apêndice B é mostrada a resposta dielétrica no domínio da frequência, de grande utilidade prática e experimental.

No apêndice C é mostrada a transformação de Hilbert e as relações de Kramers-Kronig, de grande utilidade na interpretação de dados dielétricos.

CAPÍTULO 1
ASPECTOS HISTÓRICOS

Desde antes de Maxwell¹⁰⁹, os materiais dielétricos são reconhecidos ter um caráter absorptivo. Esta denominação remonta ainda aos tempos em que a eletricidade era considerada um fluído, o qual seria então absorvido pelos materiais dielétricos. Desde então a absorção dielétrica tem sido objeto de intensa pesquisa.

Em 1887, Hopkinson⁸¹ mostrou, por sugestão do próprio Maxwell, a carga residual nos dielétricos utilizando determinados vidros usados na confecção das garrafas de Leyden. O autor observou que o comportamento dos dielétricos apresentavam efeitos retardados semelhantes aos descritos por Boltzmann⁸, em 1874, no seu estudo sobre comportamento dos corpos elásticos. Hopkinson estabeleceu então correspondências entre as grandezas elétricas e mecânicas. O tratamento matemático dado por esses autores a estes fenômenos conduziu à consideração de equações integrais e íntegro-diferenciais.

Nas primeiras décadas do século XX, os fenômenos deste tipo foram apresentados por Vito Volterra^{162,163,164,165}, o qual cunhou a expressão fenômenos hereditários para designá-los. Segundo o autor citado¹⁶⁵, fenômeno hereditário é aquele que depende não somente do estado atual do sistema mas também

dos estados anteriores pelos quais o sistema tenha passado, ou seja, o fenômeno dependeria da história do sistema.

Em 1907, von Schweidler¹⁵¹ publicou um trabalho, ainda hoje fundamental, onde apresentou os fenômenos hereditários em dielétricos. von Schweidler¹⁵¹ mostrou particularmente os fenômenos de carga, descarga e perdas sob tensões senoidais. Este trabalho foi ainda desenvolvido, em 1915, por F.Tank¹⁵⁶.

Em 1937, B.Gross e P.S.Rocha^{38,69,70,71,72} iniciaram a publicação de uma série de artigos onde procuraram mostrar o comportamento de um dielétrico real, diferenciado do dielétrico perfeito por uma série de fenômenos por eles denominados de anômalos. Ressaltaram, entretanto, que o termo anomalia não significaria que tais fenômenos fossem raros ou aleatórios; com anômalo quiseram dizer que tais fenômenos não obedeceriam a teoria de Maxwell em sua forma clássica. A denominação de anômalo foi em seguida abandonada, pois tratava-se de fenômenos fundamentais dos materiais dielétricos.

O aparecimento destes artigos marca o início da elaboração de uma teoria fenomenológica do comportamento dielétrico pelo grupo de Gross. Tomando como hipóteses fundamentais a validade do princípio de superposição e do princípio de causalidade, Gross estabeleceu, utilizando a teoria de circuito, que a corrente $I(t)$ que atravessa um capacitor formado com um material dielétrico sólido, submetido a uma tensão $V(t)$, é dada pela equação íntegro-diferencial:

$$I(t) = \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (1.1)$$

onde $\phi(t-\tau)$ é a função de memória, função de relaxação dielétrica ou função resposta.

Gross dividiu os fenômenos anômalos em dois grupos distintos. No primeiro estudou os fenômenos que se processam com as armaduras do capacitor ligadas a um circuito exterior: carga, descarga e perdas; no segundo, estudou os fenômenos que se processam apesar do isolamento entre as armaduras: descarga interna e regeneração (tensão de retorno).

O primeiro grupo de fenômenos já havia sido estudado por von Schweidler¹⁵¹ que obteve a equação (1.1) e propôs a função de memória na forma

$$\phi(t) = \beta t^{-\alpha} \quad (1.2)$$

onde

β, α constantes

($\beta > 0, 0 < \alpha < 1$)

Gross⁷¹ estudou em particular os fenômenos do segundo grupo denominando-os efeito posterior ou fenômenos de tensões de circuito aberto. Nestas condições, $I(t)=0$ e a equação (1.1) é reduzida a

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau = 0 \quad (1.3)$$

Ainda nestes artigos, Gross^{35,71} encontra uma solução qualitativa para a equação íntegro-diferencial (1.3) adotando para a função de memória um somatório de exponenciais negativas. A solução foi confrontada com dados experimentais obtidos

pelo próprio autor⁷¹, sendo os resultados considerados satisfatórios. Uma outra solução, aproximada, foi ainda obtida por Gross^{36,72} adotando agora para a função de memória a forma (1.2), proposta por von Schweidler. A confirmação experimental foi também realizada, restando porém, dúvidas quanto ao valor inicial da função de memória. As soluções aproximadas obtidas pelo autor citado, apesar de lançarem alguma luz na compreensão dos fenômenos anômalos em dielétricos reais, não foram suficientes para a confirmação rigorosa dos dados experimentais.

A dificuldade foi resolvida com a obtenção da solução analítica rigorosa da equação (1.3), tomando-se como função de memória a forma (1.2) proposta por von Schweidler¹⁵¹. A primeira solução foi encontrada por F.M.Oliveira Castro^{124,125} em 1939, segundo ele, animado pelo próprio Gross. Através de uma mudança de variáveis na equação (1.3), Oliveira Castro transformou-a em uma equação integral de Volterra de segunda espécie, cujo núcleo era uma função conhecida. Utilizando então o método dos núcleos iterados, proposto pelo próprio Volterra¹⁶⁵, Oliveira Castro^{124,125} encontrou a solução geral da eq. (1.3) e ainda, mostrou o caso particular do condensador anômalo perfeitamente isolado ($R \rightarrow \infty$). Esta mesma equação foi também resolvida por A.de Moraes e M.Schenberg^{147,148}, em 1940. Estes autores, utilizando mudanças de variáveis semelhantes às de Oliveira Castro, chegaram também a uma equação integral de Volterra de segunda espécie, resolvendo-a pelo método da transformada de Laplace, obtendo uma solução bastante geral. Mostraram também casos particulares e estabeleceram a equivalência de sua solução com a de Oliveira Castro. Estes e outros

aspectos desenvolvidos na teoria dos dielétricos fazem parte da história da Física no Brasil e podem ser vistos, por exemplo, no depoimento de B.Gross em (p.127)⁷⁴ e também em (p.71-73)³¹.

As equações integrais de Volterra, cuja ligação com os fenômenos hereditários já estava firmemente estabelecida desde o próprio Volterra¹⁶⁵, têm sido, desde então, utilizadas nesta conexão, para os fenômenos hereditários em dielétricos sólidos reais. Em 1952, Gross⁵¹ mostrou um método de inversão desta equação e já em 1985, Oliveira Castro¹²⁷ chegou à mesma solução obtida por ele anteriormente, utilizando agora o cálculo operacional de Heaviside, conseguindo considerável simplicidade na solução.

A obtenção da solução analítica da equação (1.3) com a função de relaxação tomada na forma proposta por Schweidler, permitiu a Gross a formulação de uma teoria fenomenológica completa do comportamento dos dielétricos reais. Assim, em 1940, este autor^{39,40} estabeleceu relações gerais entre as curvas de tensão de descarga interna e de tensão de retorno. Em 1942, o mesmo autor^{41,47} mostrou as curvas limites e os valores iniciais das curvas de tensão de descarga interna e tensão de retorno, estabelecendo também, relações entre elas.

Em 1941, ainda como resultado dos trabalhos anteriores, Gross⁴⁵ elaborou uma teoria das perdas dielétricas sob solicitações senoidais. Para tanto, o autor⁴² considerou um capacitor formado com um dielétrico real, submetido a uma tensão senoidal, definindo para o mesmo uma capacitância e uma condutância aparentes. O autor^{43,44,46,48} estabeleceu, em seguida,

relações entre estas grandezas, utilizando transformações integrais, possibilitando desta forma o cálculo das perdas. O estudo pode ser considerado uma continuação de trabalhos anteriores, tais como os de Manning e Bell¹⁰⁶ e Boning⁹, sendo continuado por Whitehead e Eager¹⁶⁶. A validade das transformações integrais empregadas (basicamente as transformações de Hilbert) foi mostrada também por outros autores, como B.Levi¹⁰⁰ e Hylmar Silva^{73,152,153}. O trabalho de Gross é contemporâneo ao de Cole²¹ que também empregou relações do tipo Kramers-Kronig aplicadas ao tratamento de dados de perdas dielétricas. Em 1974, Lovel¹⁰⁵ trabalhou com relações análogas às empregadas por Gross na interpretação de dados dielétricos, no que foi alertado pelo próprio autor⁶⁰, logo em seguida.

O estudo fenomenológico dos dielétricos reais foi feito, como citamos, tratando-os em uma aproximação linear. Em 1956, Gross⁵⁴ elaborou uma teoria geral dos sistemas físicos lineares, de modo a fundamentar não somente o estudo dos dielétricos reais mas também, o comportamento de outros sistemas físicos lineares que igualmente constituíam áreas de seu interesse, tal como a viscoelasticidade. Em 1980, Oliveira Castro¹²⁶ publicou um trabalho sobre a representação analítica da relação excitação-resposta dos sistemas físicos lineares, passivos, causais e com hereditariedade invariável no tempo, mostrando que esta relação se exprime com o uso do princípio de superposição em um espaço vetorial topológico do conjunto das excitações e das condições referidas anteriormente.

Os trabalhos pioneiros de Gross foram seguidos de muitos outros estudos, não somente dele próprio como também de vários outros autores. Em um recente relato de seus estudos, publicado em 1986, Gross⁶³ afirma que as pesquisas realizadas por ele em dielétricos e eletretos, nos últimos cinquenta anos, obedeceram a uma sistemática de desenvolvimento e que existiria uma relação lógica entre os sucessivos passos dados. Segundo o autor⁶³, a procura de uma explicação para o efeito posterior em dielétricos sólidos reais e o efeito eletreto levou-o à pesquisa do armazenamento de cargas em dielétricos e do mecanismo responsável por este fenômeno, ou seja, a absorção dielétrica. A observação de que a absorção dielétrica é um fenômeno linear, ou pelo menos, pode ser assim considerado em um extenso intervalo de correntes e tensões, levou-o a considerar a hipótese da existência de uma polarização volumétrica no dielétrico. Pesquisas realizadas sobre a absorção dielétrica mostraram ser ela causada pela relaxação dielétrica, característica presente em todos materiais dielétricos. O estudo da relaxação dielétrica se fez, então, com o uso das funções de relaxação dielétrica. Desde von Schweidler foi reconhecido que esta função não era dada na forma exponencial decrescente, tal como previsto por Debye²⁵ para os dielétricos perfeitos, sendo muitas outras formas propostas por diversos outros autores. A tentativa de resolver o problema do desvio da função exponencial foi feita, por dois modos diversos: um grupo de pesquisadores propôs diversas formas analíticas para a função de relaxação dielétrica; outro grupo considerou que não existiria somente um tempo de relaxação mas sim,

uma distribuição destes tempos e propôs, inicialmente, o uso de funções de distribuição de tempos de relaxação para a corrente e tensão e, posteriormente, o uso de funções de distribuição de energias de ativação. Gross mostrou, ainda, diversos problemas de natureza matemática originados com o uso de funções de distribuição. Entretanto, existe a dificuldade de se associar estas funções de distribuição com propriedades estruturais dos dielétricos (existência de sistemas elementares independentes com tempos de relaxação próprios). Em consequência, há uma rejeição em se atribuir um significado físico à estas funções. Isto levou outros autores a teorias baseadas em interações de muitos corpos, sendo proposta, inclusive, uma lei universal da resposta dielétrica.

Devido à formulação matemática dos fenômenos de relaxação dielétrica e dos fenômenos de relaxação viscoelástica ser exatamente a mesma, Gross os estudou conjuntamente, estabelecendo uma perfeita correspondência entre as grandezas elétricas e mecânicas. Em 1953, o autor⁵⁵ elaborou sua teoria completa da relaxação viscoelástica.

Os estudos deste autor sobre o fenômeno eletreto envolveram não somente pesquisas sobre fenômenos que ocorrem a uma determinada temperatura, mantida constante (fenômenos isotérmicos) como os relatados até aqui mas também, fenômenos não-isotérmicos, dando lugar à intensa pesquisa que se faz hoje sobre as correntes térmicamente estimuladas em materiais dielétricos.

Dentro deste quadro, Gross^{35,36,38,40,47,63,69,70,71,72} apresentou o efeito posterior em dielétricos, tais como as relações gerais de tensões de circuito aberto, considerando-o

como um efeito separado porém, relacionado com a absorção dielétrica. Estes estudos foram elaborados com base na teoria de circuito, supondo-se um capacitor formado com um dielétrico sólido real e considerando-o como um elemento de circuito. Em 1965, Perlman e Meunier¹³² mostraram o decaimento de carga em eletretos de cera carnaúba, continuando um trabalho anterior de Wiseman e Feaster¹⁷², publicado em 1957. Em ambos os trabalhos utilizou-se elementos da teoria de campo. Em 1966, Garcia-Moliner³³ obteve as funções de resposta linear para os fenômenos viscoelásticos, nas mesmas bases anteriores. Os estudos mais completos apareceram em 1967, quando Tilley^{159,160} publicou sua teoria fenomenológica da resposta dielétrica onde o autor dá um tratamento unificado a uma variedade de experimentos, obtendo, inclusive, as relações de Gross para as tensões de circuito aberto. Esta teoria fenomenológica de Tilley para os fenômenos isotérmicos em dielétricos sólidos foi obtida a partir da teoria de campo. Uma teoria para os fenômenos não-isotérmicos em dielétricos, também a partir da teoria de campo, foi obtida em 1968 por Perlman^{130,131}. A abordagem pela teoria de campo é baseada na validade dos princípios de causalidade e superposição e na hipótese de que a resposta em polarização do material dielétrico, submetido a um campo elétrico $\vec{E}(t)$, é da forma

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

onde $\chi(t-\tau)$ é a função resposta do material dielétrico.

Em 1978, Adamec e Calderwood¹, em um artigo de revisão sobre fenômenos de condução e polarização em materiais

dielétricos poliméricos, apresentaram alguns resultados sobre tensões de retorno de capacitores carregados sob condições isotérmicas e não-isotérmicas. Os resultados foram os mesmos que os obtidos por Gross e outros anteriormente, no que foram alertados pelo próprio autor⁶¹, em 1979. Em 1987, os estudos da tensão de retorno em dielétricos sólidos ganharam novo impulso com a publicação de um artigo elaborado por R.Coelho e outros¹⁹. Segundo este autor, os estudos fenomenológicos baseados na função de memória produziram pouco entendimento físico do processo real de formação da tensão de retorno.

R.Coelho elaborou, então, dois modelos simples baseados no deslocamento de cargas no material. Estas cargas injetadas estariam ou sobre um plano de carga localizado a uma certa profundidade da superfície (modelo do plano de carga) ou distribuída na camada entre o plano de carga e a superfície (modelo de carga distribuída). O movimento deste plano de carga em direção à superfície após o curto-circuito seria, então, responsável pela formação da tensão de retorno. O movimento destes planos de campo-zero após o curto-circuito em dielétricos carregados já havia sido mostrado por Gross⁶⁸ e seu grupo, desde 1972. A atenção de R.Coelho foi despertada pela publicação entre 1982 e 1986 de alguns artigos de pesquisadores japoneses^{96,174,175} cujo interesse no estudo de fenômenos de tensão de retorno em dielétricos se deveu à possibilidade de utilização destes fenômenos em ensaios não-destrutivos para detecção do estado de degradação de isolamento de cabos, especificamente devido aos fenômenos de arborescência (kuwabara et.al.⁹⁵, Ohi et.al.¹²¹, Okamoto^{122,123}, Schaefer¹⁴⁶).

Em 1987, Jonscher⁸⁷ apresentou as equações que governam a carga e descarga de capacitores não-ideais, obtendo expressões analíticas para as transformadas de Laplace de correntes e tensões funções do tempo, associadas com a carga e descarga através de aplicação de uma tensão em forma de função degrau. Com isto, ainda em 1987, Jonscher⁸⁸ obteve as expressões analíticas para as perdas dielétricas de capacitores dispersivos (reais) sob solicitação de tensões do tipo função degrau continuando um trabalho do próprio autor⁸⁵, de 1972, quando calculou as perdas dielétricas sob solicitações transitórias.

Conforme observou Gross⁶³, em 1986, a absorção dielétrica tem sido objeto de uma pesquisa sem fim. Em 1945, o mesmo autor⁶⁵ mostrou a formação de cargas permanentes em dielétricos sólidos, trabalho este completado por ele próprio^{49,50}, em 1949. Nestes artigos, Gross apresentou o comportamento dos dielétricos sob condições não-isotérmicas. Neste aspecto, em 1972, o autor^{58,59} mostrou a aplicação dos modelos de Maxwell e Wagner ao estudo dos dielétricos, concluindo que a equivalência destes modelos sob condições isotérmicas deixa de ser válida em condições não-isotérmicas. Em 1985, Gross e Figueiredo⁶⁶ completaram e tornaram rigorosos estes estudos, ratificando a conclusão anterior.

A absorção dielétrica, como citamos, está intimamente relacionada com a relaxação dielétrica, propriedade característica de todos dielétricos sólidos e tem sido estudada em uma aproximação linear, supondo válidos os princípios de

superposição e causalidade com os quais pode-se relacionar as várias funções usadas para estudar o comportamento dielétrico. Estes cálculos são feitos utilizando-se a função de relaxação dielétrica.

Em 1956, Ross Macdonald¹⁴³ apresentou em um artigo resumo, as relações de transformações integrais usadas em sistemas lineares, apontando as formas mais convenientes para o uso em cálculos. Em 1961, o mesmo autor¹³⁹ aplicou muitas destas expressões ao estudo da relaxação viscoelástica. Em 1963, Ross Macdonald¹⁴² mostrou também, em um artigo resumo, as relaxações dielétrica e viscoelástica, estabelecendo relações da equivalência entre as duas e resumindo as relações gerais utilizadas com o princípio de superposição. Em 1968, muitos resultados foram agrupados e resumidos por J. Perret¹³³. Este trabalho foi ampliado pelo próprio autor^{134,135} em 1970 e 1974.

A função de relaxação dielétrica, suposta inicialmente na forma de uma exponencial decrescente, desde Schweidler¹⁵¹ tem sido proposta em outras formas que melhor se ajustam aos dados experimentais, não se chegando, ainda hoje, a uma forma aceita como definitiva. Várias expressões analíticas para a função de relaxação dielétrica foram propostas por diversos autores como, por exemplo: em 1907 por von Schweidler¹⁵¹, em 1941 por Cole e Cole²⁰, em 1950 por Davidson e Cole¹⁰⁴, em 1971 por Williams e Watts¹⁶⁸, em 1977 por Jonscher⁸⁴. A forma proposta por Jonscher⁸⁴ é uma generalização da função de von Schweidler¹⁵¹ e pretende representar uma resposta universal dos dielétricos, baseado em interações de muitos corpos.

Esta universalidade da resposta dielétrica foi contestada por Gross⁶³, em 1986, com base no princípio de superposição tempo-temperatura, mostrado pelo próprio autor^{56,57}, em 1968. Uma comparação entre as funções de relaxação dielétrica proposta por William e Watts¹⁶⁸ e por Jonscher⁸⁴ foi realizada ainda em 1986, por Gross⁶³. Três trabalhos recentes (P.Hedvig⁷⁵, G.Williams¹⁶⁷ e Multhaupt e Hertz¹¹⁷) revisaram diversos aspectos da pesquisa em relaxação dielétrica e analisaram, em particular, diversas formas propostas para a função de relaxação dielétrica. Assim, em 1984, P.Hedvig⁷⁵ mostrou diversos aspectos experimentais utilizados atualmente na pesquisa da relaxação dielétrica; em 1985, G.Williams¹⁶⁷ analisou o comportamento da relaxação dielétrica em polímeros e, em 1987, G.Multhaupt e H.Hertz¹¹⁷ publicaram um artigo resumo sobre eletretos, onde analisaram os aspectos de relaxação dielétrica.

Uma outra tentativa de se resolver o problema do desvio da função de relaxação dielétrica da forma exponencial decrescente, observada experimentalmente, foi feita com a introdução do conceito de funções de distribuição de tempos de relaxação, proposto inicialmente na forma gaussiana por Yager¹⁷³, ainda em 1936. Esta forma apresentou dificuldades em intervalos de tempo muito curtos e muito longos. Outras distribuições de tempos de relaxação foram propostas por Cole e Cole²⁰, em 1941 e Davidson e Cole²⁴, em 1950. Em 1983, Hill e Dissado⁷⁹ apontaram a ambiguidade de se ter duas funções de distribuição, para a corrente e para a tensão. Neste mesmo ano, Jonscher⁸⁶ já apontava a dificuldade de se dar um

significado físico às funções de distribuição de tempos de relaxação em termos de sistemas elementares com tempos de relaxação próprios. A distribuição de tempos de relaxação pode ser transformada em uma distribuição de energias de ativação assumindo que a relação entre o tempo de relaxação de uma unidade polarizável elementar e a temperatura seja dada pela equação de Arrhenius (Gross⁶³). Tal estudo foi apresentado por este mesmo autor⁵⁶ em 1967 e por Wintle e Sribney¹⁷¹ em 1984, sem que, com isto, o problema de se ter um significado físico para estas funções fosse, de fato, resolvido. O problema foi, apenas deslocado para o de encontrar, agora, um significado físico para as funções de distribuição das energias de ativação.

Em 1956, Gross^{52,53,67} propôs uma forma de se visualizar o papel das funções de distribuição, utilizando o modelo de Bueche para a relaxação mecânica. Neste modelo, Bueche representou as cadeias de polímeros como uma sequência de unidades moleculares igualmente espaçadas, ligadas por molas (forças elásticas) realizando movimentos atenuados por forças viscosas. Utilizando as analogias eletro-mecânicas, Gross⁶³ estabeleceu um modelo para os dielétricos, com os parâmetros continuamente distribuídos. Utilizando a equação de difusão, o autor calculou uma função de relaxação cujo caso limite é justamente a função de von Schweidler¹⁵¹.

Em 1984, Kita⁹⁰ mostrou as funções de distribuição para um sistema Maxwell-Wagner de polarização interfacial, concluindo que uma relaxação dielétrica do tipo Davidson-Cole não era possível neste caso. Em 1985, Gross⁶² chega a conclusão oposta à de Kita e mostra que a distribuição de tempos de

relaxação do tipo Davidson-Cole pode aparecer em um dielétrico composto por camadas heterogêneas. Em 1987, Ross Macdonald¹⁴¹ apresentou as funções de distribuição de energias de ativação, considerando as distribuições exponencial e gaussiana, concluindo, provisoriamente, que um modelo de distribuição gaussiana de energias de ativação levemente assimétrico concorda melhor com os dados experimentais disponíveis. Ainda em 1987, Ross Macdonald¹⁴⁰ publicou um artigo resumindo diversos aspectos relativos às funções de distribuição de tempos de relaxação e de energias de ativação.

O uso das funções de distribuição gerou dificuldades não somente quanto a sua interpretação física mas também, de ordem matemática, neste caso pelo uso de integrais sobre funções impróprias e de espectros truncados. Em 1987, Gross⁶⁴ analisou estas dificuldades matemáticas e solucionou-as, dando uma nova interpretação para as funções de distribuição, vistas agora como componentes imaginárias de duas funções analíticas complexas que seriam as funções geradoras de todas as outras funções na teoria da relaxação dielétrica e da relaxação viscoelástica.

CAPÍTULO 2
EFEITO POSTERIOR

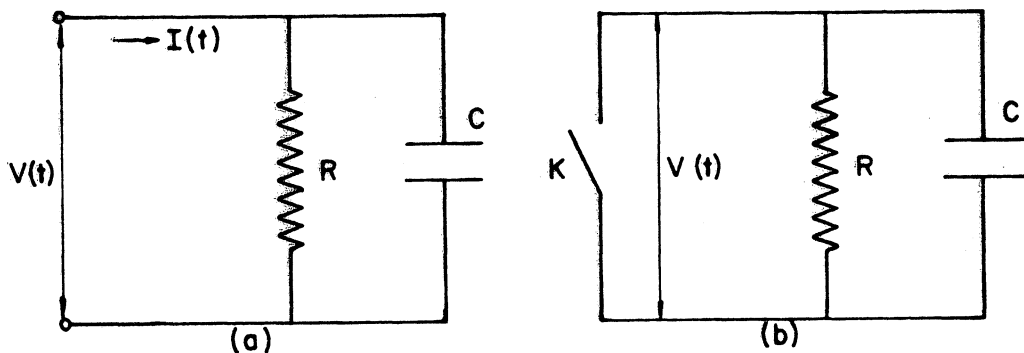
2.1 ABORDAGEM PELA TEORIA DE CIRCUITO

Um capacitor ideal, construído com um dielétrico perfeito, formando um circuito RC submetido a uma tensão $V(t)$, conforme mostrado na fig. 2.1.a, é atravessado por uma corrente $I(t)$, na forma

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} \quad (2.1)$$

onde $V(t)$ é a tensão aplicada, C a capacitância e R a resistência no circuito equivalente do capacitor ideal.

FIGURA 2.1 - CIRCUITO RC



- (a) tensão $V(t)$ aplicada no circuito RC
- (b) circuito RC sem tensão aplicada

Na eq. (2.1), o primeiro termo do lado direito, V/R , é a corrente de condução e o segundo, $C \, dV/dt$, é a corrente de deslocamento.

Agora, estando o capacitor carregado, ao abrir-se a chave K no circuito RC mostrado na fig. 2.1.b, a tensão $V(t)$ nos terminais do circuito RC decai segundo a forma

$$\frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

donde

$$V(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad (2.3)$$

onde V_0 é a tensão existente no capacitor antes da chave K ser aberta e o termo RC é denominado constante de tempo.

Se, por outro lado, estando o capacitor C descarregado, abrir-se a chave K no circuito RC mostrado na fig. 2.1.b, nenhuma tensão será observada nos terminais do circuito RC.

Um capacitor não-ideal, formado com um dielétrico sólido real, tem um comportamento que se afasta desta forma simples. Gross⁶⁹ descreveu os fenômenos que ocorrem neste capacitor real, dividindo-os em dois grupos: os que ocorrem com o capacitor ligado a um circuito exterior (carga, descarga e perdas) e os que ocorrem com o capacitor isolado (descarga interna e tensão de retorno). No primeiro caso, observa-se que a carga e a descarga não são instantâneas e as perdas são maiores que as previstas pelo efeito Joule; no segundo grupo, a descarga interna não se processa em todos os casos de acordo com a constante de tempo RC mas sim, depende acentuadamente do tempo de carga e, ainda, com a interrupção do curto

aplicado ao capacitor previamente carregado, observa-se uma regeneração da tensão com a formação de uma tensão de retorno.

Todos estes fenômenos, observados experimentalmente, contrariam a forma simples da equação (2.1). A abordagem de von Schweidler¹⁵¹, F.Tank¹⁵⁶, Gross e P.S.Rocha⁶⁹ foi aceitar, no dielétrico real, uma terceira componente da corrente, i , escrevendo

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + i(t) \quad (2.4)$$

onde $i(t)$ é denominada corrente posterior, sendo causada por variações da tensão.

O cálculo da corrente posterior foi feito supondo-se válido o princípio de superposição de Hopkinson e Boltzmann e o princípio de causalidade que remonta a Aristóteles. O princípio de superposição, aplicado neste caso, estabelece que a uma determinada variação de tensão, a corrente i produzida será sempre a mesma que aquela obtida se o sistema estivesse em equilíbrio, ou seja, não importam as variações de tensão anteriores que determinaram o estado atual do sistema, a corrente posterior i se superpõe às outras porventura existentes. O princípio de causalidade estabelece que somente as variações de tensão anteriores ao instante de tempo considerado terão influência no valor da corrente posterior (a causa é sempre anterior ao efeito).

É assumido que uma variação descontínua da tensão ΔV , no instante τ , produz uma corrente posterior $i_{\Delta V}$, no instante t , dada por

$$i_{\Delta V} = \Delta V \phi(t - \tau) \quad (2.5)$$

onde $\phi(t-\tau)$ é a função de memória, função de relaxação dielétrica ou função resposta. Assim, os princípios de superposição e causalidade permitem expressar a corrente posterior $i(t)$, em um instante t , produzida por uma variação contínua da tensão, na forma

$$i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (2.6)$$

Considerando-se a variação contínua da tensão a partir do instante $t=0$, escreve-se

$$i(t) = i_0(t) + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (2.7)$$

onde $i_0(t)$ representa a superposição das correntes posteriores causadas por variações da tensão anteriores ao instante $t=0$.

Levando a eq. (2.7) na eq. (2.4), obtem-se a expressão geral da corrente que atravessa um dielétrico sólido real, submetido a uma tensão continuamente variável desde o instante $t=0$ em que perdura a corrente posterior $i_0(t)$ proveniente de variações da tensão anteriores a este instante $t=0$

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + i_0(t) + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (2.8)$$

(von Schweidler¹⁵¹, F.Tank¹⁵⁶ e Gross^{35,40,70})

Os fenômenos de tensão de circuito aberto, aqueles classificados por Gross⁶⁹ no segundo grupo de fenômenos

característicos dos dielétricos reais, foram estudados considerando-se as placas do capacitor isoladas. Neste caso, tem-se

$$I(t) = 0$$

e a eq. (2.8) se reduz a

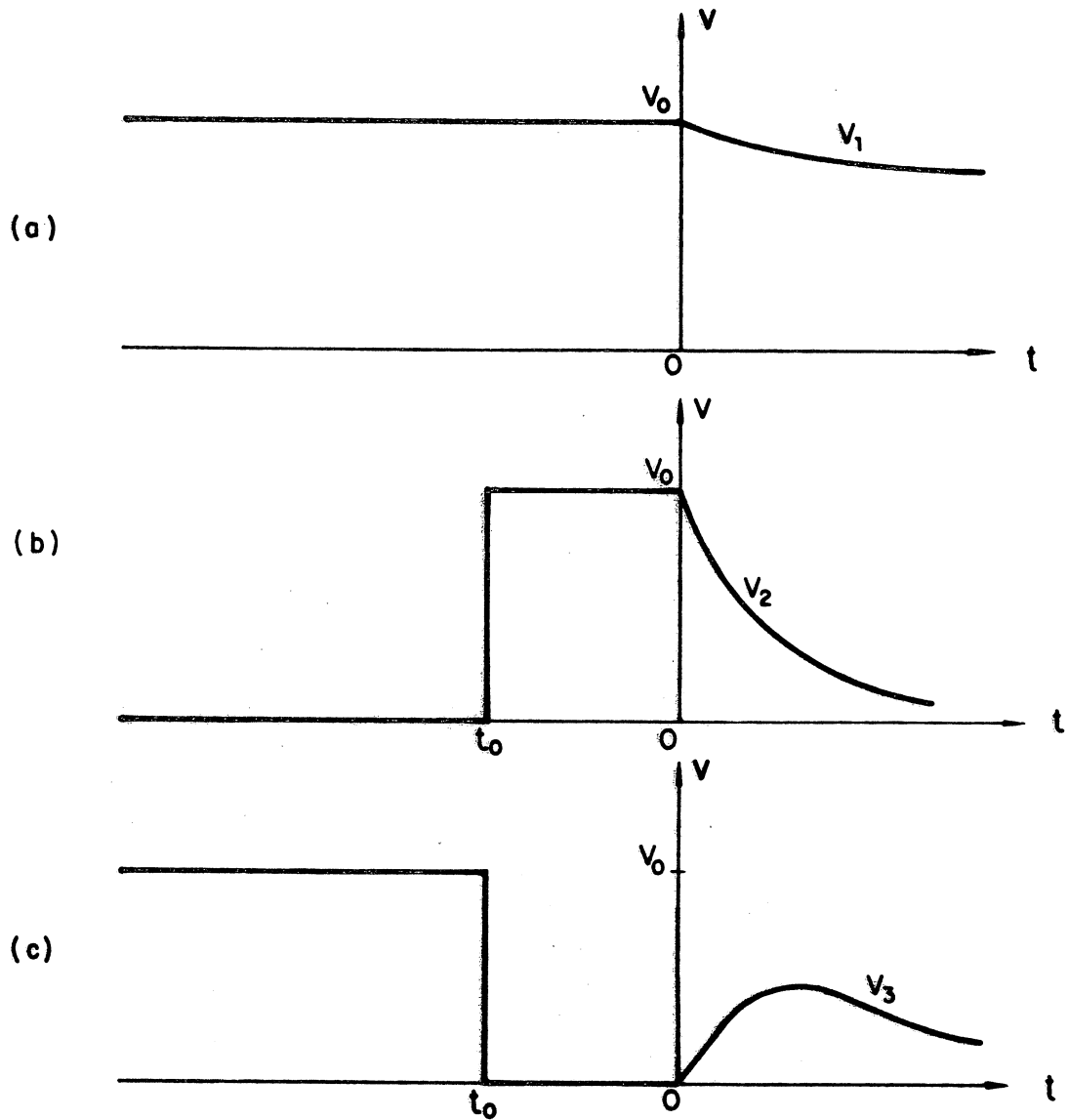
$$\frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + i_0(t) + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau = 0 \quad (2.9)$$

A eq. (2.9) é uma equação íntegro-diferencial que fornece a tensão $V(t)$ que aparece entre as placas isoladas do capacitor real. Com esta equação pode-se estudar os fenômenos mostrados na fig. 2.2.

As três curvas mostradas na fig. 2.2 representam o efeito posterior em dielétricos sólidos que são os fenômenos de tensão de circuito aberto que ocorrem nos dielétricos reais:

- a) o capacitor é carregado com uma tensão constante V_0 , durante um intervalo de tempo infinitamente longo. O circuito é subitamente aberto em $t=0$, instante este em que não existe nenhuma corrente posterior proveniente da aplicação de V_0 . Neste caso, a tensão de descarga interna decai lentamente;
- b) o capacitor esteve curto-circuitado durante um intervalo de tempo infinitamente longo e, após isso, a tensão V_0 é aplicada durante um intervalo de tempo t_0 finito e pequeno em relação ao intervalo de tempo de carga anterior. O circuito é, então, subitamente aberto em $t=0$. Neste caso, a tensão de

FIGURA 2.2
 EFEITO POSTERIOR EM DIELÉTRICOS SÓLIDOS
 (Gross^{39,40})



TENSÕES DE CIRCUITO ABERTO

- (a) tensão de descarga interna após carga completa (V_1)
 (b) tensão de descarga interna após carga parcial (V_2)
 (c) tensão de retorno (V_3)

descarga interna decai rapidamente e depende acen-
tuadamente do intervalo de tempo de carga t_0 (quanto
mais curto o intervalo de tempo de carga, mais rapi-
damente decai a tensão de descarga interna);

- c) o capacitor foi carregado durante um intervalo de
tempo infinitamente longo. Após isto, o capacitor é
curto-circuitado durante o intervalo de tempo t_0 .
O circuito é subitamente aberto em $t=0$ e, neste ca-
so, observa-se a formação de uma tensão de retorno
(a tensão de retorno sobe rapidamente e depois decai
lentamente).

Este efeito foi observado experimentalmente
(Gross^{35,69}), mostrado com a utilização da eq. (2.9)
(Gross^{35,36,70,71}), inter-relacionado (Gross^{39,40}) e ainda,
foram obtidas as curvas limites para estes fenômenos
(Gross^{41,47}).

De modo a permitir uma comparação entre os dados expe-
rimentais e a teoria fenomenológica elaborada deve-se, pois,
proceder a resolução da eq. (2.9). Esta equação íntegro-dife-
rencial pode fornecer a forma analítica da tensão $V(t)$ entre
as placas do capacitor para os diversos casos de interesse,
desde que se conheça a corrente posterior $i_0(t)$ que perdura
no instante t , proveniente de variações da tensão ocorridas
antes do instante $t=0$ e também, se tenha uma expressão para
a função de relaxação dielétrica $\phi(t)$.

Algumas soluções aproximadas foram tentadas
(Gross^{35,36,38,63,71,72}), admitindo-se algumas hipóteses sim-
plificadoras.

Primeiramente, supõe-se a função de relaxação dielétrica na forma de uma soma de exponenciais decrescentes

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\mu_i t} \quad (2.10)$$

onde

$$\sum_{i=1}^n A_i = \phi(0) \quad (2.11)$$

e os índices A_i , μ_i , e n são determinados experimentalmente.

A tensão $V(t)$ é suposta, então, ter a forma

$$V(t) = \sum_{k=1}^m V_k e^{-\gamma_k t} \quad (2.12)$$

As correntes posteriores para os três casos mostrados na fig. 2.2 podem ser colocadas em uma forma única, escrevendo-se

$$i_o(t) = \xi V_o \phi(t+t_o) \quad (2.13)$$

onde

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{para o caso (a)} \\ 1 & \text{para o caso (b)} \\ -1 & \text{para o caso (c)} \end{cases}$$

A solução é obtida determinando-se V_k , γ_k e m de modo que a eq. (2.9) seja satisfeita. Assim, levando as eqs.

(2.10) - (2.13) na eq. (2.9), resulta

$$\sum_{k=1}^m V_k e^{-\gamma_k t} \left[\frac{1}{RC} - \gamma_k - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{C} \cdot \frac{\gamma_k}{\mu_i - \gamma_k} \right] + \quad (2.14)$$

$$+ \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n A_i e^{-\mu_i t} \left[\xi V_o e^{-\mu_i t_o} + \sum_{k=1}^m V_k \frac{\gamma_k}{\mu_i - \gamma_k} \right] = 0$$

de modo que pode-se anular separadamente os termos das funções exponenciais, resultando

$$\frac{I}{RC} - \gamma - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{C} \cdot \frac{\gamma}{\mu_i - \gamma} = 0 \quad (2.15a)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\beta} V_{0\beta} e^{-\mu_i t_0} + \sum_{k=1}^m V_k \frac{\gamma_k}{\mu_i - \gamma_k} \right\} = 0 \quad (2.15b)$$

Com estas equações obtém-se a solução procurada, pois da eq. (2.15a) tem-se (n+1) raízes γ_k , resultando disso que

$$m = n + 1 \quad (2.16)$$

Levando-se as (n+1) raízes γ_k na eq. (2.15b) obtém-se um sistema de n equações para as (n+1) incógnitas V_k .

As tensões V_k ficam determinadas em função de uma constante de integração, V_{n+1} , determinada pelas condições de contorno em cada caso.

Uma discussão qualitativa foi feita tomando-se somente um termo na expansão da eq. (2.10) (Gross^{35,63,71})

$$\phi(t) = A e^{-\mu t} \quad (2.17)$$

A eq. (2.15a) fornece, então, duas raízes γ_1 e γ_2

$$\frac{I}{RC} - \gamma - \frac{A}{C} \cdot \frac{\gamma}{\mu - \gamma} = 0 \quad (2.18)$$

Assim, tem-se para o caso da tensão de descarga interna

$$V(t) = V_1 e^{-\gamma_1 t} + V_2 e^{-\gamma_2 t}$$

com

$$V(0) = V_0$$

donde

$$V_2 = V_0 - V_1$$

Fica, utilizando-se a eq. (2.15b) com $\xi=1$

$$V(t) = V_0 \frac{A}{c(v_2 - v_1)} \left[\left(\frac{1}{\frac{\mu}{v_1} - 1} + e^{-\mu t_0} \right) e^{-v_2 t} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{1 - \frac{\mu}{v_2}} - e^{-\mu t_0} \right) e^{-v_1 t} \right] \quad (2.19)$$

A eq. (2.19) mostra que as curvas de tensão de descarga interna têm a forma alterada com o crescimento do intervalo de tempo t_0 (como $v_2 > v_1$, o termo $e^{-v_1 t}$ prevaleceria e, com isto, a descarga interna se processaria mais lentamente).

Para o caso da tensão de retorno, tem-se

$$V(t) = V_1 e^{-v_1 t} + V_2 e^{-v_2 t}$$

com

$$V(0) = 0$$

donde

$$V_1 = -V_2$$

Fica, utilizando-se a eq. (2.15b) com $\xi=-1$

$$V(t) = V_0 \frac{e^{-\mu t_0}}{\frac{1}{\frac{\mu}{v_1} - 1} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{v_2}}} \left(e^{-v_1 t} - e^{-v_2 t} \right)$$

ou,

$$v(t) = V_0 \frac{A e^{-\mu t_0}}{C (\nu_2 - \nu_1)} \left[e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t} \right] \quad (2.20)$$

A eq. (2.20) mostra que as diversas curvas de tensão de retorno, para os diversos intervalos de tempo de curto t_0 , diferem entre si pelo termo $e^{-\mu t_0}$. Além disso, o instante de tempo t_m em que a tensão de retorno atinge seu máximo é independente do intervalo de tempo de curto t_0 , pois

$$t_m = \left(\frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \right) \ln \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

independente de t_0 .

A solução citada anteriormente sofre a fraqueza teórica de considerar a forma da função de relaxação dielétrica como uma soma de exponenciais decrescentes, o que não é observado experimentalmente.

Uma outra solução aproximada, mais realística, foi tentada considerando-se a forma da função de relaxação dielétrica como a função de Schweidler¹⁵¹ (Gross^{35,36,38,72})

$$\phi(t) = \beta t^{-\alpha} \quad (2.21)$$

com β e α constantes, e

$$(\beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1)$$

A tensão de descarga interna é calculada considerando-se dois casos: para intervalos de tempo de carga muito longos (Gross⁷²) e intervalos de tempo de carga muito curtos (Gross³⁸), ambos considerados em um instante de tempo t pequeno.

No primeiro caso, com intervalos de tempo de carga muito longos, a corrente posterior que perdura no instante de tempo $t=0$ é nula, de modo que a eq. (2.9) fica reduzida a

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \int_0^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\beta}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = 0 \quad (2.22)$$

A aproximação que se faz, neste caso, é considerar

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} \approx \frac{dv(t)}{dt}$$

ou seja, o termo $dv(\tau)/d\tau$ pode ser retirado do sinal de integração. Desde que o valor da integral na eq. (2.22) depende da variação da função $dv(\tau)/d\tau$ em relação à função $\beta(t-\tau)^{-\alpha}$, no intervalo $0 \leq \tau \leq t$ esta aproximação pode ser considerada válida tomando-se o intervalo pequeno (ou seja, para pequenos valores de t) e ter-se em conta que a tensão, depois de uma carga completa, não variará significativamente em relação à função de von Schweidler neste intervalo; ou para $\alpha \approx 1$.

Assim, a eq. (2.22) fica reduzida a uma equação diferencial ordinária, na forma

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{\beta}{(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

ou,

$$- \frac{1}{v(t)} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{RC \left[1 + \frac{\beta}{C(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \right]}$$

introduzindo

$$T = RC \left[1 + \frac{\beta}{C(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \right] \quad (2.23)$$

resulta

$$\frac{I}{V(t)} dV = \frac{-I}{T} dt \quad (2.24)$$

A eq. (2.24) tem a mesma forma que a tensão de descarga interna do capacitor ideal porém, com uma "constante de tempo" dada por T, que como mostra a eq. (2.23) é função de tempo. O conceito de capacitância para um capacitor real deve, pois, ser revisado, não tendo mais o sentido de constante (Gross³⁸).

No segundo caso, com intervalos de tempo de carga muito curtos, a eq. (2.9) dá

$$\frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + V_0 \phi(t+t_0) + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau = 0$$

A mesma aproximação de retirar a derivada de dentro do sinal de integral, como a realizada após a eq. (2.22), é feita e, considerando-se para a função de relaxação dielétrica a função de von Schweidler, eq. (2.21), resulta, desprezando-se V/R

$$\frac{V_0 - V(t)}{V_0} = \frac{\beta}{C} \int_0^t \frac{(t+t_0)^{-\alpha}}{1 + \frac{\beta}{C(1-\alpha)} t^{1-\alpha}} dt$$

Fazendo-se ainda outra aproximação, considerando-se agora que para instantes de tempo muito curtos, e sendo $\alpha \approx 1$, o denominador dentro da integral varia lentamente, podendo ser considerado constante, resulta finalmente

$$\frac{V_0 - V(t)}{V_0} = \frac{(t+t_0)^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{\frac{C(1-\alpha)}{\beta} + t^{1-\alpha}} \quad (2.25)$$

As soluções aproximadas apresentadas anteriormente permitem facilmente o acesso a uma expressão analítica, possibilitando uma análise qualitativa dos fenômenos de tensão de circuito aberto em dielétricos sólidos reais. Por outro lado, estas aproximações impossibilitam uma comparação precisa com os dados experimentais disponíveis pois, eventuais divergências não poderiam ser atribuídas, rigorosamente, a nenhum motivo em particular (erros introduzidos pelas aproximações feitas, erros de medição ou mesmo erros advindos de enganos na formulação das hipóteses fundamentais).

Entretanto, a equação íntegro-diferencial (2.9) foi trabalhada matematicamente e possui solução analítica rigorosa, tomando-se para a função de relaxação a forma proposta por von Schweidler¹⁵¹ (F.M.Oliveira Castro^{124,125,127}, A.Moraes e M.Schenberg^{147,148}).

Uma primeira solução foi feita mediante mudança de variáveis que transformaram a equação íntegro-diferencial (2.9) em uma equação integral de Volterra de segunda espécie e, após isto, resolvida pelo método dos núcleos iterados, proposto pelo próprio Volterra (F.M.Oliveira Castro^{124,125}).

Para tanto, supõe-se a função de relaxação dielétrica na forma de função de Schweidler

$$\phi(t) = \beta t^{-\alpha} \quad (2.26)$$

faz-se a mudança de variáveis

$$\psi(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (2.27)$$

e adota-se as seguintes notações

$$* = \beta R \quad (2.28)$$

$$\rho = 1 - \alpha \quad (2.29)$$

$$\lambda = \frac{1}{RC} \quad (2.30)$$

$$K(\tau, t) = \lambda \left[1 + \kappa (t - \tau)^{\rho-1} \right] \quad (2.31)$$

$$f(t) = - \left[\lambda v(0) + \frac{i_0(t)}{C} \right] \quad (2.32)$$

Tem-se, então

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

Levando as eqs. (2.26) - (2.33) na eq. (2.9), resulta

$$\left[v(0) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right] \frac{1}{R} + C \psi(t) + \int_0^t \psi(\tau) \beta (t - \tau)^{-\alpha} d\tau + i_0(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \psi(t) + \int_0^t \psi(\tau) \lambda \left[1 + \kappa (t - \tau)^{\rho-1} \right] d\tau &= \\ = - \left[\lambda v(0) + \frac{i_0(t)}{C} \right] \end{aligned}$$

ou,

$$\psi(t) + \int_0^t \psi(\tau) K(\tau, t) d\tau = f(t) \quad (2.34)$$

A eq. (2.34) está na forma de uma equação integral de Volterra de segunda espécie, com o núcleo $K(\tau, t)$ e a função $f(t)$ conhecidas. De modo a obtê-la, supôs-se conhecida a função de relaxação dielétrica (dada pela função de Schweidler)

e, também, a corrente posterior $i_0(t)$ que perdura no instante t , proveniente de variações de tensão anteriores ao instante $t=0$, nos casos (a), (b) e (c) da fig. 2.2, dada pela eq. (2.13).

A solução da eq. (2.34) é dada por

$$\psi(t) = f(t) + \int_0^t f(\tau) S(\tau, t) d\tau$$

o núcleo resolvente $S(\tau, t)$ é fornecido pela série

$$S(\tau, t) = \sum_{h=1}^{\infty} K^{(h)}(\tau, t)$$

onde $K^{(h)}(\tau, t)$ são os núcleos iterados, dados por

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\tau, t) &= -K(\tau, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ K^{(h)}(\tau, t) &= \int_{\tau}^t K^{(h-1)}(\tau, \Delta) K^{(1)}(\Delta, t) d\Delta \end{aligned}$$

A solução final da eq. (2.13) será

$$v(t) = v(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} f(\Delta) S(\Delta, \tau) d\Delta$$

ou, usando a identidade de Dirichlet

$$\int_0^t d\tau \int_0^{\tau} f(\Delta) S(\Delta, \tau) d\Delta \equiv \int_0^t d\Delta \int_{\Delta}^t f(\Delta) S(\Delta, \tau) d\tau$$

resulta finalmente

$$v(t) = v(0) + \int_0^t G(\Delta, t) f(\Delta) d\Delta \quad (2.35)$$

onde

$$G(\lambda, t) = 1 + \int_{\lambda}^t S(\lambda, \tau) d\tau \quad (2.36)$$

A eq. (2.35) é a solução geral da equação íntegro-diferencial (2.9), que satisfaz a condição

$$V(t) \Big|_{t=0} = V(0)$$

As formas explícitas para a solução da eq. (2.9) são mostradas a seguir (F.M.Oliveira Castro^{124,125}),

$$K^{(h)}(\lambda, t) = (-\lambda)^h \sum_{\nu=0}^h \binom{h}{\nu} \frac{\sigma^{\nu} (t-\lambda)^{h-\nu+\nu p - 1}}{\Gamma(h-\nu+\nu p)} \quad (2.37)$$

$$S(\lambda, t) = \sum_{h=1}^{\infty} (-\lambda)^h \sum_{\nu=0}^h \binom{h}{\nu} \frac{\sigma^{\nu} (t-\lambda)^{h-\nu+\nu p - 1}}{\Gamma(h-\nu+\nu p)} \quad (2.38)$$

$$G(\lambda, t) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} (-\lambda)^h \sum_{\nu=0}^h \binom{h}{\nu} \frac{\sigma^{\nu} (t-\lambda)^{h-\nu+\nu p}}{\Gamma(h-\nu+\nu p + 1)} \quad (2.39)$$

onde

$$\sigma = \beta R \Gamma(p) \quad (2.40)$$

$$\binom{h}{\nu} = \frac{h!}{\nu! (h-\nu)!}$$

e o signo Γ denota a função gama

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

Alguns casos particulares foram apresentados a partir desta solução geral. Assim, o caso quando o intervalo de tempo de carga e o instante de tempo considerado são pequenos, foi obtido considerando-se a resistência R tendendo a infinito ($R \rightarrow \infty$) pois, nestas condições, a corrente ohmica V/R é desprezível em relação à corrente posterior $i_0(t)$ (F.M.Oliveira Castro^{124,125}).

Neste caso, tem-se

$$V(t) = V(0) + \int_0^t E_p \left[\frac{-\beta}{C} \Gamma(\rho) (t-\lambda)^\rho \right] f(\lambda) d\lambda \quad (2.41)$$

com

$$f(\lambda) = -\frac{i_0(\lambda)}{C}$$

onde, E_p é a função de Mittag-Leffler, definida por

$$E_p(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{\Gamma(h\rho + 1)} \quad (2.42)$$

Uma comparação da solução analítica rigorosa com as soluções aproximadas obtidas por Gross^{35,36,38,71,72}, mostrou que estas últimas são simples, úteis e, para instantes de tempo pequenos, bastante rigorosas (F.M.Oliveira Castro¹²¹).

Na solução analítica rigorosa citada anteriormente, o trabalho maior fica para o cálculo dos núcleos iterados, eq. (2.37). O uso do cálculo operacional de Heaviside permitiu obter imediatamente a forma geral dos núcleos iterados (F.M.Oliveira Castro¹²⁷). Assim, a eq. (2.9) dá:

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \int_0^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau = -i_0(t) \quad (2.43)$$

Introduzindo a mudança de variável

$$\psi(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.44)$$

e, adotando a notação

$$\lambda = \frac{1}{RC} \quad (2.45)$$

$$f(t) = - \left[\lambda v(0) + \frac{i_0(t)}{C} \right] \quad (2.46)$$

$$y = \frac{\beta}{C} \Gamma(1-\alpha) \quad (2.47)$$

onde

$$\phi(t) = \beta t^{-\alpha} \quad , \text{ função de von Schweidler}$$

tem-se

$$\psi(t) + \lambda \int_0^t \psi(\tau) d\tau + y \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \psi(\tau) d\tau = f(t) \quad (2.48)$$

Utilizando-se o método operacional de Heaviside, para $f(t)=1$ (função unitária de Heaviside), fica

$$-\Omega(p) + \lambda \frac{\Omega(p)}{p} + y \Omega(p) p^{\alpha-1} = 1$$

ou,

$$\Omega(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{p} + y p^{\alpha-1}}$$

donde,

$$\Omega(p) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \sum_{\nu=0}^h \binom{h}{\nu} y^{\nu} \lambda^{h-\nu} \frac{1}{p^{h-\alpha\nu}}$$

ou, tomando-se a transformada inversa

$$G(t) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \sum_{\nu=0}^h \binom{h}{\nu} y^{\nu} \lambda^{h-\nu} \frac{t^{h-\alpha\nu}}{\Gamma(h-\alpha\nu+1)}$$

(2.49)

Uma comparação com a eq. (2.39) mostra ser ela idêntica à eq. (2.49).

Agora, para um $f(t)$ qualquer, a solução da eq. (2.48) pode ser escrita na forma

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

e, usando a mudança de variáveis, eq. (2.44), resulta finalmente

$$v(t) = v(0) + \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.50)$$

tal como obtido pelo método dos núcleos iterados.

Por último, a solução da equação íntegro-diferencial (2.9) foi obtida com o uso da transformada de Laplace (A.Moraes e M.Schenberg¹⁴⁸)

Para tanto, considera-se a eq. (2.9)

$$\frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau = -i_0(t)$$

Integrando esta equação de 0 a x, obtem-se a equação integral de Volterra de segunda espécie, na forma

$$V(x) = F(x) + \int_0^x K(x-t) V(t) dt \quad (2.51)$$

onde

$$K(x-t) = -\frac{1}{C} \left[\frac{1}{R} + \phi(x-t) \right] \quad (2.52)$$

$$F(x) = V(0) + \frac{1}{C} V(0) \int_0^x \phi(t) dt - \frac{1}{C} \int_0^x i_0(t) dt \quad (2.53)$$

Tomando-se a transformada de Laplace em ambos os membros da eq. (2.51), vem, lembrando que a transformada de uma integral de convolução é o produto da transformada das funções,

$$u(z) = f(z) + K(z) u(z)$$

ou,

$$u(z) = \frac{f(z)}{1 - K(z)} \quad (2.54)$$

A função V(t) é, então, obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da eq. (2.54), ou seja:

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tz} \frac{f(z)}{1-\kappa(z)} dz \quad (2.55)$$

As formas explícitas para os termos envolvidos na eq. (2.55) são mostradas abaixo, onde considera-se para a função de relaxação dielétrica a forma de von Schweidler, eq. (2.26), e para a corrente posterior $i_0(t)$, a expressão dada na eq. (2.13).

Tem-se

$$\kappa(z) = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{z} - \frac{\beta}{C} \Gamma(1-\alpha) z^{\alpha-1} \quad (2.56)$$

$$f(z) = \left[V(0) + \frac{\sum \beta V_0}{C} \cdot \frac{t_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \frac{1}{z} +$$

$$+ \frac{\beta}{C} \Gamma(1-\alpha) V(0) z^{\alpha-2} -$$

$$- \sum V_0 \frac{\beta}{C} \Gamma(1-\alpha) e^{t_0 z} z^{\alpha-2} + \quad (2.57)$$

$$+ \sum \frac{\beta}{C} \cdot \frac{V_0}{1-\alpha} e^{t_0 z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{t_0^{\nu+2-\alpha}}{\nu+2-\alpha}$$

A solução pode ser consideravelmente simplificada com o uso das funções de Green (M.Schenberg¹⁴⁷).

A solução da eq. (2.9) é dada por

$$V(t) = \int_0^t G(t-\tau) F(\tau) d\tau \quad (2.58)$$

onde $G(t-\tau)$ é a função de Green, no caso, dada por

$$G(t-\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{(t-\tau)z}}{1-k(z)} dz \quad (2.59)$$

O caso particular em que $(1/R)=0$ é estudado simplificando-se a eq. (2.56) para (A.Moraes e M.Schenberg¹⁴⁸)

$$k(z) = -\frac{\beta}{C} \Gamma(1-\alpha) z^{\alpha-1}$$

ou,

$$k(z) = -A z^{\alpha-1} \quad (2.60)$$

onde

$$A = \frac{\beta}{C} \Gamma(1-\alpha)$$

Neste caso, tem-se

$$G(t-\tau) = \frac{-d}{d\alpha} E_{1-\alpha} \left[-A (t-\tau)^{1-\alpha} \right] + \delta(t-\tau) \quad (2.61)$$

onde $E_{1-\alpha}$ é a função de Mittag-Leffler de ordem $(1-\alpha)$ e δ é a função delta de Dirac.

E, finalmente

$$V(t) = V(0) - \frac{1}{C} \int_0^t E_{1-\alpha} \left[-A (t-\tau)^{1-\alpha} \right] i_0(\tau) d\tau \quad (2.62)$$

da mesma forma que a eq. (2.41), solução obtida para o mesmo caso, com o método dos núcleos iterados.

Além disso, o mesmo tipo de solução com a redução a uma equação integral de Volterra e o uso das transformadas de Laplace para resolvê-la, foi utilizada para uma equação mais geral que a eq. (2.9), da forma (A.Moraés e M.Schenberg¹⁴⁸)

$$\sum_{\nu=0}^n A_{\nu} v^{(\nu)}(t) + \int_0^t \phi(t-\tau) \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau + \bar{I}(t) = 0 \quad (2.63)$$

onde

$$v^{(0)}(t) = v(t)$$

$$v^{(\nu)}(t) = \frac{d^{\nu} v(t)}{dt^{\nu}}$$

Os estudos das soluções das equações integrais de Volterra, intimamente relacionadas com a dispersão temporal, continuam a ser desenvolvidos e muitas técnicas têm sido usadas com a finalidade de se obter soluções analíticas rigorosas, utilizando-se ferramentas matemáticas as mais diversas (Gross^{41,51}, Byron e Fuller¹⁴, Tricomi¹⁶¹, Krasnov et.al.⁹², Petrovski¹³⁶, Mikhlin¹¹¹, Rabotnov¹³⁷, Mathews e Walker¹⁰⁸, J.G.Blom e H.Brunner⁷).

Obtidas as soluções analíticas rigorosas que permitiram uma comparação precisa com os dados experimentais, foram, ainda, estabelecidas relações simples entre as curvas de tensão de descarga interna e tensão de retorno (Gross^{39,40}) e determinadas as curvas limites para estas tensões (Gross^{41,47}), independentemente da forma particular da função de relaxação dielétrica.

De modo a estabelecer relações entre as curvas de tensão, considera-se os três casos mostrados na fig.2.2, sendo válida a eq. (2.9). Nestes casos, as correntes posteriores provenientes de variações da tensão ocorridas antes do instante $t=0$, estão indicadas na eq. (2.13) |para o caso (a) esta corrente é nula e para os casos (b) e (c) tem a mesma forma com sinais trocados|. O estabelecimento de relações entre as tensões $V_1(t)$, $V_2(t)$ e $V_3(t)$ permite, a partir do conhecimento de uma delas, o cálculo das outras duas e, ainda, como admite-se válido o princípio de superposição, o cálculo de situações mais complexas como uma combinação linear dos três casos simples mostrados na fig.2.2. Tem-se, então: a eq. (2.9) pode ser escrita na forma

$$\frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau = -i(t) \quad (2.64)$$

onde

$$i(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ para o caso (a)} \\ i_0(t) & , \text{ para o caso (b)} \\ -i_0(t) & , \text{ para o caso (c)} \end{cases} \quad (2.65)$$

com

$$i_0(t) = V_0 \phi(t+t_0)$$

A eq. (2.64) pode ser escrita, com a utilização do operador linear \hat{F} , na forma

$$\left\{ \frac{1}{R} + C \frac{d}{dt} + \int_0^t d\tau \phi(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \right\} [V(t)] = -i(t)$$

$$\hat{F} [v(t)] = -i(t) \quad (2.66)$$

A linearidade do operador \hat{F} é mostrada pela relação

$$\hat{F} [v_1(t)] + \hat{F} [v_2(t)] = \hat{F} [v_1(t) + v_2(t)] \quad (2.67)$$

Valem então, as relações

$$\hat{F} [v_1(t)] = 0 \quad , \text{ com } v_1(0) = v_0 \quad (2.68)$$

$$\hat{F} [v_2(t)] = -i_0(t) \quad , \text{ com } v_2(0) = v_0 \quad (2.69)$$

$$\hat{F} [v_3(t)] = i_0(t) \quad , \text{ com } v_3(0) = 0 \quad (2.70)$$

Somando, membro a membro, as eqs. (2.69) e (2.70), vem

$$\hat{F} [v_2(t) + v_3(t)] = 0 \quad , \text{ com } v_2(0) + v_3(0) = 0 \quad (2.71)$$

Comparando as eqs. (2.69) e (2.71), resulta

$$v_1(t) = v_2(t) + v_3(t) \quad (2.72)$$

A eq. (2.72) é a primeira relação desejada e mostra que conhecidos dois casos, o terceiro é obtido diretamente.

Outra relação pode ser obtida, utilizando-se a solução da eq. (2.9) realizada por F.M.Oliveira Castro^{124,125}.

A eq. (2.9) pode ser transformada em uma equação integral de Volterra de segunda espécie, na forma da eq. (2.34)

$$\psi(t) + \int_0^t \psi(\gamma) \kappa(t-\gamma) d\gamma = f(t) \quad (2.73)$$

onde, das eqs. (2.26) - (2.32), tem-se

$$\psi(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$K(t-\tau) = \frac{1}{RC} \left[1 + \beta R(t-\tau)^{-\alpha} \right]$$

$$f(t) = - \left[\frac{V(0)}{RC} + \frac{i(t)}{C} \right]$$

com,

$$\phi(t) = \beta t^{-\alpha}$$

Para os três casos considerados, tem-se

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-V_0}{RC} & , \text{ para o caso (a)} \\ \frac{-V_0}{RC} - \frac{i_0(t)}{C} & , \text{ para o caso (b)} \\ \frac{i_0(t)}{C} & , \text{ para o caso (c)} \end{cases} \quad (2.74)$$

As equações para os três casos ficam, explicitamente

$$\psi_1(t) + \int_0^t \psi_1(\tau) K(t-\tau) d\tau = \frac{-V_0}{RC} \quad (2.75)$$

$$\psi_2(t) + \int_0^t \psi_2(\tau) K(t-\tau) d\tau = - \left[\frac{V_0}{RC} + \frac{i_0(t)}{C} \right] \quad (2.76)$$

$$\psi_3(t) + \int_0^t \psi_3(\tau) K(t-\tau) d\tau = \frac{-i_0(t)}{C} \quad (2.77)$$

Agora, a partir da eq. (2.73), pode-se mostrar que sendo $f(t)$ constante e igual a A e a solução correspondente $\psi_A(t)$, uma outra solução qualquer pode ser obtida pela relação (Gross³⁹)

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{A} \int_0^t f(t-\tau) \psi_A(\tau) d\tau \quad (2.78)$$

Note-se que o caso (a) possui $f(t)$ constante, igual a $(-V_0/RC)$, com a solução correspondente $\psi_1(t)$. Deste modo, toma-se o caso (a) como referência e aplica-se a eq. (2.78) para os casos (b) e (c), obtendo-se

$$\psi_2(t) = \frac{R}{V_0} \frac{d}{dt} \int_0^t \left[\frac{V_0}{R} + i_0(t-\tau) \right] \psi_1(\tau) d\tau$$

$$\psi_3(t) = \frac{-R}{V_0} \frac{d}{dt} \int_0^t i_0(t-\tau) \psi_1(\tau) d\tau$$

cuja integração fornece, finalmente

$$V_2(t) = V_1(t) + \frac{R}{V_0} \int_0^t \frac{dV_1(\tau)}{d\tau} i_0(t-\tau) d\tau \quad (2.79)$$

$$V_3(t) = \frac{-R}{V_0} \int_0^t \frac{dV_1(\tau)}{d\tau} i_0(t-\tau) d\tau \quad (2.80)$$

Assim, com as eqs. (2.72), (2.79) e (2.80) obtem-se as relações simples entre as curvas de tensão de descarga interna e tensão de retorno. Elas mostram que o conhecimento da curva de tensão de descarga interna após uma carga completa e da expressão para a corrente posterior, permite o cálculo das curvas de tensão de descarga interna e tensão de retorno

para quaisquer intervalos de tempo t_0 de carga ou curto, respectivamente. Note-se que estas relações são válidas independentemente da forma particular da função de relaxação dielétrica (Gross⁶¹).

Finalmente, ainda com o uso da equação íntegro-diferencial (2.9) foi mostrada a absorção dielétrica (Gross⁴⁷), determinada a inclinação inicial das curvas de tensões de circuito aberto (Gross⁴⁷) e estabelecidas relações entre as curvas limites destas tensões (Gross^{41,47}).

Assim, a equação do capacitor absoritivo (2.9) pode ser colocada na forma da equação de um capacitor não-absoritivo, ideal:

da eq. (2.9), vem

$$C \frac{dV(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau + \frac{V(t)}{R} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[C V(t) + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \int_{\tau}^t \phi(t-\tau) dt d\tau \right] + \frac{V(t)}{R} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[C V(t) + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \int_0^{t-\tau} \phi(\sigma) d\sigma d\tau \right] + \frac{V(t)}{R} = 0$$

ou,

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R} = 0 \quad (2.81)$$

com

$$Q(t) = CV(t) + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \int_0^{t-\tau} \phi(\sigma) d\sigma d\tau \quad (2.82)$$

onde $Q(t)$ é a carga armazenada, no instante t , pelo capacitor; CV é a carga armazenada pela capacitância geométrica e o último termo no lado direito representa a absorção dielétrica.

Com a eq. (2.9) pode-se, ainda, calcular a inclinação inicial das curvas de tensões de circuito aberto mostradas na fig. 2.2. Assim, considerando-se o instante $t=0$ em que o circuito é subitamente aberto, a integral na eq. (2.9) se anula e resta

$$\left(\frac{dV(t)}{dt} \right)_0 = \frac{-V(0)}{RC} - \frac{i_0(0)}{C} \quad (2.83)$$

para o caso (b), tensão de descarga interna após um intervalo de tempo de carga t_0 , com a tensão aplicada V_0 , tem-se

$$V_2(0) = V_0$$

$$i_0(t) = V_0 \phi(t+t_0)$$

$$i_0(0) = V_0 \phi(t_0)$$

donde,

$$\left(\frac{dV_2}{dt} \right)_0 = \frac{-V_0}{RC} - \frac{V_0}{C} \phi(t_0) \quad (2.84)$$

para o caso (a), tensão de descarga interna após uma carga por um intervalo de tempo infinitamente grande, tem-se

$$t_0 \rightarrow \infty$$

$$\phi(t_0) \rightarrow 0$$

donde,

$$\left(\frac{dV_1}{dt} \right)_0 = \frac{-V_0}{RC} \quad (2.85)$$

e, para o caso (c), tensão de retorno, tem-se

$$V_3(0) = 0$$

$$i_0(t) = -V_0 \phi(t+t_0)$$

$$i_0(0) = -V_0 \phi(t_0)$$

donde,

$$\left(\frac{dV_3}{dt} \right)_0 = \frac{V_0}{C} \phi(t_0) \quad (2.86)$$

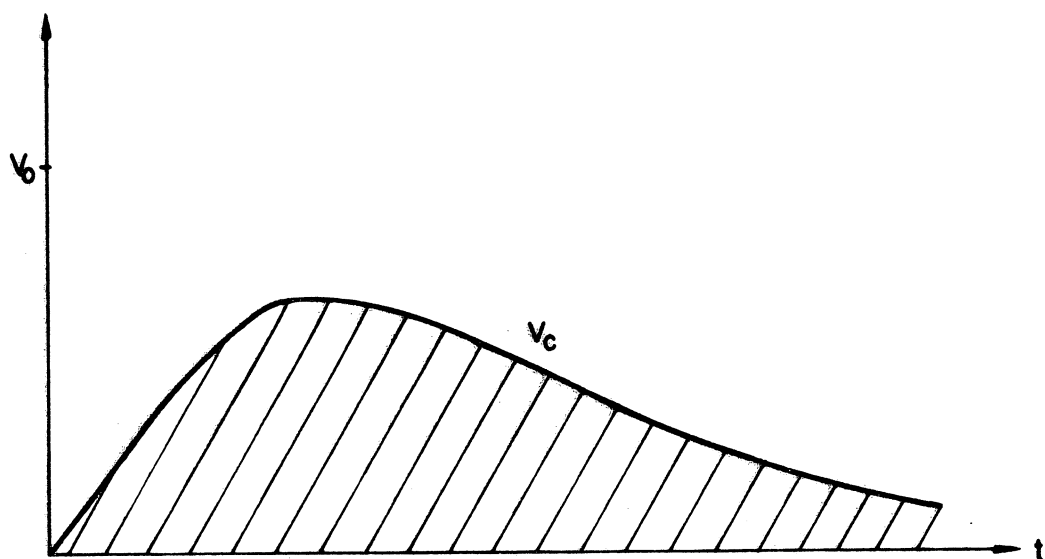
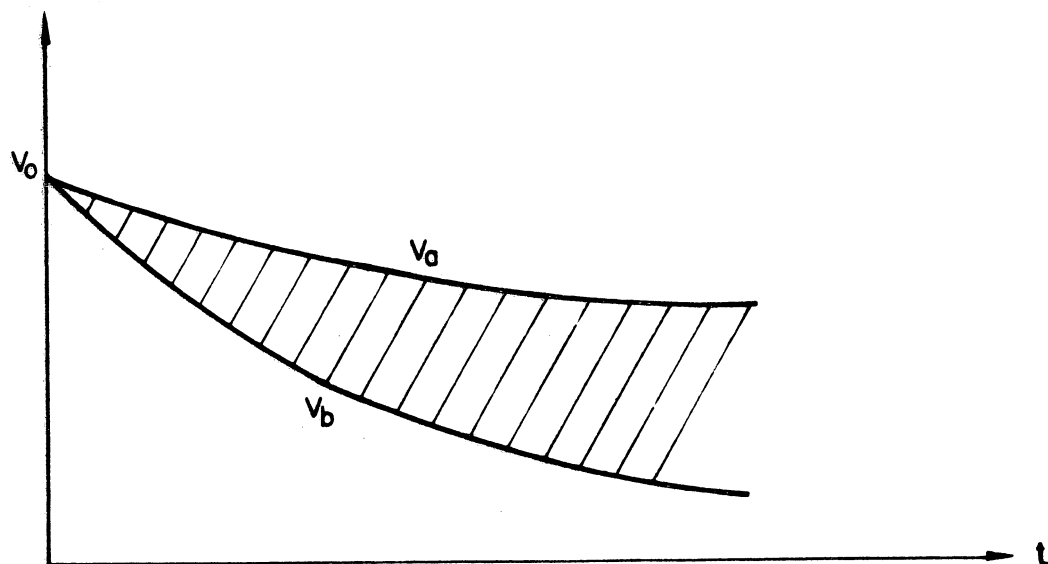
Por último, os fenômenos de tensões de circuito aberto em capacitores absorptivos foram mostrados possuírem curvas limites (Gross^{41,47}). As curvas mostradas na fig. 2.3 representam estas curvas limites, onde:

$V_a(t)$ é a mais lenta de todas as curvas de tensão de descarga interna, obtida após uma carga com tensão contínua V_0 , durante um intervalo de tempo infinitamente longo;

$V_b(t)$ é a mais rápida de todas as curvas de tensão de descarga interna, obtida quando a tensão de carga V_0 é aplicada por um intervalo de tempo extremamente curto de modo que não existe absorção pelo capacitor;

$V_c(t)$ é a mais rápida de todas as curvas de tensão de retorno, obtida quando após uma carga com a tensão V_0 por um intervalo de tempo infinitamente

FIGURA 2.3
 CURVAS LIMITES DAS TENSÕES DE CIRCUITO ABERTO
 (Gross⁴⁷)



- (V_a) a mais lenta das curvas de tensão de descarga interna
 (V_b) a mais rápida das curvas de tensão de descarga interna
 (V_c) a mais rápida das curvas de tensão de retorno

longo, o capacitor é curto-circuitado por um intervalo de tempo t_0 extremamente pequeno, de modo que o capacitor só perdeu a carga armazenada na capacitância geométrica.

A partir da eq. (2.9), foram obtidas as seguintes relações entre estas curvas limites (Gross^{41,47})

$$V_b = -RC \frac{dV_a}{dt} \quad (2.87)$$

$$V_c = V_a - V_b \quad (2.88)$$

$$V_c = V_a + RC \frac{dV_a}{dt} \quad (2.89)$$

As eqs. (2.87) - (2.89) mostram que as curvas de tensão de descarga interna são limitadas por duas curvas limites, a mais rápida proporcional à declividade da mais lenta e que a diferença das duas dá a curva limite para a tensão de retorno, independentemente da forma particular da função de relaxação dielétrica.

2.2 ABORDAGEM PELA TEORIA DE CAMPO

Uma tentativa de abordagem pela teoria de campo, dos fenômenos eletromagnéticos considerando-se os aspectos de dispersão temporal, foi feita ainda por Volterra (p.194-195)¹⁶⁵. Este autor usou a teoria dos funcionais e chegou à seguinte equação integral, considerando o efeito hereditário numa aproximação linear, em um meio homogêneo e isotrópico

$$\vec{P}(t) = \epsilon \vec{E}(t) + \int_0^{T_0} \psi(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \quad (2.90)$$

onde \vec{P} é a polarização, \vec{E} o campo elétrico e ψ a função hereditária positiva, decrescente e nula para $t=T_0$ (duração de hereditariedade).

Volterra¹⁶⁵ observa ainda, de passagem, que a aproximação linear é insuficiente para explicar alguns fenômenos de eletrodinâmica.

A teoria desenvolvida por von Schweidler¹⁵¹, Tank¹⁵⁶ e Gross^{40,47} foi feita através de uma abordagem destes fenômenos pela teoria de circuito, conforme citado no item anterior. Entretanto, o próprio Gross⁷² observa a necessidade de se utilizar a teoria de campo no estudo dos dielétricos absorptivos, como forma de torná-lo geral e rigoroso.

Alguns aspectos da teoria fenomenológica do comportamento dielétrico foram estudados, utilizando-se elementos da teoria de campo, inicialmente por Wiseman e Feaster¹⁷² e, em seguida, por Perlman e Meunier¹³².

Wiseman e Feaster¹⁷² utilizaram uma função de relaxação dielétrica, por eles denominada de função de polarização

empírica, $\pi(t)$, e consideraram que a polarização $\vec{P}(t)$ em um dielétrico absorptivo, submetido a um campo elétrico em forma de função degrau, $\vec{E}(0)$, é dada por

$$\vec{P}(t) = \vec{E}(0) \pi(t) \quad (2.91)$$

Utilizando o princípio de superposição, estes autores determinaram que a polarização, após a aplicação de um campo elétrico em forma de pulso, $\vec{E}(0)$, durante um intervalo de tempo τ , é dada por

$$\vec{P}(t) = \vec{E}(0) [\pi(t) - \pi(t-\tau)] \quad (2.92)$$

Perlman e Meunier¹³² estenderam a aplicação do princípio de superposição para o caso do campo elétrico variando continuamente e propuseram a polarização $\vec{P}(t)$ na forma

$$\vec{P}(t) = \vec{E}(0) \pi(t) + \int_0^t \frac{d\vec{E}(\tau)}{d\tau} \pi(t-\tau) d\tau \quad (2.93)$$

Nos dois trabalhos, a confirmação experimental foi feita com o uso de cera de carnaúba.

Uma tentativa de formulação geral, usando a análise da função resposta linear foi feita por Garcia-Moliner³³ em conexão com os fenômenos de relaxação e ressonância viscoelástica.

O tratamento unificado, com a utilização da teoria de campo, dos fenômenos de polarização considerando-se a dispersão temporal, foi feito por Tilley^{159,160} para os fenômenos isotérmicos e por Perlman^{130,131} para os fenômenos não-isotérmicos.

Limitando-se aos fenômenos eletromagnéticos na condição isotérmica, Tilley^{159,160} fez a hipótese fundamental de que a polarização do material dielétrico absorptivo pode ser dividida em duas componentes: uma resposta rápida e, outra, a resposta lenta que seria a superposição de todos os campos elétricos aplicados previamente.

Assim, tem-se

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_i(t) + \vec{P}_s(t) \quad (2.94)$$

onde, a resposta rápida, $\vec{P}_i(t)$, é dada por

$$\vec{P}_i(t) = \chi_i \vec{E}(t) \quad (2.95)$$

e a resposta lenta, $\vec{P}_s(t)$, por

$$\vec{P}_s(t) = \int_{-\infty}^t \chi_s(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.96)$$

A função resposta $\chi_s(t)$ deve obedecer às condições,

- a) $\chi_s(t) = 0$, para $t < 0$
 - b) $\chi_s(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$
- (2.97)

Levando as eqs. (2.95) e (2.96) na eq. (2.94), obtem-se para a polarização total

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= \chi_i \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi_s(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \\ \vec{P}(t) &= \int_{-\infty}^{t+} \chi_i \vec{E}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t+} \chi_s(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \\ \vec{P}(t) &= \int_{-\infty}^{t+} \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.98)$$

onde

$$\chi(t) = \chi_i \delta(t) + \chi_\lambda(t) \quad (2.99)$$

é a função resposta, relacionada com a função $\pi(t)$ das eqs. (2.91) - (2.93), por

$$\chi(t) = \frac{d\pi(t)}{dt} \quad (2.100)$$

Além disso, a função de relaxação dielétrica $\phi(t)$ usada por Gross e citada no item anterior, é proporcional à função resposta $\chi(t)$.

A eq. (2.98), integral de convolução expressando a validade dos princípios de superposição e de causalidade no caso de aplicação de um campo elétrico continuamente variável a um material dielétrico, pode ser colocada em diversas formas equivalentes (Ross Macdonald^{142,143}).

A função $\chi(t)$ é a resposta do material dielétrico a um campo elétrico em forma de pulso unitário. Assim, seja um campo elétrico em forma de pulso unitário, $\vec{E}_\delta(t)$, aplicado a um material dielétrico

$$\vec{E}_\delta(t) = \hat{n} \epsilon_0 \delta(t)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário da direção do campo elétrico.

A resposta em polarização, $\vec{P}_\delta(t)$, é da eq. (2.98)

$$\vec{P}_\delta(t) = \hat{n} \epsilon_0 \int_{0^-}^{\infty} \chi(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

ou,

$$\vec{P}_\delta(t) = \hat{n} \epsilon_0 \chi(t) \quad (2.101)$$

A eq. (2.101) mostra justamente que a função $\chi(t)$ é a resposta do material dielétrico a um campo elétrico em forma de pulso unitário.

Agora, o deslocamento elétrico é dado por

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t) \quad (2.102)$$

Levando a eq. (2.98) na eq. (2.102), vem

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{t+} K(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.103)$$

onde

$$K(t) = \epsilon_0 \mathcal{J}(t) + \mathcal{K}(t) \quad (2.104)$$

A eq. (2.103) mostra que o deslocamento elétrico é a superposição das contribuições de todos os campos elétricos aplicados previamente.

As funções $\chi(t)/\epsilon_0$ e $K(t)/\epsilon_0$, definidas nas eqs. (2.99) e (2.104) são, respectivamente, a suscetibilidade elétrica generalizada e a constante dielétrica generalizada, como denominadas por Tilley¹⁶⁰.

Algumas observações devem ser feitas sobre as eqs. (2.98) e (2.103) que expressam a hipótese da validade dos princípios de superposição e de causalidade, determinando a dispersão temporal nas relações entre a polarização e o deslocamento elétrico com o campo elétrico.

Os vetores campo elétrico \vec{E} e deslocamento elétrico \vec{D} diferem dentro de um meio material dielétrico, onde existe o campo adicional \vec{P} , a polarização elétrica. Dependendo do período do campo elétrico aplicado, um ou mais tipos de cargas podem contribuir para a polarização do material. A polarização

pode ser considerada, então, ter duas componentes, uma atual que acompanha a variação do campo simultaneamente e, outra, lenta que responde com um retardo em relação à variação do campo. A polarização rápida é originada pela contribuição dos elétrons internos; a polarização lenta é originada pela contribuição dos íons ligados e pelos multipolos.

Assim, quando o período do campo aplicado é pequeno em relação ao tempo de relaxação do material, somente a polarização eletrônica é envolvida. Neste caso, a polarização \vec{P} em um determinado instante de tempo t é determinada pelo campo elétrico \vec{E} neste mesmo instante de tempo.

O tempo de relaxação define a forma de resposta do material dielétrico a um estímulo como não-instantânea, ou seja, se o estímulo é subitamente retirado, as cargas envolvidas na polarização não voltam instantaneamente às suas posições de equilíbrio mas sim, após o tempo de relaxação τ . Tal comportamento dá origem aos fenômenos de relaxação, caracterizados por interações entre as partículas carregadas. A polarização é, neste caso, originada por íons ligados e por campos de multipolo, sendo que os fenômenos de relaxação envolvem os dipolos.

Estes fenômenos ocorrem quando o campo elétrico aplicado é lentamente variável, ou seja, quando o seu período é maior que o tempo de relaxação do material. Neste caso, a relação entre a polarização \vec{P} e o campo elétrico \vec{E} exibe uma dispersão temporal. Agora, a polarização $\vec{P}(t)$, num determinado instante de tempo t , dependerá dos campos elétricos $\vec{E}(t-\tau)$ aplicados em instantes de tempo anteriores, ou seja, da história do material dielétrico.

Além disso, no intervalo de frequências próximas das frequências atômicas, a permissividade elétrica torna-se dependente da frequência, daí a denominação dispersão temporal.

Estes aspectos do comportamento dielétrico, considerados em uma aproximação linear, são tratados por diversos autores, por exemplo: Landau (p.295-298)⁹⁷, Levich (p.416-419 e p.540-549)¹⁰¹, Kompaneyets (p.376-385)⁹¹, M.Brédov et.al. (p.245-264)¹¹¹, E.Durand (p.155-158)²⁷, Frolich (p.4-9)³², von Hippel (p.18-40)⁸⁰, F.Brown (p.119-133)¹², Bottcher e Bordewijk (p.5-44)¹⁰, V.Daniel (p.66-77)²³, Smyth (p.51-63)¹⁵⁴, R.Coelho (p.62-69)¹⁷, Jonscher (p.36-42)⁸⁶, Jackson (p.236-241)⁸³, Bagguley (p.22-31)³, J.Rossel (p.244-247)¹⁴⁴, J.Perret^{133,134,135} e C.Eringen²⁸.

No item anterior citamos o estudo do efeito posterior em dielétricos sólidos reais realizados por Gross e outros, através de uma abordagem pela teoria de circuito |eq. (2.8)|. Este efeito foi também estudado por Tilley e outros, usando uma abordagem pela teoria de campo |eq. (2.98)|. Espera-se que as duas abordagens sejam equivalentes e produzam os mesmos resultados. No Apêndice A é mostrada a equivalência entre as duas abordagens.

Além disso, a eq. (2.98) representa a resposta dielétrica no domínio do tempo. Uma abordagem alternativa, bastante poderosa, é considerar-se a resposta dielétrica no domínio da frequência, isto é, a resposta a excitações harmônicas. No Apêndice B é mostrada a relação entre as respostas dielétricas no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Como citamos, as abordagens pelas teorias de circuito e campo, mostradas serem equivalentes no Apêndice A, devem

produzir os mesmos resultados. Nesta conexão Tilley^{159,160} obteve as relações de Gross para os fenômenos de tensões de circuito aberto [eqs. (2.72), (2.79) e (2.80)], usando, agora, como hipótese básica a eq. (2.98). O autor trabalhou matematicamente as eqs. (2.94) - (2.103) com o uso de cálculo operacional, inicialmente, o cálculo operacional de Mikusinski¹¹² e, posteriormente, a transformada de Laplace^{16,94}. A principal diferença entre a transformada de Laplace e o cálculo operacional de Mikusinski é que o símbolo s na primeira é uma variável complexa e, no segundo, um operador diferencial. Em cálculos formais eles são tratados da mesma maneira em ambos os casos, não importando se ele denota uma função analítica ou um operador, embora os dois cálculos não sejam equivalentes, matematicamente [Mikusinski (p.339)¹¹²].

Assim, Tilley¹⁶⁰ trabalha com a transformada de Laplace estendida para um lado, com limite interior 0^- [Kuo (p.121)⁹⁴]. Para o campo elétrico, tem-se

$$\vec{E}(s) \underset{\sim}{=} \int_{0^-}^{\infty} \vec{E}(t) e^{-st} dt \quad (2.105a)$$

Para a polarização lenta, tem-se da eq. (2.96), vem

$$\vec{P}_A(t) = \int_{-\infty}^{0^-} \chi_A(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau + \int_{0^-}^{t^+} \chi_A(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.105b)$$

A primeira integral no segundo membro da eq. (2.105b) representa a contribuição devida a campos elétricos existentes

antes do instante $t=0$, para a componente lenta da polarização. Denotando esta contribuição por $\vec{P}_b(t)$, tem-se

$$\vec{P}_b(t) = \int_{-\infty}^{0^-} \chi_A(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.106)$$

Para a polarização total, tem-se das eqs. (2.98) e (2.99)

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) = & \int_{-\infty}^{0^-} \chi_i \vec{E}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{0^-} \chi_A(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \\ & + \int_{0^-}^{t^+} \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.107)$$

No segundo membro da eq. (2.107) a primeira integral é nula pois o instante de tempo t está fora do intervalo de integração e a segunda integral é a contribuição $\vec{P}_b(t)$, da eq. (2.106).

Então, resulta

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_b(t) + \int_{0^-}^{t^+} \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.108)$$

Tomando a transformada de Laplace e lembrando que a transformada da integral de convolução é o produto das transformadas das funções isoladas, tem-se

$$\vec{P}(\lambda) = \vec{P}_b(\lambda) + \chi(\lambda) \vec{E}(\lambda) \quad (2.109)$$

Para o deslocamento elétrico, tem-se da eq. (2.103), vem

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{0^-} k(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau + \int_{0^-}^{t^+} k(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.110)$$

Levando as expressões para a constante dielétrica e a suscetibilidade elétrica generalizadas, eqs. (2.104) e (2.99) na eq. (2.110), resulta

$$\begin{aligned} \vec{D}(t) = & \int_{-\infty}^{0^-} \epsilon_0 \vec{E}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{0^-} \chi_i \vec{E}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^{0^-} \chi_A(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau + \int_{0^-}^{t+} K(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.111)$$

As duas primeiras integrais no segundo membro da eq. (2.11) se anulam, pois o instante de tempo t está fora do intervalo de integração, a terceira integral é a contribuição $\vec{P}_b(t)$, da eq. (2.106), de modo que

$$\vec{D}(t) = \vec{P}_b(t) + \int_{0^-}^{t+} K(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.112)$$

Tomando a transformada de Laplace, resulta

$$\vec{D}(s) = \vec{P}_b(s) + K(s) \vec{E}(s) \quad (2.113)$$

As eqs. (2.109) e (2.113) representam, no domínio da frequência complexa, as relações entre os campos e a suscetibilidade e a constante dielétrica generalizadas. O termo $\vec{P}_b(s)$ difere estas equações daquelas que seriam obtidas considerando-se a polarização total somente com a componente atual.

As eqs. (2.109) e (2.113) podem, ainda, serem apresentadas na forma de análise de circuito. Para tanto, seja um dielétrico absorptivo ao qual estão conectados eletrodos. A equação da continuidade na interface eletrodo-dielétrico dá:

$$\frac{d\vec{D}(t)}{dt} = \vec{J}(t) - \sigma \vec{E}(t) \quad (2.114)$$

onde $\vec{J}(t)$ é a densidade de corrente de condução e $\sigma \vec{E}(t)$ é a corrente ohmica no dielétrico.

Tomando-se a transformada de Laplace, tem-se

$$\Delta \vec{D}(\Delta) - \vec{D}(0^-) = \vec{J}(\Delta) - \sigma \vec{E}(\Delta) \quad (2.115)$$

Levando a eq. (2.113) na eq. (2.115), resulta

$$\Delta \vec{P}_b(\Delta) + \Delta K(\Delta) \vec{E}(\Delta) - \vec{D}(0^-) = \vec{J}(\Delta) - \sigma \vec{E}(\Delta)$$

$$\vec{E}(\Delta) = z(\Delta) \left[\vec{J}(\Delta) - \vec{J}_b(\Delta) \right] \quad (2.116)$$

onde

$$z(\Delta) = \frac{1}{\sigma + \Delta K(\Delta)} \quad (2.117)$$

$$\vec{J}_b(\Delta) = \Delta \vec{P}_b(\Delta) - \vec{D}(0^-) \quad (2.118)$$

Nestas equações $z(s)$ pode ser interpretada como a impedância no domínio da frequência complexa e $\vec{J}_b(s)$ como a densidade de corrente de curto-circuito |valor de $\vec{J}(s)$ quando $\vec{E}(s)=0$ |. É justamente o termo $\vec{J}_b(s)$ que inclui os efeitos dos campos que existiam antes do instante $t=0$.

Utilizando-se as eqs. (2.94), (2.96), (2.101) e (2.106), pode-se calcular a seguinte expressão para a densidade de corrente de curto-circuito

$$\vec{J}_b(\Delta) = \Delta \vec{P}_b(\Delta) - \vec{P}_b(0^-) - (\epsilon_0 + \chi_i) \vec{E}_0 \quad (2.119)$$

ou,

$$\underbrace{\vec{J}_b(t)}_{\sim} = \left[\frac{d\vec{P}_b(t)}{dt} \right] - (\epsilon_0 + \chi_i) \vec{E}_0 \quad (2.120)$$

As eqs. (2.116) - (2.118) podem ser utilizadas para calcular-se as relações entre as tensões de circuito aberto em dielétricos absorptivos, representadas na fig.2.2 e calculadas por Gross, a partir da teoria de circuito, tal como citado no item anterior [eqs. (2.72), (2.79) e (2.80)].

Tilley¹⁵⁹ já as havia obtido utilizando o cálculo operacional de Mikusinski. Mostraremos a seguir que o mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a transformada de Laplace, conforme sugeriu o próprio Tilley¹⁶⁰.

As relações de Gross têm a forma

$$\vec{E}_1(t) = \vec{E}_2(t) + \vec{E}_3(t) \quad (2.121)$$

e,

$$\vec{E}_2(t) = \vec{E}_1(t) + \sigma^{-1} \int_0^t \frac{d\vec{E}_1(\tau)}{d\tau} \chi(t+t_0-\tau) d\tau \quad (2.122)$$

Assim, usando-se as eqs. (2.106) e (2.119), para os três casos considerados, tem-se

$$\underbrace{\vec{J}_{b_1}}_{\sim} = - \underbrace{\chi_A}_{\sim} \vec{E}_0 - (\epsilon_0 + \chi_i) \vec{E}_0 \quad (2.123)$$

$$\underbrace{\vec{J}_{b_2}}_{\sim} = \underbrace{[\chi(t+t_0)]}_{\sim} \vec{E}_0 - \underbrace{\chi_A}_{\sim} \vec{E}_0 - (\epsilon_0 + \chi_i) \vec{E}_0 \quad (2.124)$$

$$\underbrace{\vec{J}_{b_3}}_{\sim} = - \underbrace{[\chi(t+t_0)]}_{\sim} \vec{E}_0 \quad (2.125)$$

Somando-se, membro a membro, as eqs. (2.124) e (2.125) e comparando com a eq. (2.123), resulta

$$\vec{J}_{b_1} = \vec{J}_{b_2} + \vec{J}_{b_3} \quad (2.126)$$

usando, então, a eq. (2.116), com $\vec{J}=0$, vem, depois de tomarmos a transformada inversa

$$\vec{E}_1(t) = \vec{E}_2(t) + \vec{E}_3(t) \quad (2.127)$$

que é a primeira relação de Gross [eq. (2.72)], obtida anteriormente, na abordagem pela teoria de circuito.

Agora, tomando novamente a eq. (2.116) com $\vec{J}=0$, para os três casos considerados, tem-se

$$\vec{E}_1 = K \vec{E}_0 z \quad (2.128)$$

$$\vec{E}_2 = K \vec{E}_0 z - \vec{E}_0 z [\chi(t+t_0)] \quad (2.129)$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_0 z [\chi(t+t_0)] \quad (2.130)$$

As eqs. (2.117) e (2.128) dão

$$\Delta \vec{E}_1 - \vec{E}_0 = -\sigma \vec{E}_0 z \quad (2.131)$$

A eq. (2.129) fica

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= K \vec{E}_0 z - \vec{E}_0 z [\chi(t+t_0)] \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_1 + \sigma^{-1} (\Delta \vec{E}_1 - \vec{E}_0) [\chi(t+t_0)] \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_1 + \sigma^{-1} \left[\frac{d\vec{E}_1}{dt} \right] [\chi(t+t_0)] \end{aligned} \quad (2.132)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace da eq. (2.132), resulta finalmente

$$\vec{\epsilon}_2(t) = \vec{\epsilon}_1(t) + \sigma^{-1} \int_0^t \frac{d\vec{\epsilon}_1(\gamma)}{d\gamma} \chi(t+t_0-\gamma) d\gamma \quad (2.133)$$

A eq. (2.133) é exatamente a outra relação de Gross [eqs. (2.79) e (2.80)], obtida no ítem anterior, na abordagem pela teoria de circuito.

2.3 MODELOS DE PLANO DE CAMPO - ZERO

Uma tentativa de explicação da formação da tensão de retorno foi feita por pesquisadores japoneses (Yoshino et.al.¹⁷⁵, Yamanaka et.al.¹⁷⁴, e Kyokane et.al.⁹⁶). Estes autores realizaram experimentos com amostras de filmes finos dielétricos (tais como de polietileno) e, confirmaram vários fenômenos já previstos na teoria tais como: a tensão de retorno aumenta com a tensão aplicada e com o intervalo de tempo de aplicação desta, tendendo à saturação com cerca de uma hora; a tensão de retorno decai com o aumento do intervalo de tempo de curto-circuito (Yoshino et.al.¹⁷⁵).

A explicação qualitativa foi feita considerando-se que quando da aplicação da tensão estabelece-se no material dielétrico uma distribuição de carga espacial, formada com portadores do próprio dielétrico e outras, injetadas dos eletrodos. Durante o curto-circuito há uma redistribuição de carga e após

isto, com o circuito aberto ocorre um rearranjo da distribuição de carga com migração dos portadores, resultante de um desequilíbrio de carga no eletrodo e na amostra originando um campo de carga espacial. Este rearranjo dá origem à formação de tensão de retorno. A saturação da tensão de retorno com o intervalo de tempo de aplicação de tensão em cerca de uma hora é explicada pela formação de uma distribuição de carga quasi-estática neste intervalo de tempo. Um modelo simples foi construído, considerando-se que somente elétrons são injetados dos eletrodos e não levando-se em consideração a geração e recombinação de portadores do material dielétrico (Yoshino et.al.¹⁷⁵).

Neste caso, o número de partículas que atravessa uma unidade de área do plano x , no instante de tempo t , é a soma da corrente de condução e a corrente de difusão [R.Coelho (p.99)¹⁷].

$$J = e n(x,t) \mu E(x,t) - e D \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} \quad (2.134)$$

onde J é a densidade de corrente, e é a carga do elétron, μ a mobilidade, D a constante de difusão, ϵ a constante dielétrica, $n(x,t)$ a densidade de carga na posição x e instante de tempo t e $E(x,t)$ o campo elétrico na mesma posição e instante de tempo.

A conservação da carga, dá

$$\frac{\partial J}{\partial x} + e \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.135)$$

e, ainda, tem-se

$$\epsilon \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = e n(x,t) \quad (2.136)$$

As eqs. (2.134) - (2.136), fornecem

$$n(x, t + \Delta t) = n(x, t) + \int_t^{t + \Delta t} \left[-\mu \frac{\partial n(x, t) \epsilon(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \right] dt \quad (2.137)$$

$$\bar{\epsilon}(x + \Delta x, t) = \bar{\epsilon}(x, t) + \int_x^{x + \Delta x} \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}} n(x, t) dx \quad (2.138)$$

$$V(t) = \int_0^d \bar{\epsilon}(x, t) dx \quad (2.139)$$

Com as hipóteses adotadas na obtenção das eqs. (2.134) - (2.136), existe uma razoável concordância com os resultados experimentais (Yoshino et.al.¹⁷⁵).

Além disso, considerando-se que no instante do curto-circuito, o campo elétrico no interior do material dielétrico deve ser nulo em um determinado plano x_0 , denominado plano de campo-zero, tem-se, desprezando a componente de difusão (Lindmayer¹⁰³, Gross e Perlman⁶⁸)

$$\bar{I}(t) = -a \sigma(x_0, t) \frac{dx_0}{dt} \quad (2.140)$$

e, a tensão de retorno é dada por (Yamanaka et.al.¹⁷⁴)

$$V(t) = \frac{-a}{c} \int_{x_0(0)}^{x_0(t)} \sigma(x_0, t) dx_0 \quad (2.141)$$

onde $\sigma(x_0, t)$ é a densidade de carga no plano de campo-zero, e a é a área do eletrodo.

Estes estudos de pesquisadores japoneses visavam a confirmação da possibilidade de utilizar-se medidas de tensão de retorno para determinar-se o estado de degradação do isolamento de cabos utilizados em redes de distribuição de energia elétrica (kuwabara et.al.⁹⁵, Ohi et.al.¹²¹ e Okamoto^{122,123}).

Uma teoria recente da formação da tensão de retorno em materiais dielétricos foi elaborada por R.Coelho et.al.¹⁹. Esse autor alertou para o fato de que os estudos baseados na função de memória ou função de relaxação dielétrica, realizados pelo grupo de Gross, apesar de produzirem bons resultados, compatíveis com os dados experimentais disponíveis, pouco contribuíram para o entendimento físico do processo real de formação da tensão de retorno (R.Coelho et.al.¹⁹).

A observação da similaridade na formação da tensão de retorno em lâminas de vários tipos de materiais dielétricos (poli-imida KAPTON, polietileno ou poliéster), carregadas de muitas maneiras diferentes (eletrodo, feixe de elétrons ou corona) e curto-circuitadas durante um intervalo de tempo finito, também com técnicas diferentes (vácuo, aterramento), levou-o à formulação de modelos que dessem uma interpretação comum deste fenômeno. Em todos os experimentos realizados, a lâmina é carregada e, então, deixada livre por um intervalo de tempo no qual o potencial de superfície decai (Batra et.al.⁵, Chudleigh¹⁵, Mizutani et.al.¹¹⁴, R.Coelho et.al.¹⁸ e T.Lewis¹⁰²). Após isto, a lâmina é neutralizada (ou por aterramento ou por técnicas de vácuo) e observa-se então, a formação da tensão de retorno, de forma independente da técnica experimental utilizada.

Dois modelos foram elaborados: o modelo do plano de carga e o modelo de carga distribuída. Em ambos, considerou-se que as cargas superficiais, formadas após o curto, revertem a direção da força eletrostática atuando nas cargas interiores, originando desta forma um movimento de arraste responsável pela formação de tensão de retorno (R.Coelho et.al.¹⁹).

O modelo do plano de carga foi elaborado, tomando-se uma amostra de espessura l , à qual foi aplicada a tensão V_0 , antes do curto-circuito, e que apresenta, após a formação da tensão de retorno, o valor limite para a tensão V_∞ , medida no instante de tempo t_∞ . Considera-se válidas, as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a) a amostra está sobre uma superfície plana aterrada;
- b) as cargas injetadas se localizam num plano de carga, a uma profundidade λ abaixo da superfície. Neste plano tem-se, então, uma densidade uniforme de carga $\sigma_p \text{ Cm}^{-2}$;
- c) a única carga considerada é a injetada, todas as outras sendo negligíveis;
- d) o processo de difusão é ignorado.

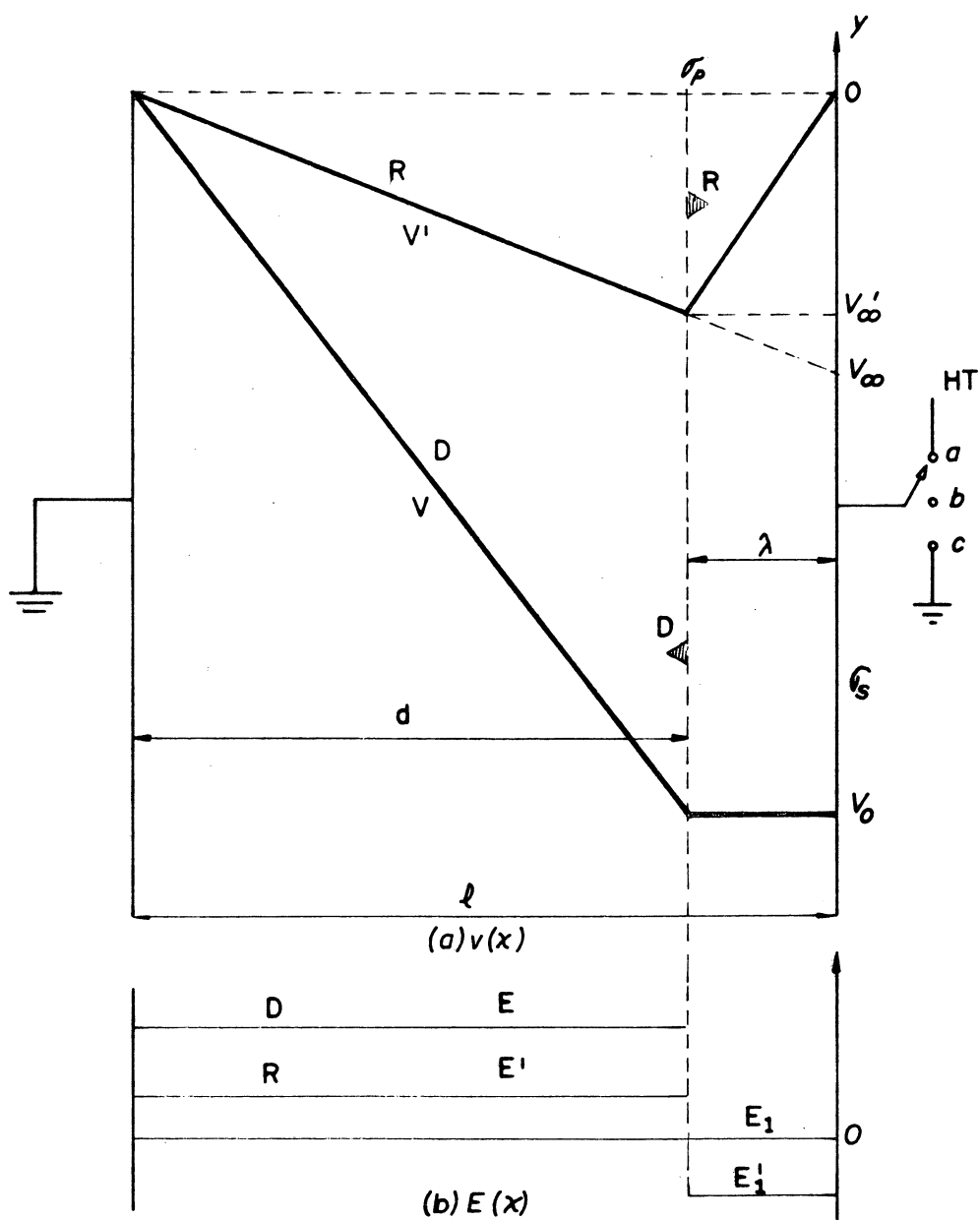
A fig. 2.4 apresenta o modelo do plano de carga.

Na fig. 2.4.a é mostrada a distribuição do potencial e, na fig. 2.4.b, a distribuição de campo. Os valores assinalados com primos representam valores após o curto-circuito.

Antes do curto-circuito, a superfície está a um potencial V_0 e a carga injetada forma uma densidade de carga, $\sigma_p \text{ Cm}^{-2}$, sobre um plano de carga a uma distância da superfície

$$\lambda = l - d \quad (2.142)$$

FIGURA 2.4
 MODELO DO PLANO DE CARGA
 (R. Coelho et.al.¹⁹)



(D) decaimento natural
 (R) tensão de retorno

O campo E_1 , entre o plano de carga e a superfície livre, é nulo e o plano de carga está, então, no mesmo potencial V_0 que a superfície. Nestas condições, o plano de carga é atraído pela substrato formado pela camada de comprimento d . O plano de carga desloca-se, pois, nesta direção.

Considerando o plano de carga na posição λ , no instante do curto-circuito, tem-se, no instante seguinte, que o potencial na superfície é nulo devido à formação de uma densidade de carga de neutralização, $\sigma_s \text{ Cm}^{-2}$, que recobre a carga do material dielétrico. Neste caso, o campo entre o plano de carga e a superfície, E_1' , não é mais nulo e a densidade de carga na superfície, σ_s , é menor que a densidade de carga, σ_p , no plano de carga, pois

$$\sigma_p = \epsilon (\epsilon_1' - \epsilon_2') = -\sigma_s - \epsilon \epsilon_2' \quad (2.143)$$

Após o curto-circuito, as quantidades σ_p , σ_s , E_1' e E_2' permanecem invariantes e o plano de carga σ_p fica sujeito a um campo resultante

$$\epsilon' = \epsilon_1' + \epsilon_2' = \left(\frac{2d}{\ell} - 1 \right) \frac{\sigma_p}{\epsilon} \quad (2.144)$$

e se move em direção à superfície livre. O potencial na superfície varia, então, de zero no instante do curto-circuito até um valor limite V_∞ que é alcançado quando o plano de carga atinge a superfície livre, no instante de tempo t_∞ .

Deste modo, ocorre a formação da tensão de retorno, a uma taxa dada por

$$\frac{dV}{dt} = \mu \frac{V_\infty^2 - V_0^2}{\ell^2} \quad (2.145)$$

onde μ é a mobilidade da carga eletrônica.

Os resultados finais do modelo do plano de carga são mostrados a seguir

$$\bar{v}_p = \varepsilon \frac{V_0 + V_\infty}{l} \quad (2.146)$$

$$\lambda = \frac{V_\infty}{V_0 + V_\infty} l \quad (2.147)$$

$$\mu = \frac{V_\infty}{V_0^2 - V_\infty^2} \times \frac{l^2}{t_\infty} \quad (2.148)$$

As eqs. (2.146) - (2.148) dão as expressões para a densidade de carga σ_p , a profundidade do plano de carga λ e para a mobilidade μ em função de quantidades mensuráveis (V_0 , V_∞ e t_∞).

O modelo do plano de carga é bastante simplificado e os resultados (2.146) - (2.148) devem ser generalizados, com o uso de outro modelo, mais próximo da realidade. Tal é alcançado com o uso do modelo de carga distribuída (R.Coelho et.al.¹⁹).

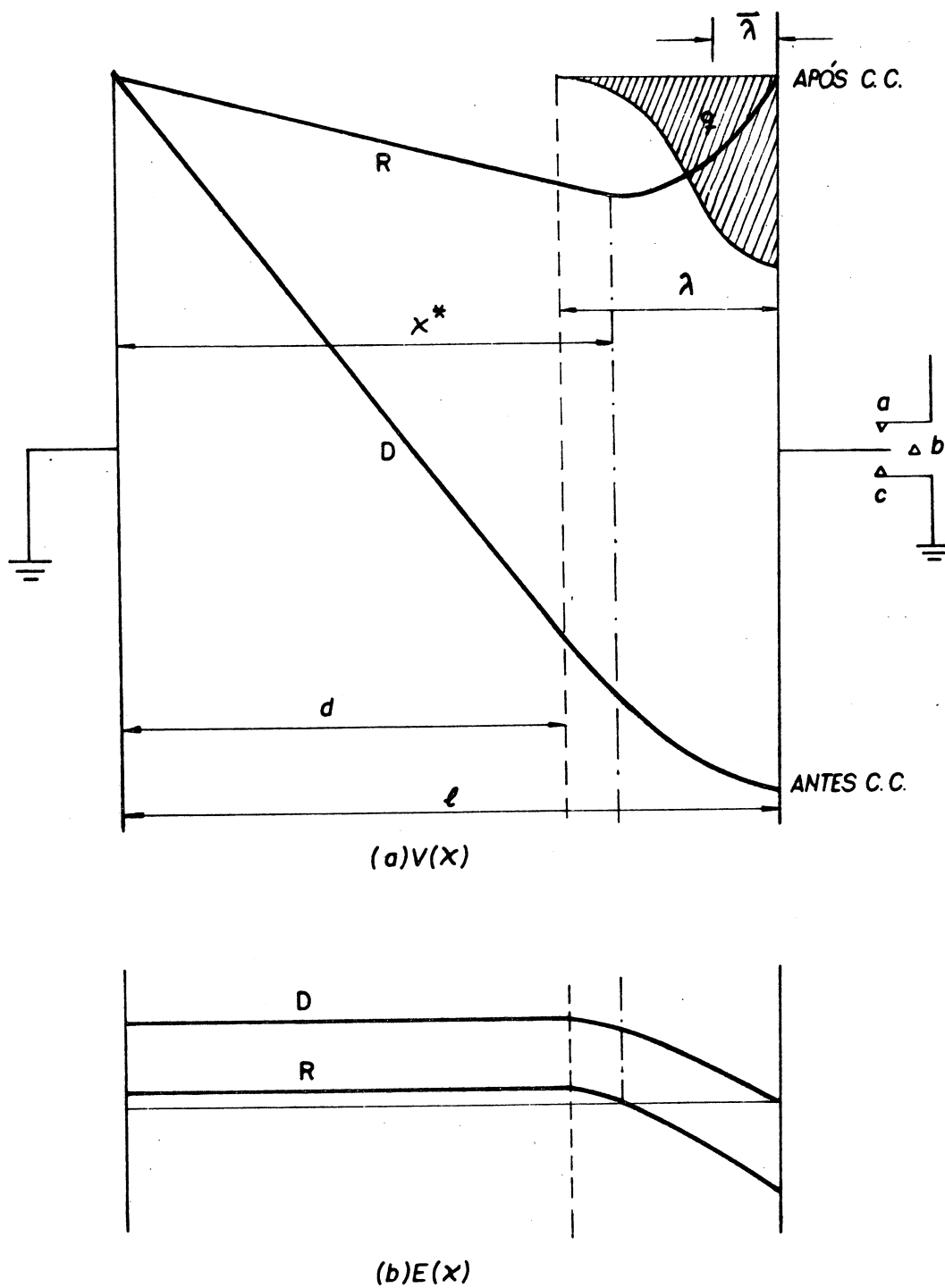
Neste modelo, conforme mostrado na fig. 2.5, a carga injetada, q , é considerada formar uma distribuição $\rho(x)$ na camada entre d e l ($d < x < l$).

Na fig. 2.5.a é mostrada a distribuição do potencial e, na fig. 2.5.b, a distribuição de campo. A área sombreada representa a carga distribuída.

Antes do curto-circuito, a superfície livre está a um potencial V_0 , dado por

$$V_0 = \frac{q}{\varepsilon} \bar{x} = - \varepsilon_2 \bar{x} \quad (2.149)$$

FIGURA 2.5
 MODELO DA CARGA DISTRIBUÍDA
 (R. Coelho et.al.¹⁹)



(D) decaimento natural
 (R) tensão de retorno

onde

$$q = \int_d^l \rho(x) dx \quad (2.150)$$

é a carga injetada

e,

$$\bar{x} = \frac{1}{q} \int_0^l x \rho(x) dx \quad (2.151)$$

é a abcissa do centróide da carga.

Após o curto-circuito, o potencial na superfície livre varia de zero, no instante do curto, a V_∞ dada por

$$V_\infty = l \frac{q}{\epsilon} - V_0 = \left(\frac{l}{\bar{x}} - 1 \right) V_0 \quad (2.152)$$

Denotando $\bar{\lambda}$, a profundidade do centróide de carga em relação a superfície livre, tem-se

$$\bar{\lambda} = l - \bar{x}$$

ou,

$$\bar{\lambda} = \frac{V_\infty}{V_0 + V_\infty} l \quad (2.153)$$

Os campos através do material dielétrico, antes e após o curto-circuito (E e E' , respectivamente) são uniformes na camada entre 0 e d e, variam entre d e l . Além disso, E' se anula em $x=x^*$, dado por

$$q(x^*) = \bar{x} \frac{q}{l} \quad (2.154)$$

No modelo de carga distribuída, o mecanismo de formação da tensão de retorno é semelhante ao descrito no modelo de plano de carga, envolvendo movimento do plano de campo-zero (R.Coelho et.al.¹⁹, Lindmayer¹⁰³, Gross e Perlman⁶⁸, Iwamoto et.al.⁸²).

Agora, no modelo de carga distribuída, o aumento do potencial da superfície livre de zero a V_∞ (no instante de tempo t_∞ , quando o plano de campo-zero atinge a superfície livre) não é mais linear como no modelo de plano de carga. R.Coelho¹⁹ considera que o cálculo completo da função $V(t)$ é trabalhoso e realizou, apenas, o cálculo da taxa inicial do aumento do potencial devido ao arraste da carga espacial de espessura $(l-d)$. Tem-se

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_0 = \frac{\mu}{\epsilon} \int_d^l \rho(x) \epsilon'(x) dx \quad (2.155)$$

onde

$$\epsilon'(x) = \frac{V_0}{l} - \frac{q(x)}{\epsilon} \quad (2.156)$$

é o campo na abcissa x , após o curto-circuito e,

$$q(x) = \int_x^l \rho(x) dx \quad (2.157)$$

Resulta, após integração

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_0 = \frac{\mu}{2l^2} (V_\infty^2 - V_0^2) \quad (2.158)$$

A eq. (2.158) mostra que a taxa inicial da formação da tensão de retorno não depende da distribuição inicial da carga mas sim, da mobilidade da carga e, dos potenciais V_∞ e V_0 . Entretanto, como ela foi deduzida para uma distribuição qualquer da carga, ela é mais geral que a eq. (2.145) do modelo de plano de carga, da qual difere pelo fator $1/2$.

Os resultados finais do modelo de carga distribuída são resumidos a seguir:

$$q = \epsilon \frac{V_0 + V_\infty}{l} \quad (2.159)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{V_\infty}{V_0 + V_\infty} l \quad (2.160)$$

$$\mu = \frac{2 \left(\frac{dV}{dt} \right)_0 l^2}{V_\infty^2 - V_0^2} \quad (2.161)$$

Uma comparação das eqs. (2.159) - (2.161), resultados finais do modelo de carga distribuída, com as eqs. (2.146) - (2.148), resultados finais do modelo de plano de carga, mostra que as eqs. (2.159) e (2.160) que envolvem propriedades estáticas das cargas são idênticas às eqs. (2.146) e (2.147), generalizando-se, apenas, λ por $\bar{\lambda}$. Entretanto, as eqs. (2.161) e (2.148) envolvem propriedades dinâmicas das cargas e, assim, a eq. (2.161) corrige a eq. (2.148), levando em consideração a distribuição da carga (R.Coelho et.al.¹⁹).

Os resultados finais dos modelos de plano de carga foram confrontados com dados experimentais concluindo-se pela validade deles. Além disso, conforme esperado, o modelo de carga distribuída foi considerado mais satisfatório que o de plano de carga (R.Coelho et.al.¹⁹).

As eventuais discordâncias foram atribuídas, no caso do modelo de plano de carga, às hipóteses feitas de o plano de carga permanecer não-perturbado no tempo e a de que os elétrons incidentes não sofrem influência do potencial anteriormente já adquirido pelo material dielétrico. No primeiro caso, mesmo que o plano de carga existisse no instante $t=0$, não poderia

permanecer infinitamente fino e, no segundo caso, a profundidade λ , real é aquela correspondente à energia $(V_e - V)$ (onde V é o potencial anteriormente adquirido pelo material dielétrico), menor que aquela correspondente à energia V_e . No caso do modelo de carga distribuída foi negligenciada a contribuição da carga espacial injetada pelo substrato, formado pelas cargas no material dielétrico na camada entre 0 e d (R.Coelho et.al.¹⁹).

CAPÍTULO 3
RELAXAÇÃO DIELÉTRICA

3.1 ABSORÇÃO DIELÉTRICA

O fenômeno de absorção dielétrica é caracterizado pelo aparecimento de uma corrente de longa duração, após a aplicação no material dielétrico de uma tensão em forma de função degrau. A absorção dielétrica é observada ser linear em um extenso intervalo de correntes e tensões, e isto é considerado como uma indicação da presença de polarização volumétrica pois, qualquer outro mecanismo (polarização de carga espacial devido a portadores intrínsecos ou extrínsecos, corrente de perda superficial) causariam efeitos não-lineares (Gross⁶³). A absorção dielétrica é causada pelo fenômeno de relaxação dielétrica, devido a uma redistribuição dos portadores nos defeitos da rede cristalina do material dielétrico, anteriormente submetido a uma tensão (Gross⁶³, Tareev¹⁵⁷).

A aplicação de um campo elétrico a um material dielétrico faz com que as cargas livres e ligadas se movimentem, causando o aparecimento de uma corrente, denominada corrente de absorção, no circuito exterior. A corrente de absorção primeiro decai e depois se torna estável.

O fenômeno da absorção dielétrica é conhecido há mais de cem anos e a pesquisa neste campo se faz intensamente desde então. Em condições normais (campos elétricos não-muito

intensos e temperaturas não-extremas) vários processos acontecem com a aplicação de um campo a um material dielétrico: carga completa da capacitância geométrica de vácuo, polarização do tipo rápida, polarização do tipo lenta (relaxação), corrente de condução, relaxação do tipo Maxwell-Wagner em dielétricos micro ou macro-heterogêneos, polarização dos eletrodos e captura de portadores carregados no interior do dielétrico. Estes são os fenômenos mais comuns (Adamec e Calderwood¹).

Uma explicação teórica para o fenômeno de absorção, de aceitação geral e consistente com os dados experimentais disponíveis parece não existir, ainda, nos dias de hoje.

Adamec e Calderwood¹ deram um tratamento unificado na descrição do comportamento dos materiais dielétricos poliméricos. Estes autores observaram que apesar do uso cada vez maior destes materiais como isolantes elétricos, pouco se conhece sobre o mecanismo de transporte de portadores carregados no interior dos polímeros e, também, do mecanismo de transferência através da interface dielétrico-metal. Além disso, os polímeros são materiais que dependem de sua história térmica, mecânica e elétrica e, ainda, cuja estrutura parcialmente amorfa é complexa. Adamec e Calderwood¹ afirmam que as várias teorias e hipóteses formuladas para explicação do fenômeno de absorção além de serem frequentemente contraditórias, não podem ser transferidas de outros grupos de materiais sem que considerações específicas sobre os polímeros, polares ou não, sejam feitas. Assim, o decaimento da corrente de absorção é atribuída por alguns autores à redução do campo no interior

do material devido à ação de um campo contrário, produzido por cargas acumuladas nos eletrodos. Adamec e Calderwood¹ mostraram que mesmo no caso dos eletrodos totalmente bloqueantes, a carga acumulada seria insuficiente para reduzir o campo dentro do material. Outra hipótese levantada por alguns autores é a de que a corrente seria de carga-espacial-limitada. Adamec e Calderwood¹ mostraram que tal não se verifica em um grande número de dielétricos. Além disso, como a corrente de absorção, na condição de baixos campos, é reversível, a hipótese de que existe fuga de cargas livres do dielétrico fica também descartada. A conclusão final de Adamec e Calderwood¹ é de que a única hipótese teoricamente concebível, consistente com os dados experimentais disponíveis, é a baseada no conceito de captura de portadores carregados livres durante seu movimento devido ao campo aplicado. Além disso, estes autores demonstraram experimentalmente que os portadores carregados livres têm origem no interior do material dielétrico e não da injeção dos eletrodos.

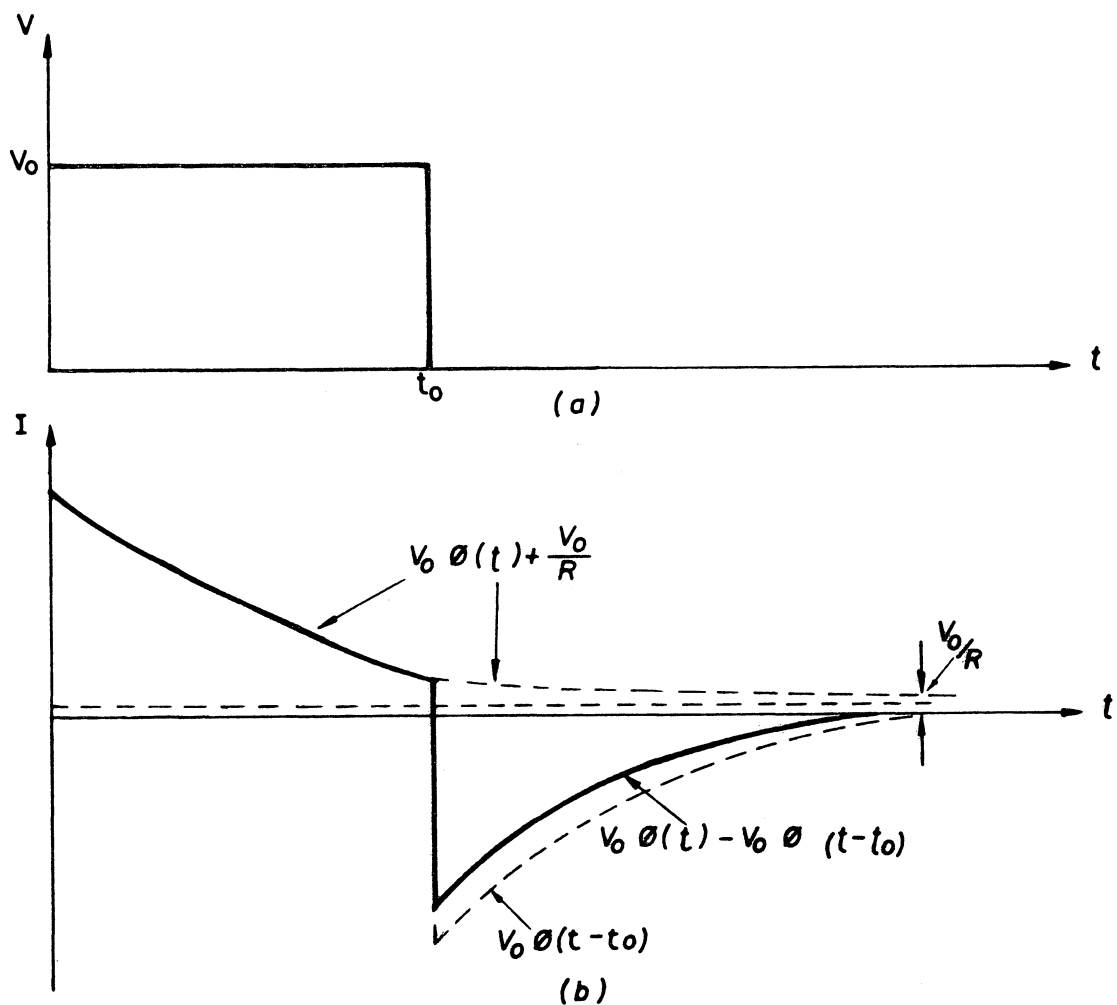
Assim, da aplicação de uma tensão em forma de função degrau, como mostrado na fig. 3.1.a, resulta uma corrente de absorção e outra de reabsorção, fig. 3.1.b, onde: a corrente de absorção, resultante da aplicação da tensão constante V_0 , é (Gross⁶³)

$$I(t) = V_0 \phi(t) + \frac{V_0}{R} + C V_0 \delta(t) \quad (3.1)$$

onde $\phi(t)$ é a função de relaxação dielétrica, R e C são a resistência e a capacitância geométrica de um capacitor formado com o material dielétrico e δ a função delta de Dirac.

A corrente de absorção, como mostra a eq. (3.1), é composta de três parcelas, uma componente transitória, uma componente constante e outra capacitiva.

FIGURA 3.1
 ABSORÇÃO DIELÉTRICA
 (Gross⁶³)



- (a) tensão aplicada
 (b) correntes de absorção e reabsorção

A corrente de reabsorção, resultante do curto-circuito aplicado após o intervalo de tempo de carga t_0 é, supondo válido o princípio de superposição (Gross⁶³)

$$I(t) = V_0 \phi(t) - V_0 \phi(t-t_0) - V_0 C \sigma(t-t_0) \quad (3.2)$$

$$(t_0 < t < \infty)$$

Se $t_0 \rightarrow \infty$, ou seja, o capacitor for curto-circuitado somente quando a corrente de absorção ter decaído a quase zero, as correntes de absorção e reabsorção tornam-se iguais e opostas. Esta reversibilidade confirma que a absorção dielétrica linear tem como consequência o armazenamento de carga (Gross^{49,50,63,65}). Neste caso, a carga absorvida tende a um valor constante e define-se a capacitância de polarização, C_p , na forma

$$C V_0 + C_p V_0 = \int_0^{\infty} \left(I(t) - \frac{V_0}{R} \right) dt \quad (3.3)$$

$$C_p = \int_0^{\infty} \phi(t) dt \quad (3.4)$$

onde $\phi(t)$ é a função de relaxação dielétrica.

Aqui, tratou-se da absorção em materiais dielétricos sob condições isotérmicas. Ainda nestas condições porém, a diferentes temperaturas constantes, observa-se que a condução em corrente contínua aumenta mais fortemente que a absorção, com o aumento da temperatura (Gross⁶⁵). Os efeitos não-isotérmicos na absorção dielétrica dão origem aos importantes fenômenos de correntes térmicamente estimuladas, objeto de intensa pesquisa nos dias atuais. A consideração destes efeitos bem

como de outros intimamente relacionados, tais como o efeito eletreto, não será feito aqui. Sobre estes assuntos ver Gross⁶³, um resumo do estado atual das pesquisas nestes campos, e também bibliografia indicada no ítem 3.2.

A absorção dielétrica é também dependente das condições do meio em que se encontra o material dielétrico, tais como o tipo de gás no ambiente, pressão e umidade do ar (R.M.Faria et.al.²⁹).

Os fenômenos de tensões de circuito aberto, denominado efeito posterior, é um efeito separado porém relacionado com a absorção dielétrica. A dependência do decaimento das tensões de circuito aberto com o intervalo de tempo de carga e o surgimento da tensão de retorno após a aplicação de um curto-circuito durante um intervalo de tempo finito em um capacitor previamente carregado, são consequências da absorção dielétrica dependente do tempo, ou seja, da formação de uma polarização função do tempo (Gross⁶³). Adamec e Calderwood¹ afirmam que os mecanismos sugeridos para explicação do fenômeno de absorção devem dar conta dos fenômenos de tensões de circuito aberto observados experimentalmente. Estes autores desenvolveram então uma teoria do efeito posterior, supondo válida a função de von Schweidler. Os resultados obtidos foram, posteriormente, mostrados iguais às soluções aproximadas de Gross (citadas no ítem 2.1) pelo próprio autor⁶¹.

3.2 FUNÇÕES DE RELAXAÇÃO DIELÉTRICA

No domínio da física dos materiais dielétricos, os fenômenos de relaxação são as interações mais importantes entre campo e matéria.

Os estudos dos fenômenos de relaxação incluem não somente os materiais dielétricos mas, também, os mecânicos, óticos, magnéticos e outros. Desta forma, os métodos de estudo são necessariamente interdisciplinares. Além disso, os materiais dielétricos de uso prático nos dias de hoje constituem sistemas complexos e o entendimento dos mecanismos de relaxação nestes materiais são, muitas vezes, fronteiras da pesquisa básica (K.L.Ngai et.al.¹²⁰).

O comportamento dielétrico é descrito por várias funções e, através do princípio de superposição, pode-se relacioná-las, ou seja, o conhecimento de uma delas permite o cálculo das outras. Para tanto, é imprescindível o conhecimento da forma analítica para a função de relaxação dielétrica, ponto de partida para os cálculos (Gross⁶³).

Segundo Pellat |autor do início do século, citado por Gross⁶³ e Bottcher (p.38)¹⁰|, o decaimento da polarização existente em um material dielétrico, em um instante de tempo t , após a retirada do campo aplicado, seria independente da história do dielétrico e proporcional ao valor da polarização volumétrica naquele instante

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{-P(t)}{\tau} \quad (3.5)$$

onde τ é o tempo de relaxação, característico de cada material.

Com o campo E_0 , ainda aplicado, tem-se

$$\frac{dP(t)}{dt} + \frac{P(t)}{\tau} = \frac{\chi}{\tau} \bar{E}_0 \quad (3.6)$$

onde χ é a suscetibilidade elétrica.

A corrente de absorção, citada no ítem anterior, é proporcional à variação da polarização

$$I_a(t) = a \frac{dP(t)}{dt} \quad (3.7)$$

onde a é a área da amostra.

A solução da eq. (3.6), com

$$P(0) = 0$$

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

e

$$P(t) = \frac{\chi V_0}{d} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.8)$$

donde,

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\chi}{d} \cdot \frac{V_0}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (3.9)$$

Levando as eqs. (3.8) e (3.9) na (3.7), resulta

$$I_a(t) = C_p \frac{V_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.10)$$

com

$$C_p = a \frac{\chi}{d}$$

onde a é a área da amostra, d a espessura e C_p a capacitância de polarização.

Assim, das eqs. (3.1) e (3.10), resulta

$$I_a(t) = c_p \frac{V_0}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) = V_0 \phi(t) \quad (3.11)$$

donde,

$$\phi(t) = \phi(0) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (3.12)$$

com

$$\phi(0) = \frac{c_p}{\tau} \quad (3.13)$$

ou seja, neste caso, a função de relaxação dielétrica obedece a uma lei exponencial decrescente; com um tempo de relaxação único.

Desde que |Bottcher (p.14-38)¹⁰, R.Coelho (p.74)¹⁷, V.Daniel (p.18)²³|

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \frac{1}{\tau} \mathcal{L} \left\{ \frac{\phi(t)}{c_p} \right\} \quad (3.14)$$

onde ϵ_s denota a permissividade de baixas frequências, ϵ_∞ a de altas frequências e \mathcal{L} , a transformada de Laplace, tem-se

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad (3.15)$$

Separando as partes real e imaginária na eq. (3.15), resulta

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.16)$$

$$\epsilon''(\omega) = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.17)$$

As eqs. (3.15) - (3.17) são conhecidas como equações de Debye²⁵ que foi quem as primeiro deduziu e, os dielétricos para os quais elas são válidas são ditos terem um comportamento de Debye. As equações de Debye foram deduzidas em bases

moleculares e pressupõe que o campo local não é diferente do campo aplicado, a condutividade do material dielétrico é negligível, e que todos os dipolos têm o mesmo tempo de relaxação τ . As correções a serem feitas quando as duas primeiras hipóteses não são válidas podem ser vistas em R.Coelho (p.76-79)¹⁷.

Quanto ao tempo de relaxação há duas maneiras de se ver o problema. Um grupo de pesquisadores considerou que a função de relaxação dielétrica não é dada por uma exponencial decrescente, e propôs novas formas analíticas para esta função. Outro grupo de pesquisadores contornou o problema considerando que não existe um tempo de relaxação único mas sim, uma distribuição destes tempos e, assim, propôs diversas funções de distribuição de tempos de relaxação.

A pesquisa da forma analítica da função de relaxação é centenária e muitas expressões foram e têm sido propostas. O confronto com os dados experimentais fez com que a forma exponencial decrescente, eq. (3.12), fosse abandonada ainda nos primeiros estágios da pesquisa sobre a relaxação dielétrica. Entretanto, ainda hoje, considera-se que as formas propostas em alternativa à forma exponencial decrescente não estão embasadas teoricamente de maneira satisfatória e, não concordam integralmente com todos os dados experimentais disponíveis (Gross⁶³).

A forma proposta por von Schweidler¹⁵¹ e com a qual o grupo de Gross estudou as soluções analíticas para as tensões de circuito aberto (efeito posterior), conforme citado no item 2.1, é considerada, ainda hoje, como uma das melhores

aproximações para a função de relaxação dielétrica. A função de von Schweidler¹⁵¹ é da forma

$$\phi(t) = K \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-n}, \quad K > 0, \quad 0 < n < 1 \quad (3.18)$$

K, n constantes

O fato da função de von Schweidler divergir para $t \rightarrow 0$ e o mesmo ocorrer com a sua integral gerou sérios problemas no estudo dos materiais dielétricos reais, tendo sido realizados diversos experimentos com a finalidade de se comprovar isto (Gross^{35,36,38,63,69,70,71,72}).

No estudo da relaxação viscoelástica, Lomnitz¹⁰⁴ e Strick¹⁵⁵ utilizaram a forma modificada

$$\phi(t) = K \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-n} \quad (3.19)$$

como modo de se evitar a divergência na origem.

Apesar da afirmação de Gross⁷², feita de passagem, que uma forma modificada como a da eq. (3.19) poderia ser utilizada sem alterar substancialmente os resultados por ele obtidos, foi somente com Jonscher^{84,86} que aparece uma expressão analítica para a função de relaxação dielétrica sem os inconvenientes da função de von Schweidler. Jonscher^{84,86} afirma que existem evidências experimentais suficientes para possibilitar a proposição de uma resposta dielétrica universal. Uma abordagem unificada poderia ser feita, baseada na interação de muitos corpos entre as partes constituintes do material dielétrico. A expressão da função de relaxação universal, proposta por Jonscher^{84,86}, é uma generalização da função de Schweidler, na forma:

$$\phi(t) = \frac{K}{\left(\frac{t}{\tau}\right)^n + \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+m}} \quad , \quad \left. \begin{array}{l} 0 < n < 1 \\ 0 < m \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Uma outra expressão analítica para a função de relaxação dielétrica foi proposta por Williams e Watts¹⁶⁸, na forma

$$\psi(t) = \psi(0) \left[\exp - \left(\frac{t}{\tau_p} \right)^{1-n} \right] \quad (3.21)$$

$$0 < n < 1$$

com

$$\phi(t) = - \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (3.22)$$

acompanhada pela relação (K.L.Ngai et.al.¹²⁰)

$$\tau_p = \left[(1-n) \omega_c^n \tau_0 \right]^{1/(1-n)} \quad (3.23)$$

onde τ_p é uma constante de tempo macroscópica característica e τ_0 é uma constante de tempo microscópica. Williams e Watts¹⁶⁸ observaram que as curvas de dispersão e absorção obtidas com o uso de sua função, eqs. (3.21) - (3.23), são não-simétricas em relação ao logarítmo da frequência de perda máxima, sendo o comportamento intermediário com aqueles obtidos com o uso das expressões propostas por Cole e Cole²⁰ e Davidson-Cole²⁴, que são, respectivamente

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{n}{\tau \tau (1+n)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-(1-n)} & , \text{para } (t/\tau) \ll 1 \\ \frac{n}{\tau \tau (1-n)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-(1+n)} & , \text{para } (t/\tau) \gg 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\tau \tau (n)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-(1-n)} \exp \left(\frac{-t}{\tau} \right) \quad (3.25)$$

Na região de altas frequências, $(t/\tau) \ll 1$, as três expressões têm a mesma forma de dependência com o tempo. Na região de baixas frequências, $(t/\tau) \gg 1$, a função de Williams e Watts, eqs. (3.21) - (3.23) decai menos rapidamente que as funções de Davidson-Cole, eq. (3.25), e de Cole e Cole, eq. (3.24). Nesta mesma região, a função de Davidson-Cole, eq. (3.25) decai mais rapidamente que a função de Cole e Cole, eq. (3.24).

A forma analítica proposta por Williams e Watts¹⁶⁸ para a função de relaxação dielétrica é da mesma forma da função utilizada por R. e F. Kohlrausch, ainda no século passado (K.L. Ngai et al.¹²⁰).

Uma comparação das funções propostas por Jonscher^{84,86}, eq. (3.20) e por Williams e Watts¹⁶⁸, eqs. (3.21) - (3.23), mostra que a função de Williams e Watts permanece mais próxima da função exponencial que a função universal de Jonscher, pois para $t \rightarrow \infty$ a eq. (3.21) tende a zero mais rapidamente que a eq. (3.20) |Gross⁶³|.

Uma interpretação física para a forma proposta por Jonscher^{84,86} para a função de relaxação dielétrica, como uma resposta universal dos materiais dielétricos, foi mostrada por Hill e Dissado⁷⁹ em conexão com a relaxação viscoelástica. Estes autores reelaboraram a teoria de Gross⁵⁵ da relaxação viscoelástica considerando, agora, que mais de um processo de relaxação pode ocorrer no material. A partir disto, desenvolveram um modelo cooperativo baseado na interação de muitos corpos, com formação de aglomerados que interagem entre si. Hill e Dissado⁷⁹ concluíram que o comportamento elástico é tal que o material apresentaria relaxações configuracionais

limitadas equivalentes às reorganizações estruturais locais na região dos dipolos ativos, no caso da relaxação dielétrica. Além disso, mostraram que, em particular, a relaxação mecânica é equivalente aos processos de dispersão em baixa frequência que ocorrem em materiais dielétricos contendo cargas quase-livres, usualmente íons.

As formas analíticas propostas para a função de relaxação dielétrica por Jonscher^{84,86}, eq. (3.20) e por Williams e Watts¹⁶⁸, eqs. (3.21) - (3.23), pretendem representar uma resposta universal dos materiais dielétricos. Esta universalidade é contestada por outros autores e a diversidade de tipos de materiais dielétricos parece contribuir para esta posição. Assim, funções de relaxação dielétrica têm sido propostas com validade definida para determinados tipos de materiais. Uma argumentação contra a existência de uma resposta universal dos materiais dielétricos, baseada no princípio de superposição tempo-temperatura é dada por Gross^{56,57,63}. O princípio de superposição tempo-temperatura, obedecido por certos tipos de materiais dielétricos, estabelece que curvas de funções dielétricas tais como impedância, admitância, perdas e funções de relaxação dielétrica, obtidas a diferentes porém, constantes temperaturas podem ser transformadas umas nas outras por uma transformação afim de coordenadas, levando desta forma, a curvas típicas para estas funções. As funções de relaxação dielétrica tem parâmetros que dependem da temperatura e duas funções isotérmicas $\phi_1(T_1, t)$ e $\phi_2(T_2, t)$ satisfazem o princípio de superposição tempo-temperatura, podendo, pois, serem transformadas uma na outra por uma transformação

afim de coordenadas. O argumento de Gross⁶³ é que a função de relaxação dielétrica satisfazendo o princípio de superposição tempo-temperatura não pode ser universal pois ela incluiria sistemas que não obedecem a tal princípio.

Várias outras formas analíticas têm sido propostas para a função de relaxação dielétrica (Bottcher¹⁰, V.Daniel²³ e R.Coelho¹⁷). Em particular, Bottcher (cap. IX, P.45-137)¹⁰ mostra muitas formas propostas para a função de relaxação dielétrica e analisa sua validade em muitos tipos de materiais dielétricos. Dois artigos resumo, recentemente publicados (G.Williams¹⁶⁷ e P.Hedvig⁷⁵), analisam os fenômenos de relaxação dielétrica e mostram diversas formas propostas para a função de relaxação dielétrica. Assim, G.Williams¹⁶⁷ analisa a relaxação dielétrica em materiais poliméricos, demonstrando particularmente a validade da função de Kohlrausch-Williams-Watts, eqs. (3.21) - (3.23), nos polímeros. Em outro artigo, P.Hedvig⁷⁵, analisando os aspectos experimentais da pesquisa sobre os fenômenos de relaxação dielétrica, ressalta a importância de se ter uma função de relaxação dielétrica semi-empírica com dois ou três parâmetros, julgado mais útil, em termos práticos, do que as funções de distribuição de tempos de relaxação. Isto se deve ao fato de que, em trabalhos experimentais, somente uma pequena parte do espectro total pode ser coberto com uma técnica única, tanto no domínio do tempo como no da frequência. Dentre as diversas funções de relaxação dielétrica analisadas por P.Hedvig⁷⁵, ressalta-se a função de Gény-Monnerie³⁴ que representa uma abordagem diferente daquela de Jonscher, eq. (3.20). A teoria de Jonscher^{84,86} é,

como citado anteriormente, baseada na similaridade da resposta dos diversos materiais, governada por regras gerais de interações de muitos corpos, levando a uma resposta dielétrica universal. Por outro lado, a função de Gény-Monnerie³⁴ é baseada em cálculos da dinâmica molecular, levando em consideração os movimentos moleculares específicos em cada material. Sua forma analítica é

$$\phi(t) = \exp\left(\frac{-t}{\theta}\right) \exp\left(\frac{t}{\rho}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\rho}\right)^{0,5} \quad (3.26)$$

onde θ e ρ são parâmetros relacionados com o amortecimento orientacional e processos de difusão na cadeia macromolecular, respectivamente, e erfc é a função erro complementar. A função de Gény-Monnerie tem como casos particulares as funções de Debye, Cole e Cole e Davidson-Cole, pois:

a permissividade complexa é dada por

(P.Hedvig⁷⁵, G.Williams¹⁶⁷)

$$f(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi(t)}{dt} \exp(-i\omega t) dt \quad (3.27)$$

onde a função $f(\omega)$ é uma transformada da função de relaxação dielétrica. Com,

$$f(\omega) = f'(\omega) - i f''(\omega) \quad (3.28)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i \varepsilon''(\omega) \quad (3.29)$$

tem-se, então

$$f'(\omega) = \frac{\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} \quad (3.30)$$

$$f''(\omega) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} \quad (3.31)$$

As funções f' e f'' são medidas usando-se campos periódicos senoidais, método conhecido por técnica do domínio da frequência (P.Hedvig⁷⁵). As eqs. (3.27) - (3.31) mostram que o conhecimento das funções f' e f'' sobre um extenso intervalo de frequências permite o cálculo da função de relaxação dielétrica, por transformação inversa de Laplace (P.Hedvig⁷⁵) e que o conhecimento de $\phi(t)$ permite a determinação das características de dispersão e absorção (G.Williams¹⁶⁷).

Assim, para a função de Gêny-Monnerie³⁴, tem-se (P.Hedvig⁷⁵)

$$f(\omega) = \frac{\left[1 + \frac{\theta}{\rho} (1 + i\omega\theta) \right]^{0,5}}{1 + i\omega\theta + \left[\frac{\theta}{\rho} (1 + i\omega\theta) \right]^{0,5}} \quad (3.32)$$

de modo que,

quando o processo de difusão é muito lento, tem-se

$$\rho \rightarrow \infty$$

e,

$$f(\omega) = (1 + i\omega\theta)^{-1} \quad (3.33)$$

que é a função de Debye simples com um tempo de relaxação único;

quando o processo de amortecimento é muito lento, tem-se

$$\theta \rightarrow \infty$$

e,

$$f(\omega) = \left[1 + (i\omega\rho)^{0,5} \right]^{-1} \quad (3.34)$$

que é a função de Cole e Cole;

quando os processos de difusão e amortecimento são igualmente importantes, tem-se

$$\frac{\theta}{\rho} = 1$$

e,

$$f(\omega) = (1 + i\omega\tau)^{0,5} \quad (3.35)$$

que é a função de Davidson-Cole.

Os materiais dielétricos usualmente são heterogêneos, particularmente os polímeros, de modo que outros mecanismos de polarização, tais como o efeito Maxwell-Wagner, podem estar presentes [R.Coelho (p.88-90)¹⁷, Bottcher (p.486)¹⁰, V.Daniel (p.203-208)²³]. Tais materiais são descritos por uma função do tipo Debye, da forma (P.Hedvig⁷⁵)

$$\frac{\overline{\epsilon(\omega)} - \overline{\epsilon_0}}{\overline{\epsilon_\infty} - \overline{\epsilon_0}} = \frac{1}{1 + i\omega\overline{\tau}} + \frac{\overline{\sigma}}{i\omega\overline{\epsilon_0}} \quad (3.36)$$

onde as barras indicam valores médios, $\overline{\tau}$ é o tempo de relaxação para polarização Maxwell-Wagner e $\overline{\sigma}$ é a condutividade média.

P.Hedvig⁷⁵ conclui que existe hoje uma necessidade, bastante acentuada, de uma boa função de relaxação dielétrica e que embora muitas formas tenham sido propostas e outras encontrem-se em intensa pesquisa, nenhuma teve, ainda, sua validade satisfatoriamente testada. O autor alerta, também, para os cuidados a serem tomados com as amostras de materiais dielétricos. Elas devem ser preparadas cuidadosamente e de modo similar uma às outras. Isto se deve ao fato de que amostras com histórias diferentes e não de todo conhecida podem dar origem a respostas diversas, o que impede, por exemplo, a comparação de resultados em diferentes literaturas.

Os fenômenos de relaxação dielétrica sob condições não-isotérmicas apresentam características próprias e surgem as

correntes térmicamente estimuladas, citadas aqui apenas de passagem. A função de relaxação dielétrica, $\phi(t)$, bem como suas transformadas f' e f'' dependem não só do tempo e frequência mas também, da temperatura e pressão. Alguns artigos recentes fazem um resumo do estado atual da pesquisa neste campo e remetem à bibliografia pertinente (Gross⁶³, Hedvig⁷⁵ Williams¹⁶⁷, Multhaupt e Hertz¹¹⁷ e Hill e Dissado⁷⁸). Uma característica, citada aqui de passagem, é a não-validade da equivalência dos modelos de Maxwell e Wagner, sob condições não-isotérmicas (Gross^{58,59,61,63,66}). Tal fato acarreta dificuldades à abordagem fenomenológica do comportamento dielétrico pois, modelos que são equivalentes isotérmicamente produzindo, apesar de terem estruturas diferentes, a mesma resposta para excitações idênticas, deixam de sê-lo sob condições não-isotérmicas, e as diferenças estruturais entre eles produzem respostas em um, diferentes das do outro (Goss⁶³).

3.3 FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS DE RELAXAÇÃO E DE ENERGIAS DE ATIVAÇÃO

Como citado no ítem anterior, outro grupo de pesquisadores contornou o problema do desvio da forma exponencial para a função de relaxação dielétrica, considerando que não existiria somente um tempo de relaxação característico para o material mas sim, uma distribuição destes tempos.

Assim, von Schweidler¹⁵¹ propôs, inicialmente, diferentes tempos de relaxação τ_k , distribuídos discretamente, na forma:

$$\phi(t) = \beta \sum_k \frac{F_k}{\tau_k} \exp\left(\frac{-t}{\tau_k}\right) \quad (3.37)$$

e, mais tarde, Wagner propôs o uso de uma distribuição contínua de tempos de relaxação (Gross⁶³)

$$\phi(t) = \beta \int_0^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) d\tau \quad (3.38)$$

onde β é um fator de amplitude dimensional e $F(\tau)$ é a função de distribuição de tempos de relaxação de corrente.

A tensão de descarga interna de um capacitor real é expressa por (Gross⁶³)

$$V(t) = \bar{\beta} \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(\tau)}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) d\tau \quad (3.39)$$

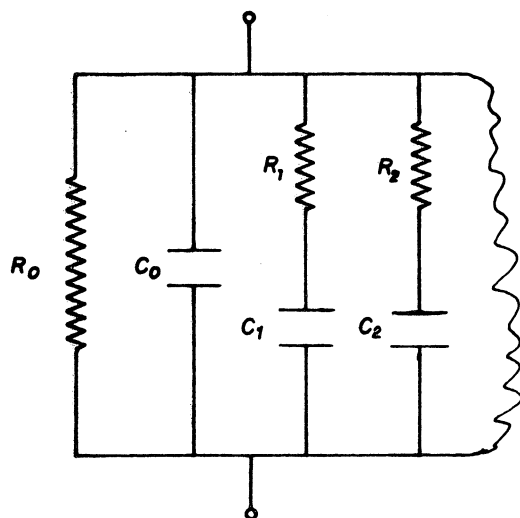
onde $\bar{F}(\tau)$ é a função de distribuição de tempos de relaxação de tensão e $\bar{\beta}$ é, novamente, um fator de amplitude dimensional.

A eq. (3.38), com a função de distribuição de tempos de relaxação de corrente, $F(\tau)$, é interpretada formalmente em termos do modelo de Maxwell, fig. 3.2.a, e a eq. (3.39), com a função de distribuição de tempos de relaxação de tensão, $\bar{F}(\tau)$, em termos do modelo de Wagner, fig. 3.2.b. As funções de distribuição F e \bar{F} são diferentes porém equivalentes. A não-equivalência dos modelos de Maxwell e Wagner, sob condições não-isotérmicas, já comentada anteriormente no item 3.2, acarreta, pois, sérios problemas à abordagem fenomenológica do comportamento dielétrico.

Wagner interpretou a existência de uma distribuição de tempos de relaxação como uma consequência da relaxação de sistemas elementares independentes, com propriedades diferentes

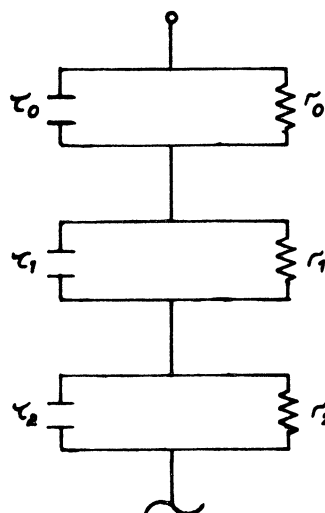
FIGURA 3.2

MODELOS DE MAXWELL E WAGNER

(Gross⁶³)

(a)

Modelo de Maxwell
conexão paralela de sistemas
elementares independentes



(b)

Modelo de Wagner
conexão sêrie de sistemas
elementares independentes

entre si. Além disso, propôs uma distribuição de probabilidade gaussiana para os logarítimos dos tempos de relaxação moleculares, a exemplo do que Wiechert havia proposto, anteriormente, para a relaxação anelástica (Wiechert e Wagner são citados por Gross⁶³). Yager¹⁷³ calculou, a partir de considerações teóricas e experimentais, os parâmetros desta distribuição.

Muitas outras funções de distribuição de tempos de relaxação têm sido propostas desde então. Bottcher (p.83-118)¹⁰ analisa muitas delas e estabelece sua validade para vários tipos de materiais dielétricos. Também Ross Macdonald¹⁴¹, em um recente artigo resumo, analisa diversas funções de distribuição de tempos de relaxação propostas desde Wagner. A situação aqui é semelhante às funções de relaxação dielétrica, ou seja,

nenhuma função de distribuição de tempos de relaxação parece estar embasada teoricamente de modo satisfatório, nem concordar integralmente com todos dados experimentais disponíveis.

É interessante notar que a maioria das funções de distribuição de tempos de relaxação foram apresentadas, inicialmente, para os fenômenos de relaxação viscoelástica e tornadas válidas para os materiais dielétricos com uma distribuição extensa de tempos de relaxação [Bottcher (p.53)¹⁰]. Além disso, toda função de relaxação dielétrica pode ser associada com uma função de distribuição, contínua ou descontínua, de tempos de relaxação. Esta associação pode ou não ter um significado físico real, em conexão direta com a estrutura de um modelo microscópico (Ross Macdonald¹⁴¹). Neste sentido, V.Daniel (p.76)²³ alerta que o uso de modelos tem levado a uma série de confusões quanto ao significado físico das funções de distribuição. Segundo o autor, Wagner construiu seu modelo baseado no tratamento dado por Maxwell a capacitores formados por camadas de dielétrico heterogêneos e o próprio Maxwell considerou a possibilidade de seu tratamento ser apenas um artifício matemático. V.Daniel²³ observou que Maxwell e Wagner não fecharam a questão de modo a impedir que futuras abordagens por mecanismos moleculares levassem aos mesmos resultados. A conclusão de V.Daniel²³ é que atribui-se demasiada importância ao efeito Maxwell-Wagner, o qual é usado, inclusive, para explicar o comportamento de dielétricos homogêneos e, além disso, não se pode considerar a dedução matemática de uma função de distribuição equivalente a uma explicação física.

Outros problemas surgem em conexão com o uso de funções de distribuição de tempos de relaxação. Assim, Gross^{55,62,63}

apontou para o fato da distribuição poder ser contínua ou descontínua, de modo que a função de distribuição $F(\tau)$, eq. (3.38), pode ser uma função imprópria. Ainda, Jonscher⁸⁶ alertou que a observação experimental de distribuições extremamente extensas de tempos de relaxação não pode ser atribuída à existência de sistemas relaxantes independentes. Hill e Dissado⁷⁹, em conexão com os fenômenos de relaxação viscoelástica, apontaram que a existência das funções de distribuição de tempos de relaxação para a corrente, eq. (3.38) e para a tensão, eq. (3.39), gera ambiguidades. Todos estes aspectos levaram alguns autores a uma tendência de não se dar um significado físico às funções de distribuição, ou seja, estas funções não representariam sistemas elementares independentes nem tampouco, constituiriam uma prova suficiente de sua existência física real (Gross⁶³). É justamente neste sentido que surgem as teorias de Jonscher, Williams e Watts propondo funções de relaxação dielétrica como uma resposta dielétrica universal, baseada em interações de muitos corpos, conforme citado no item anterior.

Em alternativa ao uso das funções de distribuição de tempos de relaxação, é comum a utilização de funções de distribuição de energias de ativação. O tempo de relaxação de um sistema elementar polarizável é relacionado com a temperatura pela equação de Arrhenius (Gross⁶³)

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{\mu}{KT}\right) \quad (3.40)$$

onde μ é a energia de ativação, K é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta.

A transformação da função de distribuição de tempos de relaxação em uma função de distribuição de energias de ativação se faz pela relação (Gross⁶³)

$$F(\tilde{\tau}) \frac{d\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} = G\left(\frac{\mu}{kT}\right) \frac{d\mu}{kT} \quad (3.41)$$

Vários autores apontam as diversas distribuições de energias de ativação propostas e as discutem teoricamente |Bottcher¹⁰, V.Daniel²³, P.Hedvig⁷⁵, Gross^{56,63}, Wintle e Sribney¹⁷¹, Ross Macdonald^{140,141}|. Em particular, Gross⁶³ observou que considerar-se os processos ativados pela temperatura (distribuição de energias de ativação) leva a intervalos de extensão mais aceitável que os obtidos com distribuições de tempos de relaxação.

Contudo, o problema de se ter uma boa função de distribuição de energias de ativação, bem como o de se ter um significado físico para ela continua tal qual no caso das funções de distribuição de tempos de relaxação, ou seja, sem solução definitiva.

É interessante observar, de passagem, a diferença entre os processos de relaxação e ressonância. Assim, segundo Bottcher (p.4,5,38-44)¹⁰, os processos de relaxação dão origem à polarização orientacional e os processos de ressonância à polarização induzida. Além disso, se a permissividade decai monotonicamente quando a frequência cresce teremos o processo de relaxação e, se ϵ passa por um máximo e um mínimo com o crescimento da frequência, o processo presente é o de ressonância |Tareev (p.159)¹⁵⁸|.

As funções de distribuição têm se mostrado um poderoso instrumento no estudo do comportamento dielétrico. Por exemplo, Y.Kita⁹⁰ e Gross⁶² estudaram, com o uso das funções de distribuição, a relaxação dielétrica em sistemas compostos de camadas. A conclusão de Gross⁶², neste caso contrária à de Y.Kita⁹⁰, é de que o modelo de camada pode causar uma relaxação do tipo Davidson-Cole.

Entretanto diversos problemas tanto de ordem matemática quanto de interpretação física têm limitado o uso das funções de distribuição. Além dos problemas já mencionados anteriormente, alguns outros devem ser abordados. Assim, a teoria de relaxação dielétrica lida com duas funções de distribuição equivalentes (modelos de Maxwell e Wagner). A relação entre as duas é estabelecida com o uso de transformações integrais. Estas transformações nem sempre foram satisfatórias do ponto de vista matemático pois, além de muitas vezes empregarem integrais sobre funções impróprias, problemas surgiram com o uso de espectros truncados. Uma distribuição truncada é aquela que é diferente de zero dentro de um intervalo limitado e zero fora deste intervalo. Neste caso, a outra função de distribuição equivalente é contínua dentro deste mesmo intervalo e zero fora dele, exceto por uma linha única adicional (Meixner¹¹⁰). O aparecimento desta linha não é mostrado com o uso das transformações integrais (Gross^{62,63}). Tendo em vista estes fatos, Gross⁶⁴ propôs um tratamento matemático mais satisfatório e, para tanto, adotou uma nova definição para a função de distribuição. Elas seriam vistas, agora, como os componentes imaginários de valores limites de funções analíticas complexas

definidas por meio de uma integral de contorno complexo (Gross⁶⁴). Estas funções seriam as funções geradoras de todas as outras funções da teoria da relaxação dielétrica. Através desta nova abordagem, Gross⁶⁴ obteve as expressões para as linhas únicas nos casos de espectros truncados, além de expressões para os espectros descontínuos em uma forma que evitou termos não definidos na teoria convencional de funções impróprias.

CAPÍTULO 4
PERDAS DIELÉTRICAS

4.1 TIPOS DE PERDAS DIELÉTRICAS

Um material dielétrico sujeito a um campo elétrico dissipa alguma energia na forma de calor. A perda de potência é a energia média dispendida pelo campo em um certo intervalo de tempo.

Um isolante perfeito, quando submetido a um campo elétrico, não possui perdas devida à corrente de condução.

Em um material dielétrico perfeito, a única perda existente é a devida à corrente de condução. Esta perda é justamente o efeito Joule. A tangente do ângulo de perda, $\text{tg}\delta$, é definida como o quociente das correntes de condução e deslocamento e , é uma grandeza característica do material.

Por outro lado, um material dielétrico real, quando submetido a um campo elétrico, é atravessado por uma corrente dada pela eq. (2.8) e sua resposta em polarização, eq. (2.98), caracteriza o fenômeno de dispersão temporal. Neste caso, as perdas são devidas não somente à corrente de condução mas também à corrente posterior, a qual reflete a história do material dielétrico. Isto significa que outros tipos de perdas, além da perda por condução, estão presentes no material dielétrico. Estas perdas são as perdas por relaxação, perdas por

ressonância e perdas devidas a heterogeneidades do material, ou seja, pelo efeito Maxwell-Wagner [Tareev (p.154-169) ¹⁵⁸].

4.2 PERDAS PARA EXCITAÇÕES SENOIDAIS

O cálculo das perdas dielétricas para excitações senoidais foi feito utilizando-se a equação geral da resposta dielétrica [eq. (2.8)], levando-se em consideração, desta forma, todos os tipos de perdas presentes nos materiais dielétricos reais (Gross ^{40,42,45,47}).

Assim, a corrente que atravessa um capacitor absorptivo, formado com um dielétrico real, submetido a uma tensão $V(t)$, é dada pela eq. (2.8), na forma

$$I(t) = G_0 V(t) + C_0 \frac{dV(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (4.1)$$

onde G_0 é a condutância e C_0 denota a capacitância geométrica. Para uma solicitação senoidal, da forma

$$V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \psi) \quad (4.2)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \bar{I}(\omega) = & [G_0 + A(\omega)] V_0 \text{sen}(\omega t + \psi) + \\ & + \omega [C_0 + B(\omega)] V_0 \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$A(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \phi(\delta) \text{sen} \omega \delta d\delta \quad (4.4)$$

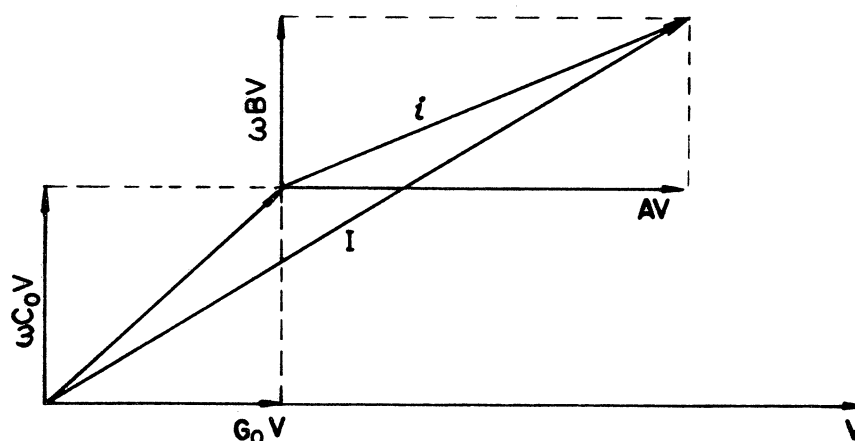
$$B(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(\delta) \omega \cos \omega \delta d\delta \quad (4.5)$$

O diagrama fasorial representando a situação mostrada na eq. (4.3) está na fig. 4.1. A eq. (4.3) para o capacitor absorptivo tem a mesma forma que para um capacitor ideal. Deste modo, pode-se considerar o capacitor absorptivo como tendo uma condutância aparente $G(\omega)$ e uma capacitância aparente $C(\omega)$, dadas respectivamente por

$$\zeta(\omega) = \zeta_0 + A(\omega) \quad (4.6)$$

$$C(\omega) = C_0 + B(\omega) \quad (4.7)$$

FIGURA 4.1
DIAGRAMA FASORIAL DO CAPACITOR ABSORTIVO
(Gross⁴²)



$A(\omega)$ e $B(\omega)$ representam a absorção dielétrica. Vê-se que as eqs. (4.4) e (4.5) representam duas integrais de Fourier, cuja inversão dá a função de relaxação dielétrica, representada de duas formas

$$\phi(\delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{A(\omega')}{\omega'} \sin \omega \delta' d\omega' \quad (4.8)$$

e,

$$\phi(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega \gamma \, d\omega \quad (4.9)$$

As eqs. (4.8) e (4.9) mostram que as funções $A(\omega)$ e $B(\omega)$ são interdependentes. Foi, então, estabelecida uma relação entre elas (Gross^{42,45}).

Levando a eq. (4.8) na eq. (4.5) e a eq. (4.9) na eq. (4.4), resulta

$$\frac{A(\omega)}{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega \gamma \, d\gamma \int_0^{\infty} B(\omega') \cos \gamma \omega' \, d\omega' \quad (4.10)$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \gamma \, d\gamma \int_0^{\infty} \frac{A(\omega')}{\omega'} \sin \gamma \omega' \, d\omega' \quad (4.11)$$

As eqs. (4.10) e (4.11) podem ser simplificadas, ou impondo-se certas restrições sobre as funções $A(\omega)$ e $B(\omega)$ e obtendo as relações diretamente (Gross^{42,43,44,46,48} e B.Levi¹⁰⁰), ou verificando por substituição (Gross⁴⁵).

Resultam as relações

$$\frac{A(\omega)}{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega') \frac{\omega}{\omega^2 - \omega'^2} \, d\omega' \quad (4.12)$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega')}{\omega'} \cdot \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \, d\omega' \quad (4.13)$$

onde o símbolo \int denota valor principal.

As eqs. (4.12) e (4.13) dão as relações desejadas entre a condutância e a capacitância aparentes. O cálculo numérico é facilitado pois contribuem para a integral somente pontos na vizinhança de $\omega' = \omega$ (Gross^{42,45}). Uma característica importante destas relações é que elas são independentes da forma particular da função de relaxação dielétrica.

As eqs. (4.12) e (4.13) são relações do tipo Kramers-Kronig, as quais são transformações integrais de um tipo especial denominadas transformadas de Hilbert. As condições que devem ser obedecidas pelas funções $A(\omega)$ e $B(\omega)$ para que sejam válidas as relações (4.12) e (4.13) foram mostradas por Gross^{43,44,46,47}. Estas condições, consideradas severas demais, foram reestudadas e simplificadas por B. Levi¹⁰⁰.

Contudo, as relações de Kramers-Kronig que são da forma das integrais de Hilbert podem ser obtidas da teoria das funções analíticas (Gross⁶⁰). Desta teoria sabe-se da importância das funções complexas com significado físico somente para argumentos reais mas, cujos argumentos complexos podem fornecer informações úteis. Neste caso, a ferramenta utilizada para obter-se relações entre quantidades reais de significado físico direto é a transformada de Hilbert [Byron e Fuller (p.335)¹⁴]. Em sistemas físicos lineares com dispersão temporal, como os tratados aqui, a transformação de Hilbert pode ser aplicada, desde que se faça algumas hipóteses razoavelmente amplas e motivadas fisicamente. A principal hipótese é a validade do princípio de causalidade. Pode-se dizer que a causalidade implica a existência das relações de dispersão.

No apêndice C são mostradas as transformadas de Hilbert, a obtenção das relações de Kramers-Kronig a partir delas e as hipóteses necessárias para tal.

A partir das eqs. (4.12) e (4.13) foi obtida a expressão para as perdas dielétricas sob excitações senoidais (Gross⁴⁵). O fator de perda dielétrica é dado pela tangente do ângulo de perda, δ , definido por

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{I_{\text{otivo}}}{I_{\text{reativo}}} = \frac{G(\omega) \sqrt{1/\epsilon}}{\omega C(\omega) \sqrt{1/\epsilon}} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{G(\omega)}{\omega C(\omega)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

para frequências técnicas (60Hz) ou maiores, tem-se

$$\epsilon_0 \ll G(\omega)$$

de modo que a eq. (4.6) fica

$$G(\omega) = A(\omega) \quad (4.15)$$

levando as eqs. (4.7) e (4.15) na eq. (4.14), vem

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A(\omega)}{\omega} \cdot \frac{1}{C(\omega)} \quad (4.16)$$

levando as eqs. (4.12) e (4.13) na eq. (4.16), vem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{1}{C(\omega)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega') \frac{\omega}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{C(\omega)} \left[\int_0^{\infty} \frac{C(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' - C_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \right] \end{aligned}$$

Notando que

$$\int_0^{\omega} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' = 0$$

resulta finalmente

$$tg \delta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{c(\omega)} \int_0^{\omega} \frac{c(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \quad (4.17)$$

A eq. (4.17) mostra que o conhecimento da função $C(\omega)$ (variação da capacitância aparente com a frequência) permite, imediatamente, o cálculo da perda dielétrica (Gross⁴⁵).

Com os resultados obtidos no cálculo de perdas dielétricas foi feita uma comparação com dados experimentais de modo a mostrar a validade do uso da função de Schweidler para a função de relaxação dielétrica (H.Silva¹⁵²) e do uso do princípio de superposição no estudo dos dielétricos reais (H.Silva¹⁵³ e B.Gross e H.Silva⁷³).

Assim, utilizando a função de Schweidler, eq. (2.21), para o cálculo da condutância e capacitância aparentes, eqs. (4.4) - (4.7), obtem-se, desprezando-se G_0

$$G(\omega) = \frac{\pi\beta}{2\Gamma(\alpha) \cos \left[(1-\alpha) \frac{\pi}{2} \right]} \omega^\alpha = k_1 \beta \omega^\alpha$$

$$C(\omega) = C_0 + \frac{\pi\beta \omega^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \sin \left[(1-\alpha) \frac{\pi}{2} \right]} = C_0 + k_2 \beta \omega^{\alpha-1}$$

Com,

$$\omega = 2\pi\nu$$

onde ν é a frequência, resulta

$$\frac{dc}{d\nu} = (\alpha-1) k_2 \beta (2\pi)^{\alpha-1} \nu^{\alpha-2} \quad (4.18)$$

$$\zeta = k_1 (2\pi)^\alpha \beta \nu^\alpha \quad (4.19)$$

As eqs. (4.18) e (4.19), mostradas em escala dupla logarítmica, seriam representadas por retas. A confirmação experimental foi feita por H.Silva¹⁵².

Além disso, utilizando-se as eqs. (4.6), (4.7), (4.12) e (4.13) e sabendo-se que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = 0$$

resulta

$$\zeta(\omega) - \zeta_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^2 c(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \quad (4.20)$$

$$c(\omega) - c_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (4.21)$$

onde o símbolo \int denota valor principal.

As integrais nas eqs. (4.20) e (4.21) podem ser decompostas em vários intervalos e, considerações matemáticas e físicas podem ser feitas, de modo que conhecendo-se a função $G(\omega)$ em duas frequências ω_1 e ω_2 tal que

$$\omega_1 \ll \omega_2$$

então, a validade do princípio de superposição fica demonstrada se:

$$C(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{c(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \text{constante} \quad (4.22)$$

onde $C(\omega)$ é obtida experimentalmente. A confirmação experimental foi feita por H.Silva¹⁵³ e H.Silva e Gross⁷³.

4.3 PERDAS PARA EXCITAÇÕES NÃO-SENOIDAIS

As pesquisas das perdas em dielétricos submetidos a excitações senoidais encontram-se, nos dias de hoje, bem estabelecidas e suas implicações físicas têm sido objeto de estudos de vários autores. Por outro lado, os estudos das perdas em dielétricos submetidos a excitações em outras formas de onda ou sob condições transitórias mereceram, comparativamente, pouca atenção, apesar de sua inegável importância prática |Gross³⁷, Jonscher^{85,86,87,88}, Tareev (p.163-174)¹⁵⁷, Romano e Schifani¹³⁸ e Curtins e Shah²²|.

Gross³⁷ fez um estudo comparativo das perdas dielétricas para excitações em forma de onda quadrada e para excitações senoidais. A conclusão deste autor de que as perdas no primeiro caso são maiores que aquelas no segundo caso, pode ser explicada se considerarmos que a onda quadrada é uma superposição de Fourier de ondas senoidais de diversas frequências. Desta forma, as perdas dielétricas são função não somente da frequência mas também da forma de onda da tensão. Gross³⁷ trabalhou com o formalismo da teoria de circuito e o cálculo da corrente posterior foi feito utilizando-se a função de Schweidler¹⁵¹.

Jonscher⁸⁵ apresentou as perdas em capacitores não-ideais sob condições de carga e descarga. Neste estudo foram analisadas as perdas para uma excitação em forma de função rampa, tendo como caso limite a função degrau. Suas conclusões principais são que a energia dissipada depende da taxa de crescimento da função rampa e, no caso limite da função degrau, a energia dissipada é igual à energia armazenada no sistema. Tal fato indica que as perdas dielétricas em condições transitórias de carga e descarga envolvem perdas de energia mais significativas que a energia dissipada por ciclo, para excitações senoidais. Além disso, no caso de um curto-circuito, toda energia armazenada é perdida no processo de despolarização. Assim, conclui Jonscher⁸⁵, o trabalho dado na polarização do material dielétrico (alinhamento dos dipolos) é o mesmo que o trabalho realizado para randomizar os dipolos uma vez removido o campo aplicado e, depende da taxa com que o processo é realizado. A importante conclusão final é que processos transitórios rápidos causam uma grande dissipação de energia em materiais dielétricos.

A hipótese utilizada por Jonscher é, basicamente, a resposta em polarização do material dielétrico ser da forma da eq. (2.98), ou seja

$$\vec{P}(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \quad (4.23)$$

onde $\chi(t)$ é a função resposta.

Esta teoria foi aperfeiçoada pelo próprio Jonscher^{87,88} que estabeleceu as equações para a carga e descarga de capacitores não-ideais e calculou as perdas nestas condições.

Assim, a capacitância complexa, função da frequência, é definida como (Jonscher⁸⁷)

$$\tilde{C}(\omega) = \Delta \tilde{C}(\omega) + C_{\infty} \quad (4.24)$$

onde C_{∞} é a capacitância de alta frequência e $\Delta \tilde{C}(\omega)$ é o incremento complexo, dado pela transformada de Fourier da função resposta característica do material dielétrico que forma o capacitor, $\chi(t)$

$$\Delta \tilde{C}(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.25)$$

No caso limite de $\omega=0$, o incremento torna-se real e resulta

$$\Delta \tilde{C}(0) = \Delta C(0) = \int_0^{\infty} \chi(t) dt \quad (4.26)$$

A evolução no tempo da carga $Q(t)$ de um capacitor submetido a uma tensão $V_1(t)$ é, em conexão com a eq. (4.23), da forma (Jonscher⁸⁷)

$$Q(t) = \int_0^t \chi(\tau) V_1(t-\tau) d\tau + C_{\infty} V_1(t) \quad (4.27)$$

Assumindo que a tensão $V_1(t)$ é constante para instantes de tempo $t < 0$, com valor inicial $V_1(0)$, tem-se

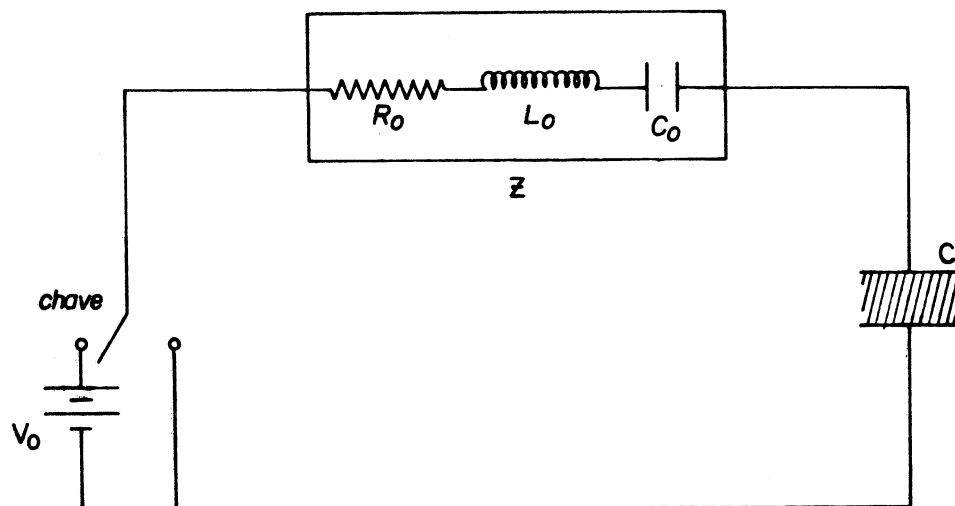
$$\dot{V}_1(t) = 0, \quad \text{para } t < 0 \quad (4.28)$$

As eqs. (4.27) e (4.28) permitem o cálculo da corrente no sistema como

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \int_0^t \chi(\tau) \dot{V}_1(t-\tau) d\tau + \chi(t) V_1(0) + C_{\infty} \dot{V}_1(t) \quad (4.29)$$

Usando a transformada de Laplace da eq. (4.29), Jonscher⁸⁷ calculou as correntes e tensões envolvidas nos casos de carga e descarga através de uma impedância externa Z , tal como mostrado na fig. 4.2.

FIGURA 4.2
CARGA E DESCARGA DE UM CAPACITOR NÃO-IDEAL
(Jonscher⁸⁷)



Para a carga, tem-se

$$Z I(t) + v_1(t) = V_0 \quad , \text{ com } v_1(0) = 0 \quad (4.30)$$

Para a descarga, tem-se

$$Z I(t) + v_1(t) = 0 \quad , \text{ com } v_1(0) = V_0 \quad (4.31)$$

As transformadas de Laplace das correntes de carga e descarga e das tensões no capacitor C , são, considerando-se somente a resistência R_0 :

na carga,

$$\bar{I}_c(\Delta) = V_0 \frac{\chi(\Delta) + C_\infty}{R_0 \Delta [\chi(\Delta) + C_\infty] + 1} \quad (4.32)$$

$$V_{1c}(\Delta) = V_0 \frac{1}{R_0 \Delta^2 [\chi(\Delta) + C_\infty] + \Delta} \quad (4.33)$$

e, na descarga

$$V_{1d}(\Delta) = \frac{\chi(\Delta) + C_\infty}{\Delta [\chi(\Delta) + C_\infty] + 1/R_0} V_0 \quad (4.34)$$

$$I_d(\Delta) = - \frac{\chi(\Delta) + C_\infty}{R_0 \Delta [\chi(\Delta) + C_\infty] + 1} V_0 \quad (4.35)$$

onde, a transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{\chi(t)\} = \chi(\Delta) = \int_0^{\infty} \chi(t) e^{-\Delta t} dt \quad (4.36)$$

As eqs. (4.32) e (4.35) mostram que as correntes de carga e descarga são idênticas, com o sinal trocado.

As eqs. (4.33) e (4.34), dão

$$V_{1c}(\Delta) + V_{1d}(\Delta) = \frac{V_0}{\Delta}$$

donde,

$$V_{1c}(t) + V_{1d}(t) = V_0 \quad (4.37)$$

A eq. (4.37) mostra que também as tensões no capacitor, na carga e descarga, são imagens uma da outra.

Estas relações continuam válidas se R_0 é substituído por

$$Z(\Delta) = R_0 + \Delta L_0 + \frac{1}{\Delta C_0}$$

de modo que elas constituem características gerais dos capacitores reais, independentemente, inclusive, da forma analítica da função resposta $\chi(t)$.

Embora as transformadas inversas, dando as soluções no domínio do tempo, das eqs. (4.32) - (4.35) só possam ser obtidas, no caso geral numericamente, Jonscher⁸⁷ obteve soluções analíticas simples em alguns casos particulares. Assim, no comportamento em longos instantes de tempo e em curtos instantes de tempo, as correntes e tensões de carga e descarga se aproximam de um decaimento exponencial, tal como no caso de um capacitor ideal. As constantes de tempo, agora, são dadas, no caso do comportamento em longos instantes de tempo, por $R_0 C(0)$ e, no caso do comportamento em curtos instantes de tempo, por $R_0 C_\infty$.

Conhecido o comportamento na carga e descarga de capacitores não-ideais, Jonscher⁸⁸ calculou as perdas nestes casos.

Para tanto, Jonscher⁸⁸ considerou a função resposta dada na forma

$$\chi(t) = \begin{cases} A/T & , \text{ para } 0 < t < T \\ A/t & , \text{ para } T < t < kT \\ AkT/t^2 & , \text{ para } kT < t \end{cases} \quad (4.38)$$

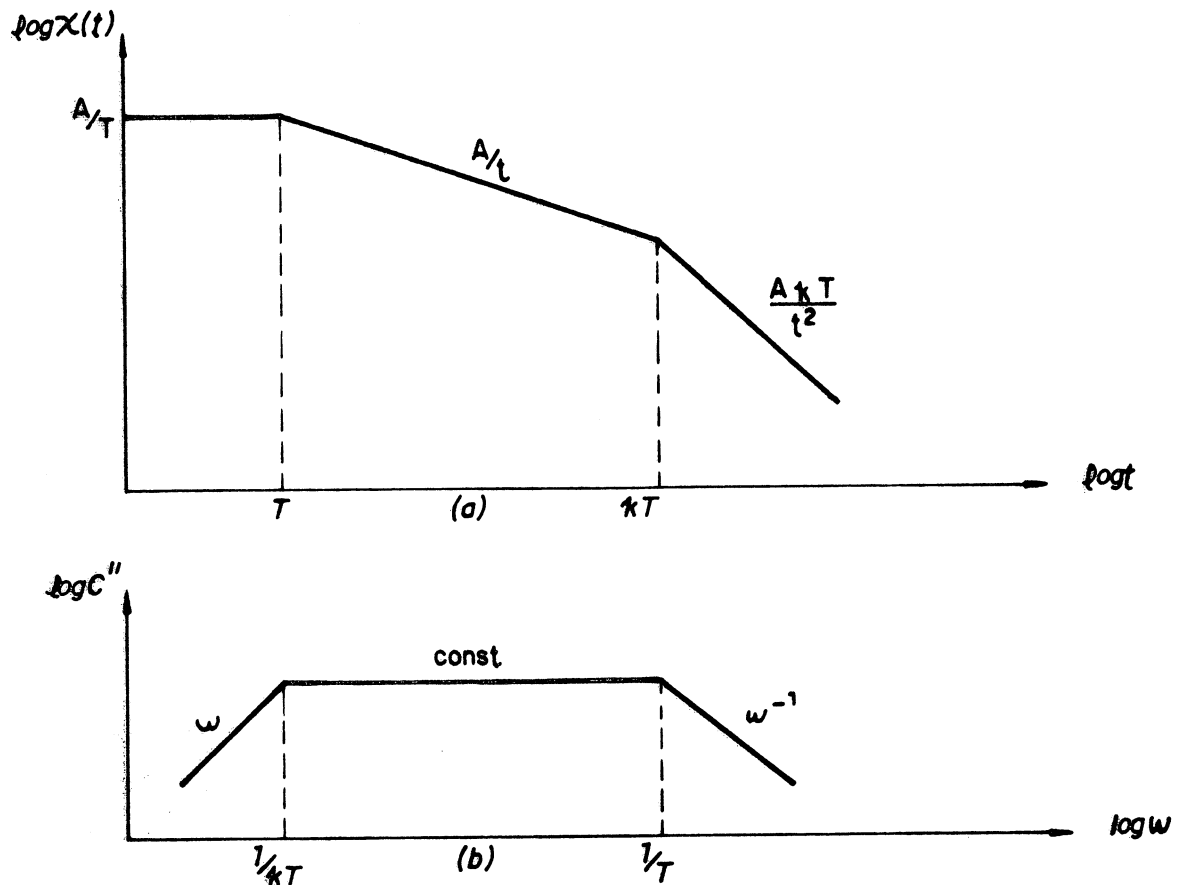
onde A é um fator amplitude, k um fator de intervalo, T e kT são os instantes de tempo limites na região de validade da lei t^{-1} para $\chi(t)$.

A fig. 4.3.a mostra a forma da função resposta dielétrica $\chi(t)$ e, a fig. 4.3.b a componente imaginária da capacitância complexa no domínio da frequência.

A função resposta $\chi(t)$ foi escolhida nesta forma, de modo a representar o comportamento dos materiais dielétricos de baixas perdas utilizados na prática. Estes materiais

FIGURA 4.3

FUNÇÃO RESPOSTA PARA MATERIAIS DIELÉTRICOS COM BAIXAS PERDAS
(Jonscher⁸⁸)



- a) função resposta dielétrica
b) componente imaginária da capacitância complexa $C''(\omega)$

frequentemente apresentam um extenso intervalo onde as perdas independem da frequência, denominada região "horizontal" de perdas (Jonscher⁸⁶). Nesta região representou-se a função resposta dielétrica $\chi(t)$ seguindo a lei t^{-1} pois, de acordo com a eq. (4.25), esta é a transformada de Fourier de perdas independentes da frequência. Em instantes de tempo muito curtos considerou-se a função resposta constante, representando a região de altas frequências onde as perdas decaem. Em instantes

de tempo muito longos a função resposta segue a lei t^{-2} , de modo a se anular rapidamente, dando um limite finito para a capacitância de baixa frequência, conforme a eq. (4.26), e representar a região de baixas frequências, onde as perdas crescem.

As tensões de carga e descarga foram consideradas na aproximação para instantes de tempo curtos e têm, portanto, a forma exponencial. Assim,

para a carga

$$V_{1c} = V_0 [1 - e^{-\nu t}] \quad (4.39)$$

e, para descarga

$$V_{1d} = V_0 e^{-\nu t} \quad (4.40)$$

onde ν é um fator de frequência adequado para determinação da taxa de crescimento ou decaimento da tensão.

A energia fornecida ao sistema é calculada como

$$W = \int_0^{\infty} I(t) v_1(t) dt \quad (4.41)$$

A corrente, da eq. (4.29), é

$$I(t) = \int_0^t \chi(\tau) \dot{V}_1(t-\tau) d\tau + v_1(0) \chi(t) + C_{\omega} \dot{V}_1(t) \quad (4.42)$$

Assim, no caso da carga, levando as eqs. (4.42) com $V_1(0) = 0$, (4.39) e (4.38) na eq. (4.41), resulta

$$W = W_S [2 - K(z)] = W_S + W_L \quad (4.43)$$

onde $z = \nu T$; W_S é a energia armazenada na componente de perdas da capacitância total

$$W_S = 0,5 V_0^2 \Delta C(0)$$

W_l é a energia perdida na polarização do capacitor; a energia armazenada no componente de resposta rápida da capacitância total

$$W_r = 0,5 V_0^2 C \omega$$

não é considerada pois, sendo totalmente recuperável, sua contribuição para as perdas é nula e, o fator $K(z)$ é

$$K(z) = \frac{1}{z + L_n k} \left[\frac{1 - e^{-z}}{z} + E_1(z) + (kz - 1) \bar{E}_1(kz) + e^{-kz} \right] \quad (4.44)$$

onde,

$$\bar{E}_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (4.45)$$

é a integral exponencial, com os seguintes valores limites

$$E_1(z) = \begin{cases} \frac{e^{-z}}{z} & , \text{ para } z \gg 1 \\ -\gamma - L_n z + z & , \text{ para } z \ll 1 \end{cases} \quad (4.46)$$

onde $\gamma = 0,5772$ é a constante de Euler.

No caso da descarga, levando as eqs. (4.42) com $V_1(0) = V_0$, (4.40) e (4.38) na eq. (4.41), resulta

$$W = W_s K(z) \quad (4.47)$$

Como a energia inicialmente armazenada foi W_s , a energia perdida tanto no caso da carga quanto no da descarga, vale

$$W_l = W_s [1 - K(z)] \quad (4.48)$$

As eqs. (4.43) - (4.48) mostram que para processos de carga e descarga rápidos, na forma da função degrau $K(z) \rightarrow 0$ e a perda de energia se iguala à energia armazenada; para

processos de carga e descarga lentos, $K(z) \rightarrow 1$ e a perda de energia tende a ser nula (Jonscher⁸⁸).

Um outro cálculo das perdas em capacitores formados com materiais dielétricos reais, submetidos a excitações não-senoidais, foi mostrado por Tareev (p.163-174)¹⁵⁷. Este autor toma um elemento, dentro de um período, da tensão não-senoidal e o considera como um pulso. Este pulso é a superposição de Fourier de excitações senoidais de várias frequências, formando uma densidade de espectro. A partir disto, o cálculo das perdas é feito com o uso das fórmulas usuais do caso de excitações senoidais. Suas conclusões principais são que as perdas sob uma excitação em forma de pulso não-senoidal dependem da forma do pulso e, também, das frequências características do ângulo de perda, $\text{tg}\delta$, e da capacitância. O cálculo dos valores limites das perdas é também realizado, concluindo-se que o limite inferior das perdas é aquele causado por uma tensão senoidal.

CAPÍTULO 5
GENERALIZAÇÕES

Até aqui, tratou-se a resposta dielétrica considerada em uma aproximação linear. Agora, no caso geral, em meios não-magnéticos, a resposta em polarização de um material dielétrico, submetido a um campo elétrico, é dada pela expansão de Volterra, na forma [M.Brédov et.al. (p.440-447)¹¹, M.Schetzen (p.1-10)¹⁴⁹, M.Schubert e Wilhelmi (p.27-67)¹⁵⁰]

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(0)}(\vec{r}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{P}^{(n)}(\vec{r}, t) \quad (5.1)$$

onde $\vec{P}^{(n)}$ é o somatório de ordem n segundo o campo, dado por

$$P_{\alpha}^{(n)}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^t dt_3 \dots \int_{-\infty}^t dt_n \int d^3r_1 \int d^3r_2 \dots \int d^3r_n K_{\alpha\beta\gamma\dots\gamma}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n; t, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) \epsilon_{\beta}(\vec{r}_1, t_1) \epsilon_{\gamma}(\vec{r}_2, t_2) \dots \epsilon_{\gamma}(\vec{r}_n, t_n)$$

(5.2)

onde $\kappa_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}$ é a função suscetibilidade de ordem ν .

As eqs. (5.1) e (5.2) levam em consideração os fenômenos de dispersão espacial e temporal. Além disso, os limites de integração foram tomados admitindo-se a validade do princípio de causalidade, ou seja, o efeito (polarização) é sempre posterior à causa (campo). A relação geral entre o efeito \vec{P} e a causa \vec{E} exhibe, pois, uma estrutura causal, não-instantânea e não-local.

O primeiro termo na eq. (5.1), $\vec{P}^{(0)}(\vec{r}, t)$, representa a parte da polarização independente do campo e pode existir mesmo na ausência deste (em frequência zero $\vec{P}^{(0)}$ se origina de um arranjo espacial estático dos momentos de dipolo e, em frequências óticas, de flutuações do sistema atômico cuja média estatística é nula) [M.Schubert e B.Wilhelmi¹⁵⁰].

A convergência da expansão de Volterra, eq. (5.2), depende da intensidade de campo \vec{E} e de parâmetros atômicos (a convergência depende da razão entre a intensidade de campo da radiação \vec{E} e a intensidade do campo atômico, da ordem de 10^{10} V/m). Para campos moderadamente fortes, a convergência é rápida e pode-se tomar somente os primeiros termos da série dada na eq. (5.2) [M.Brédov et.al.¹¹, M.Schubert e B.Wilhelmi¹⁵⁰].

A função suscetibilidade de ordem ν , $\kappa_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}$, tem um caráter tensorial que reflete a anisotropia do meio. Em meios anisotrópicos, os vetores deslocamento elétrico \vec{D} e campo elétrico \vec{E} não coincidem e $\kappa_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}$ é um tensor de ordem ν ; em meios isotrópicos \vec{D} e \vec{E} são colineares e a função suscetibilidade perde seu caráter tensorial [M.Brédov et.al.¹¹].

O fenômeno de dispersão temporal determina o aparecimento do efeito memória, pelo qual a resposta do material dielétrico é dependente de valores do campo aplicado em instantes de tempo anteriores ao considerado. Além disso, o efeito memória é finito, da ordem do tempo de relaxação do material. Neste caso, a função suscetibilidade de ordem ν , $\kappa_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}$, decresce rapidamente com o aumento do intervalo de tempo $(t-t')$, tendendo a zero em intervalos de tempo infinitos. Como citado no ítem 2.1, a condição em que a dispersão temporal deve ser levada em consideração é:

$$T_f \ll \tau \quad (5.3)$$

onde T_f é o período do campo aplicado e τ é o tempo de relaxação, característico de cada material dielétrico. Além disso, se o efeito memória é invariante no tempo, ou seja, as propriedades do meio não se alteram no tempo, não dependendo assim, de um instante de tempo t particular, a função suscetibilidade de ordem ν , $\kappa_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}$, depende somente da diferença $(t-t')$ [M.Brédov et.al.¹¹].

O fenômeno de dispersão espacial determina que a resposta do material dielétrico seja não-local, isto é, dependa não somente do valor do campo no ponto considerado mas também, dos campos em pontos vizinhos.

A dispersão espacial ocorre quando o comprimento de onda do campo aplicado é da mesma ordem de grandeza, ou menor, que o tamanho das regiões de não-homogeneidade existentes nos materiais dielétricos, ou seja:

$$\lambda_f \ll \ell \quad (5.4)$$

onde λ_f é o comprimento de onda do campo aplicado e l é a dimensão da região de não-homogeneidade. Neste caso, a polarização em um determinado ponto, num dado instante de tempo, é produzida por cargas que estiveram anteriormente em pontos vizinhos do espaço, com outros valores de campo-local. É interessante observar que em meios com dispersão espacial, a permissividade elétrica é função não somente da frequência (como no caso de dispersão temporal) mas também, do vetor de onda, \vec{k} , do campo aplicado. Agora, se o meio é homogêneo, a função suscetibilidade de ordem ν , $\kappa_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}$, só depende da diferença $(\vec{r} - \vec{r}')$ |M.Brédov et.al.¹¹ e Levich¹⁰¹|.

A condição (5.4) só se cumpre em alguns poucos problemas físicos, de modo que, no caso dos dielétricos, os efeitos da dispersão espacial são de menor importância que os da dispersão temporal |M.Brédov et.al.¹¹|.

Agora, considerando-se um meio homogêneo, sem dispersão espacial, com efeito memória finito, invariante no tempo, sem polarização independente do campo $\vec{P}^{(0)}(t)$, e adotando-se a mudança de variáveis

$$t - t' = \tau$$

as eqs. (5.1) e (5.2) tornam-se

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{P}^{(n)}(\vec{r}, t) \quad (5.5)$$

onde

$$P_{\alpha}^{(n)}(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \dots \int_0^{\infty} d\tau_n K_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}^{(n)}(\vec{r}, \tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) \vec{E}_{\beta}(\vec{r}, t-\tau_1) \vec{E}_{\gamma}(\vec{r}, t-\tau_2) \dots \vec{E}_{\nu}(\vec{r}, t-\tau_n) \quad (5.6)$$

A polarização linear se obtém tomando-se somente o primeiro termo na série (5.6)

$$\vec{P}^{(1)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau, K_{\alpha\beta}^{(1)}(\tau) \vec{E}(t-\tau) \quad (5.7)$$

onde omitiu-se a coordenada espacial, por simplicidade.

Se, além disso, considera-se o meio isotrópico, a função suscetibilidade perde seu caráter tensorial e a eq. (5.7), torna-se

$$\vec{P}(t) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \vec{E}(t-\tau)$$

ou,

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (5.8)$$

A eq. (5.8) é da mesma forma da eq. (2.98) utilizada na abordagem pela teoria de campo do efeito posterior em dielétricos sólidos reais e mostrada, no apêndice A, ser equivalente à equação

$$\vec{I}(t) = \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (5.9)$$

utilizada na abordagem pela teoria de circuito do mesmo efeito posterior [eq. (2.8)].

Além disso, a eq. (5.8), expressando a dependência linear entre \vec{P} e \vec{E} , implica na existência de uma histerese elétrica porém, de forma elíptica, independentemente da forma analítica particular da função de relaxação dielétrica [E.Durand (p.158)²⁷].

As séries de Volterra são utilizadas não somente no estudo de materiais dielétricos mas, de maneira geral, na teoria dos sistemas não-lineares. Assim, para um sistema tipo "caixa preta", com resposta $y(t)$ para uma excitação $x(t)$, vale

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}_n \{x(t)\} \quad (5.10)$$

onde \hat{H}_n é o operador de Volterra de ordem n , dado por

$$\hat{H}_n \{x(t)\} = \int_{-\infty}^t \cdots \int_{-\infty}^t h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_n) \cdot d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (5.11)$$

A série de Volterra, eqs. (5.10) e (5.11), é uma série de potência com memória. Em consequência de seu caráter de série de potência, a série de Volterra sofre algumas limitações no uso para sistemas não-lineares. Estas limitações são evitadas com o uso da teoria de Wiener para sistemas não-lineares [M.Schetzen¹⁴⁹].

A teoria da resposta dielétrica não-linear tem sido estudada por diversos autores (por exemplo: Kubo⁹³, Bernard e Callen⁶, A.Morita^{115,116}). Os efeitos da dispersão espacial,

notadamente em plasmas, têm sido estudados por pesquisadores soviéticos [Pekar^{128,129}, Leontovich⁹⁸, Ryzhov et.al.¹⁴⁵, Levanyuk et.al.⁹⁹ e Ajiezer e Peletminski (p.379-410)²], e por outros (J.Neufeld^{118,119} e Eringen²⁸). Em particular, Leontovich⁹⁸ discute as consequências de se acrescentar às hipóteses fundamentais (validade dos princípios de superposição e causalidade), restrições baseadas na teoria da relatividade, tal como a condição

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \ll c(t-t') \quad (5.12)$$

Neste caso, a relação entre a polarização e o campo é obtida com uma integração sobre o tempo e sobre o espaço e, ainda, esta integral deve ser estendida sobre a região dentro de um cone de luz enfocando o passado.

Até aqui, o tratamento dado à teoria da resposta dielétrica é clássico. Como tanto o campo eletromagnético quanto a matéria são quantizados, é de se esperar que somente um tratamento inteiramente quântico da resposta dielétrica seja passível de uma confirmação experimental. Um tal estudo estaria dentro do escopo da eletrodinâmica quântica. Entretanto, M.Schubert e B.Wilhelmi (p.184-191)¹⁵⁰ obtêm bons resultados, fazendo uma descrição semi-clássica da relação entre a polarização e o campo elétrico. A descrição semi-clássica é feita com campos eletromagnéticos clássicos, obtidos com as equações de Maxwell e considerando-se sistemas atômicos quantizados. Uma vantagem obtida neste caso, é que a relação entre a polarização e o campo elétrico para o caso linear é dada em uma forma equivalente à obtida com o tratamento clássico; a polarização e o campo exibem a mesma dependência funcional.

CAPÍTULO 6
DETERMINAÇÕES EXPERIMENTAIS E ANALÍTICAS

6.1 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE CURVAS DE TENSÃO DE
RETORNO EM CAPACITORES

O efeito posterior em materiais dielétricos sólidos, visto anteriormente tanto por uma abordagem pela teoria de circuito (Ítem 2.1) quanto pela teoria de campo (Ítem 2.2), pode ser avaliado experimentalmente. Apresentamos, agora, alguns resultados experimentais obtidos.

Utilizamos como amostra, três capacitores de tipos diferentes, cujas características estão mostradas na tabela 6.1. Para os capacitores dos tipos I e II, as medidas de capacitância e tangente do ângulo de perda, $\text{tg}\delta$, foram realizadas com uma ponte RLC digital, modelo GR 1657 da GenRad. O capacitor do tipo III foi especialmente fabricado pela INEPAR S/A - Indústria e Construções, sendo um capacitor de sua linha de produção normal, porém, sem a resistência interna de descarga. Para este capacitor, as características foram fornecidas pelo próprio fabricante.

Os capacitores dos tipos I e II possuem dielétrico de celulose (papel Kraft dielétrico Terlo[®]; constante dielétrica, $K=5,85$), impregnado com bifenila policlorada. O espectro de infra-vermelho do filme dielétrico dos capacitores dos tipos I e II, obtido com um espectômetro infra-vermelho modelo 283

da PERKIN-ELMER, é mostrado na fig. 6.1, e é igual para os dois tipos. O capacitor do tipo III possui dielétrico de polipropileno ($K=2,34$) texturizado, com aditivos, impregnado com WEMCOL[®]. A fig. 6.2 mostra os três tipos de capacitores utilizados.

A obtenção de curvas de tensão de retorno e de descarga interna em capacitores só é possível com a utilização de técnicas eletrométricas (Keithley et.al.⁸⁹) devido à alta impedância interna da instrumentação (da ordem de $10^{14}\Omega$), necessária para que o capacitor não se descarregue durante a medição. Nas figs. 6.3 e 6.4 estão mostrados os esquemas dos circuitos utilizados para medidas em baixa tensão (capacitores dos tipos I e II) e alta tensão (capacitor do tipo III), respectivamente. Uma visão geral da montagem de baixa tensão é mostrada na fig. 6.5, e de alta tensão na fig. 6.6.

FIGURA 6.1

ESPECTRO INFRA-VERMELHO DO FILME DIELÉTRICO DOS CAPACITORES DO TIPO I (AMOSTRA Nº 1) E TIPO II (AMOSTRA Nº 5)



TABELA 6.1

CARACTERÍSTICAS DOS CAPACITORES UTILIZADOS

CAPACITOR DO TIPO I

Exatidão da ponte= C: 0,2%; $tg\delta$: $\pm 0,001$

Nº	120Hz				1kHz			
	C_s (μF)	$tg\delta$	C_p (μF)	$tg\delta$	C_s (μF)	$tg\delta$	C_p (μF)	$tg\delta$
1	40,19	0,010(2)	40,19	0,010(1)	40,00	0,043(8)	39,93	0,043(8)
2	40,15	0,008(7)	40,15	0,008(7)	40,04	0,046(7)	39,95	0,046(7)
3	39,28	0,012(0)	39,27	0,011(9)	38,90	0,061(6)	38,75	0,061(5)
TENSÃO NOMINAL			TEMPERATURA		ESPESSURA DO FILME DIELÉTRICO			
250V			20 °C		15 μm			

CAPACITOR DO TIPO II

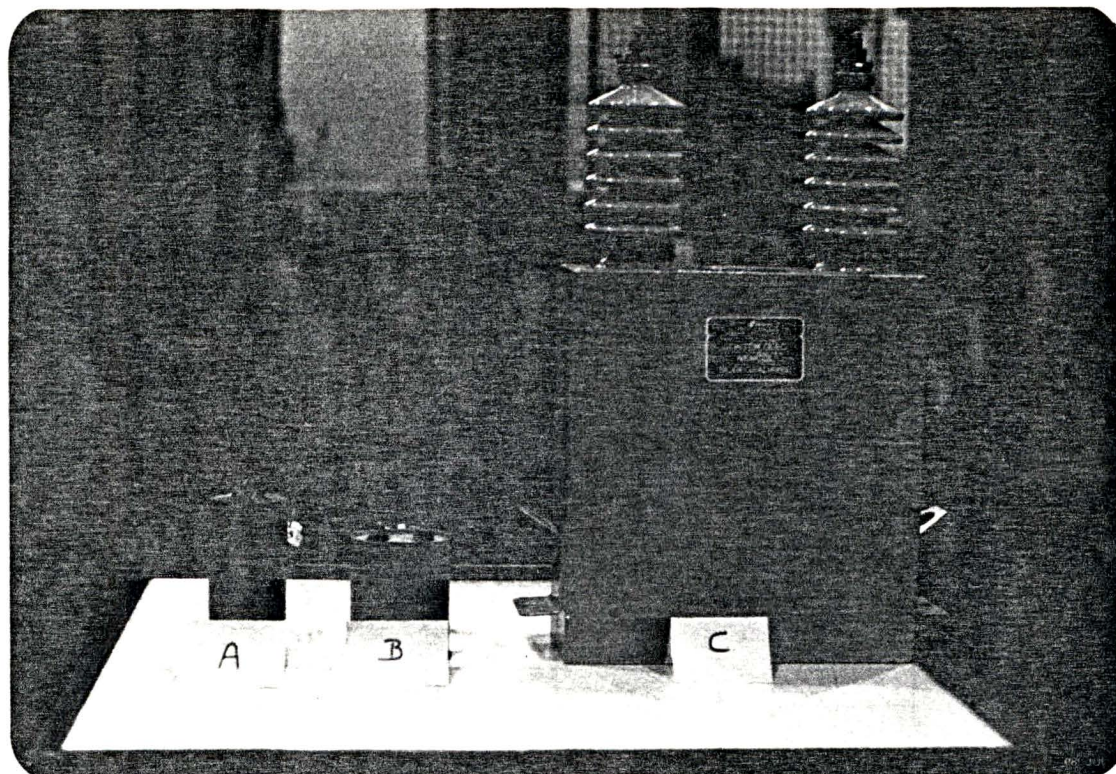
Nº	120Hz				1kHz			
	C_s (μF)	$tg\delta$	C_p (μF)	$tg\delta$	C_s (μF)	$tg\delta$	C_p (μF)	$tg\delta$
5	39,04	0,025(9)	39,02	0,025(9)	38,60	0,190(8)	37,24	0,190(8)
6	40,17	0,027(4)	40,14	0,027(4)	39,66	0,200(7)	38,12	0,200(6)
TENSÃO NOMINAL			TEMPERATURA		ESPESSURA DO FILME DIELÉTRICO			
260V			20 °C		15 μm			

CAPACITOR DO TIPO III

60Hz C (μF)	$tg\delta$	TENSÃO NOMINAL	ESPESSURA DO FILME DIELÉTRICO
1,367	0,00010	13,8kV	26,7 μm

FIGURA 6.2

TIPOS DE CAPACITORES UTILIZADOS



- (A) capacitor do tipo I
- (B) capacitor do tipo II
- (C) capacitor do tipo III

FIGURA 6.3

CIRCUITO DE MEDIÇÃO EM BAIXA TENSÃO

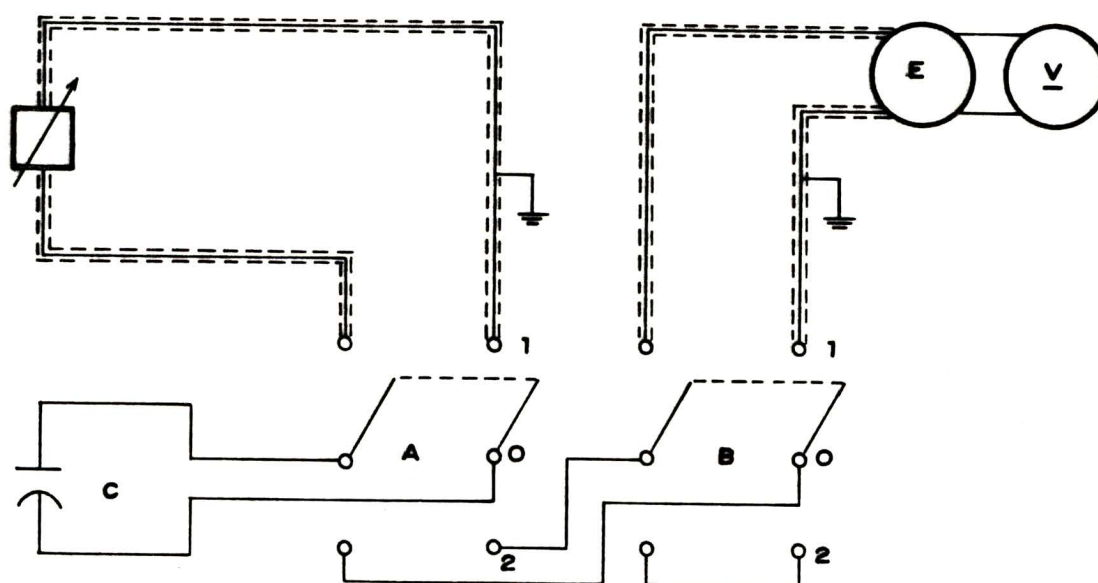


FIGURA 6.4

CIRCUITO DE MEDIÇÃO EM ALTA TENSÃO

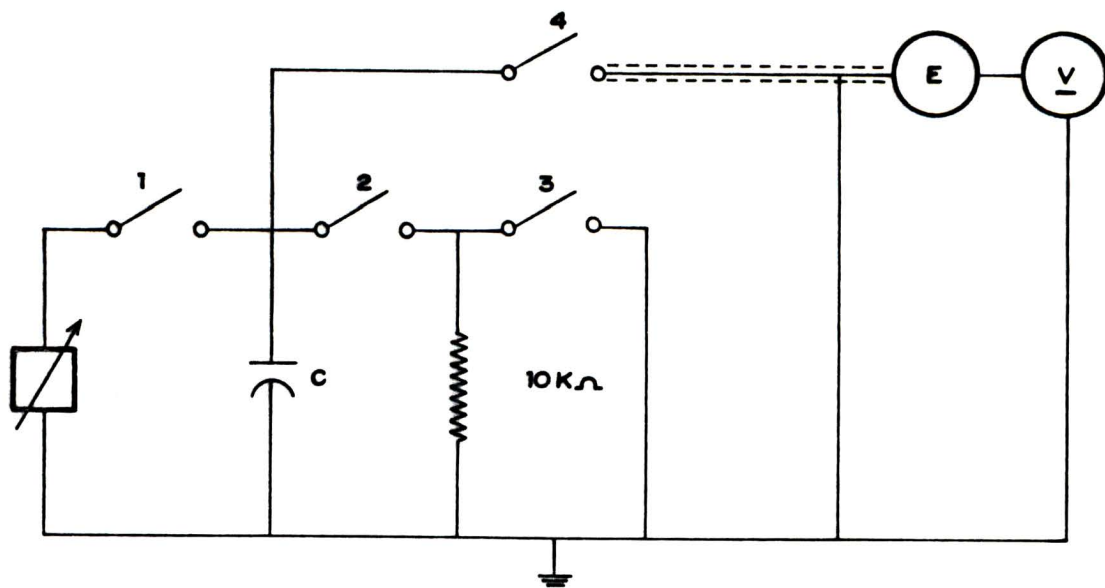


FIGURA 6.5

MONTAGEM DE BAIXA TENSÃO

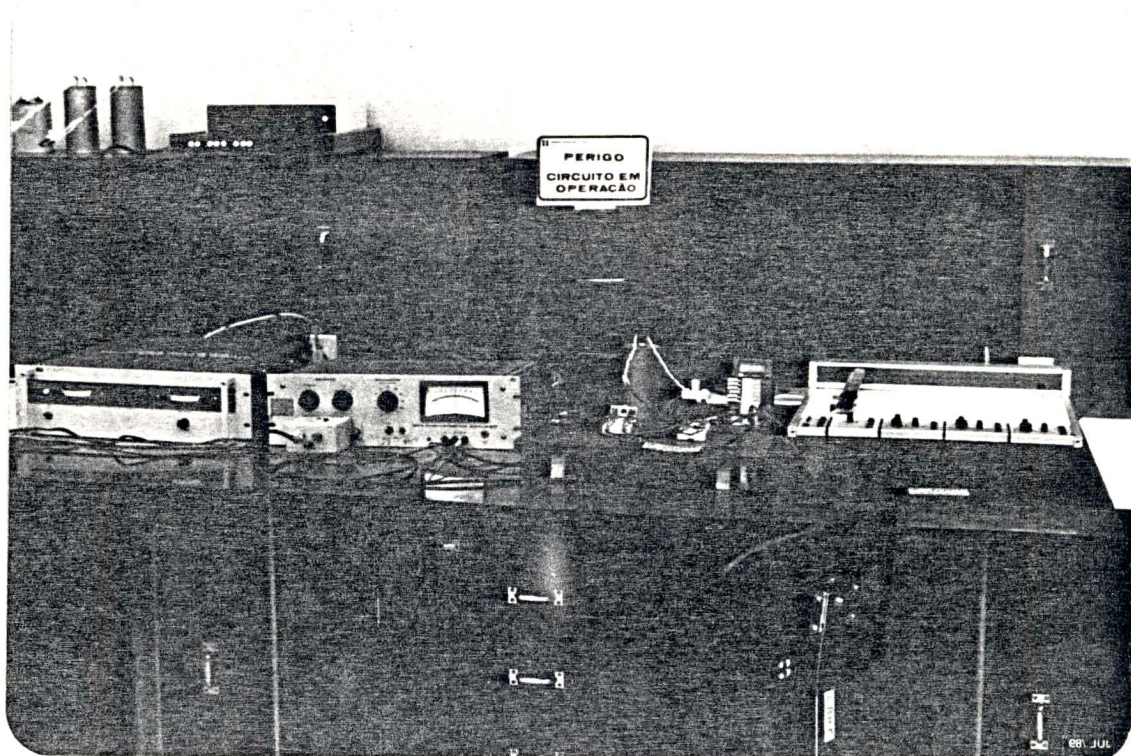
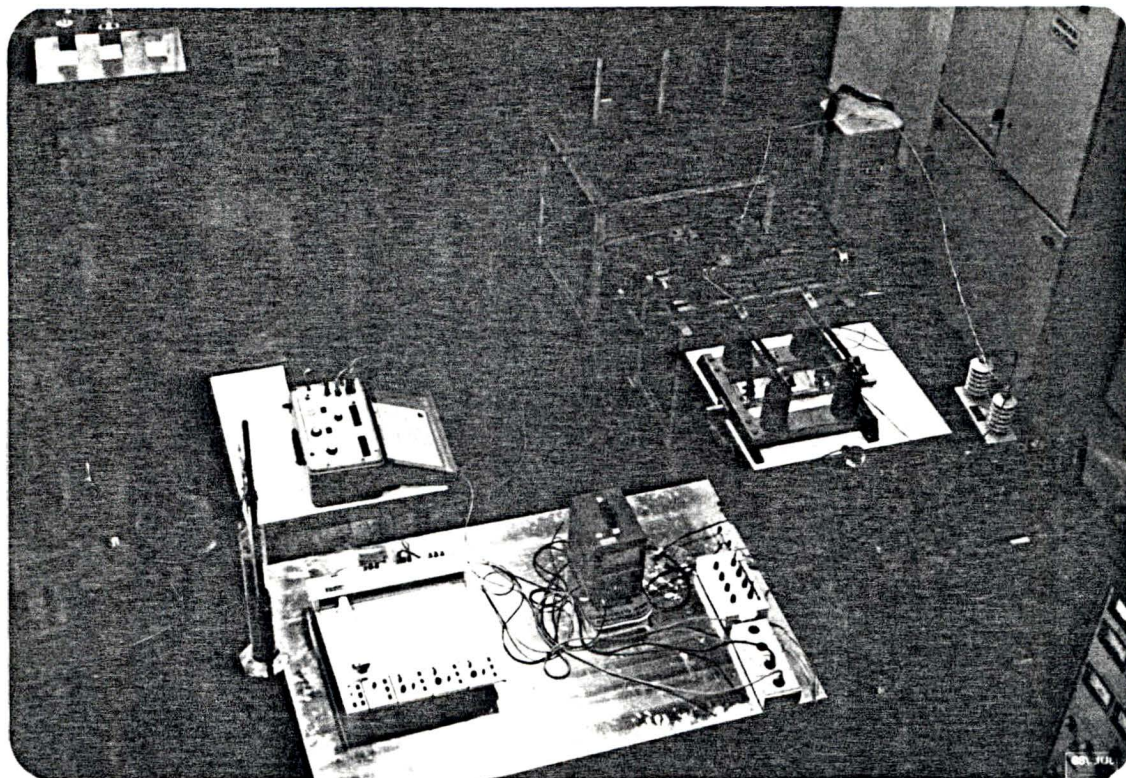


FIGURA 6.6
MONTAGEM DE ALTA TENSÃO



A determinação experimental de curvas de tensão de retorno foi realizada conforme o esquema mostrado na fig. 2.2.c.

Assim, nas medidas em baixa tensão (capacitores dos tipos I e II), uma tensão contínua, V_0 , era aplicada ao capacitor durante o intervalo de tempo t_a , por uma fonte modelo 6521A da HP, estando a chave A na posição 1 e a chave B na posição 0. Os campos aplicados aos capacitores dos tipos I e II foram da ordem de 4×10^6 V/m. Após o intervalo de tempo de carga, t_a , o capacitor era curto-circuitado durante o intervalo de tempo t_0 , estando a chave A na posição 2 e a chave B também na posição 2. Finalmente, após o intervalo de tempo de curto,

t_0 , comutando a chave B para a posição 1 e mantendo a chave A na posição 2, a tensão de retorno era medida por um eletrômetro modelo 603 da KEITHLEY, em cuja saída colocamos um registrador gráfico modelo BD 91 da KIPP & ZONEN.

Nas medidas em alta tensão (capacitor do tipo III), uma tensão contínua, V_0 , era aplicada ao capacitor durante o intervalo de tempo t_a , por uma fonte 160kV, 5mA Test Set da BIDDLE, estando a chave 1 fechada e as chaves 2,3 e 4 abertas. Os campos aplicados ao capacitor do tipo III foram da ordem de 5×10^7 V/m. Após o intervalo de tempo de carga, t_a , a chave 1 era aberta, e o capacitor curto-circuitado primeiramente, fechando a chave 2, através de uma resistência de $10k\Omega$ de modo a amortecer o valor de curto e, posteriormente, fechando a chave 3, em curto direto. Utilizamos como valores de intervalos de tempo, a chave 2 ser fechada por 2s e, após isso, a chave 3 ser fechada por 8s, totalizando o intervalo de tempo de curto, t_0 , igual a 10s. Entretanto, como este chaveamento era realizado manualmente, existe uma incerteza de no máximo 2s em relação ao valor dos intervalos de tempo de curto-circuito, t_0 . Finalmente, após esse intervalo de tempo, abrindo as chaves 2 e 3, estando já a chave 1 aberta, a chave 4 era fechada, e a tensão de retorno era medida por um eletrômetro modelo 610C da KEITHLEY, em cuja saída colocamos um registrador gráfico.

Os resultados obtidos são mostrados nas figs. 6.7 a 6.18, e com eles podemos discutir qualitativamente as previsões teóricas e resultados citados no capítulo 2.

Assim, o aumento da tensão de retorno com o aumento da tensão aplicada, V_0 , mantidas as outras condições fixas

(intervalo de tempo de aplicação da tensão, t_a ; intervalo de tempo de curto-circuito, t_o ; e temperatura, θ), é mostrado na fig. 6.7 para o capacitor do tipo I, na fig. 6.11 para o capacitor do tipo II, e na fig. 6.13 para o capacitor do tipo III. Além disso, este aumento é observado ser aproximadamente linear na faixa de campo aplicado que utilizamos, conforme mostrado nas figs. 6.10.a, 6.12 e 6.15.a para os capacitores dos tipos I, II e III, respectivamente. Estes resultados confirmam os obtidos por Gross^{35,71}, Yoshino et.al.¹⁷⁵, Yamanaka et.al.¹⁷⁴, Okamoto¹²² e Ohi et.al.¹²¹.

Além disso, o aumento da tensão de retorno com o aumento do intervalo de tempo de aplicação da tensão, t_a , mantidas as outras condições fixas (V_o , t_o , θ), é mostrado na fig. 6.8 para o capacitor do tipo I e na fig. 6.14 para o capacitor do tipo III. Este aumento é observado ser não-linear e a tensão de retorno tende a saturar com o aumento do intervalo de tempo de aplicação da tensão, t_a , conforme mostrado nas figs. 6.10.b e 6.15.b, para os capacitores dos tipos I e III, respectivamente. Estes resultados também confirmam os obtidos por Gross^{35,70}, Yoshino et.al.¹⁷⁵, Yamanaka et.al.¹⁷⁴ e Ohi et.al.¹²¹.

Ainda, a diminuição da tensão de retorno com o aumento do intervalo de tempo de curto-circuito, t_o , mantidas as outras condições fixas (V_o , t_a , θ), é mostrado na fig. 6.9 para o capacitor do tipo I. Nesta figura podemos também observar que o instante em que a tensão de retorno atinge o valor máximo é praticamente o mesmo nas três curvas, ou seja, independente de t_o , confirmando o resultado obtido por Gross^{35,71}.

Além disso, a fig. 6.10.c mostra que a variação da tensão de retorno com o intervalo de tempo de curto-circuito, t_0 , obedece aproximadamente a lei $t^{-1/2}$, conforme obtido por Yoshino et.al.¹⁷⁵, Yamanaka et.al.¹⁷⁴ e Okamoto¹²².

Entre as medições de tensão de retorno, tivemos o cuidado de manter os capacitores em curto-circuito, durante pelo menos 15 horas. Este procedimento foi necessário, como uma forma de se evitar influências de uma medida sobre outra, realizada com o mesmo capacitor.

Embora variando as condições e os materiais dielétricos empregados, todas as curvas levantadas mostram uma forma semelhante, ou seja, a um rápido crescimento da tensão de retorno segue um decaimento bastante lento. As figs. 6.16, 6.17 e 6.18 mostram para os capacitores dos tipos I, II e III, respectivamente, curvas de tensão de retorno observadas por 12 horas. Nestas figuras, podemos notar que mesmo decorrido este intervalo de tempo, a tensão de retorno ainda é uma grande porcentagem do valor máximo atingido.

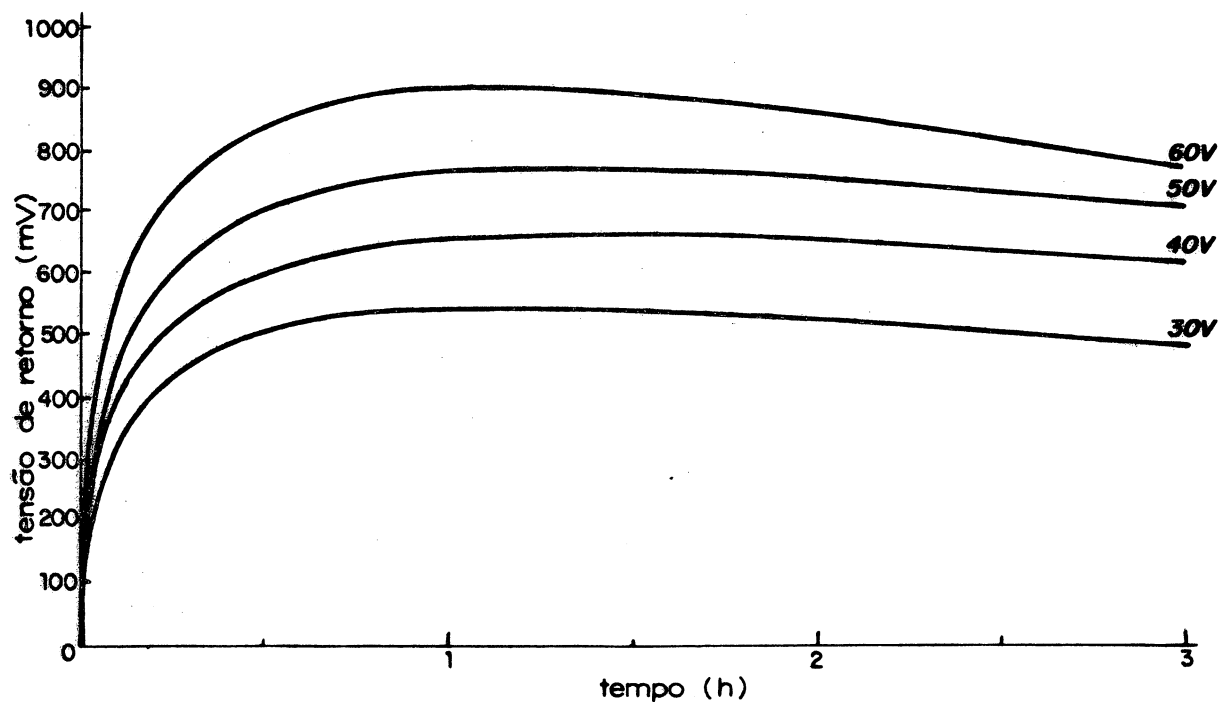
Conforme citado no capítulo 3, a função de relaxação dielétrica tem parâmetros que dependem da temperatura, de modo que curvas de tensão de retorno realizadas a diferentes porém, constantes temperaturas, devem mostrar variações. Realizamos, então, levantamento de curvas de tensão de retorno em capacitor do tipo I, mantido em diversos níveis de temperatura. O procedimento adotado foi o de se colocar o capacitor dentro de um becker com óleo, e o conjunto dentro de um termostato, modelo D3 da HAAKE, ajustado à temperatura desejada. O capacitor era assim mantido por 15 horas, e durante este intervalo de

tempo estava curto-circuitado. Após isso, realizava-se o levantamento da curva de tensão de retorno segundo os procedimentos indicados anteriormente (fig. 6.3). Além disso, após o intervalo de tempo de aquecimento, medimos a capacitância e a tangente do ângulo de perda, $\text{tg}\delta$. Os resultados obtidos estão mostrados na tabela 6.2 e nas figs. 6.19 e 6.20. O aumento da tensão de retorno com o aumento da temperatura, mantidas as outras condições fixas (V_o , t_a , t_o), foi observado porém, não obedecendo a lei do tipo Arrhenius como obtido por Yoshino et.al.¹⁷⁵, nem tampouco um aumento exponencial com a temperatura como obtido por Ohi et.al.¹²¹. Para o capacitor do tipo I, um mecanismo do tipo Arrhenius não parece explicar a variação da tensão de retorno com a temperatura, a menos que tenhamos efetuado as medições justamente em uma região de mudança de mecanismo ("joelho"), similar àquele que ocorre na condutividade dos sólidos iônicos.

Além disso, conforme mostrado na tabela 6.2, a capacitância e a tangente do ângulo de perda, $\text{tg}\delta$, variam muito pouco com a temperatura, ao passo que as características da tensão de retorno variam apreciavelmente com esta, como se pode observar nas figs. 6.19 e 6.20.

FIGURA 6.7

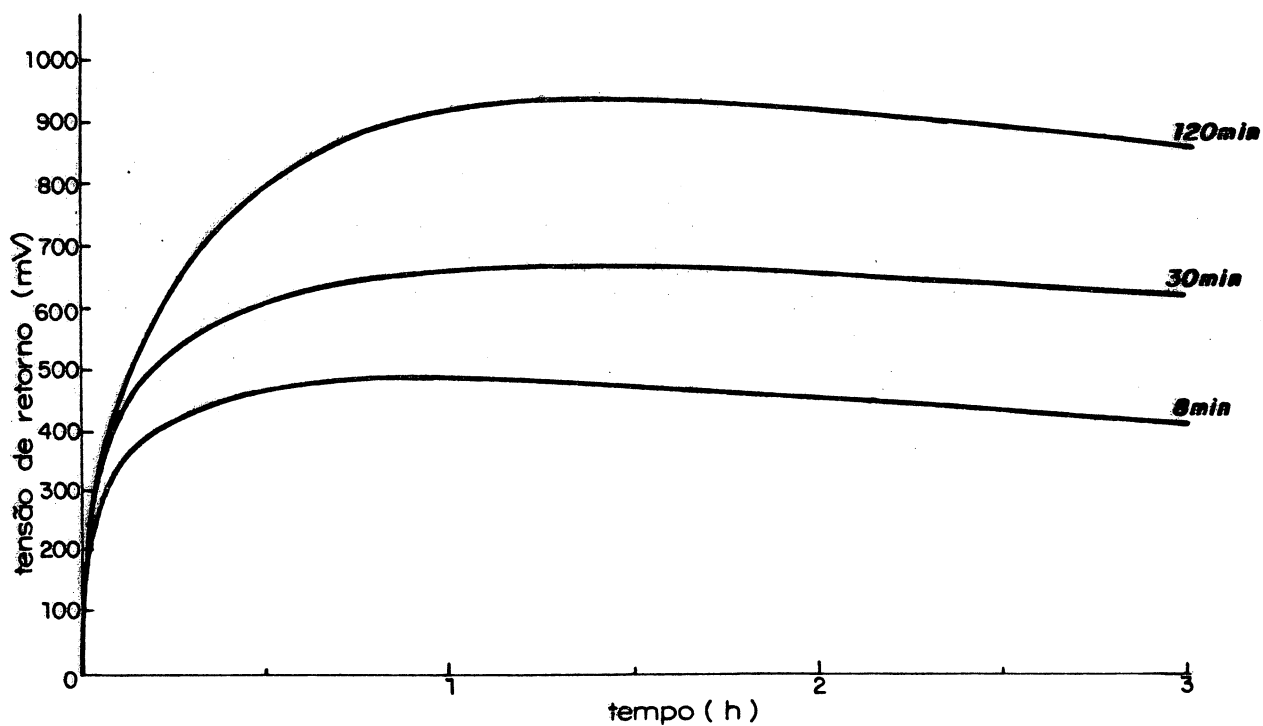
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA Nº 1, VARIANDO A TENSÃO APLICADA



condições fixas: $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.8

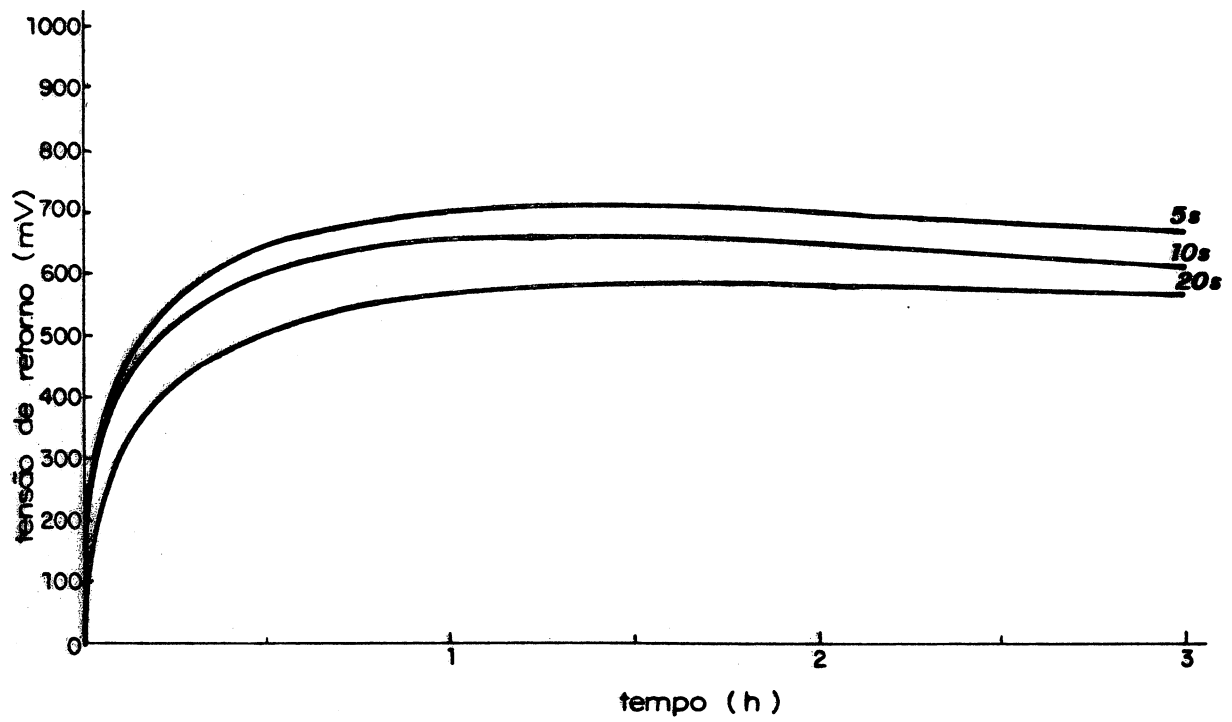
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA Nº 1, VARIANDO O INTERVALO DE TEMPO DE APLICAÇÃO DA TENSÃO



condições fixas: $V_o=40\text{V}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.9

TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA Nº 1, VARIANDO O INTERVALO DE TEMPO DE CURTO-CIRCUITO

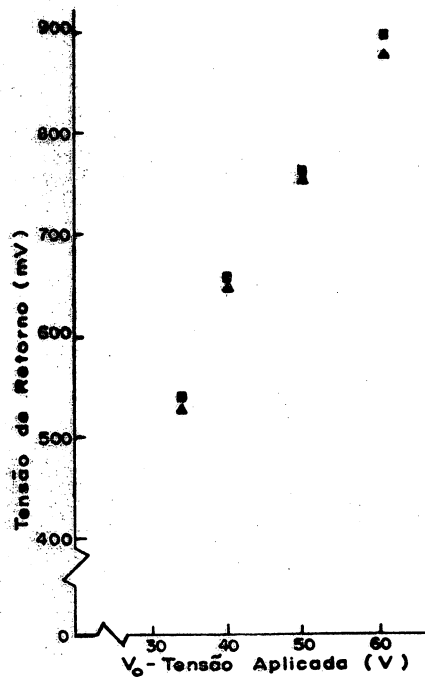


condições fixas: $V_O = 40V$; $t_a = 30min$; $\theta \cong 20^\circ C$

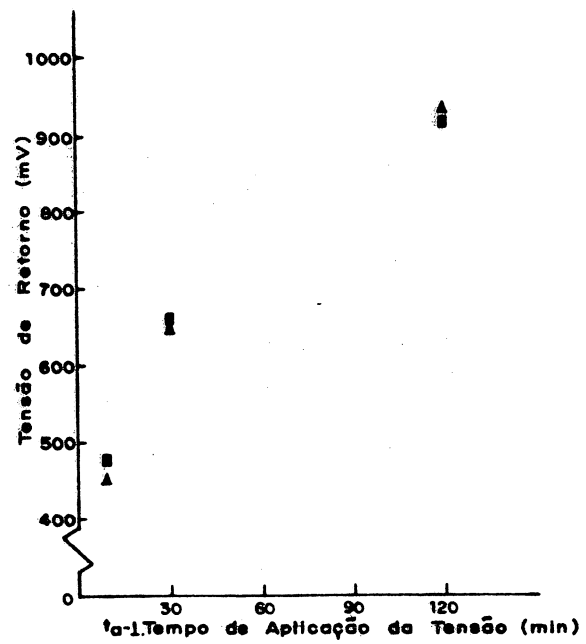
FIGURA 6.10

VARIACÃO DA TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA

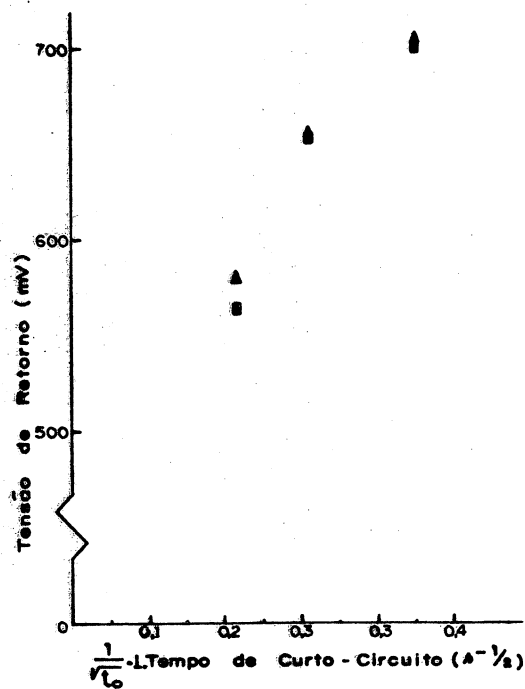
Nº 1



(a)



(b)



(c)

- - V₆₀ - tensão de retorno medida em t=60min
- ▲ - V₁₀₀ - tensão de retorno medida em t=100min

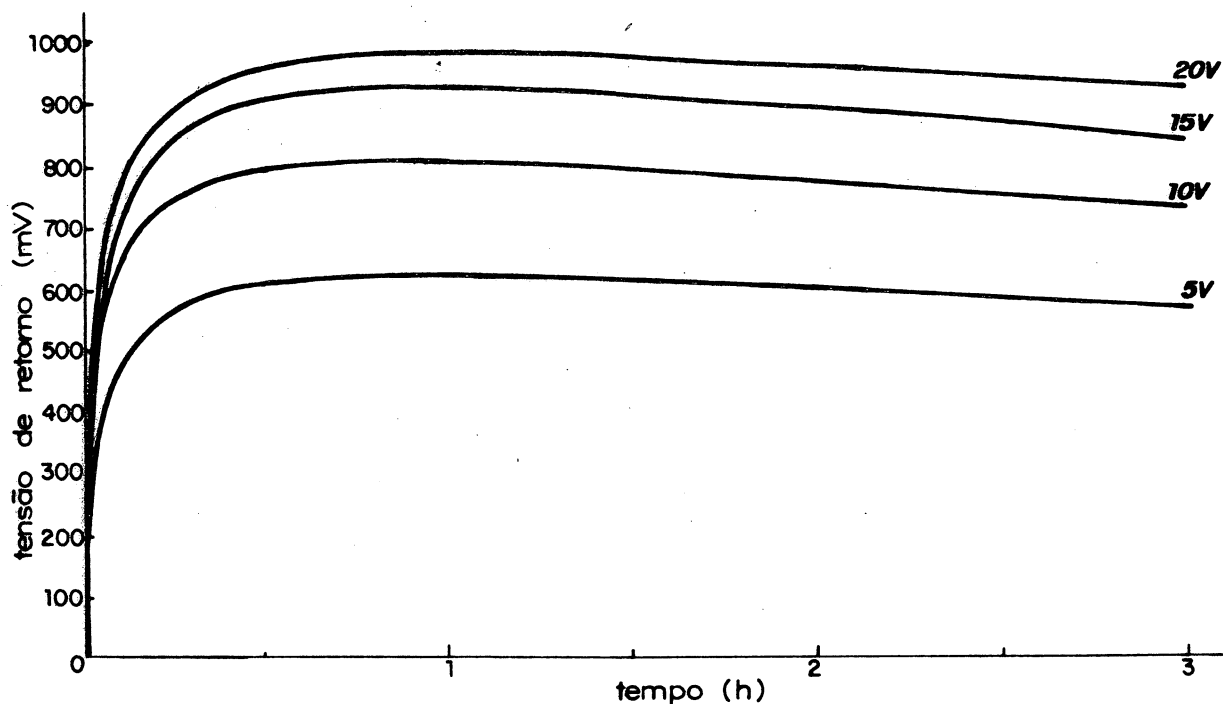
(a) - variando a tensão aplicada (fig.6.7)

(b) - variando o intervalo de tempo de aplicação da tensão (fig.6.8)

(c) - variando o intervalo de tempo de curto-circuito (fig.6.9)

FIGURA 6.11

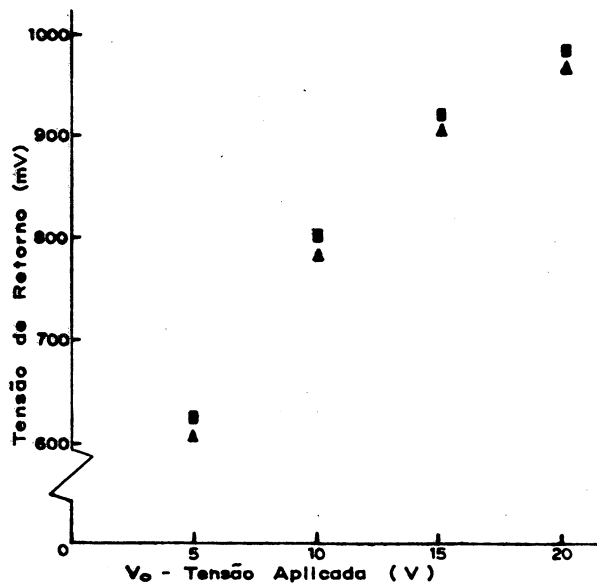
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO II, AMOSTRA Nº 5, VARIANDO A TENSÃO APLICADA



condições fixas: $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.12

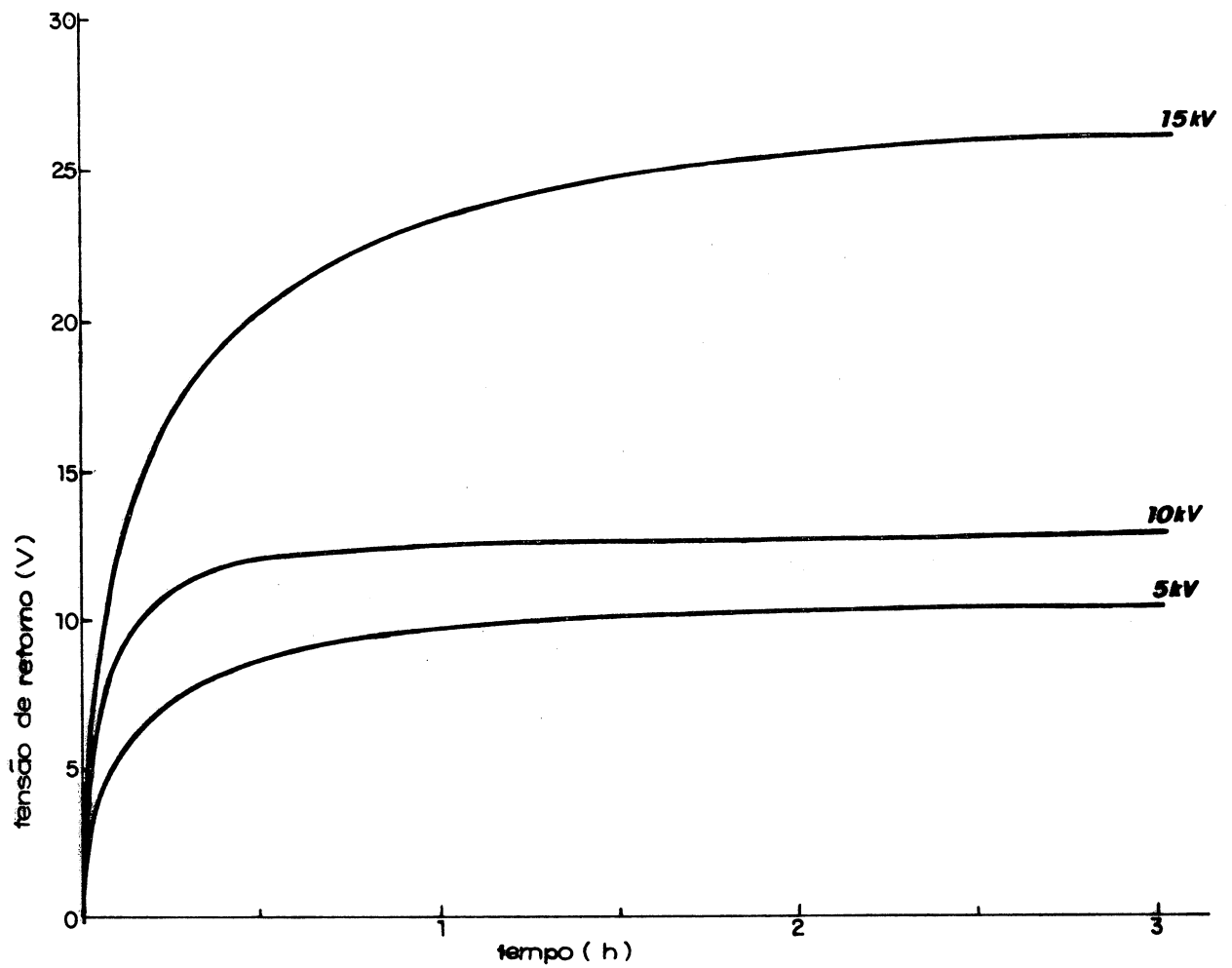
VARIAÇÃO DA TENSÃO DE RETORNO COM A TENSÃO APLICADA, EM CAPACITOR DO TIPO II, AMOSTRA Nº 5



■ - V_{60} - tensão de retorno medida em $t=60\text{min}$
 ▲ - V_{100} - tensão de retorno medida em $t=100\text{min}$
 condições fixas: $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.13

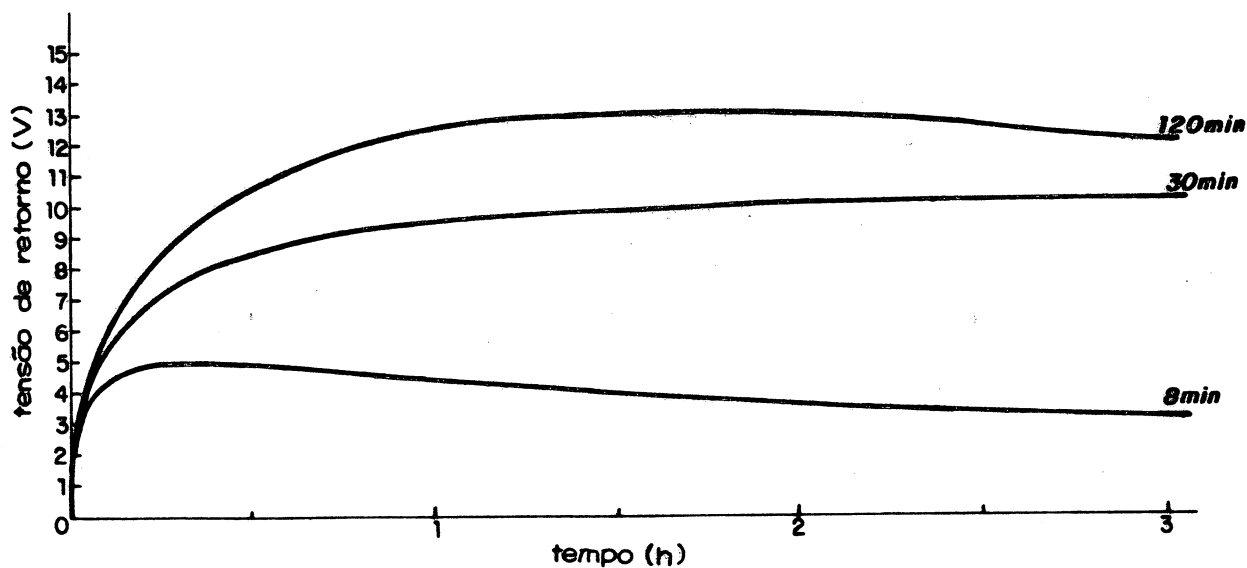
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO III, VARIANDO A TENSÃO APLICADA



condições fixas: $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.14

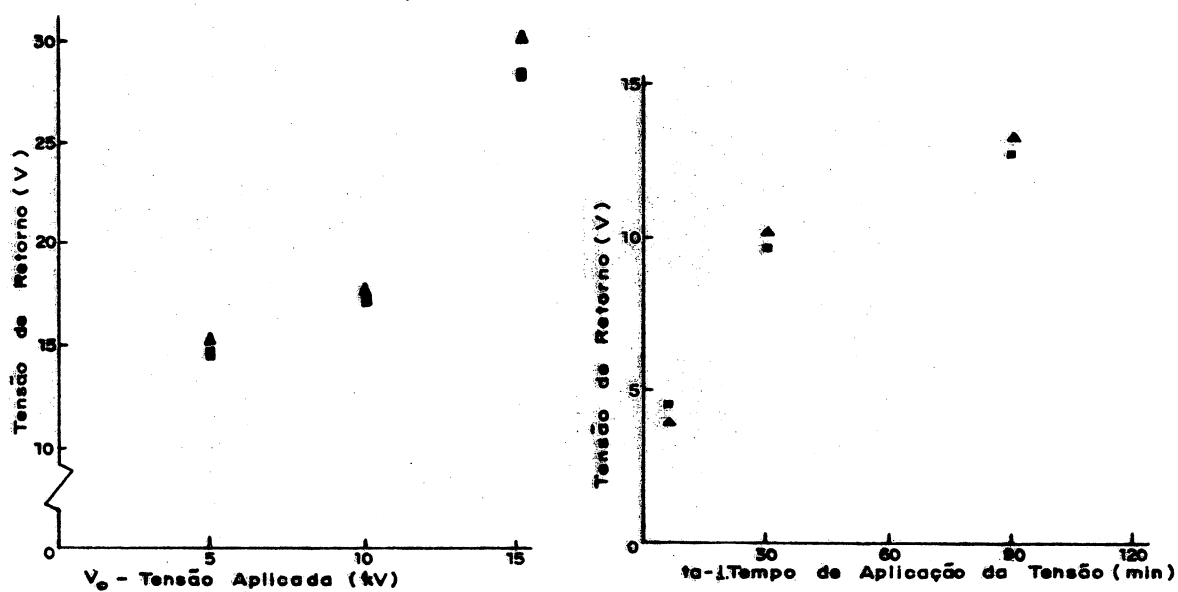
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO III, VARIANDO O INTERVALO DE TEMPO DE APLICAÇÃO DA TENSÃO



condições fixas: $V_0 = 5 \text{ kV}$; $t_0 = 10 \text{ s}$; $\theta \cong 20^\circ \text{ C}$

FIGURA 6.15

VARIAÇÃO DA TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO III



(a)

(b)

■ - V_{60} - tensão de retorno medida em $t=60 \text{ min}$

▲ - V_{100} - tensão de retorno medida em $t=100 \text{ min}$

(a) - variando a tensão aplicada (fig.6.13)

(b) - variando o intervalo de tempo de aplicação da tensão (fig.6.14)

FIGURA 6.16

TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA Nº 3

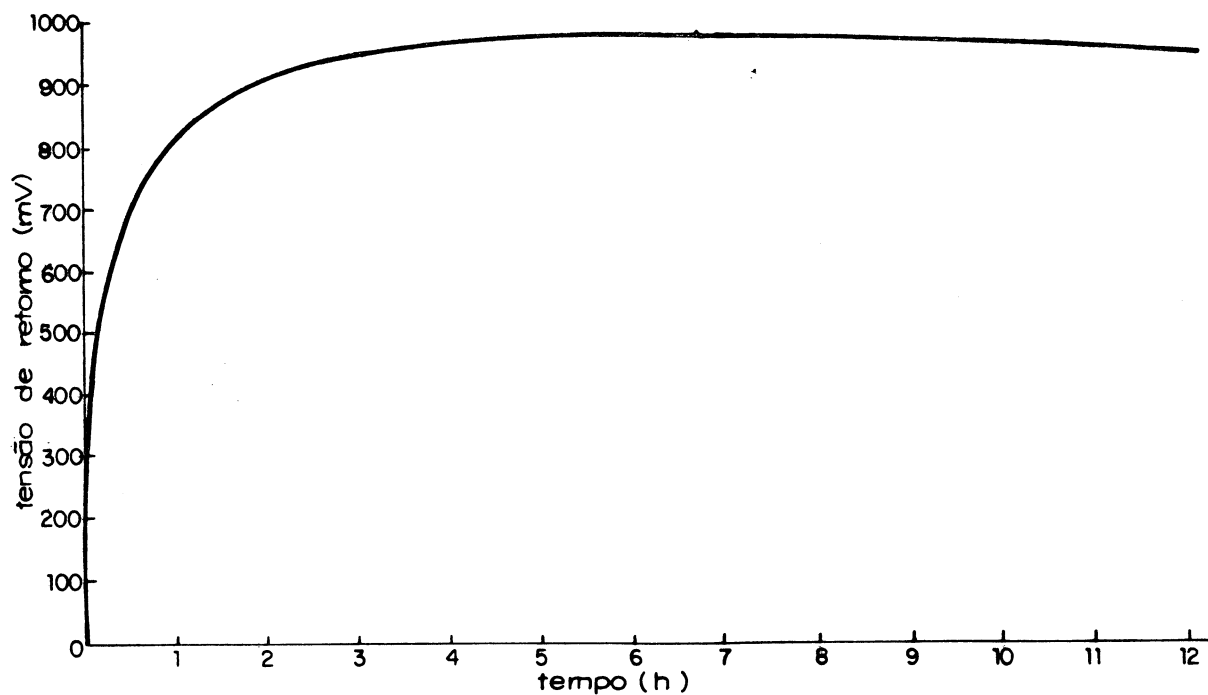
condições fixas: $V_0=40V$; $t_a=30min$; $t_o=10s$; $\theta \cong 20^\circ C$

FIGURA 6.17

TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO II, AMOSTRA Nº 5

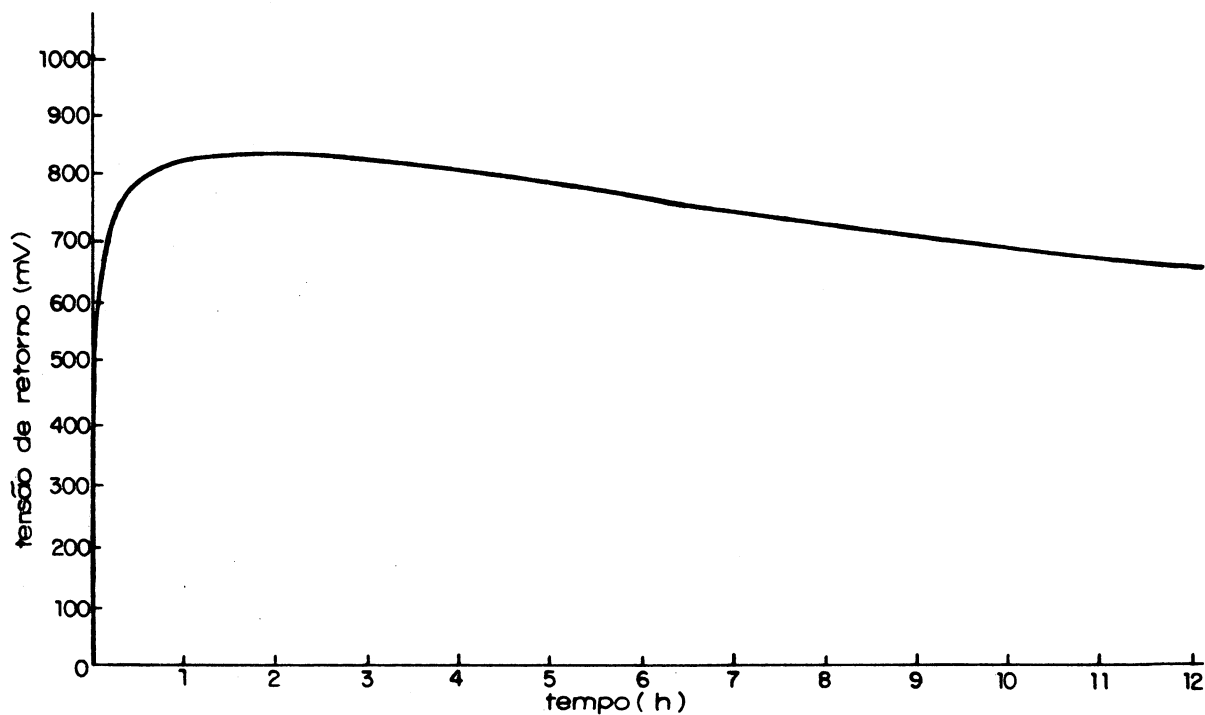
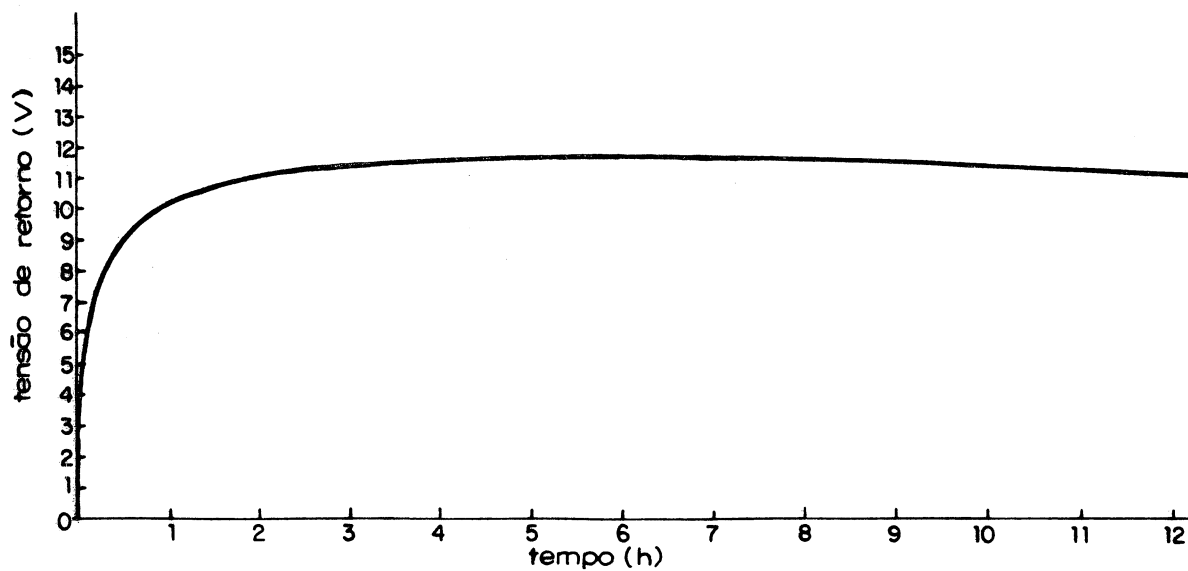
condições fixas: $V_0=10V$; $t_a=30min$; $t_o=10s$; $\theta \cong 20^\circ C$

FIGURA 6.18

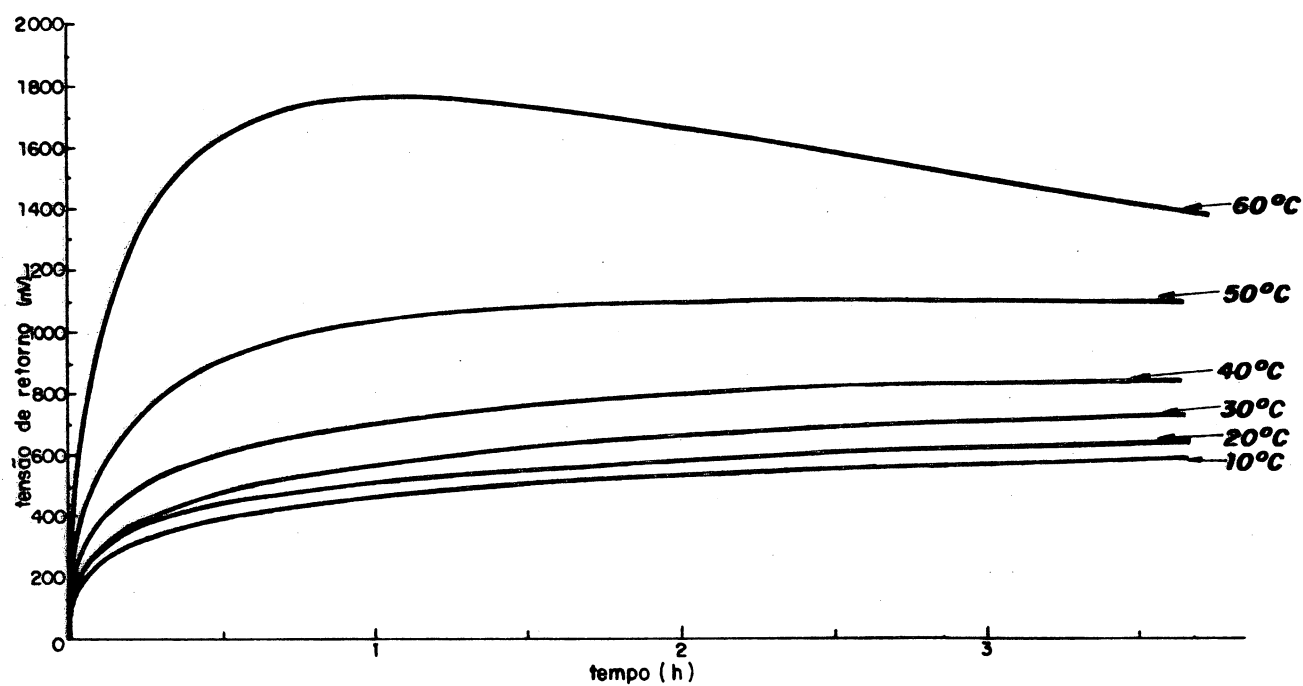
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO III



condições fixas: $V_0=5\text{kV}$; $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.19

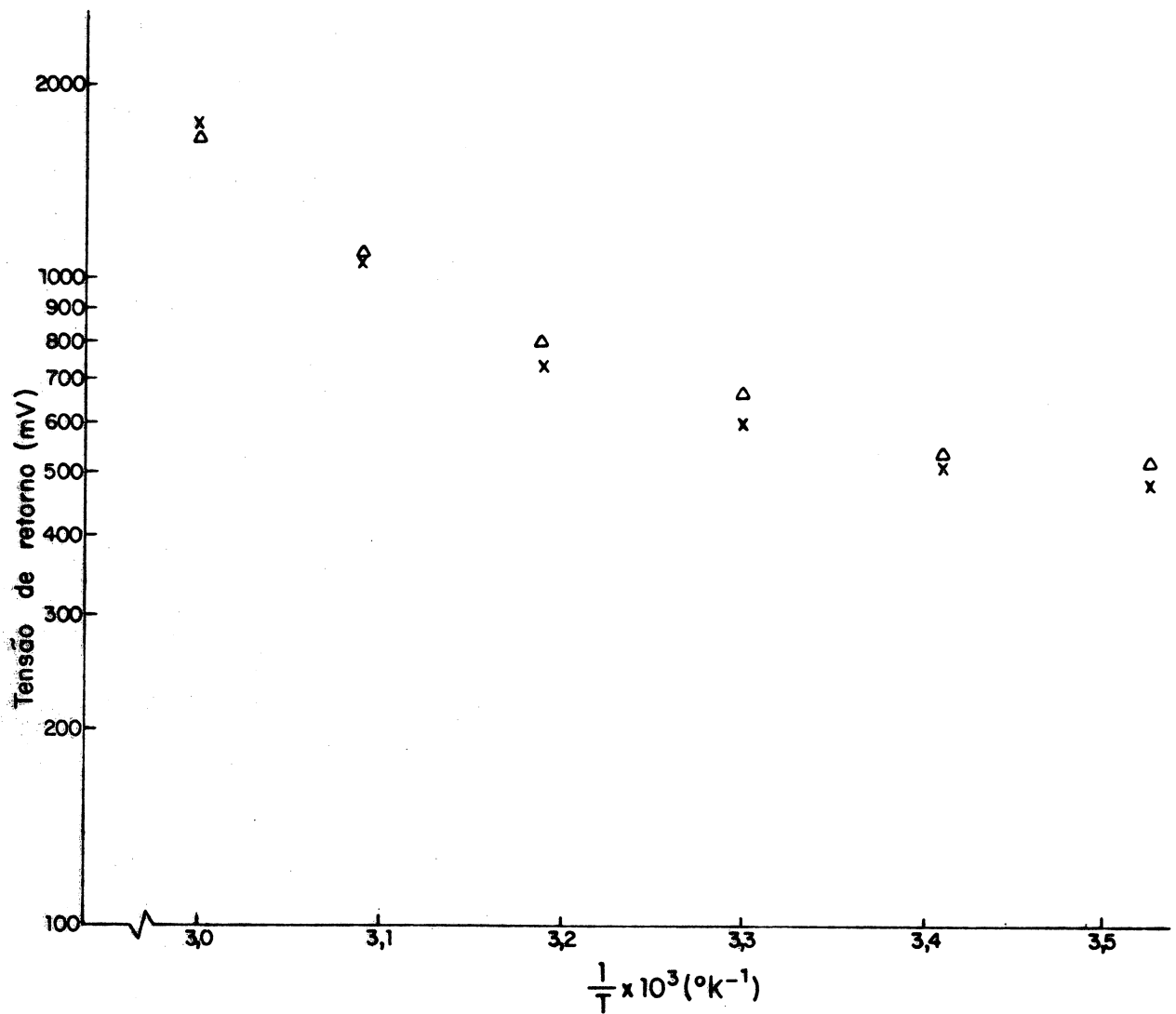
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA Nº 2, VARIANDO A TEMPERATURA



condições fixas: $V_0=30\text{V}$; $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$

FIGURA 6.20

VARIAÇÃO DA TENSÃO DE RETORNO COM A TEMPERATURA, EM CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA Nº 2



x - V_{60} - tensão de retorno medida em $t=60\text{min}$
 Δ - V_{100} - tensão de retorno medida em $t=100\text{min}$
 condições fixas: $V_0=30\text{V}$; $t_a=30\text{min}$; $t_o=10\text{s}$

TABELA 6.2

VARIAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO CAPACITOR DO TIPO I, AMOSTRA
Nº 2, COM A TEMPERATURA

Exatidão da ponte= C: 0,2%; $\text{tg}\delta$: $\pm 0,001$

θ (°C)	120Hz				1kHz			
	C_s (μF)	$\text{tg}\delta$	C_p (μF)	$\text{tg}\delta$	C_s (μF)	$\text{tg}\delta$	C_p (μF)	$\text{tg}\delta$
20	40,15	0,008(7)	40,15	0,008(7)	40,04	0,046(7)	39,95	0,046(7)
30	40,35	0,008(0)	40,35	0,007(9)	40,08	0,047(0)	39,99	0,047(0)
40	40,36	0,008(0)	40,36	0,008(0)	40,09	0,048(1)	40,00	0,048(1)
50	40,39	0,008(1)	40,39	0,008(1)	40,14	0,049(4)	40,04	0,049(4)
60	40,44	0,008(4)	40,44	0,008(4)	40,19	0,050(9)	40,09	0,050(9)

Com o objetivo de esclarecer os efeitos do dielétrico sólido e do óleo impregnante, realizamos algumas determinações experimentais de curvas de tensão de retorno em outros tipos de capacitores, formados somente com dielétrico sólido. Assim, utilizamos um capacitor padrão, modelo 1409-Y da GenRad ($C = 1,0\mu\text{F} \pm 0,05\%$, $\text{tg}\delta = 0,00009 \pm 0,00005$, a 1kHz e 23°C), com dielétrico de mica ($K = 6,2$), e um outro capacitor, com dielétrico de poliéster ($K = 3,3$), cujas características, medidas a 20°C , estão mostradas na tabela 6.3.

TABELA 6.3

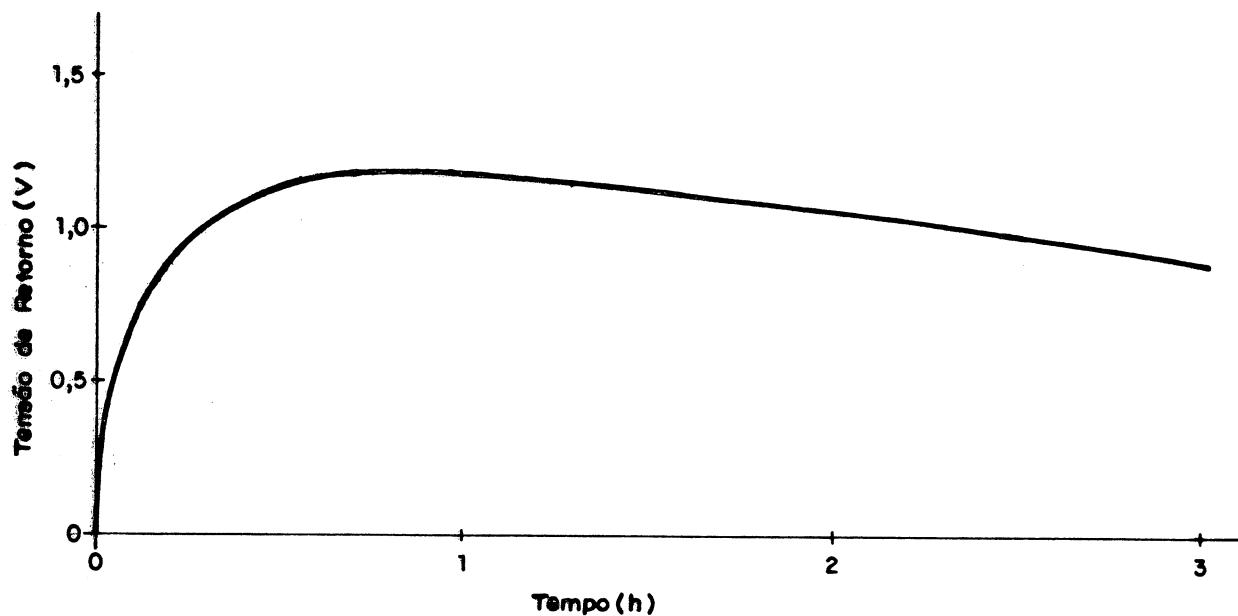
CARACTERÍSTICAS DO CAPACITOR DE POLIESTER

120Hz				1kHz			
C_s (μF)	$\text{tg}\delta$	C_p (μF)	$\text{tg}\delta$	C_s (μF)	$\text{tg}\delta$	C_p (μF)	$\text{tg}\delta$
2,254	0,001 (5)	2,254	0,001 (5)	2,247	0,003 (7)	2,247	0,003 (7)

Realizamos, então, levantamento de curvas de tensão de retorno para os capacitores de mica e poliéster, de acordo com os procedimentos indicados anteriormente e os resultados obtidos estão mostrados nas figs. 6.21 e 6.22, respectivamente.

FIGURA 6.21

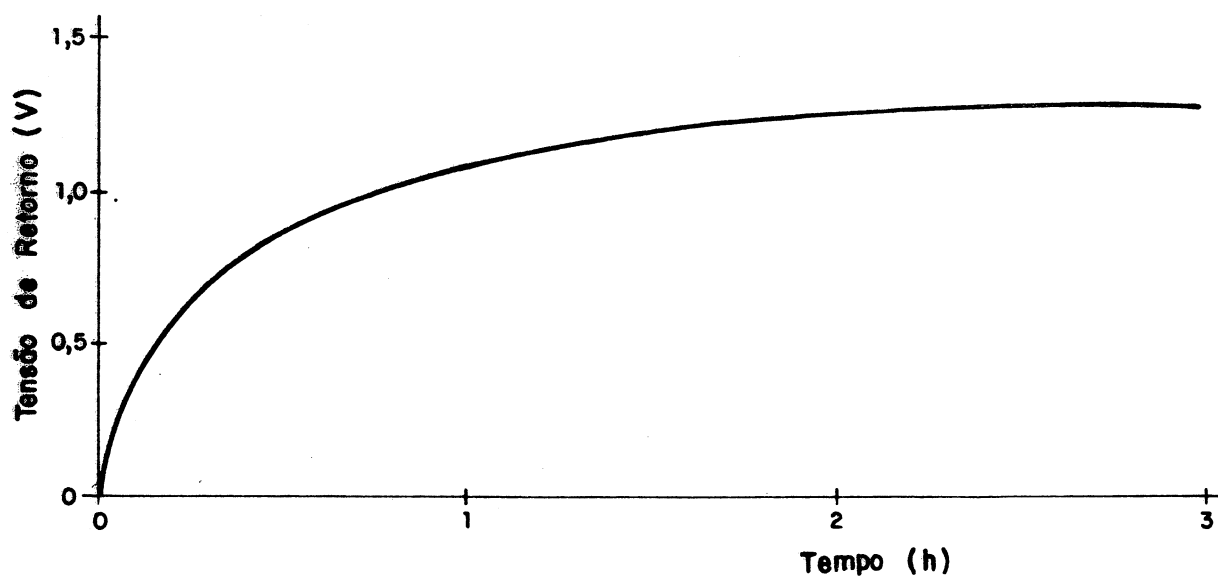
TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DE MICA



condições fixas: $V_0=30V$; $t_a=120\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

FIGURA 6.22

TENSÃO DE RETORNO EM CAPACITOR DE POLIESTER



condições fixas: $V_0=100V$; $t_a=120\text{min}$; $t_o=10\text{s}$; $\theta \cong 20^\circ\text{C}$

6.2 ALGUMAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE SCHWEIDLER - GROSS

Podemos obter a solução analítica exata da equação íntegro-diferencial de Schweidler-Gross para o efeito posterior, eq. (2.9), considerando agora para a função de relaxação dielétrica, a forma exponencial.

Assim, independentemente da forma particular da função de relaxação dielétrica, a equação íntegro-diferencial de Schweidler-Gross pode ser colocada na forma de uma equação integral de Volterra de segunda espécie (Oliveira Castro^{124,125}, e A.Moraes e M.Schenberg¹⁴⁸):

da eq. (2.9), com a mudança de variáveis

$$\psi(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

e, com a notação

$$f(t) = - \left[\frac{V(0)}{RC} + \frac{i_0(t)}{C} \right] \quad (6.1)$$

resulta

$$\psi(t) + \int_0^t \kappa(t-\tau) \psi(\tau) d\tau = f(t) \quad (6.2)$$

onde o núcleo da equação integral é dado por

$$\kappa(t-\tau) = \frac{1}{RC} + \frac{1}{C} \phi(t-\tau)$$

Agora, tomando-se para a função de relaxação dielétrica, a forma exponencial

$$\phi(t) = A e^{-\mu t} \quad (6.3)$$

a eq. (6.2) torna-se

$$\psi(t) + \int_0^t \left[\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} e^{-\mu(t-\tau)} \right] \psi(\tau) d\tau = f(t) \quad (6.4)$$

A eq. (6.4) está na forma de uma equação integral de Volterra de segunda espécie, cujo núcleo $K(t-\tau)$ e a função $f(t)$ são conhecidos. Podemos resolvê-la, utilizando o método operacional de Heaviside, seguindo o procedimento adotado por Oliveira Castro¹²⁷ na resolução da mesma equação considerando porém, a forma de Schweidler para a função de relaxação dielétrica [eqs. (2.43) - (2.50)].

Assim, tomando-se a transformada de Laplace em ambos os membros da eq. (6.4), para $f(t) = \delta(t)$, vem

$$\Omega(\Delta) = \left[1 + \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\Delta} + \frac{A}{C} \cdot \frac{1}{(\Delta + \mu)} \right]^{-1}$$

Desenvolvendo em série de potências, vem

$$\Omega(\Delta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{RC} \right)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (AR)^{\nu} \frac{1}{\Delta^{n-\nu} (\Delta + \mu)^{\nu}}$$

Tomando a transformada inversa, fica

$$\begin{aligned} G(t) = \delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{RC} \right)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (AR)^{\nu} \cdot \\ \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{1}{(\Delta + \mu)^{\nu}} \right\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^{n-\nu}} \cdot \frac{1}{(\lambda + \mu)^\nu} \right\} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu) \Gamma(n-\nu)} \int_0^t \tau^{\nu-1} e^{-\mu\tau} (t-\tau)^{n-\nu-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu) \Gamma(n-\nu)} B(n-\nu, \nu) {}_1F_1(\nu; n; -\mu t) t^{n-1}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

onde, B é a função beta, definida por

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

e, ${}_1F_1$ é a função hipergeométrica confluyente, definida por

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{x\mu} \mu^{a-1} (1-\mu)^{c-a-1} d\mu$$

Agora, levando a eq. (6.6) na eq. (6.5), resulta

$$\begin{aligned}
\zeta(t) = & \delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{RC} \right)^n \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (AR)^\nu \cdot \\
& \cdot {}_1F_1(\nu; n; -\mu t)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Assim, uma vez que

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \zeta(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{6.8}$$

tem-se

$$v(t) = v(0) + \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (6.9)$$

As eqs. (6.7) - (6.9) dão a solução analítica exata para a equação íntegro-diferencial de Schweidler-Gross para o efeito posterior, eq. (2.9), considerando para a função de relaxação dielétrica, a forma exponencial.

No nosso caso, tensão de retorno após a aplicação da tensão V_0 , durante o intervalo de tempo de aplicação, t_a , seguido de curto-circuito pelo intervalo de tempo, t_0 , tem-se

$$v(0) = 0$$

e,

$$i_0(t) = -V_0 \phi(t+t_0) + V_0 \phi(t+t_0+t_a)$$

donde, da eq. (6.3)

$$f(t) = \frac{V_0}{c} \left[\phi(t+t_0) - \phi(t+t_0+t_a) \right]$$

ou,

$$f(t) = \frac{V_0}{c} A e^{-\mu(t+t_0)} \left[1 - e^{-\mu t_a} \right] \quad (6.10)$$

A solução do sistema dado pelas eqs. (6.7) - (6.10) poderá ser obtida, futuramente, calculando-se numericamente a função $G(t)$ na eq. (6.7), e efetuando-se a integração indicada na eq. (6.9), utilizando para a função $f(t)$, a forma mostrada na eqs. (6.10).

Entretanto, podemos ainda obter a solução analítica para a equação íntegro-diferencial de Schweidler-Gross, considerando para a função de relaxação dielétrica a forma exponencial, de uma outra maneira.

Assim, seja a eq. (6.4)

$$\psi(t) + \int_0^t \left[\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} e^{-\mu(t-\tau)} \right] \psi(\tau) d\tau = f(t) \quad (6.11)$$

Derivando esta equação, membro a membro, em relação a t, vem

$$\psi'(t) + \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} \right) \psi(t) + \int_0^t \left[-\frac{A}{C} \mu e^{-\mu(t-\tau)} \right] \psi(\tau) d\tau = f'(t) \quad (6.12)$$

Derivando novamente em relação a t, vem

$$\begin{aligned} \psi''(t) + \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} \right) \psi'(t) - \frac{A\mu}{C} \psi(t) + \\ + \int_0^t \frac{A}{C} \mu^2 e^{-\mu(t-\tau)} \psi(\tau) d\tau = f''(t) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Agora, somando, membro a membro, a eq. (6.12) multiplicada por μ , com a eq. (6.13), resulta

$$\psi''(t) + \left(\mu + \frac{1}{RC} + \frac{A}{C} \right) \psi'(t) + \frac{\mu}{RC} \psi(t) = f''(t) + \mu f'(t) \quad (6.14)$$

Porém, da eq. (6.1), vem

$$f(t) = - \left[\frac{v(0)}{RC} + \frac{i_0(t)}{C} \right]$$

onde, para a tensão de retorno, com

$$v(0) = 0$$

tem-se, das eqs. (2.13) e (6.5)

$$i_0(t) = -V_0 A e^{-\mu(t+t_0)}$$

de modo que,

$$f(t) = V_0 \frac{A}{C} e^{-\mu(t+t_0)} \quad (6.15)$$

$$f'(t) = -V_0 \frac{A\mu}{C} e^{-\mu(t+t_0)} \quad (6.16)$$

$$f''(t) = V_0 \frac{A\mu^2}{C} e^{-\mu(t+t_0)} \quad (6.17)$$

Levando as eqs. (6.16) e (6.17) na eq. (6.14), resulta

$$\psi''(t) + \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} + \mu \right) \psi'(t) + \frac{\mu}{RC} \psi(t) = 0 \quad (6.18)$$

cuja solução é

$$\psi(t) = K_1 e^{m_1 t} + K_2 e^{m_2 t} \quad (6.19)$$

onde

$$m_{1,2} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} + \mu \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} + \mu \right)^2 - \frac{\mu}{RC}}$$

Agora, a tensão de retorno, com

$$\psi(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

é

$$V(t) = V(0) + \frac{K_1}{m_1} (e^{m_1 t} - 1) + \frac{K_2}{m_2} (e^{m_2 t} - 1)$$

Utilizando as condições de contorno

$$V(0) = 0$$

$$\dot{V}(0) = V_0 \frac{A}{C} e^{-\mu t_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$$

resulta finalmente,

$$V(t) = V_0 \frac{A e^{-\mu t_0}}{C(\nu_2 - \nu_1)} \left[e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t} \right] \quad (6.20)$$

onde

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} + \mu \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{RC} + \frac{A}{C} + \mu \right)^2 - \frac{\mu}{RC}}$$

A eq. (6.20), solução analítica exata da equação íntegro-diferencial de Schweidler-Gross para o efeito posterior, considerando para a função de relaxação dielétrica a forma exponencial, é idêntica à eq. (2.20), solução obtida por Gross^{35,71}.

Tendo em vista a unicidade da solução da equação integral de Volterra de segunda espécie, a equivalência das duas soluções encontradas [eqs. (6.9) e (6.20)] poderá ser mostrada, no futuro, numericamente.

CONCLUSÕES

Quanto ao aspecto teórico, concluimos que:

- T.1) falta ao estudo do efeito posterior, uma teoria microscópica. A abordagem fenomenológica, mesmo bem sucedida, não torna dispensável o estudo do comportamento da estrutura interna microscópica do dielétrico. A abordagem fenomenológica do efeito posterior é capaz de mediante o uso de poucas hipóteses fundamentais, estabelecer equações relacionando as variáveis observáveis porém, não de explicar o processo físico real do efeito posterior.
- T.2) a aproximação linear é útil devido às facilidades introduzidas e parece ser suficiente para as aplicações usuais. Entretanto, somente um tratamento considerando os aspectos não-lineares deverá, provavelmente, fornecer uma teoria completa da resposta dielétrica, passível de confirmação experimental rigorosa.

T.3) a função de relaxação dielétrica, deve, necessariamente, ter um valor finito na origem. Esta condição é imposta na equivalência entre as abordagens pela teoria de circuito e teoria de campo e, além disso, é uma das hipóteses necessárias para a validade das transformações de Hilbert.

Quanto ao aspecto experimental, concluimos que:

E.1) a análise da formação da tensão de retorno em capacitores é dificultada pela complexidade do sistema. Assim, deve-se iniciar a análise, com um material dielétrico sólido puro e, posteriormente, acrescentar outras condições, de modo a ter-se um controle sobre todas as variáveis envolvidas.

E.2) os resultados experimentais obtidos confirmam qualitativamente as previsões teóricas e, também, resultados obtidos por outros autores (aumento da tensão de retorno com o aumento da tensão aplicada e do intervalo de tempo de aplicação desta e, ainda, com a diminuição do intervalo de tempo de curto-circuito, mantidas, sempre, as outras condições fixas).

E.3) a variação da tensão de retorno com a temperatura, para o tipo de capacitor que utilizamos, não obedece a uma lei do tipo Arrhenius, nem tampouco exponencial, como obtido por outros autores. De qualquer modo, a tensão de retorno se mostrou bastante sensível à variação de temperatura, em comparação com outras características do capacitor (C , $\text{tg}\delta$).

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- 1 Obter a curva de histerese elétrica, \vec{P} versus \vec{E} , considerando os termos de ordem maior em \vec{E} , de modo a se obter não uma curva de histerese elíptica, como no caso linear, mas a histerese real.
- 2 Obter soluções numéricas da equação íntegro-diferencial de Schweidler-Gross para o efeito posterior, tomando várias formas analíticas para a função de relaxação dielétrica.
- 3 Desenvolver os modelos microscópicos propostos por Yoshino e outros, considerando a presença de carga espacial nos dielétricos (Ferreira & Gross³⁰, Henson⁷⁶, Many & Rakavy¹⁰⁷, Zahn¹⁷⁶, Wintle^{169,170}, Lindmayer¹⁰³, Gross & Perlman⁶⁸ e Yoshino¹⁷⁵).
- 4 Aplicar a teoria da resposta dielétrica não-linear, utilizando a mecânica estatística.
- 5 Estabelecer técnicas que possibilitem a obtenção de curvas de tensão de retorno, tensão de descarga interna e da função de relaxação dielétrica desde instantes de tempo superiores a ns.
- 6 Dominar as técnicas experimentais para medidas de características dielétricas de sólidos (ponte de corrente alternada, campos elétricos rotatórios e técnicas de

despolarização isotérmica e termo-estimulada), de modo que, conjuntamente, possam conduzir a modelos mais próximos da realidade.

- 7 Estudar o efeito da polarização de carga espacial e, determinar experimentalmente a distribuição de cargas em materiais dielétricos (método do pulso de pressão), com o objetivo de se produzir modelos mais próximos da realidade.
- 8 Viabilizar a aplicação à tecnologia da determinação experimental de curvas de tensão de retorno como um método que permita acompanhar o envelhecimento do dielétrico quando sujeito a "stress" térmico, elétrico, mecânico e/ou de condições ambientais.

APÊNDICE A EQUIVALÊNCIA ENTRE AS ABORDAGENS PELA TEORIA DE CIRCUITO E TEORIA DE CAMPO

O efeito posterior em dielétricos sólidos reais foi apresentado por duas abordagens distintas: pela teoria de circuito (ítem 2.1) e pela teoria de campo (ítem 2.2). As duas abordagens são equivalentes, como mostraremos a seguir.

Assim, na abordagem pela teoria de campo, é assumida a hipótese de que a resposta em polarização de um material dielétrico, $\vec{P}(t)$, submetido a um campo elétrico, $\vec{E}(t)$, é da forma da eq. (2.98)

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

onde $\chi(t)$ é a função resposta.

Agora, o deslocamento elétrico é dado por

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t) \quad (\text{A.2})$$

Levando a eq. (A.1) na eq. (A.2), resulta

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (\text{A.3})$$

A densidade de corrente total que atravessa o material dielétrico é

$$\vec{J}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

Levando a eq. (A.3) na eq. (A.4), resulta

$$\begin{aligned} \vec{J}(t) &= \sigma \vec{E}(t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \frac{\rho}{\partial t} \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \\ \vec{J}(t) &= \sigma \vec{E}(t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial t} \vec{E}(\tau) d\tau + \\ &+ \chi(0) \vec{E}(t) - \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \chi(t-\tau) \vec{E}(\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

O limite indicado no último termo da eq. (A.5) se anula devido à condição (2.97).

$$\chi(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

significando que o sistema possui efeito memória finito.

Assim, a eq. (A.5) fica

$$\begin{aligned} \vec{J}(t) &= \sigma \vec{E}(t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \chi(0) \vec{E}(t) + \\ &+ \int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial t} \vec{E}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Agora, sendo $\chi(t-\tau)$ função do argumento $(t-\tau)$, podemos escrever

$$\frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial t} = - \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial \tau} \quad (\text{A.7})$$

multiplicando a eq. (A.7) por $\vec{E}(t)$ e integrando de $-\infty$ a t , resulta

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial t} \vec{E}(\tau) d\tau = - \int_{\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial \tau} \vec{E}(\tau) d\tau \quad (\text{A.8})$$

A integral no segundo membro da eq. (A.8) pode ser integrada por partes, resultando

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial \tau} \vec{E}(\tau) d\tau = \vec{E}(t) \chi(0) - \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \vec{E}(\tau) \chi(t-\tau) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \vec{E}(\tau)}{\partial \tau} \chi(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.9})$$

O limite indicado no segundo membro da eq. (A.9) é o mesmo que o da eq. (A.5) e, portanto, é nulo (efeito memória finito).

A eq. (A.9) fica então

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial \tau} \vec{E}(\tau) d\tau = \vec{E}(t) \chi(0) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \vec{E}(\tau)}{\partial \tau} \chi(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.10})$$

Levando a eq. (A.10) na eq. (A.8), resulta

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-\tau)}{\partial t} \vec{E}(\tau) d\tau = - \vec{E}(t) \chi(0) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \vec{E}(\tau)}{\partial \tau} \chi(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.11})$$

Levando, agora, a eq. (A.11) na eq. (A.6), vem:

$$\vec{j}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \chi(0) \vec{E}(t) - \chi(0) \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \vec{E}(\tau)}{\partial \tau} \chi(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.12})$$

Agora, o terceiro e o quarto termo do segundo membro da eq. (A.12) podem ser cancelados, desde que se imponha a condição que $\chi(0)$ tenha um valor finito. Isto significa que a função resposta, além de obedecer às condições (2.97),

$$\text{a) } \chi(t) = 0 \quad , \text{ para } t < 0 \quad (\text{causalidade});$$

$$\text{b) } \chi(t) \rightarrow 0 \quad , \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (\text{efeito memória finito});$$

deve obedecer à condição adicional

$$\text{c) } \chi(t) \rightarrow \text{valor finito, quando } t \rightarrow 0 \quad (\text{A.13})$$

Neste caso, a eq. (A.12) fica

$$\vec{j}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \vec{E}(\tau)}{\partial \tau} \chi(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.14})$$

A eq. (A.14) é a expressão geral que dá a densidade de corrente total que atravessa um material dielétrico submetido a um campo elétrico.

Consideremos agora, um capacitor plano formado com um dielétrico sólido real, de espessura l e cujos eletrodos possuem área A , tal como mostrado na fig. A.1. Além disso, consideremos a hipótese de que

$$l \ll \sqrt{A}$$

de modo que podemos desprezar o efeito de borda. No caso do capacitor plano, o campo elétrico é espacialmente homogêneo, ou seja, podemos trabalhar com escalares e, ainda, escrever

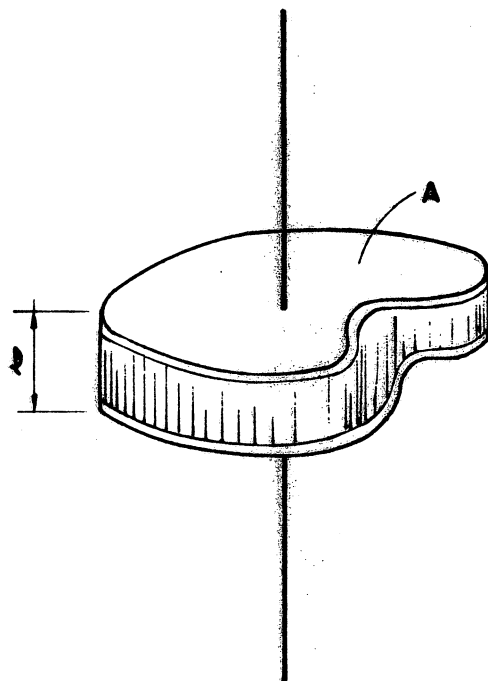
$$\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{d\vec{E}(t)}{dt}$$

Neste caso, a eq. (A.14) fica

$$J(t) = \sigma E(t) + \epsilon_0 \frac{dE(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dE(\tau)}{d\tau} \chi(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.15})$$

FIGURA A.1

CAPACITOR PLANO FORMADO COM UM MATERIAL DIELÉTRICO SÓLIDO



Podemos, ainda, escrever que

$$\bar{\epsilon}(t) = \frac{v(t)}{l} \quad (\text{A.16})$$

$$J(t) = \frac{I(t)}{A} \quad (\text{A.17})$$

onde $V(t)$ é a tensão entre os eletrodos e $I(t)$ é a corrente que atravessa o capacitor.

Levando as eqs. (A.16) e (A.17) na eq. (A.15), multiplicada por A , resulta

$$I(t) = \frac{\sigma A}{l} v(t) + \frac{\epsilon_0 A}{l} \frac{dv(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} \left[\frac{A}{l} \chi(t-\tau) \right] d\tau \quad (\text{A.18})$$

Agora, para o capacitor plano, tem-se

$$\frac{\sigma A}{l} = \frac{1}{R} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\epsilon_0 A}{l} = C \quad (\text{A.20})$$

onde R é a resistência do material dielétrico e C a capacitância geométrica.

Levando as eqs. (A.19) e (A.20) na eq. (A.18), resulta

$$I(t) = \frac{1}{R} v(t) + C \frac{dv(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} \left[\frac{C}{\epsilon_0} \chi(t-\tau) \right] d\tau \quad (\text{A.21})$$

Com

$$\phi(t) = \frac{C}{\epsilon_0} \chi(t) \quad (\text{A.22})$$

a eq. (A.21) torna-se, finalmente

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau$$

(A.23)

A eq. (A.23) está exatamente na forma da equação proposta por von Schweidler¹⁵¹ e utilizada por Gross^{35,40,70} na sua abordagem pela teoria de circuito do efeito posterior em dielétricos sólidos reais [eqs. (1.1) e (2.8)]. Ela foi obtida aqui, a partir da eq. (A.1) que é da mesma forma que as eqs. (1.4) e (2.98) utilizada por Tilley^{159,160} na sua abordagem pela teoria de campo do mesmo efeito posterior. Assim, as abordagens pela teoria de circuito e pela teoria de campo são equivalentes. Além disso, a eq. (A.22) mostra que a função de relaxação dielétrica $\phi(t)$, usada por Gross, é proporcional à função $\chi(t)$, usada por Tilley.

APÊNDICE B RELAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS DIELÉTRICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO E NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A resposta dielétrica no domínio do tempo, eq. (2.98), permite compreender-se facilmente muitos aspectos do comportamento dielétrico. Uma abordagem alternativa, válida para sistemas lineares, é a resposta dielétrica no domínio da frequência, ou seja, a resposta a excitações harmônicas. As respostas dielétricas no domínio do tempo e no domínio da frequência estão relacionadas entre si |Jonscher (p.42-53)⁸⁶|.

Assim, seja a resposta dielétrica no domínio do tempo, eq. (2.98)

$$\vec{P}(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \quad (\text{B.1})$$

Como a função resposta, $\chi(t)$, se anula para $t \rightarrow \infty$ |condição (2.97)|, os limites de integração na eq. (B.1) podem ser estendidos, resultando:

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \quad (\text{B.2})$$

Agora, tomando-se a transformada de Fourier e considerando-se, para facilidade de notação, o mesmo símbolo para a função e sua transformada, vem:

$$\mathcal{F}\{\vec{p}(t)\} = \vec{p}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{p}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.3})$$

e, analogamente

$$\mathcal{F}\{\chi(t)\} = \chi(\omega) \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{F}\{\vec{e}(t)\} = \vec{e}(\omega) \quad (\text{B.5})$$

Levando as eqs. (B.3) - (B.5) na eq. (B.2), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\vec{p}(t)\} &= \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \vec{e}(t-\tau) d\tau \right\} \\ \vec{p}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \vec{e}(t-\tau) d\tau \right] dt \\ \vec{p}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \vec{e}(t-\tau) dt \right] d\tau \\ \vec{p}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\omega \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} \vec{e}(t-\tau) dt \right] d\tau \\ \vec{p}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(\lambda) e^{-i\omega \lambda} d\lambda \end{aligned}$$

ou,

$$\vec{p}(\omega) = \chi(\omega) \vec{e}(\omega) \quad (\text{B.6})$$

A eq. (B.6) mostra que a integral de convolução na resposta dielétrica no domínio do tempo [eq. (B.1)] é substituída por um produto de duas funções no domínio da frequência.

Além disso, com o conhecimento de dados experimentais nos domínios da frequência ou do tempo, é possível obter-se a outra função resposta correspondente, por integração numérica.

As principais vantagens da utilização da resposta dielétrica no domínio da frequência são as aplicações em engenharia e, principalmente, a maior facilidade experimental quando se realiza medidas usando a frequência como parâmetro.

A função resposta no domínio da frequência, ou seja, a suscetibilidade dependente da frequência, $\chi(\omega)$, é uma função complexa, na forma

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.7})$$

ou,

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i \chi''(\omega) \quad (\text{B.8})$$

APÊNDICE C A TRANSFORMAÇÃO DE HILBERT E AS RELAÇÕES DE
KRAMERS-KRONIG

A transformação de Hilbert é utilizada para se relacionar as partes real e imaginária de funções complexas que são têm significado físico para argumentos reais [Byron e Fuller (p.335-349)¹⁴].

Considere-se uma função complexa de variável complexa, $f(z)$, tal que

a) $f(z)$ é analítica no semi-plano superior (C.1)

b) $|f(z)| \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$, no semi-plano superior

Seja $f(x)$ uma função complexa de variável real, dada por

$$f(x) = f'(x) - f''(x) \quad (C.2)$$

O par de transformação de Hilbert é dado pelas relações

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f''(x)}{x - \alpha} dx \quad (C.3)$$

$$f''(\alpha) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)}{x - \alpha} dx \quad (C.4)$$

onde o símbolo \int denota valor principal.

As relações (C.3) e (C.4) também podem ser escritas na forma

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f''(x) - f''(\alpha)}{x - \alpha} dx \quad (\text{C.5})$$

$$f''(\alpha) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x) - f'(\alpha)}{x - \alpha} dx \quad (\text{C.6})$$

onde, em caso de qualquer ambiguidade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$$

Existem quantidades físicas que sob hipóteses razoavelmente amplas e motivadas fisicamente, possuem as propriedades analíticas (C.1), de modo que possam satisfazer as relações de transformação de Hilbert.

Seja um sistema físico linear, causal e com dispersão temporal, na forma

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) E(\tau) d\tau \quad (\text{C.7})$$

onde a função E é a excitação e R a resposta. A função G é a função resposta do sistema.

A eq. (C.7) é a aplicação do princípio de superposição ao sistema, de modo que a resposta em t é a superposição ponderada de todas as excitações anteriores a t .

Note que o argumento da função G é $(t-\tau)$ pois desta forma o sistema responde a uma excitação súbita no instante de

tempo t_0 do mesmo modo que responderia a uma excitação súbita em um instante de tempo T posterior. Assim, seja

$R_1(t)$ - resposta do sistema a uma excitação súbita em t_0

$R_2(t)$ - resposta do sistema a uma excitação súbita em $t_0 + T$

tem-se

$$R_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \varepsilon_0 \delta(\tau - t_0) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_0 G(t-t_0)$$

$$R_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \varepsilon_0 \delta(\tau - t_0 - T) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_0 G(t-t_0-T)$$

ou seja,

$$R_2(t+T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_0 G(t+T-t_0-T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_0 G(t-t_0)$$

$$R_2(t+T) = R_1(t) \tag{C.8}$$

A função $G(t)$ obedece às seguintes condições

a) $G(t)$ é limitada para todo t (C.9)

b) $|G(t)|$ é integrável, assim $G(t) \rightarrow 0$ mais rápido que $(1/t)$ quando $t \rightarrow \infty$ (C.10)

c) $G(t) = 0$ para $t < 0$ (C.11)

a condição (C.11) é justamente o princípio da causalidade (a causa antecede ao efeito).

Obedecidas as condições (C.9), (C.10) e (C.11) pode-se definir a função $g(z)$ que é a extensão para o plano complexo

da função $g(\omega)$, transformada de Fourier da função $G(t)$. A função $g(z)$ obedeceria às condições (C.1), de modo que para a função

$$g(\omega) = g'(\omega) - i g''(\omega) \quad (\text{C.12})$$

são válidas as transformações de Hilbert (C.3) e (C.4)

$$g'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g''(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \quad (\text{C.13})$$

$$g''(\omega) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \quad (\text{C.14})$$

As relações (C.13) e (C.14) são as relações de dispersão entre as partes real e imaginária da quantidade física $g(\omega)$, para valores reais do argumento.

Das hipóteses necessárias para a validade da transformação de Hilbert, (C.9), (C.10) e (C.11), a fundamental é a hipótese da causalidade; a causalidade implica, pois, na existência das relações de dispersão.

Além disso, como somente frequências positivas têm significado físico e supondo-se $G(t)$ real, a partir das eqs. (C.13) e (C.14), tem-se

$$g'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} g''(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \quad (\text{C.15})$$

$$g''(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g'(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \quad (\text{C.16})$$

Assim, para a excitação tendo o campo elétrico, para a resposta, a polarização, tem-se da eq. (C.7)

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (\text{C.17})$$

Tomando-se a transformada de Fourier, lembrando que a transformada da integral de convolução é o produto da transformada das funções, tem-se

$$P(\omega) = G(\omega) \varepsilon(\omega) \quad (\text{C.18})$$

A comparação da eq. (C.18) com a eq. (B.6) [Apêndice B], mostra que a função $G(\omega)$ é justamente a suscetibilidade dependente da frequência, $\chi(\omega)$, ou seja

$$P(\omega) = \chi(\omega) \varepsilon(\omega) \quad (\text{C.19})$$

Agora, das eqs. (C.15) e (C.16), vem

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{\bar{\omega} \chi''(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \quad (\text{C.20a})$$

$$\chi''(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{\chi'(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \quad (\text{C.20b})$$

As eqs. (C.20a) a (C.20b) são as relações de Kramers-Kronig e relacionam as partes real e imaginária da suscetibilidade dependente da frequência.

A parte real da suscetibilidade no domínio da frequência, $\chi'(\omega)$, não contribui para a perda dielétrica e está relacionada com a dispersão; a parte imaginária, $\chi''(\omega)$, contribui para a perda dielétrica e está relacionada com a absorção.

As relações de Kramers-Kronig estão entre as relações mais gerais da eletrodinâmica e têm um significado fundamental na interpretação de dados dielétricos. Nesta conexão, o comportamento das perdas dielétricas, obscurecido pela presença da condutividade de corrente contínua em baixas frequências, e da permissividade ϵ_{∞} em altas frequências, foi elucidado com o uso das relações de Kramers-Kronig [Lovell¹⁰⁵, Gross^{45,60} e Jonscher (p.47-52)⁸⁶].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ADAMEC, V. & CALDERWOOD, J.H. Electrical Conduction and Polarisation Phenomena in Polymeric Dielectrics at Low Fields. J. Phys. D: Appl. Phys., 11: 781-800, 1978.
- 2 AJIEZER, A.I. & PELETMINSKI, S.V. Métodos de la Física Estadística. 1.ed. Moscú, Editorial Mir, 1981.
- 3 BAGGULEY, D.M.S. Electromagnetism and Linear Circuits. 1.ed. London, Van Nostrand Reinhold, 1973.
- 4 BARROSO, L.C. et.al. Cálculo Numérico. 2.ed. São Paulo, Editora Harbra, 1987.
- 5 BATRA, I.P. et.al. Discharge Characteristics of Photoconducting Insulators. J. Appl. Phys., 41 (8): 3416-22, July 1970.
- 6 BERNARD, W. & CALLEN, H.B. Irreversible Thermodynamics of Nonlinear Processes and Noise in Driven Systems. Rev. Mod. Phys., 31 (4): 1017-44, Oct. 1959.
- 7 BLOM, J.G. & BRUNER, H. The Numerical Solution of Nonlinear Volterra Integral Equation of the Second Kind by Collocation and Iterated Collocation Methods. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8 (5): 806-30, Sept. 1987.
- 8 BOLTZMANN, L. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. Wien. Ber., 70, 1874.

- 9 BONING, v.B.P. Bemerkenswerte Zusammenhänge usw. Zeits. f. Techn. Phys., 8: 241-7, 1938.
- 10 BOTTCHEER, C.J.F. & BORDEWIJK, P. Theory of Electric Polarization. 2.ed. Amsterdam, Elsevier Scientific, 1978. 2v.
- 11 BRÉDOV, M. et.al. Electrodinâmica Clássica. 1.ed. Moscú, Editorial Mir, 1986.
- 12 BROWN Jr., W.F. Dielectrics, in: Handbuch der Physik, Band XVII-Dielektrika. 1.ed. Berlin, Springer-Verlag, 1956.
- 13 BUNGE, M. Teoria e Realidade. 1.ed. São Paulo, Editora Perspectiva, 1974.
- 14 BYRON Jr., F.W. & FULLER, R.W. Mathematics of Classical and Quantum Physics. 1.ed. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1969. 2v.
- 15 CHUDLEIGH, P.W. Charge Transport Through a Polymer Foil. J. Appl. Phys., 48 (11): 4591-7, Nov. 1977.
- 16 CHURCHILL, R.V. Modern Operational Mathematics in Engineering. 1.ed. USA, Mc Graw-Hill, 1944.
- 17 COELHO, R. Physics of Dielectrics for the Engineer. 1.ed. Amsterdam, Elsevier Scientific, 1979.
- 18 COELHO, R. et.al. On the Natural Decay of Corona Charged Insulating Sheets. Phys. Stat. Sol. (a), 94: 289-98, 1986.
- 19 COELHO, R. et.al. On the Return-Voltage Buildup in Insulating Materials. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-22 (6): 683-90, Dec. 1987.

- 20 COLE, K.S. & COLE, R.H. J.Chem. Phys., 9: 341, 1941
- 21 COLE, R.H. Phys. Rev., 60: 172, 1941
- 22 CURTINS, H. & Shah, A.V. Pulse Behavior of Trnasmision
Lines With Dielectric Losses. IEEE Trans. on Circ.
and Sys., CAS-32 (8): 819-26, Aug. 1985.
- 23 DANIEL, V.V. Dielectric Relaxation. 1.ed. London,
Academic Press, 1967.
- 24 DAVIDSON, D.W. & COLE, R.H. J. Chem. Phys., 18: 1417,
1950.
- 25 DEBYE, P. Polar Molecules. 1.ed. N.Y., Dover
Publications, 1929.
- 26 DORN, W.S. & McCracken, D.D. Cálculo Numérico com Estu-
dos de Casos em Fortran IV. 1.ed. Rio de Janeiro,
Editora Campus, 1981.
- 27 DURAND, E. Electrostatique et Magnétostatique. 1.ed.
Paris, Masson et Cie. Éditeurs, 1953.
- 28 ERINGEN, A.C. Theory of Nonlocal Piezoelectricity. J.
Math. Phys., 25 (3): 717-27, Mar. 1984.
- 29 FARIA, R.M.; GROSS, B. & FERREIRA, G.F.L. DC Conduction
and Dielectric Absorption in PVF₂. J. Appl. Phys., 55
(11): 4130-1, June 1984.
- 30 FERREIRA, G.F.L. & GROSS, B. Dissipation of Charge
Layers in Dielectrics. Rev. Bras. Fís., 2 (3): 205-13,
1972.
- 31 FERRI, M.G. & MOTOYAMA, S., coord. História das Ciências
no Brasil. 1.ed. São Paulo, E.P.U. EDUSP, 1979.
Vol.1-Cap.3, A Física no Brasil.
- 32 FROLICH, H. Theory of Dielectrics. 2.ed. Oxford, Great
Britain, The University Press, 1958.

- 33 GARCIA-MOLINER, F. Linear Response Function and the Phenomenological Equations of Internal Friction. J. Appl. Phys., 37 (1): 83-9, Jan. 1966.
- 34 GÉNY, F. & MONNERIE, L. J. Polym. Sci. Polym. Phys., 15: 1, 1977.
- 35 GROSS, B. Uber die Anomalien der Festen Dielektrika. Zeits. f. Phys., 107: 217-34, Juni 1937.
- 36 GROSS, B. Zum Verlauf des Einsatzstromes in Anomalen Dielektrikum. Zeits. f. Phys., 108: 598-608, Jan. 1938.
- 37 GROSS, B. On the Condenser-field-Method. An. Acad. bras. Ciênc., X (2): 147-50, Jun. 1938.
- 38 GROSS, B. Estudos Sobre Dielétricos-IV- A Corrente Inicial. An. Acad. bras. Ciênc., X (4): 297-313, Dez. 1938.
- 39 GROSS, B. Uma Nova Aplicação do Princípio de Superposição na Teoria dos Dielétricos Anômalos. An. Acad. bras. Ciênc., XI (3): 213-17, Set. 1939.
- 40 GROSS, B. On After-Effects in Solid Dielectrics. Phys. Rev., 57: 57-9, Jan. 1940.
- 41 GROSS, B. Contribuição à Teoria dos Dielétricos Reais. An. Acad. bras. Ciênc., XII (1): 63-7, Mar. 1940.
- 42 GROSS, B. O Condensador Anômalo no Campo Alternado. An. Acad. bras. Ciênc., XII (3): 203-12, Set. 1940.
- 43 GROSS, B. Sobre uma Nova Transformação Integral - Nota Prévia. An. Acad. bras. Ciênc., XII (4): 317-8, Dez. 1940.
- 44 GROSS, B. Sobre uma Transformação Integral que Interessa à Eletrotécnica. An. Acad. bras. Ciênc. XIII (1): 31-55, Mar. 1941.

- 45 GROSS, B. On the Theory of Dielectric Loss. Phys. Rev.,
59: 748-50, May 1941.
- 46 GROSS, B. Sobre uma Transformação Integral que interes-
sã Eletrotécnica II. An. Acad. bras. Ciênc., XIII (3):
163-4, Set. 1941.
- 47 GROSS, B. On Discharge Voltage and Return Voltage Curves
for Absorptive Capacitors. Phys. Rev., 62: 383-7, Oct.
1942.
- 48 GROSS, B. On an Integral Transformation of General
Circuit Theory. Amer. Mat. Mont., 50: 90-3, Feb. 1943.
- 49 GROSS, B. Permanent Charges in Solid Dielectrics II.
J. Chem. Phys., 17: 866-72, 1949.
- 50 GROSS, B. Static Charges on Dielectrics. Brit. J. App.
Phys., 1: 259-67, Oct. 1950.
- 51 GROSS, B. On the Inversion of the Volterra Integral
Equation. Quat. Appl. Mat., X (1): 74-6, 1952.
- 52 GROSS, B. Electrical Analogs for Viscoelastic Systems.
J. Polym. Sci., XX: 371-80, 1956.
- 53 GROSS, B. Ladder Structures for Representation of
Viscoelastic Systems II. J. Polym. Sci., XX: 123-31,
1956.
- 54 GROSS, B. Lineare Systeme. Nuovo Cimento, III
(Sup.X,2): 235-296, 1956.
- 55 GROSS, B. Mathematical Structure of the Theories of
Viscoelasticity. 2.ed. Paris, Hermann, 1968.
- 56 GROSS, B. Time-Temperature Superposition Theory for
Electrets. J. Electrochem. Soc., 115 (4): 376-81,
Apr. 1968.

- 57 GROSS, B. Time-Temperature Superposition Principle in Relaxation Theory. J. Appl. Phys., 40 (8): 3397, July 1969.
- 58 GROSS, B. Breakdown of Equivalent-Model Theory in Nonisothermal Relaxation. J. Polym. Sci., 10: 1941-7, 1972.
- 59 GROSS, B. Linear Models and the Kinetics of Thermally Activated Currents and Voltages. J. Electrochem. Soc., 119 (7): 855-60, July 1972.
- 60 GROSS, B. Applications of the Kronig-Kramers Relations. J. Phys. C: Solid State Phys., 8: L226-7, 1975.
- 61 GROSS, B. Polarisation Phenomena in Dielectrics: a Comment. J. Phys. D: Appl. Phys., 12: L75-6, 1979.
- 62 GROSS, B. Dielectric Relaxation and the Davidson-Cole Distribution Function. J. Appl. Phys., 57 (6): 2331-3, Mar. 1985.
- 63 GROSS, B. Electret Research - Stages in its Development. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-21 (3): 249-69, June 1986.
- 64 GROSS, B. Distribution Functions in Linear Viscoelastic Theory. J. Appl. Phys., 62 (7): 2763-70, Oct. 1987.
- 65 GROSS, B. & DENARD, L.F. On Permanent Charges in Solid Dielectrics. Phys. Rev., 67 (7,8): 253-9, Apr. 1945.
- 66 GROSS, B. & FIGUEIREDO, M.T. On the Equivalence of Maxwell-Wagner Systems with Time-Dependent Parameters. J. Phys. D: Appl. Phys., 18. 617-26, 1985.
- 67 GROSS, B. & FUOSS, R.M. Ladder Structures for Representation of Viscoelastic Systems. J. Polym. Sci., XIX: 39-50, 1956.

- 68 GROSS, B. & PERLMAN, M.M. Short-Circuit Currents in Charged Dielectrics and Motion of Zero-Field Planes. J. Appl. Phys., 43 (3): 853-5, Mar. 1972.
- 69 GROSS, B. & ROCHA, P.S. Estudos Sobre Dielétricos-Introdução. An. Acad. bras. Ciênc., IX (3): 187-98, Set. 1937.
- 70 GROSS, B. & ROCHA, P.S. Estudos Sobre Dielétricos-I-Carga e Descarga. An. Acad. bras. Ciênc., IX (3): 199-209, Set. 1937.
- 71 GROSS, B. & ROCHA, P.S. Estudos Sobre Dielétricos-II-Regeneração e Descarga Interna. An. Acad. bras. Ciênc., IX (4): 307-19, Dez. 1937.
- 72 GROSS, B. & ROCHA, P.S. Estudos Sobre Dielétricos-III-A Capacidade de um Condensador Real. An. Acad. bras. Ciênc., IX (4): 320-26, Dez. 1937.
- 73 GROSS, B. & SILVA, H. Some Measurements on the Validity of the Principle of Superposition in Solid Dielectrics. Phys. Rev., 60: 684-87, Nov. 1941.
- 74 GUINSBURG, G.K. & GOLDFARB, J.L., Org. Mário Schenberg: Entre-Vistas. 1.ed. São Paulo, Editora Perspectiva 1984.
- 75 HEDVIG, P. Dielectric Relaxation Phenomena-Experimental Aspects. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-19 (5): 371-88, Oct. 1984.
- 76 HENSON, B.L. The Integro-Differential Equation Predicting Transient Decay of Space-Charge Currents in Media. J. Appl. Phys. 60 (5): 1689-98, Sept. 1986.

- 77 HILDEBRAND, F.B. Introduction to Numerical Analysis.
1.ed. New York, Mc Graw-Hill, 1956.
- 78 HILL, R.M. & DISSADO, L.A. The Temperature Dependence
Of Relaxation Processes. J. Phys. C: Solid State
Phys., 15: 5171-93, 1982.
- 79 HILL, R.M. & DISSADO, L.A. Relaxation in Elastic and
Viscoelastic Materials. J. Mat. Sci, 19: 1576-95,
1984.
- 80 HIPPEL, v., edit. Dielectric Materials and Applications.
4.ed. Cambridge, Massachusetts, The M.I.T. Press, 1966.
- 81 HOPKINSON, J. Residual Charge of a Leyden Jar. Phil.
Trans., 167: 599, 1877
- 82 IWAMOTO, M. et.al. Determination of the Zero-Field
Position in an Insulating Film by Thermally Stimulated
Surface Potential Measurement in the Presence of a
Temperature Gradient. IEEE Trans. Elect. Insul.,
EI-22 (4): 413-7, Aug. 1987.
- 83 JACKSON, J.D. Eletrodinâmica Clássica. 2.ed. Rio de
Janeiro, Guanabara Dois, 1983.
- 84 JONSCHER, A.K. The "Universal" Dielectric Response.
Nature, 267: 673-9, June 1977.
- 85 JONSCHER, A.K. Dielectric Loss Under Transient
Excitation. J. Phys. C: Solid State Phys., 11: L601-6,
1978.
- 86 JONSCHER, A.K. Dielectric Relaxation in Solids. 1.ed.
London, Chelsea Dielectric Press, 1983.
- 87 JONSCHER, A.K. Charging and Discharging of Non-Ideal
Capacitors. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-22 (4):
357-9, Aug. 1987.

- 88 JONSCHER, A.K. Energy Losses in Charging and Discharging of Capacitors. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-22 (4): 361-4, Aug. 1987.
- 89 KEITHLEY, J.F. et.al. Low Level Measurements for Effective Low Current, Low Voltage and High Impedance Measurements. 3.ed. Cleveland, Ohio, USA, Keithley Instruments, Inc., 1984.
- 90 KITA, Y. Dielectric Relaxation in Distributed Dielectric Layers. J. Appl. Phys., 55 (10): 3747-55 May 1984.
- 91 KOMPANEYETS, A.S. A Course of Theoretical Physics. 1.ed. Moscow, Mir Publischers, 1978. Vol.2-Part III, Electrodynamics of Continuous Media.
- 92 KRASNOV, M. et.al. Ecuaciones Integrales. 3.ed. Moscú, Editorial Mir, 1982.
- 93 KUBO, R. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I. J. Phys. Soc. Jpn., 12 (6): 570-86, June 1957.
- 94 KUO, F.F. Network Analysis and Synthesis. 1.ed. N.Y., John Willey and Sons, 1962.
- 95 KUWABARA, M. et.al. Proc. Jt. Conv. Four. Inst. Electr. Eng. Jpn.: 1078, Tokyo, 1978.
- 96 KYOKANE, J. et.al. Effects of Electron Irradiation on Residual Voltage of Polyethylene Films. Jpn. J. Appl. Phys., 25 (2): 301-2, Feb.1986.
- 97 LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E.M. Electrodinámica de los Medios Continuos. 1.ed. Barcelona, Reverté, 1975.

- 98 LEONTOVICH, M. Generalization of the Kramers-Kronig Formulas to Media with Spatial Dispersion. Sov. Phys. JETP, 13 (3): 634-7, Sept. 1961.
- 99 LEVANYUK, A.P. & MINYUKOV, S.A. Possible Formation of Spatially Inhomogeneous Structures at Phase Transitions in Ferroelectric Solid Solutions. Sov. Phys. Solid State, 22 (6): 1050-1, June 1980.
- 100 LEVI, B. Sobre una Transformación Integral. An. Acad. bras. Ciênc., XIII (3): 185-94, Set. 1941.
- 101 LEVICH, B.G. Theoretical Physics. 1.ed. Amsterdam, North-Holland Publishing, 1971. Vol.2 - Part IV, Electromagnetic Processes in Matter.
- 102 LEWIS, T.J. Electrical Effects at Interfaces and Surfaces. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-21 (3): 289-95, June 1986.
- 103 LINDMAYER, J. Current Transient in Insulators. J. Appl. Phys., 36 (1): 196-201, Jan. 1965.
- 104 LOMNITZ, C. Linear Dissipation in Solids. J. Appl. Phys., 28: 201-5, 1957.
- 105 LOVELL, R. Application of Kramers-Kronig Relations to the Interpretation of Dielectric Data. J. Phys. C: Solid State Phys., 7: 4378-84, 1974.
- 106 MANNING, M.F. & BELL, M.E. Electrical Conduction and Related Phenomena in Solid Dielectrics. Rev. Mod. Phys., 12: 215-56, July 1940.
- 107 MANY, A. & RAKAVY, G. Theory of Transient Space-Charge-Limited Currents in Solids in the Presence of Trapping. Phys. Rev., 126 (6): 1980-8, June 1967.

- 108 MATHEWS, J. & WALKER, R.L. Mathematical Methods of Physics. 2.ed. California, Addison Wesley, 1973.
- 109 MAXWELL, J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism. 3.ed. N.Y., Dover Publications, 1954. 2.v.
- 110 MEIXNER, v.J. Thermodynamische Theorie der Relaxationserscheinungen. Kolloid Z., 134 (1): 3-20, 1953.
- 111 MIKHLIN, S.G. Integral Equations. 1.ed. London, Pergamon Press, 1957.
- 112 MIKUSINSKI, J. Operational Calculus. 2.ed. Poland, Pergamon Press, 1959.
- 113 MIQUEL, J. & CASTELLS, F. Curve Fitting Made Easy Hydrocarbon Processing, 65 (11): 121-4, Nov. 1986.
- 114 MIZUTANI et.al. Surface Potential Decay in Polyethylene. Jpn. J. Appl. Phys., 20 (5): 855-9, May 1981.
- 115 MORITA, A. On Nonlinear Dielectric Relaxation. J. Phys. D: Appl. Phys., 11: 1357-67, 1978.
- 116 MORITA, A. Theory of Nonlinear Response. Phys. Rev. A, 34 (2): 1499-504, Aug. 1986.
- 117 MULTHAAPT, R.G. & HERTZ, H. Dielectrics with Quasi-Permanent Charge or Polarisation. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-22 (5): 531-54, Oct. 1987.
- 118 NEUFELD, J. Space Dispersive Properties of Plasma. Phys. Rev., 123 (1): 1-10, July 1961.
- 119 NEUFELD, J. Energy Density in a Dispersive Medium Formulated in Terms of Constitutive and "Electromagnetic" Parameters. Phys. Lett., 6 (3) 246-7, Sept. 1963.

- 120 NGAI, K.L. et.al. Models of Kohlrausch Relaxations. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-21 (3): 313-8, June 1986.
- 121 OHI, S. et.al. Study on the Applicability of Residual Voltage Measurement to Diagnosis of Detorioration for 33kV XLPE Insulated Power Cables. Proceedings of the Nineteenth Simposium on Electrical Insulating Materials, Osaka, Japan, Sept. 1986.
- 122 OKAMOTO, H. Dielectric Diagnosis of HV Apparatus by DC Residual Voltages. Fourth International Symposium on High Voltage Engineering, conf. 62.02, Athens, Greece, 5-9 Sept. 1983.
- 123 OKAMOTO, H. Data Arrangement of Residual Voltages and Dipole Distribution in Dielectrics. Fifth International Symposium on High Voltage Engineering, conf. 23.04, Braunschweig, Fed. Rep. of Germ., 24-28 Aug. 1987.
- 124 OLIVEIRA CASTRO, F.M. Nota Sobre uma Equação Integro-Diferencial que Interessa à Eletrotécnica. An. Acad. bras. Ciênc., XI (2): 151-63, Jun. 1939.
- 125 OLIVEIRA CASTRO, F.M. Zur Theorie der Dielektrischen Nachwirkung. Zeits. f. Phys., 114: 116-26, Jun. 1939.
- 126 OLIVEIRA CASTRO, F.M. A Dualidade nos Espaços Vetoriais Topológicos e a Teoria dos Sistemas Físicos Lineares. CBPF-NF-031, 1980.
- 127 OLIVEIRA CASTRO, F.M. On the Integral-Differential Equation of an Absorptive Capacitor. An. Acad. bras. Ciênc., 57 (3): 275-6, 1985.

- 128 PEKAR, S.I. Identification of Excitons with Light Waves in a Crystal and the Macroscopic Theory of Excitons With and Without Account of Retardation. Sov. Phys. JETP, 11 (6): 1286-93, Dec. 1960.
- 129 PEKAR, S.I. Energy of an Arbitrary Electromagnetic Field in a Medium with Dispersion of the Dielectric Permittivity and Magnetic Permeability. Sov. Phys. JEPT, 41 (3): 430-6, 1976.
- 130 PERLMAN, M.M. A Non-Isothermal Electret Charge Decay Theory. An. Acad. bras. Ciênc., 40 (4): 437-46, 1968.
- 131 PERLMAN, M.M. Electrochem. Tech., 6 (3-4): 95-7, Mar. 1968.
- 132 PERLMAN, M.M. & MEUNIER, J.L. Charge Decay of Carnauba Wax Electrets. J. Appl. Phys., 36 (2): 420-7, Feb. 1965.
- 133 PERRET, J. Les Charges d'espace dans les Isolants Solides-I- Généralités et Méthodes d'étude. EDF-Bull. Dir. Ét. Rech. B: Res. Elec., Mat. Elec., 4: 101-30, 1968.
- 134 PERRET, J. Les Charges d'espace dans les Isolants Solides-II- Étude des Polymères par l'effet "Eletret". EDF-Bull. Dir. Ét. Rech. B: Res. Elec., Mat. Elec., 3: 55-103, 1970.
- 135 PERRET, J. Les Charges d'espace dans les Isolants Solides-III- Étude du Polyéthylène pour Câbles à Courant Continu. EDF-Bull. Dir. Ét. Rech. B: Res. Elec., Mat. Elec., 2: 27-70, 1974.
- 136 PETROVSKI, I. Lecciones de la Teoria de las Ecuaciones Integrales. 2.ed. Moscú, Editorial Mir, 1976.

- 137 RABOTNOV, Yu. N. Elements of Hereditary Solid Mechanics. 1.ed. Moscow, Mir Publishers, 1980.
- 138 ROMANO, I. & SCHIFANI, R. Effects of 3rd-harmonic Voltage Content on Dielectric Losses of Solid Insulating Materials. IEE Proc., 128 (B,2): 119-25, Mar. 1981.
- 139 ROSS MACDONALD, J. Theory and Application of a Superposition Model of Internal Friction and Creep. J. Appl. Phys., 32 (11): 2385-98, Nov. 1961.
- 140 ROSS MACDONALD, J. Relaxation in Systems with Exponential or Gaussian Distributions of Activation Energies. J. Appl. Phys., 61 (2): 700-13, Jan. 1987.
- 141 ROSS MACDONALD, J. Linear Relaxation Distributions, Thermal Activation, Structure, and Ambiguity. J. Appl. Phys., 62 (11): R51-62, Dec. 1987.
- 142 ROSS MACDONALD, J. & BARLOW Jr., C.A. Relaxation, Retardation, and Superposition. Rev. Mod. Phys., 35 (4): 940-6, Oct. 1963.
- 143 ROSS MACDONALD, J. & BRACKMAN, M.K. Linear-System Integral Transform Relations. Rev. Mod. Phys., 28 (4): 393-422, Oct. 1956.
- 144 ROSSEL, J. Précis de Physique Expérimentale et Théorique. 1.ed. Neuchatel, Éditions du Griffon, 1974.
- 145 RYZHOV, A. et.al. Spatial Dispersion of Inhomogeneous Media. Sov. Phys. JEPT, 21 (2): 433-8, Aug. 1965.
- 146 SCHAEFER, J.C. Cabos de Potência Subterrâneos: Arborescência. Com. Tec. LAC-Laboratório Central de Eletrotécnica e Eletrônica - COPEL/UFPR, 16/86, Curitiba, 1986.

- 147 SCHENBERG, M. Princípios de uma Teoria das Funções de Green. An. Acad. bras. Ciênc., XIII (2): 85-96, Jun. 1941.
- 148 SCHENBERG, M. & MORAES, A. Sobre a Equação dos Dielétricos Reais. An. Acad. bras. Ciênc., XII (2): 137-53, Jun. 1940.
- 149 SCHETZEN, M. The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. 1.ed. N.Y., John Wiley and Sons, 1980.
- 150 SCHUBERT, M. & WILHELMI, B. Nonlinear Optics and Quantum Electronics. 1.ed. N.Y., John Willey and Sons, 1986.
- 151 SCHWEIDLER, v.E.R.V. Studien Uber die Anomalien in Verhalten der Dielektrika. Ann. d. Phys., 24: 711-70, 1907.
- 152 SILVA, H. Medidas de Perdas Dielétricas. An. Acad. bras. Ciênc., XIII (1): 21-30, Mar. 1941.
- 153 SILVA, H. Sobre a Validade do Princípio de Superposição em Dielétricos Sólidos. An. Acad. bras. Ciênc., XIII (3). 209-13, Set. 1941.
- 154 SMYTH, C.P. Dielectric Behavior and Structure. 1.ed. N.Y., Mc Graw-Hill, 1955.
- 155 STRICK, E. Implications of Jeffreys-Lomnitz Transient Creep. J. Geophys. Res., B1 89: 437-52, 1984.
- 156 TANK, v.F. Uber den Zusammenhang der Dielektrischen Effektverluste von Kondensatoren mit den Anomalien der Ladung und der Leitung. Ann. d. Phys., 48: 307-59, 1915.

- 157 TAREEV, B. Physics of Dielectric Materials. 2.ed.
Moscow, Mir Publishers, 1979.
- 158 TAREEV, B. et.al. Electrical and Radio Engineering Materials. 1.ed. Moscow, Mir. Publischers, 1980.
- 159 TILLEY, D.E. A Phenomenological Theory of Dielectric Response. J. Appl. Phys., 38 (6): 2543-6, May 1967.
- 160 TILLEY, D.E. Electret Phenomenological Theory Presented in Linear Systems Formalism.
J. Electrochem. Soc., 115 (1): 40-1, 1968.
- 161 TRICOMI, F.G. Integral Equations. 3.ed. N.Y., Interscience Publishers, 1965.
- 162 VOLTERRA, V. Sulle Funzione che Dipendono da Altre Funzioni. Red. Lincei, 1887.
- 163 VOLTERRA, V. Deformazioni di una Sfera Elastica, Suggeta a Date Tensione nel Caso Ereditario. R. Acc. dei. Lincei, XIX (5), 1910.
- 164 VOLTERRA, V. Leçons sur les Fonctions de Lignes. Paris, Gauthier Villars, 1913.
- 165 VOLTERRA, V. Theory of Functionals. N.Y., Dover Publications Inc., 1959.
- 166 WHITEHEAD, J.B. & EAGER Jr., G.S. DC-AC Correlation in Dielectrics. J. Appl. Phys., 13: 43-9, Jan. 1942.
- 167 WILLIAMS, G. Dielectric Relaxation Behavior of Amorphous Polymers and Related Materials. IEEE Trans. Elect. Insul., EI-20 (5): 843-57, Oct. 1985.
- 168 WILLIAMS, G. & WATTS, D.C. Non-Symmetrical Dielectric Relaxation Behaviour Arising from a Simple Empirical Decay Function. Trans. Farad. Soc., 66: 80-5, 1971.

- 169 WINTLE, H.J. Discharge Currents Following Space-Charge-Limited Currents Conditions in Insulators. J. Appl. Phys., 62 (7): 2933-6, Oct. 1987.
- 170 WINTLE, H.J. The Discharge of Charged Dipolar Insulating Materials. J. Appl. Phys., 63 (5): 1705-13, March 1988.
- 171 WINTLE, H.J. & SRIBNEY, W. Distribution of Polarisation Energy in Non-Polar Amorphous Insulators. J. Phys. D: Appl. Phys., 17: 2267-76, 1984.
- 172 WISEMAN, G. & FEASTER, G. J. Chem Phys., 26:521, 1957.
- 173 YAGER, W.A. The Distribution of Relaxation Times in Typical Dielectrics. Physics, 7: 434-50, Dec. 1936.
- 174 YAMANAKA, S. et.al. Residual Voltage in Low-Density Polyethylene Film Containing Antioxidant. Jpn. J. Appl. Phys., 23 (6): 741-7, June 1984.
- 175 YOSHINO, K. et.al. Residual Voltage Polyethylene. Jpn. J. Appl. Phys., 21 (9): 1333-6, Sept. 1982.
- 176 ZAHN, M. Transient Charge Conduction in High Field Stressed Dielectrics. IEEE International Symposium on Electrical Insulation: 282-6, Boston, Mass., June 1988.