

LILIANA MADALENA GRAMANI CUMIN

**FENÔMENOS DE TRANSPORTE EM UM GÁS  
RAREFEITO EM ROTAÇÃO COM EVAPORAÇÃO  
E CONDENSAÇÃO NAS SUPERFÍCIES**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

Co-orientador: Prof. Dr. Felix Sharipov

CURITIBA

**2000**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO  
LILIANA MADALENA GRAMANI CUMIN

TÍTULO DA TESE: "FENÔMENOS DE TRANSPORTE EM UM GÁS RAREFEITO EM  
ROTAÇÃO COM EVAPORAÇÃO E CONDENSAÇÃO NAS SUPERFÍCIES"

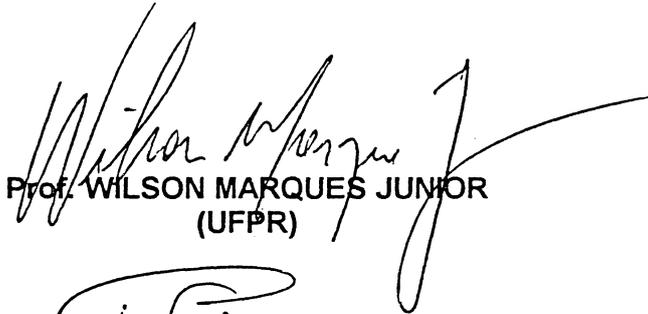
Em sessão pública, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto de sua dissertação sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato conceito global A.

Curitiba, 24 de março de 2000.

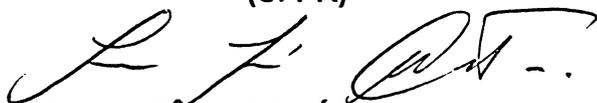
Banca Examinadora:



Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER  
(Orientador/Presidente)  
(UFPR)



Prof. WILSON MARQUES JUNIOR  
(UFPR)



Profa. TÂNIA TOMÉ MARTINS DE CASTRO  
(USP)



Prof. WAGNER FIGUEIREDO  
(UFSC)



Prof. I-SHIH LIU  
(UFRJ)

*Ao meu esposo Edson pelo  
apoio e compreensão à to-  
das as horas dedicadas a esta  
tese.*

*Aos meus filhos Gregory e  
Christopher.*

*“Conforme adquirimos mais conhecimento, as coisas não se tornam mais compreensíveis, e sim mais misteriosas.”*

*Albert Schweitzer*

*“Pode-se ser um mestre sem discípulo, a partir do momento em que se pôs ordem em sua vida, em seu pensamento ou nesta ou naquela de suas atividades. Um eremita no deserto pode ser um mestre espiritual, como também o grande artista em seu ateliê solitário. Mas não se pode ser discípulo sem mestre. O discípulo é um homem que não possui a mestria da própria vida; em busca de si próprio, não se pertence. Ele se tornou discípulo no momento em que reconheceu numa personalidade mais forte que a sua o sentido e o segredo da sua própria exigência.”*

*Georges Gusdorf*

# Agradecimentos

Ao longo da realização desta tese de doutorado recebi o apoio de diversas pessoas, sendo assim agradeço em especial:

- Ao Prof. Gilberto Medeiros Kremer pela orientação do trabalho;
- Ao Prof. Felix Sharipov pela co-orientação deste trabalho;
- Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Física por darem suporte aos créditos necessários para a sua integralização;
- À coordenação da Pós-Graduação em Física, representada pelo Prof. Ricardo Luiz Viana;
- Ao curso de Pós-Graduação em Física pelos recursos computacionais;
- Ao departamento de Matemática por permitir o meu afastamento integral e à todos os professores pelas aulas assumidas.
- À minha amiga Jania Duha por diversas razões, entre elas, o apoio e a ajuda computacional;
- Ao meu amigo Sérgio Henrique Faria pelo companheirismo.

# Resumo

Os fenômenos de transporte em sistemas em rotação contendo gases rarefeitos sofrendo evaporação e condensação nas suas superfícies são investigados com base nas equações cinética e hidrodinâmica. O problema analisado consiste em considerar um gás confinado entre dois cilindros coaxiais que podem girar. Dois casos foram investigados: (i) no primeiro caso os cilindros estão a uma mesma temperatura e giram com uma mesma velocidade mas o estado de equilíbrio do sistema é fracamente perturbado por um desvio de densidade das partículas evaporadas do cilindro interior; (ii) no segundo caso os cilindros estão a diferentes temperaturas e velocidades. A equação cinética adotada ao primeiro caso foi o modelo de Bhatnagar, Gross e Krook (modelo BGK) enquanto que para o segundo caso foi o modelo de Shakov (modelo "S"). As equações cinéticas foram resolvidas numericamente utilizando-se o método das velocidades discretas onde a descontinuidade da função de distribuição foi levada em consideração. As relações de reciprocidade de Onsager-Casimir para os coeficientes dos efeitos cruzados, calculados a partir da equação cinética, foram verificados. As equações hidrodinâmicas para um gás viscoso condutor de calor, foram obtidas das equações de balanço de massa, momento e energia. Estas equações foram resolvidas analiticamente para condições de contorno apropriadas. Os campos da densidade, da velocidade, da temperatura, do vetor fluxo de calor e do tensor tensão são apresentados para uma grande variação do número de Knudsen e da velocidade angular. As soluções hidrodinâmica e cinética foram comparadas para diferentes valores da velocidade angular. A análise da influência da rotação no fluxo entre os cilindros foi analisada.

# Abstract

Transport phenomena in rotating rarefied gases that undergo evaporation and condensation on their surfaces are investigated on the basis of the kinetic and hydrodynamical equations. The problem analyzed concerns a gas between two coaxial cylinders which may rotate. Two cases are investigated: (i) in the first case the cylinders have the same temperature and velocities but the equilibrium is perturbed by a small deviation of density of evaporated particles on the inner cylinder; (ii) in the second case the cylinders have different temperatures and velocities. The kinetic equation adopted for the first case is the Bhatnagar, Gross and Krook model (BGK model), while that for the second case the Shakov model ("S" model) is applied. The kinetic equations have been solved numerically by the discrete velocity method where the discontinuity of the distribution function has been taken into account. The Onsager-Casimir reciprocity relations for the coefficients of cross-effects, calculated from the kinetic equation, have been verified. The hydrodynamical equations have been obtained from the balance equations of mass, momentum and energy of a viscous heat conducting gas. The hydrodynamical equations with appropriated boundary conditions have been solved analytically. The fields of density, velocity, temperature, heat flux vector and stress tensor are presented for wide ranges of the Knudsen number and angular velocity. The hydrodynamical and kinetic solutions have been compared for different values of the angular velocity. An analysis of the influence of the cylinders rotation on the flow field is given.

# Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos de Mecânica do Contínuo</b>	<b>6</b>
2.1 Equação Geral de Balanço . . . . .	6
2.2 Balanço de Massa . . . . .	10
2.3 Balanço do Momento Linear . . . . .	11
2.4 Balanço de Energia . . . . .	14
2.5 Equações Constitutivas . . . . .	17
2.6 Equações de Campo em Coordenadas Cilíndricas . . . . .	18
<b>3 Fundamentos da Teoria Cinética dos Gases</b>	<b>21</b>
3.1 Equação de Boltzmann . . . . .	21
3.2 A Equação de Transferência . . . . .	26
3.3 Equações de Balanço . . . . .	27
3.4 Equações Constitutivas em Teoria Cinética . . . . .	31
3.5 Modelos Cinéticos BGK e Shakov . . . . .	31
3.6 Saltos nas Condições de Contorno . . . . .	36
<b>4 Solução Cinética</b>	<b>43</b>
4.1 Exposição do Problema . . . . .	43
4.2 Solução em Equilíbrio Dinâmico . . . . .	44

4.3	Gás em Rotação com Perturbação na Densidade . . . . .	45
4.3.1	Solução fora de Equilíbrio . . . . .	45
4.3.2	Regime de Transição - Modelo BGK . . . . .	46
4.3.3	Método de Solução . . . . .	56
4.3.4	Resultados e Discussões . . . . .	60
4.4	Gás em Rotação com Perturbações na Pressão, na Velocidade Angular e na Temperatura . . . . .	63
4.4.1	Modelo de Shakov . . . . .	63
4.4.2	Método de Solução . . . . .	71
4.4.3	Relações de Reciprocidade de Onsager - Casimir . . . . .	73
4.4.4	Resultados e Discussões . . . . .	76
5	Solução Hidrodinâmica . . . . .	82
5.1	Introdução . . . . .	82
5.2	Gás em Rotação com Perturbação na Densidade . . . . .	82
5.2.1	Resultados e Discussões . . . . .	86
5.3	Gás em Rotação com Perturbações na Pressão, na Velocidade Angular e na Temperatura . . . . .	87
5.3.1	Saltos nas Condições de Contorno . . . . .	93
5.3.2	Resultados e Discussões . . . . .	94
6	Conclusões . . . . .	101
A	Programa . . . . .	104
B	Constantes de Integração . . . . .	105
	Bibliografia . . . . .	106

# Lista de Figuras

2.1	Coordenadas materiais . . . . .	7
2.2	Volume material . . . . .	8
2.3	Corpo sujeito a forças externas . . . . .	12
2.4	Equilíbrio de uma caixa de pílulas através da superfície $S$ . . . . .	12
2.5	Tensões em três faces de um cubóide . . . . .	13
2.6	Corpo livre sujeito a tensões . . . . .	14
3.1	Espaço de fase $\mu$ . . . . .	21
3.2	Colisões direta (a) e de restituição (b) . . . . .	24
3.3	Geometria de uma colisão binária . . . . .	24
3.4	Superfície imóvel, reflete todas as partículas, tempo de iteração pequeno . . . . .	36
3.5	Representação espacial das partículas espalhadas . . . . .	38
3.6	Representação da velocidade . . . . .	39
4.1	Cilindros coaxiais em rotação . . . . .	44
4.2	Invólucro considerado . . . . .	45
4.3	Relação geométrica entre $\theta_0$ e $RINT$ e a representação gráfica da função de distribuição $f$ . . . . .	58
4.4	Velocidade tangencial $u_\varphi$ versus $r$ : linhas sólidas - $\omega = 0,5$ ; linhas tracejadas - $\omega = 1$ . . . . .	62
4.5	Desvio da densidade $\vartheta$ versus $r$ : linhas sólidas - $\omega = 0$ ; linhas traço longo - $\omega = 0,5$ ; linhas traço curto - $\omega = 1$ . . . . .	62
4.6	Desvio da temperatura $\tau$ versus $r$ : linhas sólidas - $\omega = 0$ ; linhas traço longo - $\omega = 0,5$ ; linhas traço curto - $\omega = 1$ . . . . .	63
5.1	Velocidade radial $u_r$ versus $\delta$ para $\omega = 1$ : linha sólida - solução hidrodinâmica; linha tracejada - solução cinética. . . . .	87
5.2	Velocidade radial $u_r^{(P)}$ como função de $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ em $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . . .	96

5.3	Fluxo de calor radial $q_r^{(P)}$ como função de $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ em $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . . .	96
5.4	Tensor tensão $\sigma_{r\phi}^{(P)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	97
5.5	Velocidade radial $u_r^{(\Omega)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	97
5.6	Fluxo de calor radial $q_r^{(\Omega)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	98
5.7	Tensor tensão $\sigma_{r\phi}^{(\Omega)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	98
5.8	Velocidade radial $u_r^{(T)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	99
5.9	Fluxo de calor radial $q_r^{(T)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	100
5.10	Tensor tensão $\sigma_{r\phi}^{(T)}$ versus $\delta$ para diferentes valores de $\omega$ na posição $r = 0,75$ linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética. . . .	100
6.1	Velocidade radial $u_r$ versus $\delta$ para $\omega = 1$ na posição $r = 0,75$ : linhas sólidas-soluções hidrodinâmicas: linha azul - solução hidrodinâmica sem salto, linha vermelha - solução hidrodinâmica com salto; linha tracejada - solução cinética .	102

# Lista de Tabelas

4.1	Velocidade Radial $u_r$ na posição ( $r = 0,75$ ) vs $\delta$ e $\omega$ . . . . .	60
4.2	Velocidade Tangencial $u_\varphi$ na posição ( $r = 0,75$ ) vs $\delta$ e $\omega$ . . . . .	61
4.3	Valores de $\lambda$ (elementos fora da diagonal principal) . . . . .	76
4.4	Valores de $\lambda$ (elementos da diagonal principal) . . . . .	77
4.5	Velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão devido à diferença de pressão no ponto intermediário ( $r = 0,75$ ) vs $\delta$ e $\omega$ . . . . .	79
4.6	Velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão devido à diferença na velocidade angular no ponto intermediário ( $r = 0,75$ ) vs $\delta$ e $\omega$ . . . . .	80
4.7	Velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão devido à diferença de temperatura no ponto intermediário ( $r = 0,75$ ) vs $\delta$ e $\omega$ . . . . .	81
B.1	$B_1^\alpha, B_2^\alpha, C_1^\alpha, C_2^\alpha, L^\alpha$ e $D^\alpha$ com $\alpha = P, \Omega, T$ para $\omega = 1$ vs $\delta$ . . . . .	105

# Capítulo 1

## Introdução

Como é conhecido, a mecânica do contínuo assume o princípio da indiferença ao referencial, ou seja, as equações constitutivas são iguais em qualquer sistema de referência, isto é, para sistemas inerciais e não-inerciais. De acordo com este princípio, o tensor tensão e o vetor fluxo de calor devem ser invariantes com relação a transformações Euclidianas entre quaisquer sistemas.<sup>1</sup> Em particular estas duas grandezas do gás não devem de uma forma explícita serem função da velocidade angular de rotação. Por este motivo a validade deste princípio é discutida por muitos autores [1]-[18]. De fato alguns artigos [4]-[7] afirmam que este princípio não é violado mas outros [1]-[3],[9]-[19] analisam a afirmação que as equações constitutivas para o sistema não-inercial são diferentes das dos sistemas inerciais.

A primeira discussão sobre a violação do princípio da indiferença ao referencial foi devida a Müller [1] que mostrou serem o vetor fluxo de calor e o tensor tensão dependentes da velocidade angular. Edelen e McLennan [2] confirmaram mais tarde os resultados de Müller, enquanto que Söderholm [4] mostrou através de uma teoria cinética elementar uma evidência microscópica destes fenômenos. Recentemente, Sharipov e Kremer confirmaram estes resultados com simulações numéricas no caso de um gás confinado entre dois cilindros em rotação para uma grande variação do número de Knudsen<sup>2</sup> e da velocidade angular nos seguintes casos: i) cilindros em rotação com a mesma velocidade angular porém com temperaturas diferentes [12, 13]; ii) cilindros com a mesma temperatura porém com velocidades angulares diferentes [15, 16]; iii) cilindros em rotação com velocidades angulares diferentes e temperaturas diferentes [18].

Um sistema em rotação é o exemplo mais conhecido na prática de sistema não-inercial. Certamente a rotação altera a distribuição da densidade no fluido e afeta quantitativamente os

---

<sup>1</sup>Uma transformação Euclidiana entre um sistema inercial de coordenadas  $x_i$  e um sistema não-inercial com coordenadas  $x_i^*$  tem a forma  $x_i^* = O_{ij}(t)x_j + b_i(t)$ , onde  $O_{ij}(t)$  é uma matriz própria ortogonal que depende do tempo e determina o movimento relativo dos eixos e  $b_i(t)$  um vetor dependente do tempo que determina o movimento relativo da origem dos dois sistemas.

<sup>2</sup>O número de Knudsen é um parâmetro que indica o grau de rarefação de um gás. É definido como a razão entre o livre caminho médio e um comprimento característico do problema em estudo.

coeficientes de transporte tais como a condutividade térmica e a viscosidade, como foi mostrado recentemente por Biscari e Cercignani [17] nos quais a evaporação e a condensação não foram considerados. Além disso, foi mostrado, tanto analítica, [1, 2, 4, 5, 9, 14, 17] quanto numericamente [7, 12, 13, 15, 16] que a rotação cria uma anisotropia no sistema e altera qualitativamente as propriedades de transporte do fluido. Para estes estudos numéricos foi considerado um fluido confinado entre dois cilindros coaxiais que estão em rotação, ocasionando o fluxo de Couette [20]-[22] a ser estudado. Assim analisou-se a transferência de calor que é assumida entre os dois cilindros que estão a diferentes temperaturas. Para o estudo da transferência de momento é necessário assumir que os cilindros rodam com diferentes velocidades.

A anisotropia conduz aos seguintes efeitos: (i) O gradiente radial da temperatura cria tanto um fluxo de calor radial quanto um fluxo de calor tangencial [1, 12, 13, 17]. Em outras palavras, a condutividade térmica torna-se um tensor de segunda ordem; (ii) As componentes diagonais do tensor tensão não são nulas mas dependem significativamente da frequência de rotação, [15, 16] (iii) A rotação torna a viscosidade um tensor de quarta ordem [1, 17]. Estes fenômenos são observados em sistemas fora de equilíbrio tanto fortemente ou fracamente perturbados.

Em sistemas fora de equilíbrio fortemente perturbados foi analisado o fluxo de Couette, ou seja, quando os cilindros estão sujeitos simultaneamente a uma grande diferença de temperatura e a uma grande diferença na velocidade. Com a análise dos resultados concluiu-se que a diferença de temperatura afeta o tensor tensão sem alterar o perfil da velocidade e que a diferença de velocidade afeta o fluxo de calor sem alterar o perfil da temperatura.

Em todos os trabalhos até aqui mencionados consideraram-se apenas os fenômenos de transferência de calor e de momento. Para incluir a consideração de transferência de massa temos que assumir que as superfícies dos cilindros coaxiais poderão absorver ou emitir partículas do fluido. Um exemplo de mecanismo de troca de massa entre um gás e os cilindros poderia ser a evaporação e a condensação nas fronteiras dos cilindros.

Fluxos de gases rarefeitos com evaporação e condensação na superfície de fronteiras foram investigados por muitos autores com base na teoria cinética dos gases. A extensiva lista bibliográfica sobre este tópico pode ser encontrada nos artigos [23]-[25]. Este problema não é apenas de interesse fundamental mas também de importância prática na conexão com a condução de calor num tubo térmico, vaporização através da indução de um laser, deposição de materiais, etc. A maioria destes artigos consideram simplesmente um fluxo unidimensional, ou seja, a evaporação e a condensação entre duas placas paralelas. A análise de um fluxo com simetria axial com forte evaporação e condensação entre dois cilindros e a evaporação de um cilindro no vácuo, foram considerados nos artigos [23, 20]-[28]. Onishi [28] considerou o fluxo de um gás, em um estado ligeiramente fora do equilíbrio, entre dois cilindros apenas para pequenos valores do número de Knudsen. Desta forma, até o momento não existem resultados de fluxos de

um gás entre dois cilindros com um estado ligeiramente fora do equilíbrio, onde a evaporação e a condensação ocorrem. Este problema ainda não foi resolvido para o simples caso, que corresponde àquele em que os cilindros estão em repouso. O caso mais complicado que se refere aos cilindros em rotação, tem também grande importância prática na conexão com a separação centrífuga de gases.

O objetivo deste trabalho é analisar os fenômenos de transporte de um gás em rotação onde ocorre o fenômeno de evaporação e condensação nas superfícies. O fluxo do gás rarefeito é analisado com base nas equações cinéticas e hidrodinâmicas, e neste caso assume-se que em equilíbrio dinâmico os cilindros giram com a mesma velocidade angular e têm a mesma temperatura como primeiro problema. O equilíbrio é perturbado por uma pequena diferença nas densidades das partículas evaporadas do cilindro interior e condensadas no mesmo. A equação hidrodinâmica foi resolvida analiticamente e a equação cinética foi resolvida pelo método das velocidades discretas [29, 30] modificado [29] para se levar em conta a descontinuidade da função de distribuição. Os campos de densidade, velocidade e temperatura foram calculados para um grande intervalo do número de Knudsen e foi feita uma análise da influência da rotação dos cilindros no campo de velocidade.

Como a rotação torna o fluido não-isotrópico os fenômenos de transporte tornam-se mais complexos. Se faz necessário o estudo em que outras forças termodinâmicas estejam presentes e também a determinação dos fenômenos de transporte em sistemas em rotação onde surgem efeitos cruzados. A teoria geral para estes fenômenos cruzados para um gás único foi descrita por Sharipov [31] onde a existência de efeitos cruzados é mostrada sem qualquer cálculo quantitativo [32].

Neste trabalho também calcularemos numérica e analiticamente os campos da densidade, da velocidade, da temperatura, do vetor fluxo de calor e do tensor tensão para o caso de um gás confinado entre dois cilindros em rotação onde os efeitos cruzados são levados em consideração. Para realizar estes cálculos será necessário considerar várias forças termodinâmicas agindo sobre o sistema, isto é, assumiremos o sistema sendo composto por dois cilindros coaxiais que giram com diferentes temperaturas e diferentes velocidades.

No capítulo 2 iremos explorar os fundamentos da mecânica do contínuo. Inicialmente será feita uma abordagem sobre a equação geral de balanço definindo o volume material para então se provar o teorema de transporte de Reynolds, cuja fórmula geral será utilizada na obtenção do balanço de massa, momento linear e energia também presentes neste capítulo. As equações constitutivas para o tensor viscoso, o fluxo de calor e a energia interna específica para um gás ideal viscoso e condutor de calor serão fornecidas, sendo que a dependência dos coeficientes de viscosidade de cisalhamento e condutividade térmica com a temperatura será adotada com base na teoria cinética dos gases. Encerrando o capítulo apresentamos as equações de campo

em coordenadas cilíndricas, sem considerar as forças externas, por ser esta a geometria adotada para o problema proposto neste trabalho.

No capítulo 3 iremos tratar dos fundamentos da teoria cinética dos gases. Inicialmente deduziremos a equação de Boltzmann [33] para gases monoatômicos analisando as colisões das partículas dentro de um volume no espaço de fase. Deduziremos a equação de transporte a partir da equação de Boltzmann, que será utilizada na obtenção das equações de balanço de massa, momento linear e energia, concluindo que estas são as mesmas que as obtidas na teoria fenomenológica. As equações constitutivas para o tensor viscoso e o fluxo de calor são fornecidas; as quais representam respectivamente, as leis de Navier-Stokes e Fourier. A relação entre o coeficiente de viscosidade de cisalhamento e o coeficiente de condutividade térmica, denominados genericamente como coeficientes de transporte e que estão associados, respectivamente, ao transporte de momento linear e energia, é fornecida. Analiza-se também a dificuldade matemática que a equação de Boltzmann apresenta, onde são sugeridos alguns modelos cinéticos: Bhatnagar, Gross e Krook (conhecido como modelo BGK [34] e proposto em 1954) e Shakov (conhecido como modelo "S" [35] e proposto em 1974). Estabelece-se a relação entre a função de distribuição das partículas incidentes e reemitidas de uma superfície, em função do núcleo de espalhamento. Como as condições de contorno com salto [36, 37] empregadas na teoria hidrodinâmica são obtidas através da teoria cinética dos gases, aborda-se um exemplo simples onde se analisa a condição de deslizamento da velocidade e resolve-se este problema através da equação de Boltzmann aplicando o modelo BGK. De uma maneira simplificada se introduz o método das velocidades discretas que será descrito com mais ênfase no capítulo seguinte para o cálculo das constantes que aparecem nas condições de contorno. A análise das condições de salto na fronteira considerada para este caso simples é estendida para um sistema mais complexo.

No capítulo 4 faz-se inicialmente a exposição do problema que nos propomos a resolver, isto é, um gás confinado entre dois cilindros coaxiais em rotação. Incluiremos a transferência de massa entre os cilindros, pela consideração de evaporação e condensação do gás confinado entre eles. No entanto dois problemas serão tratados: o primeiro problema refere-se ao caso em que o sistema em equilíbrio é fracamente perturbado por uma única força termodinâmica, o desvio da densidade, enquanto que no segundo problema a perturbação ocorrerá juntamente por três forças termodinâmicas: (i) a diferença de pressão na evaporação do gás; (ii) a diferença de velocidade angular entre os cilindros e (iii) a diferença de temperatura dos cilindros.

Para cada força termodinâmica serão calculados todos os fenômenos de transporte, isto é, a transferência de massa, momento linear e energia e também os efeitos diretos tais como: (i) a transferência de massa devido a diferença de pressão; (ii) a transferência de momento devido a diferença de velocidade e (iii) o fluxo de calor devido a diferença de temperatura. Para os

efeitos cruzados as relações de reciprocidade de Onsager-Casimir [31, 32, 38, 39] são verificadas.

Primeiramente, a solução de quando o sistema se encontra em equilíbrio é desenvolvida e esta é única para ambos os casos citados acima. Aplica-se ao primeiro problema o modelo BGK e ao segundo o modelo de Shakov. Ambos são resolvidos pelo método das velocidades discretas que é descrito detalhadamente. Apresenta-se também os resultados e as discussões referentes a cada problema tratado. Todos os campos obtidos, isto é, o campo da velocidade, da temperatura, vetor fluxo de calor e tensor tensão são fornecidos em função de dois parâmetros principais, o inverso do número de Knudsen e a velocidade angular a que os cilindros estão sujeitos. Analisa-se também a relação genérica entre os fluxos termodinâmicos e as forças termodinâmicas. Através das relações de reciprocidade de Onsager-Casimir obtêm-se as relações entre os coeficientes de transporte que possibilitam um critério adicional de precisão no programa utilizado.

O capítulo 5 trata do mesmo problema proposto, porém o sistema será resolvido com base nas equações da mecânica do contínuo obtendo a solução hidrodinâmica correspondente. Novamente serão considerados os dois problemas do capítulo anterior com a finalidade de se poder verificar o limite entre o regime cinético e o regime hidrodinâmico. O sistema de equações diferenciais formado pelas equações de campo para a pressão, velocidade e temperatura é resolvido analiticamente através das condições de contorno com salto para as perturbações respectivas. Para se obter as expressões de algumas constantes de integração utilizou-se o programa de computação algébrica *Maple*. As curvas para os campos de velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão são colocadas em gráficos e comparadas com a correspondente solução cinética.

O último capítulo é dedicado à conclusão. Usamos a notação indicial para tensores e a convenção de soma de Einstein para índices repetidos.

# Capítulo 2

## Fundamentos de Mecânica do Contínuo

### 2.1 Equação Geral de Balanço

Na cinemática de partículas, [43] a trajetória de uma partícula é descrita por um vetor função do tempo, isto é,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

onde  $\mathbf{r}(t)$  representa um vetor posição que, em forma de componentes, teremos

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Se existem  $N$  partículas, existirão  $N$  trajetórias, cada qual representada pela equação

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

ou seja, para uma partícula qualquer 1, sua trajetória será descrita pelo vetor posição  $\mathbf{r}_1(t)$ , para uma partícula qualquer 2, a descrição será através do vetor posição  $\mathbf{r}_2(t)$  e assim sucessivamente.

Entretanto, no regime contínuo não é mais possível identificar as partículas pela associação de um número a cada uma delas como se fazia na cinemática de partículas. No entanto, é possível identificar um elemento infinitesimal de um contínuo, denominado de partícula, pela posição que ele ocupa em algum tempo  $t_0$ . Por exemplo, se uma partícula do contínuo estava inicialmente, num tempo  $t_0$  na posição  $(X_1, X_2, X_3)$ , teremos que em geral a trajetória de cada partícula no contínuo poderá ser descrita por uma equação vetorial da forma  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  com  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{x}$  é um vetor posição num tempo  $t$  para a partícula  $P$  que estava na posição  $\mathbf{X}$  em  $t = t_0$ .

Representando através de componentes:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

com  $x_i(X_1, X_2, X_3, t_0) = X_i$  onde  $(X_1, X_2, X_3)$  servem para identificar as diferentes partículas do corpo e são conhecidas como coordenadas materiais.

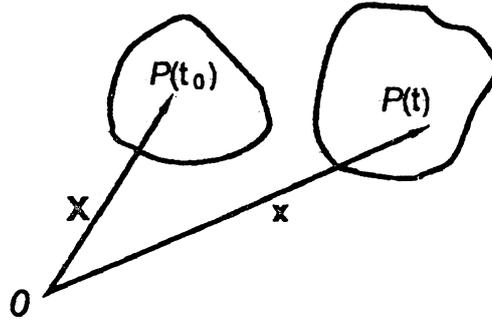


Figura 2.1: Coordenadas materiais

Duas descrições são usualmente empregadas para descrever o movimento de um contínuo [41]: a material e a espacial.

A descrição espacial ocupa-se com o que ocorre em regiões fixas do espaço com o decorrer do tempo, ao passo que a descrição material acompanha o movimento do corpo que, com o passar do tempo, ocupa diversas regiões do espaço.

A descrição espacial é então mais conveniente para analisar o escoamento de fluidos, enquanto que a material é preferida no estudo da deformação de sólidos e na análise dos princípios básicos da mecânica do contínuo.

Na descrição material, [42] as variáveis independentes são o lugar  $\mathbf{X}$  que identifica a partícula  $P$  num tempo  $t_0$  enquanto que a descrição espacial utiliza como variáveis independentes o lugar  $\mathbf{x}$  atualmente ocupado pela partícula  $P$  e o tempo  $t$ .

No movimento de um corpo, a derivada material de um campo de valor escalar, vetorial ou tensorial é uma derivada total que mede a taxa de variação (variação com o tempo) da grandeza numa partícula fixa. Os campos podem ter como argumentos os pares  $(\mathbf{X}, t)$  ou  $(\mathbf{x}, t)$ , conforme seja adotada a descrição material ou espacial, respectivamente.

Seja  $F$  um campo escalar. Se  $F$  é dado na descrição material, então a derivada material simbolizada por  $\dot{F}$ , é expressa por

$$\frac{DF}{Dt}(\mathbf{X}, t) = \dot{F}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}=\text{const}}.$$

Se  $F$  é dado pela descrição espacial, então

$$\dot{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t),$$

representa a derivada material numa descrição espacial. Podemos representar a equação acima

em componentes cartesianas como:

$$\dot{F} = \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_j \frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad (2.1)$$

onde  $u_j$  é o campo de velocidades.

Considerando o movimento do volume material  $V(t)$  esquematizado na Figura 2.2 podemos enunciar o seguinte teorema:

*Teorema de Transporte de Reynolds* [43]: Seja  $V(t)$  um volume material cuja superfície  $\partial V(t)$ , de normal unitária  $\mathbf{n}$ , se move com uma velocidade  $\mathbf{u}$  [44]. Então para uma função qualquer contínua e diferenciável  $A(\mathbf{x}, t)$  temos

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} A(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS$$

ou

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left( \frac{DA(\mathbf{x}, t)}{Dt} + A(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV. \quad (2.2)$$

Nota-se que a notação  $D/Dt$  que aparece na frente da integral do lado esquerdo do sinal de igual da equação (2.2) enfatiza que a superfície de contorno da integral move-se com o material e estamos calculando a taxa de variação do material.

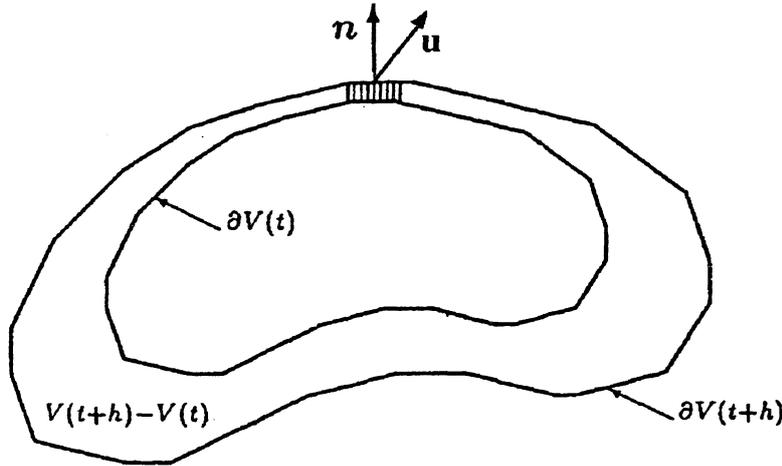


Figura 2.2: Volume material

*Demonstração:* Para provar o teorema é fácil verificar que a derivada de  $\int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV$  é definida como

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV \right], \quad (2.3)$$

devemos notar a diferença nos domínios  $V(t + \Delta t)$  e  $V(t)$ . Denotando por  $\Delta V$  a variação do movimento da superfície  $\partial V(t)$  num pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , desde que  $V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta V$  podemos escrever (2.3) como sendo

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \right) \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV \right). \end{aligned}$$

Para uma função diferenciável e contínua  $A(\mathbf{x}, t)$  o último termo da equação anterior contribui com o valor  $\int_{V(t)} \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV$  para  $\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV$ .

Então

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \right) + \int_{V(t)} \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (2.4)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.4) pode ser reescrito de uma outra forma. Primeiramente, para um infinitesimal  $\Delta t$  o integrando deve ser tomado com  $A(\mathbf{x}, t)$  na superfície de contorno (devido ao fato de ser assumido que a função  $A(\mathbf{x}, t)$  é uma função contínua), e a integral é igual a soma do produto de  $A(\mathbf{x}, t)$  pelo volume varrido pelas partículas situadas na superfície  $\partial V(t)$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Logo, se  $n_i$  é o vetor unitário normal à superfície  $\partial V(t)$ , então o deslocamento da partícula na superfície de  $\partial V(t)$  para  $\partial V(t + \Delta t)$  é  $u_i \Delta t$  e o volume varrido pelas partículas que ocupam este elemento de área  $dS$  é  $\Delta V = u_i n_i dS \Delta t$ .

Portanto, a integral sobre a variação de volume  $V(t + \Delta t) - V(t)$  da equação (2.4) pode ser reescrita como uma integral no elemento de volume  $(\mathbf{u} \Delta t) \cdot \mathbf{n} dS$ , isto é,

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} A(\mathbf{x}, t + \Delta t) (\mathbf{u} \Delta t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial V(t)} A(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Então a equação (2.4) torna-se

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\partial V(t)} A(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{V(t)} \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV, \quad (2.5)$$

e usando o teorema da divergência de Gauss, em que a integral do divergente de um vetor sobre um volume  $V$  é igual à integral de superfície da componente normal do vetor sobre a superfície que limita  $V$ , o termo  $\int_{\partial V(t)} A(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dS$  iguala-se a  $\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}(Au_j)dV$ .

Assim a equação (2.5) transforma-se em

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A(\mathbf{x}, t)dV &= \int_{V(t)} \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t}dV + \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}(Au_j)dV \\ &= \int_{V(t)} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + u_j \frac{\partial A}{\partial x_j} + A \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dV. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Considerando a derivada material representada pela equação (2.1) a equação (2.6) converte-se para

$$\frac{D}{Dt} \int_V AdV = \int_V \left( \frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dV \quad (2.7)$$

a qual será usada adiante e assim fica provado o teorema de transporte de Reynolds.

## 2.2 Balanço de Massa

A teoria termodinâmica dos fluidos tem por objetivo a determinação, em cada ponto do espaço e no instante de tempo  $t$ , dos campos de densidade de massa, velocidade e temperatura. O conhecimento destas grandezas se faz através do uso das equação de balanço [45] de massa, momento linear e energia que são equações gerais para sólidos e fluidos.

A massa é uma função aditiva e contínua cujo valor é um número real não negativo  $\mathcal{M}$ , independente do tempo e das dimensões e forma que o corpo possa ter. Os argumentos dessa função são as partes  $\mathcal{P}$  do corpo. A aditividade da função  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  implica a relação  $\mathcal{M}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \mathcal{M}(\mathcal{P}_1) + \mathcal{M}(\mathcal{P}_2)$ , quaisquer que sejam as partes disjuntas  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  contidas no corpo. Sua continuidade tem como consequência que  $\mathcal{M} \rightarrow 0$  conforme o conjunto das partes  $\mathcal{P}$  tenda para zero. A aditividade e a continuidade da função implica na existência de um campo escalar, chamado de densidade. Portanto, o princípio da conservação da massa estabelece simplesmente que a massa não pode ser criada e nem destruída num volume material, isto é, para um fluido ou sólido num volume material, a massa permanece constante.

Então pode-se dizer que o fluxo da densidade de massa é zero pois estamos lidando com uma superfície material, ou seja, uma superfície que se move com as partículas. A produção da densidade de massa é zero por ser a massa uma quantidade conservativa. O suprimento de massa também é zero pela razão que a densidade de massa não pode ser criada no interior de um volume material por meio de ações externas.

A massa contida num volume  $V$  num tempo  $t$  é

$$\mathcal{M} = \int_V \rho dV$$

onde  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  representa a densidade local que é função da posição e do tempo. A conservação da massa requer que  $\frac{DM}{Dt} = 0$ , por ser uma quantidade conservativa. A derivada  $\frac{DM}{Dt}$  é dada pela equação (2.7) desde que  $A$  seja identificado por  $\rho$ . Então para um volume arbitrário  $V$  obtemos uma forma alternativa para a lei da conservação da massa

$$\int_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dV = 0.$$

Como o integrando é contínuo num volume do espaço e os limites de integração são arbitrários, obtemos a equação de balanço de massa na forma local

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

A equação acima é denominada de equação da continuidade.

Notemos que, se o fluxo é estacionário, as propriedades do fluido dentro do volume considerado não variam no tempo, isto é,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , sendo que  $\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$ , logo esta quantidade é constante, tendo o mesmo valor em todos os pontos do fluido.

## 2.3 Balanço do Momento Linear

A segunda lei de movimento de Newton [42] no estudo da dinâmica, fundamentalmente diz que a força exercida sobre um corpo em um certo instante é igual a taxa de variação da quantidade de movimento durante este instante. Num instante de tempo  $t$ , o momento linear de todas as partículas contidas num domínio  $V$  é

$$m_i = \int_V \rho u_i dV.$$

Se o corpo está sujeito a forças de tensão  $T_i^n$  e a forças externas por unidade de volume  $F_i$ , então a força resultante é

$$f_i = \int_S T_i^n dS + \int_V F_i dV. \quad (2.9)$$

Considerando um corpo descrito pela Figura 2.3 imaginemos uma superfície plana  $S$  que contém um ponto interno arbitrário  $P$  onde  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal a esta superfície. A superfície  $S$  separa o corpo em duas partes, a parte I e a parte II. Considerando a parte I como um corpo livre representaremos por  $\Delta F$  a força resultante que age sobre um elemento de área  $\Delta A$  da superfície  $S$  que contém  $P$ .

Define-se o vetor tensão [43] para a porção I no ponto  $P$  como o limite da razão da resultante das forças pelo elemento de área, quando este elemento de área tende a zero, isto é,

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Se a parte considerada como corpo livre for a parte II, então pela Lei de Newton de ação e reação, devemos ter um vetor tensão que age sobre o mesmo ponto mas em sentido oposto.

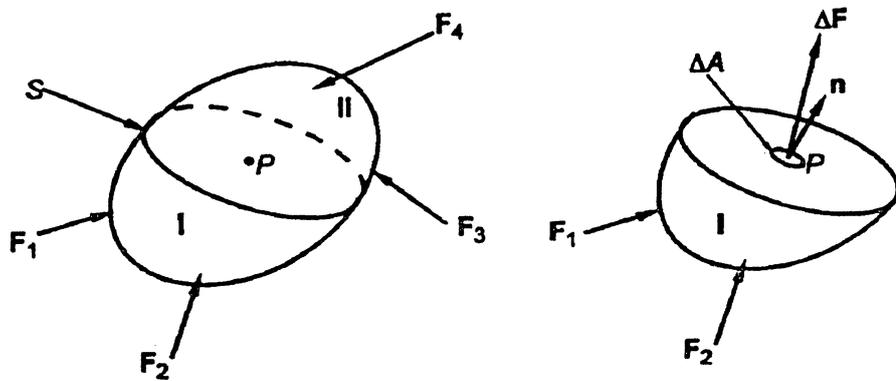


Figura 2.3: Corpo sujeito a forças externas

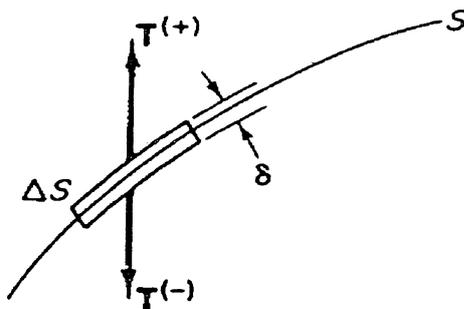


Figura 2.4: Equilíbrio de uma caixa de pílulas através da superfície  $S$

Então  $\mathbf{T}^+$  representa a ação externa à superfície que apresenta a mesma magnitude porém sentido oposto a  $\mathbf{T}^-$ , o qual representa a ação interior à superfície.

Segundo a fórmula de Cauchy [42], conhecendo-se as componentes do tensor tensão [41]  $\tau_{ij}$  podemos escrever  $T_i^n$  agindo sobre qualquer superfície como sendo

$$T_i^n = \tau_{ij}n_j, \quad (2.10)$$

$n_j$  é o vetor unitário normal a superfície de fronteira  $S$  do domínio  $V$ , mostrando que  $T_i^n$  é uma função linear e homogênea do versor  $\mathbf{n}$  e definindo o campo do tensor tensão  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ .  $\tau_{ij}$  representa a componente  $i$  da força por unidade de área atuando num elemento de superfície cuja normal dirigida para fora no ponto  $\mathbf{x}$  coincide com a direção  $j$ .

Na Figura 2.5  $\tau_{11}, \tau_{12}$  e  $\tau_{13}$  são componentes do vetor  $\tau_{1n}$ ;  $\tau_{21}, \tau_{22}$  e  $\tau_{23}$  do vetor  $\tau_{2n}$ , e  $\tau_{31}, \tau_{32}$  e  $\tau_{33}$  do vetor  $\tau_{3n}$ .

As tensões  $\tau_{11}, \tau_{22}$  e  $\tau_{33}$  são tensões normais, de tração quando positivas e de compressão quando negativas, e as outras seis são tensões de cisalhamento. Nas faces opostas, os versores normais são  $-n_j$  e as componentes  $i$  dos vetores tensão são  $-\tau_{ij}$ .

Aplicando o teorema da divergência de Gauss e substituindo a expressão (2.10) na equação

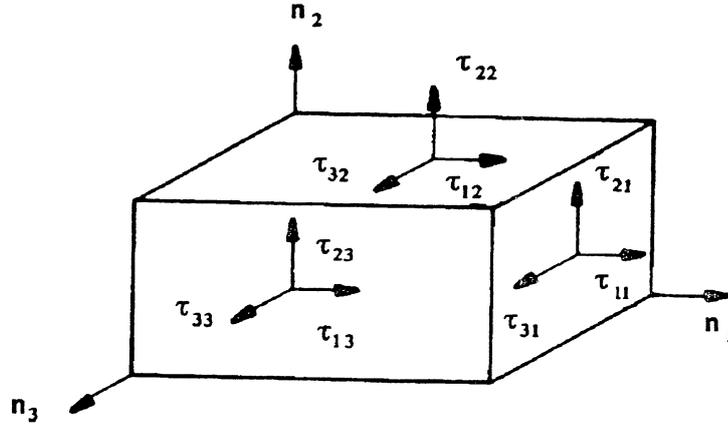


Figura 2.5: Tensões em três faces de um cubóide

(2.9) esta pode ser escrita como:

$$f_i = \int_V \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) dV,$$

e pela segunda lei de Newton

$$\frac{D}{Dt} m_i = f_i.$$

No entanto, de acordo com a equação (2.7), identificando  $A$  por  $\rho u_i$  temos que

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) dV.$$

Como a equação anterior deve ser tomada num volume arbitrário, o integrando dos dois lados será igual, portantoo

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i. \quad (2.11)$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i,$$

em que a quantidade que está no primeiro parênteses, de acordo com a equação da continuidade, é nula, enquanto que a quantidade do segundo parênteses representa a aceleração, ou seja,  $\frac{D}{Dt} u_i$ . Logo

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad (2.12)$$

representa a equação de balanço de momento linear.

Vamos analisar agora o princípio do momento angular [43]. Considerando o diagrama de um corpo livre como o esquematizado abaixo,

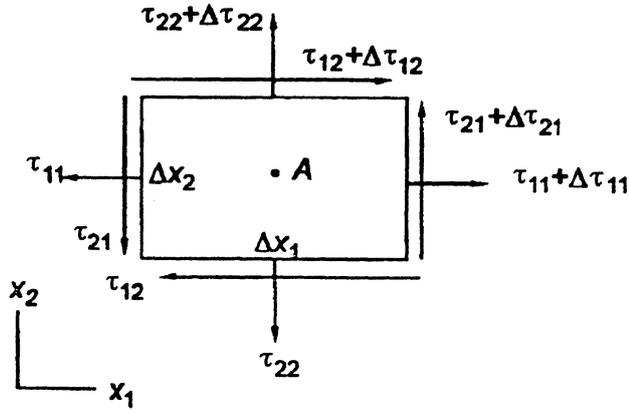


Figura 2.6: Corpo livre sujeito a tensões

a somatória do momento das forças de tensão em relação a um eixo que passa pelo ponto  $A$  e que é paralelo ao eixo  $x_3$  será dada por:

$$\begin{aligned} \sum(M_A)_3 = & \tau_{12}(\Delta x_2)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_1}{2}\right) + (\tau_{12} + \Delta\tau_{12})(\Delta x_2)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_1}{2}\right) - \tau_{21}(\Delta x_1)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_2}{2}\right) \\ & - (\tau_{21} + \Delta\tau_{21})(\Delta x_1)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainda temos que  $\sum(M_A)_3$  representa o produto do momento de inércia pela componente da aceleração angular segundo o eixo  $x_3$ , representada por  $\alpha_3$ , ou seja,

$$\begin{aligned} & \tau_{12}(\Delta x_2)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_1}{2}\right) + (\tau_{12} + \Delta\tau_{12})(\Delta x_2)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_1}{2}\right) - \tau_{21}(\Delta x_1)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_2}{2}\right) \\ & - (\tau_{21} + \Delta\tau_{21})(\Delta x_1)(\Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_2}{2}\right) = \frac{\rho}{12}(\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3)[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2]\alpha_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto, dividindo a equação (2.13) por  $\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$  e aplicando-se o limite quando  $\Delta x_i \rightarrow 0$  obtemos como consequência que o lado esquerdo da igualdade anterior torna-se nulo, além de  $\Delta\tau_{12} \rightarrow 0$  e  $\Delta\tau_{21} \rightarrow 0$ , resultando assim

$$\tau_{12} = \tau_{21}.$$

Similarmente podemos obter  $\tau_{13} = \tau_{31}$  e  $\tau_{23} = \tau_{32}$ . De forma que estes resultados nos mostram que o tensor tensão é uma quantidade simétrica, isto é,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Esta conclusão é válida para todos os corpos chamados de não polares nos quais não existe um campo próprio de spin.

## 2.4 Balanço de Energia

O princípio da conservação da energia [42] estabelece que a energia não pode ser criada e nem destruída. Por outro lado, a transferência de calor e a realização de trabalho são dois métodos

de fornecimento ou retirada de energia de um sistema. Uma vez terminado o processo de transferência de energia, diz-se que houve mudança na energia interna do sistema. Então, se um sistema evolui, por diversos caminhos, de um estado para outro, nos quais o calor absorvido e o trabalho são medidos, constata-se que a soma entre o calor absorvido e o trabalho feito sobre o sistema é a mesma para todos os caminhos entre o estado inicial e final, onde o calor absorvido é a energia adicionada ao sistema pela transferência de calor. Logo a soma entre estas quantidades representa a variação de energia interna do sistema que é independente dos estados intermediários.

Portanto, para qualquer sistema, o calor cedido deve ser igual ao aumento de energia no sistema diminuído da quantidade de energia referente ao trabalho feito sobre o sistema.

A lei da conservação de energia é a primeira lei da termodinâmica. Então, considerando duas formas de energia no meio contínuo teremos que

$$U = K + \mathcal{E},$$

onde  $K$  representa a energia cinética contida num domínio regular  $V$  num tempo  $t$  dada por

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho u_i u_i dV,$$

em que  $u_i$  são as componentes do vetor velocidade da partícula que ocupa um elemento de volume  $dV$  e  $\rho$  é a densidade do material.

$\mathcal{E}$  representa a energia interna escrita na forma

$$\mathcal{E} = \int_V \rho \epsilon dV,$$

com  $\epsilon$  representando a energia interna por unidade de massa. Logo, a primeira lei da termodinâmica nos diz que

$$\Delta U = Q + W,$$

ou, expressando em termos de taxas temos

$$\frac{D}{Dt}(K + \mathcal{E}) = \dot{Q} + \dot{W} \quad (2.14)$$

em que  $\dot{Q}$  e  $\dot{W}$  são taxas temporais de  $Q$  e  $W$ .

Definimos a variação de calor, pelo vetor fluxo de calor  $\mathbf{q}$  (com componentes  $q_1, q_2, q_3$ ),  $dS$  como um elemento de superfície do corpo e  $n_i$  como um vetor unitário normal. Então, a taxa na qual o calor é transmitido através da superfície  $dS$  na direção de  $n_i$  será representada por  $q_i n_i dS$ . Portanto, a taxa de calor que entra será

$$\dot{Q} = - \int_S q_i n_i dS = - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV,$$

onde o sinal menos indica que o calor fornecido ao corpo é positivo.

A taxa do trabalho feito pelo sistema é representado pela soma da potência da força por unidade de volume  $F_i$  em  $V$  e da potência da força de tensão  $T_i^n$

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \int_V F_i u_i dV + \int_S T_i^n u_i dS \\ &= \int_V F_i u_i dV + \int_S \tau_{ij} n_j u_i dS \\ &= \int_V F_i u_i dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} dV.\end{aligned}$$

Substituindo as expressões de  $K$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\dot{Q}$  e  $\dot{W}$  na equação (2.14) deveremos ter

$$\frac{D}{Dt} \left[ \int_V \frac{1}{2} \rho u_i u_i dV + \int_V \rho \epsilon dV \right] = - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV + \int_V F_i u_i dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} dV,$$

e com o uso da equação (2.7) a equação anterior será dada por:

$$\begin{aligned}\int_V \left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{D}{Dt} (\rho \epsilon) + \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + (\rho \epsilon) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] dV = \\ - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV + \int_V F_i u_i dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} dV.\end{aligned}$$

A equação anterior é tomada num volume arbitrário e como os integrandos dos dois lados são iguais, obtemos a expressão abaixo

$$\frac{1}{2} \rho \frac{Du^2}{Dt} + \frac{u^2}{2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{u^2}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho \frac{D\epsilon}{Dt} + \epsilon \frac{D\rho}{Dt} + \rho \epsilon \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + F_i u_i + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.15)$$

Multiplicando-se a equação do momento (2.12) por  $u_i$  segue que

$$\rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i u_i. \quad (2.16)$$

Logo a equação (2.15) pode ser simplificada, com base nas equações (2.8) e (2.16) e na relação

$$\rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{Du^2}{Dt},$$

resultando em

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.17)$$

que representa a forma final da equação de balanço da energia interna específica. <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Esta equação pode conter ainda um termo devido a radiação, porém para os nossos propósitos este pode ser considerado nulo.

## 2.5 Equações Constitutivas

Vamos recapitular as equações de balanço fundamentais do comportamento termodinâmico de um corpo. Elas são a equação da continuidade,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

a equação de balanço de momento linear,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i,$$

e a equação de balanço de energia interna específica,

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Portanto, as equações de balanço acima, obtidas anteriormente, formam um sistema fechado de equações diferenciais parciais para a densidade  $\rho$ , a velocidade  $u_i$  e a energia interna  $\epsilon$ , se conhecermos o tensor tensão  $\tau_{ij}$  e o vetor fluxo de calor  $q_i$  como funções de  $\rho$ ,  $u_i$  e  $\epsilon$ . Estas equações que faltam para tornar um problema termomecânico determinado são as chamadas equações constitutivas [46].

As equações constitutivas devem obedecer a determinadas condições gerais. Primeiramente, estas equações incluem constantes ou funções as quais caracterizam o material em consideração, e estas quantidades apresentam dimensões de forma que a homogeneidade dimensional da equação deverá ser satisfeita. Por segundo, exige-se que estas equações sejam indiferentes a mudanças de sistemas de referência. E ainda, na determinação do tensor tensão e do vetor fluxo de calor num ponto  $\mathbf{x}$ , a ação de outras partículas situadas além de uma certa vizinhança arbitrária de  $\mathbf{x}$ , pode ser desprezada.

Iremos considerar que o contínuo em estudo é um gás ideal monoatômico viscoso e condutor de calor e iremos empregar a densidade  $\rho$ , a velocidade  $u_j$  e a temperatura  $T$  ao invés da densidade  $\rho$ , da velocidade  $u_j$  e da energia interna específica  $\epsilon$  como campos básicos.

Representando o tensor tensão por  $\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \sigma_{ij}$  onde  $P$  é a pressão hidrostática e  $\sigma_{ij}$  o tensor viscoso, as equações constitutivas para o tensor viscoso, fluxo de calor e energia interna específica para um gás ideal monoatômico viscoso e condutor de calor são dadas através de:

$$\sigma_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right], \quad (2.18)$$

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.19)$$

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T. \quad (2.20)$$

A equação (2.18) representa a equação de um fluido Newtoniano sem o coeficiente de viscosidade volumétrica, desde que se esteja tratando de um gás monoatômico ideal. A equação (2.19) refere-se à Lei de Fourier com o coeficiente de condutividade térmica  $\kappa$  dado em termos do coeficiente de viscosidade de cisalhamento  $\mu$  através da equação abaixo [47]

$$\kappa = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \mu. \quad (2.21)$$

Para um gás ideal monoatômico tanto o coeficiente de condutividade térmica  $\kappa$  quanto o coeficiente de viscosidade de cisalhamento  $\mu$ , dependem apenas da temperatura  $T$ . A equação (2.20) representa a equação de estado da energia para um gás ideal monoatômico.

## 2.6 Equações de Campo em Coordenadas Cilíndricas

Como o problema a ser proposto adiante envolve simetria axial, a geometria adotada será a cilíndrica. Iremos adotar a seguinte notação para as coordenadas cilíndricas  $(r', \varphi', z')$  e para as componentes da velocidade escreveremos  $(u'_r, u'_\varphi, u'_z)$ . As componentes do tensor viscoso (2.18) e do vetor fluxo de calor (2.19) em coordenadas cilíndricas [48] são dadas por:

$$\sigma'_{rr} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u'_r}{\partial r'} - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{u}') \right], \quad (2.22)$$

$$\sigma'_{\varphi\varphi} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{u'_r}{r'} \right) - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{u}') \right], \quad (2.23)$$

$$\sigma'_{zz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u'_z}{\partial z'} - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{u}') \right], \quad (2.24)$$

$$\sigma'_{r\varphi} = \sigma'_{\varphi r} = \mu \left[ r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} \right], \quad (2.25)$$

$$\sigma'_{\varphi z} = \sigma'_{z\varphi} = \mu \left[ \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} \right], \quad (2.26)$$

$$\sigma'_{zr} = \sigma'_{rz} = \mu \left[ \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right], \quad (2.27)$$

$$q_r = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r'}, \quad (2.28)$$

$$q_\varphi = -\kappa \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad (2.29)$$

$$q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z'}, \quad (2.30)$$

onde o divergente do vetor velocidade em coordenadas cilíndricas é representado por

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'}.$$

A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas  $(r', \varphi', z')$  é escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (\rho r' u'_r) + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} (\rho u'_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z'} (\rho u'_z) = 0. \quad (2.31)$$

Segundo as considerações acima a equação do momento transforma-se para a forma abaixo: componente  $r'$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u'_r}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} - \frac{u'^2_\varphi}{r'} + u'_z \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right) = \\ & - \frac{\partial P}{\partial r'} + \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \sigma'_{rr}) + \frac{1}{r'} \frac{\partial \sigma'_{r\varphi}}{\partial \varphi'} - \frac{\sigma'_{\varphi\varphi}}{r'} + \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial z'} \right) + F_r, \end{aligned} \quad (2.32)$$

componente  $\varphi'$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u'_\varphi}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{u'_r u'_\varphi}{r'} + u'_z \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} \right) = \\ & - \frac{1}{r'} \frac{\partial P}{\partial \varphi'} + \left( \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} (r'^2 \sigma'_{r\varphi}) + \frac{1}{r'} \frac{\partial \sigma'_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \sigma'_{\varphi z}}{\partial z'} \right) + F_\varphi, \end{aligned} \quad (2.33)$$

componente  $z'$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u'_z}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} + u'_z \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) = \\ & - \frac{\partial P}{\partial z'} + \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \sigma'_{rz}) + \frac{1}{r'} \frac{\partial \sigma'_{\varphi z}}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z'} \right) + F_z. \end{aligned} \quad (2.34)$$

E a equação da energia será

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u'_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial \epsilon}{\partial \varphi'} + u'_z \frac{\partial \epsilon}{\partial z'} \right) = - \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' q_r) + \frac{1}{r'} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{\partial q_z}{\partial z'} \right] \\ & - P \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) + \left( \sigma'_{rr} \frac{\partial u'_r}{\partial r'} + \sigma'_{\varphi\varphi} \frac{1}{r'} \left( \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + u'_r \right) + \sigma'_{zz} \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) \\ & + \left( \sigma'_{r\varphi} \left[ r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} \right] + \sigma'_{rz} \left( \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right) + \sigma'_{\varphi z} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} + \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Trabalhando com a equação de momento (2.32)-(2.34), não considerando a força externa, podemos escrevê-la com base nas equações constitutivas (2.22)-(2.27) como sendo componente  $r'$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u'_r}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} - \frac{u'^2_\varphi}{r'} + u'_z \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r'} \\ & + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{\mu}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) \right) - \frac{2}{r'} u'_r \frac{\partial \mu}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} - \frac{2}{3} \mu r' \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) \\ & + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \left( \mu r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) + \frac{\mu}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} \right) - \frac{4}{3} \frac{\mu}{r'^2} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial z'} \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \mu \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z' \partial r'} + \frac{\partial \mu}{\partial z'} \frac{\partial u'_r}{\partial z'} + \mu \frac{\partial^2 u'_r}{\partial z'^2}, \quad (2.36)$$

componente  $\varphi'$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u'_\varphi}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{u'_r u'_\varphi}{r'} + u'_z \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} \right) &= -\frac{1}{r'} \frac{\partial P}{\partial \varphi'} \\ &+ \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[ \mu r'^3 \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) + \mu r' \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} \right] \\ &+ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \left[ \frac{4}{3} \frac{\mu}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{r'} u'_r - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u'_r}{\partial r'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) \right] + \frac{1}{z'} \left[ \mu \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} + \frac{\mu}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

componente  $z'$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u'_z}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} + \frac{u'_z u'_z}{r'} + u'_z \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z'} \\ &+ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \mu \left( \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right) \right) + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \left[ \mu \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} + \frac{\mu}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} \right] \\ &+ \frac{1}{z'} \left[ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u'_z}{\partial z'} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{r'} \left( \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ainda, a equação da energia (2.35) poderá também ser reescrita, onde sua expressão será dada na forma

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{k}{m} \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u'_r \frac{\partial T}{\partial r'} + \frac{u'_\varphi}{r'} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} + u'_z \frac{\partial T}{\partial z'} \right) &= \\ &- \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \kappa \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z'} \right) \right] \\ &- P \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) + \mu \left[ 2 \frac{\partial u'_r}{\partial r'} - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{u}') \right] \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \\ &+ \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + \frac{u'_r}{r'} \right) - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{u}') \right] \frac{1}{r'} \left( \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} + u'_r \right) + \mu \left[ 2 \frac{\partial u'_z}{\partial z'} - \frac{2}{3} (\nabla' \cdot \mathbf{u}') \right] \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \\ &+ \mu \left[ r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} \right] \left[ r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi'} \right] + \mu \left[ \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right] \left( \frac{\partial u'_z}{\partial r'} + \frac{\partial u'_r}{\partial z'} \right) \\ &+ \mu \left[ \frac{\partial u'_\varphi}{\partial z'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} \right] \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial u'_z}{\partial \varphi'} + \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi'} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Então temos um sistema de equações diferenciais para  $\rho, T$  e  $\mathbf{u}'$  formado pelas equações (2.31), (2.36)-(2.38), (2.39) que pode ser resolvido desde que as condições de contorno sejam conhecidas para estes campos.

# Capítulo 3

## Fundamentos da Teoria Cinética dos Gases

### 3.1 Equação de Boltzmann

Consideremos um gás monoatômico constituído de  $N$  partículas que está contido num recipiente de volume  $V$ . Podemos especificar uma partícula através de um ponto num espaço de seis dimensões determinado por três coordenadas de posição  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$  e três coordenadas de velocidade  $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ .

Neste espaço o sistema de  $N$  partículas será descrito por  $N$  pontos com coordenadas  $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)$  com  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . Este espaço hexa-dimensional será denominado de espaço de fase  $\mu$ .

O estado do gás no espaço de fase  $\mu$  é caracterizado por uma função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , tal que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3$$

nos dá o número de partículas que, no tempo  $t$ , encontram-se no elemento de volume entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  e com velocidades entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ .

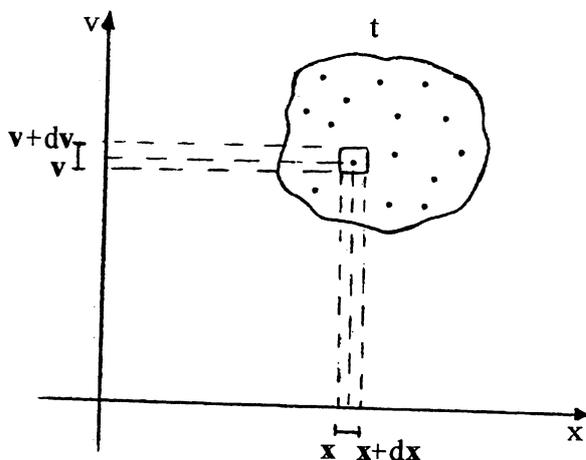


Figura 3.1: Espaço de fase  $\mu$

Denotaremos o elemento de volume no espaço de fase no instante de tempo  $t$  por

$$d\mu(t) = dx dv.$$

O número de partículas que estão neste elemento de volume no instante de tempo  $t$  é

$$N(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mu(t).$$

No instante de tempo  $t + \Delta t$  o elemento no espaço de fase será denotado por  $d\mu(t + \Delta t)$  e o número de partículas neste elemento é dado por

$$N(t + \Delta t) = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t).$$

Se não houvesse colisões entre as partículas,  $N(t)$  seria igual a  $N(t + \Delta t)$ , porém as colisões entre as partículas produzem uma mudança no número de partículas.

Como existem colisões a diferença entre o número de partículas passa a ser representado por

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) \\ &= f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, t + \Delta t) d\mu(t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Consideremos que as partículas do gás estão sujeitas a uma força externa  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  específica. A relação entre  $d\mu(t + \Delta t)$  e  $d\mu(t)$  é dada através do Jacobiano de transformação

$$d\mu(t + \Delta t) = |J| d\mu(t),$$

onde

$$J = \frac{\partial (x_1(t + \Delta t), x_2(t + \Delta t), \dots, v_3(t + \Delta t))}{\partial (x_1(t), x_2(t), \dots, v_3(t))}.$$

Tendo que

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i \Delta t \quad v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + F_i \Delta t \quad i = 1, 2, 3$$

podemos escrever o Jacobiano como sendo

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_1}{\partial v_1} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_1}{\partial v_2} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_1}{\partial v_3} \Delta t \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_2}{\partial v_1} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_2}{\partial v_3} \Delta t \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_3}{\partial v_1} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_3}{\partial v_2} \Delta t & 1 + \frac{\partial F_3}{\partial v_3} \Delta t \end{pmatrix},$$

e considerando até os termos lineares em  $\Delta t$  obtemos

$$J \approx 1 + \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2].$$

Então concluímos que

$$d\mu(t + \Delta t) = \left( 1 + \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \Delta t \right) d\mu(t).$$

Por outro lado expandindo em série de Taylor  $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, t + \Delta t)$  em torno do ponto  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  e considerando somente termos lineares em  $\Delta t$  temos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, t + \Delta t) \\ \approx f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial v_i} \Delta v_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t, \end{aligned}$$

onde

$$\Delta x_i = v_i \Delta t, \quad \Delta v_i = F_i \Delta t.$$

De forma que  $\Delta N$  resulta como sendo

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) \\ &\approx \left[ f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \Delta t + \frac{\partial f}{\partial v_i} F_i \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right] \left( 1 + \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \Delta t \right) d\mu(t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mu(t), \end{aligned}$$

e estamos apto a calcular o valor de  $\Delta N$  dado por

$$\Delta N \approx \left[ f \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \Delta t + \frac{\partial f}{\partial v_i} F_i \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right] d\mu(t),$$

e dividindo a expressão acima por  $\Delta t$  vem

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial f F_i}{\partial v_i} \right] d\mu(t), \quad (3.1)$$

isto é, temos a variação do número de partículas em relação ao tempo que envolve derivada temporal, espacial e das velocidades da função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ .

A quantidade  $\frac{\Delta N}{\Delta t}$  só será nula para o caso em que não existirem colisões entre as partículas. Portanto iremos determinar  $\Delta N$  com base em quatro hipóteses:

- Para um gás rarefeito somente as interações entre os pares de partículas (colisões binárias) são levadas em consideração, pois a probabilidade de ocorrer colisões ternárias ou quaternárias é muito pequena em relação as colisões binárias.
- As forças externas durante a colisão podem ser desprezadas, isto é, o efeito das forças externas sobre as partículas durante a colisão é pequeno em comparação com as forças que agem entre as partículas.

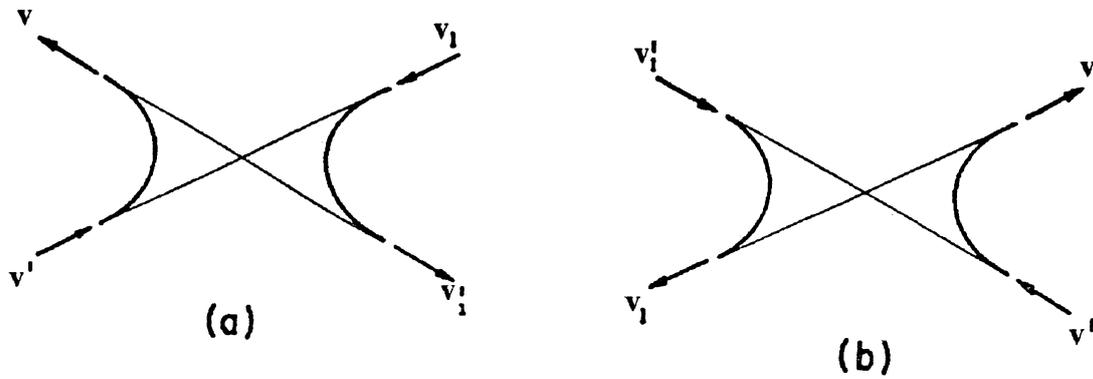


Figura 3.2: Colisões direta (a) e de restituição (b)

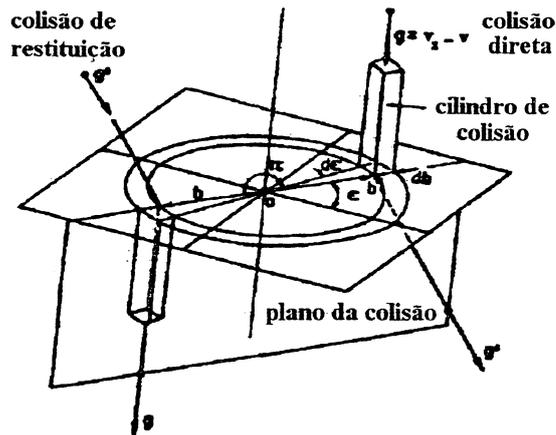


Figura 3.3: Geometria de uma colisão binária

- Não existe correlação entre as velocidades das partículas. Esta suposição é conhecida como a suposição do caos molecular.
- A variação da função de distribuição não é grande durante o intervalo de tempo de duração de uma colisão mas somente durante o tempo entre as colisões.

Consideremos duas partículas do gás cujas velocidades assintóticas pré-colisionais são denotadas por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_1$  e as velocidades pós-colisionais por  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}'_1$ .

Na Figura 3.3 a partícula com velocidade  $\mathbf{v}$  está no ponto  $O$ , enquanto que a outra partícula está se aproximando do plano segundo um ângulo reto e com velocidade relativa  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ . Este movimento relativo é ainda caracterizado pelo parâmetro de impacto  $b$  e pelo ângulo azimutal  $\epsilon$ .

Assim o volume do cilindro, chamado de cilindro de colisão, no intervalo de tempo  $\Delta t$  será dado pelo produto da área da base  $b db d\epsilon$  pela altura  $g\Delta t$ . Podemos então dizer que, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , todas as partículas com velocidades entre  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$  e que se encontram no cilindro de colisão, irão colidir com as partículas com velocidades entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  localizadas

no elemento de volume  $d\mathbf{x}$  em torno do ponto  $O$ . O número das partículas com velocidade entre  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$  no cilindro de colisão é dado por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1 g \Delta t b db d\epsilon.$$

Estas partículas irão colidir com todas as partículas com velocidades entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  e que se encontram no elemento de volume  $d\mathbf{x}$  em torno de  $O$ , isto é,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Logo vamos querer a variação com o tempo para uma orientação  $\epsilon$  e para um determinado valor de  $b$ , onde para isto teremos que integrar sobre todos os valores do parâmetro de impacto  $b$  com variação de  $0$  a  $+\infty$ , sobre o ângulo azimutal  $\epsilon$  variando de  $0$  a  $2\pi$  e sobre todas as componentes da velocidade  $\mathbf{v}_1$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  teremos

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^- = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mu(t). \quad (3.2)$$

Na equação anterior representamos somente por um símbolo de integração todas as cinco integrais descritas anteriormente, onde  $\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^-$  denota a saída das partículas, que estavam com velocidade  $\mathbf{v}$  do elemento de volume  $d\mu(t)$ .

Porém, há colisões que criam pontos com velocidade  $\mathbf{v}$  no elemento de volume  $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ . Então ao se considerar a análise anterior podemos afirmar que a densidade do número total de colisões que ocorrem no elemento de volume  $d\mathbf{x}$  e tempo  $\Delta t$  é dada por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) b' db' d\epsilon' g' \Delta t d\mathbf{v}'_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}'.$$

Iremos usar relações obtidas através da conservação de energia, conservação de momento angular representadas por  $g' = g$  e  $b' = b$ , respectivamente, e considerar que  $\epsilon$  representa apenas uma translação  $d\epsilon' = d\epsilon$ . Além disso, como o Jacobiano da transformação de velocidades é unitário, temos que  $d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}$  e podemos escrever a equação anterior na forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) b db d\epsilon g \Delta t d\mathbf{x} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}.$$

Logo, a densidade do número total de colisões por intervalo de tempo  $\Delta t$ , que cria pontos no espaço de fase  $\mu$  com velocidade  $\mathbf{v}$  no elemento de volume  $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ , é expressa como

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^+ = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mu(t). \quad (3.3)$$

Com base nos resultados (3.1), (3.2) e (3.3) temos que  $\Delta N$  é representada pela diferença entre as partículas ganhas e perdidas no elemento de volume  $d\mu(t)$ , o que resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f F_i}{\partial v_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 = Q(f, f), \quad (3.4)$$

que é denominada de equação de Boltzmann. Na equação (3.4) foram introduzidas abreviações para  $f'_1$ ,  $f'$ ,  $f_1$  e  $f$  representadas por  $f'_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)$ ,  $f' \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)$ ,  $f_1 \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)$ ,  $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , respectivamente.

Esta equação (3.4), é uma equação integro-diferencial não linear para a função de distribuição  $f$ . Observemos que a equação de Boltzmann [33] foi deduzida para o caso de gases monoatômicos e em muitos casos  $\mathbf{F}$  não depende de  $\mathbf{v}$ , como por exemplo o caso da força de atração gravitacional e neste caso (3.4) se reduz a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 = Q(f, f). \quad (3.5)$$

## 3.2 A Equação de Transferência

A equação de Boltzmann é uma função da posição, da velocidade das partículas e do tempo através da função de distribuição .

Seja  $\psi = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  uma função arbitrária. Se multiplicarmos a equação de Boltzmann (3.5) pela função  $\psi$  e integrarmos sobre todos os valores de  $\mathbf{v}$  teremos uma integral em função da posição  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$  que são quantidades macroscópicas.

Então

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int \psi v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathbf{v} + \int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = \int \psi (f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}. \quad (3.6)$$

Agora iremos começar a fazer transformações na equação (3.6) mas para isto vamos inicialmente considerar os três primeiros termos da equação acima:

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial f \psi}{\partial t} d\mathbf{v} - \int f \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\mathbf{v} - \int f \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{v}, \quad (3.7)$$

$$\int \psi v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial \psi v_i f}{\partial x_i} d\mathbf{v} - \int f v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi v_i f d\mathbf{v} - \int f v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\mathbf{v}, \quad (3.8)$$

$$\int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial \psi F_i f}{\partial v_i} d\mathbf{v} - \int F_i f \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\mathbf{v}. \quad (3.9)$$

Na primeira integral do lado direito da equação (3.9) devemos notar que a derivada é em relação a  $v_i$  e a integral em relação a  $\mathbf{v}$ , logo não podemos passar para fora do integrando a derivada parcial. Usando o teorema da divergência de Gauss onde  $\mathbf{n}$  é a normal unitária

$$\int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial \psi F_i f}{\partial v_i} d\mathbf{v} - \int F_i f \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\mathbf{v} = \oint_S \psi F_i f n_i dS - \int F_i f \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\mathbf{v}.$$

Na integral  $\oint_S \psi F_i f n_i dS$ ,  $dS$  representa o elemento de área de uma superfície que está situada em pontos infinitamente distantes no espaço das velocidades. Assim a nulidade desta integral resulta do fato da função de distribuição  $f$  decrescer rapidamente para grandes valores da velocidade. Portanto

$$\int \psi F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = - \int F_i f \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\mathbf{v}. \quad (3.10)$$

Vamos analisar o lado direito da equação (3.6),

$$\int \psi f'_1 f' g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v} = \int \psi' f_1 f g' b' db' d\epsilon' d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}' = \int \psi' f_1 f g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}, \quad (3.11)$$

onde a relação (3.11) foi obtida levando-se em conta as equações válidas para uma colisão de restituição, isto é,

$$g' = g, \quad b' = b, \quad d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}' = d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}, \quad d\epsilon' = d\epsilon.$$

Então

$$\begin{aligned} \int \psi(f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v} &= \int (\psi' - \psi) f_1 f g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \int (\psi - \psi')(f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por outro lado, se mudarmos o papel das partículas que colidem, isto é, se trocarmos  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  por  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1)$  temos que

$$\frac{1}{2} \int (\psi - \psi')(f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \int (\psi_1 - \psi'_1)(f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}. \quad (3.13)$$

Concluimos, através das equações (3.7), (3.8), (3.10), (3.12) e (3.13) que a equação (3.6) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathbf{v} - \int \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{v} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\mathbf{v} + F_i \frac{\partial \psi}{\partial v_i} d\mathbf{v} \right] f d\mathbf{v} \\ = \frac{1}{4} \int (\psi_1 + \psi - \psi'_1 - \psi)(f'_1 f' - f_1 f) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

que é conhecida como a equação de transporte.

### 3.3 Equações de Balanço

Na teoria cinética as quantidades que caracterizam o estado macroscópico de um gás são definidas a partir da função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . Vamos considerar como campos básicos os campos definidos pelos momentos da função de distribuição.

A primeira propriedade de uma partícula é a massa cuja integral do produto da massa da partícula pela função de distribuição integrada sobre todas as velocidades nos fornece a massa por unidade de volume, isto é, a densidade,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int m f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.15)$$

A cada partícula de massa  $m$  associamos uma velocidade onde a integral do produto da massa pela velocidade da partícula e pela função de distribuição integrada sobre todas as velocidades nos fornece a densidade do momento linear,

$$\rho u_i(\mathbf{x}, t) = \int m v_i f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.16)$$

E ainda podemos ter a densidade de energia total representada por

$$\rho e(\mathbf{x}, t) = \int \frac{1}{2} m v^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.17)$$

pois  $\frac{1}{2} m v^2$  é a energia cinética de uma partícula. Portanto com base nas quantidades microscópicas  $m, m v_i$  e  $\frac{1}{2} m v^2$  definiu-se a densidade de massa  $\rho$ , a densidade de momento linear  $\rho u_i$  e a densidade de energia  $\rho e$  através das equações (3.15), (3.16), (3.17), respectivamente.

Sendo  $v_i$  a velocidade de uma partícula e  $u_i$  a velocidade do gás, pode-se definir  $V_i = v_i - u_i$  como a velocidade peculiar que representa a diferença entre uma velocidade microscópica  $v_i$  e uma velocidade macroscópica  $u_i$  que é a velocidade do gás.

Para qualquer função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$

$$\int V_i f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 0, \quad (3.18)$$

que é provada com o uso da definição da velocidade peculiar, ou seja,

$$\int (v_i - u_i) f d\mathbf{v} = \int v_i f d\mathbf{v} - u_i \int f d\mathbf{v} = \frac{\rho u_i}{m} - u_i \frac{\rho}{m} = 0.$$

A densidade de energia total dada pela equação (3.17) pode ser separada como a soma de duas energias,

$$\rho e = \int \frac{1}{2} m (V^2 + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} + u^2) f d\mathbf{v},$$

onde a integral envolvendo a quantidade  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}$  é nula devido a equação (3.18). Portanto

$$\rho e = \frac{1}{2} \int m V^2 f d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int m u^2 f d\mathbf{v},$$

$$\rho e = \frac{1}{2} \int m V^2 f d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

onde  $\frac{1}{2} \int m V^2 f d\mathbf{v}$  representa a densidade de energia interna e  $\frac{1}{2} \rho u^2$  representa a densidade de energia cinética translacional.

Podemos ainda representar a densidade da energia interna por

$$\rho \epsilon = \frac{1}{2} \int m V^2 f d\mathbf{v}, \quad (3.19)$$

onde  $\epsilon$  representa a energia interna específica.

Então os momentos da função de distribuição são dados pelas equações (3.15)-(3.17), enquanto que o momento da função de distribuição de ordem  $N$  é definido através de

$$p_{i_1 i_2 \dots i_N}(\mathbf{x}, t) = \int m V_{i_1} V_{i_2} \dots V_{i_N} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

que representa um tensor simétrico em todos os índices.

O momento de ordem zero é a densidade de massa, enquanto que o momento de primeira ordem é nulo como consequência da equação (3.18) multiplicada pela massa da partícula. O momento de segunda ordem é chamado de tensor pressão dado por

$$p_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int m V_i V_j f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

O tensor pressão é igual ao tensor tensão em módulo, ou seja  $\tau_{ij} = -p_{ij}$ . O tensor viscoso  $\sigma_{ij}$  é definido por

$$\sigma_{ij} = P\delta_{ij} - m \int V_i V_j f d\mathbf{v}. \quad (3.20)$$

O momento de terceira ordem é representado por

$$p_{ijk}(\mathbf{x}, t) = \int m V_i V_j V_k f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

que não tem denominação. Uma contração importante do momento de terceira ordem é o vetor fluxo de calor expresso como

$$q_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} p_{jji} = \frac{1}{2} \int V^2 V_i f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.21)$$

A soma dos elementos da diagonal principal esta associada com a pressão do gás  $P$  através da expressão

$$p_{jj} = \int m V^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 3P(\mathbf{x}, t). \quad (3.22)$$

Com a representação da energia interna sendo dada pela equação (3.19), concluímos que

$$P = \frac{2}{3} \rho \epsilon.$$

Por outro lado, a equação que relaciona a pressão  $P$  com a densidade  $\rho$  e a temperatura absoluta  $T$  é denominada de equação de estado térmica, onde para um gás clássico ideal é expressa por

$$P = \rho \frac{k}{m} T.$$

Conseqüentemente, a temperatura absoluta para um gás clássico monoatômico é dada por

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{k} \frac{P}{\rho} = \frac{2}{3} \frac{m}{k} \epsilon = \frac{m}{3\rho k} \int m V^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Os momentos de ordem superior não têm nomes próprios específicos.

Uma interpretação para o tensor tensão é que ele representa um transporte de momento linear por se tratar de um produto entre o momento linear e uma velocidade, por outro lado o transporte de energia é dado pelo vetor fluxo de calor onde o fator  $\frac{1}{2} m V^2$  esta relacionado com a energia.

Agora podemos obter as equações de balanço de massa, momento linear e energia a partir da equação de transporte (3.14). Primeiramente, obtemos o balanço da densidade de massa

substituindo  $\psi = m$  na equação de transporte. Com o uso das equações (3.15) e (3.16), resulta de uma forma simples

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3.23)$$

que é a equação da continuidade.

A seguir, o balanço da densidade de momento linear vem da substituição de  $\psi = mv_i$  na equação de transporte. Considerando que

$$mv_i v_j = m(V_i V_j + V_i u_j + V_j u_i + u_i u_j) \quad \text{e} \quad F_j \frac{\partial m v_i}{\partial v_j} = m F_j \delta_{ij} = m F_i$$

e as equações (3.16), (3.23) e (3.15), conclui-se que

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \tau_{ij}) = \rho F_i. \quad (3.24)$$

Para se obter o balanço da densidade de energia substitui-se  $\psi = \frac{1}{2} m v^2$  na equação de transporte. Transformando  $v^2 v_j$  em velocidade peculiar

$$v^2 v_j = (V^2 + 2V_k u_k + u^2)(V_j + u_j),$$

$$F_j \frac{\partial \frac{1}{2} m v^2}{\partial v_j} = F_j \frac{\partial \frac{1}{2} m v_k v_k}{\partial v_j} = m F_j v_k \delta_{kj} = m F_j v_j$$

e usando as equações (3.16), (3.21), (3.22), (3.24) encontra-se facilmente a expressão

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} u^2 \right) u_i + q_i - \tau_{ij} u_j \right] = \rho F_i u_i. \quad (3.25)$$

Outras formas alternativas podem ser encontradas, como por exemplo o balanço da energia interna específica. Vide a equação (2.17) do capítulo 2.

Em resumo, temos a teoria dos 5 campos escalares  $\rho$ ,  $u_i$  e  $\epsilon$ , representados através das equações

$$\rho = \int m f d\mathbf{v},$$

$$\rho u_i = \int m v_i f d\mathbf{v},$$

$$\rho e = \int \frac{1}{2} m v^2 f d\mathbf{v},$$

onde as leis de balanço são as mesmas da termodinâmica do contínuo.

Para determinarmos estes 5 campos é necessário encontrarmos as equações constitutivas da teoria cinética que relacionem os termos constitutivos  $(\rho, u_i, T)$  com as grandezas  $(\epsilon, q_i, p_{ij})$ .

### 3.4 Equações Constitutivas em Teoria Cinética

A idéia básica do método de Chapman-Enskog é dividir a função de distribuição em dois termos aditivos. O primeiro termo consiste de uma função de distribuição de Maxwell que nos dá os valores locais da densidade, velocidade e temperatura. Este termo corresponde à primeira aproximação para a função de distribuição. O segundo termo consiste de um desvio da função de distribuição de Maxwell e corresponde à segunda aproximação para a função de distribuição. Dele resultam as grandezas de transporte que estão relacionadas com o tensor viscoso  $\sigma_{ij}$  e com o fluxo de calor  $q_i$ . Então como resultado obtemos [47]

$$\sigma_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \delta_{ij} \right], \quad (3.26)$$

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.27)$$

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{1}{\Omega^{(2,2)}} \left( \frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2}, \quad (3.28)$$

$$\kappa = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \mu = \frac{75}{64} \frac{k}{m} \frac{1}{\Omega^{(2,2)}} \left( \frac{mkT}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

As equações constitutivas (3.26), (3.27) representam, respectivamente, as leis de Navier-Stokes e Fourier. Os coeficientes  $\mu$  e  $\kappa$  são denominados genericamente como coeficiente de transporte, pois estão associados, respectivamente, ao transporte de momento linear e energia.  $\mu$  é conhecido como coeficiente de viscosidade de cisalhamento enquanto que  $\kappa$  como coeficiente de condutividade térmica.  $\Omega^{(2,2)}$  representa a integral dada na forma geral abaixo que depende do tipo de interação entre as partículas

$$\Omega^{(l,r)} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\gamma^2} \gamma^{2r+3} (1 - \cos^l \chi) b \, db \, d\gamma,$$

onde  $\chi$  é o ângulo de espalhamento,  $\gamma = \left( \frac{m}{4kT} \right)^{1/2} g$  e  $g$  é o mesmo da seção 3.1. Para o potencial de esfera rígida  $\Omega^{(2,2)} = a^2$ , onde  $a$  é o diâmetro da partícula.

### 3.5 Modelos Cinéticos BGK e Shakov

A principal dificuldade matemática apresentada na equação de Boltzmann está associada com o termo de colisão. Muitas alternativas são analisadas com o objetivo de simplificar o termo de colisão facilitando assim a solução da equação de Boltzmann.

Expressões mais simples para este termo tem sido propostas por diversos autores. Estas são conhecidas como modelo de colisão e a equação de Boltzmann na qual o termo de colisão é substituído por um modelo passa a ser chamada de equação modelo [50, 51] ou modelo cinético.

A idéia por detrás desta substituição é facilitar a resolução da equação de Boltzmann de forma a fornecer resultados satisfatórios, isto é, as equações modelo devem apresentar bons resultados quando comparados com os resultados da solução da equação exata de Boltzmann [52]. Assim o termo de colisão  $Q(f, f)$  poderá ser substituído por um operador  $J(f)$  o qual conserva as seguintes propriedades:

i) Como o termo de colisão satisfaz as equações:

$$\int mQ(f, f) d\mathbf{v} = 0, \quad \int mv_k Q(f, f) d\mathbf{v} = 0, \quad \int mv^2 Q(f, f) d\mathbf{v} = 0,$$

então o operador de colisão deve obedecer as mesmas condições de invariância:

$$\int mJ(f) d\mathbf{v} = 0, \quad \int mv_k J(f) d\mathbf{v} = 0, \quad \int mv^2 J(f) d\mathbf{v} = 0, \quad (3.30)$$

as quais expressam a conservação de massa, momento linear e energia, respectivamente.

ii) Como o termo de colisão tem a propriedade

$$\int \ln(f) Q(f, f) d\mathbf{v} \leq 0,$$

que está ligada ao teorema  $H$ , o operador  $J(f)$  deve também ter a propriedade

$$\int \ln(f) J(f) d\mathbf{v} \leq 0. \quad (3.31)$$

A demonstração da desigualdade da equação (3.31) será feita adiante, após a representação de  $J(f)$ .

De todos os modelos existentes, o modelo mais conhecido é o BGK [34, 53] proposto por Bhatnagar, Gross e Krook [49]. Eles sugeriram uma representação para o operador  $J(f)$  proporcional à diferença entre a função de distribuição e seu valor em equilíbrio que satisfaz a equação (3.30) e a desigualdade (3.31). Desta forma a equação de Boltzmann passa a ser escrita pela equação modelo abaixo

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = -\nu(f - f_M),$$

onde a quantidade  $\nu$  representa a frequência de colisão.  $f_M$  representa a Maxwelliana local determinada pela densidade local, velocidade média local e temperatura local

$$f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n(\mathbf{x}) \left( \frac{m}{2\pi kT(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m\mathbf{V}^2}{2kT(\mathbf{x})} \right]. \quad (3.32)$$

A frequência de colisão  $\nu$  pode ser escolhida por vários métodos. Sua dependência funcional é restrita, isto é, proporcional a densidade e deve depender da temperatura, mas é assumida ser independente da velocidade molecular.

• Primeiramente, pode-se escolher  $\nu$  para fornecer o valor correto para a viscosidade  $\mu$  ao se usar o método de Chapman-Enskog. Dentro desta consideração temos

$$\nu(\mathbf{x}, t) = \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\mu(T)}. \quad (3.33)$$

Notemos que  $\nu$  é uma quantidade local, pois a pressão é uma função da posição e do tempo e a viscosidade  $\mu$  também é uma função da posição e do tempo através da temperatura.

- Uma outra expressão que pode ser escolhida para a frequência de colisão é

$$\nu(\mathbf{x}, t) = \frac{5k}{2m} \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\kappa(\mathbf{x}, t)} = \frac{2}{3} \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\mu(T)}, \quad (3.34)$$

onde a relação (2.21) foi usada. Com a frequência de colisão dada pela equação (3.34), o operador  $J(f)$  substituído na equação (3.31) fornece corretamente a expressão para a condutividade térmica  $\kappa$  ao se resolver a equação modelo BGK.

- Mais uma representação para a frequência de colisão  $\nu$  é dada por

$$\nu = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \frac{4}{\pi} \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\mu(T)}, \quad (3.35)$$

onde as expressões para a velocidade térmica média

$$\langle v \rangle = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$

e para o livre caminho médio

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi} \mu}{2P} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

foram usados. A expressão (3.35) é obtida através do fato de que o tempo médio entre duas colisões sucessivas é igual a  $\frac{1}{\nu}$  e que esta razão é igual a  $\frac{\lambda}{\langle v \rangle}$ . Fisicamente é justificada esta escolha porém matematicamente a expressão (3.35) não fornece corretamente nem a viscosidade  $\mu$  e nem a condutividade térmica  $\kappa$ . Portanto, um ponto desfavorável desta equação modelo é que não se consegue determinar simultaneamente as expressões para a viscosidade  $\mu$  e a condutividade térmica  $\kappa$ , conseqüentemente o modelo BGK não fornece o número de Prandtl correto, pois a razão entre a condutividade térmica e a viscosidade é  $\frac{\kappa}{\mu} = \frac{5k}{2m}$ . O número de Prandtl é um parâmetro adimensional importante em problemas que tratam de fluidos viscosos e condutores de calor definido por

$$Pr = c_P \frac{\mu}{\kappa},$$

onde para um gás monoatômico, o calor específico a pressão constante é dado por  $c_P = \frac{5k}{2m}$ . Substituindo o coeficiente de condutividade térmica por  $\kappa = \frac{5k}{2m} \mu$  o modelo BGK fornece  $Pr=1$ . Se usarmos (2.21) para gases monoatômicos temos que  $Pr = \frac{2}{3}$ , que é a expressão correta.

Embora o modelo BGK apresente alguns problemas ele satisfaz o teorema  $H$ , o qual é demonstrado abaixo:

$$\int J(f) \ln(f) d\mathbf{v} = - \int \nu(f - f_M) \ln(f) d\mathbf{v} = - \int \nu f_M \left( \frac{f}{f_M} - 1 \right) \ln(f) d\mathbf{v}. \quad (3.36)$$

Como

$$\int f \ln(f_M) d\mathbf{v} = \int f_M \ln(f_M) d\mathbf{v},$$

pois  $\ln f_M$  é da forma  $a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{V} + dV^2$  onde  $a, \mathbf{b}$  e  $d$  não dependem de  $\mathbf{V}$ , devemos ter que

$$0 = \nu \int f_M \left( \frac{f}{f_M} - 1 \right) \ln(f_M) d\mathbf{v}. \quad (3.37)$$

Somando (3.36) com (3.37):

$$\int J(f) \ln(f) d\mathbf{v} = -\nu \int f_M \left( \frac{f}{f_M} - 1 \right) \ln \frac{f}{f_M} d\mathbf{v}.$$

Da relação

$$(x - 1) \ln x \geq 0,$$

temos que  $\int J(f) \ln(f) d\mathbf{v} \leq 0$  e assim fica provado o teorema H.

Um outro modelo conhecido como modelo "S" foi proposto por Shakov [35]. Este representa uma modificação no modelo BGK com o objetivo de fornecer o valor correto do número de Prandtl.

Para este modelo o operador  $J(f)$  tem a forma

$$J(f) = -\nu(f - f_R). \quad (3.38)$$

No modelo de Shakov adota-se que a frequência de colisão  $\nu$  é representada pela frequência de relaxação da tensão que é igual a razão  $\frac{P}{\mu}$ . Ainda,  $f_R$  representa uma função de distribuição de referência que depende da velocidade das partículas e dos momentos da função de distribuição. Ao se usar este modelo a desigualdade (3.31) é provada apenas para o modelo "S" linearizado. Entretanto as leis de conservação

$$\int \psi(v) J(f) d\mathbf{v} = 0, \quad \psi(v) = 1, m\mathbf{v}, \frac{mv^2}{2},$$

continuam válidas para o modelo linear e não-linear. Este modelo se propõe a apresentar a descrição de um modelo cinético para um gás ideal monoatômico que é compatível com a aproximação dos 13 Momentos de Grad. Uma aproximação dos 13 Momentos de Grad para um estado macroscópico de um gás ideal monoatômico é caracterizada pelos momentos da função de distribuição mostrados a seguir

$$n = \int f d\mathbf{v}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad (3.40)$$

$$T = \frac{m}{3nk} \int V^2 f d\mathbf{v}, \quad (3.41)$$

$$\sigma_{ij} = P\delta_{ij} - m \int V_i V_j f d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} m \int \mathbf{V} V^2 f d\mathbf{v}.$$

Então se propõe que a função de distribuição de referência seja expandida em um polinômio da função peculiar como

$$f_R = f_M \left( A + A_i V_i + A_{ij} V_i V_j + A'_i V_i V^2 \right), \quad (3.42)$$

onde  $A$ ,  $A_i$ ,  $A_{ij}$  e  $A'_i$  são coeficientes que dependem da posição e do tempo. Ainda,  $f_M$  representa a função Maxwelliana local dada pela equação (3.32). Uma especificação completa destes coeficientes poderá ser feita se exigirmos que os momentos de transferência colisionais sejam os mesmos do que os momentos dos termos de produção da equação de Boltzmann para um gás monoatômico. Isto é, impõe-se as seguintes condições

$$\begin{aligned} \int m V_i V_j J(f) d\mathbf{v} &= \nu \sigma_{ij}, \\ \int m V^2 V_i J(f) d\mathbf{v} &= -\frac{4}{3} \nu q_i. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Portanto substituindo a função de distribuição de referência dada pela expressão (3.42) na equação modelo para o operador  $J(f)$  (3.38) e usando as condições estabelecidas pelas equações (3.43) é possível determinar os coeficientes  $A$ ,  $A_i$ ,  $A_{ij}$  e  $A'_i$  cujos valores são dados a seguir:

$$A = 1, \quad A_i = -\frac{1}{3} \left( \frac{m}{kT} \right)^2 \frac{q_i}{\rho}, \quad A_{ij} = 0, \quad A'_i = \frac{1}{9} \left( \frac{m}{kT} \right)^3 \frac{q_i}{\rho}.$$

Para o modelo "S" a equação de Boltzmann terá a forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = -\frac{P}{\mu} \left( f - f_M \left( A + A_i V_i + A_{ij} V_i V_j + A'_i V_i V^2 \right) \right),$$

e substituindo as expressões para os coeficientes  $A$ ,  $A_i$ ,  $A_{ij}$  e  $A'_i$  teremos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{P}{\mu} \left( f_M \left[ 1 + \frac{8\beta^4}{15nm} \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} \left( \beta^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) \right] - f \right), \quad (3.44)$$

onde  $\beta = \left( \frac{m}{2kT} \right)^{1/2}$ .

Devido a geometria a ser considerada no nosso problema usaremos a equação de Boltzmann em coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$ , que pode ser obtida por transformação de coordenadas, representada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \frac{P}{\mu} \left( f_M \left[ 1 + \frac{8\beta^4}{15nm} \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} \left( \beta^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) \right] - f \right), \quad (3.45)$$

onde  $(v_r, v_\varphi, v_z)$  representa a velocidade da partícula em coordenadas cilíndricas.

Após a apresentação dos métodos BGK e Shakov podemos analisar a aplicabilidade destas equações modelo. Conclusões podem ser tiradas após comparações entre os resultados obtidos destas equações modelo com a resolução da equação exata de Boltzmann. Esta análise é feita cuidadosamente no artigo [52]. Resultados mostram que para qualquer fluxo de gás isotérmico os resultados fornecidos pelo modelo BGK são bem satisfatórios e que o modelo "S" é uma equação ideal para descrever o fluxo de um gás não isotérmico.

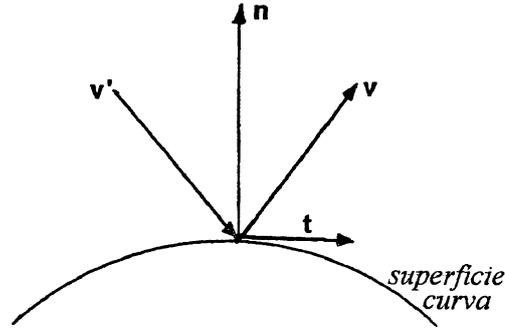


Figura 3.4: Superfície imóvel, reflete todas as partículas, tempo de interação pequeno

### 3.6 Saltos nas Condições de Contorno

Como já foi visto, a função de distribuição é uma função da posição, da velocidade e do tempo,  $f = f(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t)$ . Queremos estudar a interação de um gás monoatômico com uma superfície que delimita o gás de vetor normal  $\mathbf{n}$  e vetor tangencial  $\mathbf{t}$ .

Dado um ponto da superfície  $\mathbf{x}'$  podemos separar a função de distribuição em duas contribuições das partículas incidentes  $f^-$  e das partículas emitidas  $f^+$ :

$$f = f^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t) + f^-(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t),$$

onde as condições para a função  $f^+$  são

$$\begin{cases} f^+ = f & \text{se } v_n > 0, \\ f^+ = 0 & \text{se } v_n < 0, \end{cases}$$

e para a função  $f^-$  são

$$\begin{cases} f^- = 0 & \text{se } v_n > 0, \\ f^- = f & \text{se } v_n < 0. \end{cases}$$

Nas equações acima  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é a componente da velocidade normal à superfície.

Consideramos que a superfície está em repouso além de não absorver as partículas e que tudo acontece instantaneamente, isto é, o tempo que a partícula permanece na superfície é menor que o tempo característico da evolução da função de distribuição e cada partícula deixa a superfície no mesmo lugar que chegou.

Uma partícula que chega à superfície no ponto  $\mathbf{x}'$  com velocidade  $\mathbf{v}'$  é emitida com velocidade entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . A probabilidade de uma partícula que tem velocidade  $\mathbf{v}'$  antes da colisão ficar com uma velocidade no intervalo entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  depois da colisão com a superfície é representada por

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}', t) d\mathbf{v}$$

onde  $R$  é o núcleo de reflexão ou o núcleo de espalhamento, que depende do tipo de superfície e do tipo do gás.

O núcleo de espalhamento tem as seguintes propriedades para superfícies sem evaporação e condensação [47, 52]:

- a) O núcleo de espalhamento é não negativo  $R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \geq 0$ ;
- b) O núcleo de espalhamento é normalizado  $\int_{v_n > 0} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$ ;
- c) O núcleo de espalhamento satisfaz a lei de reciprocidade ou lei do balanço detalhado:

$$|v'_n| \exp\left(\frac{-mv'^2}{2kT_w}\right) R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = |v_n| \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT_w}\right) R(-\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}'),$$

onde  $T_w$  é a temperatura da superfície.

Uma interpretação física para a lei da reversibilidade é a seguinte: um gás que está em equilíbrio com a superfície tem uma função de distribuição das velocidades de Maxwell correspondente à uma temperatura da superfície  $T_w$  e neste caso o número de partículas espalhadas por unidade de área da superfície e por unidade de tempo no intervalo de velocidades entre  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}' + d\mathbf{v}'$  para o intervalo entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  é igual ao número de partículas espalhadas de um intervalo qualquer entre  $-\mathbf{v}$  e  $-\mathbf{v} - d\mathbf{v}$  para outro entre  $-\mathbf{v}'$  e  $-\mathbf{v}' - d\mathbf{v}'$ . Como consequência, temos que se a função de distribuição das partículas incidentes é Maxwelliana com  $T_w$  então ela não sofre nenhum distúrbio quando interage com a superfície de tal forma que a função de distribuição das partículas reemitidas também será Maxwelliana com  $T_w$ . Portanto se

$$f^- = f_M(T_w) \quad \text{então} \quad f^+ = f_M(T_w),$$

onde  $f_M$  é dada pela equação (3.32).

O número de partículas incidentes por unidade de área e por unidade de tempo com velocidade entre  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}' + d\mathbf{v}'$  é representado por

$$dN' = |v'_n| f^-(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}'. \quad (3.46)$$

Uma parte destas partículas é reemitida da superfície, sendo que o número de partículas que deixam a superfície por unidade de área e por unidade de tempo com velocidade entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  é dado por

$$dN = |v_n| f^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.47)$$

O objetivo é determinar a relação entre  $f^+$  e  $f^-$  em função de  $R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}', t) d\mathbf{v}$ . Portanto o número total de partículas reemitidas por unidade de área da superfície e por unidade de tempo é igual a integral de todas as partículas que chegam a superfície com velocidade entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , isto é:

$$dN = \int R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}', t) d\mathbf{v} dN'. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.46) em (3.48) temos

$$dN = \left[ \int_{v'_n < 0} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}', t) d\mathbf{v} |v'_n| f^-(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' \right].$$

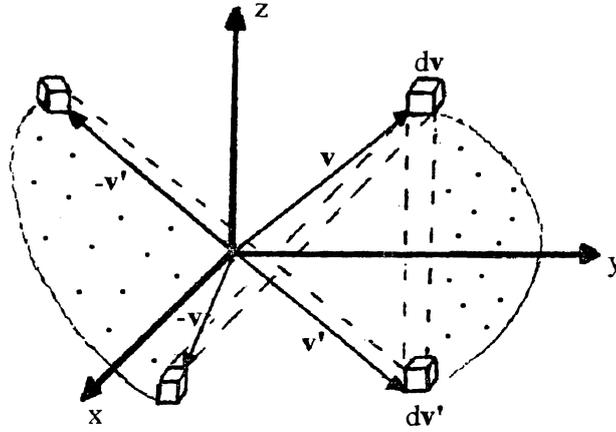


Figura 3.5: Representação espacial das partículas espalhadas

Assim com base em (3.47) podemos escrever

$$|v_n| f^+(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t) = \left[ \int_{v'_n < 0} R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{x}', t) |v'_n| f^-(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) dv' \right]. \quad (3.49)$$

Para o caso de espalhamento difuso, a função de distribuição das partículas refletidas é Maxwelliana e independe da função de distribuição das partículas incidentes. Sua expressão é

$$R_d(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{2kT_w} \right)^2 v_n \exp \left( \frac{-mv^2}{2kT_w} \right).$$

Em mecânica do contínuo é comum considerar as seguintes condições de contorno para os campos de velocidade, pressão e temperatura na superfície que delimita o gás

$$\mathbf{u}'_g = \mathbf{u}_w, \quad T'_g = T_w, \quad (3.50)$$

isto é, a velocidade e a temperatura do gás são iguais a velocidade e a temperatura da superfície. As expressões (3.50) são válidas quando o número de Knudsen é pequeno, isto é, estamos no regime hidrodinâmico. O número de Knudsen nos dá uma medida da rarefação do gás e é definido como a razão entre o livre caminho médio  $\lambda$  e um comprimento característico do problema em questão  $L$ ,  $Kn = \lambda/L$ . Entretanto quando o número de Knudsen aumenta, isto é, quando o gás se torna mais rarefeito, as condições acima não são mais válidas pois há um deslizamento da velocidade e um salto na temperatura.

Como ilustração iremos analisar a condição de deslizamento da velocidade e escreveremos de acordo com a Figura 3.6

$$u'_x = A_1 \frac{du'_x}{dy'} \quad (3.51)$$

onde  $A_1$  é uma constante de proporcionalidade.

Para resolver o problema introduzimos as grandezas adimensionais

$$\mathbf{u} = \left( \frac{m}{2kT_w} \right)^{1/2} \mathbf{u}' \quad (3.52)$$

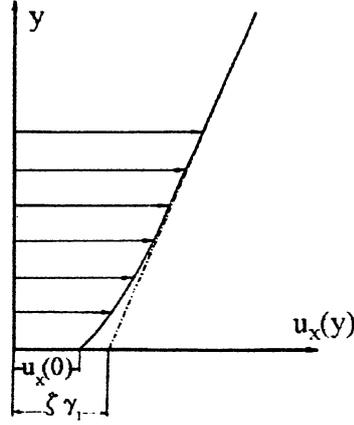


Figura 3.6: Representação da velocidade

$$\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda_w} \mathbf{x}', \quad (3.53)$$

onde  $\lambda_w$  representa o livre caminho médio das moléculas a temperatura  $T_w$ . Com o uso das expressões (3.52)-(3.53) podemos reescrever a equação (3.51) na forma adimensional como

$$u_x = \gamma_1 \frac{du_x}{dy} \quad (3.54)$$

em que a constante  $\gamma_1$  está relacionada com a constante  $A_1$  através de

$$\gamma_1 = \frac{A_1 \sqrt{\pi}}{2\lambda_w}.$$

O objetivo é determinar a constante  $\gamma_1$  numa região próxima à placa cuja dimensão é da ordem do livre caminho médio, denominada como camada de Knudsen [30].

O problema é resolvido através da equação de Boltzmann que com uso da equação modelo BGK para um fluxo estacionário se transforma em

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}'} = -\nu(f - f_M), \quad (3.55)$$

onde, como visto anteriormente,  $f(\mathbf{x}', \mathbf{v})$  é a função de distribuição,  $\mathbf{v}$  é a velocidade molecular e  $\nu$  é a frequência de colisão dada pela razão  $P/\mu$ .  $P$  é a pressão do sistema em equilíbrio e  $\mu$  a viscosidade de cisalhamento que está relacionada com o livre caminho médio através da expressão

$$\mu = P_w \lambda_w \left( \frac{2m}{\pi k T_w} \right)^{1/2}$$

como citada na seção 3.4.  $f_M$  representa a função de distribuição Maxwelliana local dada por (3.32), isto é

$$f_M = n \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{-m(\mathbf{v} - \mathbf{u}'(\mathbf{x}'))^2}{2kT} \right], \quad (3.56)$$

em que a densidade do número das partículas  $n$  e a temperatura  $T$  neste caso são consideradas constantes.

Vamos linearizar a equação (3.55) em torno da função Maxwelliana da superfície  $f_w$ , ou seja,

$$f = f_w(1 + h), \quad (3.57)$$

com

$$f_w = n_w \left( \frac{m}{2\pi kT_w} \right)^{3/2} \exp(-C^2), \quad \text{onde} \quad \mathbf{C} = \beta \mathbf{V}, \quad (3.58)$$

onde  $n_w = \frac{P_w}{kT_w}$  e  $h$  representa a perturbação no sistema. Substituindo (3.57), (3.58) no lado esquerdo da equação (3.55) e transformando o lado direito desta equação para a forma adimensional encontramos

$$c_y \frac{\partial h}{\partial y} = 2c_x u_x - h. \quad (3.59)$$

Para se determinar a constante  $\gamma_1$  verifica-se que apenas a velocidade tangencial do gás é diferente de zero ( $u_x \neq 0$ ), enquanto que a velocidade normal é nula, ( $u_y = 0$ ).

Segundo a Figura 3.6 verifica-se que para grandes distâncias da superfície  $\zeta = \frac{du_x}{dy}$  em que  $\zeta$  representa uma constante de proporcionalidade. E temos as condições para

$$\begin{cases} y = 0, & u_x = \zeta \gamma_1 \quad \text{e} \\ y \rightarrow \infty, & u_x = \zeta(y + \gamma_1). \end{cases}$$

O próximo passo para resolver a equação (3.59) é descobrir as condições de contorno para a perturbação  $h$ . No caso de  $y = 0$ ,  $c_y > 0$  e não existe perturbação, isto é  $h=0$  pois supomos um espalhamento difuso. Para  $y \rightarrow \infty$ ,  $c_y < 0$  usamos o método de Chapman-Enskog representando a perturbação como

$$h_{CE} = h^{(0)} + h^{(1)} \quad (3.60)$$

onde  $h_{CE}$  se refere a perturbação obtida através do método de Chapman-Enskog e  $h^{(0)}$  representará a perturbação de ordem zero enquanto que  $h^{(1)}$  a perturbação de primeira ordem.

Ao se aplicar a expressão (3.60) na equação (3.59) e aplicando o método de Chapman-Enskog, ao igualarmos os termos de mesma ordem encontramos primeiramente que  $h^{(0)} = h_M$ , isto é, a perturbação de ordem zero é Maxwelliana. Logo concluímos que

$$h^{(0)} = 2c_x u_x = 2c_x \zeta (y + \gamma_1). \quad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.59) e tomando a igualdade dos termos de primeira ordem vem

$$c_y \frac{\partial h^{(0)}}{\partial y} = -h^{(1)}, \quad \text{então} \quad h^{(1)} = 2\zeta c_x c_y. \quad (3.62)$$

Com as expressões (3.61)-(3.62) temos as seguintes condições de contorno para a perturbação  $h$

$$\begin{cases} y = 0, & c_y > 0, & h = 0 \\ y \rightarrow \infty, & c_y < 0, & h = h_{CE} = 2c_x \zeta ((y + \gamma_1) - c_y). \end{cases}$$

Portanto, tendo as condições anteriores definidas podemos resolver a equação (3.59) com o procedimento descrito abaixo, resultando o valor da constante  $\gamma_1$ .

O procedimento é escolher um perfil de forma que  $u_x$  e  $\gamma_1$  passam a ser conhecidos. Substituindo estes valores de  $u_x$  e  $\gamma_1$  na equação (3.59) calcula-se a perturbação  $h$ . Com o valor desta perturbação substituído na expressão abaixo calcula-se um novo valor para  $u_x$

$$u_x = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) c_x h dc,$$

que será substituído novamente em (3.59) repetindo o processo. Este procedimento é efetuado até se verificar que a solução para  $u_x$  convergiu.

Armazena-se o valor de  $u_x$  obtido após se verificar a convergência e o substitui na expressão do perfil escolhido determinando-se assim o valor numérico da constante  $\gamma_1$ . Obtém-se desta forma  $\gamma_1=1.01619$ .

Numa superfície de um sólido onde ocorre evaporação e condensação, as condições de salto na fronteira para as perturbações da pressão  $v$ , temperatura  $\tau$  e velocidade tangencial  $u_i t_i$  são (Sone Onishi[1978], Sone Aoki[1987], Sone [1991]):

$$v = \frac{P'_g - P_w}{P_w} = -\alpha_1 u_i n_i + \frac{\alpha_2}{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} n_i + \frac{\alpha_3}{\delta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j - 2 \frac{\alpha_4}{\delta} \bar{\kappa} u_i n_i, \quad (3.63)$$

$$\tau = \frac{T'_g - T_w}{T_w} = -\alpha_5 u_i n_i + \frac{\alpha_6}{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} n_i + \frac{\alpha_7}{\delta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j - 2 \frac{\alpha_8}{\delta} \bar{\kappa} u_i n_i, \quad (3.64)$$

$$u_i t_i = \frac{\alpha_9}{\delta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) t_i n_j + \frac{\alpha_{10}}{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} t_i - \frac{\alpha_{11}}{\delta} t_j \frac{\partial (u_i n_i)}{\partial x_j}, \quad (3.65)$$

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2),$$

onde  $n_i$  e  $t_i$  representam a direção do vetor normal e do vetor tangencial à superfície, respectivamente.  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são as curvaturas principais da superfície sendo negativas quando a normal é direcionada para o centro da curvatura e  $\delta$  representa o parâmetro de rarefação relacionado com o número de Knudsen  $Kn$  através da relação  $\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn}$ . Nas equações (3.63)-(3.65)  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'/\delta$ .

Os termos referentes aos saltos de pressão, velocidade e temperatura tem os seguintes significados:

a)  $\alpha_1 u_i n_i$  e  $\alpha_5 u_i n_i$  são devidos a evaporação e a condensação na superfície do sólido a ser considerado;

b)  $\frac{\alpha_2}{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} n_i$  e  $\frac{\alpha_6}{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} n_i$  são devidos ao gradiente normal da temperatura na superfície do sólido;

c)  $\frac{\alpha_3}{\delta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j$  e  $\frac{\alpha_7}{\delta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j$  são devidos ao gradiente normal da componente normal da velocidade na superfície do sólido;

e)  $\frac{\alpha_4}{\delta} \bar{\kappa} u_i n_i$  e  $\frac{\alpha_8}{\delta} \bar{\kappa} u_i n_i$  são devidos a curvatura da superfície do sólido;

f)  $\frac{\alpha_9}{\delta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) t_i n_j$  é devido ao gradiente tangencial da componente normal da velocidade e ao gradiente normal da componente tangencial da velocidade na superfície do sólido;

g)  $\frac{\alpha_{10}}{\delta} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} t_i$  é devido ao gradiente tangencial da temperatura na superfície do sólido;

h)  $\frac{\alpha_{11}}{\delta} t_j \frac{\partial (u_i n_i)}{\partial x_j}$  é devido ao gradiente tangencial da velocidade normal à superfície do sólido.

Os resultados numéricos destas constantes são apresentados por Sone [36], considerando-se o modelo BGK, entretanto as constantes  $\alpha_2$  e  $\alpha_6$  deverão ser multiplicadas por 3/2 se considerarmos o modelo de Shakov. Os valores destas constantes para o modelo de Shakov são

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2,13204; & \alpha_2 &= 0,83766; & \alpha_3 &= 0,82085; & \alpha_4 &= 0,38057; & \alpha_5 &= 0,44675; \\ \alpha_6 &= 1,95408; & \alpha_7 &= 0,33034; & \alpha_8 &= 0,13157; & \alpha_9 &= 1,01619; & \alpha_{10} &= 0,38316; \\ & & & & \alpha_{11} &= 0,79519. \end{aligned}$$

Observemos que a constante  $\alpha_9$  representa a constante  $\gamma_1$  calculada anteriormente. Então o cálculo da constante  $\gamma_1$  serviu para ilustrar o procedimento para se obter uma das constantes acima, isto é,  $\alpha_9$ .

# Capítulo 4

## Solução Cinética

### 4.1 Exposição do Problema

Os fenômenos de transporte para sistemas em rotação são afetados pois uma anisotropia nas propriedades do gás é criada e como consequência os coeficientes de transporte mudam. Por esta razão os fenômenos de transporte para sistemas com gases em rotação tem despertado atenção de muitos pesquisadores [1, 2, 4, 14, 17, 7, 12]. A condução de calor através de um gás confinado entre dois cilindros com diferentes temperaturas é um problema clássico da dinâmica de gases rarefeitos e tem sido apresentado em vários artigos [54, 55]. Entretanto todos estes artigos consideram os cilindros em repouso.

Recentemente [12, 13] foram analisados fenômenos de transporte linear através de um gás rarefeito, isto é, a influência da rotação no fluxo de calor entre os cilindros com um gradiente radial de temperatura, considerando-se separadamente a transferência de calor e de momento, sem levar em conta a transferência de massa e os efeitos cruzados. As conclusões foram que: i) a rotação afeta não somente quantitativamente os fenômenos de transporte mas também qualitativamente; ii) alguns fenômenos existem apenas para sistemas em rotação.

Iremos considerar um gás confinado entre dois cilindros coaxiais com raios  $R_0$  e  $R_1$  ( $R_0 > R_1$ ) com o eixo dos cilindros coincidindo com o eixo  $z$  conforme a Figura 4.1. Assume-se que os cilindros são bem longos de forma que os efeitos de borda podem ser desprezados, isto é, a solução não depende da coordenada  $z$ .

Neste capítulo dois problemas serão tratados: o primeiro problema refere-se ao caso em que o sistema em equilíbrio é fracamente perturbado por uma única força termodinâmica, o desvio da densidade, enquanto que no segundo problema a perturbação ocorre juntamente por três forças termodinâmicas, que são a pressão, a velocidade angular e a temperatura. Para todos os problemas que serão tratados a seguir a solução em equilíbrio é a mesma.

Neste capítulo as grandezas denotadas com uma plica são dimensionais.

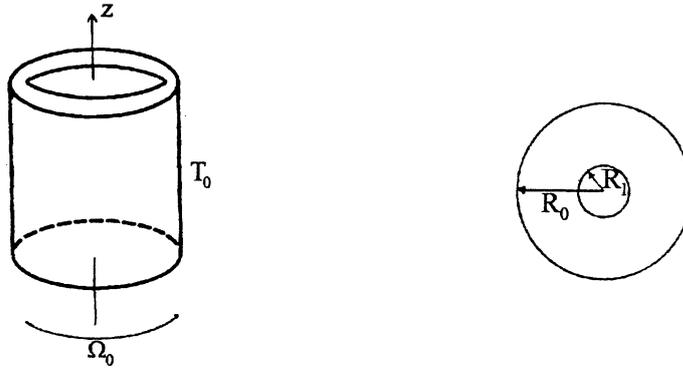


Figura 4.1: Cilindros coaxiais em rotação

## 4.2 Solução em Equilíbrio Dinâmico

Considera-se que a superfície dos cilindros apresenta condensação completa, isto significa que: (i) as superfícies do cilindro interior e do cilindro exterior condensam todas as partículas incidentes e (ii) a função de distribuição das partículas evaporadas é uma função Maxwelliana, com a densidade do número de partículas independente da função de distribuição das partículas incidentes. Logo se ambos os cilindros rodam com a mesma velocidade angular  $\Omega_0$  e estão a uma mesma temperatura  $T_0$ , então o gás se encontra em equilíbrio dinâmico, ou seja, o número de partículas evaporadas por unidade de tempo nas superfícies dos cilindros é igual ao número de partículas condensadas e a velocidade hidrodinâmica radial do gás é zero. Entretanto a velocidade volumétrica tangencial é igual a  $\Omega_0 r'$ , onde  $r'$  representa a coordenada radial e a velocidade do gás nos contornos é igual a velocidade da superfície, isto é,

$$u'_\varphi(R_1) = \Omega_0 R_1 \quad \text{e} \quad u'_\varphi(R_0) = \Omega_0 R_0. \quad (4.1)$$

Nestas condições, a densidade do número de partículas ( $n = \rho/m$ ) entre os dois cilindros será uma função da forma

$$n(r') = B \exp(\beta_0^2 \Omega_0^2 r'^2), \quad \beta_0 = \left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{1/2} \quad (4.2)$$

onde  $\beta_0$  é uma constante calculada através da massa da partícula  $m$ , da constante de Boltzmann  $k$  e da temperatura do sistema  $T_0$  e  $B$  representa uma constante de proporcionalidade a ser determinada. A distribuição de  $n(r')$  segue da condição de equilíbrio estático do gás no campo da força centrífuga. Então ao tomarmos um elemento de área que gira em torno do eixo de revolução  $z$ , obtemos um sólido contido entre os dois cilindros, com o mesmo centro e eixo conforme está representado na Figura 4.2.

Este tal invólucro é igual a densidade do número de partículas que se encontram no elemento

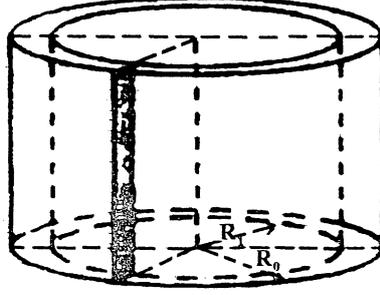


Figura 4.2: Invólucro considerado

de área  $dA$  por unidade de altura

$$\int n(r') dA = \pi(R_0^2 - R_1^2)n_{00}, \quad (4.3)$$

com  $n_{00}$  representando a densidade do número de partículas quando os cilindros estão em repouso ( $\Omega_0=0$ ).

Portanto substituindo (4.2) na equação (4.3) teremos que resolver a seguinte integração

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{R_1}^{R_0} B \exp(\beta_0^2 \Omega_0^2 r'^2) r' dr' = \pi(R_0^2 - R_1^2)n_{00},$$

de forma a obter a constante  $B$  dada por

$$B = \frac{(1 - R_1^2/R_0^2) \beta_0^2 \Omega_0^2 R_0^2 n_{00}}{\exp(\beta_0^2 \Omega_0^2 R_0^2) - \exp(\beta_0^2 \Omega_0^2 R_1^2)}. \quad (4.4)$$

Substituindo o valor da constante  $B$  acima na equação (4.2) obtemos a seguinte expressão para a distribuição da densidade do número de partículas em equilíbrio dinâmico entre os dois cilindros

$$n_0(r') = \frac{n_{00}(1 - R_1^2/R_0^2) (\beta_0 \Omega_0 R_0)^2}{\exp[(\beta_0 \Omega_0 R_0)^2] - \exp[(\beta_0 \Omega_0 R_1)^2]} \exp[(\beta_0 \Omega_0 r')^2]. \quad (4.5)$$

## 4.3 Gás em Rotação com Perturbação na Densidade

### 4.3.1 Solução fora de Equilíbrio

Será considerado a situação em que o estado de equilíbrio é fracamente perturbado no cilindro interior, isto é, o número de partículas evaporadas difere ligeiramente do número de partículas condensadas. Então, a densidade do número de partículas evaporadas do cilindro interior é igual a  $n_0(R_1) + \Delta n$ , enquanto que no cilindro exterior é dada por  $n_0(R_0)$ . E como  $|\Delta n| \ll n_0(R_1)$

é permitido linearizar a equação do regime de transição representando a densidade numérica, a velocidade e a temperatura por

$$n(r') = n_0(r') \left( 1 + \vartheta(r') \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right), \quad (4.6)$$

$$u'_r(r') = \beta_0^{-1} u_r(r') \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}, \quad (4.7)$$

$$u'_\varphi(r') = \Omega_0 r' + \beta_0^{-1} u_\varphi(r') \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}, \quad (4.8)$$

$$T(r') = T_0 \left( 1 + \tau(r') \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right), \quad (4.9)$$

onde  $\vartheta$ ,  $u_r$ ,  $u_\varphi$  e  $\tau$  são quantidades adimensionais, com  $n_0(r')$  e  $\beta_0$  dados pelas equações (4.5) e (4.2), respectivamente. As equações (4.6), (4.8) e (4.9) representam a densidade numérica, a velocidade tangencial e a temperatura como soma de seu valor em equilíbrio  $n_0$ ,  $\Omega_0 r'$  e  $T_0$  mais uma perturbação destes valores. A equação (4.7) representa a velocidade radial.

Considerando-se cilindros porosos torna-se possível este tipo de fluxo, desde que se mantenha uma densidade de  $n_0(R_1) + \Delta n$  na parte interna do cilindro interior, enquanto que a parte externa do cilindro exterior seja mantida a uma densidade  $n_0(R_0)$  que representa a densidade do número de partículas quando o sistema se encontra em equilíbrio, isto é, a perturbação na densidade só ocorre no cilindro interior. Deve-se notar que assumindo a perturbação apenas no cilindro interior não perdemos a generalidade do problema, porque o fluxo de gás causado pela diferença de densidade  $\Delta n$  no cilindro interior é o mesmo que aquele causado pela diferença de densidade  $-\Delta n$  no cilindro exterior.

### 4.3.2 Regime de Transição - Modelo BGK

No regime de transição o problema deve ser resolvido com base na equação cinética de Boltzmann [33], mas a complexidade do termo de colisões desta equação requer um grande esforço computacional. Por outro lado, como já foi visto na seção 3.5, o modelo de Bhatnagar, Gross e Krook (BGK) [34] para o termo de colisões fornece resultados confiáveis em toda a extensão do número de Knudsen para fluxos isotérmicos. Se compararmos os dados numéricos do fluxo de Poiseuille através de um tubo cilíndrico baseado no modelo BGK [49] com aqueles obtidos da equação de Boltzmann [56], acha-se que a discordância entre estas soluções é apenas da ordem de 0,5%.

Assim, como estamos considerando também uma simetria axial e um estado ligeiramente fora do equilíbrio em relação a densidade, sabemos que para o caso do fluxo de um gás rarefeito podemos aplicar de maneira satisfatória o modelo BGK. No caso de fluxo estacionário o modelo BGK é dada pela equação (3.55), onde como na seção (3.5),  $f(\mathbf{x}', \mathbf{v})$  é a função de distribuição,  $\mathbf{v}$  é a velocidade molecular,  $\nu$  é a frequência de colisão e  $f_M$  é a função Maxwelliana local

dada pela equação (3.56). O lado esquerdo da equação cinética (3.55) não contém nem a força centrífuga e nem a força de Coriolis pois no cálculo numérico é mais conveniente usar-se como referência o sistema em repouso. Porém, na superfície dos cilindros em rotação, será utilizada a função de distribuição Maxwelliana local linearizada. Aqui escolheremos a frequência de colisão  $\nu$  de forma a fornecer corretamente a expressão da viscosidade de cisalhamento  $\mu$  no regime hidrodinâmico, isto é,  $\nu = P/\mu$  com  $P = nkT$ .

Os momentos da função de distribuição, isto é, a densidade numérica  $n$ , a velocidade  $u'$  e a temperatura  $T$  são definidas através da função de distribuição e representados pelas equações (3.39)-(3.41).

É conveniente, devido a geometria do problema escrever o termo  $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}'}$  em coordenadas cilíndricas, da mesma forma que foi descrito no lado esquerdo da equação (3.45). Como estamos considerando que a solução independe das coordenadas  $z'$  e  $\varphi'$  e que  $v_z=0$ , a equação (3.55) transforma-se em

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = -\nu(f - f_M). \quad (4.10)$$

Para resolver a equação acima devemos escrevê-la na forma adimensional. Introduzindo a grandeza adimensional

$$r = r'/R_0 \quad (4.11)$$

poderemos linearizar a equação modelo BGK em torno da função Maxwelliana em equilíbrio  $f_0$ , representando a função de distribuição por:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \left[ 1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right], \quad (4.12)$$

onde:

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = n_0(r) \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp(-C^2), \quad (4.13)$$

$$C^2 = c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2 + c_z^2, \quad \mathbf{c} = \beta_0 \mathbf{v}. \quad (4.14)$$

$h(\mathbf{r}, \mathbf{c})$  representa a perturbação da função de distribuição do sistema,  $\mathbf{c}$  é a velocidade adimensional da partícula, em que  $(c_r, c_\varphi, c_z)$  são suas componentes cilíndricas,  $n_0(r)$  representa a densidade de partículas entre os dois cilindros dada pela equação (4.5) e  $\omega$  representa a velocidade angular adimensional definida por

$$\omega = \beta_0 \Omega_0 R_0. \quad (4.15)$$

Como a equação cinética (4.10) está escrita em relação ao referencial em repouso, a Maxwelliana  $f_0$  contém a velocidade tangencial na forma  $(c_\varphi - \omega r)$  que considera a rotação dos cilindros.

Agora com todo o conjunto de expressões (4.11)-(4.15) é possível escrever primeiramente o lado esquerdo da equação (4.10) na forma adimensional. Para isto trabalharemos com os termos  $v_r \frac{\partial f}{\partial r'}$ ,  $\frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r}$  e  $-\frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}$  separadamente para depois reunirmos os três resultados obtidos.

Portanto com o uso das expressões (4.11), (4.12), (4.14) o primeiro termo da equação (4.10),  $v_r \frac{\partial f}{\partial r'}$ , torna-se

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{1}{R_0 \beta_0} c_r \frac{\partial}{\partial r} \left[ f_0 \left( 1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \right]. \quad (4.16)$$

A derivada da perturbação  $h$  em relação a coordenada radial  $r$  fica indicada pois não é conhecido a sua dependência de uma forma explícita. Quanto a derivada da função Maxwelliana em equilíbrio  $f_0$  em relação a coordenada radial  $r$ , é possível efetuá-la desde que se use a expressão (4.13), observando que a dependência radial da densidade do número de partículas  $n_0(r)$  fornece a variação

$$\frac{\partial n_0}{\partial r} = 2\omega^2 r n_0$$

e que a derivada de  $e^{(-C^2)}$  em relação a componente radial  $r$  é igual a  $2\omega(c_\varphi - \omega r) e^{-C^2}$ . Desta forma

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{1}{R_0 \beta_0} f_0 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} c_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{R_0 \beta_0} (2c_r c_\varphi \omega) f. \quad (4.17)$$

Quanto ao segundo termo da equação (4.10),  $\frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r}$ , também com o uso das expressões (4.11), (4.12), (4.14), teremos

$$\frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} = \frac{1}{R_0 \beta_0} \frac{c_\varphi^2}{r} \frac{\partial}{\partial c_r} \left[ f_0 \left( 1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \right].$$

Desenvolvendo a derivada parcial  $\frac{\partial}{\partial c_r}$  sobre os termos que estão no colchete da equação anterior teremos que a derivada da perturbação  $h$  em relação a componente radial  $c_r$  da velocidade adimensional ficará indicada por não se conhecer a dependência explícita da perturbação em relação a velocidade radial adimensional. A derivada da função Maxwelliana local  $f_0$  em relação a esta velocidade  $c_r$  será dada por

$$\frac{\partial f_0}{\partial c_r} = -2c_r f_0,$$

já que a dependência de  $f_0$  em relação a  $c_r$  se encontra somente em  $e^{(-C^2)}$ . Então tem-se

$$\frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} = \frac{1}{R_0 \beta_0} f_0 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \frac{c_\varphi^2}{r} \frac{\partial h}{\partial c_r} - \frac{1}{R_0 \beta_0} \frac{2c_\varphi^2 c_r f}{r}. \quad (4.18)$$

O último termo da equação (4.10),  $-\frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}$ , assim como os outros dois termos anteriores, transforma-se primeiramente em

$$-\frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = -\frac{1}{R_0 \beta_0} \frac{c_r c_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial c_\varphi} \left[ f_0 \left( 1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \right].$$

A derivada da função Maxwelliana local  $f_0$  em relação a componente tangencial da velocidade adimensional  $c_\varphi$  é

$$\frac{\partial f_0}{\partial c_\varphi} = -2(c_\varphi - \omega r) f_0,$$

assim temos que

$$-\frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = -\frac{1}{R_0 \beta_0} f_0 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \frac{c_r c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial c_\varphi} + \frac{1}{R_0 \beta_0} \frac{(c_\varphi - \omega r) c_r c_\varphi}{r} f. \quad (4.19)$$

Então podemos juntar os resultados (4.17), (4.18), (4.19) e simplificando os termos semelhantes teremos

$$\begin{aligned} & v_r \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \\ &= \frac{1}{R_0 \beta_0} f_0 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{c_\varphi^2}{r} \frac{\partial h}{\partial c_r} - \frac{c_r c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial c_\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Com o objetivo de simplificar os termos da equação (4.20) que contenham derivadas parciais em relação a velocidade adimensional da partícula, iremos representar as velocidades adimensionais  $c_r$  e  $c_\varphi$ , em função de suas coordenadas polares  $(c_p, \theta)$ :

$$c_r = c_p \cos \theta \quad c_\varphi = c_p \sin \theta, \quad \text{ou} \quad c_p^2 = c_r^2 + c_\varphi^2, \quad \theta = \arctan \frac{c_\varphi}{c_r}. \quad (4.21)$$

Portanto, as componentes radial e tangencial da velocidade adimensional, são funções da velocidade adimensional  $c_p$  e do ângulo  $\theta$ . Representamos então as derivadas parciais  $\frac{\partial h}{\partial c_r}$  e  $\frac{\partial h}{\partial c_\varphi}$  por

$$\frac{\partial h}{\partial c_r} = \frac{\partial h}{\partial c_p} \frac{\partial c_p}{\partial c_r} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial c_r} = \frac{\partial h}{\partial c_p} \cos \theta + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{-\frac{c_\varphi}{c_r^2}}{1 + \left(\frac{c_\varphi}{c_r}\right)^2} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial c_\varphi} = \frac{\partial h}{\partial c_p} \frac{\partial c_p}{\partial c_\varphi} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial c_\varphi} = \frac{\partial h}{\partial c_p} \sin \theta + \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\frac{1}{c_r}}{1 + \left(\frac{c_\varphi}{c_r}\right)^2} \quad (4.23)$$

Com o auxílio de (4.21), (4.22) e (4.23) poderemos transformar o termo  $\frac{c_\varphi^2}{r} \frac{\partial h}{\partial c_r} - \frac{c_r c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial c_\varphi}$  em  $-\frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}$ , e a expressão (4.20) toma a forma

$$\begin{aligned} & v_r \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \\ &= \frac{1}{R_0 \beta_0} f_0 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Então com a equação (4.24) conseguimos representar o lado esquerdo da equação (4.10) na seguinte forma adimensional:

$$\frac{1}{R_0 \beta_0} f_0 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = -\nu [f - f_M].$$

Agora o objetivo é trabalhar com o lado direito desta expressão para também representá-lo na forma adimensional. De início temos que

$$\frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = \frac{R_0 \beta_0 n k T}{\mu} \left[ \frac{f_M}{f_0} - \frac{f}{f_0} \right],$$

com  $\nu = P/\mu$ . Ao se utilizar a expressão

$$\mu = n_{00}\lambda_{00} \left( \frac{2mkT_0}{\pi} \right)^{1/2} \quad (4.25)$$

para a viscosidade de cisalhamento, a expressão (4.9) para a temperatura  $T$  e a expressão<sup>1</sup>

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{R_0}{\lambda_{00}} \quad (4.26)$$

para o parâmetro de rarefação, onde  $\lambda_{00}$  é o livre caminho médio das partículas com densidade  $n_{00}$  e temperatura  $T_0$ , teremos que

$$\frac{R_0\beta_0nkT}{\mu} = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \left( 1 + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \approx \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right)$$

desprezando os termos iguais ou superiores à segunda ordem em  $\frac{\Delta n}{n_0(R_1)}$ . Portanto

$$\frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \left[ \frac{f_M}{f_0} - \frac{f}{f_0} \right]. \quad (4.27)$$

Agora o próximo passo é trabalhar com  $\left[ \frac{f_M}{f_0} - \frac{f}{f_0} \right]$ . A velocidade  $V^2$  é desenvolvida considerando que as velocidades envolvidas apresentam componentes na direção  $(r, \varphi, z)$

$$V^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{u}')^2 = v^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' + u'^2.$$

Usando as expressões (4.7), (4.8), (4.14), (4.15) vem

$$\begin{aligned} V^2 = & \beta_0^{-2} (c_r^2 + c_\varphi^2 + c_z^2) - 2\beta_0^{-2} c_r u_r \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} - 2\beta_0^{-2} c_\varphi \left( \omega r + u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \\ & + \left( \beta_0^{-1} u_r \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right)^2 + \left( \beta_0^{-1} \omega r + \beta_0^{-1} u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Desprezando os termos a partir de segunda ordem em  $\frac{\Delta n}{n_0(R_1)}$  e fazendo  $C_\varphi = c_\varphi - \omega r$ , com as simplificações possíveis tem-se

$$V^2 = \beta_0^{-2} \left[ C^2 - 2c_r u_r \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} - 2C_\varphi u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right]. \quad (4.29)$$

Então a função Maxwelliana  $f_M$ , dada pela equação (3.32), em função da constante  $\beta$ , transforma-se com o uso da equação (4.29) aproximadamente em

$$f_M = n \left( \frac{\beta^3}{\pi^{3/2}} \right) \exp(-\beta^2 V^2) \approx n \left( \frac{\beta^3}{\pi^{3/2}} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{\beta_0^2} C^2\right) \left\{ 1 + 2c_r u_r \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right.$$

<sup>1</sup>Se o raio do cilindro exterior  $R_0$  não for comparável ao raio do cilindro interior  $R_1$  uma melhor definição para o parâmetro de rarefação é  $\delta = \frac{\pi}{2} \frac{R_0 - R_1}{\lambda_{00}}$ .

$$+2C_\varphi u_\varphi \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \Bigg\},$$

onde foi possível usar a aproximação  $\exp(x) \approx 1 + x$  devido ao fato de que  $|\Delta n| \ll n_0(R_1)$ . Podemos agora escrever que a razão  $\frac{f_M}{f_0}$  será

$$\frac{f_M}{f_0} \approx \frac{n}{n_0} \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^3 \exp \left[ \left( 1 - \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \right) C^2 \right] \left( 1 + 2c_r u_r \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} + 2C_\varphi u_\varphi \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right).$$

De uma forma genérica temos que

$$\left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^N = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{N/2} = \left( \frac{1}{1 + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}} \right)^{N/2} \approx \left( 1 - \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right)^{N/2} \approx 1 - \frac{N}{2} \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}$$

com  $N$  representando um número inteiro qualquer. Então

$$\frac{f_M}{f_0} \approx \left( 1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \left( 1 + C^2 \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \left( 1 + 2c_r u_r \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} + 2C_\varphi u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right)$$

se reduz a

$$\frac{f_M}{f_0} \approx 1 + \left[ \vartheta + 2c_r u_r + 2C_\varphi u_\varphi + \left( C^2 - \frac{3}{2} \right) \tau \right] \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}.$$

De acordo com a equação (4.12) e a aproximação acima, a equação (4.27) resultará em

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \left\{ \vartheta \right. \\ &\quad \left. + 2c_r u_r + 2C_\varphi u_\varphi + \left( C^2 - \frac{3}{2} \right) \tau - h \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente ao se considerar apenas os termos até a primeira ordem em  $\frac{\Delta n}{n_0(R_1)}$  obtemos a equação que rege o sistema estudado

$$\left[ c_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left[ \vartheta + 2(c_\varphi - \omega r) u_\varphi + 2c_r u_r + \left( C^2 - \frac{3}{2} \right) \tau - h \right]. \quad (4.30)$$

A equação (4.30) é uma equação íntegro-diferencial que envolve os momentos adimensionais  $\vartheta, u_r, u_\varphi$  e  $\tau$  da função de distribuição. Todos estes momentos estão relacionados com a perturbação  $h$  como será demonstrado a seguir.

O momento adimensional  $\vartheta$  é obtido substituindo-se no momento dimensional  $n$  (3.39), a expressão para a densidade numérica em função da quantidade adimensional  $\vartheta$  (4.6) no lado esquerdo da igualdade e a expressão para a função de distribuição (4.12) no lado direito, além de transformarmos o elemento dimensional  $dv$  para o elemento adimensional  $dc$ :

$$n_0 \left( 1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) = \beta_0^{-3} \int f_0 \left( 1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right) dc.$$

Substituindo a função Maxwelliana em equilíbrio pela expressão (4.13) é possível simplificarmos a densidade numérica em equilíbrio  $n_0$  resultando

$$\left(1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) \left[1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right] d\mathbf{c}.$$

Tendo-se que

$$\int \exp(-C^2) d\mathbf{c} = \pi^{3/2},$$

resulta para o momento adimensional  $\vartheta$  a expressão:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) h d\mathbf{c}. \quad (4.31)$$

Quanto aos momentos adimensionais  $u_r$  e  $u_\varphi$ , primeiramente escreveremos a expressão para a velocidade  $\mathbf{u}'$  (3.40) em termos de suas componentes  $(r, \varphi)$

$$u'_r = \frac{1}{n} \int v_r f d\mathbf{v}, \quad (4.32)$$

$$u'_\varphi = \frac{1}{n} \int v_\varphi f d\mathbf{v}. \quad (4.33)$$

Por primeiro tomamos a equação (4.32) e substituímos as expressões (4.7) e (4.12)

$$u_r \beta_0^{-1} \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} = \frac{1}{n_0 \left(1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right)} \int f_0 c_r \beta_0^{-4} \left(1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) d\mathbf{c}.$$

Substituindo  $f_0$  pela equação (4.13) obtém-se aproximadamente

$$u_r \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \approx \left(1 - \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_r \exp(-C^2) \left(1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) d\mathbf{c}.$$

Utilizando o fato de que

$$\int c_r \exp(-C^2) d\mathbf{c} = 0, \quad (4.34)$$

a expressão acima toma a forma

$$u_r \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \approx \left(1 - \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_r \exp(-C^2) h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} d\mathbf{c},$$

que desprezando termos quadráticos em  $\frac{\Delta n}{n_0(R_1)}$  resulta

$$u_r = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_r \exp(-C^2) h d\mathbf{c}. \quad (4.35)$$

O mesmo procedimento acima é aplicado para a velocidade tangencial  $u_\varphi$

$$\left(\omega \beta_0^{-1} r + \beta_0^{-1} u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) = \frac{1}{n} \int f c_\varphi \beta_0^{-4} d\mathbf{c}.$$

Pode-se multiplicar toda a equação por  $\beta_0$  e utilizar a equação (3.39) no termo  $\omega r$  com o objetivo de inseri-lo na integral que aparece no lado direito da igualdade

$$\frac{1}{n} \omega r \int f d\mathbf{v} + u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} = \frac{1}{n} \int f c_\varphi \beta_0^{-3} d\mathbf{c}, \quad \text{ou}$$

$$u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} = \frac{1}{n} \int (c_\varphi - \omega r) f \beta_0^{-3} d\mathbf{c}.$$

Utilizando a expressão (4.6) para a densidade numérica  $n$ , a expressão (4.12) para a função de distribuição  $f$  e a expressão (4.13) para a função de distribuição Maxwelliana em equilíbrio  $f_0$ , obtém-se que

$$u_\varphi \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \approx \left(1 - \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \int (c_\varphi - \omega r) \exp(-C^2) \left(1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) d\mathbf{c}.$$

Assim utilizando uma equação semelhante à (4.34) para a velocidade adimensional  $c_\varphi$  tem-se

$$u_\varphi = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int (c_\varphi - \omega r) \exp(-C^2) h d\mathbf{c}. \quad (4.36)$$

Por fim, para o momento adimensional  $\tau$ , substitui-se na equação (3.41) a expressão para a temperatura  $T$  (4.9) do lado esquerdo da igualdade e as expressões (4.6), (4.12), (4.13) do lado direito

$$T_0 \left(1 + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) = \frac{m}{3k} \frac{1}{n_0 \left(1 + \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right)} \int \beta_0^{-5} C^2 f_0 \left(1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) d\mathbf{c}, \quad \text{ou}$$

$$1 + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \approx \left(1 - \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \frac{2}{3} C^2 \exp(-C^2) \left(1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) d\mathbf{c}, \quad \text{ou}$$

$$1 + \tau \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \approx \left(1 - \vartheta \frac{\Delta n}{n_0(R_1)}\right) \left(1 + \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \frac{2}{3} C^2 \exp(-C^2) h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} d\mathbf{c}\right)$$

e com o auxílio da equação (4.31) resulta

$$\tau = \frac{T - T_0}{T_0(\Delta n/n_0(R_1))} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \left(\frac{2}{3} C^2 - 1\right) \exp(-C^2) h d\mathbf{c}. \quad (4.37)$$

Assim  $\vartheta$ ,  $u_r$ ,  $u_\varphi$  e  $\tau$  são definidos respectivamente por (4.33), (4.35), (4.36) e (4.37). Deve-se notar que no volume que contém o gás rarefeito a temperatura pode variar mesmo os cilindros estando a uma mesma temperatura  $T_0$ .

Agora que todos os momentos dimensionais estão representados, o próximo passo para resolvermos a equação (4.30) é determinarmos as condições de contorno na fronteira, isto é, a forma da perturbação  $h$  na superfície do cilindro interior e na superfície do cilindro exterior. Deve-se notar que as partículas que deixam a superfície do cilindro interior tem velocidade  $c_r$  dirigida para fora desta superfície em direção a superfície exterior, ou seja,  $c_r > 0$ , enquanto que

para as partículas que deixam o cilindro exterior a velocidade  $c_r$  é direcionada para dentro no sentido da superfície do cilindro interior, ou seja,  $c_r < 0$ . Para o cilindro exterior a perturbação é nula por termos a perturbação agindo apenas no cilindro interior.

Recordando que temos a perturbação apenas na densidade do cilindro interior ( $r' = R_1$ ), ou seja, a temperatura da superfície  $T_w$  é igual a temperatura de equilíbrio  $T_0$ , é possível determinar o valor da perturbação  $h$  no cilindro interior trabalhando com a função Maxwelliana da superfície,  $f_w$ :

$$f_w = n_w \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{V}^2}{2k T_0} \right] = n_0 \left( 1 + \frac{n_w - n_0(R_1)}{n_0(R_1)} \right) \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{V}^2}{2k T_0} \right]$$

que será igualada a equação (4.12), isto é

$$n_0 \left( 1 + \frac{n_w - n_0(R_1)}{n_0(R_1)} \right) \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{V}^2}{2k T_0} \right] = f_0 \left( 1 + h \frac{\Delta n}{n_0(R_1)} \right).$$

Substituindo  $f_0$  pela expressão (4.13) e comparando os termos de ambos os lados da igualdade obtemos que a perturbação da densidade no cilindro interior será igual a 1.

Portanto, resumidamente temos que a condição da fronteira para a perturbação  $h$  tem a forma:

$$h = 1 \quad \text{para } c_r > 0 \quad \text{e } r = R_1/R_0, \quad (4.38)$$

$$h = 0 \quad \text{para } c_r < 0 \quad \text{e } r = 1. \quad (4.39)$$

A equação (4.30) é função das componentes da velocidade adimensional  $\mathbf{c} = (c_r, c_\varphi, c_z)$ . Como a solução independe da coordenada  $z$ , para eliminar a variável  $c_z$  da equação (4.30) duas funções são introduzidas:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) h dc_z, \quad (4.40)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) \left( c_z^2 - \frac{1}{2} \right) h dc_z. \quad (4.41)$$

Portanto para escrevermos a equação (4.30) em função de  $\phi$  e  $\psi$  devemos multiplicá-la pelo fator  $\frac{e^{-c_z^2}}{\sqrt{\pi}}$  e depois integrá-la em todo o intervalo, ou seja,

$$\begin{aligned} & c_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) h dc_z \right) - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) h dc_z \right) \\ &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ \vartheta \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) dc_z \right) + 2(c_\varphi - \omega r) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) dc_z \right) \right. \\ & \quad + 2c_r u_r \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) dc_z \right) + \tau \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( c_z^2 - \frac{1}{2} \right) \exp(-c_z^2) dc_z \right) \\ & \quad \left. + \tau \left( c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2 - 1 \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) dc_z \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) h dc_z \right\}. \quad (4.42) \end{aligned}$$

Utilizando as seguintes integrais

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) dc_z = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) dc_z = 0, \quad (4.43)$$

a equação (4.42) se transforma em

$$c_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ \vartheta + [c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2 - 1] \tau + 2(c_\varphi - \omega r) u_\varphi + 2c_r u_r - \phi \right\}. \quad (4.44)$$

Seguindo o mesmo procedimento, multiplicamos a equação (4.30) pelo fator  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-c_z^2} (c_z^2 - \frac{1}{2})$  e integramos a equação resultante em relação a  $dc_z$ :

$$\begin{aligned} & c_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) h dc_z \right) - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) h dc_z \right) \\ &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ \vartheta \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) dc_z \right) + 2(c_\varphi - \omega r) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) dc_z \right) \right. \\ & \quad + 2c_r u_r \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) dc_z \right) + \tau \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{3}{2}) (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) dc_z \right) \\ & \quad \left. + \tau (c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) dc_z \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_z^2 - \frac{1}{2}) \exp(-c_z^2) h dc_z \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

A integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) \left( c_z^2 - \frac{3}{2} \right) \left( c_z^2 - \frac{1}{2} \right) dc_z = \frac{1}{2}$$

junto com o resultado obtido na equação (4.43) transformam a equação (4.45) em:

$$c_r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( \frac{1}{2} \tau - \psi \right). \quad (4.46)$$

Assim, resumidamente, transformamos a equação (4.30) em um sistema de equações para  $\phi$  e  $\psi$  que são (4.44) e (4.46).

Os momentos da função de distribuição  $\vartheta$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_r$  e  $\tau$  dados pelas equações (4.31), (4.35), (4.36) e (4.37) são facilmente expressos em função de  $\phi$  e  $\psi$ . Com o auxílio da equação (4.14) temos que:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c_r^2] dc_r \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(c_\varphi - \omega r)^2] dc_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c_z^2] h dc_z,$$

e desta forma podemos expressar o momento adimensional  $\vartheta$  em função da variável  $\phi$  definida em (4.40) como

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \phi dc_r dc_\varphi. \quad (4.47)$$

A partir deste ponto por simplicidade iremos omitir os limites de integração  $(-\infty, +\infty)$ .

O mesmo procedimento pode ser utilizado para os momentos adimensionais  $u_r$  e  $u_\varphi$ , encontrando assim

$$u_r = \frac{1}{\pi} \int \int c_r \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \phi \, dc_r \, dc_\varphi, \quad (4.48)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{\pi} \int \int (c_\varphi - \omega r) \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \phi \, dc_r \, dc_\varphi. \quad (4.49)$$

Entretanto o momento adimensional  $\tau$  aparecerá em função das variáveis  $\phi$  e  $\psi$  dadas pelas definições (4.40) e (4.41), como é demonstrado abaixo com o auxílio da equação (4.14)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \int \left[ \frac{2}{3} (c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2) + \left( \frac{2}{3} c_z^2 - 1 \right) \right] \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \, dc_r \, dc_\varphi \int \exp[-c_z^2] h \, dc_z \\ &= \frac{2}{3\pi^{3/2}} \int \int (c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2 - 1) \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \, dc_r \, dc_\varphi \int \exp[-c_z^2] h \, dc_z \\ &\quad + \frac{2}{3\pi^{3/2}} \int \int \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \, dc_r \, dc_\varphi \int \left( c_z^2 - \frac{1}{2} \right) \exp[-c_z^2] h \, dc_z. \end{aligned}$$

Tendo como resultado

$$\tau = \frac{2}{3\pi} \int \int \left\{ [c_r^2 + (c_\varphi - \omega r)^2 - 1] \phi + \psi \right\} \exp[-c_r^2 - (c_\varphi - \omega r)^2] \, dc_r \, dc_\varphi. \quad (4.50)$$

Portanto as equações (4.47), (4.48), (4.49) e (4.50) representam os momentos adimensionais  $\vartheta$ ,  $u_r$ ,  $u_\varphi$  e  $\tau$  em função das variáveis  $\phi$  e  $\psi$ . Para podermos resolver o sistema de equações (4.44), (4.46) é necessário determinarmos as condições de contorno para  $\phi$  e  $\psi$ .

Com o uso das condições de contorno para a perturbação  $h$  dadas por (4.38), (4.39), obtém-se facilmente, com base nas integrais (4.43) que:

$$\phi = 1, \quad \psi = 0 \quad \text{para} \quad c_r > 0 \quad \text{e} \quad r = R_1/R_0, \quad (4.51)$$

$$\phi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{para} \quad c_r < 0 \quad \text{e} \quad r = 1. \quad (4.52)$$

### 4.3.3 Método de Solução

O objetivo agora é resolver as equações íntegro-diferenciais (4.44), (4.46)-(4.50) com as condições de contorno (4.51), (4.52) que por sua vez podem ser reduzidas a um sistema de equações integrais para os momentos da função de distribuição. Entretanto, este método requer um grande tempo computacional, especialmente para grandes valores do parâmetro de rarefação  $\delta$ , que é o inverso do número de Knudsen  $Kn$ . Este é um dos motivos pelos quais deve-se usar o método das velocidades discretas.[29, 30]

O método das velocidades discretas consiste em introduzir uma grade regular no espaço tridimensional das variáveis  $r$ ,  $c_p$  e  $\theta$  e resolver o sistema de equações para  $\phi$  e  $\psi$ .

Introduz-se para a grade regular

$$r_k = r_{k-1} + \Delta r, \quad 1 \leq k \leq N_r, \quad r_0 = \frac{R_1}{R_0}, \quad \Delta r = \frac{1 - \frac{R_1}{R_0}}{N_r}, \quad (4.53)$$

$$c_{p_i} = c_{p_{i-1}} + \Delta c_p, \quad 2 \leq i \leq N_c, \quad c_{p_1} = \frac{1}{2} \Delta c_p, \quad \Delta c_p = \frac{c_0}{N_c}, \quad (4.54)$$

$$\theta_n^+ = \theta_{n-1}^+ + \Delta \theta^+, \quad 1 \leq n \leq N_\theta^+, \quad \theta_0^+ = 0, \quad \Delta \theta^+ = \frac{\pi}{N_\theta^+}, \quad (4.55)$$

$$\theta_n^- = \theta_{n-1}^- + \Delta \theta^-, \quad 1 \leq n \leq N_\theta^-, \quad \theta_0^- = 0, \quad \Delta \theta^- = \frac{\pi}{N_\theta^-}, \quad (4.56)$$

onde  $N_r, N_c, N_\theta^+$  e  $N_\theta^-$  representam o número de pontos relacionados à coordenada radial, à velocidade e ao ângulo  $\theta$ . A notação  $\theta^+$  e  $\theta^-$  indica a varredura do ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário dentro do intervalo de  $0 \leq \theta^+ \leq \pi$  e a varredura do ângulo  $\theta$  no sentido horário dentro do mesmo intervalo  $0 \leq \theta^- \leq \pi$ .  $c_0$  denota uma velocidade inicial numérica. Se representarmos as funções  $\phi$  e  $\psi$  como

$$\phi_{kin}^\pm = \phi(r_k, c_{p_i}, \theta_n^\pm) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \exp(-c_z^2) h(r_k, c_{p_i}, c_z, \theta_n^\pm) dc_z,$$

$$\psi_{kin}^\pm = \psi(r, c_p, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \exp(-c_z^2) \left( c_z^2 - \frac{1}{2} \right) h(r, c_p, c_z, \theta) dc_z.$$

as equações (4.44) e (4.46) são escritas como

$$c_{p_i} \cos \theta_n^\pm \frac{\phi_{kin}^\pm - \phi_{k-\epsilon, i, n}^\pm}{\epsilon \Delta r} \mp \frac{c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm}{r_k} \frac{\phi_{kin}^\pm - \phi_{k, i, n-1}^\pm}{\Delta \theta^\pm} = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ \vartheta_k \right. \\ \left. + \tau_k \left[ c_{p_i}^2 \cos^2 \theta_n^\pm + (c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm - \omega r_k)^2 - 1 \right] + 2(c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm - \omega r_k) u_{\varphi_k} + 2(c_{p_i} \cos \theta_n^\pm) u_{r_k} - \phi_{kin}^\pm \right\}, \quad (4.57)$$

$$c_{p_i} \cos \theta_n^\pm \frac{\psi_{kin}^\pm - \psi_{k-\epsilon, i, n}^\pm}{\epsilon \Delta r} \mp \frac{c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm}{r_k} \frac{\psi_{kin}^\pm - \psi_{k, i, n-1}^\pm}{\Delta \theta^\pm} = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( \frac{1}{2} \tau_k - \psi_{kin}^\pm \right), \quad (4.58)$$

onde  $\epsilon = \text{sign}(\cos \theta_n^\pm)$  é a função sinal.  $\vartheta_k$ ,  $u_{r_k}$ ,  $u_{\varphi_k}$  e  $\tau_k$  são as aproximações para  $\vartheta(r_k)$ ,  $u_r(r_k)$ ,  $u_\varphi(r_k)$  e  $\tau(r_k)$ , respectivamente. Os valores de  $\phi_{kin}^\pm$  e  $\psi_{kin}^\pm$  no primeiro ( $k = 0$ ) e no último ponto ( $k = N_r$ ) são conhecidos pois correspondem aos valores dados nas condições de contorno (4.51)-(4.52).

Para a primeira iteração as funções  $\vartheta(r)$ ,  $u_r(r)$ ,  $u_\varphi(r)$  e  $\tau(r)$  são assumidas conhecidas. Quando as equações (4.57)-(4.58) são resolvidas para qualquer valor de  $c_{p_i}$  e  $\theta_n^\pm$  obtendo  $\phi_{kin}^\pm$  e  $\psi_{kin}^\pm$ , então novas quantidades de  $\vartheta_k$ ,  $u_{r_k}$ ,  $u_{\varphi_k}$  e  $\tau_k$  são calculadas de acordo com as definições (4.31), (4.35)-(4.37).

A fórmula quadrática para o desvio da densidade é

$$\vartheta_k = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N_c} \left( \sum_{n=0}^{N_\theta^+} W_{kin}^+ \psi_{kin}^+ + \sum_{n=0}^{N_\theta^-} W_{kin}^- \psi_{kin}^- \right),$$

$$W_{kin}^\pm = A_n^\pm \exp \left[ -c_{p_i}^2 \cos^2 \theta_n^\pm - (c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm - \omega r_k)^2 \right] c_{p_i} \Delta c_p \Delta \theta^\pm,$$

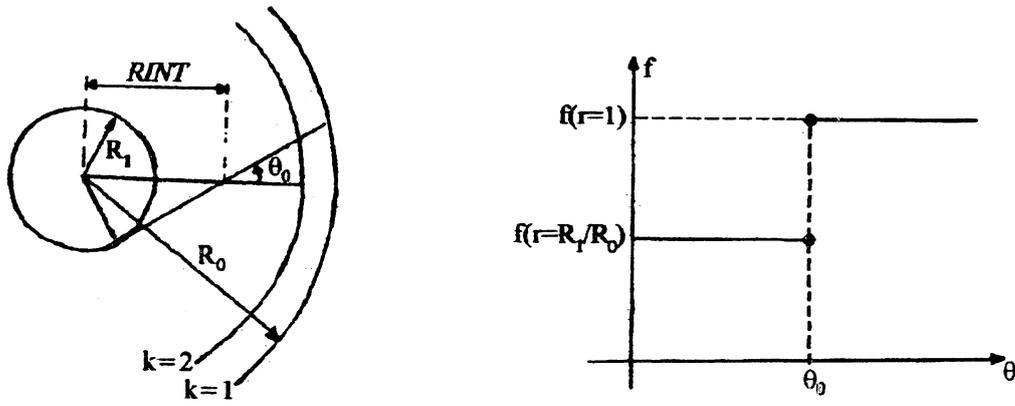


Figura 4.3: Relação geométrica entre  $\theta_0$  e  $RINT$  e a representação gráfica da função de distribuição  $f$

com  $A_n^\pm$  assumindo valores segundo a regra do trapézio para a integração

$$A_n^\pm = \begin{cases} 0.5 & \text{se } n = 0 \text{ ou } N_\theta^\pm, \\ 1 & \text{se } 0 < n < N_\theta^\pm. \end{cases}$$

A quadratura para os outros momentos apresenta forma análoga. Depois as equações (4.57)-(4.58) são resolvidas com os novos valores de  $\vartheta_k$ ,  $u_{r_k}$ ,  $u_{\varphi_k}$  e  $\tau_k$ . O processo é repetido até o alcance da convergência, isto é, até que a diferença relativa entre os momentos calculados entre duas iterações sucessivas for menor do que a precisão desejada.

Uma característica típica do fluxo de um gás rarefeito ao redor de um corpo convexo é a descontinuidade da função de distribuição. Na análise da Figura 4.3 percebe-se que a função de distribuição para  $\theta < \theta_0$  é função da perturbação  $h$  do cilindro interior, e para  $\theta > \theta_0$  é função da perturbação  $h$  do cilindro exterior, entretanto no ponto  $\theta = \theta_0$  a função de distribuição apresenta um salto. Como foi demonstrado por Sugimoto e Sone [23] o método das velocidades discretas deve ser modificado para funções de distribuição descontínuas. Sem esta modificação é impossível reduzir significativamente o erro numérico usando uma diferença ordinária, mesmo se a grade de incrementos for considerada muito pequena. Então o método foi adaptado de forma que nos pontos de descontinuidade dois valores da função de distribuição são calculados integrando-se as equações (4.44) e (4.46) ao longo das características: uma característica começa no cilindro interior para calcular o primeiro valor, enquanto a outra característica começa no cilindro exterior para se calcular o segundo valor da função de distribuição. Usa-se estes valores para calcular a função de distribuição na grade de pontos próximos à descontinuidade: o primeiro valor é usado para o ponto que está entre o cilindro interior e a descontinuidade, enquanto o segundo valor é usado para o ponto que está entre o cilindro exterior e a descontinuidade. Logo os pontos de descontinuidade serão calculados pela relação entre o ângulo  $\theta_0$  e o raio do cilindro interior  $R_1$ , que é, uma função contínua expressa por  $\theta_0 = \arcsen \frac{R_1}{RINT}$ .

Traçaremos uma malha para  $RINT$  e  $\theta_0$  tendo dois problemas a considerar na determinação destes pontos:

i) Dada a posição  $RINT$  devemos calcular  $\theta_0$ . Neste caso a posição das linhas horizontais são conhecidas e desejamos a posição das linhas verticais.

ii) Dado o ângulo  $\theta_0$  devemos achar a posição  $RINT$ . Agora a posição das linhas verticais são conhecidas e deseja-se obter a posição das linhas horizontais.

No final deste processo obtemos todos os pares de pontos  $(\theta_0, RINT)$  em que ocorre a descontinuidade da função de distribuição, tornando a senóide completamente determinada.

Para se resolver as equações (4.57)-(4.58) testes numéricos são feitos para a razão dos raios de  $R_1/R_0=0,5$  e para valores de  $\delta$  de 0,01 a 40. Cinco valores da velocidade angular  $\omega$  são considerados: 0; 0,25; 0,5; 0,75; e 1. Observa-se que em  $\omega = 1$  a velocidade da superfície do cilindro exterior é igual a velocidade molecular máxima provável, a qual tem a ordem da velocidade do som. Como na prática esta velocidade é dificilmente alcançada, não há sentido em considerar valores de  $\omega$  maiores do que 1.

Para estimar a precisão numérica das quantidades calculadas alguns testes foram feitos para  $\delta=0,1; 1; 10; 20$  e 40 com  $\omega = 0$  e 1 e dobrando o valor numérico dos parâmetros. O primeiro passo é o cálculo dos parâmetros para se definir a grade. Como a fração das partículas que tenham velocidade reduzida maior do que cinco é muito pequena, adotamos  $c_0 = 5$ . Escolhe-se um determinado valor para  $\delta$  e outro para  $\omega$ . Deve-se observar que para  $\omega = 0$  temos  $N_\theta^+ = N_\theta^- = N_\theta$  pois a função de distribuição é simétrica em relação ao ângulo  $\theta$  e para  $\omega \neq 0$  tem-se  $N_\theta^+ > N_\theta^-$  pois a função de distribuição é anti-simétrica. Inicia-se a procura da grade com valores razoáveis para os parâmetros, por exemplo,  $(N_r, N_c, N_\theta)=(100, 20, 40)$  para  $\omega=0$  e  $(N_r, N_c, N_\theta^+, N_\theta^-)=(100, 20, 40, 20)$  para  $\omega = 1$ . Conserva-se então os valores para  $N_r$  e  $N_c$  e altera-se  $N_\theta$  para  $N_\theta = 80, 120, 320$ , etc ou  $N_\theta^+, N_\theta^- = 80, 40; 160, 80; 320, 160$ ; etc até se atingir a convergência nos valores para  $u_r$  e  $u_\varphi$ . Então com o valor encontrado para  $N_\theta$  ou  $N_\theta^+, N_\theta^-$ , faz-se o mesmo procedimento para  $N_c$  cujos valores poderão ser  $N_c = 40, 80, 160, 320$ , etc. Após se achar o valor de  $N_c$  aplica-se o mesmo procedimento para  $N_r$ , com  $N_r = 200, 400$ , etc. Portanto determina-se a grade através da convergência desejada. Escolheu-se a variação do tipo  $N_{usado} = 2N_{anterior}$  para qualquer parâmetro com o objetivo de poder se observar uma maior variação nos resultados. Uma análise destes resultados numéricos mostra que os valores de  $u_r$  e  $u_\varphi$  se alteram dentro de 0,5% para  $\delta \leq 10$  e dentro de 1% para  $\delta \geq 20$ . Utilizou-se um critério a mais de precisão, isto é, a verificação da conservação da lei de massa ( $n_0 u_r r = \text{const}$ ). A análise dos resultados numéricos mostram que para  $\omega=1$  a distorção desta lei não excede 1% para qualquer  $\delta$ . A distorção da conservação da lei de massa para  $\omega < 1$  é essencialmente menor do que para  $\omega = 1$ . Então, pode-se considerar que o erro numérico das quantidades  $u_r$  e  $u_\varphi$  é menor do que 1%.

A grade encontrada é de uma forma esquemática para  $\omega=0$  e  $\omega = 1$ , respectivamente:

- $\delta = 0, 1 \quad (N_r, N_c, N_\theta) = (200, 40, 40)$  e  $(N_r, N_c, N_\theta^+, N_\theta^-) = (100, 20, 40, 20)$ ,

Tabela 4.1: Velocidade Radial  $u_r$  na posição ( $r = 0,75$ ) vs  $\delta$  e  $\omega$

$\delta$	$u_r$				
	$\omega = 0$	$\omega = 0,25$	$\omega = 0,5$	$\omega = 0,75$	$\omega = 1$
0,01	0,1881	0,1844	0,1739	0,1578	0,1376
0,04	0,1883	0,1846	0,1740	0,1578	0,1375
0,1	0,1886	0,1848	0,1741	0,1577	0,1374
0,2	0,1890	0,1852	0,1743	0,1576	0,1370
0,4	0,1899	0,1859	0,1745	0,1573	0,1363
0,8	0,1914	0,1870	0,1748	0,1567	0,1349
1,0	0,1921	0,1875	0,1749	0,1563	0,1341
2,0	0,1959	0,1906	0,1762	0,1553	0,1315
4,0	0,1995	0,1931	0,1754	0,1510	0,1248
8,0	0,2030	0,1949	0,1723	0,1431	0,1141
10	0,2040	0,1950	0,1704	0,1396	0,1097
20	0,2067	0,1930	0,1604	0,1239	0,09248
40	0,2078	0,1871	0,1434	0,1022	0,07188

- $\delta = 1,0$      $(N_r, N_c, N_\theta) = (200, 40, 40)$  e  $(N_r, N_c, N_\theta^+, N_\theta^-) = (100, 20, 80, 40)$ ,
- $\delta = 10$      $(N_r, N_c, N_\theta) = (400, 40, 40)$  e  $(N_r, N_c, N_\theta^+, N_\theta^-) = (200, 40, 320, 160)$ ,
- $\delta = 20$      $(N_r, N_c, N_\theta) = (200, 80, 40)$  e  $(N_r, N_c, N_\theta^+, N_\theta^-) = (400, 40, 320, 160)$ ,
- $\delta = 40$      $(N_r, N_c, N_\theta) = (100, 160, 40)$  e  $(N_r, N_c, N_\theta^+, N_\theta^-) = (400, 40, 320, 160)$ .

Como a distorção da precisão é essencialmente menor para valores de  $\delta$  e  $\omega$  menores do que os determinados, temos que as grades acima podem se estender para outros valores de  $\omega$ , isto é 0,25; 0,5 e 0,75. O mesmo pode ser aplicado para o parâmetro  $\delta$ . A grade encontrada para  $\delta = 0,1$  se estende para outros valores menores do que este, como por exemplo,  $\delta = 0,01; 0,04$ ; a grade para  $\delta = 10$  se estende para  $\delta = 0,2; 0,4; 0,8$  e a grade para  $\delta = 10$  é a mesma do que para  $\delta = 2,0; 4,0; 8,0$ .

#### 4.3.4 Resultados e Discussões

Na Tabela 4.1 os valores adimensionais da velocidade radial  $u_r$  relacionada com a velocidade radial dimensional através de (4.7), são apresentados como função do inverso do número de Knudsen  $\delta$  e da velocidade angular  $\omega$ . Podemos ver que para qualquer  $\delta$  o valor de  $u_r$  essencialmente decresce quando a velocidade angular  $\omega$  cresce.

Na Tabela 4.2 os valores da velocidade tangencial adimensional  $u_\varphi$  relacionada com a dimensional (4.8) são dados como função de  $\delta$  e  $\omega$ . Como para  $\omega = 0$  tem-se que  $u_\varphi = 0$ , este valor de  $\omega$  é omitido. Pode-se ver que para grandes valores de  $\delta$  a dependência de  $u_\varphi$  na velocidade angular  $\omega$  não é monótona.

Tabela 4.2: Velocidade Tangencial  $u_\varphi$  na posição ( $r = 0,75$ ) vs  $\delta$  e  $\omega$

$\delta$	$-u_\varphi$			
	$\omega = 0,25$	$\omega = 0,5$	$\omega = 0,75$	$\omega = 1$
0,01	0,02908	0,05403	0,07167	0,08051
0,04	0,02961	0,05497	0,07288	0,08182
0,1	0,03061	0,05678	0,07521	0,08433
0,2	0,03218	0,05963	0,07888	0,08826
0,4	0,03497	0,06467	0,08532	0,09516
0,8	0,03977	0,07326	0,09614	0,1066
1,0	0,04194	0,07709	0,1009	0,11150
2,0	0,05167	0,09413	0,1216	0,13240
4,0	0,06792	0,1218	0,1539	0,1638
8,0	0,09465	0,1656	0,2026	0,2089
10	0,1066	0,1845	0,2228	0,2269
20	0,1628	0,2679	0,3054	0,2960
40	0,2627	0,3986	0,4179	0,3801

Na Figura 4.4 mostra-se o perfil da velocidade tangencial  $u_\varphi$  no intervalo entre os dois cilindros. Veremos adiante que para amplos valores de  $\delta$  o aspecto do perfil é semelhante ao da solução hidrodinâmica e que para pequenos valores de  $\delta$ ,  $u_\varphi$  permanece praticamente constante. Notemos que para todos os valores de  $\delta$  e  $\omega$  a velocidade tangencial é negativa. Este resultado é devido à ação da força de Coriolis.

Na Figura 4.5 o desvio da densidade  $\vartheta$  definida por (4.6) é dada em função da distância radial adimensional  $r$ . Percebemos que o desvio da densidade não é monotonicamente decrescente com  $r$ . Isto pode ser explicado pelo fato de que dois fatores afetam a densidade perto do cilindro exterior: (i) a força centrífuga, que aumenta a densidade, (ii) e a condensação do gás, que diminui a densidade. Numa distância não muito longe do cilindro exterior o primeiro fator predomina porém perto desta superfície o segundo fator prevalece. Pode-se observar que existe um salto da densidade nas superfícies dos cilindros. Este salto é um fenômeno usual em um gás rarefeito. Adiante se verá que para grandes valores de  $\delta$  (próximos do regime hidrodinâmico) o salto da densidade é menor.

Na Figura 4.6 o desvio da temperatura  $\tau$  definido por (4.8) é apresentado. A variação da temperatura no volume do gás com a temperatura constante nas superfícies das fronteiras é uma característica peculiar do fluxo de um gás rarefeito. De qualquer modo, esta variação é usualmente pequena. Para o fluxo isotérmico de Couette sem a evaporação e condensação na superfície, a variação da temperatura não excede 0,02 [16]. No problema em questão, ambos os cilindros estão a uma mesma temperatura  $T_0$  mas a variação de temperatura no intervalo entre os cilindros é significativa e alcança o valor de 0,12. Assim, a evaporação e a condensação do gás na superfície, aumenta mais ainda a variação da temperatura no volume do gás. O mesmo resultado foi obtido por Sone [34] *et al.* para a evaporação e condensação do gás rarefeito entre

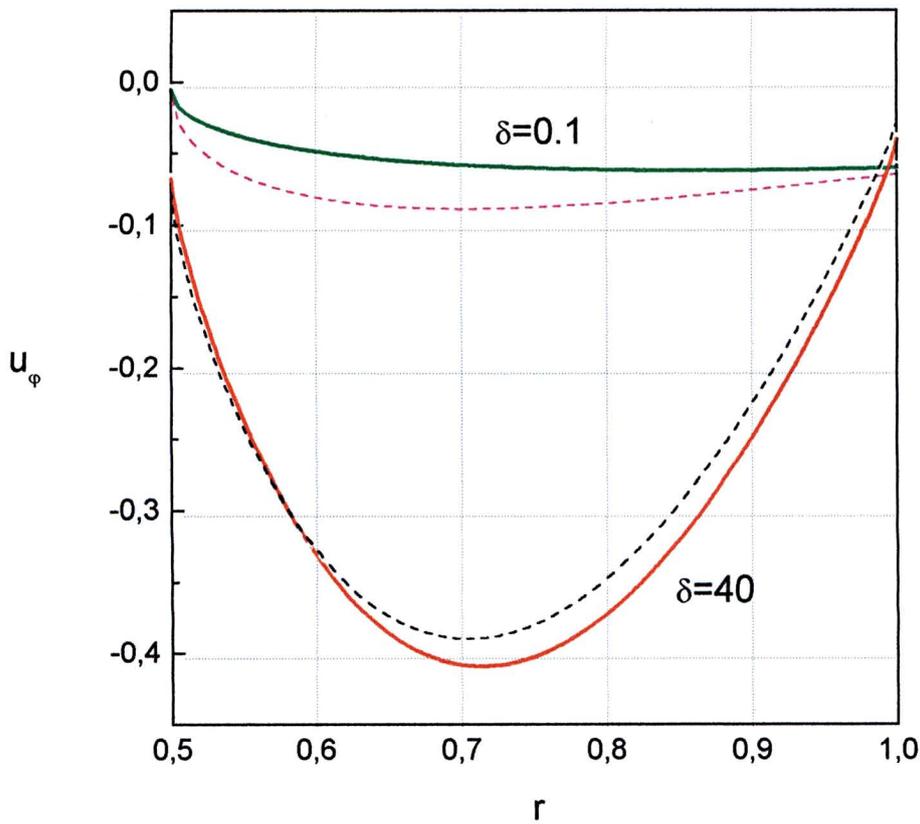


Figura 4.4: Velocidade tangencial  $u_\varphi$  versus  $r$ : linhas sólidas -  $\omega = 0,5$ ; linhas tracejadas -  $\omega = 1$ .

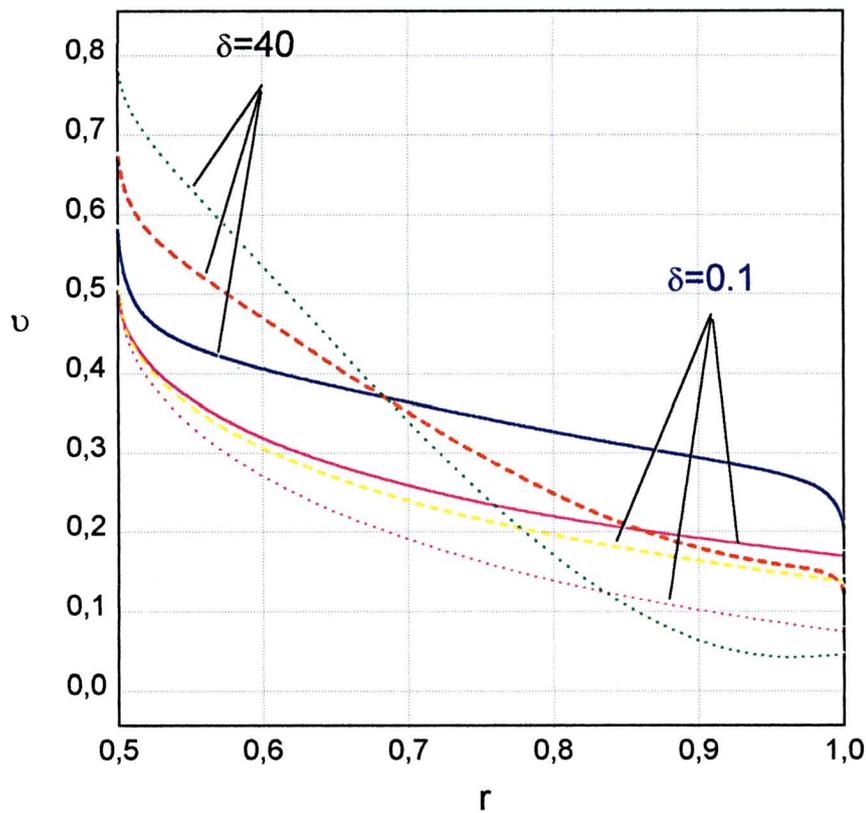


Figura 4.5: Desvio da densidade  $v$  versus  $r$ : linhas sólidas -  $\omega = 0$ ; linhas traço longo -  $\omega = 0,5$ ; linhas traço curto -  $\omega = 1$ .

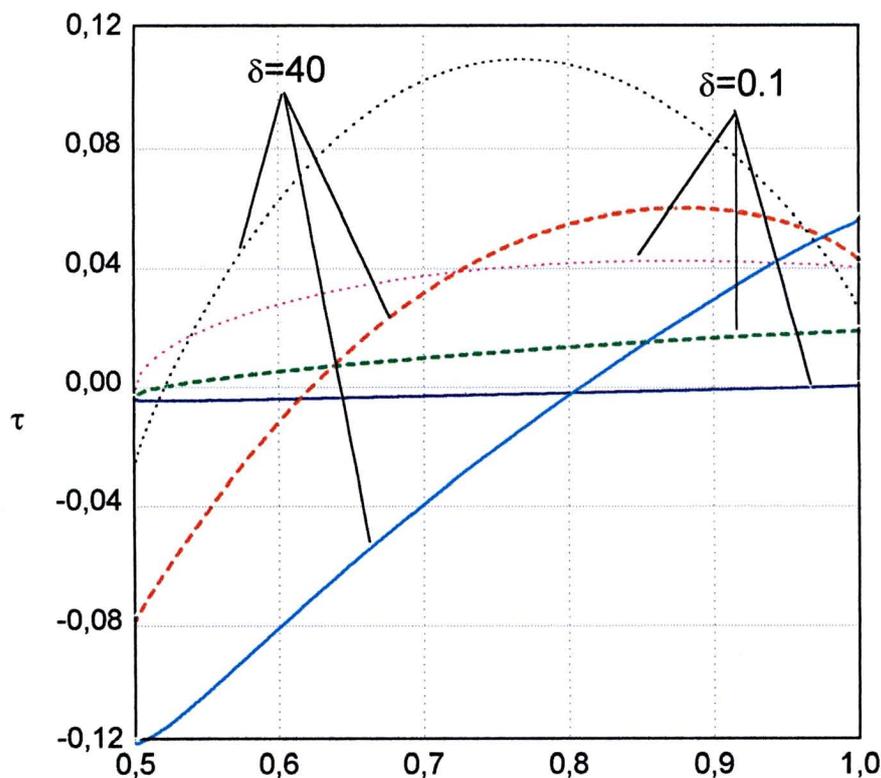


Figura 4.6: Desvio da temperatura  $\tau$  versus  $r$ : linhas sólidas -  $\omega = 0$ ; linhas traço longo -  $\omega = 0,5$ ; linhas traço curto -  $\omega = 1$ .

duas placas paralelas.

## 4.4 Gás em Rotação com Perturbações na Pressão, na Velocidade Angular e na Temperatura

### 4.4.1 Modelo de Shakov

Nesta seção, com base na equação cinética, investigaremos o fluxo de um gás rarefeito contido entre dois cilindros coaxiais apresentando evaporação e condensação nas suas superfícies assumindo que o equilíbrio é perturbado ao mesmo tempo por pequenos desvios no equilíbrio da pressão, da velocidade angular e da temperatura.

Assumindo as mesmas condições iniciais para o modelo BGK descrito na seção anterior, ou seja, ambos os cilindros rodam inicialmente com uma velocidade angular  $\Omega_0$  e estão a uma mesma temperatura  $T_0$ , tem-se que o número de partículas evaporadas e condensadas para cada um dos cilindros é igual. Assim, a função de distribuição das partículas do gás é Maxwelliana e dada pela equação (4.13) com o número de partículas  $n_0$  dada pela equação (4.5).

Portanto, é considerado a situação em que o estado de equilíbrio é fracamente perturbado em função de três fatores:

(i) As partículas evaporam do cilindro exterior com a pressão de equilíbrio  $P_0(R_0)$  enquanto que a pressão das partículas evaporadas do cilindro interior  $P_1$  difere ligeiramente da pressão de equilíbrio da superfície, isto é,

$$P_1 = P_0(R_1) + \Delta P, \quad \frac{|\Delta P|}{P_0(R_1)} \ll 1, \quad (4.59)$$

onde a pressão das partículas evaporadas do cilindro exterior é a pressão de equilíbrio  $P_0(r') = n_0(r')kT_0$ ;

(ii) O cilindro exterior roda com a velocidade angular de equilíbrio  $\Omega_0$  enquanto que a velocidade angular do cilindro interior  $\Omega_1$  difere ligeiramente da velocidade angular  $\Omega_0$ , isto é,

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \Delta\Omega, \quad \beta_0 R_1 |\Delta\Omega| \ll 1. \quad (4.60)$$

Assume-se que a diferença das velocidades superficiais dos dois cilindros é pequena quando comparada com a velocidade do som.

(iii) A temperatura do cilindro exterior é a temperatura de equilíbrio  $T_0$ , enquanto que a temperatura do cilindro interior  $T_1$  difere ligeiramente da temperatura de equilíbrio  $T_0$ , isto é,

$$T_1 = T_0 + \Delta T, \quad \frac{|\Delta T|}{T_0} \ll 1. \quad (4.61)$$

Novamente a perturbação ocorre apenas no cilindro interior, e como na seção anterior, não perdemos a generalidade do problema, porque o fluxo de gás causado pela diferença de pressão  $\Delta P$ , pela diferença de velocidade  $\Delta\Omega$  e pela diferença de temperatura  $\Delta T$  no cilindro interior é o mesmo que aquele causado pela diferença de pressão  $-\Delta P$ , pela diferença de velocidade  $-\Delta\Omega$  e pela diferença de temperatura  $-\Delta T$  no cilindro exterior.

O objetivo desta seção será a determinação dos campos da densidade, da temperatura, da velocidade, do vetor fluxo de calor e do tensor tensão como função dos mesmos parâmetros anteriores: o parâmetro de rarefação  $\delta$  e a velocidade angular  $\omega$  dados pelas equações (4.26) e (4.15), respectivamente.

Consideraremos juntamente a transferência de massa, momento linear e energia que fornece corretamente o número de Prandtl. Lembrando-se que o modelo BGK é satisfatoriamente aplicado apenas para fluxos de gases isotérmicos como já foi discutido na seção 3.5, usaremos o modelo "S" para este nosso caso de fluxo de gás rarefeito não-isotérmico devido ao fato deste último modelo fornecer resultados numéricos satisfatórios para uma grande variação do parâmetro de rarefação  $\delta$ .

Aplicando-se o modelo "S" na equação de Boltzmann (3.4) obtemos em coordenadas cilíndricas a equação (3.45). Por estarmos tratando de um fluxo estacionário cuja solução independe das coordenadas  $z'$ , e  $\varphi'$  e  $v_z=0$ , a equação (3.45) transforma-se em:

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}$$

$$= \frac{P}{\mu} \left\{ f_M \left[ 1 + \frac{8\beta_0^4}{15nm} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{V} \left( \beta_0^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) \right] - f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) \right\}, \quad (4.62)$$

onde  $f_M$  é a função Maxwelliana local dada pela equação (3.32),  $\mu$  é a viscosidade de cisalhamento relacionada com o livre caminho médio  $\lambda_{00}$  através de (4.25) que corresponde, como anteriormente, a viscosidade para um potencial de esferas rígidas e  $\mathbf{V}$  representa a velocidade peculiar.

A densidade do número de partículas  $n$ , a velocidade do gás  $u'$ , a temperatura  $T$ , o vetor fluxo de calor  $\mathbf{q}'$  que fazem parte da Eq.(4.62) estão relacionados com a função de distribuição através das expressões (3.39), (3.40), (3.41) e (3.21), respectivamente.

Assume-se que na superfície dos cilindros a condensação é completa, isto é, as superfícies condensam todas as moléculas incidentes. A função de distribuição das moléculas evaporadas do cilindro interior ( $r' = R_1$ ) tem a seguinte forma:

$$f = \frac{P_1}{kT_1} \left( \frac{m}{2\pi kT_1} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m \left[ v_r^2 + (v_\varphi - (\Omega_0 + \Delta\Omega) R_1)^2 + v_z^2 \right]}{2kT_1} \right\}, \quad (4.63)$$

enquanto que a função de distribuição das moléculas evaporadas do cilindro exterior será dada por:

$$f = \frac{P_0}{kT_0} \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m \left[ v_r^2 + (v_\varphi - \Omega_0 R_0)^2 + v_z^2 \right]}{2kT_0} \right\}. \quad (4.64)$$

Linearizando a função de distribuição próximo a função Maxwelliana  $f_0$  definida por

$$f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n_0(r') \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m \left[ v_r^2 + (v_\varphi - \Omega_0 r')^2 + v_z^2 \right]}{2kT_0} \right\}, \quad (4.65)$$

supomos que a função de distribuição é da forma

$$f = f_0 \left[ 1 + h^{(P)} X_P + h^{(\Omega)} X_\Omega + h^{(T)} X_T \right], \quad (4.66)$$

onde:

$$X_P = \frac{\Delta P}{P_0(R_1)}, \quad X_\Omega = \beta_0 R_1 \Delta\Omega, \quad X_T = \frac{\Delta T}{T_0}, \quad (4.67)$$

representam forças termodinâmicas. Ainda, podemos escrever a equação (4.66) de uma forma simplificada como

$$f = f_0 \left[ 1 + \sum_{\alpha} h^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad \alpha = P, \Omega, T, \quad (4.68)$$

onde  $h^{(\alpha)}$  representa a função de perturbação e de acordo com (4.59), (4.60) e (4.61) resulta:

$$|X_{\alpha}| \ll 1. \quad (4.69)$$

Substituindo a função de distribuição linearizada (4.66) nas definições dos campos (3.39)-(3.41) obtém-se as seguintes formas linearizadas em função das forças termodinâmicas:

$$P(r') = n_0(r')kT_0 \left[ 1 + \sum_{\alpha} v^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad (4.70)$$

$$u'_r(r') = \beta_0^{-1} \left[ \sum_{\alpha} u_r^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad (4.71)$$

$$u'_{\varphi}(r') = \Omega_0 r' + \beta_0^{-1} \left[ \sum_{\alpha} u_{\varphi}^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad (4.72)$$

$$T(r') = T_0 \left[ 1 + \sum_{\alpha} \tau^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad (4.73)$$

onde  $P = nkT$  e  $v^{(\alpha)}, u_r^{(\alpha)}, u_{\varphi}^{(\alpha)}, \tau^{(\alpha)}$  representam quantidades adimensionais.

Para obter a relação entre o vetor fluxo de calor dimensional  $\mathbf{q}'(\mathbf{r}')$  e o vetor fluxo de calor adimensional  $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ , substituímos no lado direito da equação (3.21) as expressões (4.68), (4.13), (4.29) para as grandezas função de distribuição local  $f$ , função de distribuição em equilíbrio  $f_0$  e velocidade do gás  $\mathbf{V}$  resultando

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(\mathbf{r}') &= \frac{m}{2} \int n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp(-C^2) \left[ 1 + \sum_{\alpha} h^{(\alpha)} X_{\alpha} \right] \beta_0^{-6} (\mathbf{c} - \mathbf{u}) (c^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + u^2) d\mathbf{c} \\ &= n_{00} kT_0 \frac{n_0}{n_{00}} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) \left[ 1 + \sum_{\alpha} h^{(\alpha)} X_{\alpha} \right] (\mathbf{c} - \mathbf{u}) (c^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + u^2) d\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Considerando que todas as integrais do tipo  $\int (\text{função ímpar})(\text{função par}) \exp(-C^2) d\mathbf{c}$  são iguais a zero e que  $\mathbf{c}c^2 = (\mathbf{C} + \mathbf{u})(C^2 + 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{u} + u^2)$  contribui apenas com  $C^2 \mathbf{C}$  para a perturbação  $h^{(\alpha)}$  pois as demais integrais são nulas, obtemos em termos da pressão  $P_{00} = n_{00} kT_0$ :

$$\mathbf{q}'(\mathbf{r}') = P_{00} \beta_0^{-1} \sum_{\alpha} \left[ \frac{n_0}{n_{00}} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \begin{pmatrix} c_r \\ C_{\varphi} \end{pmatrix} \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c} \right] X_{\alpha}. \quad (4.74)$$

Podemos reescrever (4.74) como:

$$\mathbf{q}'(\mathbf{r}') = P_{00} \beta_0^{-1} \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} q_r^{(\alpha)} \\ q_{\varphi}^{(\alpha)} \end{pmatrix} X_{\alpha} = P_{00} \beta_0^{-1} \left[ \sum_{\alpha} q_i^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad i = r, \varphi \quad (4.75)$$

com  $q_i^{(\alpha)}$  representando as quantidades adimensionais

$$q_r^{(\alpha)} = \frac{n_0}{n_{00}} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) c_r \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}, \quad (4.76)$$

$$q_{\varphi}^{(\alpha)} = \frac{n_0}{n_{00}} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) C_{\varphi} \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}. \quad (4.77)$$

Um outro campo que desejamos determinar é o campo do tensor viscoso. A equação (3.20) que define o tensor viscoso poderá ser escrita em relação as suas únicas duas componentes não nulas,  $\sigma'_{r\varphi}$  e  $\sigma'_{\varphi\varphi}$ . Portanto aplicando-se  $(i, j) = (r, \varphi)$  na equação (3.20)

$$\begin{aligned}\sigma'_{r\varphi} &= -m \int (v_r - u'_r)(v_\varphi - u'_\varphi) f d\mathbf{v} \\ &= -\frac{m}{2} n_0 \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \int \beta_0^{-5} \left( c_r - \sum_\alpha u_r^{(\alpha)} X_\alpha \right) \left( C_\varphi - \sum_\alpha u_\varphi^{(\alpha)} X_\alpha \right) \\ &\quad \left[ 1 + \sum_\alpha h^{(\alpha)} X_\alpha \right] \exp(-C^2) d\mathbf{c}.\end{aligned}$$

De uma forma simples temos

$$\sigma'_{r\varphi} = 2P_{00} \left[ \sum_\alpha \sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} X_\alpha \right],$$

onde a quantidade adimensional  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$  representa

$$\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} = -\frac{n_0}{n_{00}} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_r C_\varphi \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}. \quad (4.78)$$

E para  $i = j = \varphi$  a equação (3.20) transforma-se primeiramente em

$$\begin{aligned}\sigma'_{\varphi\varphi} &= P \delta_{\varphi\varphi} - m \int (v_\varphi - u'_\varphi)(v_\varphi - u'_\varphi) f d\mathbf{v} \\ &= P - m \int \beta_0^{-5} \left( c_\varphi - \omega r - \sum_\alpha u_\varphi^{(\alpha)} X_\alpha \right)^2 f_0 \left[ 1 + \sum_\alpha h^{(\alpha)} X_\alpha \right] d\mathbf{c} \\ &= P_{00} \frac{n_0}{n_{00}} \left[ \left( 1 + \sum_\alpha v^{(\alpha)} X_\alpha \right) - 2 \frac{1}{\pi^{3/2}} \int C_\varphi^2 \left[ 1 + \sum_\alpha h^{(\alpha)} X_\alpha \right] \exp(-C^2) d\mathbf{c} \right].\end{aligned}$$

Então novamente

$$\sigma'_{\varphi\varphi} = 2P_{00} \left[ \sum_\alpha \sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} X_\alpha \right],$$

onde

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \frac{n_0}{n_{00}} \left[ \frac{v^{(\alpha)}}{2} - \frac{1}{\pi^{3/2}} \int C_\varphi^2 \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c} \right]. \quad (4.79)$$

Assim podemos representar o tensor viscoso de uma forma genérica por

$$\sigma'_{ij} = 2P_{00} \left[ \sum_\alpha \sigma_{ij}^{(\alpha)} X_\alpha \right], \quad i, j = r, \varphi \quad (4.80)$$

em que  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  também representa uma quantidade adimensional.

O próximo procedimento é escrever a equação (4.62) na forma adimensional. O lado esquerdo desta equação já foi transformado em detalhes na seção anterior resultando a equação (4.24) que adaptada ao problema atual será representada por

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r'} + \frac{v_\varphi^2}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}$$

$$= \frac{1}{R_0\beta_0} f_0 \sum_{\alpha} \left[ c_r \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{c_{\varphi}}{r} \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial \theta} \right] X_{\alpha}. \quad (4.81)$$

Logo a equação (4.62) aparecerá como

$$\sum_{\alpha} \left[ c_r \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{c_{\varphi}}{r} \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial \theta} \right] X_{\alpha} = \frac{R_0\beta_0 P}{\mu} \left( \frac{f_M}{f_0} \left[ 1 + \frac{8\beta_0^4}{15nm} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{V} \left( \beta_0^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) \right] - \frac{f}{f_0} \right) \quad (4.82)$$

De uma maneira semelhante à descrita na seção anterior

$$\frac{R_0\beta_0 P}{\mu} \approx \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \sum_{\alpha} v^{(\alpha)} X_{\alpha} \right),$$

com o uso das expressões (4.70) e (4.25) para a pressão e a viscosidade de cisalhamento, respectivamente. A razão entre (3.32) e (4.65) resulta

$$\frac{f_M}{f_0} \approx \frac{n_0}{n_{00}} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{3/2} \frac{\exp \left[ -\left( C^2 - 2c_r \sum_{\alpha} u_r^{(\alpha)} X_{\alpha} - 2C_{\varphi} \sum_{\alpha} u_{\varphi}^{(\alpha)} X_{\alpha} \right) \left( \frac{T_0}{T} \right) \right]}{\exp(-C^2)}$$

$$\approx \frac{P}{P_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{5/2} \left[ 1 + 2c_r \sum_{\alpha} u_r^{(\alpha)} X_{\alpha} + 2C_{\varphi} \sum_{\alpha} u_{\varphi}^{(\alpha)} X_{\alpha} + C^2 \sum_{\alpha} \tau^{(\alpha)} X_{\alpha} \right]$$

$$\approx \left( 1 + \sum_{\alpha} v^{(\alpha)} X_{\alpha} \right) \left( 1 - \frac{5}{2} \sum_{\alpha} \tau^{(\alpha)} X_{\alpha} \right) \left[ 1 + 2c_r \sum_{\alpha} u_r^{(\alpha)} X_{\alpha} + 2C_{\varphi} \sum_{\alpha} u_{\varphi}^{(\alpha)} X_{\alpha} + C^2 \sum_{\alpha} \tau^{(\alpha)} X_{\alpha} \right]$$

nos fornecendo como resultado

$$\frac{f_M}{f_0} \approx 1 + \sum_{\alpha} \left[ v^{(\alpha)} + 2c_r u_r^{(\alpha)} + 2C_{\varphi} u_{\varphi}^{(\alpha)} + \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \tau^{(\alpha)} \right] X_{\alpha}.$$

Agora trabalhando com o termo  $\left[ \frac{8\beta_0^4}{15nm} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{V} \left( \beta_0^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) \right]$  substituiremos (4.75) para o vetor fluxo de calor  $\mathbf{q}'$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}'$  para a velocidade do gás e as relações (4.71), (4.72) para as componentes  $(r, \varphi)$  da velocidade  $\mathbf{u}'$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{8\beta_0^4}{15nm} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{V} \left( \beta_0^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) \right] &= \frac{8\beta_0^2}{15nm} P_{00} \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} q_r^{(\alpha)} \\ q_{\varphi}^{(\alpha)} \end{pmatrix} X_{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} c_r - \sum_{\alpha} u_r^{(\alpha)} X_{\alpha} \\ C_{\varphi} - \sum_{\alpha} u_{\varphi}^{(\alpha)} X_{\alpha} \end{pmatrix} \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{4}{15} \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \sum_{\alpha} \tau^{(\alpha)} X_{\alpha} \right) \left( 1 + \sum_{\alpha} v^{(\alpha)} X_{\alpha} \right) \sum_{\alpha} \left( q_r^{(\alpha)} c_r + q_{\varphi}^{(\alpha)} C_{\varphi} \right) \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) X_{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, efetuando as multiplicações possíveis e desprezando os termos de ordem superior a um em relação a  $X_{\alpha}$  resulta

$$\frac{8\beta_0^4}{15nm} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{V} \left( \beta_0^2 V^2 - \frac{5}{2} \right) = \frac{4}{15} \frac{n_0}{n_{00}} \sum_{\alpha} \left( q_r^{(\alpha)} c_r + q_{\varphi}^{(\alpha)} C_{\varphi} \right) \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) X_{\alpha}.$$

Assim a equação (4.82) ficará primeiramente igual a

$$\sum_{\alpha} \left[ c_r \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{c_{\varphi}}{r} \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial \theta} \right] X_{\alpha} \approx \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left( 1 + \sum_{\alpha} v^{(\alpha)} X_{\alpha} \right) \left\{ \left[ 1 + \sum_{\alpha} \left( v^{(\alpha)} + 2c_r u_r^{(\alpha)} + 2C_{\varphi} u_{\varphi}^{(\alpha)} \right) X_{\alpha} \right] \right\}$$

$$+ \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \tau^{(\alpha)} X_\alpha \left[ 1 + \frac{4}{15} \frac{n_0}{n_{00}} \sum_\alpha \left( q_r^{(\alpha)} c_r + q_\varphi^{(\alpha)} C_\varphi \right) \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) X_\alpha \right] - 1 - \sum_\alpha h^{(\alpha)} X_\alpha \left. \right\}$$

e continuando a desprezar os termos a partir de segunda ordem em  $X_\alpha$  além de considerar independentes as quantidades  $X_\alpha$  ( $\alpha = P, \Omega, T$ ), obtemos três equações independentes, cuja forma genérica é dada por

$$\begin{aligned} c_r \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial h^{(\alpha)}}{\partial \theta} &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ v^{(\alpha)} + 2C_\varphi u_\varphi^{(\alpha)} + 2c_r u_r^{(\alpha)} + \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \tau^{(\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{15} \frac{n_{00}}{n_0} \left( q_r^{(\alpha)} c_r + q_\varphi^{(\alpha)} C_\varphi \right) \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) - h^{(\alpha)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Aqui  $\theta = \arctan(c_\varphi/c_r)$  e a simetria axial foi levada em consideração.

A equação (4.83) é uma equação íntegro-diferencial que envolve os momentos adimensionais  $v^{(\alpha)}$ ,  $u_r^{(\alpha)}$ ,  $u_\varphi^{(\alpha)}$ ,  $\tau^{(\alpha)}$ ,  $q_r^{(\alpha)}$  e  $q_\varphi^{(\alpha)}$  da função de distribuição. Todos estes momentos estão relacionados com a perturbação  $h^{(\alpha)}$ . O procedimento para se obter os momentos  $v^{(\alpha)}$ ,  $u_r^{(\alpha)}$ ,  $u_\varphi^{(\alpha)}$ ,  $\tau^{(\alpha)}$  é semelhante ao feito na seção anterior, permitindo escrever

$$v^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{2}{3} \int C^2 \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}, \quad (4.84)$$

$$u_r^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_r \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}, \quad (4.85)$$

$$u_\varphi^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int C_\varphi \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}, \quad (4.86)$$

$$\tau^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \left( \frac{2}{3} C^2 - 1 \right) \exp(-C^2) h^{(\alpha)} d\mathbf{c}, \quad (4.87)$$

em que  $q_r^{(\alpha)}$  e  $q_\varphi^{(\alpha)}$  são dados pelas expressões (4.76) e (4.77).

Agora que todos os momentos adimensionais estão representados o próximo passo para resolvermos a equação (4.83) é determinarmos as condições de contorno nas fronteiras, isto é, na superfície do cilindro interior e na superfície do cilindro exterior, para a perturbação  $h^{(\alpha)}$ . Deve-se notar que ao se considerar a superfície do cilindro interior,  $c_r > 0$  enquanto que no cilindro exterior  $c_r < 0$ . Para o cilindro exterior a perturbação é nula devido ao fato da perturbação agir apenas no cilindro interior.

Recordando que temos a perturbação da pressão, da velocidade angular e da temperatura no cilindro interior, a função de distribuição na superfície do cilindro interior,  $f_w$ , com  $\mathbf{u}_w = (\Omega_0 + \Delta\Omega)R_1 \mathbf{e}_\varphi$  resulta em

$$\begin{aligned} f_w &= \frac{P_w}{kT_w} \left( \frac{m}{2\pi kT_w} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m\mathbf{V}^2}{2kT_w} \right] \\ &= \frac{P_0 \left( 1 + \frac{P_w - P_0}{P_0} \right)}{kT_0 \left( 1 + \frac{T_w - T_0}{T_0} \right)} \left( \frac{m}{2\pi kT_0 \left( 1 + \frac{T_w - T_0}{T_0} \right) T_0} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT_0 \left( 1 + \frac{T_w - T_0}{T_0} \right)} \left[ v_r^2 \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (v_\varphi - \Omega_0 R_1 - R_1 \Delta \Omega)^2 + v_z^2 \Big\} = n_0 \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right) \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right) \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_0}\right) \\
& \quad \times (1 + 2C_\varphi \beta_0 R_1 \Delta \Omega) \left(1 + C^2 \frac{\Delta T}{T_0}\right) \exp(-C^2) \\
& = n_0 \left[1 + \frac{\Delta P}{P_0} + 2C_\varphi \beta_0 R_1 \Delta \Omega + \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) \frac{\Delta T}{T_0}\right] \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \exp(-C^2).
\end{aligned}$$

Se igualarmos a equação acima com (4.66) e fizermos uso da expressão (4.13) para  $f_0$ , obtemos o valor para a perturbação  $h^{(\alpha)}$ .

Então as condições de fronteira para a perturbação  $h^{(\alpha)}$  tem a forma:

$$h^{(P)} = 1, \quad h^{(\Omega)} = 2C_\varphi, \quad h^{(T)} = \left(C^2 - \frac{5}{2}\right), \quad \text{para } c_r > 0 \quad \text{e } r = R_1/R_0, \quad (4.88)$$

$$h^{(P)} = 0, \quad h^{(\Omega)} = 0, \quad h^{(T)} = 0, \quad \text{para } c_r < 0, \quad r = 1. \quad (4.89)$$

Novamente podemos definir duas funções  $\phi^{(\alpha)}$  e  $\psi^{(\alpha)}$  pois queremos eliminar a dependência de  $c_z$  da equação (4.83)

$$\phi^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) h^{(\alpha)} dc_z, \quad (4.90)$$

$$\psi^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_z^2) \left(c_z^2 - \frac{1}{2}\right) h^{(\alpha)} dc_z. \quad (4.91)$$

De forma semelhante à demonstrada na seção anterior podemos obter a equação (4.83) em termos das variáveis  $\phi^{(\alpha)}$  e  $\psi^{(\alpha)}$  bastando multiplicá-la primeiramente pelo fator  $\frac{e^{-c_z^2}}{\sqrt{\pi}}$  e depois integrá-la em todo o intervalo, obtendo a equação para  $\phi^{(\alpha)}$ , isto é,

$$\begin{aligned}
c_r \frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial \theta} &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ v^{(\alpha)} + 2C_\varphi u_\varphi^{(\alpha)} + 2c_r u_r^{(\alpha)} + (c_r^2 + C_\varphi^2 - 2)\tau^{(\alpha)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{15} \frac{n_{00}}{n_0} (q_r^{(\alpha)} c_r + q_\varphi^{(\alpha)} C_\varphi) [c_r^2 + C_\varphi^2 - 2] - \psi^{(\alpha)} \right\}. \quad (4.92)
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento, multiplicando a equação (4.83) pelo fator  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-c_z^2} (c_z^2 - \frac{1}{2})$  e integrando-a em relação a  $dc_z$  obtém-se a equação para  $\psi^{(\alpha)}$  dada por

$$c_r \frac{\partial \psi^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial \psi^{(\alpha)}}{\partial \theta} = \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left[ \frac{1}{2} \tau^{(\alpha)} + \frac{2}{15} \frac{n_0}{n_{00}} (q_r^{(\alpha)} c_r + q_\varphi^{(\alpha)} C_\varphi) - \psi^{(\alpha)} \right]. \quad (4.93)$$

As condições da fronteira para as funções  $\phi^{(\alpha)}$  e  $\psi^{(\alpha)}$  são facilmente obtidas bastando usar as expressões (4.88), (4.89) para a perturbação  $h^{(\alpha)}$  nas expressões (4.90), (4.91), resultando

$$\begin{aligned}
\phi^{(P)} = 1, \quad \phi^{(\Omega)} = 2C_\varphi, \quad \phi^{(T)} = (c_r^2 + C_\varphi^2 - 2) \quad \text{e} \quad \psi^{(P)} = \psi^{(\Omega)} = 0, \quad \psi^{(T)} = \frac{1}{2}, \\
\text{para } c_r > 0 \quad \text{e } r = R_1/R_0, \quad (4.94)
\end{aligned}$$

$$\phi^{(P)} = \phi^{(\Omega)} = \phi^{(T)} = 0 \quad \text{e} \quad \psi^{(P)} = \psi^{(\Omega)} = \psi^{(T)} = 0 \quad \text{para } c_r < 0 \quad \text{e } r = 1. \quad (4.95)$$

Os momentos da função de distribuição que aparecem nas equações (4.92) e (4.93) são facilmente expressos em função de  $\phi^{(\alpha)}$  e  $\psi^{(\alpha)}$

$$v^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int \int \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) \phi^{(\alpha)} dc_r dc_\varphi, \quad (4.96)$$

$$u_r^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int \int c_r \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) \phi^{(\alpha)} dc_r dc_\varphi, \quad (4.97)$$

$$u_\varphi^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int \int C_\varphi \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) \phi^{(\alpha)} dc_r dc_\varphi, \quad (4.98)$$

$$\tau^{(\alpha)} = \frac{2}{3\pi} \int \int [(c_r^2 + C_\varphi^2 - 1) \phi^{(\alpha)} + \psi^{(\alpha)}] \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) dc_r dc_\varphi, \quad (4.99)$$

$$q_r^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int \int c_r [(c_r^2 - C_\varphi^2 - 2) \phi^{(\alpha)} + \psi^{(\alpha)}] \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) dc_r dc_\varphi, \quad (4.100)$$

$$q_\varphi^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int \int C_\varphi [(c_r^2 - C_\varphi^2 - 2) \phi^{(\alpha)} + \psi^{(\alpha)}] \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) dc_\varphi, \quad (4.101)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} = -\frac{1}{\pi} \int \int c_r C_\varphi \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) \phi^{(\alpha)} dc_r dc_\varphi, \quad (4.102)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (v^{(\alpha)} + \tau^{(\alpha)}) - \frac{1}{\pi} \int \int C_\varphi^2 \exp(-c_r^2 - C_\varphi^2) \phi^{(\alpha)} dc_r dc_\varphi. \quad (4.103)$$

Como antes, iremos usar o método das velocidades discretas para a determinação das soluções das equações (4.92) e (4.93). A questão da descontinuidade da função de distribuição, como na seção anterior, também será considerada.

#### 4.4.2 Método de Solução

A grade regular a ser introduzida é a mesma estabelecida pelas equações (4.53)-(4.56). Usando para as funções  $\phi_{kin}^{(\alpha)\pm}$  e  $\psi_{kin}^{(\alpha)\pm}$  a mesma representação dada pelas equações (4.90) e (4.91) podemos escrever as equações (4.92) e (4.93) como:

$$\begin{aligned} c_{p_i} \cos \theta_n^\pm \frac{\phi_{kin}^{(\alpha)\pm} - \phi_{k-\epsilon, i, n}}{\epsilon \Delta r} \mp \frac{c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm}{r_k} \frac{\phi_{kin}^{(\alpha)\pm} - \phi_{k, i, n-1}}{\Delta \theta^\pm} &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ v_k^{(\alpha)} \right. \\ &+ 2(c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm - \omega r_k) u_{\varphi_k}^{(\alpha)} + 2c_{p_i} \cos \theta_n^\pm u_{r_k}^{(\alpha)} + (c_{p_i}^2 \cos^2 \theta_n^\pm + (c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm - \omega r_k)^2 - 2) \tau_k^{(\alpha)} \\ &+ \left. \frac{4}{15} \frac{n_0}{n_{00}} (q_{r_k}^{(\alpha)} c_{p_i} \cos \theta_n^\pm + q_{\varphi_k}^{(\alpha)} c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm) [c_{p_i}^2 \cos^2 \theta_n^\pm + (c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm - \omega r_k)^2 - 2] - \phi_{kin}^{(\alpha)\pm} \right\}, \quad (4.104) \\ c_{p_i} \cos \theta_n^\pm \frac{\psi_{kin}^{(\alpha)\pm} - \psi_{k-\epsilon, i, n}}{\epsilon \Delta r} \mp \frac{c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm}{r_k} \frac{\psi_{kin}^{(\alpha)\pm} - \psi_{k, i, n-1}}{\Delta \theta^\pm} &= \delta \frac{n_0}{n_{00}} \left\{ \frac{1}{2} \tau_k^{(\alpha)} \right. \\ &+ \left. \frac{2}{15} \frac{n_0}{n_{00}} (q_{r_k}^{(\alpha)} c_{p_i} \cos \theta_n^\pm + q_{\varphi_k}^{(\alpha)} c_{p_i} \text{sen} \theta_n^\pm) - \psi_{kin}^{(\alpha)\pm} \right\}, \quad (4.105) \end{aligned}$$

onde  $v_k^{(\alpha)}$ ,  $u_{r_k}^{(\alpha)}$ ,  $u_{\varphi_k}^{(\alpha)}$ ,  $\tau_k^{(\alpha)}$ ,  $q_{r_k}^{(\alpha)}$  e  $q_{\varphi_k}^{(\alpha)}$  são as aproximações para  $v^{(\alpha)}(r_k)$ ,  $u_r^{(\alpha)}(r_k)$ ,  $u_\varphi^{(\alpha)}(r_k)$ ,  $\tau^{(\alpha)}(r_k)$ ,  $q_r^{(\alpha)}(r_k)$  e  $q_\varphi^{(\alpha)}(r_k)$ , respectivamente. Novamente os valores de  $\phi_{kin}^{(\alpha)\pm}$  e  $\psi_{kin}^{(\alpha)\pm}$  no primeiro

( $k = 0$ ) e no último ponto ( $k = N_r$ ) correspondem aos valores dados nas condições de contorno (4.94)-(4.95) e portanto conhecidos.

Os pontos da descontinuidade da função de distribuição ( $\theta_0, RINT$ ) são obtidos pelo mesmo processo descrito na seção anterior como também o procedimento para se determinar a grade para os parâmetros, isto é, por critérios de convergência e verificação das leis de conservação de massa, momento linear e energia descritas adiante.

Os cálculos para este modelo foram feitos para a razão de  $R_1/R_0=0,5$  e para o parâmetro de rarefação  $\delta$  variando de 0,01 a 50 com cinco valores da velocidade angular  $\omega = 0; 0,25; 0,5; 0,75$  e 1. Para se estimar a precisão numérica testes foram feitos para  $\delta = 0,1; 1; 10; 20; 40$  e 50 com  $\omega=1$  e com dupla precisão nos parâmetros.

Como um critério adicional de precisão foi utilizado a verificação das leis de conservação de massa, momento linear e energia que serão deduzidas a seguir.

Para um sistema estacionário a equação da continuidade (2.31) para campos que só dependem da coordenada radial se reduz a  $\frac{\partial \rho r' u'_r}{\partial r'} = 0$ , que integrada nos fornece na forma adimensional:

$$n_0 u_r^{(\alpha)} r = \text{const.} \quad (4.106)$$

Da mesma maneira a equação de balanço de momento linear na direção  $\varphi'$  (2.33) passa a ser escrita como:

$$\rho \left( u'_r \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} + \frac{u'_r u'_\varphi}{r'} \right) = \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} (r'^2 \sigma'_{r\varphi}).$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação acima é quadrático nos desvios, portanto pode ser desprezado:

$$\rho \frac{u'_r u'_\varphi}{r'} - \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} (r'^2 \sigma'_{r\varphi}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial r'} [r'^2 \sigma'_{r\varphi} - \rho u'_r r'^2 u'_\varphi] = 0, \quad (4.107)$$

se usarmos a condição (4.106) na forma dimensional e desprezando novamente termos quadráticos. A integração da equação acima em função de quantidades adimensionais é:

$$\left[ \sigma'_{r\varphi} - \omega \frac{n_0}{n_{00}} u_r^{(\alpha)} r \right] r^2 = \text{const.}$$

Quanto ao balanço de energia (2.35) temos que esta equação se reduz a

$$\rho u'_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r'} = - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' q_r) - P \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r).$$

O termo  $\rho u'_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r'}$  é de segunda ordem, assim com  $P = n_0 k T_0$  resulta

$$0 = - \frac{\partial}{\partial r'} (r' q_r) - k T_0 \frac{\partial n_0 r' u'_r}{\partial r'} + k T_0 r' u'_r \frac{\partial n_0}{\partial r'}.$$

Notando que da equação (4.106)

$$\frac{\partial n_0 r' u'_r}{\partial r'} = 0$$

e que

$$\frac{\partial n_0}{\partial r'} = 2n_0\Omega_0^2 r' \beta_0^2,$$

como calculado anteriormente obtemos que

$$0 = -\frac{\partial}{\partial r'}(r'q_r) + kT_0(n_0 r' u_r') 2\Omega_0^2 r' \beta_0^2. \quad (4.108)$$

A integração da equação (4.108) apresenta sua forma adimensional como:

$$\left[ q_r^{(\alpha)} - \frac{n_0}{n_{00}} u_r^{(\alpha)} (\omega r)^2 \right] r = \text{const.}$$

Resumidamente, as leis de conservação de massa, momento linear e energia utilizadas no programa como um critério adicional de precisão são expressas por

$$n_0 u_r^{(\alpha)} r = \text{const}, \quad \left[ \sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} - \omega \frac{n_0}{n_{00}} u_r^{(\alpha)} r \right] r^2 = \text{const},$$

$$\left[ q_r^{(\alpha)} - \frac{n_0}{n_{00}} u_r^{(\alpha)} (\omega r)^2 \right] r = \text{const.}$$

A análise baseada nos testes numéricos e nas leis de conservação mostram que o erro numérico não excede 1%.

#### 4.4.3 Relações de Reciprocidade de Onsager - Casimir

Em 1931 Onsager [38] estabeleceu a relação de reciprocidade entre os coeficientes de transporte descrevendo fenomenologicamente leis de processos irreversíveis. Mais tarde Casimir [39] generalizou estas relações de reciprocidade para um grande número de fenômenos irreversíveis. Esta questão de não-equilíbrio termodinâmico é muito importante e descrita em muitos livros [57, 58, 59] e uma descrição bem detalhada é apresentada na monografia de Groot e Mazur [57].

A forma genérica para um fluxo termodinâmico qualquer  $J_i$  quando o estado de equilíbrio é fracamente perturbado, pode ser representada por

$$J_i = \sum_j^N \Lambda_{ij} X_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.109)$$

onde  $X_j$  são forças termodinâmicas caracterizadas, por exemplo, pelo gradiente de temperatura, pressão, velocidade, etc, que mantem o sistema fora de equilíbrio.  $N$  é igual ao número de forças e fluxos que estamos considerando e  $\Lambda_{ij}$  representam os coeficientes de transporte. Existem forças termodinâmicas que mudam de sinal com relação a inversão temporal, por exemplo a velocidade, embora tenham outras que permanecem com o mesmo sinal como o gradiente de temperatura. Segundo a teoria termodinâmica dos processos irreversíveis a produção de entropia é uma quantidade positiva definida dada por

$$\sigma = \sum_{i=1}^N J_i X_i. \quad (4.110)$$

Com base na equação (4.109) podemos escrever a produção de entropia como

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} X_j X_i,$$

resultando que a matriz dos coeficientes de transporte é positiva definida. Os elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes de transporte estão relacionados aos efeitos diretos enquanto que os outros fora da diagonal principal com os efeitos cruzados. Sendo válida a equação (4.110), então os coeficientes de transporte satisfazem as relações de reciprocidade de Onsager-Casimir, isto é,

$$\Lambda_{ij} = \pm \Lambda_{ji},$$

onde o sinal "+" é adotado quando as forças termodinâmicas  $X_i$  e  $X_j$  apresentarem a mesma paridade em relação a reversibilidade do tempo, e o sinal negativo "-", quando as forças apresentarem paridades diferentes.

As relações entre os coeficientes de transporte são úteis pois diminuem o número de coeficientes a se determinar. Ainda estas relações podem ser usadas como um critério de controle de precisão para problemas que envolvem vários fluxos e forças termodinâmicas.

Em um sistema que se encontra em rotação, a velocidade angular também muda de sinal com relação à inversão do tempo e a relação entre os coeficientes de transporte é dada por:

$$\Lambda_{ij}(\Omega) = \pm \Lambda_{ij}(-\Omega) = \epsilon_i \epsilon_j \Lambda_{ji}(-\Omega), \quad (4.111)$$

onde  $\epsilon_j$  é a paridade da força termodinâmica  $X_j$  com relação à inversão temporal.

No caso em estudo os fluxos termodinâmicos são  $J_P$ ,  $J_\Omega$  e  $J_T$  e estes se referem às forças termodinâmicas  $X_P$  (variação na pressão),  $X_\Omega$  (variação na velocidade angular) e  $X_T$  (variação na temperatura). As equações que expressam os fluxos termodinâmicos em relação às forças termodinâmicas são dadas por:

$$\begin{aligned} J_P &= \Lambda_{PP} X_P + \Lambda_{P\Omega} X_\Omega + \Lambda_{PT} X_T, \\ J_\Omega &= \Lambda_{\Omega P} X_P + \Lambda_{\Omega\Omega} X_\Omega + \Lambda_{\Omega T} X_T, \\ J_T &= \Lambda_{TP} X_P + \Lambda_{T\Omega} X_\Omega + \Lambda_{TT} X_T. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Segundo as relações de reciprocidade de Onsager-Casimir (4.111) os coeficientes de transporte são escritos como

$$\Lambda_{\Omega P}(\Omega) = -\Lambda_{P\Omega}(-\Omega), \quad \Lambda_{TP}(\Omega) = \Lambda_{PT}(-\Omega), \quad \Lambda_{\Omega T}(\Omega) = -\Lambda_{T\Omega}(-\Omega), \quad (4.113)$$

onde as seguintes convenções foram adotadas  $\epsilon_P = +1$ ,  $\epsilon_\Omega = -1$  e  $\epsilon_T = +1$ .

Sharipov [32] mostrou que os fluxos termodinâmicos  $J_P$ ,  $J_\Omega$  e  $J_T$  e os campos  $u'_r$ ,  $\sigma'_{r\varphi}$  e  $q'_r$  no cilindro interior estão relacionados através de

$$J_P = 2\pi R_1 n_0 u'_r \Big|_{r'=R_1}$$

$$J_\Omega = -4\pi R_1 \frac{\beta_0}{m} \sigma'_{r\varphi} \Big|_{r'=R_1}$$

$$J_T = 2\pi R_1 \frac{1}{kT_0} q'_r \Big|_{r'=R_1}. \quad (4.114)$$

Comparando as expressões (4.112) com (4.114) e com o uso de (4.71) para  $u'_r$ , (4.80) para  $\sigma'_{r\varphi}$ , (4.75) para  $q'_r$ , e  $P_{00} = n_{00}kT_0$  obtemos as expressões para os coeficientes de transporte

$$\Lambda_{P\alpha} = 2\pi R_1 \beta_0^{-1} n_{00} u_r^{(\alpha)} \Big|_{r'=R_1}, \quad (4.115)$$

$$\Lambda_{\Omega\alpha} = -4\pi R_1 \beta_0^{-1} n_{00} \sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} \Big|_{r'=R_1}, \quad (4.116)$$

$$\Lambda_{T\alpha} = 2\pi R_1 \beta_0^{-1} n_{00} q_r^{(\alpha)} \Big|_{r'=R_1}, \quad (4.117)$$

onde  $\alpha$  assume os índices  $P, \Omega$  e  $T$ .

Usando as relações (4.113) em (4.115)-(4.117) resulta que no ponto  $r' = R_1$  devemos ter

$$2P_{00}\sigma_{r\varphi}^{(P)}(\Omega) = -P_0(R_1)u_r^{(\Omega)}(\Omega), \quad P_{00}q_r^{(P)}(\Omega) = P_0(R_1)u_r^{(T)}(\Omega), \quad 2\sigma_{r\varphi}^{(T)}(\Omega) = -q_r^{(\Omega)}(\Omega), \quad (4.118)$$

onde foram utilizadas as relações

$$u_r^{(\Omega)}(\Omega) = -u_r^{(\Omega)}(-\Omega), \quad u_r^{(T)}(\Omega) = u_r^{(T)}(-\Omega),$$

$$+q_r^{(\Omega)}(\Omega) = -q_r^{(\Omega)}(-\Omega), \quad q_r^{(P)}(\Omega) = q_r^{(P)}(-\Omega),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(T)}(\Omega) = -\sigma_{r\varphi}^{(T)}(-\Omega), \quad \sigma_{r\varphi}^{(P)}(\Omega) = -\sigma_{r\varphi}^{(P)}(-\Omega),$$

conforme o artigo [32].

Os efeitos cruzados apresentam as seguintes interpretações físicas:

- O campo  $\sigma_{r\varphi}^{(P)}$  descreve a transferência de momento entre os cilindros causada pela diferença de pressão  $\Delta P$ . Este campo é acoplado com o fluxo de massa radial  $n_0 u_r^{(\Omega)}$  devido à diferença da velocidade angular  $\Delta\Omega$ . Como a velocidade radial  $u_r^{(\Omega)}$  é uma função da velocidade angular  $\omega$ , conclui-se que para cilindros em repouso ( $\omega = 0$ ),  $\sigma_{r\varphi}^{(P)} = 0$  e  $u_r^{(\Omega)} = 0$ , isto é, estes campos existem apenas em sistemas em rotação.
- O campo  $q_r^{(P)}$  descreve o fluxo de calor radial causado pela diferença de pressão  $\Delta P$ . Este campo está relacionado com o fluxo de massa radial  $n_0 u_r^{(T)}$  devido a diferença de temperatura  $\Delta T$ . Este campo existe também no estado de repouso.
- O campo  $\sigma_{r\varphi}^{(T)}$  descreve a transferência de momento entre os cilindros devido a diferença de temperatura  $\Delta T$ . Este campo é acoplado com o fluxo de calor radial  $q_r^{(\Omega)}$  devido a diferença de velocidade  $\Delta\Omega$ . Como  $q_r^{(\Omega)}$  é uma função de  $\omega$ , estes dois campos existem apenas em sistemas em rotação. Deve-se notar que um fenômeno análogo existe nos gases

Tabela 4.3: Valores de  $\lambda$  (elementos fora da diagonal principal)

$\delta$	$\omega$	$\lambda_{PT}$	$\lambda_{TP}$	$\lambda_{P\Omega}$	$\lambda_{\Omega P}$	$\lambda_{T\Omega}$	$\lambda_{\Omega T}$
0,01	0	-0,1409	-0,1409	0	0	0	0
	0,5	-0,1281	-0,1281	0,0001263	0,0001263	-0,0001186	-0,0001183
	1	-0,09463	-0,09463	0,0001456	0,0001457	-0,0001138	-0,0001136
0,1	0	-0,1399	-0,1399	0	0	0	0
	0,5	-0,1277	-0,1272	0,001268	0,001268	-0,001171	-0,001172
	1	-0,09392	-0,09392	0,001454	0,001456	-0,001119	-0,001122
1	0	-0,1291	-0,1291	0	0	0	0
	0,5	-0,1174	-0,1174	0,01226	0,01128	-0,009533	-0,009567
	1	-0,08739	-0,08744	0,01352	0,01354	-0,009329	-0,009370
4	0	-0,09904	-0,09906	0	0	0	0
	0,5	-0,09340	-0,09340	0,03950	0,03980	-0,02023	-0,02026
	1	-0,07376	-0,07375	0,04060	0,04092	-0,02276	-0,02286
10	0	-0,06568	-0,06376	0	0	0	0
	0,5	-0,06738	-0,06742	0,06525	0,06584	-0,02075	-0,02072
	1	-0,06008	-0,06010	-0,06440	-0,06502	-0,02961	-0,02970
40	0	-0,02374	-0,02405	0	0	0	0
	0,5	-0,03054	-0,03088	0,07724	0,07893	-0,01194	-0,01177
	1	-0,03362	-0,03377	0,06815	0,06963	-0,02427	-0,02421

poliatômicos na presença de campo magnético. Scott and Sturmer [60] mostraram que existe um torque num gás poliatômico confinado entre dois cilindros se eles estiverem a temperaturas diferentes, isto é, neste caso o campo  $\sigma_{r\varphi}^{(T)}$  surge devido à combinação do campo magnético externo e do gradiente de temperatura.

Nas Tabelas 4.3 e 4.4 os coeficientes cinéticos adimensionais

$$\lambda_{\alpha\gamma} = \frac{\beta_0}{2\pi R_1 n_{00}} \Lambda_{\alpha\gamma}$$

são dados para diferentes valores de  $\delta$  e  $\omega = 1$ . Uma análise dos resultados numéricos mostra que os coeficientes de transporte referentes aos efeitos cruzados satisfazem as relações de reciprocidade dentro da precisão numérica.

#### 4.4.4 Resultados e Discussões

##### a) Fluxo devido à Diferença de Pressão

Na Tabela 4.5 os valores da velocidade, do fluxo de calor e do tensor tensão devido a diferença de pressão no ponto intermediário ( $r=0,75$ ) entre os cilindros é apresentado. As conclusões são: i) A velocidade radial  $u_r^{(P)}$  e a componente radial do fluxo de calor  $q_r^{(P)}$  são afetados significativamente pela rotação ; ii) A velocidade tangencial  $u_\varphi^{(P)}$  é negativa, isto é, o gás roda com uma velocidade angular menor do que a dos cilindros. Esta é uma consequência da ação

Tabela 4.4: Valores de  $\lambda$  (elementos da diagonal principal)

$\delta$	$\lambda$			
	$\omega$	$\lambda_{PP}$	$\lambda_{TT}$	$\lambda_{\Omega\Omega}$
0,01	0	0,2822	0,6341	0,5639
	0,5	0,2565	0,5765	0,5126
	1	0,1894	0,4259	0,3786
0,1	0	0,2831	0,6282	0,5609
	0,5	0,2569	0,5718	0,5100
	1	0,1890	0,427	0,3768
1	0	0,2901	0,5725	0,5305
	0,5	0,2591	0,5276	0,4837
	1	0,1847	0,4023	0,3603
4	0	0,3019	0,4393	0,4354
	0,5	0,2590	0,4188	0,4084
	1	0,1704	0,3454	0,3108
10	0	0,3091	0,2984	0,3063
	0,5	0,2516	0,2939	0,3077
	1	0,1498	0,2664	0,2700
40	0	0,3122	0,1129	0,1160
	0,5	0,2108	0,1147	0,1426
	1	0,09886	0,1174	0,1550

da força de Coriolis; iii) A componente tangencial do fluxo de calor  $q_{\varphi}^{(P)}$  e o tensor tensão  $\sigma_{r\varphi}^{(P)}$  decrescem para grandes valores de  $\delta$ ; iv) O tensor tensão  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(P)}$  aumenta com o aumento de  $\delta$ . Para a situação em que o sistema se encontra em repouso  $\omega=0$ , nós temos que  $u_{\varphi}^{(P)}$ ,  $q_{\varphi}^{(P)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(P)}$  são nulos. Os valores de  $u_r^{(P)}$  e  $u_{\varphi}^{(P)}$  presentes na Tabela 4.5 são comparáveis com os contidos nas Tabelas 4.1 e 4.2.

### b) Fluxo devido à Diferença de Velocidade Angular

Na Tabela 4.6 são apresentados os resultados para os campos causados pela diferença na velocidade angular. Uma análise dos resultados mostra que a velocidade tangencial  $u_{\varphi}^{(\Omega)}$  é fracamente afetada pela rotação para pequenos valores de  $\delta$ , enquanto para grandes valores de  $\delta$  a velocidade  $u_{\varphi}^{(\Omega)}$  depende significativamente do valor da velocidade angular. Nota-se que  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(\Omega)}$  troca de sinal com o aumento de  $\delta$ . Os campos  $u_r^{(\Omega)}$ ,  $q_r^{(\Omega)}$ ,  $q_{\varphi}^{(\Omega)}$  e  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(\Omega)}$  são nulos para  $\omega=0$ .

### c) Fluxo devido à Diferença de Temperatura

Na Tabela 4.7 constam os resultados para os campos causados pela diferença de temperatura. De acordo com os resultados desta tabela, concluímos que  $q_r^{(T)}$  e  $u_r^{(T)}$  decrescem com o aumento de  $\omega$  e  $\delta$ , enquanto que  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(T)}$  aumenta com o valor de  $\omega$ . A velocidade tangencial  $u_{\varphi}^{(T)}$  é positiva, isto é, o gás roda mais rápido do que os cilindros. Se compararmos os valores de  $q_{\varphi}^{(T)}$  e  $q_r^{(T)}$  com

aqueles obtidos em [13], concluímos que o fluxo de calor é fracamente afetado pela evaporação e a condensação. Também se observa que para  $\omega=0$  os valores das quantidades  $u_\varphi^{(T)}$ ,  $q_\varphi^{(T)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(T)}$  são iguais a zero.

Tabela 4.5: Velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão devido à diferença de pressão no ponto intermediário ( $r = 0,75$ ) vs  $\delta$  e  $\omega$ .

$\delta$	$\omega$	$u_r^{(P)}$	$u_\varphi^{(P)}$	$q_r^{(P)}$	$q_\varphi^{(P)}$	$\sigma_{r\varphi}^{(P)}$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{(P)}$
0,01	0	0,1881	0	-0,0939	0	0	-0,0373
	0,25	0,1844	-0,0291	-0,0885	0,0283	0,0179	-0,0401
	0,5	0,1739	-0,0541	-0,0720	0,0479	0,0356	-0,0475
	0,75	0,1578	-0,0717	-0,0490	0,0535	0,0472	-0,0562
	1	0,1376	-0,0806	-0,0236	0,0450	0,0526	-0,0624
1	0	0,1934	0	-0,0861	0	0	-0,0578
	0,25	0,1887	-0,0431	-0,0804	0,0308	0,0180	-0,0608
	0,5	0,1757	-0,0788	-0,0648	0,0521	0,0333	-0,0683
	0,75	0,1566	-0,1025	-0,0430	0,0585	0,0437	-0,0767
	1	0,1342	-0,1127	-0,0198	0,0500	0,0483	-0,0816
10	0	0,2061	0	-0,0438	0	0	-0,1271
	0,25	0,1961	-0,1099	-0,0405	0,0135	0,0115	-0,1280
	0,5	0,1706	-0,1894	-0,0318	0,0225	0,0204	-0,1296
	0,75	0,1390	-0,2275	-0,0205	0,0254	0,0256	-0,1295
	1	0,1088	-0,2311	-0,0089	0,0232	0,0559	-0,1253
20	0	0,2078	0	-0,0277	0	0	-0,1446
	0,25	0,1938	-0,1654	-0,0252	0,0075	0,0093	-0,1458
	0,5	0,1606	-0,2721	-0,0190	0,0121	0,0157	-0,1480
	0,75	0,1238	-0,3097	-0,0118	0,0132	0,0186	-0,1478
	1	0,0924	-0,3008	-0,0050	0,0119	0,0189	-0,1426
40	0	0,2081	0	-0,0158	0	0	-0,1551
	0,25	0,1871	-0,2659	-0,0137	0,0037	0,0079	-0,1583
	0,5	0,1430	-0,4039	-0,0094	0,0055	0,0121	-0,1638
	0,75	0,1018	-0,4239	-0,0052	0,0056	0,0130	-0,1657
	1	0,0718	-0,3876	-0,0018	0,0049	0,0120	-0,1613
50	0	0,2081	0	-0,0130	0	0	-0,1573
	0,25	0,1839	-0,3123	-0,0109	0,0028	0,0076	-0,1615
	0,5	0,1355	-0,4585	-0,0071	0,0041	0,0112	-0,1686
	0,75	0,0936	-0,4662	-0,0037	0,0041	0,0116	-0,1713
	1	0,0647	-0,4173	-0,0011	0,0035	0,0106	-0,1671

Tabela 4.6: Velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão devido à diferença na velocidade angular no ponto intermediário ( $r = 0,75$ ) vs  $\delta$  e  $\omega$ .

$\delta$	$\omega$	$u_r^{(\Omega)}$	$u_\varphi^{(\Omega)}$	$q_r^{(\Omega)}$	$q_\varphi^{(\Omega)}$	$\sigma_{r\varphi}^{(\Omega)}$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\Omega)}$
0,01	0	0	0,1112	0	0	-0,1253	0
	0,25	0,00005	0,1112	-0,00005	-0,00009	-0,1224	0,0276
	0,5	0,0001	0,1107	-0,00007	0,0010	-0,1139	0,0528
	0,75	0,0001	0,1084	-0,00007	0,0050	-0,1007	0,0731
	1	0,0001	0,1031	-0,00004	0,0127	-0,0841	0,0854
1	0	0	0,1414	0	0	-0,1179	0
	0,25	0,0048	0,1398	-0,0037	-0,0078	-0,1147	0,0295
	0,5	0,0076	0,1351	-0,0058	0,0027	-0,1059	0,0556
	0,75	0,0100	0,1278	-0,0055	0,0048	-0,0924	0,0753
	1	0,0099	0,1179	-0,0034	0,0136	-0,0763	0,0866
10	0	0	0,2772	0	0	-0,0681	0
	0,25	0,0268	0,2595	-0,0067	-0,0006	-0,0656	0,0099
	0,5	0,0446	0,2153	-0,0104	0,0055	-0,0592	0,0182
	0,75	0,0507	0,1655	-0,00998	0,0123	-0,0508	0,0244
	1	0,0472	0,1249	-0,0333	0,0170	-0,0419	0,0291
20	0	0	0,3220	0	0	-0,0443	0
	0,25	0,0329	0,2926	-0,0047	0,0011	-0,0423	-0,0003
	0,5	0,0532	0,2230	-0,0070	0,0046	-0,0377	-0,0018
	0,75	0,0588	0,1527	-0,0066	0,0082	-0,0323	-0,00397
	1	0,0543	0,1024	-0,0040	0,0107	-0,0272	-0,0049
40	0	0	0,3490	0	0	-0,0258	0
	0,25	0,0354	0,2992	-0,0027	0,0008	-0,0241	-0,0069
	0,5	0,0359	0,1944	-0,0037	0,0024	-0,0207	-0,0162
	0,75	0,0559	0,1053	-0,0032	0,0038	-0,0176	-0,0265
	1	0,0506	0,0525	-0,0016	0,0048	-0,0151	-0,0345
50	0	0	0,3213	0	0,0003	-0,0223	0
	0,25	0,0339	0,2922	-0,00197	0,00064	-0,0203	-0,0085
	0,5	0,0519	0,1774	-0,00284	0,00182	-0,0166	-0,01961
	0,75	0,0531	0,0854	-0,0022	0,0028	-0,0138	-0,03198
	1	0,0478	0,0342	-0,0009	0,0035	-0,0118	-0,0419

Tabela 4.7: Velocidade, vetor fluxo de calor e tensor tensão devido à diferença de temperatura no ponto intermediário ( $r = 0,75$ ) vs  $\delta$  e  $\omega$ .

$\delta$	$\omega$	$u_r^{(T)}$	$u_\varphi^{(T)}$	$q_r^{(T)}$	$q_\varphi^{(T)}$	$\sigma_{r\varphi}^{(T)}$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{(T)}$
0,01	0	-0,0939	0	0,4227	0	0	0,0001
	0,25	-0,0922	0,0290	0,4111	-0,0713	-0,0096	0,0038
	0,5	-0,0869	0,0530	0,3777	-0,1262	-0,0178	0,0134
	0,75	-0,0788	0,0685	0,3266	-0,1537	-0,0236	0,0249
	1	-0,0682	0,0743	0,2642	-0,1521	-0,0263	0,0340
1	0	-0,0861	0	0,3817	0	0	0,0083
	0,25	-0,0844	0,0357	0,3725	-0,0659	-0,0075	0,0112
	0,5	-0,0796	0,0652	0,3456	-0,1175	-0,0142	0,0186
	0,75	-0,0724	0,0843	0,3034	-0,1466	-0,0193	0,0279
	1	-0,0635	0,0915	0,2500	-0,1497	-0,0222	0,0357
10	0	-0,0438	0	0,1989	0	0	0,0064
	0,25	-0,0445	0,0305	0,1975	-0,0152	-0,0022	0,0069
	0,5	-0,0457	0,0613	0,1924	-0,0299	-0,0048	0,0083
	0,75	-0,0458	0,0897	0,1822	-0,0432	-0,0075	0,0109
	1	-0,0437	0,1106	0,1651	-0,0534	-0,0101	0,0147
20	0	-0,0278	0	0,1288	0	0	0,0026
	0,25	-0,0292	0,0275	0,1285	-0,0057	-0,0013	0,0031
	0,5	-0,0320	0,059	0,1269	-0,0115	-0,0028	0,0047
	0,75	-0,0342	0,0923	0,1232	-0,0172	-0,0047	0,0075
	1	-0,0344	0,1204	0,1160	-0,0225	-0,0066	0,0114
40	0	-0,0160	0	0,0753	0	0	0,0007
	0,25	-0,0177	0,0265	0,0750	-0,0017	-0,0007	0,0014
	0,5	-0,020	0,0618	0,0749	-0,0036	-0,0016	0,0036
	0,75	-0,0234	0,1014	0,0729	-0,0055	-0,0028	0,0075
	1	-0,0245	0,1368	0,0712	-0,0075	-0,0040	0,0126
50	0	-0,0129	0	0,0613	0	0	0,0006
	0,25	-0,0146	0,276	0,0613	-0,0012	-0,0005	0,0013
	0,5	-0,0177	0,0649	0,0612	-0,0024	-0,0013	0,0037
	0,75	-0,0201	0,1066	0,0605	-0,0038	-0,0023	0,0081
	1	-0,0213	0,1442	0,0590	-0,0051	-0,0033	0,0137

# Capítulo 5

## Solução Hidrodinâmica

### 5.1 Introdução

O problema a ser resolvido neste capítulo considera o mesmo sistema do capítulo anterior, isto é, um gás confinado entre dois cilindros coaxiais com raios  $R_0$  e  $R_1$  ( $R_0 > R_1$ ). O sistema será resolvido com base nas equações da mecânica do contínuo obtendo a solução hidrodinâmica correspondente. À solução hidrodinâmica encontrada serão aplicadas condições de contorno apropriadas.

No regime cinético o parâmetro de rarefação  $\delta$  pode assumir valores muito pequenos enquanto que no regime hidrodinâmico este mesmo parâmetro poderá assumir valores muito grandes. Portanto o objetivo é poder comparar através da variação do parâmetro de rarefação  $\delta$  o comportamento dos campos da pressão, da velocidade e da temperatura, no limite do regime cinético para o regime hidrodinâmico, para alguns valores da velocidade angular.

Inicialmente consideraremos o caso do gás em rotação com uma única força termodinâmica agindo no sistema, a perturbação na densidade, para depois analisarmos o caso de três forças termodinâmicas agindo juntamente no sistema, ou seja, as perturbações na pressão, na velocidade angular e na temperatura. Devemos lembrar que a solução em equilíbrio dada pela seção 4.2 é única e válida também para este regime. Todas as soluções encontradas são estáveis pois estamos tratando de problemas lineares.

### 5.2 Gás em Rotação com Perturbação na Densidade

No regime hidrodinâmico o problema de um gás em rotação com perturbação na densidade pode ser resolvido com base nas equações estacionárias da continuidade e de Navier-Stokes [61]. Consideraremos o sistema com simetria axial contendo um gás compressível cuja solução independe da coordenada  $z$ . Diante destas considerações a equação da continuidade (2.31) e as equações de Navier-Stokes (2.36)-(2.37), para o estado estacionário com campos dependentes somente da coordenada radial  $r'$  podem ser escritas em coordenadas cilíndricas como:

a) equação da continuidade

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (\varrho r' u'_r) = 0, \quad (5.1)$$

b) equação de Navier-Stokes (componente  $r'$ )

$$nm \left[ u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r'} - \frac{u'^2_\varphi}{r'} \right] = -kT_0 \frac{\partial n}{\partial r'} + \frac{4\mu}{3} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right) - \frac{u'_r}{r'^2} \right], \quad (5.2)$$

c) equação de Navier-Stokes (componente  $\varphi'$ )

$$nm \left[ u'_r \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} + \frac{u'_r u'_\varphi}{r'} \right] = \mu \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} \right) - \frac{u'_\varphi}{r'^2} \right], \quad (5.3)$$

onde as relações  $P = nkT_0$  e  $\varrho = nm$  foram usadas e  $\mu$  é a viscosidade de cisalhamento. Nas equações acima  $u'_r$  e  $u'_\varphi$  são, respectivamente, as componentes radial e azimutal da velocidade do gás. As equações (5.1)-(5.3) apresentam três quantidades desconhecidas ( $u'_r, u'_\varphi, n$ ). A maneira que iremos proceder para achar a solução do sistema será inicialmente obter da equação (5.1) a solução para  $u'_r(r')$ , utilizar esta solução na equação (5.2) obtendo assim a solução para  $u'_\varphi(r')$  e então aplicar ambas à equação (5.3) obtendo assim a solução para a densidade do número de partículas  $n(r')$ .

As condições para a linearização das equações (5.1)-(5.3) são dadas abaixo:

$$n(r') = n_0(r') + \tilde{n}(r'),$$

$$u'_r = \tilde{u}_r(r'), \quad e \quad u'_\varphi = \Omega_0 r' + \tilde{u}_\varphi(r'), \quad (5.4)$$

com  $\tilde{n}(r')$ ,  $\tilde{u}_r(r')$  e  $\tilde{u}_\varphi(r')$  representando os desvios dimensionais da densidade e das velocidades radial e tangencial. Em todas as passagens das equações a seguir não serão considerados os termos com ordens superiores a um em relação aos desvios.

Integrando a equação (5.1) teremos facilmente:

$$n u'_r r' = \text{constante} \quad \text{ou} \quad n_0(r') \tilde{u}_r(r') r' = D_* = \text{constante}, \quad (5.5)$$

que representa a solução para o desvio da velocidade radial,  $\tilde{u}_r(r')$ .

Usando as condições para linearização (5.4), a equação (5.2) transforma-se em

$$2\tilde{u}_r(r')\Omega_0 = \frac{\mu}{2n_0(r')kT_0\beta_0^2} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial \tilde{u}_\varphi(r')}{\partial r'} \right) - \frac{\tilde{u}_\varphi(r')}{r'^2} \right]. \quad (5.6)$$

Portanto com o uso de (5.5) na equação acima encontramos a seguinte equação diferencial

$$\frac{4D_*\Omega_0\beta_0^2kT_0}{\mu} = \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial \tilde{u}_\varphi(r')}{\partial r'} \right) - \frac{\tilde{u}_\varphi(r')}{r'}.$$

A equação anterior é resolvida com facilidade de forma que a solução para o desvio da velocidade tangencial,  $\tilde{u}_\varphi(r')$ , será igual a

$$\tilde{u}_\varphi(r') = \frac{B_1}{r} + B_2 r + \frac{2D_*\Omega\beta_0^2 kT_0}{\mu} r \ln r, \quad (5.7)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são constantes de integração. As condições de contorno para o desvio da velocidade tangencial,  $\tilde{u}_\varphi(r')$ , nos cilindros exterior e interior são respectivamente

$$\tilde{u}_\varphi(R_0) = \tilde{u}_\varphi(R_1) = 0.$$

Aplicando estas condições de contorno em (5.7) determina-se as constantes  $B_1$  e  $B_2$ . Então a solução dimensional para o desvio dimensional da velocidade tangencial  $\tilde{u}_\varphi(r')$  fica conhecida a menos da constante  $D_*$ :

$$\tilde{u}_\varphi(r') = \frac{2D_*\Omega_0\beta_0^2 kT_0}{\mu} r' \left[ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \left( \frac{R_0^2}{r'^2} - 1 \right) + \ln \frac{r'}{R_0} \right]. \quad (5.8)$$

O procedimento seguinte é utilizar a equação (5.2) para se obter  $\tilde{n}(r')$ . Substituindo (5.4) e (5.5) em (5.2) vem:

$$\begin{aligned} -(\Omega_0 r' + 2\Omega_0 \tilde{u}_\varphi(r')) &= -\frac{1}{2n_0(r')\beta_0^2} \left( 1 - \frac{\tilde{n}(r')}{n_0(r')} \right) \left[ \frac{dn_0(r')}{r'} \left( 1 + \frac{\tilde{n}(r')}{n_0(r')} \right) + n_0(r') \frac{d}{dr'} \left( \frac{\tilde{n}(r')}{n_0(r')} \right) \right] \\ &+ \frac{4}{3} \frac{\mu D_*}{(2n_0(r')kT_0)\beta_0^2} \left[ \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \left( r' \frac{d}{dr'} \left( \frac{1}{n_0(r')r'} \right) \right) - \frac{1}{n_0(r')r'^3} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Estão presentes na equação (5.9) as derivadas  $\frac{dn_0(r')}{r'}$  e  $\frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \left( r' \frac{d}{dr'} \left( \frac{1}{n_0(r')r'} \right) \right)$  cujos valores com o uso da expressão (4.5) para  $n_0(r')$ , são:

$$\frac{dn_0(r')}{r'} = 2\Omega_0^2 \beta_0^2 r' n_0(r'), \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \left( r' \frac{d}{dr'} \left( \frac{1}{n_0(r')r'} \right) \right) = 4\Omega_0^4 \beta_0^4 \frac{r'}{n_0(r')} + \frac{1}{n_0(r')r'^3}. \quad (5.11)$$

Substituindo (5.8), (5.10) e (5.11) em (5.9), ao se isolar o termo  $\frac{d}{dr'} \left( \frac{\tilde{n}}{n_0(r')} \right)$  resulta:

$$\frac{d}{dr'} \left( \frac{\tilde{n}(r')}{n_0(r')} \right) = \frac{8D_*\Omega_0^2\beta_0^4 kT_0}{\mu} r' \left[ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \left( \frac{R_0^2}{r'^2} - 1 \right) + \ln \frac{r'}{R_0} \right] + \frac{16}{3} \frac{\mu D_*\Omega_0^4\beta_0^4}{kT_0} \frac{r'}{n_0^2(r')}. \quad (5.12)$$

Integrando a equação acima, todas as integrais em relação a coordenada radial dimensional  $r'$  envolvidas na equação (5.12) são de solução direta sendo que a integral do último termo assume o valor

$$\int \frac{r'}{n_0^2(r')} dr' = -\frac{1}{4\Omega_0^2\beta_0^2} \frac{1}{n_0^2(r')}.$$

Então como resultado obtemos:

$$\frac{\tilde{n}}{n_0(r')} = \frac{8D_*\Omega_0^2\beta_0^4kT_0}{\mu} \left[ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \left( R_0^2 \ln r' - \frac{r'^2}{2} \right) + \frac{r'^2}{2} \ln r' - \frac{r'^2}{4} - \frac{r'^2}{2} \ln R_0 \right] - \frac{4}{3} \frac{\mu D_* \Omega_0^2 \beta_0^2}{kT_0} \frac{1}{n_0^2(r')} + L \quad (5.13)$$

onde  $L$  representa uma constante de integração.

A condição de contorno para o cilindro exterior é de que  $\tilde{n}(R_0) = 0$ , pois não existe perturbação da densidade neste cilindro, que aplicada a equação (5.13) nos fornece a constante de integração  $L$  igual a:

$$L = -\frac{8D_*\Omega_0^2\beta_0^4kT_0}{\mu} \left[ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \left( R_0^2 \ln R_0 - \frac{R_0^2}{2} \right) - \frac{R_0^2}{4} \right] + \frac{4}{3} \frac{\mu D_* \Omega_0^2 \beta_0^2}{kT_0} \frac{1}{n_0^2(R_0)}. \quad (5.14)$$

Então a solução dimensional para o desvio da densidade está determinada a menos da constante  $D_*$

$$\frac{\tilde{n}}{n_0(r')} = \frac{8D_*\Omega_0^2\beta_0^4kT_0R_0^2}{\mu} \left[ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \left[ \left( \ln \frac{r'}{R_0} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{R_0^2} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{R_0^2} \left( \ln \frac{R_1}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r'^2}{R_0^2} \right) \right] + \frac{4}{3} \frac{\mu D_* \Omega_0^2 \beta_0^2}{kT_0} \left( \frac{1}{n_0^2(R_0)} - \frac{1}{n_0^2(r')} \right). \quad (5.15)$$

No cilindro interior a perturbação na densidade será representada por  $\tilde{n}(R_1) = n_1$ . Então para a condição de contorno no cilindro interior, (5.15) transforma-se em:

$$\frac{n_1}{n_0(R_1)} = \frac{8D_*\Omega_0^2\beta_0^4kT_0R_0^2}{\mu} \left[ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right) \left[ \left( \ln \frac{R_1}{R_0} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{R_0^2} \left( \ln \frac{R_1}{R_0} \right) + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_0^2} \right) \right] + \frac{4}{3} \frac{\mu D_* \Omega_0^2 \beta_0^2}{kT_0} \left( \frac{1}{n_0^2(R_0)} - \frac{1}{n_0^2(R_1)} \right). \quad (5.16)$$

Simplificando a equação acima é possível escrever a constante  $D_*$  como:

$$D_* = \frac{n_1}{n_0(R_1)\Omega_0^2} \left[ \frac{8\beta_0^4R_0^2kT_0}{\mu} \left( \frac{-R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_0^2} \right) \right) + \frac{4}{3} \frac{\mu\beta_0^2}{kT_0} \left( \frac{1}{n_0^2(R_0)} - \frac{1}{n_0^2(R_1)} \right) \right]^{-1}. \quad (5.17)$$

Ficam assim determinadas as soluções dimensionais para  $\tilde{n}(r')$  e  $\tilde{u}_\varphi(r')$ , como também para  $\tilde{u}_r(r')$  através da equação (5.5).

O objetivo agora é transformar estas soluções dimensionais para soluções adimensionais. Para isto serão utilizadas as expressões (4.26) para o parâmetro de rarefação  $\delta$ , (4.25) para

a viscosidade de cisalhamento  $\mu$  e (4.15) para a velocidade angular adimensional  $\omega$ . Ainda utilizaremos que

$$\tilde{n}(r') = \vartheta(r') \frac{n_1}{n_0(R_1)}, \quad \tilde{u}_r(r') = u_r(r') \beta_0^{-1} \frac{n_1}{n_0(R_1)}, \quad \tilde{u}_\varphi(r') = u_\varphi(r') \beta_0^{-1} \frac{n_1}{n_0(R_1)},$$

com  $\vartheta$ ,  $\tilde{u}_r$  e  $\tilde{u}_\varphi$  representando os desvios adimensionais da densidade e das velocidades radial e tangencial. Deve-se notar que  $n_1 \ll n_0(R_1)$ .

Assim, de uma maneira simplificada, podemos apresentar as soluções adimensionais na forma abaixo:

$$\vartheta(r) = D \left\{ \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \ln \left( \frac{R_0}{R_1} \right) \left[ \ln r - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \right] + \frac{1}{2} r^2 \ln r + \frac{1}{4} (1 - r^2) + \frac{1}{6\delta^2} \left[ \frac{n_{00}^2}{n_0^2(R_0)} - \frac{n_{00}^2}{n_0^2(r)} \right] \right\}, \quad (5.18)$$

$$u_r(r) = \frac{D}{8\delta\omega^2 r} \frac{n_{00}}{n_0(r)}, \quad (5.19)$$

$$u_\varphi(r) = \frac{D}{4\omega} \left[ \ln r + \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \ln \left( \frac{R_0}{R_1} \right) \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) \right] r, \quad (5.20)$$

onde:

$$D = \left\{ \frac{R_0^2 - R_1^2}{4R_0^2} - \frac{R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \left[ \ln \left( \frac{R_0}{R_1} \right) \right]^2 + \frac{1}{6\delta^2} \left[ \frac{n_{00}^2}{n_0^2(R_0)} - \frac{n_{00}^2}{n_0^2(R_1)} \right] \right\}^{-1},$$

com  $r = r'/R_0$ .

Então as equações (5.18)-(5.20) representam a solução hidrodinâmica para o desvio da densidade e da velocidade.

## 5.2.1 Resultados e Discussões

Ao se analisar as soluções acima duas observações devem ser feitas:

(i) A velocidade tangencial  $u_\varphi$  é negativa, isto é, o gás contido entre os dois cilindros roda mais devagar que os próprios cilindros. Este resultado é uma consequência da ação da força de Coriolis.

(ii) Se  $\omega \rightarrow 0$  ambos  $u_r$  e  $u_\varphi$  tendem para o infinito. Esta singularidade significa que, quando os cilindros estão em repouso, não existe solução linear no regime hidrodinâmico. Se quisermos eliminar a singularidade devemos modificar as condições de contorno, o que será feito na seção a seguir. A diferença entre as soluções hidrodinâmica e cinética fica mais visível quando representamos graficamente a velocidade radial  $u_r$  para  $\omega=1$ , Figura 5.1, onde utilizou-se os dados da Tabela 4.1 para o regime cinético e os valores da solução hidrodinâmica (5.19). Como a solução cinética é uma solução exata, ajustaremos a curva contida na Figura 5.1 alterando as condições de contorno [62, 63] das equações hidrodinâmicas.

Assim, com as condições de contorno usadas, a diferença entre a solução numérica da equação cinética e a obtida da equação de Navier-Stokes é significativamente grande. Para valores menores da velocidade angular, isto é,  $\omega < 1$ , a diferença é ainda maior.

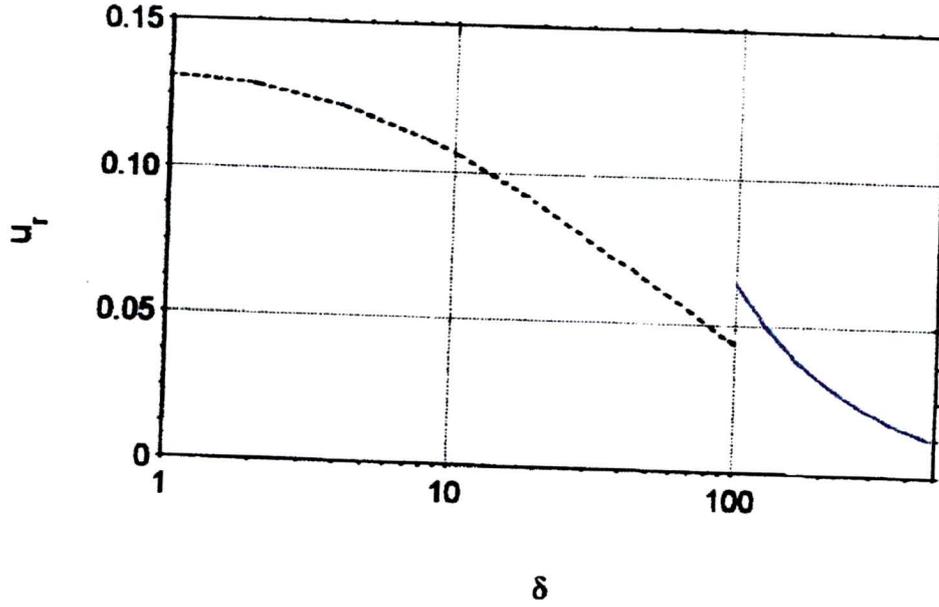


Figura 5.1: Velocidade radial  $u_r$  versus  $\delta$  para  $\omega = 1$ : linha sólida - solução hidrodinâmica; linha tracejada - solução cinética.

### 5.3 Gás em Rotação com Perturbações na Pressão, na Velocidade Angular e na Temperatura

Iremos resolver o problema do gás com perturbações na pressão, na velocidade angular e na temperatura com base nas equações da continuidade (2.31), de Navier-Stokes (2.36)-(2.37) e da energia (2.39). Levando-se em conta a simetria axial do problema e o fato da solução não depender da coordenada  $z$  os campos da pressão  $P(r')$ , das velocidades  $u'_r(r')$ ,  $u'_\varphi(r')$  e da temperatura  $T(r')$  em coordenadas cilíndricas para um gás em regime estacionário são dados por:

a) equação da continuidade

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{P}{T} r' u'_r \right) = 0, \quad (5.21)$$

b) equação de Navier-Stokes (componente  $r'$ )

$$\rho \left( u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r'} - \frac{u'^2_\varphi}{r'} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r'} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{\mu}{r'} \frac{\partial (r' u'_r)}{\partial r'} \right) - \frac{2}{r'} u'_r \frac{\partial \mu}{\partial r'}, \quad (5.22)$$

c) equação de Navier-Stokes (componente  $\varphi'$ )

$$\rho \left( u'_r \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} + \frac{u'_r u'_\varphi}{r'} \right) = \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[ \mu r'^3 \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) \right], \quad (5.23)$$

d) equação da energia

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{k}{m} \rho u'_r \frac{\partial T}{\partial r'} &= -\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \kappa \frac{\partial T}{\partial r'} \right) - P \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) \right) \\ &= \mu \left( \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial (r' u'_r)}{\partial r'} \right]^2 - 4 \frac{u'_r}{r'^2} \frac{\partial (r' u'_r)}{\partial r'} + 4 \frac{u'^2_r}{r'^2} + \left[ r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nas equações acima a densidade de massa  $\rho$  é dada pela equação térmica de estado  $P = k\rho T/m$ . A equação da continuidade (2.31)

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (\rho r' u'_r) = 0$$

pode ser escrita como

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_r) = -\frac{1}{\rho} \left( u'_r \frac{\partial \rho}{\partial r'} \right) = -\frac{1}{n} \left( u'_r \frac{\partial n}{\partial r'} \right), \quad (5.25)$$

que pode ser utilizada para transformar a equação (5.24) em

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} k n u'_r \frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \kappa \frac{\partial T}{\partial r'} \right) - u'_r \frac{\partial P}{\partial r'} \\ = \mu \left( \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{r'} \frac{\partial (r' u'_r)}{\partial r'} \right]^2 - 4 \frac{u'_r}{r'^2} \frac{\partial (r' u'_r)}{\partial r'} + 4 \frac{u'^2_r}{r'^2} + \left[ r' \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'_\varphi}{r'} \right) \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

As equações (5.21)-(5.23), (5.26) representam um sistema de quatro equações diferenciais acopladas aos campos  $u'_r(r')$ ,  $u'_\varphi(r')$ ,  $P(r')$  e  $T(r')$  e o objetivo é a determinação destes campos para apropriadas condições de contorno.

De início a equação (5.21) através do uso das formas linearizadas (4.70)-(4.73) será escrita na forma abaixo

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{P_0}{T_0} r u_r^{(\alpha)} \right) = 0, \quad \alpha = P, \Omega, T$$

em que  $r = r'/R_0$  e utilizando  $P_0 = n_0 k T_0$  teremos

$$\frac{d \ln(r u_r)}{dr} = -\frac{d \ln n_0(r')}{dr}, \quad (5.27)$$

onde a solução adimensional da equação diferencial acima pode ser escrita como

$$u_r^{(\alpha)}(r) r = \frac{D^{(\alpha)}}{n_0(r)} n_{00}. \quad (5.28)$$

$D^{(\alpha)}$  representa uma constante a ser determinada adiante de acordo com as condições de contorno a serem adotadas para cada caso de perturbação a ser tratada.

Agora o próximo procedimento é para se determinar as formas adimensionais das equações (5.23) e (5.26). Substitui-se nestas equações as formas linearizadas para  $P(r')$ ,  $u_r'(r')$ ,  $u_\varphi'(r')$  e  $T(r')$  dadas por (4.70)-(4.73), respectivamente. Usando ainda que

$$r = r'/R_0, \quad \varrho = \frac{Pm}{kT}$$

e a expressão (4.25) para a viscosidade de cisalhamento  $\mu$ , resultam as seguintes formas adimensionais para as equações (5.23) e (5.26), respectivamente

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(u_\varphi^{(\alpha)}(r)r)}{dr} \right] = \frac{4n_0(r)}{n_{00}} u_r^{(\alpha)}(r) \omega \delta, \quad (5.29)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\tau^{(\alpha)}(r)}{dr} \right] = -\frac{16n_0(r)}{15n_{00}} u_r^{(\alpha)}(r) r^2 \omega^2 \delta, \quad (5.30)$$

onde foram desprezados os termos com ordem superior a um em  $X_\alpha$ .

Como pode-se observar, as equações (5.29) e (5.30) apresentam como incógnitas as quantidades  $u_\varphi^{(\alpha)}$  e  $\tau^{(\alpha)}$ , respectivamente. Suas soluções são obtidas de forma simples pois  $u_r^{(\alpha)}(r)$  é dada pela solução (5.28) com  $n_0(r)$  representada pela equação (4.5). Sendo assim,  $u_r^{(\alpha)}$  e  $n_0(r)$  são funções conhecidas de  $r$ , permitindo obter as seguintes soluções para  $u_\varphi^{(\alpha)}(r)$  e  $\tau^{(\alpha)}(r)$

$$u_\varphi^{(\alpha)}(r) = 2\delta\omega D^{(\alpha)} \left( r \ln r - B_1^{(\alpha)} r + \frac{B_2^{(\alpha)}}{r} \right), \quad (5.31)$$

$$\tau^{(\alpha)}(r) = \frac{4}{15} D^{(\alpha)} \omega^2 \delta \left( C_1^{(\alpha)} \ln r + C_2^{(\alpha)} - r^2 \right), \quad (5.32)$$

onde  $B_1^{(\alpha)}$ ,  $B_2^{(\alpha)}$ ,  $C_1^{(\alpha)}$  e  $C_2^{(\alpha)}$  são constantes de integração a serem determinadas.

Para se obter a solução de  $v^{(\alpha)}(r)$ , novamente iremos utilizar as formas linearizadas (4.70)-(4.73) que substituídas em (5.22) resultam

$$\frac{dv^{(\alpha)}(r)}{dr} + 2r\omega^2 \tau^{(\alpha)}(r) = 4\omega u_\varphi^{(\alpha)}(r) + \frac{16n_{00}}{3n_0(r)} u_r^{(\alpha)}(r) r^2 \frac{\omega^4}{\delta}. \quad (5.33)$$

Como  $u_r^{(\alpha)}(r)$ ,  $u_\varphi^{(\alpha)}(r)$ ,  $\tau^{(\alpha)}(r)$  e  $n_0(r)$  são funções conhecidas de  $r$  pelas equações (5.28), (5.31), (5.32) e (4.5) respectivamente, podemos integrar a equação (5.33) e obter a solução para o desvio da pressão  $v^{(\alpha)}(r)$  dada por

$$v^{(\alpha)}(r) = 8\delta\omega^2 D^{(\alpha)} \left[ \frac{1}{2} g(r) - \frac{B_1^{(\alpha)}}{2} r^2 + B_2^{(\alpha)} \ln r + \frac{\omega^2}{60} \left( r^4 - 2C_2^{(\alpha)} r^2 - 2C_1^{(\alpha)} g(r) \right) + L^{(\alpha)} \right] - \frac{4}{3} \frac{n_{00}^2}{n_0^2(r)} \frac{D^{(\alpha)} \omega^2}{\delta}, \quad (5.34)$$

onde  $L^{(\alpha)}$  também é uma constante de integração e

$$g(r) = r^2 \ln r - r^2/2.$$

Portanto, o sistema fechado de equações diferenciais (5.21)-(5.23), (5.26) para os campos  $u_r^{(\alpha)}$ ,  $u_\varphi^{(\alpha)}$ ,  $\tau^{(\alpha)}$  e  $v^{(\alpha)}$  tiveram suas soluções obtidas através de integrações simples e são apresentadas pelas equações (5.28), (5.31), (5.32) e (5.34).

Com a determinação dos campos da velocidade, da temperatura e da pressão dados pelas expressões acima é possível determinarmos o vetor fluxo de calor e o tensor viscoso. O vetor fluxo de calor está relacionado com o gradiente da temperatura através da lei de Fourier expressa por (3.27) e o tensor viscoso,  $\sigma_{ij}^\alpha$  está relacionado com as componentes da velocidade através da equação (3.26).

Ao se considerar o fato de que a temperatura é uma função apenas da coordenada radial, assim como a velocidade radial e a velocidade tangencial, temos que as únicas componentes não nulas do vetor fluxo de calor e do tensor tensão são  $q_r$ ,  $\sigma'_{rr}$ ,  $\sigma'_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma'_{r\varphi}$  e  $\sigma'_{zz}$ .<sup>1</sup> Assim, com o uso das equações (4.75) e (4.80) os campos do vetor fluxo de calor e do tensor tensão não nulos serão representados através das forças termodinâmicas  $X_\alpha$  por:

$$q_r = P_{00}\beta_0^{-1} \left[ \sum_{\alpha} q_r^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad (5.35)$$

$$\sigma_{ij} = 2P_{00} \left[ \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} X_{\alpha} \right], \quad i, j = r, \varphi, \quad (5.36)$$

com  $q_r^{(\alpha)}$  e  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  representando quantidades adimensionais quanto ao desvio do fluxo de calor radial e das componentes do tensor tensão.

Substituindo na equação (2.28) as fórmulas referentes a expressão (4.26) para o parâmetro de rarefação  $\delta$ , a equação (4.73) para a temperatura  $T(r')$  e a expressão (5.35) para o fluxo de calor  $q_r$ , teremos que o fluxo de calor radial adimensional será dado por

$$q_r^{(\alpha)} = -\frac{15}{8} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tau^{(\alpha)}}{\partial r}, \quad (5.37)$$

que é função do desvio da temperatura. Então, substituindo a solução (5.32), referente ao desvio da temperatura  $\tau^{(\alpha)}$  na equação anterior, podemos obter o fluxo de calor radial adimensional em termos da posição  $r$  e da velocidade angular adimensional  $\omega$ , ou seja

$$q_r^{(\alpha)} = -\frac{1}{2} D^{(\alpha)} \omega^2 \left( C_1^{(\alpha)} \frac{1}{r} - 2r \right). \quad (5.38)$$

O mesmo procedimento acima é adotado para obtermos as expressões gerais das componentes do tensor tensão. Então, para a componente  $\sigma'_{rr}$ , igualamos as expressões (2.22) e (5.36) obtendo

$$\mu \left[ -\frac{2}{3} \frac{u'_r}{r'} + \frac{4}{3} \frac{\partial u'_r}{\partial r'} \right] = 2P_{00} \left[ \sum_{\alpha} \sigma_{rr}^{(\alpha)} X_{\alpha} \right].$$

Utilizaremos agora a expressão (4.71) para a velocidade radial  $u'_r$  e com o objetivo de simplificar o resultado, usaremos ainda as definições  $P_{00} = n_{00}kT_0$ ,  $\beta_0 = (m/2kT_0)^{1/2}$ ,  $r' = rR_0$  e a

<sup>1</sup>Como no capítulo anterior, não iremos analisar a componente do tensor tensão  $\sigma'_{zz}$ .

expressão (4.25) para a viscosidade de cisalhamento  $\mu$ . Portanto, a forma obtida resultante é dada por:

$$\sigma_{rr}^{(\alpha)} = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{2}{3} \frac{\partial u_r^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{u_r^{(\alpha)}}{r} \right].$$

Na expressão acima podemos ainda utilizar a solução (5.28) para o desvio da velocidade radial  $u_r^{(\alpha)}$  obtendo a expressão geral para a componente  $\sigma_{rr}^{(\alpha)}$  do tensor tensão em termos da posição  $r$ , da distribuição da densidade  $n_0(r)$  e dos parâmetros principais, isto é, da velocidade angular adimensional  $\omega$  e do parâmetro de rarefação  $\delta$ ,

$$\sigma_{rr}^{(\alpha)} = -\frac{1}{3} \frac{D^{(\alpha)}}{\delta r^2} \frac{n_{00}}{n_0(r)} (3 + 4\omega^2). \quad (5.39)$$

Quanto a componente do tensor tensão  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)}$ , igualando as expressões (2.23) e (5.36) tem-se

$$\mu \left[ \frac{4}{3} \frac{u_r'}{r'} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_r'}{\partial r'} \right] = 2P_{00} \left[ \sum_{\alpha} \sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} X_{\alpha} \right],$$

e através das mesmas substituições do caso anterior obtém-se

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{2}{3} \frac{u_r^{(\alpha)}}{r} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_r^{(\alpha)}}{\partial r} \right].$$

Do mesmo modo, substituindo a expressão (5.28) para  $u_r^{(\alpha)}$  na expressão anterior, podemos reescrever  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)}$  como<sup>2</sup>

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \frac{1}{3} \frac{D^{(\alpha)}}{\delta r^2} \frac{n_{00}}{n_0(r)} (1 - 2\omega^2 r). \quad (5.40)$$

Agora, finalmente, iremos calcular a última componente não nula do tensor tensão,  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$ , que é função apenas da velocidade tangencial. O procedimento é o mesmo que antes. Igualamos a equação (2.25) com a equação (5.36), depois substituímos  $u_r'$  pela equação (4.72) e por fim utiliza-se as expressões para  $\mu$ ,  $\delta$  e  $r'$  citadas anteriormente. O resultado obtido será

$$\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} = \frac{1}{2\delta} \left[ \frac{du_{\varphi}^{(\alpha)}}{dr} - \frac{u_{\varphi}^{(\alpha)}}{r} \right]. \quad (5.41)$$

A componente  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$  do tensor tensão apresenta uma dependência com a velocidade tangencial na qual podemos utilizar a expressão (5.31) para  $u_{\varphi}^{(\alpha)}$  a fim de obter  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$  em função da posição  $r$  e da velocidade angular adimensional  $\omega$ . Portanto

$$\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)} \omega \left( 1 - 2 \frac{B_2^{(\alpha)}}{r^2} \right). \quad (5.42)$$

Então  $q_r^{(\alpha)}$ ,  $\sigma_{rr}^{(\alpha)}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$  ficarão determinados após calcularmos as constantes  $B_2^{(\alpha)}$ ,  $C_1^{(\alpha)}$  e  $D^{(\alpha)}$  para cada caso de perturbação a ser tratado.

<sup>2</sup>Devido a condição de que  $\sigma_{ij}$  tem traço nulo devemos ter que  $\sigma_{zz} = -(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})$ .

Todas as considerações feitas até agora são válidas para o valor da velocidade angular não nula. Portanto para se determinar os campos  $u_r^{(\alpha)}$ ,  $u_\varphi^{(\alpha)}$ ,  $\tau^{(\alpha)}$  e  $v^{(\alpha)}$  para  $\omega = 0$  vamos tomar este valor da velocidade angular nas equações gerais (5.29), (5.30), (5.33) tendo como resultado um novo sistema de equações lineares descrito abaixo

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{du_\varphi^{(\alpha)}(r)}{dr} r \right] = 0, \quad (5.43)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\tau^{(\alpha)}(r)}{dr} \right] = 0, \quad (5.44)$$

$$\frac{dv^{(\alpha)}(r)}{dr} = 0, \quad (5.45)$$

que pode ser resolvido através de integração simples resultando nas seguintes soluções gerais

$$u_\varphi^{(\alpha)}(r) = E_1^{(\alpha)} r + \frac{E_2^{(\alpha)}}{r}, \quad (5.46)$$

$$\tau^{(\alpha)}(r) = F_1^{(\alpha)} \ln r + F_2^{(\alpha)}, \quad (5.47)$$

$$v^{(\alpha)}(r) = G^{(\alpha)}, \quad (5.48)$$

onde  $E_1^{(\alpha)}$ ,  $E_2^{(\alpha)}$ ,  $F_1^{(\alpha)}$ ,  $F_2^{(\alpha)}$  e  $G^{(\alpha)}$  são constantes de integração. A solução para  $u_r^{(\alpha)}$  com base em (5.28) será

$$u_r^{(\alpha)} r = \frac{D_0^{(\alpha)}}{n_0(r)} n_{00}, \quad \text{na qual resulta} \quad u_r^{(\alpha)}(r) = \frac{D_0^{(\alpha)}}{r}, \quad (5.49)$$

pois segundo a equação (4.5)  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{n_0(r)}{n_{00}} = 1$ . Usa-se a constante  $D_0^{(\alpha)}$  ao invés de  $D^{(\alpha)}$  a fim de denotarmos a situação em que  $\omega = 0$ .

Novamente é possível determinar o fluxo de calor radial e as componentes do tensor tensão usando as soluções para o desvio da temperatura, desvio da velocidade tangencial e radial. Com (5.46) e (5.47) determina-se as expressões para  $q_r^{(\alpha)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$  quando  $\omega = 0$ ,

$$q_r^{(\alpha)} = -\frac{15}{8} \frac{1}{\delta} F_1^{(\alpha)} \frac{1}{r}, \quad (5.50)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)} = \frac{1}{\delta} \frac{E_2^{(\alpha)}}{r^2}. \quad (5.51)$$

Deve-se observar que para o caso  $\omega = 0$  a velocidade radial é dada pela expressão (5.49) de forma que as componentes do tensor tensão  $\sigma_{rr}^{(\alpha)}$  e  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)}$  que apresentam dependência apenas quanto a velocidade radial, transformam-se em

$$\sigma_{rr}^{(\alpha)} = -D_0^{(\alpha)} \frac{1}{\delta r^2}, \quad (5.52)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = D_0^{(\alpha)} \frac{1}{\delta r^2}. \quad (5.53)$$

O objetivo agora é a determinação das constantes de integração  $B_1^{(\alpha)}$ ,  $B_2^{(\alpha)}$ ,  $C_1^{(\alpha)}$ ,  $C_2^{(\alpha)}$ ,  $L^{(\alpha)}$ ,  $E_1^{(\alpha)}$ ,  $E_2^{(\alpha)}$ ,  $F_1^{(\alpha)}$ ,  $F_2^{(\alpha)}$ ,  $G^{(\alpha)}$ , assim como  $D^{(\alpha)}$  e  $D_0^{(\alpha)}$ , para que a solução do sistema fique determinada. Lembremos que a perturbação é assumida apenas no cilindro interior, isto significa que as posições das fronteiras são os pontos  $r = 1$  e  $r = \frac{R_1}{R_0}$ .

### 5.3.1 Saltos nas Condições de Contorno

O salto nas condições de contorno que correspondem a perturbação da pressão para o cilindro interior são:

a) no cilindro exterior, em  $r=1$

$$\begin{aligned} v^{(P)} &= \alpha_1 u_r^{(P)} - \frac{\alpha_2 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{d\tau^{(P)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_3 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{du_r^{(P)}}{dr} - \frac{\alpha_4 n_{00}}{\delta n_0(1)} u_r^{(P)}, \\ \tau^{(P)} &= \alpha_5 u_r^{(P)} - \frac{\alpha_6 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{d\tau^{(P)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_7 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{du_r^{(P)}}{dr} - \frac{\alpha_8 n_{00}}{\delta n_0(1)} u_r^{(P)}, \\ u_\varphi^{(P)} &= -\frac{\alpha_9 n_{00}}{\delta n_0(1)} \left( \frac{du_\varphi^{(P)}}{dr} - \frac{u_\varphi^{(P)}}{r} \right); \end{aligned}$$

b) no cilindro interior, em  $r = R_1/R_0$

$$\begin{aligned} v^{(P)} &= 1 - \alpha_1 u_r^{(P)} + \frac{\alpha_2 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} \frac{d\tau^{(P)}}{dr} + 2 \frac{\alpha_3 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} \frac{du_r^{(P)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_4 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} u_r^{(P)}, \\ \tau^{(P)} &= -\alpha_5 u_r^{(P)} + \frac{\alpha_6 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} \frac{d\tau^{(P)}}{dr} + 2 \frac{\alpha_7 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} \frac{du_r^{(P)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_8 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} u_r^{(P)}, \\ u_\varphi^{(P)} &= \frac{\alpha_9 n_{00}}{\delta n_0(R_1/R_0)} \left( \frac{du_\varphi^{(P)}}{dr} - \frac{u_\varphi^{(P)}}{r} \right), \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde as constantes  $\alpha_i$  com  $i = 1, \dots, 9$  são as mesmas apresentadas pelas fórmulas (3.63)-(3.65), cujas interpretações físicas e valores se encontram descritos no final da seção 3.6.

A perturbação na velocidade angular para o cilindro interior tem os saltos nas condições de contorno dadas por:

a) no cilindro exterior, na posição  $r = 1$

$$\begin{aligned} v^{(\Omega)} &= \alpha_1 u_r^{(\Omega)} - \frac{\alpha_2 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{d\tau^{(\Omega)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_3 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{du_r^{(\Omega)}}{dr} - \frac{\alpha_4 n_{00}}{\delta n_0(1)} u_r^{(\Omega)}, \\ \tau^{(\Omega)} &= \alpha_5 u_r^{(\Omega)} - \frac{\alpha_6 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{d\tau^{(\Omega)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_7 n_{00}}{\delta n_0(1)} \frac{du_r^{(\Omega)}}{dr} - \frac{\alpha_8 n_{00}}{\delta n_0(1)} u_r^{(\Omega)}, \\ u_\varphi^{(\Omega)} &= -\frac{\alpha_9 n_{00}}{\delta n_0(1)} \left( \frac{du_\varphi^{(\Omega)}}{dr} - \frac{u_\varphi^{(\Omega)}}{r} \right); \end{aligned}$$

b) no cilindro interior, na posição  $r = R_1/R_0$

$$\begin{aligned}
v^{(\Omega)} &= -\alpha_1 u_r^{(\Omega)} + \frac{\alpha_2}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{d\tau^{(\Omega)}}{dr} + 2 \frac{\alpha_3}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{du_r^{(\Omega)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_4}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} u_r^{(\Omega)}, \\
\tau^{(\Omega)} &= -\alpha_5 u_r^{(\Omega)} + \frac{\alpha_6}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{d\tau^{(\Omega)}}{dr} + 2 \frac{\alpha_7}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{du_r^{(\Omega)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_8}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} u_r^{(\Omega)}, \\
u_\varphi^{(\Omega)} &= 1 + \frac{\alpha_9}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \left( \frac{du_\varphi^{(\Omega)}}{dr} - \frac{u_\varphi^{(\Omega)}}{r} \right). \tag{5.55}
\end{aligned}$$

O salto nas condições de contorno para a perturbação da temperatura referentes ao cilindro interior são:

a) no cilindro exterior em  $r = 1$

$$\begin{aligned}
v^{(T)} &= \alpha_1 u_r^{(T)} - \frac{\alpha_2}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} \frac{d\tau^{(T)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_3}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} \frac{du_r^{(T)}}{dr} - \frac{\alpha_4}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} u_r^{(T)}, \\
\tau^{(T)} &= \alpha_5 u_r^{(T)} - \frac{\alpha_6}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} \frac{d\tau^{(T)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_7}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} \frac{du_r^{(T)}}{dr} - \frac{\alpha_8}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} u_r^{(T)}, \\
u_\varphi^{(T)} &= -\frac{\alpha_9}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(1)} \left( \frac{du_\varphi^{(T)}}{dr} - \frac{u_\varphi^{(T)}}{r} \right);
\end{aligned}$$

b) no cilindro interior em  $r = R_1/R_0$

$$\begin{aligned}
v^{(T)} &= -\alpha_1 u_r^{(T)} + \frac{\alpha_2}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{d\tau^{(T)}}{dr} + 2 \frac{\alpha_3}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{du_r^{(T)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_4}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} u_r^{(T)}, \\
\tau^{(T)} &= 1 - \alpha_5 u_r^{(T)} + \frac{\alpha_6}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{d\tau^{(T)}}{dr} + 2 \frac{\alpha_7}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \frac{du_r^{(T)}}{dr} - 2 \frac{\alpha_8}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} u_r^{(T)}, \\
u_\varphi^{(T)} &= \frac{\alpha_9}{\delta} \frac{n_{00}}{n_0(R_1/R_0)} \left( \frac{du_\varphi^{(T)}}{dr} - \frac{u_\varphi^{(T)}}{r} \right). \tag{5.56}
\end{aligned}$$

### 5.3.2 Resultados e Discussões

Com base nas condições de contorno para a perturbação na pressão, na velocidade angular e na temperatura descritas na seção anterior, torna-se possível a determinação das constantes de integração  $B_1^{(\alpha)}$ ,  $B_2^{(\alpha)}$ ,  $C_1^{(\alpha)}$ ,  $C_2^{(\alpha)}$  e  $L^{(\alpha)}$ , para  $\alpha = P, \Omega, T$ , presentes respectivamente nas equações (5.31), (5.32) e (5.34), além de também ser possível a determinação da constante  $D^{(\alpha)}$  presente em (5.28). Para se obter as expressões destas constantes em função do parâmetro de rarefação  $\delta$  e da velocidade angular adimensional  $\omega$ , utilizou-se o programa de computação algébrica *Maple*. Como as expressões obtidas para estas constantes são muito extensas não iremos escrevê-las nesta seção. No apêndice B os valores numéricos para estas constantes são dados para  $\omega = 1$  e  $\delta = 50, 100$ . Estão assim determinadas as soluções para os campos da

pressão, da velocidade angular e da temperatura, assim como para o vetor fluxo de calor e para o tensor tensão, no regime hidrodinâmico em função dos parâmetros principais  $\delta$  e  $\omega$ . A partir destas soluções obteremos os gráficos de  $u_r^{(\alpha)}$ ,  $q_r^{(\alpha)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(\alpha)}$  variando os valores do parâmetro de rarefação  $\delta$  e da velocidade angular  $\omega$ .

Estas mesmas condições de contorno (5.54)-(5.56) podem ser aplicadas às equações (5.46)-(5.49) determinando as constantes  $E_1^{(\alpha)}$ ,  $E_2^{(\alpha)}$ ,  $F_1^{(\alpha)}$ ,  $F_2^{(\alpha)}$ ,  $G^{(\alpha)}$  e  $D_0^{(\alpha)}$  para o caso em que a velocidade angular é nula. Novamente as expressões destas constantes foram obtidas através do programa de computação algébrica *Maple*. Suas expressões, em função do parâmetro de rarefação  $\delta$  são mais simples mas não iremos escrevê-las neste trabalho.

Portanto, as soluções para os campos da pressão, da velocidade angular, da temperatura, do vetor fluxo de calor e do tensor tensão, para o caso em que  $\omega = 0$  estão determinados em função do parâmetro  $\delta$ .

Unindo os resultados do regime hidrodinâmico dos campos da velocidade, do vetor fluxo de calor e do tensor tensão com os resultados do regime cinético, presentes nas Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 será possível traçar gráficos contendo estes dois regimes com a finalidade de se verificar o ajuste entre estas duas soluções. Esta análise será descrita a seguir.

### a) Fluxo devido à Diferença de Pressão

Nas Figuras 5.2 a 5.4 foram representadas graficamente as soluções cinética e hidrodinâmica dos campos  $u_r^{(P)}$ ,  $q_r^{(P)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(P)}$  como funções do parâmetro de rarefação  $\delta$  para diferentes valores da velocidade angular  $\omega$ . Podemos notar que existe uma excelente concordância entre estas soluções para  $u_r^{(P)}$  e  $q_r^{(P)}$  para baixos valores da velocidade angular. A diferença das soluções cinética e hidrodinâmica para o campo  $\sigma_{r\varphi}^{(P)}$  se deve ao fato do efeito cruzado ser pequeno em comparação com os efeitos diretos.

### b) Fluxo devido à Diferença de Velocidade Angular

As soluções cinética e hidrodinâmica para os campos  $u_r^{(\Omega)}$ ,  $q_r^{(\Omega)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(\Omega)}$  estão plotados nas Figuras 5.5 a 5.7 como função do parâmetro de rarefação  $\delta$  e da velocidade angular  $\omega$ . Existe aqui uma boa concordância das soluções para o campo  $\sigma_{r\varphi}^{(\Omega)}$ , e a diferença entre as soluções para os campos  $u_r^{(\Omega)}$  e  $q_r^{(\Omega)}$  novamente se deve ao fato de ambos representarem campos de efeitos cruzados, os quais são usualmente pequenos quando comparados com os campos de efeitos diretos.

### c) Fluxo devido à Diferença de Temperatura

Os campos  $u_r^{(T)}$ ,  $q_r^{(T)}$  e  $\sigma_{r\varphi}^{(T)}$  cujas soluções cinética e hidrodinâmica estão plotadas nas Figuras 5.8-5.10 como funções do parâmetro de rarefação  $\delta$  e da velocidade angular  $\omega$ . Existe boa concordância destas soluções para os campos  $\sigma_{r\varphi}^{(T)}$  e  $q_r^{(T)}$ . Deve-se notar que para altos valores do parâmetro de rarefação o fluxo de calor  $q_r^{(T)}$  independe da velocidade angular  $\omega$  e todas as curvas para diferentes valores de  $\omega$  coincidem. O campo  $u_r^{(T)}$  corresponde também a um efeito

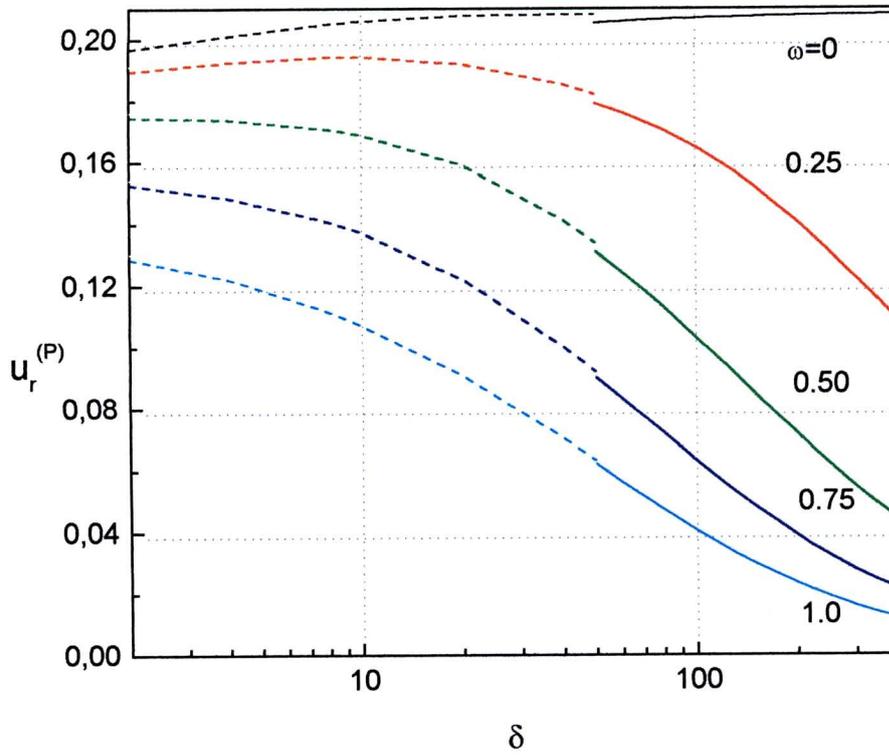


Figura 5.2: Velocidade radial  $u_r^{(P)}$  como função de  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  em  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

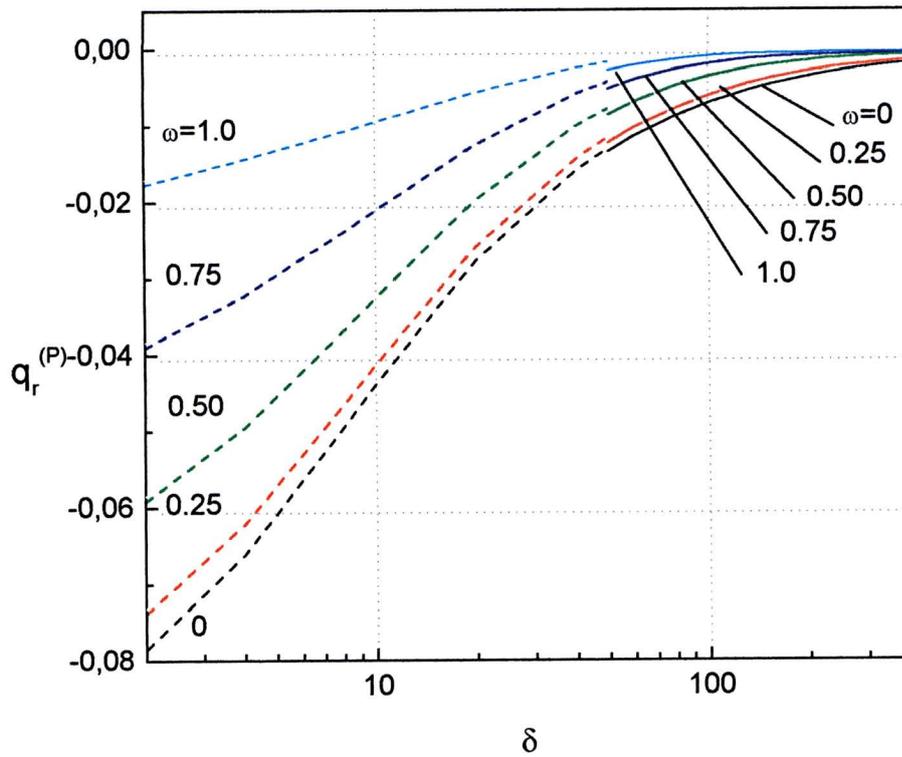


Figura 5.3: Fluxo de calor radial  $q_r^{(P)}$  como função de  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  em  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

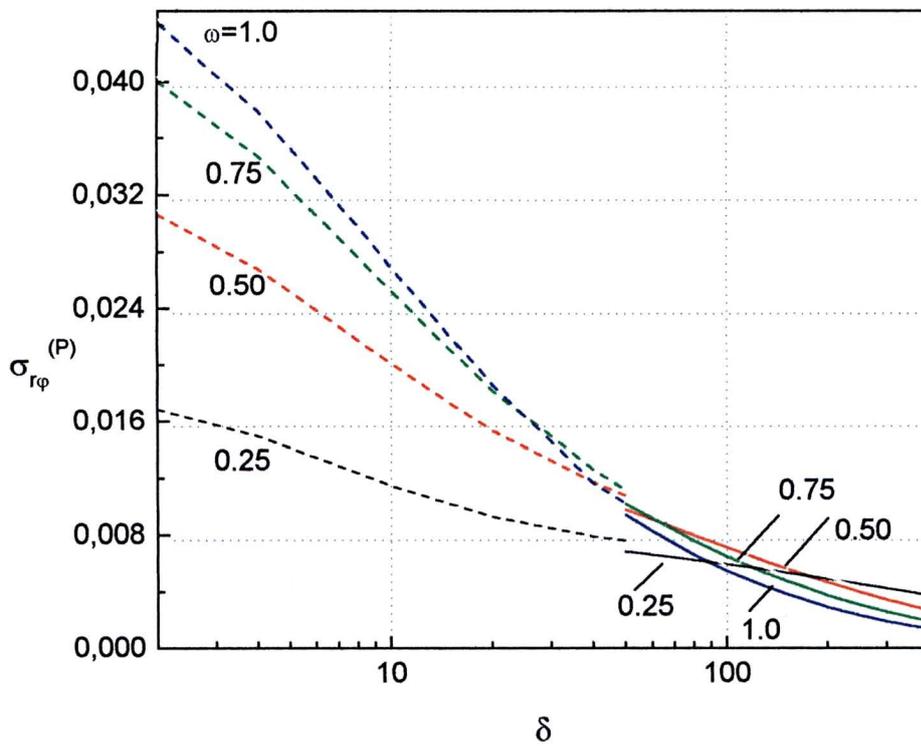


Figura 5.4: Tensor tensão  $\sigma_{r\phi}^{(P)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

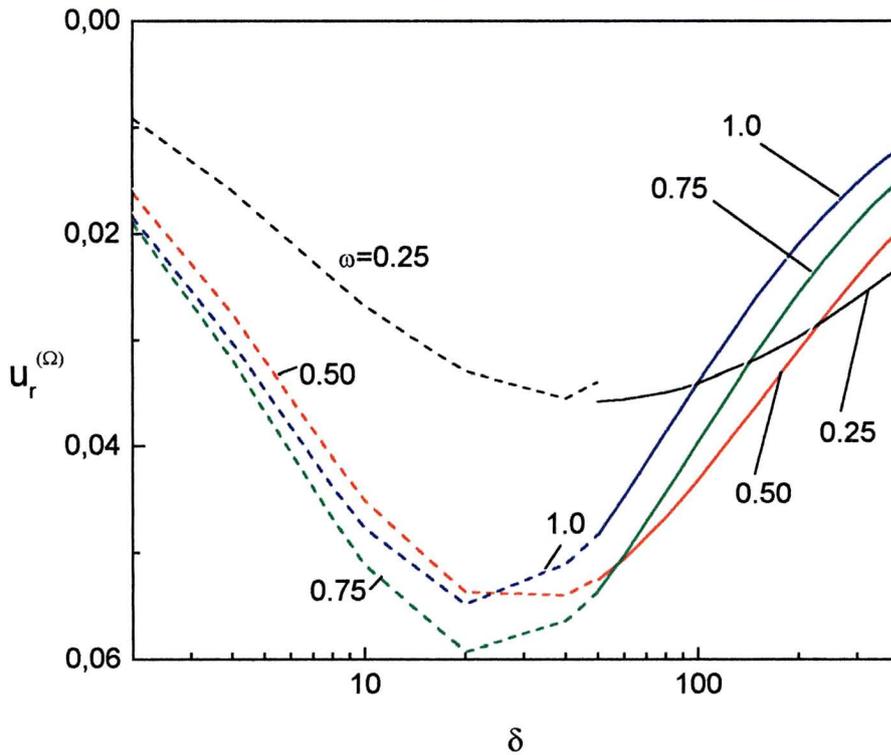


Figura 5.5: Velocidade radial  $u_r^{(\Omega)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

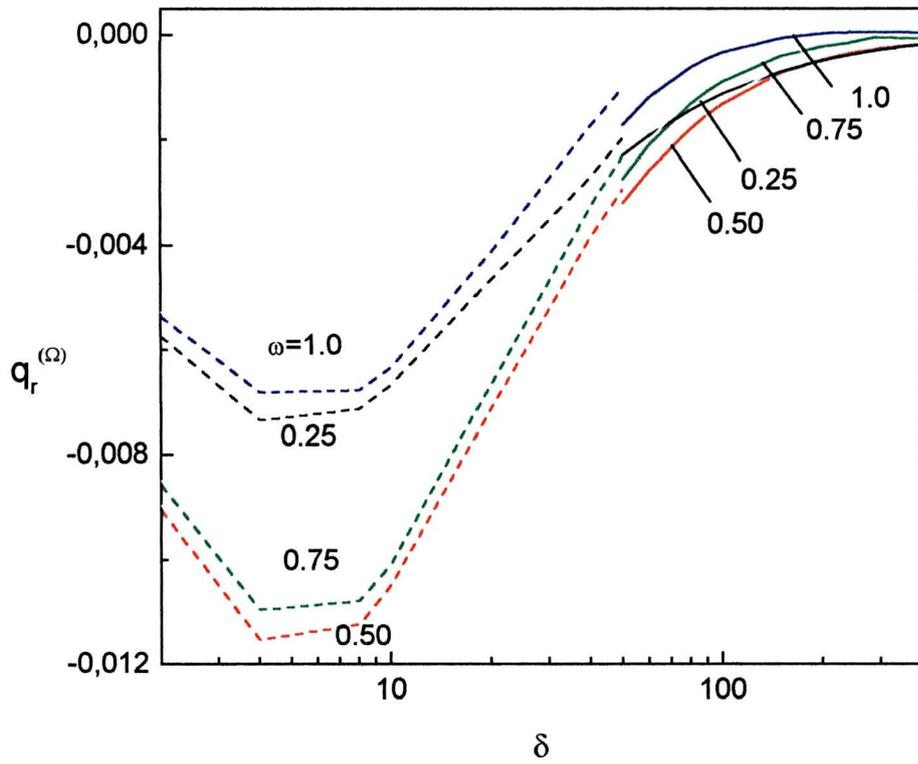


Figura 5.6: Fluxo de calor radial  $q_r^{(\Omega)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

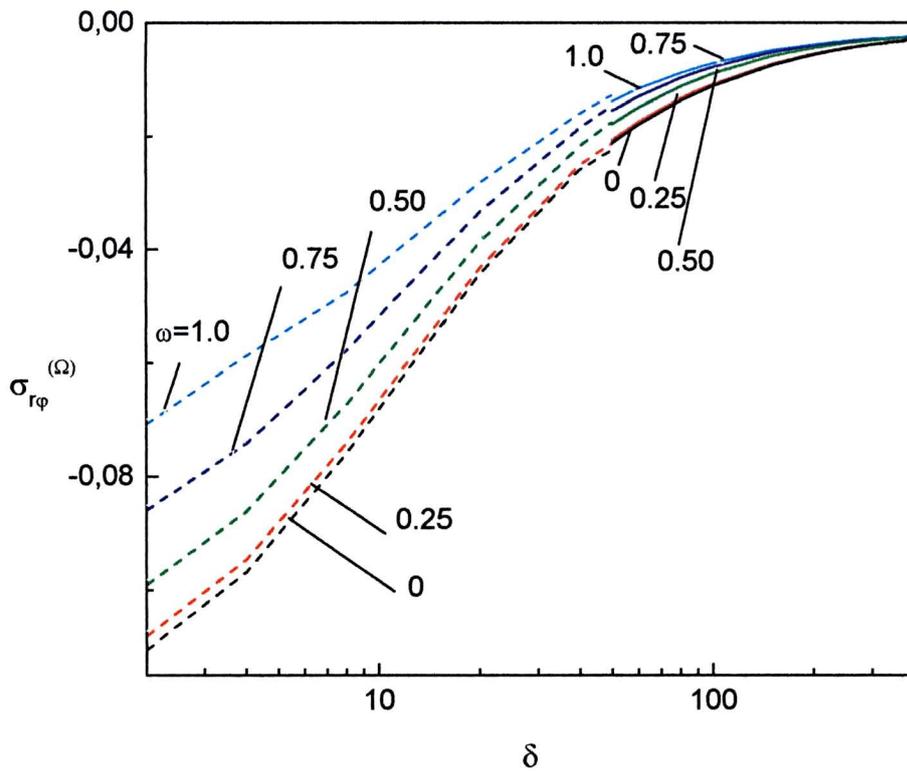


Figura 5.7: Tensor tensão  $\sigma_{r\phi}^{(\Omega)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

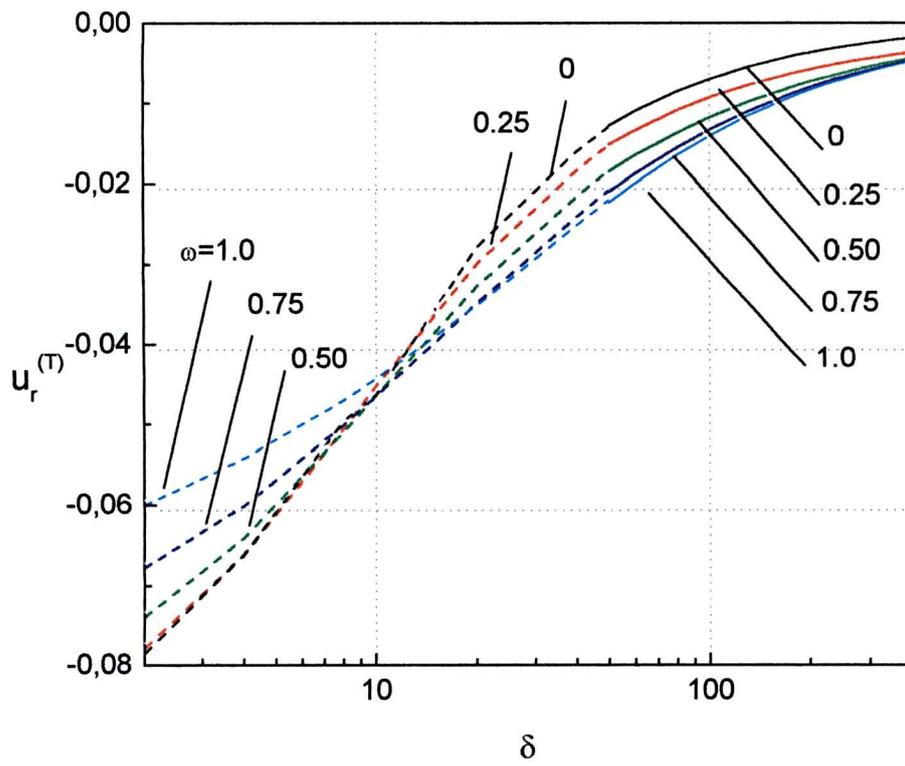


Figura 5.8: Velocidade radial  $u_r^{(T)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

cruzado (vide (4.118)) mas aqui a concordância entre estas soluções é melhor do que nos dois casos anteriores.

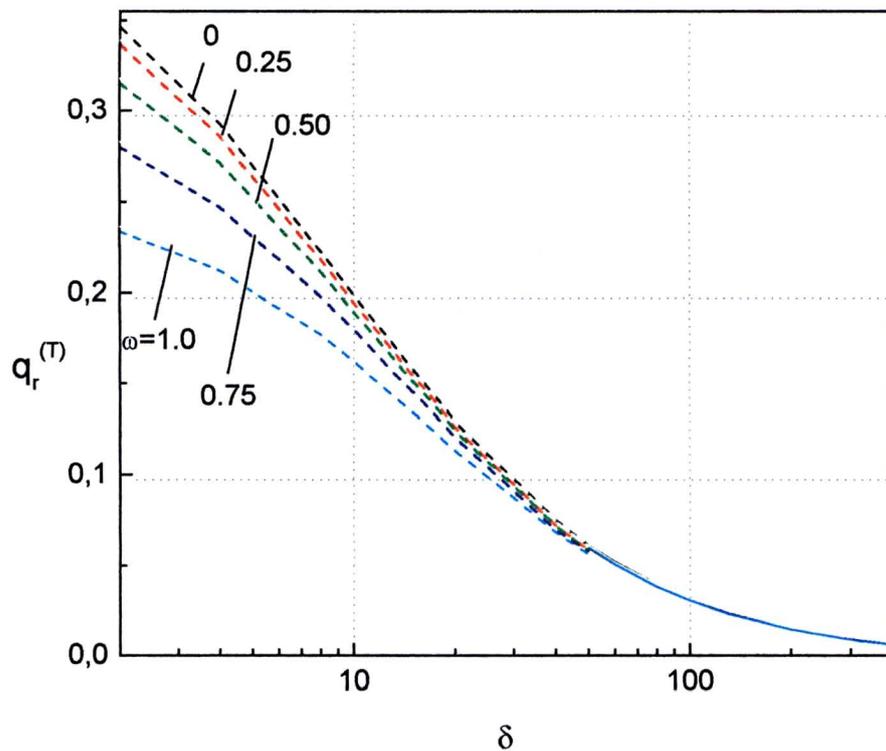


Figura 5.9: Fluxo de calor radial  $q_r^{(T)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

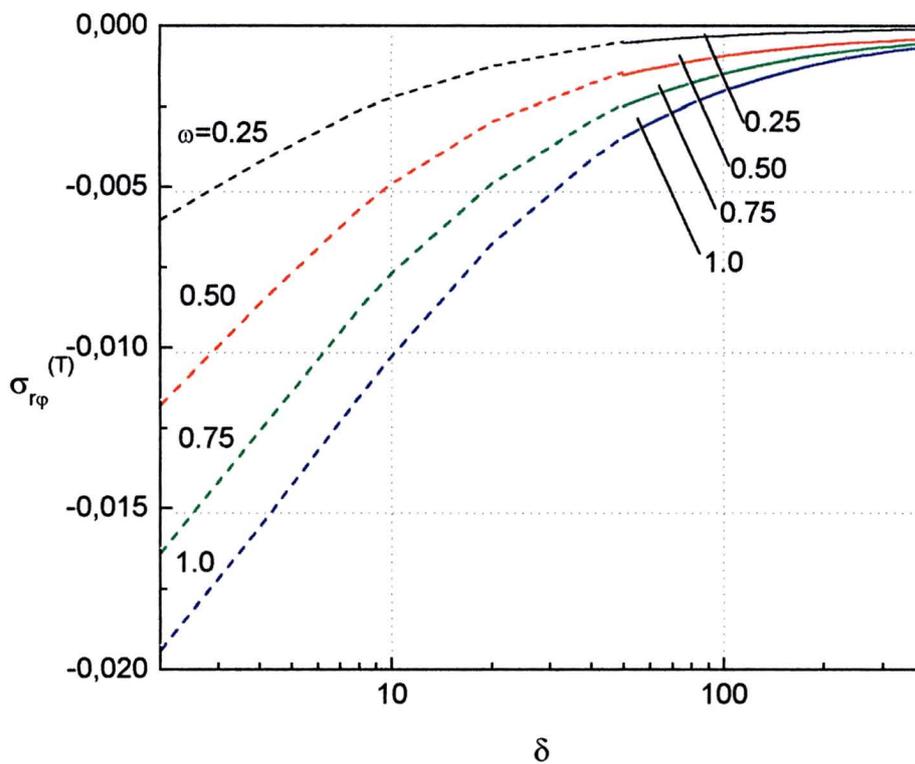


Figura 5.10: Tensor tensão  $\sigma_{r\phi}^{(T)}$  versus  $\delta$  para diferentes valores de  $\omega$  na posição  $r = 0,75$  linhas sólidas - solução hidrodinâmica; linhas tracejadas - solução cinética.

# Capítulo 6

## Conclusões

Para o problema de um gás confinado entre dois cilindros coaxiais que giram com uma velocidade angular constante foram tratados dois casos de perturbação sobre o sistema. No primeiro caso tratou-se de perturbar o sistema inicialmente em equilíbrio, através de uma única força termodinâmica, o desvio da densidade. O segundo caso considerado envolveu o mesmo sistema em equilíbrio sendo perturbado por três forças termodinâmicas ao mesmo tempo, ou seja, a pressão, a velocidade angular e a temperatura. Todas estas perturbações ocorreram somente no cilindro interior. Em ambos os casos o sistema foi fracamente perturbado e considerou-se a evaporação e a condensação nas superfícies dos cilindros. Os campos desejados, pressão, velocidade, temperatura, vetor fluxo de calor e tensor tensão foram calculados tanto para o regime cinético quanto para o regime hidrodinâmico em função de dois parâmetros principais: o parâmetro de rarefação  $\delta$  e a velocidade angular adimensional  $\omega$ . O regime cinético foi solucionado através da solução numérica da equação de Boltzmann com o uso de dois modelos (BGK e Shakov) enquanto que o regime hidrodinâmico apresenta suas equações baseadas na mecânica do contínuo com soluções algébricas. A comparação entre as soluções destes dois regimes para os campos desejados está presente em gráficos anteriores. Foi feita também uma análise termodinâmica das relações de reciprocidade de Onsager-Casimir. A relação entre os coeficientes cruzados serviu como um critério de precisão na solução numérica da equação de Boltzmann.

Para a perturbação na densidade obteve-se o perfil da velocidade radial e tangencial como funções de  $\delta$  e  $\omega$ , em que para todos os valores destes parâmetros, a velocidade tangencial é negativa. Este resultado é devido a força de Coriolis. E ainda verificou-se que para grandes valores de  $\delta$  a dependência de  $u_\varphi$  na velocidade angular  $\omega$  não é monótona. Quanto ao perfil de  $u_r$  observa-se que para qualquer  $\delta$  o valor deste campo decresce essencialmente quando a velocidade angular  $\omega$  cresce. Concluiu-se que quando a velocidade angular tende a zero, tanto  $u_r$  quanto  $u_\varphi$  tendem a infinito. Inicialmente pensou-se que esta singularidade significava que, quando os cilindros estivessem em repouso, não existiria solução linear no regime hidrodinâmico, ou seja, os termos não-lineares da equação de Navier-Stokes deveriam ser levados em conta para

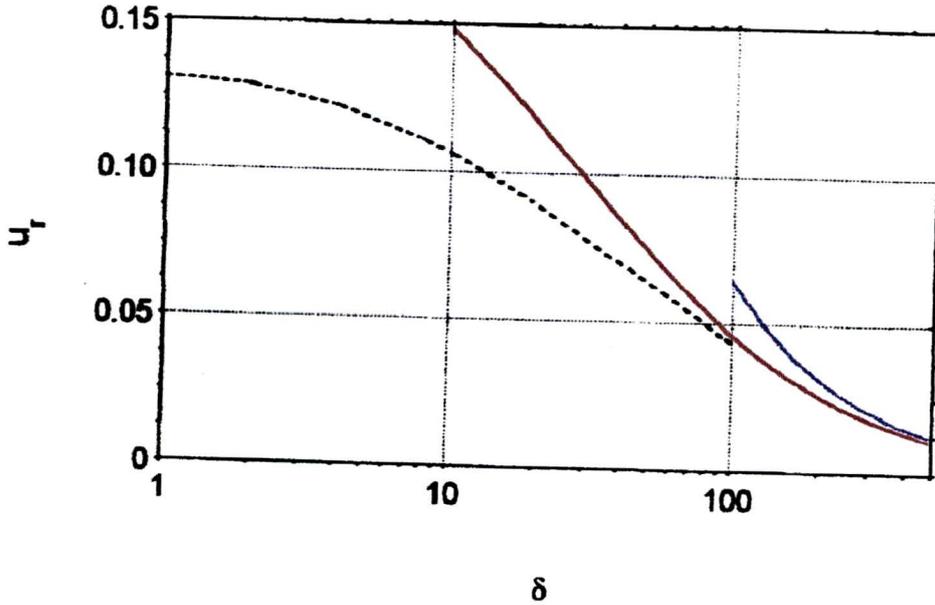


Figura 6.1: Velocidade radial  $u_r$  versus  $\delta$  para  $\omega = 1$  na posição  $r = 0,75$ : linhas sólidas - soluções hidrodinâmicas: linha azul - solução hidrodinâmica sem salto, linha vermelha - solução hidrodinâmica com salto; linha tracejada - solução cinética

algum valor de  $\Delta n/n_0(R_1)$ . Porém, verificamos na análise do segundo caso que para melhorar os resultados da solução hidrodinâmica e eliminar esta singularidade, deveríamos modificar as condições de contorno, ou seja, considerar a condição de salto nas fronteiras. Isto é evidenciado na Figura 6.1 que representa a variação do parâmetro  $\delta$  para o desvio da velocidade radial  $u_r$  quando a velocidade angular é igual a um. Nesta figura constam as soluções do regime cinético e do regime hidrodinâmico. Para o regime hidrodinâmico ainda estão presentes a curva sem se considerar salto e a curva com a condição de salto nas condições de contorno. Portanto, a influência dos saltos na solução hidrodinâmica fica demonstrada e o quanto esta consideração melhora a concordância entre as curvas cinética e hidrodinâmica.

Para a perturbação na pressão, na velocidade e na temperatura todos os campos obtidos são dados em funções dos parâmetros  $\delta$  e  $\omega$  e calculados para os regimes cinético e hidrodinâmico. Então para o fluxo devido a diferença da pressão obtemos graficamente uma excelente concordância entre as soluções cinética e hidrodinâmica para os campos  $u_r^{(P)}$  e  $q_r^{(P)}$  quando consideramos baixos valores da velocidade angular. Para o fluxo devido a diferença da velocidade angular, existe boa concordância das soluções para o campo  $\sigma_{r\varphi}^{(\Omega)}$  enquanto que a diferença entre as soluções para os campos  $u_r^{(\Omega)}$  e  $q_r^{(\Omega)}$  se devem ao fato de ambos representarem campos de efeitos cruzados, pois os campos dos efeitos cruzados são usualmente pequenos em comparação

com os campos dos efeitos diretos e para o fluxo devido a diferença de temperatura, os campos  $\sigma_{r\varphi}^{(T)}$  e  $q_r^{(T)}$ , apresentam boa concordância entre as soluções cinética e hidrodinâmica sendo que para altos valores de  $\delta$ ,  $q_r^{(T)}$  independe da velocidade angular  $\omega$  e todas as curvas coincidem. Embora  $u_r^{(T)}$  represente um efeito cruzado, sua concordância é melhor do que os outros efeitos cruzados.

Um resumo dos principais resultados inéditos contidos nesta tese são [21, 40]:

i) solução numérica das equações cinéticas (modelos BGK e Shakov) através do método das velocidades discretas considerando a descontinuidade da função de distribuição para um gás rarefeito em rotação com evaporação e condensação nas superfícies que o delimitam nos intervalos amplos de  $\delta$  e  $\omega$ ;

ii) soluções analíticas das equações hidrodinâmicas correspondentes levando em consideração saltos nas condições de contorno.

Uma extensão desta linha de pesquisa para trabalhos futuros seria:

i) Ao se analisar a concordância entre as soluções cinética e hidrodinâmica presentes nas figuras dos capítulos anteriores, observa-se que existe ainda uma certa discrepância no limite destes regimes para determinados campos, por exemplo, para  $q_r^{(\Omega)}$ . Portanto o interesse é ajustar a curva da solução hidrodinâmica, na qual o salto é considerado, à curva da solução cinética através do uso das equações de Burnett. Assim seria possível analisar esta influência à solução hidrodinâmica se considerarmos para este regime equações constitutivas do tipo de Burnett, as quais envolvem derivadas segundas, isto é, temos equações diferenciais parciais de terceira ordem. Entretanto, para esta situação teremos que considerar as condições de salto na fronteira, onde ocorre evaporação e condensação, até a ordem de  $\frac{1}{\delta^2}$  para que a ordem das equações constitutivas do tipo de Burnett sejam compatíveis com a ordem de  $\delta$  presentes nas condições de contorno com saltos.

ii) Considerar outros fenômenos de transporte em sistema de rotação substituindo o gás único por uma mistura. Mais concretamente, considerar dois cilindros coaxiais a uma mesma temperatura que giram com uma mesma velocidade constante. Na mistura binária contida entre os cilindros, a evaporação e a condensação será considerada apenas para um dos gases. A força termodinâmica que perturbará o equilíbrio estará relacionada com um gradiente de concentração dos gases. Espera-se que além dos fluxos radiais de calor e de difusão, os fluxos tangenciais também devam aparecer. Neste caso um dos objetivos seria calcular o fluxo de difusão tangencial e mostrar que o princípio de indiferença ao referencial da mecânica do contínuo também é violado no caso de uma mistura.

# Apêndice A

## Programa

Apresenta-se abaixo o programa utilizado no modelo BGK.

```
C          PROGRAM rd.f
C
C  Calculation of cylindrical linear Couette flow
C  in a rotating system
C  BGK-model
C  Discontinuity is regarded
C  Temperature is const
C
C  The length scale is the radius of the external cylinder
C
C          Iput data
C  DEL - rarefaction parameter
C  R1  - radius of the internal cylinder
C  OM  - angular velocity
C  NR  - number of points with respect to radial variable
C  NT  - number of points with respect to angle variable
C  NC  - mber of points with respect to speed
C  C0  - interval of the speed
C  NDIS if 1 the discontinuity is taken, if 0 it is not
C
C          implicit double precision (a-h,o-z)
C          REAL*8 NEQ,NU0,NU,NUW0,NUW1,NUW00,NUW10,NEQD
C          DIMENSION JK(201,2),PXY(201),U0(201),NEQ(201),NU0(201),PYY(201),
C          *HF(201),HP(201),C(50),T0(201)
C          COMMON RO(201),ROB(201),U(201),T(201),NU(201),NEQD(201),CP,
C          *NUW0,NUW1,R1,OM,DR,NR,NJ
C          OPEN(9,FILE='r',STATUS='new')
C          OPEN(11,FILE='SAVE',STATUS='NEW')
C
C          definition of the input data
C
C          PI=ACOS(-1.D0)
C          E=1.D-5
C          NDIS=1
C          IF (NDIS.EQ.0) WRITE(9,*) 'WITHOUT DISCONTINUITY'
C          IF (NDIS.EQ.1) WRITE(9,*) 'WITH DISCONTINUITY'
C          MAX=5
C          R1=0.5D0
C          OM=1.D0
C          DEL=1.D0
C          NR=50
C          NT1=40
C          NT2=20
C          NC=20
C          C0=5.D0
C          DR=(1.D0-R1)/NR
C          DO 20 I=1,NC
```

```

20  C(I)=I*C0/NC
    DO 1 K=1,NR+1
      RO(K)=(1.D0-DR*(K-1))
      IF (ABS(OM).GT.1.E-5) THEN
        NEQ(K)=(1.D0-R1*R1)*OM*OM*EXP((OM*RO(K))**2)/
*          (EXP(OM**2)-EXP((OM*R1)**2))
      ELSE
        NEQ(K)=1.
      END IF
      NEQD(K)=DEL*NEQ(K)
      ROB(K)=1.D0/RO(K)
C
C      First approximaion
C
      NU(K)=0.D0
      T(K)=0.D0
      U(K)=0.D0
1   CONTINUE
      NUW0=0.D0
      NUW1=0.D0
      IT=0
      IF (NDIS.EQ.0) GO TO 89
      DO K=1,NR
        THET0=ASIN(R1*ROB(K))
        DT=PI/(2.D0*NT1)
        DO J=NT1+2,2*NT1+1
          IF((2*NT1+1-J)*DT.LT.THET0) GO TO 82
        END DO
82     JK(K,1)=J
        DT=PI/(2.D0*NT2)
        DO J=NT2+2,2*NT2+1
          IF((2*NT2+1-J)*DT.LT.THET0) GO TO 84
        END DO
84     JK(K,2)=J
        END DO
89     CONTINUE
C
C      Beginning of iterations
C
6   CONTINUE
      IT=IT+1
      DO 11 K=1,NR+1
        NU(K)=NU(K)*NEQD(K)
        U(K)=2.D0*U(K)*NEQD(K)
        T(K)=T(K)*NEQD(K)
        NU0(K)=0.D0
        U0(K)=0.D0
        T0(K)=0.D0
        PXY(K)=0.D0
        PYY(K)=0.D0
11  CONTINUE
      NUW00=0.D0
      NUW10=0.D0
C
C      calculation of boundary values
C
      NU0(NR+1)=0.5D0*NUW1
      NU0(1)=0.5D0*NUW0
      U0(NR+1)=0.5D0
      PXY(1)=0.5D0*NUW0*NEQ(1)*OM/SQRT(PI)
      PXY(NR+1)=-0.5/SQRT(PI)*NEQ(NR+1)*(1.+NUW1*OM*R1)
C
C      Cycle with respect to the speed
C
      DO 2 I=1,NC
        CP=C(I)

```

C  
C  
C

Cycle with respect to the angle

```
DO 2 NJ=1,2
  NT=NT1
  IF(NJ.EQ.2) NT=NT2
  DT=PI/(2.D0*NT)
  W10=CP*C0*DT*4.D0/(NC*PI*3.D0)
  IF(I/2.EQ.I/2.) W10=0.5D0*W10
  DO 13 K=1, NR+1
    HP(K)=0.D0
13    HF(K)=0.D0
  DO 2 J=1, NT*2+1
    CX=CP*COS(DT*(J-1))
    CY=CP*SIN(DT*(J-1))
    AW=1.D0
    IF(J.EQ.1.OR.J.EQ.NT*2+1) AW=0.5D0
    W1=AW*W10*EXP(-CX*CX)
    DD2=CX/DT
    FI3=CX/DR
    IF(NJ.EQ.2) CY=-CY
    IF(J.GT.NT+1) GO TO 12
    FI=NUW0
    PSI=0.D0
    IF(J.LT.NT+1) GO TO 25
    FFF=FI*W1*EXP(-(CY-OM)**2)*0.5D0
    NU0(1)=NU0(1)+FFF
    U0(1)=U0(1)+FFF*(CY-OM)
    T0(1)=T0(1)+2.D0/3.D0*FFF*((CY-OM)*(CY-OM)-1.D0)
25    HF(1)=FI
    HP(1)=PSI
```

C  
C  
C

Cycle with respect to the radial coordinate

```
DO 3 K=2, NR+1
  CPV2=CX*CX+(CY-OM*RO(K))*(CY-OM*RO(K))
  FI=(NU(K)+(CPV2-1.D0)*T(K)+(CY-OM*RO(K))*U(K))+
  *   FI3*FI+(ROB(K)*DD2)*HF(K)/(NEQD(K)+FI3+ROB(K)*DD2)
  PSI=(0.5D0*T(K)+FI3*PSI+(ROB(K)*DD2)*HP(K))
  *   /(NEQD(K)+FI3+ROB(K)*DD2)
  HF(K)=FI
  HP(K)=PSI
  FFF=FI*(W1*EXP(-(CY-OM*RO(K))**2))
  FFPS=PSI*(W1*EXP(-(CY-OM*RO(K))**2))
  NU0(K)=NU0(K)+FFF
  U0(K)=U0(K)+FFF*(CY-OM*RO(K))
  T0(K)=T0(K)+2.D0/3.D0*(FFF*(CPV2-1.D0)+FFPS)
  PXY(K)=PXY(K)+FFF*CY*CX*NEQ(K)
  PYY(K)=PYY(K)+FFF*(CY-OM*RO(K))*(CY-OM*RO(K))*NEQ(K)
3  CONTINUE
  IF(J.EQ.NT+1) THEN
    NU0(NR+1)=NU0(NR+1)-0.5*FFF
    U0(NR+1)=U0(NR+1)-0.5*FFF*(CY-OM*R1)
    T0(NR+1)=T0(NR+1)-1./3.*(FFF*(CPV2-1.D0)+FFPS)
    PXY(NR+1)=PXY(NR+1)-0.5*FFF*CY*CX*NEQ(NR+1)
    PYY(NR+1)=PYY(NR+1)-0.5*FFF*(CY-OM*R1)*(CY-OM*R1)*NEQ(NR+1)
  END IF
  NUW10=NUW10+2.D0*SQRT(PI)*FFF*CX
  GO TO 2
12 IF(J.EQ.2*NT+1.OR.NDIS.EQ.0) GO TO 65
  RINT=R1/SIN(PI-DT*(J-1))
  IF(RINT.GT.1.D0) GO TO 65
  DO K=NR, 1, -1
    IF(RO(K).GT.RINT) GO TO 73
  END DO
73 KJ=K
```

```

65  FI=NUW1+2.*(CY-OM*R1)
    PSI=0.D0
      DO 7 K=NR,1,-1
        IF (K.EQ.KJ.AND.RINT.LT.1..AND.DEL*RINT.LT.1.0001.
          *      AND.NDIS.EQ.1) THEN
          CALL HTHETA (PI-DT*(J-1),KJ,RINT,FI)
          FI3=CX/(RO(K)-RINT)
        END IF
        IF (J.EQ.JK(K,NJ).AND.DEL*RO(K).LT.1.0001.
          *      AND.NDIS.EQ.1) THEN
          CALL HRO (K,FEXT,FINT,THETA)
          DD2=CY/(THETA+DT*(J-1)-PI)
          IF (NJ.EQ.2) DD2=-DD2
          HF2=HF(K)
          HF(K)=FINT
        END IF
        CPV2=CX*CX+(CY-OM*RO(K))*(CY-OM*RO(K))
        FI=( (NU(K)+T(K)*(CPV2-1.D0)+(CY-OM*RO(K))*U(K))
          *   -FI3*FI+(ROB(K)*DD2)*HF(K))/(NEQD(K)-FI3+ROB(K)*DD2)
        PSI=(0.5D0*T(K)-FI3*PSI+
          *   (ROB(K)*DD2)*HP(K))/(NEQD(K)-FI3+ROB(K)*DD2)
        HF(K)=FI
        HP(K)=PSI
        IF (K.EQ.KJ.AND.DEL*RO(K).LT.1.0001.
          *      AND.NDIS.EQ.1) FI3=CX/DR
        IF (J.EQ.JK(K,NJ).AND.DEL*RO(K).LT.1.0001.
          *      AND.NDIS.EQ.1) THEN
          DD2=CY/DT
          IF (NJ.EQ.2) DD2=-DD2
          W11=AW*W10*(THETA+DT*(J-1)-PI)/DT
          W12=AW*W10-W11
          CY2=CP*ROB(K)*R1
          CY4=CP*SIN(DT*(J-2))
          IF (NJ.EQ.2) THEN
            CY2=-CY2
            CY4=-CY4
          END IF
          CX2=-CP*COS(THETA)
          CX4=CP*COS(DT*(J-2))
          FFF1=FI*0.5D0*(W11+AW*W10)*EXP(-CX*CX-(CY-OM*RO(K))**2)
          FFF2=FINT*0.5D0*W11*(EXP(-CX2*CX2-(CY2-OM*RO(K))**2))
          FFF3=FEXT*0.5D0*W12*(EXP(-CX2*CX2-(CY2-OM*RO(K))**2))
          FFF4=-HF2*0.5D0*W11*EXP(-CX4*CX4-(CY4-OM*RO(K))**2)
          NU0(K)=NU0(K)+FFF1+FFF2+FFF3+FFF4
          U0(K)=U0(K)+FFF1*(CY-OM*RO(K))+(FFF2+FFF3)*
          *   (CY2-OM*RO(K))+FFF4*(CY4-OM*RO(K))
          PXY(K)=PXY(K)+(FFF1*CY*CX+(FFF2+FFF3)*CY2*CX2
          *   +FFF4*CY4*CX4)*NEQ(K)
          PYY(K)=PYY(K)+(FFF1*(CY-OM*RO(K))**2+(FFF2+FFF3)*
          *   (CY2-OM*RO(K))**2+FFF4*(CY4-OM*RO(K))**2)*NEQ(K)
        ELSE
          FFF=FI*(W1*EXP(-(CY-OM*RO(K))**2))
          FFPS=PSI*(W1*EXP(-(CY-OM*RO(K))**2))
          NU0(K)=NU0(K)+FFF
          U0(K)=U0(K)+FFF*(CY-OM*RO(K))
          T0(K)=T0(K)+2.D0/3.D0*(FFF*(CPV2-1.D0)+FFPS)
          PXY(K)=PXY(K)+FFF*CY*CX*NEQ(K)
          PYY(K)=PYY(K)+FFF*(CY-OM*RO(K))*(CY-OM*RO(K))*NEQ(K)
        END IF
      CONTINUE
7    IF (J.EQ.JK(1,NJ).AND.DEL.LT.1.0001.AND.NDIS.EQ.1) THEN
      NUW00=NUW00-2.*SQRT(PI)*(FFF1*CX+(FFF2+FFF3)*CX2+FFF4*CX4)
    ELSE
      NUW00=NUW00-2.*SQRT(PI)*FI*W1*CX*EXP(-(CY-OM)**2)
    END IF
2  CONTINUE

```



```

C      RO(K1) is supplied
C      Calculation of THETA
C      Calculation of FEXT (from outer cylinder) and
C      FINT(from inner cylinde)
C
      THETA=ASIN(R1/RO(K1))
      FEXT=NUW0
      IF(NJ.EQ.2) GO TO 1
      DO K=2, NR+1
        DS=SQRT(RO(K-1)*RO(K-1)-R1*R1)-SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)
        FEXT=(DS*(NU(K)+(CP*R1*ROB(K)-OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
      END DO
      FINT=NUW1+2.*(CP-OM*R1)
      DO K=NR, K1, -1
        DS=SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)-SQRT(RO(K+1)*RO(K+1)-R1*R1)
        FEXT=(DS*(NU(K)+(CP*R1*ROB(K)-OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
        FINT=(DS*(NU(K)+(CP*R1*ROB(K)-OM*RO(K))*U(K))+CP*FINT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
      END DO
      RETURN
1     CONTINUE
      DO K=2, NR+1
        DS=SQRT(RO(K-1)*RO(K-1)-R1*R1)-SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)
        FEXT=(DS*(NU(K)-(CP*R1*ROB(K)+OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
      END DO
      FINT=NUW1-2.*(CP+OM*R1)
      DO K=NR, K1, -1
        DS=SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)-SQRT(RO(K+1)*RO(K+1)-R1*R1)
        FEXT=(DS*(NU(K)-(CP*R1*ROB(K)+OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
        FINT=(DS*(NU(K)-(CP*R1*ROB(K)+OM*RO(K))*U(K))+CP*FINT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
      END DO
      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE HTHETA(THETA, KJ, RINT, FEXT)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
      REAL*8 NUW0, NUW1, NEQD, NU, NUINT
      COMMON RO(201), ROB(201), U(201), T(201), NU(201), NEQD(201), CP,
*NUW0, NUW1, R1, OM, DR, NR, NJ
C
C      THETA is supplied
C      Calculation of FEXT
C
      FEXT=NUW0
      NUINT=NU(KJ)-(RO(KJ)-RINT)*(NU(KJ)-NU(KJ+1))/DR
      UINT=U(KJ)-(RO(KJ)-RINT)*(U(KJ)-U(KJ+1))/DR
      TINT=T(KJ)-(RO(KJ)-RINT)*(T(KJ)-T(KJ+1))/DR
      IF(NJ.EQ.2) GO TO 1
      DO K=2, NR+1
        DS=SQRT(RO(K-1)*RO(K-1)-R1*R1)-SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)
        FEXT=(DS*(NU(K)+(CP*R1*ROB(K)-OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
      END DO
      IF(KJ.EQ.NR) GO TO 2
      DO K=NR, KJ+1, -1
        DS=SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)-SQRT(RO(K+1)*RO(K+1)-R1*R1)
        FEXT=(DS*(NU(K)+(CP*R1*ROB(K)-OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
*          / (NEQD(K)*DS+CP)
      END DO
2     DS=RINT*COS(THETA)-SQRT(RO(KJ+1)*RO(KJ+1)-R1*R1)

```

```

FEXT=(DS*(NUINT+(CP*R1*ROB(K)-OM*RO(K))*UINT)+CP*FEXT)
* / (NEQD(K)*DS+CP)
RETURN
1 CONTINUE
DO K=2, NR+1
  DS=SQRT(RO(K-1)*RO(K-1)-R1*R1)-SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)
  FEXT=(DS*(NU(K)-(CP*R1*ROB(K)+OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
* / (NEQD(K)*DS+CP)
END DO
IF(KJ.EQ.NR) GO TO 3
DO K=NR, KJ+1, -1
  DS=SQRT(RO(K)*RO(K)-R1*R1)-SQRT(RO(K+1)*RO(K+1)-R1*R1)
  FEXT=(DS*(NU(K)-(CP*R1*ROB(K)+OM*RO(K))*U(K))+CP*FEXT)
* / (NEQD(K)*DS+CP)
END DO
3 DS=RINT*COS(THETA)-SQRT(RO(KJ+1)*RO(KJ+1)-R1*R1)
FEXT=(DS*(NUINT-(CP*R1*ROB(K)+OM*RO(K))*UINT)+CP*FEXT)
* / (NEQD(K)*DS+CP)
RETURN
END

```

# Apêndice B

## Constantes de Integração

Tabela B.1:  $B_1^\alpha, B_2^\alpha, C_1^\alpha, C_2^\alpha, L^\alpha$  e  $D^\alpha$  com  $\alpha = P, \Omega, T$  para  $\omega = 1$  vs  $\delta$ .

	$\delta = 50$	$\delta = 100$
$B_1^P$	0,23527	0,23289
$B_2^P$	0,22405	0,22735
$C_1^P$	1,23719	1,16167
$C_2^P$	1,05534	1,02866
$L^P$	0,36989	0,36686
$D^P$	0,04437	0,02922
$B_1^\Omega$	0,39740	0,36185
$B_2^\Omega$	0,39305	0,35898
$C_1^\Omega$	1,23719	1,16167
$C_2^\Omega$	1,05534	1,02866
$L^\Omega$	0,45096	0,43095
$D^\Omega$	0,03516	0,02387
$B_1^T$	0,23527	0,23289
$B_2^T$	0,22405	0,22735
$C_1^T$	7,20502	6,46464
$C_2^T$	0,82210	0,92503
$L^T$	0,25932	0,27355
$D^T$	-0,01551	-0.00941

# Bibliografia

- [1] I. Müller, "On the frame dependence of stress and heat flux," *Arch. Rational Mech. Anal.* **45**, 241 (1972).
- [2] D. G. B. Edelen, J. A. McLennan, "Material indifference: a principle or a convenience," *Int. J. Engng. Sci.* **11**, 813 (1973).
- [3] C. C. Wang, "On the concept of frame-indifference in continuum mechanics and in the kinetic theory of gases," *Arch. Rational Mech. Anal.* **58**, 380 (1975).
- [4] L. H. Söderholm, "The principle of material frame-indifference and material equation of gases," *Int. J. Engng. Sci.* **14**, 523 (1976).
- [5] I. Müller, "On the frame dependence of electric current and heat flux in a metal," *Acta Mech.* **24**, 117 (1976).
- [6] C. Truesdell, "Correction of two errors in the kinetic theory of gases which have been used to cast unfounded doubt upon the principle of material frame-indifference," *Meccanica* **4**, 196 (1976).
- [7] W. G. Hoover, B. Moran, R. M. More, A. I. Ladd, "Heat conduction in rotating disk via nonequilibrium molecular dynamics," *Phys. Rev. A* **24**, 2109 (1981).
- [8] C.G. Speziale, "On frame-indifference and iterative procedures in the kinetic theory of gases," *Int. J. Engng. Sci.*, **19**, 63 (1981).
- [9] M. Heckl and I. Müller, "Frame dependence, entropy, entropy flux, and wave speeds in mixture of gases," *Acta Mech.* **50**, 71 (1983).
- [10] V.S. Galkin, V.I. Nosik, "Kinetic theory and the principle of material frame-indifference in the mechanics of continuous media," *PMM U.S.S.R.*, **49**, 434 (1985).
- [11] V.S. Galkin, V.I. Nosik, "The principle of material frame-indifference and cylindrical Couette flow of a rarefied gas," *PMM U.S.S.R.*, **51**, 736 (1987).

- [12] F. M. Sharipov and G. M. Kremer, "On the frame dependence of constitutive equations. I. Heat transfer through a rarefied gas between two rotating cylinders," *Continuum Mech. Thermodyn.* **7**, 57 (1995).
- [13] F. M. Sharipov and G. M. Kremer, "Heat conduction through a rarefied gas between two rotating cylinders at small temperature difference," *ZAMP* **46**, 680 (1995).
- [14] A. Sadiki and K. Hutter, "On the frame dependence and form invariance of the transport equations for the Reynolds stress tensor and the turbulent heat flux vector: its consequences on closure models in turbulence modeling," *Continuum Mech. Thermodyn.* **8**, 341 (1996).
- [15] F. Sharipov and G. M. Kremer, "Linear Couette flow between two rotating cylinders," *Eur. J. Mech., B/Fluids* **15**, 493 (1996).
- [16] F.M. Sharipov and G.M. Kremer, "Nonlinear Couette flow between two rotating cylinders," *Transport Theory Stat. Phys.* **25**, 217 (1996).
- [17] P. Biscari and C. Cercignani, "Stress and heat flux in non-inertial references frames," *Continuum Mech. Thermodyn.*, **9**, 1 (1997).
- [18] F. M. Sharipov and G. M. Kremer, "Non-isothermal Couette flow of a rarefied gas between two rotating cylinders," *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18**, 121 (1999).
- [19] W. Band, "Effects of rotation on radial heat flow in a gas," *Phys. Review A*, **29**, 4 (1984).
- [20] Y. Sone, Sh. Takata, and H. Sugimoto, "The behavior of a gas in the continuum limit in the light of kinetic theory: The gas of cylindrical Couette flows with evaporation," *Phys. Fluids* **8**, 3403 (1996).
- [21] L. M. G. Cumin, F. M. Sharipov and G. M. Kremer, "Rarefied gas flow between two cylinders caused by the evaporation and condensation on their surfaces," *Phys. Fluids* **10**, 3203 (1998).
- [22] Y. Sone, H. Sugimoto and K. Aoki, "Cylindrical Couette flows of a rarefied gas with evaporation and condensation: Reversal and bifurcation of flows," *Phys. Fluids* **11**, 476 (1999).
- [23] H. Sugimoto and Y. Sone, "Numerical analysis of steady flows of a gas evaporating from its cylindrical condensed phase on the basis of kinetic theory," *Phys. Fluids A* **4**, 419 (1992).
- [24] D. Sibold, H.M. Urbassek, "Kinetic study of evaporation flows from cylindrical jets," *Phys. Fluids A* **3**, 5 (1991).

- [25] Y. Sone, F. Golse, T. Ohwada, T. Doi, "Analytical study of transonic flows of a gas condensation into its plane condensed phase on the basis of kinetic theory," *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **17**, 277 (1998).
- [26] C.J. Knight, "Evaporation from a cylindrical surface into vacuum," *J. Fluid Mech.* **75**, 469 (1976).
- [27] Y. Sone and H. Sugimoto, "Evaporation of a rarefied gas from a cylindrical condensed phase into vacuum," *Phys. Fluids* **7**, 2072 (1995).
- [28] Y. Onishi, "Kinetic theory of evaporation and condensation of a vapor gas between concentric cylinders and spheres," *J. Phys. Soc. Jpn.* **42**, 2023 (1977).
- [29] F. M. Sharipov and E. A. Subbotin, "On optimization of the discrete velocity method used in rarefied gas dynamics," *ZAMP* **44**, (1993).
- [30] Mikhail N. Kogan, "Rarefied gas dynamics," Plenum Press - New York, 1969.
- [31] F. Sharipov, "Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at the arbitrary rarefaction. I. General theory for single gas," *Physica A* **203**, 437 (1994).
- [32] F. Sharipov, "Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at the arbitrary rarefaction. IV. Rotating Systems," *Physica A* **260**, 499 (1998).
- [33] C. Cercignani, "Theory and application of the Boltzmann equation," (Scottish Acad. Press, Edinburgh 1975).
- [34] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross and M.A. Krook, "A model for collision process in gases," *Phys. Rev.* **94**, 511 (1954).
- [35] E. M. Shakhov, "Generalization of the Krook Kinetic equation," *Fluid Dynamics* **3**, 95 (1968).
- [36] Y. Sone, "Theoretical and numerical analysis of the Boltzmann equation - Theory and analysis of rarefied gas flows - Part I," Lecture Notes Department of Aeronautics and Astronautics, (Kyoto University, August 1998).
- [37] P. Welander, "On the temperature jump in a rarefied gas," *ARKIV FOR FYSIK* Band 7 nr 44.
- [38] L. Onsager, "Reciprocal relations in irreversible processes I," *Phys. Rev.* **37** (1931) 405; "Reciprocal relations in irreversible processes II," *Phys. Rev.* **38** (1931) 2265.
- [39] H. B. G. Casimir, "On Onsager's principle of microscopic reversibility," *rev. Mod. Phys.* **17** (1945) 343.

- [40] L. M. G. Cumin, F. M. Sharipov and G. M. Kremer, "Transport phenomena in rotating rarefied gases," submetido à publicação. "Heat, mass and momentum transfer through a rotating rarefied gas", *Rarefied Gas Dynamics*, Vol. 2, pp. 253-260 (1999). C'paduès-Éditions, Toulouse.
- [41] A. L. Coimbra, "Lições de mecânica do contínuo," Editora da Universidade de São Paulo, 1978.
- [42] Y. C. Fung, "A first course in continuum mechanics," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [43] W. Michael Lai, David Rubin, Erhard Krempl, "Introduction to continuum mechanics," Pergamon Press, 1993.
- [44] I-Shih Liu, "Mechanics of continuum media," Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [45] P. Chadwick, "Continuum mechanics - Concise theory and problems," London George Allen & Unwin Ltd, 1976.
- [46] A. J. M. Spencer, "Continuum mechanics," Longman Mathematical Texts, 1980.
- [47] G. M. Kremer, "A equação de Boltzmann e os processos de transporte em gases," Departamento de Física, UFPR, novembro 1995.
- [48] R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, "Transport phenomena," Wiley International Edition, 1960.
- [49] Cercignani C., and F. Sernagiotto, "Cylindrical Poiseuille flow of a rarefied gas," *Phys. Fluids* **9**, 40 (1966).
- [50] G. A. Bird, "Molecular gas dynamics," Clarendon Press - Oxford, 1976.
- [51] T. Ohwada, "Higher order approximation methods for the Boltzmann equation," *J. of Computational Physics* **139** 1 (1998).
- [52] F. Sharipov and V. Seleznev, "Data on Internal rarefied gas flows," *J. Phys. Chem. Ref. Data* **27**, 657 (1998).
- [53] Walter G. Vincenti, Charles H. Kruger, Jr., "Introduction to physical gas dynamics," John Wiley and Sons, Inc., New York - London - Sydney, 1965.
- [54] Chih-Lan Su, D.R. Wills, "Heat conduction in a rarefied gas between concentric cylinders," *Phys. Fluids* **11**, 10 (1968).

- [55] Y.S. Lou, T.K. Shih, "Nonlinear heat conduction in rarefied gases confined between concentric cylinders and spheres," *Phys. Fluids* **15** 5 (1972).
- [56] Loyalka S.K. and S.A. Hamoodi, "Poiseuille flow of a rarefied gas in a cylindrical tube: Solution of linearized Boltzmann equation," *Phys. Fluids A* **2**, 2061 (1990) Erratum. in *Phys. Fluids A* **3**, 2825 (1991).
- [57] S. R. de Groot and P. Mazur, "Non-equilibrium thermodynamics," (Dover, New York, 1984).
- [58] I. Prigogine, "Introduction to thermodynamics of irreversible processes," (Springfield, IL, 1955) ch. IV (3rd ed: Interscience, New York, 1967).
- [59] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, "Theoretical physics," vol.5: Statistical Physics, Part 1 (Nauka, Moscow, 1976) ch. XII.
- [60] G.G. Scott, H.W. Sturmer, R.M. Williamson, "Gas torque effect for molecular combinations of hydrogen and deuterium," *Phys. Lett.* **25A**, 573 (1967).
- [61] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (London, Pergamon Press 1959).
- [62] Y. Sone and Y. Onishi, "Kinetic theory of evaporation and condensation - hydrodynamic equation and slip boundary condition," *J. Phys. Soc. Jpn.* **44**, 1981 (1978).
- [63] Y. Onishi and Y. Sone, "Kinetic theory of slightly strong evaporation and condensation - hydrodynamic equation and slip boundary condition for finite Reynolds number," *J. Phys. Soc. Jpn.* **47**, 1676 (1979).