

JOSÉ CARLOS PEREIRA CONINCK

A DINÂMICA NÃO LINEAR DO MODELO DE QUATRO ONDAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

CURITIBA

2002

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Mestrado do estudante **José Carlos Pereira Coninck**, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é "A Dinâmica Não-Linear do Modelo de Quatro Ondas".

Curitiba, 28 de Fevereiro de 2002.

Prof. Sergio Roberto Lopes
(Orientador Presidente)
(UFPR)



Prof. Ricardo Luiz Viana
(UFPR)



Prof. Felipe Barbedo Rizzato
(UFRGS)



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOSÉ CARLOS PEREIRA CONINCK

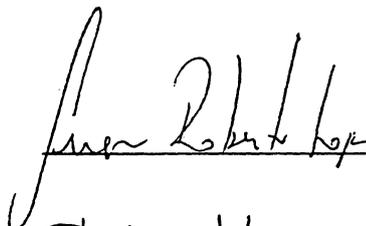
Título : “A Dinâmica Não-Linear do Modelo de Quatro Ondas”

Em sessão pública, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto de sua tese sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato conceito global A.

Banca Examinadora:
Conceito

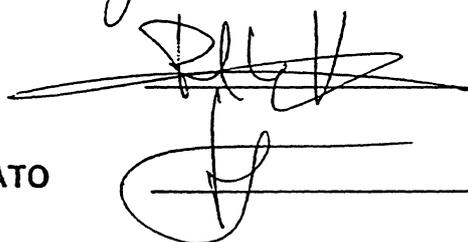
Assinatura

Prof. SERGIO ROBERTO LOPES
(Orientador/Presidente)
(UFPR)



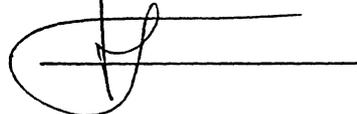
A

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(UFPR)



A

Prof. FELIPE BARBEDO RIZZATO
(UFRGS)



A

Curitiba, 28 de fevereiro de 2002

*Dedico esta dissertação aos meus pais
Adhemar e Therezinha Coninck e à Cris-
tiane S. M.*

RESUMO

Nesta dissertação estudamos a dinâmica não linear de um modelo de interações entre quatro ondas com acoplamento entre ondas sibilantes e íon-acústicas ($W_1 \iff W_3 + W_4 + S_2$) em plasmas frio [1][2](na magnetosfera da Terra [3], por exemplo) sujeito a um campo magnético ambiental. W_3 , W_4 e S_2 representam os modos anti-Stokes, Stokes e íon-acústico respectivamente. A proposta da dissertação é simular numericamente bacias de atração, bifurcações, expoentes de Lyapunov, histereses, fractalidade, periodicidade e caos, além de discutirmos alguns de seus efeitos para com o modelo proposto [4] [5]. A simulação numérica foi desenvolvida em Fortran77 utilizando-se do integrador Lsoda [6] [7] em ambiente Linux.

-Palavras chave: Multiestabilidade, caos, interação onda-onda
-Áreas de conhecimento: Física de plasma, dinâmica não linear.

ABSTRACT

Nonlinear wave-wave coupling in plasmas can be modeled as a dynamical system of coupled oscillators involving one, two or higher-order wave triplets. In this work we examine dynamical states observed in the coupling of two resonant wave triplets sharing two common modes namely, the four wave problem (exemplified here by the particular coupling between sibilantes waves and ion acoustic waves, $W_1 \iff W_3 + W_4 + S_2$), the multistable states presented by the dynamics of the dissipative four wave coupling is studied. Here we show that when we allow the presence of small mismatches in the wave frequency conditions for both triplets, the dynamics exhibit a sequence of bifurcations that leads the system to present an infinite number of attractors. Finally we show that the attraction basin configurations for these attractors can exhibit fractal properties including the presence of riddled basins.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade e,

ao Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes pela amizade, orientação, paciência e dedicação,

aos professores da banca: Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e ao Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana,

aos professores: Prof. Dr. Marcio Henrique Franco Bettega, ao Prof. Dr. Marcus Werner Beims, ao Prof. Dr. Carlos de Carvalho e ao Prof. Dr. Mauro Gomes Rodbard,

aos amigos Angela Maria dos Santos, José Renato Barbosa, Mario Sergio Texeira de Freitas, Cristina Sanae Yamamura, Diógenes Borges Vasconcelos, Sandro Eli de Souza Pinto, Adriano Reinaldo Viçoto Benvenho, Dilcleia Dobrowolski, Sura Helen-Cot Marcos, Jefferson Stafusa Elias Portela, Eliane Pereira Serra Xavier e Beatriz Bronislava Lipinski pelas ajudas técnicas,

a todos os colegas da Pós-graduação,

aos velhos amigos Joaquim Corujedo Garcia, Artem Pashechuk, Pedro di Tárique Crispim, Daniel Fernandes, Edward Fernandes, Eduardo M. de Oliveira, Marcos F. Cassel, Edna Peluti, Amélia Peluti, Mauren Abreu, Cassiana Baptista, Marcos Leandro Mamede e

à CAPES pelo financiamento.

Sumário

Agradecimentos	5
Lista de Tabelas	9
Lista de Figuras	10
1 Introdução	16
2 A Interação de Quatro Ondas	19
2.1 Introdução	19
2.2 Observação das ondas sibilantes	19
2.3 Alguns conceitos fundamentais em física de plasmas	20
2.4 As ondas consideradas neste trabalho	23
2.4.1 Ondas sibilantes	23
2.4.2 Ondas íon-acústicas	24
2.5 Pré-modelamento	25
2.6 O modelo das quatro ondas	26
3 Introdução aos Sistemas Dinâmicos	31

3.1	Introdução	31
3.2	Sistemas Dinâmicos	31
3.2.1	Espaço de fase	32
3.2.2	Estabilidade	32
3.2.3	Linearização	34
3.2.4	Classificação e Estabilidade das Soluções de Equilíbrio	35
3.3	Seção de Poincaré	36
3.4	Subespaços e variedades invariantes:	37
3.4.1	Subespaços:	37
3.4.2	Variedades:	38
3.5	Dimensões Fractais	39
3.6	Bacias de Atração	41
3.7	Sensibilidade ao estado final	43
3.8	Técnica computacional	44
3.9	Classificação das bacias	45
3.10	Diagramas de bifurcação	45
3.11	Histerese	48
3.12	Expoentes de Lyapunov	48
4	Bifurcações e Espectros de Lyapunov para o Modelo de Quatro ondas	52
4.1	Introdução	52
4.2	Escolha dos parâmetros	53

4.3	Transiente	54
4.4	Procura de Atratores	55
4.4.1	Histogramas	55
4.5	O Diagrama de Bifurcação	60
4.5.1	Diagrama de bifurcação inicializada pela órbita do atrator com período três:	60
4.5.2	Diagrama de bifurcação inicializada pela órbita do atrator com período um:	62
4.6	Mistura de diagramas de bifurcação:	65
4.7	Diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov no modelo	66
4.7.1	Espectro de Lyapunov	66
4.7.2	Espectro de Lyapunov para o atrator de órbita com período três:	68
4.7.3	Espectro de Lyapunov para o atrator de órbita com período um:	69
4.8	Espectro de Lyapunov X Diagrama de Bifurcação	70
4.8.1	Espectro de Lyapunov X diagrama de bifurcação para o atrator de período três para $\nu = -0,8$:	70
4.8.2	Espectro de Lyapunov X diagrama de bifurcação para o atrator de período um (figura (4.23)):	71
5	Bacias de Atração	78
5.1	Introdução	78
5.1.1	Escolha das condições iniciais	78
5.1.2	Bacias de Atração para o modelo de 4 ondas	79
5.1.3	Região “quase” linear	80

5.1.4	Caracterização das Bacias do Modelo	80
6	Multiestabilidade no Modelo de 4 Ondas	89
6.1	Introdução	89
6.2	A histerese e a multiestabilidade	90
6.2.1	Escolha dos parâmetros para a simulação do diagrama de bifurcação	90
6.2.2	Diagrama de bifurcação para $ \delta_4 $ com $ \delta_3 = 2,0$ fixo	91
6.2.3	Espectro de Lyapunov para $ \delta_4 $ com $ \delta_3 = 2,0$ fixo	91
6.3	Crescimento de atratores	93
6.3.1	Histogramas para $ \delta_4 = \delta_3 $	95
7	Conclusão e trabalhos futuros	97
7.1	Conclusão	97
7.2	Trabalhos futuros	98

Lista de Tabelas

3.1	Sinal do expoente de Lyapunov para alguns tipos de atratores [8]. . .	50
-----	-----------------------------------------------------------------------	----

Lista de Figuras

2.1	Esquema da propagação das ondas sibilantes na magnetosfera da Terra.	20
2.2	Onda eletromagnética com polarização para a direita [9].	22
2.3	Traçado da ponta do vetor \mathbf{E} num dado ponto do espaço como função do tempo [10].	23
2.4	Curva de dispersão para ondas sibilantes [1].	24
2.5	Curva de dispersão para ondas íon-acústicas [1].	25
2.6	Modelo esquemático da interação entre as ondas, aqui indicamos como sendo as ondas Indutora Sibilante (W); Íon Acústica (S); Anti-Stokes (W_-) e Stokes (W_+) por 1, 2, 3 e 4 respectivamente [1].	30
3.1	Estabilidade de Lyapunov: Esquema de uma solução $y(t)$ que sempre fica na proximidade da solução de equilíbrio $\bar{x}(t)$ [11].	33
3.2	Estabilidade assintótica: Esquema de uma solução $y(t)$ tendendo para a solução de equilíbrio $\bar{x}(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ [11].	34
3.3	Geometria do mapa de Poincaré para sistemas autônomos, aqui o mapa associa o conjunto de pontos em V com os seus pontos do primeiro retorno no plano de intersecção Σ	37
3.4	Geometria do mapa de Poincaré para sistemas não autônomos. Na figura t_0 refere-se ao tempo inicial, enquanto T é o período associado com a órbita periódica.	38
3.5	Esquema da estrutura espacial das variedades W e dos subespaços E [4].	39

3.6	Exemplo de uma curva de Koch [12].	40
3.7	Exemplo de contagem por caixas como técnica utilizada para calcular a dimensão espacial da figura. Neste caso, uma curva suave [5].	41
3.8	(a) Potencial $V(x)$ de um movimento unidimensional, (b) Bacia de atração para os dois pontos fixos $x = +x_0$ e $x = -x_0$ [4], [5].	42
3.9	Diagrama do espaço de fase com duas bacias e seus atratores (A e B), separadas por uma fronteira Σ . Os pontos 1 e 2 representam condições iniciais distintas, enquanto o ε representa o “raio de erro” das respectivas condições [5].	43
3.10	Bifurcação tipo transcritical [13].	46
3.11	Bifurcação tipo sela [13].	46
3.12	Bifurcações do tipo forquilha. Podem apresentar-se de duas formas: (A) e (D) supercrítico e; (B) e (C) subcrítico [13].	47
3.13	Bifurcação tipo Hopf, para $\mu < 0$ temos equilíbrio estável e para $\mu > 0$ temos um ciclo limite [14].	47
3.14	Exemplo do diagrama de bifurcação para o oscilador de Duffing [15].	49
3.15	Três expoentes de Lyapunov para a equação de Duffing. Regiões com expoentes com valor positivo indicam a presença de caos no sistema [8].	51
4.1	Transiente para um atrator em específico. A figura mostra o máximo da amplitude de $ A_1 \times \tau$	54
4.2	Série temporal e espaço de fase. De cima para baixo: atrator periódico com período três, atrator periódico unitário e o caso divergente. Lembramos que está plotado o valor absoluto: $ A_s = A_s A_s^*$	56
4.3	Histograma para o caso $\delta_3 = 2,0$ e $\delta_4 = 2,01$ com $r = 1$. Temos para A em torno de 24% de pontos convergindo para o atrator (periódico) de período unitário e 11% para o atrator (periódico) de período três, indicado por B.	58

4.4	Histograma para o caso $\nu_{2,3,4} = -1,040$. Temos 99,8% de convergência para o atrator, isto significa que a onda indutora sibilante tem apenas um estado estacionário para um intervalo de $[0, 50]$ condições iniciais.	58
4.5	Histograma para o caso $ \delta_3 = \delta_4 = 2,0$. Parece haver um tipo de distribuição. Aqui são geradas 23954 condições iniciais aleatórias. . .	59
4.6	Continuação do histograma para o caso $ \delta_3 = \delta_4 = 2,0$. Observamos mais uma diversificação de atratores, muitos aparecem apenas uma vez, outros duas.	59
4.7	Diagrama de bifurcação para o modelo de quatro ondas, inicializado pela órbita do atrator com período três.	61
4.8	Bifurcação do tipo bolha.	62
4.9	Conjunto de bifurcações que se assemelham com o diagrama de bifurcação do mapa logístico.	63
4.10	Bifurcação do tipo Hopf.	63
4.11	Bifurcação do tipo intermitência, crise, etc....	64
4.12	Bifurcação inicializada pela onda sibilante indutora com período unitário.	64
4.13	Sobreposição dos dois diagramas de bifurcação.	65
4.14	Mostra da perda da bacia para a bifurcação do período 1.	66
4.15	Limiar do diagrama de bifurcação da órbita de período 1	67
4.16	Espectro de Lyapunov para o modelo de 4-ondas, inicializado pela órbita de período três em $\nu = -0,8$	68
4.17	Espectro de Lyapunov para o modelo de 4-ondas, inicializado pela órbita de período um em $\nu = -0,8$	69
4.18	Expoentes de Lyapunov para a bifurcação do tipo Hopf. Observamos uma mudança no comportamento de um dos expoentes.	72
4.19	Regiões periódicas e caóticas. As regiões entre os pontos B e C apresentam caos enquanto toda a região à esquerda de B, periodicidade. O ponto A mostra uma duplicação de período.	73

4.20	Regiões periódicas, duplicações de período, bolhas e regiões caóticas. .	74
4.21	Regiões mistas. Aqui três regiões são importantes: (1) região de periodicidade; (2) região de toro T^2 e (3) região caótica com janelas periódicas. Esta numeração está de acordo com as séries temporais e espaços de fase simuladas na figura (4.22).	75
4.22	Temos aqui as séries temporais na primeira coluna e os espaços de fase na segunda coluna para regiões do gráfico (4.21). No primeiro quadrante, de cima para baixo, é a região periódica com seu espaço de fase à direita, relacionado ao índice (1) da figura (4.21). Na sequência (de acordo com o índice (2) da figura (4.21)) temos uma série temporal quase-periódica apresentando um toro T^2 no seu espaço de fase com características densas e espessas. Finalmente referente ao índice (3) temos uma série temporal caótica com seu espaço de fase um tanto irregular.	76
4.23	Expoentes de Lyapunov X diagrama de bifurcação para o atrator de período um.	77
5.1	Bacias de Atração para o acoplamento máximo $r = 1,0$. As regiões verdes relacionam-se com o atrator no infinito (caso divergente); os atratores de período um e três estão correlacionados com as cores vermelho e preto, respectivamente.	81
5.2	Bacia de Atração para o caso em que o acoplamento é $r = 0,9999$. O atrator de período três não aparece mais, sendo ocupado por outras duas bacias: atrator de período um (região vermelha) e pelo caso divergente (região verde).	82
5.3	Bacia de Atração para o caso do acoplamento $r = 0,999$. A fronteira da bacia toma formas mais bem definidas.	83
5.4	Zoom da bacia de atração para o caso do acoplamento $r = 1,0$. Aqui $Re(A_1)$ varia de $0 \rightarrow 50$ e $Re(A_3)$ varia de $0 \rightarrow 1$	84
5.5	Caracterização das bacias apresentadas pela figura (5.3) com $\alpha = 0,936262$ para $r = 0,999$	86
5.6	Caracterização das bacias apresentadas pela figura (5.1) com $\alpha = 0,02221793$ para $r = 1,0$ (100%).	88

6.1	Diagrama de bifurcação via parâmetro $ \delta_4 $. Observamos histerese. . .	92
6.2	Diagrama de bifurcação via $\nu_{2,3,4}$; não há histerese.	92
6.3	Diagrama de bifurcação para a variação do parâmetro $ \delta_4 $; evidenciando vários percursos alternativos quando $ \delta_4 \approx \delta_3 $, lembramos que $ \delta_3 = 2.0$	93
6.4	Composição do expoente de Lyapunov com a variação de $ \delta_4 $	94
6.5	Detalhamento da figura (6.4).	94
6.6	Contagem do número de atratores de acordo com que a diferença $\Delta = \delta_4 - \delta_3 $ tende a zero.	95
6.7	Histograma apresentando a distribuição de atratores para valores de $ \delta_4 = \delta_3 = 1, 0; 2, 0$ e $3, 0$	96

Capítulo 1

Introdução

Com o desenvolvimento da informática nas últimas décadas, muitos problemas em inúmeras áreas do conhecimento humano, antes impossíveis de serem estudadas, tornaram-se acessíveis. Isto foi possível graças aos grandes avanços em termos de hardware, software e telecomunicações. Estas mudanças são conseqüências da evolução das aplicações, que necessitam cada vez mais, da capacidade de processamento e armazenamento de dados. A prova disso foi o avanço dos ambientes gráficos, memórias computacionais, sistemas multimídias, redes, etc... Desde então novos conceitos passaram a surgir, não somente nas áreas tecnológicas, mas também nas áreas biológicas, humanas, exatas, etc....

Teorias matemáticas surgiram com o desenvolvimento dos métodos numéricos, bem como dos programas e ambientes gráficos. Um exemplo é o ramo da **Dinâmica Não Linear** [4], [5], [12], [8], [1], [16], [17]; pois nos últimos 50 anos têm-se verificado um crescimento significativo neste tipo de estudo, não somente nas áreas da física ou matemática, mas também em outras, tais como engenharia elétrica/civil/mecânica [18], biologia [19] [20], economia [21] [22], sociologia [23], medicina [24] [24], química [18] etc... Acredita-se que conceitos novos como bifurcação, caos, não linearidade, expoentes de Lyapunov e histereses, serão num futuro breve, ferramentas importantes no diagnóstico dos comportamentos de inúmeros sistemas dinâmicos que modelam os fenômenos reais destes sistemas. Este tipo de estudo é útil para a análise de qualquer conjunto de equações diferenciais referentes à muitas áreas do conhecimento.

Sob tais aspectos, **damos um enfoque prioritário na aplicação do estudo de dinâmica não linear** em ondas eletromagnéticas observadas no plasma espacial nas regiões aurorais da Terra, mais especificamente, de ondas de rádio, as *ondas sibilantes* [2], [1]. Tomamos como exemplo relatos de observações de ondas no plasma geomagnético[1] [3].

De forma simplista pode-se afirmar que a maioria destes fenômenos naturais de ondas observadas nestas regiões originam-se da interação Vento solar - Magnetosfera - Ionosfera, bem como nas emissões geradas na magnetosfera, decorrentes de decaimento e/ou fusão de outras ondas. Uma das emissões mais importantes da magnetosfera são as *ondas sibilantes* que são geradas por feixes de elétrons, ou via acoplamento de outras emissões (como por exemplo as ondas Alfvén e ondas de Langmuir)[1]. Ficando como nossa motivação física o fenômeno das ondas sibilantes geradas pelos feixes.

Neste trabalho estaremos dando continuidade a um estudo já desenvolvido durante alguns anos paralelamente em ambos os ramos. Estes trabalhos podem ser encontrados na literatura e/ou em publicações referentes aos modelos de acoplamentos de três ou quatro ondas [1], [4], [2], [25]. Em nosso caso o conjunto de equações diferenciais que modelam as emissões de ondas sibilantes é a motivação do estudo da dinâmica não linear neste trabalho. Tais equações têm origem na interação de quatro ondas ($W \iff W_- + W_+ + S$)¹ em plasmas frios, as quais discutiremos no capítulo 2. Estas ondas estão sujeitas a um campo magnético ambiental, que neste caso é o campo magnético terrestre. As equações utilizadas apresentam-se em um modelo de quatro equações complexas acopladas sendo introduzidos pequenos descasamentos lineares e dissipações no sistema. Desta forma o modelo perde sua característica conservativa propositalmente. Aplicamos neste modelo de quatro ondas alguns conhecimentos em dinâmica não linear. Para valores específicos de dissipação, injeção de energia, descasamento de frequências, observamos alta dependência das condições iniciais no acoplamento destas ondas. Também notamos que através da variação das dissipações podemos obter muitas características das bifurcações encontradas na literatura. Foram observados comportamentos como bifurcação de Hopf, caos, bifurcação por duplicação de período, bolhas, janelas periódicas... Em relação aos descasamentos de frequências δ , inseridos nas equações do modelo foi possível demonstrar efeitos de histerese e multiestabilidade, podendo ser o provável responsável pelo enorme crescimento de atratores.

Nesta dissertação apresentamos os conteúdos teóricos básicos do modelo, bem como da dinâmica não linear, nos capítulos 2 e 3, respectivamente. As aplicações dos diagramas de bifurcações e expoentes de Lyapunov no modelo de quatro ondas discutiremos no capítulo 4. Já o capítulo 5 é referente a sensibilidade às condições iniciais quando o parâmetro de acoplamento r é variado. A histerese e multiestabilidade está sendo demonstrado no capítulo 6 em “Multiestabilidade no modelo de 4 ondas”. E, finalmente concluímos o trabalho no capítulo 7.

Para ser possível este estudo, foi necessário simularmos computacionalmente as equações do modelo. Tais simulações foram realizadas utilizando-se de

¹Sendo W_1 a onda indutora sibilante, W_3 a onda anti-Stokes, W_4 a onda Stokes e finalmente, a onda íon-acustica S .

uma rede de computadores em ambiente Linux do Departamento de Física. A programação foi desenvolvida em Fortran77 sendo o processamento feito em máquinas pentium e alphas. O integrador utilizado foi o LSODA (Double Precision Livermore Solver for Ordinary Differential Equations, with automatic method switching for stiff and nonstiff problems), com o método de Adams (preditor-corretor) de ordem 12 [6][7].

Capítulo 2

A Interação de Quatro Ondas

2.1 Introdução

A proposta deste capítulo é expôr sem maiores detalhes as equações escolhidas para o estudo da dinâmica não linear. O fenômeno físico escolhido foi o acoplamento entre ondas que se propagam em plasmas. As equações que o rege [26] serão analisadas com base em alguns tópicos de dinâmica não linear; que é o propósito principal deste trabalho. Aqui, faremos apenas uma breve descrição das interações entre as ondas, de forma a deixar claro o modelo usado. Como um exemplo de interação entre quatro ondas abordaremos o acoplamento¹ entre ondas sibilantes e íon-acústicas ($W \iff W_- + W_+ + S$) interagindo em um plasma frio (o espaço por exemplo) sujeito a um campo magnético ambiental, em nosso caso este campo é o campo magnético terrestre B_0 . Neste trabalho, W, W_-, W_+, S representam os modos sibilante indutor, anti-Stokes e Stokes e o modo íon-acústico respectivamente.

2.2 Observação das ondas sibilantes

Ondas sibilantes são ondas eletromagnéticas que se propagam paralelamente ao campo magnético ambiental terrestre e possuem frequências menores que a frequência eletro-ciclotrônica [1], [25], [27]. Seu nome decorre do fato destas propagações (emissões) gerarem, em receptores de rádio, um ruído característico ao de assobios [1]. Um exemplo deste tipo de emissão pode ser obtido a partir de emissões geradas por relâmpagos. Tais eventos geram, entre outros tipos de emissões, ondas

¹O sinal “ \iff ” significa acoplamento nos dois sentidos, isto é, bidirecional

sibilantes que, propagando-se ao longo das linhas do campo magnético terrestre B_0 , podem ser captadas a milhares de quilômetros do evento. De fato, um relâmpago produzido em altas latitudes no hemisfério sul pode ser captado no hemisfério norte da Terra. Estas ondas são guiadas pelas linhas do campo magnético e observadas por receptores, por exemplo, no Canadá. Contudo, diferentes frequências chegam em diferentes tempos. Assim, frequências baixas chegam mais tarde, causando um decrescimento no tom. A estas ondas chamamos de *ondas sibilantes*[2]. Tais ondas são a motivação básica de nosso estudo em dinâmica não linear. Na figura (2.1) apresentamos um esquema básico de propagação de ondas sibilantes na magnetosfera da Terra.

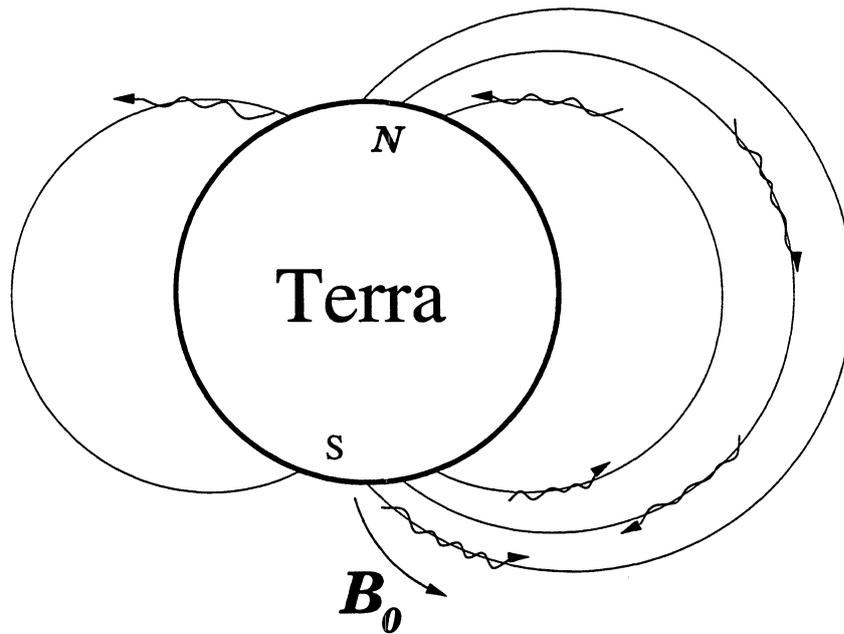


Figura 2.1: Esquema da propagação das ondas sibilantes na magnetosfera da Terra.

2.3 Alguns conceitos fundamentais em física de plasmas

Um plasma pode ser definido, em geral, como sendo um gás eletricamente carregado e de forma global neutro, apresentando um comportamento coletivo [2]. Um exemplo de plasma na natureza pode ser dado pela ionosfera e magnetosfera da Terra, bem como o próprio espaço interplanetário. Para uma correta definição, o comportamento de um plasma deve satisfazer algumas condições ou critérios, tais como [3]:

- **Ser macroscopicamente neutro:**

Na ausência de perturbação externa o plasma é *macroscopicamente neutro*, isto é, no interior do plasma ou no espaço microscópico das cargas, os campos elétricos cancelam-se e nenhuma rede espacial de carga existe macroscopicamente.

- **Comprimento de Debye λ_D :**

Provém de uma medida de distância em que a influência do campo elétrico de uma partícula carregada é sentida por outra no interior do plasma [3]. Em outras palavras, se uma carga Q for introduzida no plasma, esta será gradualmente neutralizada. Desta forma, a redistribuição de elétrons e íons no gás é tal que a blindagem completamente numa distância λ_D . Esta distância é também conhecida por *blindagem de Debye*. Este comprimento é dado por [3]:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T}{n_e e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo, K_B é a constante de Boltzmann, n_e é a densidade de elétrons no meio, T é a temperatura e e é a carga do elétron.

- **Frequência de plasma ω_p :**

Se os elétrons em um plasma estão em média deslocados dos íons, campos elétricos formam-se a fim de restaurar a neutralidade do meio. Tal campo gera uma força que arrasta os elétrons para as suas posições originais. Por causa de sua inércia, oscilam em torno da posição de equilíbrio com uma frequência conhecida como *frequência de plasma* ω_p [2]:

$$\omega_{p\alpha} = \left(\frac{n_{0\alpha} q_\alpha^2}{\epsilon_0 m_\alpha} \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

sendo $n_{0\alpha}$ a densidade de carga, q a carga elétrica e α a natureza da carga².

- **Relação linear de dispersão $\omega = \omega(\mathbf{k})$:**

A relação funcional entre o vetor de onda \mathbf{k} e ω é dita ser a *relação de dispersão* [3].

- **Polarização das ondas:**

Podemos considerar um campo \mathbf{E} oscilante decomposto em duas direções, com amplitudes reais E_a e E_b , que podem ter quaisquer valores. Além disso, as componentes podem estar oscilando fora de fase por um valor ϕ [10], tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_a \mathbf{a} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_b \mathbf{b} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.3)$$

²O índice α será " + " no caso de íons positivos e " - " no caso de elétron.

A polarização da onda depende do valor de ϕ . Considerando que o campo \mathbf{E} oscile num certo ponto, digamos $\mathbf{r} = 0$, então temos o seguinte:

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = E_a \mathbf{a} \cos(\omega t - \phi) + E_b \mathbf{b} \cos(\omega t). \quad (2.4)$$

Podemos ter o caso em que o campo esteja linearmente polarizado, $\phi = n\pi$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = (\pm E_a \mathbf{a} + E_b \mathbf{b}) \cos(\omega t); \quad (2.5)$$

ou elipticamente polarizado, como por exemplo em que $\phi = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = E_a \mathbf{a} \sin(\omega t) + E_b \mathbf{b} \cos(\omega t). \quad (2.6)$$

Se $E_a = E_b$, dizemos que \mathbf{E} é circularmente polarizado [10]. *Ondas sibilantes* são ondas circularmente polarizadas. Na figura (2.2) apresentamos um esquema de propagação de ondas eletromagnéticas.

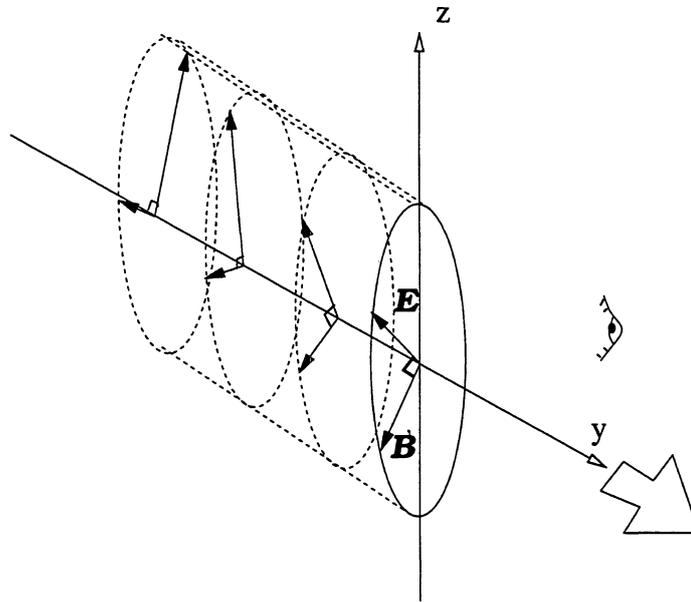


Figura 2.2: Onda eletromagnética com polarização para a direita [9].

Assim para um observador de frente para o campo, o vetor resultante vai girar no sentido direito (anti-horário) com frequência angular, digamos ω_r . No caso contrário, no sentido esquerdo, terá uma frequência ω_l [9] como mostrado na figura (2.3).

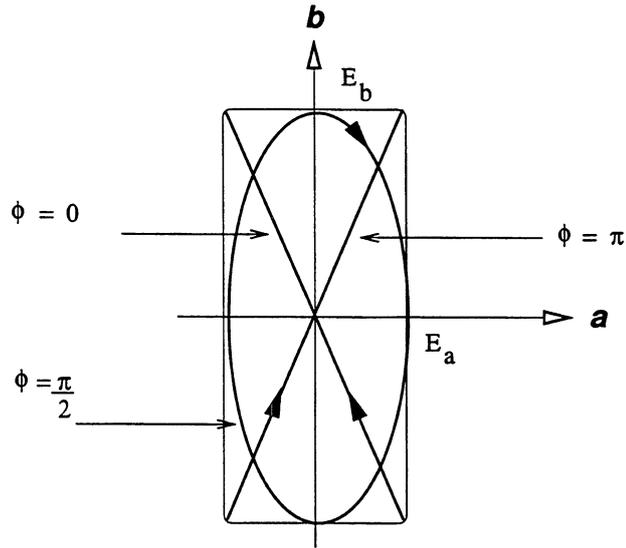


Figura 2.3: Traçado da ponta do vetor \mathbf{E} num dado ponto do espaço como função do tempo [10].

2.4 As ondas consideradas neste trabalho

2.4.1 Ondas sibilantes

De forma geral, as ondas eletromagnéticas ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \neq 0$), possuidoras de vetores de ondas paralelos ao campo magnético ambiental terrestre \mathbf{B}_0 podem ser subdivididas em dois modos de propagação, distinguidos por duas polarizações diferentes: uma à direita e outra à esquerda como mencionado acima. Podemos escrever para as ondas sibilante envolvidas neste trabalho (com polarizações à direita) a seguinte relação linear de dispersão [1]:

$$\omega_r^2 = c^2 k_r^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_r}{\omega_r - \omega_{ce}} + \frac{\omega_{pi}^2 \omega_r}{\omega_r + \omega_{ci}}, \quad (2.7)$$

onde as ω_{ce} e ω_{ci} é a frequência ciclotrônica referente aos elétrons e íons, respectivamente.

Convém esclarecer que para polarizações circulares à esquerda a relação de dispersão será dada por:

$$\omega_l^2 = c^2 k_l^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_l}{\omega_l + \omega_{ce}} + \frac{\omega_{pi}^2 \omega_l}{\omega_l - \omega_{ci}}, \quad (2.8)$$

sendo que l e r dizem respeito às polarizações à esquerda e à direita respectivamente.

O modo com polarização para a direita (equação (2.7)) e possuidor de freqüências menores que a freqüência ciclotrônica dos elétrons $\omega_{ce} = eB_0/m_e$, recebe o nome de *modo sibilantes*. Na figura (2.4) mostramos o gráfico da relação de dispersão para o modo sibilante.

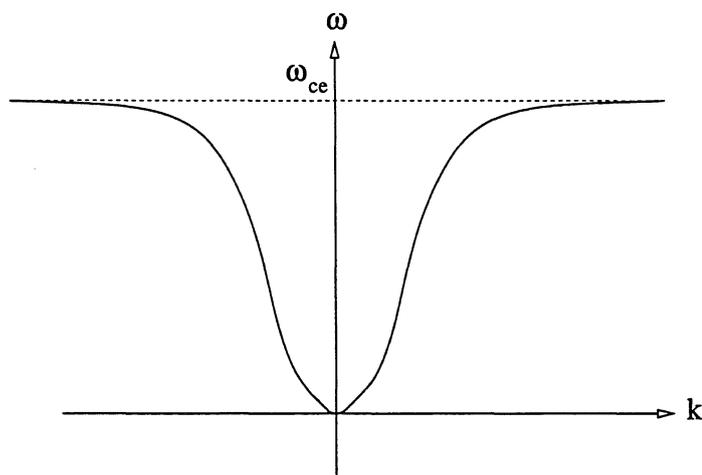


Figura 2.4: Curva de dispersão para ondas sibilantes [1].

2.4.2 Ondas íon-acústicas

Para oscilações de baixa freqüência o movimento de íons deve ser considerado. Suponha que possamos escrever as densidades $n_e = n_i = n$ e, que os elétrons, sendo muito mais leves que os íons, possam ter suas massas desconsideradas, de forma que a distribuição de cargas negativas possa ser considerada contínua sobre todo o espaço. A partir destas suposições, a relação linear de dispersão para a onda íon-acústica pode ser escrita como [1]:

$$\omega^2 = c_2^2 k^2, \quad (2.9)$$

sendo $c_2 = [(\gamma_e K_B T_e + \gamma_i K_B T_i)/m_i]^{1/2}$ a velocidade íon-acústica, onde γ é a razão de calores específicos e os índices i e e representam os íons e elétrons, respectivamente. K_B é a constante de Boltzmann, enquanto T_α é a temperatura associada.

Estas ondas não possuem polarização (modo eletrostático). Na figura (2.5) mostramos o gráfico da relação de dispersão para estas ondas.

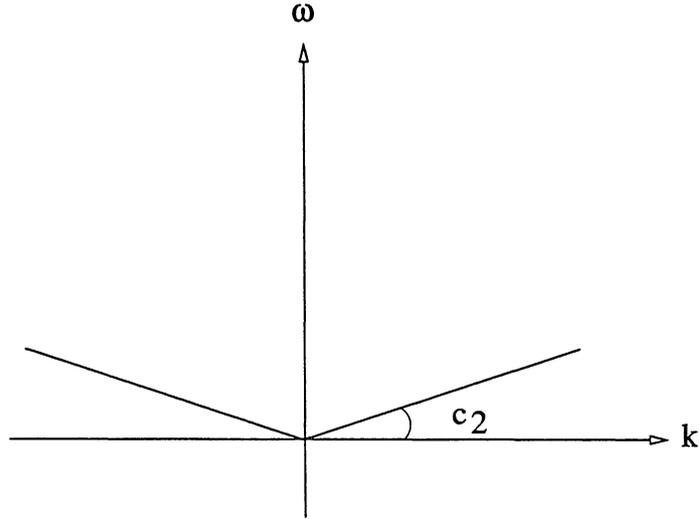


Figura 2.5: Curva de dispersão para ondas íon-acústicas [1].

2.5 Pré-modelamento

Uma das aproximações mais comuns para se estudar tais interações de ondas consiste em utilizar-se do sistema de equações formado pelos momentos da equação de Vlasov (teoria hidromagnética e teoria de dois fluidos), juntamente com as equações de Maxwell, aplicando-se uma análise de perturbações. As equações utilizadas para descrever tais interações podem ser escritas como [1], [27]:

- Equação de movimento:

$$\partial_t \mathbf{v}_\alpha + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nu_\alpha \mathbf{v}_\alpha - \frac{\gamma_\alpha K_B T_\alpha}{m_\alpha} \nabla \ln n_\alpha. \quad (2.10)$$

- Equação da continuidade:

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0. \quad (2.11)$$

- Equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \right), \quad (2.13)$$

sendo $\alpha = (e, i)$, $q_e = -e$, $q_i = e$, K_B a constante de Boltzmann. T_α e m_α são, respectivamente, a temperatura e a massa das partículas da espécie α . Aqui ν é a frequência de amortecimento ou crescimento (a depender do sinal de ν)

e γ é a razão de calores específicos. As equações (2.12) e (2.13) podem ser combinadas levando-nos à equação da onda [1]:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (2.14)$$

2.6 O modelo das quatro ondas

A mesma técnica utilizada para o modelamento das quatro ondas foram feitas para o modelamento das três ondas [1], [25], [27]. O desenvolvimento para o caso das quatro ondas encontram-se na referência [1].

Restringindo-nos a uma modelagem onde todas as ondas que interagem entre si propagam-se ao longo do campo magnético ambiental (\mathbf{B}_0), assumiremos a ausência de campo elétrico ambiental ($\mathbf{E}_0 = 0$) e a densidade do plasma será assumida como sendo n_0 . Os campos elétricos das ondas sibilantes $\mathbf{E}_{1,3,4}$ e íon acústica \mathbf{E}_2 são escritos³ em notação modulacional como [1]:

$$\mathbf{E}_{(1,3,4)}(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{(1,3,4)}(z, t) \hat{r} \exp [i(k_{(1,3,4)}z - \omega_{(1,3,4)}t)] + c.c, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_2(z, t) \hat{z} \exp [i(k_2z - \omega_2t)] + c.c. \quad (2.16)$$

Os índices (1, 2, 3, 4) referem-se a onda sibilante de maior frequência (indutora), a onda íon acústica, a onda sibilante anti-Stokes e a onda sibilante Stokes, respectivamente.

As interações coerentes de ondas na forma $\mathbf{W}_1 \rightleftharpoons \mathbf{S}_2 + \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4$ ocorrem sempre que os vetores de ondas e frequências das ondas satisfaçam as relações de casamento de fase [1], [25], [27]:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \quad (2.18)$$

$$\omega_1 \simeq \omega_3 + \omega_2, \quad (2.19)$$

$$\omega_1 \simeq \omega_4 - \omega_2. \quad (2.20)$$

De forma a estudarmos a interação, dividimos os campos das quatro ondas em duas escalas de tempo: uma rápida, compreendida pelos campos $\mathbf{E}_{1,3,4}$

³Na ausência do acoplamento, as variações das fases das equações (2.15) e (2.16), obedecem às relações de dispersão dadas nas equações (2.7) e (2.9) para as ondas sibilantes e íon acústica, respectivamente.

oscilando com frequências bem acima da frequência iônica do plasma (de acordo com a equação (2.2)), e outra compreendida pelo campo \mathbf{E}_2 , oscilando com frequências abaixo da frequência ciclotrônica dos íons $\omega_{ci} = eB_0/m_i$. Assim temos para a escala rápida de frequência que as perturbações nos campos \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 e \mathbf{n}_0 podem ser escritos como:

$$\mathbf{E}^h = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{B}^h = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4, \quad (2.22)$$

$$n_e^h = 0, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{v}_e^h = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \quad (2.24)$$

$$n_i^h = \mathbf{v}_i^h = 0, \quad (2.25)$$

e para a escala lenta:

$$\mathbf{E}^l = \mathbf{E}_2, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{B}^l = 0, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{v}_e^l = \mathbf{v}_2, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v}_i^l = \mathbf{v}_2, \quad (2.29)$$

$$n_e^l = n_i^l = n_2^l, \quad (2.30)$$

sendo que os indicadores h e l significam escalas rápida e lenta.

O fato de $n_e^h = 0$ significa que as ondas eletromagnéticas que se propagam em um meio não modificam a densidade do mesmo. Somente ondas de natureza eletrostática, como no caso da onda íon-acústica \mathbf{S} , perturbam a densidade dos elétrons e íons.

Introduzindo estas duas escalas de tempo nas equações do pré modelamento, obtemos para o processo da interação do modelo, um sistema de quatro equações de onda não-lineares na forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_1 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}_1 = -e\mu_0 \partial_t (n_0 \mathbf{v}_1 + n_2 (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)), \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}_2 = e\mu_0 \partial_t (n_0 \mathbf{v}_2), \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}_3 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}_3 = -e\mu_0 \partial_t (n_0 \mathbf{v}_4 + n_2 \mathbf{v}_1), \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}_4 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}_4 = -e\mu_0 \partial_t (n_0 \mathbf{v}_3 + n_2 \mathbf{v}_1). \quad (2.34)$$

De forma a simplificar as equações acima introduzimos os operadores harmônicos, $\nabla \rightarrow ik$ e $\partial_t \rightarrow -i\omega$. Com estas simplificações podemos expressar \mathbf{v} e n explicitamente em termos de \mathbf{E} . O desenvolvimento deste cálculo leva-nos ao

seguite conjunto de equações:

$$D_1 \mathbf{E}_1 = -\frac{i\omega_1^2}{\omega_2^2}(c_3 E_2 \mathbf{E}_3 + c_4 E_2^* \mathbf{E}_4), \quad (2.35)$$

$$D_2 \mathbf{E}_2 = \frac{i\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2}(c_3 E_3^* E_1 - c_4 E_4 E_1^*) \mathbf{z}, \quad (2.36)$$

$$D_3 \mathbf{E}_3 = \frac{i\omega_3^2}{\omega_2^2}(c_3 E_2^* \mathbf{E}_1), \quad (2.37)$$

$$D_4 \mathbf{E}_4 = \frac{i\omega_4^2}{\omega_2^2}(c_4 E_2 \mathbf{E}_1). \quad (2.38)$$

$$(2.39)$$

Aqui os operadores de dispersão são dados por [1], [25]:

$$D_{1,3,4} = -\omega_{1,3,4}^2 + c^2 k_{1,3,4}^2 + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{1,3,4}}{(\omega_{1,3,4} - \omega_{ce})} - i\nu_{1,3,4} \omega_{1,3,4}, \quad (2.40)$$

$$D_2 = -\omega_2^2 + c^2 k_2^2 - i\nu_2 \omega_2. \quad (2.41)$$

Os coeficientes de acoplamento são:

$$c_3 = \frac{e\omega_{pe}^2}{2m_e(\omega_1 - \omega_{ce})} \left[\frac{k_3}{\omega_3} - \frac{k_1(\omega_1 - \omega_{ce})}{\omega_1(\omega_3 - \omega_{ce})} \right], \quad (2.42)$$

$$c_4 = \frac{e\omega_{pe}^2}{2m_e(\omega_1 - \omega_{ce})} \left[\frac{k_4}{\omega_4} - \frac{k_1(\omega_1 - \omega_{ce})}{\omega_1(\omega_4 - \omega_{ce})} \right]. \quad (2.43)$$

Destas duas equações acima podemos definir um parâmetro r , que é uma medida relativa da eficiência do grau de acoplamento entre os dois tripletos de ondas (1, 2, 3) e (1, 2, 4), podemos relacionar os dois coeficientes por um parâmetro, como:

$$r = \frac{c_4}{c_3}; \quad (2.44)$$

Além disso, os termos de amortecimento são expressos por:

$$\nu_{3,4} = -\frac{\omega_{pe}^2 \nu_e}{(\omega_{3,4} - \omega_{ce})^2}, \quad (2.45)$$

$$\nu_2 = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_2^2}(\nu_e + \nu_i), \quad (2.46)$$

enquanto o termo de injeção de energia é assumida na onda sibilante indutora W_1 por:

$$\nu_1 = \frac{\omega_{pe}^2 \nu_e}{(\omega_1 - \omega_{ce})^2}, \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

sendo ν_e e ν_i os termos de dissipação ou injeção de energia nas partículas.

O desenvolvimento analítico destas equações pode ser consideravelmente simplificado escrevendo-as nas suas formas normalizadas, e usando explicitamente o fato de estarmos considerando fracas não linearidades o que torna possível descrever as interações com equações de primeira ordem. Tais como:

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = A_2(t)A_3(t) - rA_2^*(t)A_4(t) + \nu_1A_1(t), \quad (2.49)$$

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = -A_1(t)A_3^*(t) - rA_1^*(t)A_4(t) + \nu_2A_2(t), \quad (2.50)$$

$$\frac{dA_3(t)}{dt} = -A_1(t)A_2^*(t) + i\delta_3A_3(t) + \nu_3A_3(t), \quad (2.51)$$

$$\frac{dA_4(t)}{dt} = rA_1(t)A_2(t) + i\delta_4A_4(t) + \nu_4A_4(t), \quad (2.52)$$

sendo A_s as amplitudes complexas normalizadas da modulação $\mathcal{E}(z, t)$ das ondas e que neste trabalho serão supostas independentes de z , r é a razão entre os coeficientes não lineares de acoplamento entre os dois tipos de tripletos (Stokes e anti-Stokes), $\delta_3 = \rho(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$ e $\delta_4 = \beta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_4)$ são os descasamentos normalizados nas frequências ω_s ; ρ , β são constantes de normalização e i representa o número imaginário $\sqrt{-1}$. A injeção e/ou dissipação de energia são representadas pelos parâmetros ν_s , que assumem valor positivo no caso de injeção de energia e negativo no caso de dissipação.

Do cálculo ocorre que as amplitudes normalizadas são:

$$A_1 = [\omega_{pi}^2\omega_3^2c_3^2/(\omega^2\omega_{pe}^2\omega_2^2(\partial_{\omega_3}D_3)(\partial_{\omega_2}D_2))]^{1/2}\mathcal{E}_1, \quad (2.53)$$

$$A_2 = [\omega_3^2\omega_1^2c_3^2/(\omega^2\omega_3^4(\partial_{\omega_2}D_3)(\partial_{\omega_1}D_1))]^{1/2}\mathcal{E}_2, \quad (2.54)$$

$$A_3 = [\omega_{pi}^2\omega_1^2c_3^2/(\omega^2\omega_{pe}^2\omega_2^2(\partial_{\omega_1}D_1)(\partial_{\omega_2}D_2))]^{1/2}\mathcal{E}_3, \quad (2.55)$$

$$A_4 = [\omega_{pi}^2\omega_1^2c_3^2/(\omega^2\omega_{pe}^2\omega_2^2(\partial_{\omega_1}D_1)(\partial_{\omega_2}D_2))]^{1/2}\mathcal{E}_4 \quad (2.56)$$

sendo os D_s operadores de dispersão.

Uma representação esquemática do modelo pode ser observado na figura (2.6). Podemos notar a comunhão de dois tripletos de ondas: o primeiro formado pelas ondas 1, 2 e 3 e o segundo, pelas ondas 1, 2 e 4.

Neste trabalho analisaremos com detalhes o comportamento do sistema de equações diferenciais não lineares acopladas (de acordo com as equações (2.49) a (2.52)). Tais equações são complexas, coexistindo assim, num espaço quadridimensional complexo. Estas equações são caracterizadas pelas condições iniciais das amplitudes A_1 , A_2 , A_3 e A_4 ; e pelos parâmetros de controle: descasamento de frequências $\delta_{3,4}$, injeção ou dissipação de energia $\nu_{1,2,3,4}$ e da intensidade de acoplamento r . O interesse principal é a dinâmica não linear que este modelo apresenta.

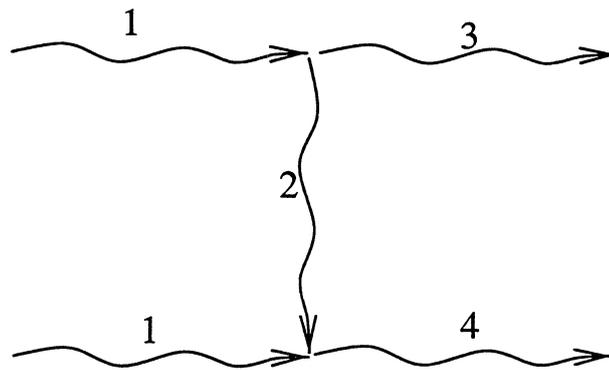


Figura 2.6: Modelo esquemático da interação entre as ondas, aqui indicamos como sendo as ondas Indutora Sibilante (W); Íon Acústica (S); Anti-Stokes (W_-) e Stokes (W_+) por 1, 2, 3 e 4 respectivamente [1].

Faremos aqui, um estudo de simulações numéricas aplicadas para a observação de bacias de atração, expoentes de Lyapunov, efeitos de histerese, caos, multiestabilidade, bifurcações e periodicidade.

Capítulo 3

Introdução aos Sistemas Dinâmicos

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma breve discussão sobre a dinâmica não linear. Os tópicos apresentados aqui, na sua forma fundamental, serão usados nos próximos capítulos, sendo os mesmos necessários para uma melhor compreensão dos resultados posteriormente abordados.

3.2 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser definido como uma regra matemática determinística que modela o estado de um sistema evolutivo no tempo [4]. O tempo por si, pode ser uma variável contínua ou discreta [4]. Tais sistemas são representados por um *campo vetorial*, ou seja, um conjunto de equações diferenciais ordinárias (tempo contínuo) e/ou equações à diferenças (tempo discreto), também conhecidos como *mapas*. Tais representações são escritas respectivamente para fluxos e mapas na seguinte forma [4],[11]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}, t, \mu), \quad (3.1)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{g}(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(N)}, \mu). \quad (3.2)$$

Para tais sistemas dinâmicos, qualquer estado inicial $\vec{x}(0)$ pode ser

evoluído no tempo para obter-se o estado futuro em $t > 0$ [4]. Campos vetoriais que dependem *explicitamente* do tempo são chamados *sistemas não autônomos*, caso contrário os denominamos de *sistemas autônomos* [11].

Podemos reescrever estas equações na forma compacta, tais como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n), \quad (3.4)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{y} são vetores N -dimensionais [4].

3.2.1 Espaço de fase

O espaço $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$ refere-se ao *espaço de fase*. Atribuímos a uma *órbita* ou *trajetória* o caminho descrito pelas variáveis do sistema neste espaço de acordo com que o tempo evolui. Dizemos que cada curva descrita neste espaço é uma solução das equações diferenciais. Devido a unicidade de soluções, pode-se distinguir uma curva solução por um ponto particular desta em um tempo específico. Na literatura o estado inicial que gera estas curvas é chamado de *condição inicial*.¹

3.2.2 Estabilidade

Considerando um campo vetorial autônomo, uma *solução de equilíbrio* é um ponto $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ desde que $\mathbf{F}(\bar{x}) = 0$, isto é, uma solução estacionária (que não muda) no tempo. O ponto $\bar{x}(t)$ é estável se as soluções (ou trajetórias) que partirem na vizinhança deste ponto permanecerem próximo a ele por todo o tempo decorrente. Podemos dizer que a solução é *assintoticamente estável* se a solução próxima converge para \bar{x} quando $t \rightarrow \infty$ [11]. O tempo que decorre para um fluxo convergir para um estado assintoticamente estável dizemos ser o tempo *transiente* [16].

Estabilidade de Lyapunov

Um sistema dinâmico é dito estável (ou Lyapunov estável) se, dado um raio $\epsilon > 0$, qualquer outra solução $y(t)$ satisfaça $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$ quando $|\bar{x}(t) - y(t)| < \epsilon$

¹No caso de mapas, dada um condição inicial $\mathbf{x}(0)$, geramos uma trajetória para um sistema a tempo discreto. Muitas vezes pode ser útil reduzir um fluxo de dimensão N para um mapa de dimensão $N - 1$, via técnicas de seção de Poincaré [11], as quais discutiremos mais a diante.

para $t > t_0$, $t_0 \in \mathbf{R}$ [11]. A figura (3.1) ilustra este teorema, podemos observar que qualquer outra solução $y(t)$ permanece próxima à solução real $\bar{x}(t)$.

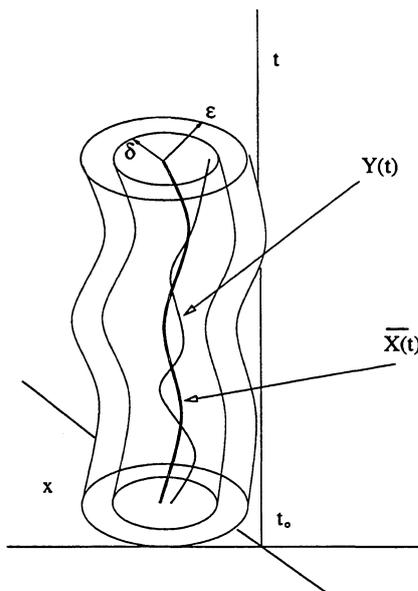


Figura 3.1: Estabilidade de Lyapunov: Esquema de uma solução $y(t)$ que sempre fica na proximidade da solução de equilíbrio $\bar{x}(t)$ [11].

Estabilidade assintótica

Um ponto $\bar{x}(t)$ é assintoticamente estável se ele já é Lyapunov estável, e, se existe um certo raio $b > 0$ desde que satisfaça a condição $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$ [11]. Então $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$. A figura (3.2) mostra esquematicamente uma tendência da solução $y(t_0)$ convergir para $\bar{x}(t)$ quando o tempo tende ao infinito.

Estas duas definições implicam na existência de soluções fisicamente aceitáveis a tempo infinito. Pode ser fácil o entendimento para soluções já no equilíbrio, mas não necessariamente no caso de soluções próximas. É importante mencionarmos que estas definições são para sistemas autônomos. No caso não autônomo δ e b devem depender explicitamente de t_0 [11].

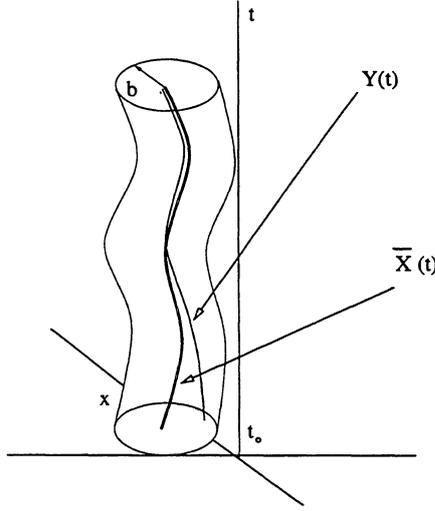


Figura 3.2: Estabilidade assintótica: Esquema de uma solução $y(t)$ tendendo para a solução de equilíbrio $\bar{x}(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ [11].

3.2.3 Linearização

Consideremos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem $dx/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Um estado fixo para o sistema é um ponto que satisfaz a condição: $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$. Examinando o comportamento de órbitas próximas ao ponto fixo, temos:

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \eta(t). \quad (3.5)$$

Assumiremos aqui que $\eta(t)$ é pequeno. Substituindo esta equação em $dx/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ e expandindo em série de Taylor, com apenas termos de primeira ordem para $\eta(t)$, obteremos:

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + \eta) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{x}})\eta + O(\eta^2), \quad (3.6)$$

sendo que $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ e $\mathbf{DF}(\bar{\mathbf{x}})$ denota a *Matriz Jacobiana* de derivadas parciais de \mathbf{F} . Teremos a seguinte equação para a dependência temporal da perturbação de \mathbf{x} para o estado de equilíbrio:

$$d\eta/dt = \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{x}})\eta + O(\eta^2). \quad (3.7)$$

O problema da estabilidade linear é obtida se negligenciarmos termos de ordem (η^2) . Procurando uma solução da forma $\eta(t) = C \exp(\alpha t)$ achamos uma equação de autovalor tal que podemos encontrar uma solução não trivial para valores que satisfaçam a N-ésima ordem da equação característica:

$$\det(\mathbf{DF}(\bar{\mathbf{x}}) - \alpha \mathbf{I}) = 0, \quad (3.8)$$

para as quais encontraremos N raízes distintas $\alpha = \alpha_k$ (autovalor), que classificarão a estabilidade das soluções de equilíbrio [4],

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \exp(\alpha t). \quad (3.9)$$

Nos casos unidimensionais, como no exemplo acima (equação (3.9)), o valor de $\mathbf{x}(t)$ depende do autovalor α . Se $\alpha > 0$, $\mathbf{x}(t)$ se afasta do ponto fixo $\bar{\mathbf{x}}$. Quando $\alpha < 0$, $\mathbf{x}(t)$ se aproxima do ponto fixo (para $t \rightarrow \infty$).

3.2.4 Classificação e Estabilidade das Soluções de Equilíbrio

Quando todos os autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{DF}(\bar{\mathbf{x}})$ tiverem parte real diferente de zero, o ponto fixo correspondente é chamado de *ponto fixo hiperbólico*, independente dos valores da parte imaginária. Caso contrário, dizemos ser um *ponto fixo não-hiperbólico* [16]. Há três tipos de pontos fixos hiperbólicos: *atrator*, *repulsor* e *pontos de sela*.

- **Ponto fixo hiperbólico atrator:** Se todos os autovalores da matriz jacobiana têm parte real negativa, então todas as componentes da perturbação η decaem² com o tempo e $\mathbf{x}(t)$ se aproxima do ponto fixo. Este ponto, chamado de atrator, é assintoticamente estável. Se a matriz $\mathbf{DF}(\bar{\mathbf{x}})$ associada tiver autovalores complexos, será conhecido como *foco estável*. Caso em que os autovalores sejam reais, dizemos ser um *nó estável* [16].

– *nó estável:* $\alpha_r < 0$

– *foco estável:* $\alpha_r \pm i\alpha_i$, para $\alpha_r < 0$

- **Ponto fixo hiperbólico repulsor:** Se todos os componentes de η crescem com o tempo, então $\mathbf{x}(t)$ se afasta do ponto fixo. Dizemos que $\bar{\mathbf{x}}$ é instável. Neste caso o ponto fixo é um *repulsor*. Se a Matriz jacobiana tem autovalores complexos, o repulsor é também chamado de *foco instável*. Quando todos os autovalores são reais o ponto é dito ser um *nó instável* [16].

– *nó instável:* $\alpha_r > 0$

– *foco instável:* $\alpha_r \pm i\alpha_i$, para $\alpha_r > 0$

- **Ponto fixo hiperbólico sela:** Quando alguns, mas não todos, os autovalores tem parte real positiva e outros tem parte real negativa, os pontos fixos associados são chamados de *pontos de sela* [16].

– *sela:* $\alpha_{1r} > 0$ e, $\alpha_{2r} < 0$

²Lembramo-nos de que a aproximação foi feita em $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \eta(t)$, onde a perturbação tem como solução $\eta(t) = C \exp(\alpha t)$.

- **Pontos não hiperbólicos:** Um ponto fixo não hiperbólico é instável se um ou mais autovalores da matriz Jacobiana tem parte real positiva. Caso algum dos autovalores tiver parte real negativa enquanto o resto tiverem parte real igual a zero, o ponto fixo \bar{x} é dito *neutramente ou marginalmente estável*. Se todos os autovalores são puramente imaginários e diferentes de zero, o ponto fixo correspondente é chamado de *centro* [16].

– *neutramente estável:* $\alpha_{1r} = 0$ com $\alpha_{2r} < 0$

– *centro:* $\pm i\alpha_i$, para $\alpha_r = 0$

3.3 Seção de Poincaré

A idéia de reduzir o estudo de um sistema contínuo para um sistema discreto foi devido à Henri Poincaré em 1899. Atualmente qualquer sistema a tempo discreto, que *esteja associado* a uma equação diferencial ordinária, pode ser obtido via *mapa de Poincaré*. Esta técnica³ oferece diversas vantagens no estudo das equações diferenciais ordinárias, tais como:

- **Redução Dimensional:** A construção do mapa elimina *pelo menos* uma variável do problema, reduzindo-o de dimensão [11].
- **Dinâmica Global:** Em baixa dimensão (digamos, dimensão ≤ 4), mapas de Poincaré calculados numericamente fornece-nos uma compreensão da dinâmica global do sistema [11].
- **Conceitual:** Muitos conceitos são um tanto incômodos no estudo das equações diferenciais. Como exemplo, poderíamos mencionar a estabilidade de qualquer órbita periódica de uma equação diferencial. Em termos do mapa de Poincaré, este problema se reduz a estabilidade de um ponto fixo, o qual é simplesmente caracterizado em termos dos autovalores da *linearização do mapa* em torno deste ponto [11].

Suponhamos que uma equação diferencial (fluxo) $\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ de dimensão n tenha uma solução periódica com período T e passa por uma superfície transversal Σ . Isto é, existe um vetor \mathbf{n} normal ao fluxo onde [11]

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (3.10)$$

Neste caso, podemos achar um conjunto de pontos $V \subset \Sigma$ que retornam ao plano de intersecção Σ , o esquema é mostrado na figura (3.3). O mapa associa os pontos em

³Mencionamos aqui alguns poucos conceitos de mapas uma vez que tais sistemas dinâmicos não serão explicitamente usados neste trabalho.

V com os seus pontos do primeiro retorno e é chamado de mapa de Poincaré [11]. Este mapa, com $(n - 1)$ dimensões, é descrito por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_n), \quad (3.11)$$

que, como vemos, é discreto [16].

No caso de sistemas não autônomos o período associado com a órbita periódica é geralmente explícito. Se temos um campo vetorial com período T , então a solução periódica tem um período que é um inteiro múltiplo ou submúltiplo qualquer deste período. Disto, podemos usá-lo para construir o mapa de Poincaré. Na ilustração (3.4) mostramos a geometria para sistemas não autônomos.

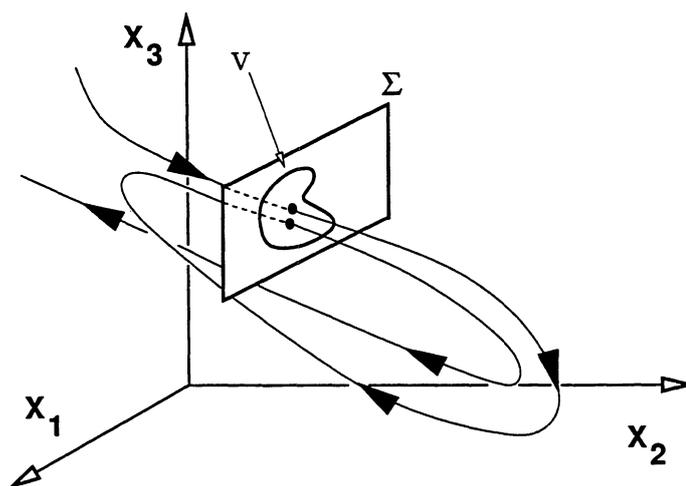


Figura 3.3: Geometria do mapa de Poincaré para sistemas autônomos, aqui o mapa associa o conjunto de pontos em V com os seus pontos do primeiro retorno no plano de intersecção Σ .

3.4 Subespaços e variedades invariantes:

3.4.1 Subespaços:

Seja uma matriz jacobiana obtida para pontos fixos de um sistema autônomo n -dimensional que tenha s autovalores com parte real negativa, u autovalores com parte real positiva e c autovalores com parte real nula. Considerando os autovetores associados com estes autovalores, podemos representar o espaço \mathbf{R}^n como uma soma

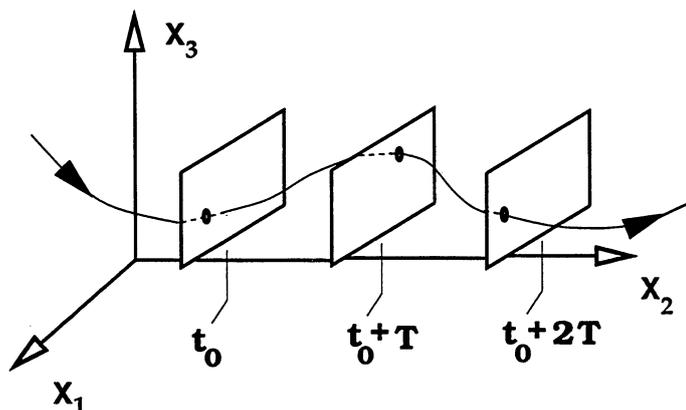


Figura 3.4: Geometria do mapa de Poincaré para sistemas não autônomos. Na figura t_0 refere-se ao tempo inicial, enquanto T é o período associado com a órbita periódica.

direta de três subespaços E^s , E^u e E^c definido por [16]:

$$E^{(s)} = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_s), \quad (3.12)$$

$$E^{(u)} = \text{span}(\mathbf{v}_{s+1}, \mathbf{v}_{s+2}, \mathbf{v}_{s+3}, \dots, \mathbf{v}_{s+u}), \quad (3.13)$$

$$E^{(c)} = \text{span}(\mathbf{v}_{s+u+1}, \mathbf{v}_{s+u+2}, \mathbf{v}_{s+u+3}, \dots, \mathbf{v}_{s+u+c}), \quad (3.14)$$

sendo $\mathbf{v}_{k's}$ os autovetores relativos aos autovalores. Aqui temos que $n = s + u + c$. Os espaços $E^{(s)}$, $E^{(u)}$ e $E^{(c)}$ são *subespaços invariantes* do sistema linear correspondente. A solução do sistema linear iniciado em um subespaço invariante permanece neste subespaço por todo o tempo. As soluções iniciadas em $E^{(s)}$ se aproximam do ponto fixo quando $t \rightarrow \infty$, soluções iniciadas em $E^{(u)}$ se aproximam do ponto fixo quando $t \rightarrow -\infty$ e solução alguma, iniciada no subespaço $E^{(c)}$ se modifica com o tempo. O subespaços $E^{(s)}$, $E^{(u)}$ e $E^{(c)}$ são chamados *subespaços ou variedades estáveis, instáveis, e centrais*, respectivamente, dos pontos fixos considerados *para o sistema linear* [16].

3.4.2 Variedades:

Uma variedade é um conjunto que exhibe *localmente* uma estrutura do espaço Euclidiano. Frequentemente a variedade é encontrada como superfícies m -dimensionais imersas no espaço \mathbf{R}^n . Usamos o termo variedade em duas situações [11]:

1. Conjunto linear: Um espaço vetorial linear no \mathbf{R}^n [11],
2. Conjunto não linear: Uma superfície imersa no \mathbf{R}^n que pode ser localmente representada por um gráfico [11].

Definimos uma variedade estável W^s de um ponto fixo ou de uma órbita periódica como sendo um conjunto de pontos, das quais enviam trajetórias que partem e se aproximam de um estado fixo. Similarmente, a variedade instável W^u é o conjunto de pontos, em que a tempo retrógado, partem aproximando-se do estado fixo. As variedades W tem a mesma dimensionalidade do subespaço linear E^s e E^u . Estes subespaços são tangentes para com as variedades [4]. A figura (3.5) ilustra um esquema espacial das variedades W e subespaços E .

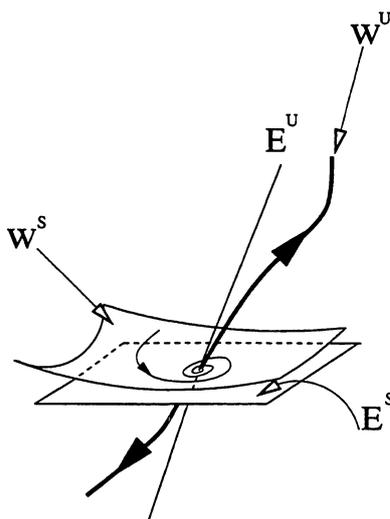


Figura 3.5: Esquema da estrutura espacial das variedades W e dos subespaços E [4].

3.5 Dimensões Fractais

As figuras geométricas convencionais tem dimensão bem determinada. Uma característica importante destas dimensões é que elas não dependem nem do tamanho e nem da forma da figura: uma linha tem dimensão 1, seja ela uma reta ou uma curva; já uma superfície tem dimensão 2, seja ela plana, esférica ou de qualquer outra forma. Neste caso dizemos ter uma *dimensão topológica* [12].

Os fractais são figuras que também possuem dimensão topológica [12].

A curva de Koch (figura (3.6)), por exemplo, tem dimensão topológica igual a um. Porém exibe um detalhamento em escalas arbitrariamente pequenas ocupando mais espaço que uma curva comum. Neste caso podemos dizer que existe uma *dimensão espacial*, que é dada por:

$$D = -\frac{\log p}{\log q}. \quad (3.15)$$

Como exemplo utilizaremos a curva de Koch (figura (3.6)). O segmento \bar{AC} do nível 1 é $\frac{1}{3}$ do segmento anterior (nível 0), portanto é uma subparte q do nível anterior; neste caso $q = \frac{1}{3}$. O nível 1 contém 4 pedaços destes mesmos segmentos⁴, os quais são similares. Então façamos $p = 4$. Substituindo p e q na equação (3.15) obteremos o valor da dimensão $D = 1,26186\dots$ [12]. Podemos chamar estes conjuntos de *fractais*, contudo, no contexto da dinâmica, conjuntos atratores com propriedades fractais tem sido chamados de atratores estranhos [4].

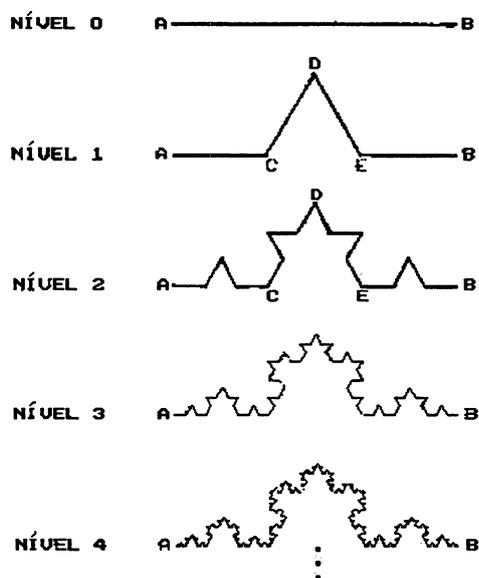


Figura 3.6: Exemplo de uma curva de Koch [12].

Um método mais geral para determinar a dimensão espacial consiste na “contagem de caixas”. Primeiramente tomamos como exemplo a figura (3.7), imaginamos converter um espaço em uma grade de cubos de comprimento ϵ . Contamos então o número de cubos para cobrir a figura. Fazemos isso para sucessivos valores de ϵ . Neste caso, a dimensão será dada por [12]:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}, \quad (3.16)$$

⁴ \bar{AC} , \bar{CD} , \bar{DE} e \bar{EB}

sendo que $N(\epsilon)$ é o número mínimo de “caixas” de lado ϵ para cobrir todo o conjunto de pontos. A definição recupera o conceito euclidiano de dimensão inteira nos casos usuais e permite a sua generalização para os conjuntos mais complicados. Como exemplo, se calcularmos por esta técnica a dimensão de um ponto encontramos $D_0 = 0$, para uma linha $D_0 = 1$, e similarmente para uma área $D_0 = 2$.

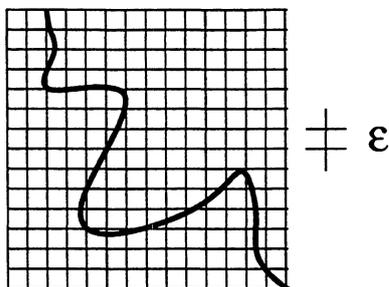


Figura 3.7: Exemplo de contagem por caixas como técnica utilizada para calcular a dimensão espacial da figura. Neste caso, uma curva suave [5].

Em sistemas dissipativos o volume do espaço de fase contrai durante a evolução (indo para zero quanto $t \rightarrow \infty$) e o movimento, após um tempo transiente, estará restrito a um subespaço-atrator. Isto sugere que a dimensão do atrator D é menor que a dimensão do espaço de fase. Neste caso os atratores podem apresentar-se como:

- $D = 0$, a dimensão do atrator é nulo, por exemplo um ponto fixo.
- $D = 1$, a dimensão do atrator é unitário, por exemplo um ciclo limite.
- $D = 2$, a dimensão do atrator é dois, por exemplo um toro T^2 , e assim por diante...

Os atratores não estão restritos a tais dimensões. Existem atratores com dimensões fractais [4].

3.6 Bacias de Atração

O conjunto fechado de condições iniciais que se aproximam de um determinado atrator é chamado de *bacia de atração* [4]. Uma bacia pode ser construída por uma figura de $n \times m$ grades de condições iniciais. Cada condição é evoluída no tempo, as quais geram órbitas que tendem para algum conjunto de pontos atratores.

Trajetórias geradas por condições iniciais em uma determinada bacia, devem permanecer na mesma [4]. Como exemplo, podemos propôr o caso de uma partícula num movimento unidimensional sob ação de atrito e de um potencial $V(x)$. Quase sempre suas condições iniciais tendem para um dos pontos de equilíbrio $x = x_0$ ou $x = -x_0$ (figura (3.8)) [4] [5]. O esquema mostrado na figura (3.8) apresenta uma bacia de atração referente a estes atratores no espaço de fase posição \times velocidade. As condições iniciais que partem da região hachurada são atraídas para o atrator em $x = +x_0$ e $dx/dt = 0$. Se as condições iniciais partirem da região lisa serão atraídas para o atrator em $x = -x_0$, onde também $dx/dt = 0$. Porém, existe uma linha de separação entre estas duas bacias, a qual chamamos de *fronteira*⁵. Condições inicializadas nesta região geram órbitas, que finalmente ⁶, aproximam-se do *ponto fixo instável* $x = 0$ e $dx/dt = 0$. Desta forma, a fronteira da bacia é uma variedade estável de um conjunto invariante instável. Este conjunto instável é simplesmente constituído pelo ponto $x = 0$ em $dx/dt = 0$ neste caso. Neste problema a fronteira da bacia de atração é uma curva simples, mas em outros sistemas as fronteiras podem ser muito complicados [4] [5].

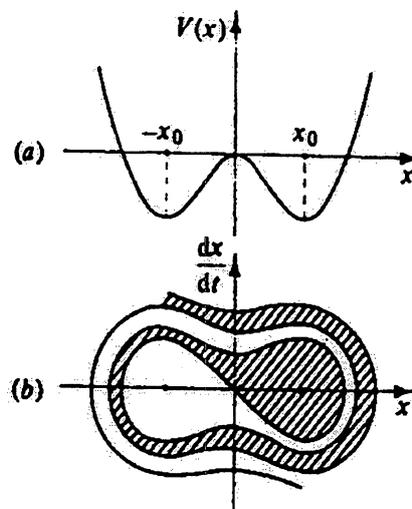


Figura 3.8: (a) Potencial $V(x)$ de um movimento unidimensional, (b) Bacia de atração para os dois pontos fixos $x = +x_0$ e $x = -x_0$ [4], [5].

⁵ou separatriz

⁶quando $t \rightarrow -\infty$

3.7 Sensibilidade ao estado final

No exemplo descrito acima a bacia tem fronteira suave. Porém, muitas vezes não apresentam esta mesma característica, podendo exibir outras formas e dimensões, inclusive dimensões fractais. Em tais bacias, uma pequena alteração na condição inicial pode representar um problema em diagnosticar o estado futuro do sistema dinâmico. Isto é, uma pequena incerteza nas condições iniciais pode causar uma certa dificuldade na determinação do atrator em que a trajetória se aproxima. Nestes casos, dizemos que há uma *sensibilidade ao estado final* [5] [28]. Para ilustrar isso, utilizaremos um diagrama do espaço de fase como mostra a figura (3.9). Observamos dois possíveis estados finais, ou atratores, denotados por A e B. As regiões à esquerda e à direita pertencem as bacias de atração dos pontos atratores A e B, respectivamente. A região onde ambas fazem contato é conhecida por *fronteira da bacia* Σ . Dizemos que serão incertas as condições iniciais, com incerteza ε , caracterizando um erro $|x - x_0| \leq \varepsilon$. É certo que condições geradas no ponto 1 convergirão para o atrator A, porém condições inicializadas no ponto 2 *podem ir* para o atrator B, mas, devido a incerteza ε , a órbita pode convergir para o ponto atrator A. Se uma condição inicial específica, com erro ε passar por uma fronteira da bacia, então não podemos determinar com certeza em qual atrator a trajetória irá convergir. Pontos com estas características denominamos de *condições iniciais incertas* [4] [5].

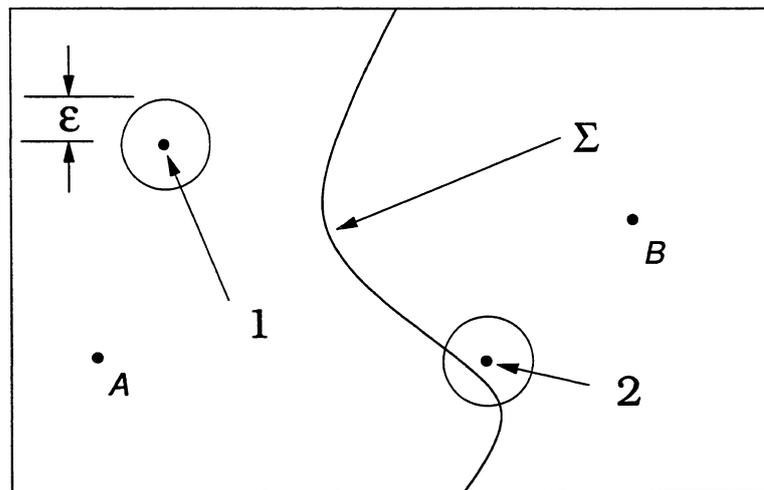


Figura 3.9: Diagrama do espaço de fase com duas bacias e seus atratores (A e B), separadas por uma fronteira Σ . Os pontos 1 e 2 representam condições iniciais distintas, enquanto o ε representa o “raio de erro” das respectivas condições [5].

Assumiremos uma distribuição uniforme de condições iniciais selecionadas aleatoriamente, a probabilidade de obter uma condição incerta é dado por uma fração da área (ou, em alta dimensionalidade, volume) do espaço de fase. Estes

pontos são denominamos de *condições iniciais incertas* [5]⁷. A fração de condições iniciais $f(\varepsilon)$ incertas que se aproximam de um atrator sob um determinado erro ε , pode ser dado como [5]:

$$f(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha. \quad (3.17)$$

A fração incerta f para uma região finita do espaço de fase associado com a condição inicial de erro ε obedece a seguinte relação (lei de escala) [5]:

$$\alpha = \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (3.18)$$

se e somente se

$$\alpha = D - D_0, \quad (3.19)$$

onde D é a dimensão do espaço de fase e D_0 é a dimensão de capacidade.

3.8 Técnica computacional

A dimensão de uma fronteira de bacia pode ser obtida numericamente. Consideremos uma condição inicial (x_0, y_0) , e perturbando suas coordenadas por uma quantidade ε produzimos outra condição inicial $(x_1, y_1) \leq (x_0 \pm \varepsilon, y_0 \pm \varepsilon)$. Agora, evoluímos o sistema no tempo e determinamos em qual atrator cada uma das duas condições iniciais convergiram. Se ambas não tenderam para o mesmo atrator, contamos como incerta a condição original. Aleatoriamente escolhemos um grande número de condições iniciais, posteriormente determinamos a fração de pontos incertos $\bar{f}(\varepsilon)$. Repetimos isto para diferentes valores de ε . Desta forma podemos montar uma função $\bar{f}(\varepsilon) \times \varepsilon$ a fim de calcularmos o expoente de incerteza α [5]. A fração de pontos incertos pode ser numericamente calculada por:

$$\bar{f}(\varepsilon) = \frac{CI}{CT}, \quad (3.20)$$

sendo que CI e CT representam o número de condições incertas e o número total de condições iniciais, respectivamente. Note que $\bar{f}(\varepsilon)$ e $f(\varepsilon)$ são diferentes: $\bar{f}(\varepsilon)$ é a probabilidade de formarmos uma previsão, enquanto $f(\varepsilon)$ é a probabilidade de *existir* uma previsão de condições iniciais incertas. A quantidade $\bar{f}(\varepsilon)$ é mensurável em experimentos repetidos, enquanto $f(\varepsilon)$ é muito difícil obtermos por experimentos numéricos.

⁷Sistemas com bacias de fronteiras fractais são mais sensíveis à condições iniciais incertas.

3.9 Classificação das bacias

A fração de condições iniciais incertas f de uma região no espaço de fase associado às condições iniciais com erro ε obedece a seguinte equação [5]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \alpha. \quad (3.21)$$

Desta forma a expressão vista anteriormente $f(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha$ se reduz à relação linear $f(\varepsilon) = \varepsilon$ para o caso onde a fronteira da bacia é uma curva de dimensão inteira, isto é, $\alpha = 1$. Disso, a existência de fronteira com dimensão fractal ocorre para valores de α entre $0 < \alpha \leq 1$ [5]. No caso em que as fronteiras são fractais em $\alpha = 0$, dizemos que a bacia é *crivada*. Podemos então resumidamente dizer que [5] :

- Bacia de fronteira lisa: $\alpha = 1$,
- Bacia de fronteira fractal: $0 < \alpha \leq 1$, no caso crivada: $\alpha = 0$.

3.10 Diagramas de bifurcação

Pontos de bifurcação são comuns em sistemas não lineares. Dado um sistema que dependa de um conjunto de parâmetros, as características das soluções podem mudar quando variamos algum parâmetro do sistema. Regiões do diagrama de bifurcação onde a solução muda sua característica são chamados de *pontos de bifurcação* [29]. Tal mudança de característica está relacionada a perda de estabilidade de um determinado estado assintótico do sistema.

Se variamos lentamente um parâmetro do sistema observamos que os estados assintóticos podem perder (ou ganhar) estabilidade. Dizemos que a mudança ocorre em um certo parâmetro crítico, designamos aqui por μ_c . A mudança de estabilidade pode ocorrer através de uma das seguintes bifurcações⁸ [16]:

1. Bifurcação transcritical: Se considerarmos como exemplo a equação $\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2$, teremos dois pontos de equilíbrio: um em $x = 0$ e outro em $x = \mu$. Observamos pela figura (3.10) que o ramo em $x = 0$ perde sua estabilidade ao passar pelo ponto de bifurcação $(x, \mu) = (0, 0)$. O ramo $x = \mu$, ao contrário, adquire estabilidade a partir deste ponto. Dizemos então, que houve uma troca

⁸Nas figuras a seguir, os traços contínuos representam *equilíbrio estável* enquanto os traços tracejados representam *equilíbrio instável*

de estabilidade quando o parâmetro passou por $\mu = 0$. Este tipo de bifurcação o chamamos de *Bifurcação transcritical* [15].

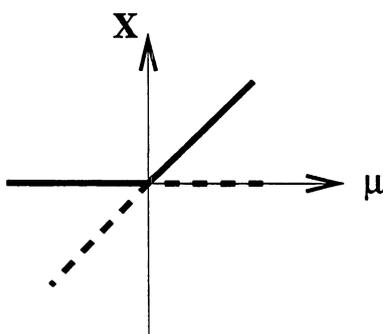


Figura 3.10: Bifurcação tipo transcritical [13].

2. Bifurcação sela-nó: Se o parâmetro é variado e dois pontos fixos aparecem numa região onde não havia nenhum ponto fixo, dizemos ser uma *bifurcação sela nó* [14]. O termo sela-nó deriva deste tipo de bifurcação para um espaço bidimensional, onde a órbita instável é chamada de sela e a órbita estável é o atrator nó. Para mapas, onde o espaço é unidimensional, esta bifurcação é também conhecida por *bifurcação tangente*[14].

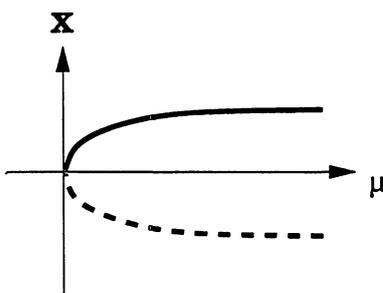


Figura 3.11: Bifurcação tipo sela [13].

3. Bifurcação de forquilha: se uma solução estável com um valor de parâmetro $\mu < \mu_c$ torna-se instável quando $\mu > \mu_c$ e se aparecerem espontaneamente duas novas soluções estáveis, as quais desenvolvem-se a partir do ponto crítico (em μ_c), então dizemos ser uma bifurcação do tipo forquilha [30].
4. Bifurcação de Hopf: A bifurcação de Hopf ocorre quando a parte real de dois autovalores conjugados complexos λ e λ^* passam através do zero quando um parâmetro (ex. μ) é variado [15]. Isto é, quando o equilíbrio estável ($\text{Re}\lambda < 0$ se $\mu < \mu_c$) passa para o ciclo limite estável; o ciclo limite envolve o equilíbrio instável ($\text{Re}\lambda > 0$ se $\mu > \mu_c$). Lembramos que a matriz Jacobiana calculada

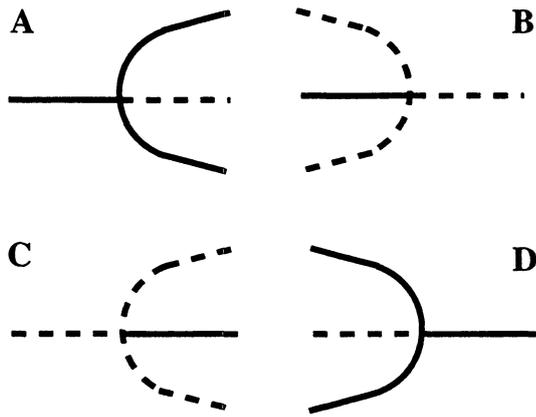


Figura 3.12: Bifurcações do tipo forquilha. Podem apresentar-se de duas formas: (A) e (D) supercrítico e; (B) e (C) subcrítico [13].

no ponto crítico tem um par de autovalores puramente imaginários. Então a bifurcação de Hopf é um tipo de bifurcação que liga um equilíbrio estável a um ciclo limite [30].

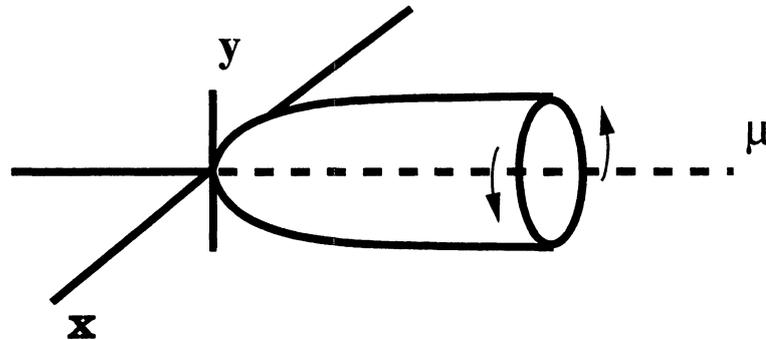


Figura 3.13: Bifurcação tipo Hopf, para $\mu < 0$ temos equilíbrio estável e para $\mu > 0$ temos um ciclo limite [14].

Para bifurcações do tipo 1, 2 ou 3, somente encontramos pontos fixos ou soluções estáticas. Classificamos estes pontos como *bifurcação estática* [16]. Se encontramos pontos fixos e soluções periódicas dizemos ser um ponto de bifurcação do tipo Hopf. Aqui, a bifurcação de Hopf é classificada como uma *bifurcação dinâmica* [16].

3.11 Histerese

Consideramos um oscilador de Duffing forçado [16]:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u + \epsilon(2\mu \frac{du}{dt} + \alpha u^3) = 2\epsilon k \cos(\Omega t), \quad (3.22)$$

onde ϵ é um pequeno parâmetro positivo, μ é o coeficiente positivo de amortecimento, α é o coeficiente de não linearidade cúbica, $2\epsilon k$ é a amplitude de forçamento e Ω é a frequência de excitação [16]. É possível obter uma aproximação de primeira ordem para a solução do oscilador de Duffing forçado como [16]:

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\epsilon), \quad (3.23)$$

onde a e γ são a amplitude e a fase, respectivamente. Os ciclos limites dados por este sistema são [16]:

$$-\mu a_0 + k \sin \gamma_0 = 0, \quad (3.24)$$

$$\sigma \alpha_0 - \frac{3}{8} \alpha a_0^3 + k \cos \gamma_0 = 0. \quad (3.25)$$

Como exemplo, tomamos a resposta da amplitude a_0 versus a amplitude do forçamento k . O diagrama de bifurcação é mostrado na figura (3.14), aqui as linhas sólidas e tracejadas correspondem aos pontos fixos estável e instável. Quando o parâmetro de controle k é aumentado gradualmente, uma bifurcação sela-nó ocorre em $k = k_2$, e localmente, não há outra solução para $k > k_2$ [16]. Se partimos do ponto D' e decrescemos com o valor de k , estaremos na curva D'C'E'. Neste caso o ponto crítico é $k = k_1$. Os pontos B' e E' são pontos de tangência vertical, e dizemos que nestes pontos ocorre uma *bifurcação tangente* [16].

Se novamente partirmos do ponto D' e decrescemos com o parâmetro k ocorrerá uma mudança do ponto E' para o ponto H'. Aqui existe um "salto" do ramo estável E'C'D' para A'H'B' no ponto crítico k_1 . No caso de iniciarmos pelo ponto A' e aumentarmos com o parâmetro k , também ocorrerá um "salto" no ponto crítico k_2 . Isto mostra uma mudança repentina, ao qual podemos chamar de *bifurcação catastrófica*. Então, o intervalo $k_1 < k < k_2$ é a região responsável pela dependência na direção do parâmetro de controle k . Este fenômeno é conhecido por *fenômeno de Histerese* [16].

3.12 Expoentes de Lyapunov

Expoentes de Lyapunov caracterizam a dilatação ou contração de atratores (ou de um outro conjunto invariante) [4].

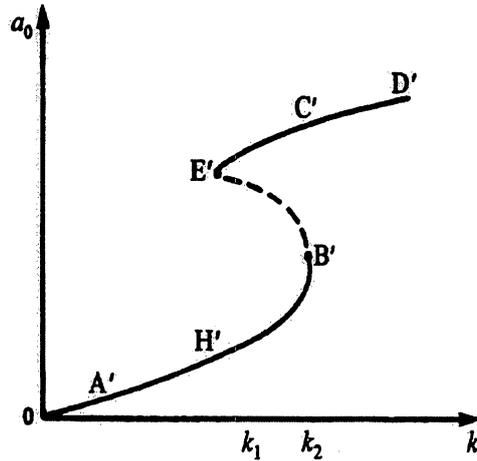


Figura 3.14: Exemplo do diagrama de bifurcação para o oscilador de Duffing [15].

Um ponto infinitesimal nas coordenadas do espaço de fase pode ter uma incerteza (ou um pequeno erro) de tal forma que impossibilita a precisão deste valor, portanto tal ponto pode ser caracterizado por um volume finito dado por [8]:

$$\delta V = \delta x_1 \dots \delta x_n. \quad (3.26)$$

Nosso interesse está na evolução temporal do sistema, com algumas pequenas incertezas na condição inicial. Dessa maneira, consideramos a evolução temporal de incerteza δx_i na forma δV [8]:

$$\frac{d\delta x_i(t)}{dt} = \sum_j \frac{\delta f_i[x(t)]}{\delta x_j(t)} \delta x_j, \quad (3.27)$$

Os coeficientes $\frac{\delta f_i[x(t)]}{\delta x_j(t)}$ formam a matriz L , conduzindo para o *expoente de Lyapunov* λ_i . A aproximação da equação acima pode ser da forma [8]:

$$\delta x_i(t) = \delta x_i(t_0) \exp\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i(t - t_0)\right]. \quad (3.28)$$

A equação acima dá um critério simples para distinguir entre sistemas dissipativos e conservativos. Para o volume infinitesimal do espaço de fase $\delta V(t) = 0$ podemos dizer que o sistema é conservativo se [8]:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0. \quad (3.29)$$

Nos casos de sistemas dissipativos temos que o espaço de fase se contrai, ou seja, $\delta V(t) < 0$. Então [8]:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0. \quad (3.30)$$

No caso de:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0, \quad (3.31)$$

o sistema nunca atinge qualquer atrator.

Expoentes de Lyapunov ajudam na caracterização de sistemas dinâmicos. Se tivermos um sistema dissipativo unidimensional, somente um coeficiente é possível $\lambda_i = (-)$, e o atrator neste caso é representado por um ponto no espaço de fase. Para o sistema bidimensional temos que considerar dois expoentes de Lyapunov, no caso de uma combinação do tipo $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -)$ é observado um ciclo limite no espaço de fase, o qual corresponde a uma solução periódica [8].

n	Sinal do expoente de Lyapunov	Tipo de atrator
2	-,- 0,-	ponto atrator ciclo limite
3	-,-,- 0,-,- 0,0,- +,-,0	ponto atrator ciclo limite toros T^2 caos
4	-,-,-,- 0,-,-,- 0,0,-,- 0,0,0,- +,0,-,- +,0,0,- +,+,0,-	ponto fixo ciclo limite toros T^2 hipertoro T^3 caos caos em T^3 hipercaos

Tabela 3.1: Sinal do expoente de Lyapunov para alguns tipos de atratores [8].

Na tabela (3.1) podemos observar alguns sinais dos expoentes de Lyapunov para atratores de sistemas dissipativos n-dimensionais [8]. Os T^n referem-se aos toros, onde o expoente de Lyapunov é nulo e portanto as trajetórias com este

expoente não se aproximam e nem convergem [8]. Na figura (3.15) apresentamos um gráfico típico resultante do cálculo dos expoentes de Lyapunov para um sistema dinâmico, neste exemplo o oscilador de Duffing.

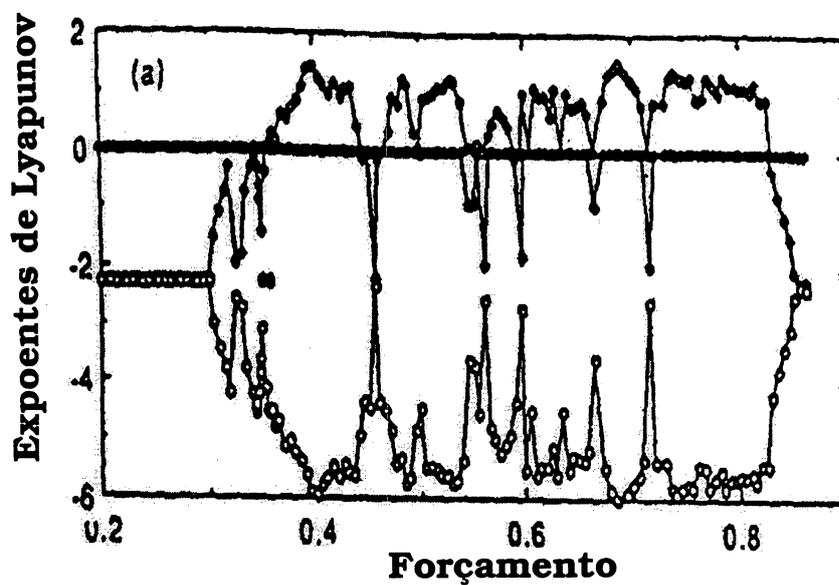


Figura 3.15: Três expoentes de Lyapunov para a equação de Duffing. Regiões com expoentes com valor positivo indicam a presença de caos no sistema [8].

Capítulo 4

Bifurcações e Espectros de Lyapunov para o Modelo de Quatro ondas

4.1 Introdução

Como vimos anteriormente (capítulo 3), o ponto de bifurcação é uma propriedade muito importante no estudo da dinâmica, principalmente nos casos em que há sensibilidade aos parâmetros do problema. Em nosso modelo isto ocorre de forma bem evidente e tal ferramenta é bem útil. Como adiantado no início deste trabalho, o sistema dinâmico que modela o acoplamento entre 4 ondas pode ser escrito¹ como:

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = A_2(t)A_3(t) - rA_2^*(t)A_4(t) + \nu_1 A_1(t), \quad (4.1)$$

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = -A_1(t)A_3^*(t) - rA_1^*(t)A_4(t) + \nu_2 A_2(t), \quad (4.2)$$

$$\frac{dA_3(t)}{dt} = -A_1(t)A_2^*(t) + i\delta_3 A_3(t) + \nu_3 A_3(t), \quad (4.3)$$

$$\frac{dA_4(t)}{dt} = rA_1(t)A_2(t) + i\delta_4 A_4(t) + \nu_4 A_4(t), \quad (4.4)$$

onde as condições iniciais são dadas pelas amplitudes complexas $A_s(t)$ e os parâmetros por: r , $\nu_{1,2,3,4}$ e $\delta_{3,4}$.

Tal sistema será agora explorado numericamente de forma a tornar claro os comportamentos do sistema.

¹normalizados.

4.2 Escolha dos parâmetros

Os parâmetros do sistema, como não poderia ser diferente, desempenham um papel muito importante na dinâmica do modelo. Mudanças mínimas nestes parâmetros levam a mudanças significativas na dinâmica do sistema. No problema de quatro ondas, para alguns valores dos parâmetros, a dinâmica depende do sentido de integração ($t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$), como veremos adiante neste trabalho. Neste capítulo estaremos evitando tais regiões de forma a que os diagramas apresentados aqui respondam fielmente a evolução de um determinado atrator de acordo com a variação de parâmetros. O modelo proposto, discutido no capítulo 3, apresenta muitas formas de ondas periódicas ou não periódicas. Por estes motivos restringir-nos-emos ao estudo dos casos com os seguintes parâmetros:

- **Injeção de energia $\nu > 0$:** A injeção de energia é assumida na onda sibilante indutora. Fixamos seu valor como sendo $\nu_1 = +1,0$, o índice 1 refere-se exclusivamente à onda indutora sibilante. Consideramos seu valor *sempre fixo*.
- **Dissipação de energia $\nu < 0$:** A dissipação de energia é assumida nas ondas íon acústica, anti-Stokes e na onda Stokes. Podemos atribuir para este parâmetro qualquer valor, desde que negativo. O valor escolhido foi de tal forma em que o sistema não divergisse, além disso fosse menor em módulo do que o valor absoluto de injeção na onda indutora sibilante, isto é, quando $|\nu_{2,3,4}| < |\nu_1|$. O valor correspondente a estas expectativas é $\nu_{2,3,4} = -0,8$ ou menor, onde os índices 2, 3 e 4 referem-se às ondas íon acústica, anti-Stokes e a onda Stokes, respectivamente.
- **Parâmetro de acoplamento r :** Consideramos neste capítulo o acoplamento máximo das quatro ondas, ou seja, $r = 1$. Quando este parâmetro for igual a zero, nosso sistema recai ao problema de três ondas. De fato, r pode assumir qualquer valor entre $0 \leq r \leq 1$.
- **Descasamentos lineares de frequências $\delta_{3,4}$:** Os descasamentos lineares de frequências proporcionam um outro papel muito importante na simulação: a perda de simetria entre os tripletos. A escolha do parâmetro δ_3 não foi por acaso, pois trabalhos nesta linha de pesquisa foram desenvolvidos sob esta condição [1][31]. Neste capítulo utilizamos o valor de $\delta_3 = 2,0$ e $\delta_4 = -2,01$, representando uma pequena diferença em módulo de 0,5% entre os descasamentos propiciando assim uma pequena assimetria entre os tripletos.

4.3 Transiente

O transiente é o tempo necessário para que uma órbita alcance seu estado assintótico. Ao simularmos a série temporal utilizando os parâmetros discutidos acima, o transiente para este modelo é da ordem de 20 000 τ (tempo normalizado), como mostrado pela figura (4.1). Algumas condições iniciais demoram menos tempo para convergirem.

Nos diagramas de bifurcação apresentados neste capítulo, plotamos o máximo da amplitude da onda indutora sibilante $|A_1|$ após o tempo transiente.

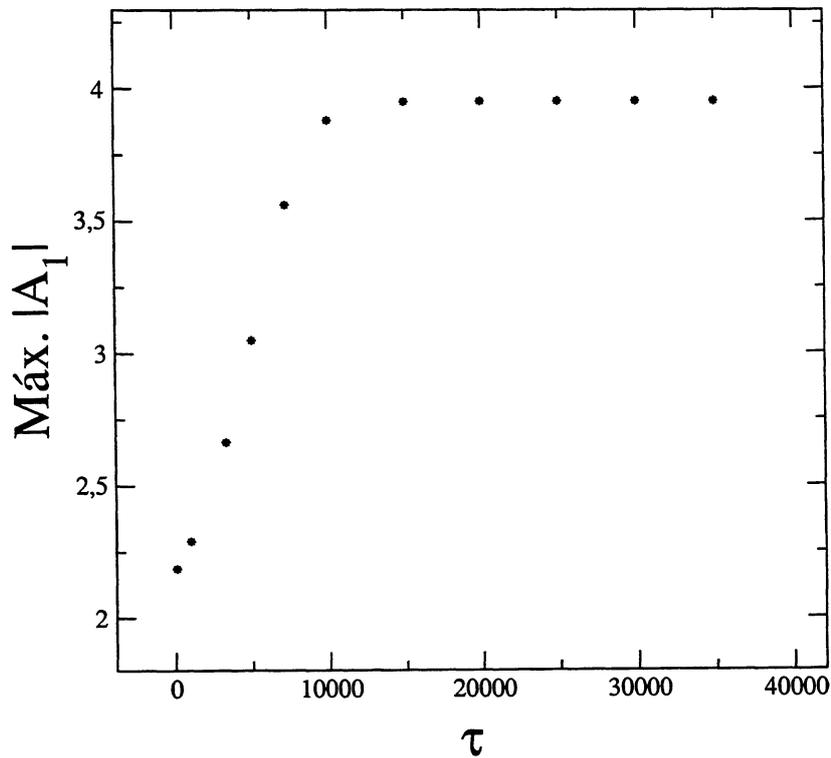


Figura 4.1: Transiente para um atrator em específico. A figura mostra o máximo da amplitude de $|A_1| \times \tau$

4.4 Procura de Atratores

Os atratores são uma das bases fundamentais de nossa teoria. O capítulo anterior (Introdução à Sistemas Dinâmicos) apresenta uma breve discussão sobre estabilidades e soluções de equilíbrio. Os atratores que nos referimos aqui estão relacionados aos pontos fixos da seção 3.2.4.

O fato de termos muitos parâmetros e de o problema apresentar multi-estabilidade, isto é, uma quantidade significativa de atratores, dificulta a escolha de boas condições iniciais. Quando qualquer parâmetro é variado, uma condição inicial que leva para um determinado atrator pode convergir para outro. Além disso, temos um espaço compreendido por quatro variáveis complexas (A_1, A_2, A_3, A_4) as quais, resultam num espaço quadri-dimensional complexo. Para minimizar estas dificuldades variamos *apenas a parte real* das amplitudes das ondas A_1 (onda sibilante indutora) e A_3 (onda anti-Stokes), conservando fixos os restantes. Desta forma, o modelo tornou-se mais acessível. Assumiremos aqui as seguintes condições iniciais:

$$A_1 = (x, 0.1), \quad (4.5)$$

$$A_2 = (0.0, 0.1), \quad (4.6)$$

$$A_3 = (y, 0.1), \quad (4.7)$$

$$A_4 = (0.0, 0.1) \quad (4.8)$$

sendo $A_n = (Re, Im)$, enquanto x e y são as partes reais das amplitudes as quais são variadas, A_1 e A_3 respectivamente².

Uma vez que neste caso os atratores do sistema consistem em ciclos limites, a procura dos atratores é feita pela gravação da amplitude máxima de cada onda em particular. Quando utilizamos as condições dos parâmetros acima notamos que a onda sibilante indutora apresenta-se de três modos diferentes, os quais coexistem: dois periódicos (um de período um e outro de período três) e um divergente (atrator no infinito -sistema desacoplado). As séries temporais e os espaços de fase referentes a estas formas de ondas encontram-se plotadas na figura (4.2). Aqui temos tanto a série temporal (lado esquerdo), como o corte do espaço de fase correspondente (lado direito)³.

4.4.1 Histogramas

Uma maneira de contarmos o número de atratores é utilizar um grande número de condições iniciais aleatoriamente distribuídas em uma região do espaço de fase. Tal

² $R \rightarrow$ parte real e $Im \rightarrow$ parte imaginária.

³Tal espaço relaciona a onda sibilante indutora (A_1) com a onda íon-acústica (A_2).

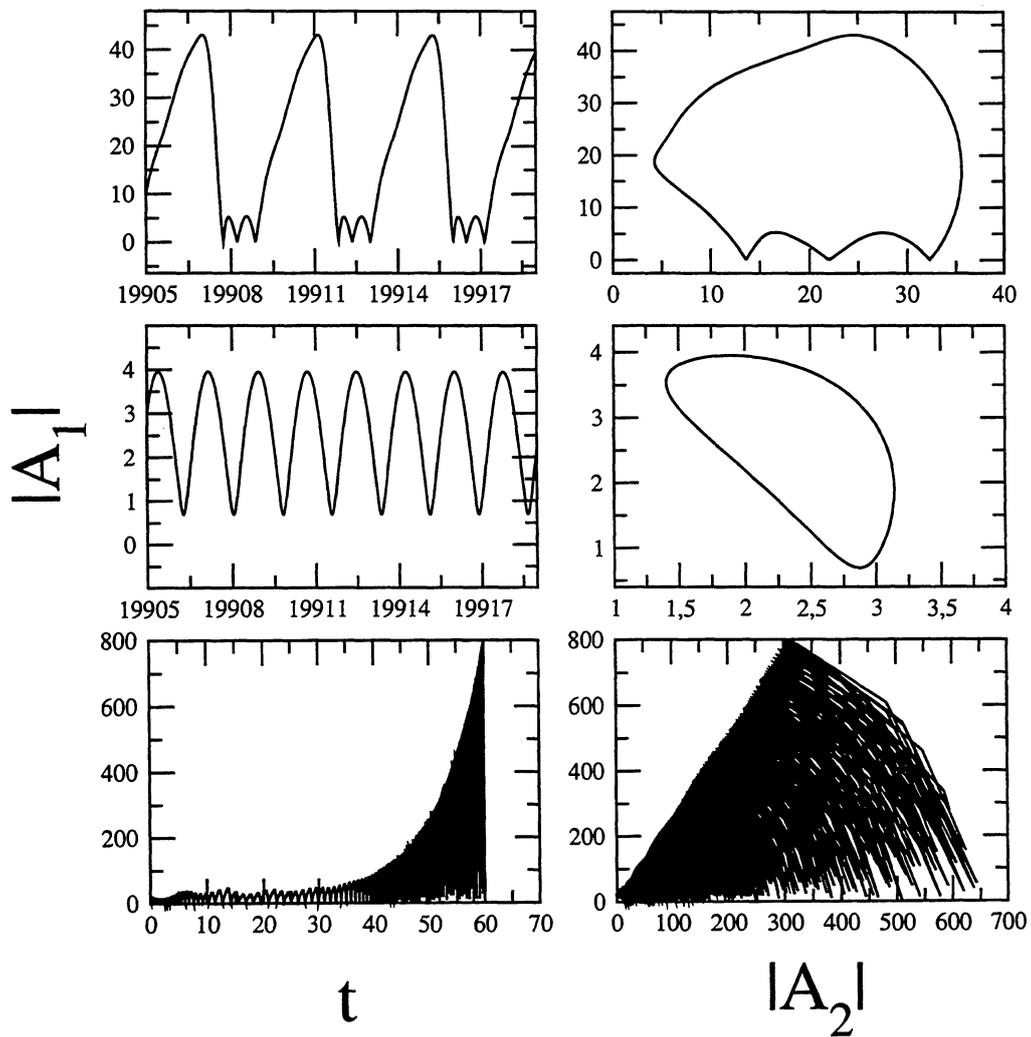


Figura 4.2: Série temporal e espaço de fase. De cima para baixo: atrator periódico com período três, atrator periódico unitário e o caso divergente. Lembramos que está plotado o valor absoluto: $|A_s| = A_s A_s^*$

região neste caso tem como coordenada a parte real da amplitude A_1 e na abscissa, a parte real da amplitude A_3 sendo as demais variáveis mantidas fixas. Gravamos então todos os máximos das amplitudes assintóticas das ondas. Após uma quantidade razoável de condições iniciais fazemos os *histogramas* das amplitudes máximas. É possível, desta forma, contar quantos atratores⁴ diferentes apareceram e quantas condições aleatórias convergiram para um determinado atrator, isto é, condições que tiveram a mesma amplitude assintótica máxima. Isto nos dá uma idéia da quantidade de pontos aleatórios que convergiram para o mesmo. Assim podemos não só contar, mas também observar a proporção de condições iniciais que convergem para os respectivos atratores. No caso dos histogramas a abscissa designa a quantidade de elementos (ou condições iniciais aleatórias) que convergiram para um determinado atrator especificado na coordenada. Utilizando-se dos parâmetros discutidos anteriormente, podendo modificar algum, apresentamos as seguintes figuras de histogramas:

- **Histograma para $\nu_{2,3,4} = -0,8$ (dissipações de energia), $\nu_1 = +1,0$ (injeção de energia), $r = 1$ (acoplamento máximo), $\delta_3 = 2,0$ e $\delta_4 = -2,01$ (descasamento lineares de freqüências):** Na figura (4.3) notamos a presença de somente dois atratores, caracterizados por dois máximos. Para 5337 condições iniciais distribuídas aleatoriamente⁵ entre um intervalo de $[0, 50]$, para as amplitudes das ondas A_1 e A_3 , obtivemos em torno de 24% de pontos convergindo para o atrator de período unitário⁶ (indicado na figura pelo letra A) e 11% para o atrator de período três (indicado na figura pela letra B), já o restante é referente ao estado divergente. O caso divergente não aparece porque a sua amplitude tende ao infinito sendo descartado pelo programa.
- **Histograma para $\nu_{2,3,4} = -1,040$:** A figura (4.4) mostra apenas uma barra representativa de um único atrator periódico. Com aproximadamente 99.8% de convergência referente a 4840 condições aleatórias.
- **Histograma para o caso $|\delta_3| = |\delta_4| = 2,0$ com $\nu_{2,3,4} = -0,8$, $\nu_1 = +1,0$ e $r = 1,0$:** Esta condição de parâmetro parece ser muito importante na quantidade de atratores presentes. São 23954 condições iniciais aleatórias⁷ que se apresentam num certo tipo de distribuição para valores de amplitudes baixas, como mostra a figura (4.5). Porém o histograma (4.6) apresenta um número significativo de atratores com altas amplitudes em um ou dois aparecimentos.

Estes histogramas mostram-nos uma quantidade muito grande de atratores encontrados no sistema quando $|\delta_3| - |\delta_4| \rightarrow 0$. Referimos a este caso

⁴Lembramos que cada atrator é caracterizado por uma amplitude diferente após ter passado o tempo de transiente.

⁵Referente as coordenadas (x, y) das equações (4.5) e (4.7).

⁶Estes valores estão normalizados.

⁷Uma grande quantidade de condições iniciais aleatórias para uma boa análise computacional.

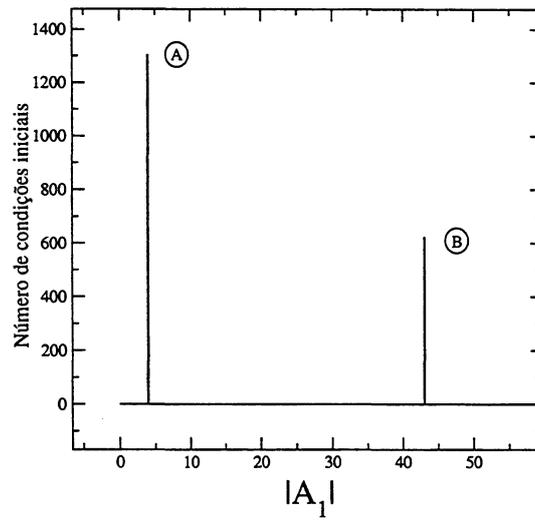


Figura 4.3: Histograma para o caso $|\delta_3| = 2,0$ e $|\delta_4| = 2,01$ com $r = 1$. Temos para A em torno de 24% de pontos convergindo para o atrator (periódico) de período unitário e 11% para o atrator (periódico) de período três, indicado por B .

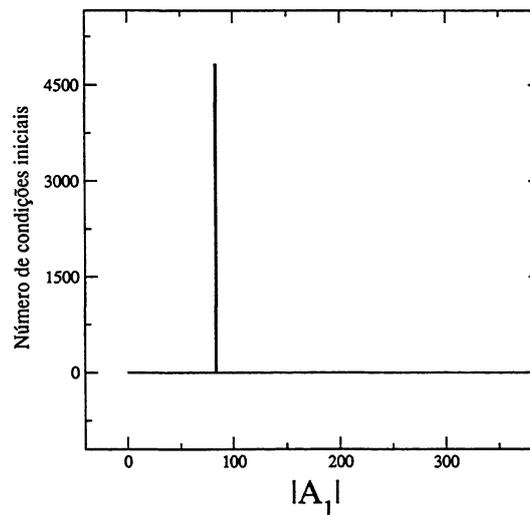


Figura 4.4: Histograma para o caso $\nu_{2,3,4} = -1,040$. Temos 99,8% de convergência para o atrator, isto significa que a onda indutora sibilante tem apenas um estado estacionário para um intervalo de $[0, 50]$ condições iniciais.

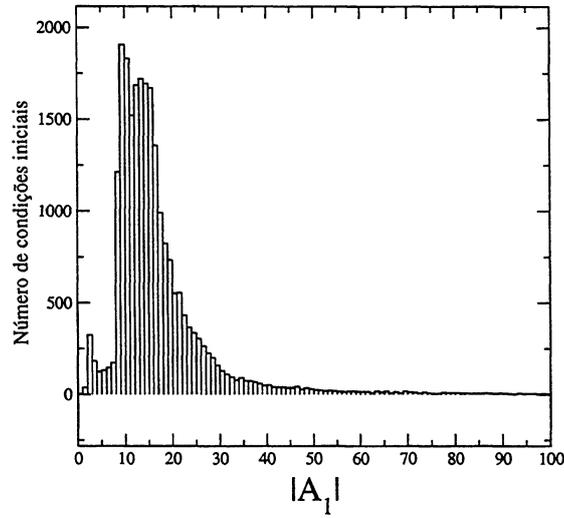


Figura 4.5: Histograma para o caso $|\delta_3| = |\delta_4| = 2, 0$. Parece haver um tipo de distribuição. Aqui são geradas 23954 condições iniciais aleatórias.

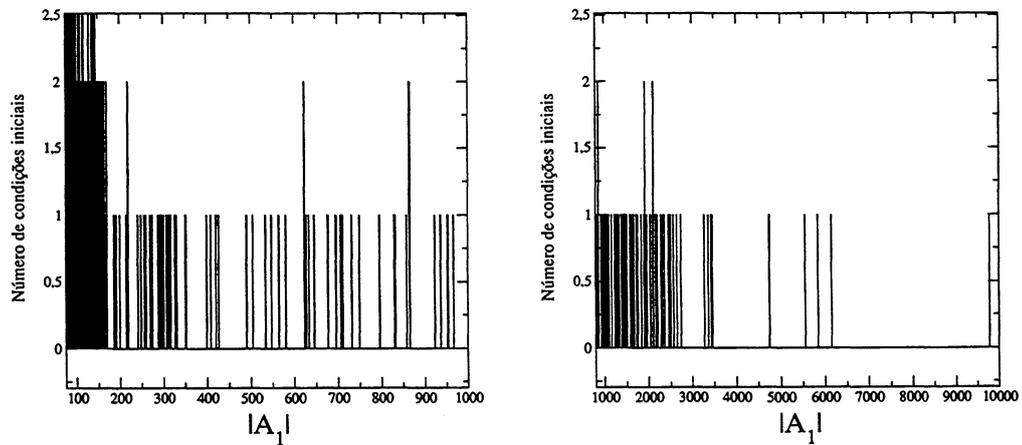


Figura 4.6: Continuação do histograma para o caso $|\delta_3| = |\delta_4| = 2, 0$. Observamos mais uma diversificação de atratores, muitos aparecem apenas uma vez, outros duas.

como sendo uma *multiestabilidade* no modelo de quatro ondas. Um fato importante foi a grande quantidade de atratores presentes quando $|\delta_3| = |\delta_4| = 2, 0$, isto é, quando os dois tripletos de ondas apresentam uma simetria.

4.5 O Diagrama de Bifurcação

O diagrama de bifurcação é uma análise gráfica qualitativa da mudança de soluções distintas, as quais podem mudar com a modificação de algum parâmetro do sistema. Na seção 3.10 do capítulo 3 discutimos⁸ um pouco mais sobre os diagramas de bifurcação.

Os diagramas de bifurcação para o modelo proposto são feitos variando os três parâmetros de dissipação simultaneamente $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4$ das ondas Stokes, anti-Stokes e íon-acústica, todo o restante dos parâmetros são mantidos fixos. Escolhemos como a imagem do diagrama de bifurcação a amplitude máxima da onda sibilante indutora (A_1). Fizemos duas simulações: uma inicializada pelo atrator do período três (primeiro painel da figura (4.2)), e outra inicializada pelo atrator do período um (segundo painel da figura (4.2)).

4.5.1 Diagrama de bifurcação inicializada pela órbita do atrator com período três:

Observamos uma grande região rica em comportamentos dinâmicos (figura. (4.7)). Embora a injeção de energia na onda sibilante é de $\nu_1 = +1, 0$, a região predominante no diagrama de bifurcação está em módulo acima de um nas demais ondas. Isto mostra a dificuldade para se obter bons acoplamentos sem muitas divergências, no caso de baixas dissipações. Dizemos “bons acoplamentos” nos casos em que não há divergência em nossas séries temporais, isto é, que haja acoplamento dos dois tripletos de ondas (capítulo 2). A natureza do modelo parece necessitar de grandes dissipações no sistema a fim de manter o acoplamento como desejado e sem divergência. O mesmo foi mostrado pelo trabalho em três ondas desenvolvido por J. M. Wersinger, J. M. Finn e E. Ott em 1980 [31]. Podemos observar alguns comportamentos clássicos:

- **Bifurcação tipo bolha:** A figura (4.8) mostra este tipo de comportamento.
- **Bifurcação característica do diagrama de bifurcação para o mapa logístico:** Este conjunto de bifurcações é apresentado pela figura (4.9). Temos

⁸Em “Diagrams de bifurcação”.

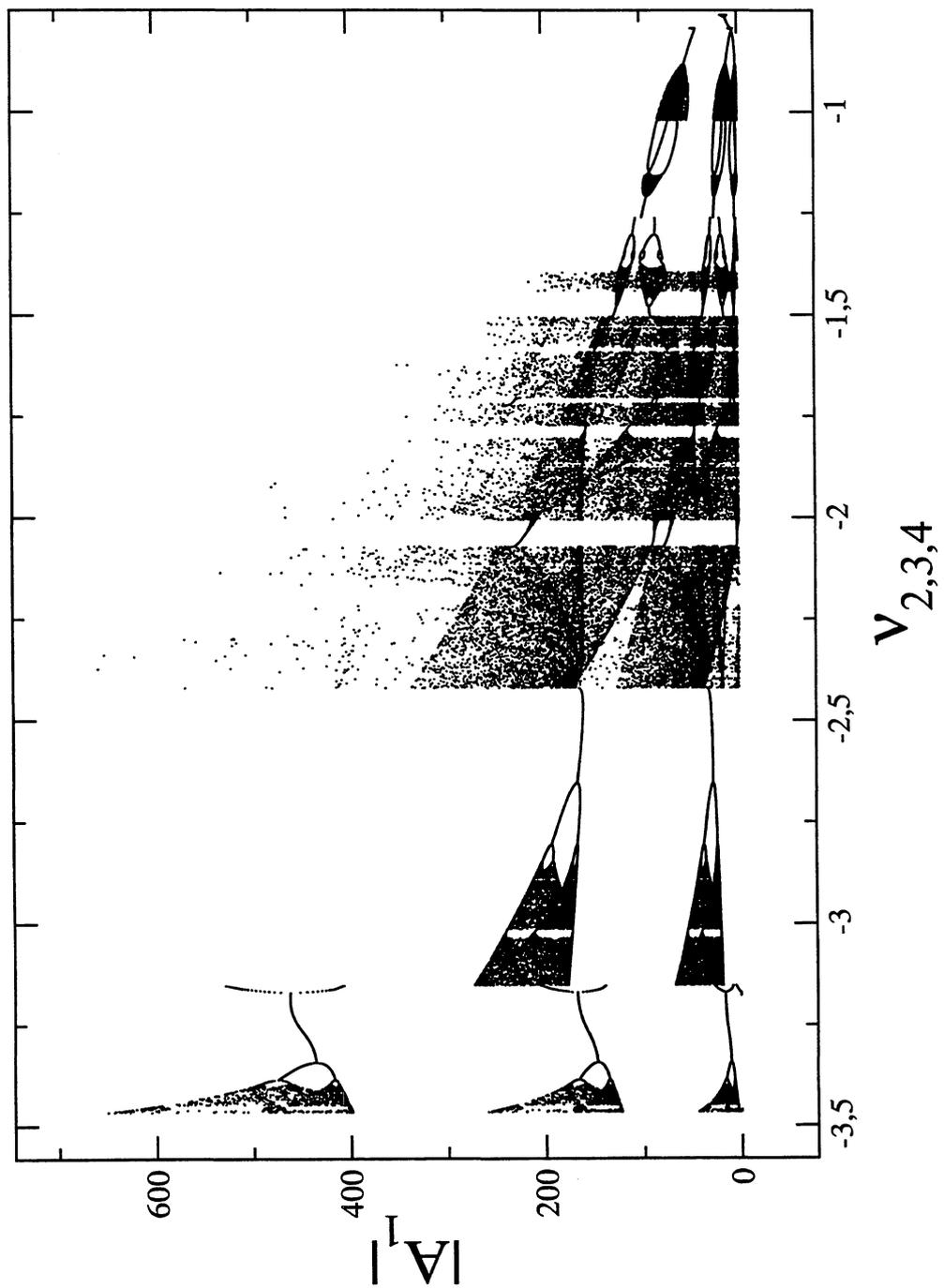


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação para o modelo de quatro ondas, inicializado pela órbita do atrator com período três.

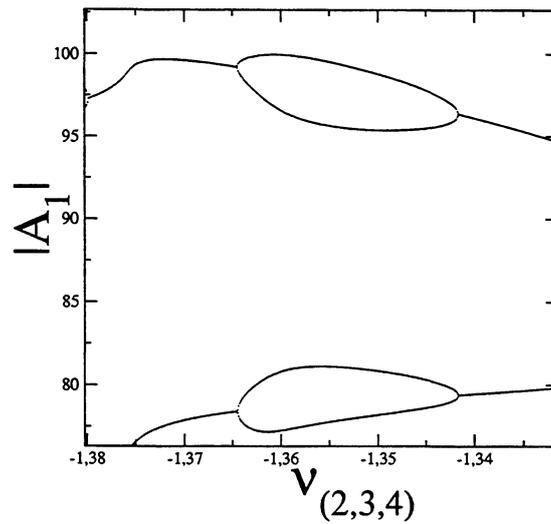


Figura 4.8: Bifurcação do tipo bolha.

aqui: duplicação de período, caos, crises [32], etc... Para valores $|\nu| > |2, 6|$ o sistema se comporta como um sistema unidimensional devido a alta convergência das trajetórias.

- **Bifurcação tipo Hopf:** Esta bifurcação pode ser notada pela figura (4.10).
- **Intermitências:** Podemos notar que há locais em que as regiões caóticas aumentam de forma abrupta. Observamos uma formação de “paredões” na figura, podendo ser um indício das intermitências e crises [32] no sistema.

4.5.2 Diagrama de bifurcação inicializada pela órbita do atrator com período um:

Ao contrário do diagrama de bifurcação anterior, este diagrama não apresenta muitos comportamentos dinâmicos. Aqui a simulamos para uma condição *inicializada* pelo atrator de período unitário. Porém são muitas as condições iniciais que levam para este atrator. Qualquer bifurcação inicializada por ele tem o formato como mostrado pela figura (4.12).

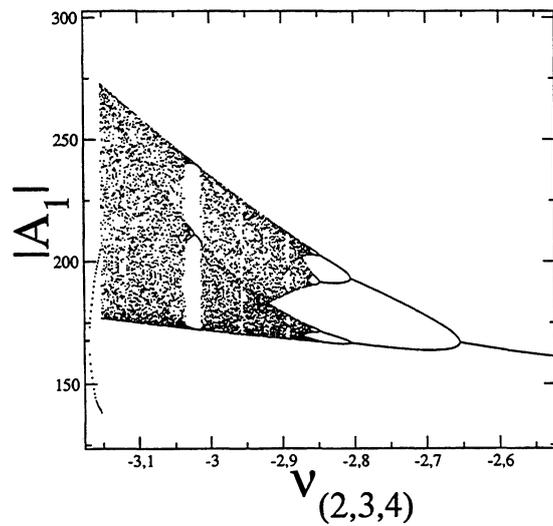


Figura 4.9: Conjunto de bifurcações que se assemelham com o diagrama de bifurcação do mapa logístico.

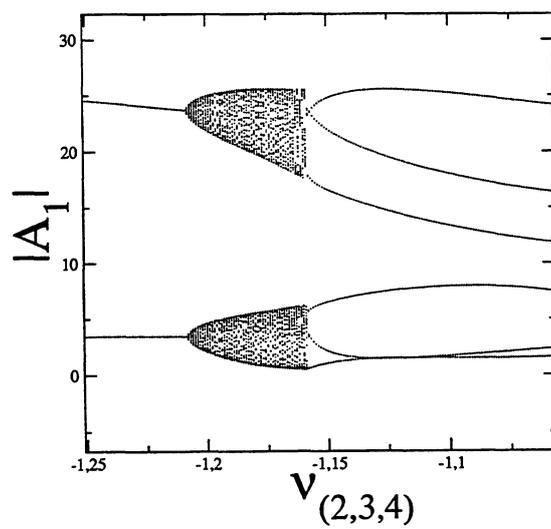


Figura 4.10: Bifurcação do tipo Hopf.

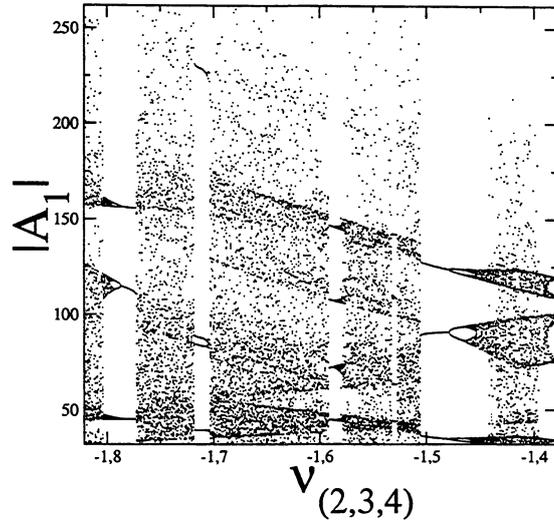


Figura 4.11: Bifurcação do tipo intermitência, crise, etc....

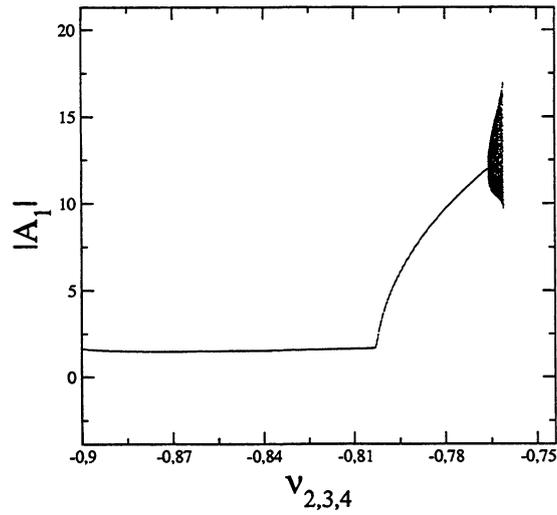


Figura 4.12: Bifurcação inicializada pela onda sibilante indutora com período unitário.

4.6 Mistura de diagramas de bifurcação:

A sobreposição dos dois diagramas de bifurcação, tanto do inicializado pelo atrator de período três como pelo atrator unitário, mostra que para determinados valores, a segunda bifurcação torna-se idêntica à primeira, como apresentado na figura (4.13). Na verdade a medida de Lebesgue da bacia de atração do atrator de período um tende a zero para valores de $\nu_{2,3,4} \leq -0,9$.

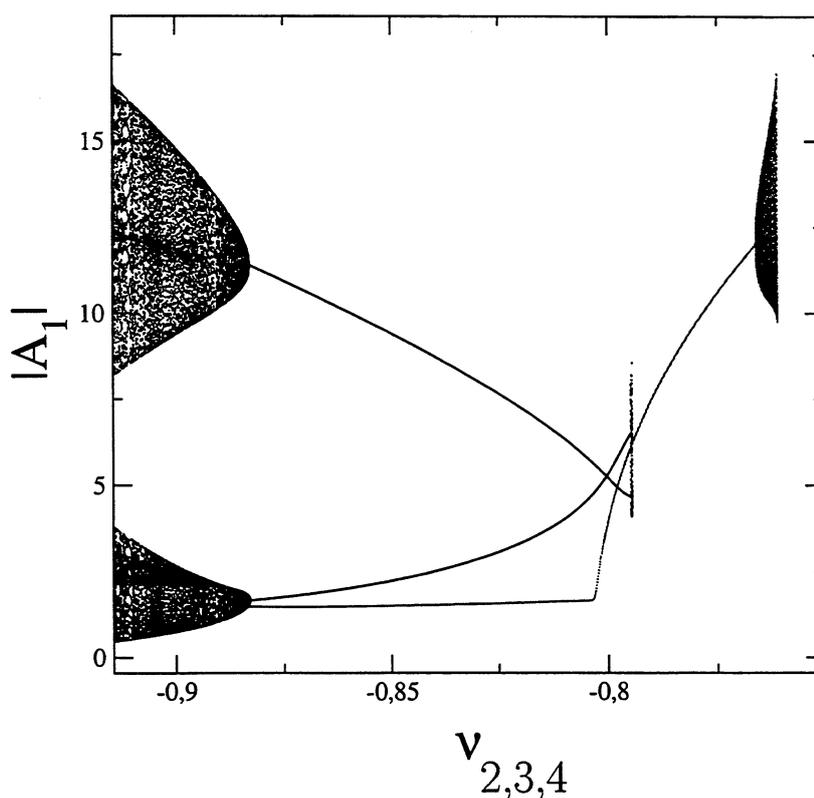


Figura 4.13: Sobreposição dos dois diagramas de bifurcação.

Observa-se pela figura (4.13) que a órbita de período três (para $\nu = -0,8$) deixa de existir para valores ligeiramente maiores de $\nu \approx -0,8$, enquanto a bacia da órbita de período um não existe para valores abaixo de $\nu \approx -0,9030108$ e valores acima de $\nu \approx -0,76$, como mostramos nas figuras (4.14) e (4.15).

Na região inicializada pelo atrator unitário fica mais difícil perceber

algo. Desta forma, diminuimos os passos de integração de 10^{-4} para 10^{-8} e vemos que a continuidade da bifurcação terminou. Isto pode ser devido a fato que a bacia ficou muito pequena (quase indetectável), ou o atrator deixou de existir, como mostra a figura (4.14). Os valores da bifurcação abaixo de $\nu = -0,9030108$ já não pertencem mais a bacia, sendo assim o outro atrator; neste caso recaímos no primeiro diagrama de bifurcação.

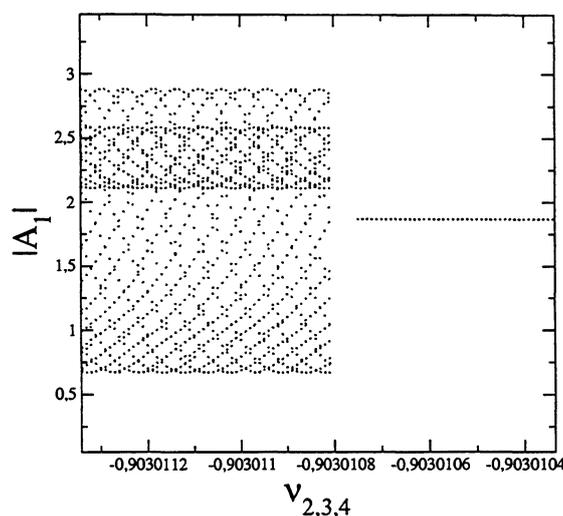


Figura 4.14: Mostra da perda da bacia para a bifurcação do período 1.

4.7 Diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov no modelo

4.7.1 Espectro de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov λ visam diagnosticar melhor as bifurcações encontradas, bem como quantificar os estados do sistema⁹. O algoritmo utilizado para o diagnóstico do expoente de Lyapunov encontra-se na referência [33]. Para fazer isso, primeiramente foi necessário linearizar as quatro equações de onda. Por outro lado, as equações originais são complexas, cada órbita evolui em 8 direções (4 direções

⁹Uma breve discussão desta teoria pode ser encontrada na seção 3.12 do capítulo 3.

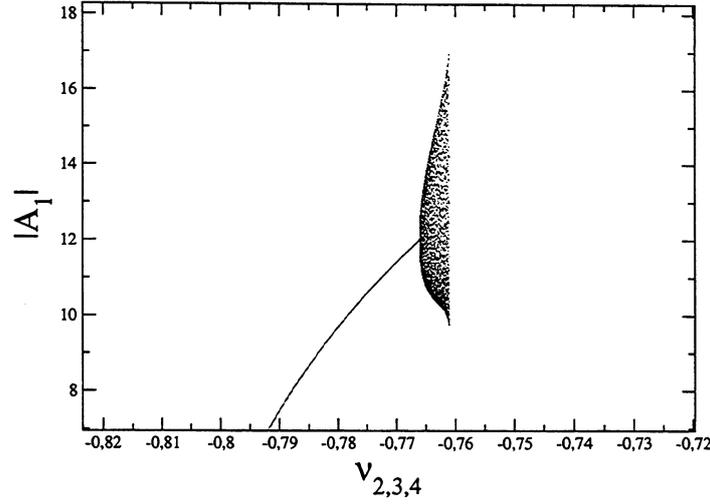


Figura 4.15: Limiar do diagrama de bifurcação da órbita de período 1

determinadas pelas partes reais e 4 direções para as partes imaginárias). Isto significa que medimos o quanto as órbitas divergem entre si, portanto são necessárias 64 equações linearizadas. Somando as 8 equações não lineares totalizamos 72 equações. O resultado relaciona-se com as 8 direções que cada órbita evolui, portanto temos oito expoentes. Dois expoentes são sempre nulos visto que as fases das ondas no problema de quatro ondas são relacionadas em somente duas formas, eliminando assim, duas direções. Finalmente obtemos *6 expoentes de Lyapunov*, os quais podemos relacionar com as seguintes equações tornando explícito o fato destas conjunções de fases:

$$\dot{F}_1 = 2(F_1 F_2 F_3)^{1/2} \cos \phi_a - 2r(F_1 F_2 F_4)^{1/2} \cos \phi_b + 2\nu_1 F_1, \quad (4.9)$$

$$\dot{F}_2 = -2(F_1 F_2 F_3)^{1/2} \cos \phi_a - 2r(F_1 F_2 F_4)^{1/2} \cos \phi_b + 2\nu_2 F_2, \quad (4.10)$$

$$\dot{F}_3 = -2(F_1 F_2 F_3)^{1/2} \cos \phi_a + 2\nu_3 F_3, \quad (4.11)$$

$$\dot{F}_4 = 2r(F_1 F_2 F_4)^{1/2} \cos \phi_b + 2\nu_4 F_4, \quad (4.12)$$

$$\dot{\phi}_a = \left[-\left(\frac{F_2 F_3}{F_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{F_1 F_3}{F_2}\right)^{1/2} + \left(\frac{F_1 F_2}{F_3}\right)^{1/2} \right] \sin \phi_a + r \left[\left(\frac{F_2 F_4}{F_1}\right)^{1/2} - \left(\frac{F_1 F_4}{F_2}\right)^{1/2} \right] \sin \phi_b - \delta_3, \quad (4.13)$$

$$\dot{\phi}_a = -\left[\left(\frac{F_2 F_3}{F_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{F_1 F_3}{F_2}\right)^{1/2} \right] \sin \phi_a + r \left[\left(\frac{F_2 F_4}{F_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{F_1 F_4}{F_2}\right)^{1/2} - \left(\frac{F_1 F_2}{F_4}\right)^{1/2} \right] \sin \phi_b - \delta_4. \quad (4.14)$$

Estas equações acima são achadas substituindo nas amplitudes das 4 equações originais (equações (2.49) a (2.52)) a seguinte transformação:

$$A_k = \sqrt{F_k} \exp i\phi_k. \quad (4.15)$$

4.7.2 Espectro de Lyapunov para o atrator de órbita com período três:

Cada curva descrita no gráfico da figura (4.16) corresponde às 6 direções em que cada órbita evolui. Nosso interesse focaliza-se mais nos dois maiores expoentes de Lyapunov, já que o restante tem valor negativo. As regiões em que o expoente assume valor positivo significa existir caos no sistema.

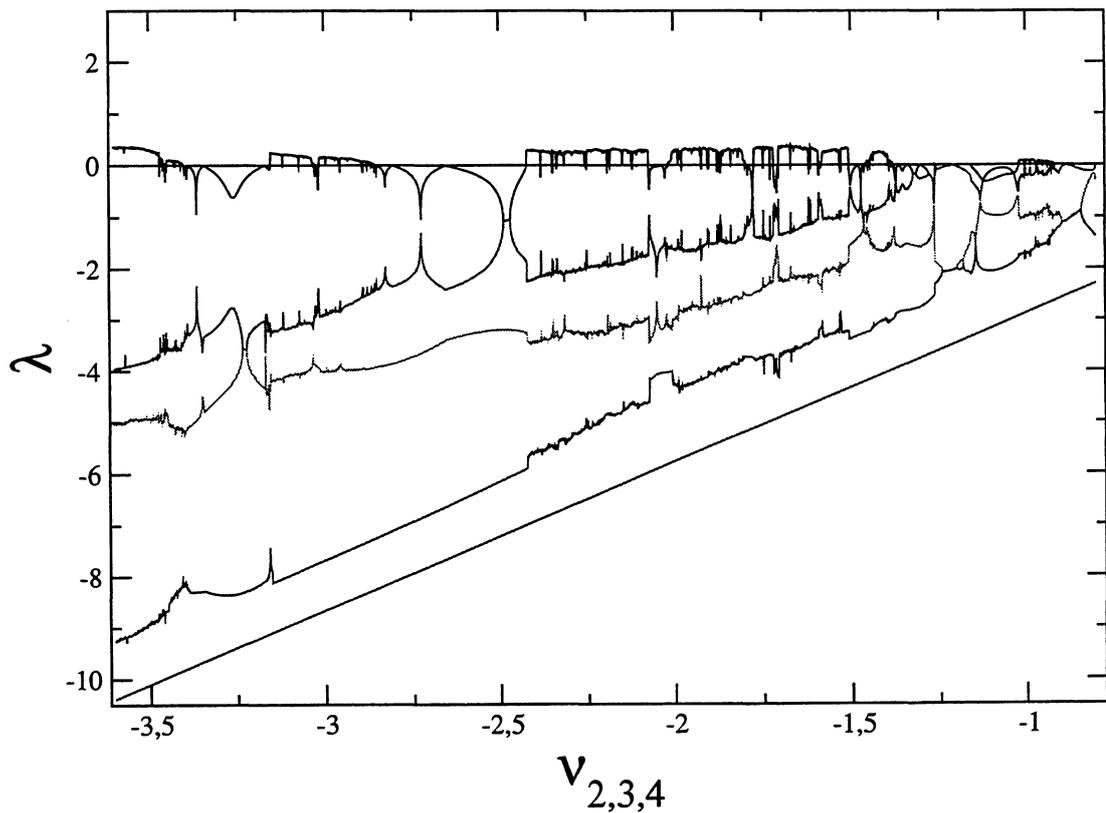


Figura 4.16: Espectro de Lyapunov para o modelo de 4-ondas, inicializado pela órbita de período três em $\nu = -0,8$.

4.7.3 Espectro de Lyapunov para o atrator de órbita com período um:

Como no caso anterior, cada curva corresponde às 6 direções em que cada órbita evolui. A figura (4.17) mostra o espectro para o caso inicializado pela órbita de período um.

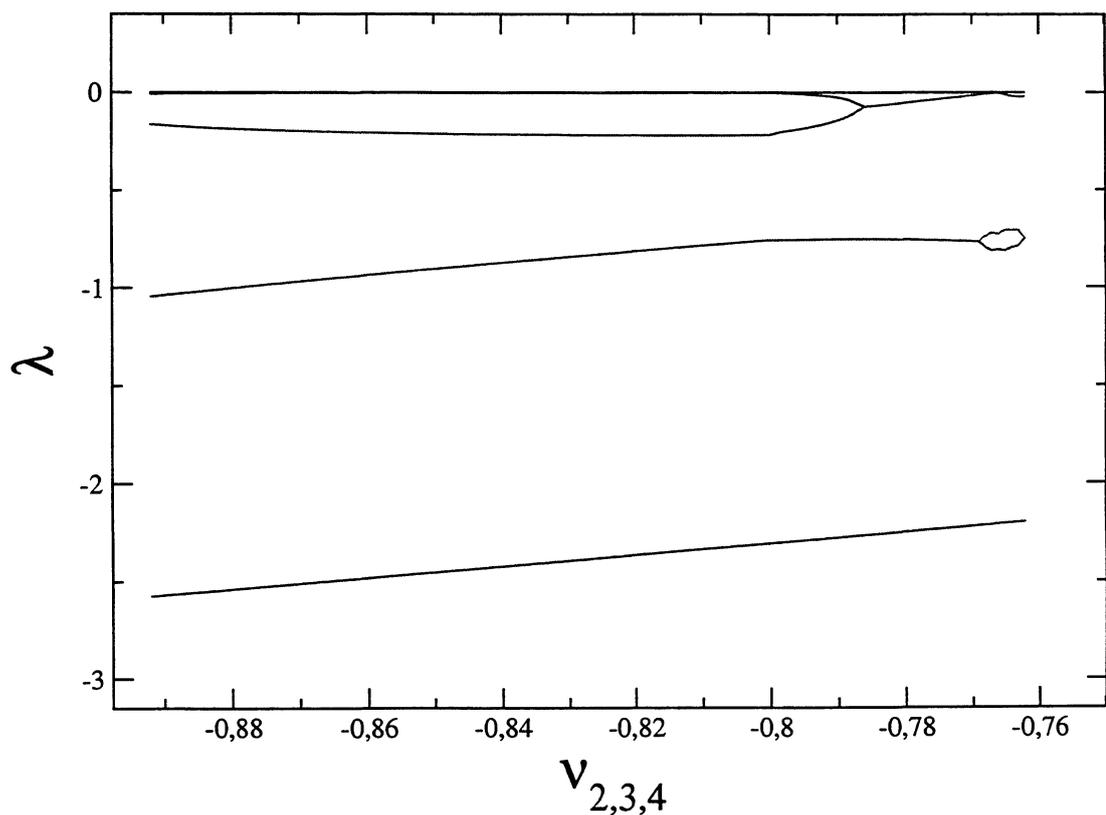


Figura 4.17: Espectro de Lyapunov para o modelo de 4-ondas, inicializado pela órbita de período um em $\nu = -0,8$.

4.8 Espectro de Lyapunov X Diagrama de Bifurcação

Alguns tipos de regimes, periódicos ou não, ficam mais evidentes quando dispomos do estudo do diagrama de bifurcação juntamente com o expoente de Lyapunov. Aqui faremos uma análise dos dois maiores expoentes apenas.

4.8.1 Espectro de Lyapunov X diagrama de bifurcação para o atrator de período três para $\nu = -0,8$:

Aqui escolhemos algumas regiões, as quais achamos mais interessantes, para compararmos o espectro de Lyapunov e o diagrama de bifurcação de interesse para o atrator de período três.

Bifurcação tipo Hopf

Na figura (4.18) que apresenta tanto o diagrama de bifurcação como expoente de Lyapunov, a bifurcação¹⁰ aparece na passagem da região periódica T^1 da esquerda para a direita de D; o primeiro expoente de Lyapunov é zero, enquanto o segundo é negativo. Para a região entre D e E ambos expoentes tem valor nulo; neste caso há um toro com dois expoentes nulos ou T^2 . A região volta a ficar periódica T^1 após passar por E.

Caos e periodicidade

Tomamos como exemplo a figura (4.19). Nesta simulação temos o caso periódico e o caso caótico. Como visto, o expoente de Lyapunov positivo caracteriza uma região caótica, como mostrado entre as regiões B e C. As região à esquerda de B apresenta uma periodicidade; no ponto A temos uma duplicação de período. Um caso interessante é que nas regiões periódicas apenas um expoente tem o valor nulo enquanto todos os outros são negativos evidenciando o torus T^1 como mencionado, inclusive na região caótica. Neste casos o chamamos de *janelas periódicas*.

¹⁰Os termos T^n referem-se aos toros, onde o expoente de Lyapunov é nulo. O capítulo 3 (“Introdução aos Sistemas Dinâmicos”) trata melhor este assunto na seção (3.12).

Regiões mistas

Uma pequena região do diagrama de bifurcação, inicializada pela órbita de período três, já apresentada na figura (4.7) pode ser melhor visualizada pela figura (4.20). Esta última apresenta-nos uma grande diversificação de bifurcações, tais como: regiões periódicas, duplicações de período, bolhas e regiões caóticas; demonstrando assim uma região mista.

O diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov apresentado pela figura (4.21) mostra regiões mistas. Embora o diagrama de bifurcação possa parecer que tenhamos apenas dois estados: periódico e caótico, o expoente de Lyapunov demonstra a presença de um toro T^2 na região enumerada por 2. Além disso, cada número¹¹ do gráfico (4.21) corresponde as respectivas séries temporais e os espaços de fase apresentadas pela figura (4.22), sob as mesmas condições iniciais, mas com valor de dissipação característica do diagrama de bifurcação do gráfico (4.21). Disso podemos concluir o seguinte:

- Região 1: Na figura (4.21) o diagrama de bifurcação apresenta-se com três “linhas” que são as três amplitudes máximas das ondas dado pelo primeiro quadrante na figura (4.22). O expoente de Lyapunov (figura (4.21)) apresenta um expoente nulo, enquanto o outro é negativo.
- Região 2: O toro é bem perceptível pelo expoente de Lyapunov na figura (4.21), pois os dois maiores expoentes são nulos, portanto dizemos ter um toro T^2 . Na figura (4.22) a série temporal mostra-nos uma quase periodicidade na oscilação das ondas, isto é, seria como cada uma dos três máximos de amplitude oscilasse no decorrer do tempo, neste caso o espaço de fase adquire uma característica com uma certa espessura e denso, diferente do espaço de fase relacionado com a região (1).
- Região 3: Expoentes positivos são visíveis pelo gráfico (4.21) caracterizando caos, bem como apresenta a figura (4.22).

4.8.2 Espectro de Lyapunov X diagrama de bifurcação para o atrator de período um (figura (4.23)):

Não apresenta muitos comportamentos dinâmicos, como acontece com o diagrama de bifurcação.

¹¹Enumerados por 1, 2 ou 3

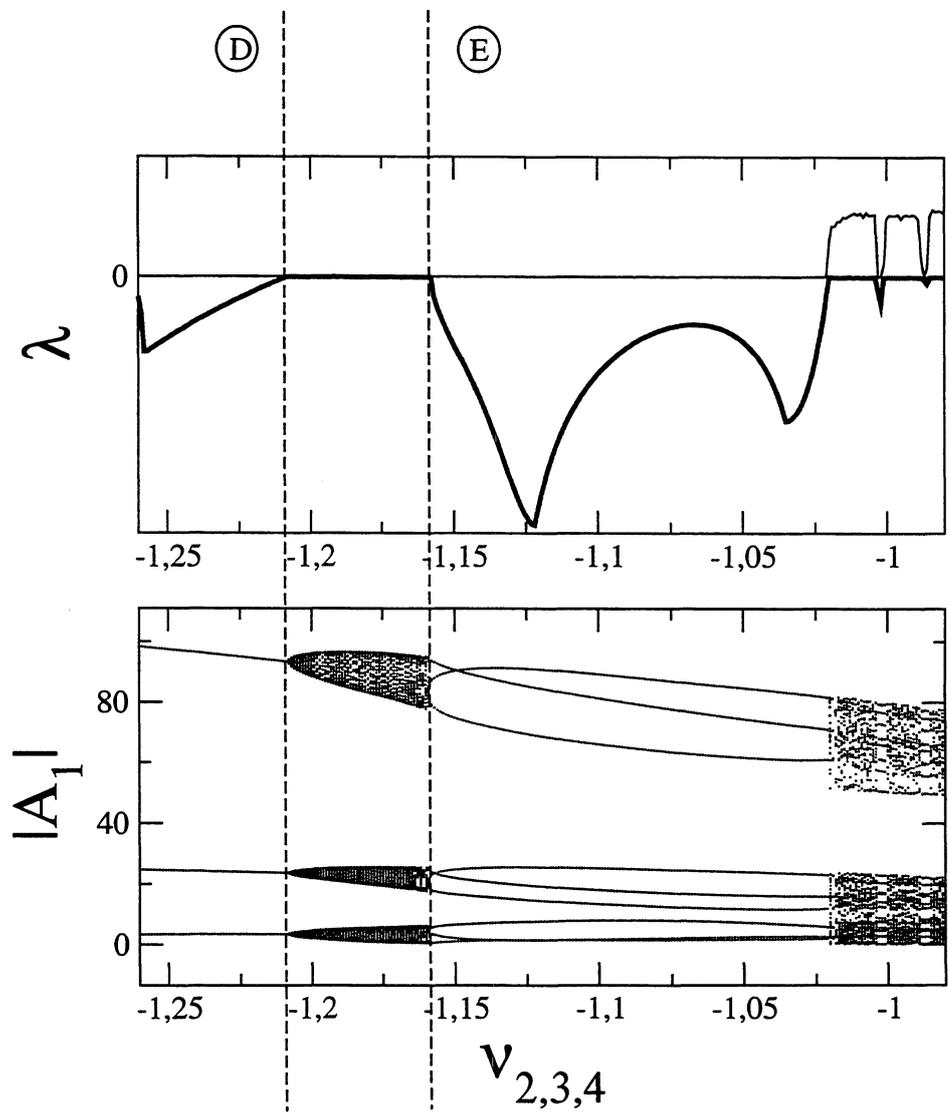


Figura 4.18: Expoentes de Lyapunov para a bifurcação do tipo Hopf. Observamos uma mudança no comportamento de um dos expoentes.

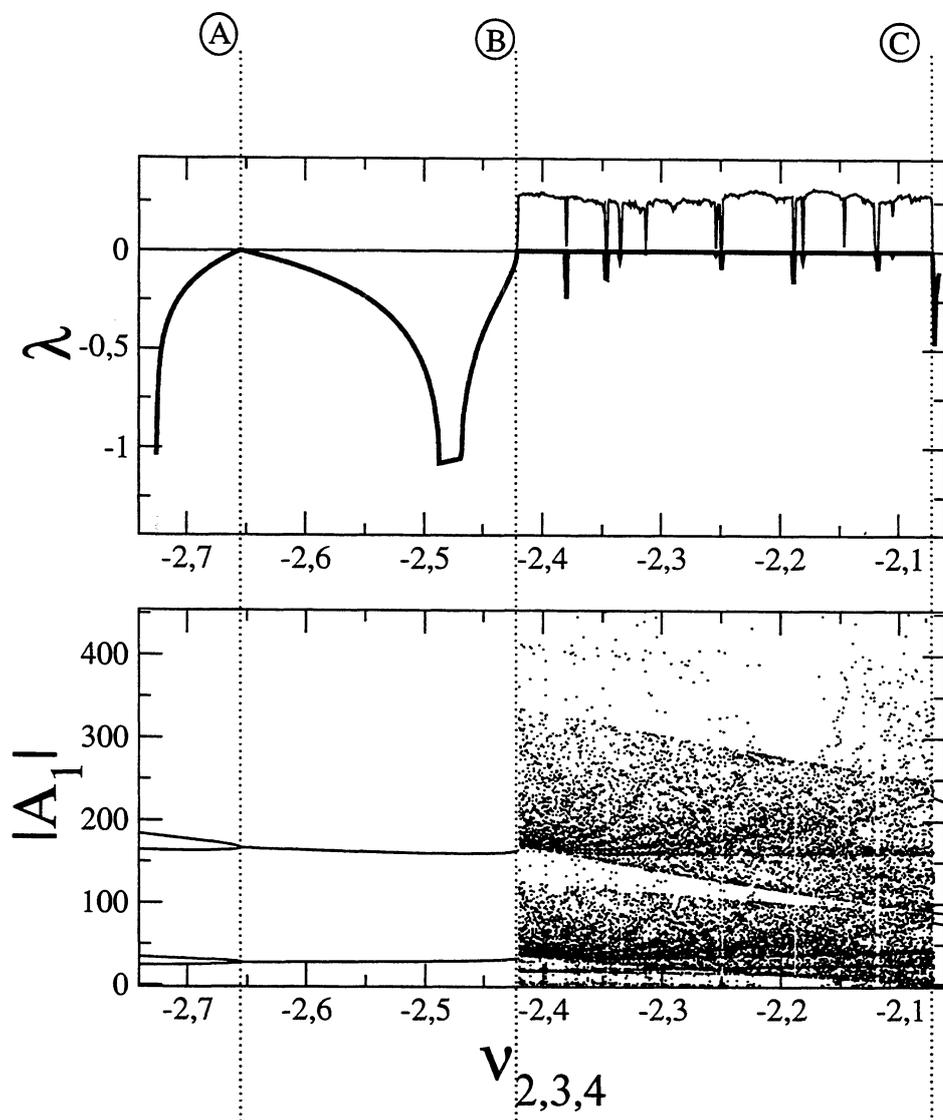


Figura 4.19: Regiões periódicas e caóticas. As regiões entre os pontos B e C apresentam caos enquanto toda a região à esquerda de B, periodicidade. O ponto A mostra uma duplicação de período.

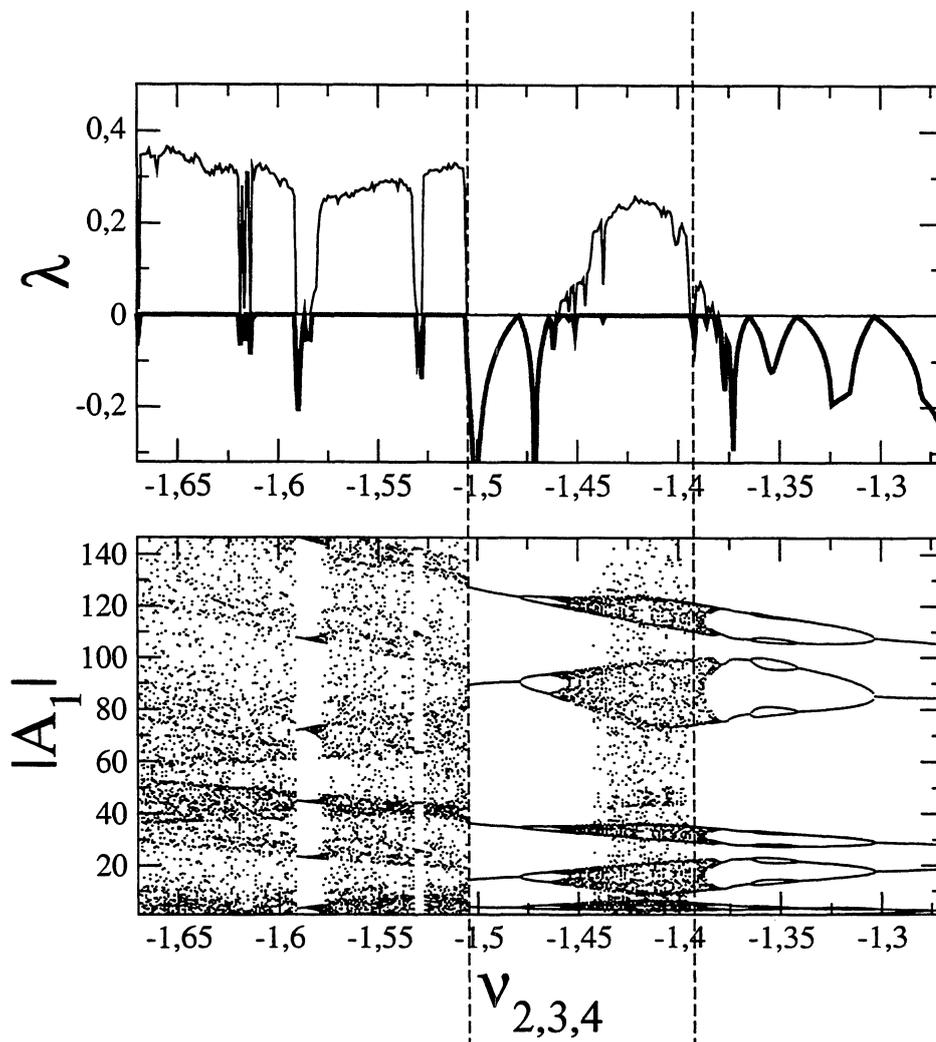


Figura 4.20: Regiões periódicas, duplicações de período, bolhas e regiões caóticas.

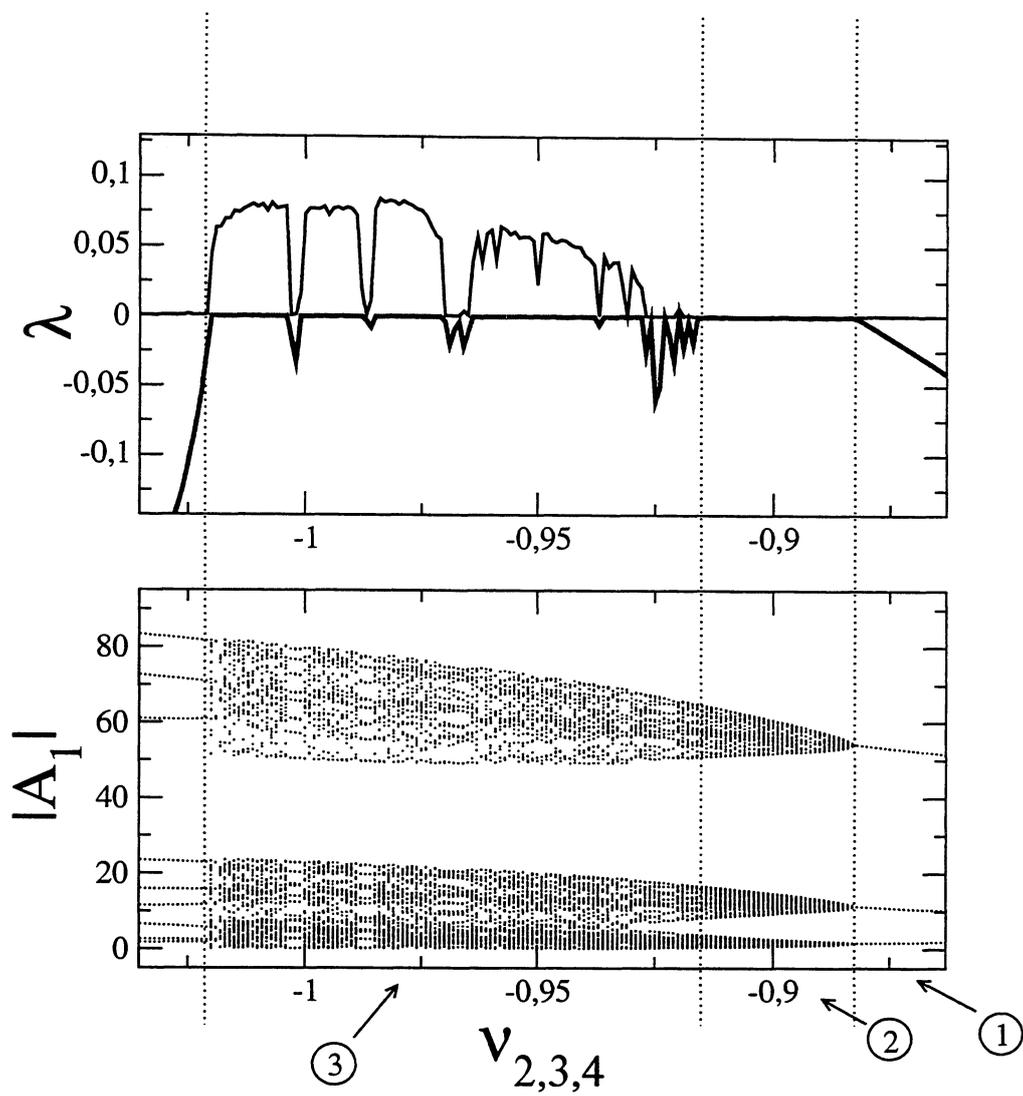


Figura 4.21: Regiões mistas. Aqui três regiões são importantes: (1) região de periodicidade; (2) região de toro T^2 e (3) região caótica com janelas periódicas. Esta numeração está de acordo com as séries temporais e espaços de fase simuladas na figura (4.22).

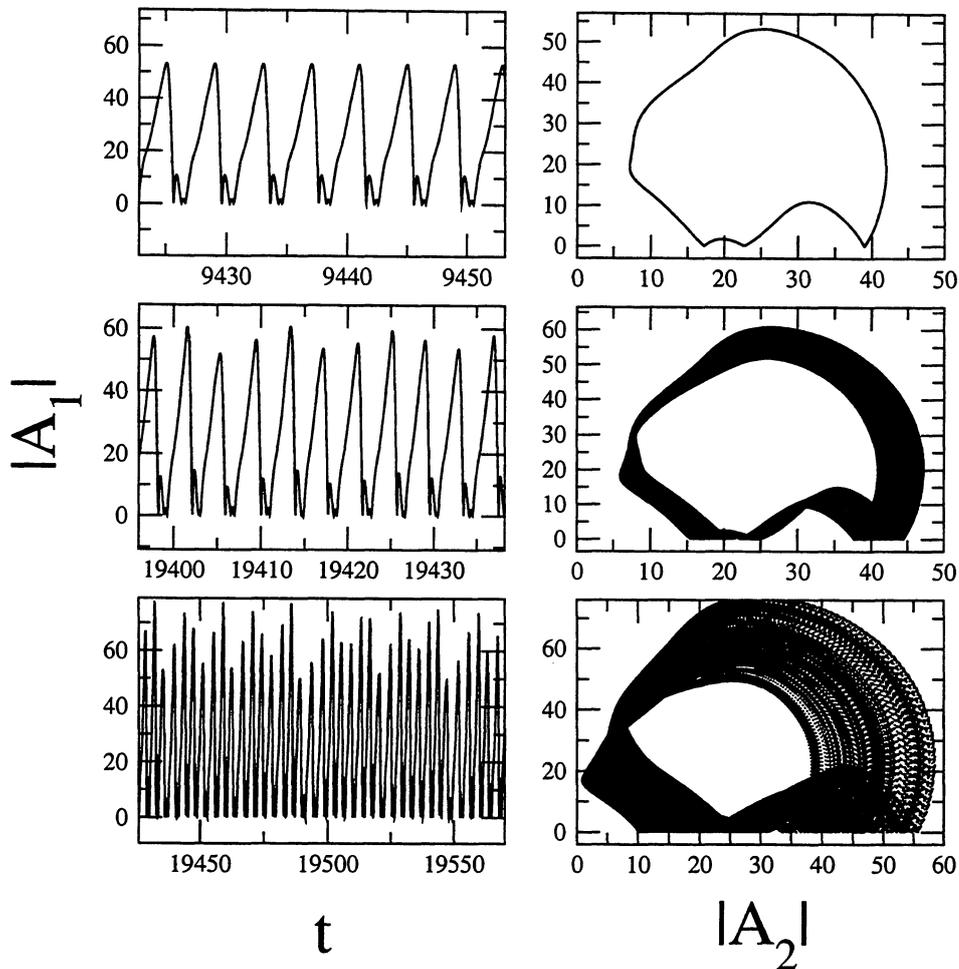


Figura 4.22: Temos aqui as séries temporais na primeira coluna e os espaços de fase na segunda coluna para regiões do gráfico (4.21). No primeiro quadrante, de cima para baixo, é a região periódica com seu espaço de fase à direita, relacionado ao índice (1) da figura (4.21). Na sequência (de acordo com o índice (2) da figura (4.21)) temos uma série temporal quase-periódica apresentando um toro T^2 no seu espaço de fase com características densas e espessas. Finalmente referente ao índice (3) temos uma série temporal caótica com seu espaço de fase um tanto irregular.

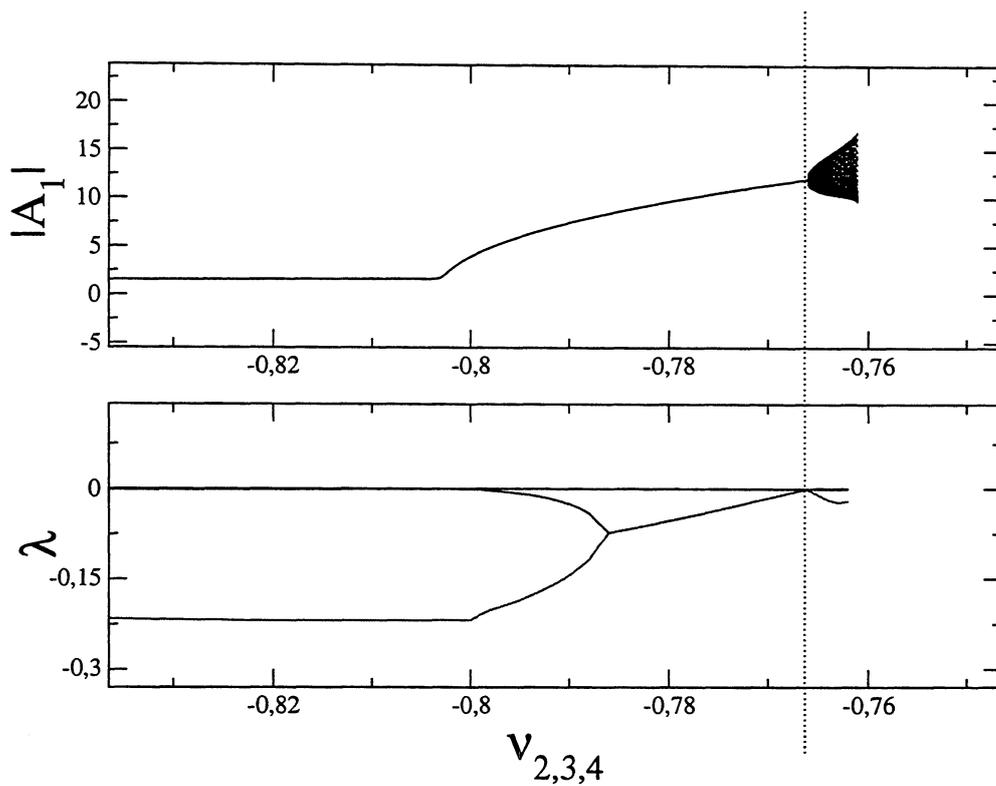


Figura 4.23: Expoentes de Lyapunov λ diagrama de bifurcação para o atrator de período um.

Capítulo 5

Bacias de Atração

5.1 Introdução

Uma das características mais interessantes no modelo de interação de quatro ondas, estudado neste trabalho, consiste no grau da dependência do parâmetro r no acoplamento das ondas. Isto parece ficar evidente quando analisamos as bacias de atração do sistema [5], pois elas exibem comportamentos de alta sensibilidade às mínimas mudanças nos parâmetros do modelo. A proposta é diagnosticar o comportamento das condições iniciais quando a intensidade no acoplamento¹ dos dois tripletos (W, S, W_-) e (W, S, W_+) é modificado. O capítulo 3 apresenta uma breve teoria sobre as bacias de atração², bem como na sua caracterização³.

5.1.1 Escolha das condições iniciais

Da mesma forma que a realizada anteriormente no capítulo 4, em que simulamos os histogramas variando apenas as partes reais das ondas A_1 e A_3 , reutilizamos as condições iniciais lançadas em uma grade com amplitudes máximas para A_1 e A_3 fixadas em 50 unidades. Assumiremos aqui as seguinte condições:

$$A_1 = (x, 0.1), \quad (5.1)$$

$$A_2 = (0.0, 0.1), \quad (5.2)$$

$$A_3 = (y, 0.1), \quad (5.3)$$

¹Conforme a figura (2.6) do capítulo 2.

²3.10 Bacias de Atração.

³3.13 Classificação das Bacias.

$$A_4 = (0.0, 0.1), \quad (5.4)$$

sendo $A_n = (R, Im)$, enquanto x e y são as partes reais das amplitudes que variamos, (A_1 e A_3) respectivamente ⁴. Todas partes imaginárias bem como as partes reais de A_2 e A_4 , são mantidas fixas. Com exceção do parâmetro de acoplamento r , todos os parâmetros discutidos no capítulo anterior, também foram mantidos fixos: $\delta_3 = 2, 0$, $\delta_4 = 2, 01$, $\nu_1 = 1, 0$ e $\nu_{2,3,4} = -0, 80$.

5.1.2 Bacias de Atração para o modelo de 4 ondas

As bacias são simuladas usando uma grade de 500×500 condições iniciais. Aqui as regiões verdes estão relacionadas com o atrator no infinito (caso divergente), enquanto os atratores de período um e três estão correlacionados com as cores vermelho e preto, respectivamente.

Bacias para $r = 1$

A figura (5.1) apresenta uma coexistência dos três estados (caso divergente, período um e período três). Porém a região que predomina é a onda divergente. A pequena janela branca foi colocada na figura e será usada para caracterizar a fronteira das bacias (conforme a teoria apresentada na seção 3.8 e 3.9 do capítulo 3).

Bacias para $r = 0, 9999$

Ao diminuirmos o parâmetro de acoplamento para $r = 0, 9999$ há uma mudança visível na configuração da bacia de atração. Observamos que o atrator de período três perdeu sua estabilidade, sendo sua bacia ocupada pelos dois outros atratores, o verde (divergente) e o vermelho (periódico de período um), como mostrado na figura (5.2).

Bacias para $r = 0, 999$

Continuando o procedimento diminuimos para $r = 0, 999$. A figura (5.3) é a bacia de atração para este valor de parâmetro. Neste caso houve uma grande mudança na configuração, nas duas bacias. Suas fronteiras ficaram mais evidentes, na verdade a

⁴Re \rightarrow parte real e Im \rightarrow parte imaginária

característica fractal desta bacia é perdida tornando-se uma bacia não fractal, como comprovaremos a seguir.

Bacia para $r = 0,99$

Neste caso nenhum atrator periódico (ou não) é encontrado e toda a bacia é divergente.

5.1.3 Região “quase” linear

De acordo com a teoria do modelo de equações das quatro ondas (equações 2.49 a 2.52 do capítulo 2 em “O modelo da quatro ondas”), podemos impôr que a amplitude da onda sibilante (A_1) seja muito maior que as demais amplitudes. Desse modo fazendo $\mathcal{E}_1 \gg \mathcal{E}_{2,3,4}$, e assim, desprezando os termos cruzados de A_2A_3 , A_2A_4 e A_3A_4 , tal que podemos escrever uma formulação *quase linear* para o acoplamento na forma:

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \nu_1 A_1(t), \quad (5.5)$$

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = -A_1(t)A_3^*(t) - rA_1^*(t)A_4(t) + \nu_2 A_2(t), \quad (5.6)$$

$$\frac{dA_3(t)}{dt} = -A_1(t)A_2^*(t) + i\delta_3 A_3(t) + \nu_3 A_3(t), \quad (5.7)$$

$$\frac{dA_4(t)}{dt} = rA_1(t)A_2(t) + i\delta_4 A_4(t) + \nu_4 A_4(t). \quad (5.8)$$

É importante notar que a teoria *quase linear* prevê somente uma característica para o acoplamento, ou seja se ele ocorre ou não (taxas de crescimento > 0 ou < 0). De acordo com a figura (5.4) não é isso que ocorre, pois como podemos observa várias soluções assintóticas possíveis estão presentes no sistema.

5.1.4 Caracterização das Bacias do Modelo

Como vimos nos capítulos anteriores as fronteiras das bacias podem ter diferentes formas e dimensões [5]. Para caracterizar nossas bacias, utilizamos o expoente de incerteza α , conforme as equações (3.20) e (3.21). Fazemos a análise referente às

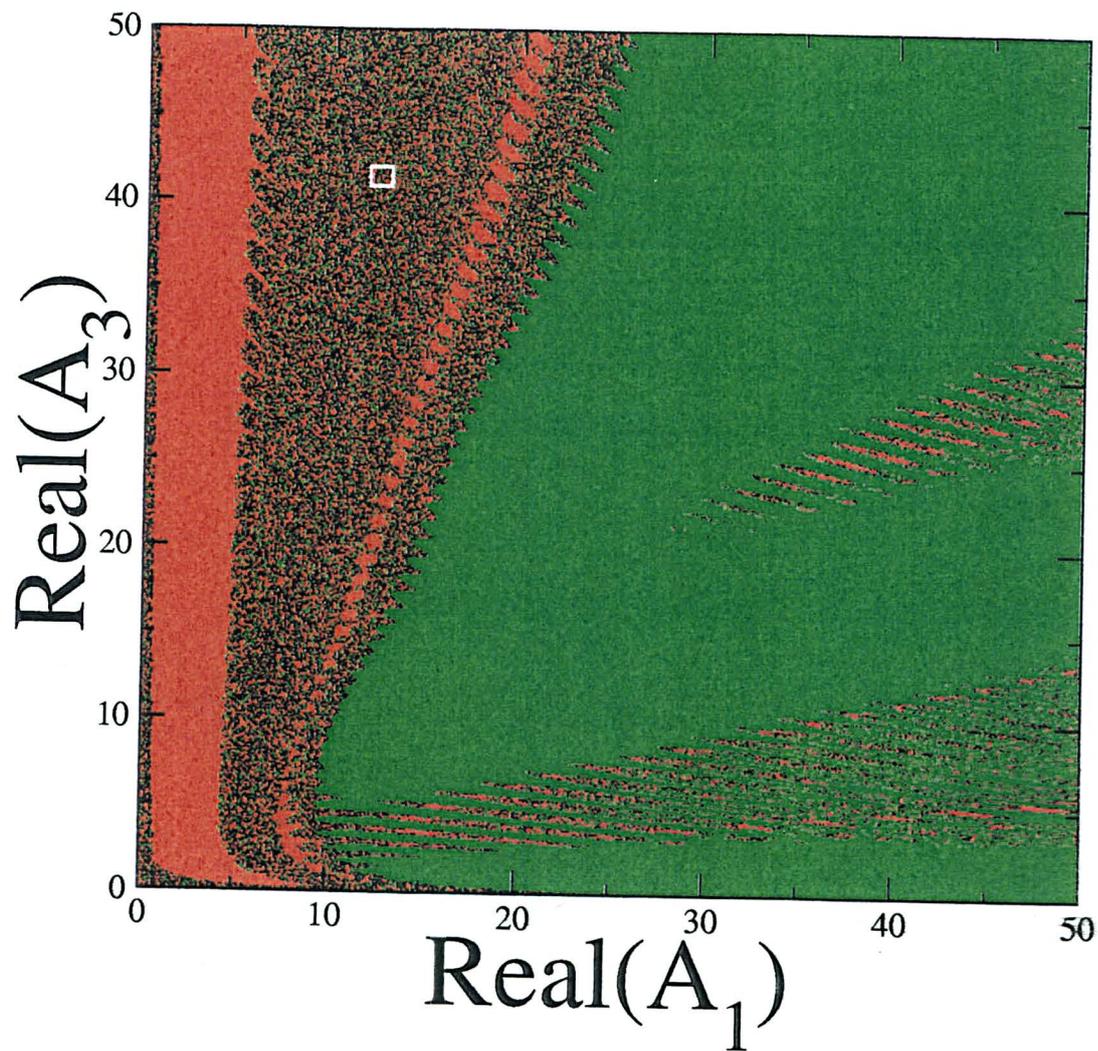


Figura 5.1: Bacias de Atração para o acoplamento máximo $r = 1, 0$. As regiões verdes relacionam-se com o atrator no infinito (caso divergente); os atratores de período um e três estão correlacionados com as cores vermelho e preto, respectivamente.

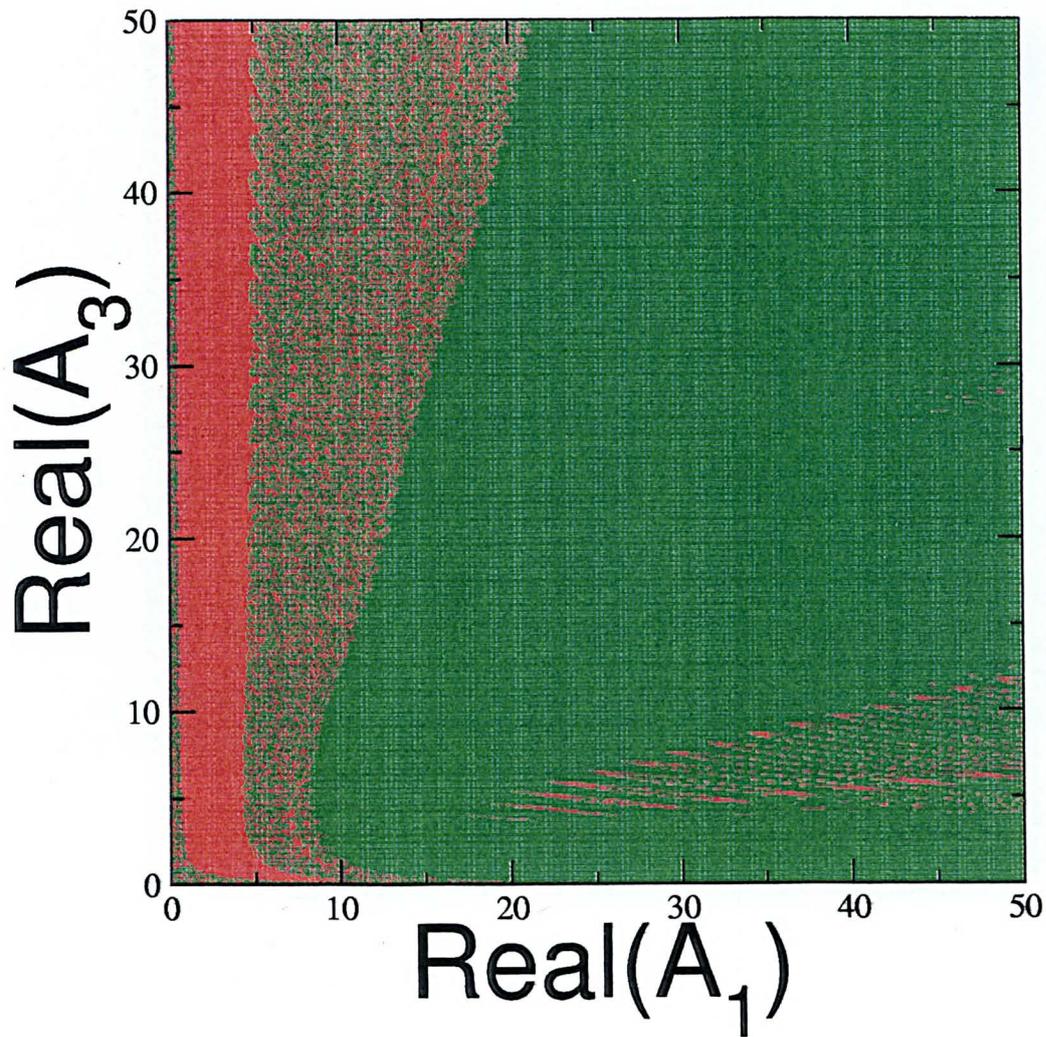


Figura 5.2: Bacia de Atração para o caso em que o acoplamento é $r = 0,9999$. O atrator de período três não aparece mais, sendo ocupado por outras duas bacias: atrator de período um (região vermelha) e pelo caso divergente (região verde).

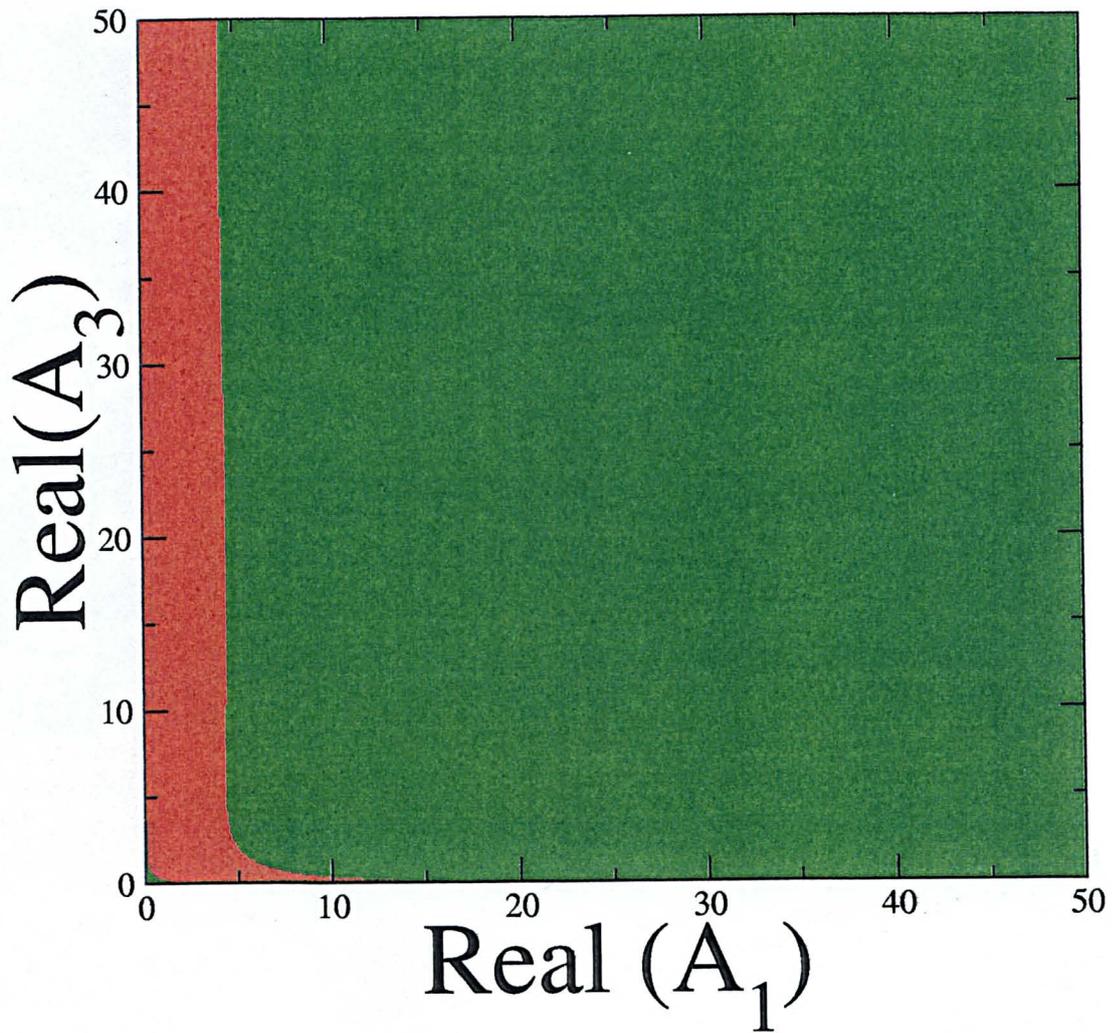


Figura 5.3: Bacia de Atração para o caso do acoplamento $r = 0,999$. A fronteira da bacia toma formas mais bem definidas.

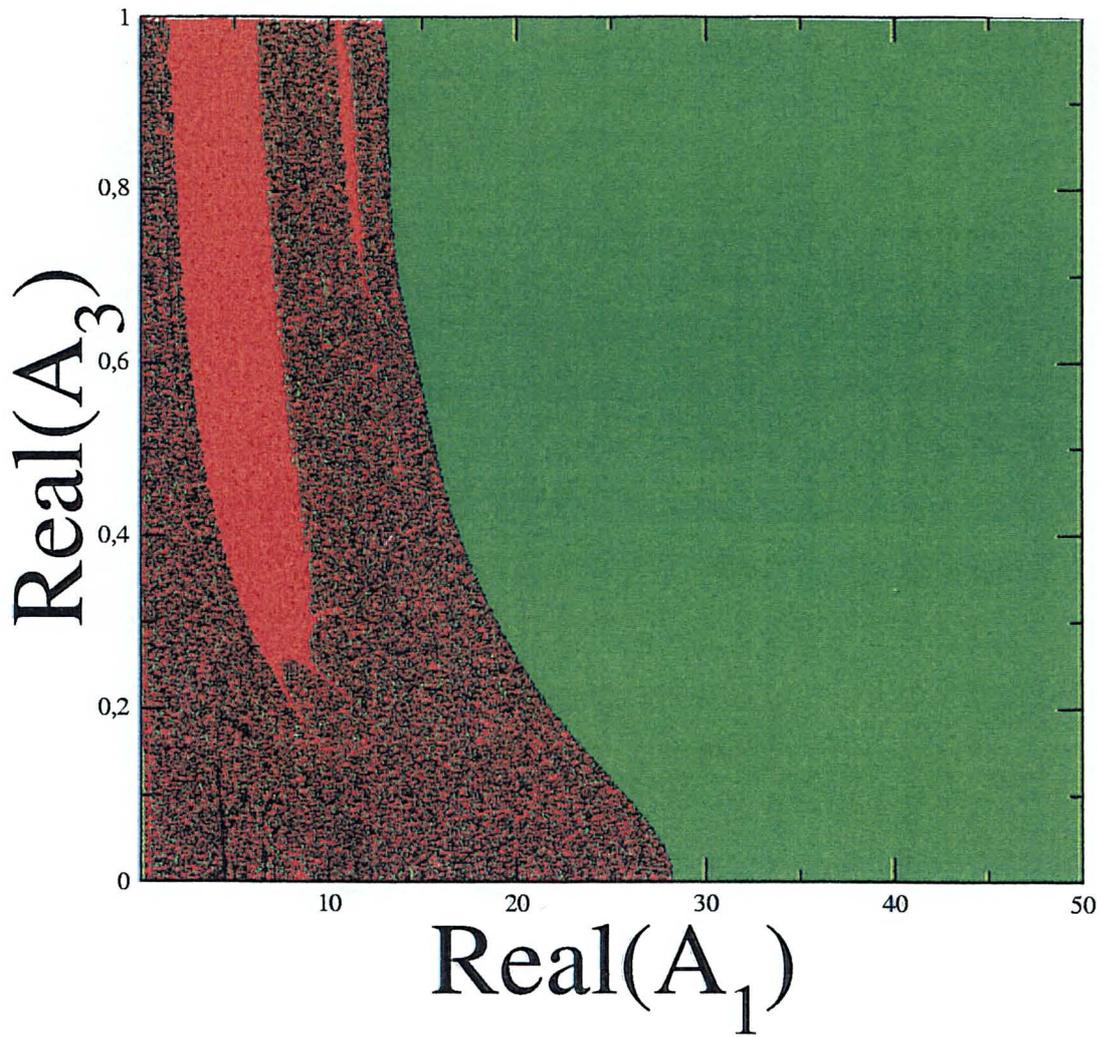


Figura 5.4: Zoom da bacia de atração para o caso do acoplamento $r = 1,0$. Aqui $\text{Re}(A_1)$ varia de $0 \rightarrow 50$ e $\text{Re}(A_3)$ varia de $0 \rightarrow 1$.

figuras (5.1) e (5.3). Neste caso, selecionamos uma pequena região da fronteira destas bacias; para a figura (5.1) a região é delimitada pelo quadrado branco.

Simulamos 5000 condições iniciais aleatoriamente escolhidas para a janela apresentada. Para cada condição inicializada pela primeira rodada geramos uma incerteza fixa de raio ε . Uma segunda rodada de condições iniciais é inicializada dentro de circunferências de raio ε centradas em cada uma das 5000 condições anteriores (primeira rodada), ou seja, dentro dos raios de incerteza, e é então computada. Posteriormente realiza-se a comparação com a primeira rodada de simulações. Podemos então calcular a fração de pontos incertos $F(N)$ [5], [4]:

$$F(N) = \frac{CI}{CT}, \quad (5.9)$$

sendo que CI e CT representam o número de condições incertas e o número total de condições iniciais, respectivamente. O cálculo de $F(N)$ é feito com ε fixo. Fizemos nove simulações de acordo com diferentes valores de ε . Para cada novo valor atribuído para ε a simulação é repetida três vezes, a fim de obtermos as médias e desvios estatísticos.

Caracterização da bacia de atração referente à figura (5.3), seu parâmetro de acoplamento é de $r = 0,999$:

O gráfico demonstrativo desta simulação é mostrado na figura (5.5). Para este caso os principais resultados foram os seguintes:

- número de observações = 9,
- quantidade de condições iniciais = 5000,
- coeficiente de correlação = 0,9994279,
- coeficiente de regressão = 0,936262.

O aumento de simulações faz com que o coeficiente de regressão se aproxima de 1, isto é, o expoente $\alpha \rightarrow 1$. Desta forma esta bacia é dita ser uma *bacia lisa*.

Caracterização da bacia de atração referente à figura (5.1), seu parâmetro de acoplamento é de $r = 1,0$:

O gráfico demonstrativo desta simulação é mostrado na figura (5.6). Estes valores são para uma janela branca encontrada no interior da bacia (??). Os resultados

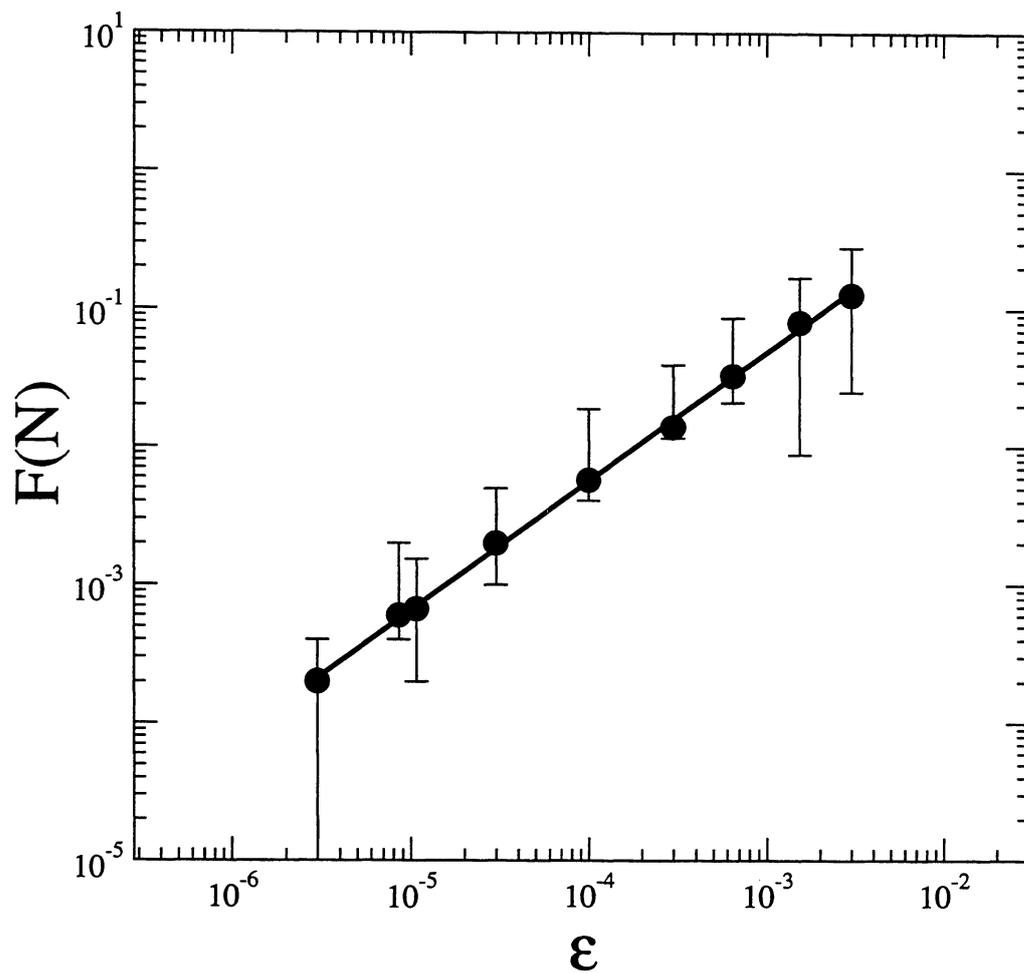


Figura 5.5: Caracterização das bacias apresentadas pela figura (5.3) com $\alpha = 0,936262$ para $r = 0,999$.

foram:

- número de observações = 9,
- quantidade de condições iniciais = 5000,
- coeficiente de correlação = 0,9180453 ,
- coeficiente de regressão = 0,02221793.

Aumentando o número de simulações o coeficiente de regressão se aproxima de 0. Neste caso esta bacia é dita ser uma *bacia crivada* [4] ou do inglês riddle . Neste caso o expoente $\alpha \rightarrow 0$.

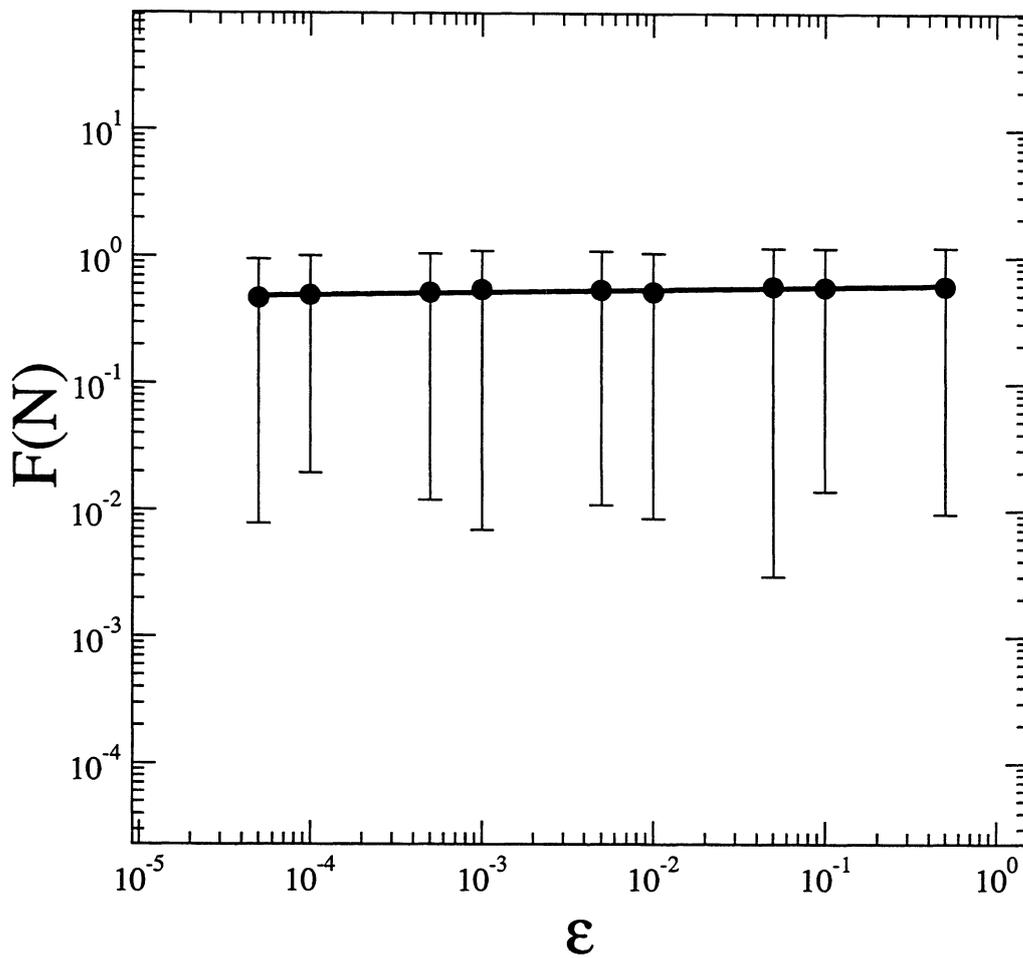


Figura 5.6: Caracterização das bacias apresentadas pela figura (5.1) com $\alpha = 0,02221793$ para $r = 1,0$ (100%).

Capítulo 6

Multiestabilidade no Modelo de 4 Ondas

6.1 Introdução

As interações coerentes de ondas¹ na forma $\mathbf{W}_1 \rightleftharpoons \mathbf{S}_2 + \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4$ ocorrem sempre que os vetores de ondas e frequências das ondas satisfaçam as relações de casamento de fase:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2, \quad (6.2)$$

$$\omega_1 \simeq \omega_3 + \omega_2, \quad (6.3)$$

$$\omega_1 \simeq \omega_4 - \omega_2, \quad (6.4)$$

como visto no capítulo 2.

Porém, o modelo de quatro ondas tratado aqui apresenta um pequeno descasamento de frequências lineares na forma:

$$\delta_3 = \rho(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \quad (6.5)$$

$$\delta_4 = \beta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_4). \quad (6.6)$$

Onde os parâmetros δ_3 e δ_4 são os descasamentos normalizados nas frequências ω_s . Aqui ρ e β são constantes de normalização.

¹ \mathbf{W}_1 é a onda indutora sibilante, \mathbf{S}_2 é a onda íon acústica, \mathbf{W}_3 é a onda anti-Stokes e \mathbf{W}_4 refere-se a onda Stokes.

Neste capítulo mostraremos que a variação destes parâmetros de descasamentos leva o sistema a apresentar multiestabilidades, ou seja, caso o parâmetro δ varie, o estado seguinte do sistema depende do estado anterior.

6.2 A histerese e a multiestabilidade

Com o intuito de simularmos um diagrama de bifurcação, notamos que os resultados deste diagrama são diferentes conforme repete-se as simulações. Por este motivo, simulamos a bifurcação a tempo crescente e, reutilizamos as condições finais como condições iniciais para integramos o sistema para trás, isto é, no sentido decrescente do tempo. Sob este contexto, observamos histerese e multiestabilidade no modelo.

O fenômeno de histerese em dinâmica não linear foi discutido no capítulo 3 na seção “3.11 Histerese”, lá utilizamos como exemplo o modelo de Duffing forçado. Já a multiestabilidade está associada com a grande quantidade de estados assintoticamente estáveis que o sistema apresenta.

6.2.1 Escolha dos parâmetros para a simulação do diagrama de bifurcação

Para simular o diagrama de bifurcação do modelo de quatro ondas escolhemos os parâmetros de acordo com o capítulo 4:

- **Injeção de energia:** $\nu_1 = +1,0$, onde o índice 1 refere-se à onda sibilante indutora.
- **Dissipação de energia:** $\nu_{2,3,4} = -0,8$, onde os índices 2, 3 e 4 referem-se às ondas íon acústica, a onda anti-Stokes e Stokes, respectivamente.
- **Parâmetro de acoplamento r :** Consideramos o acoplamento máximo das quatro ondas, ou seja, $r = 1$.
- **Descasamentos lineares de frequências $\delta_{3,4}$:** Neste capítulo utilizaremos o valor *em módulo* dos descasamentos. O valor de $|\delta_3| = 2,0$ é sempre fixo, enquanto *variaremos* $|\delta_4|$, assumido este sempre *negativo*.

6.2.2 Diagrama de bifurcação para $|\delta_4|$ com $|\delta_3| = 2,0$ fixo

O diagrama de bifurcação para $|\delta_4|$, como mostrado na figura (6.1), apresenta diferença na trajetória. É a única figura que apresenta o fenômeno de histerese. Ao terminarmos um diagrama reiniciamos a bifurcação no sentido inverso da integração, isto é:

1. O diagrama de bifurcação é simulado apenas variando o parâmetro $|\delta_4|$.
2. No término da simulação arquivamos as condições finais de A_1 , A_2 , A_3 e A_4 .
3. Integramos no sentido contrário da primeira simulação, reutilizamos as condições finais como sendo as novas *condições iniciais*.

Neste caso o valor reiniciado de $|\delta_4|$ é bem diferente de $|\delta_3| = 2,0$. A resposta obtida foi uma diferença no caminho percorrido no diagrama de bifurcação. Este fenômeno é conhecido por histerese². Não encontramos este efeito na bifurcação quando usamos como parâmetro os termos de dissipação $\nu_{2,3,4}$ (variados simultaneamente), como mostra a figura (6.2). Já o diagrama de bifurcação para o parâmetro de descasamento $|\delta_4|$ mostra-nos poucas bifurcações, não apresentando nenhuma diversificação quanto às propriedades (tipos de bifurcações), mas demonstra uma diferença no caminho percorrido (fig(6.1)); neste caso a bifurcação fica presa em dois únicos caminhos.

Quando diminuimos o percurso de simulação, ou melhor, quando $|\delta_4| \approx |\delta_3|$ a bifurcação apresenta caminhos alternativos e diferentes entre si (figura (6.3)). A diferença entre os percursos parecem ficar mais evidente quanto o parâmetro $|\delta_4|$ passa próximo ao valor de $|\delta_3| = 2,0$. Isto pode ser um indicativo de que a multiestabilidade pode estar associada à igualdade dos parâmetros, ou $|\delta_3| = |\delta_4|$.

6.2.3 Espectro de Lyapunov para $|\delta_4|$ com $|\delta_3| = 2,0$ fixo

O espectro de Lyapunov para esse modelo, figura (6.4), é simulado para o diagrama de bifurcação quando variamos o parâmetro de descasamento $|\delta_4|$, mostrado na figura (6.1). Neste caso não temos nenhum expoente positivo, ou caos. Os dois maiores expoentes parecem ser nulos, caracterizando assim uma grande região quase periódica ou toro T^2 .

²Capítulo3.

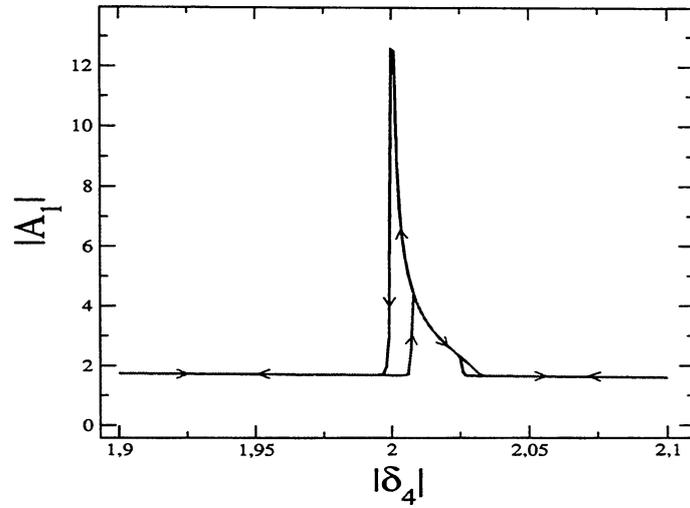


Figura 6.1: Diagrama de bifurcação via parâmetro $|\delta_4|$. Observamos histerese.

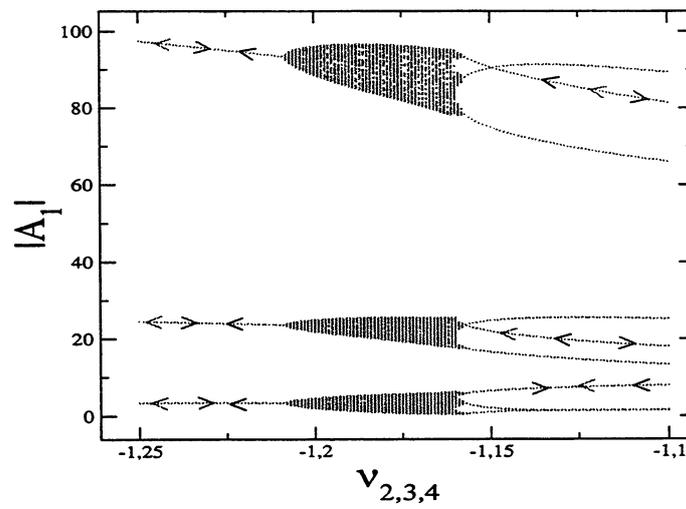


Figura 6.2: Diagrama de bifurcação via $\nu_{2,3,4}$; não há histerese.

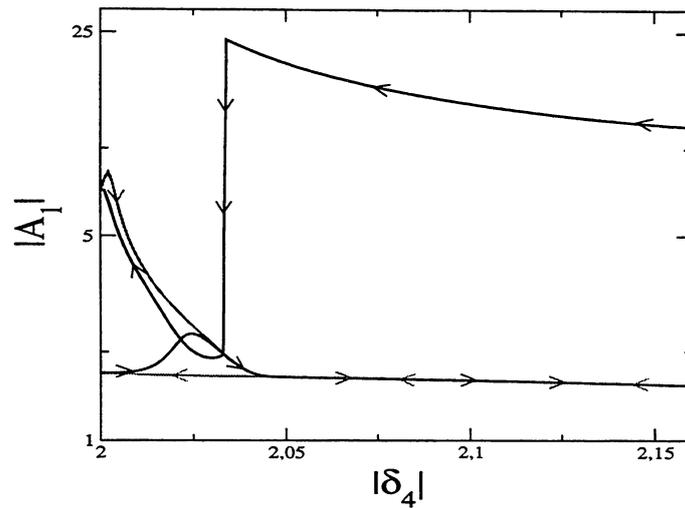


Figura 6.3: Diagrama de bifurcação para a variação do parâmetro $|\delta_4|$; evidenciando vários percursos alternativos quando $|\delta_4| \approx |\delta_3|$, lembramos que $|\delta_3| = 2.0$.

Mas não é bem isso que a simulação do expoente de Lyapunov para $|\delta_4|$ demonstra (figura (6.4)). O gráfico (6.5) é uma aproximação da figura (6.4), com uma boa observação notamos que para o valor em torno de $|\delta_4| = 2,01$ temos apenas um expoente nulo enquanto o restante é negativo. Isto está de acordo com as bifurcações discutidas no capítulo 4. Lá todas as bifurcações mantinham fixas $|\delta_4| = 2,01$, e nos casos em que a bifurcação passava por $\nu_4 = -0,8$, que aqui é mantida fixa, somente um expoente de Lyapunov era nulo não apresentando quase-periodicidade e nem caos, mas sim periodicidade; como apresenta a figura (6.5).

6.3 Crescimento de atratores

De acordo com o histograma da figura (4.5) apresentado no capítulo 4, os valores de $|\delta_3| = |\delta_4| = 2,0$ haviam muitos estados assintóticos, os quais eram sensíveis a mínimas mudanças nas condições iniciais tendendo para atratores diferentes. Sob este aspecto, fizemos o estudo da contagem de atratores quando o parâmetro $|\delta_4|$ tende a igualar-se ao $|\delta_3|$. A contagem foi feita simulando 900 condições iniciais, arquivando as amplitudes diferentes. Tal contagem é feita na figura (6.6) onde definimos $\Delta = |\delta_4| - |\delta_3|$, notamos que há um crescimento significativo na quantidade de atratores presentes quando $\Delta \rightarrow 0$. Isto pode estar relacionado com o fenômeno de histerese.

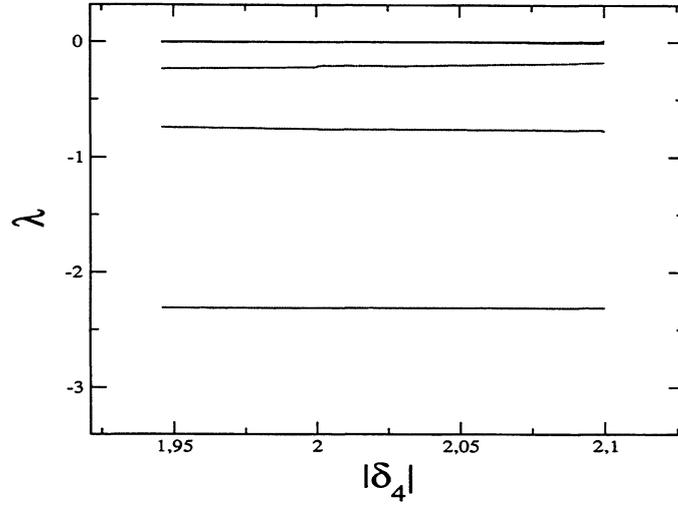


Figura 6.4: Composição do expoente de Lyapunov com a variação de $|\delta_4|$.

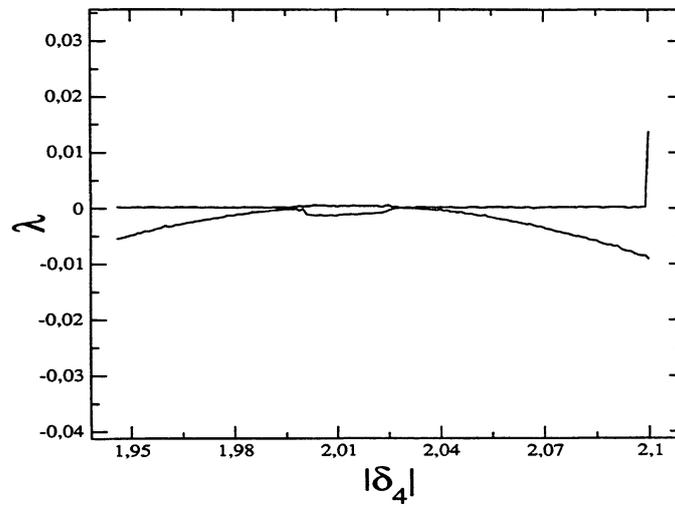


Figura 6.5: Detalhamento da figura (6.4).

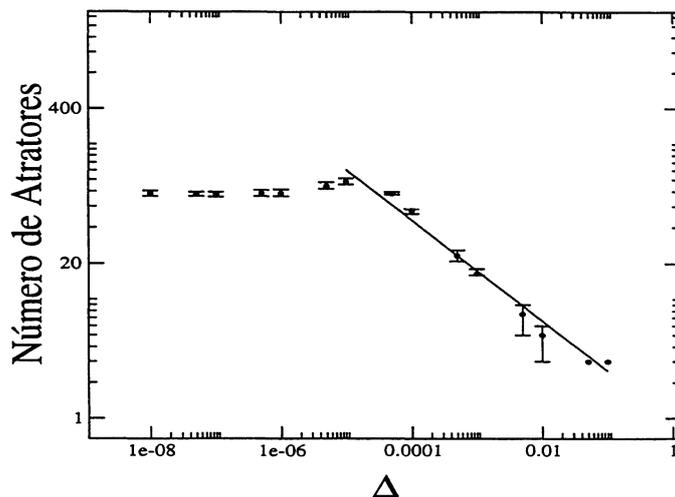


Figura 6.6: Contagem do número de atratores de acordo com que a diferença $\Delta = |\delta_4| - |\delta_3|$ tende a zero.

6.3.1 Histogramas para $|\delta_4| = |\delta_3|$

No capítulo sobre bifurcação discutimos a técnica utilizada para contarmos os atratores. Mostramos que para $|\delta_3| = 2,0$ e $|\delta_4| = 2,01$ tínhamos apenas dois atratores periódicos (vide figura (4.3) do capítulo 4), um de período um e outro de período três, além do caso divergente. Como a quantidade de atratores crescem muito quando $\Delta \rightarrow 0$, apresentamos o histograma para $|\delta_3| = |\delta_4|$.

De acordo com o histograma mostrado na figura (6.7), temos aqui 23954 condições iniciais aleatórias para $|\delta_4| = |\delta_3| = 2,0$, temos também 26188 condições iniciais aleatórias para $|\delta_4| = |\delta_3| = 3,0$ e 27800 condições para $|\delta_4| = |\delta_3| = 1,0$, sendo plotado cada intervalo unitário da amplitude assintótica de A_1 encontrada respectivamente. Realmente observamos uma quantidade enorme de atratores para todos os três casos onde $\Delta = 0,0$, e isto pode ser responsável pela multiestabilidade apresentado pelo sistema, podendo inclusive diagnosticar se é uma generalidade do modelo. Provavelmente quando as diferenças entre os δ 's aumentam, os atratores tendem a sumir e em seu lugar *podem* aparecer regiões de divergência.

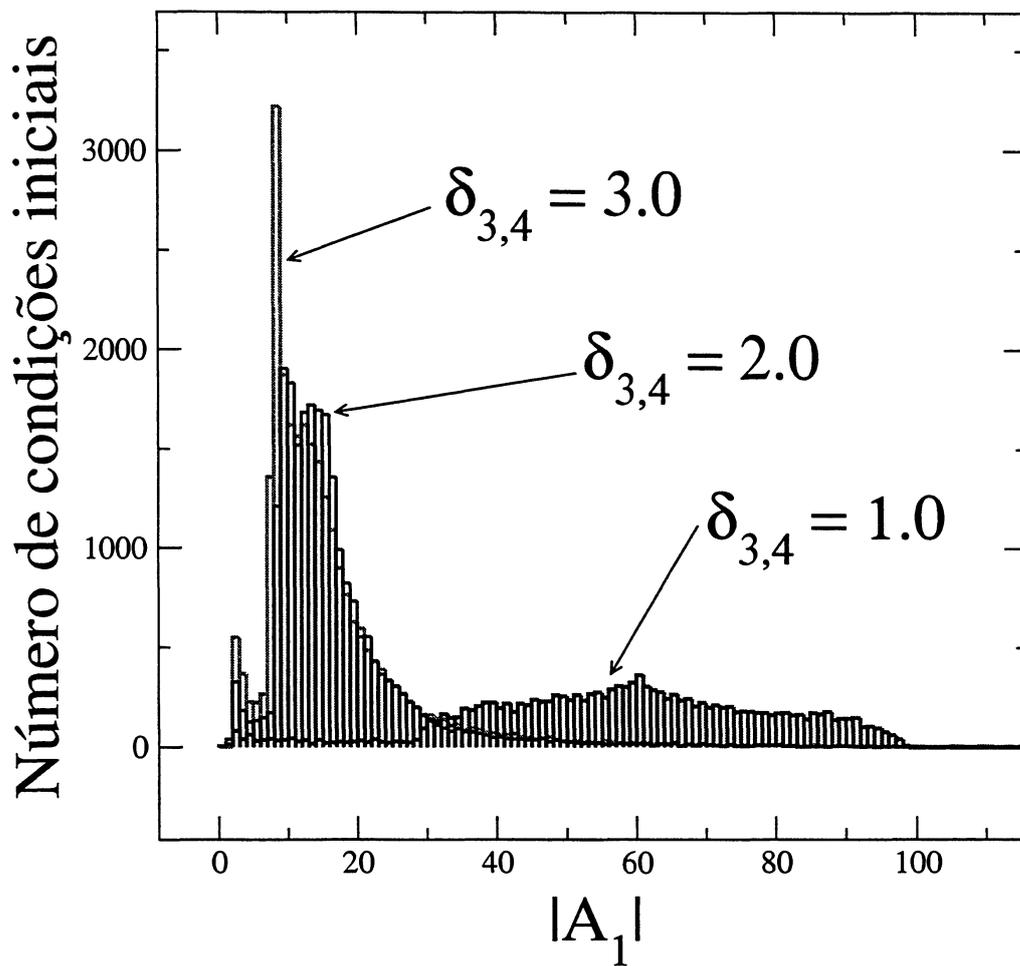


Figura 6.7: Histograma apresentando a distribuição de atratores para valores de $|\delta_4| = |\delta_3| = 1, 0; 2, 0$ e $3, 0$.

Capítulo 7

Conclusão e trabalhos futuros

7.1 Conclusão

Apresentamos alguns dos inúmeros comportamentos dinâmicos que este modelo pode (aparentemente) apresentar. Os resultados obtidos são válidos para as escolhas das condições iniciais e parâmetros discutidos no capítulo 3. Disso podemos concluir o seguinte:

1. *O modelo* apresentou alta sensibilidade tanto às condições iniciais quanto em seus parâmetros. Observamos também que parece existir um equilíbrio entre os parâmetros de injeção, dissipação de energia, descasamentos lineares de frequência e acoplamento r , proporcionando assim um estado de equilíbrio assintótico no sistema.
2. *O parâmetro* que mede o grau de acoplamento dos dois tripletos (r), pode ser um dos responsáveis pela drástica mudança na configuração das bacias de atração. Isto é, o parâmetro de acoplamento precisa ser máximo para que haja menor divergência (conforme os valores dos parâmetros e das condições iniciais simuladas computacionalmente nesta dissertação). As fronteiras destas bacias de atração apresentaram bacias lisas $r = 0,9990$ e bacias crivadas $r = 1,0$.
3. *As dissipações* (ν_2, ν_3 e ν_4), quando igualmente variadas apresentaram-se como um bom parâmetro no estudo da bifurcação do modelo, podendo assim, ilustrar casos clássicos como: duplicação de período, Hopf, quasi-periodicidade, caos, bolhas etc...
4. *Os descasamentos* $|\delta_{3,4}|$ resultaram num diagrama de bifurcação com o efeito de histerese e multiestabilidade.

5. O crescimento significativo dos atratores pode ser o responsável pela multiestabilidade. Porque se a diferença entre os descasamentos $\Delta = |\delta_4| - |\delta_3| \rightarrow 0$ demonstram uma grande quantidade de estados assintoticamente estáveis.
6. A *multiestabilidade* pode responder a questão da diferença de caminho no diagrama de bifurcação por apresentar características de outro atrator.

7.2 Trabalhos futuros

O modelo apresentado nesta dissertação tem como característica variáveis complexas, bem como uma grande quantidade de parâmetros. Desta forma o modelo estudado possibilita a simulação de inúmeros comportamentos dinâmicos. Sob este ponto de vista podemos propor:

1. Estudar uma possível *super-integrabilidade* no modelo a qual seria responsável pelos estados multi-estáveis. Isto porque o sistema apresenta um crescimento na quantidade de atratores quando $|\delta_4| = |\delta_3|$.
2. Simular computacionalmente o diagrama de bifurcação bem como o expoente de Lyapunov quando $\nu_2 \neq \nu_3 \neq \nu_4$.
3. Simular computacionalmente o espaço de parâmetros $\delta_4 \times \delta_3$ ou outro qualquer.
4. Estudo de crises no sistema.

Bibliografia

- [1] S. R. Lopes. *Dinâmica não linear de ondas whistlers em plasmas espaciais*. INPE (tese de doutorado), 1995.
- [2] F. F. Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. Plenum Press, 1984.
- [3] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of plasma physics*. Pergamon Press, 1986.
- [4] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [5] S. W. McDonald; C. Grebogi; E. Ott e J. A. Yorke. Fractal basin boundaries. *Physica 17D*, pages 125–153, 1985.
- [6] A. C. Hindmarsh. Odepack: a systematized collection of ode solvers, in scientific computing, r. s. stepleman et al. (eds.). *North-Holland, Amsterdam*, pages 55–64, 1983.
- [7] L. R. Petzold. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations. *Siam j. sci. stat. comput.*, 1983.
- [8] T. Kapitaniak. *Chaotic oscillations in mechanical systems*. Manchester University Press, 1991.
- [9] E. Hecht. *Óptica*. Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.
- [10] J. R. Reitz; F. J. Milford e R. W. Christy. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. Editora Campus, 1982.
- [11] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag, 1990.
- [12] C. P. Serra e E. W. Karas. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. Editora Universitária Champagnat, 1997.
- [13] P. Glendinning. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge, 1994.

- [14] S. W. McDonald; C. Grebogi; E. Ott e J. A. Yorke. *Chaos, an introduction to dynamics systems*. Springer, 1996.
- [15] N. F. Ferrara e C. P. C. do Prado. *Caos, uma introdução*. Edgard Blücher Ltda., 1994.
- [16] A. H. Nayfeh e B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics, analytical, computational and experimental methods*. Wiley-Interscience Publication, 1994.
- [17] S. E. de S. Pinto e R. L. Viana. Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps. *Physical Review E*, pages 5154–5161, 1999.
- [18] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos*. Perseus Books, 1994.
- [19] L. Glan; P. Hunter e A. McCulloch. *Theory of heart: biomechanics, biophysics and nonlinear dynamics of cardiac function*. Springer-Verlag, 1981.
- [20] T. F. Nonnenmacher; G.A. Losa e E. R. Weibel. *Fractals in biology and medicine*. Birkhäuser Verlag, 1994.
- [21] G. Gandolfo. *Economic dynamics*. Springer, 1997.
- [22] D. Gulick. *Encounters with chaos*. McGraw Hill, 1992.
- [23] D. J. Watts e S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, pages 440–442, 1998.
- [24] B. J. West. *Fractal physiology and chaos in medicine*. World Scientific, 1990.
- [25] A. C. L. Chian; F. A. Borotto; S. R. Lopes e J. R. Abade. Chaotic dynamics of nonthermal planetary radio emissions. *Planetary and Space Science*, pages 1–13, 1999.
- [26] D. Walters e G. J. Lewak. Dynamics of four coupled plasma waves to second order. *J. Plasma Physics*, pages 525–536, 1977.
- [27] S.R.Lopes e A.C-L.Chian. A coherent nonlinear theory of auroral langmuir-alfvén-whistler (law) events in the planetary magnetosphere. *Astronomy and Astrophysics*, pages 669–676, 1996.
- [28] U. Feudel; C. Grebogi; L. Poon e J. A. Yorke. Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors. *Chaos, Solitons and Fractals*, pages 171–180, 1998.
- [29] D. Zwillinger. *Handbook of differential equations*. Academic Press, 1997.
- [30] J. L. McCauley. *Chaos dynamics and fractals*. Cambridge, 1993.

- [31] J. M. Wersinger; J. M. Finn e E. Ott. Bifurcation and 'strange' behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling. *Phys. Fluids*, pages 1142–1154, 1980.
- [32] C. Grebogi e E. Ott. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica 7D*, pages 181–200, 1983.
- [33] A. Wolf; J. B. Swift; H. L. Swinney e J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica 16D*, pages 285–317, 1995.