

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RODRIGO BUBNIAK SILVÉRIO

**APLICAÇÃO DE MATERIAL VISCOELÁSTICO EM MANCAIS DE ROTORES DE
MÁQUINAS ROTATIVAS**

CURITIBA

2015

RODRIGO BUBNIAK SILVÉRIO

APLICAÇÃO DE MATERIAL VISCOELÁSTICO EM MANCAIS DE ROTORES DE MÁQUINAS ROTATIVAS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

CURITIBA

2015

S587a

Silvério, Rodrigo Bubniak

Aplicação de material viscoelástico em mancais de rotores de máquinas rotativas/ Rodrigo Bubniak Silvério. – Curitiba, 2015.

181 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, 2015.

Orientador: Carlos Alberto Bavastri .

Bibliografia: p. 118-120.

1. Motor Wankel. 2. Materiais viscoelásticos. 3. Amortecimento (Mecânica). I. Universidade Federal do Paraná. II. Bavastri, Carlos Alberto. III. Título.

CDD: 621.434

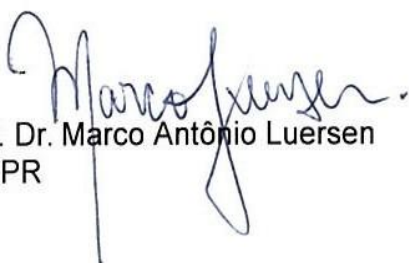
TERMO DE APROVAÇÃO

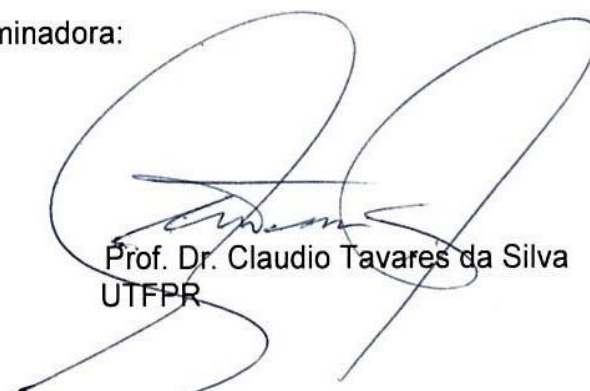
RODRIGO BUBNIAK SILVÉRIO

APLICAÇÃO DE MATERIAL VISCOELÁSTICO EM MANCAIS DE ROTORES DE MÁQUINAS ROTATIVAS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Marco Antônio Luersen
UTFPR


Prof. Dr. Claudio Tavares da Silva
UTFPR


Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes
UFPR

Curitiba, 04 de setembro de 2015.

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, Jane e Jonas, minha irmã
Cristine, minha noiva Suellen, amigos e
companheiros de trabalho por compreender os
períodos que me fiz ausente e por incentivar a
conclusão deste sonho.*

AGRADECIMENTOS

Gratidão é um sentimento combinado à satisfação e ao orgulho pela conquista alcançada. Estou grato e divido a conquista com aqueles que me incentivaram e me ajudaram durante esta jornada. Jornada esta que teve diversas interrupções e também diversos recomeços, por diferentes razões.

Obrigado a minha família, pai, mãe e minha irmã, que participaram da minha formação, me incentivaram e são parte da minha persistência diante de todo desafio que me é proposto. Sou grato também a minha noiva que sempre me acolhe com muito amor e dividiu o tempo que destino a ela na conclusão deste sonho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Carlos Alberto Bavastri, sou muitíssimo grato. Com toda a paciência desse mundo, entendeu todas as minhas dificuldades e esteve comigo em todos os recomeços. Dividiu comigo o bem maior para o desenvolvimento intelectual do ser humano, o conhecimento.

Dois grandes amigos estiveram próximos e me auxiliaram, Alcemir Miliavacca e Eduardo Afonso Ribeiro o meu muito obrigado.

Agradeço à PETROBRAS que através da Refinaria Presidente Getúlio Vargas (REPAR), acreditou, incentivou e sempre investe na minha formação profissional.

Agradeço também à UTFPR (Projeto FINEP 4931-06) que cedeu a bancada ROTORKIT para execução da parte experimental deste trabalho.

RESUMO

A grande demanda por equipamentos rotativos como turbinas, compressores, motores elétricos, geradores de energia, obriga os fabricantes a buscar soluções otimizadas em carcaças reduzidas. Para se conseguir grandes potências, geralmente essas soluções vem acompanhadas de elevadas rotações e com elas, podem ocorrer problemas de vibrações e instabilidades. A introdução de amortecimento nos mancais permite eliminar essas instabilidades ou aumentar a região de comportamento estável das máquinas rotativas. Pelas suas características dinâmicas, materiais viscoelásticos (MVEs) possuem uma grande capacidade de dissipação de energia vibratória. Logo, podem ser empregados como uma forma de introduzir amortecimento nas partes não rotativas de equipamentos dinâmicos. Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um modelo numérico capaz de prever o comportamento dinâmico de rotores com MVE aplicados aos mancais. O modelo implementado é capaz de prever comportamentos dinâmicos através do diagrama de Campbell, resposta ao desbalanceamento e resposta à excitação externa, dentre outros. O método dos elementos finitos é empregado na modelagem rotodinâmica, associado ao modelo de derivadas fracionárias para descrever o comportamento dinâmico do MVE quando aplicado nos mancais do rotor. As propriedades dos MVEs variam com a frequência de excitação e com a temperatura, o que exige uma técnica especial para o cálculo do diagrama de Campbell, assim como para o cálculo das respostas. Medições sobre um protótipo em laboratório são realizadas para verificar a precisão das respostas do modelo proposto.

Palavras-chave: Rotodinâmica. Materiais Viscoelásticos. Amortecimento.

ABSTRACT

The great rotating machines demand in the world, like turbines, compressors, electrical motors, energy generators, compels the OEM to find optimized solutions with very short casings. Normally high rotating speeds are adopted in machines already mentioned to reach great power. However vibration and instability problems can appear. The introduction of additional damping on bearings allows eliminate the instabilities or increase the stable regions of these rotating machines. Viscoelastic materials (VEM) have a great capacity for damping vibration energy due to their dynamics features. So VEM can be used to add elevated damping on no rotating parts of machines. The objective of this work is develop a numerical model able to predict dynamic behaviors like instability, Campbell diagram, unbalance response, external force response, among other. A finite element method is used to rotordynamic modeling associated with fractional derivative model to predict the dynamic behavior of rotor composed with VEM. The dynamic properties of these materials are function of frequency and temperature. Thus, a special technique to perform the Campbell diagram and the response calculations are needed. Measures on a laboratory prototype are made to verify the results obtained by the proposed model.

Keywords: Rotordynamic. Viscoelastic Materials. Damping.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 3.1 - NOMOGRAMA C-1002 (ISODAMP® C-1000 SERIES ISOLATION MATERIALS, TECHNICAL DATA SHEET 19, AEARO E.A.R SPECIALTY COMPOSITES)	28
FIGURA 3.2 - COMPORTAMENTO DOS MVES COM A FREQUÊNCIA E TEMPERATURA.	29
FIGURA 4.1 - EXEMPLO DE RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.	39
FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DOS PASSOS CONSTRUTIVOS DO DIAGRAMA DE CAMPBELL.	41
FIGURA 4.3 - EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL CALCULADO PELO ROTORDIN.	42
FIGURA 4.4 - ÓRBITAS DE RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO PARA DIFERENTES ROTAÇÕES DE UM ROTOR ASSIMÉTRICO.....	46
FIGURA 4.5 - MODOS DE VIBRAR DE UM ROTOR ASSIMÉTRICO. (A) E (B) PRIMEIRO MODO EM <i>BACKWARD</i> E <i>FORWARD</i> RESPECTIVAMENTE. (C) E (D) SEGUNDO MODO EM <i>BACKWARD</i> E <i>FORWARD</i> RESPECTIVAMENTE.	48
FIGURA 5.1 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA APLICAÇÃO DE MVE NOS MANCAIS DE ROTORES. (A) MVE NA PISTA EXTERNA DO MANCAL DE ROLAMENTO, (B) MVE SOBRE A CAIXA DE MANCAIS, (C) REPRESENTAÇÃO MASSA-MOLA-AMORTECEDOR.....	49
FIGURA 5.2 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA MODELAGEM DA ASSOCIAÇÃO DE UM MANCAL DE ROLAMENTO COM O MVE. (A) MODELO MASSA-MOLA-AMORTECEDOR, (B) RELAÇÃO ENTRE ELEMENTOS DO MANCAL E O MODELO PROPOSTO.	51
FIGURA 5.3 - EQUILÍBRIO DE FORÇAS NO NÓ 2.....	51
FIGURA 5.4 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA MASSA MM SITUADO NO NÓ 1.	52
FIGURA 5.5 - SISTEMA EQUIVALENTE.....	54
FIGURA 5.6 - EMPREGO DE SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS PARA DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA.	56

FIGURA 5.7 - ILUSTRAÇÕES DO DIAGRAMA DE CAMPBELL FINAL (A) E CAMPBELL AUXILIAR (B) (FERREIRA, 2004).....	58
FIGURA 6.1 - BANCADA DE SIMULAÇÃO ROTORKIT ADAPTADA: (A) VISTA GERAL DO ROTOR, (B) ROLAMENTOS AUTOCOMPENSADORES E ANÉIS RÍGIDOS PARA MONTAGEM, (C) MONTAGEM DOS SENSORES DE DESLOCAMENTO RADIAL (<i>PROXIMETERS</i>), (D) MONTAGEM DOS ROLAMENTOS COM ANEL RÍGIDO NA CAIXA DE MANCAIS, (E) MONTAGEM DOS ROLAMENTOS COM SETORES DE MVES.	63
FIGURA 6.2 - PROPRIEDADES DO DISCO.....	65
FIGURA 6.3 - POSIÇÃO DOS ELEMENTOS DO ROTOR EM RELAÇÃO AO EIXO.	66
FIGURA 6.4 - TESTE DE IMPACTO DE UM ROTOR.	67
FIGURA 6.5 - DADOS COLETADOS DE TESTE DE IMPACTO DE UM ROTOR....	68
FIGURA 6.6 - RESULTADO DO TESTE DE IMPACTO PARA AS DIREÇÕES X E Z	69
FIGURA 6.7 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO MEF PARA O ROTOR.	69
FIGURA 6.8 - TELA DE ENTRADA DE DADOS PARA O EIXO.....	70
FIGURA 6.9 - TELA DE ENTRADA DE DADOS DOS MANCAIS.....	70
FIGURA 6.10 - TELA DE ENTRADA DE DADOS DE ELEMENTOS DE INÉRCIA...	71
FIGURA 6.11 - GRÁFICO DA FUNÇÃO OBJETIVO.....	72
FIGURA 6.12 - FUNÇÃO OBJETIVO VISTA DE OUTRO ÂNGULO.....	72
FIGURA 6.13 - APROXIMAÇÃO DA REGIÃO DO VALE.....	73
FIGURA 6.14 - FUNÇÃO OBJETIVO PELA VARIAÇÃO DA RIGIDEZ.....	73
FIGURA 6.15 - DADOS OTIMIZADOS PARA OS MANCAIS.....	74
FIGURA 6.16 - INERTÂNCIA PARA DIREÇÃO X.....	75
FIGURA 6.17 - INERTÂNCIA PARA DIREÇÃO Z.....	75
FIGURA 6.18 - MAPA DE ROTAÇÕES CRÍTICAS NÃO AMORTECIDAS.....	76
FIGURA 6.19 - DIAGRAMA DE CAMPBELL PARA O ROTOR SEM MVE.....	77
FIGURA 6.20 - CORRIDAS EM <i>RUNDOWN</i>	80
FIGURA 6-21 CORRIDAS EM <i>RUNUP</i>	80
FIGURA 6.22 - RESPOSTA EM <i>RUNDOWN</i> PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM -135°.....	82
FIGURA 6.23 - RESPOSTA EM <i>RUNDOWN</i> PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM -90°.....	82

FIGURA 6.24 - RESPOSTA EM RUNUP PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM - 135°	83
FIGURA 6.25 - RESPOSTA EM RUNUP PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM - 90°	83
FIGURA 6.26 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO X E MASSA A -135°	85
FIGURA 6.27 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO X E MASSA A -135°	85
FIGURA 6.28 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO Z E MASSA A -135°	86
FIGURA 6.29 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO Z E MASSA A -135°	86
FIGURA 6.30 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO X E MASSA A -90°	87
FIGURA 6.31 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO X E MASSA A -90°	87
FIGURA 6.32 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO Z E MASSA A -90°	88
FIGURA 6.33 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO Z E MASSA A -90°	88
FIGURA 6.34 - "TRUNCAMENTO" NO PICO DA ROTAÇÃO CRÍTICA.	89
FIGURA 6.35 - DIFERENÇA ENTRE AS AMPLITUDES CALCULADA X EXPERIMENTAL.....	89
FIGURA 6.36 - RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO CALCULADA PELO ROMAC.....	90
FIGURA 6.37 - MANTA DE C-1002 UTILIZADA NOS SETORES DE MVE.....	92
FIGURA 6.38 - NOMOGRAMA PARA O C-1002 (ISODAMP® C-1000 SERIES ISOLATION MATERIALS, TECHNICAL DATA SHEET 19).....	92
FIGURA 6.39 - GRÁFICO COMPARATIVO DO MODULO DINÂMICO.....	94
FIGURA 6.40 - GRÁFICO COMPARATIVO PARA O FATOR DE PERDA.....	94
FIGURA 6.41 - PROPRIEDADES DO MVE C-1002.	95
FIGURA 6.42 - RESPOSTAS EM RUNDOWN COM MVE APLICADO AOS MANCAIS.....	97
FIGURA 6.43 - RESPOSTAS EM RUNUP COM MVE APLICADO AOS MANCAIS.	98

FIGURA 6.44 - EFEITO DE POSSÍVEIS ERROS NA MEDIÇÃO DE FASE NAS RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -135°	99
FIGURA 6.45 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -135°	101
FIGURA 6.46 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -135°	102
FIGURA 6.47 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -135°	103
FIGURA 6.48 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -90°	104
FIGURA 6.49 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -90°	105
FIGURA 6.50 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -90°	106
FIGURA 6.51 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -90°	107
FIGURA 6.52 - COMPARAÇÃO ENTRE RESPOSTAS OBTIDAS NOS ENSAIOS E CALCULADA NA DIREÇÃO X.	108
FIGURA 6.53 - COMPARAÇÃO ENTRE RESPOSTAS OBTIDAS NOS ENSAIOS E CALCULADAS NA DIREÇÃO Z.	109
FIGURA 6.54 - COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA SUBTRAÍDA E A SIMULADA PARA DIREÇÃO X.	110
FIGURA 6.55 - COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA SUBTRAÍDA E A SIMULADA PARA DIREÇÃO Z.	111
FIGURA 6.56 - DETERMINAÇÃO DO FATOR DE AMPLIFICAÇÃO (AF) PARA ROTAÇÕES CRÍTICAS. (API RP 684, 2ª. ED, PG 2-105).	112
FIGURA 6.57 - COMPARAÇÃO ENTRE AS CURVAS EM RUNUP SUBTRAÍDAS, SEM E COM APLICAÇÃO DE MVE NOS MANCAIS E MASSA À -90°	114
FIGURA A.1 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PRIMEIRO PASSO DE ROTAÇÃO.	123
FIGURA A.2 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.	123

FIGURA A.3 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO SEGUNDO PASSO DE ROTAÇÃO.....	126
FIGURA A.4 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.....	126
FIGURA A.5 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO TERCEIRO PASSO DE ROTAÇÃO.....	129
FIGURA A.6 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.....	130
FIGURA A.7 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO QUARTO PASSO DE ROTAÇÃO.....	133
FIGURA A.8 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.....	133
FIGURA A.9 - SISTEMA DE COORDENADAS ADOTADO POR LALANNE E FERRARIS (1990).....	144
FIGURA A.10 - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO SIMPLES DE TIMOSHENKO.	155
FIGURA A.11 - DESENHO ESQUEMÁTICO DE ORIENTAÇÃO AOS DESLOCAMENTOS E GIROS.	161
FIGURA A.12 - DETALHES DOS DESLOCAMENTOS E GIROS NA DIREÇÃO X.	162
FIGURA A.13 - DETALHES DOS DESLOCAMENTOS E GIROS NA DIREÇÃO Y.	162

LISTA DE TABELAS E QUADROS

TABELA 6.1 - RESUMO DAS CORRIDAS DE RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO	79
TABELA 6.2 - DADOS PARA CÁLCULO DO FATOR DE FORMA.....	95
TABELA 6.3 - FATORES DE AMPLIFICAÇÃO (AF) DAS CURVAS EM <i>RUNUP</i> , TABELA 6.4 - FATORES DE AMPLIFICAÇÃO (AF) DAS CURVAS EM <i>RUNUP</i> PARA O ROTOR SEM MVE.	113
TABELA A. 1 - RESUMO DAS ROTAÇÕES DO CORPO RÍGIDO.....	136
TABELA A.2 - QUADRO COMPARATIVO ENTRE VARIÁVEIS ADOTAS POR GENTA (2005) E LALANNE E FERRARIS (1990).	145
QUADRO 4.1 - RESUMO DOS PASSOS PARA DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS.	40
QUADRO 5.1 - RESUMO DAS OPERAÇÕES PARA OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS EM SISTEMAS COM EMPREGO DE MVE.....	59
QUADRO 6.1 - RESUMO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR PARA DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DOS MANCAIS DE ROLAMENTO.....	67
QUADRO 6.2 - RESUMO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR PARA PARÂMETROS DE MVE.....	93

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

$[A]$	Matriz de inércias e amortecimento no “espaço de estado”.
b	Tempo de relaxação do MVE.
b_0	Tempo de relaxação do MVE na temperatura de referência T_0 .
$[B]$	Matriz de inércia e rigidez no “espaço de estado”.
C_m	Amortecimento de mancal do modelo unidimensional.
C_{xx}, C_{zz}	Componentes da matriz de amortecimento de mancal.
$[C]$	Matriz de amortecimento global do sistema.
D^{k_m}, D^{α_m}	Operadores derivada fracionária
E	Parte real do módulo complexo de elasticidade do MVE.
E'	Parte imaginária do módulo complexo de elasticidade do MVE.
E_0	Módulo de elasticidade do MVE (assíntota inferior).
E_c	Módulo de elasticidade complexo para MVE.
E_∞	Módulo de elasticidade do MVE (assíntota superior).
f	Força aplicada ao nó
$\{f\}$	Vetor de forças generalizadas
$\{F\}$	Vetor de forças generalizadas no “espaço de estado”
G	Parte real do módulo de cisalhamento do MVE.
G'	Parte imaginária do módulo de cisalhamento complexo do MVE.
G_0	Módulo de cisalhamento do MVE (assíntota inferior).
G_c	Módulo de cisalhamento complexo do MVE.
G_∞	Módulo de cisalhamento do MVE (assíntota superior).
$[G]$	Matriz giroscópica global do sistema.
K_{eq}	Rigidez equivalente (parâmetros equivalentes generalizados).
K_m	Rigidez do mancal do modelo unidimensional.
K_{MVE}	Rigidez complexa da manta de MVE.
K_{xx}, K_{zz}	Componentes da matriz de rigidez de um mancal.

$[K]$	Matriz de rigidez global do sistema
$[\bar{K}]$	Matriz de rigidez complexa global do sistema
M_m	Massa do mancal do modelo unidimensional.
$[M]$	Matriz de massa global do sistema.
$\{q\}$	Vetor de coordenadas generalizadas.
$s(T)$	Função deslocamento na temperatura do MVE.
s	Expoente da função exponencial proposta para solução do sistema.
t	Tempo.
T	Temperatura.
T_0	Temperatura de referência do MVE.
$\{y\}$	Vetor resposta no “espaço de estado” no domínio do tempo.
$\{Y\}$	Vetor resposta no “espaço de estado” no domínio da frequência.
X, Y, Z	Direções cartesianas.

Alfabeto Grego

α	Parâmetro de ordem fracionária da equação constitutiva do MVE.
$[\alpha(\Omega)]$	Matriz de resposta em frequência (receptâncias) do sistema.
γ	Deformação angular do MVE.
ε	Deformação linear do MVE.
η	Fator de perda do MVE.
θ_1, θ_2	Parâmetros da função deslocamento para MVEs
$\{\theta\}$	Vetor coluna de autovetores a direita
$[\theta]$	Matriz de autovetores a direita
$[\theta']$	Matriz de autovetores ortonormalizados a direita
λ	Autovalores do sistema
$[\lambda]$	Matriz de autovalores do sistema
σ	Tensão a tração/compressão
τ	Tensão de cisalhamento
$\{\phi\}$	Vetor de autovetores do espaço de configurações

$\{\psi\}$	Vetor coluna de autovetores a esquerda
$[\psi]$	Matriz de autovetores a esquerda
$[\psi']$	Matriz de autovetores ortonormalizados a esquerda
Ω	Frequência.
Ω_R	Frequência reduzida do MVE.
Ω_{rpm}	Frequência de rotação.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	ESTADO DA ARTE.....	18
3	MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	22
4	DINÂMICA DE ROTORES	30
4.1	SISTEMA COM AMORTECIMENTO VISCOZO E RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	30
4.2	DIAGRAMAS DE CAMPBELL E CAMPBELL SIMPLIFICADO	39
4.3	RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO E ÓRBITA.....	42
4.4	MODOS DE VIBRAR	47
5	OS MANCAIS E OS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	49
6	VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL	62
6.1	DETERMINAÇÃO DOS PÂMETROS DOS MANCAIS SEM MVE.....	66
6.2	O ROTOR SEM MVE.....	76
6.3	ROTOR COM APLICAÇÃO DE MVE NOS MANCAIS.....	91
7	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	115
	REFERÊNCIAS.....	118
	APÊNDICE A - MODELAGEM DE ELEMENTOS DE ROTORES.....	121
	APÊNDICE B - PROPRIEDADES DE ORTOGONALIDADE.....	177

1 INTRODUÇÃO

A demanda crescente por equipamentos rotativos como turbinas, compressores, motores elétricos, geradores de energia, obriga os fabricantes a buscar soluções otimizadas em carcaças reduzidas. Geralmente essas soluções vem acompanhadas de elevadas rotações e com elas, podem ocorrer problemas de vibrações e instabilidades.

Sistemas dinâmicos que operam em elevadas rotações, na sua grande maioria, possuem rotores considerados flexíveis. Isto ocorre para máquinas cujas rotações de trabalho estão acima da primeira rotação crítica, rotações supercríticas. Portanto, nas partidas e paradas, a máquina passa necessariamente pela região de influência “críticas”, implicando no aumento da vibração radial. As grandes máquinas rotativas, como por exemplo, compressores e turbinas, possuem diversos estágios de compressão ou expansão. Entre cada estágio há elementos de selagem que garantem a performance termodinâmica das máquinas. A folga radial entre os elementos de selagem e o rotor é reduzida, da ordem de décimos de milímetro, sendo o deslocamento do rotor limitado pelas folgas internas. Cabe ao amortecimento dos mancais a tarefa de limitar o deslocamento do rotor para evitar roçamentos durante a operação dos sistemas dinâmicos. A rigidez dos mancais também tem papel importante pois é preciso ter deslocamento adequado do rotor na região dos mancais para se ter amortecimento. A introdução de amortecimento nos mancais permite ainda ampliar a região de comportamento estável das máquinas rotativas.

A maioria das máquinas que operam em rotações supercríticas utilizam mancais hidrodinâmicos. Estes mancais, desde que bem selecionados, conferem excelente rigidez e amortecimento aos sistemas dinâmicos. Contudo, os mancais hidrodinâmicos possuem componentes de amortecimento e rigidez cruzados que podem trazer instabilidades para alguns sistemas.

Há ainda a possibilidade de introduzir amortecimento adicional através de sistemas de amortecimento com filme de óleo pressurizado (*squeeze film damping*). Estes têm sido empregados para atenuação da resposta ao desbalanceamento e de esforços nos mancais de equipamentos rotativos. Especialmente em turbinas a gás

de alta rotação. Há aplicações tanto em mancais de rolamento como em mancais hidrodinâmicos, incluindo os *tilting pad* que são amplamente utilizados em grandes máquinas (CHEN, 2005) (DUTT, 2003) (SHABANEH, 2000).

As grandes máquinas que utilizam mancais hidrodinâmicos, com ou sem *squeeze film damping*, necessitam de sistemas auxiliares de óleo de lubrificação. Estes sistemas devem possuir alta confiabilidade e são compostos de tanque, bombas, permutadores, válvulas e filtros. Todos estes componentes tornam o sistema mais complexo e oneroso.

Devido às suas características dinâmicas, os materiais viscoelásticos (MVEs) possuem uma grande capacidade de dissipação de energia vibratória. Logo, podem ser empregados como uma forma de introduzir amortecimento nas partes não rotativas de sistemas dinâmicos.

Este trabalho apresenta um modelo numérico, validado por bancada experimental, capaz de prever o comportamento rotodinâmico de máquinas rotativas com MVE associado aos mancais. O modelo numérico emprega o método de elementos finitos (MEF) implementado em MATLAB. O aplicativo possui interface gráfica para facilitar a alimentação dos dados e auxiliar na apresentação dos cálculos através de gráficos. O aplicativo em MATLAB está em desenvolvimento desde 2004 através de um projeto firmado entre a Empresa WEG Equipamentos Elétricos e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Projeto FINEP 4931-06, o qual é denominado ROTORDIN. Recentemente revisado neste trabalho, recebe os novos módulos para simulação combinada de rotores e MVEs.

O desenvolvimento deste trabalho pode simplificar os projetos de rotores ampliando a faixa de estabilidade e conseqüentemente a faixa de rotação de trabalho. Aplicações que demandam o uso obrigatório de mancais hidrodinâmicos poderiam, em certas condições, serem substituídas por mancais de rolamento compostos com material viscoelástico. O uso de mancais de rolamento composto com material viscoelástico pode promover um ganho de vida útil aos mancais de rolamentos devido à redução das cargas dinâmicas sobre estes. Aplicações que demandam o uso de *squeeze film damping* também podem ser, em tese, substituídas pelos MVEs (VARNEY E GREEN, 2014).

2 ESTADO DA ARTE

A utilização de elevado amortecimento nos mancais prolonga a vida das máquinas, em especial aquelas projetadas para trabalhar com velocidades supercríticas, e aumenta a região de estabilidade desse tipo de sistema rotativo (LALANNE E FERRARIS, 1990). No entanto, o amortecimento por filme de óleo demanda um sistema auxiliar adicional de alta confiabilidade o que torna esse tipo de solução onerosa (SALDARRIAGA, 2006). Mesmo trabalhando com mancais hidrodinâmicos, o sistema pode se tornar instável, principalmente quando se trabalha a elevadas rotações, necessitando um acréscimo adicional de amortecimento (GENTA, 2005).

Materiais viscoelásticos (MVEs) são empregados com frequência no controle de vibração e ruído irradiado devido à sua elevada capacidade de dissipação de energia vibratória e armazenamento de energia potencial elástica (FERRY, 1980; ESPÍNDOLA et al., 2010; LOWRY, 2009; FAN et al., 2009; entre outros). Assim, o MVE pode ter grande aplicabilidade nos mancais de rotores. Especialmente na redução da vibração por desbalanceamento, ou excitação externa, e na ampliação da faixa de trabalho pelo aumento da região de estabilidade (DUTT 1992, 1996 e 2003). Os MVEs podem estar sob os mancais ou entre a caixa de mancais e o pedestal (FERREIRA, 2004; DUTT e TOI, 2003; TILLEMA, 2003). Dispensando qualquer tipo de sistema auxiliar, tornam-se alternativas mais simples e confiáveis. A minimização dos efeitos de vibração nos equipamentos rotativos e o isolamento de vibração para os equipamentos vizinhos, resulta no aumento da confiabilidade, diminuição de custos com manutenção e garantia de disponibilidade.

Diversos modelos são propostos para avaliar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos de forma geral. Dentre os mais conhecidos podem ser mencionados os modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt, Zenner, combinações destes, modelo por derivadas de ordem inteira e de derivadas fracionárias. Os três modelos citados inicialmente podem ser obtidos por particularizações do modelo de Derivadas de Ordem Inteira (BAVASTRI, 2008; CRUZ, 2004, entre outros). Segundo Pritz (1996 e 1998) e Bagley et al. (1996 e 1998), o modelo de derivadas fracionárias com um número reduzido de parâmetros reproduz, com precisão, as características dinâmicas dos materiais viscoelásticos mais utilizados na engenharia, em uma

ampla faixa de frequência e de temperatura. Segundo Bagley (1996), esses modelos respeitam as leis da termodinâmica para materiais com comportamento reologicamente simples. Vários autores estudaram modelos para MVEs, utilizados em diversas aplicações, podendo citar, por exemplo, aplicação em estruturas (PARK, 2001 e NAKRA,1998).

Já, o estudo de aplicação de MVE em rotores inicia-se com modelos de rotores mais simples. Dutt e Nakra (1992) avalia a estabilidade de um rotor de Jeffcott, com um disco no centro de um eixo considerado sem massa e mancais elásticos apoiados sob suportes viscoelásticos. Três modelos para os suportes são adotados: modelo simplesmente elástico, representado por uma mola, modelo de Voigt, representado por uma mola e um amortecedor em série, e modelo com quatro elementos, modelo de Voigt mais uma mola e um amortecedor viscoso, ambos em paralelo. Esse último modelo, embora simples, é considerado adequado segundo os autores para representar o material viscoelástico. A conclusão desse trabalho é que a introdução de materiais viscoelásticos no suporte aumenta consideravelmente a estabilidade dos rotores. Dutt e Nakra (1996) também avalia o ganho de estabilidade com a aplicação de materiais viscoelásticos em mancais hidrodinâmicos. O estudo também demonstra que é possível ampliar a faixa de trabalho estável. Seguindo a mesma linha de pesquisa, Panda e Dutt (1999) estuda a otimização de parâmetros dos suportes compostos com materiais viscoelásticos para minimizar a resposta ao desbalanceamento e aumentar a região de estabilidade. Nesse trabalho são abordados tanto mancais de rolamento como mancais hidrodinâmicos do tipo cilíndricos. Os trabalhos citados até aqui fazem uma série de hipóteses simplificadoras no modelo rotodinâmico dos rotores.

Shabaneh e Zu (2000) modela um rotor e disco pela teoria de viga de Timoshenko considerando sua massa e momento de inércia. Os mancais do rotor são apoiados sobre materiais viscoelásticos caracterizados pelo modelo de Kelvin-Voigt. São analisados os estados de vibração livre e forçada. Os autores enfatizam a natureza complexa do módulo de rigidez do material e seu fator de perda. Esses autores concluem que o aumento da rigidez do material viscoelástico aumenta a frequência fundamental até alcançar valores correspondentes de um mancal rígido. Contudo, o decremento logarítmico do sistema girante pode aumentar ou diminuir

em função da região de trabalho no domínio da frequência e/ou da temperatura do material viscoelástico.

Partindo para o emprego dos materiais viscoelásticos nos rotores, Dutt e Toi (2003) propõe o emprego de setores de materiais poliméricos alojados entre o pedestal do rolamento e sua capa externa. Para predizer o comportamento do MVE é utilizado um modelo de derivada de ordem inteira com 4 parâmetros para representar a rigidez dependente da frequência e da temperatura. No modelo em questão surgem as componentes cruzadas de rigidez pela inserção do polímero em setores. Avaliando a resposta ao desbalanceamento, a utilização do material viscoelástico apresenta bons resultados numéricos no controle da vibração.

Outra aplicação de materiais viscoelástico em rotores é a proposta por Lee et al. (2004). A mesma consiste em agregar uma manta de MVE em mancais do tipo Foil, mancais empregados em turbomáquinas com rotações muito elevadas. Os resultados dos testes em bancada mostram uma redução drástica da amplitude da resposta ao desbalanceamento próximo à primeira rotação crítica. O mancal além de apresentar um amortecimento mais elevado, possui maior rigidez em função da configuração adotada.

Tillema (2003) desenvolve um estudo amplo da aplicação de materiais viscoelásticos em rolamentos de motores elétricos. Com objetivo de reduzir o ruído e a transmissão de vibração, diversas configurações geométricas de anéis integrais em borracha etileno-acrílica e borracha de poliuretano bi-componente são testadas. O modelo de Maxwell generalizado é adotado para caracterizar os MVEs testados em laboratório. Uma bancada é projetada para teste dos mancais em um eixo flexível com tampas intercambiáveis, simulando a configuração de um motor elétrico típico. Além da bancada, novas tampas são usinadas para um motor elétrico de pequeno porte para receber mancais de rolamento com anéis de materiais viscoelásticos. Em virtude dos aspectos construtivos dos mancais são observados ganhos com redução de vibração em especial para frequências mais elevadas. Segundo o autor, o amortecimento se torna efetivo quando o material viscoelástico trabalha em cisalhamento. Já o isolamento de vibração se torna mais eficiente evitando alta rigidez nos mancais. Tillema (2003) comenta também a possibilidade de aplicação das borrachas em setores, como estudado por Dutt (2003), para redução da rigidez. As conclusões finais da aplicação do MVE em motores elétricos

são: bom isolamento de vibração e redução do ruído pelo aumento do amortecimento do sistema como um todo.

Em Bavastri et al. (2008), um estudo de rotores compostos com material viscoelástico na base da caixa do rolamento é realizado. Esse primeiro trabalho, usando modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros, prevê o cálculo da resposta a uma excitação de desbalanceamento e a montagem do diagrama de Campbell. Devido às características da matriz de rigidez complexa, função da frequência de excitação e da temperatura, para montar o diagrama de Campbell, dois problemas de autovalores devem ser realizados simultaneamente. Um fixando a rotação e outro interno, onde as frequências naturais são calculadas para diferentes frequências de excitação. Assim, para calcular as frequências características do rotor para cada rotação, um cálculo auxiliar de frequências naturais em função das frequências de excitação deve ser realizado. A interpolação de uma reta a 45 graus, em um gráfico frequência natural versus frequência de excitação, permite calcular as frequências características do rotor para diferentes rotações.

Em Doubrawa et al. (2010), uma aplicação de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos para o controle de vibrações flexionais em um sistema girante mostra a potencialidade deste material e a precisão do modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros para representar esses materiais.

3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

A viscoelasticidade é a capacidade que um material tem de apresentar, simultaneamente, características elásticas e viscosas ao se deformar. Segundo FERRY (1980), quando a deformação e a taxa de deformação são infinitesimais o material pode combinar propriedades de sólido e fluído ao longo do tempo. Isto ocorre quando, por exemplo, um corpo não mantém uma deformação constante ao longo do tempo sob efeito de uma tensão constante, também conhecido como fluência. Ou mesmo quando este corpo é restringido para manter uma deformação constante e a tensão necessária para manter o corpo neste estado diminui com o tempo, também conhecida como relaxação de tensões. E ainda se o corpo estiver sujeito a uma excitação harmônica e a deformação não estiver em fase com a tensão, como ocorre nos materiais elásticos, nem a 90° em relação a tensão, como ocorre em líquidos perfeitamente viscosos. Assim em cada ciclo o material dissipa parte da energia e recupera a outra. Todos esses efeitos combinados caracterizam um material viscoelástico (FERRY, 1980).

Por apresentar o referido comportamento, os primeiros modelos de MVEs são idealizados por uma combinação de mola e amortecedor viscoso. Os modelos mais elementares são conhecidos como modelo de Maxwell e Kelvin-Voigt (BAVASTRI, 2008-2 e CRUZ, 2004). Nesses modelos, por simplicidade, adota-se um campo de tensão unidimensional em um corpo de material viscoelástico. Outras configurações são propostas, mas nenhuma delas descreve bem o comportamento dos materiais em amplas faixas de frequência. Nem mesmo com um número maior de parâmetros na equação constitutiva com derivadas de ordem inteira (CATANIA e SORRENTINO, 2007). Por outro lado, com um número elevado de coeficientes na equação constitutiva com derivada de ordem inteira, é possível modelar de forma precisa o comportamento dinâmico destes materiais em uma ampla faixa de frequência e temperatura.

Trabalhos mais recentes modelam o comportamento viscoelástico linear utilizando derivadas de ordem fracionária. Nesses casos, a equação constitutiva generalizada resulta ao substituir as derivadas de ordem inteira por derivadas fracionárias (CRUZ, 2004) (PRITZ, 1996 e 1998) (BAVASTRI et. al. 2014). Na equação 3.1,

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \cdot D^{k_m} \sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \cdot D^{\alpha_n} \varepsilon(t) \quad (3.1)$$

os termos $b_m, k_m, E_0, E_n, \alpha_n$ são parâmetros do material. D^{k_m}, D^{α_n} são as derivadas de ordem fracionária. Se $0 < \alpha_n < 1$, a derivada fracionária é obtida pela equação 3.2 (PEREIRA, 2008).

$$D^{\alpha_n} [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_n)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha_n}} d\xi \quad (3.2)$$

A solução de sistemas sujeitos a excitação harmônica se torna mais simples de ser obtida, a partir da equação 3.1, no domínio da frequência. A equação 3.3 apresenta a aplicação da transformada de Fourier, TF , à derivada fracionária,

$$TF\{D^{\alpha} [f(t)]\} = (i\Omega)^{\alpha} TF[f(t)] = (i\Omega)^{\alpha} F(\Omega) . \quad (3.3)$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação constitutiva 3.1, tem-se:

$$\sigma(\Omega) + \sum_{m=1}^M b_m \cdot (i\Omega)^{k_m} \sigma(\Omega) = E_0 \cdot \varepsilon(\Omega) + \sum_{n=1}^N E_n \cdot (i\Omega)^{\alpha_n} \varepsilon(\Omega) . \quad (3.4)$$

Agrupando os termos comuns dos dois lados da igualdade na equação 3.4,

$$\sigma(\Omega) \cdot \left[1 + \sum_{m=1}^M b_m \cdot (i\Omega)^{k_m} \right] = \varepsilon(\Omega) \cdot \left[E_0 + \sum_{n=1}^N E_n \cdot (i\Omega)^{\alpha_n} \right], \quad (3.5)$$

torna-se evidente a obtenção do módulo de elasticidade complexo. O módulo é função da frequência, Ω , e nesse momento depende de $N + M$ parâmetros,

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{\left[E_0 + \sum_{n=1}^N E_n \cdot (i\Omega)^{\alpha_n} \right]}{\left[1 + \sum_{m=1}^M b_m \cdot (i\Omega)^{k_m} \right]}. \quad (3.6)$$

Comparações entre experimentos e modelos considerando somente um termo da série de derivada fracionária de cada somatório revelam boas correlações. Na equação 3.6, adotando $N = M = 1$, o resultado é um modelo de cinco parâmetros.

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{\left[E_0 + E_1 \cdot (i\Omega)^\alpha \right]}{\left[1 + b_1 \cdot (i\Omega)^k \right]}. \quad (3.7)$$

Na prática, um modelo de quatro parâmetros, onde $k = \alpha$, reproduz muito bem um MVE sem violar restrições termodinâmicas (CRUZ, 2004; PEREIRA, 2008; CATANIA e SORRENTINO, 2007). A equação 3.8 apresenta o modelo de 4 parâmetros.

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{\left[E_0 + E_1 \cdot (i\Omega)^\alpha \right]}{\left[1 + b_1 \cdot (i\Omega)^\alpha \right]} \quad (3.8)$$

Fazendo uma analogia com modelos elementares, o módulo complexo obtido nas equações 3.7 ou 3.8 seria um caso fracionário do Modelo Linear Padrão ou de Zener (CRUZ, 2004; CATANIA e SORRENTINO, 2007).

O módulo complexo de elasticidade pode ainda ser rerepresentado pela equação 3.9,

$$E_c(\Omega) = E(\Omega) + i \cdot E'(\Omega) \quad (3.9)$$

onde $E(\Omega)$ é a parte real e $E'(\Omega)$ sua parte imaginária. Que, por sua vez, permite reescrever o módulo complexo como

$$E_c(\Omega) = E(\Omega) \cdot (1 + i \cdot \eta(\Omega)). \quad (3.10)$$

Na equação 3.10, $\eta(\Omega)$ é a razão entre a parte imaginária e a parte real do módulo complexo e é conhecido como fator de perda do material.

De maneira análoga, o módulo complexo de cisalhamento pode ser escrito através das equações,

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{[G_0 + G_1 \cdot (i\Omega)^\alpha]}{[1 + b_1 \cdot (i\Omega)^\alpha]}, \quad (3.11)$$

$$G_c(\Omega) = G(\Omega) \cdot (1 + i \cdot \eta(\Omega)). \quad (3.12)$$

Os módulos complexos são também funções da temperatura. Assim, as equações 3.8 e 3.11 podem ser reescritas para apresentar parâmetros dependentes da temperatura. Nas equações 3.13 e 3.14,

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{[E_0 + E_\infty \cdot (ib\Omega)^\alpha]}{[1 + (ib\Omega)^\alpha]}, \quad (3.13)$$

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{[G_0 + G_\infty \cdot (ib\Omega)^\alpha]}{[1 + (ib\Omega)^\alpha]}, \quad (3.14)$$

$b = b_1^{1/\alpha}$, $E_\infty = E_1/b_1$ e $G_\infty = G_1/b_1$. Deste modo, os novos parâmetros são E_0, E_∞, b, α ou G_0, G_∞, b, α . O parâmetro b tem dimensão de tempo e é conhecido como tempo de relaxação do material. Seu valor é corrigido pela temperatura de acordo com a equação

$$b = b_0 \cdot s(T), \quad (3.15)$$

na qual b_0 é o parâmetro b na temperatura de referência absoluta T_0 . A função $s(T)$ recebe o nome de função deslocamento e é definida pela equação 3.16 (Lopes, 1998) (FERRY, 1980). Observa-se que $s(T)$ é também definida como a relação entre a frequência reduzida, (Ω_R) , e a frequência de excitação, (Ω) (PEREIRA, 2008),

$$\log_{10}(s(T)) = \log_{10}\left(\frac{\Omega_R}{\Omega}\right) = \frac{-\theta_1 \cdot (T - T_0)}{\theta_2 + (T - T_0)}. \quad (3.16)$$

A equação 3.13 pode ainda ser reescrita da seguinte forma,

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{[E_0 + E_\infty \cdot b_1 \cdot (i\Omega)^\alpha]}{[1 + b_1 \cdot (i\Omega)^\alpha]} \quad (3.17)$$

Substituindo as equações 3.15 e 3.16 na equação 3.13, surge a equação

$$E_c(\Omega_R) = \frac{[E_0 + E_\infty \cdot b_1 \cdot \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^\alpha \cdot (i\Omega_R)^\alpha]}{[1 + b_1 \cdot \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^\alpha \cdot (i\Omega_R)^\alpha]} \quad (3.18)$$

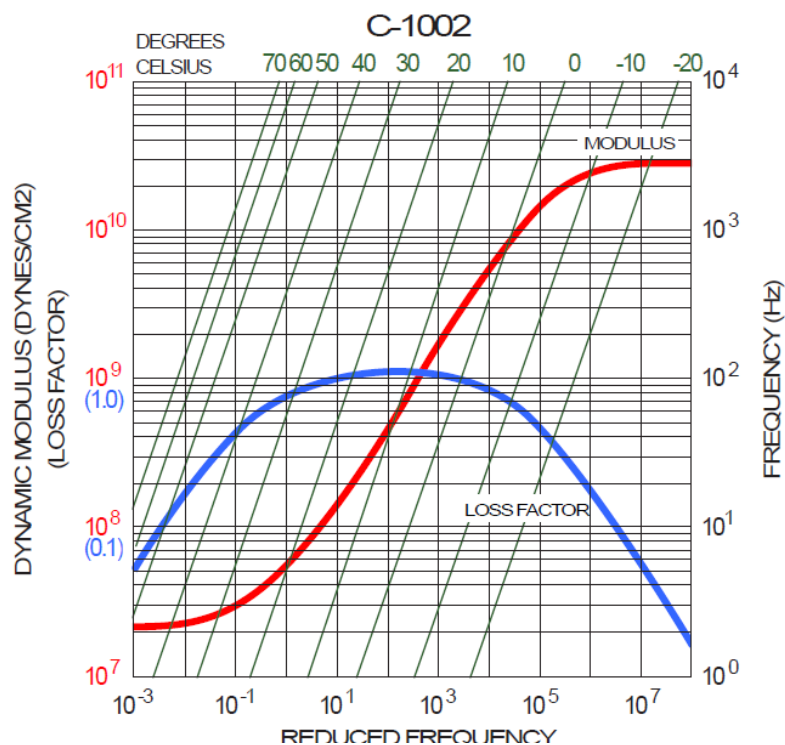
que é função da frequência reduzida. Fazendo uma substituição de variáveis, simplifica-se a equação 3.18 e tem-se,

$$E_c(\Omega_R) = \frac{[E_0 + E_\infty \cdot \varphi_0 \cdot (i\Omega_R)^\alpha]}{[1 + \varphi_0 \cdot (i\Omega_R)^\alpha]} \quad (3.19)$$

Em 3.19, o módulo complexo do MVE é função da frequência reduzida e consequentemente da temperatura.

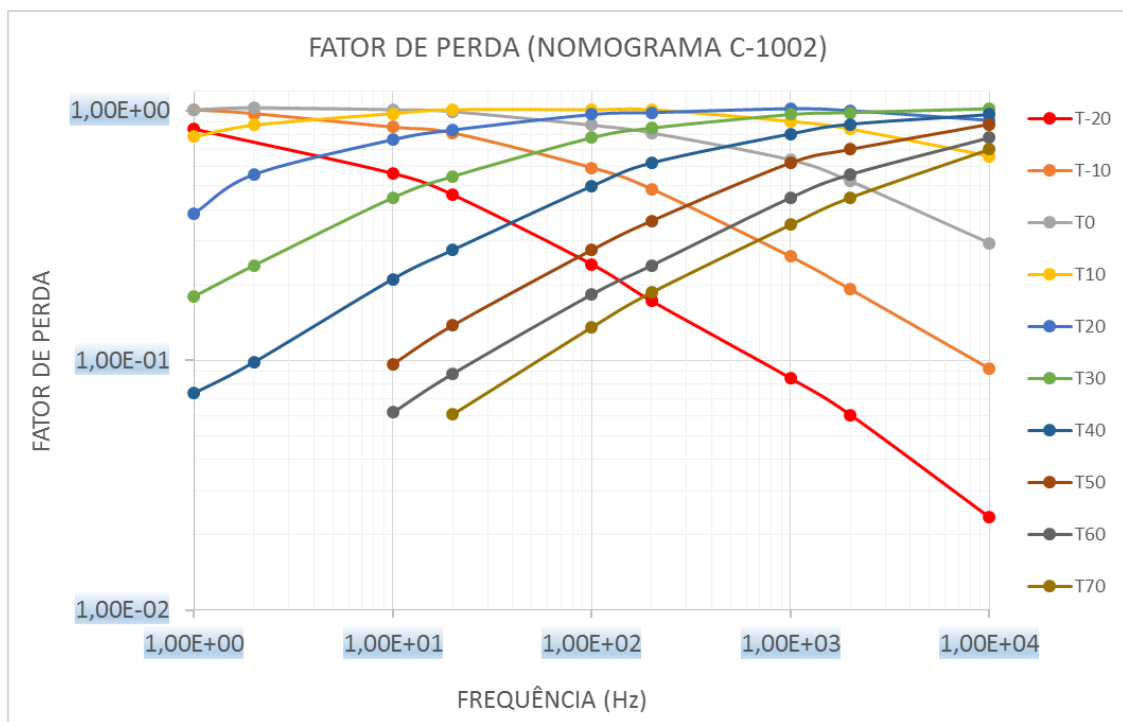
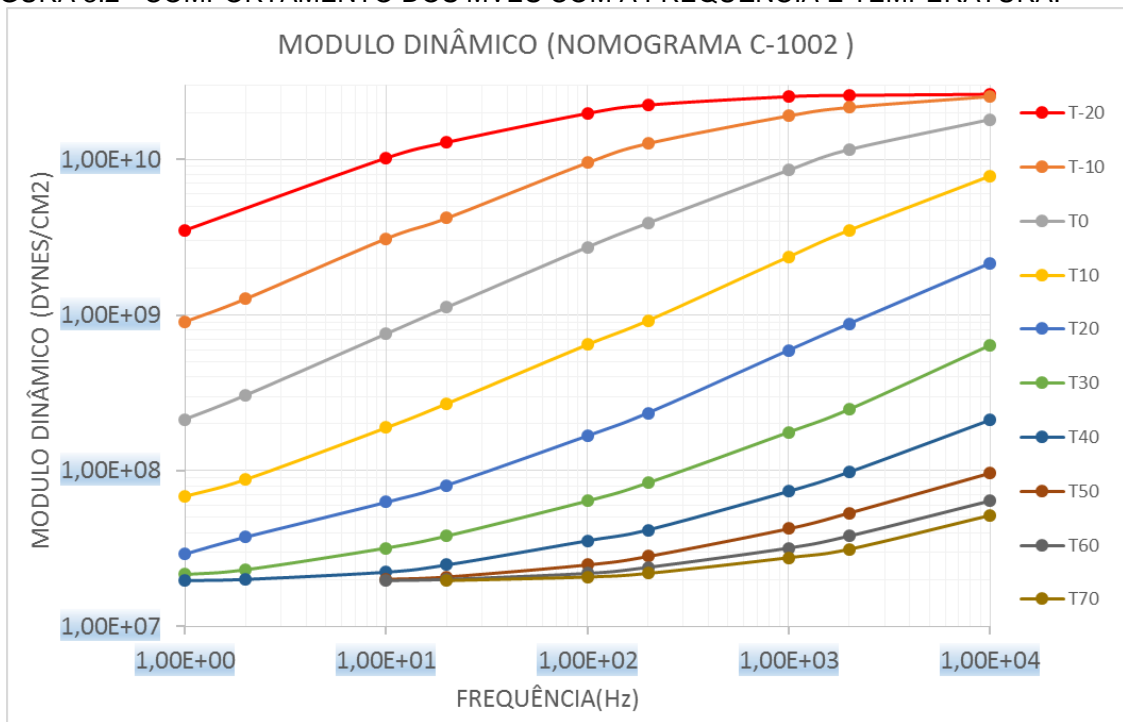
Os módulos de armazenamento bem como o fator de perda normalmente são fornecidos em gráficos conhecidos como Nomogramas. A FIGURA 3.1 ilustra o referido gráfico. A leitura de um nomograma é feita a partir da frequência. Traça-se uma linha horizontal a partir da frequência até interceptar a isoterma desejada. A partir da isoterma uma linha vertical é traçada até encontrar as curvas do módulo dinâmico de elasticidade e do fator de perda. Os valores para o módulo e o fator de perda são obtidos da escala a esquerda estendendo linhas horizontais. A frequência na qual o fator de perda é máximo é chamada de frequência de transição.

FIGURA 3.1 - NOMOGRAMA C-1002 (ISODAMP® C-1000 SERIES ISOLATION MATERIALS, TECHNICAL DATA SHEET 19, AEARO E.A.R SPECIALTY COMPOSITES)



Repetindo as operações de leitura para cada temperatura do nomograma da FIGURA 3.1 foram obtidos os gráficos da FIGURA 3.2. Esta figura exemplifica o comportamento dos MVEs com a variação da frequência ou da temperatura. Para qualquer temperatura o aumento da frequência provoca o aumento do módulo. Já para uma frequência constante, o aumento da temperatura gera uma redução do módulo. Comportamento de materiais termoreologicamente simples. Já o fator de perda muda de comportamento em função da temperatura de transição. Tanto na FIGURA 3.1 quanto na FIGURA 3.2, fica evidente a transição aproximadamente em 10°C e 100Hz . É importante ressaltar que grandes deformações alteram significativamente o comportamento dos MVEs (LOWRY, 2009 e PRITZ, 1996 e 1998).

FIGURA 3.2 - COMPORTAMENTO DOS MVES COM A FREQUÊNCIA E TEMPERATURA.



4 DINÂMICA DE ROTORES

O comportamento dinâmico dos rotores é normalmente traduzido pelo diagrama de Campbell, modos de vibrar, resposta no domínio do tempo ou no domínio da frequência quando o sistema está exposto a distintas excitações e órbita. A metodologia empregada para obtenção destes elementos é abordada nesta seção. Ewins (2000) e GENTA (2005), entre outros, demonstram que nos sistemas com amortecimento viscoso, deve-se empregar o “espaço de estado”.

Neste trabalho considera-se apenas o comportamento lateral dos rotores. Pela natureza do problema, não é considerada adição de rigidez por efeito centrífugo ou qualquer modelo de amortecimento associado ao eixo ou efeitos de circulação. Assim, um rotor com amortecimento viscoso pode ser modelado por um sistema de equações escrito na forma matricial como

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + \Omega_{rpm} \cdot [G_1])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}. \quad (4.1)$$

O Apêndice A apresenta a base para obtenção das matrizes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica para um rotor. Neste mesmo apêndice há um procedimento detalhado de modelagem dos elementos de rotores e do emprego do método de elementos finitos para representar de problemas desta natureza.

4.1 SISTEMA COM AMORTECIMENTO VISCOZO E RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Num sistema com amortecimento viscoso e em vibração livre, a equação de movimento 4.1 é

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + \Omega_{rpm} \cdot [G_1])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}. \quad (4.1)$$

A matriz $[G_1]$ é obtida a partir da matriz giroscópica $[G]$, colocando Ω_{rpm} em evidência. Adotando a solução harmônica, $\{q(t)\} = \{\phi\}e^{st}$, é possível reescrever 4.1.1 a partir dos passos ilustrados pelas equações 4.1.2 à 4.1.4:

$$s^2[M]\{\phi\}e^{st} + s([C] + \Omega_{rpm} \cdot [G_1])\{\phi\}e^{st} + [K]\{\phi\}e^{st} = \{0\}; \quad (4.2)$$

$$\{s^2[M]\{\phi\} + s([C] + \Omega_{rpm} \cdot [G_1])\{\phi\} + [K]\{\phi\}\}e^{st} = \{0\}; \quad (4.3)$$

$$[s^2[M] + s([C] + \Omega_{rpm} \cdot [G_1]) + [K]]\{\phi\} = \{0\}. \quad (4.4)$$

Para obter soluções não triviais de $\{\phi\}$, a matriz que precede esse vetor deve ser singular. Assim, o seu determinante deve ser nulo. Isto leva a um polinômio de ordem $2n$ em s com $2n$ raízes. Para determinar as características dinâmicas do sistema utiliza-se a representação em “espaço de estado”. Essa representação permite reescrever um conjunto de n equações diferenciais de ordem 2 num conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem. O vetor “espaço de estado” $\{y(t)\}$ é um vetor com dimensão $2n$ e função das coordenadas generalizadas $\{q(t)\}$ e a derivadas no tempo (GENTA, 2005) (FERREIRA, 2004). As equações 4.1.5 e 4.1.6 ilustram como obter os vetores no “espaço de estado” das coordenadas generalizadas,

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{q(t)\} \\ \{\dot{q}(t)\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}, \quad (4.5)$$

$$\{\dot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}(t)\} \\ \{\ddot{q}(t)\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} . \quad (4.6)$$

Assim, é possível reescrever o sistema em 4.1 da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [C + \Omega_{rpm} \cdot G_1] & | & [M] \\ - & | & - \\ [M] & | & [0] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{\dot{y}(t)\}_{2n \times 1} + \begin{bmatrix} [K] & | & [0] \\ - & | & - \\ [0] & | & [-M] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{y(t)\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ - \\ \{0\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} . \quad (4.7)$$

Nomeando as matrizes do lado esquerdo da igualdade na equação 4.1.4 de $[A]$ e $[B]$, e atribuindo ao vetor do lado direito da igualdade o nome $\{F(t)\}$, simplifica-se a equação 4.1.7,

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = \{F(t)\} . \quad (4.8)$$

Torna-se evidente, portanto, que a matriz $[A]$ é função da rotação. A matriz $[B]$ somente será função da rotação se as propriedades dos mancais também forem, por exemplo, para o caso de mancais hidrodinâmicos. Eliminando a excitação na equação 4.1.8, o sistema sob vibração livre é representado por

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = \{0\} . \quad (4.9)$$

Adotando uma solução harmônica, $\{y(t)\} = \{\theta\}e^{st}$ em 4.1.9, é possível chegar ao problema clássico de autovalores e autovetores. Os passos para tal estão detalhados nas equações 4.1.10 à 4.1.14.

$$s[A]\{\theta\}e^{st} + [B]\{\theta\}e^{st} = \{0\}, \quad (4.10)$$

$$\{s[A]\{\theta\} + [B]\{\theta\}\}e^{st} = \{0\}, \quad (4.11)$$

$$[s[A] + [B]]\{\theta\} = \{0\}, \quad (4.12)$$

$$[B]\{\theta\} = -s[A]\{\theta\}. \quad (4.13)$$

Substituindo $-s$ por λ na equação, 4.1.13, obtém-se o problema generalizado de autovalores e autovetores,

$$[B]\{\theta\} = \lambda[A]\{\theta\} \quad (4.14)$$

Pelo fato da $[A]$ ser dependente da rotação, o problema também o será. É importante ainda observar que

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{q(t)\} \\ \{\dot{q}(t)\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \{\theta\}e^{st}, \quad (4.15)$$

por conseguinte,

$$\{\theta\}e^{st} = \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ s\{\phi\} \end{Bmatrix} e^{st}. \quad (4.16)$$

Pelo fato de $[A]$ ser uma matriz não simétrica, o problema de autovalores é não adjunto. Adicionando o problema adjunto,

$$[B]^T \{\psi\} = \lambda [A]^T \{\psi\}, \quad (4.17)$$

é possível obter a matriz de autovetores a direita $[\theta]$ e a esquerda $[\psi]$ (FERREIRA, 2004).

O objetivo de se determinar os autovetores a esquerda e a direita é realizar uma transformação de coordenadas, do “espaço de estado” para o espaço modal do “espaço de estado”. No espaço modal, o sistema de equações está desacoplado. Para isso, admite-se a seguinte transformação conhecida como teorema da expansão,

$$\{y(t)\} = [\theta]\{p(t)\}. \quad (4.18)$$

Em seguida, substituindo 4.1.18 em 4.1.8,

$$[A][\theta]\{\dot{p}(t)\} + [B][\theta]\{p(t)\} = \{F(t)\}, \quad (4.19)$$

e pré-multiplicando 4.1.19 pelo autovalor a esquerda transposto $[\psi]^T$,

$$[\psi]^T [A][\theta]\{\dot{p}(t)\} + [\psi]^T [B][\theta]\{p(t)\} = [\psi]^T \{F(t)\}, \quad (4.20)$$

tem-se a equação 4.1.20 que representa a dinâmica do sistema no espaço modal do “espaço de estado”. Em 4.1.20, o sistema de equações está desacoplado. (FERREIRA, 2004).

Pela propriedade de ortogonalidade (EWINS, 1984),

$$[\psi]^T [A][\theta] = [a] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n2n} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e

$$[\psi]^T [B][\theta] = [b] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{2n2n} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

As equações 4.1.21 e 4.1.22 apresentam o aspecto das matrizes resultantes das multiplicações pelos autovetores. Tratam-se de matrizes diagonais. É possível ainda ortonormalizar os autovetores. A ortonormalização se dá pela divisão de cada autovetor pelo seu respectivo elemento da matriz diagonalizada $[a]$, tal como

$$\{\theta'\}_i = \{\theta\}_i \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \right) \quad (4.23)$$

e

$$\{\psi'\}_i = \{\psi\}_i \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \right). \quad (4.24)$$

Retomando as operações de pré e pós multiplicação das matrizes $[A]$ e $[B]$ pela matriz de autovetores ortonormalizados a esquerda transposta e pela matriz de autovetores ortonormalizados a direita como visto na equação 4.1.21 e 4.1.22, tem-se:

$$[\psi']^T [A] [\theta'] = [I] \quad (4.25)$$

e

$$[\psi']^T [B] [\theta'] = [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{2n2n} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

As propriedades de ortogonalidade que permitem chegar as equações 4.1.21 e 4.1.22, por consequência também em 4.1.25 e 4.1.26, são apresentadas no apêndice B. Vale ressaltar que os autovalores ordenados surgem aos pares, complexo e complexo conjugado, como pode ser observado na equação 4.1.27.

$$\begin{aligned} \lambda_k &= R_k + I_k i \\ \lambda_k^* &= R_k - I_k i \end{aligned} \quad (4.27)$$

Partindo da equação 4.1.19 e considerando as matrizes de autovetores ortonormalizadas,

$$[\psi']^T [A] [\theta'] \{\dot{p}(t)\} + [\psi']^T [B] [\theta'] \{p(t)\} = [\psi']^T \{F(t)\}, \quad (4.28)$$

chega-se ao sistema de equações desacoplado no espaço modal

$$[I]\{\dot{p}(t)\} + [\lambda]\{p(t)\} = [\psi']^T \{F(t)\}. \quad (4.29)$$

Para que se possa obter a resposta do sistema no domínio da frequência para uma excitação conhecida, aplica-se a transformada de Fourier à equação 4.1.29,

$$[i \cdot \Omega \cdot [I] + [\lambda]]\{P(\Omega)\} = [\psi']^T \{F(\Omega)\}. \quad (4.30)$$

Pré-multiplicando a equação 4.1.30 pela inversa $[i \cdot \Omega \cdot [I] + [\lambda]]^{-1}$, obtém-se,

$$\{P(\Omega)\} = [i \cdot \Omega \cdot [I] + [\lambda]]^{-1} [\psi']^T \{F(\Omega)\}. \quad (4.31)$$

A aplicação da transformada de Fourier à equação 4.1.18,

$$TF(\{y(t)\}) = TF([\theta']\{p(t)\}) = [\theta']\{P(\Omega)\}, \quad (4.32)$$

em conjunto com a equação 4.1.31, o vetor de resposta no domínio da frequência pode ser escrito por

$$\{Y(\Omega)\} = [\theta'] [i \cdot \Omega \cdot [I] + [\lambda]]^{-1} [\psi']^T \{F(\Omega)\}. \quad (4.33)$$

Nomeando, $[\alpha'(\Omega)] = [i \cdot \Omega \cdot [I] + [\lambda]]^{-1}$ e $[\alpha(\Omega)] = [\theta' [\alpha'(\Omega)] [\psi']^T]$, a equação 4.1.33 é simplificada tomando a forma:

$$\{Y(\Omega)\} = [\alpha(\Omega)]\{F(\Omega)\}. \quad (4.34)$$

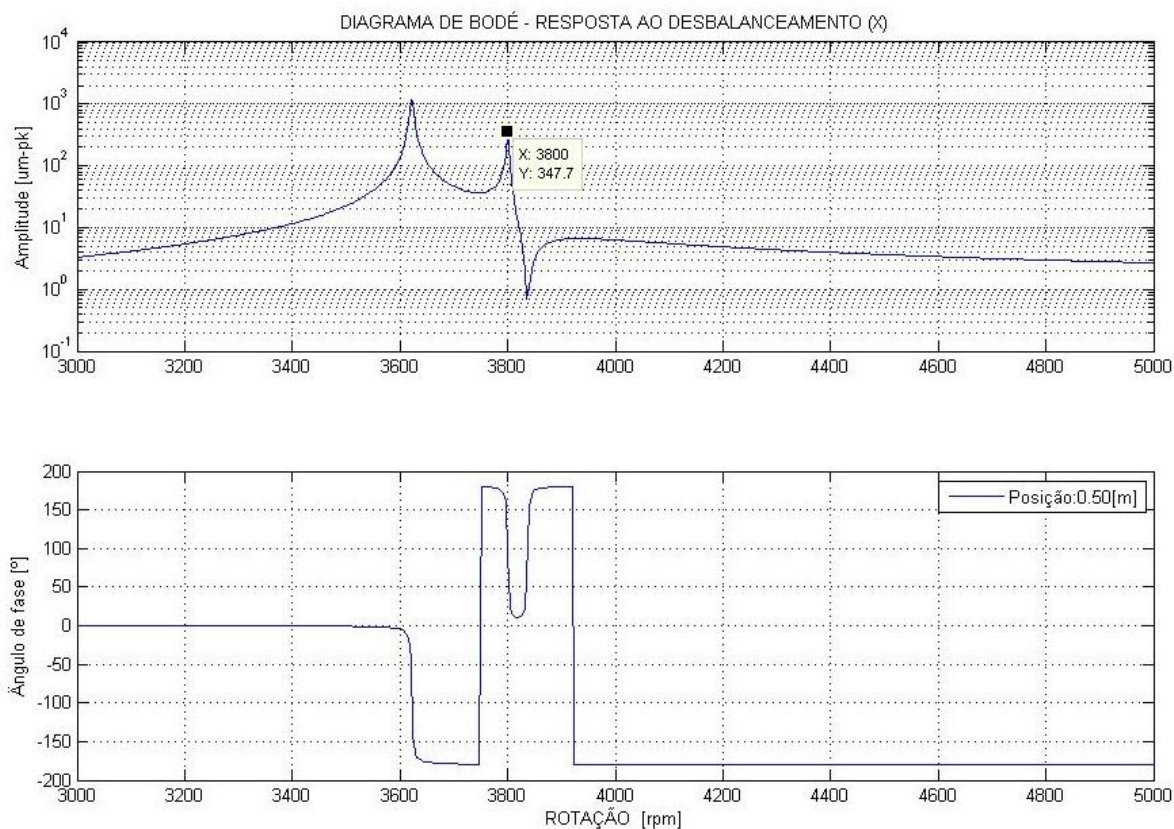
Em 4.1.34, $[\alpha(\Omega)]$ é a matriz de receptâncias, complexa e função da frequência Ω . A equação 4.1.34 também pode ser escrita em notação indicial,

$$Y(\Omega)_l = \theta'_{li} \alpha'_{ij} \Psi'_{kj} F(\Omega)_k. \quad (4.35)$$

Pelo fato da matriz $[\alpha'(\Omega)]$ ser uma matriz diagonal, observe que antes da inversão a matriz que a deu origem também o é, a notação indicial traz benefícios imediatos à programação numérica. Pois, $\alpha'_{ij} \neq 0$ somente quando $i = j$.

A resposta do sistema no domínio da frequência, $Y(\Omega)$, é complexa. Normalmente os dados de resposta, em especial os de resposta ao desbalanceamento no domínio da frequência, são apresentados em gráficos do módulo de $Y(\Omega)$ *versus* a rotação, para os primeiros n valores, também nomeado de $Q(\Omega)$. A FIGURA 4.1 mostra um exemplo de resposta típica ao desbalanceamento no domínio da frequência.

FIGURA 4.1 - EXEMPLO DE RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.



4.2 DIAGRAMAS DE CAMPBELL E CAMPBELL SIMPLIFICADO

Na seção anterior foi mostrado como obter os autovalores de um sistema com amortecimento viscoso. Viu-se também que a matriz de autovalores, uma matriz diagonal, possui $2n$ autovalores. Em função das características das matrizes $[A]$ e $[B]$, os autovalores λ_{ii} são complexos e vem aos pares, complexo e complexo conjugado. As frequências naturais, bem como as rotações críticas, de um rotor são ordenadas no diagrama de Campbell. Pelo fato do efeito giroscópico ser função da rotação da máquina e eventualmente da rigidez e do amortecimento, no caso de mancais hidrodinâmicos, os autovalores são calculados para cada rotação Ω_{rpm} .

O QUADRO 4.1 a seguir e a ilustração da FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DOS PASSOS CONSTRUTIVOS DO DIAGRAMA DE CAMPBELL. resumem os principais passos realizados na obtenção do diagrama de Campbell.

QUADRO 4.1 - RESUMO DOS PASSOS PARA DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS.

Loop $\Omega_{RPM} = \Omega_{RPM 1} \dots \Omega_{RPM M}$, onde M é o número de passos de rotação

Calcular propriedades dos mancais e montar matrizes $[M]$, $[K(\Omega_{RPM})]$, $[C(\Omega_{RPM})]$ e $[G(\Omega_{RPM})]$

Montar matrizes $[A(\Omega_{RPM})]$ e $[B(\Omega_{RPM})]$

Calcular autovalores λ . Obtêm-se 2N autovalores, aos pares complexo e complexo conjugado.

Calcular as N frequências naturais, Ω , ver equação B.19 no apêndice B. N também é o número de graus de liberdade do modelo.

Ordenar e armazenar as frequências naturais Ω nas colunas de uma matriz para cada passo de rotação.

Fim do loop $\Omega_{RPM} = \Omega_{RPM 1} \dots \Omega_{RPM M}$.

Matriz de frequências naturais, N linhas (N° de graus de liberdade) versus M colunas (N° de passos de rotação).

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{(M-1)(M-1)} & \Omega_{1M} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \dots & \Omega_{(N-1)(M-1)} & \Omega_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_{(N-1)1} & \Omega_{(N-1)2} & \dots & \Omega_{(N-1)(M-1)} & \Omega_{(N-1)M} \\ \Omega_{N1} & \Omega_{N2} & \dots & \Omega_{N(M-1)} & \Omega_{NM} \end{bmatrix}$$

As frequências naturais são obtidas a partir da equação B.19, do apêndice B. As mesmas são ordenadas e armazenadas nas colunas da matriz de frequências naturais. Cada linha da matriz representa um conjunto de ordenadas, pontos circulares na FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DOS PASSOS CONSTRUTIVOS DO DIAGRAMA DE CAMPBELL., para as abscissas do vetor de rotações. A união destes pontos, para uma mesma linha da matriz, define um modo de vibrar no diagrama de Campbell, linha contínua da figura. O sistema possui N modos de vibrar, uma vez que N também é o número de graus de liberdade do modelo.

O desbalanceamento é uma excitação síncrona à rotação de uma máquina. Traçando uma linha a 45° do eixo das abscissas, é possível obter as N rotações críticas do rotor. Os pontos de cruzamento entre a linha a 45°, linha tracejada na FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DOS PASSOS CONSTRUTIVOS DO DIAGRAMA

DE CAMPBELL., e as linhas contínuas são as rotações críticas, pontos estrelados da figura.

A FIGURA 4.2 apresenta um exemplo de diagrama de Campbell calculado através do ROTORDIN. A linha azul que corta o diagrama a 45° é conhecido como Diagrama de Campbell simplificado.

FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DOS PASSOS CONSTRUTIVOS DO DIAGRAMA DE CAMPBELL.

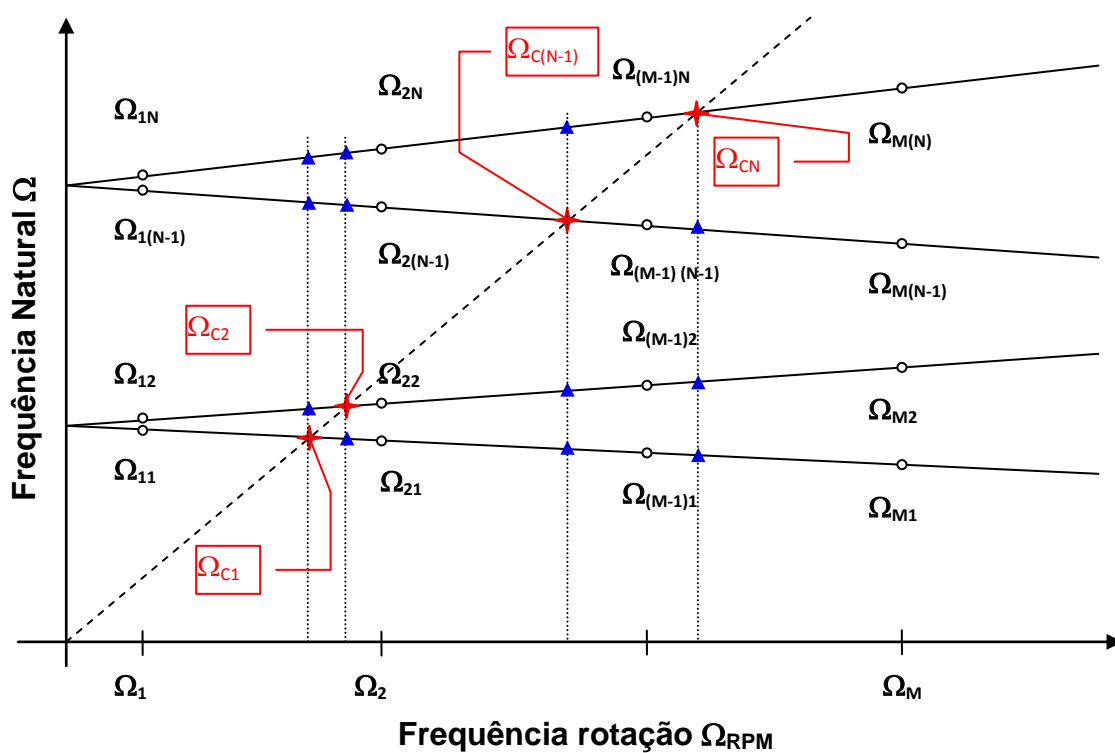
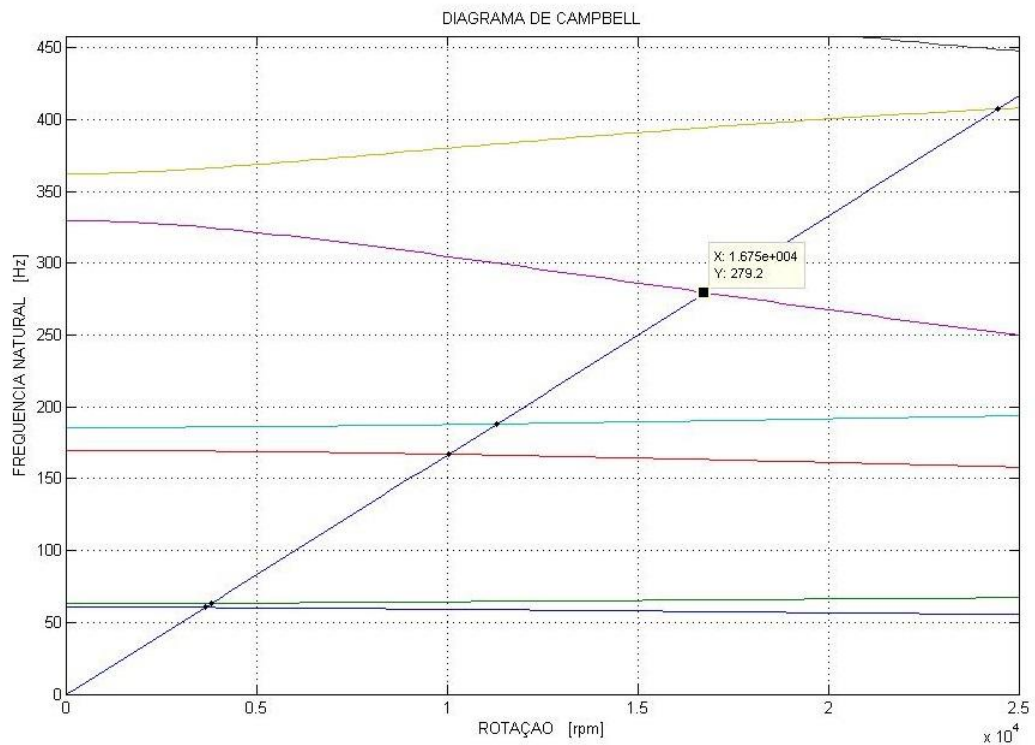


FIGURA 4.3 - EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE CAMPBELL CALCULADO PELO ROTORDIN.



4.3 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO E ÓRBITA

Sistemas lineares excitados por funções harmônicas possuem respostas também harmônicas. Isto permite escrever a resposta harmônica do i -ésimo elemento do vetor de coordenadas generalizadas como uma função de seno e cosseno,

$$q_i(t) = C_1(\Omega) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + C_2(\Omega) \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t) \quad (4.3.1)$$

As funções trigonométricas na equação 4.3.1 podem ser substituídas por exponenciais complexas,

$$q_i(t) = C_1(\Omega) \cdot \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} + C_2(\Omega) \cdot \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2 \cdot i} \quad (4.3.2)$$

Reagrupando os termos comuns em 4.3.2, a resposta no domínio do tempo se torna,

$$q_i(t) = \left(\frac{C_1(\Omega)}{2} - \frac{C_2(\Omega) \cdot i}{2} \right) \cdot e^{i\Omega t} + \left(\frac{C_1(\Omega)}{2} + \frac{C_2(\Omega) \cdot i}{2} \right) \cdot e^{-i\Omega t}. \quad (4.3.3)$$

A equação 4.3.3 permite escrever um vetor deslocamento, no domínio do tempo, de um rotor. Neste caso, as funções complexas em $C_1(\Omega)$ e $C_2(\Omega)$ são a resposta complexa e complexa conjugada. O vetor de coordenadas generalizadas escrito de forma análoga a equação 4.3.3 é

$$\{q(t)\} = \{Q(\Omega)\} \cdot e^{i\Omega t} + \{Q^*(\Omega)\} \cdot e^{-i\Omega t}, \quad (4.3.4)$$

onde $\{Q^*(\Omega)\}$ é o vetor complexo conjugado de $\{Q(\Omega)\}$. Portanto, calculada a resposta no domínio da frequência por 4.1.35, obtém-se a resposta no domínio do tempo a partir da equação 4.3.4.

A resposta $q_i(t)$ da equação 4.3.1 também pode ser representada por uma função trigonométrica e um ângulo de fase,

$$q_i(t) = R(\Omega) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi(\Omega)). \quad (4.3.5)$$

Desenvolvendo o termo em cosseno,

$$q_i(t) = (R(\Omega) \cdot \cos(\varphi(\Omega))) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + (-R(\Omega) \cdot \text{sen}(\varphi(\Omega))) \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t) \quad (4.3.6)$$

e comparando a equação 4.3.6 à equação 4.3.1, é imediata a observação:

$$C_1(\Omega) = R(\Omega) \cdot \cos(\varphi(\Omega)) \quad (4.3.7)$$

$$C_2(\Omega) = -R(\Omega) \cdot \text{sen}(\varphi(\Omega)).$$

Para obter a relação entre $C_1(\Omega)$, $C_2(\Omega)$ e $R(\Omega)$ basta realizar as operações,

$$C_1(\Omega)^2 + C_2(\Omega)^2 = R(\Omega)^2 \cdot \cos(\varphi(\Omega))^2 + R(\Omega)^2 \cdot \text{sen}(\varphi(\Omega))^2 = R(\Omega)^2 \quad (4.3.8)$$

e

$$R(\Omega) = \sqrt{C_1(\Omega)^2 + C_2(\Omega)^2}. \quad (4.3.9)$$

Por fim, a relação entre $Q(\Omega)$ e $R(\Omega)$ é facilmente obtida extraindo o módulo de $Q(\Omega)$:

$$Q(\Omega) = \left(\frac{C_1(\Omega)}{2} - \frac{C_2(\Omega) \cdot i}{2} \right), \quad (4.3.10)$$

$$|Q(\Omega)| = \sqrt{\frac{C_1(\Omega)^2}{4} + \frac{C_2(\Omega)^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{C_1(\Omega)^2 + C_2(\Omega)^2} = \frac{1}{2} R(\Omega). \quad (4.3.11)$$

Ou seja, o módulo da resposta complexa no domínio da frequência equivale à metade do valor de pico da correspondente função temporal.

Quando as respostas no domínio do tempo são colocadas num gráfico, para duas direções ortogonais na seção transversal do eixo, obtém-se uma figura conhecida como órbita. A órbita normalmente reflete bem o comportamento anisotrópico do conjunto rotativo. Um comportamento anisotrópico provoca órbitas

elípticas ou achatadas. Um conjunto rotativo totalmente isotrópico revela órbitas circulares. As órbitas descrevem um caminho de precessão do eixo girante. Estas também são ferramentas de diagnóstico de máquinas rotativas que permitem inferir qualitativamente o *preload* em mancais hidrodinâmicos. A FIGURA 4.4 apresenta um gráfico com diversas órbitas de resposta ao desbalanceamento em diversas rotações. Outra característica importante também obtida das órbitas é o sentido de precessão. Se a precessão ocorre no mesmo sentido de rotação do eixo diz-se movimento em *Forward Whirl (FW)*. Caso contrário, diz-se *Backward Whirl*. O vetor da órbita é formado pelos deslocamentos em X e em Y . No instante t_n o vetor é:

$$\vec{O}(t) = u_x(t_n) \cdot \vec{X} + u_y(t_n) \cdot \vec{Y} \quad (4.3.12)$$

Para o instante ligeiramente anterior a t_n , t_{n-1} , o vetor pode ser escrito por

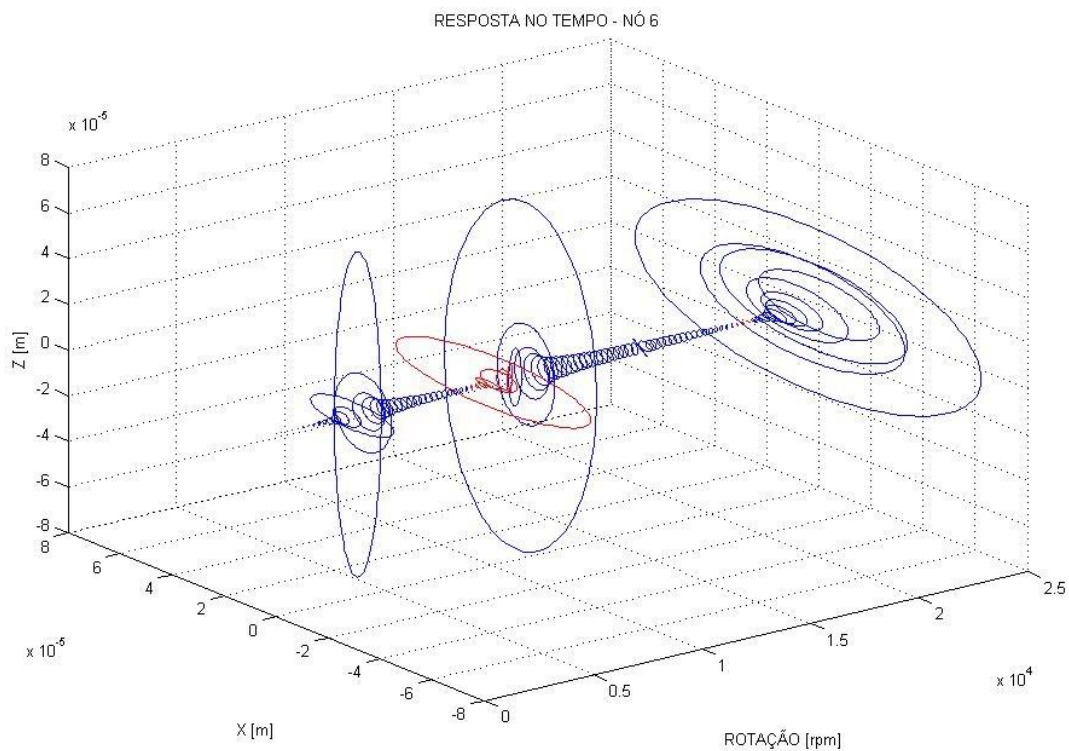
$$\vec{O}(t_{n-1}) = u_x(t_{n-1}) \cdot \vec{X} + u_y(t_{n-1}) \cdot \vec{Y} \quad (4.3.13)$$

Logo, o produto vetorial de dois vetores sucessivos da órbita, equações 4.3.12 e 4.3.13, resulta num terceiro vetor simultaneamente ortogonal a $\vec{O}(t_n)$ e $\vec{O}(t_{n-1})$. Este vetor terá a mesma direção da rotação da máquina, mas não necessariamente o mesmo sentido. A equação 4.3.14 ilustra o produto vetorial entre $\vec{O}(t)$ e $\vec{O}(t-1)$.

$$\vec{S} = \vec{O}(t-1) \times \vec{O}(t) = \begin{vmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ u_x(t-1) & u_y(t-1) & 0 \\ u_x(t) & u_y(t) & 0 \end{vmatrix} = (u_x(t-1) \cdot u_y(t) - u_x(t) \cdot u_y(t-1)) \vec{Z} \quad (4.3.14)$$

Se \vec{s} for positivo indica FW, caso seja negativo indica BW. Aqui deve-se ter atenção ao definir o sentido positivo de giro do rotor. Este deve coincidir com o sentido do eixo que corta longitudinalmente o rotor aplicada a “regra da mão direita”. Na figura 4-4, as orbitas em precessão BW são visualizadas em vermelho.

FIGURA 4.4 - ÓRBITAS DE RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO PARA DIFERENTES ROTAÇÕES DE UM ROTOR ASSIMÉTRICO



4.4 MODOS DE VIBRAR

No sistema com amortecimento viscoso é empregada a configuração no “espaço de estado”. Fica evidente, que a resposta à excitação tem contribuição de $2n$ modos de vibrar. A resposta é, portanto, um somatório da contribuição de cada modo.

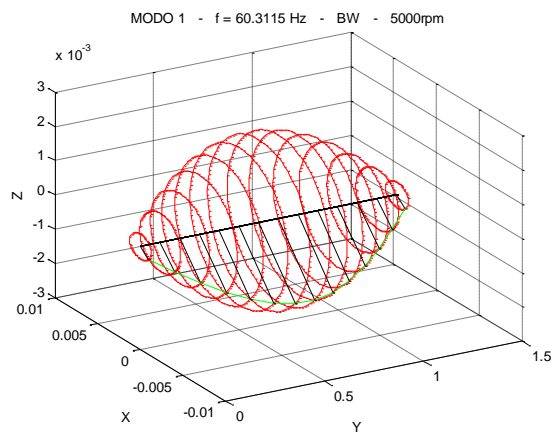
Mas para um sistema com n graus de liberdade, excitado pela i -ésima frequência natural resultante de λ_i e λ_i^* , a resposta aproximada pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{q(t)\} = \{\phi\}_i e^{-\lambda_i t} + \{\phi^*\}_i e^{-\lambda_i^* t} \quad (4.4.1)$$

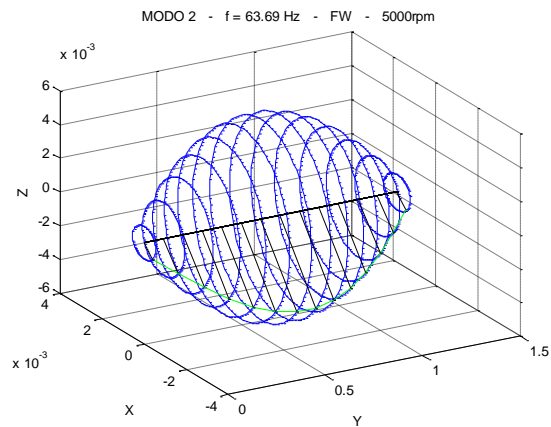
Em 4.4.1, $\{\phi\}_i$ é o i -ésimo autovetor do autovalor λ_i . Assim, a contribuição exclusiva da i -ésima frequência natural revela na resposta o modo de vibrar do rotor associado a esta frequência.

A FIGURA 4.5 apresenta os dois primeiros modos laterais de vibrar de um rotor assimétrico.

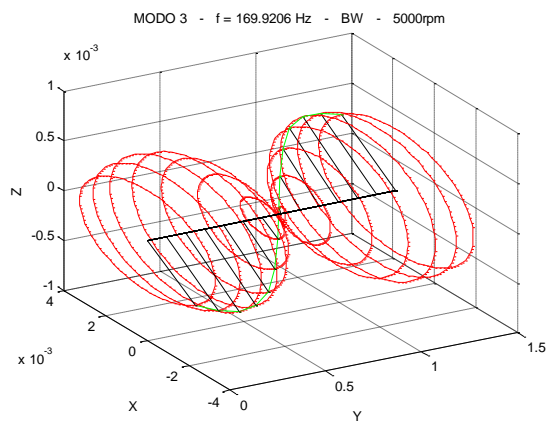
FIGURA 4.5 - MODOS DE VIBRAR DE UM ROTOR ASSIMÉTRICO. (A) E (B) PRIMEIRO MODO EM *BACKWARD* E *FORWARD* RESPECTIVAMENTE. (C) E (D) SEGUNDO MODO EM *BACKWARD* E *FORWARD* RESPECTIVAMENTE.



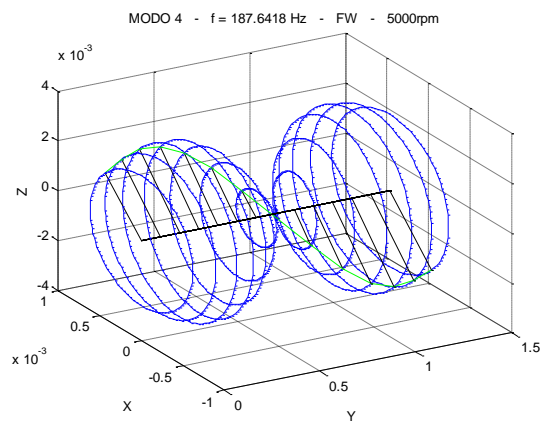
(a)



(b)



(c)

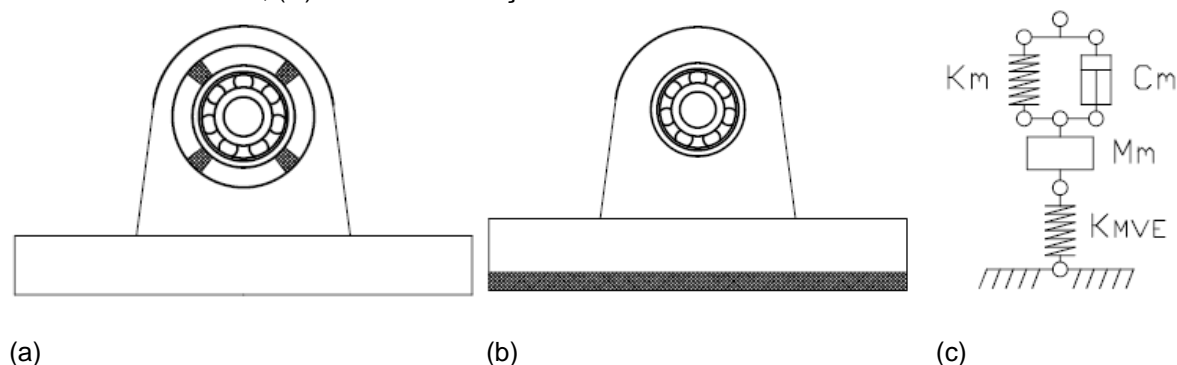


(d)

5 OS MANCAIS E OS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Os MVE podem ser adicionados aos mancais de rotores basicamente de duas formas. Na primeira delas, aplica-se uma manta de MVE em parte ou em toda a pista externa do mancal, ver FIGURA 5.1 (a). Essa manta pode ter configurações geométricas distintas, por exemplo uma manta do tipo corrugada. Outra forma é a aplicação da manta na base da caixa de mancais, entre a caixa e o pedestal, ver figura FIGURA 5.1 (b). A FIGURA 5.1 (c) apresenta um modelo simples aplicável à ambos os casos. Trata-se de uma associação em série do mancal com a manta de MVE. O parâmetro K_m representa a rigidez do mancal, C_m seu amortecimento, M_m a massa do mancal e K_{MVE} a rigidez complexa da manta. O valor de K_{MVE} é complexo porque é função do módulo de elasticidade complexo do MVE, como visto anteriormente no modelo de derivadas fracionárias abordado no capítulo 3. Na FIGURA 5.1 (a), M_m equivale à massa da capa externa do mancal e dos elementos girantes, para o caso de um mancal de rolamento. Já na FIGURA 5.1 (b), M_m equivale à soma da massa da pista externa do mancal com os elementos girante e a massa da caixa de mancais. Neste caso, a rigidez complexa da manta apresenta valores diferentes para cada direção no plano transversal do mancal.

FIGURA 5.1 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA APLICAÇÃO DE MVE NOS MANCAIS DE ROTORES. (A) MVE NA PISTA EXTERNA DO MANCAL DE ROLAMENTO, (B) MVE SOBRE A CAIXA DE MANCAIS, (C) REPRESENTAÇÃO MASSA-MOLA-AMORTECEDOR.

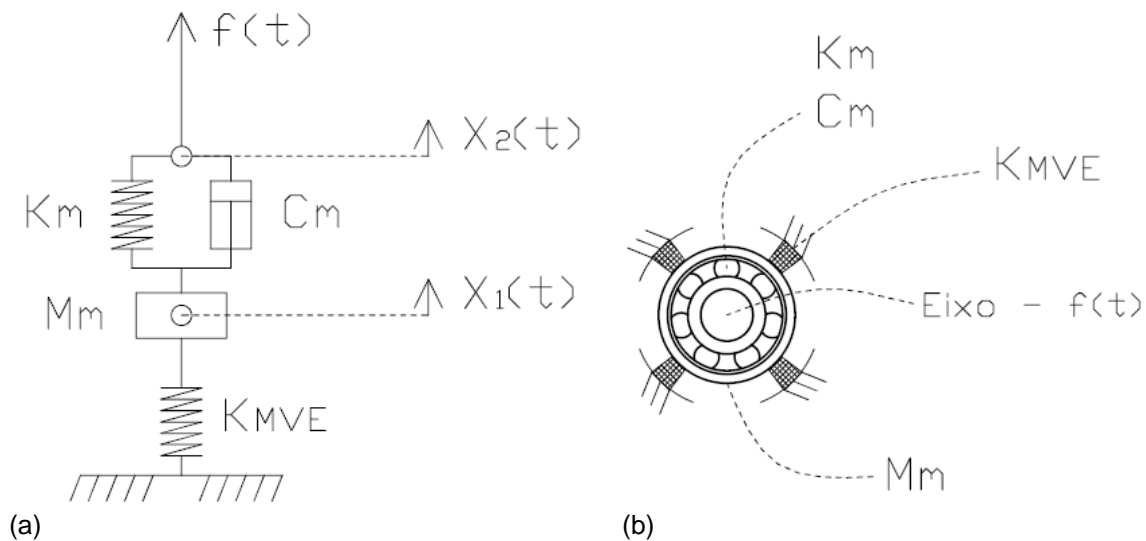


Os trabalhos que modelam rotores com seus mancais associados à MVE consideram os MVEs como molas e amortecedores independentes para cada direção considerada (FERREIRA, 2004; TILLEMA, 2003; SHABANEH e ZU, 2000;

SALDARRIAGA e STEFFEN, 2006; PANDA e DUTT, 1999; LEE et al., 2004; DUTT e NAKRA, 1992 e 96 e DUTT e TOI, 2003). Esta consideração se aplica bem no emprego de MVE em mancais de rolamento. Sabe-se que os mancais de rolamento não apresentam rigidez linear para condições de carregamento distintas. No entanto, para uma condição de carregamento fixa, é possível obter o coeficiente de rigidez e tratá-lo como linear em relação a rotação (ZEILINGER et al, 1996). As componentes de rigidez cruzada também são muito pequenas e podem ser negligenciadas, possibilitando que o rolamento seja modelado por uma mola de rigidez K_m e um amortecedor com amortecimento C_m . Ambos com valores atribuídos para o par cartesiano do plano do rolamento transversal ao eixo. Pelo fato de se associar em série o rolamento com o MVE, a massa M_m deve ser considerada. Isto insere quatro graus de liberdade a mais por mancal no modelo. Na posição dos nós adicionais, correspondente as massas dos mancais, os graus de liberdade são deslocamentos e giros para as duas direções ortogonais do plano transversal ao eixo. Outra forma de considerar o efeito da inércia dos mancais e as propriedades dos MVEs é através da técnica de parâmetros equivalentes generalizados (BAVASTRI et. al. 2014). Esta técnica permite, através de uma rigidez equivalente, agrupar as propriedades do mancal e do MVE no nó correspondente. Neste trabalho foi abordada somente a configuração da opção (a) da FIGURA 5.1. Por simplificação, foram desprezados os efeitos inerciais relativo aos graus de liberdade de giro no par cartesiano transversal ao eixo.

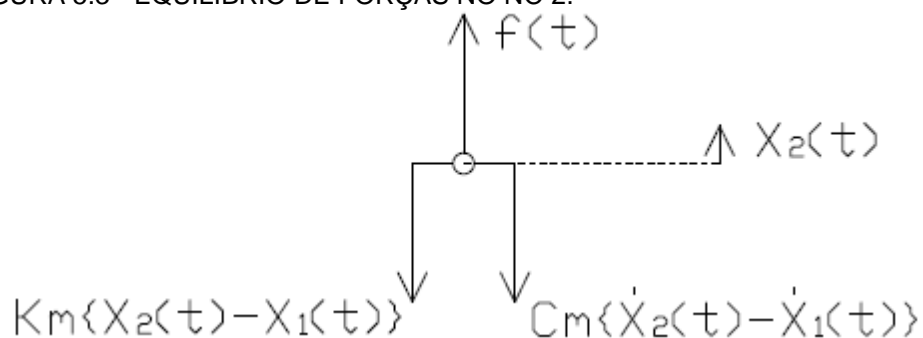
Assim, são levados em consideração somente os deslocamentos transversais do nó que representa a massa M_m . A FIGURA 5.2 (a) traz uma representação do modelo adotado nesta dissertação para o mancal associado ao MVE. Já a FIGURA 5.2 (b) mostra a correlação entre os componentes do mancal e seus elementos no modelo. Este modelo é a base para extrair a rigidez equivalente do método de parâmetros equivalentes generalizados.

FIGURA 5.2 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA MODELAGEM DA ASSOCIAÇÃO DE UM MANCAL DE ROLAMENTO COM O MVE. (A) MODELO MASSA-MOLA-AMORTECEDOR, (B) RELAÇÃO ENTRE ELEMENTOS DO MANCAL E O MODELO PROPOSTO.



Tomando apenas o nó 2 na FIGURA 5.2 (a), nó comum ao eixo e ao mancal, tem-se o equilíbrio de forças ilustrado na FIGURA 5.3.

FIGURA 5.3 - EQUILÍBRIO DE FORÇAS NO NÓ 2.



A equação do equilíbrio de forças no nó 2 é

$$f(t) - K_m \cdot \{X_2(t) - X_1(t)\} - C_m \cdot \{\dot{X}_2(t) - \dot{X}_1(t)\} = \{0\}. \quad (5.1)$$

Desenvolvendo a equação 5.1 e isolando o termo da força, tem-se

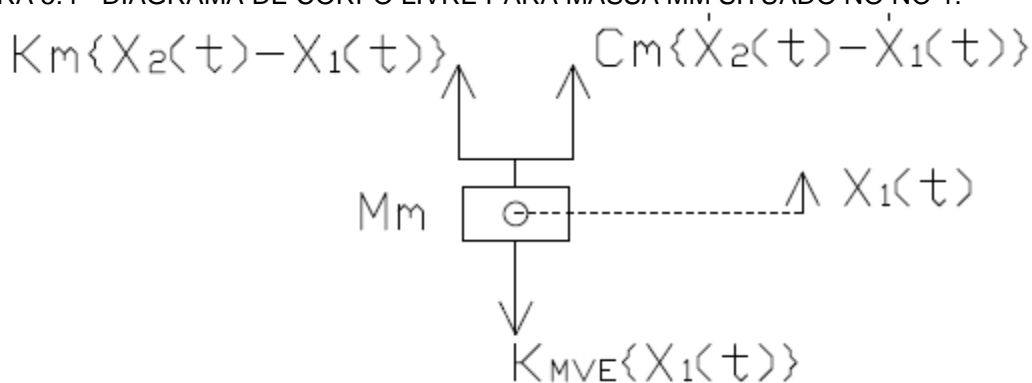
$$K_m \cdot X_2(t) + C_m \cdot \dot{X}_2(t) - K_m \cdot X_1(t) - C_m \cdot \dot{X}_1(t) = f(t). \quad (5.2)$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação 5.2 chega-se na equação 5.3 que relaciona os deslocamentos com a força no domínio da frequência.

$$[K_m + i\Omega C_m] \cdot X_2(\Omega) - [K_m + i\Omega C_m] \cdot X_1(\Omega) = F(\Omega) \quad (5.3)$$

A segunda equação necessária para solução deste sistema com duas incógnitas é obtida do diagrama de corpo livre da massa M_m . A FIGURA 5.4 ilustra os vetores de força atuantes na massa.

FIGURA 5.4 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA MASSA M_m SITUADO NO NÓ 1.



Do equilíbrio de forças do diagrama de corpo livre da FIGURA 5.4 chega-se na equação 5.4,

$$K_m \cdot \{X_2(t) - X_1(t)\} + C_m \cdot \{\dot{X}_2(t) - \dot{X}_1(t)\} - K_{MVE} \cdot X_1(t) = M_m \cdot \ddot{X}_1(t). \quad (5.4)$$

Desenvolvendo os termos da equação 5.4 e separando os termos relativos ao nó 1 dos termos relativos ao nó 2, obtém-se:

$$K_m \cdot X_2(t) + C_m \cdot \dot{X}_2(t) = K_m \cdot X_1(t) + K_{MVE} \cdot X_1(t) + C_m \cdot \dot{X}_1(t) + M_m \cdot \ddot{X}_1(t). \quad (5.5)$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação 5.5, tem-se a equação no domínio da frequência que relaciona as duas incógnitas. A relação é apresentada pela equação 5.6,

$$[K_m + i\Omega C_m] \cdot X_2(\Omega) = [K_m + K_{MVE} + i\Omega C_m - \Omega^2 M_m] \cdot X_1(\Omega). \quad (5.6)$$

O objetivo deste desenvolvimento é escrever uma equação de rigidez dinâmica aplicada ao nó 2 para ser comparada à um sistema equivalente. Portanto, deve-se isolar o deslocamento do nó 1 na equação 5.6 resultando em

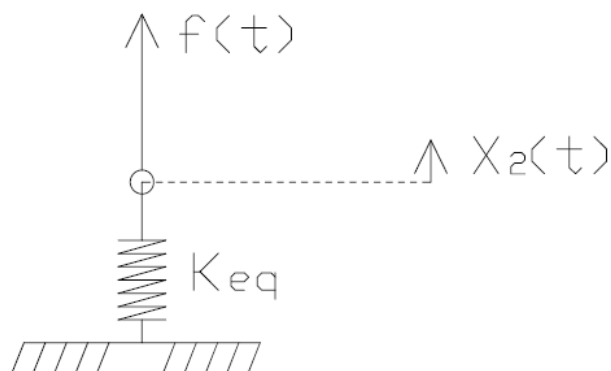
$$X_1(\Omega) = \frac{X_2(\Omega) \cdot [K_m + i\Omega C_m]}{[-\Omega^2 M_m + K_m + K_{MVE} + i\Omega C_m]}. \quad (5.7)$$

Substituindo a equação 5.7 na equação 5.6 e separando a parte complexa da parte imaginária, é possível obter a equação para a rigidez dinâmica no nó 2. Essa função é expressa pela equação 5.8,

$$\frac{F(\Omega)}{X_2(\Omega)} = \frac{(K_{MVE} - \Omega^2 M_m)(K_m^2 - \Omega^2 C_m^2) + K_m (K_{MVE} - \Omega^2 M_m)^2 + i\Omega C_m (K_{MVE} - \Omega^2 M_m)^2}{(K_m + K_{MVE} - \Omega^2 M_m)^2 + (\Omega C_m)^2}. \quad (5.8)$$

O sistema equivalente substitui a associação em série do mancal de rolamento com a manta de MVE por uma mola equivalente. Ver FIGURA 5.5.

FIGURA 5.5 - SISTEMA EQUIVALENTE.



Do equilíbrio de forças da FIGURA 5.5,

$$f(t) = K_{eq} \cdot X_2(t). \quad (5.9)$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação 5.9 obtém-se a rigidez dinâmica para o sistema equivalente,

$$\frac{F(\Omega)}{X_2(\Omega)} = K_{eq}. \quad (5.10)$$

Finalmente, comparando a equação 5.10 à equação 5.8, tem-se a rigidez equivalente para a associação do mancal de rolamento com a manta de MVE,

$$K_{eq} = \frac{(K_{MVE} - \Omega^2 M_m)(K_m^2 - \Omega^2 C_m^2) + K_m(K_{MVE} - \Omega^2 M_m)^2 + i\Omega C_m(K_{MVE} - \Omega^2 M_m)^2}{(K_m + K_{MVE} - \Omega^2 M_m)^2 + (\Omega C_m)^2} \quad (5.11)$$

A rigidez equivalente obtida pela equação 5.11 é adicionada a matriz de rigidez do sistema que compõem o modelo rotodinâmico, da mesma forma que se adicionam as propriedades de um mancal simples. A vantagem desta abordagem está em não acrescentar mais graus de liberdade ao novo modelo, o número de graus de liberdade permanece igual ao do modelo sem MVE. Vale ressaltar que para modelos mais complexos, como por exemplo, a associação de MVE com mancal de deslizamento, a equação 5.11 deve ser atualizada. Neste trabalho é desconsiderado o efeito das componentes cruzadas que são muito importantes no estudo de estabilidade em sistemas com mancais de deslizamento.

Ainda resta definir na equação 5.11 a rigidez da manta de MVE, K_{MVE} . A premissa para o emprego da associação em série do mancal com a manta, é a não existência de componentes cruzadas de rigidez. Isto é conseguido com aplicação de mantas com configuração simétrica, ver ilustração da FIGURA 5.2 (b) (DUTT e TOI, 2003). Na ilustração foram empregados setores de MVE simetricamente dispostos. Dutt e Toi (2003) apresenta a modelagem para setores de materiais poliméricos. No presente trabalho, a associação entre o mancal e o MVE tem uma abordagem semelhante, porém, a rigidez do MVE é função do módulo de elasticidade complexo e um fator geométrico. Assim, para um elemento de barra, a rigidez a tração, ou compressão, é definida pela equação 5.12,

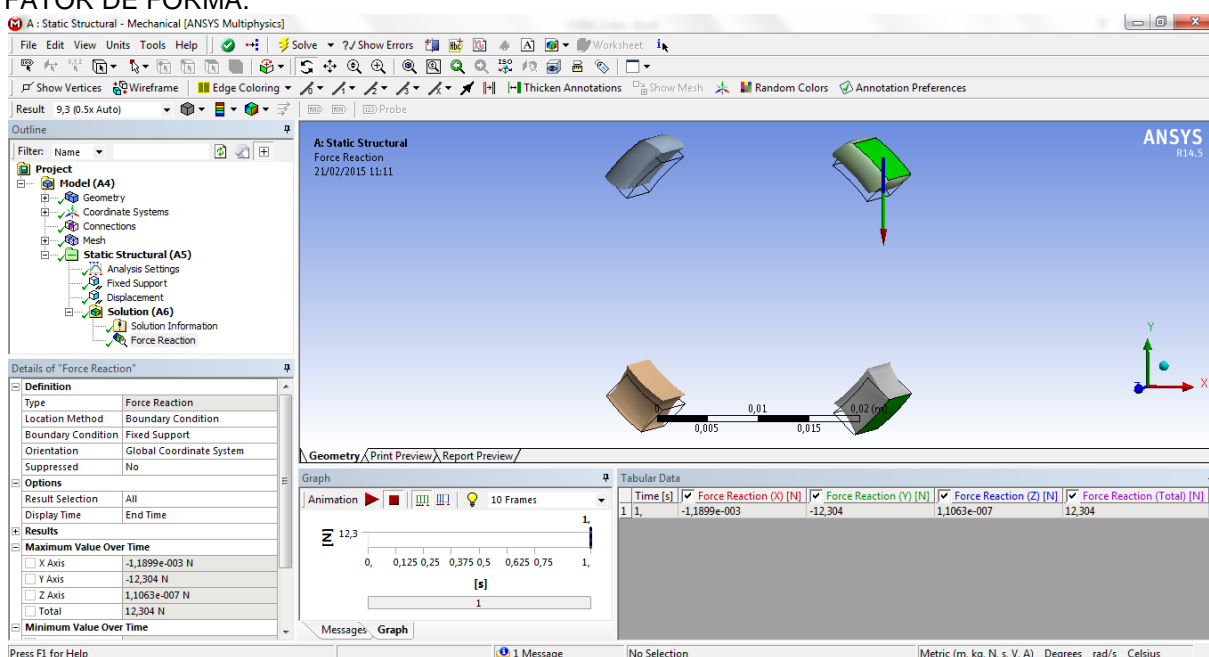
$$K = \frac{E \cdot A}{L} \quad (5.12)$$

Na equação 5.12 o material está definido pelo módulo de elasticidade E . A razão entre a área A e o comprimento L sob um determinado carregamento, definem um fator de forma, FG. Este mesmo modelo é empregado para definir a rigidez da manta de MVE pela equação 5.13.

$$K_{MVE}(\Omega) = E_c(\Omega) \cdot FG \quad (5.13)$$

Para não se ater à uma única configuração geométrica para mantas de MVE, opta-se obter o FG no software de análise estrutural por elementos finitos ANSYS, FIGURA 5.6.

FIGURA 5.6 - EMPREGO DE SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS PARA DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA.



O módulo de elasticidade alimentado no software é o módulo para frequência nula. O coeficiente de Poisson adotado é 0,499. O material é considerado isotrópico linear. Aplica-se um deslocamento prescrito numa única direção e obtém-se a reação a este deslocamento. A força necessária para deformar a manta é contrária a reação. A razão entre a força e o deslocamento prescrito fornece a rigidez. Por fim, dividindo a rigidez pelo módulo de elasticidade da manta tem-se o fator de forma. Pelo fato dos setores de MVE serem alocados de forma simétrica ao longo da capa externa do mancal, não há componente de rigidez cruzada significativa. Além disso, a rigidez transversal é considerada a mesma para as duas direções ortogonais $K_{xx} = K_{zz}$. Portanto, o fator de forma é um só para as duas direções.

A rigidez da equação 5.13 torna-se complexa ao multiplicar o módulo complexo, para frequências não nulas, pelo fator geométrico que é constante para toda faixa de frequência.

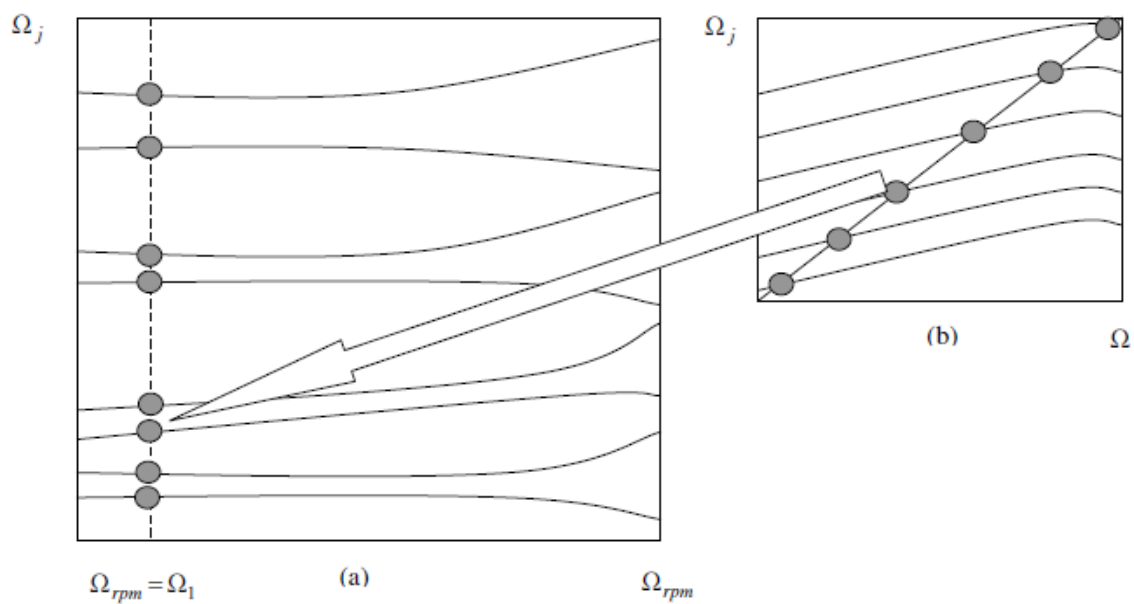
Pelo fato dos MVEs apresentarem forte dependência com a frequência de excitação e temperatura, a matriz $[B]$ do “espaço de estado” se torna ligeiramente diferente.

$$[\bar{B}] = \left[\begin{array}{c|c} [\bar{K}(\Omega)] & [0] \\ \hline [0] & [-M] \end{array} \right]_{2n \times 2n} \quad (5.14)$$

Observe agora que a matriz de rigidez é função da frequência e da temperatura, uma vez que as características dos MVEs são definidas por estes dois parâmetros. A matriz de rigidez também é complexa, indicada pela barra horizontal.

O problema de autovalores é função da frequência e segundo Ferreira (2004) é resolvido pelo diagrama de Campbell Auxiliar. O processo se dá da seguinte forma. Para uma dada rotação Ω_{rpm} , inicia-se o loop de frequência Ω . Para cada frequência Ω desse loop, calculam-se os autovalores e seus respectivos autovetores. Percebe-se que o número de autovalores e autovetores obtidos é função do número de graus de liberdade. Assim, para cada rotação Ω_{rpm} é possível construir um diagrama de Campbell Auxiliar, função da frequência Ω , ver FIGURA 5.7 (b). Partindo do Campbell Auxiliar e fazendo $\Omega = \Omega_j$, onde Ω_j é obtido pelo cruzamento da reta a 45° que corta as curvas das frequências naturais, têm-se as frequências para uma dada Ω_{rpm} . Repetindo o procedimento para todos os passos de rotação obtém-se o diagrama de Campbell final, FIGURA 5.7 (a).

FIGURA 5.7 - ILUSTRAÇÕES DO DIAGRAMA DE CAMPBELL FINAL (A) E CAMPBELL AUXILIAR (B) (FERREIRA, 2004).



Computacionalmente a FIGURA 5.7 se resume a dois *loops*, um de rotação e outro de frequência, conforme ilustrado no QUADRO 5.1 a seguir.

QUADRO 5.1 - RESUMO DAS OPERAÇÕES PARA OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS EM SISTEMAS COM EMPREGO DE MVE.

<p>Loop $\Omega_{RPM} = \Omega_{RPM 1} \dots \Omega_{RPM M}$, onde M é o número de passos de rotação</p> <p>Loop $\Omega = \Omega_1 \dots \Omega_{M1}$, onde M1 é o número de passos de frequência de excitação</p> <p>Calcular propriedades dos mancais e montar matrizes $[M]$, $[\bar{K}(\Omega)]$, $[C]$ e $[G(\Omega_{RPM})]$</p> <p>Montar matrizes $[A(\Omega_{RPM})]$ e $[\bar{B}(\Omega)]$</p> <p>Calcular autovalores λ. Obtêm-se 2N autovalores, aos pares complexo e negativo complexo.</p> <p>Calcular as N frequências naturais, Ω_j, ver equação 5.19. N também é o número de graus de liberdade do modelo.</p> <p>Ordenar e armazenar as frequências naturais Ω_j nas colunas de uma matriz para cada passo de frequência Ω.</p> $\begin{bmatrix} \Omega_{j_{11}} & \Omega_{j_{12}} & \dots & \Omega_{j_{(M-1)(M-1)}} & \Omega_{j_{1M1}} \\ \Omega_{j_{21}} & \Omega_{j_{22}} & \dots & \Omega_{j_{(N-1)(M-1)}} & \Omega_{j_{2M1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_{j_{(N-1)1}} & \Omega_{j_{(N-1)2}} & \dots & \Omega_{j_{(N-1)(M-1)}} & \Omega_{j_{(N-1)M1}} \\ \Omega_{j_{N1}} & \Omega_{j_{N2}} & \dots & \Omega_{j_{N(M-1)}} & \Omega_{j_{NM1}} \end{bmatrix}$ <p>Plotar o Campbell Auxiliar e extrair as frequências naturais Ω_j da linha que corta o gráfico a 45°</p> <p>Armazenar o novo vetor coluna Ω_j para cada passo de rotação.</p> <p>Fim do Loop $\Omega = \Omega_1 \dots \Omega_{M1}$</p> <p>Fim do loop $\Omega_{RPM} = \Omega_{RPM 1} \dots \Omega_{RPM M}$.</p> <p>Matriz de frequências naturais, N linhas (N° de graus de liberdade) versus M colunas (N° de passos de rotação).</p> $\begin{bmatrix} \Omega_{j_{11}} & \Omega_{j_{12}} & \dots & \Omega_{j_{(M-1)(M-1)}} & \Omega_{j_{1M}} \\ \Omega_{j_{21}} & \Omega_{j_{22}} & \dots & \Omega_{j_{(N-1)(M-1)}} & \Omega_{j_{2M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_{j_{(N-1)1}} & \Omega_{j_{(N-1)2}} & \dots & \Omega_{j_{(N-1)(M-1)}} & \Omega_{j_{(N-1)M}} \\ \Omega_{j_{N1}} & \Omega_{j_{N2}} & \dots & \Omega_{j_{N(M-1)}} & \Omega_{j_{NM}} \end{bmatrix}$
--

Em função da matriz rigidez de um sistema com MVE ser complexa, a matriz $[\bar{B}(\Omega)]$ também se torna complexa. O problema continua sendo resolvido no “espaço de estado”. Assim como no modelo com amortecimento viscoso, os

autovalores aparecem aos pares. Contudo, diferentemente dos modelos com amortecimento viscoso geral, onde todos os coeficientes das matrizes são reais, os autovalores que surgem aos pares são complexo e seu negativo. Isto porque se tem redundância de informação no espaço de estado. Portanto, os autovalores que surgem aos pares devem estar relacionados de alguma forma. Contudo não podem ser complexos e seu conjugado, uma vez que os coeficientes do polinômio característico não são todos reais.

Este fato muda o resultado das condições de ortogonalidade referenciadas no capítulo 4.1 e desenvolvidas no Apêndice B (Espindola, 1995). Observe que das condições de ortogonalidade das equações B.7 e B.15, somente B.15 nos traz uma informação relevante. Pelo fato de $\lambda_k = -\lambda_j$, a equação B.15 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\{\varphi_j\}_{n \times 1} [\overline{K}(\Omega)]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1} + \lambda_j^2 \{\varphi_j\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1} = 0 \quad (5.15)$$

Portanto, a relação que se tira da propriedade de ortogonalidade é:

$$\lambda_j^2 = \frac{-\{\varphi_j\}_{n \times 1} [\overline{K}(\Omega)]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1}}{\{\varphi_j\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1}} = -\frac{\overline{k_j}}{m_j} = -\overline{\Omega_j^2} = (\overline{i\Omega_j})^2 \quad (5.16)$$

Em 5.16, λ_j^2 não é um número real e sim complexo. Tem parte real e parte imaginária. As barras horizontais sobre as variáveis indicam ser de natureza complexa. Portanto $\lambda_j = \overline{i\Omega_j}$., supondo

$$-\lambda_j^2 = \overline{\Omega_j^2} = \Omega_j^2 (1 + i\eta_j), \quad (5.17)$$

tem-se,

$$\Omega_j^2 = \operatorname{Re}(-\lambda_j^2) \quad (5.18)$$

e,

$$\eta_j = \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_j^2)}{\operatorname{Re}(-\lambda_j^2)}. \quad (5.19)$$

Aplicando a metodologia descrita neste capítulo para obtenção dos autovalores e autovetores, toda a teoria discutida no capítulo 4 também é aplicável. As respostas às excitações, modos de vibrar e órbitas são obtidas da mesma maneira.

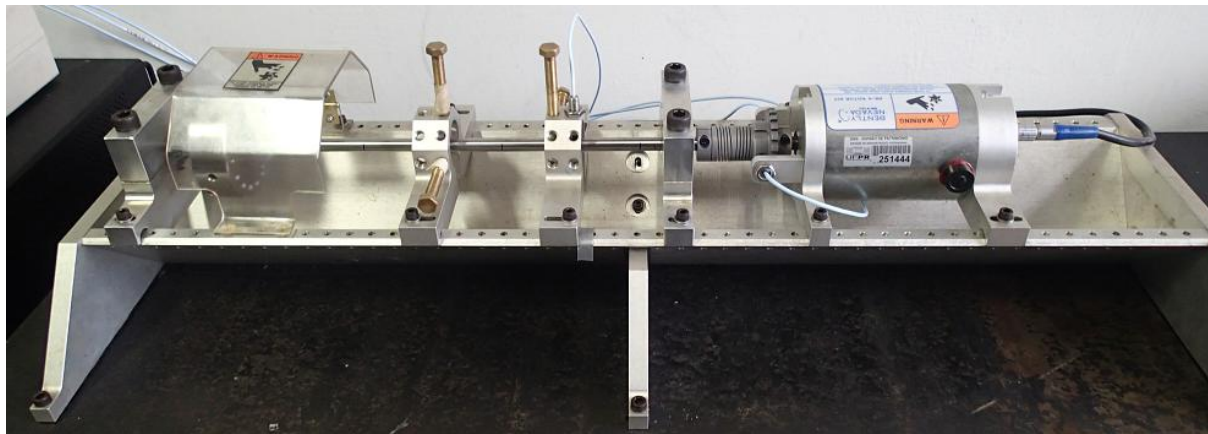
No entanto, pelo fato dos autovalores surgirem aos pares, complexo e negativo complexo, a discussão sobre instabilidade baseada no sinal da parte real do autovalor não é aplicável. Outras considerações devem ser adotadas para obter informações a respeito da instabilidade e não é o escopo deste trabalho.

6 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

A validação de um modelo numérico é comumente realizada com base em dados experimentais. Contudo, validar um modelo não significa somente comparar os dados numéricos aos dados experimentais. Faz-se necessário estabelecer um critério para concluir se o modelo descreve bem o comportamento dinâmico de um rotor ou não. Preocupados com este fato, a indústria e os consumidores de máquinas rotativas adotam normas com critérios de aceitação para modelos rotodinâmicos destas máquinas. As normas mais conhecidas aplicadas a compressores, turbinas e motores elétricos são as normas API (*American Petroleum Institute*). A partir do aprimoramento de práticas, conhecimentos da indústria e de consumidores, as normas são atualizadas. Quando máquinas especiais (*Special Purpose*), assim definidas pelas normas API, têm seus pedidos de compra efetuados, o consumidor pode solicitar que o fabricante demonstre que o modelo rotodinâmico adotado no projeto reflete bem o comportamento da máquina. Sob o ponto de vista dinâmico, há algumas formas de demonstrar a “aderência” de um modelo rotodinâmico a determinadas condições de operação de uma máquina. Técnicas mais recentes se utilizam de mancais magnéticos estrategicamente posicionados para excitar o conjunto rotativo de uma máquina durante operação em bancada. Desta forma é possível obter experimentalmente o diagrama de Campbell, por exemplo. Essa técnica é a mais precisa, porém, ainda é muito cara. Portanto, as normas API utilizam como padrão a validação de modelos rotodinâmicos através de respostas ao desbalanceamento em “corridas” de aceleração ou desaceleração da máquina. A API RP 684, 2ª.ed., estabelece parágrafos padrão adotados nas normas específicas de cada tipo de máquina como critério de aceitação para o modelo baseado nas respostas ao desbalanceamento. Neste trabalho são adotados os mesmos critérios da API RP 684, 2ª.ed., para validação do modelo. Os critérios são comentados durante a apresentação dos resultados neste capítulo.

Os testes de validação do modelo proposto são realizados num kit comercial de simulação de comportamento rotodinâmico (ROTORKIT da Bently Nevada). O kit recebe caixas de mancais especialmente fabricadas neste trabalho para alojar mancais de rolamento, com ou sem MVE. A FIGURA 6.1 apresenta fotografias da bancada de testes modificada.

FIGURA 6.1 - BANCADA DE SIMULAÇÃO ROTORKIT ADAPTADA: (A) VISTA GERAL DO ROTOR, (B) ROLAMENTOS AUTOCOMPENSADORES E ANÉIS RÍGIDOS PARA MONTAGEM, (C) MONTAGEM DOS SENSORES DE DESLOCAMENTO RADIAL (*PROXIMETERS*), (D) MONTAGEM DOS ROLAMENTOS COM ANEL RÍGIDO NA CAIXA DE MANCAIS, (E) MONTAGEM DOS ROLAMENTOS COM SETORES DE MVES.



(b)



(c)



(d)



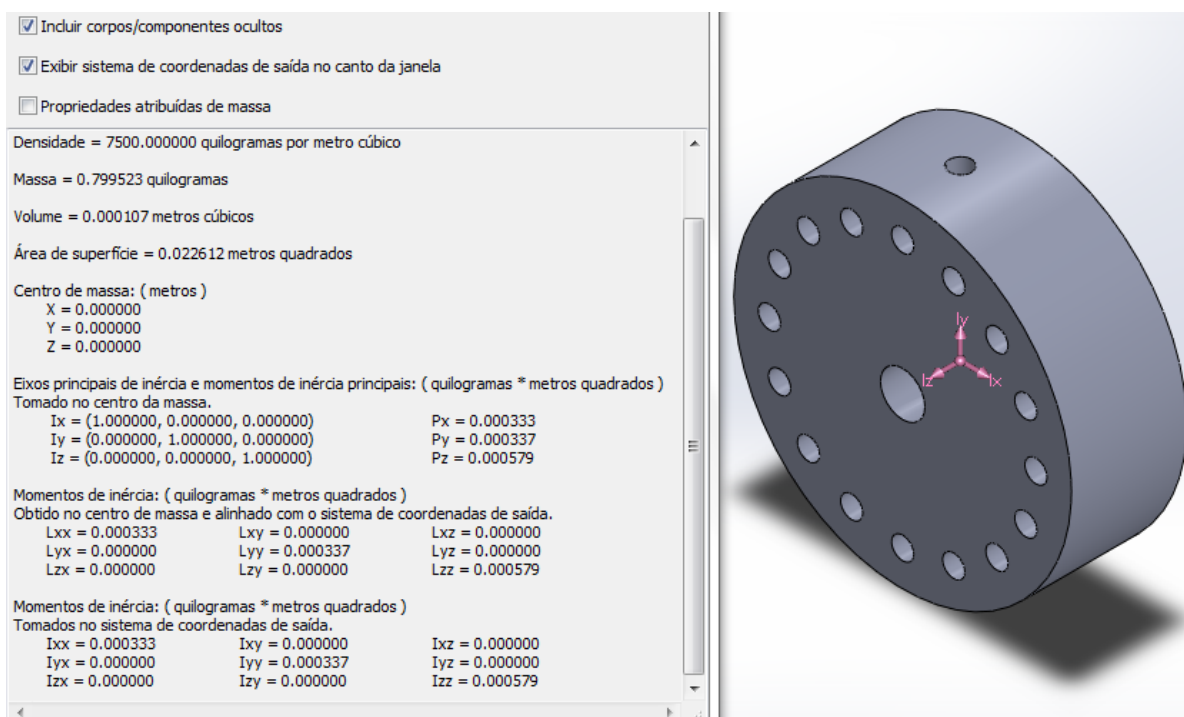
(e)

O rotor é composto de um eixo de aço carbono com diâmetro de 10mm, comprimento de 400mm, e densidade de 7742.67 kg/m^3 . A densidade é determinada a partir de uma amostra do eixo com auxílio de uma balança de precisão. Os mancais utilizados são de rolamento autocompensadores com duas carreiras de esfera 1200 G15, fabricante NTN-SNR. Isto porque a caixa de mancais possui uma folga extremamente reduzida entre o alojamento e a capa externa do mancal. E também pelo fato do rolamento de esferas comum ter sido testado e sua folga ser

insuficiente para compensar pequenos desalinhamento entre as caixas de mancal somadas as deformações do eixo ao desbalanceamento. Os resultados dos testes obtidos com os rolamentos de uma carreira rígida de esferas são diferentes dos resultados obtidos com os mancais autocompensadores. Há também um disco móvel com alojamentos para massas de teste. Os momentos de inércia do disco são calculados num software de CAD a partir da geometria e da massa conhecida (800g). A FIGURA 6.2 apresenta uma fotografia do disco bem como o desenho com as propriedades obtidas no software de CAD. Assim, ao modelo são atribuídas diretamente as propriedades inerciais.

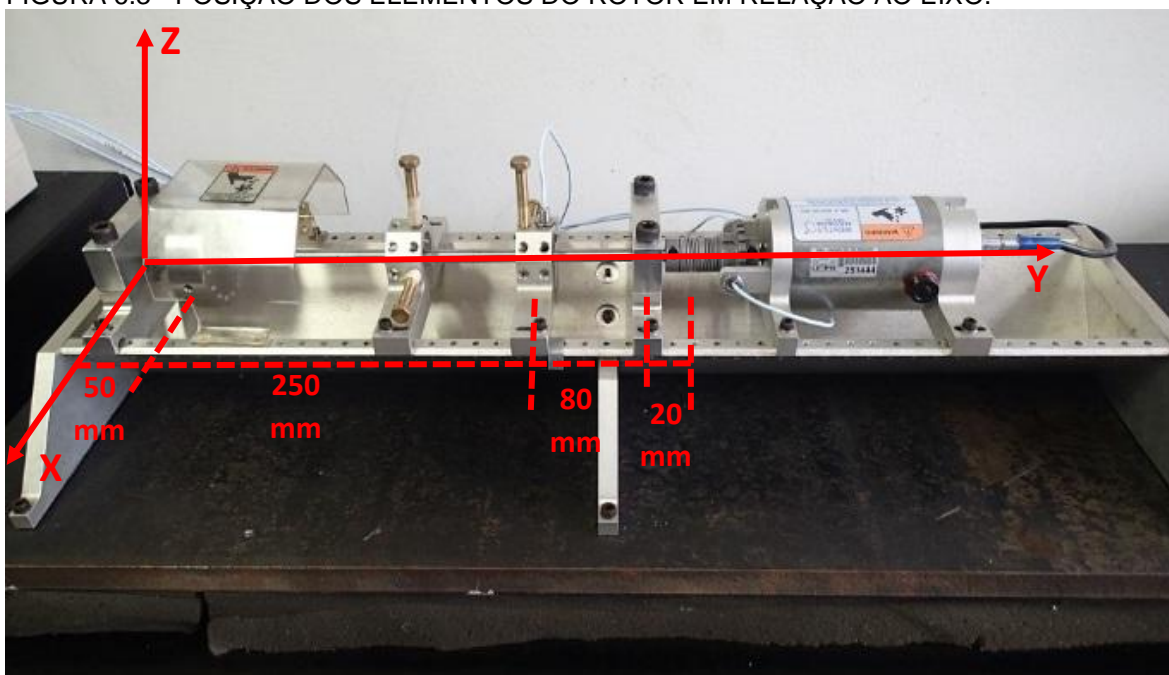
A possibilidade de alterar a posição do disco e dos mancais no eixo permite a escolha da configuração mais adequada para os testes. O acionador é um motor elétrico de rotação variável podendo atingir até 10000rpm. Este gira o rotor através de um acoplamento elástico e a introdução de rigidez adicional ao rotor pelo acoplamento é desprezível. *Proximeters* são utilizados para medir o deslocamento do eixo e são posicionados a 300mm da origem. Os *proximeters* têm suas curvas de calibração levantadas para alimentação da constante de proporcionalidade/sensibilidade no software de pós-processamento. As medições de deslocamento são referenciadas por um *keyphasor* e uma roda dentada instalada no eixo do motor. Assim, pode-se obter a resposta síncrona gerada pelo desbalanceamento que é utilizada para validar o modelo. Leituras de temperatura são tomadas nos MVE através de termopar para determinação das propriedades dinâmicas. A coleta de dados é realizada através do módulo 3160-B-042 com 4 canais de entrada e dois de saída da Bruel & Kjaer. Os dados são pós-processados no software Pulse.

FIGURA 6.2 - PROPRIEDADES DO DISCO.



A disposição dos elementos do rotor em relação ao eixo é ilustrada na FIGURA 6.3. No Apêndice A há dois sistemas de referência distintos, o utilizado por Lalanne e Ferraris (1990) e o utilizado por Genta (2005). O programa desenvolvido para os cálculos deste trabalho utiliza a mesma referência cartesiana adotada por Lalanne e Ferraris (1990). Isto porque o desenvolvimento do código numérico disponível utilizado como base no desenvolvimento deste trabalho é baseado nessa literatura.

FIGURA 6.3 - POSIÇÃO DOS ELEMENTOS DO ROTOR EM RELAÇÃO AO EIXO.



Este trabalho tem como objetivo compreender o efeito do MVE aplicado aos mancais de um rotor qualquer e propor um modelo capaz de prever seu comportamento dinâmico. O rotor sem aplicação de MVE é utilizado como base para definição da rigidez dos mancais de rolamento autocompensadores e para estudar o comportamento do rotor nestas condições.

6.1 DETERMINAÇÃO DOS PÂMETROS DOS MANCAIS SEM MVE.

O cálculo da rigidez de mancais de rolamento é por vezes impreciso. Assim, os valores de rigidez dos mancais de rolamento são obtidos pela comparação das curvas de inércia experimentais com as calculadas para o rotor em repouso. Trata-se de um problema de otimização não linear com restrição. A rotina “*fmincon*” da biblioteca de soluções para problemas de otimização não linear restritos do MATLAB é empregada. É definida uma função objetivo, o erro médio entre a amplitude medida e a calculada para a inércia. As variáveis de projeto escolhidas, atendendo as orientações cartesianas de Lalanne e Ferraris (1990), são rigidez, K_{XX} e K_{ZZ} , e os amortecimentos, C_{XX} e C_{ZZ} , dos mancais. Não são consideradas componentes cruzadas em rigidez ou amortecimento por se tratar de primeira

aproximação em mancal de rolamento. O QUADRO 6.1 apresenta um resumo do problema de otimização não linear.

QUADRO 6.1 - RESUMO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR PARA DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DOS MANCAIS DE ROLAMENTO.

Formulação do problema de otimização não linear:

Dados especificados: Dados geométricos e dos materiais do eixo e disco.

Variáveis de projeto: K_{XX} , K_{ZZ} , C_{XX} e C_{ZZ} .

Função objetivo:

$$\text{Minimizar } \frac{\| \{Inertância_{calculada}(\Omega)\} - \{Inertância_{medida}(\Omega)\} \|}{N^{\circ} \text{ de elementos de } \{Inertância_{medida}(\Omega)\}}$$

Restrições

$$1 \times 10^5 < K_{XX}, K_{ZZ} < 1 \times 10^{10} \text{ N/m}$$

$$100 < C_{XX}, C_{ZZ} < 1000 \text{ N.s/m}$$

Acelerômetro e martelo são utilizados para realização de Teste de Impacto. A FIGURA 6.4 apresenta um registro fotográfico de um teste e a

FIGURA 6.5 apresenta um registro fotográfico do momento da aquisição das curvas de inertância.

FIGURA 6.4 - TESTE DE IMPACTO DE UM ROTOR.

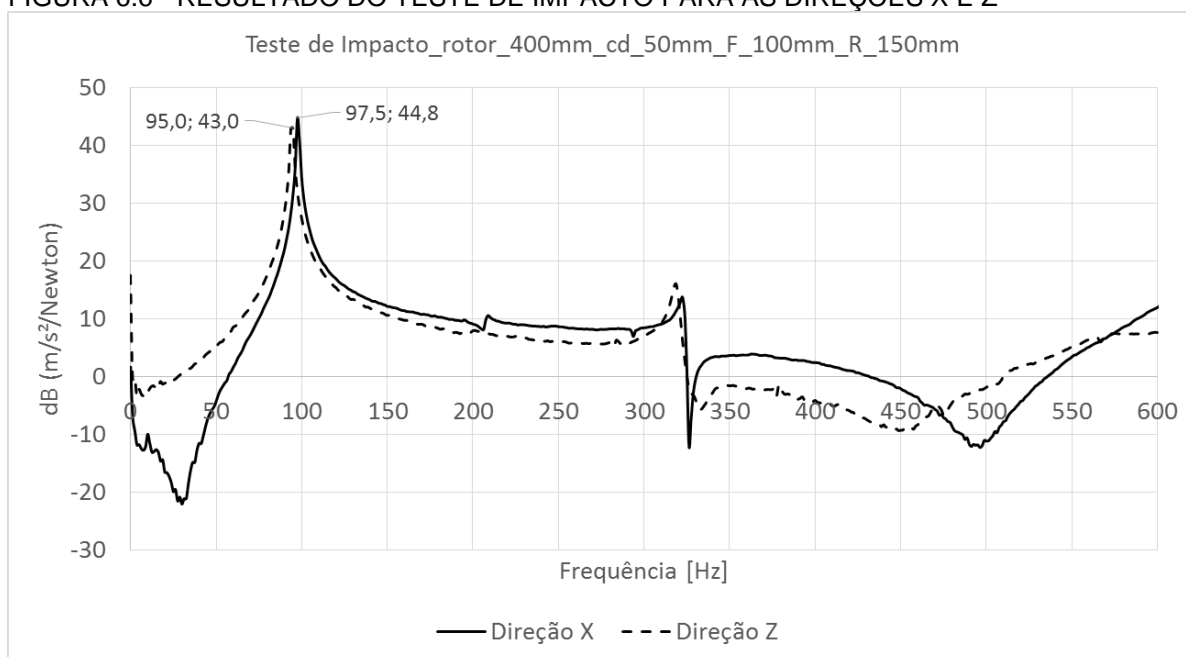


FIGURA 6.5 - DADOS COLETADOS DE TESTE DE IMPACTO DE UM ROTOR.



Para o rotor mostrado na FIGURA 6.3, são coletadas as curvas de inércia nas direções X e Z. As respostas são coletadas com o acelerômetro posicionado a 150mm da origem e o impacto foi dado a 100mm da origem. A FIGURA 6.6 apresenta as curvas de inércia coletadas para as duas direções ortogonais.

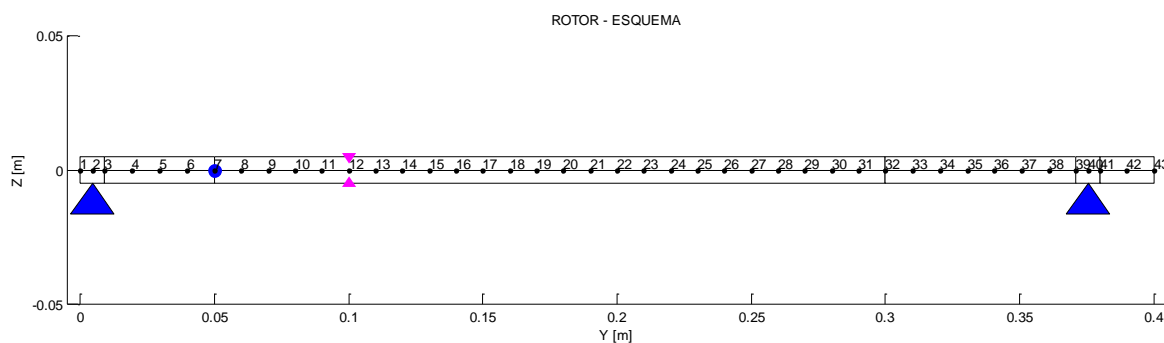
FIGURA 6.6 - RESULTADO DO TESTE DE IMPACTO PARA AS DIREÇÕES X E Z



Observa-se uma pequena diferença no pico da primeira frequência natural indicando uma leve assimetria entre os eixos X e Z. Vale ressaltar que a inércia medida é do sistema como um todo.

O rotor foi modelado pelo MEF atendendo o critério L/D, razão do comprimento pelo diâmetro do elemento, menor ou igual a um. A FIGURA 6.7 apresenta uma representação esquemática do modelo do rotor.

FIGURA 6.7 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO MEF PARA O ROTOR.



O rotor modelado apresenta um total de 42 elementos. Na FIGURA 6.8 há uma imagem da tela de entrada de dados para escalonamento do eixo do rotor. Esta

interface gráfica em MATLAB, denominada Rotordin, baseia-se em trabalhos anteriores do grupo de pesquisa GVIBS e foi adaptada e reescrita para os propósitos do presente trabalho. O rotor não apresenta variações de diâmetro ao longo do seu comprimento. Portanto, as seções são definidas em função dos demais elementos do rotor (mancais, disco, pontos de medição de resposta e ponto de impacto). Os mancais de rolamento autocompensadores possuem comprimento de 9mm. Estes são contemplados nas seções 1 e 5, com os nós 2 e 40. A FIGURA 6.9 apresenta a imagem da tela de entrada dos dados para os mancais. O disco com alojamentos para massas de teste, apresentado na FIGURA 6.2, tem seus dados de inércia inseridos no nó 7. Na FIGURA 6.10 há a imagem da tela de entrada de dados de inércia.

FIGURA 6.8 - TELA DE ENTRADA DE DADOS PARA O EIXO.

The screenshot shows a software window titled 'Dados: eixo'. It contains a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Desktop, Window, Help) and a table titled 'Entrada de dados para os escalonamentos'. The table has 10 columns: 'Nº da seção', 'Comprimento [mm]', 'Diâmetro ext. [mm]', 'Diâmetro int. [mm]', 'Módulo de Young [Pa]', 'Coeficiente de Poisson', 'Densidade [kg/m³]', 'Força axial [N]', 'Atração magn. [N/m]', and 'Divisões (0 para L/d)'. There are 6 rows of data, each with input fields for the values.

Nº da seção	Comprimento [mm]	Diâmetro ext. [mm]	Diâmetro int. [mm]	Módulo de Young [Pa]	Coeficiente de Poisson	Densidade [kg/m³]	Força axial [N]	Atração magn. [N/m]	Divisões (0 para L/d)
1	9	10	0	2.07e+11	0.3	7742.67	0	0	2
2	41	10	0	2.07e+11	0.3	7742.67	0	0	4
3	250	10	0	2.07e+11	0.3	7742.67	0	0	25
4	71	10	0	2.07e+11	0.3	7742.67	0	0	7
5	9	10	0	2.07e+11	0.3	7742.67	0	0	2
6	20	10	0	2.07e+11	0.3	7742.67	0	0	2

An 'OK(Salvar)' button is located at the bottom right of the table area.

FIGURA 6.9 - TELA DE ENTRADA DE DADOS DOS MANCAIS

The screenshot shows a software window titled 'Dados: mancais'. It contains a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Desktop, Window, Help) and a table titled 'Entrada de dados para os mancais'. The table has 11 columns: 'Nº do mancal', 'Posição [mm]', 'I_{xx}', 'I_{zz}', 'I_{yy}', 'I_{xy}', 'C_{xx}', 'C_{zz}', 'C_{yy}', 'C_{xy}', and 'Massa [kg]'. There are 2 rows of data, each with input fields for the values.

Nº do mancal	Posição [mm]	I _{xx}	I _{zz}	I _{yy}	I _{xy}	C _{xx}	C _{zz}	C _{yy}	C _{xy}	Massa [kg]
1	4.5	7e+06	0	6.6e+06	0	500	0	500	0	0
2	375.5	7e+06	0	6.6e+06	0	500	0	500	0	0

An 'OK(Salvar)' button is located at the bottom right of the table area.

FIGURA 6.10 - TELA DE ENTRADA DE DADOS DE ELEMENTOS DE INÉRCIA.

Inércia	Posição [mm]	Massa [kg]	M.I. de massa em x [kg*m ²]	M.I. de massa em z [kg*m ²]	M.I. de massa em y [kg*m ²]
1	50	0.8	0.000334	0.000334	0.000578

Para cada conjunto de variáveis de projeto há um valor para a norma euclidiana entre os pontos de inércia obtidos experimentalmente e os pontos calculados pelo modelo proposto da FIGURA 6.7. As normas euclidianas para as direções X e Z são somadas. Portanto, o somatório das normas passou a ser a função objetivo. Como deseja-se determinar as propriedades dos mancais minimizando a função objetivo por um problema de otimização não linear restrito, gráficos da função objetivo são gerados. Os gráficos permitem identificar o subespaço de busca da solução definindo, portanto, as restrições do problema de otimização não linear. Inicialmente faz-se $K_{xx} = K_{zz}$ e $C_{xx} = C_{zz}$. A variação na rigidez é de 1×10^5 a 9×10^8 N/m e a variação no amortecimento é de 100 a 500 N.s/m. A FIGURA 6.11 apresenta o gráfico da função objetivo para a faixa proposta das variáveis de projeto. Nota-se claramente que há uma grande região onde a função objetivo permanece com valor praticamente inalterado, para valores maiores de rigidez. Isso se dá porque quem passa a dominar a rigidez do sistema é o eixo e não mais os mancais. Há um vale bem abrupto onde estão concentrados os mínimos da função objetivo. A FIGURA 6.12 mostra outro ângulo da FIGURA 6.11. Tomando uma aproximação do vale, tem-se uma ideia melhor do aspecto da função objetivo nas proximidades, FIGURA 6.13. Compreende-se melhor também que o fundo do vale não é tão abrupto quanto a percepção passada na FIGURA 6.11.

FIGURA 6.11 - GRÁFICO DA FUNÇÃO OBJETIVO.

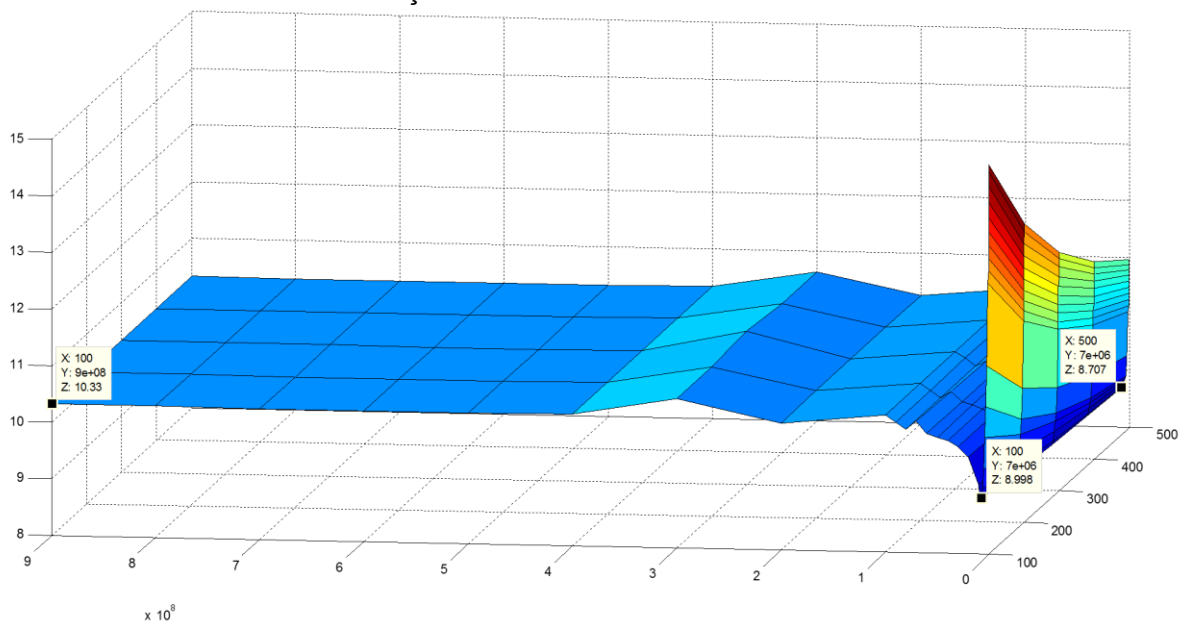


FIGURA 6.12 - FUNÇÃO OBJETIVO VISTA DE OUTRO ÂNGULO.

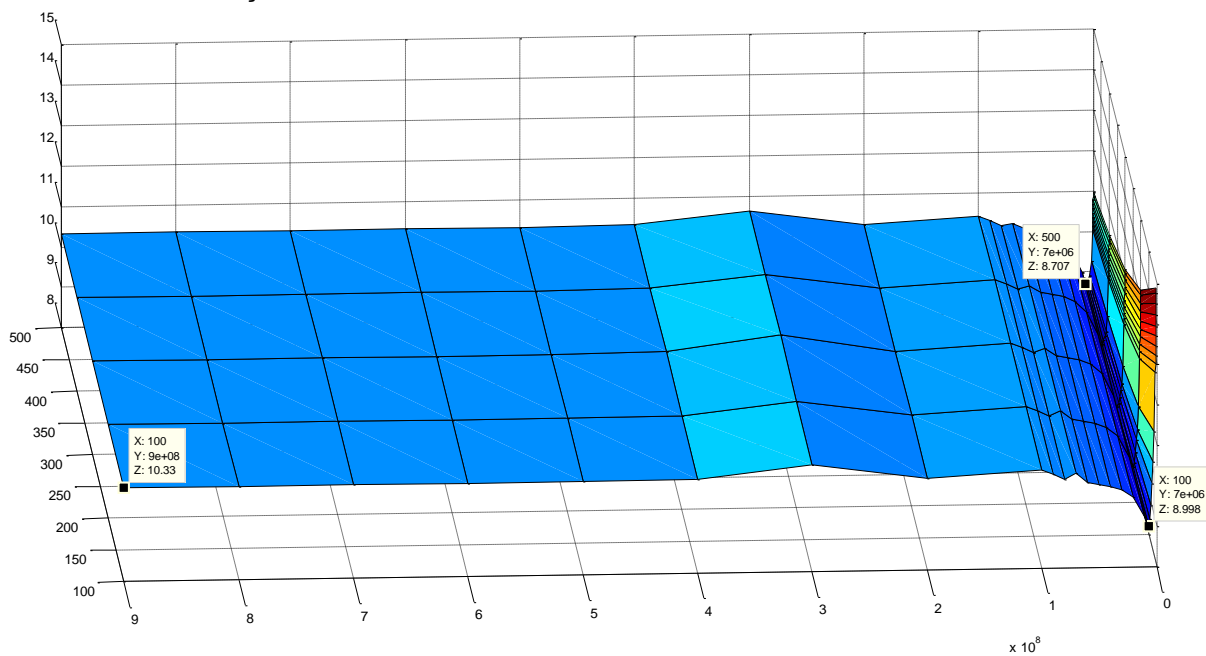
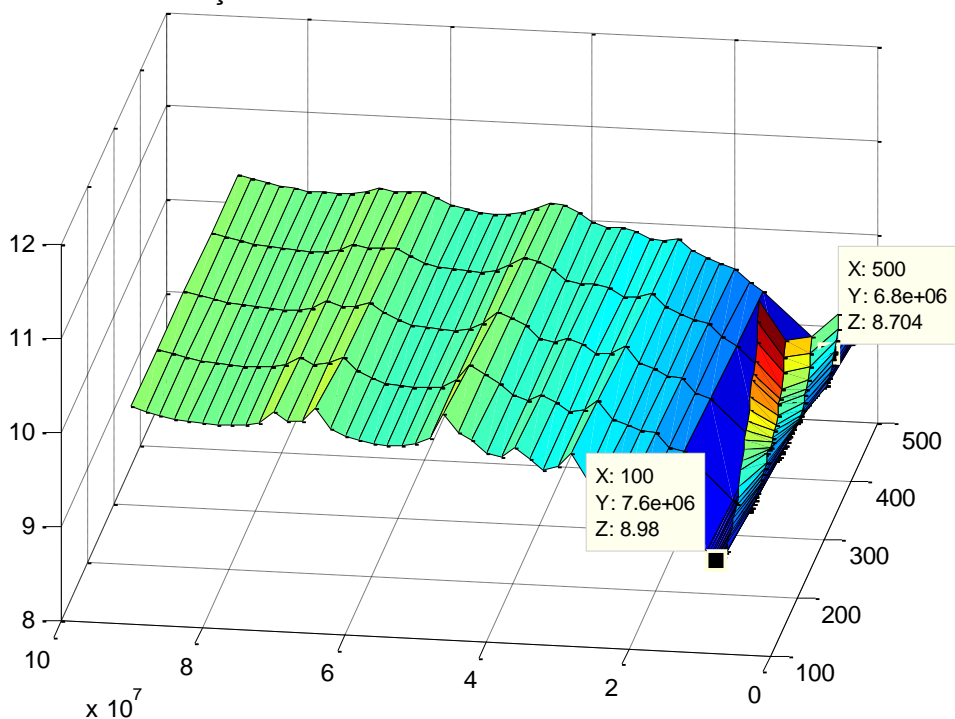
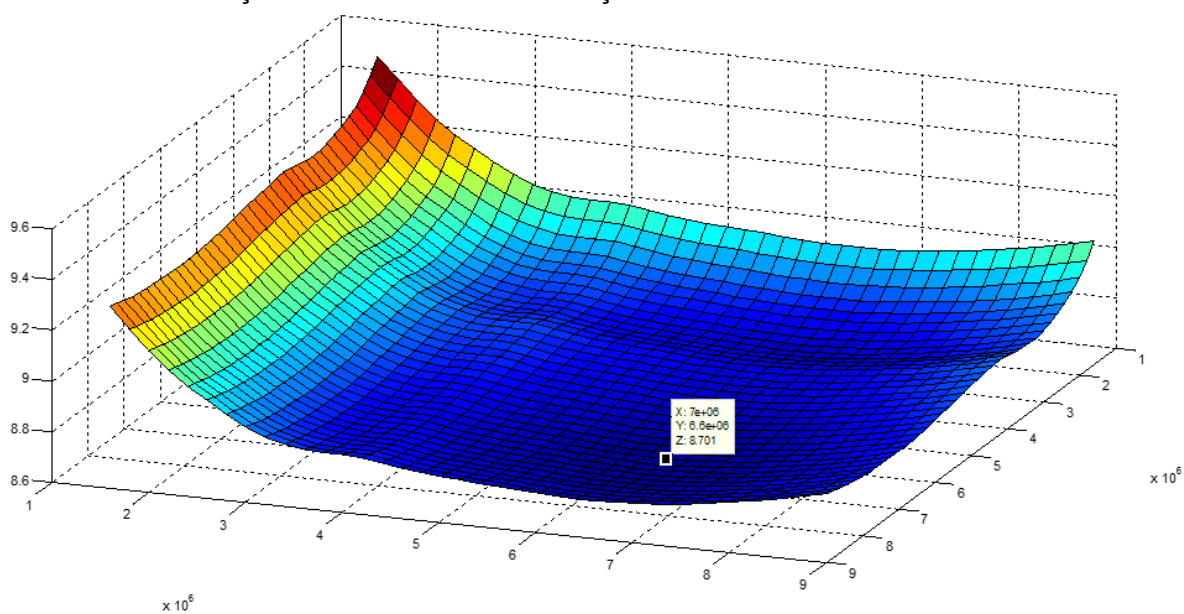


FIGURA 6.13 - APROXIMAÇÃO DA REGIÃO DO VALE.



Finalizando a busca pelo comportamento da função objetivo, faz-se $C_{XX} = C_{ZZ} = 500 \text{ N.s/m}$ e varia-se K_{XX} e K_{ZZ} . A variação na rigidez é de 1×10^6 a $9 \times 10^6 \text{ N/m}$ tanto para K_{XX} quanto para K_{ZZ} . O resultado desta busca está na FIGURA 6.14.

FIGURA 6.14 - FUNÇÃO OBJETIVO PELA VARIAÇÃO DA RIGIDEZ.



Através dos gráficos da FIGURA 6.11, FIGURA 6.12, FIGURA 6.13 e FIGURA 6.14 são estabelecidas as restrições. Para K_{XX} e K_{ZZ} a restrição escolhida é de $1 \times 10^6 \text{ N/m}$ à $1 \times 10^7 \text{ N/m}$. Já para C_{XX} e C_{ZZ} a restrição escolhida é de 100 à 1000 N.s/m. Aplicada a técnica de otimização não linear apresentada no QUADRO 6.1, chega-se nos seguintes valores de rigidez e amortecimento para mancal autocompensador, $K_{XX} = 4.4 \times 10^6 \text{ N/m}$, $K_{ZZ} = 3.8 \times 10^6 \text{ N/m}$, $C_{XX} = 874 \text{ N.s/m}$ e $C_{ZZ} = 992 \text{ N.s/m}$. A FIGURA 6.15 resume os novos dados alimentados na tela de entrada de dados para os mancais.

FIGURA 6.15 - DADOS OTIMIZADOS PARA OS MANCAIS.

Nº do mancal	Posição [mm]	k_{xx}	k_{xz}	k_{zz}	k_{zx}	c_{xx}	c_{xz}	c_{zz}	c_{zx}	Massa [kg]
1	4.5	4.4e+06	0	3.8e+06	0	874	0	992	0	0
2	375.5	4.4e+06	0	3.8e+06	0	874	0	992	0	0

As curvas de inércia para os dados otimizados estão na FIGURA 6.16 e na FIGURA 6.17.

FIGURA 6.16 - INERTÂNCIA PARA DIREÇÃO X.

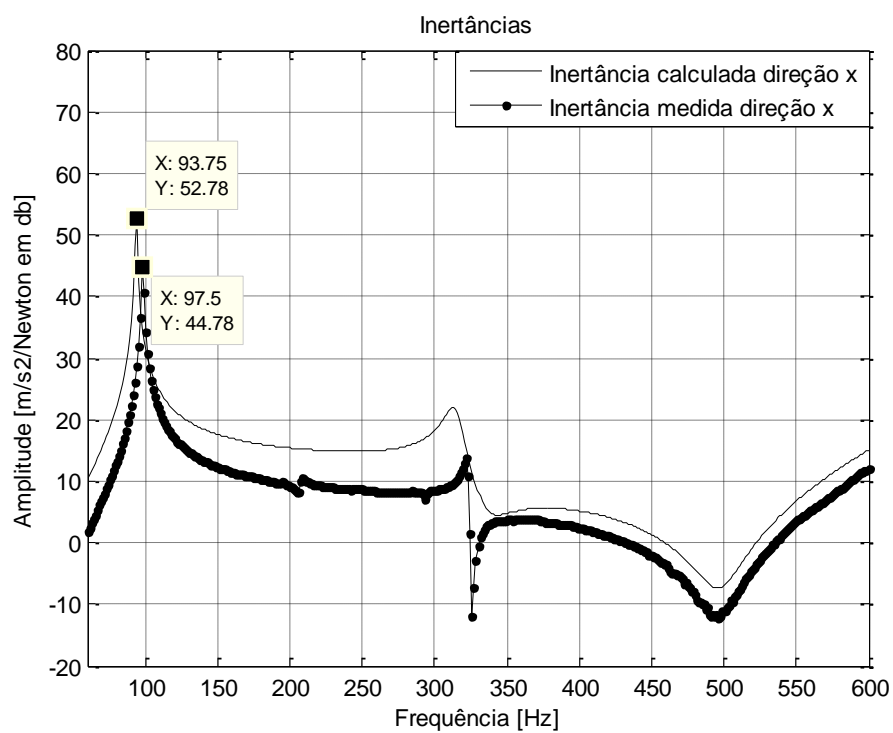
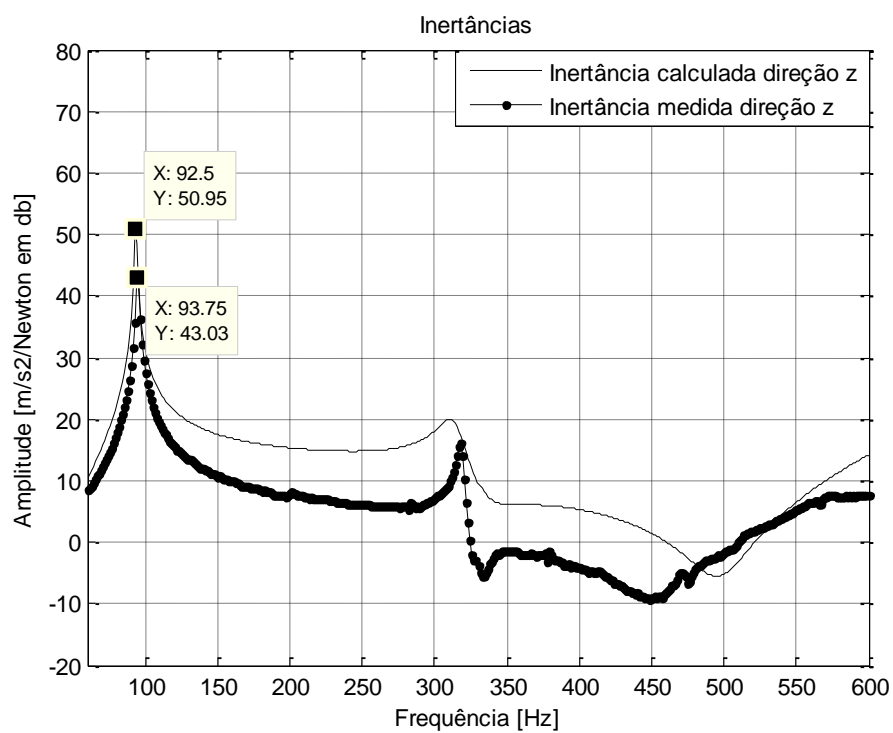


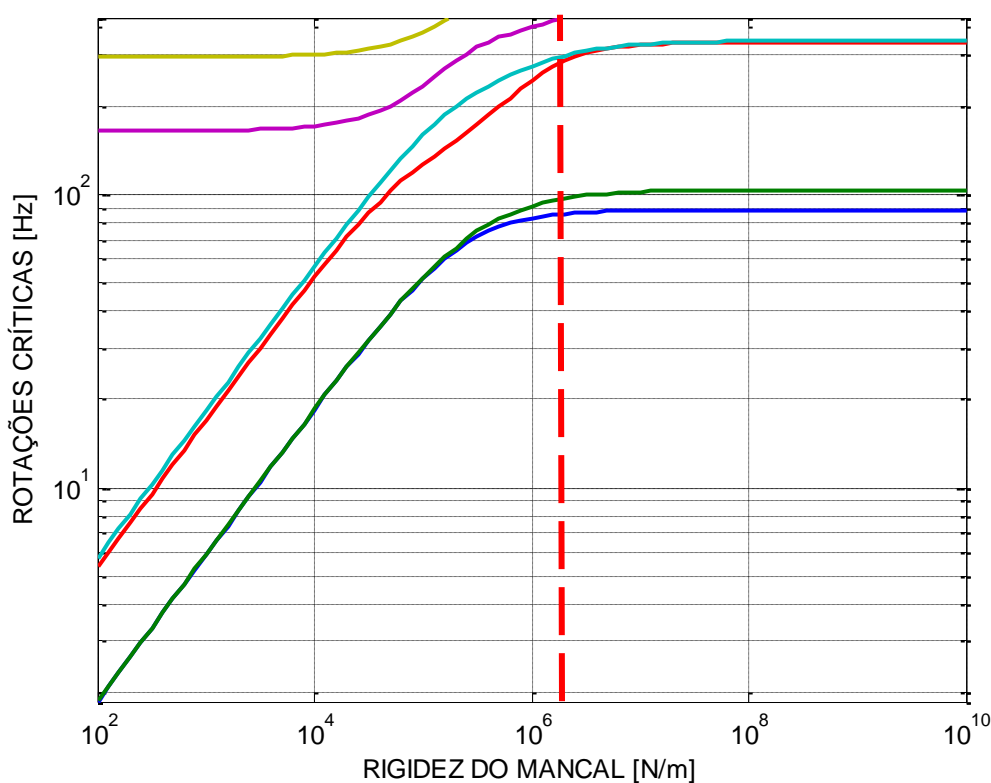
FIGURA 6.17 - INERTÂNCIA PARA DIREÇÃO Z.



6.2 O ROTOR SEM MVE.

A FIGURA 6.18 apresenta o mapa de rotações críticas não amortecidas para o rotor em função da rigidez dos mancais (conhecido como mapa de rigidez). Por este mapa, observa-se que a rigidez do sistema na configuração atual é dominada pela rigidez do eixo pois, para rigidez dos mancais acima de $1 \times 10^6 \text{ N/m}$, não há mais influência dos mesmos nas primeiras rotações críticas.

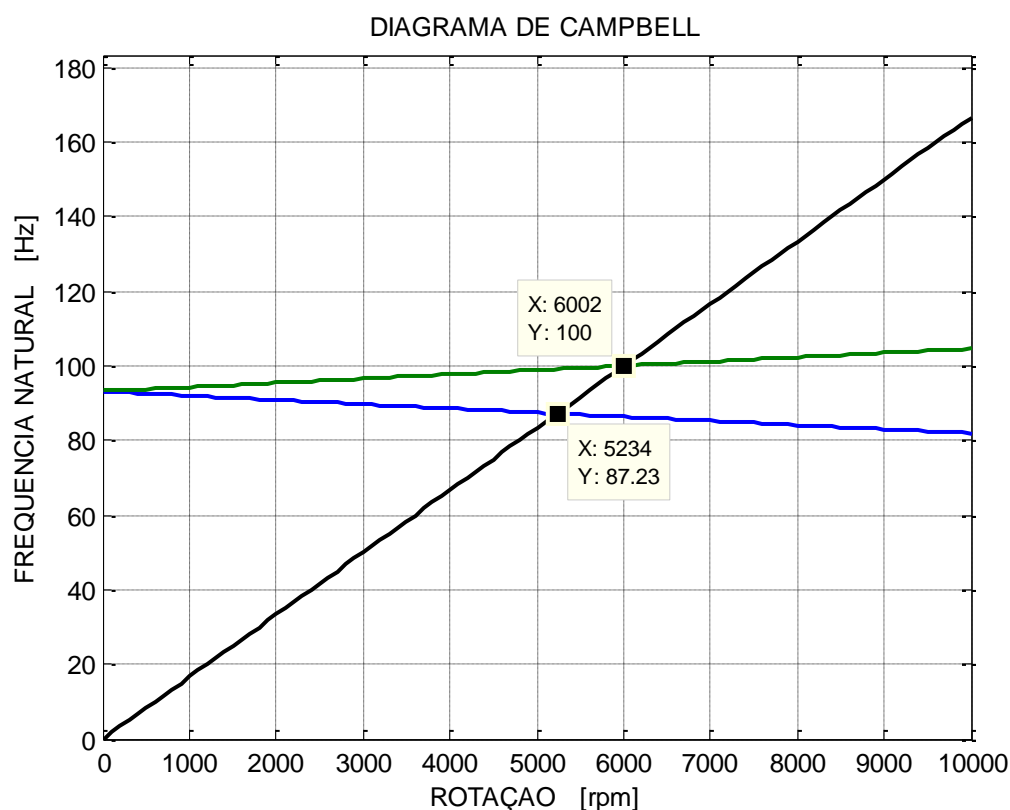
FIGURA 6.18 - MAPA DE ROTAÇÕES CRÍTICAS NÃO AMORTECIDAS.



As rotações críticas também são previstas pelo diagrama de Campbell calculado, FIGURA 6.19. As frequências naturais obtidas das curvas de inércia para o rotor parado equivalem as rotações críticas no diagrama de Campbell para rotação nula. O diagrama de Campbell é uma ferramenta útil para escolha da posição a ser adotada para o disco no eixo. O ROTORKIT possibilita trabalhar com rotações até 10000 rpm. Portanto, não é possível passar pela segunda rotação crítica nos testes de bancada, independente da configuração adotada para o rotor. Logo, toda a

análise dos resultados é baseada na 1ª rotação crítica. Assim, escolhe-se a posição do disco o mais distante possível do centro para que se tenha uma boa distinção entre os primeiros modos backward e forward, caso seja possível excitar o primeiro.

FIGURA 6.19 - DIAGRAMA DE CAMPBELL PARA O ROTOR SEM MVE.



Submetendo o rotor, inicialmente sem MVE, aos ensaios de *runup* e *rundown*, é possível levantar seu comportamento dinâmico ao desbalanceamento. A validação é feita comparando o teste de resposta ao desbalanceamento do rotor com a predição de resposta ao desbalanceamento do modelo. Os testes de resposta ao desbalanceamento são realizados com massas de teste conhecidas, alojadas em local determinado, no disco com alojamento para massas de teste. A distribuição de massas no rotor, ainda sem adição de massa de teste, não é perfeita. Portanto, há sempre um desbalanceamento residual. Há também outro empecilho. Sempre há *runout* associado. O *runout* pode ser mecânico e/ou elétrico. O *runout* mecânico normalmente tem como fonte de erro imperfeições na superfície circular do eixo. Já o *runout* elétrico tem como fonte de erro não uniformidades na condutividade,

resistividade ou permeabilidade do material (API RP 684, 2ª. ed, 2010). De acordo com a API RP 684 2ª. ed, SP 6.8.8.11, para o caso do rotor tendo como máxima rotação contínua 10000 rpm, o *runout* máximo permitido calculado é cerca de 6.8 μ m. Essa pequena discussão sobre *runout* e desbalanceamento residual é importante porque quando se fazem os cálculos nos modelos, consideramos somente a influência da massa de teste na resposta.

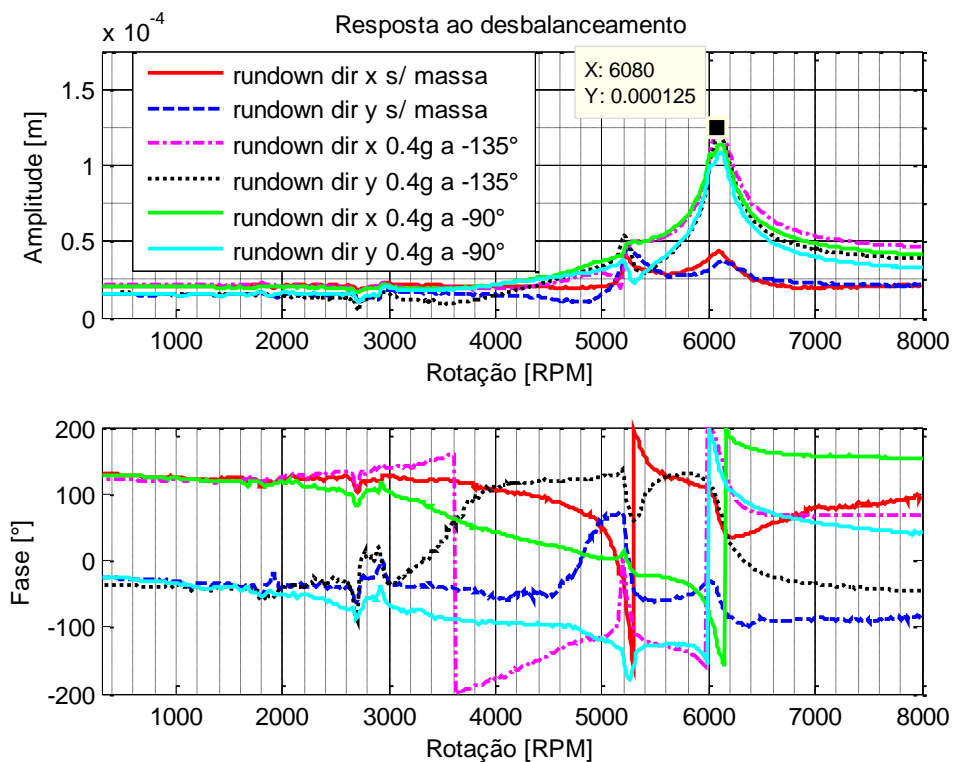
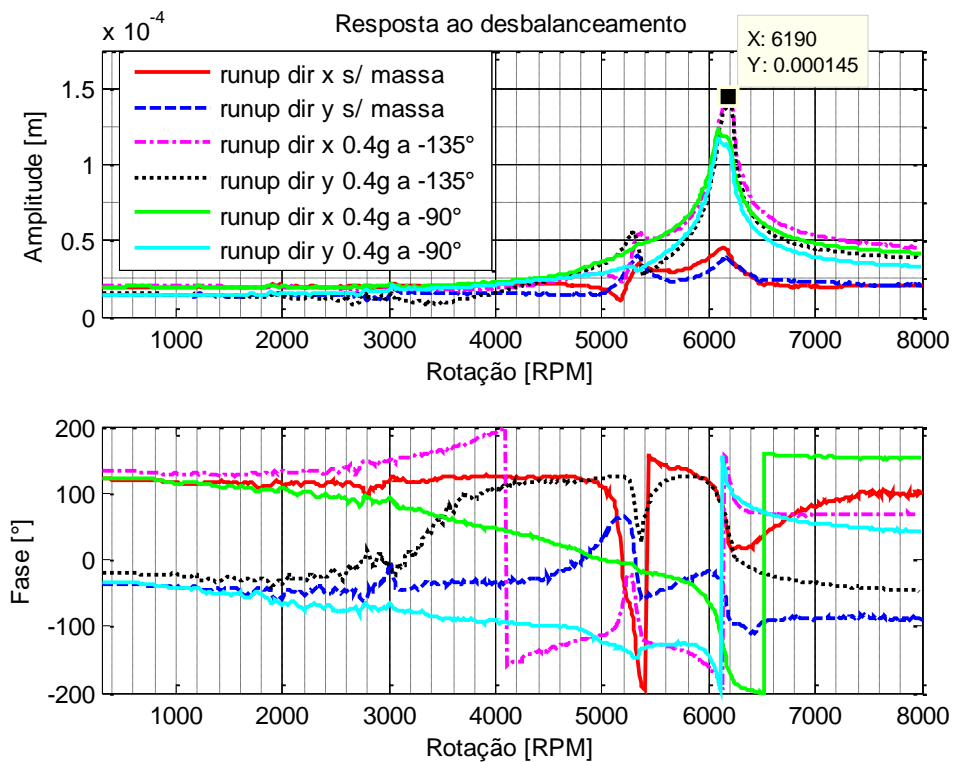
Na prática, o *runout* é contabilizado medindo o valor da amplitude filtrada e a respectiva fase numa rotação baixa comparada a faixa de operação. De posse do *runout*, subtraindo-o vetorialmente ponto a ponto na resposta ao desbalanceamento, tem-se a resposta livre da influência do *runout*. Seja esta resultante somente do desbalanceamento residual ou da combinação com a massa de teste. Assim, subtraindo vetorialmente a resposta combinada, massa de teste com desbalanceamento residual, da resposta somente do desbalanceamento residual tem-se a resposta resultante da massa de teste. O mesmo obtém-se subtraindo as respostas combinadas de massa de teste mais desbalanceamento residual mais *runout*, do desbalanceamento residual mais *runout*.

A TABELA 6.1 resume as corridas para coleta de resposta ao desbalanceamento realizadas. O campo Massa, indica a massa de teste empregada. O campo Raio indica o raio de excentricidade da aplicação da massa de teste, ver FIGURA 6.2. Já o campo Ângulo, o ângulo em que a massa de teste é posicionada no disco, utilizando como referência o sistema cartesiano da FIGURA 6.3. Os campos Posição e Medição, indicam a referência do ponto de alocação da massa de teste e medição, em relação ao eixo, respectivamente. Por fim o campo Direção indica a posição de montagem dos *proximetes*.

TABELA 6.1 - RESUMO DAS CORRIDAS DE RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO

Corrida	Condição	Massa [g]	Raio [mm]	Ângulo [°]	Posição [mm]	Medição [mm]	Direção
1	<i>Runup</i>	-	30	-	50	300	X
2	<i>Rundown</i>	-	30	-	50	300	X
3	<i>Runup</i>	-	30	-	50	300	Z
4	<i>Rundown</i>	-	30	-	50	300	Z
5	<i>Runup</i>	0.4	30	-135	50	300	X
6	<i>Rundown</i>	0.4	30	-135	50	300	X
7	<i>Runup</i>	0.4	30	-135	50	300	Z
8	<i>Rundown</i>	0.4	30	-135	50	300	Z
9	<i>Runup</i>	0.4	30	-90	50	300	X
10	<i>Rundown</i>	0.4	30	-90	50	300	X
11	<i>Runup</i>	0.4	30	-90	50	300	Z
12	<i>Rundown</i>	0.4	30	-90	50	300	Z

Inicialmente são apresentados todos os gráficos de resposta ao desbalanceamento juntos para uma mesma condição, FIGURA 6.20 e FIGURA 6-21. Pode parecer um pouco confuso, mas é importante para observar os detalhes que são comuns a todas as corridas. O primeiro detalhe trata-se do *runout* nos dois gráficos. O valor é próximo a $25\mu\text{m}$. Este valor é elevado, mais de 3 vezes o valor recomendado (API RP 684, 2ª. ed, 2010). Contudo, na impossibilidade de realizar um *burnishing*, os dados coletados foram considerados nas análises. *Burnishing* é um processo de deformação plástica gerada por ferramenta diamantada para regularização da superfície do eixo. Outro detalhe, com aspecto positivo, foram as respostas à massa de teste. Vê-se pelos gráficos que a excitação da primeira crítica *forward* se deu a contento. Observa-se também nos “picos” que há uma pequena diferença entre a corrida em *runup* e *rundown*, cerca de 100 RPM. Quando se testa uma máquina em bancada, aconselha-se a utilização dos dados em *rundown* pelo fato de normalmente a descida ser mais lenta. No entanto, o ROTORKIT faz descidas e subidas “controladas”. Como há pouco amortecimento na configuração de rotor sem MVE as acelerações e desacelerações foram relativamente rápidas.

FIGURA 6.20 - CORRIDAS EM *RUNDOWN*.FIGURA 6-21 CORRIDAS EM *RUNUP*.

Mais um aspecto sobre a FIGURA 6.20 e FIGURA 6-21 é o fato de haver um pequeno truncamento no “pico” da primeira crítica *forward*. Isto pode ter ocorrido por duas razões, ou a velocidade da corrida foi relativamente elevada ou o rotor tocou nos batentes mecânicos de proteção dos sensores e do rotor. Com relação as fases, nota-se uma variação não esperada nas curvas a partir de 3000 RPM. Contudo, pelo fato do *runout* ser elevado, é a partir desta rotação que a amplitude por desbalanceamento começa a superar o valor do *runout*. Por esta razão a mudança acentuada da fase. Outra consideração de como o *runout* afeta a fase é o fato das curvas com massas de teste iniciarem sempre no mesmo valor para uma mesma direção. Ou seja, a influência da posição da massa ainda é pequena em baixas rotações frente ao *runout*. Por fim, outra característica é o aparecimento da suposta primeira rotação crítica em *backward*. O valor da frequência está muito próximo ao valor calculado no diagrama de Campbell da FIGURA 6.19. Pelo fato de haver uma pequena assimetria nos mancais, isso pode vir a ocorrer. Lembrando que há também o efeito giroscópico.

A subtração vetorial do *runout* e do desbalanceamento residual é imprescindível para comparação das corridas de teste com as respostas calculadas pelo modelo. As respostas subtraídas a seguir, portanto resultante somente do efeito da massa de teste, apresentam as direções X e Z no mesmo gráfico. As FIGURA 6.22 e FIGURA 6.23 são as respostas subtraídas em *rundown*. Já as FIGURA 6.24 e FIGURA 6.25 são as respostas subtraídas em *runup*. Observa-se que as respostas iniciam com a amplitude praticamente nula, indicando a subtração do *runout*. A ligeira diferença no pico da primeira rotação crítica em *forward* entre as curvas em *rundown* e *runup* permanece. A suposta primeira rotação crítica em *backward* também foi evidenciada.

FIGURA 6.22 - RESPOSTA EM RUNDOWN PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM -135°.

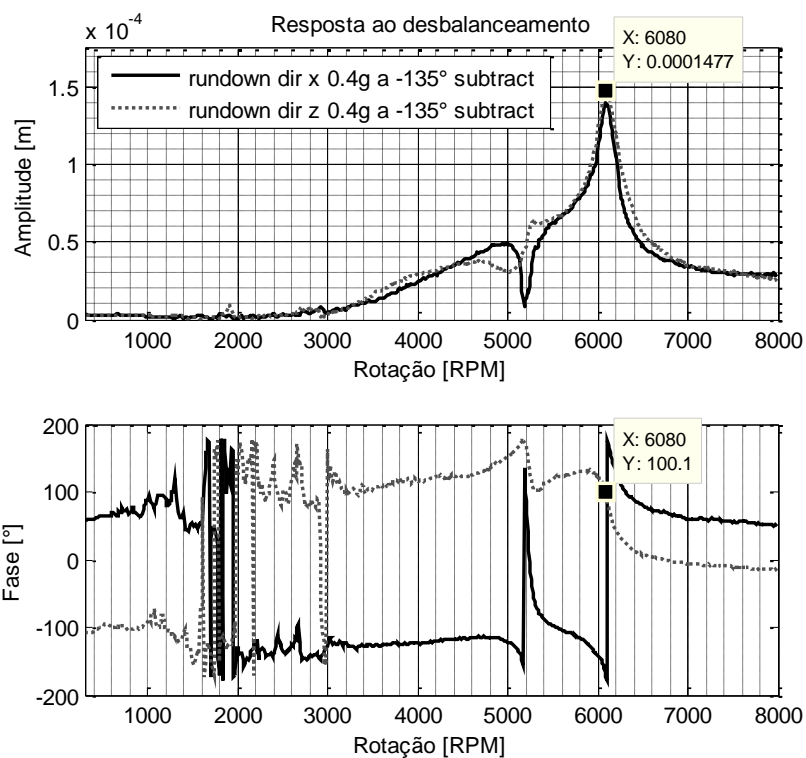


FIGURA 6.23 - RESPOSTA EM RUNDOWN PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM -90°.

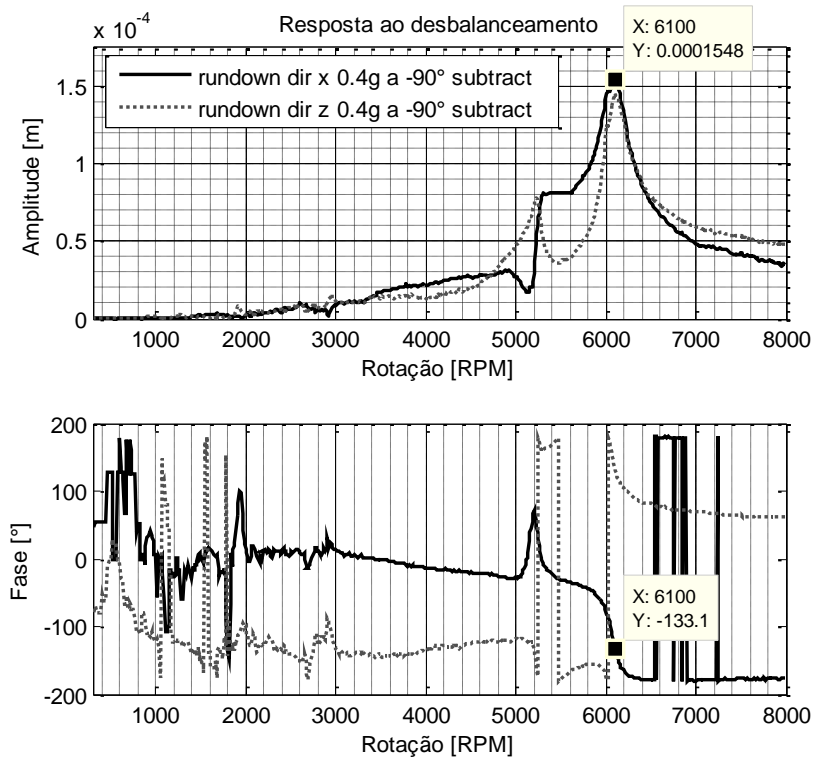


FIGURA 6.24 - RESPOSTA EM RUNUP PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM -135°.

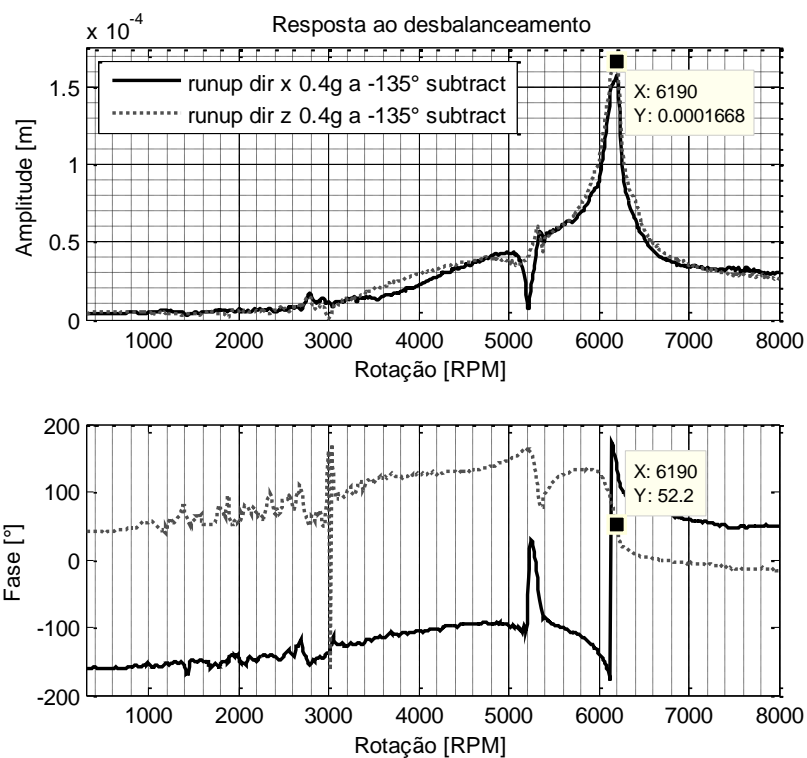
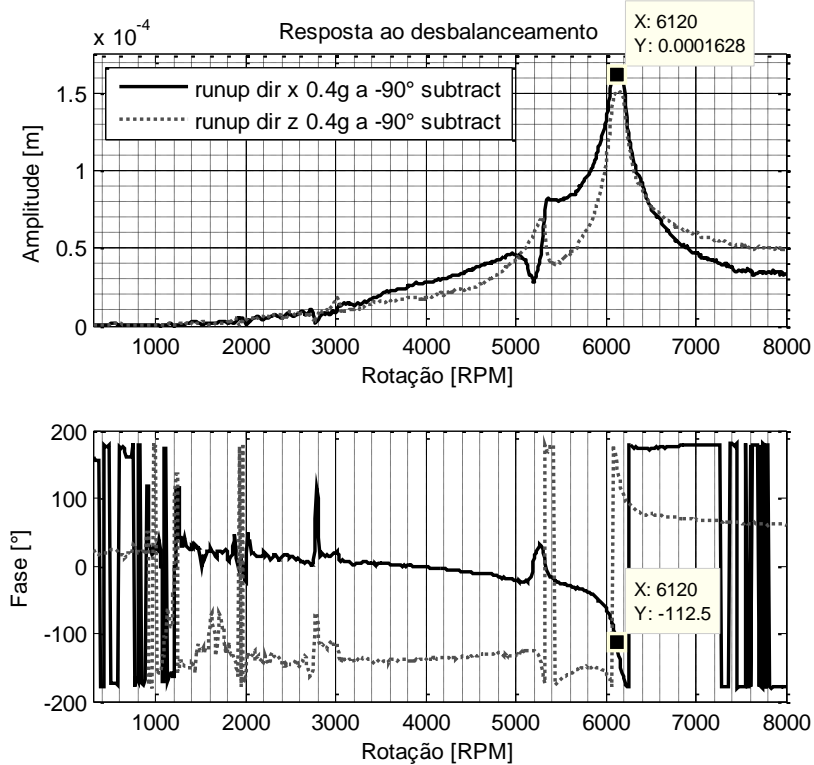


FIGURA 6.25 - RESPOSTA EM RUNUP PARA MASSA DE TESTE DE 0.4G EM -90°.



As repostas ao desbalanceamento obtidas nos ensaios foram comparadas às calculadas. As FIGURA 6.26 e FIGURA 6.27 apresentam comparações das repostas calculadas com as repostas em *runup* e *rundown* respectivamente, para direção X e massa de teste a -135° . Já as FIGURA 6.28 e FIGURA 6.29 apresentam as mesmas comparações mas para a direção Z. As FIGURA 6.30 FIGURA 6.31 apresentam comparações das repostas calculadas com as repostas em *runup* e *rundown* respectivamente, para direção X e massa de teste a -90° . Já as FIGURA 6.32 e FIGURA 6.33 apresentam as mesmas comparações das imediatamente anteriores mas para a direção Z.

Em todas as figuras mencionadas no parágrafo anterior, nota-se que as repostas calculadas apresentam amplitudes superiores na região das rotações críticas quando comparadas às obtidas experimentalmente. Notou-se também que há um “truncamento” no pico de todas as repostas obtidas nos ensaios, ver FIGURA 6.34. Isso pode ter sido ocasionado pelos limitadores que protegem os sensores de deslocamento e o eixo. Há também um “amortecimento” maior nas curvas de teste pelo fato dos picos estarem também mais estreitos e as mudanças de fases estarem ligeiramente mais inclinadas quando comparadas às calculadas. Observou-se também uma grande perturbação na fase para rotações menores em função da subtração do *runout*.

Já pela FIGURA 6.35, constata-se que as rotações críticas estão realmente muito próximas. O erro da rotação crítica calculada em relação à rotação crítica experimental é de cerca de 1,25% em *rundown* e 2,5% em *runup*. Este desvio se enquadra nos 5% tolerável pela API RP 684, 2ª. ed.

FIGURA 6.26 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO X E MASSA A -135°.

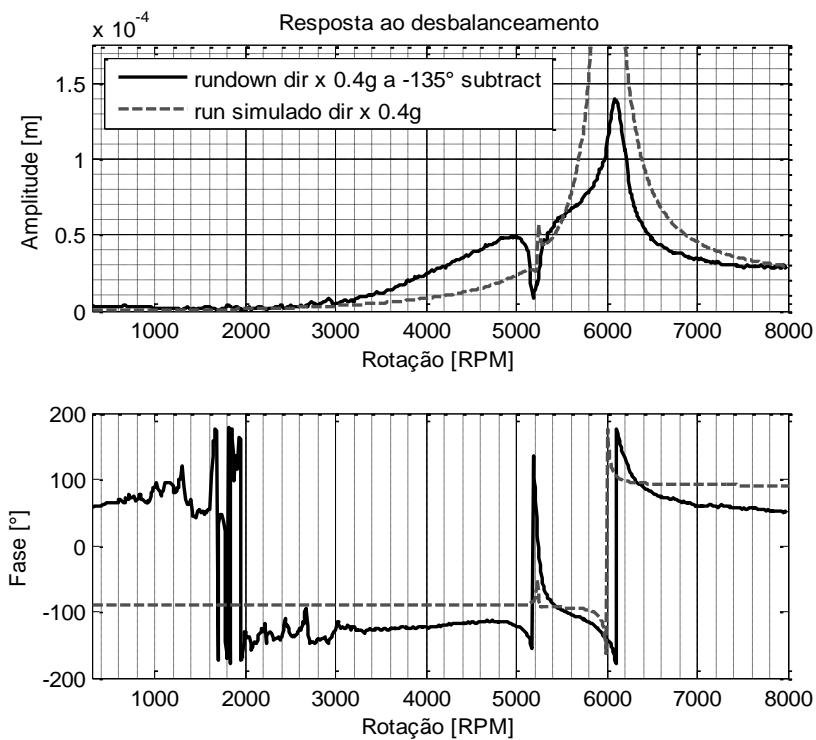


FIGURA 6.27 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO X E MASSA A -135°.

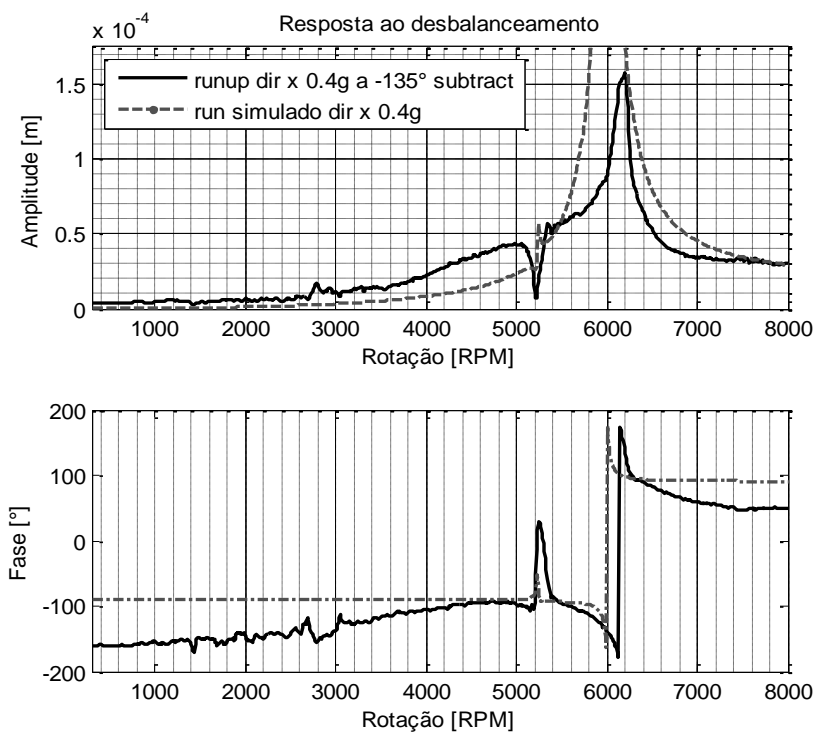


FIGURA 6.28 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO Z E MASSA A -135°.

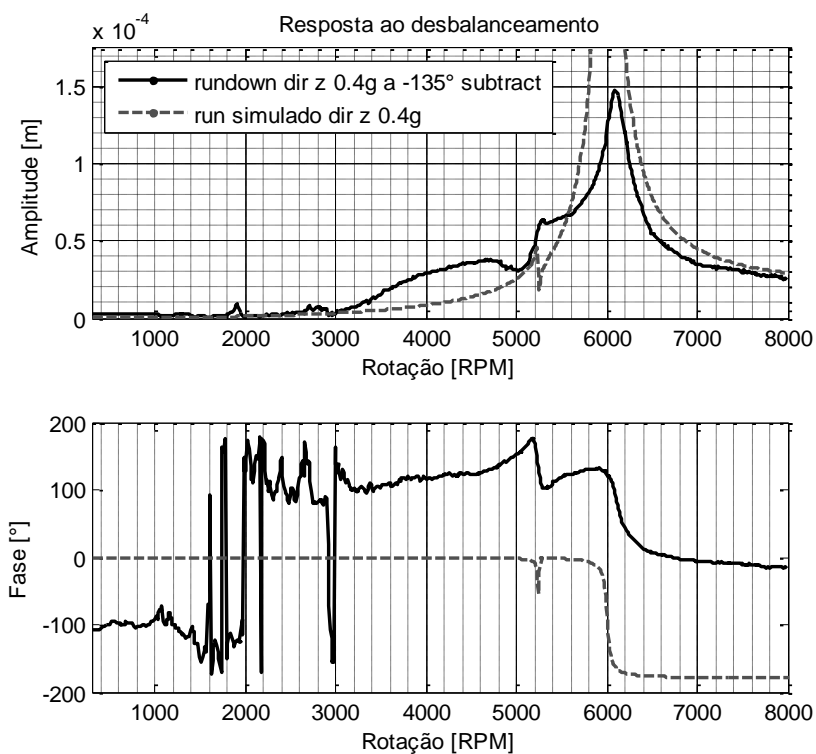


FIGURA 6.29 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO Z E MASSA A -135°.

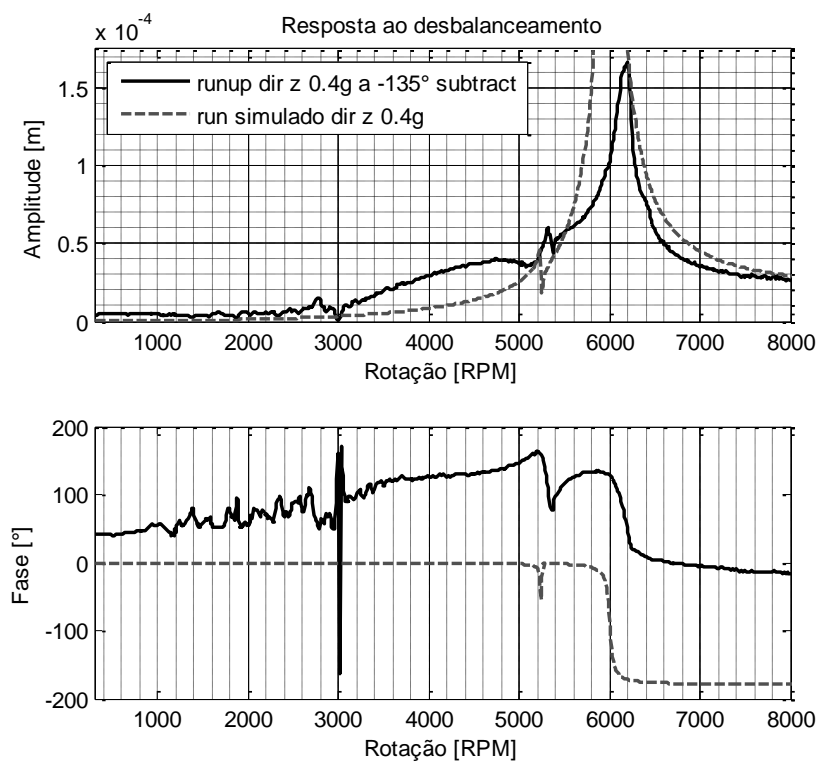


FIGURA 6.30 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO X E MASSA A -90°.

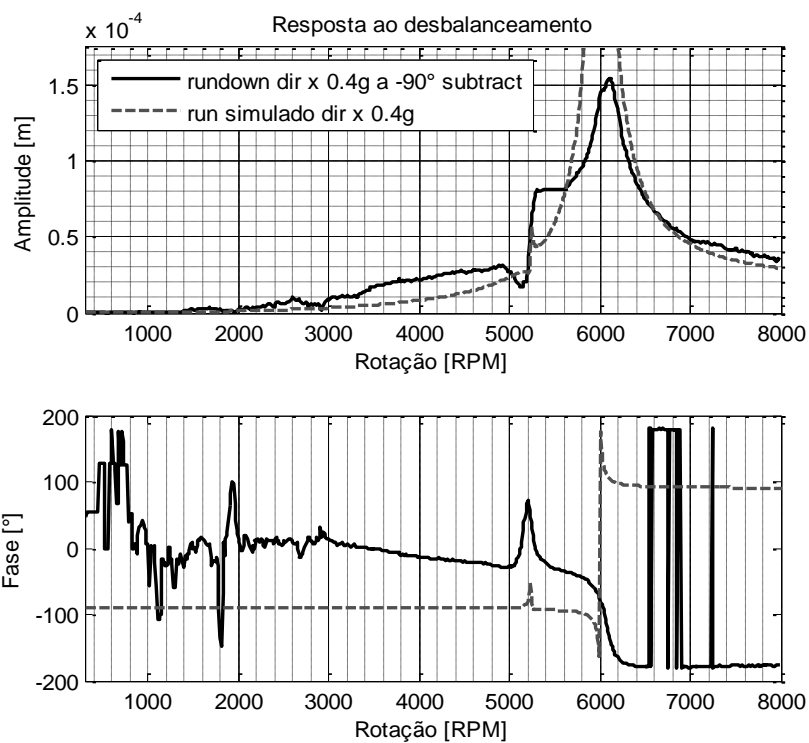


FIGURA 6.31 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO X E MASSA A -90°.

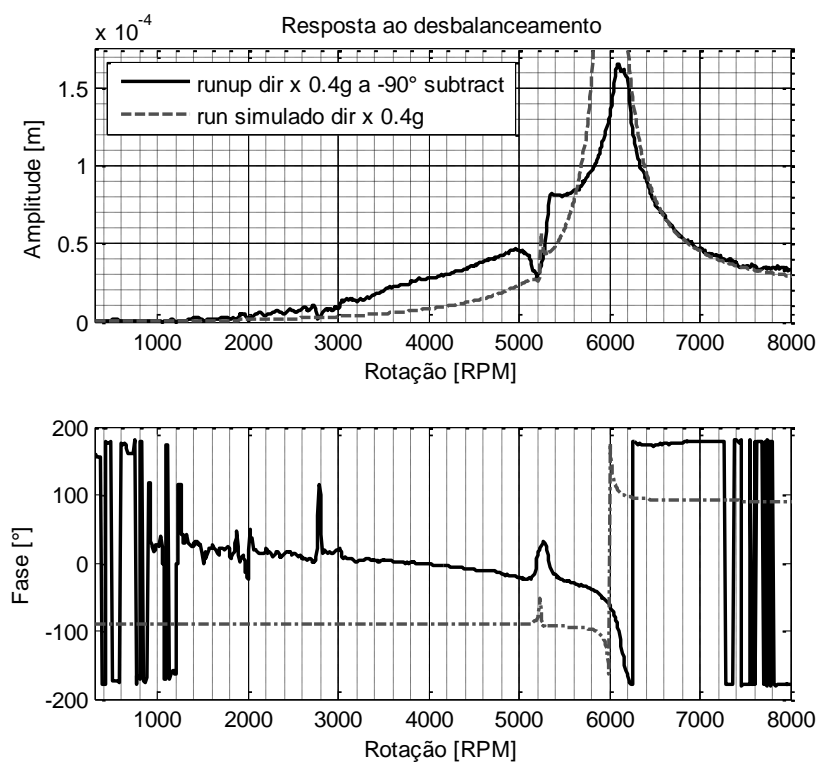


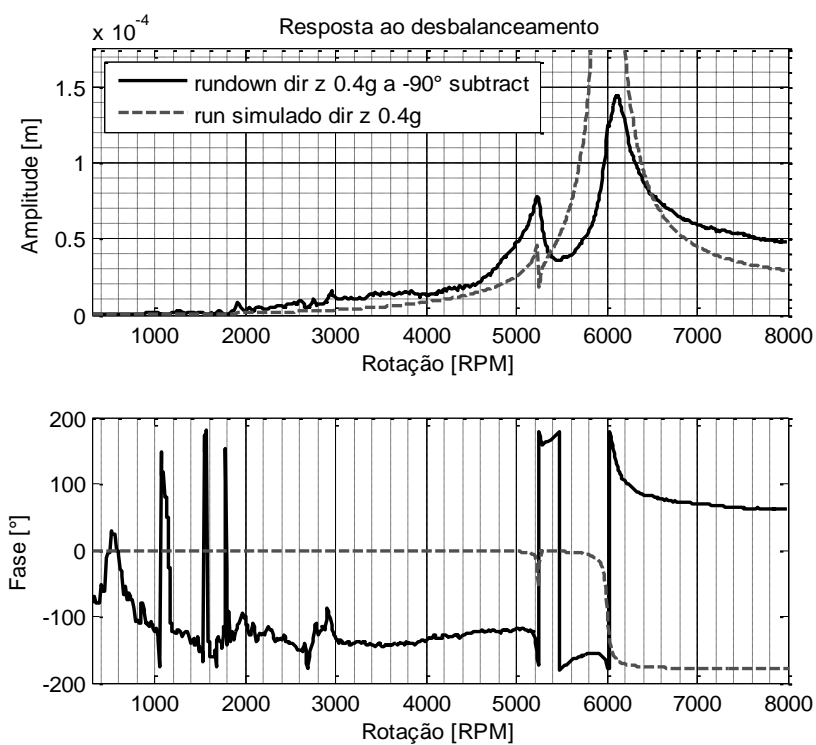
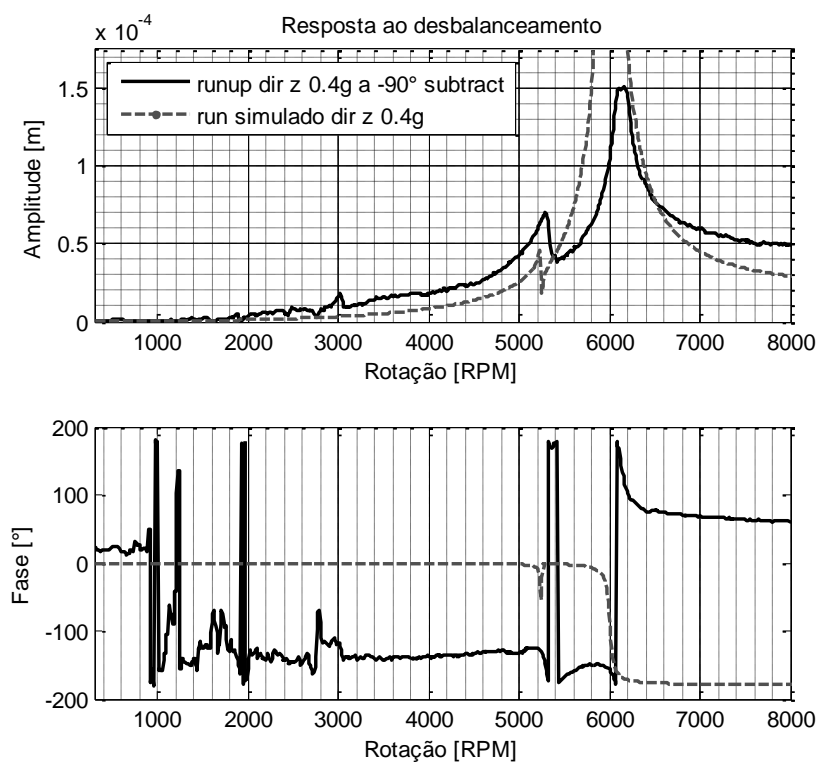
FIGURA 6.32 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNDOWN, DIREÇÃO Z E MASSA A -90° .FIGURA 6.33 - COMPARAÇÃO DE RESPOSTAS EM RUNUP, DIREÇÃO Z E MASSA A -90° .

FIGURA 6.34 - "TRUNCAMENTO" NO PICO DA ROTAÇÃO CRÍTICA.

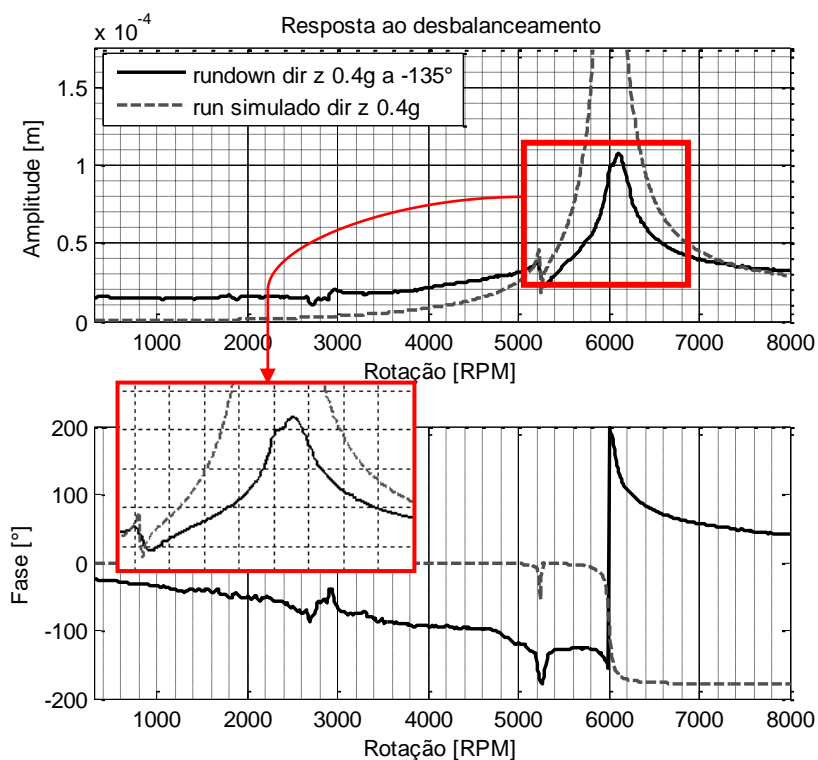
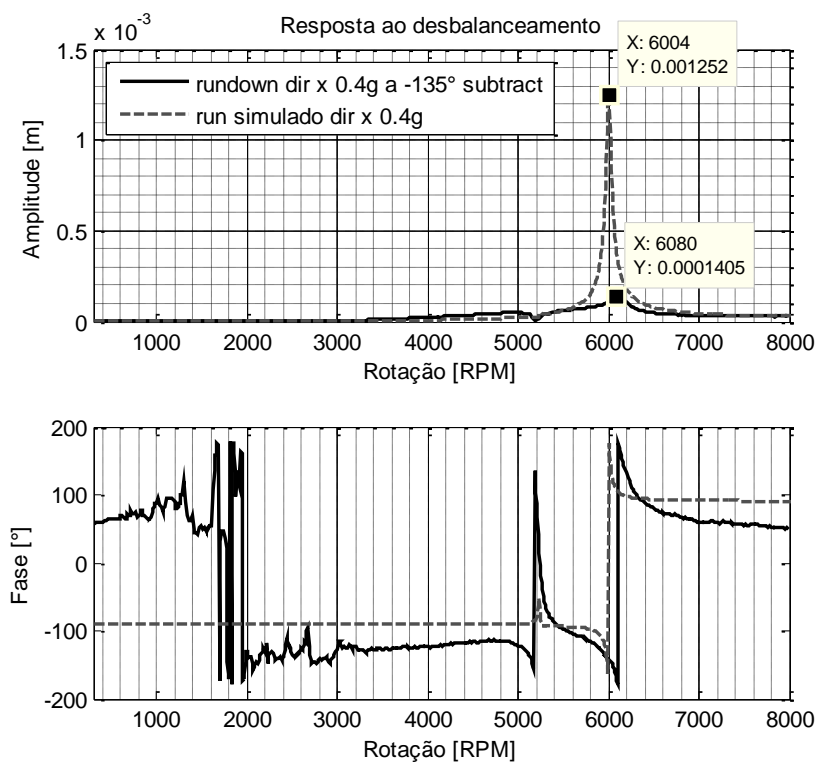
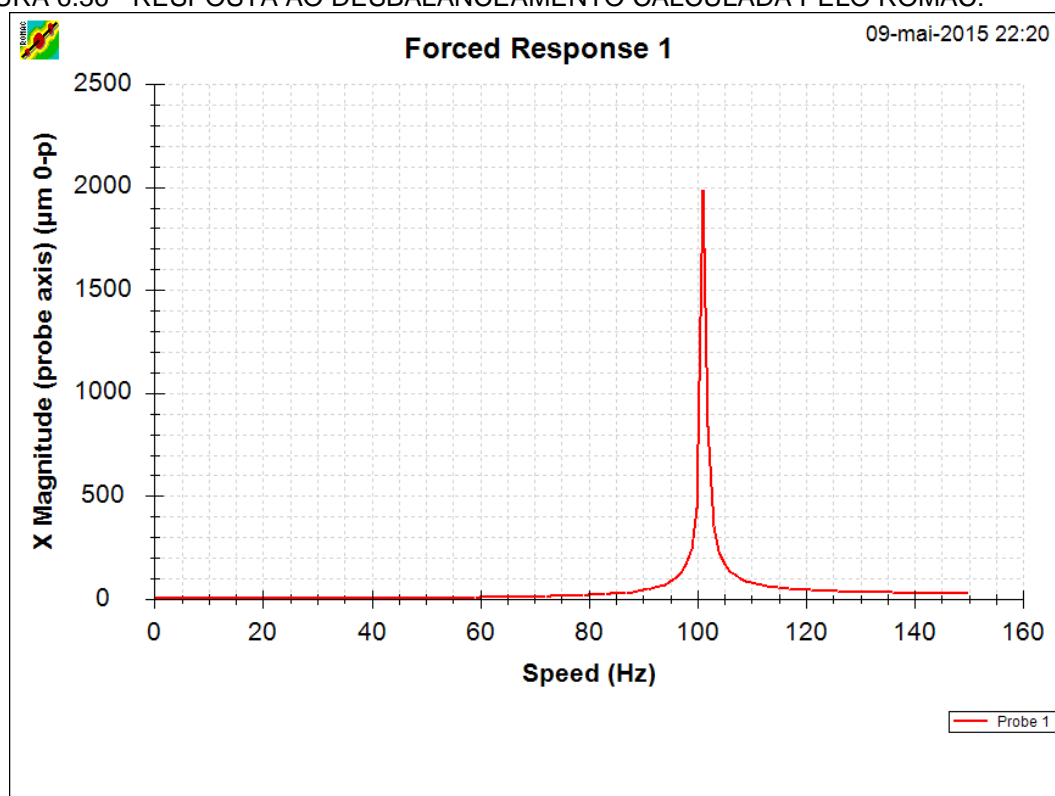


FIGURA 6.35 - DIFERENÇA ENTRE AS AMPLITUDES CALCULADA X EXPERIMENTAL.



O mesmo modelo é simulado em outro software de modelagem rotodinâmica, ROMAC, e os valores de amplitude são cerca de 60% superior ao simulado com o aplicativo próprio, FIGURA 6.36.

FIGURA 6.36 - RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO CALCULADA PELO ROMAC.



Pelo fato da rigidez ser dominada pelo eixo, aumentar o “amortecimento viscoso” nos mancais não altera substancialmente as curvas de desbalanceamento. Entende-se do “amortecimento viscoso” o modelo adotado para considerar amortecimento dos mancais. Não se deseja aqui afirmar que o amortecimento de um mancal de rolamento ocorra exatamente como um mancal de deslizamento. Outra questão diz respeito à rigidez dos mancais. Para que o amortecimento nos mancais seja efetivo, “amortecimento viscoso”, os mancais devem ser suficientemente “macios”. Ou seja, com rigidez não muito elevada para permitir o movimento associado à velocidade e conseqüentemente dissipação da energia. A suspeita sobre esse amortecimento adicional recai sobre um amortecimento angular gerado diretamente na pista de auto compensação. Quando o rotor é montado em mancais de rolamento rígido de uma carreira de esferas e sem MVE, só se consegue passar

pela rotação crítica com batentes mecânicos próximos ao rotor para não danificar eixo e *proximeters*. O ruído gerado pelo toque do rotor nos batentes é muito elevado. Após a montagem dos autocompensadores, a passagem pelas rotações críticas é possível sem que o rotor “aparentemente” tocasse os batentes mecânicos. Não se ouve mais o ruído de toque provocado pelo eixo nos batentes.

Suspeita-se que há um amortecimento nos graus de liberdade de rotação para as direções X e Z junto aos mancais. Este amortecimento pode explicar a diferença observada entre as curvas calculadas e obtidas nos testes. O modelo de mancal adotado lineariza os mancais de rolamento e adota somente as componentes principais da matriz de rigidez. Há também com frequência uma estimativa grosseira dos coeficientes de amortecimento viscoso equivalente (ZEILINGER, R. & KÖTTRITSCH, H. 1996).

6.3 ROTOR COM APLICAÇÃO DE MVE NOS MANCAIS.

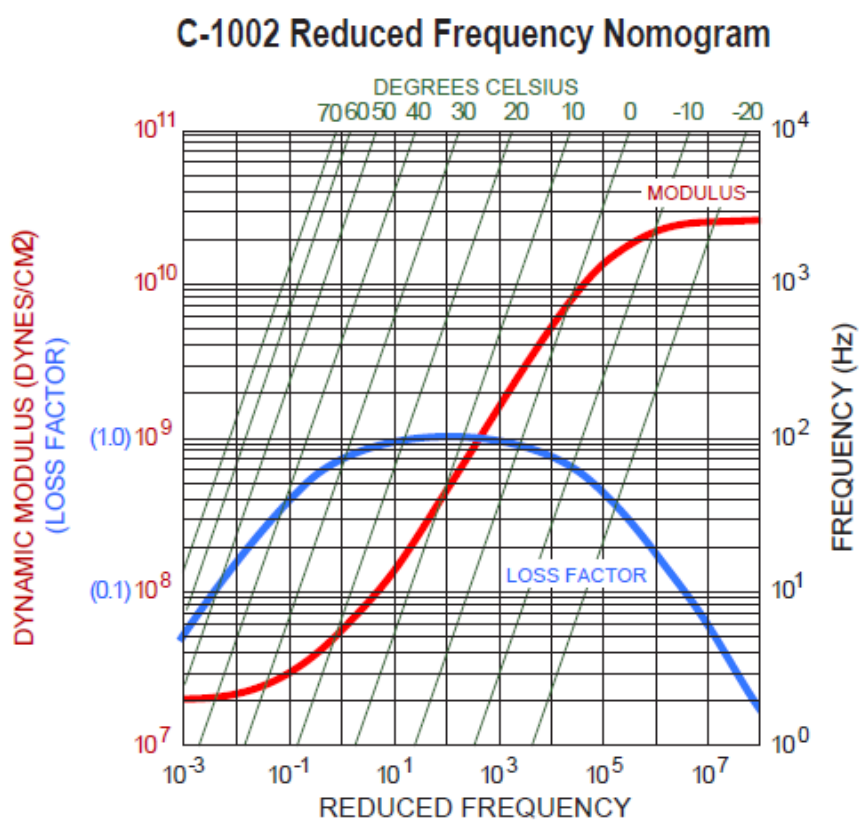
Tomando o modelo da FIGURA 6.7 como base, é possível agregar os elementos viscoelásticos aos mancais e proceder novamente os ensaios de resposta ao desbalanceamento. O MVE empregado foi o C-1002. Este material foi fornecido pela empresa *E-A-R Specialty Composites*. Uma unidade da companhia *Aero Technologies* pertencente ao grupo *3M*. A FIGURA 6.37 traz uma fotografia da manta utilizada.

Os dados dinâmicos do C-1002 foram obtidos a partir de ajustes das curvas do nomograma do material, ver FIGURA 6.38. O módulo dinâmico da FIGURA 6.38 é o módulo de Young.

FIGURA 6.37 - MANTA DE C-1002 UTILIZADA NOS SETORES DE MVE.



FIGURA 6.38 - NOMOGRAMA PARA O C-1002 (ISODAMP® C-1000 SERIES ISOLATION MATERIALS, TECHNICAL DATA SHEET 19).



No capítulo 3 é apresentado o modelo de 4 parâmetros, o qual é utilizado neste trabalho para descrever o MVE através da equação 3.19. A partir do nomograma da FIGURA 6.38, é possível extrair dados para determinar os parâmetros para cálculo do módulo complexo. Os parâmetros E_0, E_∞, φ_0 e α são obtidos por técnica de otimização não linear (TONL). A rotina “*fmincon*” da biblioteca de soluções para problemas de otimização não linear restritos do MATLAB foi empregada. O QUADRO 6.2 apresenta um resumo do problema de otimização não linear.

QUADRO 6.2 - RESUMO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR PARA PARÂMETROS DE MVE.

Formulação do problema de otimização não linear:

Dados especificados: $\{\Omega_R\}$, $\{E(\Omega_R)\}$ e $\{\eta(\Omega_R)\}$, todos dados extraídos do nomograma.

Variáveis de projeto: E_0, E_∞, φ_0 e α

Função objetivo:

$$\text{Minimizar } \frac{\|\{E_{\text{calculado}}(\Omega_R)\} - \{E(\Omega_R)\}\|}{N^\circ \text{ de elementos de } E(\Omega_R)}$$

Onde $E_{\text{calculado}}(\Omega_R)$ corresponde a parte real do módulo complexo.

Restrições

$$0 < \varphi_0 < 0.1$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$1.8 \times 10^6 < E_0 < 2.2 \times 10^6$$

$$2.2 \times 10^9 < E_\infty < 2.8 \times 10^9$$

Os valores ótimos obtidos através TONL são:

$$\varphi_0 = 6.460\text{E-}04 \quad (6.1)$$

$$\alpha = 5.450\text{E-}01$$

$$E_0 = 1.967 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$E_\infty = 2.582 \times 10^9 \text{ Pa}$$

A partir dos parâmetros determinados é possível comparar as curvas calculadas pelo modelo de quatro parâmetros com as curvas obtidas nos nomogramas. As FIGURA 6.39 e FIGURA 6.40 apresentam gráficos comparativos do módulo dinâmico e do fator de perda respectivamente. As curvas com linhas contínuas são extraídas do nomograma. Já as curvas com linhas tracejadas são as linhas calculadas pelo modelo de quatro parâmetros.

FIGURA 6.39 - GRÁFICO COMPARATIVO DO MÓDULO DINÂMICO.

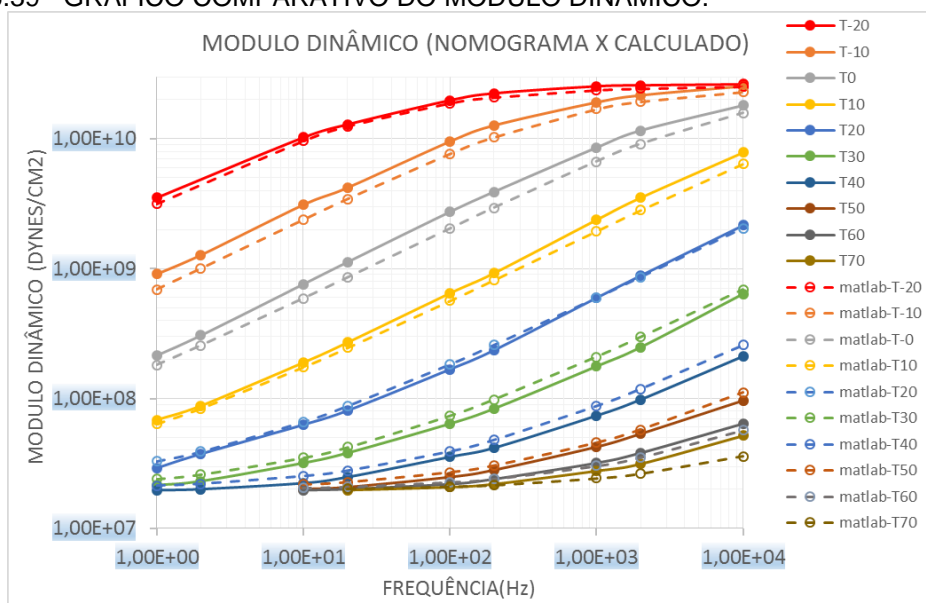
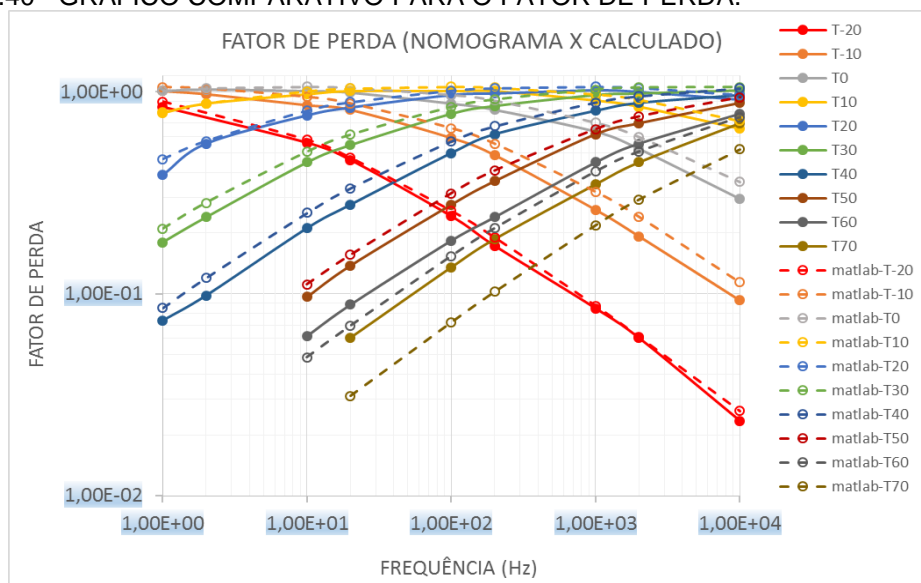


FIGURA 6.40 - GRÁFICO COMPARATIVO PARA O FATOR DE PERDA.



A temperatura média medida nos setores de MVE durante os ensaios é de 20°C. Para esta temperatura, as curvas calculadas nas FIGURA 6.39 e FIGURA 6.40 apresentam boa correlação com as curvas do nomograma. Logo, com todos os parâmetros determinados alimenta-se a tabela de entrada de dados do MVE para simulação, ver FIGURA 6.41.

FIGURA 6.41 - PROPRIEDADES DO MVE C-1002.

MVE	N° do mancal	G0 / E0 [Pa]	Goo / Eoo [Pa]	Phi0G/E	alfaG/E	P.Geom.[m] X/Z	Theta1G/E	Theta2G/E	T0G/E [k]	Massa [kg]
1	1	655968	8.60738e+08	0.000646	0.545	0.0314	24.2078	249.808	286.345	0.0324
		1.9679e+06	2.58221e+09	0.000646	0.545	0.0314	24.2078	249.808	286.345	
2	2	655968	8.60738e+08	0.000646	0.545	0.0314	24.2078	249.808	286.345	0.0324
		1.9679e+06	2.58221e+09	0.000646	0.545	0.0314	24.2078	249.808	286.345	

Na FIGURA 6.41 há um campo definido como P.Geom. Trata-se do parâmetro de entrada do fator de forma. O método para determinação do fator de forma é definido no capítulo 5. Na FIGURA 6.1 (e) vê-se a disposição dos quatro setores de MVE simetricamente posicionados em relação ao plano cartesiano XZ. Cada setor de MVE possui comprimento de 9mm ao longo de toda a largura do rolamento, altura e espessura de 3mm. Os setores são colados na pista externa do rolamento e na caixa do mancal com uma cola a base Éster de Cianocrilato. A partir da configuração adotada, fez-se a simulação ilustrada na FIGURA 5.6 para obtenção do fator de forma. A TABELA 6.2 sumariza os passos bem como o resultado obtido.

TABELA 6.2 - DADOS PARA CÁLCULO DO FATOR DE FORMA.

MVE 3mm x 3mm x 9mm	
Deslocamento prescrito (ΔX) [m]	1.000e-4
Força de reação (F) [N]	6.185
Rigidez (K) [N/m]	6.185e-4
Módulo de elasticidade (E) [Pa]	1.968e6
Fator de forma (FG) [m]	0.0314

A mesmas configurações de ensaios resumidas na TABELA 6.1 são utilizadas para os testes empregando MVE na capa externa dos mancais. A exposição dos gráficos a seguir é a mesma adotada para os resultados sem MVE.

As FIGURA 6.42 FIGURA 6.43 apresentam as respostas ao desbalanceamento obtidas em *rundown* e *runup*, respectivamente. Novamente, a intenção de se representar todas as curvas juntas é a de observar os detalhes que são comuns a todas as corridas. O *runout* nos dois gráficos é cerca de $30\mu\text{m}$, mais de 4 vezes o valor recomendado (API RP 684, 2ª. ed, 2010). Diferente das respostas sem MVE, vê-se que as respostas com aplicação das massas de teste já não apresentam uma grande diferença na amplitude na região da rotação crítica. Isto em função do amortecimento introduzido pelas mantas de MVE. Contudo, a identificação da primeira rotação crítica *forward* se dá a contento. Também não se observa mais nos “picos” que há uma pequena diferença na rotação crítica entre as corridas em *runup* e *rundown*. Mas há uma diferença aparente no fator de amplificação. Este último aspecto sugere uma redução considerável da assimetria para as direções X e Z do mancal. Obviamente motivada pela inserção de MVE simetricamente distribuído e também menos rígido. Uma vez que a rotação crítica passou a estar próxima de 5400 RPM. Ou seja, uma redução de cerca de 600 RPM em relação ao sistema sem MVE. Nos gráficos de fases observa-se claramente uma mudança antes da passagem pela rotação crítica. Os valores das fases mudam, começam a “subir”, antes da “descida” indicando a passagem. Esta é novamente uma contribuição do *runout* elevado. Todos os gráficos de amplitude, para ambas as corridas, apresentam um decréscimo até cerca de 2400 RPM. Algumas curvas “reagem”, têm aumento de amplitude a partir desse ponto, em especial as obtidas para a direção X. Já as curvas para a direção Z só “reagem” próximo dos 3600 RPM. Há também cruzamentos de fase em rotações com pouca diferença de amplitude, comparando uma corrida com e sem massa de teste. Este último aspecto é muito importante para o entendimento do que ocorreu com as curvas pós subtração de *runout* e desbalanceamento residual para o rotor com MVE. Outro fator que influencia na medição, e conseqüentemente na determinação da fase, é o fato do eixo ser extremamente delgado quando comparado ao diâmetro da ponta dos *proximeters*.

FIGURA 6.42 - RESPOSTAS EM RUNDOWN COM MVE APLICADO AOS MANCAIS.

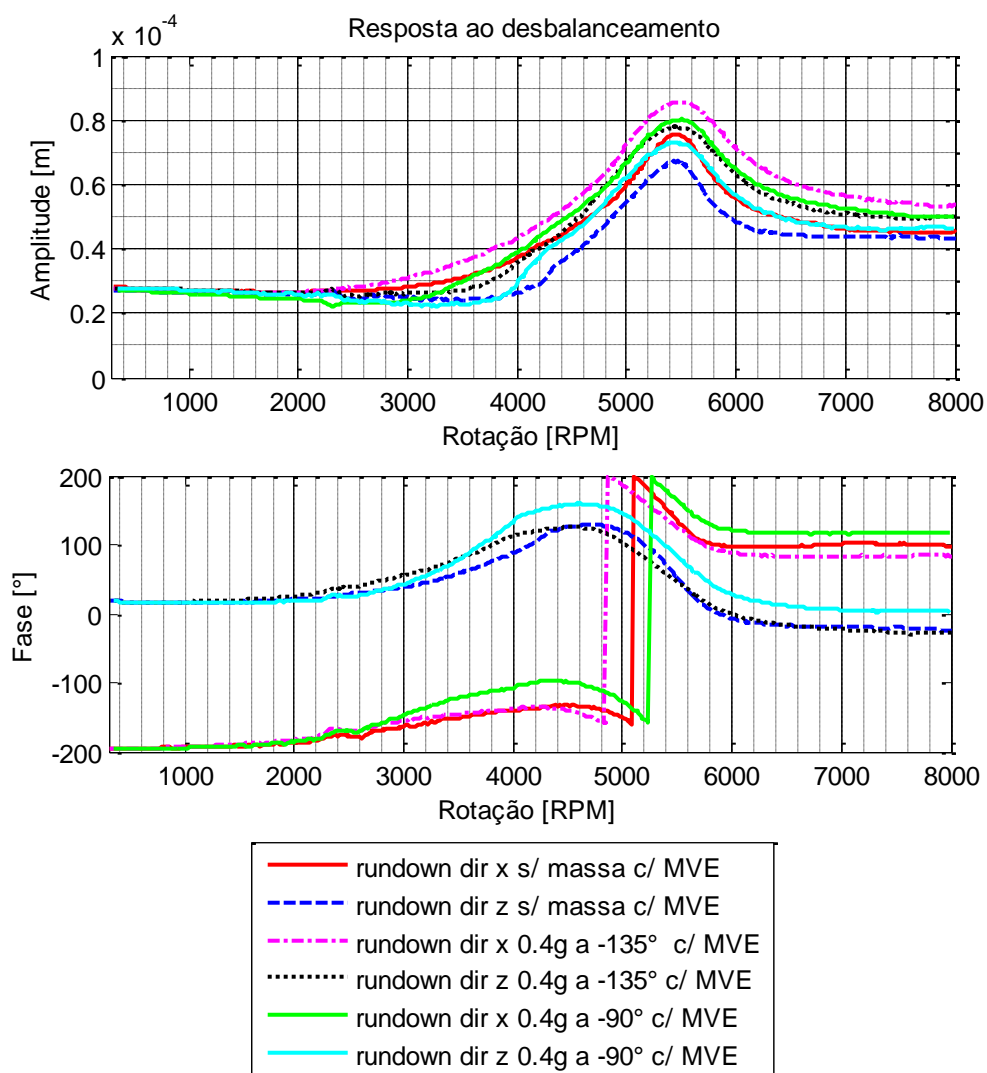
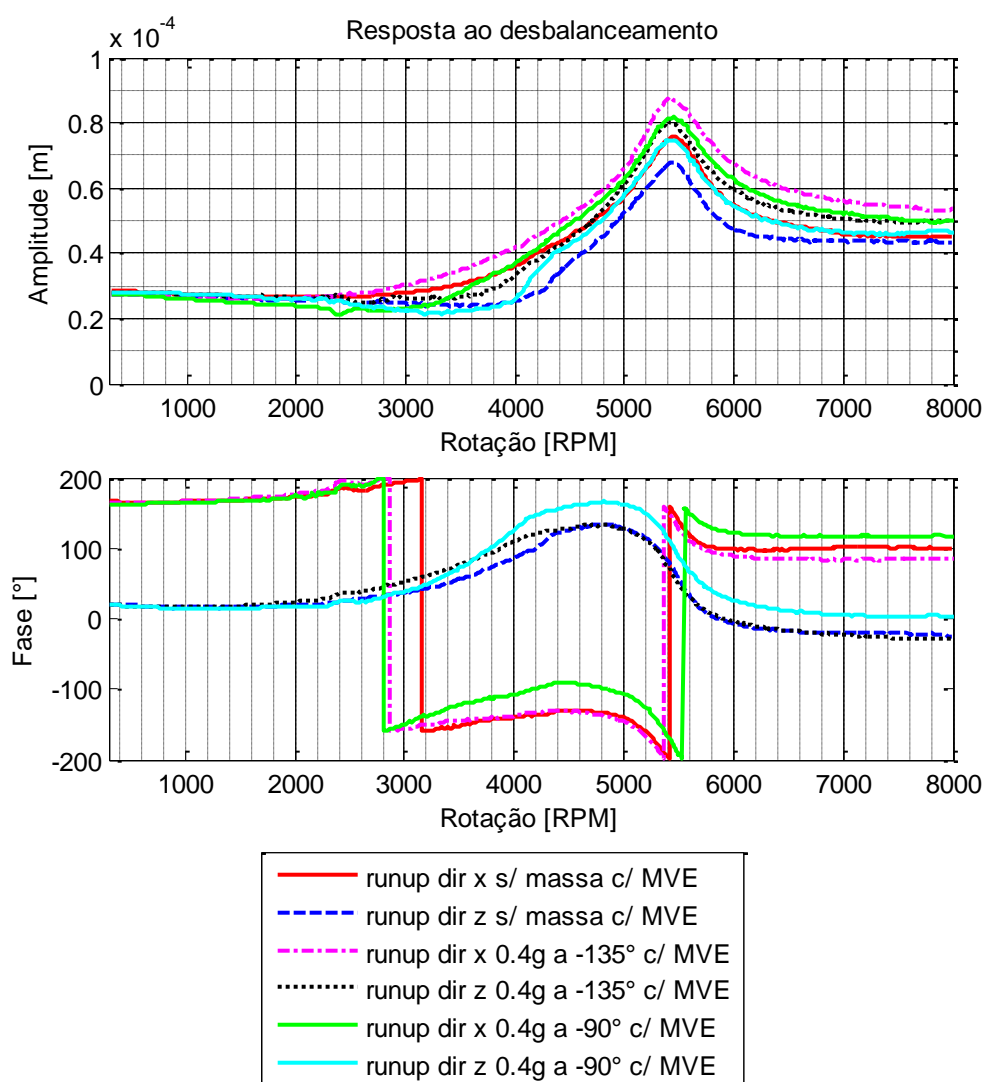


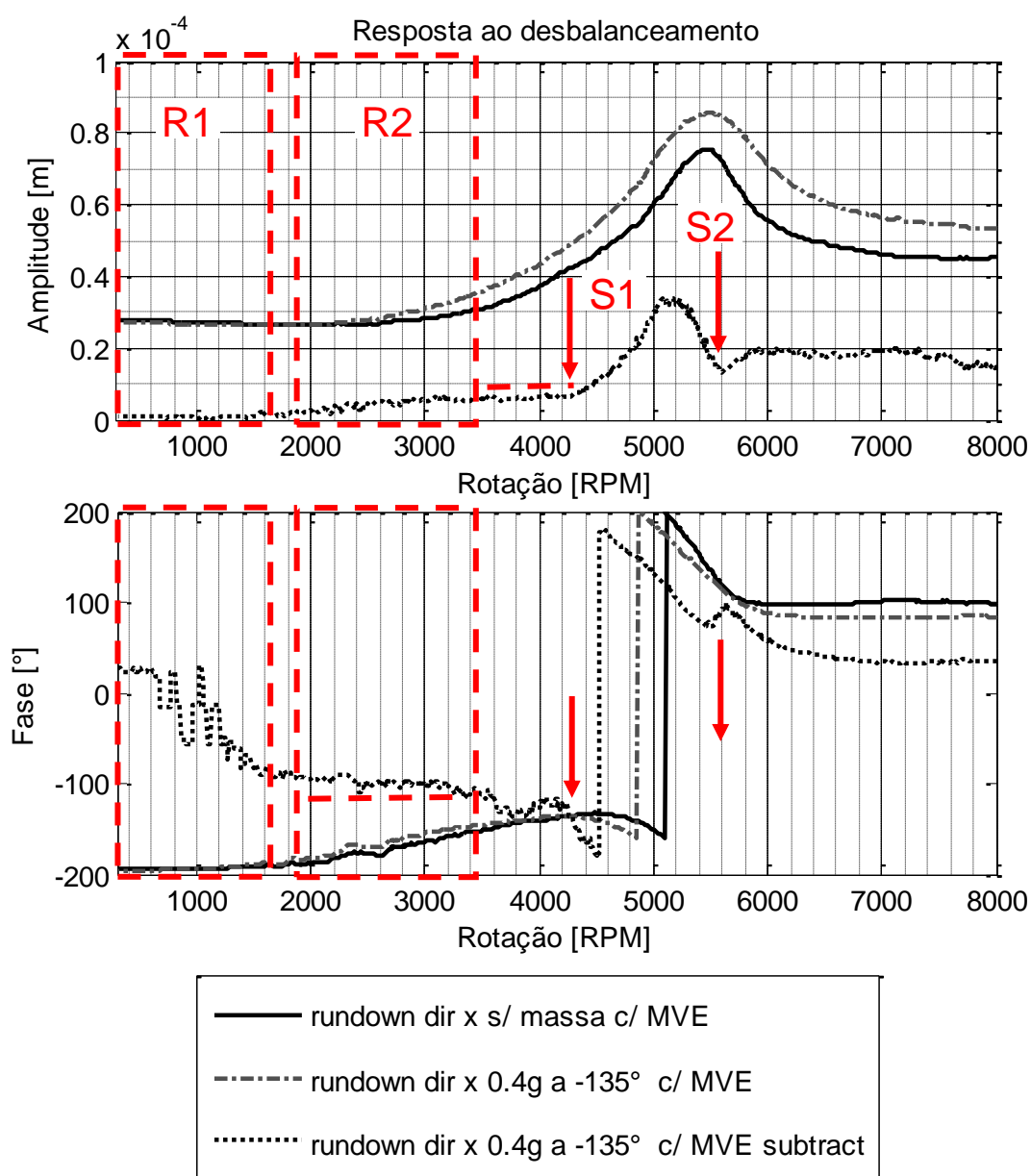
FIGURA 6.43 - RESPOSTAS EM RUNUP COM MVE APLICADO AOS MANCAIS.



A FIGURA 6.44 apresenta o resultado obtido para a curva de resposta ao desbalanceamento, em *rundown* na direção X e massa de teste a -135° , pós subtração de *runout* e desbalanceamento residual. Para ilustrar o que ocorre em função da existência de *runout* elevado e de fatores que afetam a medição da fase, foram introduzidos no gráfico retângulos delimitando regiões e setas para indicações pontuais. Na região R1, vê-se que após subtração a amplitude é praticamente nula, como se espera da subtração de *runout*. Contudo, a amplitude só começa a subir, pelo efeito do desbalanceamento, quando há o “afastamento” das fases nas curvas de origem. Isso ocorre a partir de 1600 RPM. Até esta rotação, a fase resultante da subtração não se define, as fases iniciais são muito próximas e a amplitude também é praticamente a mesma. Ou seja, o *runout* domina a leitura. Na região R2, o efeito

do desbalanceamento residual começa a aparecer e o descolamento da fase é evidente. Conseqüentemente, a fase resultante da subtração é praticamente constante, como se espera para regiões onde não há forte influência de rotações críticas. Observa-se também que a amplitude cresce sob ação do desbalanceamento.

FIGURA 6.44 - EFEITO DE POSSÍVEIS ERROS NA MEDIÇÃO DE FASE NAS RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -135° .



Acima de 3400 RPM as fases das curvas de origem voltam a se aproximar. Isso faz com que a amplitude subtraída praticamente não suba, mesmo com o aumento da rotação. Na seta S1, há um cruzamento das fases das curvas de origem. A fase resultante da subtração mudou drasticamente. A partir de S1 as fases se afastam novamente o que permite a amplitude se elevar em função do desbalanceamento e proximidade da rotação crítica. Em 5600 RPM as fases das curvas de origem voltam a se aproximar. Isto resulta na “destruição” da amplitude na região de influência da rotação crítica bem como uma perturbação na fase resultante da subtração. Para todas as corridas foram observados os mesmos comportamentos. As demais operações de subtração das respostas ao desbalanceamento são apresentadas graficamente a partir da FIGURA 6.45 até a FIGURA 6.51.

FIGURA 6.45 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -135° .

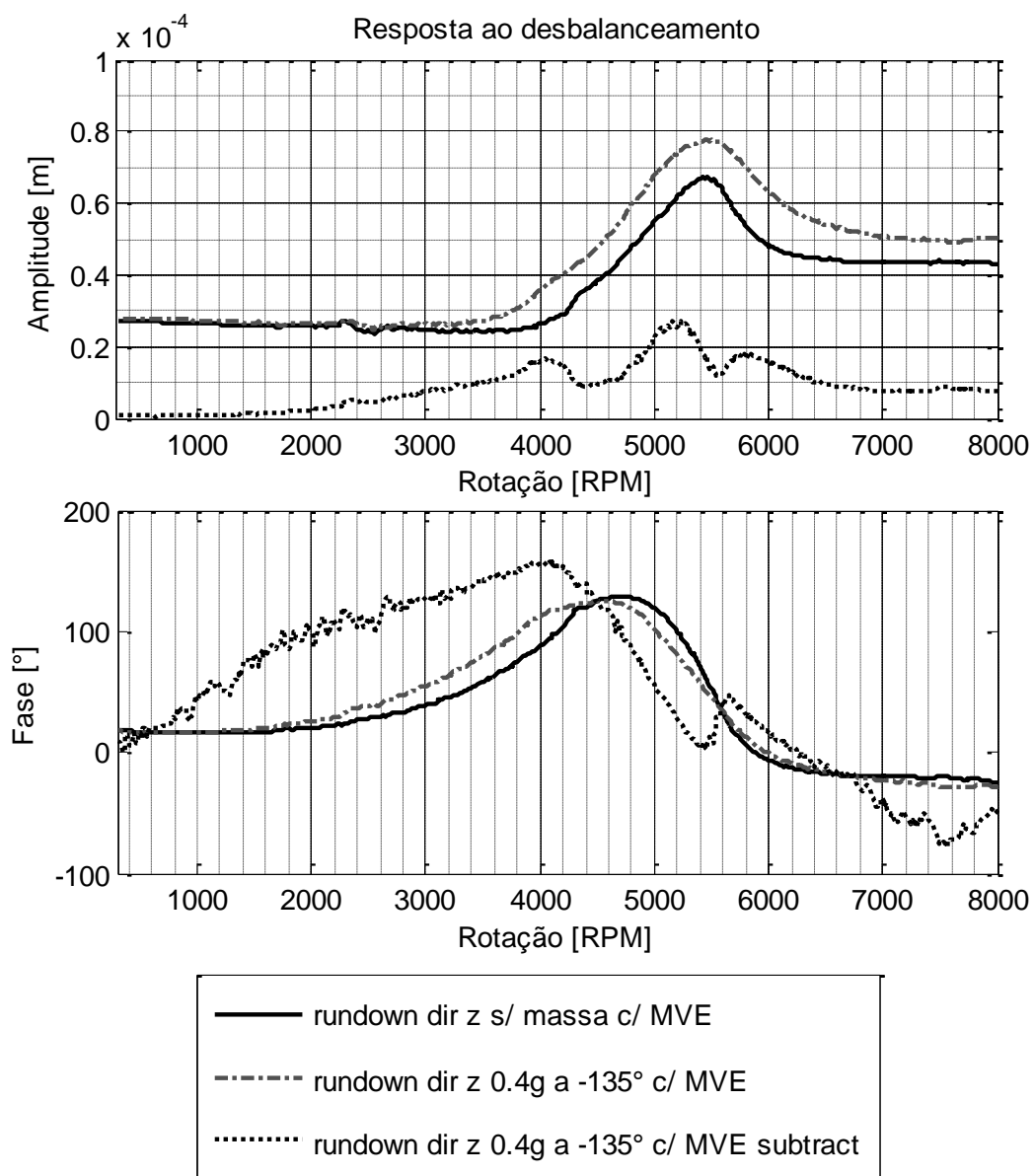


FIGURA 6.46 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -135° .

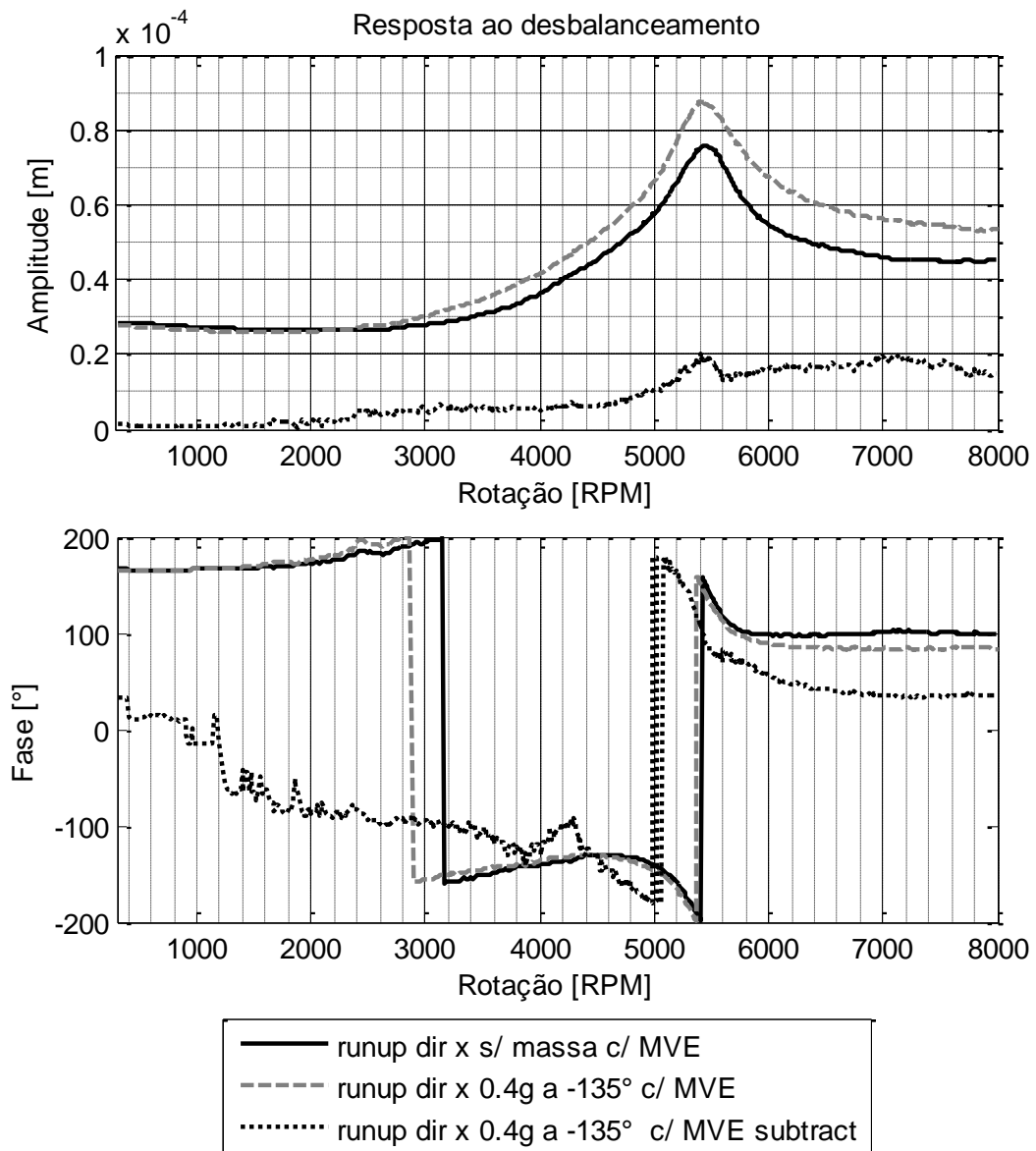


FIGURA 6.47 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -135° .

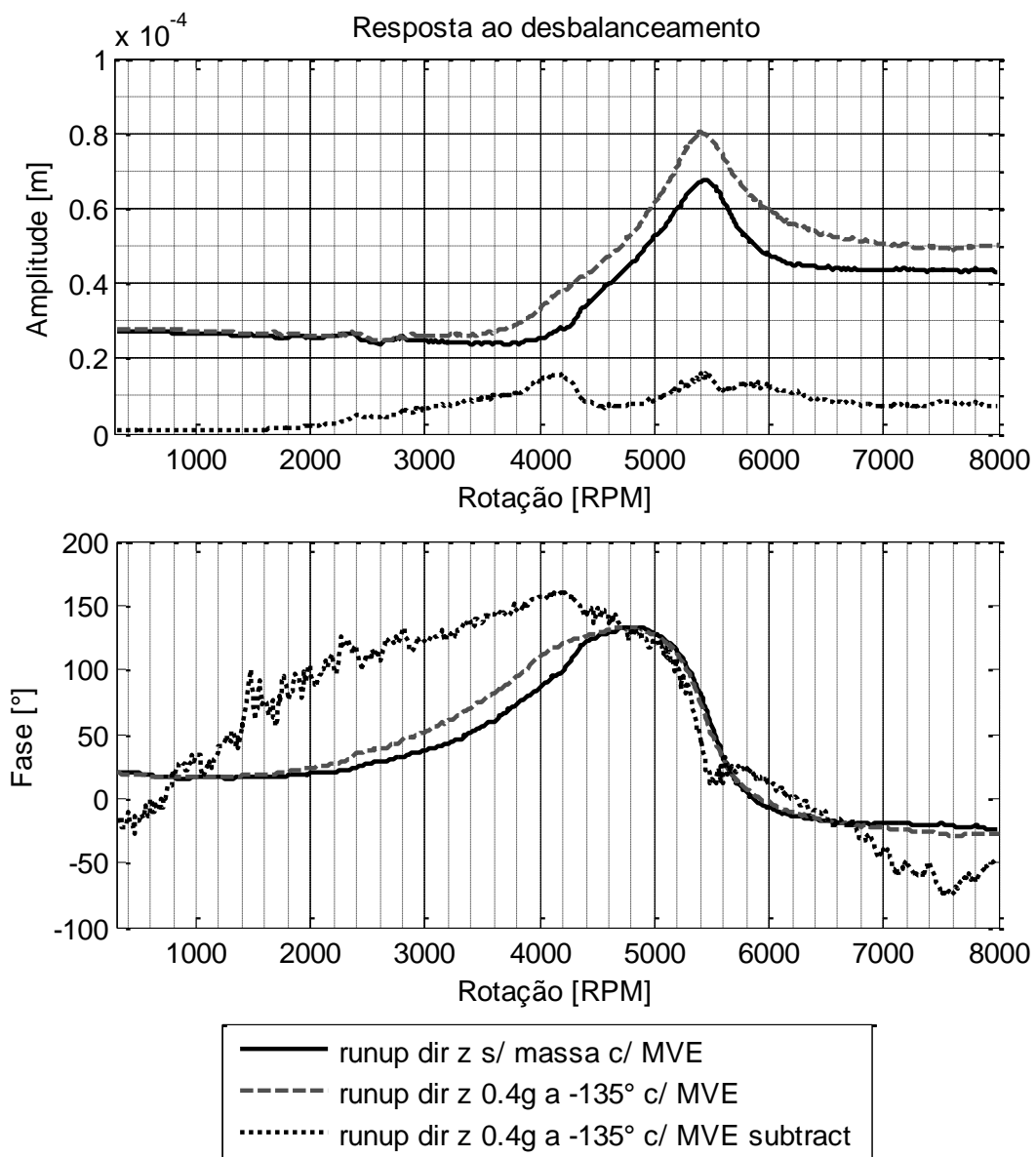


FIGURA 6.48 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -90° .

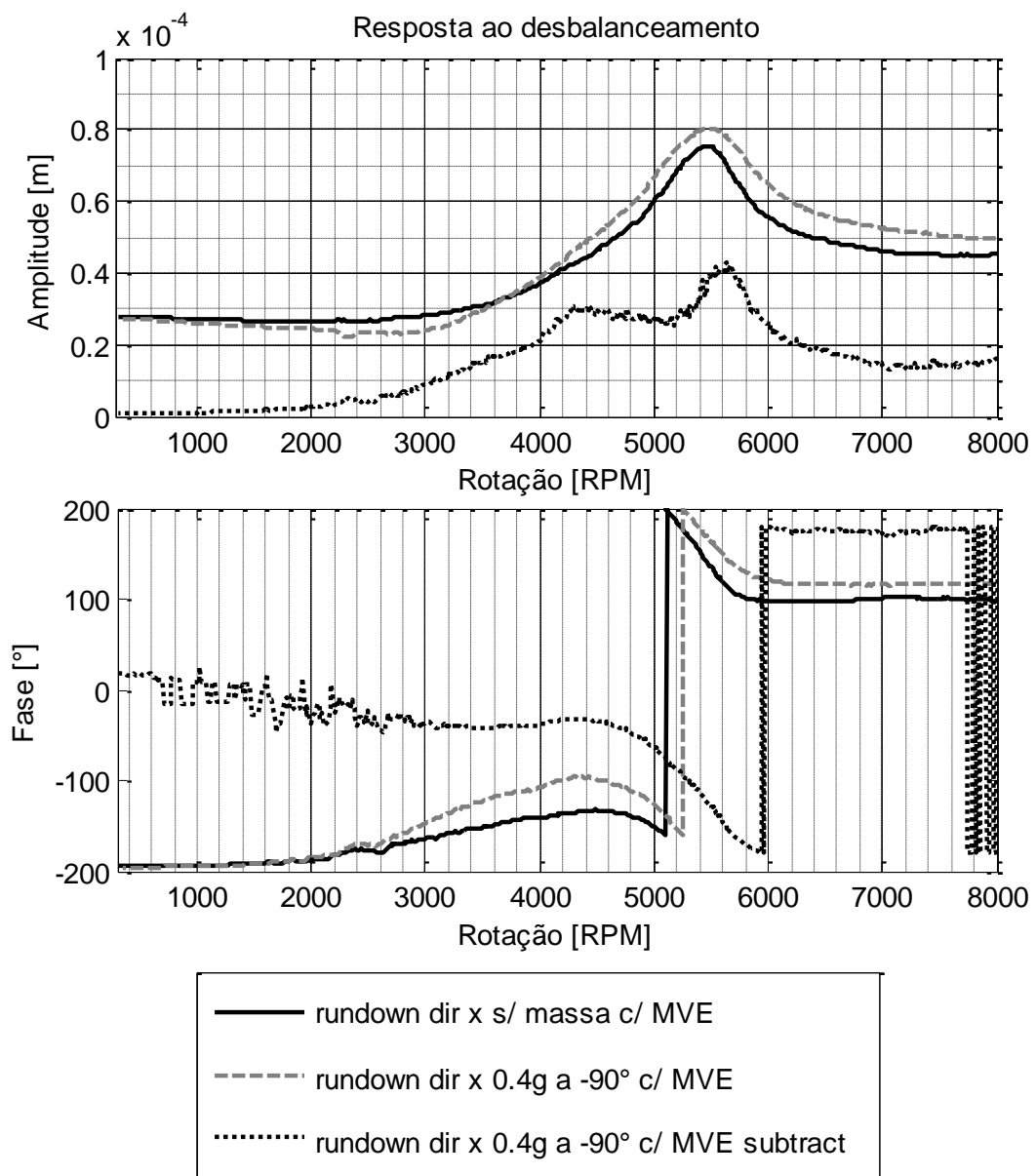


FIGURA 6.49 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNDOWN, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -90° .

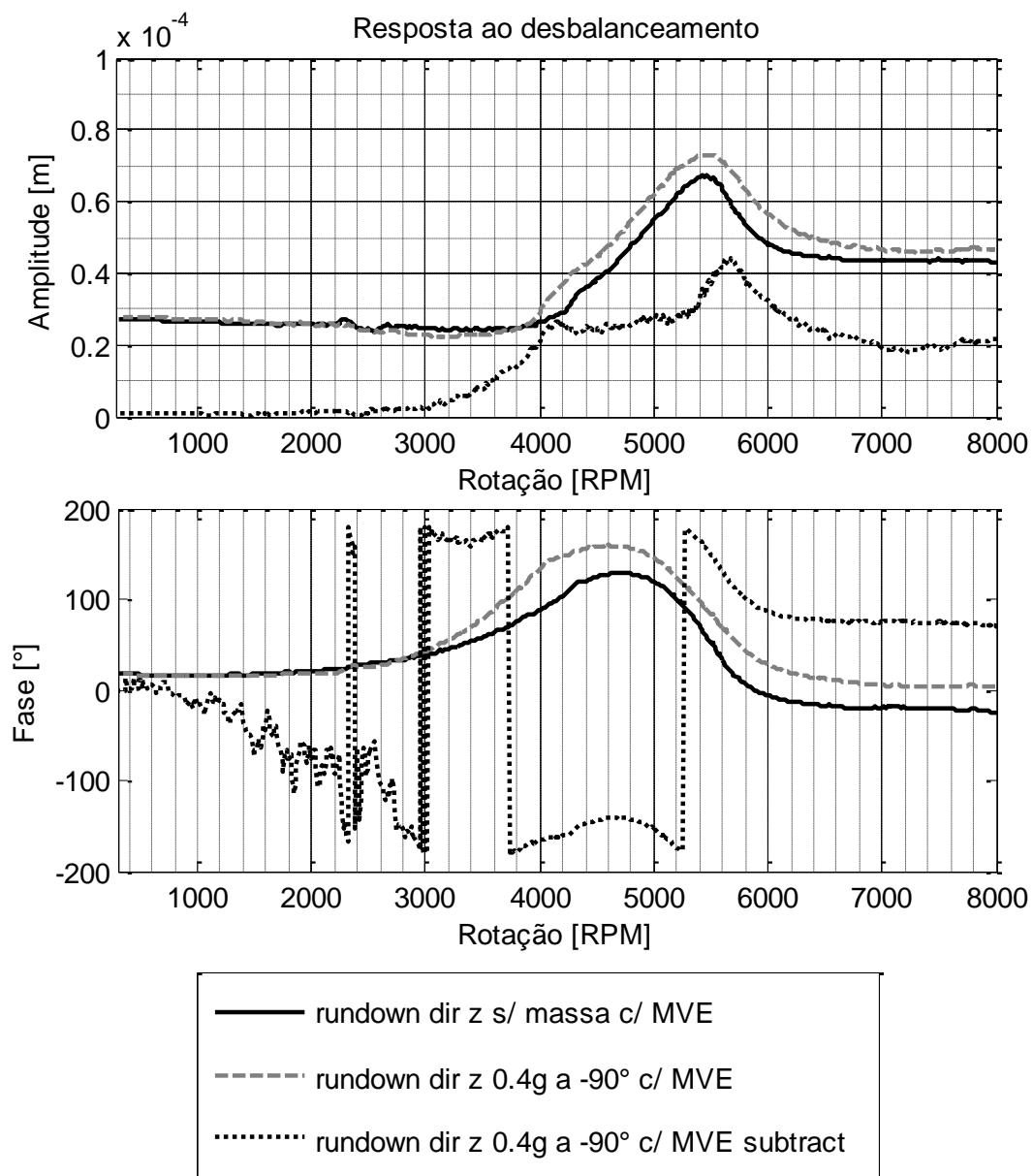


FIGURA 6.50 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO X E MASSA DE TESTE A -90° .

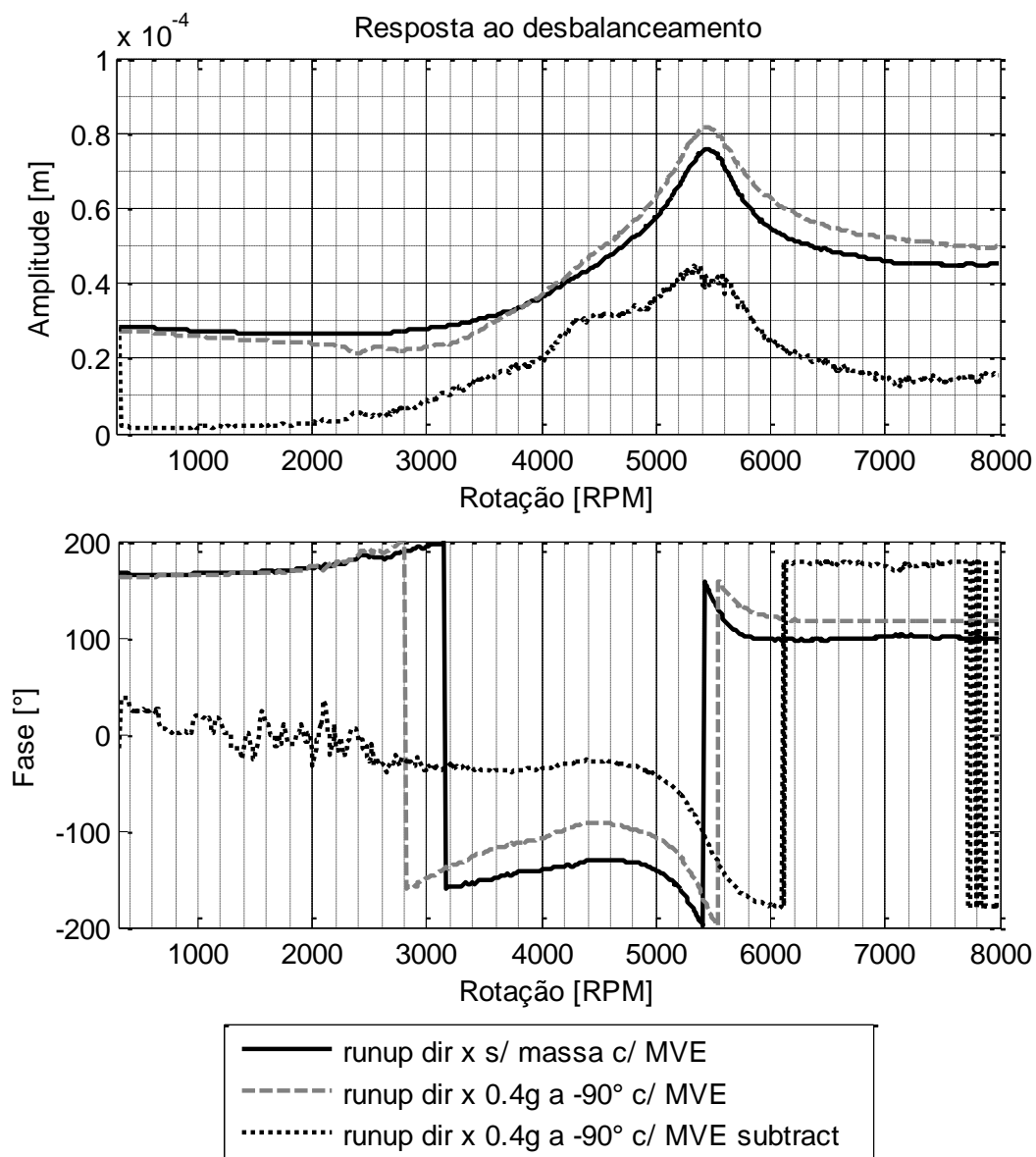
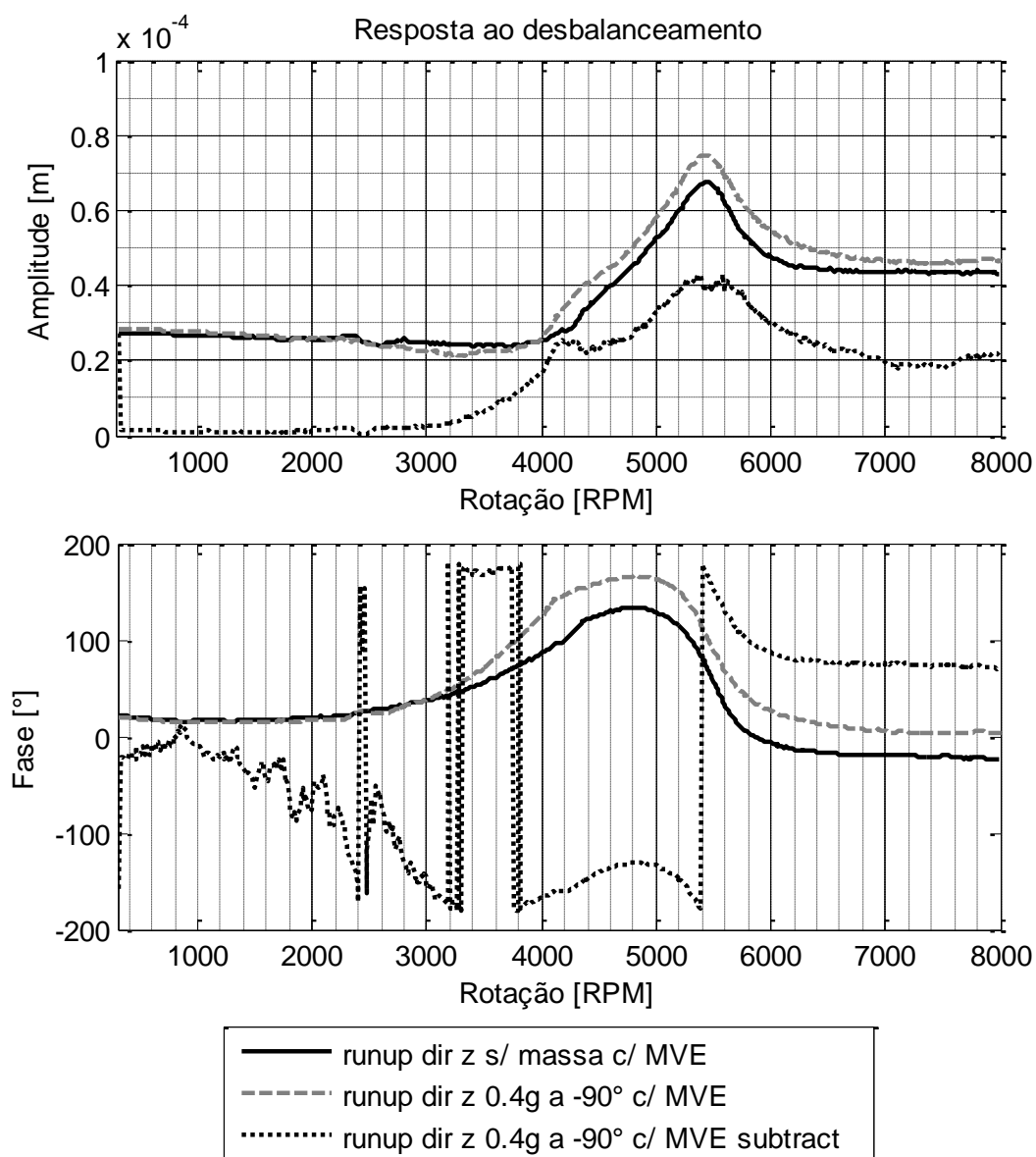


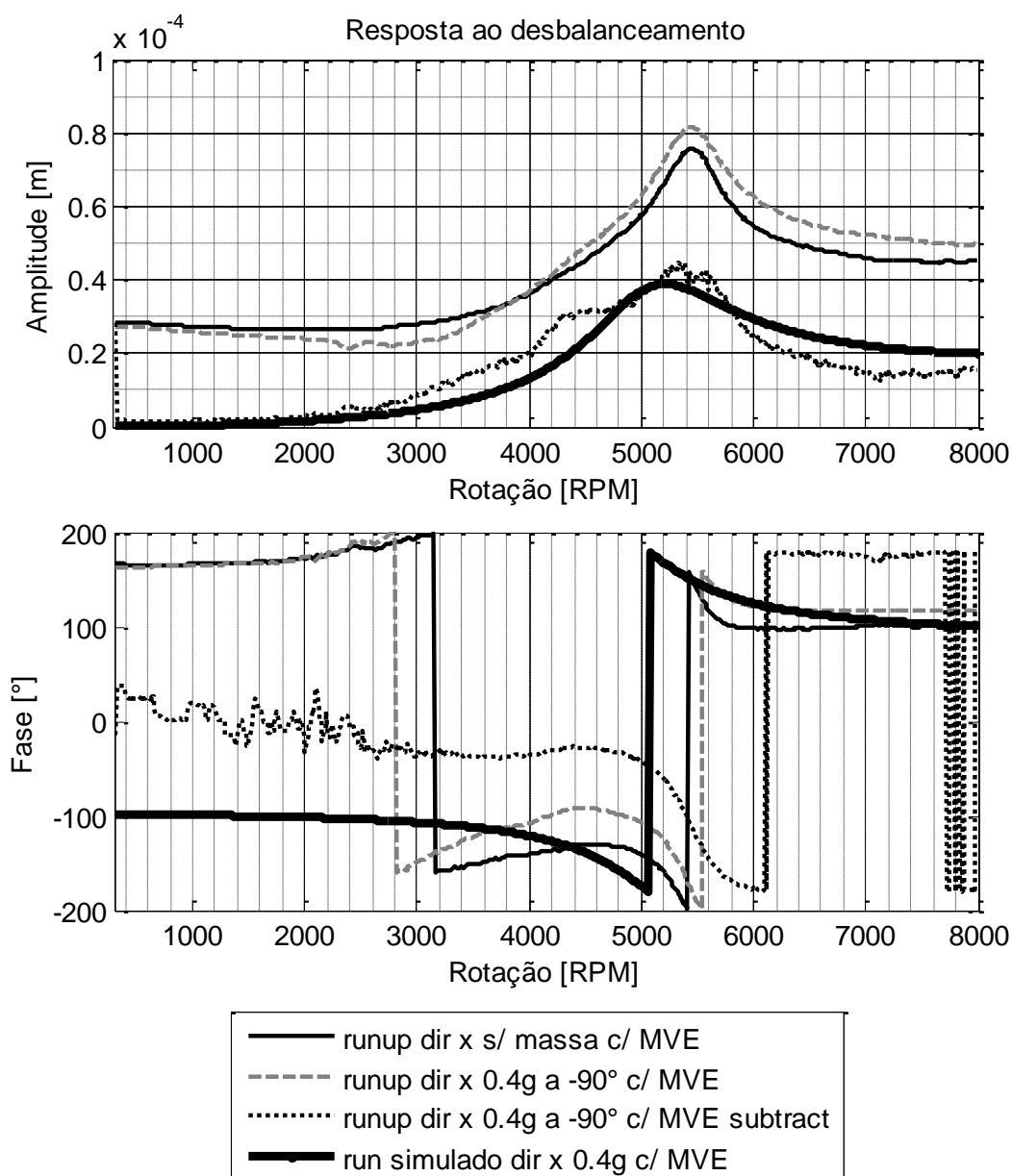
FIGURA 6.51 - RESPOSTAS AO DESBALANCEAMENTO EM RUNUP, NA DIREÇÃO Z E MASSA DE TESTE A -90° .



Dentre os gráficos de resposta ao desbalanceamento apresentados nas FIGURA 6.44 à FIGURA 6.51, as curvas que apresentam a menor influência da subtração do *runout* bem como de possíveis erros na determinação da fase são as FIGURA 6.50 e FIGURA 6.51. Estas últimas são as curvas consideradas nas comparações entre os ensaios e os resultados das simulações, FIGURA 6.52 e FIGURA 6.53. Observa-se nos dois gráficos que há uma ligeira diferença nas rotações críticas. As curvas obtidas nos ensaios apresentam rotação crítica em torno de 5400 RPM. Já as curvas obtidas nas simulações apresentam rotação crítica em 5200 RPM.

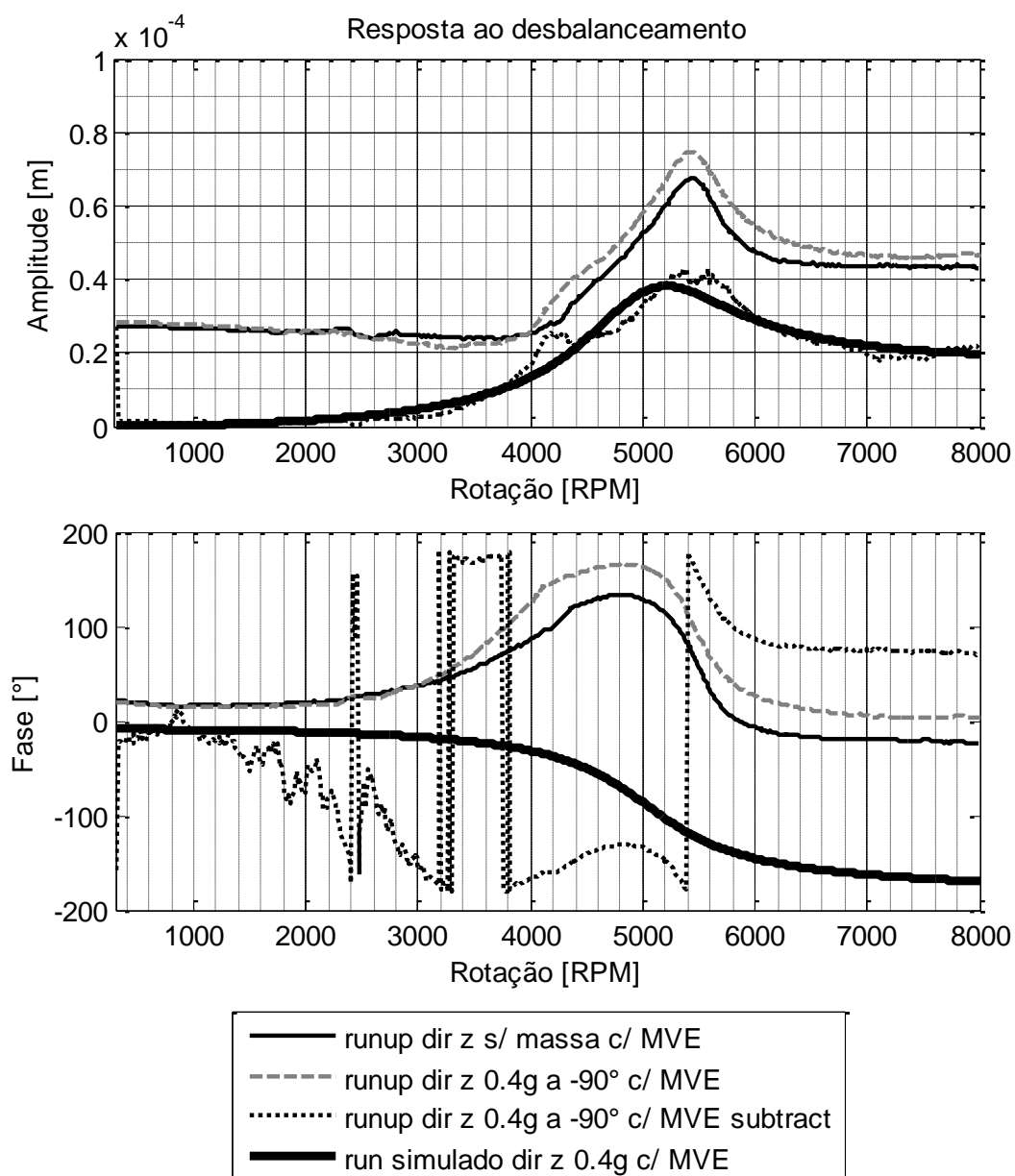
Portanto, o erro fica em torno de 3,7%, o qual é aceitável em acordo com os critérios da API RP 684 2^a. ed.

FIGURA 6.52 - COMPARAÇÃO ENTRE RESPOSTAS OBTIDAS NOS ENSAIOS E CALCULADA NA DIREÇÃO X.



No entanto, nas FIGURA 6.52 e FIGURA 6.53, os valores de amplitude no pico da rotação crítica superam ligeiramente os valores de amplitude calculados. De acordo com o critério da API RP 684, 2^a. ed., o modelo ainda necessitaria de ajustes. Contudo, há incertezas nas medições que impossibilitam chegar à resultados mais precisos para efetuar tal comparação.

FIGURA 6.53 - COMPARAÇÃO ENTRE RESPOSTAS OBTIDAS NOS ENSAIOS E CALCULADAS NA DIREÇÃO Z.



Para que se possa visualizar as curvas com maiores detalhes, são apresentadas somente as curvas subtraídas e simuladas, para as direções X e Z. Um dado importante a se observar nas FIGURA 6.54 e FIGURA 6.55 é o efeito do amortecimento nas curvas de resposta. Mesmo na FIGURA 6.55, onde há um ajuste melhor entre as curvas, nota-se, pela inclinação da mudança de fase na região de passagem pela crítica que as curvas simuladas apresentam maior amortecimento. A mudança de fase é mais “suave” quando comparada com a mudança das curvas

obtidas nos ensaios. Fato que pode explicar a razão pela qual a amplitude das curvas simuladas é ligeiramente inferior a amplitude das curvas subtraídas.

FIGURA 6.54 - COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA SUBTRAÍDA E A SIMULADA PARA DIREÇÃO X.

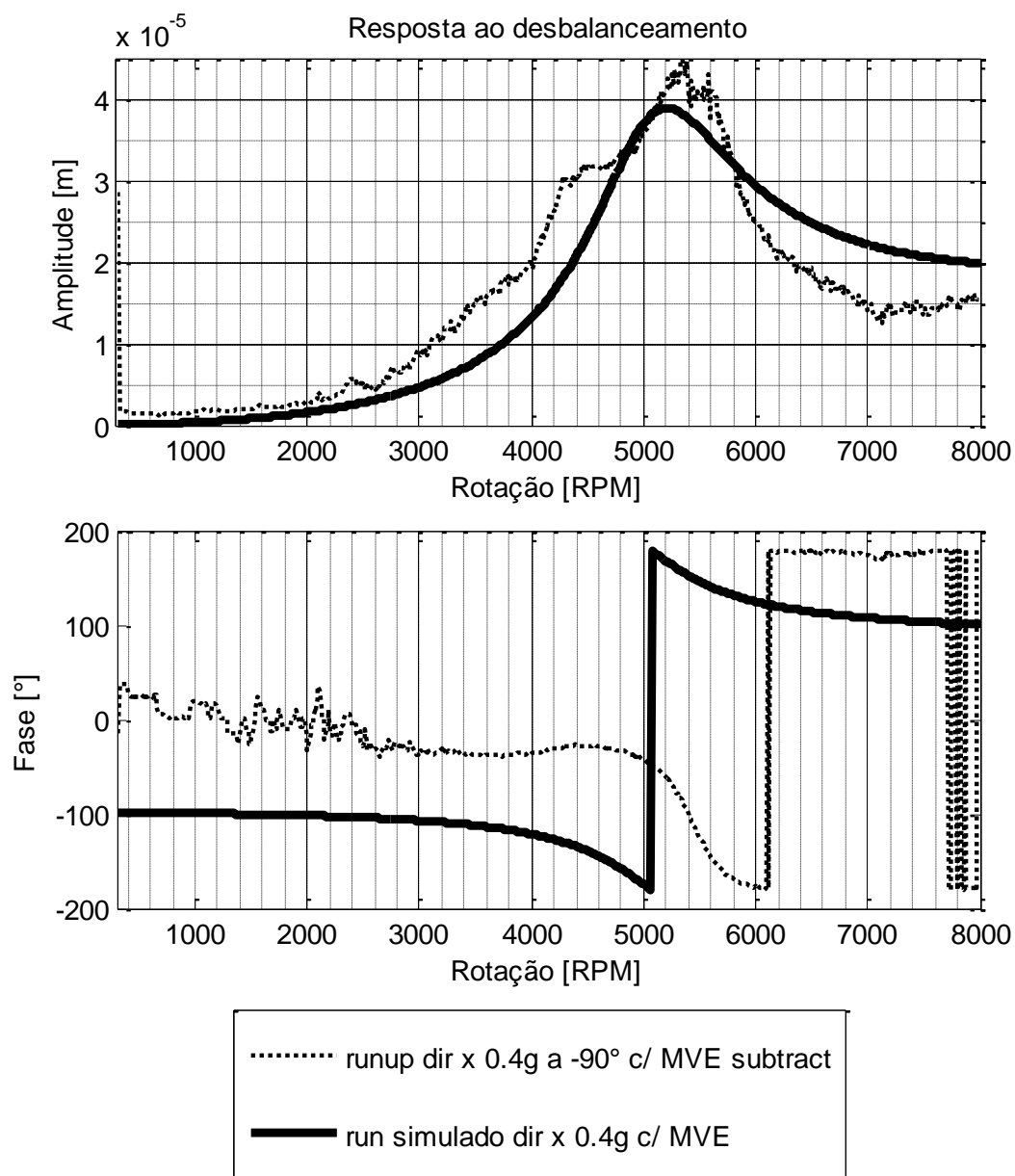
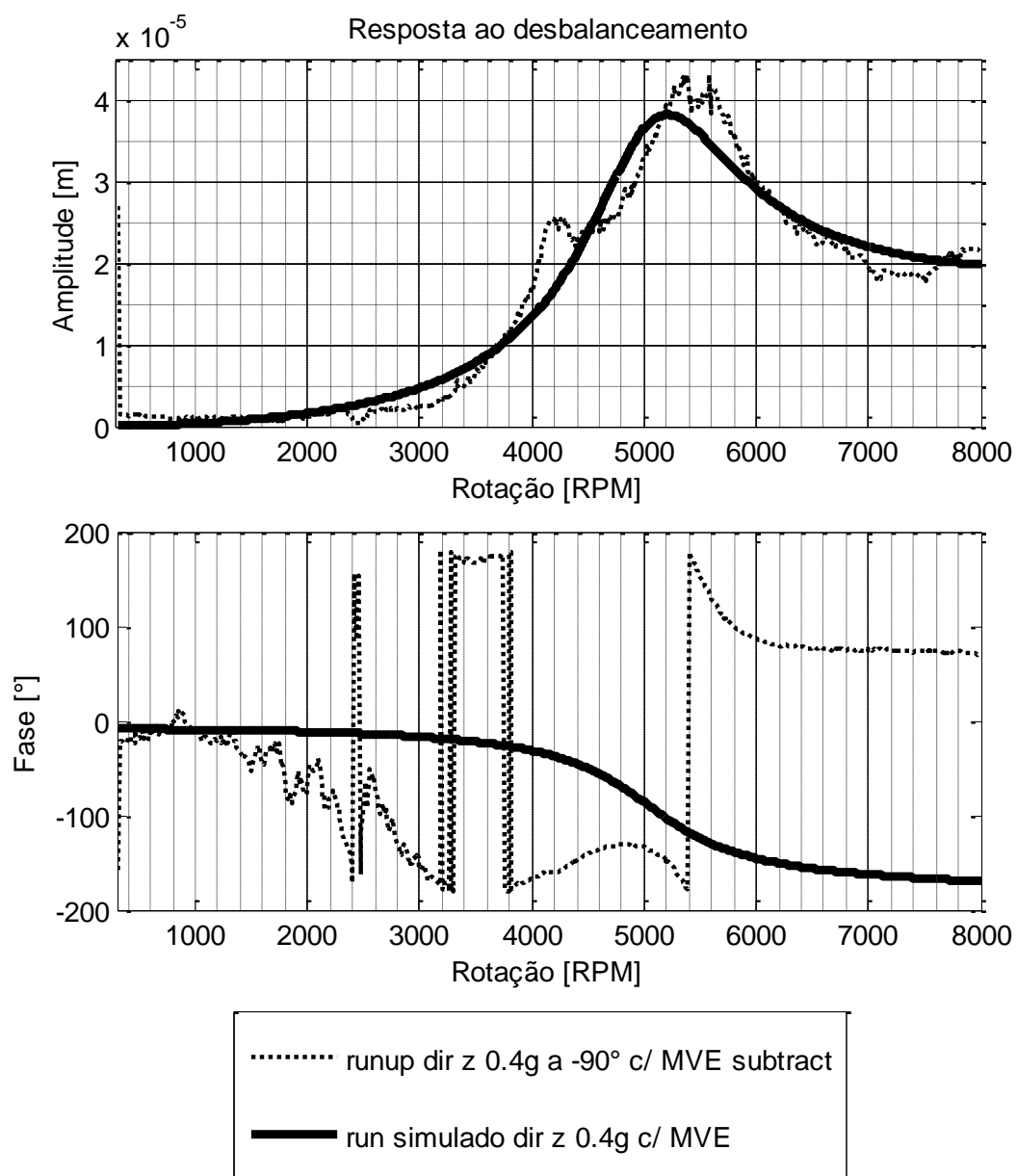
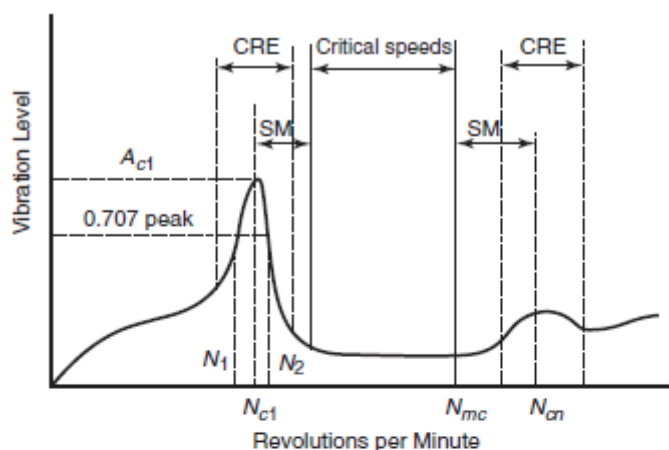


FIGURA 6.55 - COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA SUBTRAÍDA E A SIMULADA PARA DIREÇÃO Z.



A TABELA 6.3 apresenta os valores aproximados dos fatores de amplificação das rotações críticas. Os dados são calculados para as curvas em *runup*, com MVE nos mancais. Os valores são obtidos conforme orientação da FIGURA 6.56, extraída da API RP 684, 2^a. ed.

FIGURA 6.56 - DETERMINAÇÃO DO FATOR DE AMPLIFICAÇÃO (AF) PARA ROTAÇÕES CRÍTICAS. (API RP 684, 2ª. ED, PG 2-105).



- N_{c1} = Rotor first critical, center frequency, cycles per minute.
 N_{cn} = Critical speed, nth
 N_{mc} = Maximum continuous speed
 N_1 = Initial (lesser) speed at 0.707 x peak amplitude (critical)
 N_2 = Real (greater) speed at 0.707 x peak amplitude (critical)
 $N_2 - N_1$ = Peak width at the half-power point
 AF = Amplification factor

$$= \frac{N_{c1}}{N_2 - N_1}$$
 SM = Separation margin
 CRE = Critical response envelope
 A_{c1} = Amplitude at N_{c1}
 A_{cn} = Amplitude at N_{cn}

Note: The shape of the curve is for illustration only and does not necessarily represent any actual rotor response plot.

TABELA 6.3 - FATORES DE AMPLIFICAÇÃO (AF) DAS CURVAS EM *RUNUP*, FIGURA 6.54 E FIGURA 6.55, PARA ROTOR COM MVE.

	N1	NC1	N2	AF
Ensaio dir. Z	4820	5400	6130	4.1
Ensaio dir. X	4240	5400	5890	3.3
Simulado X e Z	4633	5202	6152	3.4

Observa-se pela TABELA 6.3 que o valor do AF do ensaio na direção X é muito próximo do valor simulado para as duas direções. Isto ocorre em função da “distorção” no formato da curva na entrada da região de influência da primeira crítica. No entanto, observando o valor do AF para curva do ensaio na direção Z, percebe-se que o amortecimento real é ligeiramente inferior ao calculado. Os AF para o rotor sem MVE também são calculados para as mesmas condições e são resumidos na

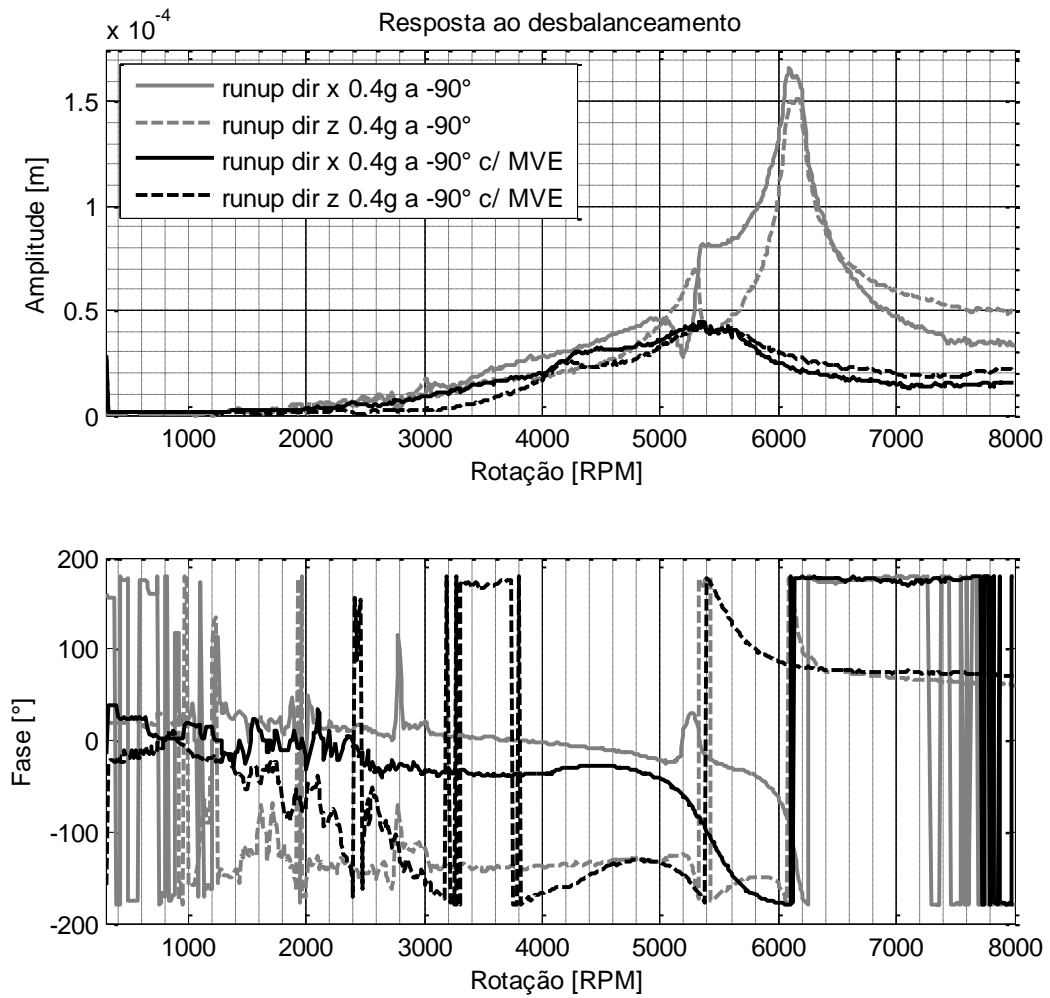
TABELA 6.4. Obviamente, os AF são muito maiores em função do baixo amortecimento no sistema sem MVE.

TABELA 6.4 - FATORES DE AMPLIFICAÇÃO (AF) DAS CURVAS EM *RUNUP* PARA O ROTOR SEM MVE.

	N1	NC1	N2	AF
Ensaio Z	6000	6120	6300	20.4
Ensaio X	5920	6120	6280	17
Simulado X e Z	5975	6004	6033	103.5

A comparação entre os AF é importante para se ter noção do ganho do emprego do MVE nos mancais do rotor. Para fins ilustrativos a FIGURA 6.57 apresenta as curvas em *runup* subtraídas, para as direções X e Z, com as massas de teste à - 90°, com e sem emprego de MVE. A contribuição do MVE na resposta ao desbalanceamento é evidente. A amplitude na rotação crítica é cerca de 4 vezes menor. O ganho de amortecimento também é notório nas mudanças de fase da primeira rotação crítica.

FIGURA 6.57 - COMPARAÇÃO ENTRE AS CURVAS EM RUNUP SUBTRAÍDAS, SEM E COM APLICAÇÃO DE MVE NOS MANCAIS E MASSA À -90°.



7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Uma revisão minuciosa dos códigos numéricos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa GVIBS de rotordinâmica, nomeados ROTORDIN, foi realizada no presente trabalho. São acrescentados e revisados modelos que permitem considerar a composição de MVE aos mancais de rotores. A interfase gráfica também é refeita para considerar e estudar os rotores compostos com MVE. Os cálculos que consideram o MVE levam um tempo relativamente grande para fornecer resultados. Isto porque para cada iteração de frequência, dentro de cada iteração de rotação, resolve-se o problema de autovalores e autovetores. Este fato dificulta consideravelmente as verificações e testes das rotinas programadas. Contudo, para um trabalho inicial é primordial considerar cálculos gerais. Uma recomendação importante, a ser estudada em trabalhos futuros, é considerar a possibilidade de aplicar conceitos de modificação estrutural para redução do tempo de cálculo. Calculando a base de autovalores somente no início de cada iteração de frequência e aplicando-a diretamente nas modificações de rigidez subsequentes para cálculo da resposta (BRANDON, 1990).

Para validar os códigos propostos neste trabalho, os resultados numéricos são comparados com seus equivalentes experimentais. Suportes especiais para o ROTORKIT foram desenvolvidos para montagem de rolamentos comerciais, com ou sem MVE aplicado na pista externa. A bancada de teste mostra-se como outro grande desafio. Adaptar um kit didático para trabalhar com mancais de rolamento revela algumas surpresas. Na expectativa pela eliminação de influências de folgas nas caixas de mancais, opta-se pelo ajuste com leve interferência na capa externa do rolamento. A folga interna do mancal de rolamento se mostra insuficiente para permitir o giro livre do eixo nas direções X e Z. Havia diferença significativa entre a rotação crítica calculada e a observada. Após investigação, decidiu-se optar pela configuração com mancais de rolamentos autocompensadores. A diferença entre a rotação crítica calculada e a observada passa a ser realmente pequena. Conforme observado nos resultados dos testes, o *runout* também interfere nas medições. Além disso, o eixo é muito delgado e possui diâmetro muito próximo do diâmetro dos *proximeters*. Pelo fato dos mancais adaptados serem relativamente pequenos, os setores de MVE empregados também são miniaturizados. Isto dificulta a eliminação

de erros geométricos. Logo, é imprescindível a construção de uma bancada de teste adequada para prosseguimento dos estudos em rotodinâmica com MVE.

Os resultados obtidos experimentalmente são pós processados para eliminar o runout e desbalanceamento residual do conjunto rotativo. Mesmo com todas as dificuldades encontradas na parte experimental, a comparação entre os resultados simulados e experimentais mostra que o erro entre as rotações críticas para o rotor composto com MVE foi de 3,7%. Erro aceitável e em acordo com os critérios da API RP 684 2ª. ed. A forma das curvas calculadas e as consideradas nos testes também são semelhantes. As amplitudes das repostas ao desbalanceamento, na rotação crítica, obtidas experimentalmente superam as calculadas em somente 10%. Isto permite concluir que o modelo de 4 parâmetros adotado para o MVE bem como o modelo simples para determinação do fator geométrico (FG) são perfeitamente aplicáveis.

Este estudo mostra também que os MVEs possuem elevada capacidade de dissipação de energia vibratória em sistemas rotativos. O efeito do amortecimento pela inserção de MVE nos mancais, refletido na amplitude dos gráficos de resposta ao desbalanceamento, é notório. O fator de amplificação (AF) na rotação crítica reduz de aproximadamente 20 para aproximadamente 4. É comprovado também o aumento do amortecimento pela alteração da inclinação nas regiões de mudança de fase das rotações críticas. A redução da rigidez, comprovada pela alteração da rotação crítica, é fundamental para que o eixo se movimente nas proximidades com os mancais. Isto permite dissipar energia pelo amortecimento efetivo conferido ao sistema através dos MVEs.

Não há dúvidas quanto aos benefícios que o emprego do MVE pode ofertar para uma máquina rotativa. Estes benefícios são semelhantes aos ofertados pelos mancais hidrodinâmicos. Uma investigação mais detalhada, tomando diversos pontos de medição ao longo do rotor, é necessária para conhecer seu comportamento ao longo de todo o eixo. Pelo fato da amplitude na região de influência da rotação crítica ter reduzido consideravelmente, com um bom estudo é possível reduzir folgas internas nas máquinas para ganho de eficiência. Há também a possibilidade do emprego do MVE em substituição ao *squeeze film damper*, empregado principalmente em mancais hidrodinâmicos para conferir amortecimento adicional.

Para que os MVEs possam ser aplicados comercialmente em grandes máquinas rotativas, é preciso conhecer bem seus comportamentos diante de outras substâncias. Óleo lubrificante ou mesmo um gás contaminante, no caso de compressores, são exemplos típicos.

Foi visto como o MVE é fortemente dependente da temperatura de trabalho. Recomenda-se avaliar experimentalmente o efeito da temperatura nos mancais de rotores. É preciso ainda conhecer como o MVE é afetado pela temperatura a longo prazo e como se dá seu “envelhecimento”. A aplicação em grandes máquinas rotativas exige longos períodos de operação ininterruptos.

Recomenda-se também incluir em análises futuras a rigidez rotacional e o amortecimento rotacional dos mancais sem MVE pois poderia explicar as divergências de comportamento observadas entre as respostas ao desbalanceamento calculada *versus* experimental. Além disso, nos mancais com MVE, é possível estudar o efeito rotacional e avaliar sua contribuição.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **Axial and Centrifugal Compressor and Expander Compressors for Petroleum, Chemical, and Gas Industry Services**, API STD 617. 7th Edition. 2009.
- AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **General-purpose Steam Turbines for Petroleum, Chemical, and Gas Industry Services**, API STD 611. 5th Edition. 2008.
- AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **API Standard Paragraphs Rotordynamic Tutorial: Lateral Critical Speeds, Unbalance Response, Stability, Train Torsionals, and Rotor Balancing**, API RP 684. 2th Edition. 2010.
- BAVASTRI, C.A.; FRANCISCO, J. D.; ESPÍNDOLA, J. J.; LOPES, E. M. O.; VENANCIO, H. W. Modelo geral de neutralizadores dinâmicos para controle de vibrações e ruído: parâmetros equivalentes generalizados. **Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia / Congresso Íbero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia**. Porto, Portugal, 2007.
- BAVASTRI, C. A.; et al. **Modeling of dynamic rotors with flexible bearings due to the use of viscoelastic materials**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 30, n. 1, p. 22-29, 2008.
- BAVASTRI, C. A. **Modelo para material viscoelástico**: Disciplina Controle de Vibrações, 14-28 de Março de 2008. 10f. Notas de Aula.
- BAVASTRI, C. A.; et al. **Optimum viscoelastic absorbers for cubic nonlinear systems**. Journal of Vibration and Control, v. 20, n. 10, p. 1464-1474, 2014.
- BRANDON, J. A. **Strategies for Structural Dynamic Modification**. 1st ed. UK: John Wiley & Sons Inc, 1990.
- CATANIA, Giuseppe; SORRENTINO, Silvio. **Analytical modelling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems**. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering – Springer, c. 28, p. 403-416, 2007.
- CHEN, W. J; GUNTER, E. J. **Introduction to dynamics of rotor-bearing systems**. 1. ed. Estados Unidos da América: TRAFFORD, 2005.
- COOK, Robert D.; MALKUS, David S.; PLESHA, Michael E.; WITT, Robert J. **Concepts and applications of finite element analysis**, New York: John Wiley & Sons Ltd, 2002.
- CRUZ, Gilberto Amado Méndez. **Projeto ótimo de neutralizadores viscoelásticos baseados no modelo a derivadas fracionárias**. 2004. 95f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- DOUBRAWA FILHO, F. J. ; LUERSEN, M. A. ; BAVASTRI, C. A. . **Optimal design of viscoelastic vibration absorbers for rotating systems**. Journal of Vibration and Control, v. 15, n. 5, p. 699-710, 2011.

DUTT, J. K.; NAKRA B. C. **Stability of rotor systems with viscoelastic supports.** Journal of Sound and Vibration, v. 153, n 1, p. 89-96, 1992.

DUTT, J. K.; NAKRA B. C. **Stability characteristics of rotating systems with journal bearings on viscoelastic support.** Mechanism and Machine Theory, v. 31, n. 6, p. 771-779, 1996.

DUTT, J. K.; TOI T. **Rotor vibration reduction with polymeric sectors.** Journal of Sound and Vibration, v. 262, n. 4, p. 769-793, 2003.

ESPÍNDOLA, José João de ; BAVASTRI, C. A. . **Reduction of vibrations in complex structures with viscoelastic neutralizers: A generalized approach and a physical realization.** In: DETC'97/VIB-4187 – ASME, Boston. Proceedings of DETC 97. v. 3, p. 761-766, 1997.

ESPÍNDOLA, José J. de; BAVASTRI, Carlos A.; LOPES, Eduardo M. O. **On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamic absorbers of ordinary and pendulum types.** Journal of the Franklin Institute, v. 347, n. 1, p. 102-115, 2010.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice.** 2nd ed. Baldock: Research Studies Press LTD, 2000.

FAN, Rongping; et al. **Experimental study of the effect of viscoelastic damping materials on noise and vibration reduction within railway vehicles.** Journal of Sound and Vibration, v. 319, n. 1-2, p. 58–76, 2009.

FERREIRA, Euda Mara da Silva. **Modelos de rotores dinâmicos com mancais flexíveis utilizando material viscoelástico.** 2004. 54f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

FERRY, John D. **Viscoelastic properties of polymers.** New York: John Wiley & Sons Ltd, 1980.

GENTA, Giancarlo. **Dynamics of Rotating Systems,** New York: Springer Science+Business Media Inc, 2005.

LALANNE, Michel; FERRARIS, Guy. **Rotordynamics Prediction in Engineering,** New York: John Wiley & Sons Ltd, 1990.

LEE, Yong-Bok et. al. **Dynamic characteristics of a flexible rotor system supported by a viscoelastic foil bearing (VEFB).** Tribology International, v. 37, n. 9, p. 679–687, 2004.

LOPES, Eduardo Márcio de Oliveira. **On the experimental response reanalysis of structures with elastomeric materials.** Doctor thesis. School of Engineering, Division of Mechanical Engineering & Energy Studies, University of Wales Cardiff, UK, 1998.

LOWRY, Mark. **A predictive technique for evaluating structural vibration gain of damped suspensions in hard disk drives.** *Microsyst Technol* (2010) Springer-Verlag, v. 16, n. 1, p. 67-71, Jan 2009.

PANDA K. C.; DUTT J. K. **Design of optimum support parameters for minimum rotor response and maximum stability limit.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 223, n. 1, p. 1-21, 1999.

PARK, S. W. **Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control.** *International Journal of Solid and Structures*. v. 38, n. 44-45, p. 8065-8092, 2001.

PEREIRA, Petroneo. **Projeto de sistemas ótimos de absorvedores viscoelásticos de vibração através de uma função objetivo baseada na norma matricial de Frobenius.** 2008. 52f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

PRITZ, T. **Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 195, n. 1, p. 103-115, 1996.

PRITZ, T. **Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid materials.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 214, n. 1, p. 83-104, 1998.

SALDARRIAGA, Manuel Villafañe.; STEFFEN, Valder Jr. **Modeling of flexible rotor systems with constrained viscoelastic layers on the supports.** In: IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM 2006, Recife-PE, 2006.

SHABANEH, N. H.; ZU, J. W. **Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings.** *Mechanism and Machine Theory*, v. 35, n. 9, p. 1313-1330, 2000.

TILLEMA, H. G. **Noise reduction of rotating machinery by viscoelastic bearing supports.** PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, February 2003.

TIMOSHENKO, J. P; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos 1.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1994.

TIPLER, Paul. **Física Volume 1 Mecânica.** 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1995.

VARNEY, P., GREEN, I. **Rotordynamic analysis using the Complex Transfer Matrix: An application to elastomer supports using the viscoelastic correspondence principle.** *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, n. 23, p. 6258-6272, 2014.

ZEILINGER, R., KÖTTRITSCH, H. **Damping in a rolling bearing arrangement.** Austria: Evolution - the business and technology magazine from SKF. 1996. Disponível em < <http://evolution.skf.com/damping-in-a-rolling-bearing-arrangement/>>. Acesso em: 10 dez. 2014.

APÊNDICE A – MODELAGEM DE ELEMENTOS DE ROTORES

O objetivo deste apêndice é ilustrar passo a passo como Genta (2005), Lalanne e Ferraris (1990) apresentam a obtenção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento para modelagem de rotores. Especialmente em Genta (2005), há um desenvolvimento mais extenso. Contudo, não no mesmo grau de detalhamento deste apêndice. Lalanne e Ferraris (1990) são mais sucintos. Assim, este apêndice também traça um comparativo entre o material exposto por Lalanne e Ferraris (1990) e Genta (2005). Os símbolos utilizados nesta seção são os mesmos empregados pelos autores das referências. Assim, podem apresentar algum conflito com a lista de símbolos propostas neste trabalho.

Os conjuntos rotativos de máquinas são compostos normalmente por um eixo, discos e mancais. Os discos são impelidores ou tambor de balanceamento no caso de bombas ou compressores. Podem ser também rodas de palhetas no caso de turbinas. Ou até mesmo discos de mancais de escora das máquinas mencionadas. Os mancais, rígidos ou hidrodinâmicos, são parte do sistema e sustentam o rotor, eixo mais discos, além de conferir rigidez e amortecimento adequados. Os discos são tratados usualmente como corpos rígidos. Já o eixo é um elemento flexível assim como os mancais.

Tanto Lalanne e Ferraris (1990) quanto Genta (2005) iniciam a modelagem de sistemas discretos de múltiplos graus de liberdade, para rotores, abordando os discos.

DISCOS

Por se tratarem de corpos rígidos e poderem assumir qualquer posição no espaço, é necessário definir coordenadas generalizadas e equações para o movimento dos discos. A seguir é apresentada a teoria descrita por Genta (2005). Quando for pertinente serão apresentadas as considerações feitas por Lalanne e Ferraris (1990).

- Sistema de coordenadas OXYZ: Sistema de coordenadas inercial, com origem em O, e eixo Z coincidente com o eixo de rotação do rotor.
- Sistema de coordenadas OΞHZ: Sistema de coordenadas com origem em O e eixo Z coincidente com o eixo de rotação do rotor. Eixos Ξ e H rotacionam no plano XY com velocidade angular Ω , para o caso de velocidade de rotação constante. Este é um *sistema de coordenadas rotativo*.
- Sistema de coordenadas CX'Y'Z': Sistema de coordenadas com origem em C. Seus eixos permanecem paralelos aos do sistema OXYZ. O plano X'Y' permanece paralelo ao plano XY.
- Sistema de coordenadas Cxyz: Sistema de coordenadas com origem em C. Seu eixo z coincide com o eixo de rotação de corpo rígido na posição em que está deformado. Os eixos x e y são definidos pelas seguintes rotações:

Rotacionando os eixos do sistema de coordenadas CX'Y'Z' em torno do eixo X' de um ângulo $\phi_{x'}$, até que o eixo Y' entre no plano de rotação de corpo rígido na configuração deformada. Os novos eixos obtidos serão y e z*. A matriz de rotação permite expressar componentes de um vetor no sistema de coordenadas CX'yz* a partir do sistema de coordenadas CX'Y'Z' (ou a partir do sistema inercial, pois as direções dos eixos são coincidentes).

FIGURA A.1 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PRIMEIRO PASSO DE ROTAÇÃO.

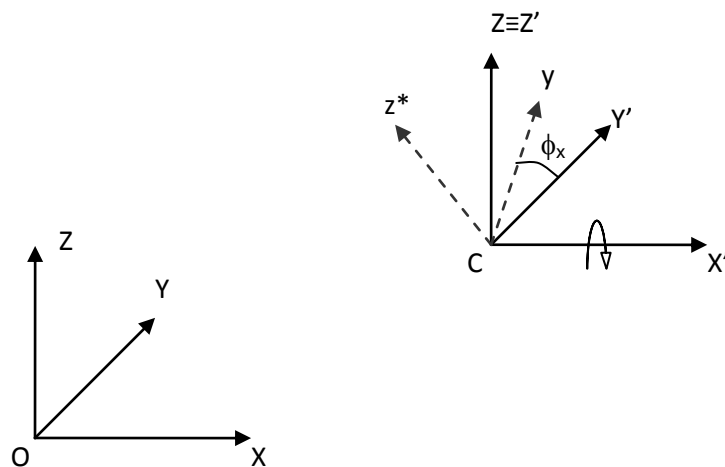
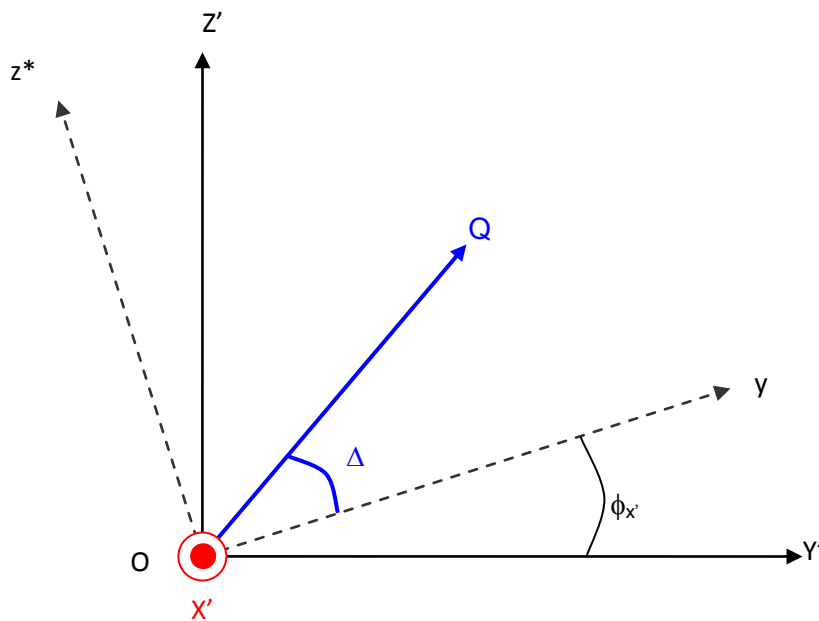


FIGURA A.2 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.



O vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso no sistema de coordenadas $\overrightarrow{Y'Z'}$ pela equação A.1,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\phi_x + \Delta) \overrightarrow{Y'} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\phi_x + \Delta) \overrightarrow{Z'}.$$

A.1)

O mesmo vetor \overrightarrow{OQ} , pode ser expresso também no sistema de coordenadas \vec{yz}^* pela equação A.2,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \vec{y} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \vec{z}^* \quad \text{A.2)}$$

Desenvolvendo os senos e cossenos na equação A.1,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot [\cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\Delta) - \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\Delta)] \vec{Y}' + |\overrightarrow{OQ}| \cdot [\text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\Delta) + \text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\phi_{x'})] \vec{Z}' \quad \text{A.3)}$$

e rearranjando a equação A.3, tem-se:

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\Delta) \vec{Y}' - |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\Delta) \vec{Y}' + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\Delta) \vec{Z}' + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\phi_{x'}) \vec{Z}' \quad \text{A.4)}$$

Colocando em evidência $\cos(\Delta)$ e $\text{sen}(\Delta)$ na equação A.4,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \cdot [\cos(\phi_{x'}) \vec{Y}' + \text{sen}(\phi_{x'}) \vec{Z}'] + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot [-\text{sen}(\phi_{x'}) \vec{Y}' + \cos(\phi_{x'}) \vec{Z}'] \quad \text{A.5)}$$

e rearranjando a equação A.5 de forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{OQ} = |\vec{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos(\phi_{x'}) & \text{sen}(\phi_{x'}) \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{Y}' \\ \vec{Z}' \end{matrix} \right\} + \\ |\vec{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \left\{ \begin{matrix} -\text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{Y}' \\ \vec{Z}' \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{OQ} = \left\{ |\vec{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \quad |\vec{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \right\} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_{x'}) & \text{sen}(\phi_{x'}) \\ -\text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{Y}' \\ \vec{Z}' \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Retomando à equação A.2 e rearranjando-a de forma matricial,

$$\vec{OQ} = \left\{ |\vec{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \quad |\vec{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{y} \\ \vec{z}^* \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Assim, comparando A.7 e A.8 é possível obter a matriz de rotação do sistema $\vec{Y}'\vec{Z}'$ para o sistema $\vec{y}\vec{z}^*$,

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{y} \\ \vec{z}^* \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_{x'}) & \text{sen}(\phi_{x'}) \\ -\text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{Y}' \\ \vec{Z}' \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A.9})$$

A primeira matriz de rotação espacial é dada pela equação A.10,

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{x'}) & \text{sen}(\phi_{x'}) \\ 0 & -\text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Rotacionando os eixos do sistema de coordenadas $CX'yz^*$ em torno do eixo y de um ângulo ϕ_y , até que o eixo X' também entre no plano de rotação de

corpo rígido na configuração deformada. Após as duas primeiras rotações, o eixo z coincide com o eixo de simetria do corpo rígido na configuração deformada, a menos de um erro angular χ . O sistema de coordenadas $Cxyz$ está posicionado no centro do eixo do corpo rígido e o segue no movimento circular de precessão. Entretanto, ele não gira com velocidade angular Ω . Este sistema de coordenadas será denominado sistema de movimento circular de precessão.

FIGURA A.3 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO SEGUNDO PASSO DE ROTAÇÃO.

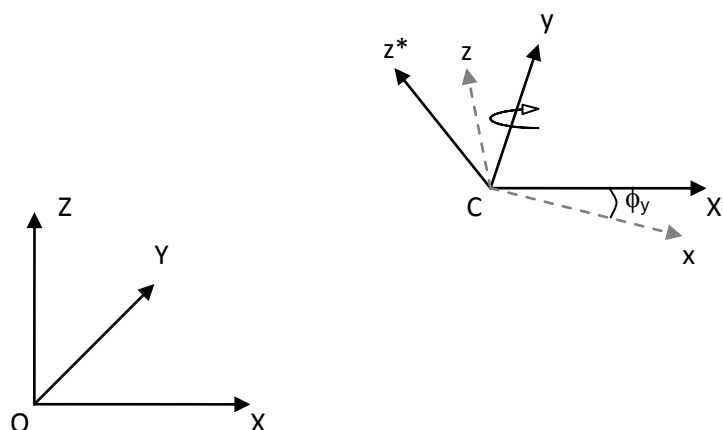
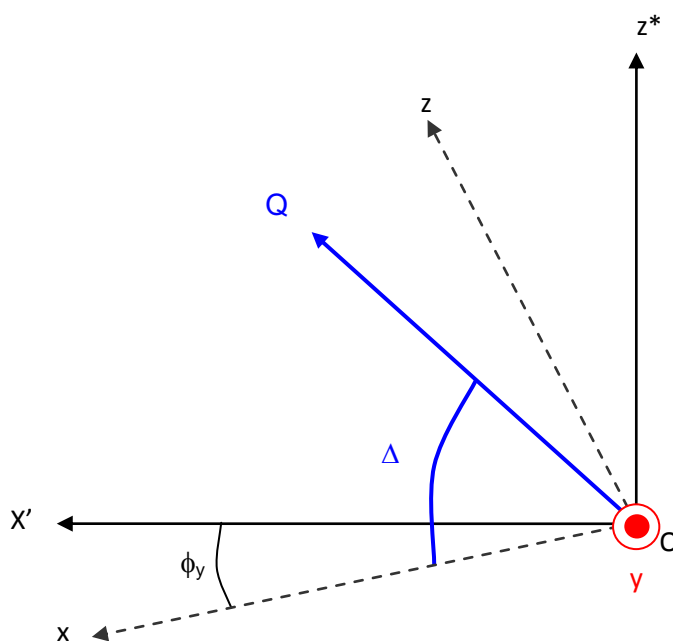


FIGURA A.4 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.



O vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso no sistema de coordenadas $\overrightarrow{X'z^*}$ pela equação A.11,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta - \phi_y) \overrightarrow{X'} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta - \phi_y) \overrightarrow{z^*}. \quad \text{A.11)}$$

O mesmo vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso também no sistema de coordenadas \overrightarrow{xz} pela equação A.12,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \overrightarrow{x} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \overrightarrow{z}. \quad \text{A.12)}$$

Desenvolvendo os senos e cossenos na equação A.11,

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot [\cos(\Delta) \cdot \cos(\phi_y) + \text{sen}(\Delta) \cdot \text{sen}(\phi_y)] \overrightarrow{X'} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot [\text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\phi_y) - \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\Delta)] \overrightarrow{z^*}, \quad \text{A.13)}$$

e rearranjando a equação A.13, tem-se:

$$\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \cdot \cos(\phi_y) \overrightarrow{X'} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \text{sen}(\phi_y) \overrightarrow{X'} + |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\phi_y) \overrightarrow{z^*} - |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\Delta) \overrightarrow{z^*}. \quad \text{A.14)}$$

Colocando em evidência $\cos(\Delta)$ e $\text{sen}(\Delta)$ na equação A.14,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = & |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \cdot [\cos(\phi_y) \overrightarrow{X'} - \text{sen}(\phi_y) \overrightarrow{z^*}] + \\ & |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot [\text{sen}(\phi_y) \overrightarrow{X'} + \cos(\phi_y) \overrightarrow{z^*}] \end{aligned} \quad \text{A.15)}$$

e rearranjando a equação A.15 de forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = & |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\phi_y) & -\text{sen}(\phi_y) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{X'} \\ \overrightarrow{z^*} \end{Bmatrix} + \\ & |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \begin{Bmatrix} \text{sen}(\phi_y) & \cos(\phi_y) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{X'} \\ \overrightarrow{z^*} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \text{A.16)}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{Bmatrix} |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) & |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\phi_y) & -\text{sen}(\phi_y) \\ \text{sen}(\phi_y) & \cos(\phi_y) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{X'} \\ \overrightarrow{z^*} \end{Bmatrix}. \quad \text{(A.17)}$$

Retomando a equação A.12 e rearranjando-a de forma matricial:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{Bmatrix} |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\Delta) & |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\Delta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{z} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.18)}$$

Assim, comparando A.17 e A.18 é possível obter a matriz de rotação do sistema $\overrightarrow{X'}\overrightarrow{z^*}$ para o sistema $\overrightarrow{x}\overrightarrow{z}$,

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\phi_y) & -\text{sen}(\phi_y) \\ \text{sen}(\phi_y) & \cos(\phi_y) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{X'} \\ \overrightarrow{z^*} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.19)}$$

A segunda matriz de rotação espacial é dada pela equação A.20,

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & -\text{sen}(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix}. \quad \text{A.20)}$$

O sistema de coordenadas $C\xi\eta z$ é obtido a partir do sistema $Cxyz$ rotacionando o plano xy de um ângulo θ correspondente a rotação do rotor. Se a rotação ocorre com velocidade angular constante Ω , θ é igual a $\Omega \cdot t$, onde t é o tempo de rotação. O sistema $C\xi\eta z$ é fixo no corpo rígido, embora não centrado no centro de gravidade do corpo com excentricidade ε e não sendo também o sistema principal de inércia pertencente ao erro angular χ . Este será referenciado como sendo o sistema de rotação e precessão. A matriz que permite escrever um vetor de $C\xi\eta z$ em componentes de $Cxyz$ é obtida nos passos a seguir.

FIGURA A.5 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO TERCEIRO PASSO DE ROTAÇÃO.

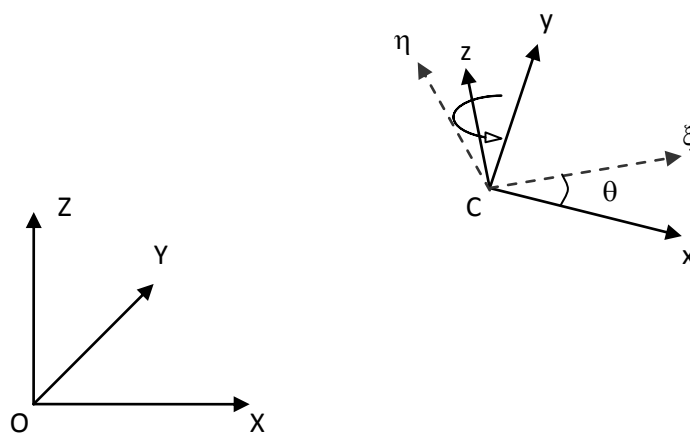
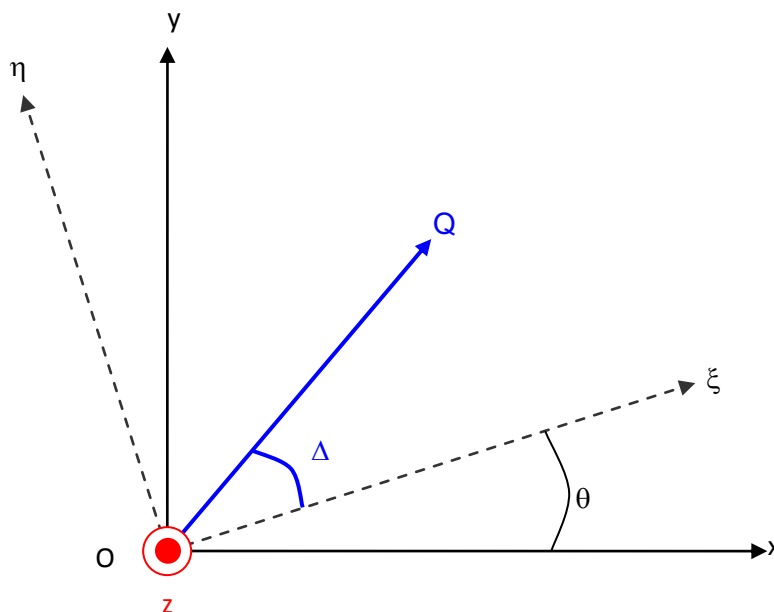


FIGURA A.6 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.



O vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso no sistema de coordenadas $\vec{x}\vec{y}$ pela equação A.21,

$$\overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\theta + \Delta) \vec{x} + |OQ| \cdot \text{sen}(\theta + \Delta) \vec{y} \quad \text{A.21)}$$

O mesmo vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso também no sistema de coordenadas $\vec{\xi}\vec{\eta}$ pela equação A.22,

$$\overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta) \vec{\xi} + |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \vec{\eta} \quad \text{A.22)}$$

Desenvolvendo os senos e cossenos na equação A.21,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot [\cos(\theta) \cdot \cos(\Delta) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\Delta)] \vec{x} + \\ |OQ| \cdot [\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\Delta) + \text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\theta)] \vec{y} \end{aligned} \quad \text{A.23)}$$

e rearranjando a equação A.23, tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\Delta) \vec{x} - |OQ| \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\Delta) \vec{x} + \\ |OQ| \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\Delta) \vec{y} + |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\theta) \vec{y} \end{aligned} \quad \text{A.24)}$$

Colocando em evidência $\cos(\Delta)$ e $\text{sen}(\Delta)$ na equação A.24,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta) \cdot [\cos(\theta) \vec{x} + \text{sen}(\theta) \vec{y}] + \\ |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot [-\text{sen}(\theta) \vec{x} + \cos(\theta) \vec{y}] \end{aligned} \quad \text{A.25)}$$

e rearranjando a equação A.25 de forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{Bmatrix} + \\ |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \text{A.26}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left\{ |OQ| \cdot \cos(\Delta) \quad |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \right\} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{Bmatrix} \quad \text{(A.27)}$$

Retomando a equação A.22 e rearranjando-a de forma matricial,

$$\overrightarrow{OQ} = \left\{ |OQ| \cdot \cos(\Delta) \quad |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.28)}$$

Assim, comparando A.27 e A.28 é possível obter a matriz de rotação do sistema $\vec{x}\vec{y}$ para o sistema $\vec{\xi}\vec{\eta}$,

$$\begin{Bmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.29)}$$

Chega-se a terceira matriz de rotação espacial dada pela equação A.30,

$$[R_3] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{A.30)}$$

No sistema de coordenadas P123, eixos principais de inércia do corpo rígido, assume-se que o rotor está levemente desbalanceado. A posição angular do rotor em $C\xi\eta z$ não depende do material, portanto o eixo principal de inércia correspondente ao momento de inércia J_p estará no plano ξz . Como não se pode assumir que o desbalanceamento estático está no mesmo plano, a excentricidade ε não estará no eixo ξ .

FIGURA A.7 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO QUARTO PASSO DE ROTAÇÃO.

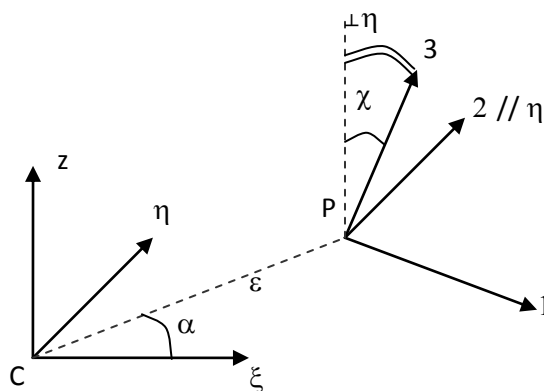
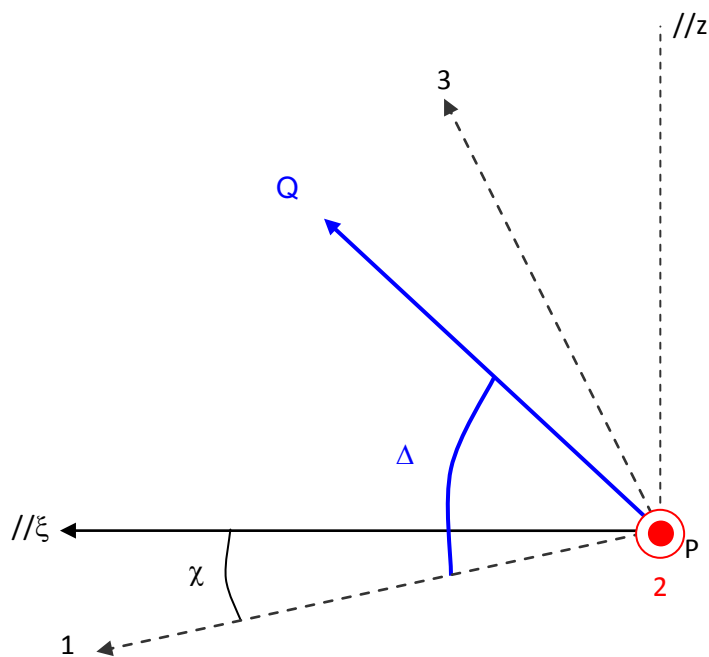


FIGURA A.8 - DETALHE DA ROTAÇÃO NO PLANO.



O vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso no sistema de coordenadas $\overrightarrow{\xi} \overrightarrow{z}$ pela equação A.31,

$$\overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta - \chi) \overrightarrow{\xi} + |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta - \chi) \overrightarrow{z}.$$

A.31)

O mesmo vetor \overrightarrow{OQ} pode ser expresso também no sistema de coordenadas $\vec{13}$ pela equação A.32,

$$\overrightarrow{OQ} = |OC| \cdot \cos(\Delta) \vec{1} + |OC| \cdot \text{sen}(\Delta) \vec{3}. \quad \text{A.32)}$$

Desenvolvendo os senos e cossenos na equação A.31,

$$\overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot [\cos(\Delta) \cdot \cos(\chi) + \text{sen}(\Delta) \cdot \text{sen}(\chi)] \overrightarrow{\xi} + |OQ| \cdot [\text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\chi) - \text{sen}(\chi) \cdot \cos(\Delta)] \overrightarrow{z}, \quad \text{A.33)}$$

e rearranjando a equação A.33, tem-se:

$$\overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta) \cdot \cos(\chi) \overrightarrow{\xi} + |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \text{sen}(\chi) \overrightarrow{\xi} + |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \cos(\chi) \overrightarrow{z} - |OQ| \cdot \text{sen}(\chi) \cdot \cos(\Delta) \overrightarrow{z}. \quad \text{A.34)}$$

Colocando em evidência $\cos(\Delta)$ e $\text{sen}(\Delta)$ na equação A.34,

$$\overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta) \cdot [\cos(\chi) \overrightarrow{\xi} - \text{sen}(\chi) \overrightarrow{z}] + |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot [\text{sen}(\chi) \overrightarrow{\xi} + \cos(\chi) \overrightarrow{z}], \quad \text{A.35)}$$

e rearranjando a equação A.35 de forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} = |OQ| \cdot \cos(\Delta) \cdot \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\chi) & -\text{sen}(\chi) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\parallel \xi} \\ \overrightarrow{\parallel z} \end{array} \right\} + \\ |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \cdot \left\{ \begin{array}{cc} \text{sen}(\chi) & \cos(\chi) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\parallel \xi} \\ \overrightarrow{\parallel z} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad ; \quad \text{A.36)}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left\{ |OQ| \cdot \cos(\Delta) \quad |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \right\} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\chi) & -\text{sen}(\chi) \\ \text{sen}(\chi) & \cos(\chi) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\parallel \xi} \\ \overrightarrow{\parallel z} \end{array} \right\}. \quad \text{(A.37)}$$

Retomando a equação A.32 e rearranjando-a de forma matricial chega-se à

$$\overrightarrow{OQ} = \left\{ |OQ| \cdot \cos(\Delta) \quad |OQ| \cdot \text{sen}(\Delta) \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{1} \\ \vec{3} \end{array} \right\}. \quad \text{A.38)}$$

Assim, comparando A.37 e A.38, é possível obter a matriz de rotação do sistema $\overrightarrow{\parallel \xi} \overrightarrow{\parallel z}$ para o sistema $\vec{1} \vec{3}$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{1} \\ \vec{3} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & -\text{sen}(\chi) \\ \text{sen}(\chi) & \cos(\chi) \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\parallel \xi} \\ \overrightarrow{\parallel z} \end{array} \right\}. \quad \text{A.39)}$$

Por fim, a última matriz de rotação espacial é dada pela equação A.40,

$$[R_4] = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & 0 & -\text{sen}(\chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\chi) & 0 & \cos(\chi) \end{bmatrix}. \quad \text{A.40)}$$

Um resumo das operações de rotação é apresentado na TABELA A. 1.

TABELA A. 1 - RESUMO DAS ROTAÇÕES DO CORPO RÍGIDO.

De	Para	Translação	Rotação
OXYZ	CX'Y'Z'	$[X_c \ Y_c \ 0]^T$	----
CX'Y'Z'	CX'yz*	---	$[R_1]$
CX'yz*	Cxyz	---	$[R_2]$
Cxyz	Cξηz	---	$[R_3]$
Cξηz	P123	$[\varepsilon_\xi \ \varepsilon_\eta \ 0]^T$	$[R_4]$

Com os passos de rotações conhecidos é possível escrever as equações cinemáticas do disco adotando as coordenadas X, Y e Z do ponto C e os ângulos ϕ_x , ϕ_y e θ como coordenadas generalizadas. A suposição de pequeno deslocamento axial das coordenadas X, Y, Z, ϕ_x e ϕ_y permitem grandes simplificações do problema. A coordenada θ não pode ser considerada pequena, pois se trata da rotação do corpo rígido.

A velocidade do centro de gravidade (ponto P) e a velocidade angular expressa no sistema de coordenadas inerciais principais devem ser consideradas no cálculo da energia cinética do corpo rígido. A posição do ponto P é dada pela equação A.41,

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + [R_1]^T [R_2]^T [R_3]^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad \text{A.41)}$$

Substituindo as matrizes de rotação na equação A.41, tem-se:

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{x'}) & \text{sen}(\phi_{x'}) \\ 0 & -\text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & -\text{sen}(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Transpondo as matrizes de rotação na equação A.42, resulta em:

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{x'}) & -\text{sen}(\phi_{x'}) \\ 0 & \text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & \text{sen}(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

Multiplicando as matrizes de rotação R_2 e R_3 transpostas em A.43, tem-se:

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{x'}) & -\text{sen}(\phi_{x'}) \\ 0 & \text{sen}(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi_y) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Concluindo a multiplicação das matrizes de rotação transpostas, chega-se à:

$$\overline{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi_y) \\ \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\theta) + \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & \cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\theta) - \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & -\text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\phi_y) \\ \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\theta) - \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\theta) + \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & \cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

Expressando as componentes de excentricidade do desbalanceamento em função do ângulo α , ver FIGURA A.7 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO QUARTO PASSO DE ROTAÇÃO., obtém-se:

$$\overline{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi_y) \\ \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\theta) + \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & \cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\theta) - \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & -\text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\phi_y) \\ \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\theta) - \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta) & \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\theta) + \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) & \cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon \cdot \cos(\alpha) \\ \varepsilon \cdot \text{sen}(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.46})$$

Multiplicando a matriz de rotações resultante pelo vetor de excentricidade, tem-se:

$$\overline{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) \cdot \varepsilon \cdot \cos(\alpha) - \cos(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\alpha) \\ (\cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\theta) + \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta)) \cdot \varepsilon \cdot \cos(\alpha) + (\cos(\phi_{x'}) \cdot \cos(\theta) - \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta)) \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\alpha) \\ (\text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\theta) - \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\theta)) \varepsilon \cdot \cos(\alpha) + (\text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \cos(\theta) + \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta)) \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Simplificando A.47, obtém-se o vetor,

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cos(\phi_y) \cdot \varepsilon \cdot \cos(\theta + \alpha) \\ \cos(\phi_{x'}) \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) + \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \varepsilon \cdot \cos(\theta + \alpha) \\ \text{sen}(\phi_{x'}) \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) - \cos(\phi_{x'}) \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \varepsilon \cdot \cos(\theta + \alpha) \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.48})$$

A consideração de pequeno deslocamento permite a linearização das funções trigonométricas dos ângulos $\phi_{x'}$, ϕ_y e a simplificação de alguns termos que são da mesma magnitude na equação A.48. Sendo $\phi_{x'}$ e ϕ_y muito pequenos, o cosseno do ângulo se torna aproximadamente 1(um). Contudo, o seno deste mesmo ângulo é aproximadamente o valor do ângulo em radianos. A multiplicação de dois senos será um número realmente muito pequeno, estes termos serão então negligenciados. Assim, a equação A.48 reduz-se à,

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon \cdot \cos(\theta + \alpha) \\ \varepsilon \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) \\ \phi_{x'} \cdot \varepsilon \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) - \phi_y \cdot \varepsilon \cdot \cos(\theta + \alpha) \end{Bmatrix}. \quad \text{A.49)$$

Este desenvolvimento inicial se faz necessário porque as equações de movimento do rotor são obtidas a partir da aproximação de Lagrange das expressões de energias cinética e potencial. As coordenadas generalizadas do sistema são cinco: X, Y, Z, $\phi_{x'}$ e ϕ_y . θ não é considerada uma coordenada Lagrangeana porque a velocidade angular é assumida constante.

A energia cinética do corpo rígido é facilmente determinada pela soma das energias cinéticas de translação do centro de massa e da energia cinética de rotação,

$$\tau = \tau_t + \tau_r = \frac{1}{2} m V_p^2 + \frac{1}{2} \Omega_{123}^T \cdot [J] \cdot \Omega_{123}. \quad \text{A.50)}$$

onde V_p é a velocidade do centro de massa, Ω_{123}' é o vetor velocidade angular, expresso no sistema de coordenadas 123, e $[J]$,

$$[J] = \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}, \quad \text{A.51)}$$

é o tensor de inércia para o corpo rígido expresso no mesmo sistema de coordenadas.

A velocidade do centro de gravidade do rotor é facilmente calculada derivando $\overline{(P-O)}$ em relação ao tempo. Sendo $\dot{\theta} = \Omega$ e α constante, tem-se:

$$V_p = \frac{d}{dt} \overline{(P-O)} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{array}{c} -\varepsilon \cdot \Omega \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) \\ \varepsilon \cdot \Omega \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) \\ \varepsilon \cdot \left[\dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) + \phi_x \cdot \Omega \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) - \dot{\phi}_y \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) + \phi_y \cdot \Omega \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) \right] \end{array} \right\}. \quad \text{(A.52)}$$

Agrupando os termos multiplicados por senos e cosseno em A.52,

$$V_p = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{P-O}) = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon \cdot \Omega \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) \\ \varepsilon \cdot \Omega \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) \\ \varepsilon \cdot \left[\left(\phi_{x'} \cdot \Omega - \dot{\phi}_y \right) \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) + \left(\phi_y \cdot \Omega + \dot{\phi}_{x'} \right) \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) \right] \end{array} \right\}. \quad (\text{A.53})$$

Na terceira linha da equação A.53, há dois termos. O primeiro é a velocidade axial causada pelo deslocamento do ponto C na mesma direção. O segundo a velocidade na direção axial causada pela excentricidade e rotação da seção transversal do disco. Logo, o último termo é o acoplamento entre os comportamentos axial e a flexão do rotor. Entretanto, se a excentricidade é pequena, o termo que a contém é negligenciado quando comparada ao primeiro termo do vetor. Nos desenvolvimentos seguintes, todos os termos contendo o produto da excentricidade ou do erro angular por uma quantidade pequena serão negligenciados e não haverá acoplamento do comportamento axial ao de flexão. A energia cinética de translação é,

$$\tau_t = \frac{1}{2} m \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \Omega \cdot \left[-\dot{X} \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) + \dot{Y} \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) \right] + \varepsilon^2 \cdot \Omega^2 \cdot \text{sen}(\theta + \alpha)^2 + \\ \varepsilon^2 \cdot \Omega^2 \cdot \text{cos}(\theta + \alpha)^2 \end{array} \right\}. \quad (\text{A.54})$$

Simplificando A.54,

$$\tau_t = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \Omega \cdot \left[-\dot{X} \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) + \dot{Y} \cdot \text{cos}(\theta + \alpha) \right] + \varepsilon^2 \cdot \Omega^2 \right\}, \quad (\text{A.55})$$

e substituindo θ por $\Omega \cdot t$,

$$\tau_t = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \Omega \cdot \left[-\dot{X} \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t + \alpha) + \dot{Y} \cdot \text{cos}(\Omega \cdot t + \alpha) \right] + \varepsilon^2 \cdot \Omega^2 \right\}. \quad (\text{A.56})$$

A velocidade angular Ω'_{123} pode ser obtida com a soma de três vetores de velocidade angular agindo em diferentes direções: $\dot{\phi}_{X'}$ ao longo do eixo X' , $\dot{\phi}_y$ ao longo do eixo y e $\dot{\theta}$ ao longo do eixo z . Empregando as matrizes de rotação, as componentes de velocidade angular ao longo dos eixos principais de inércia do rotor Ω'_{123} são:

$$\Omega'_{123} = [R_4] \cdot \left[[R_3] \cdot \left[[R_2] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{X'y z^*} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_y \\ 0 \end{Bmatrix}_{xyz} \right] + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{\xi\eta z} \right] \right]. \quad (\text{A.57})$$

Substituindo a matriz de rotação $[R_2]$ em A.57 e procedendo a primeira multiplicação,

$$\Omega'_{123} = [R_4] \cdot \left[[R_3] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \cdot \cos(\phi_y) \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_{X'} \cdot \text{sen}(\phi_y) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{\xi\eta z} \right]. \quad (\text{A.58})$$

Substituindo a matriz de rotação $[R_3]$ em A.58 e procedendo a multiplicação pelo vetor,

$$\Omega'_{123} = [R_4] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \cdot \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \\ -\dot{\phi}_{X'} \cdot \cos(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_{X'} \cdot \text{sen}(\phi_y) + \dot{\theta} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Por fim, substituindo a matriz de rotação [R₄] em A.59 e procedendo a multiplicação pelo vetor, tem-se a matriz de rotação no sistema de coordenadas 123,

$$\Omega'_{123} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_x \cdot \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\chi) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\chi) - \dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \text{sen}(\chi) - \dot{\theta} \cdot \text{sen}(\chi) \\ - \dot{\phi}_x \cdot \cos(\phi_y) \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_x \cdot \cos(\phi_y) \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\chi) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\chi) + \dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\phi_y) \cdot \cos(\chi) + \dot{\theta} \cdot \cos(\chi) \end{array} \right\}. \quad (\text{A.60})$$

Aplicando as considerações para pequenos deslocamentos, conforme mencionado anteriormente,

$$\Omega'_{123} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_x \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} \cdot \chi \\ - \dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_x \cdot \chi \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_x \cdot \phi_y + \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\theta} \end{array} \right\}. \quad (\text{A.61})$$

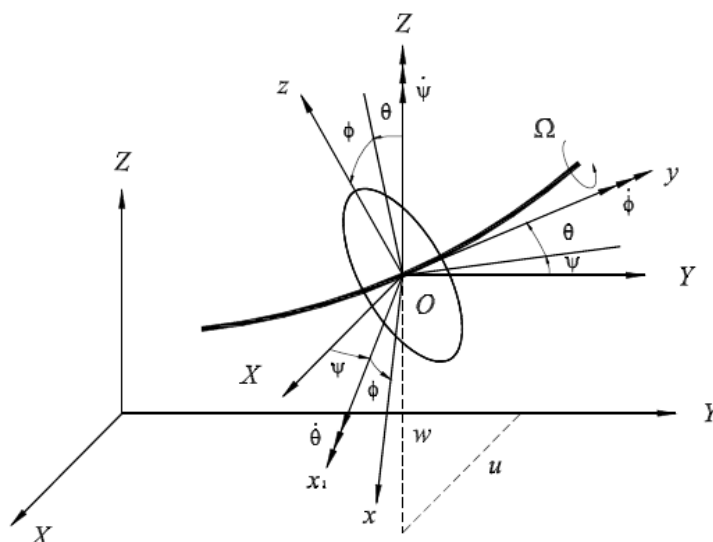
Agrupando os termos semelhante de A.61, tem-se a matriz de rotações no sistema de coordenadas 123,

$$\Omega'_{123} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_x \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} \cdot \chi \\ - \dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_x \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\theta} \end{array} \right\}. \quad (\text{A.62})$$

Neste momento é oportuno fazer uma comparação com o exposto por Lalanne e Ferraris (1990). Assim como Genta (2005), Lalanne e Ferraris(1990) também expõe os passos de rotações em função dos ângulos de Euler. Contudo, os eixos são nomeados diferentemente e a obtenção da matriz de velocidade angular não foi demonstrada. De modo que a matriz foi somente apresentada. A rigor, nenhuma das literaturas apresenta todos os passos deste desenvolvimento

conforme consta neste anexo. O sistema de coordenadas adotado por Lalanne e Ferraris (1990) é apresentado na figura A.9 e sua matriz de velocidade angular pela equação A.63.

FIGURA A.9 - SISTEMA DE COORDENADAS ADOTADO POR LALANNE E FERRARIS (1990).



$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\phi) + \dot{\theta} \cdot \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \text{sen}(\theta) \\ \dot{\psi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) + \dot{\theta} \cdot \text{sen}(\phi) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

Outros dois pontos importantes a serem levados em consideração, dizem respeito ao desbalanceamento do disco expresso pela excentricidade (ε) e ao erro angular de posicionamento do disco em relação a linha do centro geométrico do eixo (χ). Quanto ao desbalanceamento, este é apresentado por Lalanne e Ferraris (1990) no final do desenvolvimento e é somado às forças generalizadas. Já o erro de posicionamento do disco é desprezado. Esta é a razão da ligeira diferença entre as equações A.62 e A.63. A seguir é apresentada a TABELA A.2 que resume a equivalência entre as variáveis empregadas pelos dois autores.

TABELA A.2 - QUADRO COMPARATIVO ENTRE VARIÁVEIS ADOTAS POR GENTA (2005) E LALANNE E FERRARIS (1990).

	Genta		Lalanne e Ferraris	
	Translação	Rotação	Translação	Rotação
Eixos	X	$\phi_{x'}$	Z (w)	ψ
	Y	ϕ_y	X (u)	θ
	Z	$\theta \rightarrow \dot{\theta} = \Omega$	Y	$\phi \rightarrow \dot{\phi} = \Omega$
Orientação Conjunto Rotativo	Z		Y	

Seguindo o desenvolvimento proposto por Genta (2005), como as componentes do vetor Ω'_{123} são referentes ao eixo principal de inércia, a energia cinética de rotação será,

$$\tau_r = \frac{1}{2} \Omega_{123}^T \cdot [J] \cdot \Omega'_{123}. \quad (\text{A.64})$$

Substituindo o vetor A.62 em A.64, tem-se:

$$\tau_r = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_x \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} \cdot \chi \\ -\dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_x \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + \Omega \end{array} \right\} \cdot \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (\text{A.65})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_x \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} \cdot \chi \\ -\dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_x \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + \Omega \end{array} \right\}$$

A Multiplicação do tensor de inércia pelo vetor Ω_{123} , resulta na expressão A.66,

$$\tau_r = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_x \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} \cdot \chi \\ -\dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_x \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + \Omega \end{array} \right\} \cdot \quad (\text{A.66})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_t \cdot \left(\dot{\phi}_x \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} \cdot \chi \right) \\ J_t \cdot \left(-\dot{\phi}_x \cdot \text{sen}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) \right) \\ J_p \cdot \left(\dot{\phi}_x \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + \Omega \right) \end{array} \right\}$$

Finalizando a multiplicação dos vetores em A.66 em dois passes, obtêm-se A.67 e A.68:

$$\tau_r = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & J_t \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \cos(\theta)^2 + J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi + J_t \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) + \\ & J_t \cdot \dot{\phi}_y^2 \cdot \text{sen}(\theta)^2 - J_t \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi - J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi - J_t \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi + J_t \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \chi^2 + \\ & J_t \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \text{sen}(\theta)^2 - 2 \cdot J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) + J_t \cdot \dot{\phi}_y^2 \cdot \cos(\theta)^2 + J_p \cdot \left\{ \dot{\phi}_{x'} \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] \right\}^2 + \\ & J_p \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + J_p \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] \cdot \Omega + J_p \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + \\ & J_p \cdot \dot{\phi}_y^2 \cdot \chi^2 \cdot \text{sen}(\theta)^2 + J_p \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \Omega + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot [\chi \cdot \cos(\theta) + \phi_y] + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + J_p \cdot \Omega^2 \end{aligned} \right\}; \quad (\text{A.67})$$

$$\tau_r = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & J_t \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \cos(\theta)^2 + J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) - J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi + J_t \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) + \\ & J_t \cdot \dot{\phi}_y^2 \cdot \text{sen}(\theta)^2 - J_t \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi - J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi - J_t \cdot \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \chi + J_t \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \chi^2 + J_t \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \text{sen}(\theta)^2 \\ & - 2 \cdot J_t \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_y \cdot \cos(\theta) + J_t \cdot \dot{\phi}_y^2 \cdot \cos(\theta)^2 + J_p \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \chi^2 \cdot \cos(\theta)^2 + 2 \cdot J_p \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \chi \cdot \cos(\theta) \cdot \phi_y + \\ & J_p \cdot \dot{\phi}_{x'}^2 \cdot \phi_y^2 + J_p \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \chi \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + J_p \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \phi_y \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + J_p \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \chi \cdot \cos(\theta) \cdot \Omega + \\ & J_p \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \phi_y \cdot \Omega + J_p \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \chi \cdot \cos(\theta) + J_p \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \phi_y + J_p \cdot \dot{\phi}_y^2 \cdot \chi^2 \cdot \text{sen}(\theta)^2 + \\ & + J_p \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \Omega + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \chi \cdot \cos(\theta) + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_{x'} \cdot \phi_y + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) + J_p \cdot \Omega^2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{A.68})$$

Agrupando os termos semelhantes da equação A.68,

$$\begin{aligned} \tau_r = & \frac{1}{2} \left\{ J_t \left(\dot{\phi}_x'^2 + \dot{\phi}_y'^2 + \Omega^2 \cdot \chi^2 \right) + J_p \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x' \cdot \phi_y \right) + 2 \cdot \Omega \cdot \chi \left(J_p - J_t \right) \left[\dot{\phi}_x' \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y' \cdot \text{sen}(\theta) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ J_p \cdot \dot{\phi}_x'^2 \cdot \chi^2 \cdot \cos^2(\theta) + J_p \cdot \dot{\phi}_y'^2 \cdot \chi^2 \cdot \text{sen}^2(\theta) + 2 \cdot J_p \cdot \dot{\phi}_x'^2 \cdot \chi \cdot \cos(\theta) \cdot \phi_y + 2 \cdot J_p \cdot \dot{\phi}_x' \cdot \dot{\phi}_y' \cdot \chi^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\theta) + J_p \cdot \dot{\phi}_x'^2 \cdot \phi_y^2 + \right. \\ & \left. 2 \cdot J_p \cdot \dot{\phi}_x' \cdot \dot{\phi}_y' \cdot \phi_y \cdot \chi \cdot \text{sen}(\theta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

e negligenciando os termos resultantes de multiplicação de pequenos deslocamentos no agrupamento de termos da equação A.69, tem-se:

$$\tau_r = \frac{1}{2} \left\{ J_t \left(\dot{\phi}_x'^2 + \dot{\phi}_y'^2 + \Omega^2 \cdot \chi^2 \right) + J_p \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x' \cdot \phi_y \right) + \right. \\ \left. + 2 \cdot \Omega \cdot \chi \left(J_p - J_t \right) \left[\dot{\phi}_x' \cdot \cos(\theta) + \dot{\phi}_y' \cdot \text{sen}(\theta) \right] \right\}. \quad (\text{A.70})$$

Substituindo as equações A.56 e A.70 em A.50, obtêm-se a expressão da energia cinética para um disco em função das coordenadas generalizadas,

$$\tau = \tau_t + \tau_r = \tag{A.71}$$

$$\frac{1}{2} m \left\{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \Omega \cdot \left[-\dot{X} \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t + \alpha) + \dot{Y} \cdot \text{cos}(\Omega \cdot t + \alpha) \right] + \varepsilon^2 \cdot \Omega^2 \right\} +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ J_t \left(\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 + \Omega^2 \cdot \chi^2 \right) + J_p \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x \cdot \dot{\phi}_y \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \Omega \cdot \chi \left(J_p - J_t \right) \left[\dot{\phi}_x \cdot \text{cos}(\theta) + \dot{\phi}_y \cdot \text{sen}(\theta) \right] \right\}$$

A expressão final de energia cinética obtida nos passos anteriores aplica-se a elementos rotativos de rotores. Impelidores, discos de balanceamento ou escora, dentre outros. Aqui cabe uma segunda comparação. Lalanne e Ferraris (1990) apresenta a equação para energia cinética do disco como

$$T_D = \frac{1}{2} M_D \cdot \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot I_{Dx} \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot I_{Dy} \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \right). \tag{A.72}$$

Observe, novamente, que se for removida a contribuição da energia da vibração axial, o efeito do desbalanceamento e o erro relativo do disco ao centro geométrico do eixo, a equação A.71 se torna A.72. Obviamente, com as devidas substituições de variáveis, de acordo com a TABELA A.2.

Na equação de Lagrange, equação A.73, é aplicada a equações de energia do conjunto rotativo para obter as características dinâmicas do sistema,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = Q_i. \tag{A.73}$$

Onde q_i representa a i -ésima coordenada generalizada do sistema e Q_i a i -ésima força generalizada.

A seguir, são apresentadas equações com as derivadas parciais da energia cinética para aplicar na equação de Lagrange. A derivada parcial da energia cinética do disco em relação à velocidade da coordenada generalizada X é dada por A.74,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = m \cdot \dot{X} - m \cdot \varepsilon \cdot \Omega \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t + \alpha) \quad (\text{A.74})$$

e a derivada no tempo de A.74 por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = m \cdot \ddot{X} - m \cdot \varepsilon \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha). \quad (\text{A.75})$$

Assim como em A.74, a derivada parcial da energia cinética do disco em relação à velocidade da coordenada generalizada Y é

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} = m \cdot \dot{Y} + m \cdot \varepsilon \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha). \quad (\text{A.76})$$

A derivada no tempo de A.76 é

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} = m \cdot \ddot{Y} - m \cdot \varepsilon \cdot \Omega^2 \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t + \alpha). \quad (\text{A.77})$$

A derivada parcial da energia cinética do disco em relação à velocidade da coordenada generalizada Z é dada por A.78,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} = m \cdot \dot{Z}. \quad (\text{A.78})$$

A derivada no tempo de A.78 é

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} = m \cdot \ddot{Z}. \quad (\text{A.79})$$

Já a derivada parcial da energia cinética do disco em relação à derivada no tempo da coordenada generalizada $\phi_{X'}$ é

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{X'}} = J_t \cdot \dot{\phi}_{X'} + J_p \cdot \Omega \cdot \phi_y + \Omega \cdot \chi(J_p - J_t) \cdot \cos(\theta). \quad (\text{A.80})$$

A derivada no tempo de A.80 resulta em:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{X'}} = J_t \cdot \ddot{\phi}_{X'} + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_y - \Omega^2 \cdot \chi(J_p - J_t) \cdot \text{sen}(\theta). \quad (\text{A.81})$$

A derivada parcial da energia cinética do disco em relação à derivada no tempo da coordenada generalizada ϕ_y é dada por A.82,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_y} = J_t \cdot \dot{\phi}_y + \Omega \cdot \chi(J_p - J_t) \cdot \text{sen}(\theta). \quad (\text{A.82})$$

Derivando no tempo,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_y} = J_t \cdot \ddot{\phi}_y + \Omega^2 \cdot \chi(J_p - J_t) \cdot \cos(\theta). \quad (\text{A.83})$$

A derivada parcial da energia cinética do disco em relação à coordenada generalizada ϕ_y é dada por A.84.

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_y} = J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x. \quad (\text{A.84})$$

Substituindo as equações A.75, A.77, A.79, A.81, A.83 e A.84 em A.73 tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_y} - \frac{\partial T}{\partial \phi_y}; \quad (\text{A.85})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = & m \cdot \ddot{X} - m \cdot \varepsilon \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha) + \\ & + m \cdot \ddot{Y} - m \cdot \varepsilon \cdot \Omega^2 \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t + \alpha) + \\ & + m \cdot \ddot{Z} + \\ & + J_t \cdot \ddot{\phi}_x + J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_y - \Omega^2 \cdot \chi(J_p - J_t) \cdot \text{sen}(\theta) + \\ & + J_t \cdot \ddot{\phi}_y + \Omega^2 \cdot \chi(J_p - J_t) \cdot \cos(\theta) + \\ & - J_p \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x. \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Na equação de Lagrange, A.86, não há nenhuma contribuição de energia potencial, U, por se tratar de um disco rígido.

Reorganizando de forma matricial as coordenadas generalizadas, e separando somente o comportamento lateral a equação A.86,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = \quad (\text{A.87})$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\phi}_y \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\phi}_{X'} \end{Bmatrix} + \Omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi}_{X'} \end{Bmatrix} + \Omega^2 \begin{Bmatrix} -m \cdot \varepsilon \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha) \\ \chi(J_p - J_t) \cdot \cos(\theta) \\ -m \cdot \varepsilon \cdot \sin(\Omega \cdot t + \alpha) \\ -\chi(J_p - J_t) \cdot \sin(\theta) \end{Bmatrix}.$$

Aparecem as matrizes de massa e giroscópica para corpo rígido respectivamente,

$$M_{cr} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}, \quad (\text{A.88})$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.89})$$

Conforme será apresentado no próximo item que discorre sobre o elemento eixo, se for empregado $-\phi_{X'}$ como coordenada generalizada ao invés de $\phi_{X'}$, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = \quad (\text{A.90})$$

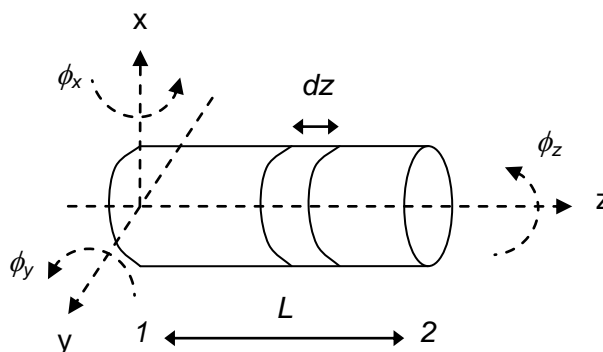
$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\phi}_y \\ \ddot{Y} \\ -\ddot{\phi}_{X'} \end{Bmatrix} + \Omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{Y} \\ -\dot{\phi}_{X'} \end{Bmatrix} + \Omega^2 \begin{Bmatrix} -m \cdot \varepsilon \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha) \\ \chi(J_p - J_t) \cdot \cos(\theta) \\ -m \cdot \varepsilon \cdot \sin(\Omega \cdot t + \alpha) \\ \chi(J_p - J_t) \cdot \sin(\theta) \end{Bmatrix}.$$

Observe que o terceiro vetor resultante da aplicação das equações de Lagrange à equação de energia cinética do disco trata-se da força de desbalanceamento generalizada. Isto para desbalanceamento estático e de acoplamento. O vetor de desbalanceamento apresentado por Lalanne e Ferraris (1990) não leva em consideração o desbalanceamento de acoplamento ($\chi = 0$). Há também uma pequena diferença entre senos e cossenos. Isto porque o ângulo de referência de rotação é tomado a partir de outro eixo do par cartesiano, respeitando o sentido de giro.

EIXO

Os eixos das máquinas normalmente são modelados como vigas de seção transversal circular e caracterizados pelas energias de deformação e cinética. As equações de Lagrange, equação A.73, são aplicadas às equações de energia do conjunto rotativo para obter as características dinâmicas dos sistemas. As equações de energia cinética e potencial são equações em derivada parcial. O método escolhido para discretização e solução das equações é o método de elementos finitos (MEF). Os elementos comumente empregados para modelagem de rotores elementares são: elementos de viga, massa e mola e amortecedor. Algumas formulações para vigas foram desenvolvidas e se difere uma das outras, no número de nós, número de graus de liberdade por nó e formulação teórica. Há, por exemplo, os elementos de Euler-Bernoulli, que não levam em consideração a deformação por cisalhamento, ou com a deformação por cisalhamento seguindo a aproximação simplificada introduzida por Timoshenko. O elemento que será abordado aqui é o elemento de viga simples de Timoshenko. Ele possui dois nós nas extremidades do elemento com seis graus de liberdade por nó, e consiste de uma viga prismática homogênea com os comportamentos axial, torsional e lateral independentes/desacoplados. Ver FIGURA A.10.

FIGURA A.10 - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO SIMPLES DE TIMOSHENKO.



Cada seção transversal possui seis graus de liberdade, três deslocamentos e três rotações. O número total de graus de liberdade por elemento é 12. O vetor de deslocamentos nodais ou de coordenadas generalizadas do elemento é

$$q = [u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{z1} \quad \phi_{x1} \quad \phi_{y1} \quad \phi_{z1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{z2} \quad \phi_{x2} \quad \phi_{y2} \quad \phi_{z2}]^T \quad (\text{A.91})$$

É possível dividir o vetor em função do comportamento, axial

$$q_A = [u_{z1} \quad u_{z2}]^T, \quad (\text{A.92})$$

comportamento torcional,

$$q_T = [\phi_{z1} \quad \phi_{z2}]^T \quad (\text{A.93})$$

e comportamento lateral,

$$q_{F1} = [u_{x1} \quad \phi_{y1} \quad u_{x2} \quad \phi_{y2}]^T, \quad (\text{A.94})$$

$$q_{F2} = [u_{y1} \quad \phi_{x1} \quad u_{y2} \quad \phi_{x2}]^T. \quad (\text{A.95})$$

O deslocamento dentro de cada elemento é obtido pela interpolação dos deslocamentos nodais. Assim, são definidas funções de forma, ou de interpolação, para este fim. As equações A.96 e A.97 mostram como os deslocamentos para o comportamento lateral são obtidos a partir das coordenadas generalizadas,

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ \phi_{y1} \\ u_{x2} \\ \phi_{y2} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.96})$$

$$\begin{Bmatrix} u_y \\ -\phi_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{y1} \\ -\phi_{x1} \\ u_{y2} \\ -\phi_{x2} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.97})$$

Uma forma de incluir a deformação por cisalhamento na análise sem incorrer no problema conhecido como “locking”, uma superestimativa da rigidez do elemento, é utilizar as seguintes funções de forma,

$$N_{11} = \frac{1 + \Phi \cdot (1 - \zeta) - 3 \cdot \zeta^2 + 2 \cdot \zeta^3}{1 + \Phi}, \quad (\text{A.98})$$

$$N_{12} = L \cdot \zeta \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot (1 - \zeta) - 2 \cdot \zeta + \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (\text{A.99})$$

$$N_{13} = \zeta \cdot \frac{\Phi + 3 \cdot \zeta - 2 \cdot \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (\text{A.100})$$

$$N_{14} = L \cdot \zeta \cdot \frac{-\frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot (1 - \zeta) - \zeta + \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (\text{A.101})$$

$$N_{21} = 6 \cdot \zeta \cdot \frac{\zeta - 1}{L \cdot (1 + \Phi)}, \quad (\text{A.102})$$

$$N_{22} = \frac{1 + \Phi \cdot (1 - \zeta) - 4 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (\text{A.103})$$

$$N_{23} = -6 \cdot \zeta \cdot \frac{\zeta - 1}{L \cdot (1 + \Phi)}, \quad (\text{A.104})$$

$$N_{24} = \frac{\Phi \cdot \zeta - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2}{1 + \Phi}, \quad (\text{A.105})$$

$$\Phi = \frac{12 \cdot E \cdot I_y \cdot \chi}{G \cdot A \cdot L^2}. \quad (\text{A.106})$$

Onde $\zeta = z/L$ é uma coordenada adimensional e χ é o fator de cisalhamento. Quando a esbeltez da viga aumenta, o valor de χ diminui, tendendo a zero para uma viga Euler-Bernoulli. Sendo a viga axialmente simétrica, $I_x = I_y$, e χ e Φ relativos aos planos xz e yz são iguais.

Nota-se que para usar a mesma matriz de funções de interpolação, ϕ_x é pré multiplicado por menos um, $-\phi_x$. Este fato será esclarecido mais adiante com o desdobramento da equação de energia potencial para o eixo.

O comprimento dz da viga pode ser considerado como um corpo rígido, e sua energia cinética pode ser obtida utilizando a equação A.71 com as devidas simplificações. Contudo, neste momento, faz-se necessário a definição formal dos momentos de inércia e momentos de área. No caso de um corpo contínuo, o disco, por exemplo, o momento de inércia (massa) é definido em sua forma mais geral como (TIPLER, 1995):

$$I_{\text{corpo}} = \int r^2 dm \quad (\text{A.107})$$

O momento de área de uma figura plana, em relação a um eixo perpendicular ao plano da área é chamado de momento de inércia (área) polar (TIMOSHENKO e GERE, 1994):

$$J = \int r^2 dA \quad (\text{A.108})$$

Para uma seção transversal circular plana de espessura L e de um mesmo material, a equação A.107 pode ser reescrita por

$$I_{\text{corpo}} = \rho \cdot L \cdot \int r^2 dA \quad (\text{A.109})$$

Aplicando a equação A.108 na equação A.109,

$$I_{\text{corpo}} = \rho \cdot L \cdot J \quad (\text{A.110})$$

Também conhecidos como momentos de inércia (área) de uma figura plana em relação a um determinado eixo são definidos (TIMOSHENKO e GERE, 1994):

$$I_x = \int y^2 dA, \quad (\text{A.111})$$

e

$$I_y = \int x^2 dA. \quad (\text{A.112})$$

É possível observar que a soma dos momentos de inércia (área) das equações A.111 e A.112 resultam no momento polar,

$$I_x + I_y = \int y^2 dA + \int x^2 dA = \int x^2 + y^2 dA = \int r^2 dA = J. \quad (\text{A.113})$$

Em se tratando novamente de uma seção transversal circular plana, com o centro dos eixos ortogonais xy passando pelo centróide da figura, escreve-se

$$J = I_x + I_y = I + I = 2I. \quad (\text{A.114})$$

É possível estender a equação da energia cinética do disco para um elemento de eixo dz,

$$d\tau = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left[I_y \cdot \left(\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 \right) + J_p \cdot \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x \cdot \dot{\phi}_y \right) \right]. \quad (\text{A.115})$$

No caso de uma seção transversal axissimétrica, $J_p = 2I_y$, assim:

$$d\tau = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left[I_y \cdot \left(\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 \right) + 2 \cdot I_y \cdot \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x \cdot \dot{\phi}_y \right) \right]. \quad (\text{A.116})$$

Já a energia potencial pode ser obtida pela soma das contribuições causadas pela flexão e pelo cisalhamento,

$$dU = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_y \cdot \left[\left(\frac{d\phi_y}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_x}{dz} \right)^2 \right] \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot A}{\chi} \cdot (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \cdot dz. \quad (\text{A.117})$$

Integrando a equação A.117 ao longo do elemento tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_y \cdot \int_0^L \left[\left(\frac{d\phi_y}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_x}{dz} \right)^2 \right] \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot A}{\chi} \cdot \int_0^L (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) dz. \quad (\text{A.118})$$

A deformação por cisalhamento, γ , se relaciona com o deslocamento angular através das equações,

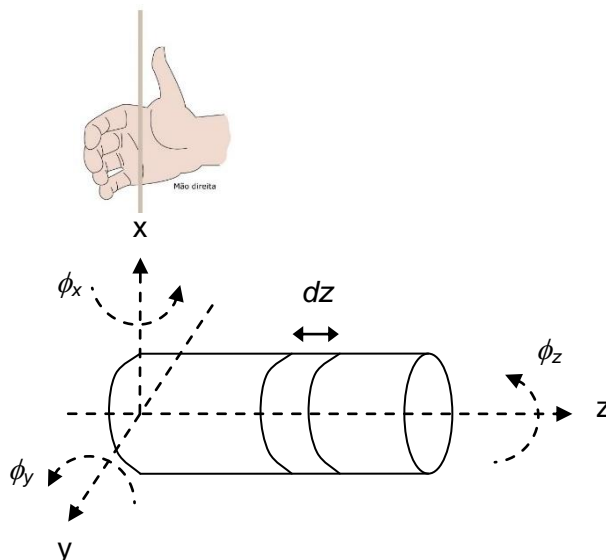
$$\gamma_{xz} = \phi_y - \frac{du_x}{dz} \quad \mathbf{e} \quad (\text{A.119})$$

$$\gamma_{yz} = -\phi_x - \frac{du_y}{dz} \quad \mathbf{.} \quad (\text{A.120})$$

Observe na equação A.120 que ϕ_x está sendo pré-multiplicado por -1. Isto porque, na resolução das equações diferenciais pelo métodos de Elementos Finitos, as matrizes referentes a flexão no plano xz possam ser as mesmas do plano yz (se o sistema for isotrópico). Este fato se deve ao sistema de coordenadas

inerciais adotado. Observe na FIGURA A.11 que os giros podem ser referenciados através da “regra da mão direita”. Com o polegar orientado para o sentido positivo do eixo, as pontas dos demais dedos da mão indicam o sentido positivo de giro.

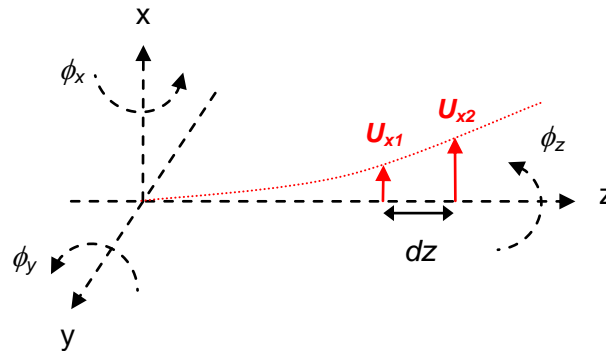
FIGURA A.11 - DESENHO ESQUEMÁTICO DE ORIENTAÇÃO AOS DESLOCAMENTOS E GIROS.



É possível observar que numa aproximação linear, desprezando o cisalhamento apenas para título de ilustração, tem-se (Ver FIGURA A.12):

$$\phi_y \cong \frac{\Delta u_x}{\Delta z} = \frac{u_{x2} - u_{x1}}{z_2 - z_1} = \text{Valor} + \quad (\text{A.121})$$

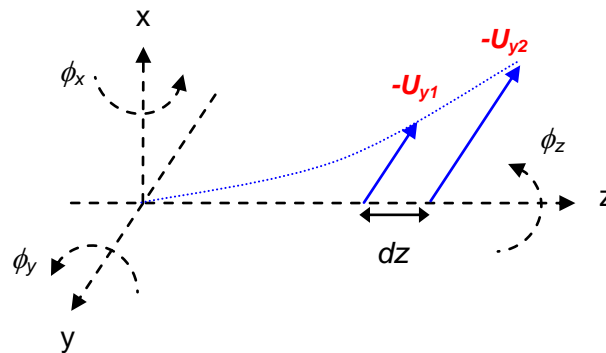
FIGURA A.12 - DETALHES DOS DESLOCAMENTOS E GIROS NA DIREÇÃO X.



Contudo, no caso de ϕ_x , a orientação das coordenadas inércias e a referência de giro adotada resultam em (Ver FIGURA A.13):

$$\phi_x \cong \frac{\Delta u_y}{\Delta z} = \frac{-u_{y2} - (-u_{y1})}{z_2 - z_1} = \text{Valor} - . \quad (\text{A.122})$$

FIGURA A.13 - DETALHES DOS DESLOCAMENTOS E GIROS NA DIREÇÃO Y.



Substituindo as equações A.119 e A.120 em A.118,

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_y \cdot \int_0^L \left[\left(\frac{d\phi_y}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_x}{dz} \right)^2 \right] \cdot dz + \\
 & \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot A}{\chi} \cdot \int_0^L \left(\left(\phi_y - \frac{du_x}{dz} \right)^2 + \left(-\phi_x - \frac{du_y}{dz} \right)^2 \right) dz
 \end{aligned} \tag{A.123}$$

Desenvolvendo os termos ao quadrado da deformação por cisalhamento na equação A.123,

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_y \cdot \int_0^L \left[\left(\frac{d\phi_y}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_x}{dz} \right)^2 \right] \cdot dz + \\
 & \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot A}{\chi} \cdot \int_0^L \left(\phi_y^2 - 2 \cdot \phi_y \cdot \frac{du_x}{dz} + \left(\frac{du_x}{dz} \right)^2 + \phi_x^2 + 2 \cdot \phi_x \cdot \frac{du_y}{dz} + \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 \right) dz
 \end{aligned} \tag{A.124}$$

Expandindo os termos ao quadrado na equação A.124,

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_y \cdot \int_0^L \left[\frac{d\phi_y}{dz} \cdot \frac{d\phi_y}{dz} + \frac{d\phi_x}{dz} \cdot \frac{d\phi_x}{dz} \right] \cdot dz + \\
 & \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot A}{\chi} \cdot \int_0^L \left(\phi_y \cdot \phi_y - 2 \cdot \phi_y \cdot \frac{du_x}{dz} + \frac{du_x}{dz} \cdot \frac{du_x}{dz} + \phi_x \cdot \phi_x + 2 \cdot \phi_x \cdot \frac{du_y}{dz} + \frac{du_y}{dz} \cdot \frac{du_y}{dz} \right) dz
 \end{aligned} \tag{A.125}$$

Aplicando o MEF na equação A.125 tem-se,

$$U = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_y \cdot \int_0^1 \left[\{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta \cdot L} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_x\} + \{q_y\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta \cdot L} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_y\} \right] \cdot d\zeta \cdot L + \quad (\text{A.126})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot A}{\chi} \cdot \int_0^1 \left(\begin{aligned} & \{q_x\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_x\} - 2 \cdot \{q_x\}^T \cdot [N_2]^T \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_x\} + \\ & \{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_1]^T}{d\zeta \cdot L} \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_x\} + \\ & \{q_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_y\} + 2 \cdot \{q_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_y\} + \\ & + \{q_y\}^T \cdot \frac{d[N_1]^T}{d\zeta \cdot L} \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_y\} \end{aligned} \right) d\zeta \cdot L$$

Considerando $[N_3] = [N_2] + \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L}$ e substituindo em A.126,

$$U = \frac{E \cdot I_y}{2 \cdot L} \int_0^1 \{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_x\} d\zeta + \frac{E \cdot I_y}{2 \cdot L} \int_0^1 \{q_y\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_y\} d\zeta + \quad (\text{A.127})$$

$$\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{\Phi \cdot L} \int_0^1 \left(\begin{aligned} & \{q_x\}^T \cdot [N_3]^T \cdot [N_3] \cdot \{q_x\} - 2 \cdot \{q_x\}^T \cdot [N_2]^T \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_x\} + \\ & \{q_y\}^T \cdot [N_3]^T \cdot [N_3] \cdot \{q_y\} + 2 \cdot \{q_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_y\} + \end{aligned} \right) d\zeta$$

Os termos $-2 \cdot \{q_x\}^T \cdot [N_2]^T \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_x\}$ e $+2 \cdot \{q_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot \frac{d[N_1]}{d\zeta \cdot L} \cdot \{q_y\}$ são

negligenciados, mantendo a matriz de rigidez, obtida a partir da equação de energia potencial, simétrica. A energia potencial se torna

$$U = \frac{E \cdot I_y}{2 \cdot L} \int_0^1 \{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_x\} d\zeta + \frac{E \cdot I_y}{2 \cdot L} \int_0^1 \{q_y\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_y\} d\zeta + \quad (\text{A.128})$$

$$\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{\Phi \cdot L} \int_0^1 \left(\{q_x\}^T \cdot [N_3]^T \cdot [N_3] \cdot \{q_x\} + \{q_y\}^T \cdot [N_3]^T \cdot [N_3] \cdot \{q_y\} \right) d\zeta$$

Para facilitar a integração é empregada a notação indicial de Einstein. A equação A.129 expressa o primeiro termo da equação de energia potencial A.128 escrito em notação indicial,

$$\{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_x\} = q_{xk} N'_{21k} N'_{21j} q_{xj}. \quad (\text{A.129})$$

Integrando A.129 no domínio de interesse, tem-se

$$\int_0^1 \{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_x\} d\zeta = \int_0^1 q_{xk} N'_{21k} N'_{21j} q_{xj} d\zeta. \quad (\text{A.130})$$

As coordenadas generalizadas q_{xk} ou q_{xj} não dependem de ζ . Assim a equação A.130 pode ser reescrita:

$$\int_0^1 \{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_x\} d\zeta = q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj}. \quad (\text{A.131})$$

No somatório da equação acima, são integrados somente os termos da matriz resultante da multiplicação das derivadas dos elementos das funções de forma. Portanto, o somatório em notação indicial da equação A.131 pode ser reescrito facilmente em notação matricial,

$$q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} = \tag{A.132}$$

$$\{q_x\}^T \begin{bmatrix} \int_0^1 N'_{211} N'_{211} d\zeta & \int_0^1 N'_{211} N'_{212} d\zeta & \int_0^1 N'_{211} N'_{213} d\zeta & \int_0^1 N'_{211} N'_{214} d\zeta \\ \int_0^1 N'_{212} N'_{211} d\zeta & \int_0^1 N'_{212} N'_{212} d\zeta & \int_0^1 N'_{212} N'_{213} d\zeta & \int_0^1 N'_{212} N'_{214} d\zeta \\ \int_0^1 N'_{213} N'_{211} d\zeta & \int_0^1 N'_{213} N'_{212} d\zeta & \int_0^1 N'_{213} N'_{213} d\zeta & \int_0^1 N'_{213} N'_{214} d\zeta \\ \int_0^1 N'_{214} N'_{211} d\zeta & \int_0^1 N'_{214} N'_{212} d\zeta & \int_0^1 N'_{214} N'_{213} d\zeta & \int_0^1 N'_{214} N'_{214} d\zeta \end{bmatrix} \{q_x\}$$

Aplicando o mesmo raciocínio para todos os termos da equação de energia potencial A.128 é possível aplicar a equação de Lagrange, A.73. Nesta equação a energia potencial aparece no primeiro e segundo termo. Contudo, observa-se que U independe de \dot{q}_i . Assim, aplica-se em A.128 somente a derivada parcial $\frac{\partial(U)}{\delta q_i}$. Utilizando mais uma vez a notação indicial apresentada na equação A.129 e derivando parcialmente o primeiro termo da energia potencial a título de ilustração, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\int_0^1 \{q_x\}^T \cdot \frac{d[N_2]^T}{d\zeta} \cdot \frac{d[N_2]}{d\zeta} \cdot \{q_x\} d\zeta \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right). \tag{A.133}$$

Uma vez que a energia potencial está relacionada à flexão e ao cisalhamento, são 4 as coordenadas generalizadas relativas ao comportamento lateral,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_i} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_{x1}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) + \\
\frac{\partial}{\partial q_{x2}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) &+ \frac{\partial}{\partial q_{x3}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) + \\
\frac{\partial}{\partial q_{x4}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) &
\end{aligned} \tag{A.134}$$

Nomeia-se as coordenadas generalizadas em A.134 como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_i} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_{x1}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) + \\
\frac{\partial}{\partial \phi_{y1}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) &+ \frac{\partial}{\partial u_{x2}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) + \\
\frac{\partial}{\partial \phi_{y2}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) &
\end{aligned} \tag{A.135}$$

Desenvolvendo o primeiro termo da equação A.135,

$$\begin{aligned}
q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} &= q_{xk} A_{kj} q_{xj} = q_{x1} A_{11} q_{x1} + q_{x1} A_{12} q_{x2} + q_{x1} A_{13} q_{x3} + q_{x1} A_{14} q_{x4} + \\
& q_{x2} A_{21} q_{x1} + q_{x2} A_{22} q_{x2} + q_{x2} A_{23} q_{x3} + q_{x2} A_{24} q_{x4} + \\
& q_{x3} A_{31} q_{x1} + q_{x3} A_{32} q_{x2} + q_{x3} A_{33} q_{x3} + q_{x3} A_{34} q_{x4} + \\
& q_{x4} A_{41} q_{x1} + q_{x4} A_{42} q_{x2} + q_{x4} A_{43} q_{x3} + q_{x4} A_{44} q_{x4}
\end{aligned} \tag{A.136}$$

Aplicando a derivada parcial na equação A.136,

$$\frac{\partial}{\partial q_{x1}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) = 2A_{11}q_{x1} + A_{12}q_{x2} + A_{13}q_{x3} + A_{14}q_{x4} +$$

$$q_{x2}A_{21} + 0 + 0 + 0 +$$

$$q_{x3}A_{31} + 0 + 0 + 0 +$$

$$q_{x4}A_{41} + 0 + 0 + 0$$
(A.137)

Pelo fato da matriz A ser uma matriz simétrica, $A_{12}q_{x2} = q_{x2}A_{21}$, assim:

$$\frac{\partial}{\partial q_{x1}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) = 2A_{11}q_{x1} + 2A_{12}q_{x2} + 2A_{13}q_{x3} + 2A_{14}q_{x4}.$$
(A.138)

Matricialmente a equação A.138 pode ser expressa pela equação

$$\frac{\partial}{\partial q_{xi}} \left(q_{xk} \left(\int_0^1 N'_{21k} N'_{21j} d\zeta \right) q_{xj} \right) = 2A_{ij}q_{xj} = 2 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ \phi_{y1} \\ u_{x2} \\ \phi_{y2} \end{Bmatrix}.$$
(A.139)

Ao derivarmos os demais termos da equação de energia potencial, de maneira idêntica à apresentada para o primeiro termo, e somarmos as matrizes, teremos então a matriz conhecida como matriz de rigidez,

$$K = \frac{E \cdot I_y}{L^3 \cdot (1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot L & -12 & 6 \cdot L \\ 6 \cdot L & (4 + \Phi) \cdot L^2 & -6 \cdot L & (2 + \Phi) \cdot L^2 \\ -12 & -6 \cdot L & 12 & -6L \\ 6 \cdot L & (2 + \Phi) \cdot L^2 & -6L & (4 + \Phi) \cdot L^2 \end{bmatrix}.$$
(A.140)

Assim,

$$\frac{\partial(U)}{\partial q_i} = [K]\{q_x\} + [K]\{q_y\}, \quad (\text{A.141})$$

ou ainda,

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{q_x\}^T [K] \{q_x\} + \{q_y\}^T [K] \{q_y\}. \quad (\text{A.142})$$

Vale ressaltar neste momento que a matriz de rigidez da equação A.140 é idêntica a matriz mostrada por Lalanne e Ferraris (1990), salvo disposição em função da definição dos vetores de coordenadas generalizadas de um ou de outro autor.

Como visto, a aplicação da equação de Lagrange à equação de energia potencial do sistema resultou na obtenção da matriz de rigidez. Fazendo o mesmo à equação de energia cinética têm-se as matrizes de massa do sistema.

A energia cinética de um comprimento infinitesimal de eixo dz é

$$d\tau = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left[I_y \cdot \left(\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 \right) + 2 \cdot I_y \cdot \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x \cdot \dot{\phi}_y \right) \right] \cdot dz. \quad (\text{A.143})$$

Integrando a equação A.143 ao longo do elemento de comprimento L tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \int_0^L \left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \right) dz + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \int_0^L \left[I_y \cdot \left(\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 \right) + 2 \cdot I_y \cdot \left(\Omega^2 + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_x \cdot \dot{\phi}_y \right) \right] dz. \quad (\text{A.144})$$

Desenvolvendo os termos ao quadrado e as integrais em A.144:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \int_0^L \left(\dot{u}_x \cdot \dot{u}_x + \dot{u}_y \cdot \dot{u}_y \right) dz + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot I_y \int_0^L \left(\dot{\phi}_x \cdot \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y \cdot \dot{\phi}_y \right) dz + \quad (\text{A.145})$$

$$\rho \cdot I_y \cdot \Omega^2 \int_0^L dz + 2 \cdot \Omega \cdot \rho \cdot I_y \cdot \int_0^L \dot{\phi}_x \cdot \phi_y dz$$

Aplicando o MEF à A.145, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \int_0^L \left(\{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{q_x\} + \{\dot{q}_y\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{q_y\} \right) dz + \quad (\text{A.146})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot I_y \int_0^L \left(\{\dot{q}_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_y\} + \{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_x\} \right) dz +$$

$$\rho \cdot I_y \cdot \Omega^2 \cdot L - 2 \cdot \Omega \cdot \rho \cdot I_y \cdot \int_0^L \{\dot{q}_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_x\} dz$$

Observa-se na equação A.146 que o sinal do último termo já está corrigido pela troca de ϕ_x por $-\phi_x$. Substituindo a variável de integração e os respectivos limites,

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot L \cdot \int_0^1 \left(\{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{q_x\} + \{\dot{q}_y\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{q_y\} \right) d\zeta + \quad (\text{A.147})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot I_y \cdot L \int_0^1 \left(\{\dot{q}_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_y\} + \{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_x\} \right) d\zeta +$$

$$\rho \cdot I_y \cdot L \cdot \Omega^2 - 2 \cdot \rho \cdot I_y \cdot L \cdot \Omega \cdot \int_0^1 \{\dot{q}_y\}^T \cdot [N_2]^T \cdot [N_2] \cdot \{q_x\} d\zeta$$

O mesmo procedimento empregado na equação de energia potencial é utilizado na equação de energia cinética. Para facilitar a integração é empregada a

notação indicial de Einstein. Para o primeiro termo da equação de energia cinética tem-se:

$$\{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{\dot{q}_x\} = \dot{q}_{xk} N_{11k} N_{11j} \dot{q}_{xj} \quad (\text{A.148})$$

Integrando A.148,

$$\int_0^1 \{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{\dot{q}_x\} d\zeta = \int_0^1 \dot{q}_{xk} N_{11k} N_{11j} \dot{q}_{xj} d\zeta . \quad (\text{A.149})$$

As coordenadas generalizadas \dot{q}_{xk} ou \dot{q}_{xj} não dependem de ζ . Assim a equação A.149 pode ser reescrita

$$\int_0^1 \{\dot{q}_x\}^T \cdot [N_1]^T \cdot [N_1] \cdot \{\dot{q}_x\} d\zeta = \dot{q}_{xk} \cdot \left(\int_0^1 N_{11k} N_{11j} d\zeta \right) \cdot \dot{q}_{xj} . \quad (\text{A.150})$$

Logo, integra-se somente os termos da matriz resultante da multiplicação dos elementos das funções de forma. Assim, o somatório em notação indicial da equação A.150 pode ser reescrito em notação matricial

$$\dot{q}_{xk} \cdot \left(\int_0^1 N_{11k} N_{11j} d\zeta \right) \cdot \dot{q}_{xj} = \quad (A.151)$$

$$\{ \dot{q}_x \}^T \begin{bmatrix} \int_0^1 N_{111} N_{111} d\zeta & \int_0^1 N_{111} N_{112} d\zeta & \int_0^1 N_{111} N_{113} d\zeta & \int_0^1 N_{111} N_{114} d\zeta \\ \int_0^1 N_{112} N_{111} d\zeta & \int_0^1 N_{112} N_{112} d\zeta & \int_0^1 N_{112} N_{113} d\zeta & \int_0^1 N_{112} N_{114} d\zeta \\ \int_0^1 N_{113} N_{111} d\zeta & \int_0^1 N_{113} N_{112} d\zeta & \int_0^1 N_{113} N_{113} d\zeta & \int_0^1 N_{113} N_{114} d\zeta \\ \int_0^1 N_{114} N_{111} d\zeta & \int_0^1 N_{114} N_{112} d\zeta & \int_0^1 N_{114} N_{113} d\zeta & \int_0^1 N_{114} N_{114} d\zeta \end{bmatrix} \cdot \{ \dot{q}_x \}$$

Aplicando o mesmo raciocínio para todos os termos da equação de energia cinética, A.147, é possível aplicar a equação de Lagrange. Os resultados são as matrizes de inércia de translação,

$$M_T = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{420 \cdot (1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & L \cdot m_2 & m_3 & -L \cdot m_4 \\ L \cdot m_2 & L^2 \cdot m_5 & L \cdot m_4 & -L^2 \cdot m_6 \\ m_3 & L \cdot m_4 & m_1 & -L \cdot m_2 \\ -L \cdot m_4 & -L^2 \cdot m_6 & -L \cdot m_2 & L^2 \cdot m_5 \end{bmatrix}, \quad (A.152)$$

e rotação,

$$M_R = \frac{\rho \cdot I_y}{30 \cdot L \cdot (1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & L \cdot m_8 & -m_7 & L \cdot m_8 \\ L \cdot m_8 & L^2 \cdot m_9 & -L \cdot m_8 & -L^2 \cdot m_{10} \\ -m_7 & -L \cdot m_8 & m_7 & -L \cdot m_8 \\ L \cdot m_8 & -L^2 \cdot m_{10} & -L \cdot m_8 & L^2 \cdot m_9 \end{bmatrix}. \quad (A.153)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 156 + 294 \cdot \Phi + 140 \cdot \Phi^2 \\
m_2 &= 22 + 38,5 \cdot \Phi + 17,5 \cdot \Phi^2 \\
m_3 &= 54 + 126 \cdot \Phi + 70 \cdot \Phi^2 \\
m_4 &= 13 + 31,5 \cdot \Phi + 17,5 \cdot \Phi^2 \\
m_5 &= 4 + 7 \cdot \Phi + 3,5 \cdot \Phi^2 \\
m_6 &= 3 + 7 \cdot \Phi + 3,5 \cdot \Phi^2 \\
m_7 &= 36 \\
m_8 &= 3 - 15 \cdot \Phi \\
m_9 &= 4 + 5 \cdot \Phi + 10 \cdot \Phi^2 \\
m_{10} &= 1 + 5 \cdot \Phi - 5 \cdot \Phi^2
\end{aligned} \tag{A.154}$$

Por fim, a matriz de massa e a matriz giroscópica do elemento são, respectivamente,

$$[M] = [M_T] + [M_R] \text{ e} \tag{A.155}$$

$$[G] = 2 \cdot [M_R] \tag{A.156}$$

As matrizes de massa apresentadas por Genta (2005) se diferem das matrizes apresentadas por Lalanne e Ferraris (1990). Lalanne e Ferraris (1990), apesar de considerar o efeito do cisalhamento na matriz de rigidez, viga de Timoshenko, não contabilizou as correções nas funções de interpolação. Assim, as matrizes de massa sugeridas por Lalanne e Ferraris (1990) são exatamente as matrizes da teoria de Euler-Bernoulli. Muitos nomeiam essa teoria como a teoria de Euler-Bernoulli modificada.

ELEMENTO DE MASSA.

Qualquer corpo rígido simétrico ao plano da seção transversal do rotor, localizado no i -ésimo nó, possui as matrizes de massa e giroscópica idênticas às A.88 e A.89. Pois se trata da adição de energia cinética ao sistema no i -ésimo nó.

ELEMENTO DE MOLA.

O referido elemento de mola desta seção é representado por uma mola linear que gera restrições de deformação num nó específico. Logo, a energia potencial desta mola linear é adicionada à energia potencial total do sistema. A energia potencial da mola é representada por

$$U_{mola} = \frac{1}{2} k_i q_i^2. \quad (\text{A.157})$$

Para contabilizar o efeito da mola linear à matriz de rigidez global, basta somar k_i ao elemento na i -ésima linha e i -ésima coluna. De maneira geral, a energia potencial é escrita da seguinte forma,

$$U_{mola} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_x & u_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.158})$$

Realizando a multiplicação a direita,

$$U_{mola} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_x & u_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{xx} \cdot u_x + K_{xy} \cdot u_y \\ K_{yx} \cdot u_x + K_{yy} \cdot u_y \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.159})$$

finalizando a multiplicação a esquerda, a energia potencial é

$$U_{mola} = \frac{1}{2} (K_{xx} \cdot u_x^2 + K_{xy} \cdot u_y \cdot u_x + K_{yx} \cdot u_x \cdot u_y + K_{yy} \cdot u_y^2). \quad (\text{A.160})$$

A aplicação da equação de Lagrange à A.160, resulta em:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial u_x} + \frac{\partial U}{\partial u_y} = K_{xx} \cdot u_x + \frac{1}{2} \cdot K_{xy} \cdot u_y + \frac{1}{2} \cdot K_{yx} \cdot u_y + \frac{1}{2} \cdot K_{xy} \cdot u_x + \frac{1}{2} \cdot K_{yx} \cdot u_x + K_{yy} \cdot u_y \quad (\text{A.161})$$

Sendo $K_{xy} = K_{yx}$ agrupa-se de forma matricial A.161,

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.162})$$

Assim para acrescentar ao sistema a rigidez de mancais ou mesmos selos, basta adicionar a matriz de rigidez de A.162 diretamente nas posições relativas ao nó específico das coordenadas generalizadas.

ELEMENTO DE AMORTECIMENTO

Semelhante ao elemento de mola, o elemento de amortecimento pode ser contabilizado adicionando a matriz de amortecimento A.163 na matriz de amortecimento global do sistema. Adiciona-se a matriz de amortecimento,

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.163})$$

diretamente nas posições corretas em relação ao nó específico e suas respectivas coordenadas generalizadas.

MATRIZES GLOBAIS

Pelo fato das equações de movimento terem sido escritas para o elemento individualmente, as coordenadas são locais. Quando se compõe a estrutura deve-se levar em consideração as coordenadas globais do sistema. Contudo, em especial para elementos de viga, o eixo z coincide com o eixo da viga. Ocorre também que os eixos x e y se tornam também os eixos principais de inércia no caso de uma seção transversal simétrica. Assim, o sistema de referência local se confunde com o sistema de referência global. Na prática, os elementos são adicionados as suas respectivas posições nas matrizes globais. Este trabalho estuda apenas o comportamento lateral dos rotores. Pela natureza do problema também não há adição de rigidez por efeito centrífugo ou amortecimento associado ao eixo. Assim o sistema pode ser composto por um sistema de equações escrito na forma matricial,

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + \Omega_{rpm} \cdot [G_1])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}. \quad (\text{A.164})$$

APÊNDICE B – PROPRIEDADES DE ORTOGONALIDADE

Neste apêndice são demonstradas as propriedades de ortogonalidade para obtenção das equações 3.1.25 e 3.1.26. Inicia-se com a Matriz $[A]$,

$$[A] = \begin{bmatrix} [C + \Omega_{rpm} \cdot G_1] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} [C + G] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (\text{B.1})$$

São necessários também os autovetores, autovalor a direita λ_k ,

$$\{\theta_k\} = \begin{Bmatrix} \{\phi_k\}_{n \times 1} \\ s_k \{\phi_k\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \{\phi_k\}_{n \times 1} \\ -\lambda_k \{\phi_k\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}, \quad (\text{B.2})$$

e o autovalor a esquerda λ_j ,

$$\{\psi_j\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi_j\}_{n \times 1} \\ s_j \{\varphi_j\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \{\varphi_j\}_{n \times 1} \\ -\lambda_j \{\varphi_j\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (\text{B.3})$$

Pré-multiplicando $[A]$ pelo j-ésimo autovetor transposto a esquerda e pós-multiplicando pelo k-ésimo autovetor a direita, tem-se:

$$\{\psi_j\}^T [A] \{\theta_k\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi_j\}_{n \times 1} & -\lambda_j \{\varphi_j\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{1 \times 2n} \begin{bmatrix} [C + G_1] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{Bmatrix} \{\phi_k\}_{n \times 1} \\ -\lambda_k \{\phi_k\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (\text{B.4})$$

Na equação B.4, faz-se a multiplicação da matriz [A] pelo k-ésimo autovetor a direita,

$$\left\{ \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} - \lambda_j \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} \right\}_{1 \times 2n} \left\{ \begin{array}{l} [C + G_1]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} - \lambda_k [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} \\ [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} \end{array} \right\}_{2n \times 1}. \quad (\text{B.5})$$

Dando sequência a multiplicação vetorial de B.5,

$$\left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [C + G_1]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} - \lambda_k \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} - \lambda_j \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1}. \quad (\text{B.6})$$

A equação B.6 pode ser simplificada agrupando os termos associados a matriz de massa,

$$\left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [C + G_1]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} - (\lambda_k + \lambda_j) \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} = a_j \delta_{jk}. \quad (\text{B.7})$$

A multiplicação matricial em B.7 resulta num único elemento a_j . No subcapítulo 3.2 viu-se que a pré e pós-multiplicação da matriz [A], não mais por um único autovetor, mas sim pela matriz de autovetores resultava na equação B.8,

$$[\psi]^T [A] [\theta] = [a] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n2n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Observe que o elemento a_j corresponde a um dos elementos da diagonal principal resultante da operação efetuada na equação B.8.

Os auto-valores obtidos a partir das matrizes [A] e [B] vem ao pares, complexo e complexo conjugado,

$$\begin{aligned}\lambda_k &= R_k + I_k i \\ \lambda_k^* &= R_k - I_k i\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Onde R e I representam a parte real e a parte imaginária do autovalor complexo. Assim, tomando $j \neq k$, mas correspondentes aos autovalores complexo e complexo conjugado, $\lambda_j = \lambda_k^*$, tem-se em B.7,

$$\{\varphi_j\}_{n \times 1} [C + G_1]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1} - (\lambda_k + \lambda_k^*) \{\varphi_j\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Assim, B.10 pode ser reescrita revelando características modais importantes de um sistema viscoso,

$$(\lambda_k + \lambda_k^*) = 2R = \frac{\{\varphi_j\}_{n \times 1} [C + G_1]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1}}{\{\varphi_j\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1}} = \frac{c_j}{m_j}. \quad (\text{B.11})$$

Analogamente, as operações realizadas das equações B.1 a B.11 podem ser aplicadas também a matriz [B],

$$[B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (\text{B.12})$$

Pré-multiplicando [B] pelo j-ésimo autovetor transposto a esquerda e pós-multiplicando pelo k-ésimo autovetor a direita,

$$\{\psi_j\}^T [B] \{\theta_k\} = \left\{ \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} \quad -\lambda_j \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} \right\}_{1 \times 2n} \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{Bmatrix} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} \\ -\lambda_k \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (\text{B.13})$$

Na equação B.13, fazendo a multiplicação da matriz [B] pelo k-ésimo autovetor a direita,

$$\left\{ \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} \quad -\lambda_j \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} \right\}_{1 \times 2n} \begin{Bmatrix} [K]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} \\ \lambda_k [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}, \quad (\text{B.14})$$

e dando sequência a multiplicação vetorial, tem-se:

$$\left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [K]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} - \lambda_j \lambda_k \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1}. \quad (\text{B.15})$$

A equação B.15 pode ser reescrita,

$$\left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [K]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} - \lambda_j \lambda_k^* \left\{ \varphi_j \right\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \left\{ \phi_k \right\}_{n \times 1} = b_j \delta_{jk}, \quad (\text{B.16})$$

resultando num único elemento b_j . No subcapítulo 3.2 viu-se que a pré e pós-multiplicação da matriz [B], não mais por um único autovetor, mas sim pela matriz de autovetores resultava em:

$$[\psi]^T [B] [\theta] = [b] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{2n2n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Observe que o elemento b_j corresponde a um dos elementos da diagonal principal resultante da operação efetuada na equação B.16.

Os auto-valores obtidos a partir das matrizes [A] e [B] vem ao pares, complexo e complexo conjugado como visto na equação B.9. Tomando novamente $j \neq k$, mas correspondentes aos autovalores complexo e complexo conjugado, $\lambda_j = \lambda_k^*$, tem-se:

$$\{\varphi_j\}_{n \times 1} [K]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1} - \lambda_j \lambda_j^* \{\varphi_j\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Assim, B.18 pode ser reescrita revelando novas características modais importantes de um sistema viscoso,

$$\lambda_j^* \lambda_j = R^2 + I^2 = \frac{\{\varphi_j\}_{n \times 1} [K]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1}}{\{\varphi_j\}_{n \times 1} [M]_{n \times n} \{\phi_k\}_{n \times 1}} = \frac{k_j}{m_j} = \Omega_j^2. \quad (\text{B.19})$$