

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

NICHOLAS DICATI PEREIRA DA SILVA

**APLICAÇÃO DE ESQUEMAS NUMÉRICOS EM ESCOAMENTOS COM ONDAS DE  
CHOQUE EM BOCAIS DO TIPO CONVERGENTE-DIVERGENTE**

Curitiba

2015

NICHOLAS DICATI PEREIRA DA SILVA

APLICAÇÃO DE ESQUEMAS NUMÉRICOS EM ESCOAMENTOS COM ONDAS DE  
CHOQUE EM BOCAIS DO TIPO CONVERGENTE-DIVERGENTE

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki.

Curitiba

2015

---

S586a

Silva, Nicholas Dicati Pereira da  
Aplicação de esquemas numéricos em escoamentos com ondas de  
choque em bocais do tipo convergente-divergente/ Nicholas Dicati Pereira da  
Silva. – Curitiba, 2015.  
112 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, 2015.

Orientador: Luciano Kiyoshi Araki.  
Bibliografia: p. 94-97.

1. Gás - Escoamento. 2. Ondas de choque - Modelos matemáticos. 3.  
Análise numérica. 4. Método dos volumes finitos. I. Universidade Federal do  
Paraná. II. Araki, Luciano Kiyoshi. III. Título.

CDD: 533.2

---

## TERMO DE APROVAÇÃO

NICHOLAS DICATI PEREIRA DA SILVA

APLICAÇÃO DE ESQUEMAS NUMÉRICOS EM ESCOAMENTOS COM ONDAS DE  
CHOQUE EM BOCAIS DO TIPO CONVERGENTE-DIVERGENTE

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Silvio Luiz de Mello Junqueira  
UTFPR



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Viviana Cocco Mariani  
PUC/PR



Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto  
UFPR



Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi  
UFPR

Curitiba, 24 fevereiro de 2015.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, minha irmã e esposa pelo esforço compartilhado, apoio e incentivo. Ao Prof. Luciano pela dedicação e auxílio, Foltran e Diego pelos avanços na forma alternativa da equação de conservação da energia térmica, outros familiares e amigos, e também, os professores que me acompanham e acompanharam na vida acadêmica. Dentre estes, em especial os membros da banca. Ainda, agradeço a CAPES pelo fomento da bolsa de estudos, a UFPR pelo fornecimento de sua estrutura, ao PGMEC e o grupo de pesquisa em CFD, propulsão e aerodinâmica de foguetes. Por fim, agradeço a Deus.

*A misericórdia que precisamos vem de um apenas,  
de sorte que todo o amor vem dele também.*

## RESUMO

Neste trabalho, foram estudadas aproximações numéricas para o Método dos Volumes Finitos. Empregam-se nas simulações arranjo co-localizado de variáveis, solução segregada e técnicas de verificação numérica. O primeiro caso estudado envolveu a equação de Burgers unidimensional, na qual cinco tipos diferentes de aproximações foram utilizadas: *upwind differencing scheme* (UDS), *central differencing scheme* (CDS), *total variation diminishing* (TVD) e *essentially non-oscillatory scheme* (ENO), de primeira e segunda ordens. Neste estudo, todas as cinco aproximações forneceram resultados coerentes. Na sequência foram analisados escoamentos compressíveis, não reativos, de gases com propriedades constantes, modelados através das equações de Euler; nos estudos unidimensionais, ar e vapor de água foram escolhidos como fluidos de trabalho, enquanto que para o escoamento bidimensional, considerou-se apenas ar. Para esses casos, foi utilizada uma metodologia adequada para qualquer regime de velocidades, além do acoplamento pressão-velocidade, dado pelo método SIMPLEC (*Semi IMPLICIT Linked Equations Consistent*). No caso do escoamento compressível unidimensional, foram feitos estudos para capturar uma onda de choque normal para duas geometrias diferentes de bocal: cossenoidal e cônica; nesse caso, apenas as aproximações UDS e TVD foram empregadas. Uma vez que estudos iniciais com UDS apresentaram resultados incoerentes no processo de verificação, uma correção na equação de conservação da energia térmica foi proposta em relação ao código original. Para a obtenção da onda de choque, estudos envolvendo interpolação por diferenças divididas de Newton e aproximação por série de Fourier foram feitos, para obter resultados mais acurados. Análises com Multiextrapolações de Richardson também foram empregadas para algumas variáveis de interesse dos escoamentos. Foi observado que: (1) a aproximação UDS apresentou vantagens sobre o TVD na captura da onda de choque; (2) a obtenção da posição da onda de choque por diferenças divididas de Newton é mais adequada que os outros métodos; e (3) comparando dois esquemas TVD, MIN-MOD e SUPERBEE, observou-se que o primeiro é mais estável para escoamentos compressíveis com choques normais. Para escoamentos bidimensionais compressíveis, somente a geometria cônica foi empregada, na qual uma onda de choque oblíqua foi observada. Neste caso, as aproximações UDS e TVD também foram utilizadas e esta última apresentou oscilações numéricas, conforme as apresentadas no caso unidimensional. Uma possível causa dessas oscilações pode estar associada ao uso de um valor da função limitadora referente ao CDS nas proximidades da onda de choque.

**Palavras-chaves:** Onda de choque. Equações de Euler. Equação de Burgers. Aproximações numéricas. Multiextrapolações de Richardson.

## ABSTRACT

In this work, numerical approximation schemes for the Finite Volume Method were studied. Also, co-located grids, segregated solutions and numerical verification techniques were employed in the simulations. The first studied problem involved one-dimensional Burgers equation, in which five different approximation schemes were employed: upstream differencing scheme (UDS), central differencing scheme (CDS), total variation diminishing (TVD) and essentially non-oscillatory scheme (ENO), of first and second orders of accuracy. In this study, all five schemes provided coherent results. The next class of studied problems were non-reactive compressible flows with constant properties, for the one-dimensional model, air and water vapour were taken as fluids, while for the two-dimensional Euler equations, only air was considered. In such problems, a methodology for any speed flow regime was employed, as well as SIMPLEC (*Semi IMPLICIT Linked Equations Consistent*) pressure-velocity coupling. For one-dimensional compressible flow, studies were done in order to capture a normal shock wave for two nozzle geometries: a cosinoidal and a conical ones; in such studies, only UDS and TVD schemes were employed. Since initial UDS results presented incoherent results in the verification process, a correction in the thermal energy conservation equation was proposed in relation to the original code. For shock capturing, studies involving Newton divided difference interpolation and Fourier series approximation were done, in order to obtain more accurate results. Analysis with Repeated Richardson Extrapolations were also employed for some variables of interest of the flows. It was observed that: (1) UDS presented advantages over TVD scheme in shock wave capturing; (2) the location of the shock position by Newton divided differences is more suitable than other methods; and (3) comparing two TVD schemes, MIN-MOD and SUPERBEE, it was observed that the former scheme is more stable for compressible flows with normal shocks. For two-dimensional compressible flow, only a conical geometry was employed, in which an oblique shock wave was observed. In this case, UDS and TVD schemes were also used and the latter scheme presented numerical oscillations, as well as for the one-dimensional flow. One possible cause of such oscillations could be associated to the use of a limiter function value on TVD scheme that refers to CDS in the vicinity of the shock wave.

**Key-words:** Shock-wave. Euler equations. Burgers equation. Numerical approximations. Repeated Richardson extrapolations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Contornos de alguns tipos de bocais. . . . .	19
Figura 2 – Soluções isentrópicas e onda de choque interna. . . . .	20
Figura 3 – Possíveis tipos de ocorrência de ondas. . . . .	20
Figura 4 – Métodos de observação de um fenômeno real. . . . .	21
Figura 5 – Tipos de separação de escoamento. . . . .	25
Figura 6 – Fluxograma dos objetivos específicos. . . . .	28
Figura 7 – Volume de controle para escoamento quase-unidimensional. . . . .	30
Figura 8 – Corpo axissimétrico. . . . .	30
Figura 9 – Movimento de um pistão num tubo de gás. . . . .	31
Figura 10 – Escoamento em torno de um corpo sólido. . . . .	33
Figura 11 – Sistema de coordenadas posicionado na onda. . . . .	33
Figura 12 – Ondas de choque oblíquas e de expansão. . . . .	36
Figura 13 – Representação da onda quadrada e o fenômeno de Gibbs. . . . .	40
Figura 14 – Exemplo de aproximação de geometria. . . . .	41
Figura 15 – Tipos de arranjos. . . . .	42
Figura 16 – Simbologia utilizada para o volume de referência (P), seus vizinhos e faces. . . . .	42
Figura 17 – Comportamento qualitativo de uma variável ao longo das iterações. . . . .	48
Figura 18 – Intervalo convergente. . . . .	49
Figura 19 – Bocal 1 e condições de contorno para o caso bidimensional. . . . .	53
Figura 20 – Bocal 2 e condições de contorno para o caso unidimensional. . . . .	53
Figura 21 – Domínios e condições de contorno para Burgers. . . . .	53
Figura 22 – Comportamentos esperados do módulo dos erros numéricos para aproximações de primeira e segunda ordem. . . . .	65
Figura 23 – Comportamento do resíduo da velocidade média <i>versus</i> iteração. . . . .	70
Figura 24 – Campo de velocidades resultante para Burgers na malha mais fina. . . . .	71
Figura 25 – Comportamento do módulo dos erros numéricos da velocidade média numérica com e sem MER para Burgers. . . . .	71
Figura 26 – Comportamento das ordens efetiva e aparente para a velocidade média numérica de Burgers. . . . .	72
Figura 27 – Campo do número de Mach para a forma original da equação de conservação da energia térmica, Euler 1D e configuração 1. . . . .	74
Figura 28 – Campo de temperatura para a forma original da equação de conservação da energia térmica, Euler 1D e configuração 1. . . . .	74
Figura 29 – Variação adimensionalizada das variáveis monitoradas a cada iteração para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	75
Figura 30 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 1. . . . .	76

Figura 31 – Campo de temperatura para Euler 1D e configuração 1. . . . .	76
Figura 32 – Campo do número de Mach com uma aproximação da região à jusante do choque para Euler 1D e configuração 1. . . . .	77
Figura 33 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 2. . . . .	77
Figura 34 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 3. . . . .	78
Figura 35 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 4. . . . .	78
Figura 36 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	79
Figura 37 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 2 e aproximação UDS. . . . .	79
Figura 38 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 3 e aproximação UDS. . . . .	79
Figura 39 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 4 e aproximação UDS. . . . .	80
Figura 40 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 1 e aproximação TVD. . . . .	80
Figura 41 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 2 e aproximação TVD. . . . .	80
Figura 42 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 3 e aproximação TVD. . . . .	81
Figura 43 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 4 e aproximação TVD. . . . .	81
Figura 44 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 1. . . . .	82
Figura 45 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 2. . . . .	82
Figura 46 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 3. . . . .	83
Figura 47 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 4. . . . .	83
Figura 48 – Variação adimensionalizada do fluxo de massa na entrada do bocal a cada iteração para Euler 2D na malha mais fina e aproximação UDS. . . . .	85
Figura 49 – Comparação da pressão na parede da câmara para a solução analítica unidimensional, aproximações numéricas e dados experimentais de Back <i>et al.</i> (1965) para Euler 2D. . . . .	87
Figura 50 – Campo do número de Mach bidimensional para Euler 2D e aproximação UDS na malha mais fina. . . . .	87
Figura 51 – Campo do número de Mach bidimensional para Euler 2D e aproximação TVD na malha mais fina. . . . .	88
Figura 52 – Isolinhas para Euler 2D e aproximação UDS na malha mais fina. . . . .	88
Figura 53 – Isolinhas para Euler 2D e aproximação TVD na malha mais fina. . . . .	89
Figura 54 – Módulo dos erros numéricos para o $C_d$ e Euler 2D. . . . .	89
Figura 55 – Ordens aparentes e efetivas para o $C_d$ e Euler 2D. . . . .	90

Figura B.1 – Resultado do uso de DDV no campo do número de Mach para malha mais fina, Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	101
Figura B.2 – Resultado do uso de Fourier no campo do número de Mach para a malha mais fina, Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	102
Figura B.3 – Posições obtidas utilizando a abordagem numérica para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	102
Figura B.4 – Posições obtidas utilizando a abordagem DDV para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	103
Figura B.5 – Posições obtidas utilizando a abordagem Fourier para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS. . . . .	103
Figura C.1 – Volumes de controle. . . . .	105

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Constantes $c_{r,j}$ para malhas uniformes do método ENO de primeira e segunda ordens. . . . .	45
Tabela 2 – Exemplo de aplicação de MER. . . . .	50
Tabela 3 – Coeficientes e termos fontes para os volumes fictícios de Burgers. . . . .	61
Tabela 4 – Dados de <i>software</i> e <i>hardware</i> do computador utilizado. . . . .	68
Tabela 5 – Soluções analíticas das variáveis analisadas para Euler 1D. . . . .	68
Tabela 6 – Soluções analíticas do coeficiente de descarga para Euler 2D. . . . .	69
Tabela 7 – Dados de simulação para a Equação de Burgers e aproximações de primeira ordem. . . . .	69
Tabela 8 – Dados de simulação para a Equação de Burgers e aproximações de segunda ordem. . . . .	70
Tabela 9 – Dados de entrada para Euler 1D. . . . .	72
Tabela 10 – Dados de simulação para Euler 1D e configurações 1 e 2. . . . .	73
Tabela 11 – Dados de simulação para Euler 1D e configurações 3 e 4. . . . .	73
Tabela 12 – Valores das funções limitadoras usadas pelo TVD para a temperatura Euler 1D e configuração 1 na malha mais grossa. . . . .	84
Tabela 13 – Dados de entrada para Euler 2D. . . . .	85
Tabela 14 – Dados de simulação para Euler 2D e aproximação UDS. . . . .	86
Tabela 15 – Dados de simulação para Euler 2D e aproximação TVD. . . . .	86
Tabela 16 – Estimativa dos erros de modelagem com base nos dados experimentais do campo de pressão na parede do bocal para Euler 2D. . . . .	86
Tabela D.1 – Módulo dos erros numéricos e ordens aparentes e efetivas para Euler 2D. . .	106
Tabela D.2 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Burgers. . . . .	106
Tabela D.3 – Módulo dos erros numéricos com MER para Burgers. . . . .	107
Tabela D.4 – Ordens efetivas e aparentes para Burgers. . . . .	107
Tabela D.5 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 1. . . .	108
Tabela D.6 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 1. . . .	108
Tabela D.7 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 2. . . .	109
Tabela D.8 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 2. . . .	109
Tabela D.9 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 3. . . .	110
Tabela D.10 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 3. . . .	110
Tabela D.11 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 4. . . .	111
Tabela D.12 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 4. . . .	111
Tabela D.13 – Ordens aparentes e efetivas para Euler 1D e configurações 1 e 2. . . . .	112
Tabela D.14 – Ordens aparentes e efetivas para Euler 1D e configurações 3 e 4. . . . .	112

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	Dinâmica dos fluidos computacional
DDV	Diferenças divididas
ENO	<i>Essentially Non-Oscillatory</i>
FVM	Método dos Volumes Finitos
MER	MultiExtrapolações de Richardson
MSI	<i>Modified Strongly Implicit</i>
SIMPLEC	<i>Semi IMPLICIT Linked Equations Consistent</i>
TDMA	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme</i>
WENO	<i>Weighted-ENO</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas

Símbolo	Capítulo	Descrição	Unidade
$A$	2, 3, C	Área	$m^2$
$a$	3	Coefficientes do sistema linear	
$a$	2	Velocidade do som	$m/s$
$a_0, a_n$	2, B	Coefficientes da série de Fourier	
$B$	2	Ponto genérico da aproximação por série de Taylor	
$b$	3	Termo fonte do sistema linear	
$b_0, b_1$	2	Coefficiente das diferenças divididas de Newton	
$b_n$	2, B	Coefficiente da série de Fourier ou das diferenças divididas de Newton	
$c$	3	Constante para aproximação de uma propriedade através do ENO	
$C_d$	3, 4	Coefficiente de descarga	
$c_p$	3, C	Calor específico a pressão constante	$J/(kgK)$
$c_{r,j}$	2, A	Constantes do método ENO	
$D(x), E(x),$ $P(x)$	2	Polinômios	
$dA$	C	Infinitesimal de área	$m^2$
$dH$	C	Infinitesimal de entalpia de estagnação	$J/kg$
$dp$	2	Infinitesimal de pressão	$Pa$
$du$	2, C	Infinitesimal de velocidade	$m/s$
$dV$	2	Infinitesimal de volume	$m^3$
$dw$	2	Coefficiente do método SIMPLEC	
$d\rho$	2, C	Infinitesimal de massa específica	$kg/m^3$
$E$	2, 3, 4	Erro numérico	
$E$	C	Energia interna total	$J/kg$
$e$	3, 4	Erro de poluição	
$e$	C	Energia interna	$J/kg$
$f$	2, 3	Função genérica	
$f_a$	2	Função resultante de aproximação por séries	
$f_e$	C	Vetor de forças externas	$N$
$f_n$	2	Função resultante da interpolação	
$f_x$	2	Força na direção $x$	$N$
$G(x)$	2, 3	Primitiva da função $g$	

$g(x)$	2, 3	Conjunto de dados numéricos	
$\bar{g}$	2, 3	Média dos volumes de $g(x)$	
$H$	C	Entalpia de estagnação	$J/kg$
$h$	C	Entalpia	$J/kg$
$h$	2, 3	Tamanho do volume	$m$
$h(x)$	2	Polinômio resultante da aproximação de $g(x)$	
$h_c$	2	Início do intervalo convergente	
$I$	2	Volume genérico	
$i, j, n$	2	Números inteiros	
$I_0, I_1$	2	Intervalos de integração da Regra do Trapézio	
$I_T$	2	Resultado da integral pela Regra do Trapézio	
$it$	2	Iteração	
$k$	2	Ordem de acurácia	
$k$	C	Condutividade térmica	$W/(mK)$
$l_F$	2, B	Período da série de Fourier	
$M$	2, 4	Número de Mach	
$m, l, q$	2	Números inteiros	
$\dot{m}_{num}, \dot{m}_{an}$	3	Fluxos de massa numérico e analítico	$kg/s$
$N$	3	Número de volumes reais	
$\mathbf{n}$	3	Vetor normal	
$n_F$	2, B	Número de pontos da série de Fourier	
$n_T$	2	Pontos a serem integrados pela Regra do Trapézio	
$N_T$	3	Quantidade de volumes total, fictícios mais reais	
$p$	1, 2, 3, C	Pressão	$Pa$
$p_A$	2	Pressão de um gás em um tubo	$Pa$
$p_a$	1	Pressão ambiente	$Pa$
$p_B$	2	Pressão resultante de uma compressão	$Pa$
$p_c$	1	Pressão na câmara	$Pa$
$p_E$	2, 4	Ordem efetiva	
$p_L$	2	Ordem assintótica	
$p_U$	2, 4	Ordem aparente	
$q$	2	Razão de refino	
$p_v$	2	Ordem verdadeira	
$q_H$	C	Termo fonte de calor	
$r, s$	2, 3	Quantidade de volumes à esquerda e à direita	
$r$	3, 4	Raio	$m$
$r_g$	2, 3	Razão de gradientes	
$R$	2, 3, 4	Constante específica do gás	$J/(kgK)$

$Re$	3	Número de Reynolds	
$S(i)$	2, 3	Estêncil	
$\tilde{S}$	2	Estêncil em função dos pontos que o compõem	
$S_1, S_2, S_3$	3	Estênceis relativos ao valor de r	
$S_F$	3	Termo fonte da equação de Burgers	
$S_{FP}$	3	Termo fonte avaliado no volume P	
$T$	2, 3, C	Temperatura	$K$
$t$	C	Tempo	$s$
$u$	2, 3, C	Velocidade na direção $x$ ou $z$	$m/s$
$u(x)$	3	Velocidade analítica de Burgers	$m/s$
$\bar{u}_A$	3	Velocidade média analítica de Burgers	$m/s$
$U_c, V_c$	3	Velocidades contravariantes	$m/s$
$V$	2, 3, C	Vetor velocidade	$m/s$
$\mathcal{V}$	2, C	Volume	$m^3$
$v$	2, 3	Velocidade na direção $y$ ou radial	$m/s$
$v_{esp}$	2	Volume específico	$m^3/kg$

### Letras gregas

<b>Símbolo</b>	<b>Capítulo</b>	<b>Descrição</b>	<b>Unidade</b>
$\alpha$	3	Variável auxiliar para indicar o sentido do escoamento	
$\beta$	2	Constante da correção adiada	
$\gamma$	2, 4	Razão entre calores específicos	
$\Delta t$	3, 4	Intervalo de tempo ou parâmetro de relaxação	$s$
$\Delta x$	2, 3	Distância entre dois pontos	$m$
$\Delta\phi$	2	Variação de uma propriedade genérica	
$\epsilon$	3	Erro de truncamento	
$\theta$	3	Auxiliar	
$\Lambda$	2, 3	Solução analítica exata	
$\lambda$	2, 3, 4	Aproximação	
$\xi$	2	Variável auxiliar	
$\rho$	2, 3, C	Massa específica	$kg/m^3$
$\tau$	2	Tensor tensão	
$\tau$	2	Compressibilidade	$Pa^{-1}$
$\tau_T$	2	Compressibilidade isotérmica	$Pa^{-1}$
$\tau_s$	2	Compressibilidade isentrópica	$Pa^{-1}$
$\phi$	2, 3	Propriedade genérica	
$\phi_1, \phi_2, \phi_3$	2	Soluções numéricas nas malhas fina, intermediária e grossa	

$\phi_A$	2	Solução analítica
$\phi_N$	2	Solução numérica
$\psi$	2, 3, 4	Função limitadora

### Subscritos

Símbolo	Capítulo	Descrição	Unidade
0	1, 2, 3	Propriedade de estagnação	
1, 2	2	Pontos distintos	
32, 21	2	Referente a razão de refino entre malha grossa e intermediária e fina e intermediária	
$\infty$	2	Solução extrapolada	
<i>atm</i>	3	Relativo à pressão atmosférica	
<i>ex</i>	1, 2, 3	Propriedade na saída	
<i>g</i>	2	Nível de malha	
<i>i</i>	2	Volume genérico	
<i>it</i>	2, 3	Iteração	
<i>m</i>	2	Nível de extrapolação	
<i>WW, W, P, E, EE</i>	2, 3, 4	Centro dos volumes de controle	
<i>www, ww, w, e, ee, eee</i>	2, 3, 4	Face dos volumes de controle	

### Sobrescritos

Símbolo	Capítulo	Descrição	Unidade
'	2	Referente ao campo de pressões que satisfaz a equação da massa	
*	2, 3	Iteração anterior	
+–	3	Indica que o escoamento pode ocorrer no sentido positivo ou negativo	
0	3	Passo de tempo anterior	
<i>CA</i>	3	Correção adiada	
<i>crit</i>	2	Relativo ao termo crítica	
<i>i, ii, iii, iv</i>	3	Ordens das derivadas	
<i>p</i>	3	Relativo à equação de conservação da massa	
<i>T</i>	3	Relativo à equação de conservação da energia Térmica	
<i>w, e</i>	3	Referem-se às aproximações para as faces oeste e leste	

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	Caracterização do estudo	18
1.2	Definição do problema	21
1.3	Revisão bibliográfica	22
1.4	Motivação e justificativa	26
1.5	Termos convenientemente definidos	26
1.6	Objetivos	27
1.7	Delineamento	27
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>29</b>
2.1	Caracterização dos fenômenos	29
2.1.1	Escoamentos quase unidimensionais	29
2.1.2	Escoamentos bidimensionais axissimétricos	29
2.1.3	Fluidos compressíveis	30
2.1.4	Propagação de ondas	32
2.1.5	Ondas de choque e expansão	35
2.2	Enfoque numérico	38
2.2.1	Tópicos de análise numérica	38
2.2.2	Malhas numéricas	40
2.2.3	Aproximações numéricas	41
2.2.4	Acoplamentos e métodos de solução	46
2.2.5	Verificação e validação	47
2.2.6	Ferramenta de pós-processamento	49
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>51</b>
3.1	Perspectiva geral	51
3.2	Aplicação das aproximações numéricas	55
3.3	Variáveis secundárias	63
3.4	Verificação e validação	64
3.5	Pós-processamento	66
3.6	Fechamento	66
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>68</b>
4.1	Equação de Burgers	69
4.2	Euler unidimensional	72
4.3	Euler bidimensional	84

4.4	Discussões . . . . .	89
5	CONCLUSÃO . . . . .	92
	REFERÊNCIAS . . . . .	94
	<b>APÊNDICES</b>	<b>98</b>
	APÊNDICE A – CÓDIGO PARA OBTENÇÃO DAS CONSTANTES $c_{r,j}$ EM MAPLE® . . . . .	99
	APÊNDICE B – OBTENÇÃO DA POSIÇÃO DA ONDA DE CHOQUE NORMAL . . . . .	100
	APÊNDICE C – OBTENÇÃO DA FORMA ALTERNATIVA DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA . .	104
	APÊNDICE D – DADOS NUMÉRICOS DOS ERROS E ORDENS . . .	106

## 1 INTRODUÇÃO

Este capítulo introdutório tem por objetivo inserir o leitor dentro do tema através de uma caracterização do estudo, definir o problema que se deseja estudar, apresentar uma revisão do que tem sido feito em outros trabalhos, definir alguns termos que serão usados ao longo da dissertação, apresentar sucintamente os objetivos do trabalho e, por fim, apresentar o delineamento deste texto.

### 1.1 Caracterização do estudo

Nesta dissertação o interesse recai sobre o estudo numérico de fenômenos físicos, como a propulsão. Esta é o resultado de se utilizar um mecanismo, seja ele biológico, mecânico, químico ou elétrico, por exemplo, para gerar força e alterar o estado de inércia de um corpo ou sistema. Dentre os meios disponíveis para a geração desta força, conhecida também como força de empuxo, existem aqueles que se destacam pela ejeção de matéria, conforme definido por Sutton e Biblarz (2000).

A propulsão de foguetes é uma classe de propulsões a jato que produz empuxo através da ejeção de matéria gerada por propelentes, na qual diferentes fontes de energia podem ser utilizadas para promover tal ejeção. A fonte de energia utilizada na propulsão se deve principalmente a três tipos: solar; nuclear; química, sendo esta última a mais utilizada (SUTTON; BIBLARZ, 2000).

Na propulsão química de foguetes, a combustão resultante de um combustível e um oxidante produz gases a pressões e temperaturas elevadas, que posteriormente são expandidos e acelerados em um bocal convergente-divergente. Ainda dentro da propulsão química existem diferentes tipos de dispositivos de propulsão, também chamados de motores, como: motores foguete a propelente líquido, sólido, híbrido e gasoso (SUTTON; BIBLARZ, 2000).

Apesar de não utilizar reações químicas diretamente na geração de gases, os motores foguetes a gás frio utilizam ar, nitrogênio ou hélio, por exemplo; armazenado em um reservatório a alta pressão. Também é possível aumentar a temperatura destes gases a fim de melhorar o rendimento. Este tipo de motor tem sido usado em veículos espaciais como sistemas de controle e estudos experimentais em bocais (SUTTON; BIBLARZ, 2000; BACK *et al.*, 1965).

Conforme Sutton e Biblarz (2000), bocais geralmente possuem seção transversal circular, uma região convergente, uma garganta na parte mais estreita e uma região divergente. O bocal cônico é o mais antigo, de configuração e fabricação simples, e o tipo sino é o mais utilizado, pelo menos até o ano de 2000. Este último possui maior eficiência de expansão do que um bocal cônico com mesma razão de áreas (SUTTON; BIBLARZ, 2000). Araki (2007) comenta que os bocais derivados do tipo sino tem preferência, e isto se deve ao ganho relacionado com a redução

do tamanho total do motor-foguete, que por sua vez está relacionado à redução do bocal. Dos perfis modificados o perfil parabólico é o mais empregado, este possui 80% do comprimento total do sino tradicional (ARAKI, 2007). A título de exemplo, a Fig. 1 apresenta alguns dos contornos dos bocais comentados.

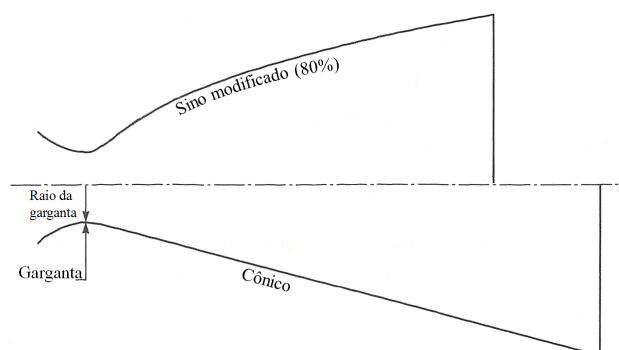


Figura 1 – Contornos de alguns tipos de bocais.

Fonte: Adaptado de Sutton e Biblarz (2000).

Escoamentos internos em bocais de motores-foguete, como os citados, necessitam que o fluido seja modelado como compressível e, devido ao fato das tensões viscosas serem mais significativas na região da camada limite, pode-se desconsiderar os efeitos viscosos fora desta (ANDERSON, 2003).

Para escoamentos unidimensionais no interior de bocais Anderson (2003) afirma que existem diversas soluções isentrópicas para quando o escoamento é subsônico em todo o bocal e, também, que quando o escoamento se torna bloqueado na região da garganta e supersônico na região divergente existe apenas uma solução isentrópica para o escoamento, como pode ser observado na Fig. 2, onde  $p$  representa a pressão, os subscritos 0 propriedade de estagnação ou total e  $ex$  saída. Ainda, para o caso supersônico Anderson (2003) apresenta três tipos de possibilidades envolvendo ondas, ondas de choques internas (Fig. 2) e externas (Fig. 3a) ao bocal e ondas de expansão (Fig. 3b), sendo estas últimas figuras relativas a um bocal genérico.

Como pode ser observado na Fig. 2, uma onda de choque normal está presente no interior do bocal e essa, por sua vez, ocorre devido às condições de pressão no reservatório e ambiente e são exclusivamente unidimensionais. Em escoamentos bidimensionais, onde ocorrem ondas de choque oblíquas no interior dos bocais, é possível observar não somente a geração de ondas de choque ou expansão devido as condições de pressão, mas também devido à geometria do bocal.

Um fenômeno real, como por exemplo a onda de choque, pode ser observado através de duas maneiras diferentes: experimental e teórica. Cada qual com suas características, por exemplo, o método experimental permite uma análise mais realista, fornecendo detalhes que são aferidos através de equipamentos. No entanto, tais métodos estão sujeitos aos chamados erros experimentais, relacionados aos equipamentos utilizados e construção de protótipos, o que

gera, normalmente, custos elevados. Em se tratando de motores-foguete é possível notar, no caso de motores líquidos, grandes desafios na construção do protótipo a ser testado e, também, grande exigência da parte de segurança, pois se faz necessário trabalhar com combustíveis e oxidantes em pressões de moderadas a elevadas. Outro fator, não menos significativo, é o tempo. Um projeto deve ser concebido e executado antes mesmo de os testes começarem. Em contraste, os métodos teóricos possibilitam redução de tempo, pois não necessitam da construção de um protótipo físico, a exigência de segurança e desafios construtivos são eliminados e o custo é reduzido. Essas vantagens tornam os métodos teóricos bastante atrativos, porém, para realizá-los são necessários modelos matemáticos e físicos e estes podem ser restritivos. Para assegurar a confiabilidade e credibilidade destes modelos se faz necessário sua validação que, por sua vez, precisa de dados experimentais. É importante notar que estes métodos não devem ser exclusivos entre si, mas devem ser desenvolvidos em conjunto.

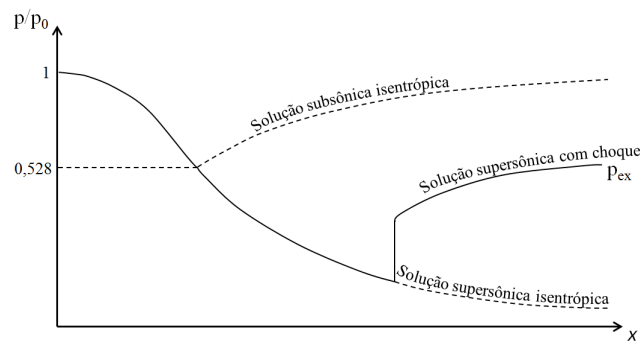
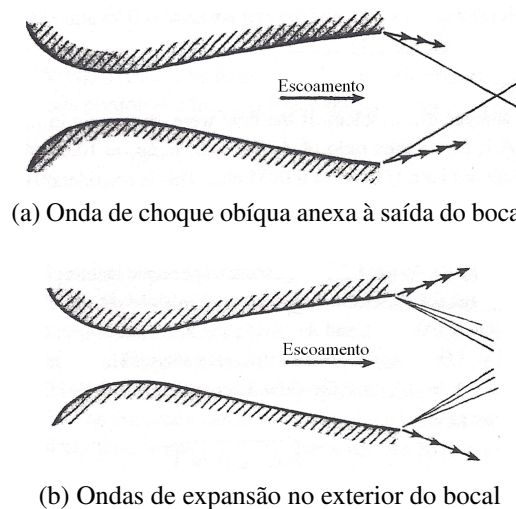


Figura 2 – Soluções isentrópicas e onda de choque interna.

Fonte: Adaptado de Anderson (2003).



(a) Onda de choque obliqua anexa à saída do bocal

(b) Ondas de expansão no exterior do bocal

Figura 3 – Possíveis tipos de ocorrência de ondas.

Fonte: Adaptado de Anderson (2003).

O método teórico é dividido em duas vertentes: a analítica e a numérica. Apesar de apresentar vantagens interessantes sobre o experimental estas vertentes possuem a desvantagem dos erros de modelagem e estes podem ser bastante significativos. Os métodos analíticos possuem grande limitação em relação a esses erros, pois, segundo Marchi (2001), se aplicam a problemas simples, ou seja, os modelos utilizados na descrição do fenômeno são bastante restritivos. Os métodos numéricos permitem a utilização de modelos mais elaborados, mas com a desvantagem de apresentar erros numéricos. Apesar da existência de tais destes erros, nota-se que eles não geram grande influência quando o intuito é avaliar o resultado numérico em relação a dados experimentais (ARAKI, 2007). Ainda, existem ferramentas para avaliar e reduzir significativamente tais erros (MARCHI, 2001; MARTINS, 2013). A Figura 4 resume as características apresentadas.

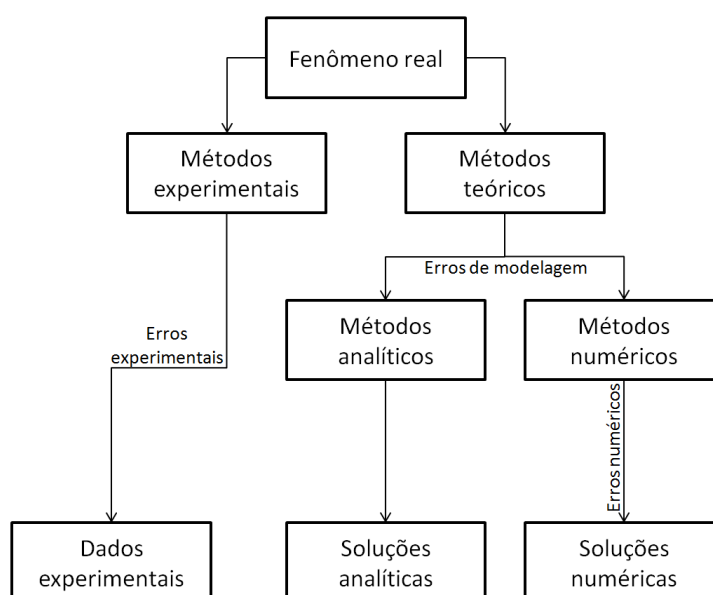


Figura 4 – Métodos de observação de um fenômeno real.

Fonte: Adaptado de Marchi (2001).

Em resumo, a propulsão em motores-foguete é dependente do tipo de geração de energia, bem como da geometria do bocal convergente-divergente. Fenômenos que proporcionam grande variação nas propriedades do escoamento no interior de bocais podem ocorrer devido à relação entre pressões ou à geometria utilizada. Estes fenômenos e o escoamento podem ser estudados de maneira teórica ou experimental. No meio teórico, a vertente numérica possibilita modelos mais elaborados com o custo de erros numéricos, mas esses podem ser avaliados e reduzidos.

## 1.2 Definição do problema

No estudo de escoamentos compressíveis em bocais convergentes-divergentes, o fluido é acelerado ao longo do bocal. A relação unidimensional que determina a velocidade em função da área do bocal, para um escoamento supersônico, considera que a velocidade cresce conforme a

área da seção transversal aumenta. Entretanto, existe um limite para o crescimento da velocidade, imposto pela vazão mássica na região da garganta em conjunto com as condições do ambiente em que este bocal está inserido. Pelo fato de a velocidade do fluido ser maior do que a velocidade de propagação da informação das condições ambiente em algumas regiões do bocal, o escoamento não possui tempo hábil para se ajustar a tais condições de modo contínuo e suave, gerando mudanças bruscas nas propriedades do escoamento. Tais mudanças são mais severas no caso unidimensional e são tratadas como descontinuidades.

Acontece que algumas aproximações numéricas, como os esquemas à montante (em inglês: *Upwind Differencing Scheme* ou UDS) ou centrais (em inglês: *Central Differencing Scheme* ou CDS), possuem desvantagens na representação destes escoamentos, dentre elas: oscilações e falsa difusão. As oscilações são inerentes ao CDS e não ocorrem com o UDS. Este, por sua vez, apresenta falsa difusão que é reduzida com o refino da malha. Porém, possui baixa ordem de acurácia (ordem um).

Então, o problema se limita à solução numérica de escoamentos que contenham ondas de choque e, para isso, serão testadas metodologias de aplicação de cinco aproximações numéricas: UDS, CDS, variação total decrescente (em inglês: *Total Variation Diminishing* ou TVD) e essencialmente não oscilatórias (em inglês: *Essentially Non-Oscillatory* ou ENO), de primeira e segunda ordens. Estas serão utilizadas na solução da equação de Burgers e posteriormente testadas em escoamento com choque, equações de Euler. Adicionalmente, serão estudados métodos para a obtenção da onda de choque unidimensional e avaliação de ferramenta de pós-processamento para redução de erros de discretização.

### 1.3 Revisão bibliográfica

Os métodos experimentais e teóricos não tiveram início no mesmo momento, nem pelos mesmos cientistas. Cada um destes métodos contribuiu para o desenvolvimento científico dos estudos de escoamentos, por exemplo. Esta seção apresenta algumas contribuições que confirmam esta última afirmação, começando pelos métodos experimentais.

Em uma exposição, no ano de 1893, o engenheiro sueco Carl Gustaf Patrick de Laval apresentava uma turbina a vapor de único estágio com uma série de bocais convergentes-divergentes que seria um dos inícios para o desenvolvimento de túneis supersônicos e motores-foguetes. Um aspecto interessante sobre sua turbina é que ela permitiu grandes velocidades rotacionais pela adição de bocais divergentes. Este foi um grande avanço, pois os engenheiros da época não conheciam o fenômeno de bloqueio do escoamento (ANDERSON, 2003).

Apesar de Laval ter construído a turbina a vapor, foi devido ao professor húngaro Aurel Boleslav Stodola que os aspectos técnicos e científicos da turbina foram desenvolvidos. Stodola também atuou no âmbito experimental. Ele construiu um bocal convergente-divergente para realizar o primeiro experimento que confirmou as características de um escoamento supersônico

em bocais, pois esta situação ainda não tinha sido experimentalmente verificada. Em seu experimento ele conseguia variar a pressão por meio de um válvula posicionada a jusante da saída do bocal e, então, obter escoamentos subsônicos, supersônicos e até ondas de choque (ANDERSON, 2003).

Outros estudos sobre escoamentos supersônicos foram conduzidos por Back *et al.* (1965). Nesse trabalho, foram aferidas as pressões estáticas nas paredes dos bocais para escoamento de ar a temperaturas de 294, 44 K e 833, 33 K e pressões estáticas variando de 310, 26 kPa a 1723, 69 kPa. Foram utilizados manômetros de mercúrio e, para pressões mais elevadas, manômetros Heise. O erro estimado na tomada de pressão estática para a garganta, divergente e a maior parte do convergente foi menor que 1 %, enquanto que na região de entrada do bocal o erro estimado foi de 5 %.

No campo dos métodos teóricos analíticos muitos conceitos foram desenvolvidos com o escoamento linearizado, como a identificação do número de Mach crítico, por exemplo. Tal ferramenta analítica surgiu por volta de 1940 da necessidade de se resolver as equações governantes para escoamentos compressíveis, que são não lineares. Apesar de se utilizar de hipóteses físicas para linearizar o escoamento esta ferramenta ainda é utilizada em conjunto com a computação numérica (ANDERSON, 2003). O matemático francês Pierre Simon Marquis de Laplace assumiu que a onda sonora era, de fato, adiabática, derivou a expressão da compressibilidade isentrópica e calculou com sucesso a velocidade do som. Seguindo a ideia de Laplace o matemático alemão G. F. Bernhard Riemann foi o primeiro a calcular as propriedades de choque assumindo condições isentrópicas. Porém, infelizmente essa condição não se aplica. Algum tempo depois, o primeiro grande avanço na teoria de ondas de choque foi feito pelo engenheiro escocês William John Macquorn Rankine, que apresentou adequadamente as equações de choque normal. Ele assumiu que a estrutura interna da onda de choque não era isentrópica e sim uma região de dissipação (ANDERSON, 2003).

No campo numérico, Harten (1983) apresentou uma nova classe de esquemas explícitos de segunda ordem de acurácia de alta resolução para equações de conservação hiperbólicas, conhecido como TVD. Este esquema usava um outro, não oscilatório de primeira ordem, com uma função de fluxo apropriada para atingir alta resolução e foi inicialmente desenvolvido para o Método das Diferenças Finitas.

A preocupação em avaliar o desempenho dos métodos numéricos na captura de choques é fundamental para identificar características desejáveis e indesejáveis dos mesmos. Woodward e Colella (1984) fizeram comparações entre três métodos numéricos na simulação de escoamentos de fluidos com choques. Eles afirmaram que o tratamento das discontinuidades é fundamental para se conseguir soluções numéricas acuradas.

Depois da ideia do TVD, Harten *et al.* (1987) construíram e analisaram um método de captura de ondas de choque para a aproximação das leis de conservação hiperbólicas, conhecido

como ENO. Este método utiliza-se de reconstruções de aproximações derivadas de técnicas de interpolação e estênceis adaptativos, que o tornam altamente não linear.

Shu e Osher (1988) apresentaram melhoramentos a fim de simplificar os esquemas ENO, principalmente para problemas multidimensionais. Posteriormente, Shu (1997) apresentou um documento explicando detalhadamente a aplicação dos esquemas ENO e essencialmente não oscilatórios ponderados (do inglês: *Weighted ENO* ou WENO) para diferenças finitas e volumes finitos.

Mesmo após a apresentação dos esquemas ENO, a metodologia TVD de Harten ainda era usada, por exemplo, no trabalho de Wang e Widhopf (1989) que desenvolveram um algoritmo numérico de volumes finitos para resolver as equações de Euler na forma conservativa.

Trabalhos como os de Abgrall (1994), Liu *et al.* (1994) e Jiang e Shu (1996) apresentam extensões e melhorias para os esquemas ENO. Já em Serna e Marquina (2004) e Borges *et al.* (2008), observa-se o desenvolvimento dos métodos WENO para obtenção de ordens de acurácia elevadas.

Östlund (2002) desenvolveu um trabalho abrangente sobre separação de escoamento e cargas laterais. Outros trabalhos que contemplam este tema são devidos a Hagemann e Frey (2008), Hadjadj e Onofri (2009) e Martelli *et al.* (2010). Segundo Martelli *et al.* (2010) a razão entre a pressão de alimentação e a pressão ambiente influencia no tipo de separação, seja livre (SL) ou restrita (SR), conforme Fig. 5, sendo  $p_c$  a pressão na câmara e  $p_a$  a pressão ambiente que o bocal está inserido. Ainda, nesta figura são observados choques internos (a), refletidos (b) e de separação (c). Uma separação do escoamento é acompanhada necessariamente de um choque oblíquo para permitir que o escoamento supersônico ajuste sua pressão em relação à pressão ambiente. A estrutura do campo de escoamento do bocal de um motor foguete a propelente líquido resultante de uma separação de escoamento tem atraído muitos estudos, pois a evolução da separação durante a inicialização e desligamento parece ser a principal responsável pela geração de forças laterais, que provocam grandes instabilidades e podem danificar a estrutura do bocal, e também, do motor (DÉLERY; DUSSAUGE, 2009; HAGEMANN; FREY, 2008; NASUTI; ONOFRI, 2009). Além disso, Stark e Wagner (2009) comentam que veículos lançadores como o Ariane 5, Delta IV ou H2 (Veículos lançadores das agências espaciais europeia, norte americana e japonesa, respectivamente) apresentam uma configuração na qual os motores principais têm que realizar uma grande faixa de operação que começa ao nível do mar e vai até condições de vácuo. Para um maior desempenho projeta-se o bocal supersônico com grande razão entre áreas, o que resulta grandes impulsos em altitudes elevadas, porém, ao nível do mar o bocal estará em uma condição sobre-expandida, que provoca perda de empuxo e um escoamento que tende a se separar.

Com relação aos erros numéricos, Marchi (2001) apresentou e desenvolveu ferramentas para análise de erros numéricos que auxiliam na verificação e validação de códigos numéricos, sendo algumas delas: estimativas *a posteriori* e *a priori*, estimadores de erro, intervalos de

convergência e erros de poluição. Araki (2007) verificou soluções numéricas reativas (ou não) para escoamentos uni e bidimensionais no interior de bocais convergentes divergentes, fornecendo comparações precisas na avaliação de diferentes modelos físicos e matemáticos. Germer (2009) apresentou um estudo detalhado e abrangente sobre diversas funções de interpolação em problemas de advecção-difusão. Ao fim do estudo ele pôde confirmar igualdade entre as ordens *a posteriori* com aquelas obtidas *a priori* para algumas variáveis de interesse, confirmando as características das funções. Por fim, Martins (2013) utilizou técnicas de verificação e apresentou avanços em pós-processamento das soluções numéricas. Ele delimitou cinco tipos de variáveis diferentes e aplicou técnicas para o efetivo uso de Multiextrapolações de Richardson (MER), bem como critérios para identificação do desempenho de MER.

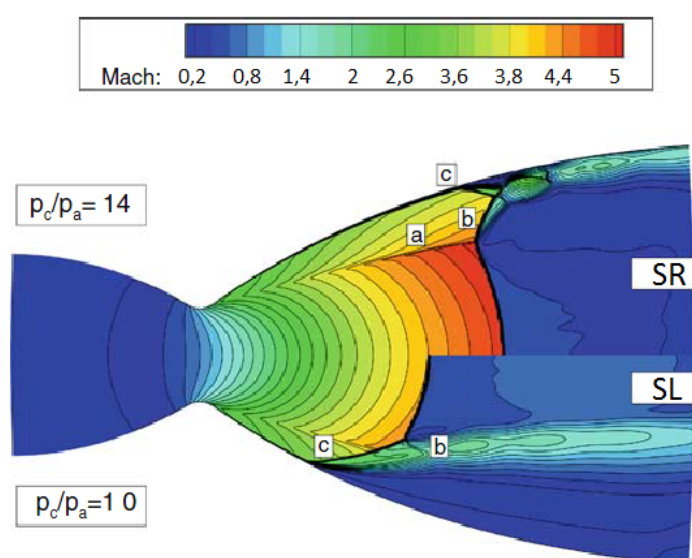


Figura 5 – Tipos de separação de escoamento.

Fonte: Adaptado de Martelli *et al.* (2010).

Ran (2008) investigou quebras de simetria e oscilações espaciais em diferenças finitas para alguns esquemas, dentre eles o TVD. Ele comenta que a quebra de simetria é uma candidata a causa das oscilações não físicas nas proximidades do choque e que soluções numéricas calculadas por diferenças finitas sempre estão associadas com dissipação e dispersão numéricas.

Nos trabalhos de Manzini (2009), Oliveira (2010) e Qian e Lee (2012) a propriedade TVD é usada em problemas transientes na discretização temporal. Apesar da propriedade TVD ser considerada para cada passo de tempo, inerente aos problemas transientes, Versteeg e Malalasekera (2007) mostram como esta propriedade está ligada a comportamentos desejáveis na discretização de esquemas em regime permanente. Com estas últimas referências conclui-se que o TVD ainda é usado e estudado.

## 1.4 Motivação e justificativa

Para melhor entender o funcionamento de motores-foguete usam-se, basicamente, os três métodos de se analisar um fenômeno real citados anteriormente. Nota-se um grande esforço no desenvolvimento e avaliação dos métodos teóricos, em especial o numérico que permite o uso de modelos físicos e matemáticos mais elaborados. Um conceito bastante interessante, fornecido pelo escoamento unidimensional, é a existência de apenas uma solução isentrópica, sem choque, para escoamentos supersônicos. Tal conceito indica que a ocorrência de choques no escoamentos em bocais, seja interna ou externamente, é bastante frequente. Por isso, é importante resolver escoamentos que contenham ondas de choque com boa acurácia e com o mínimo possível de efeitos não físicos, como oscilações e falsa difusão.

## 1.5 Termos convenientemente definidos

O intuito desta breve seção é definir alguns termos que serão utilizados com frequência no texto, sendo eles:

- Configuração 1: quinta geometria de bocal apresentada no trabalho de Back *et al.* (1965) com escoamento de ar;
- Configuração 2: quinta geometria de bocal apresentada no trabalho de Back *et al.* (1965) com escoamento de vapor de água;
- Configuração 3: bocal cossenoidal com escoamento de ar;
- Configuração 4: bocal cossenoidal com escoamento de vapor de água;
- Configuração 5: quinta geometria de bocal apresentada no trabalho de Back *et al.* (1965) com escoamento de ar, específica para o caso bidimensional;
- DDV e Fourier: obtenção da posição de choque através de interpolação polinomial por diferenças divididas de Newton e aproximação por série de Fourier, respectivamente;
- ENO1 e ENO2: aproximações ENO de primeira e segunda ordens usadas diretamente na face do volume de controle;
- MER: Multiextrapolações de Richardson;
- TVD: aproximação segundo a metodologia apresentada por Versteeg e Malalasekera (2007);

## 1.6 Objetivos

Como objetivo geral cita-se o estudo e avaliação das aproximações UDS e TVD na captura de descontinuidades em escoamentos compressíveis uni e bidimensionais internos em bocais convergentes-divergentes com o intuito de obter melhor acurácia nas soluções numéricas utilizando-se do Método dos Volumes Finitos (Em inglês: *Finite Volume Method* ou FVM). Citam-se como objetivos secundários o teste de cinco aproximações (UDS, CDS, TVD, ENO1 e ENO2) em um problema incompressível, mais simples, para verificar a metodologia de uso destas e o desenvolvimento de métodos para obtenção da posição da onda de choque normal avaliando seu uso em conjunto com MER. Os objetivos específicos são os seguintes:

- discretizar os modelos matemáticos incluindo as aproximações UDS, CDS, TVD, ENO1 e ENO2 para Burgers e TVD para Euler 1D e 2D;
- avaliar as ordens assintóticas *a priori* das aproximações;
- obter *a posteriori* as ordens efetiva e aparente das aproximações;
- quantificar os erros numéricos associados;
- avaliar o desempenho das aproximações;
- obter a posição do choque para o campo de número de Mach através dos métodos desenvolvidos;
- observar o fenômeno de onda de choque;
- avaliar o desempenho das aproximações e variáveis com MER;

Estes objetivos específicos foram organizados em um fluxograma, apresentado na Fig. 6.

## 1.7 Delineamento

Este texto está dividido em 5 capítulos. No primeiro capítulo define-se o problema a ser estudado, algumas contribuições relacionadas ao estudo, uma breve seção que resume a motivação e justificativa deste trabalho e os objetivos do mesmo. O segundo capítulo trata de apresentar o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento deste estudo. No terceiro capítulo pode-se observar a aplicação dos conceitos e métodos aos problemas propostos. Os resultados e discussões relacionadas são apresentadas no capítulo quatro. Por fim, o capítulo cinco apresenta as considerações finais deste trabalho.

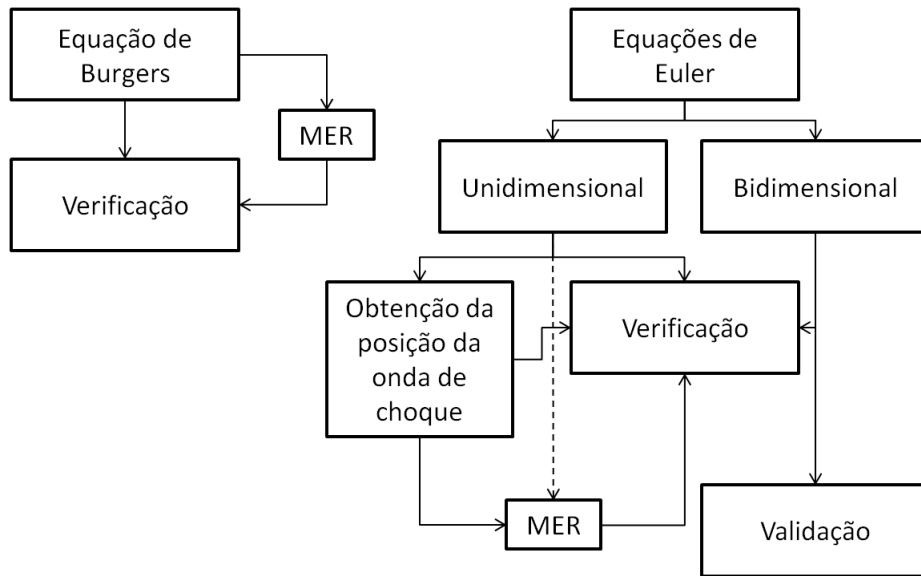


Figura 6 – Fluxograma dos objetivos específicos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentado o embasamento necessário para desenvolver os estudos apresentados neste trabalho. O capítulo está dividido em duas seções, a primeira trata dos fenômenos que ocorrem e fornece conceitos teóricos da dinâmica dos fluidos necessários para o entendimento do escoamento estudado, bem como meios analíticos para se obter uma análise unidimensional do escoamento. Após esta seção inicia-se a descrição dos conceitos e ferramentas numéricas utilizados neste trabalho para se conseguir as soluções numéricas e, também, para verificar e aumentar o desempenho das mesmas.

### 2.1 Caracterização dos fenômenos

As primeiras subseções descrevem os escoamentos unidimensional e bidimensional abordados, em seguida são apresentadas características de um fluido compressível. A quarta subseção trata de propagação de ondas em meios compressíveis. Por fim, são apresentadas características das ondas de choque e expansão e o procedimento adequado para se obter uma solução analítica unidimensional para o caso onde uma onda de choque está presente no interior de um bocal.

#### 2.1.1 Escoamentos quase unidimensionais

Por definição, escoamentos unidimensionais são aqueles nos quais as propriedades do campo de escoamento variam apenas com uma direção coordenada. Porém, se a variação da área de seção transversal é gradual com o eixo coordenado  $x$  ( $A = A(x)$ ) é possível negligenciar as variações em  $y$  e  $z$ , isto é equivalente aos escoamentos puramente unidimensionais, nos quais as propriedades do escoamento são função de  $x$  apenas. Tal escoamento, onde são negligenciadas as variações nas outras direções coordenadas, é chamado de quase unidimensional e é uma aproximação. A Fig. 7 ilustra um escoamento quase unidimensional (ANDERSON, 2003), onde  $u$  e  $T$  são a velocidade na direção  $x$ , e temperatura, respectivamente, e os subscritos 1 e 2 representam a entrada e saída da geometria.

#### 2.1.2 Escoamentos bidimensionais axissimétricos

Um caso especial do escoamento tridimensional é o escoamento bidimensional axissimétrico, que também é uma aproximação semelhante ao quase unidimensional. Para definir um escoamento bidimensional axissimétrico considera-se um corpo criado por revolução, como mostra a Fig. 8, junto com um sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ , sendo  $z$  o eixo de simetria e  $\mathbf{V}$  o vetor velocidade. O campo de escoamento deve ser simétrico ao eixo de  $z$ , ou seja, as propriedades são independentes de  $\phi$  (representado na figura como eixo com a direção

saindo da folha de papel), ou seja, dependem apenas de  $r$  e  $z$ . Tal escoamento também pode ser chamado de quase bidimensional (ANDERSON, 2003).

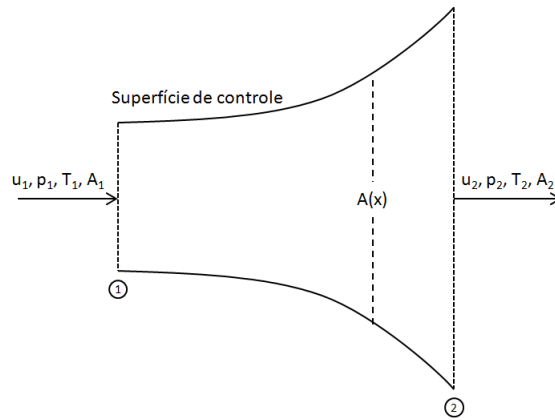


Figura 7 – Volume de controle para escoamento quase-unidimensional.

Fonte: Adaptado de Anderson (2003).

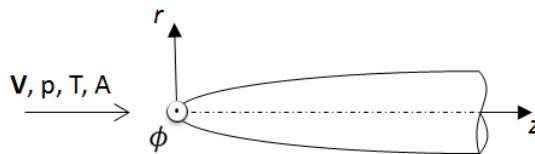


Figura 8 – Corpo axissimétrico.

Fonte: Adaptado de Anderson (2003).

### 2.1.3 Fluidos compressíveis

Fluidos podem ser classificados como compressíveis, para os quais as variações na pressão podem provocar variações significativas na massa específica, e incompressíveis, para os quais tais variações na massa específica não são significativas. Esta separação resulta em uma grande divisão de conceitos e aplicações. Em relação aos fluidos incompressíveis pode-se citar a aerodinâmica em carros, em que o número de Mach não ultrapassa 0,3. Quando números de Mach maiores do que 0,3 ocorrem, em aeronaves comerciais por exemplo, o fluido já não pode mais ser modelado como incompressível. O número de Mach é uma relação entre a velocidade do escoamento e a do som a ser definido com mais detalhes na Subseção 2.1.4

A Fig. 9a mostra um pistão sendo deslocado para direita dentro de um tubo que contém um gás a pressão  $p_A$ . Quando o pistão é empurrado subitamente para a direita com força  $f_x$ , uma camada de gás se acumula próximo ao pistão e é comprimida criando uma onda de compressão e uma região de gás comprimido a pressão  $p_B$ , Fig. 9b. Imediatamente após o deslocamento inicial o restante do gás não é afetado e a onda criada começa a se mover através do gás na direção  $x$  com velocidade  $u$ , fazendo com que o mesmo, por onde ela passa, sinta o movimento do pistão,

conforme a Fig. 9c. Se o impulso dado ao gás for infinitesimalmente pequeno, tem-se uma onda sonora e a onda de compressão resultante se move através do gás na velocidade do som. No caso de um meio totalmente incompressível mudanças na massa específica não ocorrem, fazendo com que todo o gás se movimente ao mesmo tempo e isso, por sua vez, significa que a velocidade de propagação da onda em meios incompressíveis é infinita. Entretanto, nenhum meio é totalmente incompressível e, por isso, a velocidade do som tem valores finitos em sólidos, líquidos e gases. Quanto menor for a compressibilidade da substância maior será a velocidade do som na mesma, ou seja, a velocidade do som nos sólidos é maior que nos líquidos, que é maior em relação aos gases (JOHN; KEITH, 2006).

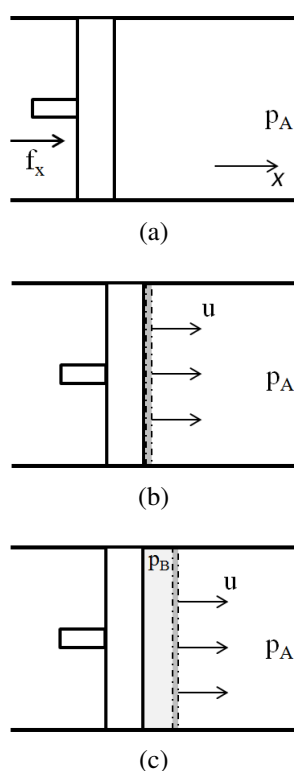


Figura 9 – Movimento de um pistão num tubo de gás.

Fonte: Adaptado de John e Keith (2006).

Fluido compressível é definido como sendo de massa específica variável, que é um contraste com o fluido incompressível, no qual a massa específica é definida como constante. Obviamente, em aplicações práticas todos os fluidos são compressíveis; entretanto, na maioria dos líquidos e para alguns gases em condições específicas, as variações na massa específica são tão pequenas que a hipótese de massa específica constante pode ser assumida com acurácia razoável. A definição simples de escoamento compressível como sendo de massa específica variável deve ser mais elaborada. Considerando um pequeno elemento fluido de volume  $\mathcal{V}$  e a pressão  $p$  exercida em volta dele pelo fluido em que ele está inserido, assume-se que a pressão foi aumentada em  $dp$ , um valor infinitesimal, e com isso, o volume do elemento será comprimido

em  $dv_{esp}$ . Uma vez que o volume é reduzido tem-se  $-dv_{esp}$ , e a compressibilidade ( $\tau$ ) do fluido pode ser escrita conforme Eq. 2.1 (ANDERSON, 2003).

$$\tau = -\frac{1}{v_{esp}} \frac{dv_{esp}}{dp} \quad (2.1)$$

Fisicamente, compressibilidade é a fração do volume de um elemento fluido por unidade de pressão. Entretanto, essa definição não é suficientemente precisa. Sabe-se que quando um gás é comprimido, sua temperatura tende a aumentar. Portanto, se a temperatura do fluido é mantida constante (devido a algum mecanismo de transferência de calor) a compressibilidade é dita isotérmica e sua formulação é apresentada na Eq. 2.2 (ANDERSON, 2003).

$$\tau_T = -\frac{1}{v_{esp}} \left( \frac{\partial v_{esp}}{\partial p} \right)_T \quad (2.2)$$

Por outro lado, se o calor não é removido ou acrescentado ao elemento fluido (compressão adiabática) e nenhum mecanismo de transporte dissipativo, como viscosidade e difusão, são significativos (compressão reversível), então, a compressão do elemento fluido se torna isentrópica e é expressada pela Eq. 2.3 (ANDERSON, 2003).

$$\tau_s = -\frac{1}{v_{esp}} \left( \frac{\partial v_{esp}}{\partial p} \right)_s \quad (2.3)$$

A compressibilidade é uma propriedade do fluido. Os líquidos possuem valores muito baixos de compressibilidade, ao passo que os gases possuem compressibilidades elevadas. Como a massa específica é o inverso do volume específico ( $\rho = 1/v_{esp}$ ), a Eq. 2.1 pode ser escrita na forma da Eq. 2.4, onde  $d\rho$  representa uma variação infinitesimal da massa específica. Para uma dada variação de pressão, devido ao escoamento, a variação na massa específica será pequena para líquidos, uma vez que eles tem uma compressibilidade muito baixa, podendo dizer que a massa específica se mantém constante (meio incompressível). Porém, quando se tratam de gases, gradientes de pressão podem criar variações significativas na velocidade e massa específica (meio compressível) (ANDERSON, 2003).

$$d\rho = \rho\tau dp \quad (2.4)$$

#### 2.1.4 Propagação de ondas

Quando se tem um corpo sólido, ou um distúrbio, inserido em um escoamento sua presença provoca variação nas propriedades e direção do escoamento. O efeito da magnitude e direção destas variações são propagadas no escoamento através de ondas. Quando a velocidade da onda é maior do que a do escoamento, as variações permitem que o escoamento se ajuste à presença do corpo suavemente, conforme Fig. 10a. Caso o escoamento tenha velocidade superior

à onda, está última não terá velocidade suficiente para se propagar à montante, fazendo com que variações abruptas nas propriedades e direção do fluido ocorram, conforme Fig. 10b.

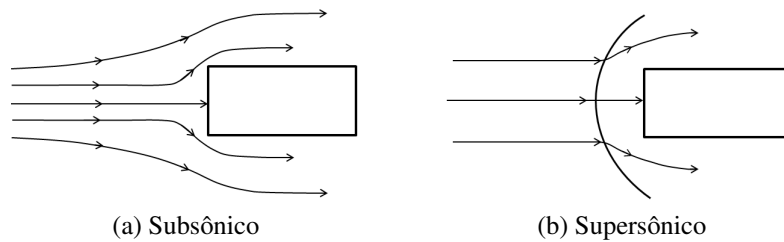


Figura 10 – Escoamento em torno de um corpo sólido.

Fonte: Adaptado de Anderson (2003).

Se o pistão da Fig. 9 criar uma perturbação infinitesimal, a onda resultante se propagará na velocidade do som através do fluido. Caso o pistão tenha uma velocidade constante para a direita, de magnitude  $du$ , e a onda sonora resultante se mova a uma velocidade  $a$ , a pressão e massa específica próximas ao pistão são infinitesimalmente maiores que no gás em repouso, à frente da onda. O gás entre o pistão e a onda deve se mover em uma velocidade  $du$ , fazendo com que a onda, de velocidade  $a$ , divida o campo de escoamento em duas partes, sendo uma parte em repouso e a outra com velocidade  $du$ . O fato de a onda sonora se propagar no gás em repouso torna o escoamento transiente, mas é possível redefinir o sistema de coordenadas para atingir o regime permanente. Isto é feito posicionando o sistema de coordenadas na onda em movimento, ou seja, a onda não se movimenta em relação ao sistema de coordenadas, mas sim o escoamento. De um lado o escoamento se aproxima com velocidade  $a$  e do outro se afasta com velocidade  $a - du$ , conforme é observado na Fig. 11 (JOHN; KEITH, 2006).

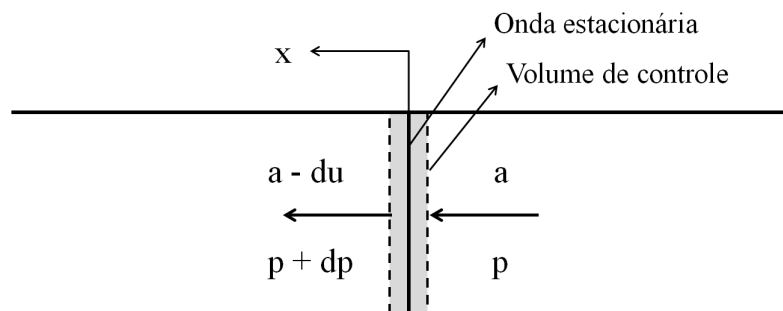


Figura 11 – Sistema de coordenadas posicionado na onda.

Fonte: Adaptado de John e Keith (2006).

Define-se um volume de controle que contenha a onda. Com a Eq. 2.5, equação da continuidade, e Eq. 2.6, equação da conservação da quantidade de movimento linear, tem-se um modelo matemático para a propagação de uma onda sonora.

$$\iint_{Sup.Controle} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum f_x = \iint_{Sup.Controle} u(\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.6)$$

Aplicando o modelo matemático ao volume de controle da Fig. 11, por exemplo, resultam as Eq. 2.7 e 2.8. Isolando  $du$  e substituindo resulta a Eq. 2.9.

$$ad\rho - \rho du = 0 \quad (2.7)$$

$$dp = \rho adu \quad (2.8)$$

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.9)$$

A onda sonora é uma onda de compressão fraca, pois através dela ocorrem mudanças infinitesimais nas propriedades do fluido. Além disso, a onda é extremamente fina e as mudanças nas propriedades ocorrem muito rapidamente sugerindo a não ocorrência de transferência de calor com a vizinhança. Portanto, classifica-se a onda sonora como um processo adiabático reversível, ou seja, isentrópico. Reescrevendo, então, a Eq. 2.9 resulta a Eq. 2.10 (JOHN; KEITH, 2006).

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (2.10)$$

Outro caso a se considerar é o súbito deslocamento do pistão para a esquerda, ocasionando uma redução na massa específica do gás imediatamente próxima ao pistão, resultando em uma onda de expansão fraca. Esta onda de expansão também se propaga no fluido com velocidade do som (JOHN; KEITH, 2006).

É necessário avaliar a Eq. 2.10 para se obter a velocidade do som no gás desejado. Para um gás perfeito, as três equações seguintes são válidas. Nelas,  $\gamma$  representa a razão entre calores específicos,  $R$  a constante do gás e os subscritos 1 e 2 relativos à duas posições distintas.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma \quad (2.11)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad (2.12)$$

$$p = \rho RT \quad (2.13)$$

Substituindo essas relações na Eq. 2.10, resulta a Eq. 2.14.

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.14)$$

Com essa última equação é possível afirmar que a velocidade do som é dependente apenas da razão entre calores específicos, constante do gás e temperatura.

Uma vez que a velocidade do som foi determinada, é possível definir uma importante relação utilizada nos estudos de escoamentos compressíveis, o número de Mach ( $M$ ), apresentada na Eq. 2.15.

$$M = \frac{|V|}{a} \quad (2.15)$$

Com o número de Mach apresentado, definem-se regimes de escoamento com base nesse número. Anderson (2003) delimita quatro tipos de escoamentos: subsônico (até Mach 0,8), transônico ( $0,8 \leq M \leq 1,2$ ), supersônico (até Mach 5) e hipersônico ( $M > 5$ ). Seguindo tal classificação, tem-se que o primeiro regime apresenta baixa velocidade e energia, enquanto o último possui velocidade e energia elevadas. Os fenômenos de onda de choque e expansão começam a surgir a partir do escoamento transônico (ANDERSON, 2003).

### 2.1.5 Ondas de choque e expansão

Em escoamentos, as ondas, seja sonora, de choque ou expansão, propagam o efeito da variação de propriedades e direção causada pela presença de um corpo ou distúrbio. O que difere entre os tipos de ondas é o modo como interagem com o escoamento. Por exemplo, ondas sonoras proporcionam pequenas variações nas propriedades do escoamento. Dentro das ondas de choque é possível separar em ondas normais e oblíquas.

Ondas de choques possuem região muito delgada (da ordem de  $10^{-5} \text{cm}$ , para o ar em condições padrão). Através do choque a pressão estática, temperatura e massa específica aumentam, já a velocidade diminui. Quando o escoamento é subsônico, a onda resultante da presença de um distúrbio consegue se propagar à montante, como dito anteriormente na Subseção 2.1.4. Por outro lado, quando o escoamento se torna supersônico, as ondas sonoras não conseguem se propagar à montante. Ao invés disso, elas começam a se unir em uma pequena distância à frente do distúrbio. Ao fazê-lo, sua união forma uma onda de choque delgada, sendo que à montante do choque a onda não se propaga. A ocorrência de choques normais é frequente

em escoamentos supersônicos. Por definição, um choque normal é perpendicular ao escoamento e é tratado como unidimensional (ANDERSON, 2003).

A onda de choque normal é um caso especial de uma família mais geral de ondas oblíquas. Os choques oblíquos ocorrem quando um distúrbio faz com que o escoamento seja direcionado para dentro dele mesmo, conforme a Fig. 12a. No caso de o distúrbio fazer com que o escoamento seja direcionado para fora dele mesmo ondas de expansão irão ocorrer, conforme Fig. 12b. Essas, por sua vez diminuem a pressão estática, temperatura e massa específica e aumentam a velocidade. Ondas de choque oblíquas e de expansão são predominantes em escoamentos bi e tridimensionais. De fato, são intrinsecamente bidimensionais por natureza (ANDERSON, 2003).

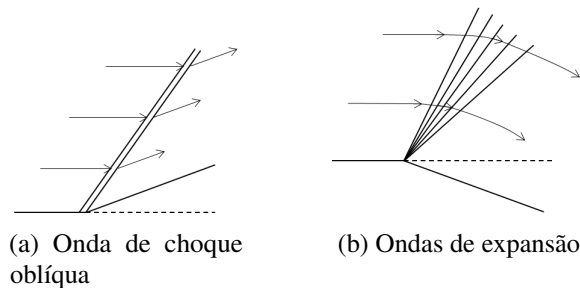


Figura 12 – Ondas de choque oblíquas e de expansão.

Fonte: Adaptado de Anderson (2003).

Neste trabalho o foco são ondas de choque internas, portanto, ondas normais no caso unidimensional. A solução não é isentrópica em todo o bocal, no entanto, ela é à jusante e à montante do choque, ou seja, apenas no choque ela deixa de ser isentrópica. O procedimento analítico para obter as propriedades do escoamento no interior de um bocal com uma onda de choque normal começa com a determinação da posição da onda. Anderson (2003) apresenta dois métodos para determinar a posição: tentativa e erro e direto. Aqui será apresentado apenas o método direto conforme observa-se a seguir. Primeiro utiliza-se a Eq. 2.16 e em seguida, para encontrar o número de Mach na saída, usa-se a Eq. 2.17 (ANDERSON, 2003).

$$\frac{p_{ex}A_{ex}}{p_{0ex}A_{ex}^{crit}} = \frac{p_{ex}A_{ex}}{p_{01}A_1^{crit}} \quad (2.16)$$

$$M_{ex}^2 = -\frac{1}{\gamma - 1} + \sqrt{\frac{1}{(\gamma - 1)^2} + \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{p_{0ex}A_{ex}^{crit}}{p_{ex}A_{ex}}\right)^2} \quad (2.17)$$

Nas últimas duas equações, os subscritos 1 representam região à montante do choque e 2 à justante e o sobrescrito *crit* refere-se ao termo crítica. Por exemplo,  $A_1^{crit}$  é a área crítica

à montante do choque, que também é a área da garganta. A área da garganta é a menor seção transversal existente em um bocal convergente-divergente.

Com o número de Mach na saída determinado é possível obter a pressão de estagnação à jusante do choque com as Eq. 2.18 e 2.19 e a pressão de estagnação à montante.

$$\frac{p_{ex}}{p_{0ex}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{ex}^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma + 1}} \quad (2.18)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{0e} p_{ex}}{p_{ex} p_{01}} \quad (2.19)$$

Agora, com a pressão de estagnação à jusante do choque é possível calcular o número de Mach imediatamente à montante do choque através da Eq. 2.20, que é uma composição das Eq. 2.21 a 2.23.

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} \left[ \frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2}\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 1 + \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1} \quad (2.20)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (2.21)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.22)$$

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2} \quad (2.23)$$

Calcula-se a razão de área correspondente ao Número de Mach imediatamente à montante da onda de choque com a Eq. 2.24.

$$\left(\frac{A}{A^{crit}}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (2.24)$$

O Número de Mach imediatamente à jusante do choque é calculado através da Eq. 2.23. Com a área relativa ao choque e o número de Mach imediatamente à jusante, calcula-se a área crítica para a região à jusante da onda de choque através da Eq. 2.24. Com as duas áreas críticas definidas é possível obter o Número de Mach para todo o bocal através da Eq. 2.24 e área do mesmo. As outras propriedades são obtidas através das Eq. 2.25 a 2.27 e 2.22.

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (2.25)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (2.26)$$

$$u = Ma \quad (2.27)$$

## 2.2 Enfoque numérico

Inicia-se esta seção com a descrição de algumas ferramentas úteis de análise numérica no desenvolvimento deste trabalho. Após isso são descritos alguns aspectos relativos às malhas. A terceira subseção descreve as aproximações numéricas utilizadas. Tópicos relativos à resolução dos sistemas lineares são apresentados na quarta subseção. Conceitos e ferramentas de verificação e validação numérica são apresentados na subseção 5. Finalmente, a subseção 6 descreve como melhorar a acurácia de soluções numéricas através de pós-processamento.

### 2.2.1 Tópicos de análise numérica

Para as metodologias de obtenção da posição da onda de choque são necessários alguns conceitos: função de interpolação, aproximação por séries, integração numérica e identificação de raízes. Na solução analítica unidimensional apresentada anteriormente, na Seção 2.1.5, a identificação de raízes proporciona rápida solução de equações difíceis de se resolver algebricamente. Séries são utilizadas neste trabalho para representar aproximações numéricas e métodos de interpolação são utilizados em conjunto com a aproximação ENO. Estes conceitos serão vistos nesta seção.

Das diferentes formas de se expressar um polinômio interpolador, o método das diferenças divididas de Newton (DDV) é um dos mais populares e úteis. Para este método não é necessário que os dados a serem interpolados sejam igualmente espaçados ou que o valor das abscissas estejam necessariamente em ordem crescente. A forma mais geral do polinômio interpolador por diferenças divididas de Newton para  $n + 1$  pontos e grau  $n$  é dada pela Eq. 2.28, os coeficientes  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_n$  pelas Eq. 2.29 a 2.31, respectivamente, e as diferenças divididas de ordem 1 e  $n$  pelas Eq. 2.32 e 2.33, respectivamente (CHAPRA; CANALE, 2008).

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (2.28)$$

$$b_0 = f(x_0) \quad (2.29)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] \quad (2.30)$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \quad (2.31)$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (2.32)$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0} \quad (2.33)$$

Nestas últimas equações  $x_0, x_1, x_{n-1}, x_{n-2}, x_n, x_i, x_j$  e  $x_k$  são as posições relativas aos dados que serão interpolados,  $f_n$  a função resultante da interpolação,  $f$  é uma função genérica e  $i, j$  e  $n$  são números inteiros.

O DDV é utilizado neste trabalho para avaliar estênceis na metodologia ENO e representar a região do choque normal para identificar sua posição. Segundo Chapra e Canale (2008) o polinômio interpolador de Lagrange é uma reformulação do método de diferenças divididas de Newton e será utilizado para realizar a reconstrução da aproximação na metodologia ENO. A Eq. 2.34 apresenta o polinômio interpolador.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2.34)$$

A série utilizada para aproximar as aproximações numéricas UDS, CDS e TVD será a série de Taylor. Ela é obtida quando se aproxima uma função através um ponto ( $B$ ) em conjunto com derivadas. A função aproximada ( $f_a$ ) por tal série é apresentada na Eq. 2.35 (CHAPRA; CANALE, 2008).

$$f_a(x) = f(B) + f'(B)(x - B) + \frac{f''(B)}{2!}(x - B)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(B)}{n!}(x - B)^n \quad (2.35)$$

A obtenção da posição da onda de choque normal também será feita através de séries. A série de Fourier é bastante útil na representação de descontinuidades. Apesar do fenômeno de Gibbs, esta série representa bem funções clássicas que contém saltos ou descontinuidades, como a onda quadrada. O fenômeno e a onda são apresentados na Fig. 13. A Equação 2.36 apresenta a série de Fourier e as Eq. 2.37 a 2.39 os coeficientes, onde  $n_F$  representa o número de pontos da série e  $l_F$  o período (GREENBERG, 2007).

$$f_a(x) = a_0 \sum_{n_F=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n_F \pi x}{l_F}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n_F \pi x}{l_F}\right) \right] \quad (2.36)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l_F} \int_{-l_F}^{l_F} f(x) dx \quad (2.37)$$

$$a_n = \frac{1}{l_F} \int_{-l_F}^{l_F} f(x) \cos\left(\frac{n_F \pi x}{l_F}\right) dx \quad (2.38)$$

$$b_n = \frac{1}{l_F} \int_{-l_F}^{l_F} f(x) \text{sen}\left(\frac{n_F \pi x}{l_F}\right) dx \quad (2.39)$$

Como os dados disponíveis para realizar a aproximação por série de Fourier são numéricos, ou seja, discretos, é necessária uma técnica de integração numérica para avaliar as integrais

que compõem a série. Dentre as opções de se integrar um conjunto de dados numéricos optou-se pela Regra do Trapézio que apresenta grande simplicidade. Uma vez que a maior ordem possível das aproximações é dois, não é necessária uma técnica de integração com ordem maior que dois. Para uma aplicação mais acurada da Regra do Trapézio utiliza-se uma aplicação múltipla, apresentada na Eq. 2.40 onde  $I_T$  é o resultado da integral pela Regra do Trapézio,  $I_0$  e  $I_1$  os intervalos de integração e  $n_T$  a quantidade de pontos a serem integrados. (CHAPRA; CANALE, 2008).

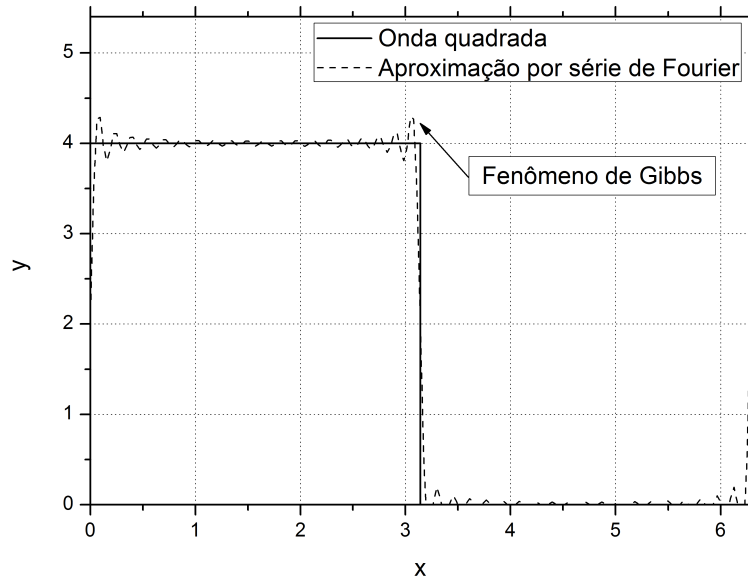


Figura 13 – Representação da onda quadrada e o fenômeno de Gibbs.

$$I_T = (I_0 - I_1) \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n_T-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n_T} \quad (2.40)$$

Por fim, uma ferramenta bastante útil na identificação de raízes é o método de Newton-Raphson modificado. Sua fórmula é apresentada na Eq. 2.41, onde o subscrito  $it$  refere-se a iteração e  $\Delta x$  representa a distância. Neste trabalho, a estimativa inicial da posição da onda de choque, obtida através do maior gradiente numérico, é precisa e evita a necessidade de se considerar a obtenção de mais de uma raiz (CHAPRA; CANALE, 2008).

$$x_{it+1} = x_{it} - f(x_{it}) \frac{f(x_{it} + \Delta x) - f(x_{it} - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.41)$$

## 2.2.2 Malhas numéricas

Muitos problemas de engenharia não se ajustam completamente em coordenadas cartesianas, ou até mesmo em outros sistemas ortogonais. Quando a fronteira do escoamento não coincide com as linhas coordenadas de uma malha estruturada aproxima-se sua geometria. Essa aproximação é demorada e não vantajosa. Um refinamento na malha pode melhorar a

representação da geometria, mas existem regiões em que o interesse é menor e não justifica o refinamento. Um exemplo de aproximação da geometria é mostrado na Fig. 14 (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

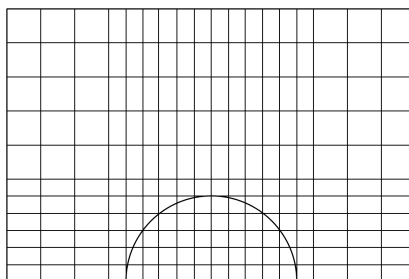


Figura 14 – Exemplo de aproximação de geometria.

Fonte: Adaptado de Versteeg e Malalasekera (2007).

Geometrias complexas são abordadas de duas maneiras: a partir de malha curvilínea estruturada e malhas não estruturadas. A malha curvilínea consegue lidar com o escoamento apresentado na Fig. 14, porém, quando se trata de geometrias mais complexas, esta técnica apresenta grandes dificuldades. Ao se utilizar sistemas curvilíneos são feitas transformações de coordenadas e das equações de conservação para resolver um escoamento, por exemplo (MALISKA, 2004). Malhas não estruturadas possibilitam flexibilidade ilimitada em se tratando de geometrias e eficiência computacional para escoamentos complexos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

São possíveis vários arranjos das variáveis em malhas, essa é uma forma de organização. Em se tratando de malhas estruturadas, dois arranjos se destacam: arranjo co-localizado e desencontrado. Quando todas as variáveis utilizam o mesmo volume para armazenar suas informações, denomina-se arranjo co-localizado. Ele possibilita maior facilidade de implementação e construção do código. Tal arranjo é apresentado na Fig. 15a. No caso do arranjo desencontrado pode existir até uma malha para cada variável de interesse. Neste a complexidade de implementação é maior e aumenta com o aumento da quantidade de coordenadas. Tal arranjo é apresentado na Fig. 15b onde pressão, velocidades  $u$  e  $v$  exigem malhas diferentes para que estas propriedades sejam avaliadas nos centros dos volumes (MALISKA, 2004).

### 2.2.3 Aproximações numéricas

Duas aproximações numéricas clássicas são: UDS e CDS. As Eq. 2.42 e 2.43 apresentam uma propriedade genérica ( $\phi$ ) sendo avaliada na face oeste para os esquemas UDS (sentido positivo) e CDS, respectivamente. Subscritos com letra minúscula são relativos aos centros das faces e com letra maiúscula ao centro dos volumes, conforme apresenta Fig. 16.

$$\phi_w = \phi_w \quad (2.42)$$

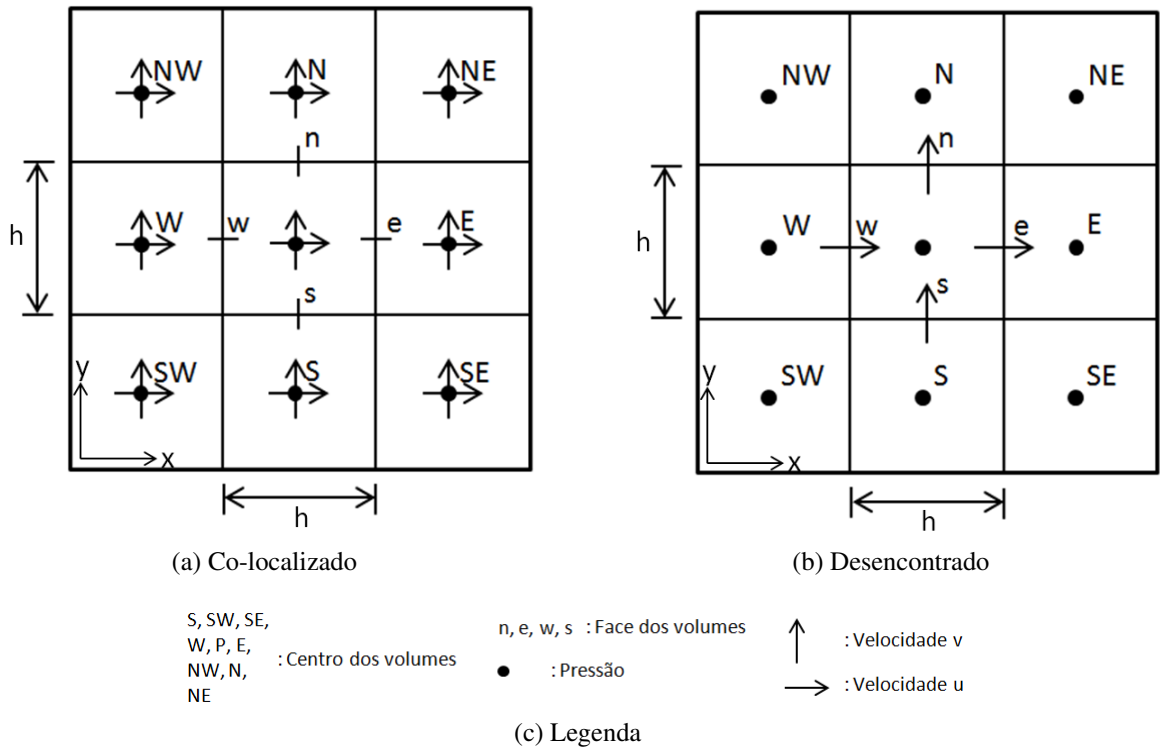


Figura 15 – Tipos de arranjos.

Fonte: Adaptado de Maliska (2004).

$$\phi_w = \frac{\phi_w + \phi_P}{2} \tag{2.43}$$

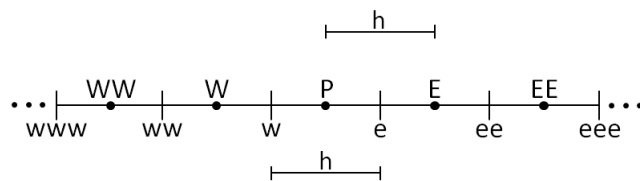


Figura 16 – Simbologia utilizada para o volume de referência (P), seus vizinhos e faces.

Infelizmente o uso de tais aproximações causam, em problemas convectivos que contenham descontinuidades, falsa difusão (UDS), oscilações ou até mesmo a divergência da solução numérica (CDS). Na verdade o uso da aproximação CDS, mesmo em casos onde não estejam presentes ondas de choque, pode causar divergência. O que se faz para tentar evitar tal problema e aplicar o CDS é utilizar um esquema de correção adiada. Este resolve implicitamente o problema utilizando UDS. Nota-se que o uso de correção adiada não garante, para o caso de ondas de choque, a ausência de oscilações ou convergência. Tal esquema é apresentado na Eq. 2.44, onde o subscrito \* se refere à iteração anterior e  $\beta$  é uma constante da correção adiada que defini a

aproximação. Por exemplo, quando  $\beta = 0$  a correção adiada resulta no UDS e quando  $\beta = 1$  resulta em CDS.

$$\phi_w = \phi_W + \frac{\beta}{2} (\phi_P^* - \phi_W^*) \quad (2.44)$$

Versteeg e Malalasekera (2007) apresentam uma metodologia de implementação de aproximações chamadas TVD que se baseia no UDS, similar à correção adiada. O TVD, por sua vez, baseia-se na razão de gradientes para escolher a aproximação mais adequada através de uma função limitadora previamente definida.

A Equação 2.45 apresenta a aproximação TVD para a face oeste. Segundo Versteeg e Malalasekera (2007) não existe argumento convincente em favor de nenhuma função limitadora ( $\psi$ ) TVD. Por isso, neste trabalho a primeira função limitadora utilizada foi a SUPERBEE de Roe (1985), apresentada na Eq. 2.46. No entanto, no caso de Euler com a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica o uso da SUPERBEE gerou instabilidade ocasionando a divergência da solução. Esta instabilidade foi resolvida com o uso da função limitadora MIN-MOD, também de Roe (1985), apresentada na Eq. 2.47. A razão de gradientes ( $r_g$ ) da face oeste, necessária para o cálculo da função limitadora, é apresentada na Eq. 2.48.

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2} \psi(r_{gw})(\phi_P^* - \phi_W^*) \quad (2.45)$$

$$\psi(r_{gw}) = \max[0, \min(2r_{gw}, 1), \min(r_{gw}, 2)] \quad (2.46)$$

$$\psi(r_{gw}) = \begin{cases} \min(r_{gw}, 1) & \text{se } r_{gw} > 0 \\ 0 & \text{se } r_{gw} \leq 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

$$r_{gw} = \frac{\phi_W - \phi_{WW}}{\phi_P - \phi_W} \quad (2.48)$$

É necessária uma extrapolação linear para o cálculo da razão de gradientes no primeiro volume real da face oeste, pois para este volume não existe o vizinho WW. Tal extrapolação resulta em um valor unitário para a razão de gradientes.

Outro esquema que vem ganhando bastante atenção é o ENO. A metodologia para aplicação de tal esquema pode ser dividida em dois processos distintos: reconstrução da aproximação e análise através de DDV.

Segundo Shu (1997) a média dos volumes ( $\bar{g}$ ) de uma função  $g(x)$  pode ser escrita através de uma integral, avaliada entre dois pontos e sua distância ( $\Delta x$ ), conforme apresenta a Eq. 2.49, onde o subscrito  $i$  representa um volume genérico e  $\xi$  é uma variável auxiliar.

$$\bar{g}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_w}^{x_e} g(\xi) d\xi \quad (2.49)$$

Neste trabalho a função  $g(x)$  representa um conjunto de dados numéricos e para aproximá-la usa-se um polinômio ( $h_i(x)$ ) de grau até  $k - 1$ , conforme Eq. 2.50. Destaca-se que a ordem de acurácia resultante da aproximação ENO não é  $k$  e sim  $k - 1$ , mais detalhes podem ser vistos em Shu (1997).

$$h_i(x) = g(x) + O(\Delta x^k) \quad (2.50)$$

Dada uma localização do volume  $I_i$  e uma ordem de acurácia  $k$ , escolhe-se um estêncil com base em  $r$  volumes à esquerda,  $s$  volumes à direita e o próprio volume  $I_i$ . Se  $r, s \geq 0$ , com  $r + s + 1 = k$  tem-se (SHU, 1997):

$$S(i) \equiv I_{i-r}, \dots, I_{i+s} \quad (2.51)$$

Existe um único polinômio, Eq. 2.50 de grau até  $k - 1 = r + s$ , denotado por  $h(x)$  cuja média do volume coincide com a do  $g(x)$ . São necessárias aproximações para os valores de  $g(x)$  nas faces dos volumes, uma vez que os mapeamentos para uma dada média de volume  $\bar{g}_j$  no estêncil  $S(i)$  para  $g_e$  e  $g_w$  são lineares, existem constantes  $c_{r,j}$  que dependem da parte esquerda  $r$  do estêncil, da ordem de acurácia  $k$  e do tamanho dos volumes  $\Delta x_i$ . Sendo assim, é possível escrever aproximações para as faces leste e oeste, conforme Eq. 2.52 e 2.53 (SHU, 1997).

$$g_e = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r,j} \bar{g}_{i-r+j} \quad (2.52)$$

$$g_w = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r-1,j} \bar{g}_{i-r+j} \quad (2.53)$$

Até o momento foram apresentadas características para uma reconstrução unidimensional da aproximação, que resultam em duas equações (2.52 e 2.53). Para empregar efetivamente a reconstrução é necessário obter as constantes  $c_{r,j}$ . Tal procedimento envolve o conceito de primitiva das funções  $g(x)$  e  $h(x)$  e manipulações algébricas para representar a função  $g(x)$  através de polinômios interpoladores de Lagrange; maiores detalhes podem ser encontrados em Shu (1997). Neste trabalho apenas é apresentada a equação que determina as constantes, Eq. 2.54, onde  $q, m$  e  $l$  são inteiros. O Apêndice A apresenta um código, desenvolvido em Maple, para o cálculo destas constantes. É interessante notar que malhas uniformes possuem valores preestabelecidos para as constantes e podem ser encontrados na Tab. 1.

$$c_{r,j} = \sum_{m=j+1}^k \sum_{\substack{l \neq m \\ l=0}}^k \prod_{\substack{q \neq m, l \\ q=0}}^k (r - q + 1) \prod_{\substack{l \neq m \\ l=0}}^k \frac{1}{m - l} \quad (2.54)$$

O esquema ENO parte de um conceito adaptativo que tenta evitar a inclusão de descontinuidades no estêncil, se possível. Para isso usam-se diferenças divididas de Newton. Nota-se que as

diferenças divididas de primeira ordem da função  $G(x)$ , primitiva de  $g(x)$ , são iguais às diferenças divididas de ordem zero das médias dos volumes  $\bar{g}_i$ , conforme Eq. 2.55 (SHU, 1997). Ainda, a ordem dos pontos não influencia o resultado da diferença dividida, como mostrado na Eq. 2.56.

Tabela 1 – Constantes  $c_{r,j}$  para malhas uniformes do método ENO de primeira e segunda ordens.

$k$	$r$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
2	-1	3/2	-1/2	
	0	1/2	1/2	
	1	-1/2	3/2	
3	-1	11/6	-7/6	1/3
	0	1/3	5/6	-1/6
	1	-1/6	5/6	1/3
	2	1/3	-7/6	11/6

Fonte: Shu (1997).

$$G[x_e, x_w] = \frac{G(x_e) - G(x_w)}{x_e - x_w} = \bar{g}_i \quad (2.55)$$

$$G[x_e, x_w, x_{ww}] = G[x_{ww}, x_w, x_e] = G[x_{ww}, x_e, x_w] = \dots \quad (2.56)$$

O processo de escolha do estêncil é feito por partes. Primeiro inicia-se com um estêncil base, Eq. 2.57, onde  $\tilde{S}$  representa o estêncil escrito em função dos pontos que o compõem. Então, adicionam-se pontos à direita ou à esquerda. Cada ponto representa uma aproximação diferente, o ponto referente a aproximação mais suave é escolhido. Em uma mesma ordem de diferença dividida, a de menor valor representa a função mais suave (SHU, 1997). Por exemplo, tem-se a Eq. 2.58, referente ao estêncil base da Eq. 2.57, adiciona-se um ponto à esquerda, resultando em um polinômio de grau dois, Eq. 2.59, ou um ponto à direita, resultando na Eq. 2.60. Então, avaliam-se as duas diferenças divididas, em módulo, e o menor valor é escolhido. O ponto referente ao menor módulo da diferença dividida é adicionado ao estêncil, Eq. 2.61 ou 2.62.

$$\tilde{S}_2(i) = \{x_w, x_e\} \quad (2.57)$$

$$P^1(x) = G[x_w] + G[x_w, x_e](x - x_w) \quad (2.58)$$

$$E(x) = P^1(x) + G[x_{ww}, x_w, x_e](x - x_w)(x - x_e) \quad (2.59)$$

$$D(x) = P^1(x) + G[x_w, x_e, x_{ee}](x - x_w)(x - x_e) \quad (2.60)$$

$$\tilde{S}_3(i) = \{x_{ww}, x_w, x_e\} \quad (2.61)$$

$$\tilde{S}_3(i) = \{x_w, x_e, x_{ee}\} \quad (2.62)$$

Com o estêncil definido usam-se as Eq. 2.52 e 2.53 para obter uma reconstrução para a propriedade na face. Para malha uniforme, por exemplo, resultam aproximações para o estêncil da Eq. 2.61, conforme Eq. 2.63 e 2.64 e aproximações para o estêncil da 2.62, conforme Eq. 2.65 e 2.66.

$$\phi_w = \frac{1}{2}\phi_W + \frac{1}{2}\phi_P \quad (2.63)$$

$$\phi_e = \frac{-1}{2}\phi_W + \frac{3}{2}\phi_P \quad (2.64)$$

$$\phi_w = \frac{3}{2}\phi_P + \frac{-1}{2}\phi_E \quad (2.65)$$

$$\phi_e = \frac{1}{2}\phi_P + \frac{1}{2}\phi_E \quad (2.66)$$

#### 2.2.4 Acoplamentos e métodos de solução

O método empregado neste trabalho é o FVM, que consiste na integração da equação governante em um volume de controle e avaliação das propriedades nas faces do mesmo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; PATANKAR, 1980).

Como velocidades subsônicas e supersônicas podem ocorrer dentro de um bocal de motor-foguete será utilizada uma metodologia que trata de escoamentos a qualquer velocidade. Tal metodologia consiste em linearizar o produto da velocidade pela massa específica na equação de conservação da massa e utilizar a equação dos gases ideais para um acoplamento da pressão com a massa específica. Este procedimento é apresentado nas Eq. 2.67 e 2.68 (MARCHI; MALISKA, 1994).

$$(\rho u)_w = \rho_w u_w^* + \rho_w^* u_w - \rho_w^* u_w^* \quad (2.67)$$

$$\rho_w = \rho_w^* + \frac{P_w}{R_w T_w} \quad (2.68)$$

Das maneiras possíveis para tratar equações que são acopladas entre si, utilizou-se o algoritmo SIMPLEC (*Semi IMPLICIT Linked Equations Consistent*) que é um acoplamento entre a velocidade e pressão (van DOORMAAL; RAITHBY, 1984). Ele calcula as velocidades na equação de conservação da massa por meio da pressão, conforme apresenta a Eq. 2.69, e corrige

o campo de pressões para um novo ciclo iterativo, Eq. 2.70 (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). O termo  $d_w$  representa o coeficiente do método SIMPLEX e o sobrescrito ' é referente ao campo de pressões que satisfaz a equação de conservação da massa; mais informações podem ser obtidas em Versteeg e Malalasekera (2007) e Maliska (2004).

$$u_w = u_w^* - d_w(p'_P - p'_W) \quad (2.69)$$

$$p = p^* + p' \quad (2.70)$$

Agora, em relação aos métodos de solução dos sistemas de equações resultantes da discretização pelo FVM destacam-se três: TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) (THOMAS, 1949); Gauss-Seidel; MSI (*Modified Strongly Implicit*) (SCHNEIDER; ZEDAN, 1981). Quando o problema avaliado é unidimensional muito provavelmente o sistema de equações resultante será tridiagonal, sendo assim o TDMA pode ser utilizado. Porém, em alguns casos o sistema de equações resultante não é tridiagonal impossibilitando o uso do TDMA, nestes casos usa-se o método de Gauss-Seidel. Adicionalmente, em simulações bidimensionais é possível utilizar o MSI, que se mostrou mais rápido em testes realizados pelo Grupo de pesquisa em CFD, aerodinâmica e propulsão de foguetes da Universidade Federal do Paraná.

### 2.2.5 Verificação e validação

Na representação de um fenômeno físico através de métodos numéricos é necessário realizar, além da validação, a verificação numérica. Enquanto que a validação é necessária para certificar o modelo utilizado, a verificação é necessária para certificar a solução numérica e o código computacional. Neste trabalho serão abordadas estratégias para verificação, e validação. Esta última apenas no caso bidimensional. Segundo Marchi (2001) o erro numérico é causado por quatro fontes principais: truncamento, iteração, arredondamento e programação. Além disso, ele afirma que quando o erro de truncamento é dominante sobre as outras fontes este pode ser chamado de erro de discretização.

Os erros de programação são reduzidos ou eliminados utilizando-se de algumas estratégias como: construção do código em módulos, auxílio de *softwares* com manipulações algébricas, mensagens de erros e avisos do compilador, testes com soluções fabricadas e testes de coerência do programa (MARCHI, 2001). Para a redução dos erros de arredondamento são utilizadas precisões mais elevadas nos cálculos; nota-se, contudo, que o aumento da precisão proporciona um aumento no tempo de cálculo e memória computacional utilizados.

Para garantir que os erros de iteração sejam suficientemente menores que o erro de truncamento, são acompanhadas variáveis ao longo do processo iterativo. Em um dado momento a variação adimensionalizada ( $\Delta\phi$ ) dessas variáveis tende a ficar com baixa oscilação. É reco-

mendado que o número de iterações total ( $2it$ ) seja o dobro do número de iterações ( $it$ ) de quando inicia-se o processo de estabilização do erro, como mostra a Fig. 17 (MARCHI, 2010).

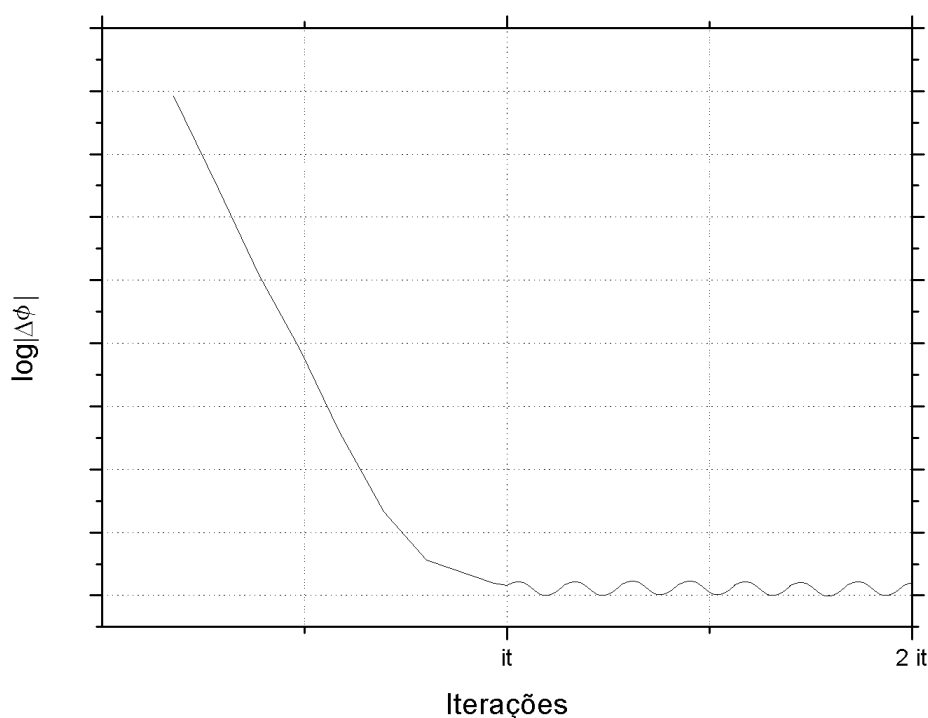


Figura 17 – Comportamento qualitativo de uma variável ao longo das iterações.

Fonte: Adaptado de Marchi (2010).

O erro de discretização pode ser avaliado através de incertezas (estimativas do erro) ou do próprio erro numérico ( $E$ ). Este último é obtido da subtração entre a solução analítica ( $\phi_A$ ) pela solução numérica ( $\phi_N$ ), conforme apresenta a Eq. 2.71.

$$E(\phi) = \phi_A - \phi_N \quad (2.71)$$

As ordens podem ser obtidas *a priori* ou *a posteriori*. Esta última necessita de soluções numéricas, enquanto que a primeira é obtida com série de Taylor, onde os expoentes que acompanham os valores de tamanho de volume ( $h$ ) são as ordens verdadeiras ( $p_v$ ) e o primeiro valor deles é a ordem assintótica ( $p_L$ ). Mais detalhes serão apresentados no capítulo Metodologia (MARCHI, 2001).

As ordens *a posteriori* representam o comportamento do erro em um gráfico de erros numéricos *versus* tamanho de volume, destas destacam-se duas: efetiva ( $p_E$ ) e aparente ( $p_U$ ). A ordem efetiva necessita de soluções analíticas e pode ser calculada através da Eq. 2.72. Já no caso da ordem aparente não são necessárias soluções analíticas, entretanto, são necessários três soluções numéricas para obtê-la, conforme Eq. 2.73 para razões de refino ( $q$ ) constantes e Eq. 2.74 para razões de refino variáveis (MARCHI, 2001), onde  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , e  $\phi_3$  representam as malhas

fina, intermediária e grossa, respectivamente, e os subscritos 32 e 21 referem-se ao cálculo das razões de refino entre malha grossa e intermediária e fina e intermediária.

$$p_E = \frac{\log \left[ \frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)} \right]}{\log(q)} \quad (2.72)$$

$$p_U = \frac{\log \left( \frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2} \right)}{\log(q)} \quad (2.73)$$

$$p_U = \frac{\log \left[ \left( \frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2} \right) \left( \frac{q_{21}^{p_U} - 1}{q_{32}^{p_U} - 1} \right) \right]}{\log(q_{21})} \quad (2.74)$$

Marchi (2001) define um intervalo convergente para a ordem aparente, onde a mesma pode apresentar dois comportamentos distintos. A partir de um tamanho de malha ( $h_c$ ) o comportamento da ordem pode ser superconvergente, Fig. 18a, ou subconvergente, Fig. 18b.

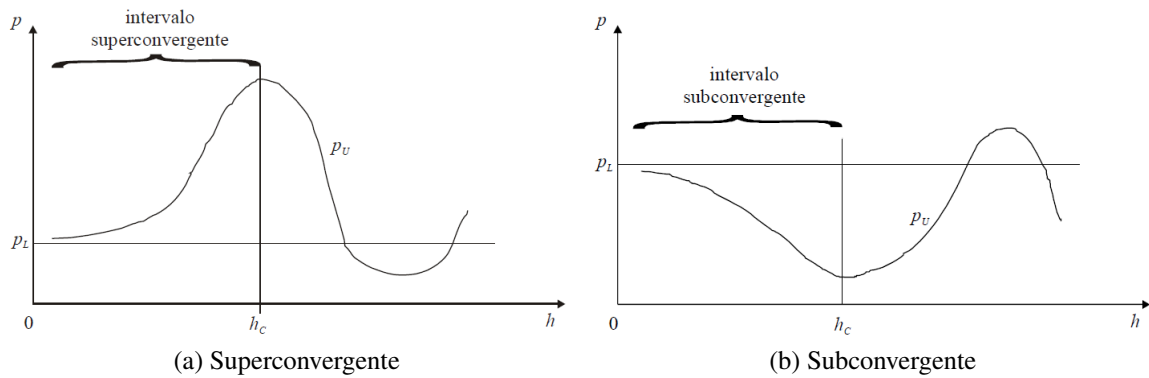


Figura 18 – Intervalo convergente.

Fonte: Marchi (2001).

Em soluções numéricas são utilizados valores nodais da própria solução para calcular as aproximações numéricas. Tal procedimento resulta na inserção de uma classe de erro chamada de Erro de Poluição. Sendo assim, a Eq. 2.75 é escrita e relaciona a solução analítica exata ( $\Lambda$ ) da variável, sua aproximação ( $\lambda$ ) e o erro de discretização. Ao inserir esta na equação da solução analítica exata de uma aproximação, por exemplo, surgem os termos referentes aos erros de poluição (MARCHI, 2001).

$$\Lambda = \lambda + E(\lambda) \quad (2.75)$$

## 2.2.6 Ferramenta de pós-processamento

É possível reduzir o erro de discretização de soluções numéricas empregando a extrapolação de Richardson, Eq. 2.76, no caso de duas soluções em duas malhas distintas. Quando se

dispõe de mais de duas malhas pode-se utilizar as extrapolações de Richardson recursivamente; tal procedimento é conhecido como MER e é apresentado na Eq. 2.77 para razões de refino constantes (MARTINS, 2013), onde os subscritos  $\infty$ ,  $g$  e  $m$  representam a solução extrapolada, níveis de malha e de extrapolação.

$$\phi_{\infty} = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{PL} - 1} \quad (2.76)$$

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g+1,m-1}}{q^{Pv(m-1)} - 1} \quad (2.77)$$

A última equação utiliza duas soluções do mesmo nível de extrapolação para gerar uma outra com nível superior. A Tabela 2 apresenta o procedimento de MER sendo aplicado a cinco soluções com razão de refino constante.

Tabela 2 – Exemplo de aplicação de MER.

Solução	Nível de extrapolação				
	0	1	2	3	4
1	$\phi_{1,0}$	-	-	-	-
2	$\phi_{2,0}$	$\phi_{2,1}$	-	-	-
3	$\phi_{3,0}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$	-	-
4	$\phi_{4,0}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,2}$	$\phi_{4,3}$	-
5	$\phi_{5,0}$	$\phi_{5,1}$	$\phi_{5,2}$	$\phi_{5,3}$	$\phi_{5,4}$

Martins (2013) ainda define cinco tipos distintos de variáveis e diferentes procedimentos para se aplicar MER efetivamente. Destaca-se uma variável, onde os valores das abscissas e ordenadas são modificados conforme a malha é refinada. Para essa variável o procedimento descrito por Martins (2013) indica que é necessário o emprego de interpolação polinomial. Este procedimento será utilizado nesta dissertação para tratar da posição da onda de choque, que se encaixa na descrição apresentada.

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta os modelos matemáticos utilizados, condições de contorno e geometrias utilizadas, uma perspectiva geral de como foram feitos os estudos, diretrizes sobre a aplicação das aproximações numéricas, obtenção de variáveis secundárias, conceitos e aplicações de verificação numérica, procedimento de uso da ferramenta de pós-processamento e um resumo.

#### 3.1 Perspectiva geral

Os modelos matemáticos e físicos utilizados neste trabalho são apresentados na sequência:

- equação de Burgers (Eq. 3.1) e seu termo fonte (Eq. 3.2) (PINTO *et al.*, 2005);
  - escoamento unidimensional;
  - fluido incompressível;
  - regime permanente;
  - propriedades constantes;

$$Re \frac{du^2}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + S_F \quad (3.1)$$

$$S_F = Re^2 e^{xRe} \frac{2e^{xRe} - e^{Re} - 1}{(e^{Re} - 1)^2} \quad (3.2)$$

sendo  $Re$  o número de Reynolds.

- equações de Euler unidimensionais (Eq. 3.3 a 3.5 (MARCHI; ARAKI, 2007a) e 3.6) e bidimensionais (Eq. 3.7 a 3.10 (MARCHI; ARAKI, 2007b));
  - fluidos compressíveis;
  - escoamentos invíscidos;
  - monoespécie;
  - escoamentos não reativos;
  - propriedades constantes;
  - regime permanente;
  - paredes adiabáticas
  - sem radiação térmica;

– sem atrito;

### Modelo Unidimensional

$$\frac{d}{dx}(\rho u A) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u A u) = -A \frac{dp}{dx} \quad (3.4)$$

$$c_p \frac{d}{dx}(\rho u A T) = u A \frac{dp}{dx} \quad (3.5)$$

$$c_p \frac{d}{dx}(\rho u A T) + \frac{d}{dx} \left( \frac{A \rho u u u}{2} \right) = 0 \quad (3.6)$$

### Modelo bidimensional

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v u) = -\frac{dp}{dz} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v v) = -\frac{dp}{dr} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u T) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v T) = \frac{1}{c_p} [\nabla(p\mathbf{V}) - p\nabla\mathbf{V}] \quad (3.10)$$

Nestas equações  $c_p$  representa o calor específico à pressão constante,  $v$  a velocidade na direção radial e  $r$  o raio. Ainda, para a solução das equações de Euler utiliza-se a equação de estado, apresentada na Eq. 3.11.

$$p = \rho R T \quad (3.11)$$

As equações que regem os escoamentos estão na forma diferencial. Serão apresentadas apenas as discretizações das equações cujo processo não está presente em outros trabalhos, estas discretizações podem ser observadas nos trabalhos de Marchi e Araki (2007a, 2007b).

Os bocais utilizados neste trabalho são apresentados nas Fig. 19 e 20. O primeiro é o quinto bocal apresentado no trabalho de Back *et al.* (1965) e o segundo é uma geometria cossenoidal com contorno mais suave do que o primeiro. No caso das equações unidimensionais de Euler foram utilizadas ambas geometrias, com escoamento de ar e vapor de água, e para o caso bidimensional apenas a primeira geometria, com escoamento de ar. A Fig. 19 apresenta o primeiro bocal em conjunto com as condições de contorno para o caso bidimensional e a Fig. 20 o segundo em conjunto com as condições de contorno para o caso unidimensional, onde o subscrito *atm* é relativo à pressão atmosférica e  $\mathbf{n}$  representa um vetor normal. A Fig. 21 apresenta um exemplo de domínio para Burgers e as condições de contorno utilizadas, onde  $N_T$  representa a quantidade total de volumes: fictícios mais reais.

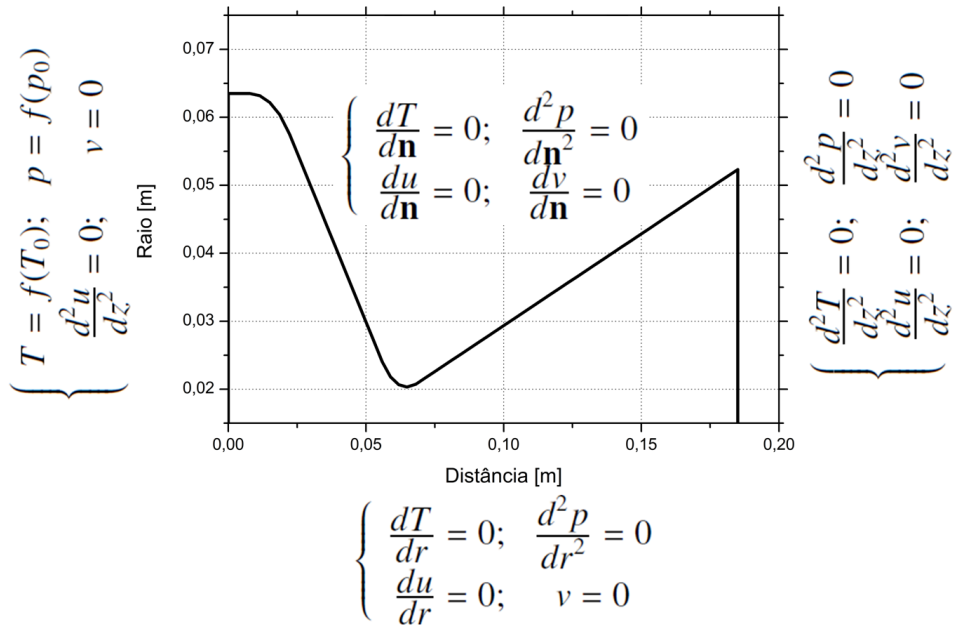


Figura 19 – Bocal 1 e condições de contorno para o caso bidimensional.

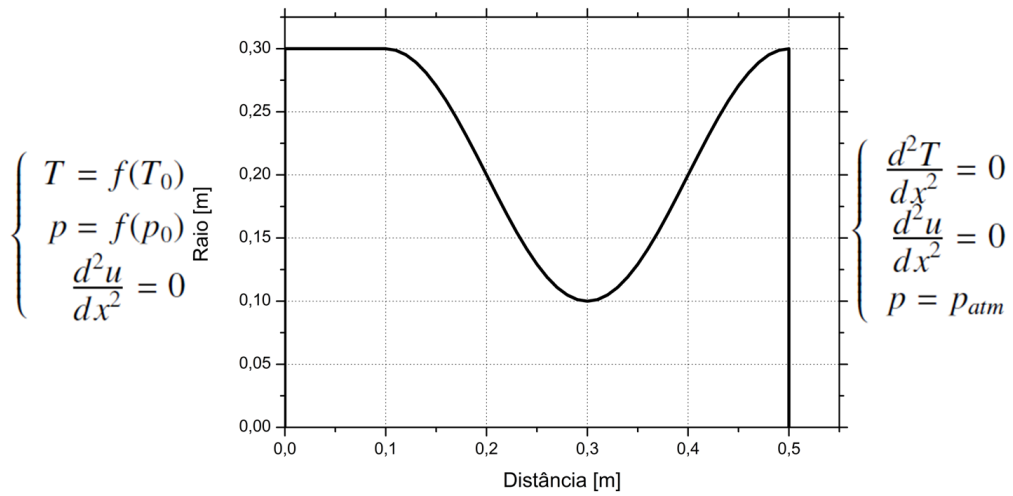


Figura 20 – Bocal 2 e condições de contorno para o caso unidimensional.

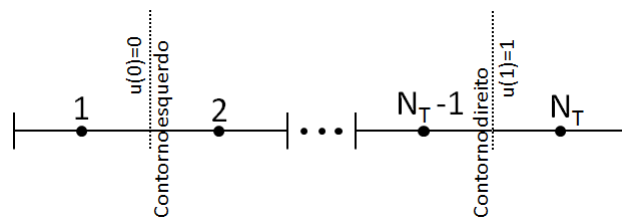


Figura 21 – Domínios e condições de contorno para Burgers.

Este trabalho consiste em avaliar o desempenho das aproximações UDS e TVD na solução de escoamentos com fluidos compressíveis e ondas de choque (Euler 1D e 2D), verificar a aplicação das aproximações UDS, CDS, TVD, ENO1 e ENO2 em um escoamento com fluido incompressível sem choque (Burgers) para garantir que as metodologias sejam aplicadas corretamente, avaliar o desempenho de MER quando aplicado a variáveis do escoamento e obter, exclusivamente para o caso unidimensional, a posição da onda de choque utilizando o campo do número de Mach. As soluções numéricas foram obtidas utilizando o FVM para as aproximações citadas, foram avaliadas através de soluções analíticas e experimentais (Euler 2D apenas) a partir de ordens efetivas e aparentes e erros numéricos. MER foi aplicado em algumas variáveis de interesse para Burgers e Euler 1D, conforme Seção 3.5.

Na equação de Burgers discretizada foram inseridas as aproximações e condições de contorno usando-se o método dos volumes fictícios. Os resultados destas foram dispostos na forma de sistemas lineares tridiagonais (UDS, CDS, TVD e ENO1) e pentadiagonais (ENO2). As soluções destes se deram através dos *solvers* TDMA e Gauss-Seidel, respectivamente. Informações sobre as aproximações utilizadas e o processo de discretização são apresentados na Seção 3.2. A obtenção das variáveis secundárias e o procedimento de aplicação de MER estão descritos nas Seções 3.3 e 3.5.

A solução das equações de Euler 1D e 2D são bastante semelhantes, as principais diferenças são devido às transformações de coordenadas e equações necessárias para o uso de sistemas curvilíneos. O processo de transformação de coordenadas e de equações não será apresentado aqui; informações sobre este procedimento e, inclusive, o resultado final de tais transformações podem ser encontrados nos relatórios de Marchi e Araki (2007a, 2007b) e detalhes específicos sobre o procedimento em Maliska (2004). Novamente, discretizações para as equações de Euler não são apresentadas para todas as equações, somente para as que não foram abordadas nos relatórios, ou seja, apenas para a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica (Eq. 3.6, detalhes de sua obtenção são apresentados no Apêndice C), este procedimento e detalhes sobre as aproximações são apresentados na Seção 3.2. A aproximação TVD foi inserida nas equações discretizadas, usando a função limitadora SUPERBEE para Euler 2D e 1D com a forma original da equação de conservação energia térmica. Entretanto, para **Euler 1D com a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica foi utilizada a função limitadora MIN-MOD**. Condições de contorno foram inseridas utilizando o método dos volumes fictícios. A equação de conservação da massa foi transformada em uma equação para a pressão devido à metodologia de escoamentos a qualquer velocidade e acoplamento SIMPLEC, pressão e velocidade foram acopladas por este último e os resultados da discretização, uso dos métodos citados e inserção de condições de contorno foram dispostos na forma de sistemas lineares tridiagonais e pentadiagonais para Euler 1D e 2D, respectivamente. Tais sistemas foram resolvidos usando os *solvers* TDMA (Euler 1D), MSI (equação de conservação da massa Euler 2D) e Gauss-Seidel (demais equações Euler 2D). Erros numéricos e ordens foram avaliados

conforme descrito pela Seção 3.4, MER foi aplicado à Euler 1D conforme 3.5 e a metodologia de obtenção das posições do choque para Euler 1D é apresentada no Apêndice B.

### 3.2 Aplicação das aproximações numéricas

Como o TVD é utilizado com correção adiada para o UDS, será apresentada uma aproximação para as faces leste e oeste geral, utilizando a função limitadora. Ainda, devido a esse fato, os coeficientes resultantes do uso de TVD para Euler 1D e 2D serão os mesmos que resultam do uso de UDS, com exceção do termo fonte que terá o acréscimo de termos relativos à correção adiada do TVD. Serão apresentadas as discretizações das equações de Burgers e da forma alternativa da equação de conservação da energia térmica, pois tais discretizações não são contempladas nas referências citadas anteriormente. A simbologia mostrada na Fig. 16 exemplifica a disposição dos volumes de controle e faces.

Integrando a equação de Burgers, Eq. 3.1, no espaço resulta a Eq. 3.12, onde  $S_{FP}$  representa o termo fonte avaliado no centro do volume.

$$R_e(u_e^2 - u_w^2) = \left(\frac{du}{dx}\right)_e - \left(\frac{du}{dx}\right)_w + S_{FP}\Delta x \quad (3.12)$$

Agora, integrando no tempo implicitamente (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALA-SEKERA, 2007) e no espaço a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica, Eq. 3.6, resulta a Eq. 3.13, onde  $\Delta t$  representa o intervalo de tempo e o sobrescrito 0 representa o passo de tempo anterior. O intervalo de tempo não possui significado físico, pois é utilizado apenas como parâmetro de relaxação.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x A_P c_P}{\Delta t} (T_P \rho_P - T_P^0 \rho_P^0) + \frac{A_P \Delta x}{2 \Delta t} (\rho_P u_P^2 - \rho_P^0 u_P^0{}^2) + \\ (A_P c_P T u)_e - (A_P c_P T u)_w + \frac{1}{2} [(A_P \rho u^3)_e - (A_P \rho u^3)_w] = \frac{A_P \Delta x}{\Delta t} (p_P - p_P^0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tomando como base a Eq. 2.45, repetida a seguir, estende-se esta aproximação para a face leste, Eq. 3.14, e o caso bidimensional, Eq. 3.15 a 3.18. Como no caso bidimensional o escoamento pode ocorrer não apenas no sentido positivo da direção coordenada é necessário avaliar o sentido do escoamento. Isto é feito com uma variável ( $\alpha$ ) que recebe o sinal da velocidade em cada ponto do escoamento, apresentada na Eq. 3.19. As razões de gradiente para escoamento com sentido negativo ou positivo são apresentadas nas Eq. 3.20 a 3.23, onde os sobrescritos +- indicam que o escoamento pode ocorrer tanto no sentido positivo como no negativo.

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2} \psi(r_{gw})(\phi_P^* - \phi_W^*) \quad (2.45)$$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_{ge})(\phi_E^* - \phi_P^*) \quad (3.14)$$

$$\phi_w = \phi_W \left( \frac{1}{2} + \alpha_w \right) + \phi_P \left( \frac{1}{2} - \alpha_w \right) + \alpha_w \psi(r_{gw}^{+-})(\phi_P^* - \phi_W^*) \quad (3.15)$$

$$\phi_e = \phi_P \left( \frac{1}{2} + \alpha_e \right) + \phi_E \left( \frac{1}{2} - \alpha_e \right) + \alpha_e \psi(r_{ge}^{+-})(\phi_E^* - \phi_P^*) \quad (3.16)$$

$$\phi_s = \phi_S \left( \frac{1}{2} + \alpha_s \right) + \phi_P \left( \frac{1}{2} - \alpha_s \right) + \alpha_s \psi(r_{gs}^{+-})(\phi_P^* - \phi_S^*) \quad (3.17)$$

$$\phi_n = \phi_P \left( \frac{1}{2} + \alpha_n \right) + \phi_N \left( \frac{1}{2} - \alpha_n \right) + \alpha_n \psi(r_{gn}^{+-})(\phi_N^* - \phi_P^*) \quad (3.18)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{sinal}(u) \quad (3.19)$$

$$r_{gw}^{+-} = \frac{(\frac{1}{2} + \alpha_w)(\phi_W - \phi_{WW}) + (\frac{1}{2} - \alpha_w)(\phi_E - \phi_P)}{\phi_P - \phi_W} \quad (3.20)$$

$$r_{ge}^{+-} = \frac{(\frac{1}{2} + \alpha_w)(\phi_P - \phi_W) + (\frac{1}{2} - \alpha_w)(\phi_{EE} - \phi_E)}{\phi_E - \phi_P} \quad (3.21)$$

$$r_{gs}^{+-} = \frac{(\frac{1}{2} + \alpha_w)(\phi_S - \phi_{SS}) + (\frac{1}{2} - \alpha_w)(\phi_N - \phi_P)}{\phi_P - \phi_S} \quad (3.22)$$

$$r_{gn}^{+-} = \frac{(\frac{1}{2} + \alpha_w)(\phi_P - \phi_S) + (\frac{1}{2} - \alpha_w)(\phi_{NN} - \phi_N)}{\phi_N - \phi_P} \quad (3.23)$$

Nota-se que, em virtude do sentido da velocidade, são necessárias extrapolações para calcular as razões de gradiente nos primeiros e últimos volumes reais, conforme citado anteriormente na Seção 2.2.3. Estas extrapolações são análogas àquelas e também resultam em razões de gradiente de valor unitário.

No caso do ENO (SHU, 1997) é necessário definir o valor de  $k$  para obter as aproximações, aqui  $r$  representa a quantidade de volumes à esquerda. Definindo  $k = 2$  e  $k = 3$  para primeira e segunda ordens, respectivamente, em conjunto com as Eq. 2.52 e 2.53 resulta:

$$\begin{aligned} r = 0 \rightarrow & \quad g_w = c_{-1,0}\bar{g}_i + c_{-1,1}\bar{g}_{i+1} \quad | \quad g_e = c_{0,0}\bar{g}_i + c_{0,1}\bar{g}_{i+1} \\ r = 1 \rightarrow & \quad g_w = c_{0,0}\bar{g}_{i-1} + c_{0,1}\bar{g}_i \quad | \quad g_e = c_{1,0}\bar{g}_{i-1} + c_{1,1}\bar{g}_i \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} r = 0 \rightarrow & \quad g_w = c_{-1,0}\bar{g}_i + c_{-1,1}\bar{g}_{i+1} + c_{-1,2}\bar{g}_{i+2} \quad | \quad g_e = c_{0,0}\bar{g}_i + c_{0,1}\bar{g}_{i+1} + c_{0,2}\bar{g}_{i+2} \\ r = 1 \rightarrow & \quad g_w = c_{0,0}\bar{g}_{i-1} + c_{0,1}\bar{g}_i + c_{0,2}\bar{g}_{i+1} \quad | \quad g_e = c_{1,0}\bar{g}_{i-1} + c_{1,1}\bar{g}_i + c_{1,2}\bar{g}_{i+1} \\ r = 2 \rightarrow & \quad g_w = c_{1,0}\bar{g}_{i-2} + c_{1,1}\bar{g}_{i-1} + c_{1,2}\bar{g}_i \quad | \quad g_e = c_{2,0}\bar{g}_{i-2} + c_{2,1}\bar{g}_{i-1} + c_{2,2}\bar{g}_i \end{aligned} \quad (3.25)$$

Utilizando o conceito de estêncil, define-se para  $r = 1$ , no caso de ordem 1, ou  $r = 2$ , para ordem 2, o estêncil 1 ( $S_1$ ), pois nestes casos o ponto mais a esquerda é escolhido. De maneira análoga para outros valores de  $r$  são definidos os estênceis  $S_2$  e  $S_3$ . Sendo assim, é possível reorganizar e determinar algumas constantes, apresentadas a seguir nas Eq. 3.26 a 3.31, para primeira ordem, e nas Eq. 3.32 a 3.41, para segunda ordem. O sobrescrito  $w$  refere-se à aproximação para a face oeste e  $e$  para a face leste e  $c$  é a constante utilizada na aproximação de uma propriedade através de ENO. Destaca-se que  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  dependem do valor de  $r$ ; caso  $r = 1$ ,  $S_1$  recebe o valor unitário e os outros zero, por exemplo.

$$c_{1W}^w = S_1 c_{0,0} \quad (3.26)$$

$$c_{1P}^w = S_1 c_{0,1} + S_2 c_{-1,0} \quad (3.27)$$

$$c_{1E}^w = S_2 c_{-1,1} \quad (3.28)$$

$$c_{1W}^e = S_1 c_{1,0} \quad (3.29)$$

$$c_{1P}^e = S_1 c_{1,1} + S_2 c_{0,0} \quad (3.30)$$

$$c_{1E}^e = S_2 c_{0,1} \quad (3.31)$$

$$c_{2WW}^w = S_1 c_{1,0} \quad (3.32)$$

$$c_{2W}^w = S_1 c_{1,1} + S_2 c_{0,0} \quad (3.33)$$

$$c_{2P}^w = S_1 c_{1,2} + S_2 c_{0,1} + S_3 c_{-1,0} \quad (3.34)$$

$$c_{2E}^w = S_2 c_{0,2} + S_3 c_{-1,1} \quad (3.35)$$

$$c_{2EE}^w = S_3 c_{-1,2} \quad (3.36)$$

$$c_{2WW}^e = S_1 c_{2,0} \quad (3.37)$$

$$c_{2W}^e = S_1 c_{2,1} + S_2 c_{1,0} \quad (3.38)$$

$$c_{2P}^e = S_1 c_{2,2} + S_2 c_{1,1} + S_3 c_{0,0} \quad (3.39)$$

$$c_{2E}^e = S_2 c_{1,2} + S_3 c_{0,1} \quad (3.40)$$

$$c_{2EE}^e = S_3 c_{0,2} \quad (3.41)$$

As constantes que acompanham o estênceis são obtidas através da Tab. 1. Com as novas constantes, definidas nas equações anteriores, é possível escrever aproximações para as faces leste e oeste de primeira, Eq. 3.42 e 3.43, e segunda ordens, Eq. 3.44 e 3.45.

$$\phi_w = c_{1W}^w \phi_W + c_{1P}^w \phi_P + c_{1E}^w \phi_E \quad (3.42)$$

$$\phi_e = c_{1W}^e \phi_W + c_{1P}^e \phi_P + c_{1E}^e \phi_E \quad (3.43)$$

$$\phi_w = c_{2WW}^w \phi_{WW} + c_{2W}^w \phi_W + c_{2P}^w \phi_P + c_{2E}^w \phi_E + c_{2EE}^w \phi_{EE} \quad (3.44)$$

$$\phi_e = c_{2WW}^e \phi_{WW} + c_{2W}^e \phi_W + c_{2P}^e \phi_P + c_{2E}^e \phi_E + c_{2EE}^e \phi_{EE} \quad (3.45)$$

Nota-se que para a aproximação ENO2 no primeiro e último volume real não existem  $\phi_{WW}$  e  $\phi_{EE}$ , respectivamente. Nestes casos, os estênceis que resultam na inclusão destes volume devem ser evitados. Por exemplo, evita-se  $S_1$  para o primeiro volume real e  $S_3$  para o último real.

Agora, para utilizar o processo adaptativo do ENO apresentam-se os possíveis estênceis para a ordem um, Eq. 3.46 e 3.47, e dois, Eq. 3.48 a 3.50.

$$\tilde{S}_3 = \{x_{ww}, x_w, x_e\} \quad (3.46)$$

$$\tilde{S}_3 = \{x_w, x_e, x_{ee}\} \quad (3.47)$$

$$\tilde{S}_4 = \{x_{www}, x_{ww}, x_w, x_e\} \quad (3.48)$$

$$\tilde{S}_4 = \{x_{ww}, x_w, x_e, x_{ee}\} \quad (3.49)$$

$$\tilde{S}_4 = \{x_w, x_e, x_{ee}, x_{eee}\} \quad (3.50)$$

Utilizando as diferenças divididas referentes a estes estênceis em conjunto com a Eq. 2.55 resultam:

$$G[x_{ww}, x_w, x_e] = \frac{\phi_P - \phi_W}{x_e - x_{ww}} \quad (3.51)$$

$$G[x_w, x_e, x_{ee}] = \frac{\phi_E - \phi_P}{x_{ee} - x_w} \quad (3.52)$$

$$G[x_{www}, x_{ww}, x_w, x_e] = \frac{\frac{\phi_P - \phi_W}{x_e - x_{ww}} - \frac{\phi_W - \phi_{ww}}{x_w - x_{www}}}{x_e - x_{www}} \quad (3.53)$$

$$G[x_{ww}, x_w, x_e, x_{ee}] = \frac{\frac{\phi_E - \phi_P}{x_{ee} - x_w} - \frac{\phi_P - \phi_W}{x_e - x_{ww}}}{x_{ee} - x_{ww}} \quad (3.54)$$

$$G[x_w, x_e, x_{ee}, x_{eee}] = \frac{\frac{\phi_{EE} - \phi_E}{x_{eee} - x_e} - \frac{\phi_E - \phi_P}{x_{ee} - x_w}}{x_{eee} - x_w} \quad (3.55)$$

Com as diferenças divididas obtidas basta determinar qual a mais suave, ou a de menor valor absoluto, e utilizar o respectivo estêncil.

Tendo em vista as aproximações UDS e CDS com correção adiada e comparando-as com as equações do TVD nota-se que para a aproximação UDS basta utilizar a função limitadora com valor zero e para o CDS com correção adiada utilizar a função limitadora com valor um. Assim, as aproximações estão definidas.

Então, linearizando ( $u^2 = uu^*$ ) com base na iteração anterior, os termos com velocidade ao quadrado, utilizando as equações do TVD na forma unidimensional para os termos advectivos e CDS para os difusivos e explícitos (iteração anterior) na equação de Burgers em conjunto com a Eq. 3.56, resultam os coeficientes e termos fontes apresentados nas Eq. 3.57 a 3.63, que são válidos apenas para os volumes reais, onde o sobrescrito *CA* significa correção adiada.

$$a_p u_p = a_{ww} u_{ww} + a_w u_w + a_e u_e + a_{ee} u_{ee} + b_p \quad (3.56)$$

$$a_{ww} = 0 \quad (3.57)$$

$$a_w = \Delta x R_e (u_w^* + u_p^*) + 2 \quad (3.58)$$

$$a_p = \Delta x R_e (u_p^* + u_e^*) + 4 \quad (3.59)$$

$$a_e = 2 \quad (3.60)$$

$$a_{ee} = 0 \quad (3.61)$$

$$b_p^{CA} = \Delta x R_e \left[ \psi(r_w)(u_p^* - u_w^*) \left( \frac{u_p^* + u_w^*}{2} \right) - \psi(r_{ge})(u_E^* - u_P^*) \left( \frac{u_E^* + u_P^*}{2} \right) \right] \quad (3.62)$$

$$b_p = 2S_{FP}\Delta x^2 + b_p^{CA} \quad (3.63)$$

Utilizando a mesma linearização, CDS para os termos difusivos e explícitos, mas com as equações do ENO1 e ENO2 para os termos advectivos na equação de Burgers em conjunto com a Eq. 3.56, resultam coeficientes e termos fontes para ENO de primeira, Eq. 3.64 a 3.69, e segunda ordens, Eq. 3.70 a 3.75, que são válidos apenas para os volumes reais. Os coeficientes e termos fontes para os volumes fictícios de Burgers são apresentados na Tab. 3.

$$a_{ww} = 0 \quad (3.64)$$

$$a_w = \Delta x R_e (c_{1W}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{1W}^e(u_E^* + u_P^*)) + 2 \quad (3.65)$$

$$a_p = \Delta x R_e (c_{1P}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{1P}^e(u_E^* + u_P^*)) + 4 \quad (3.66)$$

$$a_e = \Delta x R_e (c_{1E}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{1E}^e(u_E^* + u_P^*)) + 2 \quad (3.67)$$

$$a_{ee} = 0 \quad (3.68)$$

$$b_p = 2S_{FP}\Delta x^2 \quad (3.69)$$

$$a_{ww} = \Delta x R_e (c_{2WW}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{2WW}^e(u_E^* + u_P^*)) \quad (3.70)$$

$$a_w = \Delta x R_e (c_{2W}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{2W}^e(u_E^* + u_P^*)) + 2 \quad (3.71)$$

$$a_p = \Delta x R_e (c_{2P}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{2P}^e(u_E^* + u_P^*)) + 4 \quad (3.72)$$

$$a_e = \Delta x R_e (c_{2E}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{2E}^e(u_E^* + u_P^*)) + 2 \quad (3.73)$$

$$a_{ee} = \Delta x R_e (c_{2EE}^w(u_P^* + u_W^*) - c_{2EE}^e(u_E^* + u_P^*)) \quad (3.74)$$

Tabela 3 – Coeficientes e termos fontes para os volumes fictícios de Burgers.

	Esquerdo	Direito
$a_{ww}$	-	0
$a_w$	0	-1
$a_p$	1	1
$a_e$	-1	0
$a_{ee}$	0	-
$b_p$	0	2

Nota: - Não aplicável.

$$b_p = S_{PF}\Delta x^2 \quad (3.75)$$

Com as Eq. de 3.57 a 3.75, têm-se as aproximações UDS, CDS com correção adiada, TVD, ENO1 e ENO2 aplicadas à equação de Burgers. Para o caso da forma alternativa da equação de conservação da energia térmica, utiliza-se linearização (agora para o passo de tempo anterior) para os termos de velocidade ao quadrado ( $u_p^2 = u_p u_p^0$ ) e ao cubo ( $u^3 = uu^{02}$ ) e as equações do TVD para a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica. Ressalta-se que para Euler 1D em conjunto com a forma original da equação de conservação da energia térmica e Euler 2D foi utilizada a função limitadora SUPERBEE e para Euler 1D em conjunto com a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica a função usada foi a MIN-MOD. Escrevendo o resultado na forma da Eq. 3.76 são obtidos os coeficientes e termos fontes apresentados nas Eq. de 3.77 a 3.80, que são válidos apenas para os volumes reais, onde o sobrescrito  $T$  é relativo à equação de conservação da energia térmica. Os coeficientes da forma original da equação de conservação da energia térmica e das outras equações de conservação para os casos uni e bidimensionais são os mesmos apresentados nos trabalhos de Marchi e Araki (2007a, 2007b).

$$a_p u_p + a_w u_w + a_e u_e = b_p \quad (3.76)$$

$$a_w^T = -A_w \rho_w c_p u_w \quad (3.77)$$

$$a_e^T = 0 \quad (3.78)$$

$$a_p^T = \frac{\Delta x S_p C_p \rho_p}{\Delta t} - (a_w + a_e) \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned}
b_p^T = & \frac{\Delta x A_p c_p T_p^0 \rho_p^0}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_w \rho_w u_w (u_w^{02} - u_e^{02}) + \\
& - \frac{1}{2} A_p \Delta u_p^0 (\rho_p u_p - \rho_p^0 u_p^0) + \frac{A_p \Delta x (p_p - p_p^0)}{\Delta t} + b_p^{CA}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Deve-se atentar a um artifício utilizado para escrever o coeficiente  $a_p$  e o termo fonte  $b_p$ , que resulta da equação de conservação da massa, onde  $A_w \rho_w u_w = A_e \rho_e u_e$ .

Assim como no caso de Burgers, o uso do TVD vai resultar um termo de correção adiada; está é a única diferença nos termos fontes, apresentados nos trabalhos de Marchi e Araki (2007a, 2007b). Para fazer o uso do TVD basta alterar o termo de correção adiada nos termos fontes dos trabalhos citados pelos que são aqui apresentados. Para a equação de conservação da massa uni e bidimensionais os termos de correção adiada são apresentados nas Eq. 3.81 e 3.82, respectivamente. No caso das equações de conservação da energia térmica e quantidade de movimento é possível fazer uma generalização. Por exemplo, para obter a correção adiada para a energia térmica basta substituir  $\phi$  por  $T$ . O termos de correção adiada generalizados são apresentados nas Eq. 3.83 e 3.84 para os casos uni e bidimensionais, respectivamente, onde o termo  $\theta$  na Eq. 3.83 é um auxiliar e tem valor unitário para quantidade de movimento e é o  $c_p$  para a energia térmica.  $U_c$  e  $V_c$  são as velocidades contravariantes e o sobrescrito  $p$  é relativo à equação de conservação da massa.

$$b_p^{CA,p} = \frac{1}{2} [u_w A_w \psi(r_{gw})(\rho_p^* - \rho_w^*) - u_e A_e \psi(r_{ge})(\rho_e^* - \rho_p^*)] \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
b_p^{CA,p} = & \psi(r_{gw}^{+-}) \alpha_w r_w U_{cw}^* (\rho_p^* - \rho_w^*) - \psi(r_{ge}^{+-}) \alpha_e r_e U_{ce}^* (\rho_e^* - \rho_p^*) + \\
& + \psi(r_{gs}^{+-}) \alpha_s r_s V_{cs}^* (\rho_p^* - \rho_s^*) - \psi(r_{gn}^{+-}) \alpha_n r_n V_{cn}^* (\rho_n^* - \rho_p^*)
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$b_p^{CA,\phi} = \frac{\theta}{2} [\rho_w u_w A_w \psi(r_w)(\phi_p^* - \phi_w^*) - \rho_e u_e A_e \psi(r_e)(\phi_e^* - \phi_p^*)] \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
b_p^{CA,\phi} = & \psi(r_{gw}^{+-}) \alpha_w \rho_w r_w U_{cw}^* (\phi_p^* - \phi_w^*) - \psi(r_{ge}^{+-}) \alpha_e \rho_e r_e U_{ce}^* (\phi_e^* - \phi_p^*) + \\
& + \psi(r_{gs}^{+-}) \alpha_s \rho_s r_s V_{cs}^* (\phi_p^* - \phi_s^*) - \psi(r_{gn}^{+-}) \alpha_n \rho_n r_n V_{cn}^* (\phi_n^* - \phi_p^*)
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Agora, para os volumes fictícios das equações de Euler, a única diferença em relação aos trabalhos de Marchi e Araki (2007a, 2007b) reside nos coeficientes e termos fontes para o volume fictício à direita na equação de conservação da massa. Neste momento deve ser lembrado que a equação de conservação da massa é transformada em uma equação de conservação para a pressão, por causa das metodologias utilizadas. Tais coeficientes e termos fontes são apresentados nas Eq. 3.85 a 3.88.

$$a_w^p = -1 \tag{3.85}$$

$$a_p^p = 1 \quad (3.86)$$

$$a_e^p = 0 \quad (3.87)$$

$$b_p^p = 2[(2p_{ex} - p_w) - p_p^*] \quad (3.88)$$

### 3.3 Variáveis secundárias

No caso de Burgers, a velocidade média analítica foi calculada através da Eq. 3.89, que é o resultado da integral da solução analítica (Eq. 3.90) dividido pelo comprimento do domínio (unitário), e a numérica a partir da Eq. 3.91, sendo  $N$  a quantidade de volumes reais da malha.

$$\bar{u}_A = \frac{e^{R_e} - R_e - 1}{R_e(e^{R_e} - 1)} \quad (3.89)$$

$$u(x) = \frac{e^{xR_e} - 1}{e^{R_e} - 1} \quad (3.90)$$

$$\bar{u}_N = \Delta x \sum_{p=1}^N u_p \quad (3.91)$$

O coeficiente de descarga ( $C_d$ ), segundo Araki (2007), é a razão entre o fluxo de massa numérico ( $\dot{m}_{num}$ ) e o analítico ( $\dot{m}_{an}$ ) unidimensional, Eq. 3.92.

$$C_d = \frac{\dot{m}_{num}}{\dot{m}_{an}} \quad (3.92)$$

No caso de Euler 1D o fluxo de massa numérico é calculado com base nas propriedades da entrada do bocal e para Euler 2D na saída, conforme as Eq. 3.93 e 3.94, respectivamente, onde  $r$ , neste caso, representa o raio do bocal.

$$\dot{m}_{num} = \rho_w u_w A_w \quad (3.93)$$

$$\dot{m}_{num} = 2\pi \sum_1^N (r_e \rho_e U_{ce}) \quad (3.94)$$

Para Euler 1D, o coeficiente de descarga analítico deve ser unitário. No caso de Euler 2D será calculado com base na metodologia proposta por Kliegel e Levine (1969).

O número de Mach na saída do bocal e a posição da onda de choque analíticos foram calculados através do procedimento descrito na Seção 2.1.5. Numericamente, o número de Mach

na saída é calculado através das propriedades na face do último volume real e a obtenção da posição da onda de choque é apresentada no Apêndice B.

A variação adimensionalizada das variáveis ao longo do processo iterativo é a razão entre a diferença do valor da propriedade na iteração atual e a anterior e o valor da propriedade na primeira iteração (tomado como valor de referência), conforme Eq. 3.95, onde 1, neste caso, refere-se à primeira iteração.

$$\Delta\phi_{it} = \frac{\phi_{it} - \phi_{it-1}}{\phi_1}, \quad it = 2, 3, \dots \quad (3.95)$$

### 3.4 Verificação e validação

Na Fig. 17 a quantidade de iterações necessárias para que o erro de iteração seja minimizado, após o início do período oscilatório ou quando o erro de máquina é atingido, é determinado e não calculado. Com base nisso, o critério de convergência utilizado neste trabalho não é exatamente dois e sim um valor próximo ou em alguns casos muito superior.

Na resolução das equações de Burgers notou-se, através de testes preliminares, que para UDS, CDS, TVD e ENO1 o período oscilatório tinha início quando o resíduo atingia um valor próximo de  $1 \cdot 10^{-15}$  e para ENO2 próximo de  $1 \cdot 10^{-16}$ . Para tornar o processo de obtenção das soluções numéricas automatizado para Burgers utilizou-se estes dois valores de resíduo para identificar o início das oscilações. De antemão, afirma-se que este critério adicional é bastante conservador. No caso de Euler 1D e 2D o critério de convergência foi avaliado através do comportamento das variáveis nos dados de saída.

Os erros numéricos foram calculados através da Eq. 2.71. Os comportamentos qualitativos esperados do módulo dos erros numéricos para aproximações de primeira e segunda ordem são apresentados na Fig. 22 com e sem a aplicação de MER, como são comportamentos qualitativos e algumas curvas se sobrepõem os símbolos destas foram mantidos iguais.

As ordens efetivas foram calculadas a partir da Eq. 2.72 para todas as variáveis, com exceção das posições da onda de choque, devido ao comportamento oscilatório apresentado por algumas delas. Para estas últimas foi utilizado o módulo dos erros numéricos. As ordens aparentes foram calculadas a partir da Eq. 2.73, com exceção das posições da onda de choque, onde foi utilizado o módulo da diferença entre as soluções numéricas, e dos casos onde a razão de refino não era constante. Para este último, utilizou-se a Eq. 2.74. Os comportamentos esperados para as ordens efetiva e aparente são apresentados na Fig. 18, onde se espera que ambas tenham um comportamento assintótico tendendo ao valor da ordem assintótica (primeiro valor da ordem verdadeira). Esta última ordem é obtida através da série de Taylor para UDS, CDS e TVD e para ENO usa-se a Eq. 2.50. As ordens verdadeiras são os expoente dos termos  $h$  nas Eq. 3.96 a 3.98 para a face leste das aproximações UDS, CDS e TVD, respectivamente, sendo os sobrescritos  $i$ ,  $ii$ ,  $iii$ ,  $iv$  referentes às ordens das derivadas.

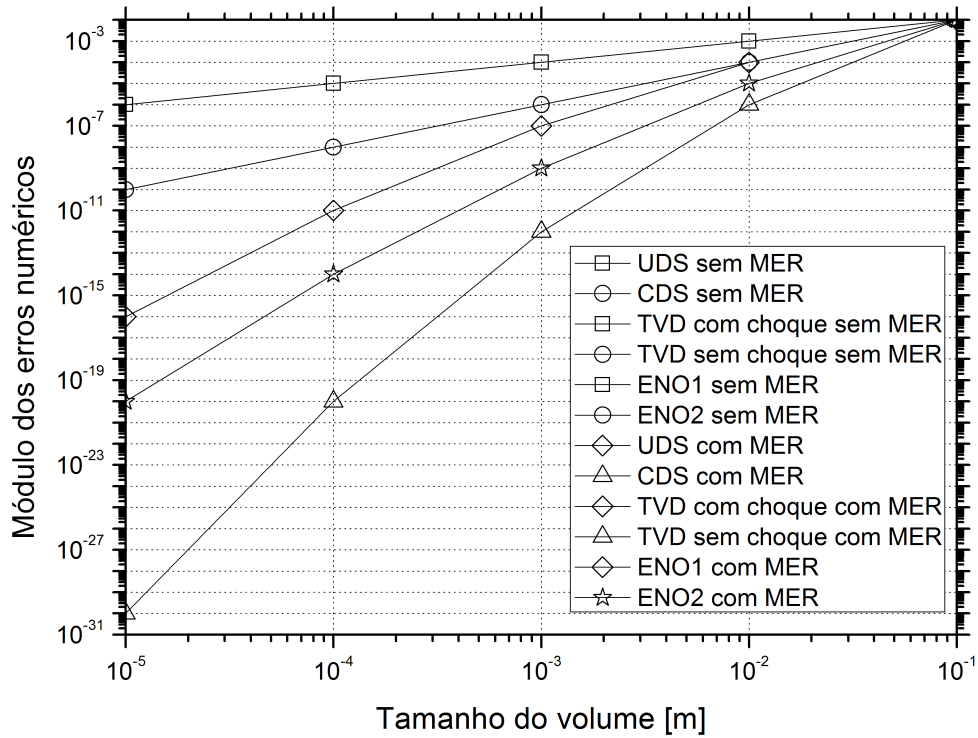


Figura 22 – Comportamentos esperados do módulo dos erros numéricos para aproximações de primeira e segunda ordem.

$$\Lambda_e = \Lambda_P + \frac{1}{2}\Lambda_e^i h - \frac{1}{8}\Lambda_e^{ii} h^2 + \frac{1}{48}\Lambda_e^{iii} h^3 + \dots \quad (3.96)$$

$$\Lambda_e = \frac{\Lambda_P + \Lambda_E}{2} - \frac{1}{8}\Lambda_e^{ii} h^2 - \frac{1}{384}\Lambda_e^{iv} h^4 + \dots \quad (3.97)$$

$$\Lambda_e = \frac{(2 - \psi(r_{ge}))\Lambda_P + \psi(r_{ge})\Lambda_E}{2} + \frac{1}{2}(1 - \psi(r_{ge}))\Lambda_e^i h - \frac{1}{8}\Lambda_e^{ii} h^2 + \frac{1}{48}(1 - \psi(r_{ge}))\Lambda_e^{iii} h^3 + \dots \quad (3.98)$$

Ou seja, a ordem assintótica para UDS e ENO1 tem valor um e para CDS e ENO2 valor dois. No caso do TVD a ordem assintótica é definida com base na função limitadora, sendo no mínimo um e máximo dois. Ainda, caso a função limitadora seja zero a equação se torna idêntica ao do UDS e caso seja um a equação equivale a do CDS. Destaca-se que nas equações anteriores os termos  $\Lambda$  são os valores exatos da solução analítica para uma expansão por série de Taylor.

Para avaliar qualitativamente os erros de poluição gerados pelo uso da aproximação TVD em um problema numérico a Eq. 2.75 foi inserida na 3.98, resultando em:

$$\Lambda_e = \frac{(2 - \psi(r_{ge}))\lambda_P + \psi(r_{ge})\lambda_E}{2} + \frac{(2 - \psi(r_{ge}))E_P + \psi(r_{ge})E_E}{2} + \frac{1}{2}(1 - \psi(r_{ge}))\Lambda_e^i h - \frac{1}{8}\Lambda_e^{ii} h^2 + \frac{1}{48}(1 - \psi(r_{ge}))\Lambda_e^{iii} h^3 + \dots \quad (3.99)$$

Os termos desta equação geram outras três, apresentadas na sequência.

$$(\lambda_{TVD})_e = \frac{(2 - \psi(r_{ge}))\lambda_P + \psi(r_{ge})\lambda_E}{2} \quad (3.100)$$

$$\varepsilon(\lambda_{TVD})_e = \frac{1}{2}(1 - \psi(r_{ge}))\Lambda_e^i h - \frac{1}{8}\Lambda_e^{ii} h^2 + \frac{1}{48}(1 - \psi(r_{ge}))\Lambda_e^{iii} h^3 + \dots \quad (3.101)$$

$$e(\lambda_{TVD})_e = \frac{(2 - \psi(r_{ge}))E_P + \psi(r_{ge})E_E}{2} \quad (3.102)$$

As Eq. 3.100, 3.101 e 3.102 representam a aproximação feita pelo TVD, o erro de truncamento e o erro de poluição devido aos volumes vizinhos, respectivamente. Este último é obtido de forma análoga para a face oeste e é apresentado na Eq. 3.103.

$$e(\lambda_{TVD})_w = \frac{(2 - \psi(r_e))E_W + \psi(r_e)E_P}{2} \quad (3.103)$$

Os erros de poluição para o UDS e CDS são obtidos substituindo as funções limitadoras por zero e um nas Eq. 3.102 e 3.103.

### 3.5 Pós-processamento

A ferramenta de pós-processamento MER foi empregada em quatro tipos de variáveis distintas, para três delas (velocidade média, coeficiente de descarga e número de Mach na saída) a aplicação de MER é direta e para a outra (posição da onda de choque) espera-se o uso de algum tipo de tratamento, conforme apresentado na Seção 2.2.6. Mesmo assim, MER também foi aplicado a esta variável com e sem nenhum tipo de tratamento. Este tratamento foi feito de duas maneiras diferentes: utilizando interpolação por DDV e aproximação por série de Fourier.

Tanto para as variáveis com tratamento quanto para as sem a Eq. 2.77 foi utilizada para gerar soluções multiextrapoladas.

### 3.6 Fechamento

Neste trabalho são feitos estudos numéricos para três tipos diferentes de modelos matemáticos: equações de Burgers, Euler uni e bidimensionais. Para o primeiro foram utilizadas cinco aproximações diferentes (UDS, CDS, TVD, ENO1 e ENO2) e para os últimos duas aproximações (UDS e TVD).

O modelo referente à Burgers é mais simples e não exige métodos adicionais, o que não ocorre para Euler. Devido à existência de mais de uma equação no modelo, utilizou-se o método de acoplamento SIMPLEC. Por ocorrerem velocidades sub ou supersônicas utilizou-se uma metodologia para escoamento a qualquer velocidade. Neste capítulo também foram abordados

meios para se aplicar as aproximações numéricas, cálculo de variáveis secundárias, procedimento de verificação numérica e aplicação de pós-processamento.

Por fim, ressalta-se que foram usadas duas equações de conservação da energia térmica: a forma original (presente no código computacional utilizado) e a forma alternativa (apresentada no Apêndice C). A função limitadora utilizada nas simulações numéricas para o TVD foi a MIN-MOD para aquelas que envolveram a forma alternativa e SUPERBEE para as outras (Burgers, forma original e Euler 2D).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O presente capítulo tem por objetivo apresentar os resultados e as discussões pertinentes, sendo organizado em quatro subseções: equação de Burgers, equações de Euler unidimensionais, bidimensionais e discussões. A Tab. 4 apresenta informações gerais de *software* e *hardware* utilizados. Para as equações de Euler uni e bidimensionais as pressões e temperaturas de entrada foram as mesmas utilizadas no trabalho de Back *et al.* (1965).

Destaca-se que não foi possível obter soluções numéricas para as equações de Euler utilizando CDS, ENO1 e ENO2. Ainda, nos problemas unidimensionais que utilizam a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica, Eq. 3.6, a função limitadora TVD utilizada foi a MIN-MOD, Eq. 2.47, devido à instabilidades resultantes do uso da SUPERBEE.

Tabela 4 – Dados de *software* e *hardware* do computador utilizado.

Sistema Operacional	Windows 7 64 bits
Compilador	Microsoft Visual Studio 2008
Linguagem	Fortran 90
Processador	Intel Core i7 3,4/3,4 GHz
Memória	8 GB

As soluções analíticas das variáveis analisadas neste capítulo são apresentadas nas Tab. 5 e 6. Com exceção do coeficiente de descarga para o caso unidimensional, pois tem valor unitário, e a velocidade média para Burgers que é de 0,09995459800899030 *m/s*.

Tabela 5 – Soluções analíticas das variáveis analisadas para Euler 1D.

Euler 1D		
	Número de Mach na saída	Posição do choque normal [ <i>m</i> ]
Config.	1	0,2659931357322306
	2	0,2704979407161573
	3	0,1965716870717948
	4	0,1997110693902071

Deve-se notar que a solução analítica do coeficiente de descarga para o caso bidimensional varia conforme a malha, pois a posição geométrica da garganta em relação à malha varia, mesmo que minimamente. Dados numéricos dos erros e ordens serão apresentados no Apêndice D.

Tabela 6 – Soluções analíticas do coeficiente de descarga para Euler 2D.

Malha	Coeficiente de descarga
1	0,9813430358723307
2	
3	0,9816522198173580
4	
5	
6	0,9816527363565218
7	
8	0,9816538640790201
9	0,9816537961691003
10	0,9816538640790201

#### 4.1 Equação de Burgers

Os dados de entrada foram: comprimento do domínio de 1 *m* e número de Reynolds 10. Os dados das simulações encontram-se nas Tab. 7 e 8.

Tabela 7 – Dados de simulação para a Equação de Burgers e aproximações de primeira ordem.

Malha	Volumes	Tamanho do volume [ <i>m</i> ]	UDS		ENO1	
			Iterações	Tempo [ <i>s</i> ]	Iterações	Tempo [ <i>s</i> ]
1	10	$1,00 \cdot 10^{-1}$	32	-	34	-
2	20	$5,00 \cdot 10^{-2}$	38	-	38	-
3	40	$2,50 \cdot 10^{-2}$	40	-	40	-
4	80	$1,25 \cdot 10^{-2}$	40	-	46	-
5	160	$6,25 \cdot 10^{-3}$	48	-	42	-
6	320	$3,13 \cdot 10^{-3}$	54	-	58	-
7	640	$1,56 \cdot 10^{-3}$	108	-	202	-
8	1280	$7,81 \cdot 10^{-4}$	58	-	586	-
9	2560	$3,91 \cdot 10^{-4}$	182	0,02	82	-
10	5120	$1,95 \cdot 10^{-4}$	1890	0,11	3248	0,15

Nota: - Valores não computados e inferiores a 0,01 [*s*].

O comportamento da variação adimensionalizada da velocidade média pode ser observado na Fig. 23 para as malhas mais finas, 5120 volumes, das cinco aproximações utilizadas. Observa-se que o critério de convergência foi satisfeito em todas as situações. Para UDS, CDS, TVD e ENO1 o critério foi atingido muito antes do fim das iterações.

O campo de velocidades resultante das cinco aproximações na malha mais fina e a solução analítica pode ser observados na Fig. 24.

A respeito dos campos de velocidades obtidos nota-se grande concordância entre as aproximações utilizadas e a solução analítica.

A Fig. 25 apresenta o comportamento dos erros numéricos das soluções com e sem MER.

Tabela 8 – Dados de simulação para a Equação de Burgers e aproximações de segunda ordem.

Malha	Volumes	Tamanho do volume [m]	CDS		TVD		ENO2	
			CDS	Tempo [s]	TVD	Tempo [s]	ENO2	Tempo
1	10	$1,00 \cdot 10^{-1}$	60	-	60	-	34	-
2	20	$5,00 \cdot 10^{-2}$	38	-	38	-	42	-
3	40	$2,50 \cdot 10^{-2}$	36	-	36	-	86	-
4	80	$1,25 \cdot 10^{-2}$	38	-	38	-	322	0,03 [s]
5	160	$6,25 \cdot 10^{-3}$	62	-	42	-	1222	0,22 [s]
6	320	$3,13 \cdot 10^{-3}$	58	-	44	-	4692	1,67 [s]
7	640	$1,56 \cdot 10^{-3}$	72	-	64	-	17892	12,73 [s]
8	1280	$7,81 \cdot 10^{-4}$	44	-	102	-	68050	1,61 [min]
9	2560	$3,91 \cdot 10^{-4}$	810	-	56	0,03	255696	12,17 [min]
10	5120	$1,95 \cdot 10^{-4}$	2432	0,13	2938	0,40	965326	1,52 [h]

Nota: - Valores não computados e inferiores a 0,01 [s].

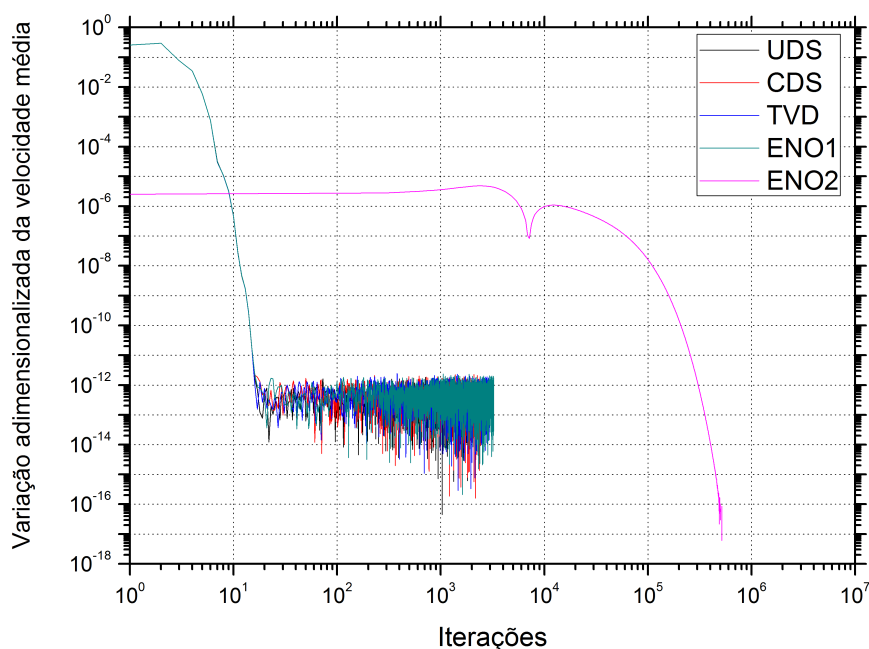


Figura 23 – Comportamento do resíduo da velocidade média *versus* iteração.

O comportamento do erro numérico para as multiextrapolações deveria ser semelhante àquele apresentado na Fig. 22. UDS, CDS e TVD ficaram próximas ao comportamento esperado. Enquanto, ENO1 e ENO2, apesar de grande diferença em alguns pontos, tiveram redução de erro significativa. Agora, na Fig. 25 nota-se que o comportamento dos erros do CDS e TVD são similares. Porém, ao se aplicar MER o erro cai mais rapidamente para o CDS, conforme já foi observado anteriormente por Germer (2009). As aproximações ENO1 e ENO2 tiveram um comportamento intermediário entre UDS e CDS com MER. Além disso, ENO2 teve um erro de discretização menor que o CDS e TVD, mas ao se utilizar MER o CDS apresentou melhor comportamento.

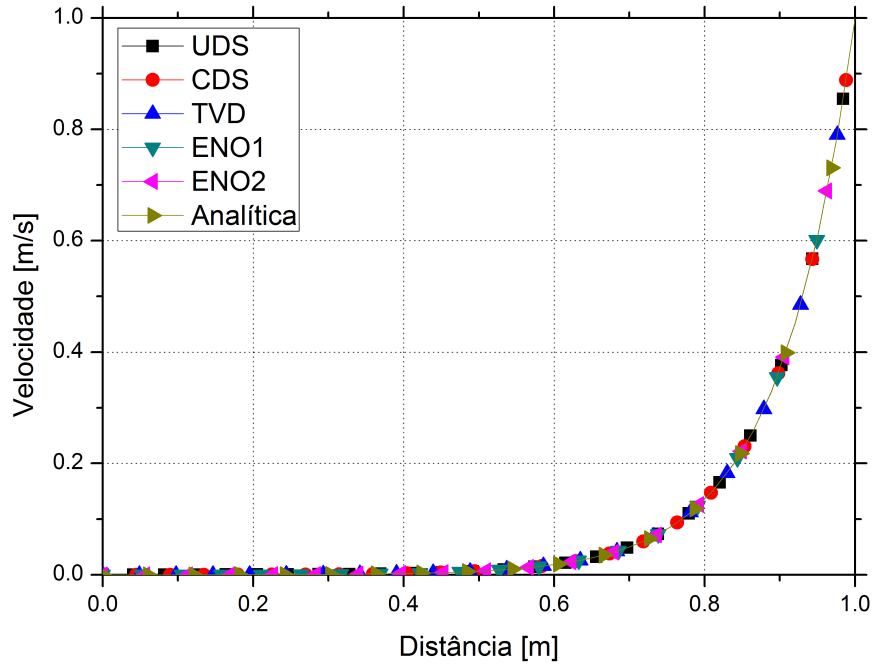


Figura 24 – Campo de velocidades resultante para Burgers na malha mais fina.

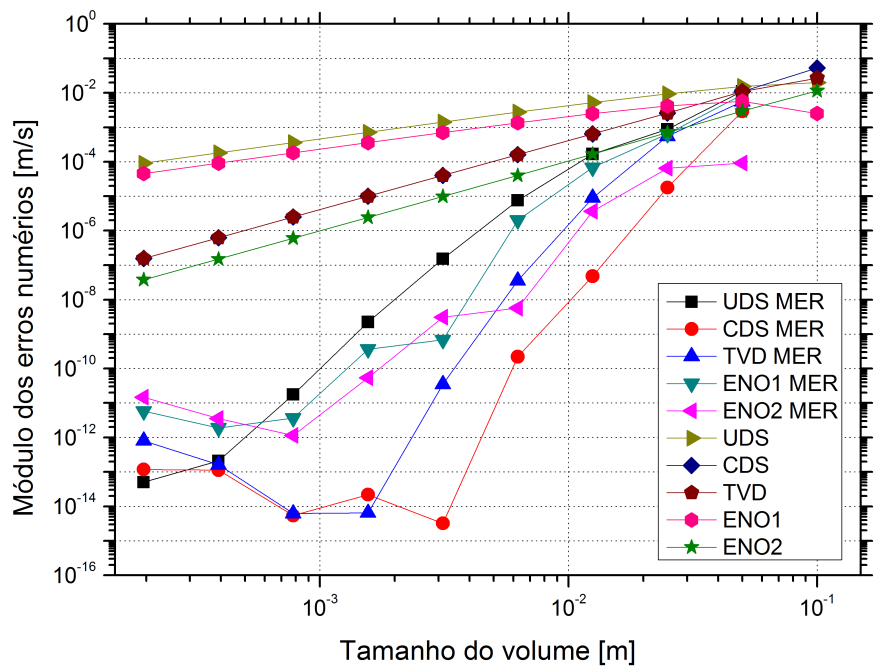


Figura 25 – Comportamento do módulo dos erros numéricos da velocidade média numérica com e sem MER para Burgers.

Os gráficos das ordens aparente e efetiva, em relação à velocidade média, em função dos tamanhos de volume pode ser observados na Fig. 26.

No gráfico das ordens é importante notar que duas funções de aproximação atingiram primeira ordem e três segunda ordem, conforme esperado.

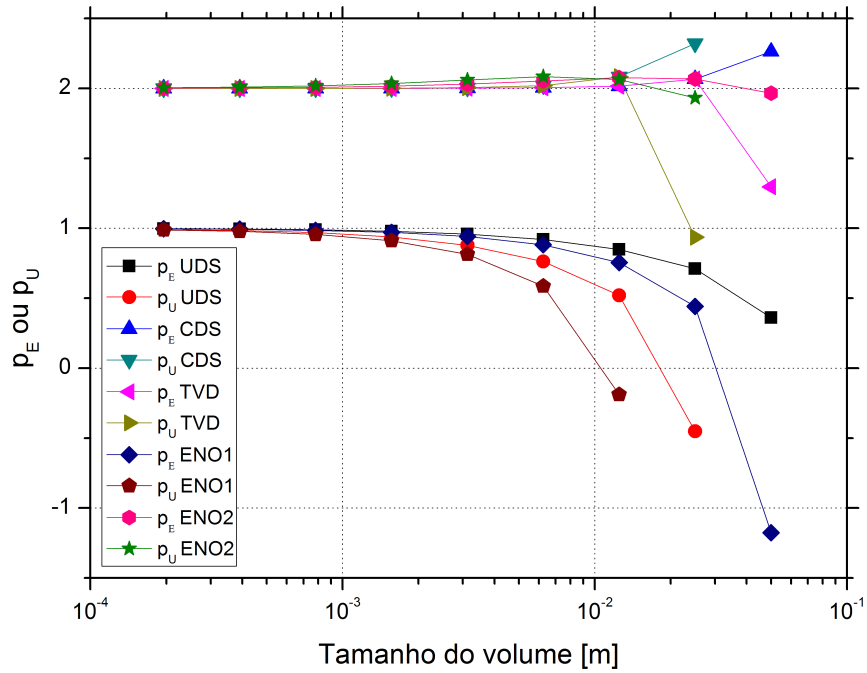


Figura 26 – Comportamento das ordens efetiva e aparente para a velocidade média numérica de Burgers.

## 4.2 Euler unidimensional

Dados de entrada das simulações para Euler 1D são apresentados na Tab. 9 e dados específicos de cada simulação são apresentados nas Tab. 10 e 11.

Tabela 9 – Dados de entrada para Euler 1D.

	Configuração			
	1	2	3	4
Comprimento [m]	0,185039		0,500000	
$\gamma$	1,4000	1,2697	1,4000	1,2697
R [J/kgK]	286,90	461,52	286,90	461,52
Pressão na entrada [kPa]	310,954			
Temperatura na entrada [K]	833,333			
Pressão na saída [kPa]	101,325			

Os campos de número de Mach e temperatura para a forma original da equação de conservação da energia térmica, Eq. 3.5, são apresentados nas Fig. 27 e 28 utilizando as aproximações UDS e TVD nas malhas mais finas, 14336 volumes.

Tabela 10 – Dados de simulação para Euler 1D e configurações 1 e 2.

Malha	Volumes	Tamanho do volume [m]	Configuração 1 UDS			Configuração 1 TVD			Configuração 2 UDS			Configuração 2 TVD		
			$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações	$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações	$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações	$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações
1	56	$3,30 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0,03 [s]	2000	$5 \cdot 10^{-6}$	0,03 [s]	4000	$1 \cdot 10^{-5}$	0,02 [s]	1000	$5 \cdot 10^{-6}$	0,05 [s]	3000
2	112	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-6}$	0,09 [s]	5000	$2 \cdot 10^{-6}$	0,22 [s]	15000	$5 \cdot 10^{-6}$	0,05 [s]	3000	$2 \cdot 10^{-6}$	0,20 [s]	8000
3	224	$8,26 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,53 [s]	12000	$1 \cdot 10^{-6}$	0,86 [s]	30000	$2 \cdot 10^{-6}$	0,36 [s]	10000	$1 \cdot 10^{-6}$	0,90 [s]	20000
4	448	$4,13 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-6}$	2,70 [s]	30000	$5 \cdot 10^{-7}$	3,49 [s]	60000	$1 \cdot 10^{-6}$	1,22 [s]	20000	$5 \cdot 10^{-7}$	3,59 [s]	40000
5	896	$2,07 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	10,2 [s]	60000	$2 \cdot 10^{-7}$	11,7 [s]	100000	$5 \cdot 10^{-7}$	6,51 [s]	50000	$2 \cdot 10^{-7}$	14,1 [s]	80000
6	1792	$1,03 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	33,6 [s]	100000	$1 \cdot 10^{-7}$	46,9 [s]	200000	$2 \cdot 10^{-7}$	25,1 [s]	100000	$1 \cdot 10^{-7}$	1,14 [min]	200000
7	3584	$5,16 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$	3,64 [min]	300000	$2 \cdot 10^{-8}$	7,90 [min]	1000000	$1 \cdot 10^{-7}$	1,72 [min]	200000	$5 \cdot 10^{-8}$	4,60 [min]	400000
8	7168	$2,58 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-8}$	18,4 [min]	600000	$1 \cdot 10^{-8}$	37,5 [min]	2000000	$5 \cdot 10^{-8}$	7,15 [min]	400000	$1 \cdot 10^{-8}$	28,6 [min]	1000000
9	14336	$1,29 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-8}$	2,05 [h]	2000000	$2 \cdot 10^{-9}$	6,46 [h]	10000000	$2 \cdot 10^{-8}$	46,9 [min]	800000	$5 \cdot 10^{-9}$	2,49 [h]	2000000
9*	14336	$1,29 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$	16,0 [min]	300000	$2 \cdot 10^{-8}$	52,9 [min]	800000						

Nota: \* Dados de simulação referentes à forma original da equação da energia térmica.

Tabela 11 – Dados de simulação para Euler 1D e configurações 3 e 4.

Malha	Volumes	Tamanho do volume [m]	Configuração 3 UDS			Configuração 3 TVD			Configuração 4 UDS			Configuração 4 TVD		
			$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações	$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações	$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações	$\Delta t$ [s]	Tempo	Iterações
1	50	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0,02 [s]	2000	$2 \cdot 10^{-5}$	0,05 [s]	6000	$5 \cdot 10^{-5}$	-	1000	$1 \cdot 10^{-5}$	0,14 [s]	10000
2	100	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0,23 [s]	15000	$1 \cdot 10^{-5}$	0,28 [s]	20000	$2 \cdot 10^{-5}$	0,06 [s]	4000	$5 \cdot 10^{-6}$	0,50 [s]	20000
3	200	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-6}$	1,25 [s]	30000	$5 \cdot 10^{-6}$	1,01 [s]	40000	$1 \cdot 10^{-5}$	0,39 [s]	10000	$2 \cdot 10^{-6}$	2,31 [s]	50000
4	400	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-6}$	6,29 [s]	80000	$2 \cdot 10^{-6}$	4,07 [s]	80000	$2 \cdot 10^{-6}$	3,62 [s]	50000	$1 \cdot 10^{-6}$	8,38 [s]	100000
5	800	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-7}$	38,9 [s]	250000	$8 \cdot 10^{-7}$	20,4 [s]	200000	$1 \cdot 10^{-6}$	13,3 [s]	100000	$5 \cdot 10^{-7}$	33,3 [s]	200000
6	1600	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	2,63 [min]	500000	$1 \cdot 10^{-7}$	6,89 [min]	2000000	$5 \cdot 10^{-7}$	53,8 [s]	200000	$2 \cdot 10^{-7}$	2,83 [min]	500000
7	3200	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	10,9 [min]	1000000	$2 \cdot 10^{-8}$	1,34 [h]	10000000	$2 \cdot 10^{-7}$	4,06 [min]	500000	$1 \cdot 10^{-7}$	10,9 [min]	1000000
8	6400	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$	54,9 [min]	2000000	$1 \cdot 10^{-8}$	2,39 [h]	10000000	$1 \cdot 10^{-7}$	17,1 [min]	1000000	$5 \cdot 10^{-8}$	34,6 [min]	1500000
9	12800	$3,91 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-8}$	2,56 [h]	5000000	$2 \cdot 10^{-9}$	19,8 [h]	40000000	$5 \cdot 10^{-8}$	1,51 [h]	2000000	$2 \cdot 10^{-8}$	2,49 [h]	3000000

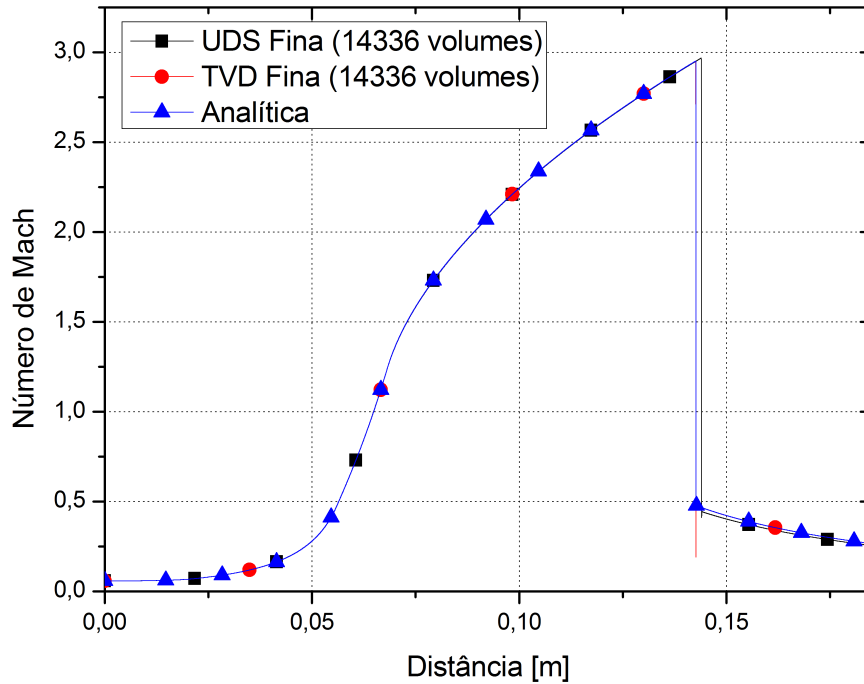


Figura 27 – Campo do número de Mach para a forma original da equação de conservação da energia térmica, Euler 1D e configuração 1.

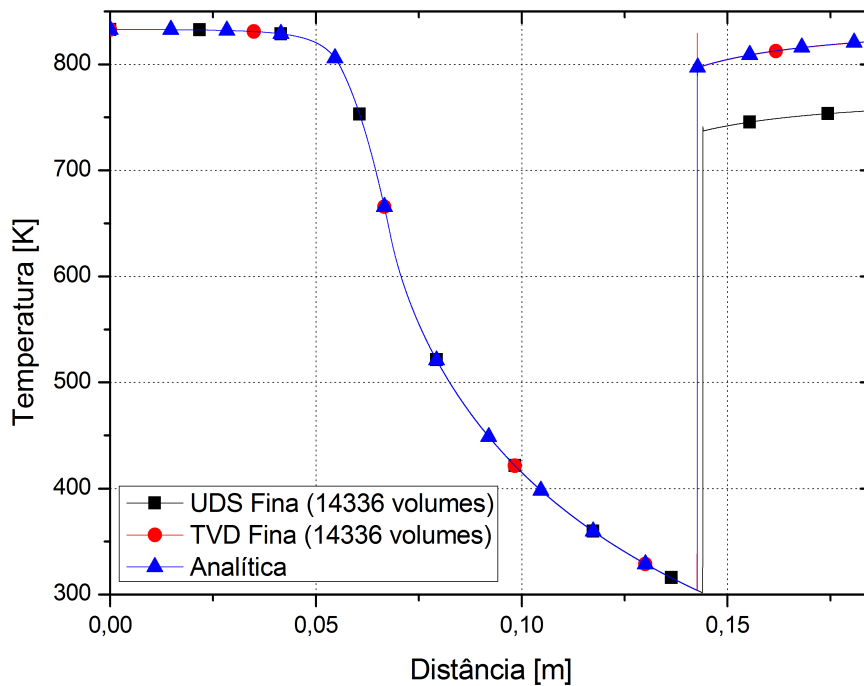


Figura 28 – Campo de temperatura para a forma original da equação de conservação da energia térmica, Euler 1D e configuração 1.

Para estes dois casos o TVD apresentou maior acurácia do que o UDS. Este último além de não apresentar a posição correta da onda de choque normal apresentou um erro de ordem zero para as propriedades à jusante do choque, onde o erro não é reduzido com o refino da malha.

Foram realizados processos de obtenção e discretização da forma alternativa da equação de conservação da energia térmica a partir da equação de conservação da energia na forma integral e testada sua solução no lugar da forma original da equação de conservação da energia térmica. Nesses testes a acurácia da aproximação UDS melhorou e a do TVD se manteve. Análises mais detalhadas dessa forma alternativa são apresentadas na sequência.

O comportamento da variação adimensionalizada de variáveis monitoradas ao longo do processo iterativo para a malha mais fina, configuração 1 e aproximação UDS é observado na Fig. 29. Nesta figura observa-se que o critério de convergência, estabelecido na Seção 3.4, foi atingido. Por apresentarem comportamentos semelhantes os gráficos de variação para os outros casos não serão apresentados. Ainda, nos outros casos o critério de convergência também foi atingido.

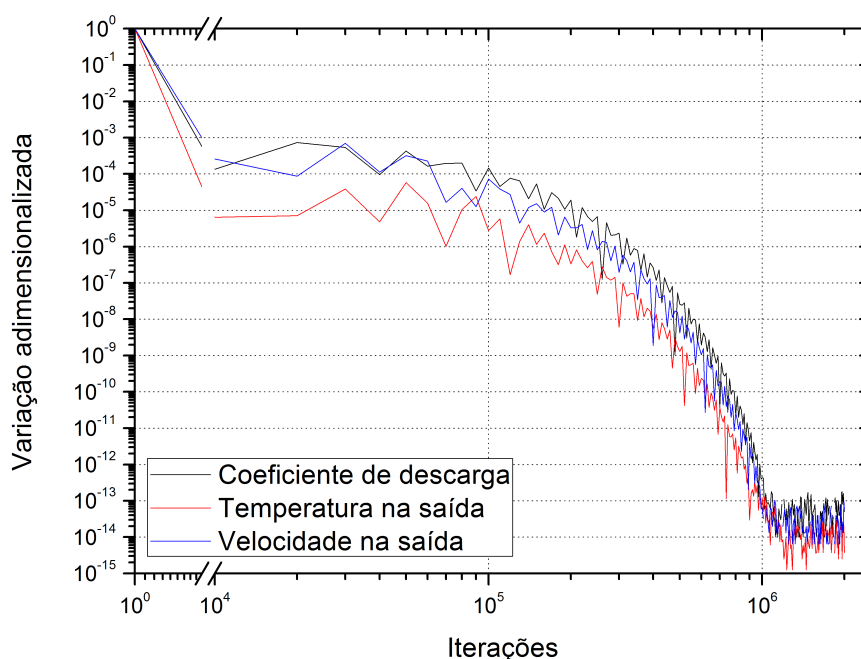


Figura 29 – Variação adimensionalizada das variáveis monitoradas a cada iteração para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

Os campos do número de Mach e temperatura são apresentados nas Fig. 30 e 31 e uma aproximação da região à jusante do choque do campo de número de Mach é apresentada na Fig. 32, para as aproximações UDS e TVD.

Conforme citado anteriormente o UDS teve sua acurácia melhorada e representou coerentemente a posição da onda de choque normal. Já para o TVD nenhuma mudança significativa foi observada. O problema de acurácia do UDS é mais facilmente observado nos campos de temperatura e como este foi resolvido os próximos casos não apresentarão este campo. Na Fig. 32 nota-se que o TVD apresentou oscilação tanto em malhas grossas como em malhas finas.

Os campos do número de Mach para as configurações 2, 3 e 4 são apresentados nas Fig. 33 a 35.

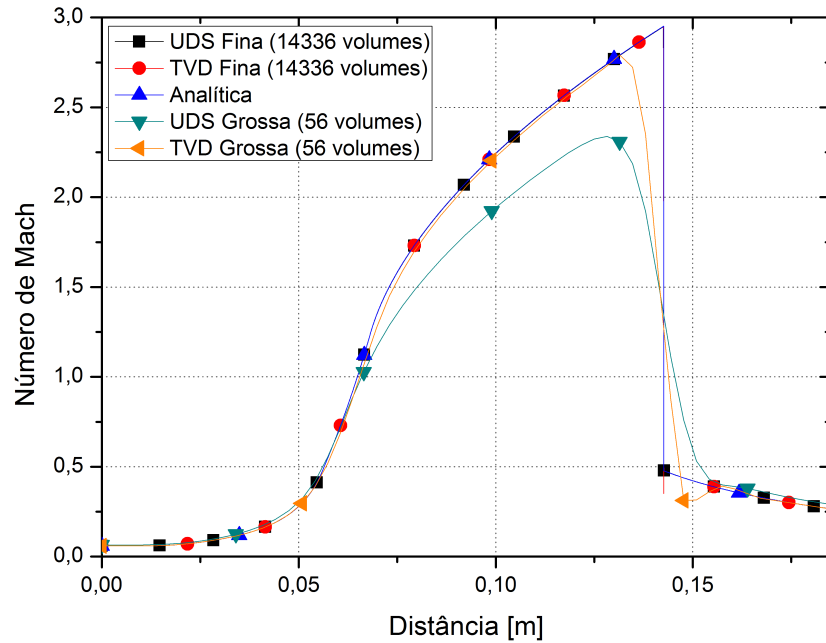


Figura 30 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 1.

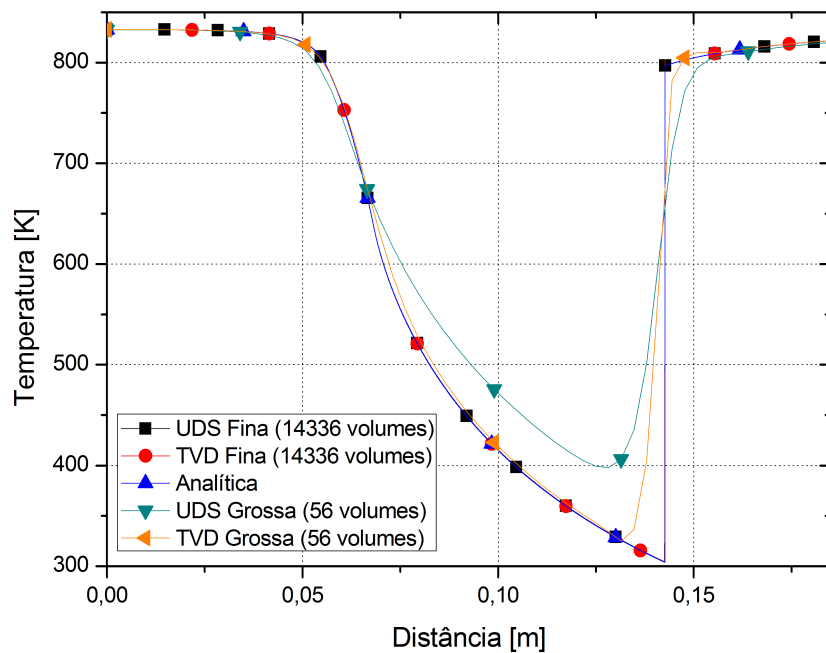


Figura 31 – Campo de temperatura para Euler 1D e configuração 1.

Nota-se que o TVD produziu oscilações à jusante da onda de choque para todos os casos. Entretanto, as soluções numéricas nas malhas mais finas tiveram boa concordância com a solução analítica em todos os casos.

Os gráficos do módulo dos erros numéricos das soluções com e sem MER para a aproximação UDS são apresentados nas Fig. 36 a 39 e TVD nas Fig. 40 a 43. Ressalta-se que posição numérica, DDV e Fourier são termos relativos às obtenções da posição do choque.

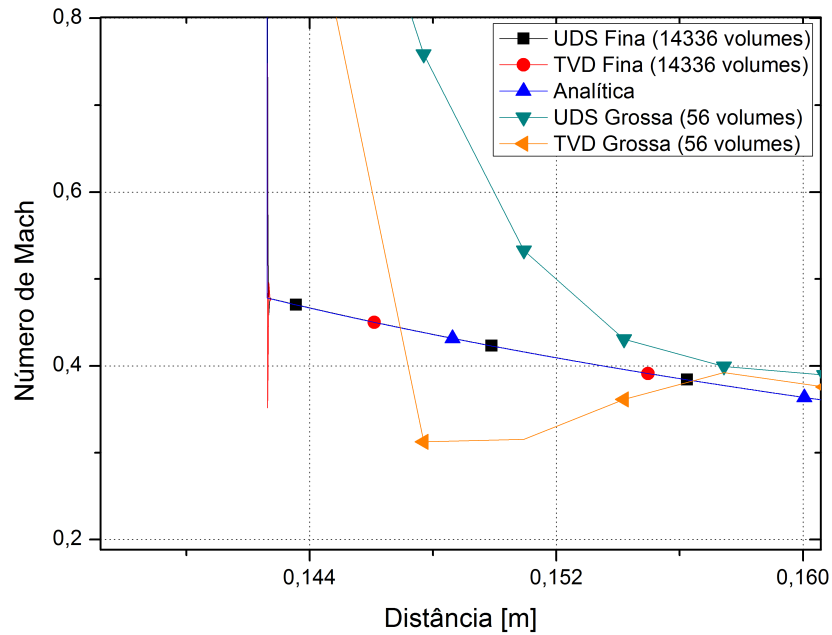


Figura 32 – Campo do número de Mach com uma aproximação da região à jusante do choque para Euler 1D e configuração 1.

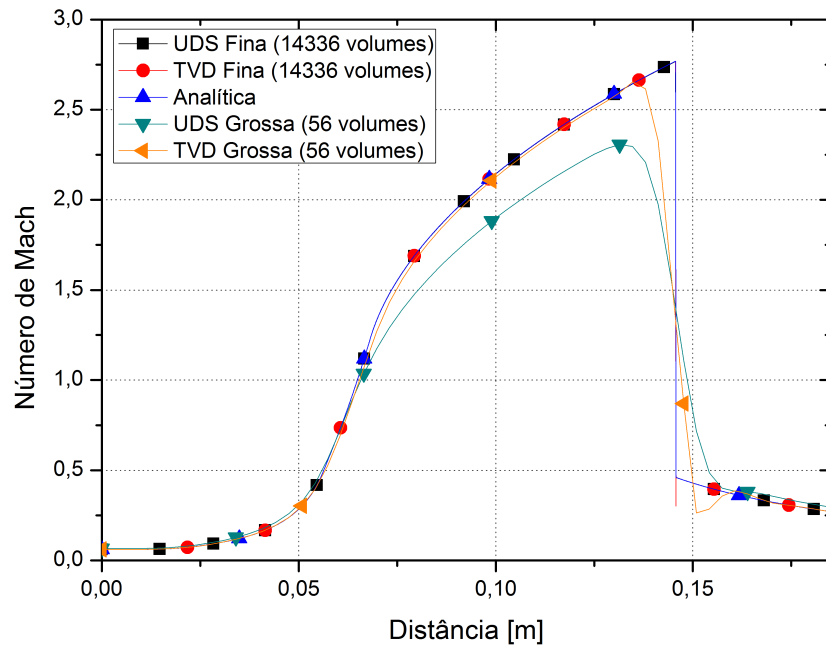


Figura 33 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 2.

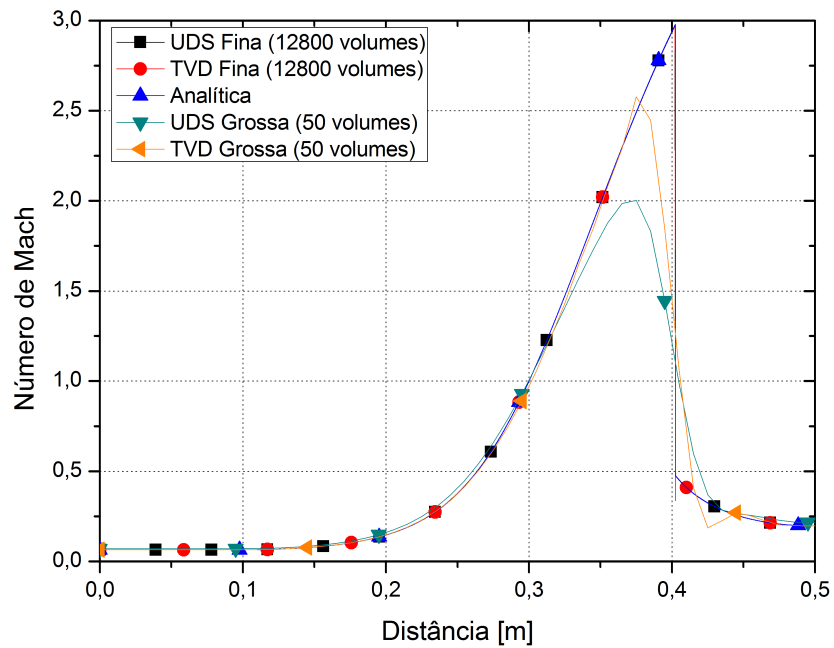


Figura 34 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 3.

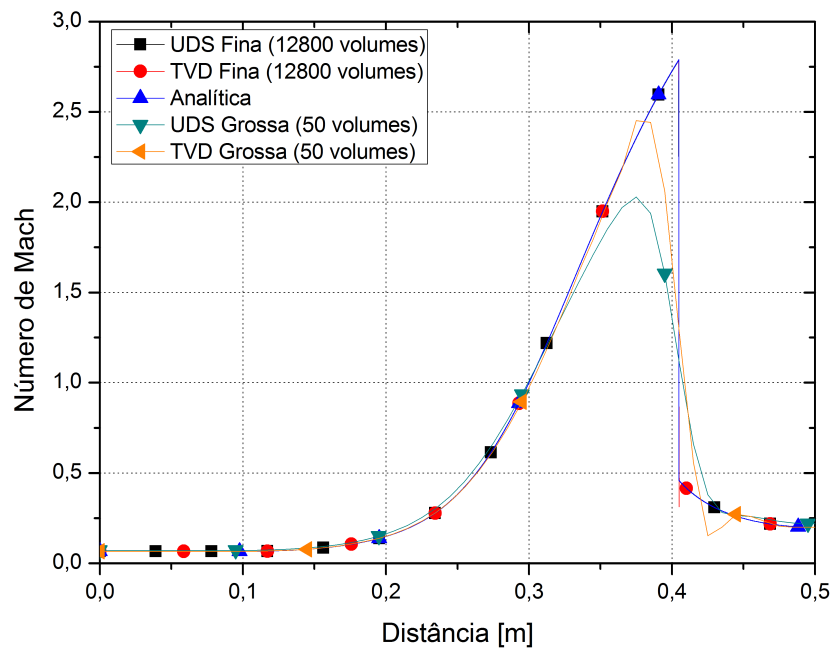


Figura 35 – Campo do número de Mach para Euler 1D e configuração 4.

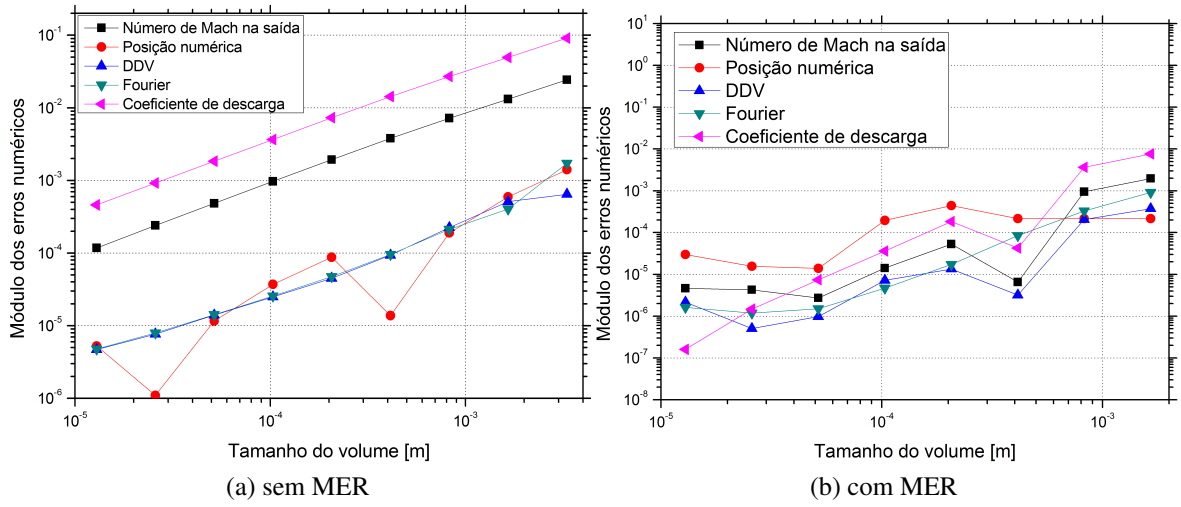


Figura 36 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

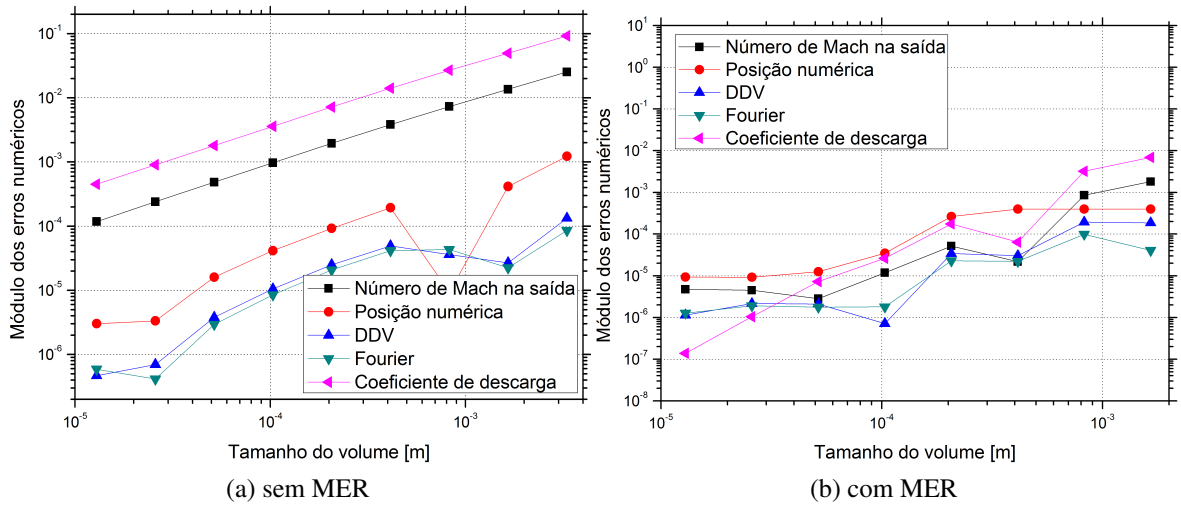


Figura 37 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 2 e aproximação UDS.

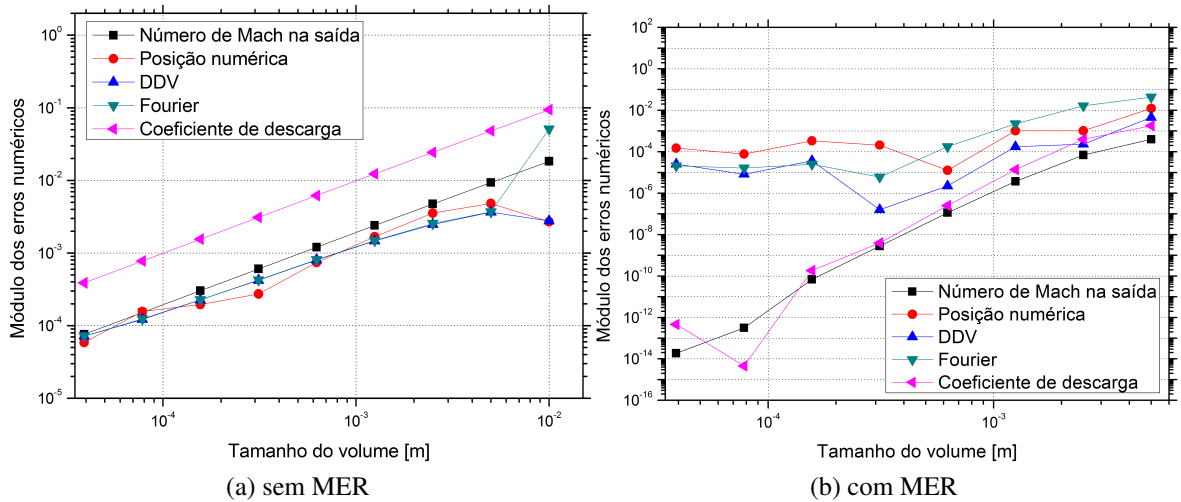


Figura 38 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 3 e aproximação UDS.

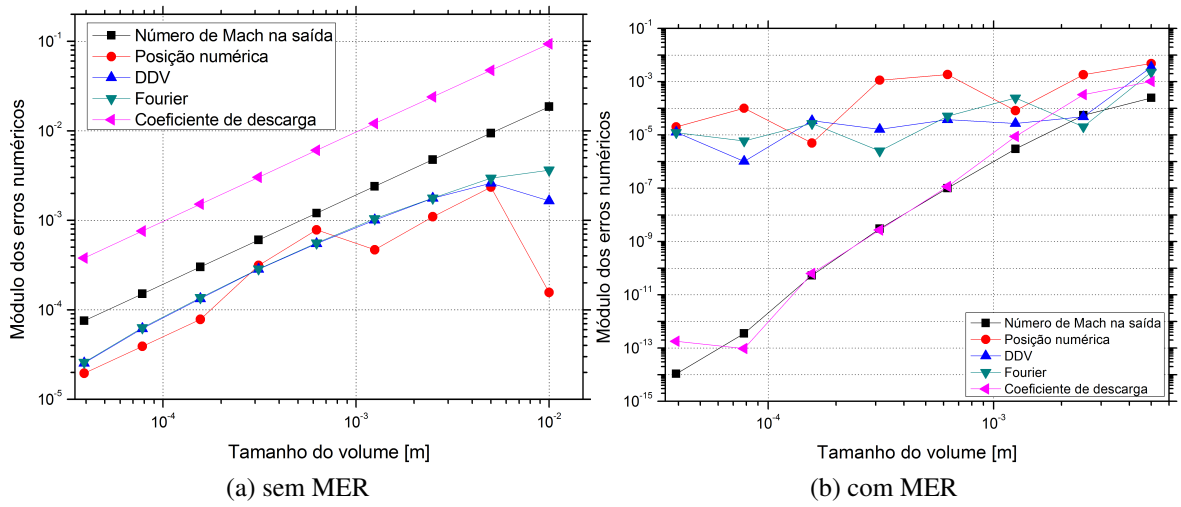


Figura 39 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 4 e aproximação UDS.

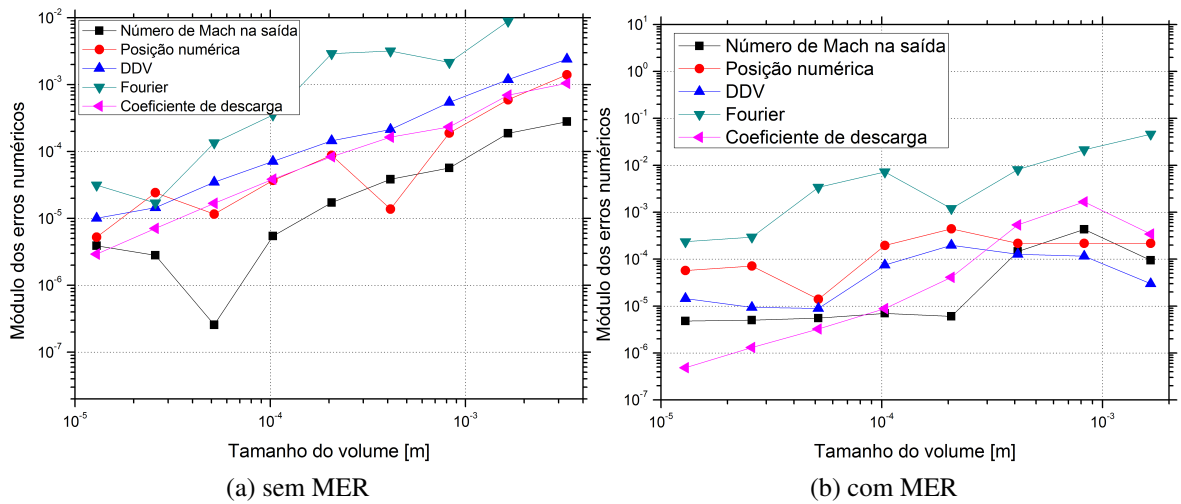


Figura 40 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 1 e aproximação TVD.

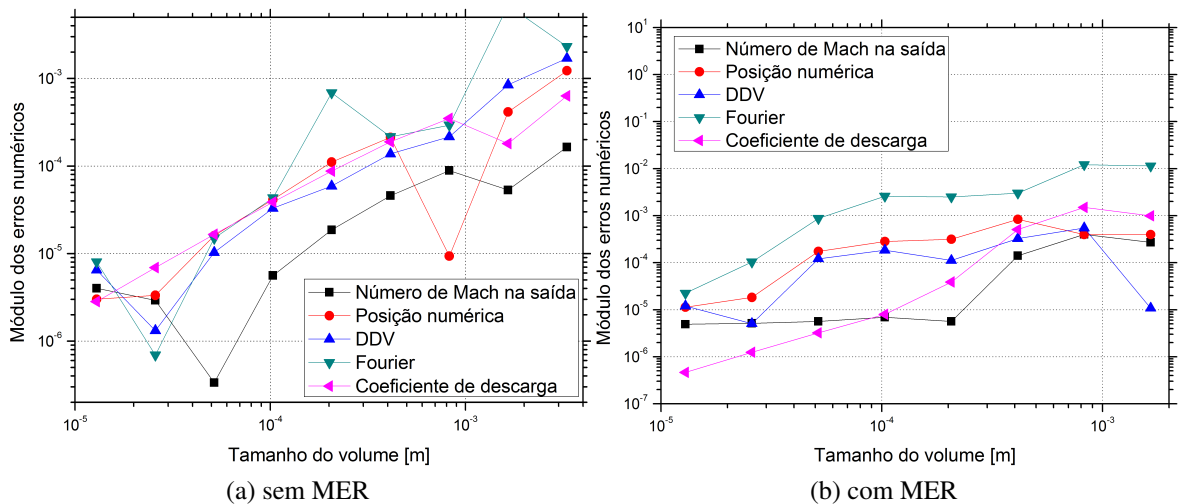


Figura 41 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 2 e aproximação TVD.

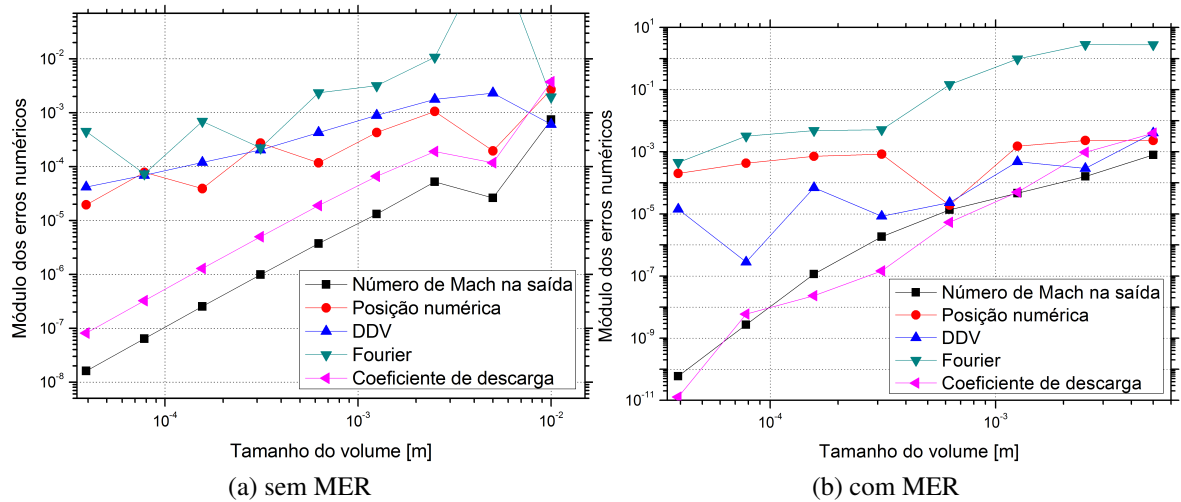


Figura 42 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 3 e aproximação TVD.

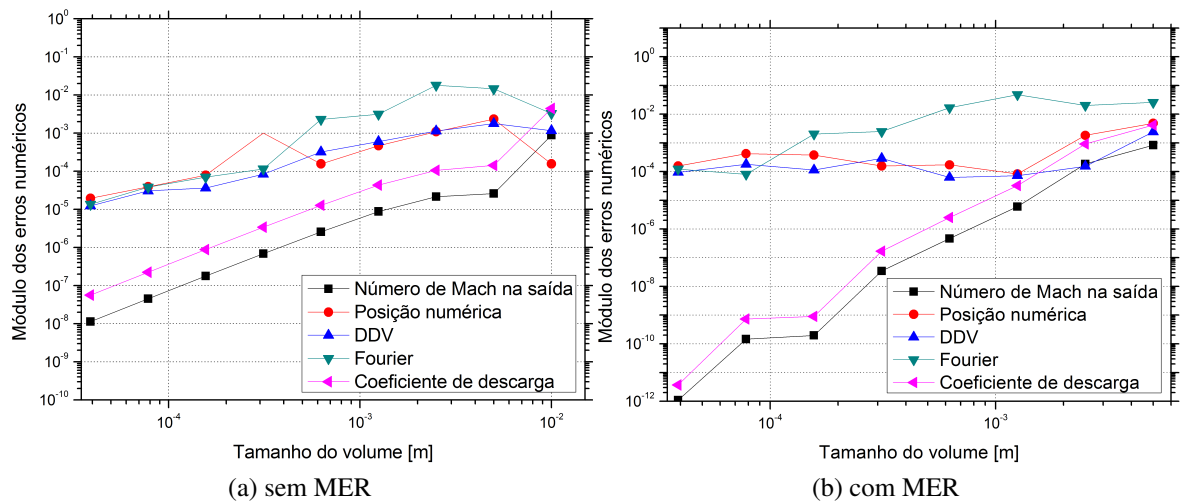


Figura 43 – Módulo dos erros numéricos para Euler 1D, configuração 4 e aproximação TVD.

Nota-se que, em todos os casos da aproximação UDS, as variáveis número de Mach na saída e  $C_d$  apresentaram comportamento do módulo dos erros numéricos da solução numérica sem MER esperado para este tipo de aproximação, conforme Fig. 22. Enquanto, as variáveis referentes à obtenção da posição da onda de choque normal apresentaram um comportamento ligeiramente semelhante ao esperado, com exceção da posição obtida numericamente que apresentou muitas oscilações; tal comportamento já era esperado (MARTINS, 2013). No caso de MER as variáveis número de Mach na saída e  $C_d$  apresentaram um comportamento bastante próximo do esperado, novamente, e uma redução efetiva de erros para as configurações 3 e 4. Nos outros casos MER para as variáveis analisadas apresentou um comportamento oscilatório e, em alguns casos, aumento do erro.

Para a aproximação TVD a única variável que apresentou comportamento mais próximo do esperado para as soluções numéricas sem MER foi o  $C_d$ , número de Mach na saída em alguns casos (configurações 3 e 4). Novamente, a obtenção da posição da onda de choque normal por

DDV e Fourier apresentaram um comportamento mais próximo do esperado que a obtenção numérica. Nota-se que o uso de MER em soluções numéricas de TVD provocou um aumento de erros, possivelmente porque a solução numérica não apresentou comportamento assintótico, com exceção das variáveis  $C_d$  e número de Mach na saída para as configurações 3 e 4.

Com base nos gráficos do módulo dos erros numéricos serão apresentados gráficos das ordens aparente e efetiva, Fig. 44 a 47, para as variáveis que se aproximaram do comportamento esperado dos erros, a saber:  $C_d$  em todos os casos, número de Mach na saída para a aproximação TVD nas configurações 3 e 4 e em todas para UDS.

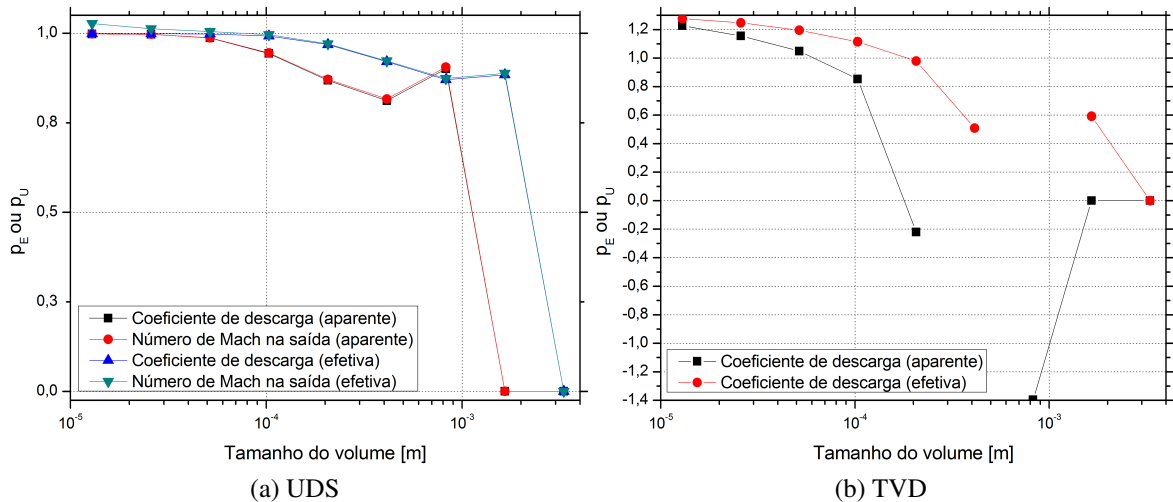


Figura 44 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 1.

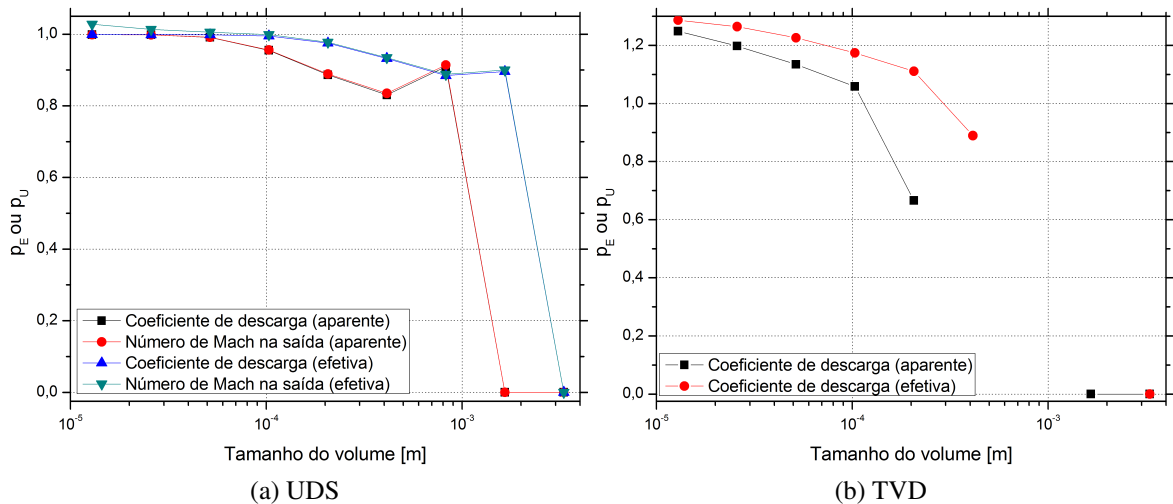


Figura 45 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 2.

Observando-se, por exemplo, o  $C_d$  para o TVD, este apresenta ordens de convergência diferentes, um para as configurações 1 e 2 e dois para 3 e 4. Acredita-se que como o cálculo do  $C_d$  é feito a partir dos dados de entrada, para o caso unidimensional (Seção 3.3), a ordem

de acurácia local pode ter sido superior à do campo, pois ela deveria degenerar para ordem um na presença de choques. Em geral, o  $C_d$  foi quem mais se aproximou do comportamento esperado, para todos os casos, e o número de Mach na saída para os casos com aproximação UDS e TVD apenas nas configurações 3 e 4. Ainda, nota-se que para o UDS as ordens se aproximaram mais do comportamento esperado para as configurações 3 e 4 do que para as 1 e 2, isto, provavelmente, porque a geometria do bocal cossenoidal é mais suave. A diferença de comportamento entre as ordens de UDS e TVD pode estar relacionada ao fato de que este último apresenta comportamento de erros numéricos com mais oscilações do que o UDS.

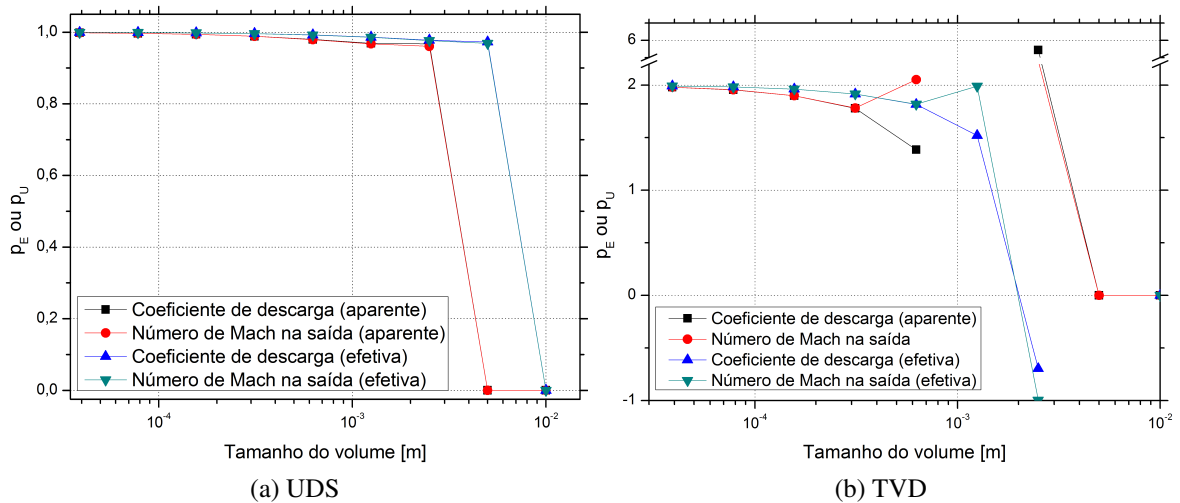


Figura 46 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 3.

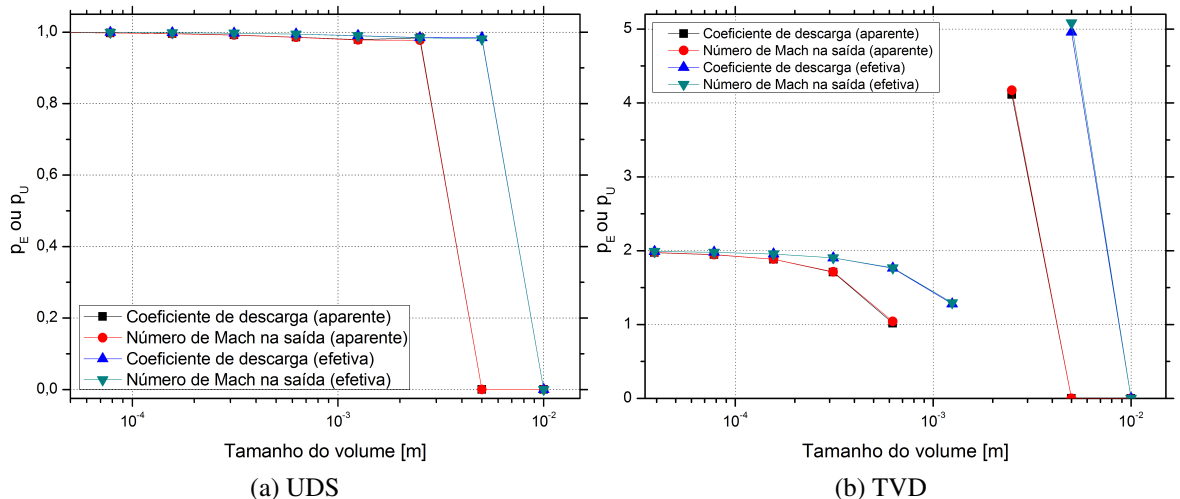


Figura 47 – Ordens efetiva e aparente para Euler 1D e configuração 4.

Com as Eq. 3.102 e 3.103, repetidas aqui por conveniência, é possível identificar qualitativamente a inserção de erro para um dado volume, uma vez que a propriedade é calculada com base nas aproximações das faces leste e oeste. Por exemplo, na Eq. 3.103 independente do

valor da função limitadora (MIN-MOD) o erro de poluição sugere que o erro de discretização do volume vizinho à oeste ( $W$ ) será inserido naquele que está sendo avaliado. Na Eq. 3.102 o mesmo ocorre, porém com o volume que está sendo avaliado ( $P$ ). Então, serão inseridos os erros de discretização a partir dos volumes  $W$  e  $P$ , sempre, e dependendo do valor da função limitadora usada na face leste o erro de discretização do volume à leste ( $E$ ) será inserido (para  $\psi \neq 0$ ).

$$e(\lambda_{TVD})_e = \frac{(2 - \psi(r_{ge}))E_P + \psi(r_{ge})E_E}{2} \quad (3.102)$$

$$e(\lambda_{TVD})_w = \frac{(2 - \psi(r_{ge}))E_W + \psi(r_{ge})E_P}{2} \quad (3.103)$$

A seguir, na Tab. 12, são apresentados os valores das funções limitadoras usadas pelo TVD para a variável temperatura e configuração 1 na malha mais grossa, de 56 volumes.

Tabela 12 – Valores das funções limitadoras usadas pelo TVD para a temperatura Euler 1D e configuração 1 na malha mais grossa.

Volume	40	43	44	45	46	47
Face oeste	0,96	0,37	0,95	1,00	1,00	0,00
Face leste	0,00	0,95	1,00	1,00	0,00	0,00

A partir da tabela nota-se que o erro de discretização dos volumes vizinhos foi inserido tanto à montante quanto à jusante nos volumes 43, 44 e 45. O volume 43 representa a posição do choque, obtida numericamente. Observa-se que o valor da função limitadora é unitário nos volumes 44, apenas face leste, e 45, em ambas faces, e este valor é equivalente ao uso da aproximação CDS. Ainda, nota-se que os erros gerados nestes volumes são propagados à montante até a posição do choque. Como o CDS apresenta oscilações na presença do choque, uma das possíveis causas para as oscilações do TVD pode ser o uso de CDS nas proximidades do choque. Tais oscilações não são observadas à montante do choque, pois no volume 40 o erro de discretização não é inserido através do volume à leste, ou seja, os erros que contêm oscilações são impedidos de se propagarem à montante para todo o escoamento.

### 4.3 Euler bidimensional

Os dados de entrada das simulações para Euler 2D são apresentados na Tab. 13.

A variável monitorada a cada iteração, fluxo de massa numérico na entrada do bocal, é apresentada na Fig. 48 para a malha mais fina, de 983040 volumes, para a aproximação UDS. Observa-se que o critério de convergência, definido na Seção 3.4, foi atingido. As outras simulações, com exceção das malhas 9 e 10 da aproximação TVD, apresentaram o mesmo comportamento e não serão apresentadas. No caso das malhas 9 e 10 da aproximação TVD, o critério não foi atingido, pois o tempo de simulação necessário para tal seria muito elevado

(dobro de iterações). Destaca-se que este fator em específico não prejudica as análises, uma vez que o erro de truncamento ainda é dominante sobre os demais. Dados específicos sobre as simulações estão dispostos nas Tab. 14 e 15.

Tabela 13 – Dados de entrada para Euler 2D.

Configuração 5	
Comprimento [m]	0,185039
$\gamma$	1,400
R [J/kgK]	286,90
Pressão na entrada [kPa]	1725,07
Temperatura na entrada [K]	833,333

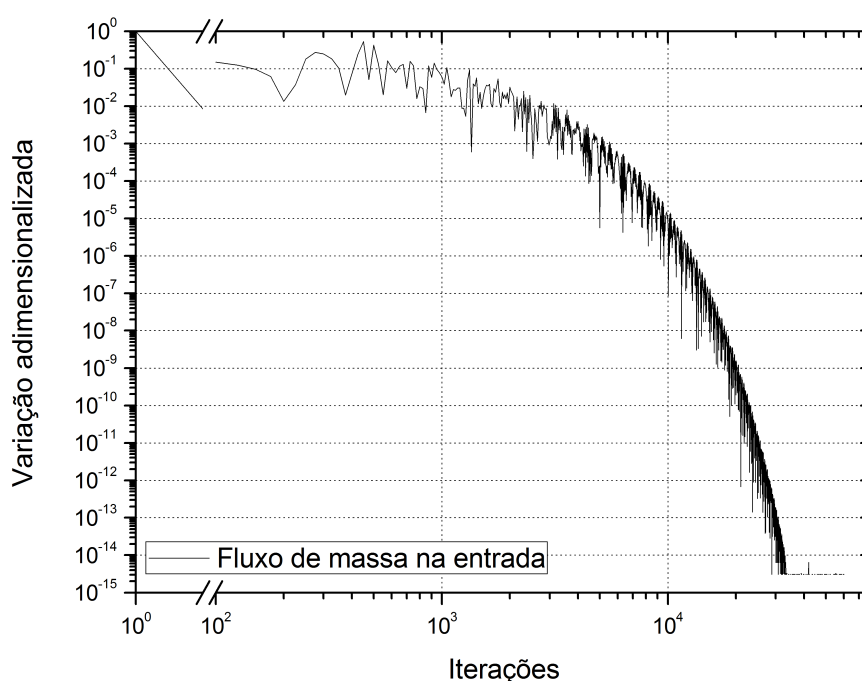


Figura 48 – Variação adimensionalizada do fluxo de massa na entrada do bocal a cada iteração para Euler 2D na malha mais fina e aproximação UDS.

A Fig. 49 apresenta o campo de pressões na parede da câmara para a solução analítica unidimensional, aproximações numéricas (UDS e TVD), para a malha mais fina, e dados experimentais de Back *et al.* (1965).

Nota-se boa concordância entre as soluções numéricas e os dados experimentais apresentados por Back *et al.* (1965) resultando modelos matemáticos e físicos válidos para este tipo de escoamento. As estimativas de erros de modelagem médias e máximas do campo de pressões para UDS e TVD são apresentadas na Tab. 16. Estas foram calculadas através de interpolação das soluções numéricas e os dados experimentais.

As estimativas dos erros de modelagem são interessantes, pois sugerem grande proximidade entre a solução numérica e os dados experimentais. Em um estudo onde o máximo erro experimental é de 5 %, a estimativa de erro de modelagem máxima (9, 20 %) é razoável.

Tabela 14 – Dados de simulação para Euler 2D e aproximação UDS.

Malha	Volumes			Tamanho do volume [m]	Razão de refino	Tempo de simulação	Iterações	$\Delta t$ [s]
	z	r	Total					
1	24	10	240	$7,71 \cdot 10^{-3}$	-	0,06 [s]	600	$5,00 \cdot 10^{-5}$
2	48	20	960	$3,85 \cdot 10^{-3}$	2	0,19 [s]	700	$5,00 \cdot 10^{-5}$
3	96	40	3840	$1,93 \cdot 10^{-3}$	2	0,98 [s]	900	$1,30 \cdot 10^{-5}$
4	192	80	15360	$9,64 \cdot 10^{-4}$	2	20,245 [s]	4000	$5,80 \cdot 10^{-6}$
5	288	120	34560	$6,42 \cdot 10^{-4}$	1,5	1,51 [min]	6000	$3,70 \cdot 10^{-6}$
6	384	160	61440	$4,82 \cdot 10^{-4}$	1,3	6,82 [min]	9550	$2,80 \cdot 10^{-6}$
7	576	240	138240	$3,21 \cdot 10^{-4}$	1,5	29,3 [min]	14000	$1,80 \cdot 10^{-6}$
8	768	320	245760	$2,41 \cdot 10^{-4}$	1,3	1,11 [h]	22000	$1,30 \cdot 10^{-6}$
9	1152	480	552960	$1,61 \cdot 10^{-4}$	1,5	6,22 [h]	40000	$9,20 \cdot 10^{-7}$
10	1536	640	983040	$1,20 \cdot 10^{-4}$	1,3	16,6 [h]	60000	$6,90 \cdot 10^{-7}$

Nota: - Não Aplicável.

Tabela 15 – Dados de simulação para Euler 2D e aproximação TVD.

Malha	Volumes			Tamanho do volume [m]	Razão de refino	Tempo de simulação	Iterações	$\Delta t$ [s]
	z	r	Total					
1	24	10	240	$7,71 \cdot 10^{-3}$	-	0,41 [s]	3300	$5,00 \cdot 10^{-5}$
2	48	20	960	$3,85 \cdot 10^{-3}$	2	1,52 [s]	3500	$1,00 \cdot 10^{-5}$
3	96	40	3840	$1,93 \cdot 10^{-3}$	2	13,0 [s]	8975	$6,00 \cdot 10^{-6}$
4	192	80	15360	$9,64 \cdot 10^{-4}$	2	5,14 [min]	24000	$1,90 \cdot 10^{-6}$
5	288	120	34560	$6,42 \cdot 10^{-4}$	1,5	15,5 [min]	23000	$1,10 \cdot 10^{-6}$
6	384	160	61440	$4,82 \cdot 10^{-4}$	1,3	43,9 [min]	35000	$7,70 \cdot 10^{-7}$
7	576	240	138240	$3,21 \cdot 10^{-4}$	1,5	4,81 [h]	96000	$4,80 \cdot 10^{-7}$
8	768	320	245760	$2,41 \cdot 10^{-4}$	1,3	15,4 [h]	160000	$3,30 \cdot 10^{-7}$
9	1152	480	552960	$1,61 \cdot 10^{-4}$	1,5	9,68 [dias]	521500	$1,00 \cdot 10^{-7}$
10	1536	640	983040	$1,20 \cdot 10^{-4}$	1,3	12,6 [dias]	570650	$1,10 \cdot 10^{-7}$

Nota: - Não Aplicável.

Tabela 16 – Estimativa dos erros de modelagem com base nos dados experimentais do campo de pressão na parede do bocal para Euler 2D.

	média (%)	máxima (%)
UDS	2,38	9,12
TVD	2,53	9,20

Campos bidimensionais das malhas mais finas do número de Mach são apresentados nas Fig. 50 e 51 para UDS e TVD, respectivamente.

Nos campos do número de Mach é possível observar a captação de uma onda de choque oblíqua para UDS, conforme observado anteriormente em Back *et al.* (1966). Entretanto, para o caso do TVD notam-se linhas adicionais sugerindo a existência de outras ondas de choque.

As Fig. 52 e 53 apresentam isolinhas nas malhas mais finas do campo do número de Mach para UDS e TVD, respectivamente.

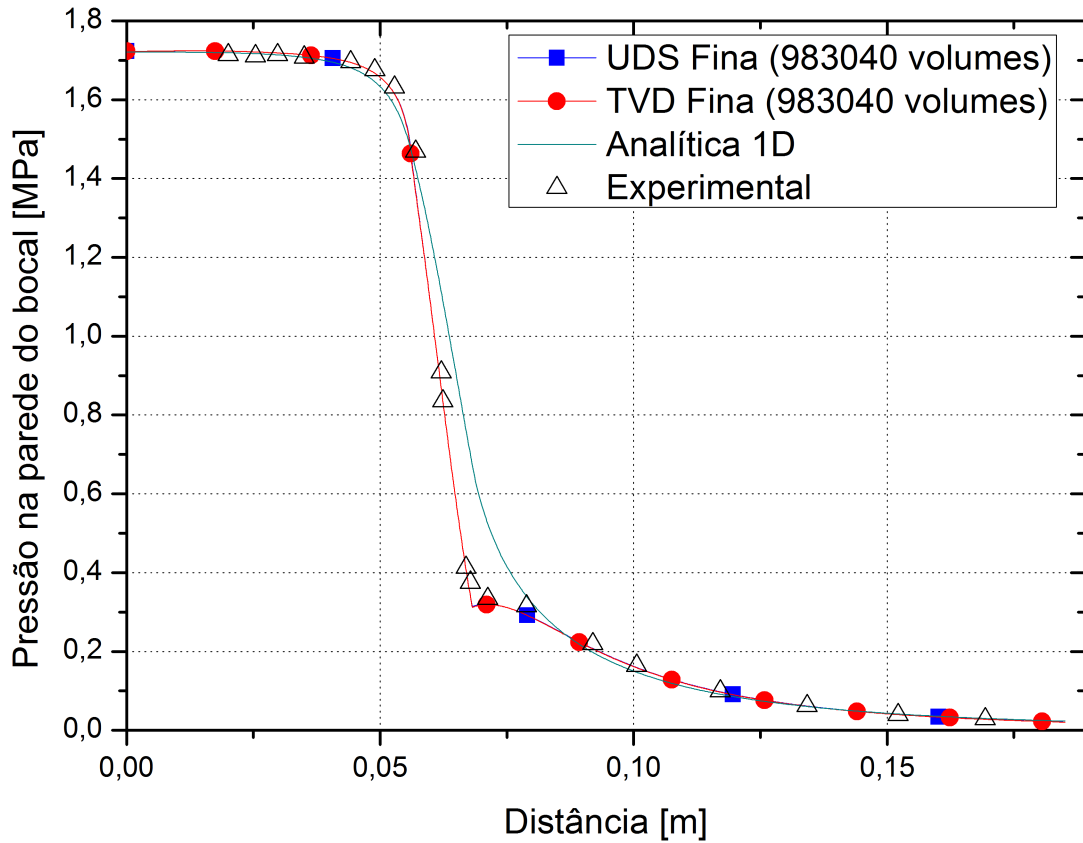


Figura 49 – Comparação da pressão na parede da câmara para a solução analítica unidimensional, aproximações numéricas e dados experimentais de Back *et al.* (1965) para Euler 2D.

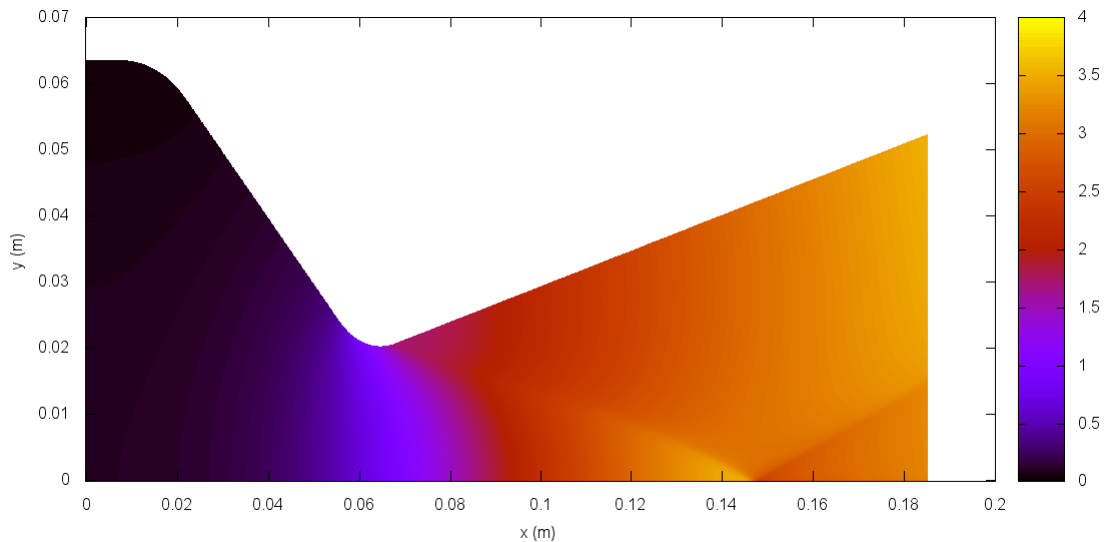


Figura 50 – Campo do número de Mach bidimensional para Euler 2D e aproximação UDS na malha mais fina.

Analisando as isolinhas tem-se uma noção mais abrangente em relação à onda de choque oblíqua presente no escoamento. No caso do UDS nota-se a posição da onda de choque e que as linhas de número de Mach constante tem um comportamento estável. Já para o TVD observam-se oscilações após a onda de choque e sua reflexão, tal como ocorreu no caso unidimensional. Ou

seja, as linhas adicionais não são fenômenos físicos reais e sim oscilações causadas pelo uso do TVD; este fenômeno não é necessariamente inédito, pois Leveque (2002) afirma que até mesmo em métodos de primeira ordem de acurácia podem haver pequenas oscilações.

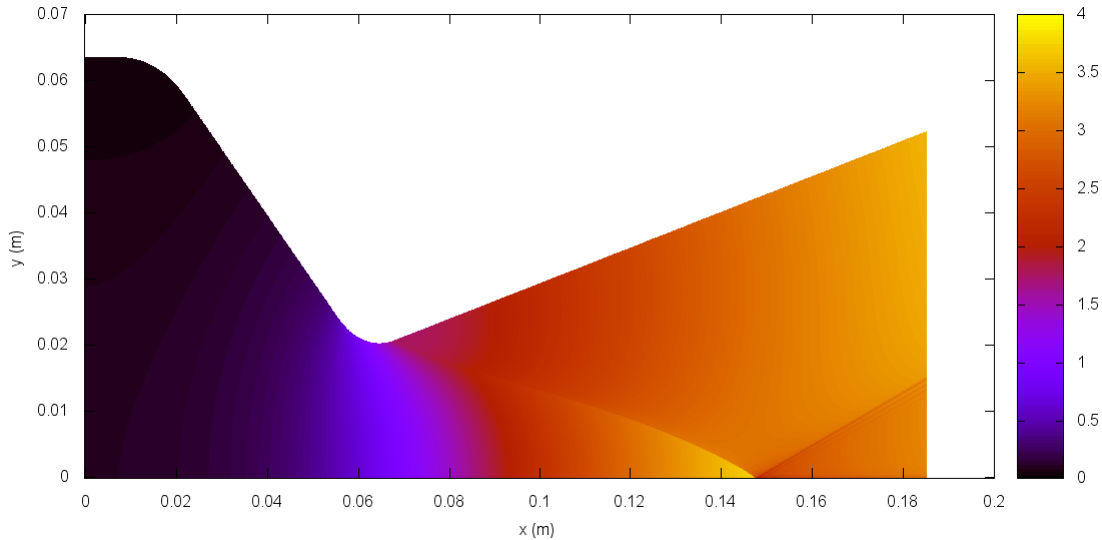


Figura 51 – Campo do número de Mach bidimensional para Euler 2D e aproximação TVD na malha mais fina.

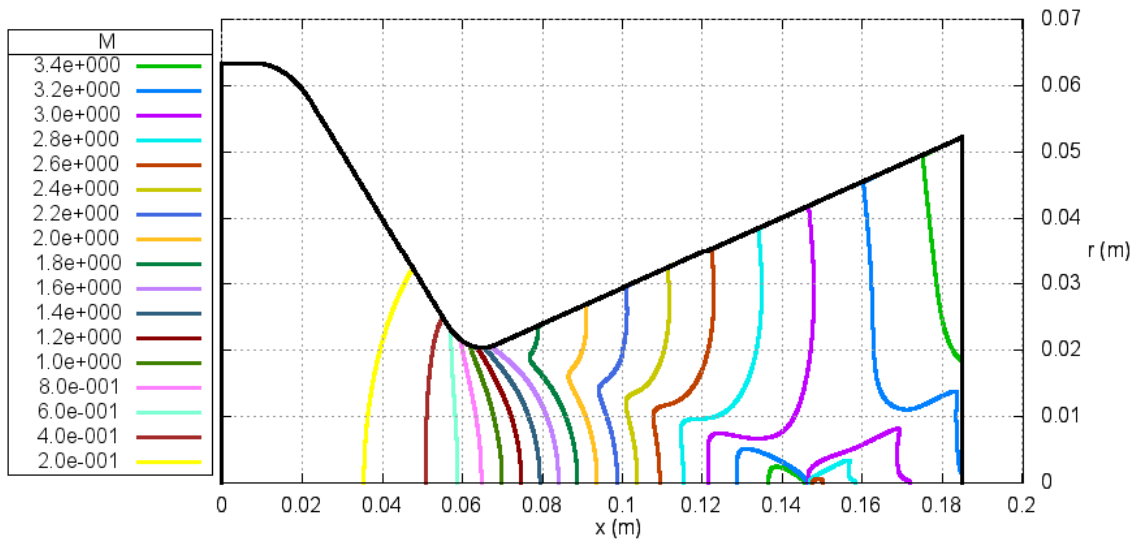


Figura 52 – Isolinhas para Euler 2D e aproximação UDS na malha mais fina.

O comportamento do módulo dos erros numéricos para o  $C_d$  é apresentado na Fig. 54 para UDS e TVD.

Assim como nos casos unidimensionais o UDS apresentou um comportamento mais estável do que o TVD, como observa-se no gráfico anterior. No entanto, na medida em que a malha é refinada, o erro decresce sugerindo que ambas aproximações estão sendo aplicadas corretamente.

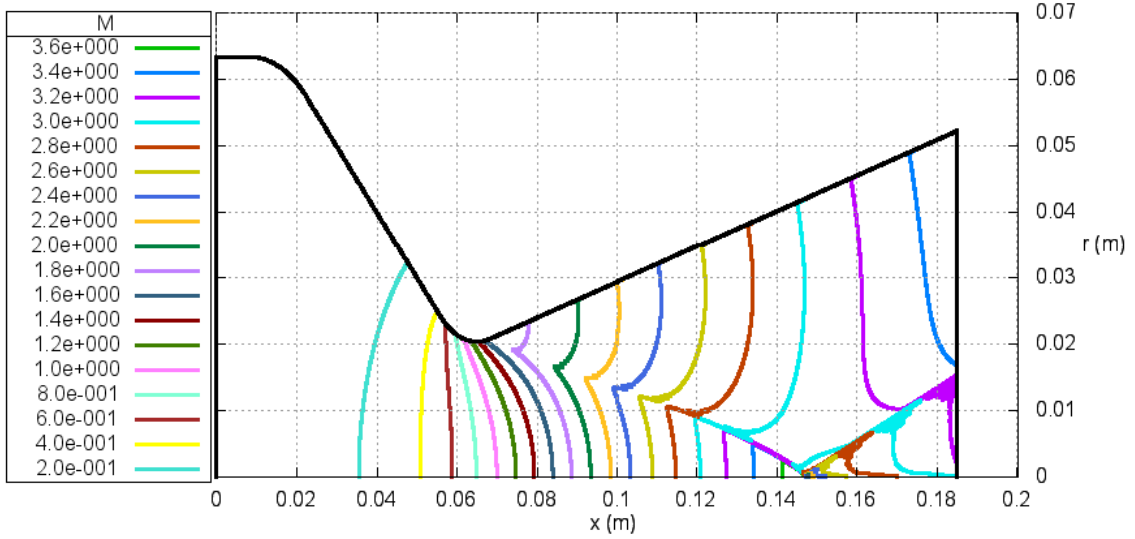


Figura 53 – Isolinhas para Euler 2D e aproximação TVD na malha mais fina.

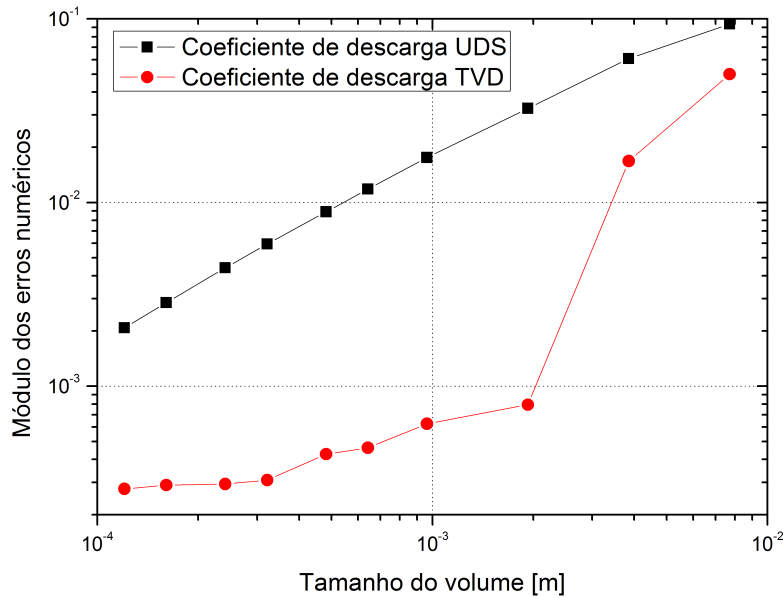


Figura 54 – Módulo dos erros numéricos para o  $C_d$  e Euler 2D.

As ordens aparentes e efetivas para o  $C_d$  são apresentadas na Fig. 55 para UDS e TVD.

Para o caso do UDS nota-se que o mesmo está tendendo para o valor um em ambas ordens, que é o esperado para este tipo de aproximação. O TVD, por sua vez, apresentou um comportamento oscilatório em ambas ordens, sendo na ordem aparente de maior amplitude.

#### 4.4 Discussões

Os critérios de convergência impostos foram satisfeitos (com exceção das malhas 9 e 10 da aproximação TVD para o caso bidimensional, ressalta-se que o erro de truncamento nessas duas malhas continuou dominante), os campos de propriedades tiveram boa concordância com

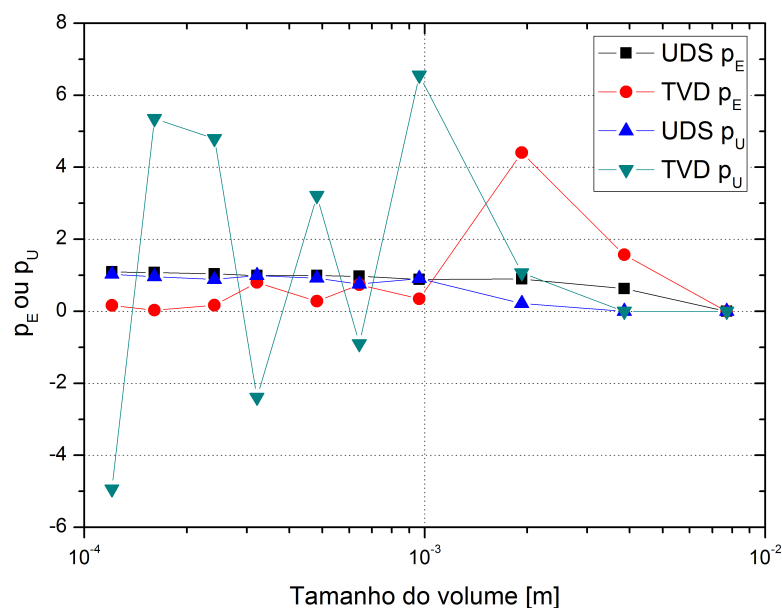


Figura 55 – Ordens aparentes e efetivas para o  $C_d$  e Euler 2D.

soluções analíticas ou dados experimentais, com exceção do caso da forma original da equação de conservação da energia térmica e Euler 1D.

O comportamento do módulo dos erros numéricos para Burgers foi o esperado, com exceção das malhas mais grossas. Ainda em relação ao Burgers, suas ordens efetivas e aparentes tiveram o comportamento esperado, enquanto que para o erro numérico de MER isso não aconteceu para todos os casos, mas os erros foram reduzidos significativamente.

No caso de Euler 1D,  $C_d$  e número de Mach na saída para UDS, todas as configurações, e TVD, nas configurações 3 e 4, apresentaram comportamento estável do módulo dos erros numéricos. Com a aplicação de MER nessas duas variáveis bons resultados foram obtidos para as configurações 3 e 4. Os outros casos e variáveis apresentaram aumento de erro ou comportamento oscilatório.

As variáveis de obtenção da posição do choque apresentaram um comportamento muito próximo do esperado, com exceção da posição numérica, que oscilou em alguns casos. A aplicação de MER para estas variáveis não resultou redução de erros significativa em nenhum caso.

As análises de ordens para o caso unidimensional são favoráveis apenas para o  $C_d$  e o número de Mach na saída, com exceção das configurações 1 e 2 para a aproximação TVD. Em relação às outras variáveis alguns conceitos devem ser revistos.

Ao analisar o valor das funções limitadoras que foram utilizadas pelo TVD e as equações de erro de poluição demonstrou-se a inserção de erros em alguns volumes. Nessa análise ficou claro que em volumes específicos os erros resultantes do uso de CDS, quando a função limitadora assume valores unitários (Tabela 12), se propagam à montante podendo ser uma das causas da

oscilação do TVD. Porém, essas oscilações são impedidas de se propagarem à montante para todo o campo de soluções, pois existe um volume que usa função limitadora de valor zero para face leste, onde os erros são inseridos apenas por volumes à montante.

É clara a exigência de um número maior de iterações e menores valores de parâmetro de relaxação por parte do TVD em relação ao UDS nos casos uni e bidimensionais.

Os campos bidimensionais de número de Mach sugerem a existência de uma onda de choque oblíqua para UDS e mais de uma para TVD. Porém, foi constatado que existe apenas uma onda de choque, sendo as outras resultados não físicos de oscilações numéricas.

Assim como no caso unidimensional, o uso de TVD provocou oscilações. O UDS, por sua vez, apresentou um comportamento mais estável.

## 5 CONCLUSÃO

Foram empregadas todas as funções propostas para Burgers e elas apresentaram o comportamento desejado. MER pôde ser aplicado e reduziu significativamente o erro, apesar do comportamento do erro ficar um pouco distante do esperado em alguns casos.

Não foi possível utilizar CDS, ENO1, e ENO2 para as equações de Euler. Verificou-se, no caso de ENO1, que a escolha de estênceis com volumes à jusante provocava o aparecimento de oscilações e estas contribuíam para a divergência da solução. Por não ter funcionado o ENO1, o ENO2 não chegou a ser implementado. Ainda relativo às aproximações ENO, Shu (1997) sugere o uso de um fluxo monótono, dentre eles o de Lax-Friedrichs. Porém, nas metodologias de Patankar (1980) e Versteeg e Malalasekera (2007), que são as bases deste estudo, não se observa tal fluxo. Em razão disto, sugere-se que faltem alguns conceitos para aplicar ENO a este tipo de problema.

Com essas últimas considerações e os resultados apresentados destacam-se as principais contribuições do trabalho:

- foram apresentadas as metodologias de reconstrução e seleção de estênceis do ENO e estas foram empregadas com sucesso para o caso de Burgers;
- foi demonstrado que o UDS possui vantagens sobre o TVD na presença de ondas de choque;
- foram apresentadas três formas de se obter a posição da onda de choque e uma delas (DDV) apresentou comportamento mais adequado. Porém, mais análises são necessárias para melhorar seu desempenho com MER;
- demonstrou-se que uma das causas da oscilação do TVD provém do uso de CDS, pela própria aproximação, em um determinado volume e estas oscilações não são propagadas à montante, para todo o campo, devido a um bloqueio feito em um volume específico;
- os códigos utilizados para resolver os escoamentos (Mach 1D e Mach 2D, para as equações de Euler) e as soluções apresentadas foram devidamente verificados para UDS. No caso do TVD, os comportamentos oscilatórios das ordens não permitem tal afirmação;
- notou-se que a função limitadora SUPERBEE para Euler 1D provocou instabilidades e estas puderam ser evitadas com o uso de MIN-MOD;
- foi mostrado que existe apenas uma onda de choque oblíqua no escoamento bidimensional, sendo as outras oscilações não físicas provocadas pelo TVD;

- foi validado o modelo utilizado nas soluções numéricas de Euler 2D para o bocal estudado com escoamento de ar;

Para trabalhos futuros são propostas as seguintes sugestões:

- estudar métodos que apliquem com sucesso ENO para as equações de Euler para identificar conceitos que serão úteis para aplicação do mesmo na metodologia utilizada neste trabalho;
- melhorar o desempenho da obtenção da posição do choque com MER;
- testar outras funções limitadoras TVD e verificar se o padrão de comportamento oscilatório se repete;
- aplicar esta metodologia na captura de ondas de choque para casos mais elaborados como escoamentos transientes e viscosos;
- utilizar técnicas, como *Multigrid*, para reduzir o tempo de simulação.

## REFERÊNCIAS

ABGRALL, R. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation. **Journal of Computational Physics**, v. 114, p. 45–58, 1994. Citado na página 24.

ANDERSON, J. D. **Modern Compressible Flow**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003. Citado 10 vezes nas páginas 19, 20, 22, 23, 29, 30, 32, 33, 35 e 36.

ARAKI, L. K. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos reativos em motores-foguete**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 21, 25 e 63.

BACK, L. H.; MASSIER, P. F.; CUFFEL, R. F. Detection of oblique shocks in a conical nozzle with a circular-arc throat. **AIAA Journal**, v. 4, n. 12, p. 2219–2221, 1966. Citado na página 86.

BACK, L. H.; MASSIER, P. F.; GIER, H. L. Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles, with emphasis on the transonic region. **AIAA Journal**, v. 3, n. 9, p. 1606–1614, 1965. Citado 8 vezes nas páginas 8, 18, 23, 26, 52, 68, 85 e 87.

BORGES, R.; CARMONA, M.; COSTA, B.; DON, W. S. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 3191–3211, 2008. Citado na página 24.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 40 e 100.

DÉLERY, J.; DUSSAUGE, J.-P. Some physical aspects of shock wave/boundary layer interactions. **Shock Waves**, v. 19, n. 6, p. 453–468, 2009. Citado na página 24.

GERMER, E. M. **Verificação de funções de interpolação em advecção-difusão 1D com volumes finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 70.

GREENBERG, M. **Advanced Engineering Mathematics**. 2. ed. Harlow: Pearson, 2007. Citado na página 39.

HADJADJ, A.; ONOFRI, M. Nozzle flow separation. **Shock Waves**, v. 19, p. 163–169, 2009. Citado na página 24.

HAGEMANN, G.; FREY, M. Shock pattern in the plume of rocket nozzles: needs for design consideration. **Shock Waves**, v. 17, n. 6, p. 387–395, 2008. Citado na página 24.

HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. **Journal Of Computational Physics**, v. 49, n. 3, p. 357–393, 1983. Citado na página 23.

HARTEN, A.; ENQUIST, B.; OSHER, S.; CHAKRAVARTHY, S. R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii. **Journal of Computational Physics**, v. 71, p. 231–303, 1987. Citado na página 23.

HIRSCH, C. **Numerical computation of internal and external flows**. 3. ed. Salisbury: Wiley, 1988. v. 1. Citado na página 104.

- JIANG, G.-S.; SHU, C.-W. Efficient implementation of weighted eno schemes. **Journal of Computational Physics**, v. 126, p. 202–228, 1996. Citado na página 24.
- JOHN, J. E.; KEITH, T. G. **Gas Dynamics**. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 34.
- KLIEGEL, J. R.; LEVINE, J. N. Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles. **AIAA**, v. 7, p. 1375–1378, 1969. Citado na página 63.
- LEVEQUE, R. J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. 1. ed. New York: Cambridge texts in applied mathematics, 2002. Citado na página 88.
- LIU, X.-D.; OSHER, S.; CHAN, T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. **Journal of Computational Physics**, v. 115, p. 200–212, 1994. Citado na página 24.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 41, 42, 47, 54 e 55.
- MANZINI, G. A second-order tvd implicit-explicit finite volume method for time-dependent convection-reaction equations. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 79, n. 8, p. 2403–2428, 2009. Citado na página 25.
- MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 21, 24, 47, 48 e 49.
- MARCHI, C. H. **Introdução à dinâmica dos fluidos computacional**. 2010. UFPR: Curitiba. Citado na página 48.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. **Relatório Técnico 3: programa Mach1D 5.0**. 2007. Departamento de Mecânica da Universidade Federal do Paraná. Citado 5 vezes nas páginas 51, 52, 54, 61 e 62.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. **Relatório Técnico 5: código Mach2D 6.0**. 2007. Departamento de Mecânica da Universidade Federal do Paraná. Citado 5 vezes nas páginas 51, 52, 54, 61 e 62.
- MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R. A nonorthogonal finite volume method for the solution of all speed flows using co-located variables. **Numerical Heat Transfer**, v. 26, n. Part B, p. 293–311, 1994. Citado na página 46.
- MARTELLI, E.; NASUTI, F.; ONOFRI, M. Numerical calculation of fss/rss transition in highly overexpanded rocket nozzle flows. **Shock Waves**, v. 20, n. 2, p. 139–146, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD**. Tese (Doutorado) — Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 21, 25, 50, 81, 100 e 102.
- NASUTI, F.; ONOFRI, M. Shock structure in separated nozzle flows. **Shock Waves**, v. 19, n. 3, p. 229–237, 2009. Citado na página 24.

OLIVEIRA, M. H. de. **Métodos numéricos não oscilatórios aplicados às leis de conservação hiperbólicas unidimensionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2010. Citado na página 25.

ÖSTLUND, J. **Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads**. Dissertação (Licentiate Thesis) — Royal Institute of Technology, 2002. Citado na página 24.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: Hemisphere, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 92.

PINTO, M. A. V.; SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H. Efeito de parâmetros do método *multigrid* sobre o tempo de cpu para a equação de Burgers unidimensional. **Proceedings of the XXVI CILAMCE**, n. 26, p. 13, 2005. Citado na página 51.

QIAN, Z.; LEE, C.-H. On large time step tvd scheme for hyperbolic conservation laws and its efficiency evaluation. **Journal of Computational Physics**, v. 231, p. 7415–7430, 2012. Citado na página 25.

RAN, Z. Lie symmetry preservation and shock-capturing methods. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 46, p. 325–343, 2008. Citado na página 25.

ROE, P. L. Some contributions to the modelling of discontinuous flows. **Lectures in Applied Mechanics**, v. 22, p. 163–193, 1985. Citado na página 43.

SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. **Numerical Heat Transfer**, v. 4, p. 1–19, 1981. Citado na página 47.

SERNA, S.; MARQUINA, A. Power eno methods: a fifth-order accurate weighted power eno method. **Journal of Computational Physics**, v. 194, p. 632–658, 2004. Citado na página 24.

SHU, C.-W. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. **Institute for Computer Applications in Science and Engineering**, p. 1–79, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 24, 43, 44, 45, 56 e 92.

SHU, C.-W.; OSHER, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. **Journal of Computational Physics**, v. 77, p. 439–471, 1988. Citado na página 24.

STARK, R.; WAGNER, B. Experimental study of boundary layer separation in truncated ideal contour nozzles. **Shock Waves**, v. 19, n. 3, p. 185–191, 2009. Citado na página 24.

SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. **Rocket Propulsion Elements**. 7. ed. New York: John Wiley & Sons, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

THOMAS, L. H. **Elliptic problems in linear differential equations over a network**. 1949. Watson Sci. Comput. Lab Report, Columbia University. Citado na página 47.

van DOORMAAL, J. P.; RAITHBY, G. D. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flow. **Numerical Heat Transfer**, v. 7, p. 147–163, 1984. Citado na página 46.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2. ed. Harlow: Pearson, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 25, 26, 41, 43, 46, 47, 55 e 92.

WANG, J. C. T.; WIDHOPF, G. F. A high-resolution tvd finite volume scheme for the euler equations in conservative form. **Journal Of Computational Physics**, v. 84, n. 1, p. 145–173, 1989. Citado na página 24.

WOODWARD, P.; COLELLA, P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. **Journal of Computational Physics**, v. 54, p. 115–173, 1984. Citado na página 23.

## **Apêndices**

## APÊNDICE A – CÓDIGO PARA OBTENÇÃO DAS CONSTANTES $c_{r,j}$ EM MAPLE®

```

restart;
# Entrada
j:=0;
k:=2;
r:=-1;
a:=i+1/2;
b:=i-r+q-1/2;
c:=i-r+m-1/2;
d:=i-r+1-1/2;
# Cálculo
som1:=0;
for m from j+1 to k do
  # Primeiro somatório
  som2:=0;
  for l from 0 to k do
    # Segundo somatório
    if l<>m then
      prod1:=1;
      for q from 0 to k do
        # Primeiro produtório
        if (q<> m and q<>l) then
          prod1:=prod1*(x[a]-x[b])
        fi;
        # Fim primeiro produtório
      od;
      som2:=som2+prod1;
    fi;
    # Fim segundo somatório
  od;
  prod2:=1;
  for l from 0 to k do
    # Segundo produtório
    if l<>m then
      prod2:=prod2/(x[c]-x[d]);
    fi;
    # Fim segundo produtório
  od;
  som1:=som1+som2*prod2;
  # Fim primeiro somatório
od;
c[r,j]:=som1*Deltax[i-r+j];

```

## APÊNDICE B – OBTENÇÃO DA POSIÇÃO DA ONDA DE CHOQUE NORMAL

Tendo em mente que o choque é tratado como descontinuidade, uma estratégia interessante para identificá-lo é localizar a posição de maior gradiente. Neste trabalho será tratado apenas o caso unidimensional na identificação da posição do choque do escoamento, ou seja, para identificar o local de maior gradiente basta derivar a função que descreve uma propriedade do escoamento e achar seu máximo. Primeiro obtém-se a posição numérica do choque. Como os dados a serem analisados são numéricos, um algoritmo para identificação do maior gradiente numérico foi utilizado, descrito na sequência. Dos campos disponíveis optou-se pelo número de Mach.

- 1 Calcular para todos os volumes reais a derivada numérica
- 2 Identificar qual ponto possui o maior valor absoluto da derivada

Como o local de maior gradiente numérico se trata de uma variável que tem sua posição e valor alterados conforme a malha é refinada, torna-se necessário um tratamento dos dados numéricos, conforme Martins (2013). Neste trabalho serão utilizadas interpolação através de DDV e aproximação por séries de Fourier.

Com a posição da onda de choque definida numericamente através do maior gradiente numérico, resta utilizar as duas ferramentas citadas anteriormente para obter funções que representem a região do choque. Outro meio de encontrar o maior gradiente em um caso unidimensional é derivar duas vezes em relação à direção coordenada e achar a raiz da equação resultante. Martins (2013) sugere o uso de um polinômio de grau 10. Por isso, tal procedimento foi adotado. No caso de Fourier determinou-se a quantidade máxima de pontos à jusante disponível e usou-se esta à montante, incluindo o ponto de maior gradiente numérico.

O procedimento de obtenção do polinômio interpolador foi aquele presente em Chapra e Canale (2008) através das diferenças divididas e equações apresentadas na Seção 2.2.1. De acordo com as Eq. 2.36 a 2.39 é necessário avaliar as constantes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  através de integrais para utilizar a aproximação por série de Fourier. Como se tratam de dados numéricos, um meio para avaliá-los é utilizar integração numérica através da Regra do Trapézio, por exemplo. Outro aspecto importante é a quantidade de pontos de integração necessária para avaliar a série de Fourier. Testes realizados indicam que a quantidade de pontos de integração ótima para este caso é metade do máximo de pontos numéricos disponíveis. Deve-se notar que as constantes

são funções da quantidade de pontos de integração. O algoritmo utilizado para obtenção das constantes é apresentado a seguir.

- 1 Calcular a constante  $a_0$  com a Regra do Trapézio
- 2 Para  $j$  de 1 até  $n_F$ 
  - a Multiplicar os valores numéricos por  $\cos(j\pi x/l_F)$  e  $\sin(j\pi x/l_F)$  e armazenar em vetores diferentes
  - b Calcular as constantes  $a_n$  e  $b_n$ , através dos vetores, para cada  $j$  com a Regra do Trapézio

Com o polinômio e a série definidos basta derivá-los duas vezes e encontrar a raiz com o método de Newton-Raphson para obter o ponto de maior gradiente. Os resultados gerados pela interpolação e aproximação são apresentados nas Fig. B.1 e B.2 para as malhas mais finas, 14336 volumes, da configuração 1 e aproximação UDS.

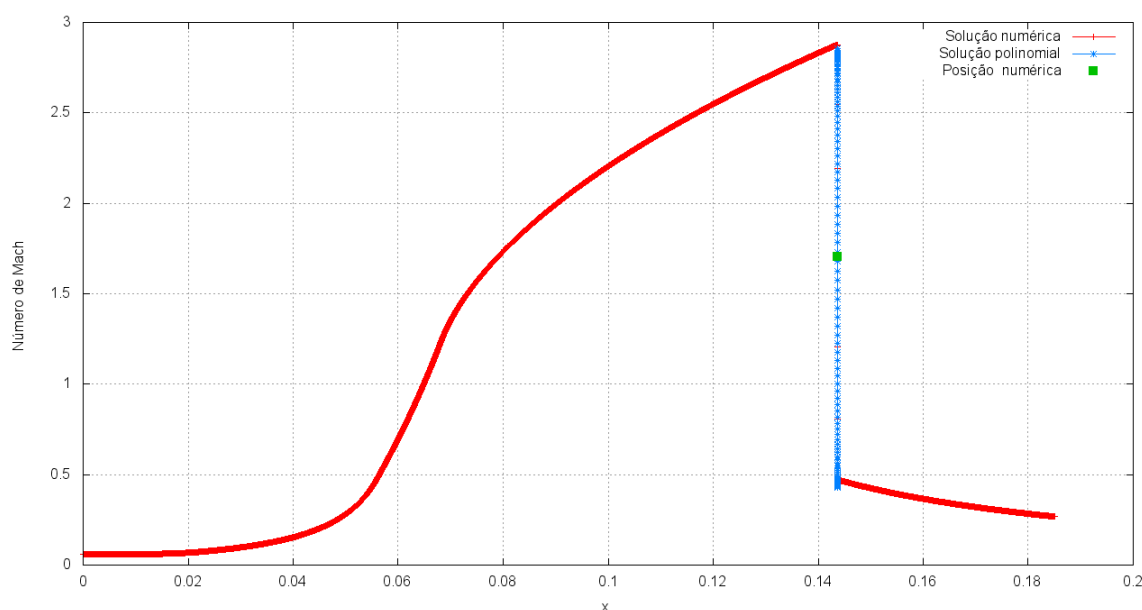


Figura B.1 – Resultado do uso de DDV no campo do número de Mach para malha mais fina, Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

Apesar de ser considerada uma descontinuidade, a solução numérica na região do choque é suavizada, sendo possível representá-la através de um polinômio. Nota-se que a precisão utilizada na obtenção do polinômio é elevada para evitar erros de arredondamento. A seguir, nas Fig. B.3 a B.5, são apresentadas as posições obtidas para cada malha do caso Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS nos três tipos de abordagem: Numérica, DDV e Fourier.

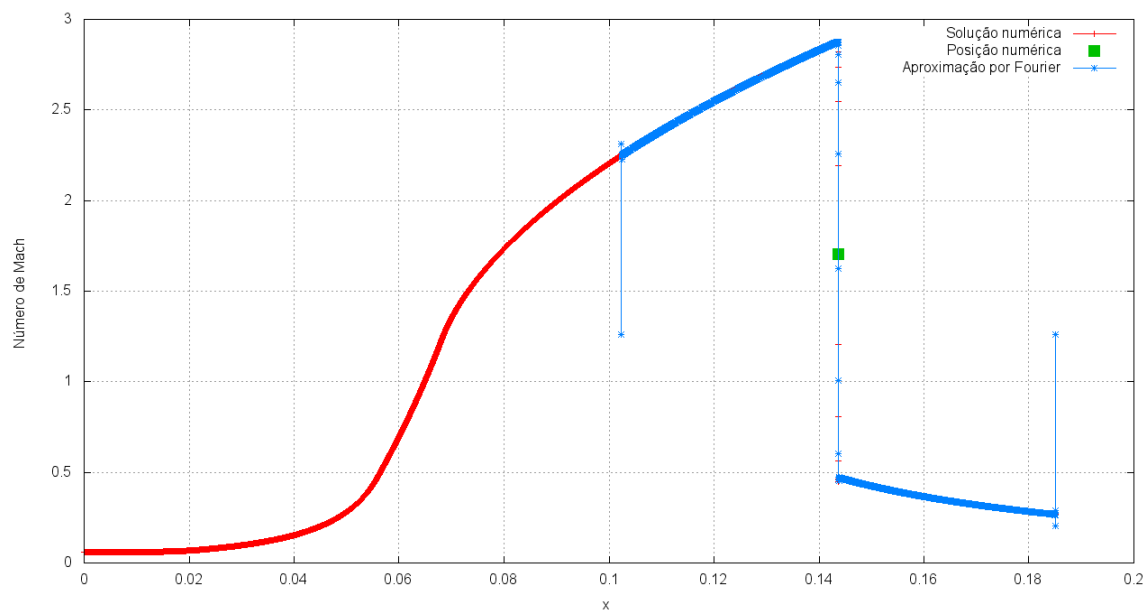


Figura B.2 – Resultado do uso de Fourier no campo do número de Mach para a malha mais fina, Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

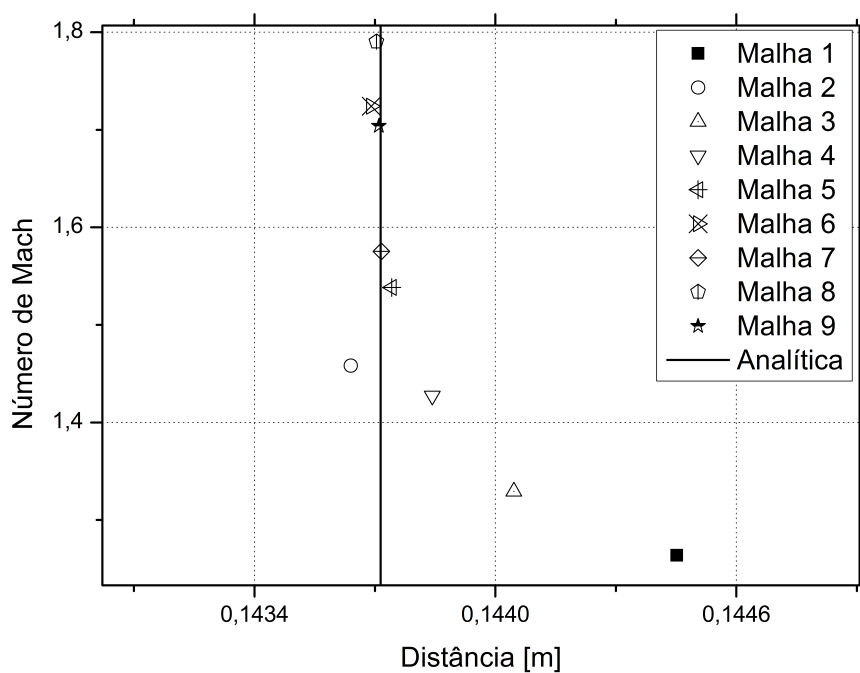


Figura B.3 – Posições obtidas utilizando a abordagem numérica para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

Destaca-se que as posições obtidas através da abordagem numérica oscilam à jusante e à montante da solução analítica, enquanto que isto ocorre de modo reduzido para Fourier e é ausente no caso de DDV. Essas oscilações irão impactar de forma negativa nas análises envolvendo estas variáveis (MARTINS, 2013).

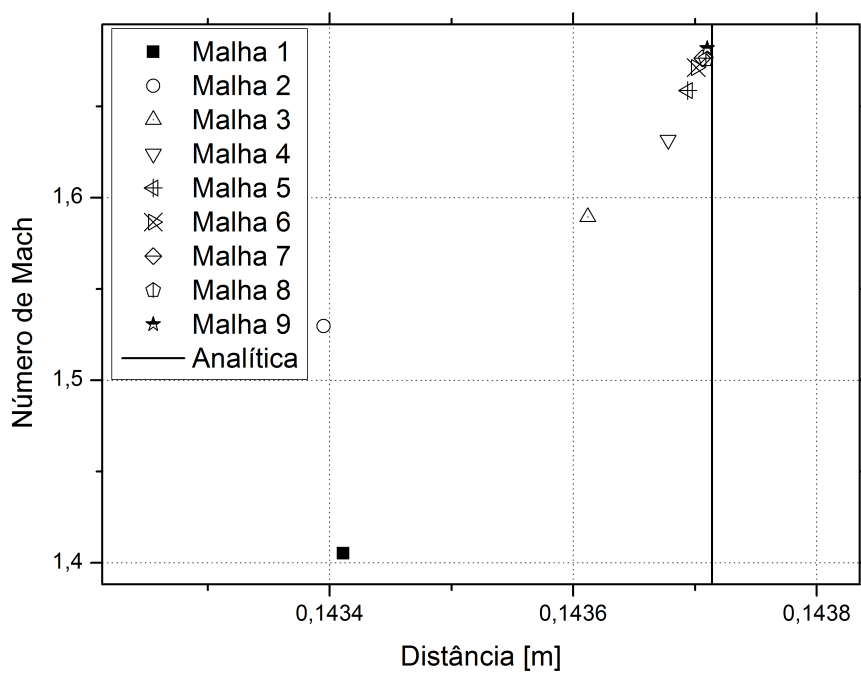


Figura B.4 – Posições obtidas utilizando a abordagem DDV para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

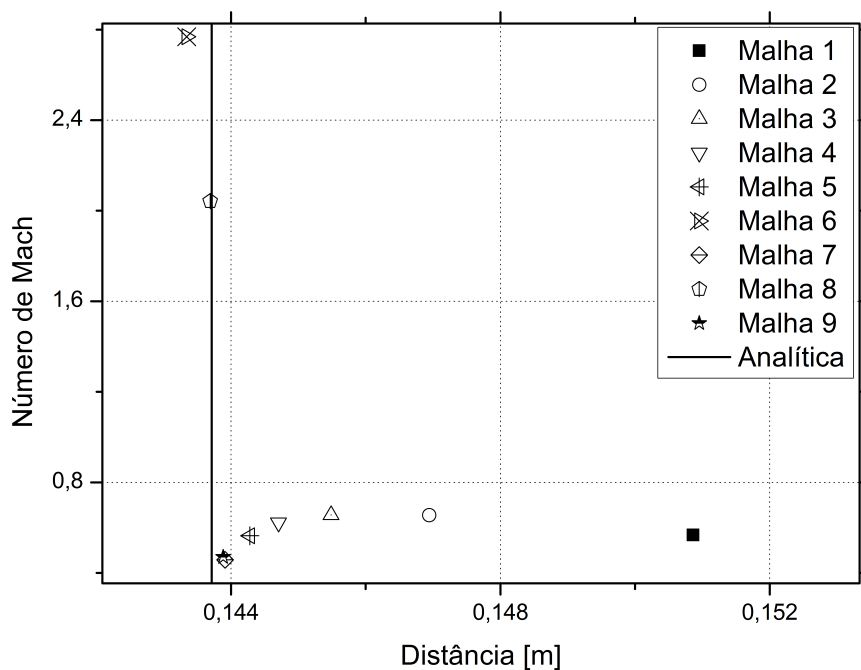


Figura B.5 – Posições obtidas utilizando a abordagem Fourier para Euler 1D, configuração 1 e aproximação UDS.

## APÊNDICE C – OBTENÇÃO DA FORMA ALTERNATIVA DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA

Primeiramente é necessário partir de uma equação de conservação para a energia adequada para o uso de métodos numéricos, ou seja, conservativa. Destaca-se que o termo conservativa neste contexto está relacionado aos aspectos numéricos sem implicar com os físicos. Então, foi selecionada a forma integral da conservação da energia apresentada na Eq. C.1 e componentes nas Eq. C.2 e C.3 (HIRSCH, 1988).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho E d\mathcal{V} + \oint_A (\rho \mathbf{V} H - k \nabla T - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) dA = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{V} + q_H) d\mathcal{V} \quad (\text{C.1})$$

$$E = e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \quad (\text{C.2})$$

$$H = h + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \quad (\text{C.3})$$

Nas equações anteriores,  $t$  é o tempo,  $E$  é a energia interna total,  $H$  é a entalpia de estagnação,  $k$  é a condutividade térmica,  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor tensão,  $\mathbf{f}_e$  é o vetor de forças externas,  $q_H$  é o termo fonte de calor,  $e$  é a energia interna específica e  $h$  a entalpia específica. Negligenciando as tensões de cisalhamento ( $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}$ ), condução ( $k \nabla T$ ) e adição calor ( $q_H$ ), forças externas ( $\rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{V}$ ) e os termos temporais (regime permanente) chega-se a equação de Euler para a energia sem termos fontes e em regime permanente (a partir daqui forma alternativa da equação da energia, apenas), expressa na Eq. C.4.

$$\oint_A \rho \mathbf{V} H dA = 0 \quad (\text{C.4})$$

Com a forma alternativa da equação da energia definida necessita-se avaliá-la para o tipo de escoamento que se pretende resolver, neste caso: quase unidimensional. Então usa-se a Fig. C.1a para avaliar a forma alternativa da equação da energia e obter uma representação genérica para o caso quase unidimensional, Eq. C.5. Após isso, avalia-se este resultado para um volume de controle infinitesimal, através da Fig. C.1b, o resultado é apresentado na Eq. C.6.

$$\oint_A \rho \mathbf{V} H dA = \rho_2 u_2 H_2 A_2 - \rho_1 u_1 H_1 A_1 \quad (\text{C.5})$$

$$\rho_2 u_2 H_2 A_2 - \rho_1 u_1 H_1 A_1 = (\rho + d\rho)(u + du)(H + dH)(A + dA) - \rho u H A \quad (\text{C.6})$$

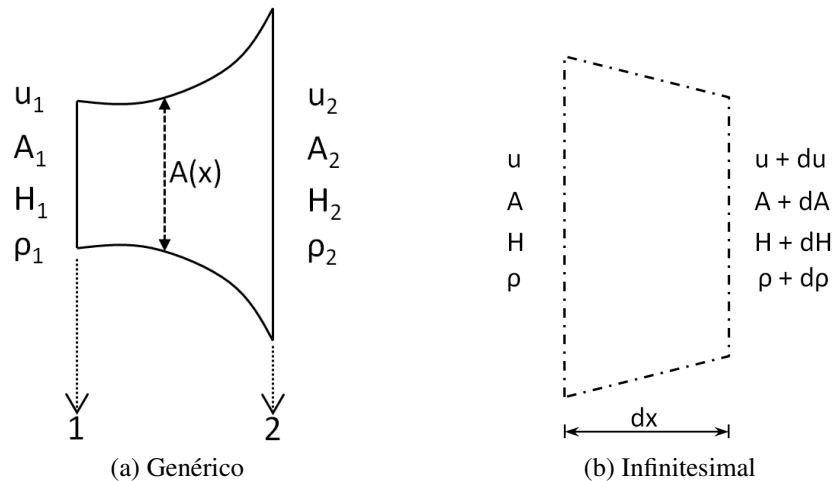


Figura C.1 – Volumes de controle.

Expandindo a Eq. C.6 e negligenciando os termos que contêm produto de diferenciais resulta a Eq. C.7, nota-se que é possível utilizar a regra da cadeia para verificar a igualdade.

$$AHud\rho + AH\rho du + A\rho u dH + H\rho u dA = d(\rho u HA) \quad (C.7)$$

Agora, dividindo o resultado por  $dx$  resulta a forma alternativa da equação da energia na forma diferencial para um escoamento quase unidimensional, apresentada na Eq. C.8.

$$\frac{d}{dx}(\rho u HA) = 0 \quad (C.8)$$

Para obter a forma alternativa da equação de conservação da energia térmica utiliza-se a Eq. C.3 e a hipótese de um gás caloricamente perfeito (Eq. C.9), que resulta a Eq. C.10.

$$h = c_p T \quad (C.9)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u A c_p T) + \frac{d}{dx}\left(\rho u A \frac{u^2}{2}\right) = 0 \quad (C.10)$$

## APÊNDICE D – DADOS NUMÉRICOS DOS ERROS E ORDENS

Neste são apresentados os dados numéricos dos erros e ordens para as equações de Euler 2D, Tab. D.1, Burgers, Tab. D.2 a D.4 e Euler 1D, Tab. D.5 a D.14

Tabela D.1 – Módulo dos erros numéricos e ordens aparentes e efetivas para Euler 2D.

Tamanho do volume [m]	Módulo dos erros numéricos		Ordens aparentes		Ordens efetivas	
	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD
$7,71 \cdot 10^{-3}$	$9,38 \cdot 10^{-2}$	$5,01 \cdot 10^{-2}$	-	-	-	-
$3,85 \cdot 10^{-3}$	$6,07 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	-	-	0,63	1,57
$1,93 \cdot 10^{-3}$	$3,25 \cdot 10^{-2}$	$7,94 \cdot 10^{-4}$	0,22	1,07	0,90	4,40
$9,64 \cdot 10^{-4}$	$1,76 \cdot 10^{-2}$	$6,24 \cdot 10^{-4}$	0,91	6,56	0,89	0,35
$6,42 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$4,63 \cdot 10^{-4}$	0,76	-0,90	0,97	0,74
$4,82 \cdot 10^{-4}$	$8,90 \cdot 10^{-3}$	$4,27 \cdot 10^{-4}$	0,92	3,21	0,99	0,28
$3,21 \cdot 10^{-4}$	$5,95 \cdot 10^{-3}$	$3,08 \cdot 10^{-4}$	0,99	-2,39	0,99	0,80
$2,41 \cdot 10^{-4}$	$4,41 \cdot 10^{-3}$	$2,93 \cdot 10^{-4}$	0,88	4,80	1,04	0,17
$1,61 \cdot 10^{-4}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$2,90 \cdot 10^{-4}$	0,96	5,35	1,08	0,03
$1,20 \cdot 10^{-4}$	$2,08 \cdot 10^{-3}$	$2,77 \cdot 10^{-4}$	1,03	-4,94	1,10	0,16

Nota: - Não aplicável.

Tabela D.2 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Burgers.

Tamanho do volume [m]	UDS	Velocidade média [m/s]			
		CDS	TVD	ENO1	ENO2
$1,00 \cdot 10^{-1}$	$1,98 \cdot 10^{-2}$	$5,25 \cdot 10^{-2}$	$2,68 \cdot 10^{-2}$	$2,52 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-2}$
$5,00 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$5,69 \cdot 10^{-3}$	$2,96 \cdot 10^{-3}$
$2,50 \cdot 10^{-2}$	$9,41 \cdot 10^{-3}$	$2,61 \cdot 10^{-3}$	$2,61 \cdot 10^{-3}$	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$7,06 \cdot 10^{-4}$
$1,25 \cdot 10^{-2}$	$5,23 \cdot 10^{-3}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$1,67 \cdot 10^{-4}$
$6,25 \cdot 10^{-3}$	$2,76 \cdot 10^{-3}$	$1,60 \cdot 10^{-4}$	$1,60 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$4,03 \cdot 10^{-5}$
$3,13 \cdot 10^{-3}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$4,01 \cdot 10^{-5}$	$4,01 \cdot 10^{-5}$	$7,02 \cdot 10^{-4}$	$9,86 \cdot 10^{-6}$
$1,56 \cdot 10^{-3}$	$7,20 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$3,58 \cdot 10^{-4}$	$2,44 \cdot 10^{-6}$
$7,81 \cdot 10^{-4}$	$3,63 \cdot 10^{-4}$	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$	$6,05 \cdot 10^{-7}$
$3,91 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-4}$	$6,26 \cdot 10^{-7}$	$6,26 \cdot 10^{-7}$	$9,09 \cdot 10^{-5}$	$1,51 \cdot 10^{-7}$
$1,95 \cdot 10^{-4}$	$9,12 \cdot 10^{-5}$	$1,57 \cdot 10^{-7}$	$1,57 \cdot 10^{-7}$	$4,56 \cdot 10^{-5}$	$3,77 \cdot 10^{-8}$

Tabela D.3 – Módulo dos erros numéricos com MER para Burgers.

Tamanho do volume [m]	Velocidade média [m/s]				
	UDS	CDS	TVD	ENO1	ENO2
$1,00 \cdot 10^{-1}$	-	-	-	-	-
$5,00 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$2,92 \cdot 10^{-3}$	$5,62 \cdot 10^{-3}$	$8,87 \cdot 10^{-3}$	$9,19 \cdot 10^{-5}$
$2,50 \cdot 10^{-2}$	$8,72 \cdot 10^{-4}$	$1,79 \cdot 10^{-5}$	$5,51 \cdot 10^{-4}$	$6,39 \cdot 10^{-4}$	$6,48 \cdot 10^{-5}$
$1,25 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-4}$	$4,80 \cdot 10^{-8}$	$8,99 \cdot 10^{-6}$	$6,77 \cdot 10^{-5}$	$3,67 \cdot 10^{-6}$
$6,25 \cdot 10^{-3}$	$7,56 \cdot 10^{-6}$	$2,20 \cdot 10^{-10}$	$3,56 \cdot 10^{-8}$	$1,99 \cdot 10^{-6}$	$5,65 \cdot 10^{-9}$
$3,13 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-7}$	$3,23 \cdot 10^{-15}$	$3,49 \cdot 10^{-11}$	$6,79 \cdot 10^{-10}$	$3,09 \cdot 10^{-9}$
$1,56 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-9}$	$2,19 \cdot 10^{-14}$	$6,46 \cdot 10^{-15}$	$3,62 \cdot 10^{-10}$	$5,41 \cdot 10^{-11}$
$7,81 \cdot 10^{-4}$	$1,76 \cdot 10^{-11}$	$5,40 \cdot 10^{-15}$	$6,19 \cdot 10^{-15}$	$3,63 \cdot 10^{-12}$	$1,14 \cdot 10^{-12}$
$3,91 \cdot 10^{-4}$	$2,08 \cdot 10^{-13}$	$1,13 \cdot 10^{-13}$	$1,61 \cdot 10^{-13}$	$1,89 \cdot 10^{-12}$	$3,54 \cdot 10^{-12}$
$1,95 \cdot 10^{-4}$	$5,06 \cdot 10^{-14}$	$1,18 \cdot 10^{-13}$	$8,00 \cdot 10^{-13}$	$5,77 \cdot 10^{-12}$	$1,48 \cdot 10^{-11}$

Nota: - Não aplicável.

Tabela D.4 – Ordens efetivas e aparentes para Burgers.

Tamanho do volume [m]	Ordens efetivas					Ordens aparentes				
	UDS	CDS	TVD	ENO1	ENO2	UDS	CDS	TVD	ENO1	ENO2
$1,00 \cdot 10^{-1}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$5,00 \cdot 10^{-2}$	0,36	2,26	1,30	-1,18	1,97	-	-	-	-	-
$2,50 \cdot 10^{-2}$	0,71	2,07	2,07	0,44	2,07	-0,45	2,32	0,94	*	1,93
$1,25 \cdot 10^{-2}$	0,85	2,02	2,02	0,75	2,08	0,52	2,08	2,08	-0,19	2,06
$6,25 \cdot 10^{-3}$	0,92	2,00	2,00	0,88	2,05	0,76	2,02	2,02	0,59	2,08
$3,13 \cdot 10^{-3}$	0,96	2,00	2,00	0,94	2,03	0,88	2,01	2,01	0,81	2,06
$1,56 \cdot 10^{-3}$	0,98	2,00	2,00	0,97	2,02	0,94	2,00	2,00	0,91	2,04
$7,81 \cdot 10^{-4}$	0,99	2,00	2,00	0,99	2,01	0,97	2,00	2,00	0,96	2,02
$3,91 \cdot 10^{-4}$	0,99	2,00	2,00	0,99	2,00	0,98	2,00	2,00	0,98	2,01
$1,95 \cdot 10^{-4}$	1,00	2,00	2,00	1,00	2,00	0,99	2,00	2,00	0,99	2,01

Nota: - Não aplicável.

Nota: \* Valor inválido.

Tabela D.5 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 1.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD				
			DDV	Fourier	Coefficiente de descarga	Mach na saída	Posição numérica	DDV	Fourier	Coefficiente de descarga
$3,30 \cdot 10^{-3}$	$2,43 \cdot 10^{-2}$	$1,41 \cdot 10^{-3}$	$6,46 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-3}$	$9,10 \cdot 10^{-2}$	$2,80 \cdot 10^{-4}$	$1,41 \cdot 10^{-3}$	$2,40 \cdot 10^{-3}$	$2,82 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$
$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$5,10 \cdot 10^{-4}$	$4,04 \cdot 10^{-4}$	$4,93 \cdot 10^{-2}$	$1,87 \cdot 10^{-4}$	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$8,89 \cdot 10^{-3}$	$6,96 \cdot 10^{-4}$
$8,26 \cdot 10^{-4}$	$7,18 \cdot 10^{-3}$	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-4}$	$2,12 \cdot 10^{-4}$	$2,70 \cdot 10^{-2}$	$5,68 \cdot 10^{-5}$	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$5,47 \cdot 10^{-4}$	$2,14 \cdot 10^{-3}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$
$4,13 \cdot 10^{-4}$	$3,79 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-5}$	$9,35 \cdot 10^{-5}$	$9,58 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$	$3,85 \cdot 10^{-5}$	$1,38 \cdot 10^{-5}$	$2,14 \cdot 10^{-4}$	$3,18 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-4}$
$2,07 \cdot 10^{-4}$	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$8,77 \cdot 10^{-5}$	$4,49 \cdot 10^{-5}$	$4,74 \cdot 10^{-5}$	$7,29 \cdot 10^{-3}$	$1,72 \cdot 10^{-5}$	$8,77 \cdot 10^{-5}$	$,45 \cdot 10^{-4}$	$2,91 \cdot 10^{-3}$	$8,34 \cdot 10^{-5}$
$1,03 \cdot 10^{-4}$	$9,69 \cdot 10^{-4}$	$3,70 \cdot 10^{-5}$	$2,49 \cdot 10^{-5}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$	$3,66 \cdot 10^{-3}$	$5,44 \cdot 10^{-6}$	$3,70 \cdot 10^{-5}$	$7,15 \cdot 10^{-5}$	$3,52 \cdot 10^{-4}$	$3,85 \cdot 10^{-5}$
$5,16 \cdot 10^{-5}$	$4,83 \cdot 10^{-4}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$	$1,39 \cdot 10^{-5}$	$1,42 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^{-3}$	$2,56 \cdot 10^{-7}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$	$3,48 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^{-5}$
$2,58 \cdot 10^{-5}$	$2,39 \cdot 10^{-4}$	$1,10 \cdot 10^{-6}$	$7,66 \cdot 10^{-6}$	$7,95 \cdot 10^{-6}$	$9,19 \cdot 10^{-4}$	$2,81 \cdot 10^{-6}$	$2,43 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-5}$	$1,70 \cdot 10^{-5}$	$7,09 \cdot 10^{-6}$
$1,29 \cdot 10^{-5}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-6}$	$4,69 \cdot 10^{-6}$	$4,77 \cdot 10^{-6}$	$4,60 \cdot 10^{-4}$	$3,91 \cdot 10^{-6}$	$5,25 \cdot 10^{-6}$	$1,01 \cdot 10^{-5}$	$3,14 \cdot 10^{-5}$	$2,93 \cdot 10^{-6}$

Tabela D.6 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 1.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD				
			DDV	Fourier	Coefficiente de descarga	Mach na saída	Posição numérica	DDV	Fourier	Coefficiente de descarga
$3,30 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$3,73 \cdot 10^{-4}$	$9,13 \cdot 10^{-4}$	$7,63 \cdot 10^{-3}$	$9,46 \cdot 10^{-5}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$3,00 \cdot 10^{-5}$	$4,60 \cdot 10^{-2}$	$3,43 \cdot 10^{-4}$
$8,26 \cdot 10^{-4}$	$9,53 \cdot 10^{-4}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$2,07 \cdot 10^{-4}$	$3,29 \cdot 10^{-4}$	$3,65 \cdot 10^{-3}$	$4,32 \cdot 10^{-4}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$2,15 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-3}$
$4,13 \cdot 10^{-4}$	$6,55 \cdot 10^{-6}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$3,20 \cdot 10^{-6}$	$8,46 \cdot 10^{-5}$	$4,25 \cdot 10^{-5}$	$1,46 \cdot 10^{-4}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$8,13 \cdot 10^{-3}$	$5,37 \cdot 10^{-4}$
$2,07 \cdot 10^{-4}$	$5,29 \cdot 10^{-5}$	$4,43 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{-5}$	$1,73 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^{-4}$	$6,06 \cdot 10^{-6}$	$4,43 \cdot 10^{-4}$	$1,98 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-3}$	$4,09 \cdot 10^{-5}$
$1,03 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-5}$	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$7,21 \cdot 10^{-6}$	$4,69 \cdot 10^{-6}$	$3,62 \cdot 10^{-5}$	$6,99 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$7,51 \cdot 10^{-5}$	$7,20 \cdot 10^{-3}$	$8,84 \cdot 10^{-6}$
$5,16 \cdot 10^{-5}$	$2,73 \cdot 10^{-6}$	$1,40 \cdot 10^{-5}$	$9,78 \cdot 10^{-7}$	$1,51 \cdot 10^{-6}$	$7,41 \cdot 10^{-6}$	$5,53 \cdot 10^{-6}$	$1,40 \cdot 10^{-5}$	$8,92 \cdot 10^{-6}$	$3,40 \cdot 10^{-3}$	$3,26 \cdot 10^{-6}$
$2,58 \cdot 10^{-5}$	$4,29 \cdot 10^{-6}$	$1,57 \cdot 10^{-5}$	$5,05 \cdot 10^{-7}$	$1,18 \cdot 10^{-6}$	$1,48 \cdot 10^{-6}$	$5,02 \cdot 10^{-6}$	$7,15 \cdot 10^{-5}$	$9,37 \cdot 10^{-6}$	$2,95 \cdot 10^{-4}$	$1,31 \cdot 10^{-6}$
$1,29 \cdot 10^{-5}$	$4,63 \cdot 10^{-6}$	$3,00 \cdot 10^{-5}$	$2,17 \cdot 10^{-6}$	$1,62 \cdot 10^{-6}$	$1,61 \cdot 10^{-7}$	$4,80 \cdot 10^{-6}$	$5,71 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-5}$	$2,35 \cdot 10^{-4}$	$4,85 \cdot 10^{-7}$

Nota: - Não aplicável.

Tabela D.7 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 2.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD			Coeficiente de descarga	Mach na saída	Posição numérica	Coeficiente de descarga
			DDV	Fourier	Coeficiente de descarga	DDV	Fourier	Coeficiente de descarga				
$3,30 \cdot 10^{-3}$	$2,52 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$8,53 \cdot 10^{-5}$	$9,24 \cdot 10^{-2}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^{-3}$	$6,31 \cdot 10^{-4}$	$6,31 \cdot 10^{-4}$	
$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$	$4,15 \cdot 10^{-4}$	$2,68 \cdot 10^{-5}$	$2,24 \cdot 10^{-5}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$	$5,32 \cdot 10^{-5}$	$4,15 \cdot 10^{-4}$	$8,45 \cdot 10^{-4}$	$6,86 \cdot 10^{-3}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$	
$8,26 \cdot 10^{-4}$	$7,30 \cdot 10^{-3}$	$9,35 \cdot 10^{-6}$	$3,59 \cdot 10^{-5}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$2,69 \cdot 10^{-2}$	$8,89 \cdot 10^{-5}$	$9,35 \cdot 10^{-6}$	$2,15 \cdot 10^{-4}$	$2,93 \cdot 10^{-4}$	$3,50 \cdot 10^{-4}$	$3,50 \cdot 10^{-4}$	
$4,13 \cdot 10^{-4}$	$3,82 \cdot 10^{-3}$	$1,94 \cdot 10^{-4}$	$4,93 \cdot 10^{-5}$	$4,14 \cdot 10^{-5}$	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$4,58 \cdot 10^{-5}$	$2,12 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-4}$	$2,16 \cdot 10^{-4}$	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$1,89 \cdot 10^{-4}$	
$2,07 \cdot 10^{-4}$	$1,94 \cdot 10^{-3}$	$9,21 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$	$7,17 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-4}$	$5,90 \cdot 10^{-5}$	$6,87 \cdot 10^{-4}$	$8,74 \cdot 10^{-5}$	$8,74 \cdot 10^{-5}$	
$1,03 \cdot 10^{-4}$	$9,71 \cdot 10^{-4}$	$4,14 \cdot 10^{-5}$	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$8,49 \cdot 10^{-6}$	$3,60 \cdot 10^{-3}$	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$4,14 \cdot 10^{-5}$	$3,29 \cdot 10^{-5}$	$4,32 \cdot 10^{-5}$	$3,87 \cdot 10^{-5}$	$3,87 \cdot 10^{-5}$	
$5,16 \cdot 10^{-5}$	$4,84 \cdot 10^{-4}$	$1,60 \cdot 10^{-5}$	$3,78 \cdot 10^{-6}$	$2,94 \cdot 10^{-6}$	$1,80 \cdot 10^{-3}$	$3,35 \cdot 10^{-7}$	$1,60 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	
$2,58 \cdot 10^{-5}$	$2,40 \cdot 10^{-4}$	$3,33 \cdot 10^{-6}$	$6,94 \cdot 10^{-7}$	$4,15 \cdot 10^{-7}$	$9,01 \cdot 10^{-4}$	$2,93 \cdot 10^{-6}$	$3,33 \cdot 10^{-6}$	$1,32 \cdot 10^{-6}$	$6,93 \cdot 10^{-7}$	$6,90 \cdot 10^{-6}$	$6,90 \cdot 10^{-6}$	
$1,29 \cdot 10^{-5}$	$1,18 \cdot 10^{-4}$	$3,01 \cdot 10^{-6}$	$4,68 \cdot 10^{-7}$	$5,90 \cdot 10^{-7}$	$4,51 \cdot 10^{-4}$	$4,02 \cdot 10^{-6}$	$3,01 \cdot 10^{-6}$	$6,49 \cdot 10^{-6}$	$8,03 \cdot 10^{-6}$	$2,83 \cdot 10^{-6}$	$2,83 \cdot 10^{-6}$	

Tabela D.8 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 2.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD			Coeficiente de descarga	Mach na saída	Posição numérica	Coeficiente de descarga
			DDV	Fourier	Coeficiente de descarga	DDV	Fourier	Coeficiente de descarga				
$3,30 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,81 \cdot 10^{-3}$	$3,97 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-4}$	$4,06 \cdot 10^{-5}$	$6,91 \cdot 10^{-3}$	$2,71 \cdot 10^{-4}$	$3,97 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-5}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	$9,93 \cdot 10^{-4}$	$9,93 \cdot 10^{-4}$	
$8,26 \cdot 10^{-4}$	$8,52 \cdot 10^{-4}$	$3,97 \cdot 10^{-4}$	$1,94 \cdot 10^{-4}$	$9,87 \cdot 10^{-5}$	$3,21 \cdot 10^{-3}$	$3,98 \cdot 10^{-4}$	$3,97 \cdot 10^{-4}$	$5,48 \cdot 10^{-4}$	$1,22 \cdot 10^{-2}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	
$4,13 \cdot 10^{-4}$	$2,17 \cdot 10^{-5}$	$3,97 \cdot 10^{-4}$	$3,04 \cdot 10^{-5}$	$2,21 \cdot 10^{-5}$	$6,41 \cdot 10^{-5}$	$1,41 \cdot 10^{-4}$	$8,40 \cdot 10^{-4}$	$3,28 \cdot 10^{-4}$	$3,02 \cdot 10^{-3}$	$5,08 \cdot 10^{-4}$	$5,08 \cdot 10^{-4}$	
$2,07 \cdot 10^{-4}$	$5,18 \cdot 10^{-5}$	$2,63 \cdot 10^{-4}$	$3,41 \cdot 10^{-5}$	$2,28 \cdot 10^{-5}$	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$5,63 \cdot 10^{-6}$	$3,14 \cdot 10^{-4}$	$1,11 \cdot 10^{-4}$	$2,51 \cdot 10^{-3}$	$3,88 \cdot 10^{-5}$	$3,88 \cdot 10^{-5}$	
$1,03 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$7,16 \cdot 10^{-7}$	$1,80 \cdot 10^{-6}$	$2,64 \cdot 10^{-5}$	$6,92 \cdot 10^{-6}$	$2,82 \cdot 10^{-4}$	$1,85 \cdot 10^{-4}$	$2,59 \cdot 10^{-3}$	$8,00 \cdot 10^{-6}$	$8,00 \cdot 10^{-6}$	
$5,16 \cdot 10^{-5}$	$2,83 \cdot 10^{-6}$	$1,25 \cdot 10^{-5}$	$2,10 \cdot 10^{-6}$	$1,77 \cdot 10^{-6}$	$7,26 \cdot 10^{-6}$	$5,63 \cdot 10^{-6}$	$1,74 \cdot 10^{-4}$	$1,21 \cdot 10^{-4}$	$8,71 \cdot 10^{-4}$	$3,21 \cdot 10^{-6}$	$3,21 \cdot 10^{-6}$	
$2,58 \cdot 10^{-5}$	$4,49 \cdot 10^{-6}$	$9,24 \cdot 10^{-6}$	$2,15 \cdot 10^{-6}$	$1,91 \cdot 10^{-6}$	$1,04 \cdot 10^{-6}$	$5,11 \cdot 10^{-6}$	$1,82 \cdot 10^{-5}$	$5,06 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-6}$	$1,24 \cdot 10^{-6}$	
$1,29 \cdot 10^{-5}$	$4,74 \cdot 10^{-6}$	$9,35 \cdot 10^{-6}$	$1,14 \cdot 10^{-6}$	$1,27 \cdot 10^{-6}$	$1,38 \cdot 10^{-7}$	$4,90 \cdot 10^{-6}$	$1,13 \cdot 10^{-5}$	$1,20 \cdot 10^{-5}$	$2,24 \cdot 10^{-5}$	$4,65 \cdot 10^{-7}$	$4,65 \cdot 10^{-7}$	

Nota: - Não aplicável.

Tabela D.9 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 3.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD				
			DDV	Fourier	Coefficiente de descarga	DDV	Fourier	Coefficiente de descarga		
$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{-2}$	$2,70 \cdot 10^{-3}$	$2,77 \cdot 10^{-3}$	$5,11 \cdot 10^{-2}$	$9,41 \cdot 10^{-2}$	$7,38 \cdot 10^{-4}$	$2,70 \cdot 10^{-3}$	$6,07 \cdot 10^{-4}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$	$3,73 \cdot 10^{-3}$
$5,00 \cdot 10^{-3}$	$9,34 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-3}$	$3,65 \cdot 10^{-3}$	$3,69 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-2}$	$2,61 \cdot 10^{-5}$	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$2,31 \cdot 10^{-3}$	$1,40 \cdot 10^0$	$1,17 \cdot 10^{-4}$
$2,50 \cdot 10^{-3}$	$4,75 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-3}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$2,44 \cdot 10^{-2}$	$5,21 \cdot 10^{-5}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$1,90 \cdot 10^{-4}$
$1,25 \cdot 10^{-3}$	$2,40 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$1,47 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^{-5}$	$4,30 \cdot 10^{-4}$	$8,91 \cdot 10^{-4}$	$3,17 \cdot 10^{-3}$	$6,63 \cdot 10^{-5}$
$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,21 \cdot 10^{-3}$	$7,42 \cdot 10^{-4}$	$8,05 \cdot 10^{-4}$	$8,09 \cdot 10^{-4}$	$6,18 \cdot 10^{-3}$	$3,72 \cdot 10^{-6}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$4,27 \cdot 10^{-4}$	$2,33 \cdot 10^{-3}$	$1,88 \cdot 10^{-5}$
$3,13 \cdot 10^{-4}$	$6,04 \cdot 10^{-4}$	$2,73 \cdot 10^{-4}$	$4,21 \cdot 10^{-4}$	$4,27 \cdot 10^{-4}$	$3,10 \cdot 10^{-3}$	$9,86 \cdot 10^{-7}$	$2,73 \cdot 10^{-4}$	$2,04 \cdot 10^{-4}$	$2,21 \cdot 10^{-4}$	$4,99 \cdot 10^{-6}$
$1,56 \cdot 10^{-4}$	$3,03 \cdot 10^{-4}$	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$2,26 \cdot 10^{-4}$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^{-7}$	$3,91 \cdot 10^{-5}$	$1,19 \cdot 10^{-4}$	$6,91 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-6}$
$7,81 \cdot 10^{-5}$	$1,51 \cdot 10^{-4}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$7,76 \cdot 10^{-4}$	$6,39 \cdot 10^{-8}$	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$6,88 \cdot 10^{-5}$	$7,33 \cdot 10^{-5}$	$3,24 \cdot 10^{-7}$
$3,91 \cdot 10^{-5}$	$7,57 \cdot 10^{-5}$	$5,86 \cdot 10^{-5}$	$7,16 \cdot 10^{-5}$	$7,20 \cdot 10^{-5}$	$3,88 \cdot 10^{-4}$	$1,61 \cdot 10^{-8}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$	$4,16 \cdot 10^{-5}$	$4,49 \cdot 10^{-4}$	$8,14 \cdot 10^{-8}$

Tabela D.10 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 3.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD				
			DDV	Fourier	Coefficiente de descarga	DDV	Fourier	Coefficiente de descarga		
$1,00 \cdot 10^{-2}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$5,00 \cdot 10^{-3}$	$4,00 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$4,53 \cdot 10^{-3}$	$4,37 \cdot 10^{-2}$	$1,81 \cdot 10^{-3}$	$7,90 \cdot 10^{-4}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$4,01 \cdot 10^{-3}$	$2,80 \cdot 10^0$	$3,96 \cdot 10^{-3}$
$2,50 \cdot 10^{-3}$	$6,91 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$2,33 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$3,96 \cdot 10^{-4}$	$1,59 \cdot 10^{-4}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$2,90 \cdot 10^{-4}$	$2,83 \cdot 10^0$	$9,70 \cdot 10^{-4}$
$1,25 \cdot 10^{-3}$	$3,71 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$1,74 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{-5}$	$4,65 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-4}$	$9,70 \cdot 10^{-1}$	$4,97 \cdot 10^{-5}$
$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-7}$	$1,28 \cdot 10^{-5}$	$2,23 \cdot 10^{-6}$	$1,76 \cdot 10^{-4}$	$2,57 \cdot 10^{-7}$	$1,36 \cdot 10^{-5}$	$1,90 \cdot 10^{-5}$	$2,31 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-1}$	$5,34 \cdot 10^{-6}$
$3,13 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-9}$	$2,09 \cdot 10^{-4}$	$1,60 \cdot 10^{-7}$	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$3,94 \cdot 10^{-9}$	$1,83 \cdot 10^{-6}$	$8,38 \cdot 10^{-4}$	$8,38 \cdot 10^{-6}$	$5,13 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-7}$
$1,56 \cdot 10^{-4}$	$6,85 \cdot 10^{-11}$	$3,38 \cdot 10^{-4}$	$3,64 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-5}$	$1,83 \cdot 10^{-10}$	$1,16 \cdot 10^{-7}$	$7,11 \cdot 10^{-4}$	$7,00 \cdot 10^{-5}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$	$2,34 \cdot 10^{-8}$
$7,81 \cdot 10^{-5}$	$3,14 \cdot 10^{-13}$	$7,73 \cdot 10^{-5}$	$8,20 \cdot 10^{-6}$	$1,64 \cdot 10^{-5}$	$4,56 \cdot 10^{-15}$	$2,71 \cdot 10^{-9}$	$4,27 \cdot 10^{-4}$	$2,82 \cdot 10^{-7}$	$3,18 \cdot 10^{-3}$	$5,99 \cdot 10^{-9}$
$3,91 \cdot 10^{-5}$	$1,87 \cdot 10^{-14}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$	$2,53 \cdot 10^{-5}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$	$4,64 \cdot 10^{-13}$	$5,98 \cdot 10^{-11}$	$1,99 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-5}$	$4,52 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-11}$

Nota: - Não aplicável.

Tabela D.11 – Módulo dos erros numéricos sem MER para Euler 1D, configuração 4.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD				
			DDV	Fourier	Coefficiente de descarga	Mach na saída	Posição numérica	DDV	Fourier	Coefficiente de descarga
$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$3,63 \cdot 10^{-3}$	$9,37 \cdot 10^{-2}$	$8,81 \cdot 10^{-4}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$3,26 \cdot 10^{-3}$	$4,43 \cdot 10^{-3}$
$5,00 \cdot 10^{-3}$	$9,40 \cdot 10^{-3}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$	$2,60 \cdot 10^{-3}$	$2,95 \cdot 10^{-3}$	$4,74 \cdot 10^{-2}$	$2,60 \cdot 10^{-5}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-4}$
$2,50 \cdot 10^{-3}$	$4,75 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$1,77 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-2}$	$2,15 \cdot 10^{-5}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,80 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-4}$
$1,25 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-3}$	$4,69 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$8,75 \cdot 10^{-6}$	$4,69 \cdot 10^{-4}$	$6,00 \cdot 10^{-4}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	$4,33 \cdot 10^{-5}$
$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-3}$	$7,81 \cdot 10^{-4}$	$5,48 \cdot 10^{-4}$	$5,57 \cdot 10^{-4}$	$6,05 \cdot 10^{-3}$	$2,57 \cdot 10^{-6}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$3,21 \cdot 10^{-4}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-5}$
$3,13 \cdot 10^{-4}$	$6,02 \cdot 10^{-4}$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$2,83 \cdot 10^{-4}$	$2,86 \cdot 10^{-4}$	$3,03 \cdot 10^{-3}$	$6,87 \cdot 10^{-7}$	0	$8,37 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$3,42 \cdot 10^{-6}$
$1,56 \cdot 10^{-4}$	$3,01 \cdot 10^{-4}$	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-3}$	$1,77 \cdot 10^{-7}$	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$3,63 \cdot 10^{-5}$	$6,97 \cdot 10^{-5}$	$8,81 \cdot 10^{-7}$
$7,81 \cdot 10^{-5}$	$1,51 \cdot 10^{-4}$	$3,91 \cdot 10^{-5}$	$6,15 \cdot 10^{-5}$	$6,30 \cdot 10^{-5}$	$7,58 \cdot 10^{-4}$	$4,50 \cdot 10^{-8}$	$3,91 \cdot 10^{-5}$	$3,06 \cdot 10^{-5}$	$3,81 \cdot 10^{-5}$	$2,24 \cdot 10^{-7}$
$3,91 \cdot 10^{-5}$	$7,53 \cdot 10^{-5}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$	$2,53 \cdot 10^{-5}$	$2,58 \cdot 10^{-5}$	$3,79 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-8}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$	$1,23 \cdot 10^{-5}$	$1,36 \cdot 10^{-5}$	$5,63 \cdot 10^{-8}$

Tabela D.12 – Módulo dos erros numéricos com MER para Euler 1D, configuração 4.

Tamanho do volume [m]	Mach na saída	Posição numérica	UDS			TVD				
			DDV	Fourier	Coefficiente de descarga	Mach na saída	Posição numérica	DDV	Fourier	Coefficiente de descarga
$1,00 \cdot 10^{-2}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$5,00 \cdot 10^{-3}$	$2,48 \cdot 10^{-4}$	$4,84 \cdot 10^{-3}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$	$2,27 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$8,29 \cdot 10^{-4}$	$4,84 \cdot 10^{-3}$	$2,41 \cdot 10^{-3}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$	$4,15 \cdot 10^{-3}$
$2,50 \cdot 10^{-3}$	$5,54 \cdot 10^{-5}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$4,86 \cdot 10^{-5}$	$2,03 \cdot 10^{-5}$	$3,28 \cdot 10^{-4}$	$1,84 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-2}$	$9,12 \cdot 10^{-4}$
$1,25 \cdot 10^{-3}$	$3,01 \cdot 10^{-6}$	$8,18 \cdot 10^{-5}$	$2,70 \cdot 10^{-5}$	$2,47 \cdot 10^{-4}$	$8,81 \cdot 10^{-6}$	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$8,18 \cdot 10^{-5}$	$7,21 \cdot 10^{-5}$	$4,80 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$
$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-7}$	$1,86 \cdot 10^{-3}$	$3,76 \cdot 10^{-5}$	$5,12 \cdot 10^{-5}$	$1,16 \cdot 10^{-7}$	$4,65 \cdot 10^{-7}$	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$6,24 \cdot 10^{-5}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$2,51 \cdot 10^{-6}$
$3,13 \cdot 10^{-4}$	$3,04 \cdot 10^{-9}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-6}$	$2,70 \cdot 10^{-9}$	$3,45 \cdot 10^{-8}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$2,88 \cdot 10^{-4}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-7}$
$1,56 \cdot 10^{-4}$	$5,36 \cdot 10^{-11}$	$4,99 \cdot 10^{-6}$	$3,46 \cdot 10^{-5}$	$2,69 \cdot 10^{-5}$	$6,36 \cdot 10^{-11}$	$1,97 \cdot 10^{-10}$	$3,76 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$2,03 \cdot 10^{-3}$	$9,01 \cdot 10^{-10}$
$7,81 \cdot 10^{-5}$	$3,55 \cdot 10^{-13}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	$5,95 \cdot 10^{-6}$	$9,58 \cdot 10^{-14}$	$1,46 \cdot 10^{-10}$	$4,20 \cdot 10^{-4}$	$1,80 \cdot 10^{-4}$	$8,06 \cdot 10^{-5}$	$7,35 \cdot 10^{-10}$
$3,91 \cdot 10^{-5}$	$1,08 \cdot 10^{-14}$	$2,01 \cdot 10^{-5}$	$1,27 \cdot 10^{-5}$	$1,24 \cdot 10^{-5}$	$1,80 \cdot 10^{-13}$	$1,09 \cdot 10^{-12}$	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$9,36 \cdot 10^{-5}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$3,69 \cdot 10^{-12}$

Nota: - Não aplicável.

Tabela D.13 – Ordens aparentes e efetivas para Euler 1D e configurações 1 e 2.

Tamanho do volume [m]	Ordem aparente						Ordem efetiva					
	Coeficiente de descarga				Mach na saída		Coeficiente de descarga				Mach na saída	
	Configuração 1		Configuração 2		Config. 1	Config. 2	Configuração 1		Configuração 2		Config. 1	Config. 2
	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	UDS	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	UDS
$3,30 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1,65 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-	-	0,88	0,59	0,90	*	0,89	0,90
$8,26 \cdot 10^{-4}$	0,90	-1,40	0,91	*	0,91	0,91	0,87	*	0,88	*	0,87	0,89
$4,13 \cdot 10^{-4}$	0,81	*	0,83	*	0,82	0,83	0,92	0,51	0,93	0,89	0,92	0,93
$2,07 \cdot 10^{-4}$	0,87	-0,22	0,89	0,67	0,87	0,89	0,97	0,98	0,98	1,11	0,97	0,98
$1,03 \cdot 10^{-4}$	0,94	0,85	0,95	1,06	0,94	0,96	0,99	1,11	0,99	1,17	1,00	1,00
$5,16 \cdot 10^{-5}$	0,99	1,05	0,99	1,13	0,99	0,99	1,00	1,19	1,00	1,23	1,00	1,01
$2,58 \cdot 10^{-5}$	1,00	1,16	1,00	1,20	1,00	1,00	1,00	1,25	1,00	1,26	1,01	1,01
$1,29 \cdot 10^{-5}$	1,00	1,23	1,00	1,25	1,00	1,00	1,00	1,28	1,00	1,29	1,03	1,03

Nota: - Não aplicável.

Nota: \* Valor inválido.

Tabela D.14 – Ordens aparentes e efetivas para Euler 1D e configurações 3 e 4.

Tamanho do volume [m]	Ordem aparente								Ordem efetiva							
	Coeficiente de descarga				Mach na saída				Coeficiente de descarga				Mach na saída			
	Configuração 3		Configuração 4		Configuração 3	Configuração 4	Configuração 3	Configuração 4	Configuração 3		Configuração 4		Configuração 3	Configuração 4		
	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD	UDS	TVD
$1,00 \cdot 10^{-2}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$5,00 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-	-	-	-	0,97	*	0,98	4,96	0,97	*	0,98	5,08
$2,50 \cdot 10^{-3}$	0,97	5,72	0,98	4,11	0,96	4,88	0,98	4,17	0,98	-0,70	0,98	*	0,98	-1,00	0,98	*
$1,25 \cdot 10^{-3}$	0,97	*	0,98	*	0,97	*	0,98	*	0,99	1,52	0,99	1,28	0,99	1,99	0,99	1,30
$6,25 \cdot 10^{-4}$	0,98	1,39	0,99	1,02	0,98	2,05	0,99	1,04	0,99	1,82	0,99	1,76	0,99	1,82	0,99	1,77
$3,13 \cdot 10^{-4}$	0,99	1,78	0,99	1,71	0,99	1,78	0,99	1,71	1,00	1,92	1,00	1,90	1,00	1,92	1,00	1,90
$1,56 \cdot 10^{-4}$	0,99	1,90	1,00	1,88	0,99	1,90	1,00	1,88	1,00	1,96	1,00	1,95	1,00	1,96	1,00	1,96
$7,81 \cdot 10^{-5}$	1,00	1,96	1,00	1,95	1,00	1,96	1,00	1,95	1,00	1,98	1,00	1,98	1,00	1,98	1,00	1,98
$3,91 \cdot 10^{-5}$	1,00	1,98	1,00	1,97	1,00	1,98	1,00	1,97	1,00	1,99	1,00	1,99	1,00	1,99	1,00	1,99

Nota: - Não aplicável.

Nota: \* Valor inválido.