

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JEAN EDUARDO SEBOLD

SELEÇÃO DO PARÂMETRO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS NA  
APROXIMAÇÃO DE PROBLEMAS DE ONDAS ESTACIONÁRIAS

CURITIBA

2015

JEAN EDUARDO SEBOLD

SELEÇÃO DO PARÂMETRO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS NA  
APROXIMAÇÃO DE PROBLEMAS DE ONDAS ESTACIONÁRIAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor na área de Mecânica Computacional.

Orientador: Dr. Luiz Alkimin de Lacerda

Coorientador: Dr. José Antonio Marques Carrer

CURITIBA

2015

---

S443s

Sebold, Jean Eduardo

Seleção do parâmetro da malha de elementos finitos na aproximação de problemas de ondas estacionárias/ Jean Eduardo Sebold. – Curitiba, 2015. 103 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2015.

Orientador: Luiz Alkimin de Lacerda – Co-orientador: José Antônio Marques Carrer.

Bibliografia: p. 67-70.

1. Elementos finitos. 2. Dispersão - Análise. 3. Geração numérica de malhas (Análise numérica). 4. Ondas estacionárias. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lacerda, Luiz Alkimin de. III. Carrer, José Antônio Marques. IV. Título.

CDD: 518.25

---

## TERMO DE APROVAÇÃO

JEAN EDUARDO SEBOLD

### “SELEÇÃO DO PARÂMENTRO DE MALHA DE ELEMENTOS FINITOS NA APROXIMAÇÃO DE PROBLEMAS DE ONDAS ESTACIONÁRIAS”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de doutora no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



---

Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda  
Orientador – Membro do PPGMNE/UFPR



---

Prof. Dr. Marcos Arndt  
Membro do PPGMNE/UFPR



---

Prof. Dr. Luiz Carlos Wrobel  
Membro da Brunel University London



---

Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira  
Membro do Dep. de Engenharia Mecânica da UFPR



---

Prof. Dr. Webe João Mansur  
Membro da UFRJ

Curitiba, 29 de julho de 2015.

## AGRADECIMENTOS

À minha família e a todos os amigos que me apoiaram. Aos Professores Dr. Luiz Alkimin de Lacerda e Dr. José Antonio Marques Carrer pelos conselhos dados em todo o período de desenvolvimento deste trabalho. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro. Aos membros da Banca Qualificação do Doutorado. Aos membros da banca de Defesa de Doutorado. Ao periódico internacional *Computer Modeling in Engineering and Science* pelo aceite dos dois artigos gerados por este trabalho. À Comissão organizadora do Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria-2014 pelo convite à publicação de parte deste trabalho como capítulo de livro a ser divulgado na forma *ebook* e impresso pela editora Blucher. E a todos que de alguma maneira contribuíram para a conquista deste objetivo.

## RESUMO

Esta tese trata de uma análise numérica capaz de gerar um parâmetro inicial para orientar a discretização malha de elementos finitos, de modo que seja possível controlar os efeitos dispersivos causados pela aproximação de funções/solução de problemas envolvendo ondas acústicas e eletromagnéticas em duas dimensões. Para abordar problemas relacionados com ondas acústicas, onde as condições de contorno são fracamente impostas, é considerado um problema auxiliar, no qual condições de contorno homogêneas são definidas. A versão homogênea permite aproximar funções com suporte, e a partir disso, obter uma solução para o caso geral no que se diz respeito a condições de contorno não homogêneas. Um espaço de elementos finitos de segunda ordem é utilizado para definir funções de base hierárquicas para a aproximação. O resultado dos experimentos apontam para uma dispersão numérica da solução aproximada, sendo assim, se faz necessário um estudo da dispersão discreta. Uma formulação explícita é apresentada para expressar a relação de dispersão discreta associada à ordens superiores de aproximação. Tais formulações são baseadas no método de aproximação de Padé para funções racionais. No estudo da dispersão é revelado que a relação de dispersão discreta pode ser usada para definir a velocidade de fase discreta, e com isso, um parâmetro de refinamento para a malha pode ser obtido de acordo com um erro pré-estabelecido. Esta análise também mostra que a proposta numérica é robusta e pode ser estendida para a elementos finitos de ordens superiores. Além disso, tem-se o caso de problemas envolvendo ondas eletromagnéticas. Para estes, é verificada a construção de um espaço de elementos finitos vetoriais para a aproximação das equações diferenciais do sistema de Maxwell. Os chamados elementos finitos vetoriais de Whitney/Nédélec podem ser usados na aproximação do sistema de Maxwell harmônico no tempo. Inicialmente, são apresentados o sistema de segunda ordem Maxwell harmônico no tempo, bem como, sua formulação variacional. Na sequência, experimentos numéricos são usados para validar a performance dos elementos de Whitney e de Nédélec de primeira ordem em um domínio bidimensional. Dois lemas de correlação admitem a possibilidade de obter-se, a partir da equação de Helmholtz, soluções numéricas para o sistema de Maxwell, e além disso, tal correlação mostra que os efeitos dispersivos gerados pela aproximação por elementos finitos vetoriais podem ser controlados pelos mesmos critérios utilizados no tratamento de ondas acústicas. A relação de dispersão discreta para elementos vetoriais mostra que a velocidade de fase numérica pode ser usada como um estimador de erro para a aproximação numérica.

**Palavras-chaves:** Elementos Finitos, Análise de Dispersão, Parâmetro de Malha.

## ABSTRACT

This thesis is a new numerical analysis technique capable of generating an initial parameter to guide the finite element mesh discretization, so that it is possible to control the dispersive effects caused by the approximation of functions/solution of problems involving acoustic and electromagnetic waves in two dimensions. To treat problems related to acoustic waves, where the boundary conditions are weakly imposed it is considered an auxiliary problem in which homogeneous boundary conditions are defined. The homogeneous version allows approximating functions with support, and from this, obtaining a solution for the general case as regards to non-homogeneous boundary conditions. A second-order finite elements space is used to define the hierarchical basis functions to the approach. The result of the experiments point to a numerical dispersion of the approximate solution, becoming necessary a study of discrete dispersion. An explicit formulation is presented to express the discrete dispersion relation associated with higher orders of approximation. Such formulations are based on Padé approximant method for rational functions. In the dispersion study it is shown that the discrete dispersion relation can be used to define the discrete phase velocity, and thus a mesh refinement parameter can be obtained in accordance with a predetermined error. This analysis also shows that the numerical proposal is robust and may be extended to higher order finite elements. Furthermore, there is the case of problems involving electromagnetic waves. For these, it is verified the construction of a vector finite element space for the approximation of the Maxwell differential equations system. The so-called Whitney/Nédélec vector finite element, can be used in the time harmonic Maxwell system approximation. Initially, the second-order time harmonic Maxwell system is presented, as well as its variational formulation. Next, numerical experiments are used to evaluate the Whitney elements and the Nédélec first order elements performance, in a two-dimensional domain. Two correlation lemmas admit the possibility of obtaining from the Helmholtz equation numerical solutions for the Maxwell's system. Moreover, this correlation shows that dispersive effects generated by the vectorial finite elements approximation can be controlled by the same criteria used in the treatment of acoustic waves. The discrete dispersion relation for vector finite elements shows that the numerical phase velocity can be used as an error estimator for the numerical approximation.

**Key-words:** Finite Elements, Dispersion Analysis, Mesh Parameter.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão Bibliográfica . . . . .	4
1.2 Objetivos . . . . .	6
1.2.1 Objetivo Geral . . . . .	6
1.2.2 Objetivos Específicos . . . . .	6
1.3 Estrutura do Texto . . . . .	7
<b>2 Funções de Base</b>	<b>9</b>
2.1 Funções de Base Hierárquicas de Legendre . . . . .	9
2.2 Funções de Base Nodais para Elementos Retangulares . . . . .	10
2.3 Funções de Base Vetoriais para Elementos Retangulares . . . . .	12
2.4 Descrição do Elemento de Nédélec . . . . .	14
2.4.1 Graus de Liberdade . . . . .	14
2.4.2 Definição dos Graus de Liberdade sobre um Elemento . . . . .	16
2.4.3 Funções de Base para Elementos de Whitney ( $p = 0$ ) . . . . .	17
2.4.4 Funções de Base para Elementos de Nédélec ( $p = 1$ ) . . . . .	19
<b>3 Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos</b>	<b>22</b>
3.1 A Equação de Helmholtz . . . . .	22
3.2 Aproximação da Equação de Helmholtz em Uma Dimensão . . . . .	23
3.3 Aproximação da Equação de Helmholtz em Duas Dimensões . . . . .	27
3.3.1 Aproximação de Ondas Planas . . . . .	27
3.3.2 Aproximação de Ondas Cilíndricas . . . . .	30
3.4 O Sistema de Segunda Ordem de Maxwell . . . . .	32
3.4.1 Aproximação de Ondas Eletromagnéticas . . . . .	39
<b>4 Relação de Dispersão Discreta</b>	<b>44</b>
4.1 Dispersão Numérica . . . . .	44
4.2 Relação de Dispersão Discreta para a equação de Helmholtz . . . . .	45
4.3 Relação de Dispersão para Ordens $p$ Arbitrárias . . . . .	49



4.4	Expressões Analíticas para a Relação de Dispersão Discreta em Ordens Arbitrárias . . . . .	49
4.5	Relação de Dispersão para o Sistema de Segunda Ordem de Maxwell . . . . .	52
4.6	Relação de Dispersão Discreta . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Refinamento da Malha</b>	<b>58</b>
5.1	Velocidade de Fase Numérica . . . . .	58
5.2	Seleção do Parâmetro $h$ . . . . .	59
5.3	Análise de Convergência . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>64</b>
<b>Apêndice A Introdução aos Espaços de Sobolev</b>		<b>70</b>
A.1	Alguns Espaços de Funções . . . . .	70
A.2	Domínios Lipschitz . . . . .	71
A.3	Notação Multi-índice . . . . .	71
A.4	Distribuições . . . . .	71
A.5	Derivada Fraca . . . . .	72
A.6	Espaços de Sobolev . . . . .	73
A.7	Derivada da Distribuição . . . . .	74
<b>Apêndice B Operadores Diferenciais</b>		<b>76</b>
B.1	Campo Gradiente . . . . .	76
B.2	Rotacional do Campo Vetorial . . . . .	77
B.3	Divergente do Campo Vetorial . . . . .	77
B.4	Operadores Diferenciais sobre uma Superfície . . . . .	79
B.4.1	Gradiente de Superfície . . . . .	79
B.4.2	O Escalar Rotacional de Superfície . . . . .	79
B.4.3	O Vetor Rotacional de Superfície . . . . .	79
B.4.4	Divergente de Superfície . . . . .	81
B.4.5	Produto Vetorial no Plano $(x, y)$ . . . . .	81
B.4.6	Identities Diferenciais sobre uma Superfície . . . . .	82
B.4.7	Identities Integrais . . . . .	82
<b>Apêndice C Forma Sesquilinear</b>		<b>85</b>
<b>Apêndice D Método de Aproximação Racional - Aproximação de Padé</b>		<b>87</b>
<b>Apêndice E Transformação Covariante</b>		<b>90</b>
<b>Apêndice F Relação de Dispersão Discreta para Elementos em 3D</b>		<b>91</b>

<b>Apêndice G Lemas de Correlação</b>	<b>100</b>
G.1 Lema de Correlação Parte 1 . . . . .	100
G.2 Lema de Correlação Parte 2 . . . . .	101

# Capítulo 1

## Introdução

Soluções numéricas da Equação de Helmholtz são bem conhecidas na literatura, onde o método dos elementos finitos e o método elementos de contorno têm sido propostos para uma ampla gama de problemas. Uma questão específica abordada por muitos autores é a necessidade de uma mínima discretização para malha relativa à aproximação para um número de onda fixo.

Outro aspecto, além da equação de Helmholtz, são as equações fundamentais do eletromagnetismo. Dentre as diversas aplicações do Método dos Elementos Finitos ao eletromagnetismo, pode-se destacar a telefonia celular Smith (2003), biomedicina Haueisen (1997) e nos métodos eletromagnéticos para geofísica de exploração Li et al. (2011). Para tais aplicações convém utilizar uma classe diferenciada de elementos finitos, conhecida na literatura como elementos finitos vetoriais.

Quando em alguma formulação numérica é necessário representar diretamente e de forma discretizada uma grandeza vetorial, a alternativa encontrada, quando utiliza-se apenas funções de base do tipo nodal, é o tratamento em separado de cada componente do campo considerado, que individualmente reduzem-se a funções escalares.

Surge deste fato uma dificuldade, e que diz respeito à continuidade da grandeza vetorial discretizada entre elementos adjacentes da malha. Quando possuem uma face em comum, dois elementos adjacentes compartilham também os nós da malha, e pelo fato da aproximação ser realizada componente por componente, verifica-se que o uso desta abordagem implica a continuidade de todas as componentes da grandeza vetorial. O resultado final é que, se porventura cada um dos elementos pertencer a um meio material de composição diferente, a imposição de continuidade produz uma solução fisicamente incorreta. Tais soluções

surgem por não se garantir, com o uso das funções de base nodais, a continuidade das derivadas das funções de interpolação entre os elementos da malha.

Felizmente, ao longo do tempo, alternativas para contornar estas dificuldades foram concebidas. Entre elas, destacam-se o desenvolvimento e o aprimoramento de técnicas caracterizadas pelo uso de uma outra variedade de elemento finito como alternativa às abordagens nodais originais. Tais alternativas surgiram nos trabalhos de Whitney (1957) e Nédélec (1980).

Apesar de ter usado um conjunto de vetores de aresta (*edge vectors*) em um contexto completamente diferente ao abordado no método dos elementos finitos, Whitney (1957) foi o primeiro a usar um espaço de polinômios vetoriais para gerar tais conjuntos, segundo Monk (2003a). Estes elementos de aresta ou elementos de ordem zero, já no contexto de elementos finitos, constituem uma aproximação por elementos cujas componentes tangenciais são constantes nas arestas. Na literatura estes elementos são conhecidos como elementos de Whitney, Monk (2003a).

Um pouco mais tarde, Jean-Claude Nédélec apresentou algumas famílias de elementos finitos não-conformes em  $\mathbb{R}^3$ . É discutido na sequência do texto que uma destas famílias de elementos finitos, constitui elementos conformes no espaço de funções vetoriais  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ . A partir dessas observações algumas aplicações desses elementos na aproximação das equações de Maxwell e nas equações de elasticidade foram apresentadas em Nédélec (1980). Esta inovadora variedade de elemento finito é conhecida por elementos finitos vetoriais, ou ainda, por elementos de Nédélec.

O espaço de Sobolev  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  desempenha um papel central na teoria variacional das equações de Maxwell pois de acordo com Monk (2003a), este espaço corresponde ao espaço das soluções de energia finita e, deste modo, pode-se garantir a existência, unicidade e regularidade de soluções discretas fisicamente significativas, como descrito por Greenleaf et al. (2007). Assim, é conveniente tomar elementos finitos neste espaço para obter uma classe de subespaços de elementos finitos adequados para o sistema de Equações de Maxwell. Outra característica deste espaço encontra-se na escolha da discretização de elementos finitos, que se faz necessária para que as componentes tangenciais do campo  $\mathbf{E}$  sejam contínuas através da interface do elemento. Além disso, não há nenhuma obrigação imposta para que as componentes da normal sejam contínuas.

Elementos finitos vetoriais podem ser usados em geometrias consideradas complexas e também na presença de propriedades eletromagnéticas descontínuas. No caso das equações de Maxwell, se a permissividade elétrica  $\varepsilon$  é descontínua através da superfície de um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , é sabido da teoria eletromagnética que a componente tangencial do campo elétrico  $E$  é contínua através dessa superfície, deste modo, é necessário que a componente tangencial do campo de aproximação  $E_h$  também seja contínua. Escolhendo os elementos de Nédélec, os quais garantem uma aproximação  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -conforme, ver-se-á que a componente tangencial do campo de aproximação  $E_h$  será contínua sobre a superfície, no caso em que dois elementos da malha terem propriedades materiais distintas. Além disso, os elementos finitos de aresta possuem muitas propriedades matemáticas interessantes e desafiadoras. Tais propriedades são profundamente exploradas por Ainsworth (2003), Jin (2002), Monk (2003a) e Monk (2003b). Além desses, destacam-se os trabalhos de Monk (1994), que considerou o comportamento dispersivo de elementos finitos de primeira ordem em elementos triangulares para as equações de Maxwell, quando a aproximação é feita com o refinamento da malha. Em outro trabalho, Monk (1998) conduziu uma análise de dispersão em elementos do tipo vetorial para as equações de Maxwell dependentes do tempo usando um *mass lumping* sobre malhas de duas e três dimensões. Não se pode deixar de mencionar o trabalho de Ainsworth et al. (2001), que estudou um conjunto de funções de base hierárquicas para a discretização de Galerkin do espaço  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  para ambas malhas não-uniformes híbridas contendo triângulos e quadriláteros com uma ordem arbitrária dos polinômios interpoladores.

A proposta é restringir o estudo aos elementos de Whitney e aos elementos de Nédélec de primeira ordem de uma maneira conveniente e aplicada, visando proporcionar uma compreensão inicial para os leitores interessados nos fundamentos desta teoria.

A principal novidade deste trabalho é a apresentar uma contribuição para a aproximação por elementos finitos, em ambas variedades: nodal e vetorial. Tal contribuição concentra-se na construção de expressões analíticas para gerar um parâmetro  $h$  de refinamento mínimo necessário para controlar os efeitos dispersivos gerados pela aproximação, pretendendo assim, evitar custos computacionais desnecessários. Essas expressões analíticas, envolvendo o parâmetro  $h$ , são baseadas na relação de dispersão discreta, e definem a velocidade de fase numérica quando  $h \rightarrow 0$ . Sob este ponto de vista, esta ideia unifica as propostas apre-

sentadas para velocidade de fase numérica e para a relação de dispersão discreta estudados, respectivamente, por Christon (1999) e Babuška et al. (1995). Além disso, neste estudo, a relação de dispersão discreta aponta a velocidade de fase numérica como um estimador de erro para a aproximação, tanto da equação de Helmholtz (acústica) quanto para as equações de Maxwell (eletromagnetismo). Consolida-se também, como fato, que a mesma análise feita para a equação de Helmholtz pode ser usada na discussão das equações de Maxwell, devido à correlação existente entre estas equações. Tal correlação fica também evidenciada neste trabalho. As expressões analíticas para a velocidade de fase numérica podem ser usadas para estimar o erro de aproximação na presença de ondas planas ou cilíndricas, proporcionando assim um caminho mais rápido, eficiente e de menor custo computacional para obtenção de resultados dentro de uma margem de erro pré-estabelecida.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

O método dos elementos finitos é um tipo de aproximação numérica usado em problemas de valor de contorno envolvendo tanto equações diferenciais ordinárias quanto parciais. A qualidade da aproximação proposta pode ser influenciada por diversos fatores, dentre eles pode-se destacar a escolha das funções de base. Na literatura encontram-se uma vasta diversidade de autores que propõem diversos tipos de funções de base para descrever a aproximação pelo método dos elementos finitos. Para fundamentar a construção de alguns espaços de elementos finitos pode-se destacar a contribuição de Thompson et al. (1994) e Harari et al. (1996). Suas ideias para a notação de espaços de função envolvendo bases hierárquicas são muito úteis para a versão- $p$  do método. Ainda sobre funções de base hierárquicas, o trabalho proposto por Adjerid (2001), idealizou uma forma de construir as funções de base para elementos retangulares utilizado, posteriormente, por vários autores em seus estudos.

A construção do espaço de elementos finitos requer um conhecimento em áreas da matemática não muito triviais, tais como análise funcional. Ciarlet (1978) desempenha um papel fundamental na abordagem sobre estes conceitos. Uma de suas inúmeras contribuições é a caracterização de um elemento finito em três componentes: (i) geometria do elemento; (ii) espaço de polinômios definidos sobre a geometria; e (iii) conjunto de funcionais lineares

definidos sobre o espaço de polinômios. Esta forma de organização permite compreender os detalhes individuais presentes na composição dos elementos finitos vetoriais. Outros dois trabalhos, Nédélec (1980) e Nédélec (1986) constituem quiza, a base teórica dos elementos finitos vetoriais. Apesar de ser uma teoria desenvolvida a mais de trinta anos, esta ainda impõe uma série de propriedades desafiadoras para quem decide direcionar seus estudos nesta área. Acrescentando à estes últimos, outras duas fortes referências para a apresentação de espaços de polinômios vetoriais são: Ainsworth et al. (2001) e Whitney (1957). Outro autor oferece uma vasta contribuição no que diz respeito ao tratamento físico da teoria eletromagnética, é Jin (2002).

A equação de Helmholtz aparece em vários problemas de física e engenharia, e costuma descrever fenômenos físicos envolvendo a dependência do tempo. Pode-se encontrar uma gama de informações interessantes sobre a equação Helmholtz e suas propriedades no trabalho de Oliveira et al. (2007), dentre elas os conceitos de vetor de onda em duas e três dimensões, informações e caracterizações sobre a dispersão numérica gerada pela aproximação. Outra publicação importante que trás informações importantes sobre a equação de Helmholtz é Liu (2009). Nela, além do tratamento de ondas planas, também pode-se observar um breve estudo de propagação de ondas cilíndricas. Seguindo nesta mesma linha destaca-se Beylkin (2009), onde é possível obter soluções analíticas para vários tipos de ondas, inclusive planas e cilíndricas.

Quando se estuda problemas envolvendo as equações de Maxwell, mais precisamente o seu sistema de segunda ordem, muitas dificuldades podem surgir no que diz respeito à obtenção de soluções. Os trabalhos de Monk (2003a) e Monk (1991), fornecem ingredientes necessários para que se possa garantir a existência e unicidade de soluções envolvendo problemas de eletromagnetismo. A dedução do sistema de segunda ordem de Maxwell harmônico no tempo a partir das equações clássicas do eletromagnetismo é uma tarefa extensa, os livros de Jackson (1999) e Colton et al. (1983), são importantes referências para os fundamentos desta dedução.

A implementação computacional de elementos finitos em problemas acústicos ou eletromagnéticos exige informações precisas sobre todos os detalhes inerentes à teoria. No entanto, outros métodos de aproximação podem apresentar ideias que facilitam a modelagem

computacional. Um trabalho que realiza bem este papel é Soares (2008), que apesar de fazer um tratamento por elementos de contorno em seus problemas, fornece ideias que podem ser utilizadas de maneira geral em outros tipos de aproximação, como a de elementos finitos.

Um meio é dispersivo se ondas com frequências distintas viajam neste meio com velocidades distintas. Normalmente, ondas planas são usadas para medir a dispersão de um meio, uma vez que são simples e estão fortemente ligadas aos métodos analíticos, tais como a análise de Fourier. Contribuições muito importantes sobre a análise de dispersão podem ser extraídas de trabalhos como os de Oliveira et al. (2007), Thompson et al. (1994) e Harari et al. (1996).

As relações de dispersão discreta para a equação de Helmholtz e para os elementos de Whitney-Nédélec integram um conjunto de desafios a serem superados. Para sua descrição pode-se destacar algumas referências de extrema importância, tais como Ainsworth (2003), Babuška et al. (1995, 1997) e Thompson et al. (1994). Nestas, a relação de dispersão pode ser vista sobre diferentes aspectos. Na obtenção de expressões da relação de dispersão discreta para ordens superiores proposta por Ainsworth (2003), na análise numérica da diferença de fase estudada por Babuška et al. (1995) e Babuška et al. (1997), e em técnicas de análise de dispersão incluindo números de onda complexos utilizadas por Thompson et al. (1994). Contudo, todos os aspectos são aplicados na busca de inovações tanto na versão- $p$ , na versão- $h$ , quanto na versão- $hp$  do método dos elementos finitos.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

- Apresentar uma nova técnica para selecionar o parâmetro  $h$  da malha de elementos finitos quando se usa o método na aproximação de ondas acústicas planas e cilíndricas, e ondas eletromagnéticas.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Apresentar um conteúdo teórico para aqueles que tem interesse em desenvolver seus estudos na área de aproximação numérica envolvendo a equação de Helmholtz e o



sistema de segunda ordem de Maxwell;

- Mostrar a correlação existente entre a equação de Helmholtz e o sistema de segunda ordem de Maxwell harmônico no tempo, e evidenciar que soluções aproximadas para a equação de Helmholtz podem gerar soluções numéricas para as equações de Maxwell e vice-versa.
- Relacionar expressões para a velocidade numérica para diferentes ordens  $p$  de aproximação com a busca de um parâmetro para para a malha de elementos finitos.

### 1.3 Estrutura do Texto

O capítulo 2 trata da apresentação de espaços de funções para aproximação, através do método dos elementos finitos, de ondas planas e cilíndricas que satisfazem a equação de Helmholtz, e também trata da construção de um espaço de funções vetoriais, que podem ser usadas na aproximação de ondas eletromagnéticas. A teoria desenvolvida neste capítulo é de fundamental importância na compreensão nas etapas mais avançadas deste trabalho.

Já o capítulo 3, apresenta os resultados dos experimentos numéricos realizados com problemas extraídos da literatura. Aqui são usadas as funções de base de segunda ordem definidas no capítulo 2, tanto para abordagem nodal quanto para a vetorial do método dos elementos finitos. São testados vários níveis de refinamento para a malha. As aproximações numéricas se mostram satisfatórias à medida que o refinamento da malha aumenta.

No capítulo 4, é apresentada a importante correlação entre a equação de Helmholtz e o sistema de segunda ordem de Maxwell. São enunciados e demonstrados dois lemas de correlação. Aqui, também se estabelecem as condições necessárias para gerar soluções numéricas para o sistema de Maxwell, usando aproximações numéricas para a equação de Helmholtz e vice-versa.

O capítulo 5 indica que a relação de dispersão discreta relacionada à equação de Helmholtz pode ser usada para obter uma expressão para a relação de dispersão discreta envolvida no sistema de Maxwell de segunda ordem, reforçando assim, a correlação apresentada no capítulo 4. É mostrado que as expressões para a relação de dispersão discreta podem ser definidas para altas ordens  $p$  de aproximação. Para tanto, utilizar-se-á um método de

aproximação de funções racionais chamado de Aproximação de Padé.

O capítulo 6 é responsável pela principal contribuição deste trabalho. Nele são discutidos os caminhos de como apresentar expressões analíticas para a velocidade de fase numérica. Estas expressões são geradas a partir da análise da dispersão discreta e podem ser utilizadas para controlar o refinamento da malha de elementos finitos de altas ordens nas aproximações das equações de Helmholtz e de Maxwell. Além disso, devido a correlação apresentada no capítulo 4 entre as equações de Helmholtz e Maxwell, mostra-se que as mesmas formas analíticas para a velocidade de fase numérica, podem ser usadas para controlar o refinamento da malha de elementos nas aproximações de problemas envolvendo funções vetoriais, soluções do problema de eletromagnetismo proposto. Para concluir, é apresentada uma análise de convergência, a qual confirma que a norma do erro da aproximação atinge um mínimo valor quando a velocidade de fase varia entorno de um erro pré-definido.

As conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 7, juntamente com as perspectivas de estudos futuros.

O trabalho conta também, em seus apêndices, com uma breve menção dos conhecimentos básicos essenciais para a compreensão do texto. Entre eles se destacam os Espaços de Sobolev, a definição dos Operadores Diferenciais de Superfície, a rotina da Aproximação de Padé, a dedução do Sistema de Maxwell de Segunda ordem e uma versão em três dimensões da relação de dispersão discreta relacionada com a aproximação que usa elementos finitos vetoriais.

# Capítulo 2

## Funções de Base

### 2.1 Funções de Base Hierárquicas de Legendre

Uma importante tarefa realizada neste trabalho é o uso das funções de base hierárquicas, Adjerid (2001). As funções de base hierárquicas têm a propriedade de formar um conjunto de funções de ordem  $p + 1$  adicionando novas funções de base no conjunto formado pelas funções de ordem  $p$ , isto é, a base como um todo não requer uma nova construção quando o grau do polinômio é aumentado. Esta propriedade é muito importante, senão essencial, quando se usa a versão- $p$  do método dos elementos finitos. As funções de base para uma base hierárquica de uma dimensão para a aproximação da equação de Helmholtz sugeridas neste trabalho, são definidas como integrais dos polinômios de Legendre. Deste modo, as propriedades de ortogonalidade são garantidas, conduzindo a uma matriz de rigidez esparsa e bem condicionada. Enquanto que para duas dimensões, é necessário tomar o produto tensorial dos tensores que trazem em suas entradas as funções de base em duas variáveis distintas. Já para a aproximação das equações de Maxwell, é necessário definir um espaço de funções vetoriais baseado nos polinômios de Legendre. Todos estes procedimentos são descritos de forma detalhada neste capítulo.

Seja  $\Omega$  um domínio aberto e limitado contido no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ . Considere o espaço de Hilbert complexo  $H^1$ , e seja  $\mathcal{X}_{hp} \subset H^1(\Omega)$  um subespaço de elementos finitos em um espaço de polinômios contínuos por partes de grau  $p$ , denotado por  $\mathcal{P}_p$ , tal que,

$$\mathcal{X}_{hp} = \{\phi_{hp} \mid \phi_{hp} \in C^0(\Omega) \cap \mathcal{P}_p(\Omega_e)\}, \quad (2.1)$$

onde  $C^0$  segue de acordo com o Apêndice A e  $\Omega_e$  é o elemento de referência.

Seja  $M_j$  o conjunto dos polinômios de Legendre, os quais são dados pela fórmula de Rodrigues, encontrada em Olver et al. (2010). Para  $0 \leq j \leq p$ , tem-se

$$M_j(\xi) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{d\xi^j} [(\xi^2 - 1)^j], \quad \xi \in \Omega_e \quad (2.2)$$

Além disso, considere o conjunto  $N_k$  de  $\mathcal{P}_p$ , com  $k \in \mathbb{Z}^+$ , definido por:

$$N_k(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi), & \text{se } k = 1, 2, \\ \frac{1}{\|M_{k-2}\|} \int_{-1}^{\xi} M_{k-2}(t) dt, & \text{se } k = 3, \dots, p+1 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 1$  e  $\|M_{k-2}\|^2 = \frac{2}{2k-3}$ . Note que

$$N_k(\pm 1) = 0 \quad \text{para } k \geq 3. \quad (2.4)$$

De fato, isso acontece devido a ortogonalidade de  $M_j$  com respeito ao produto interno no espaço  $L_2$  (vide Apêndice A), no caso  $\xi = 1$ . Para  $\xi = -1$  a equação (2.4) é óbvia.

As funções definidas em (2.3) formam o que se conhece como Funções de Base Hierárquicas de Legendre, Harari et al. (1996), Thompson et al. (1994). Em alguns textos, como o de Šolín et al. (2004), as funções (2.3) são conhecidas como funções de forma de Lobatto.

## 2.2 Funções de Base Nodais para Elementos Retangulares

Seja  $\mathcal{P}_p^{(2)}$  o espaço de polinômios de duas variáveis, associado aos elementos de ordem  $p$ , definido como

$$\mathcal{P}_p^{(2)} = \{\hat{p}(\xi, \eta); \hat{p}(\xi, \eta) \in \text{span}\{X_{p,q}\}\} \quad (2.5)$$

onde  $X_{p,q}$  é o conjunto dos monômios de grau menor ou igual a  $p$  em  $\xi$  e menor ou igual a  $q$  em  $\eta$ , isto é,

$$X_{p,q} = \{\xi^r \eta^s; \quad 0 \leq r \leq p; \quad 0 \leq s \leq q\} \quad (2.6)$$

Assim, as funções de base com duas variáveis,  $\xi$  e  $\eta$ , de ordem  $p = q$ , são dadas pelo

produto tensorial

$$\begin{bmatrix} N_1^{(p)}(\xi) \\ N_3^{(p)}(\xi) \\ \vdots \\ N_k^{(p)}(\xi) \\ N_2^{(p)}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(p)}(\eta) & N_3^{(p)}(\eta) & \cdots & N_k^{(p)}(\eta) & N_2^{(p)}(\eta) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

onde cada produto  $N_i^{(p)}(\xi)N_j^{(p)}(\eta) \in \mathcal{P}_p^{(2)}$ , para  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . Cada polinômio  $\hat{p}_l(\xi, \eta) = N_i^{(p)}(\xi)N_j^{(p)}(\eta)$  que aparece nas entradas do produto tensorial (2.7) está associado a um único nó  $l$  do elemento de referência  $\Omega_e = (-1, 1) \times (-1, 1)$ .

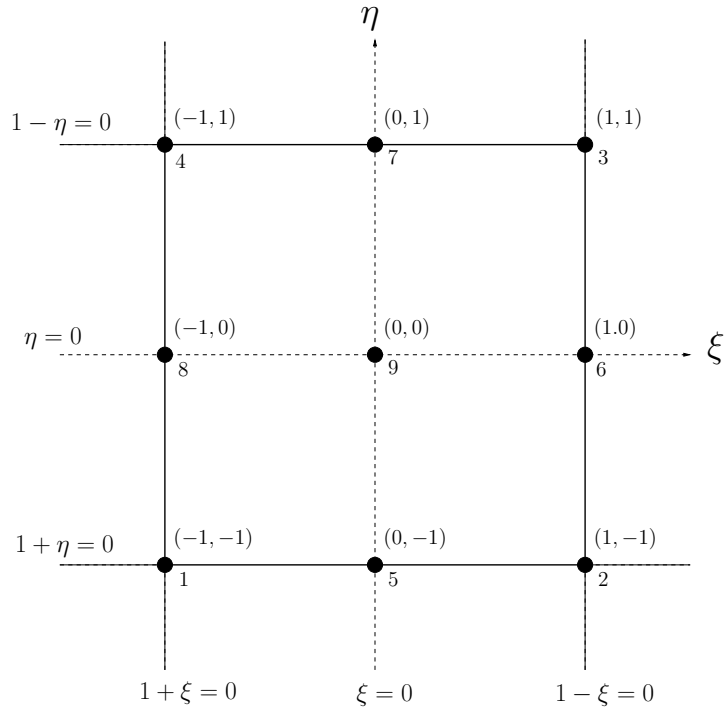
Em particular, para  $p = 2$ , pode-se explicitar as funções de base como se segue. Considerando o conjunto (2.5), as funções de base são geradas por

$$\text{span}\{X_{2,2}\} = \text{span}\{1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2, \xi\eta, \xi^2\eta, \eta^2\xi, \xi^2\eta^2\}$$

Deste modo, tem-se que cada função de base  $\hat{p}_l(\xi, \eta) = N_i^{(2)}(\xi)N_j^{(2)}(\eta)$ , com  $l = 1, \dots, 9$  e com  $i, j = 1, 2, 3$ , associada ao nó  $l$ , veja Figura 2.1(a), aparece nas entradas do produto tensorial

$$\begin{bmatrix} N_1^{(2)}(\xi) \\ N_3^{(2)}(\xi) \\ N_2^{(2)}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(2)}(\eta) & N_3^{(2)}(\eta) & N_2^{(2)}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(2)}(\xi)N_1^{(2)}(\eta) & N_1^{(2)}(\xi)N_3^{(2)}(\eta) & N_1^{(2)}(\xi)N_2^{(2)}(\eta) \\ N_3^{(2)}(\xi)N_1^{(2)}(\eta) & N_3^{(2)}(\xi)N_3^{(2)}(\eta) & N_3^{(2)}(\xi)N_2^{(2)}(\eta) \\ N_2^{(2)}(\xi)N_1^{(2)}(\eta) & N_2^{(2)}(\xi)N_3^{(2)}(\eta) & N_2^{(2)}(\xi)N_2^{(2)}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1(\xi, \eta) & \hat{p}_8(\xi, \eta) & \hat{p}_4(\xi, \eta) \\ \hat{p}_5(\xi, \eta) & \hat{p}_9(\xi, \eta) & \hat{p}_7(\xi, \eta) \\ \hat{p}_2(\xi, \eta) & \hat{p}_6(\xi, \eta) & \hat{p}_3(\xi, \eta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & \sqrt{\frac{3}{32}}(1-\xi)(\eta^2-1) & \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ \sqrt{\frac{3}{32}}(\xi^2-1)(1-\eta) & \frac{3}{8}(\xi^2-1)(\eta^2-1) & \sqrt{\frac{3}{32}}(\xi^2-1)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & \sqrt{\frac{3}{32}}(1+\xi)(\eta^2-1) & \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$



(a)

Figura 2.1: Elemento de referência  $\Omega_e$  associado com as funções de base (2.8).

## 2.3 Funções de Base Vetoriais para Elementos Retangulares

Esta seção trata da construção de funções de base vetoriais para a aproximação das equações de Maxwell harmônicas no tempo. Duas fortes referências para a apresentação do espaço de polinômios vetoriais são Ainsworth et al. (2001) e Whitney (1957).

Seja  $\mathcal{M}$  uma partição de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  em quadriláteros, tais que a intersecção não-vazia entre elementos distintos é, ou uma aresta, ou um vértice. Cada elemento  $K \in \mathcal{M}$  é imagem de um elemento de referência  $\hat{K}$  através de uma bijeção diferenciável  $\mathbf{F}_K : \hat{K} \rightarrow K$ . Um elemento

finito no sentido de Ciarlet (1978), é representado por uma tripla  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$ , como se segue abaixo.

- $K$  é a geometria do elemento, neste caso em particular, um quadrilátero.
- $\mathcal{P}$  espaço de funções definidas sobre  $K$ , geralmente um espaço de polinômios.
- $\Sigma$  é um conjunto de funcionais lineares sobre  $\mathcal{P}$ .

enquanto que o elemento finito de referência é dado pela tripla  $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$  descrita por

- $\hat{K}$  é a geometria do domínio de  $\mathbf{F}_K$ , neste caso em particular, um quadrilátero.
- $\hat{\mathcal{P}}$  é um espaço de funções definidas sobre  $\hat{K}$ , geralmente um espaço de polinômios.
- $\hat{\Sigma}$  é um conjunto de funcionais lineares sobre  $\hat{\mathcal{P}}$ .

Um elemento  $\alpha$  do conjunto de funcionais lineares  $\Sigma$  (ou  $\hat{\Sigma}$ ) é denominado grau de liberdade. Um grau de liberdade geralmente é associado a algum ente geométrico do elemento  $K$  (ou  $\hat{K}$ ), como um vértice ou uma aresta.

Uma importante definição relacionada com os graus de liberdade nas arestas e no interior do elemento, é encontrada em Nédélec (1980) e reproduzida abaixo:

**Definição 2.3.1** Diz-se que o elemento finito  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  é unissolvente se  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \alpha_i(\mathbf{p}) = 0, \forall \alpha_i \in \Sigma$  implicar que  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ .

Define-se também alguns espaços de funções importantes neste estudo, seguida de uma propriedade muito importante, Monk (1991).

**Definição 2.3.2** Define-se o espaço de funções  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ , sobre o domínio  $N$ -dimensional  $\Omega$ , por  $H(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^N; \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^N\}$ .

**Definição 2.3.3** Define-se o espaço  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  por  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}, \Omega); \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma\}$ , onde  $\Gamma$  é o contorno de  $\Omega$ .

**Definição 2.3.4** Um elemento finito é dito ser  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -conforme se para qualquer  $\alpha_i \in \Sigma$  definido apenas sobre a aresta  $\gamma$ ,  $\alpha_i(\mathbf{p}) = 0, \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$ , implicar que  $\mathbf{n} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$  sobre a aresta  $\gamma$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à aresta  $\gamma$ , Nédélec (1980).

Pode-se também interpretar a Definição 2.3.4 como: Se  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}$  são, respectivamente, interpolantes dos elementos  $K_1$  e  $K_2$ , que compartilham a mesma aresta, então  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  têm as mesmas componentes tangenciais.

## 2.4 Descrição do Elemento de Nédélec

Define-se o espaço de polinômios  $\hat{\mathcal{P}}_p$  associado ao elemento de Whitney/Nédélec de ordem  $p$  sobre elemento de referência  $\hat{K} = (-1, 1) \times (-1, 1)$  como sendo

$$\hat{\mathcal{P}}_p = \left\{ \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2); \hat{E}_1 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{p,p+1}\} \text{ e } \hat{E}_2 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{p+1,p}\} \right\},$$

sendo  $\mathbb{Q}_{p,q} = \{\hat{x}^i \hat{y}^j : 0 \leq i \leq p; 0 \leq j \leq q\}$ .

**Observação 2.4.1** *Tem-se que  $\hat{\mathbf{E}} \in \hat{\mathcal{P}}_p$  implica  $\nabla \times \hat{\mathbf{E}} \in \mathbb{Q}_{p,p}$ . Esta implicação se verifica usando a equação (B.8).*

Novamente recorre-se aos polinômios de Legendre, equação (2.2), para construir as funções de base hierárquicas, que são úteis para métodos de elementos finitos adaptativos Adjerid (2001). Além disso, consideram-se as seguintes mudanças devido a nova variação da ordem  $p$ : (i)  $L_k = M_k$  e  $l_k = N_k$ ; (ii)

$$l_k(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi), & \text{se } k = 0, 1, \\ \frac{1}{\|L_{k-2}\|} \int_{-1}^{\xi} L_{k-2}(t) dt, & \text{se } k = 2, \dots, p+1 \end{cases} \quad (2.9)$$

### 2.4.1 Graus de Liberdade

Os graus de liberdade sobre um elemento de referência  $\hat{K} \subset \mathbb{R}^2$ , podem ser definido de acordo com Nédélec (1980). Isto é, inicia-se com uma forma de garantir a continuidade entre dois elementos com a mesma interface. Para tanto, é necessário selecionar os graus de liberdade sobre uma aresta  $\gamma$  para serem os momentos ponderados da componente tangencial de um campo  $\hat{\mathbf{E}} \in \hat{\mathcal{P}}_p$ . Os graus de liberdade nas arestas do elemento de referência são definidos pelos funcionais lineares  $\alpha_\gamma \in \hat{\mathcal{P}}'$

$$\alpha_\gamma(\mathbf{u}) = \int_{\gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) \phi ds \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_{k-1}(\gamma) \quad (2.10)$$



onde  $\mathbf{t}$  é o vetor tangente unitário à aresta  $\gamma$  e  $\hat{\mathcal{P}}'$  denota o espaço dual de  $\hat{\mathcal{P}}$ . Tem-se um total de  $4k$  graus de liberdade nas arestas.

Os graus de liberdade no interior do elemento de referência são definidos pelos funcionais lineares  $\alpha_{int} \in \hat{\mathcal{P}}'$

$$\alpha_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\hat{K}} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\phi}) d\hat{K} \quad \forall \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{com } \phi_1 \in \mathbb{Q}_{k-2, k-1} \text{ e } \phi_2 \in \mathbb{Q}_{k-1, k-2} \quad (2.11)$$

Tem-se um total de  $2k(k-1)$  graus de liberdade no interior de  $\hat{K}$ .

Utilizando as funções  $L_k$  e  $l_k$  definidas anteriormente, apresentam-se as funções de base associadas aos graus de liberdade nas arestas como sendo

$$\begin{cases} \phi_{i,j,1}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_j(\hat{y})\mathbf{e}_1 \\ \phi_{i,j,2}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}) = l_j(\hat{x})L_i(\hat{y})\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad i = 0, \dots, p; \quad j = 0, 1 \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^T$  denotam a base canônica do  $\mathbb{R}^2$  e  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são as coordenadas de  $\hat{\mathbf{x}}$ . As funções de base associadas aos graus de liberdade no interior complementam as funções em (2.12) ao utilizar  $l_k$  com  $k \geq 2$ :

$$\begin{cases} \phi_{i,j,1}^{int}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_j(\hat{y})\mathbf{e}_1 \\ \phi_{i,j,2}^{int}(\hat{\mathbf{x}}) = l_j(\hat{x})L_i(\hat{y})\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad i = 0, \dots, p; \quad j = 2, \dots, p+1, \quad (2.13)$$

Apesar da representação (2.12)-(2.13) ter a conveniência de ser compacta e geral, utiliza-se uma notação diferente para as funções das arestas. Esta notação leva em conta as arestas do elemento de referência escolhido:

$$\phi_i^{\gamma^1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad \phi_i^{\gamma^2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad (2.14)$$

$$\phi_i^{\gamma^3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; \quad \phi_i^{\gamma^4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2,$$

Deste modo, as funções de base associadas às arestas satisfazem

$$\int_{\gamma_i} (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\phi}_i^{\gamma^j}) L_k ds = \delta_{ij} \delta_{ik} \|L_i\|^2 \quad \text{com } j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.15)$$

Analogamente, as funções de base associadas ao interior satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} L_m(\hat{x})l_n(\hat{y})\phi_{i,j,1}^{int} \cdot \mathbf{e}_1 d\hat{x}d\hat{y} &= \delta_{mi}\delta_{nj}||L_i||^2||l_j||^2 \\ \int_{\hat{K}} L_m(\hat{y})l_n(\hat{x})\phi_{i,j,2}^{int} \cdot \mathbf{e}_2 d\hat{x}d\hat{y} &= \delta_{mi}\delta_{nj}||L_i||^2||l_j||^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.4.2 Definição dos Graus de Liberdade sobre um Elemento

Um elemento Nédélec  $(\mathcal{P}, K, \Sigma)$  sobre um domínio físico  $K$  é construído a partir do elemento de referência  $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{K}, \hat{\Sigma})$  da seguinte forma:

Seja  $\mathbf{E}$  um campo vetorial. O  $m$ -ésimo grau de liberdade sobre a aresta  $\varsigma$  é dado pelo mapeamento linear

$$\mathbf{E} \longrightarrow \int_{\varsigma} v_m \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.17)$$

onde a função peso  $v_m$  é escolhida para coincidir com o  $m$ -ésimo polinômio de Legendre quando a aresta  $\varsigma$  é parametrizada por  $t \in (-1, 1)$ . Em particular, seja  $\varsigma$  uma aresta orientada de um elemento na malha com pontos extremos  $\mathbf{x}_{v_a}$  e  $\mathbf{x}_{v_b}$ , onde os índices  $v_a$  e  $v_b$  correspondem aos vértices adjacentes no elemento quadrilateral. Apresenta-se agora, a parametrização sobre a aresta como sendo

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(1-t)\mathbf{x}_{v_a} + \frac{1}{2}(1+t)\mathbf{x}_{v_b} \quad \text{com } t \in (-1, 1) \quad (2.18)$$

Logo, usando (2.17), obtém-se

$$\int_{\varsigma} v_m \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_{-1}^1 L_m(t) \left( E_1 \frac{dx}{dt} + E_2 \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_{-1}^1 L_m(t) \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\varsigma} dt, \quad (2.19)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_{\varsigma} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  é o vetor tangente sobre a aresta  $\varsigma$ .

Seja  $F_K$  um mapeamento bijetivo do elemento de referência ao elemento físico  $K$ ,  $F_K : \hat{K} \longrightarrow K$ , definido por

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = J_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad (2.20)$$

onde  $J_K$  é uma matriz Jacobiana de transformação dada por  $dF_K = J_K$  e  $\mathbf{b}$  é um vetor de translação. Tem-se da transformação covariante (E.1) que os vetores tangentes  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\tau}$  estão

relacionados por

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = J_K(\hat{\mathbf{x}})\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\xi})$$

logo, pode-se representar (2.19) como

$$\int_{-1}^1 L_m(t) \mathbf{E} \cdot (J_K \boldsymbol{\tau}) dt$$

e usando o mapeamento  $F_\gamma$ , restrito a aresta de referência  $\gamma$ , e tomando  $m = k$ , obtém-se

$$\int_{-1}^1 L_k(t) \mathbf{E} \cdot (J_K \boldsymbol{\tau}) dt = \int_{-1}^1 L_k(s) J_K^T \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

Observe que o campo elétrico  $\hat{\mathbf{E}}$  sobre um elemento de referência  $\hat{K}$  está relacionado com o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , definido sobre o elemento físico  $K$ , pela transformação covariante (E.1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})|_K = J_K^{-T} \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}). \quad (2.21)$$

Analogamente, a função de base global  $\phi_{i,j}^{(d)}$  ( $d = 1, 2$ ) correspondente à função de base local  $\hat{\phi}_{i,j}^{(d)}$  sobre o elemento de referência é definida por

$$\phi_{i,j}^{(d)}(\mathbf{x})|_K = J_K^{-T} \hat{\phi}_{i,j}^{(d)}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}). \quad (2.22)$$

**Observação 2.4.2** *Os graus de liberdade nas arestas garantem que  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  seja  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -conforme; complementando-os com os graus de liberdade no interior, pode-se garantir também que  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  é unissolvente.*

Mais detalhes sobre a observação 2.4.2, pode ser encontrada especificamente no Teorema 5 de Nédélec (1986).

### 2.4.3 Funções de Base para Elementos de Whitney ( $p = 0$ )

Particularizando a definição de  $\hat{\mathcal{P}}_p$  para o caso  $p = 0$ . Tem-se que  $\mathbb{Q}_{0,1} = \{1, \hat{y}\}$  e  $\mathbb{Q}_{1,0} = \{1, \hat{x}\}$ , logo

$$\hat{\mathcal{P}}_0 = \left\{ \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2); \hat{E}_1 = \text{span}\{1, \hat{y}\} \text{ e } \hat{E}_2 = \text{span}\{1, \hat{x}\} \right\}. \quad (2.23)$$

## Funções de Base

Nos elementos Whitney há apenas um único grau de liberdade em cada aresta, deste modo pode-se definir as funções de base como

$$\phi_0^{\gamma_1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad \phi_0^{\gamma_2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad (2.24)$$

$$\phi_0^{\gamma_3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; \quad \phi_0^{\gamma_4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2.$$

As funções de ordem zero podem ser caracterizadas pelo fato de terem o divergente livre, isto é,  $\nabla \cdot \phi_0^{\gamma_i} = 0$ , e também por terem a componente tangencial constante em cada aresta  $\gamma_i$  Jin (2002). A figura 2.2 mostra, no plano- $\hat{x}\hat{y}$ , os graus de liberdade distribuídos nas arestas do elemento de referência.

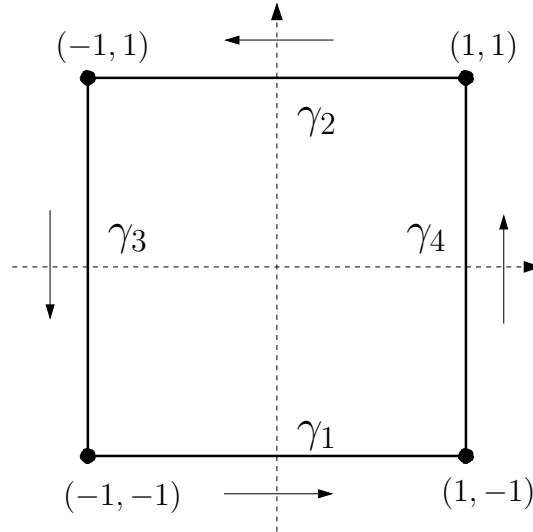


Figura 2.2: Graus de liberdade para elementos de Whitney. As setas indicam a ordem zero do momento tangencial do campo  $\hat{\mathbf{E}}$ . Note que a direção das tangentes se mantém no sentido anti-horário em torno do elemento.

Em particular, se a aresta  $\gamma_1$  está parametrizada por  $s \in (-1, 1)$  e  $p = 0$ , então escolhe-se  $v_0$  como sendo o polinômio de Legendre de grau zero  $L_0$ , e obtém-se, de acordo com a equação (2.17) e (Kaplan, 1970, equação 5.34),

$$\int_{\gamma_1} v_0 \hat{\mathbf{E}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} = \int_{-1}^1 L_0(s) \left( \hat{\mathbf{E}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{ds} \right) ds = \int_{-1}^1 L_0(s) \left( \hat{E}_1 \frac{d\hat{x}}{ds} + \hat{E}_2 \frac{d\hat{y}}{ds} \right) ds \quad (2.25)$$

Para deduzir a função de base  $\phi_0^{\gamma_1}$ , considera-se a parametrização para a aresta  $\gamma_1$  sobre

a reta  $\hat{y} = -1$ .

$$\begin{cases} \hat{x}(s) = \frac{1}{2}(1-s)x_1 + \frac{1}{2}(1+s)x_2 = s & \text{com } s \in [-1, 1], \\ \hat{y}(s) = \frac{1}{2}(1-s)y_1 + \frac{1}{2}(1+s)y_2 = -1 \end{cases} \quad (2.26)$$

onde  $(x_1, y_1) = (-1, -1)$  e  $(x_2, y_2) = (1, -1)$  são os pontos extremos da aresta  $\gamma_1$  de acordo com a figura 2.2. Ao derivar (2.26) com respeito a  $s$ , obtém-se  $\frac{d\hat{x}(s)}{ds} = 1$  e  $\frac{d\hat{y}(s)}{ds} = 0$ . Agora, por (2.23), pode-se escolher  $\hat{E}_1 = l_0(\hat{y})$ . Por fim, pela fórmula de Rodrigues tem-se que, para  $k = 0$ ,  $L_0(\hat{x}) = 1$ . Substituindo estes argumentos em (2.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{1}{2}(1-\hat{y}(s)) \cdot 1 + \hat{E}_2 \cdot 0 \right) ds &= \int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{1}{2}(1-\hat{y}(s)) L_0(\hat{x}(s)) \right) ds \\ &= \int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) l_0(\hat{y}(s)) L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{d\hat{x}(s)}{ds} + \frac{d\hat{y}(s)}{ds} \right) ds \\ &= \int_{\gamma_1} L_0(\hat{x}(s)) \underbrace{l_0(\hat{y}(s)) L_0(\hat{x}(s)) \mathbf{e}_1}_{\phi_0^{\gamma_1}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que  $\hat{y} = -1$ , logo

$$\int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{1}{2}(1-\hat{y}) L_0(\hat{x}(s)) \right) ds = \int_{-1}^1 L_0^2(\hat{x}(s)) ds = \|L_0\|^2 \quad (2.27)$$

e assim,

$$\int_{\gamma_1} L_0(\hat{x}(s)) \phi_0^{\gamma_1} \cdot d\hat{\mathbf{x}} = \|L_0\|^2,$$

ou seja, verifica-se que a condição (2.15) é satisfeita com  $j = l = 1$  e  $i = k = 0$ . De forma análoga, pode-se mostrar que esta condição é satisfeita para as demais arestas.

#### 2.4.4 Funções de Base para Elementos de Nédélec ( $p = 1$ )

O espaço de polinômios associado no elemento de Nédélec de ordem  $p = 1$  sobre elemento de referência  $\hat{K} = (-1, 1)^2$  é definido por

$$\hat{\mathcal{P}}_1 = \left\{ \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2); \hat{E}_1 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{1,2}\} \text{ e } \hat{E}_2 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{2,1}\} \right\},$$

onde

$$\mathbb{Q}_{1,2} = \{1, \hat{y}, \hat{y}^2, \hat{x}, \hat{x}\hat{y}, \hat{x}\hat{y}^2\} \text{ e } \mathbb{Q}_{2,1} = \{1, \hat{x}, \hat{x}^2, \hat{y}, \hat{y}\hat{x}, \hat{y}\hat{x}^2\}$$

**Observação 2.4.3** O espaço  $\hat{\mathcal{P}}_1$  é construído aumentando o espaço  $\hat{\mathcal{P}}_0$ . Além disso, pode-se notar que existem quatro novas funções de base nas arestas que serão geradas pelos elementos  $\hat{x}, \hat{x}\hat{y} \in \mathbb{Q}_{1,2}$  e  $\hat{y}, \hat{y}\hat{x} \in \mathbb{Q}_{2,1}$ , as quais serão adicionadas nas arestas juntamente com as funções de base para os elementos de Whitney.

Diferentemente das funções de base para elementos de Whitney, aqui verifica-se funções de base interiores geradas pelos elementos  $\hat{x}, \hat{y}^2, \hat{x}\hat{y}^2 \in \mathbb{Q}_{1,2}$  e  $\hat{y}, \hat{x}^2, \hat{y}\hat{x}^2 \in \mathbb{Q}_{2,1}$ . A Figura 2.3 mostra a distribuição dos graus de liberdade sobre um elemento quadrilateral.

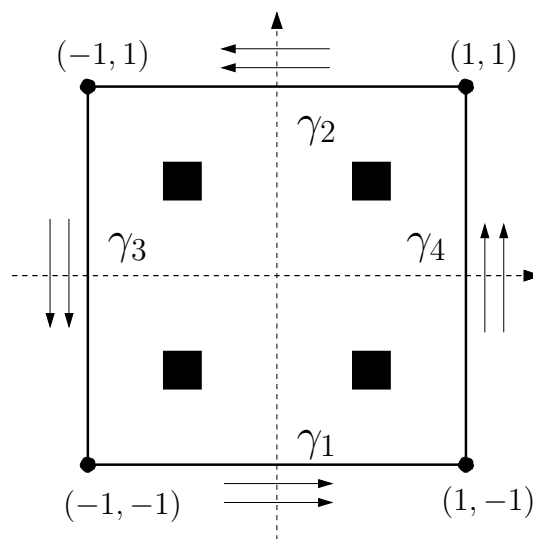


Figura 2.3: As setas indicam os graus de liberdade dos elementos de ordem  $p = 1$  distribuídos sobre as arestas. Os quadrados em preto, no interior do elemento, representam os graus de liberdade necessários para um quadrilátero.

### Funções de Base

Como pode-se observar, os elementos de ordem  $p = 1$  são munidos de graus de liberdade nas arestas e no interior do elemento. Deste modo, as funções de base para estes elementos são diferenciadas da seguinte forma:

- Funções de base para arestas

Define-se as funções de base nas arestas como

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^{\gamma^1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad \phi_0^{\gamma^2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_0^{\gamma^3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; \quad \phi_0^{\gamma^4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2 \\ \phi_1^{\gamma^1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad \phi_1^{\gamma^2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_1^{\gamma^3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; \quad \phi_1^{\gamma^4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Observe que as quatro primeiras funções de base de aresta, são as mesmas funções de base para os elementos de ordem  $p = 0$ . As funções de base em (2.28) são construídas usando o peso  $v_k = L_k$ , de modo que satisfaçam (2.15).

- Funções de base para o interior nas direções  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

Define-se as funções de base no interior  $\phi_{1,j,2}^{int}$ , com  $j = 0, 1$ , como

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{0,2,1}^{int_x}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_2(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad \phi_{1,2,1}^{int_x}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{x})l_2(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_{0,2,2}^{int_y}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_2(\hat{x})\mathbf{e}_2; \quad \phi_{1,2,2}^{int_y}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{y})l_2(\hat{x})\mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

As funções de base em (2.29) são construídas de modo que satisfaçam (2.16).

# Capítulo 3

## Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos

### 3.1 A Equação de Helmholtz

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio aberto e limitado com fronteira  $\Gamma$ . A equação homogênea para ondas acústicas pode ser descrita como

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

No regime harmônico no tempo, as soluções  $u \in H^1(\Omega)$  para a equação da onda (3.1) são dadas por

$$u = \tilde{u} e^{-i\omega t}, \quad (3.2)$$

onde  $\tilde{u}$  é interpretado como sendo a pressão acústica no domínio da frequência,  $\omega$  é a frequência circular,  $c$  a velocidade do som e  $i^2 = -1$ . Substituindo (3.2) em (3.1), tem-se

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j^2} + \kappa^2 \tilde{u} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.3)$$

onde  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$  é o vetor de onda. Além disso, tem-se que  $c$ ,  $\omega$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  estão associados, de acordo com Oliveira et al. (2007), pela relação de dispersão

$$\|\boldsymbol{\kappa}\| = \omega/c \quad (3.4)$$



onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclídeana.

## 3.2 Aproximação da Equação de Helmholtz em Uma Dimensão

Em um domínio unidimensional, como por exemplo  $\Omega = (0, 1)$ , a equação de onda acústica harmônica no tempo pode ser escrita, de acordo com Liu (2009), da seguinte forma

$$\phi'' + \kappa^2\phi + Q\delta(x, x_Q) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.5)$$

onde  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é a pressão acústica complexa,  $\kappa$  é o número de onda e  $Q\delta(x, x_Q)$  é uma fonte sonora constante localizada em  $x_Q$ . A equação (3.5) é conhecida como Equação de Helmholtz Não-Homogênea. Considere, agora, que a fonte sonora seja desprezível, isto é, a quantidade  $Q\delta(x, x_Q) = 0$ .

A formulação variacional de (3.5), com  $\phi \in H^1(\Omega)$ , é dada tomando a forma sesquilinear (vide Apêndice C)

$$S(\phi, w)_{L_2} = 0 \quad (3.6)$$

a qual, é definida por

$$S(\phi, w)_{L_2} = (\phi', w')_{L_2} - \kappa^2(\phi, w)_{L_2} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad (3.7)$$

onde  $(\cdot, \cdot)_{L_2}$  denota o produto interno em  $L_2(\Omega)$ , definido como no Apêndice A. As condições de contorno para problema (3.7), de acordo com Liu (2009), são

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pressão :} \quad \phi = \tilde{\phi} \\ \text{Velocidade :} \quad \phi' = i\kappa\rho v(x) \end{array} \right. \quad \text{quando } x = 0 \text{ e } x = 1. \quad (3.8)$$

onde  $\tilde{\phi}$  é uma função complexa dada,  $\rho$  é a densidade de massa ( $\rho = 1, 29 \text{ kg/m}^3$  para o ar com temperatura  $0^\circ\text{C}$  e 1-atm) e  $v(x)$  é a velocidade da partícula. Ao escolher  $v(x) = e^{i\kappa x}$ , então uma solução analítica para o problema (3.7)-(3.8) é dada por  $\phi(x) = \rho v(x)$ .

A aproximação por elementos finitos é obtida quando busca-se  $\phi_h \in \mathcal{X}_{hp} \subset H^1(\Omega)$  é tal

que

$$(\phi'_h, w')_{L_2} = \kappa^2(\phi_h, w)_{L_2} \quad \forall w \in \mathcal{X}_{hp} \cap H_0^1(\Omega) \quad (3.9)$$

onde  $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u(x) = 0 \forall x \in \Gamma\}$ . As condições de contorno são aplicadas requerendo que  $\phi_h(x) = \rho v_h(x)$  onde  $v_h(x)$  é a versão discreta da exponencial complexa  $v(x) = e^{i\kappa x}$ .

Agora apresentar-se-á uma forma alternativa de aproximação, a qual, visa uma implementação computacional mais simplificada para o problema (3.7)-(3.8). A ideia é estabelecer, a partir de  $\phi(x)$ , um novo problema com condições de contorno homogêneas. O novo problema é resolvido com o Método dos Elementos Finitos de segunda ordem,  $p = 2$ , usando as funções de base hierárquicas de Legendre

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.10)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.11)$$

$$N_3(\xi) = \sqrt{\frac{3}{8}}(\xi^2 - 1) \quad (3.12)$$

onde  $\xi \in \Omega_e = [-1, 1]$

Uma vez obtida a solução para o novo problema, o próximo passo é recuperar a solução do problema dado pelas equações (3.7)-(3.8). Para esta aproximação alternativa são consideradas as funções  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\bar{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas respectivamente por

$$\alpha(x) = 1 + \text{sen}(\pi x^2)(x - 1) \quad (3.13)$$

$$\phi_0(x) = \alpha(x)\phi(x) \quad (3.14)$$

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) - \phi_0(x) \quad (3.15)$$

Note que  $\phi_0(x) = \phi(x)$  quando  $x = 0$  e  $x = 1$ , e que  $\bar{\phi} \in H_0^1(\Omega)$ . Substituindo (3.15) em (3.7) obtém-se

$$\begin{aligned}
S(\bar{\phi}, w)_{L_2} &= (\bar{\phi}', w')_{L_2} - \kappa^2(\bar{\phi}, w)_{L_2} \\
&= ((\phi - \phi_0)', w')_{L_2} - \kappa^2(\phi - \phi_0, w)_{L_2} \\
&= \underbrace{(\phi', w')_{L_2} - \kappa^2(\phi, w)_{L_2}}_{=0} - (\phi_0', w')_{L_2} + \kappa^2(\phi_0, w)_{L_2} \\
&= (\phi_0'' + \kappa^2\phi_0, w)_{L_2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Considere agora uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(x) = \phi_0''(x) + \kappa^2\phi_0(x)$ . Deste modo, a partir da equação (3.16), obtém-se um novo problema de valor de contorno: Encontrar  $\bar{\phi} \in H_0^1(\Omega)$  que satisfaz

$$(\bar{\phi}', w')_{L_2} - \kappa^2(\bar{\phi}, w)_{L_2} = (f, w)_{L_2} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.17}$$

sujeito às condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Press\~ao} : \quad \bar{\phi} = 0 \\ \\ \textit{Velocidade} : \quad \bar{\phi}' = 0 \end{array} \right. \quad \text{quando } x = 0 \text{ e } x = 1. \tag{3.18}$$

Discretizando o domínio  $\Omega$ , a aproximação alternativa por elementos finitos de segunda ordem  $\bar{\phi}_h \in \mathcal{X}_{h2} \cap H_0^1(\Omega)$  é calculada, tal que

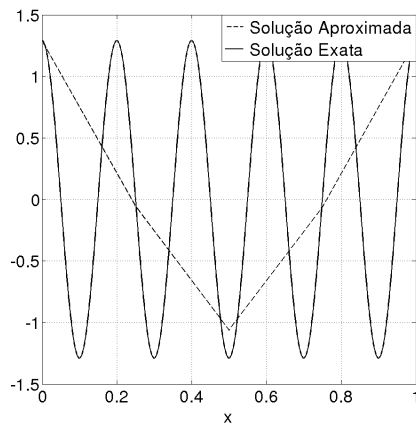
$$(\bar{\phi}_h', w_h')_{L_2} - \kappa^2(\bar{\phi}_h, w_h)_{L_2} = (f, w_h)_{L_2} \quad \forall w \in \mathcal{X}_{h2} \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.19}$$

Uma vez que o problema (3.17)-(3.18) é aproximado por  $\bar{\phi}_h$  a solução aproximada do problema (3.7)-(3.8) é obtida pelo simples cálculo  $\phi_h = \bar{\phi}_h + \phi_0$ .

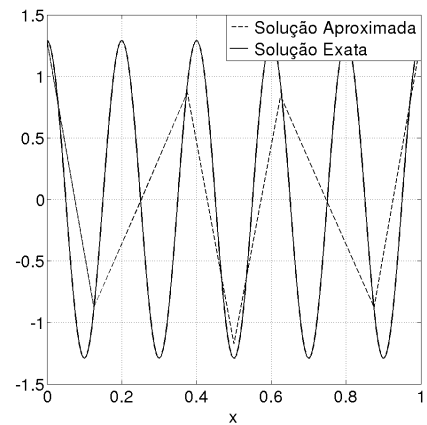
Para verificar a performance da aproximação, foi usado na implementação computacional o software MATLAB versão 2013a. O algoritmo desenvolvido tem como base o mesmo usado por Reddy (1986) na descrição do método de Galerkin.

As Figuras 4.1-(a), (b), (c), (d), (e) e (f) mostram a aproximação do problema (3.7)-(3.8) usando o cálculo  $\phi_h = \bar{\phi}_h + \phi_0$ , o valor fixado do número de onda  $\kappa = 10\pi$  e as funções de base (3.10), (3.11) e (3.12). As aproximações são feitas de acordo com os seguintes níveis

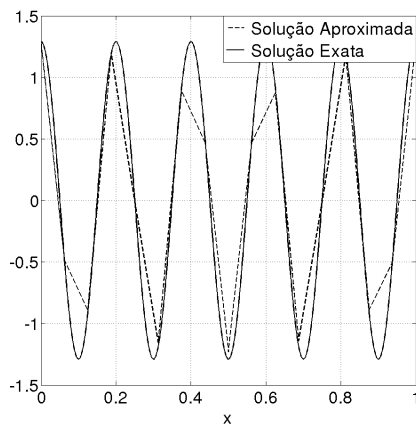
de refinamento:  $h = 1/2$ ,  $h = 1/4$ ,  $h = 1/8$ ,  $h = 1/16$ ,  $h = 1/32$  e  $h = 1/64$ . A convergência dos resultados é claramente verificada, a medida que  $h$  tende a zero.



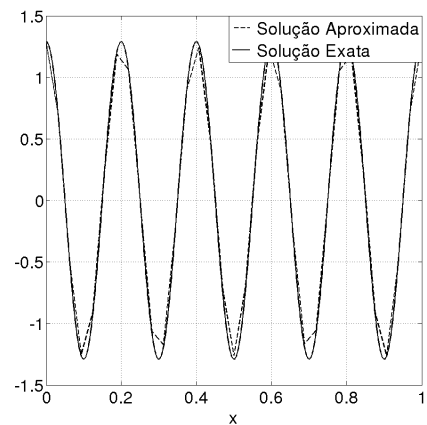
(a)



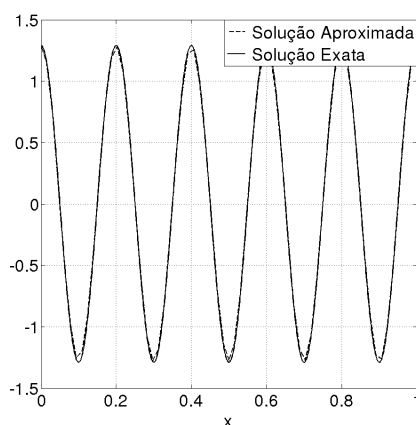
(b)



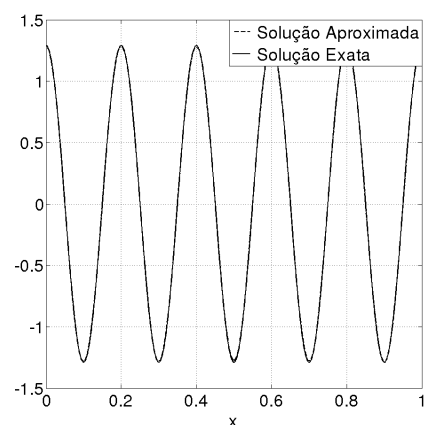
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.1: Aproximação nos seguintes níveis de refinamento: (a)  $h = 1/2$ , (b)  $h = 1/4$ , (c)  $h = 1/8$ , (d)  $h = 1/16$ , (e)  $h = 1/32$  e (f)  $h = 1/64$ .

### 3.3 Aproximação da Equação de Helmholtz em Duas Dimensões

#### 3.3.1 Aproximação de Ondas Planas

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio aberto e limitado com contorno  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . A equação da onda acústica homogênea pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.20)$$

onde  $u \in H^1(\Omega)$ . Para ondas harmônicas no tempo, uma solução para a equação (3.20) pode ser escrita como

$$u(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (3.21)$$

Substituindo a equação (3.21) na equação (3.20), tem-se a equação escalar homogênea de Helmholtz em duas dimensões, escrita como:

$$\nabla^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.22)$$

em que  $\nabla^2$  é o operador laplaciano, veja (B.1). Além disso, segue da equação (3.4) a relação de dispersão

$$\omega = c \|\boldsymbol{\kappa}\| = c \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \quad (3.23)$$

Deste modo, pode-se considerar o seguinte problema variacional: Encontrar  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$  tal que

$$(\nabla \tilde{u}, \nabla w)_{L_2} = \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{u}, w)_{L_2} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (3.24)$$

O problema (3.24), de acordo com Liu (2009), fica sujeito às condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Pressão} : \quad \tilde{u} = u_B \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1. \\ \textit{Velocidade} : \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = i\kappa_j \rho v(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

onde  $v(\mathbf{x})$  é a velocidade da partícula e a quantidade  $u_B$  é uma função complexa dada.

Escolhendo  $v(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}}$ , então uma solução para o problema (3.24) com condições de contorno (3.25) é dado por  $u(\mathbf{x}) = \rho e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}}$ . A aproximação por elementos finitos com  $u_h \in \mathcal{X}_{hp} \cap H^1(\Omega)$  é tal que

$$(\nabla u_h, \nabla w_h) = \frac{\omega^2}{c^2}(u_h, w_h) \quad (3.26)$$

para todo  $w_h \in \mathcal{X}_{hp} \cap H_0^1(\Omega)$ . As condições de contorno são aplicadas requerendo que  $u_h(\mathbf{x}) = \rho v_h(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ , onde  $v_h(\mathbf{x})$  é a versão discreta da exponencial complexa  $v(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}}$ .

Assim, como no caso em uma dimensão, considera-se agora, uma solução alternativa para o problema (3.24)-(3.25). Nesta abordagem, define-se  $\alpha(\mathbf{x}) = 1 + x_1^2 x_2^2 (1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2$ , bem como  $u_0(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$  e  $\bar{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Logo, as novas condições de contorno são:  $\bar{u}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \bar{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ , com  $j = 1, 2$ . Seguindo por este caminho o problema definido por (3.24)-(3.25) transforma-se no problema não-homogêneo

$$\nabla^2 \bar{u}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{u}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.27)$$

onde  $f(\mathbf{x}) = \nabla^2 u_0(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} u_0(\mathbf{x})$ . Portanto,  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$  satisfaz o seguinte problema variacional:

$$(\nabla \bar{u}, \nabla w) - \frac{\omega^2}{c^2} (\bar{u}, w) = (f, w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad (3.28)$$

sujeito às condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Press\~ao} : \bar{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \textit{Velocidade} : \frac{\partial \bar{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Discretizando o domínio  $\Omega$ , a aproximação por elementos finitos de segunda ordem  $\bar{u}_h \in \mathcal{X}_{h2} \cap H_0^1(\Omega)$  é calculada, tal que

$$(\nabla \bar{u}_h, \nabla w_h) - \frac{\omega^2}{c^2} (\bar{u}_h, w_h) = (f, w_h) \quad (3.30)$$

para todo  $w_h \in \mathcal{X}_{h2} \cap H_0^1(\Omega)$ . Uma vez que o problema (3.28)-(3.29) é resolvido para  $\bar{u}_h$ , a solução aproximada de (3.24)-(3.25) é obtida realizando o cálculo:  $u_h = \bar{u}_h + u_0$ .

A Figura 3.2(a) mostra a solução analítica do problema (3.24)-(3.25), enquanto que a Figura 3.2(b) mostra o resultado da aproximação por elementos finitos de segunda ordem, usando o cálculo  $u_h = \bar{u}_h + u_0$ , o vetor de onda  $\kappa = (10\pi, 10\pi)$ ,  $h = 1/16$  e as funções de base de Legendre para elementos retangulares, equações (2.8).

As Figuras 3.3(a), 3.3(b) e 3.3(c) descrevem um corte diagonal partindo da origem na direção  $(1, 1)$  da onda plana da Figura 3.2(a), e da superfície discreta encontrada pela abordagem alternativa da Figura 3.2(b), nos diferentes níveis de refinamento:  $h = 1/16$ ,  $h = 1/32$ ,  $h = 1/64$ .

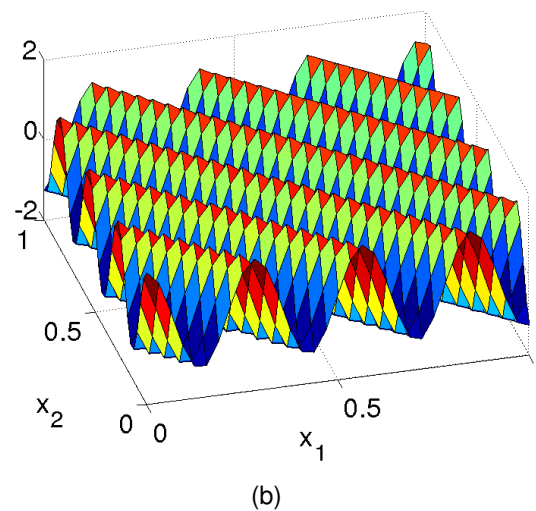
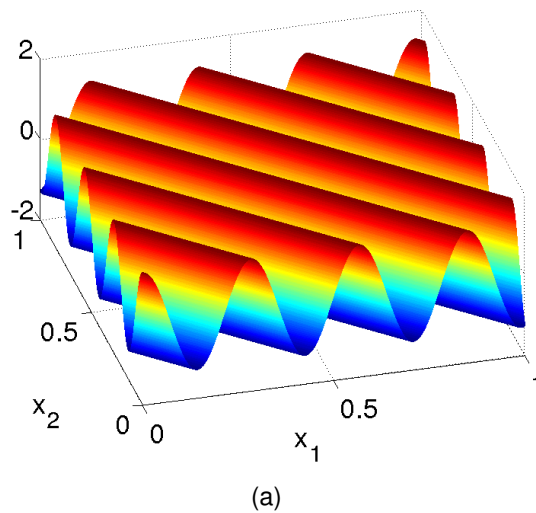


Figura 3.2: (a) Solução analítica do problema (3.24)-(3.25); (b) Abordagem alternativa do método dos elementos finitos com  $p = 2$ ,  $\kappa = 10\pi$  e refinamento  $h = 1/16$ .

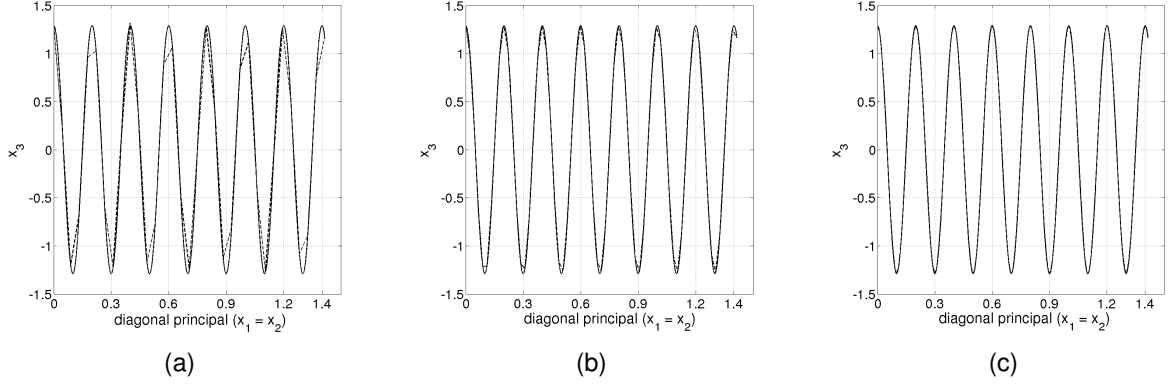


Figura 3.3: As Figuras (a), (b) and (c) descrevem um corte diagonal na direção  $(1, 1)$  da onda plana, em diferentes níveis de refinamento,  $h = 1/16$ ,  $h = 1/32$ ,  $h = 1/64$ , respectivamente.

### 3.3.2 Aproximação de Ondas Cilíndricas

Considere a função  $f \in L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , a qual tem suporte compacto no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d = 1, 2, \dots, n$ . Um aspecto relevante que aparece é quando se tem como solução da equação de Helmholtz não-homogênea, a convolução entre a função  $f$  e o espaço livre da função de Helmholtz-Green  $g \in L^p(\Omega)$  Beylkin (2009),

$$\hat{u}(\mathbf{x}^{(d)}) = (g * f)(\mathbf{x}^{(d)}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}^{(d)} - \mathbf{y}^{(d)}) f(\mathbf{y}^{(d)}) d\mathbf{y}^{(d)} \quad (3.31)$$

Nas condições da equação (3.31), tem-se que  $g$  satisfaz

$$\nabla^2 g + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 g = -\delta_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x}^{(d)} \in \Omega \quad (3.32)$$

onde  $\delta_{\mathbf{x}}$  é a função Delta-Dirac concentrada em  $\mathbf{x}^{(d)}$ , Monk (2003a). Em três dimensões, com  $\mathbf{x}^{(3)} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{y}^{(3)} = (y_1, y_2, y_3)$ , a expressão da solução fundamental da equação (3.32) é dada por

$$g(\mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{y}^{(3)}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{y}^{(3)}|}}{|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{y}^{(3)}|}, \quad \mathbf{x}^{(3)} \neq \mathbf{y}^{(3)} \quad (3.33)$$

O principal interesse deste trabalho é o caso  $d = 2$ . Assim, a solução fundamental em duas dimensões pode ser obtida tomando  $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1, x_2)$  e  $\mathbf{y}^{(2)} = (y_1, y_2)$ ,  $r_1 = |\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{y}^{(3)}|$ ,  $r_2 = |\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{y}^{(2)}|$ ,  $x_3 = 0$ ,  $y_3 = r_2 \sinh(t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , e a identidade  $\cosh(\theta) - \sinh(\theta) = 1$



para qualquer ângulo  $\theta$ . Desta forma, tomando

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{y}^{(3)})|_{x_3=0} dy_3 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{c}r_2 \cosh(t)} dt \\
 &= \frac{i}{4} h_0^{(1)} \left( \frac{\omega}{c} r \right)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde  $r = r_2$  e  $h_0^{(1)}$  é a função de Hankel de primeiro tipo, Olver et al. (2010). Note que a solução em (3.34) satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial g}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}g \right) = 0 \tag{3.35}$$

Suponha que as ondas cilíndricas se expandem a partir de uma fonte puntual localizada na origem, ou seja, no ponto  $(0, 0)$ , veja a Figura 3.4(a). A aproximação por elementos finitos será considerada em um domínio quadrado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  extraído da Figura 3.4(a)(veja a Figura 3.4(b)).



Figura 3.4: (a) Onda cilíndrica; (b) Domínio  $\Omega$ .

As Figuras 3.5(a) e 3.5(b) mostram a solução exata (3.34) e a abordagem de elementos finitos, respectivamente, referentes às ondas cilíndricas. Esta aproximação é calculada usando o mesmo vetor de onda e o mesmo parâmetro  $h$  para a aproximação de ondas planas.

As Figuras 3.6(a), 3.6(b) e 3.6(c) descrevem um corte diagonal da região de propagação  $\Omega = (1, 1) \times (2, 2)$  da onda cilíndrica, Figura 3.5(a), e da superfície discreta encontrada pela aproximação alternativa, Figura 3.5(b), nos diferentes níveis de refinamento:  $h = 1/16$ ,  $h = 1/32$ ,  $h = 1/64$ .

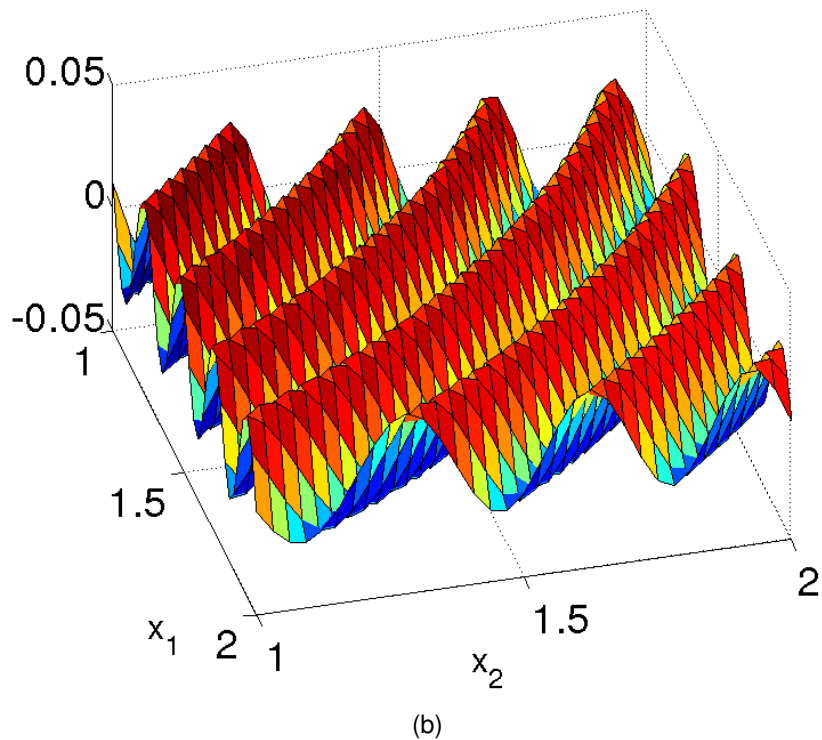
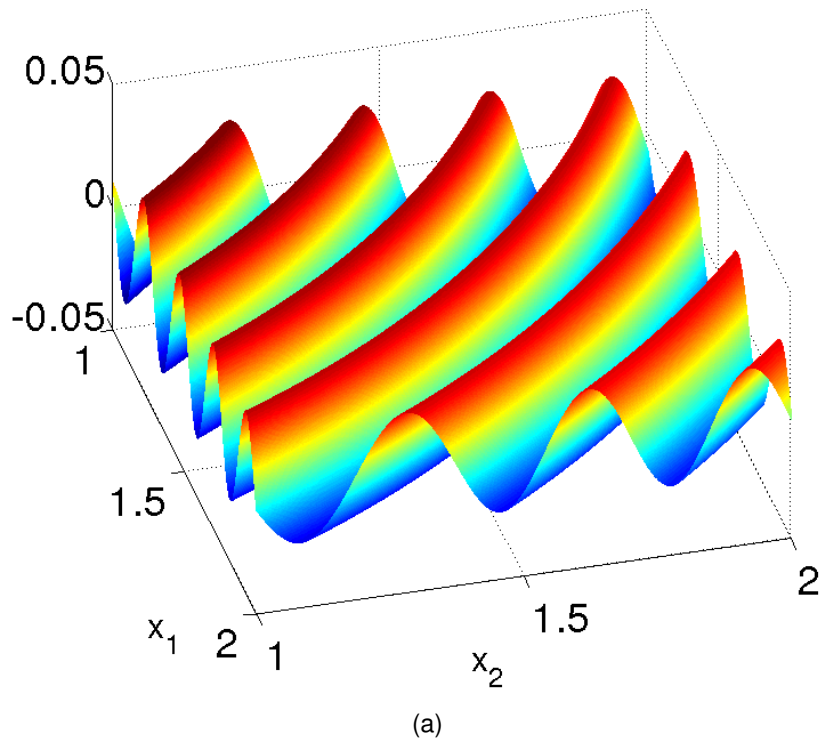


Figura 3.5: (a) Solução analítica para ondas cilíndricas; (b) Abordagem alternativa por elementos finitos para onda cilíndricas com refinamento  $h = 1/16$ .

### 3.4 O Sistema de Segunda Ordem de Maxwell

O campo eletromagnético se caracteriza por quatro funções vetoriais de posição e tempo: o campo elétrico  $\mathcal{E}$ , o vetor deslocamento  $\mathcal{D}$ , o campo magnético  $\mathcal{H}$  e a indução magnética

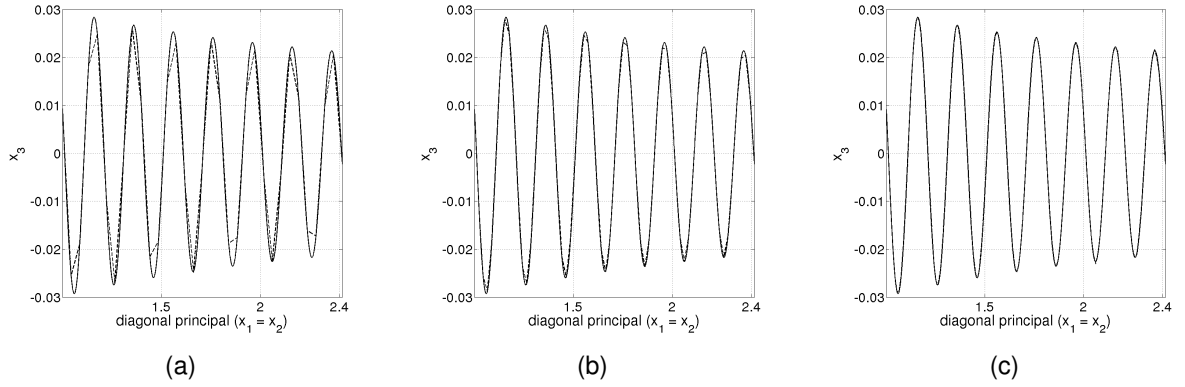


Figura 3.6: As Figuras (a), (b) and (c) descrevem um corte diagonal na direção  $(1, 1)$  da região de propagação  $\Omega = (1, 1) \times (2, 2)$  da onda cilíndrica, nos diferentes níveis de refinamento,  $h = 1/16$ ,  $h = 1/32$ ,  $h = 1/64$ , respectivamente.

**B.** As leis básicas do campo eletromagnético são regidas pelas equações de Maxwell, Soares (2008) e Jackson (1999), que envolvem as quatro funções vetoriais. As equações que constituem o sistema de equações de Maxwell são a lei Faraday da Indução Eletromagnética

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0 \quad (3.36)$$

a Lei de Gauss do magnetismo

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (3.37)$$

a pela Lei de Maxwell-Ampère

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathcal{H} + \mathcal{J} = 0 \quad (3.38)$$

e a Lei de Gauss da eletricidade

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho \quad (3.39)$$

com  $\rho$  assumindo ser a densidade de carga elétrica e  $\mathcal{J}$  a densidade de corrente elétrica.

Propõe-se fazer uma análise de propagação eletromagnética em uma frequência única. Por exemplo, em muitos sistemas envolvendo ondas eletromagnéticas as variações no tempo são da forma cosenoidal e podem ser expressas por  $e^{-i\omega_0 t}$ , assim, o problema do tempo-dependente, equações acima, pode ser reduzido para o sistema de Maxwell harmônico no tempo, como é mostrado a seguir.

## Dedução das Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo

Se a radiação tem frequência temporal  $\omega_0$ , onde  $\omega_0 > 0$ , os campos, elétrico e magnético, harmônicos no tempo ficam relacionados com os campos, elétrico e magnético dependentes do tempo por

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z)) \quad (3.40)$$

$$\mathcal{H}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z)) \quad (3.41)$$

pode-se ainda estender esta relação para

$$\mathcal{D}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{D}}(x, y, z)) \quad (3.42)$$

$$\mathcal{B}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)) \quad (3.43)$$

$$\mathcal{J}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{J}}(x, y, z)) \quad (3.44)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\rho}(x, y, z)), \quad (3.45)$$

onde  $\text{Re}(z)$  representa a parte real do número  $z \in \mathbb{C}$ . O símbolo  $\text{Re}(\cdot)$  possui as seguintes propriedades para funções complexas  $A_1$  e  $A_2$ .

$$(P1) \text{Re}(A_1) + \text{Re}(A_2) = \text{Re}(A_1 + A_2)$$

$$(P2) \text{Re}(aA_1) = a\text{Re}(A_1) \quad \text{com } a \in \mathbb{R}$$

$$(P3) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{Re}(A_1) = \text{Re} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_i} \right)$$

**Lema 3.4.1** : Se  $\text{Re}(A_1 e^{-i\omega_0 t}) = \text{Re}(A_2 e^{-i\omega_0 t})$  para todo  $t$ , então  $A_1 = A_2$ .

**Demonstração:** Assuma  $A_1 \neq A_2$ . Considere que  $A_1 = a + bi$  e que  $A_2 = c + di$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Como a igualdade  $\text{Re}(A_1 e^{-i\omega_0 t}) = \text{Re}(A_2 e^{-i\omega_0 t})$  é válida para todo  $t$ , logo para  $t = 0$ , tem-se que  $\text{Re}(A_1) = \text{Re}(A_2)$ . Tomando  $t = \pi/2\omega$ , tem-se que  $\text{Im}(A_1) = \text{Im}(A_2)$ , o que contradiz a escolha  $A_1 \neq A_2$ . Portanto,  $A_1 = A_2$ . ■

Tomando agora a equação (3.40) e aplicando o operador  $\nabla \times$  juntamente com a propriedade (P3), obtém-se:

$$\nabla \times \mathcal{E} = \nabla \times \operatorname{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}}) = \operatorname{Re}(\nabla \times e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}})$$

Por outro lado, ao considerar a equação (3.36) e substituir  $\mathcal{B}$  usando a igualdade na equação (3.43) seguida da propriedade (P3), encontra-se:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}) \\ &= -\operatorname{Re}\left(\frac{\partial e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}\right) \\ &= \operatorname{Re}(i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}) \end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{Re}(\nabla \times e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}}) = \operatorname{Re}(i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}})$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ . Segue do Lema 3.4.1 que

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega_0 \tilde{\mathbf{B}} \quad (3.46)$$

Procedendo desta maneira, pode-se escrever (3.38) e as Leis de Gauss para a eletricidade e o magnetismo na forma

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\omega_0 \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{J}} \quad (3.47)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho} \quad (3.48)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.49)$$

Assim, (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) formam o sistema de Equações de Maxwell Harmônico no Tempo.

Considerando dois meios, como na figura 3.4, segue abaixo as condições na interface  $S$  para os campos harmônicos no tempo:

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_1) = \tilde{\mathbf{J}}_S \quad (3.51)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{D}}_2 - \tilde{\mathbf{D}}_1) = \tilde{\rho}_S \quad (3.52)$$

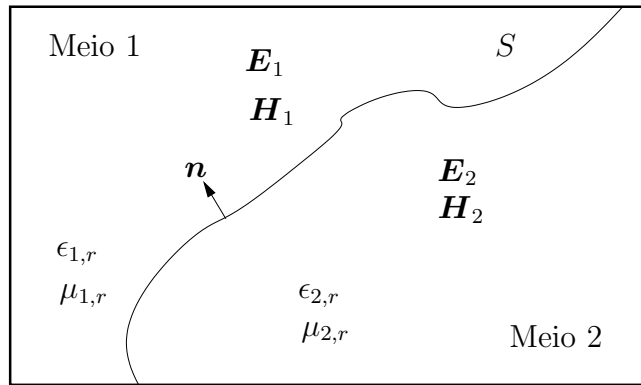


Figura 3.7: Dois meios separados por uma interface  $S$ .

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \tilde{\mathbf{B}}_1) = 0 \quad (3.53)$$

### Equações Constitutivas para Meios Lineares

As equações (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) serão estendidas por duas leis constitutivas que relacionam  $\tilde{\mathbf{E}}$  e  $\tilde{\mathbf{H}}$  à  $\tilde{\mathbf{D}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$ , respectivamente. Estas leis dependem das propriedades do material no domínio ocupado pelo campo eletromagnético. No vácuo ou no ar os campos são relacionados pelas equações

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{D}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}},$$

onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são chamadas de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente. Os valores de  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  dependem do sistema de unidades usado. No sistema padrão, SI, de unidades tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Hm}^{-1} \\ \epsilon_0 &\approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1} \end{aligned}$$

Além disso, a velocidade da luz no vácuo, denotada por  $c$ , é dada por  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}^{-1}$ . Em materiais heterogêneo e isotrópicos, os quais são mais comuns na prática, onde o domínio do campo eletromagnético é constituído de diferentes materiais, as leis constitutivas ficam

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.54)$$

onde  $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$  e  $\mu = \mu(x, y, z)$  são funções escalares de posição.

## Materiais Condutores

As duas equações constitutivas (3.54) são semelhantes entre si, pois relacionam dois a dois os vetores do campo,  $\tilde{\mathbf{E}}$  e  $\tilde{\mathbf{D}}$ , os “vetores elétricos”, e  $\tilde{\mathbf{H}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$ , os “vetores magnéticos”. Existe ainda uma terceira equação constitutiva, esta relaciona um vetor do campo com a densidade de corrente. Na literatura esta equação é conhecida como Lei de Ohm e sua expressão se define por

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_a, \quad (3.55)$$

onde  $\sigma = \sigma(x, y, z)$  é uma função de posição não-negativa denotada como sendo a condutividade do material e  $\mathbf{J}_a$  descreve a densidade de corrente elétrica aplicada. Tomando as três equações constitutivas pode-se reescrever as equações (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) da seguinte forma:

- (i) Usando (3.46) e  $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{B}}$  obtém-se:  $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega_0 \mu \tilde{\mathbf{H}}$
- (ii) Aplicando  $\nabla \cdot$  em (3.47), tem-se pela identidade (B.3), que:  $i\omega_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}}$ .  
Agora,  $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}$  e a Lei de Ohm, tem-se:  $\nabla \cdot (\epsilon \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{1}{i\omega_0} \nabla \cdot (\sigma \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_a)$
- (iii) Usando  $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}$  e a lei de Ohm em (3.47), tem-se:  $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - (\sigma \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_a) + i\omega_0 \epsilon \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$
- (iiii) Usando  $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{B}}$  em (3.49), tem-se:  $\nabla \cdot \mu \tilde{\mathbf{H}} = 0$

## Sistema de Primeira Ordem de Maxwell

De acordo com Colton et al. (1983), pode-se definir ainda os campos elétrico e magnético harmônicos no tempo, respectivamente, por

$$\mathbf{E} = \epsilon_0^{1/2} \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \mu_0^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}$$

Além disso, ao definir a permeabilidade e a permissividade relativas por

$$\epsilon_r = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega_0} \right) \quad \text{e} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (3.56)$$

podem-se escrever a equação (i) como

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega_0 \mu \epsilon_0^{1/2} \tilde{\mathbf{H}} \\
&= i\omega_0 \mu \epsilon_0^{1/2} \frac{\mathbf{H}}{\mu_0^{1/2}} \\
&= i\omega_0 \mu_r \mu_0 \epsilon_0^{1/2} \frac{\mathbf{H}}{\mu_0^{1/2}} \\
&= i\omega_0 \mu_r \mu_0^{1/2} \epsilon_0^{1/2} \mathbf{H} \\
&= i\kappa \mu_r \mathbf{H}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\kappa \mu_r \mathbf{H}, \quad (3.57)$$

onde  $\kappa = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , e a equação (iii) multiplicada por -1 como

$$\begin{aligned}
-\mathbf{J}_a &= -i\omega_0 \mu \tilde{\mathbf{E}} - i^2 \frac{\omega_0}{\omega_0} \sigma \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\
&= -i\omega_0 \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega_0} \right) \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\
&= -i\omega_0 \epsilon_0 \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega_0} \right) \right] \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\
&= -i\omega_0 \epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\
&= -i\omega_0 \epsilon_0^{1/2} \epsilon_r \epsilon_0^{1/2} \frac{\mathbf{E}}{\epsilon_0^{1/2}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}
\end{aligned}$$

Agora multiplicando  $\mu_0^{1/2}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
-\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2} &= -i\omega_0 \epsilon_0^{1/2} \epsilon_r \mu_0^{1/2} \mathbf{E} - \nabla \times \mu_0^{1/2} \tilde{\mathbf{H}} \\
&= -i\epsilon_r \kappa \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H}
\end{aligned}$$

Logo,

$$-i\epsilon_r \kappa \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2}, \quad (3.58)$$

onde  $\kappa = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Assim, o sistema de primeira ordem de Maxwell é formado pelas equações (3.57) e (3.58)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mu_r \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ -i\epsilon_r \kappa \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2} \end{cases} \quad (3.59)$$



## Sistema de Segunda Ordem de Maxwell

Aplicando o operador divergente em (3.57) e (3.58), tem-se o que se define como condição de divergência

$$\nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{E} = -\frac{1}{\kappa^2} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.60)$$

$$\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H} = 0, \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{F} = i\kappa\mu_0^{1/2} \mathbf{J}_a$ . Agora, isolando  $\mathbf{H}$  em (3.57) e em seguida substituindo em (3.58), obtém-se:

$$-i\kappa\epsilon_r \mathbf{E} - \nabla \times \left( \frac{1}{i\kappa\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2}$$

Multiplicando por  $-i\kappa$  tem-se o Sistema de Maxwell de Segunda Ordem

$$-\kappa^2 \epsilon_r \mathbf{E} + \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{F} \quad (3.62)$$

A partir desse momento será tratado o caso de ondas eletromagnéticas plana que se propagam em um domínio com duas dimensões, deste modo, para evitar abusos de notação será usado simplesmente o operador  $\nabla$  para simbolizar os operadores de superfície  $\nabla_S$  e  $\vec{\nabla}_S$ , no entanto, as propriedades operatórias devem ser aquelas apresentadas no Apêndice A. No caso do rotacional, a diferença deverá ficar clara quando será aplicado  $\nabla \times$  sobre uma função escalar ou sobre uma função vetorial conforme as equações (B.8) e (B.9), respectivamente.

### 3.4.1 Aproximação de Ondas Eletromagnéticas

Com o objetivo de ilustrar a performance dos elementos finitos vetoriais de Whitney-Nédélec, tomar-se-á um problema de propagação de uma onda plana através de um domínio quadrado  $\Omega = (0, 1)^2$  com contorno  $\Gamma$ . Suponha  $\Omega$  no vácuo, assim  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$ . Considere o campo elétrico  $\mathbf{E} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  e o seguinte problema de valor de contorno

$$-\omega^2 \left( 1 + \frac{i\sigma\mu\omega_0}{\omega^2} \right) \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{F} \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (3.63)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = f \quad \text{sobre } \Gamma \quad (3.64)$$

onde  $\omega$  é uma frequência fixada,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  é o vetor normal à  $\Gamma$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua e suave.

O Método dos Elementos Finitos, como se sabe, é baseado na formulação variacional de problemas de valor de contorno. Antes de iniciar a discretização do sistema de segunda ordem (3.63), uma formulação variacional apropriada deve ser definida, Monk (2003a), Reddy (1986), Kreyszig (1978). Primeiro é importante notar que, como as equações de Maxwell envolvem funções complexas no regime harmônico o campo deve ser adaptado para espaços complexos. Por exemplo, o produto interno em  $(L_2(\Omega))^2$  é agora definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \quad (3.65)$$

Para a formulação variacional, o procedimento é feito da seguinte forma: (a) multiplica-se (3.63) por  $\phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ ; (b) integra-se sobre  $\Omega$  o resultado dessa multiplicação; (c) aplica-se o Teorema de Stokes no plano, equação B.4.1, escolhendo  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{E}$  e  $\mathbf{v} = \phi$ . Assim, tem-se a formulação variacional desejada

$$-\omega^2 \left( \left( 1 + \frac{i\sigma\mu\omega_0}{\omega^2} \right) \mathbf{E}, \phi \right)_{L_2} + (\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \phi)_{L_2} = (\mathbf{F}, \phi)_{L_2} \quad (3.66)$$

para todo  $\phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ . Outro aspeto importante que deve ser observado é a condutividade  $\sigma$ . Se  $\sigma > 0$  em  $\Omega$ , então pode-se escrever (3.66) como uma forma sesquilinear coerciva – veja Apêndice C – em  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ , Monk (1991). Isso assegura – veja o Teorema C.0.2 no Apêndice C – que (3.66) terá uma única solução para qualquer frequência  $\omega$  e para qualquer  $\mathbf{F} \in (L_2(\Omega))^2$ . Contudo, se  $\sigma = 0$  em  $\Omega$ , então (3.66) não terá solução para um conjunto discreto infinito de valores de  $\omega$ , os quais são chamados de ressonâncias. Neste caso, a forma sesquilinear definida pelo lado esquerdo de (3.66) não será coerciva, Monk (1991). Para contornar este problema, o uso da teoria de Fredholm fornece as condições necessárias que garantem a existência e unicidade de uma solução, Monk (2003a). Consequentemente, para qualquer valor imposto à  $\sigma$ , uma solução para (3.66) pode ser encontrada.

Assumindo  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  e  $\sigma = 0$ , a formulação variacional (3.66) torna-se o seguinte problema:

Encontrar  $\mathbf{E} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \boldsymbol{\phi})_{L_2} = \omega^2(\mathbf{E}, \boldsymbol{\phi})_{L_2} \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = f \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.68)$$

Escolhendo  $f(\mathbf{x}) = n_2 \tilde{E}_1(\mathbf{x}) - n_1 \tilde{E}_2(\mathbf{x})$  em (3.68), onde  $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2) = (-10\pi e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}}, 10\pi e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}})$  é uma onda plana se propagando na direção do vetor de onda  $\boldsymbol{\kappa} = 10\pi(1, 1)$ , e  $\omega = 10\sqrt{2}\pi$ , tem-se que  $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$  é uma solução analítica de (3.67)-(3.68).

Considere que o domínio  $\Omega$  é discretizado por uma malha uniforme de elementos quadrados com arestas de tamanho  $h$ , veja a Figura 3.8. Além disso, suponha que elementos de ordem  $p$  são usados para definir o espaço de elementos finitos vetoriais  $\mathbf{V}_{hp}$ .

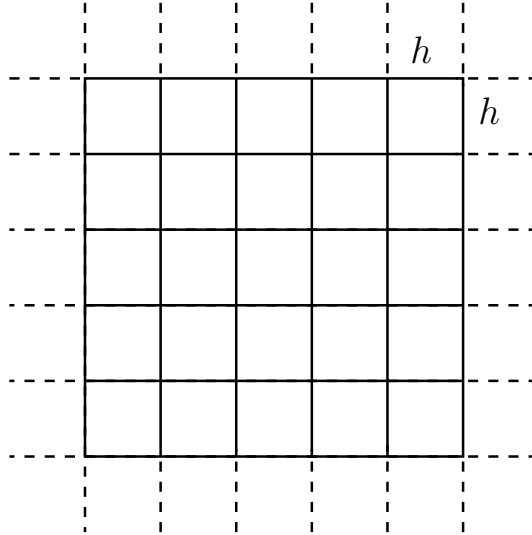


Figura 3.8: Malha usada nos experimentos numéricos, onde cada elemento quadrado da malha tem lado  $h = 1/n$ , em que  $n^2$  é o número de elementos na malha.

A aproximação por elementos finitos busca uma solução discreta  $\mathbf{E}_{hp} \in \mathbf{V}_{hp}$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{hp}, \nabla \times \mathbf{v}_{hp})_{L_2} = \omega^2(\mathbf{E}_{hp}, \mathbf{v}_{hp})_{L_2} \quad (3.69)$$

para todo  $\mathbf{v}_{hp} \in \mathbf{V}_{hp} \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ . As condições de contorno essenciais são impostas requerendo que em todas as arestas  $\gamma \subset \Gamma$ , tenha-se

$$\int_{\gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{hp} - f) v \, ds = 0 \quad (3.70)$$

para todo  $v \in \mathbb{P}_p(\gamma)$ , onde  $\mathbb{P}_p$  denota o espaço unidimensional de polinômios de grau no máximo igual à  $p$  no comprimento do arco. Note que, se  $\mathbf{t} = (n_2, -n_1)$  é o vetor tangente à  $\gamma$ , a equação (3.70) coincide com a equação (2.10). A aproximação para  $\tilde{E}$  é realizada com elementos de Whitney e elementos de Nédélec de primeira ordem. Alguns experimentos numéricos relativos à solução do problema podem ser vistos nesta seção. As Figuras 3.9(a), 3.9(b), 3.9(c) e 3.9(d) apresentam a aproximação da parte real da segunda componente da solução analítica  $\tilde{E}$  do problema (3.67)-(3.68). usando elementos de Whitney, enquanto que as Figuras 3.10(a), 3.10(b), 3.10(c) e 3.10(d) representam a aproximação por elementos de Nédélec de primeira ordem.

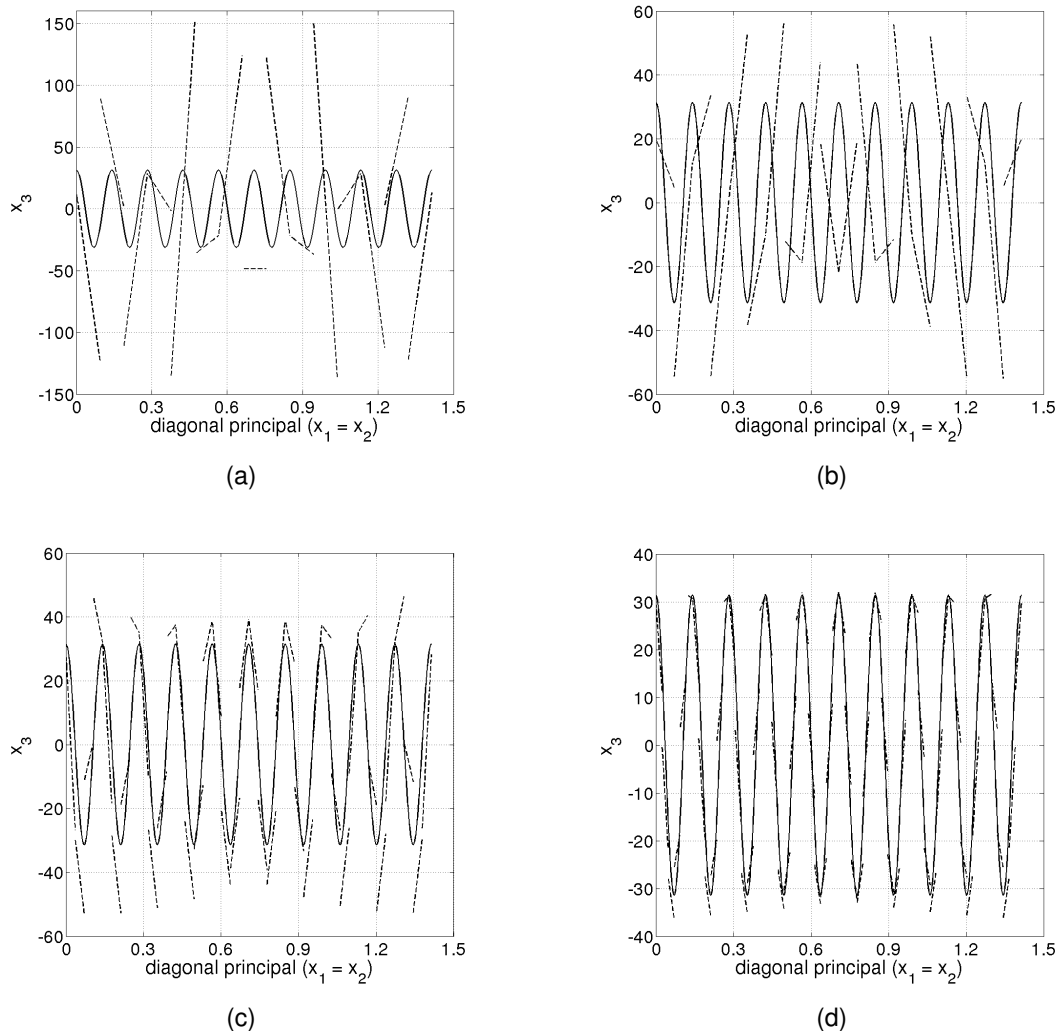
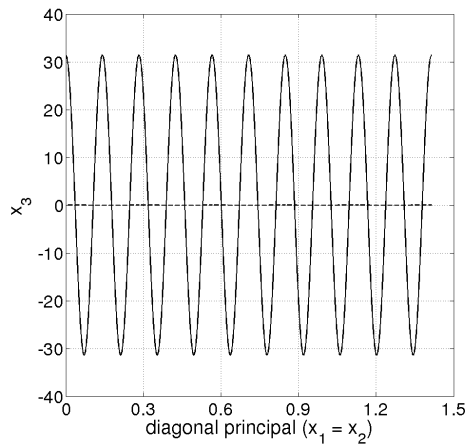
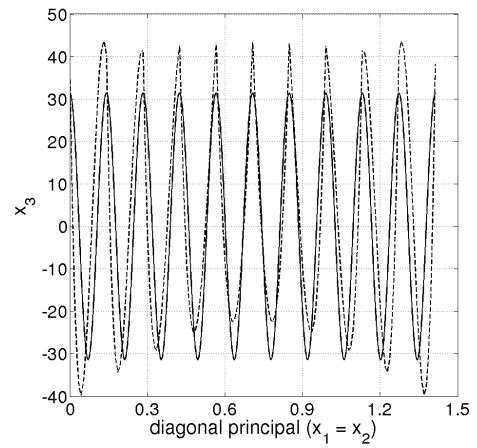


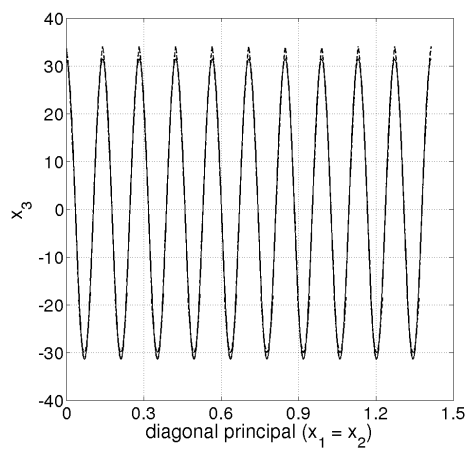
Figura 3.9: Variação da solução analítica ao longo da diagonal principal (linha contínua), assim como da solução numérica (linha pontilhada) usando elementos de Whitney e os seguintes níveis de refinamento da malha: (a)  $h = 1/15$ ; (b)  $h = 1/20$ ; (c)  $h = 1/40$ ; (d)  $h = 1/60$ .



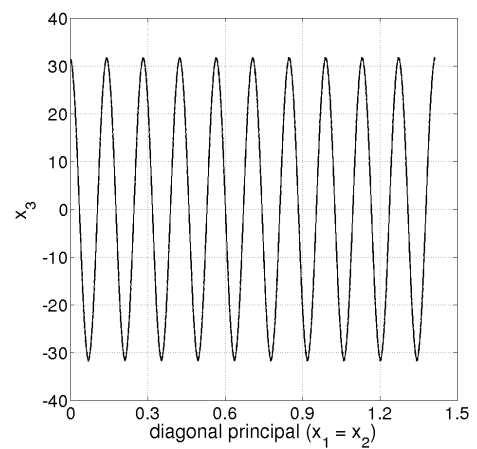
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.10: Variação da solução analítica ao longo da diagonal principal (linha contínua), assim como da solução numérica (linha pontilhada) usando elementos de Nédélec de primeira ordem e os seguintes níveis de refinamento da malha:: (a)  $h = 1/5$ ; (b)  $h = 1/10$ ; (c)  $h = 1/30$ ; (d)  $h = 1/60$

# Capítulo 4

## Relação de Dispersão Discreta

### 4.1 Dispersão Numérica

Um meio é dito dispersivo se ondas com frequências distintas viajam neste meio com velocidades distintas, Oliveira et al. (2007). Normalmente, ondas planas são usadas para medir a dispersão em um meio, uma vez que são simples e estão fortemente relacionadas com os métodos numéricos mais comuns, tais como o método dos elementos finitos.

Uma ferramenta importante para avaliar a qualidade da aproximação dos métodos numéricos é a análise de dispersão. A análise de dispersão fornece uma estimativa do número mínimo de pontos da malha por comprimento de onda necessários para uma simulação precisa da propagação da onda. Um método é dispersivo se a velocidade de propagação da onda aproximada depende do seu comprimento de onda. Se se considera um meio homogêneo, em que não ocorre dispersão na solução exata, então qualquer variação na velocidade da onda aproximada com o comprimento de onda, é devida à perda de precisão.

A dispersão numérica é um fator que afeta todos os métodos de modelagem matemática. Em particular, a principal causa da dispersão numérica na aproximação de campos eletromagnéticos é que mesmo diminuindo o espaçamento entre os pontos de malha, o erro de interpolação não é nulo, Warren et al. (1994). Por exemplo, no método dos elementos finitos as funções de base ou de interpolação são utilizadas para aproximar o campo, e uma vez que estas funções (geralmente polinômios) não consegue captar exatamente a variação do campo. Desta forma o erro de interpolação resultante leva à dispersão. Em outras palavras, à medida que se varia a direção de propagação do campo, ou comprimento de onda ou

frequência da onda, ou ainda a malha, a precisão da solução numérica varia.

## 4.2 Relação de Dispersão Discreta para a equação de Helmholtz

Suponha que uma malha uniforme com espaçamentos de tamanho  $h = \frac{1}{n}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , sendo  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros, está situada sobre a reta real com nós localizados em  $h\mathbb{Z}$ , isto é, se por exemplo ao tomar  $n = 2$ , tem-se então,  $h = \frac{1}{2}$  e conseqüentemente  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , veja a Figura 4.2. O conjunto das funções lineares contínuas por partes sobre esta malha é

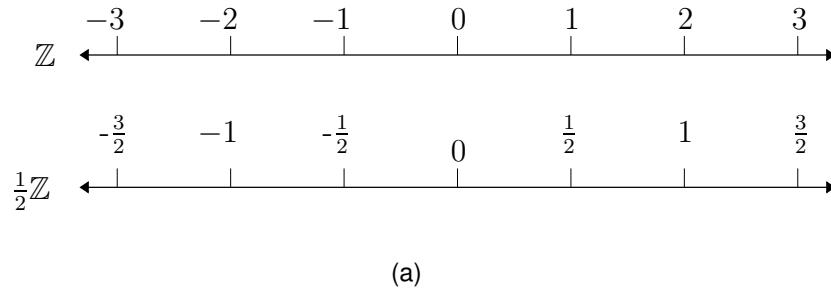


Figura 4.1: Conjuntos  $\mathbb{Z}$  e  $h\mathbb{Z}$ , com  $h = 1/2$ .

denotado, de acordo com a seção (2.1), por  $\mathcal{X}_{h1}$ . Em analogia ao problema contínuo definido pela equação (3.20), tomar-se-ão soluções da forma

$$u_h(x, t) = \tilde{u}_h(x)e^{-i\omega t} \quad (4.1)$$

Assim,  $\tilde{u}_h \in \mathcal{X}_{h1}$  deve satisfazer a forma sesquilinear

$$S(\tilde{u}_h, v) = (\tilde{u}_h', v')_{L_2} - \kappa^2(\tilde{u}_h, v)_{L_2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.2)$$

Seja  $l_n \in \mathcal{X}_{h1}$  uma função definida como  $l_n(s) = \frac{s}{h} + 1 - n$  se  $nh - h < s \leq nh$ , e  $l_n(s) = -\frac{s}{h} + 1 + n$  se  $nh < s < nh + h$ , como na Figura 5.2. Note que  $l_n$  cumpre a propriedade

$$l_n(x + mh) = l_{n-m}(x) \quad x \in \Omega \text{ and } m \in \mathbb{Z} \quad (4.3)$$

Se  $\tilde{u}_h$  é definida como

$$\tilde{u}_h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\kappa h} l_n(x) \quad (4.4)$$

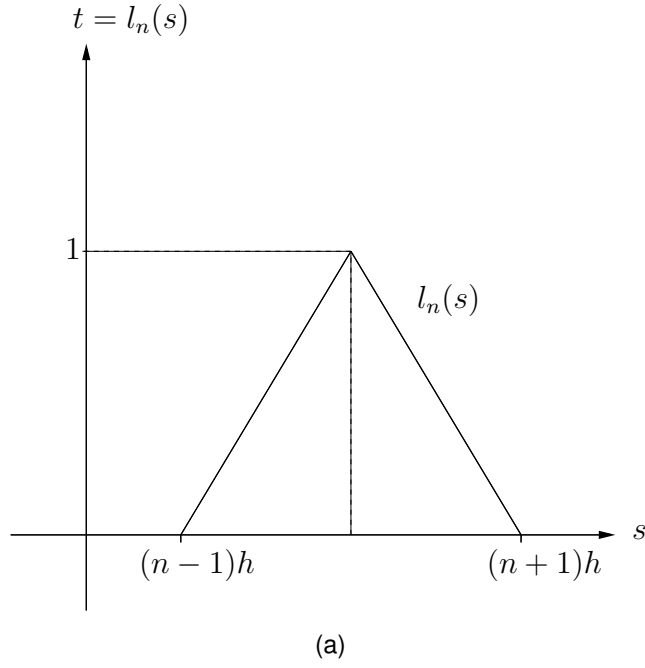


Figura 4.2: Esboço do gráfico da função chapéu  $l$ .

então a propriedade (4.3) mostra que

$$\tilde{u}_h(x + nh) = e^{i\kappa nh} \tilde{u}_h(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.5)$$

Assim, a análise pode transcorrer uniformemente em qualquer ponto da malha de elementos.

Tomando  $c = 1$  em (3.23), tem-se que (3.22) torna-se

$$\tilde{u}'' + \omega(\kappa)^2 \tilde{u} = 0 \quad (4.6)$$

e usando a equação (3.6), o seguinte problema variacional pode ser enunciado: Encontrar

$\tilde{u}_h \in \mathcal{X}_{h1}$  tal que

$$(\tilde{u}'_h, w'_h)_{L_2} = \omega_h(\kappa)^2 (\tilde{u}_h, w_h)_{L_2} \quad (4.7)$$

ou de forma mais explícita

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}'_h(s) \overline{w'_h(s)} ds = \omega_h(\kappa)^2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_h(s) \overline{w_h(s)} ds \quad \forall w_h \in \mathcal{X}_{h1} \cap H_0^1(\Omega), \quad (4.8)$$

onde  $\omega_h(\kappa)^2$  pode ser calculado tomando  $w_h = l_m$ . De fato, substituindo a equação (4.4) na equação (4.8) e notando que o produto  $l_n(s)l_m(s) \neq 0$  para  $s \in (mh - h; mh + h)$ , ocorrendo



de maneira similar para  $l'_n(s)l'_m(s)$ , tem-se que

$$\int_{(m-1)h}^{(m+1)h} \sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\kappa n} l'_n(s)l'_m(s) ds = \omega_h(\kappa)^2 \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} \sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\kappa n} l_n(s)l_m(s) ds \quad (4.9)$$

Observe que a exponencial não depende de  $s$ . Agora, tomando a integral em cada uma das três parcelas ( $n = (m-1)h$ ,  $n = (m)h$  e  $n = (m+1)h$ ) dadas pela somatória e considerando a exponencial como constante em cada uma destas parcelas, tem-se

$$\sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\kappa n} \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} l'_n(s)l'_m(s) ds = \quad (4.10)$$

$$\omega_h(\kappa)^2 \sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\kappa n} \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} l_n(s)l_m(s) ds$$

Nos três termos da soma no primeiro membro aparecerão, respectivamente, as derivadas das funções  $l'_{m-1}$ ,  $l'_m$ ,  $l'_{m+1}$ , enquanto que, no segundo membro, respectivamente, apontam-se  $l_{m-1}$ ,  $l_m$ ,  $l_{m+1}$ . Explicitamente, tais funções se definem como:

$$l_{m-1}(s) = \begin{cases} 2 - m + \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh - 2h, mh - h] \\ m - \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh - h, mh) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad l'_{m-1}(s) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh - 2h, mh - h] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh - h, mh) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$l_m(s) = \begin{cases} 1 - \left(m - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (mh - h, mh] \\ 1 + \left(m - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (mh, mh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad l'_m(s) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh - h, mh] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh, mh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$l_{m+1}(s) = \begin{cases} -m + \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh, mh + h] \\ 2 + m - \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh + h, mh + 2h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad l'_{m+1}(s) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh, mh + h] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh + h, mh + 2h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Depois de explicitar as somas em (4.9), basta substituir o valor de cada uma das funções acima na integral correspondente, respeitando os limites de integração. Com isso,

obtém-se

$$\begin{aligned}
& e^{ih\kappa m} e^{-ih\kappa} \int_{(m-1)h}^{mh} \left(\frac{-1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) ds + e^{ih\kappa m} \left[ \int_{(m-1)h}^{mh} \left(\frac{1}{h^2}\right) ds + \int_{mh}^{mh+h} \left(\frac{1}{h^2}\right) ds \right] + \\
& e^{ih\kappa m} e^{ih\kappa} \int_{mh}^{mh+h} \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{-1}{h}\right) ds = \omega_h(\kappa)^2 e^{ih\kappa m} e^{-ih\kappa} \int_{(m-1)h}^{mh} \left(m - \frac{s}{h}\right) \left(1 - m + \frac{s}{h}\right) ds + \\
& e^{ih\kappa m} \left( \int_{(m-1)h}^{mh} \left(1 - m + \frac{s}{h}\right)^2 ds + \int_{mh}^{mh+h} \left(1 + m - \frac{s}{h}\right)^2 ds \right) + \\
& e^{ih\kappa m} e^{ih\kappa} \int_{mh}^{mh+h} \left(-m + \frac{s}{h}\right) \left(1 + m - \frac{s}{h}\right) ds
\end{aligned} \tag{4.11}$$

resolvendo as integrais, é encontrado

$$\begin{aligned}
& -e^{ih\kappa m} e^{-ih\kappa} \frac{1}{h} + e^{ih\kappa m} \frac{2}{h} - e^{ih\kappa m} e^{ih\kappa} \frac{1}{h} = \\
& \omega_h(\kappa)^2 \left( e^{ih\kappa m} e^{-ih\kappa} \frac{h}{6} + e^{ih\kappa m} \frac{2h}{3} + e^{ih\kappa m} e^{ih\kappa} \frac{h}{6} \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Usando a identidade  $2\cos(\xi h) = e^{ih\kappa} + e^{-ih\kappa}$  e eliminando  $e^{ih\kappa m}$ , pode-se simplificar (4.12) e obter

$$\omega_h(\kappa)^2 = \frac{6}{h^2} \left( \frac{1 - \cos(h\kappa)}{2 + \cos(h\kappa)} \right) \tag{4.13}$$

Se  $0 < h\kappa \ll 1$ , a equação (4.13) pode ser expandida como uma série de Maclaurin, assim, encontra-se

$$\omega_h(\kappa)^2 = \kappa^2 \left( 1 + \frac{(h\kappa)^2}{12} + \dots \right) \tag{4.14}$$

Deste modo, no limite, quando  $h \rightarrow 0$ , tem-se

$$\omega_h(\kappa) = \kappa \implies \omega^2 = \omega_h^2(\kappa) \tag{4.15}$$

A expressão (4.15) é a relação de dispersão discreta correspondente ao espaço de elementos de primeira ordem  $\mathcal{X}_{h1}$ , encontrada a partir do problema de autovalor (4.8).

### 4.3 Relação de Dispersão para Ordens $p$ Arbitrárias

Propõe-se encontrar uma expressão para a relação de dispersão para o espaço de elementos  $\mathcal{X}_{hp}$ . Para tanto, precisa-se primeiramente considerar a propriedade de translação invariante na malha de elementos. Assim, como esta propriedade foi assegurada para elementos de ordem  $p = 1$  - veja equação (4.5) - toma-se de maneira semelhante  $\tilde{u}_{hp} \in \mathcal{X}_{hp}$  na forma

$$\tilde{u}_{hp}(x + nh) = e^{i\kappa nh} \tilde{u}_{hp}(x), \quad \forall x \in \Omega \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.16)$$

Define-se também como em (4.4) a equação

$$\tilde{u}_{hp}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\kappa h} l_n^{(p)}(x), \quad (4.17)$$

onde  $l_n^{(p)} \in \mathcal{X}_{hp}$  é um interpolante de ordem  $p$  que tem valores nodais dados por  $l_n^{(p)}(mh) = \delta_{nm}$ , Ainsworth (2003). Em analogia a (4.7) tem-se o seguinte problema variacional: Encontrar  $\tilde{u}_{hp} \in \mathcal{X}_{hp}$  tal que

$$(\tilde{u}'_{hp}, w'_{hp}) = \omega_h(\kappa)^2 (\tilde{u}_{hp}, w_{hp}) \quad \forall w_{hp} \in \mathcal{X}_{hp} \quad (4.18)$$

Note que (4.15) foi obtida independentemente da ordem  $p$ . Logo, a relação de dispersão para o espaço de elementos  $\mathcal{X}_{hp}$  é dada, no limite com  $h \rightarrow 0$ , por

$$\omega^2 = \omega_{hp}^2(\kappa) \quad (4.19)$$

### 4.4 Expressões Analíticas para a Relação de Dispersão Discreta em Ordens Arbitrárias

Expressões para a relação de dispersão discreta para ordens  $p = 2, 3, 4, \dots, n$  podem ser encontradas, ao menos teoricamente, pelo mesmo caminho utilizado para obter (4.13). No entanto, para valores de  $p \geq 2$ , os cálculos necessários tornam-se estafantes e sendo inviáveis para ordens relativamente altas. O teorema seguinte apresenta um método de aproximação racional que pode ser usado para definir expressões para a relação de dispersão discreta de ordens arbitrárias de aproximação para a equação de Helmholtz, Ainsworth (2003).

$p$	$\cos(h\kappa) \approx R_p(h\omega_{hp})$
1	$\frac{6 - 2(h\omega_{h1})^2}{6 + (h\omega_{h1})^2}$
2	$\frac{3(h\omega_{h2})^4 - 104(h\omega_{h2})^2 + 240}{(h\omega_{h2})^4 + 16(h\omega_{h2})^2 + 240}$
3	$\frac{\left(\frac{\frac{5}{8}(h\omega_{h3})^2 - \frac{1}{96}(h\omega_{h3})^4}{\frac{1}{4}(h\omega_{h3})^2 - \frac{5}{2}}\right) - \left(\frac{\frac{1}{160}(h\omega_{h3})^4 - \frac{9}{8}(h\omega_{h3})^2 + \frac{21}{2}}{\frac{1}{4}(h\omega_{h3})^2 - \frac{21}{2}}\right)}{\left(\frac{\frac{5}{8}(h\omega_{h3})^2 - \frac{1}{96}(h\omega_{h3})^4}{\frac{1}{4}(h\omega_{h3})^2 - \frac{5}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{160}(h\omega_{h3})^4 - \frac{9}{8}(h\omega_{h3})^2 + \frac{21}{2}}{\frac{1}{4}(h\omega_{h3})^2 - \frac{21}{2}}\right)}$
4	$\frac{-\left(\frac{\frac{1}{160}(h\omega_{h4})^4 - \frac{9}{8}(h\omega_{h4})^2 + \frac{21}{2}}{\frac{1}{4}(h\omega_{h4})^2 - \frac{21}{2}}\right) - \left(\frac{\frac{1}{960}(h\omega_{h4})^6 - \frac{7}{16}(h\omega_{h4})^4 + \frac{63}{4}(h\omega_{h4})^2}{\frac{1}{16}(h\omega_{h4})^4 - 7(h\omega_{h4})^2 + 63}\right)}{-\left(\frac{\frac{1}{160}(h\omega_{h4})^4 - \frac{9}{8}(h\omega_{h4})^2 + \frac{21}{2}}{\frac{1}{4}(h\omega_{h4})^2 - \frac{21}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{960}(h\omega_{h4})^6 - \frac{7}{16}(h\omega_{h4})^4 + \frac{63}{4}(h\omega_{h4})^2}{\frac{1}{16}(h\omega_{h4})^4 - 7(h\omega_{h4})^2 + 63}\right)}$

Tabela 4.1: Expressões analíticas para o  $\cos(h\kappa)$ , com  $p = 1, 2, 3, 4$ .

**Teorema 4.4.1** *Seja  $[2N_e + 2/2N_e]_{\kappa \tan(\kappa)}$  e seja  $[2N_o/2N_o - 2]_{\kappa \cot(\kappa)}$  as notações para a aproximação de Padé de  $\kappa \tan(\kappa)$  e  $\kappa \cot(\kappa)$ , respectivamente, onde  $N_e = \lfloor p/2 \rfloor$  and  $N_o = \lfloor (p+1)/2 \rfloor$ . Assim,  $\omega_{hp}$  cumpre  $\cos(h\kappa) \approx R_p(h\omega_{hp})$ , onde  $R_p$  é a função racional*

$$R_p(2\kappa) = \frac{[2N_o/2N_o - 2]_{\kappa \cot(\kappa)} - [2N_e + 2/2N_e]_{\kappa \tan(\kappa)}}{[2N_o/2N_o - 2]_{\kappa \cot(\kappa)} + [2N_e + 2/2N_e]_{\kappa \tan(\kappa)}} \quad (4.20)$$

As Figuras 4.4-(a), (b), (c) e (d) mostram o resultado da implementação computacional da aproximação  $\cos(h\kappa) \approx R_p(h\omega_{hp})$  para  $p = 1, 2, 3$  e 4, respectivamente, sugerida no Teorema 4.4.1. As expressão geradas a partir da equação (4.20), podem ser observadas na Tabela 4.1, na qual se destacam as aproximações para  $p = 1, 2, 3, 4$ .

Assim, como em Ainsworth (2003), a expressão

$$\cos(h\kappa) = \frac{6 - 2(h\omega_h(\kappa))^2}{6 + (h\omega_h(\kappa))^2} \quad \text{com} \quad h \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

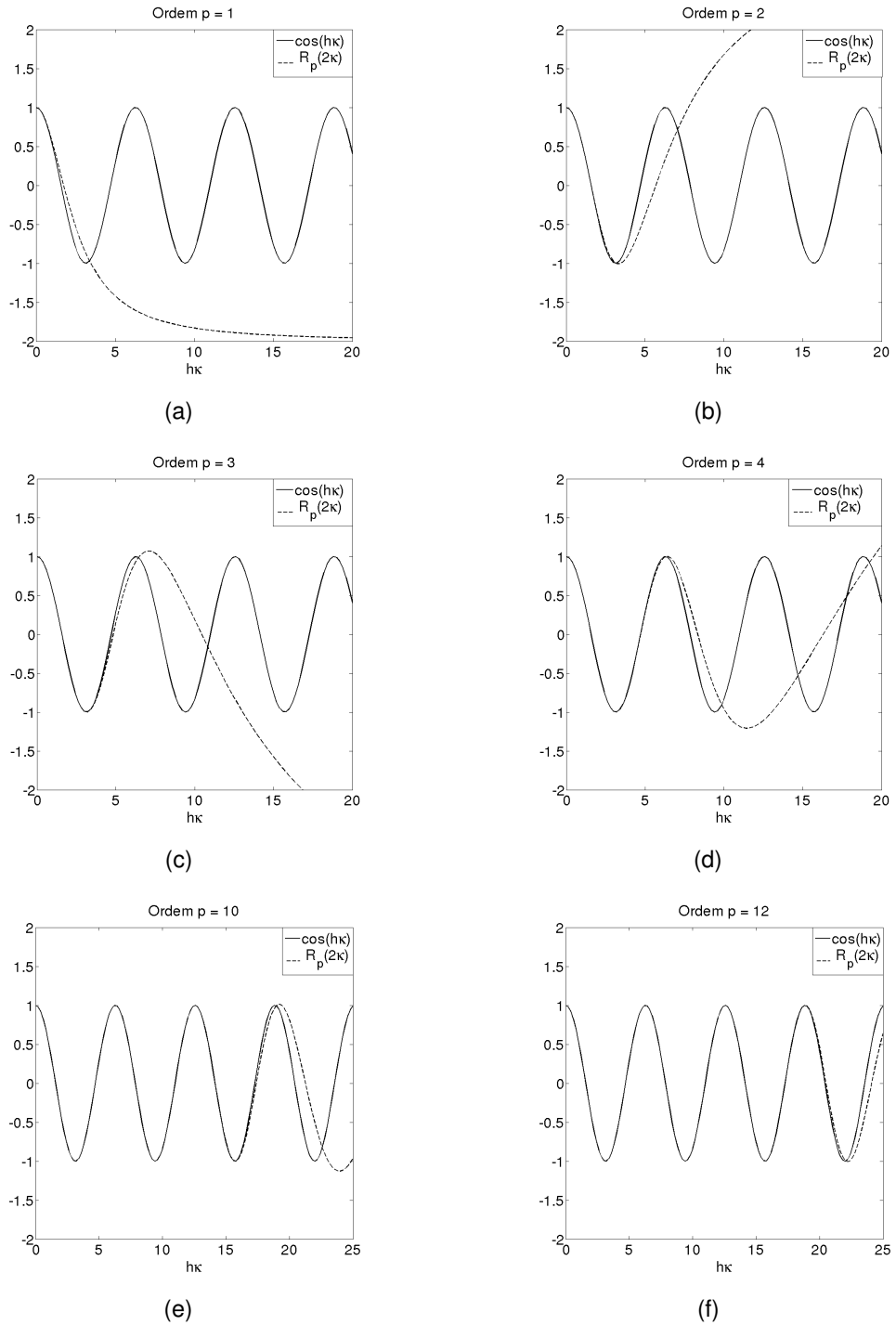


Figura 4.3: Aproximação  $R_p(2\kappa)$  (linha pontilhada) sugerida pelo Teorema 4.4.1. Note que a medida em que a ordem  $p$  cresce, a aproximação tende a coincidir com  $\cos(h\kappa)$  (linha contínua).

para  $p = 1$ , veja Tabela 5.1, também foi encontrada em Babuška et al. (1995) e Thompson et al. (1994). Note que (4.21) é a mesma equação (4.13), escrita em termos de  $\omega_h(\kappa)$ . Isso sugere que as demais expressões para o  $\cos(h\kappa)$  para diferentes ordens  $p$  de aproximação, podem ao menos, teoricamente, serem escritas em função de  $\omega_h(\kappa)$ . A partir dessa ideia pode-se propor uma unificação entre a proposta feita em Christon (1999), com respeito a

velocidade de fase, e a proposta de análise de dispersão para a equação escalar de Helmholtz considerada por Babuška et al. (1995). A junção entre as duas teorias, sob este ponto de vista, será tratada mais adiante no capítulo 6.

## 4.5 Relação de Dispersão para o Sistema de Segunda Ordem de Maxwell

De acordo com a equação (3.62), se ao tomar  $\mathbf{J}_a = \mathbf{0}$  e valores apropriados para a permissividade e permeabilidade relativas, o campo elétrico  $\mathbf{E}$  satisfaz a equação de Maxwell harmônica de segunda ordem:

$$-\omega^2 \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

A relação de dispersão para esta equação pode ser descrita ao procurar uma onda plana, como solução não-trivial, da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{x}$  é uma variável de posição e  $\boldsymbol{\kappa}$  aponta para a direção de propagação da onda plana.

Considerando o campo  $\mathbf{E}$  definido num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , tem-se que  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  e  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)$ .

Substituindo (4.23) em (4.22) e usando a equação (B.8) junto com a equação (B.9), obtém-se a forma matricial

$$-\omega^2 e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_2^2 & -\kappa_1 \kappa_2 \\ -\kappa_1 \kappa_2 & \kappa_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Dividindo ambos os lados por  $-e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}}$ , tem-se

$$\omega^2 \boldsymbol{\alpha} + M_\kappa \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad \text{com} \quad M_\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_2^2 & -\kappa_1 \kappa_2 \\ -\kappa_1 \kappa_2 & \kappa_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

De (4.24), tem-se que

$$(\omega^2 I + M_\kappa) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Considerando agora uma solução não-trivial para (4.25), tem-se que  $\det(\omega^2 I + M_\kappa) = 0$ , ou seja

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \kappa_2^2 & -\kappa_1 \kappa_2 \\ -\kappa_1 \kappa_2 & -\omega^2 + \kappa_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante e fazendo as devidas simplificações, obtém-se

$$\omega^2(\omega^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2) = 0 \quad (4.26)$$

Deste modo, se  $\omega$  é diferente de zero, segue o que se define como a relação de dispersão

$$\omega = |\boldsymbol{\kappa}| \quad (4.27)$$

## 4.6 Relação de Dispersão Discreta

Dos Lemas G.2.1 e G.1.1, fica evidente a correlação entre as soluções da equação de Helmholtz e do sistema de segunda ordem de Maxwell harmônico no tempo. Assim, a expressão para a relação de dispersão discreta, relacionada com a aproximação da equação escalar de Helmholtz em uma dimensão, pode ser usada para determinar uma expressão para a relação de dispersão discreta para os elementos de Whitney e Nédélec de primeira ordem. De fato, como exemplo, considere  $\mathbf{V}_{h0}$  como o espaço de polinômios vetoriais, Whitney (1957), ou espaço de elementos de Whitney – já no sentido de elementos finitos – construído sobre uma malha uniforme, veja a Figura 3.8. As componentes da função vetorial  $\mathbf{E}_h = (E_h^{(1)}, E_h^{(2)}) \in \mathbf{V}_{h0}$  será expandida na forma

$$E_h^{(d)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{\mathbf{n}}^{(d)} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)}, \quad d = 1, 2 \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2) \quad (4.28)$$

onde

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_{n_1}(x_1) \theta_{n_2}(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \phi_{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n_1}(x_1) \chi_{n_2}(x_2) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Aqui,  $\chi_n$  é a função característica sobre o intervalo  $(nh, nh + h)$ , definida por  $\chi_n(s) = 1$  se  $s \in (nh, nh + h)$  e zero caso contrário, enquanto que  $\theta_n = l_n$ , é uma função de interpolação

linear contínua por partes, veja a equação (4.3). É importante observar que as funções de base usadas aqui são diferentes daquelas usadas na Seção 2.3. A razão para esta mudança é que as funções  $\theta_n$  são interpolantes, simplificando assim, a análise de dispersão. No entanto, o espaço gerado pelas duas bases é o mesmo.

A integral de linha de uma função de base  $\phi_n^{(d)} \in \mathbf{V}_{h0}$ , tomada ao longo das arestas dos elementos, tem a forma

$$\int_{\gamma_m^{(a)}} \phi_n^{(d)} \cdot d\mathbf{x} = \begin{cases} h & \text{se } \mathbf{m} = \mathbf{n} \text{ e } d = a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.30)$$

onde  $\gamma_m^{(a)}$  denota a aresta alinhada com a  $a^{\text{th}}$  coordenada do eixo, iniciando no vértice indexado  $\mathbf{m}$ . Da equação (4.30), pode-se calcular os coeficientes de  $\mathbf{E}_h$  em (4.28) como segue:

Multiplique (4.30) por  $\alpha_n^{(a)}$  e considere  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$  e  $a = d$ , então

$$\alpha_n^{(a)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(a)}} \alpha_n^{(a)} \phi_n^{(a)} \cdot d\mathbf{x}$$

Usando a equação (4.28) na componente espacial  $d^{\text{th}}$  a seguinte expressão é obtida:

$$\alpha_n^{(a)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(a)}} \mathbf{E}_h \cdot d\mathbf{x} \quad (4.31)$$

Além disso, considere que uma solução discreta não-trivial  $\mathbf{E}_h$  satisfaz a condição

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x} + h\mathbf{n}) = e^{ih\kappa_h \cdot \mathbf{n}} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}), \quad (4.32)$$

onde  $\kappa_h = \kappa$ , com  $h \rightarrow 0$ , é o vetor de onda relacionado com uma frequência temporal prescrita  $\omega$  através da relação de dispersão discreta. Aplicando uma mudança de variável em (4.31) e considerando a translação invariante da malha, equação (4.32), tem-se

$$\alpha_n^{(d)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(d)}} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_0^{(d)}} \mathbf{E}_h(\mathbf{y} + h\mathbf{n}) \cdot \frac{1}{h} \int_{\gamma_0^{(d)}} e^{ih\kappa_h \cdot \mathbf{n}} \mathbf{E}_h(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \quad (4.33)$$

consequentemente,

$$\alpha_n^{(d)} = e^{ih\kappa_h \cdot \mathbf{n}} \alpha_0^{(d)} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \quad (4.34)$$



Substituindo a equação (4.34) em (4.28), encontra-se

$$E_h^{(d)} = \alpha_0^{(d)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{ih\kappa_h \cdot n} \phi_n^{(d)} \quad (4.35)$$

e assim, desacoplando a soma para cada componente de  $n$ , segue que

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_0^{(1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa_1 n} \chi_n(x_1) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa_2 n} \theta_n(x_2) \\ E_h^{(2)} = \alpha_0^{(2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa_2 n} \chi_n(x_2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa_1 n} \theta_n(x_1) \end{cases} \quad (4.36)$$

Segue de (4.32) que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa n} \theta_n(s + nh) = e^{ih\kappa n} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa n} \theta_n(s) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.37)$$

Seja  $u \in H^1(\Omega)$  uma solução analítica da equação de Helmholtz escalar homogênea em uma dimensão, definida por  $u(s) = e^{i\kappa s}$ . Considere  $V_h$  um espaço de elementos finitos. Note que a equação (4.37) pode ser vista como a versão discreta de  $u$ , isto é,

$$u_h(\kappa, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa n} \theta_n(s) \quad (4.38)$$

Deste modo, o seguinte problema variacional pode ser considerado: Buscar  $u_h \in V_h$  tal que

$$\left( \frac{du_h}{ds}, \frac{dv_h}{ds} \right)_{L_2} = \omega_h(\kappa)^2 (u_h, v_h)_{L_2} \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.39)$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{du_h}{ds} \frac{dv_h}{ds} ds = \omega_h(\kappa)^2 \int_{\mathbb{R}} u_h v_h ds \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.40)$$

Note que a equação (4.40) é a mesma equação (4.7). Além disso, note que a derivada de (4.38) em relação à  $s$  é dada por

$$\frac{du_h}{ds} = \left( \frac{e^{ih\kappa} - 1}{h} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\kappa n} \chi_n(s) \quad (4.41)$$

A equação (4.41) indica que a função  $E_h$ , definida em (4.36) por suas componentes, pode

ser expressada numa forma alternativa dada por

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_1 \frac{du_h(\kappa_1, x_1)}{dx_1} u_h(\kappa_2, x_2), \\ E_h^{(2)} = \alpha_2 \frac{du_h(\kappa_2, x_2)}{dx_2} u_h(\kappa_1, x_1) \end{cases} \quad (4.42)$$

onde  $\alpha_1 = \alpha_0^{(1)}/i\kappa_1$  e  $\alpha_2 = \alpha_0^{(2)}/i\kappa_2$  com  $h \rightarrow 0$ .

Uma solução não-trivial discreta da forma (4.42) é solicitada, de modo a satisfazer a formulação variacional presente em (3.69). Logo, para todo  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{h0}$  é escolhida como

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} \theta'_{n_1}(x_1)\theta_{n_2}(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Usando a equação (4.42) combinada com (4.40), tem-se

$$(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h)_{L_2} = \omega_h(\kappa_1)^2 \alpha_1 \prod_{l=1}^2 \int_{\mathbb{R}} u_h(\kappa_l; x_l) \theta_{nl}(x_l) dx_l \quad (4.44)$$

e

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h)_{L_2} = (\alpha_1 - \alpha_2) \omega_h^2(\kappa_1) \omega_h^2(\kappa_2) \prod_{l=1}^2 \int_{\mathbb{R}} u_h(\kappa_l; x_l) \theta_{nl}(x_l) dx_l \quad (4.45)$$

Assim, a equação (3.69) é simplificada na forma da equação algébrica

$$\alpha_1 (\omega_h(\kappa_2)^2 - \omega^2) - \alpha_2 \omega_h(\kappa_2)^2 = 0 \quad (4.46)$$

Note que (4.46) permanece a mesma, independentemente do multi-índice  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ . O mesmo argumento pode ser aplicado para a segunda componente, isto é, selecionando

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n_1}(x_1)\theta'_{n_2}(x_2) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

tem-se

$$\alpha_2 (\omega_h(\kappa_1)^2 - \omega^2) - \alpha_1 \omega_h(\kappa_1)^2 = 0 \quad (4.48)$$

Portanto, a equação (3.69) fica reduzida a um sistema homogêneo de duas equações, (4.46) e (4.48), e duas variáveis,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Consequentemente, a seguinte condição de equivalência

para a existência de uma solução não-trivial  $E_h$  é obtida considerando

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_h(\kappa_2)^2 & -\omega_h(\kappa_2)^2 \\ -\omega_h(\kappa_1)^2 & -\omega^2 + \omega_h(\kappa_1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

resolvendo o determinante, tem-se:

$$\omega^2 = \omega_h(\kappa_1)^2 + \omega_h(\kappa_2)^2 \quad (4.49)$$

usando a equação (4.13), obtém-se:

$$\omega^2 = \left[ \frac{6}{h^2} \left( \frac{1 - \cos(h\kappa_1)}{2 + \cos(h\kappa_1)} \right) \right]^2 + \left[ \frac{6}{h^2} \left( \frac{1 - \cos(h\kappa_2)}{2 + \cos(h\kappa_2)} \right) \right]^2 \quad (4.50)$$

A expressão (4.50) é a relação de dispersão discreta para elementos de Whitney.

**Observação 4.6.1** *Pelo Teorema 4.4.1 pode-se gerar expressões para a relação de dispersão discreta para aproximações de  $n$ -éssima ordem, no entanto, é preciso observar que a ordem dos elementos Whitney-Nédélec é dada por  $q = p - 1$ , onde  $p = 1, 2, \dots, n + 1$ .*

# Capítulo 5

## Refinamento da Malha

### 5.1 Velocidade de Fase Numérica

A teoria desenvolvida nos capítulos anteriores é usada para estabelecer um critério para a seleção do parâmetro  $h$  de refinamento da malha de elementos de primeira ordem ( $p = 1$ ) e de segunda ordem ( $p = 2$ ).

A equação (4.15) descreve a relação de dispersão discreta, e portanto, uma versão numérica para a velocidade de fase, dada pela equação (3.23), pode ser definida como

$$C = \frac{\omega_h(\kappa)}{\kappa}. \quad (5.1)$$

Considerando as aproximações de  $\cos(h\kappa)$  com  $p = 1$  e  $p = 2$  mostradas na Tabela 1, a velocidade de fase numérica  $C$  pode ser escrita em função de  $h\kappa$ , obtendo respectivamente,

$$C = \frac{1}{h\kappa} \sqrt{\frac{6(1 - \cos(h\kappa))}{2 + \cos(h\kappa)}} \quad \text{para } p = 1 \quad (5.2)$$

e

$$C = \left( \frac{1}{h\kappa \sqrt{6 - 2(\cos(h\kappa))}} \right) \left[ 16\cos(h\kappa) + 104 + \sqrt{\beta} \right]^{1/2} \quad \text{para } p = 2, \quad (5.3)$$

onde  $\beta = (16\cos(h\kappa) + 104)^2 - 960(\cos(h\kappa) - 3)(\cos(h\kappa) - 1)$ .

## 5.2 Seleção do Parâmetro $h$

Da relação de dispersão (3.23) do problema contínuo, toma-se a velocidade de fase exata por  $c = 1$ . Logo, para  $p = 1$  e  $p = 2$ , a Figura 6.1-(a) mostra a velocidade de fase exata comparada com a velocidade de fase numérica dadas pelas equações (5.2) e (5.3). Note que esta análise está sendo feita com base na aproximação racional fornecida pelo Teorema 4.4.1, onde a Figura 4.3(a) mostrou uma aproximação ( $p = 1$ ) com dispersão desprezível quando se considera  $0 \leq h\kappa \approx 1$ , enquanto que a Figura 4.3(b) mostrou uma aproximação ( $p = 2$ ) com dispersão desprezível quando se tem  $0 \leq h\kappa \approx 3$ . A Figura 5.1-(b) apresenta uma ampliação da Figura 5.1-(a), com  $0 \leq h\kappa \leq 1$ , na qual, é possível determinar, por exemplo, o valor mínimo do parâmetro  $h$  de tal modo que o erro na velocidade de fase estimado seja menor que 0.01%. Isso é feito observando o ponto em que a curva de velocidade alcança o valor 1.0001 (ou  $h\kappa \approx 0.62$  para  $p = 2$ ).

Note que o vetor de onda no exemplo numérico apresentado, equação (3.30), foi  $\kappa = 10\pi(1, 1)$ , então tomando  $\kappa = 10\pi$ , tem-se  $h \approx \frac{0.62}{10\pi} \approx 0.01973 \approx \frac{1}{51}$ . Assim, pode-se observar que para  $n \geq 51$ , o erro entre a velocidade de fase exata e aproximada é menor que 0.01%. A possibilidade de uso desta aproximação para o refinamento da malha é avaliada, agora, através da análise de convergência.

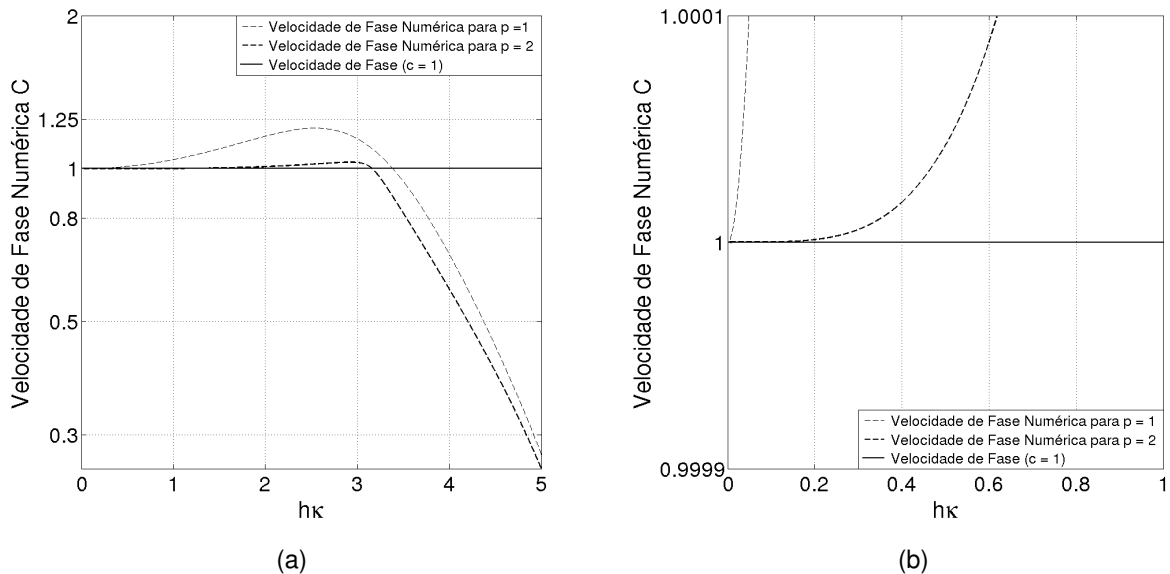
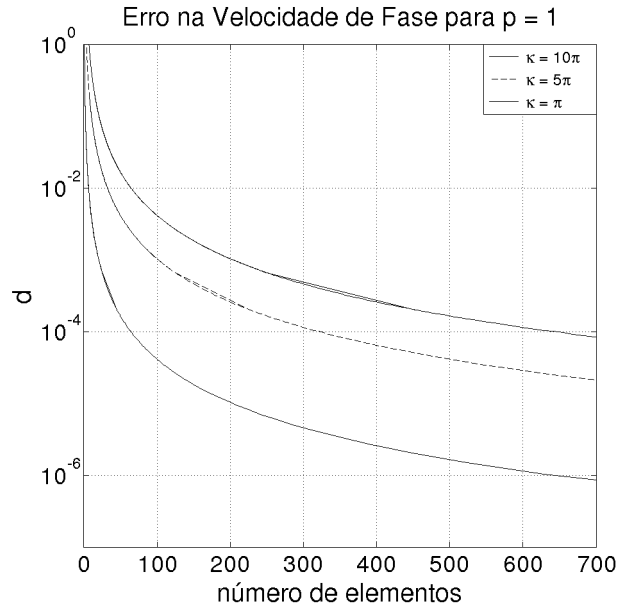


Figura 5.1: (a) Representação da Velocidade de Fase Numérica, equações (5.2) e (5.3); (b) Ampliação da Figura 5.1(a).

### 5.3 Análise de Convergência

Seja  $d = |1 - C|$  o erro relativo a velocidade de fase. A equação (5.2) é empregada para mostrar a aproximação da velocidade fase para  $\kappa$  fixado enquanto que o número de elementos  $n$  cresce. Isso é mostrado na Figura 5.2-(a) para três diferentes números de onda, e como era de se esperar, está claro que a melhora na aproximação de  $c$  requer valores de  $h$  pequenos para altos valores de frequência.



(a)

Figura 5.2: Erro na velocidade de fase. Equação (5.2).

Por conveniência, seria interessante validar o caso em duas dimensões. Para tanto, assume-se  $\kappa = \kappa(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Seja  $u_a \in H^1(\Omega)$  definida por  $u_a(\mathbf{x}) = \rho e^{i\frac{\omega}{c}[\cos(\theta)x_1 + \sin(\theta)x_2]}$  uma solução analítica do problema (3.24)-(3.25). Para efeito de cálculo, seja  $\|\cdot\|$  a norma para uma função de valor real  $\phi$ , definida por

$$\|\phi\| = \frac{\left( \sum_j |\phi(x_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.4)$$

Considere  $u_h \in \mathcal{X}_{h2}$  a solução numérica por elementos finitos do problema (3.24)-(3.25), com 51 elementos na discretização da malha. Ao tomar a mesma direção de propagação da onda plana proposta no experimento numérico, isto é,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , pode-se definir  $u_{aju} \in H^1(\bar{\Omega})$

por

$$u_{aju}(\mathbf{x}) = \rho e^{i \frac{\sqrt{2}\omega}{2c_{aju}} [x_1+x_2]}, \quad (5.5)$$

como uma solução analítica de ajuste para cada velocidade  $c_{aju} \in (0.9; 1.1)$ . Além do mais, considera-se que as soluções analíticas usam os pontos da diagonal do domínio  $\Omega$ , isto é,  $x_1 = x_2$  (corte diagonal como proposto no exemplo numérico (3.30), veja Figuras 3.3(a), 3.3(b) e 3.3(c)).

A norma do erro  $\|u_{aju} - u_h\|$  é mostrada na Figura 5.3-(a). Fica claro, que o resultado numérico é melhor ajustado quando  $u_{aju}$  é avaliado com  $c_{aju}$  muito próximo a 1. Uma ampliação disso é mostrada na Figura 5.3-(b), onde o erro na velocidade de fase numérica está numa vizinhança  $d < 0.01\%$ , conforme foi estimado na Figura 5.1-(b).

A análise de elementos finitos também foi realizada para  $n = 15$  e  $n = 91$  elementos, com três diferentes números de onda. Os erros na velocidade de fase obtidos são mostrados na Figura 5.4-(a)(marcas quadradas) juntamente com as aproximações dadas pela equação (5.3). A conformidade foi muito boa para todos os números de onda.

Na Figura 5.5-(a) é mostrada a comparação entre o erro na velocidade de fase e a norma do erro da aproximação por elementos finitos com  $\kappa = 10\pi$ . A correlação é evidente e mostra que as equações da velocidade de fase obtidas da relação de dispersão discreta podem ser usadas como estimadores de erro na solução pelo método de elementos finitos em problemas envolvendo a equação de Helmholtz. A partir destas equações é possível definir um parâmetro  $h$  para a malha, o qual, torna desprezível o erro apresentado pela velocidade de fase numérica da aproximação diante de uma tolerância pré-estabelecida. Além disso, pelos Lemas G.1.1 e G.2.1, esta análise é estendida naturalmente para o sistema de segunda ordem de Maxwell harmônico no tempo.

A mesma análise pode ser feita para os experimentos envolvendo ondas cilíndricas. Nesta versão,  $u_{aju}$  é definida como

$$u_{aju} \left( \frac{\omega}{c_{aju}} r \right) = \frac{i}{4} h_0^{(1)} \left( \sqrt{2} \frac{\omega}{c_{aju}} r \right) \quad (5.6)$$

onde  $r$  é a distância entre qualquer ponto sobre a diagonal do domínio  $\Omega = [1, 1] \times [2, 2]$  e o ponto (0,0). As Figuras 5.6(a) e 5.6(b) mostram a norma do erro atingindo um valor mais

baixo,  $\approx 10^{-7}$ , com  $c_{adj} \approx 1$ .

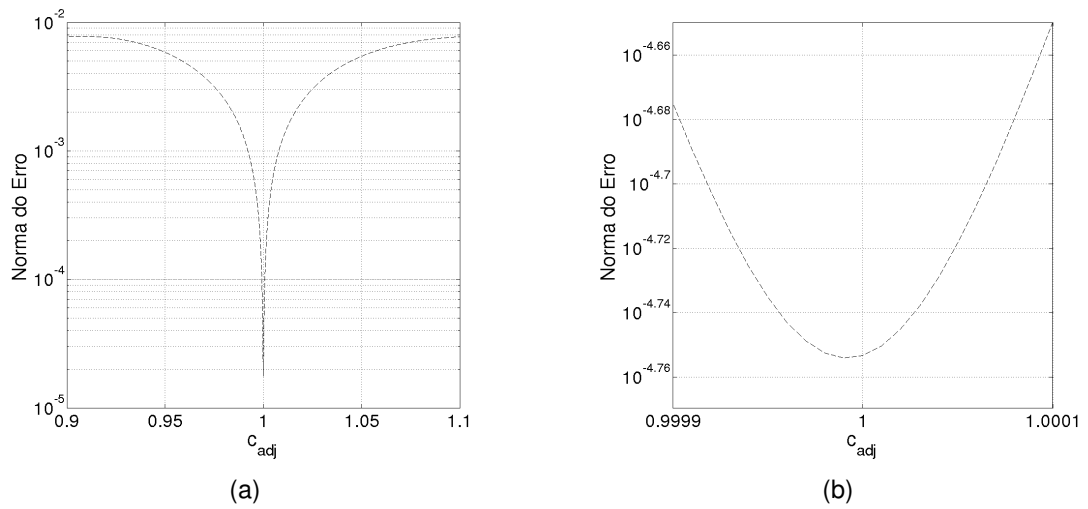


Figura 5.3: Norma do erro na aproximação por elementos finitos.

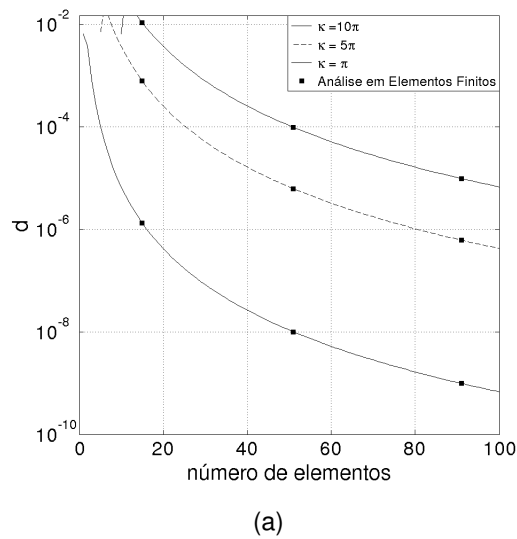
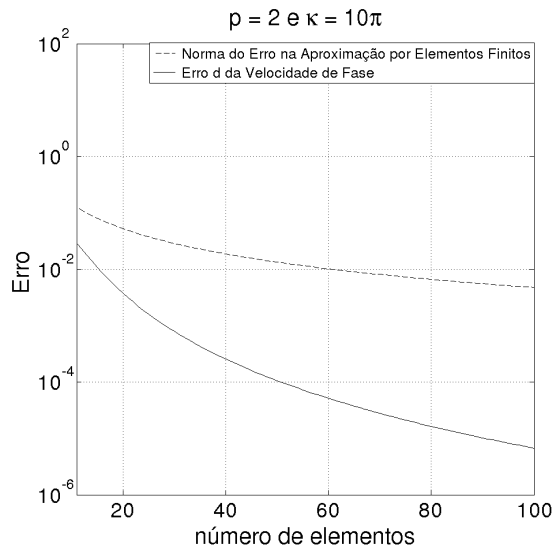


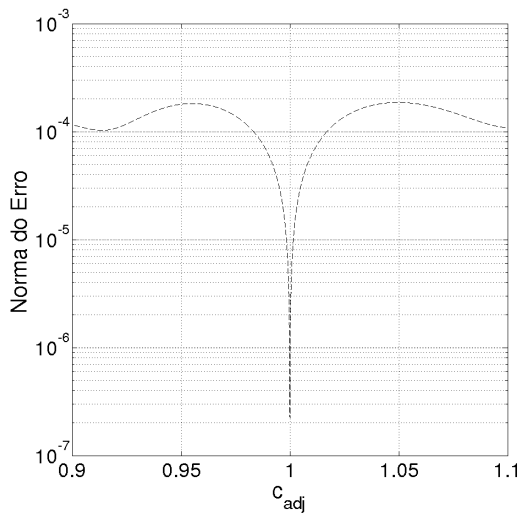
Figura 5.4: Erro na velocidade de fase, equação (5.3) e análise por elementos finitos, problema (3.24)-(3.25).



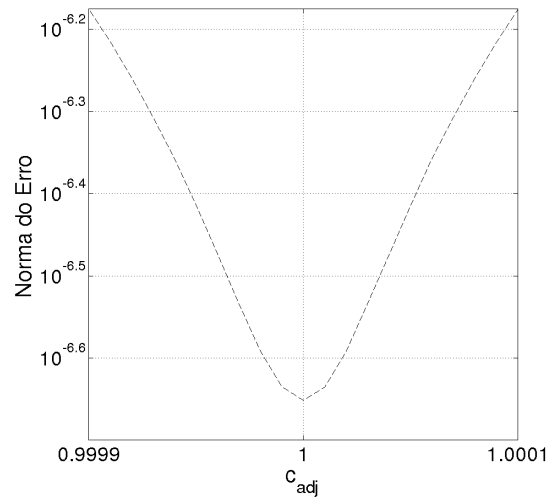


(a)

Figura 5.5: Normas dos erros na velocidade de fase, equação (5.3) e análise por elementos finitos, problema (3.24)-(3.25).



(a)



(b)

Figura 5.6: (a) Norma do erro com 51 elementos na malha indicando o melhor ajuste da expressão analítica, com  $c_{aju}$ , muito próximo à 1; (b) Ampliação da Figura 5.6(a).

# Capítulo 6

## Conclusões

Foi verificado que o uso das funções de base hierárquicas no método dos elementos finitos, para resolver problemas envolvendo ondas acústicas e eletromagnéticas, é extremamente útil, visto que é sempre possível aproveitar as funções usadas na aproximação de ordem  $p$  em experimentos numéricos de ordem  $p + 1$ .

A partir da formulação variacional da equação de Helmholtz apresentou-se um caminho para encontrar uma expressão para a relação de dispersão discreta para um espaço de elementos finitos de ordem  $p = 1$ . Mostrou-se também os procedimentos para buscar expressões para a relação de dispersão discreta para elementos finitos de ordem superior.

Demonstrou-se uma correlação entre a equação de Helmholtz e o sistema de segunda ordem de Maxwell harmônico no tempo, evidenciando a possibilidade de obter soluções numéricas para as equações de Maxwell a partir de soluções aproximadas para a equação de Helmholtz e vice-versa.

Destacou-se que o estudo da análise de dispersão para a equação de Helmholtz, pode ser utilizado para gerar expressões para a relação de dispersão discreta para os sistema de Maxwell.

Foram definidas distintas expressões para a velocidade de fase numérica para diferentes ordens  $p$  de aproximação, a partir das quais foram gerados parâmetros para as malhas de elementos finitos, fornecendo informações quantitativas sobre o nível de refinamento necessário para controlar os efeitos dispersivos providos da aproximação. Por simplicidade, esta análise foi restrita a ondas planas e cilíndricas se propagando com ângulo de 45 graus com a horizontal (assim como nos experimentos numéricos apresentados). A análise com

ondas planas e cilíndricas que se propagam em outras direções entretanto não apresenta dificuldades adicionais.

A teoria e os resultados preliminares apresentados servem como ponto de partida para: estudos sobre elementos de Whitney e Nédélec de alta ordem em duas e três dimensões; métodos inovadores para geração de malhas; trabalhos relacionados à técnicas de elementos finitos para as equações de Maxwell e ondas elásticas, entre outros.

Vários temas podem ser abordados para dar continuidade à teoria desenvolvida neste trabalho, entre eles pode-se destacar: a busca por expressões para a relação de dispersão discreta usando o Método dos Elementos de Contorno; investigar o Método de Elementos Finitos vetoriais para as equações de Maxwell em meios não homogêneos; o estudo em três dimensões para as ideias desenvolvidas neste trabalho.

# Referências Bibliográficas

- Adams, R. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- Ainsworth, M. Discrete dispersion for hp-version finite element approximation at high wave-number. *SIAM J. Numer. Analysis* vol. 42, pp. 553-575, 2003.
- Ainsworth, M. and Coyle, J. Hierarchic hp-edge element families for Maxwell's equations on hybrid quadrilateral and triangular meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* vol. 190, pp. 6709-6733, 2001.
- Adjerid, S. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* vol. 190, pp. 2925-2941, 2001.
- Beylkin, G. Fast convolution with the free space Helmholtz Green's function. *Journal of Computational Physics*. vol. 228, pp. 2770–2791, 2009.
- Boffi, D. and Perugia, I. Computation model of electromagnetic resonator: analysis of edge element approximation. *SIAM J. Numer. Ana.* vol. 36, pp. 1264-1290, 1999.
- Brenner, S. and Scott, L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag. New York, 1994.
- Brezzi, F. and Fortin, M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag. New York, 1991.
- Babuška, I. and Ihlenburg, F. Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 38, pp. 3745-3774, 1995.

- Christon, M. The influence of the mass matrix on the dispersive nature of the semi-discrete, second-order wave equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol.173, pp. 146-166, 1999.
- Ciarlet, G. *The Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland Pub.. New York, 1978.
- Colton, D. and Kress, R. *Integral Equations Methods in Scattering Theory*. John Wiley and Sons Inc. New York, 1983.
- Girault, V. and Raviart, P. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations - Theory and Algorithms*. Springer-Verlag. Berlin, 1986.
- Girault, V., Bernardi, C., Amrouche, C. and Dauge, M. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. vol. 21, pp. 823-864, 1998.
- Greenleaf, A. Kurylev, Y. Lassas, M. and Uhlmann, G. Full-Wave Invisibility of Active Devices at All Frequencies. *Communications in Mathematical Physics*. vol. 275, pp. 749-789, 2007.
- Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Publishing INC. Massachusetts, 1985.
- Harari, I., Thompson, L.L., Gosh, K., Hughes, T.J.R. Malhotra, M., Pinsky, P.M., Stewart, J.R., Recent Developments in Finite Element Methods for Structural Acoustic. *Archives of Computational Methods in Engineering*. **3** (1996), 131-311.
- Haueisen, J. Influence of Tissue Resistivities on Neuromagnetic Fields and Electric Potentials Studied with a Finite Element Model of the Head. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. vol. 44, pp. 727-734, 1997.
- Ihlenburg, F. and Babuška, I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. vol. 34, pp. 315-358, 1997.
- Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons Inc. New York, 1999.
- Jin, J. *The Finite Element Method in Electromagnetism*. Second Edition. John Wiley and Sons Inc. New York, 2002.

- Kaplan, W. *Advanced Calculus, Fifth Edition*. House of Electronics Industry. New York, 1970.
- Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons. New York, 1978.
- Lima, E. *Um Curso de Análise Vol. 2*. IMPA - Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.
- Li, Y and Dai, S. Finite element modelling of marine controlled-source electromagnetic responses in two-dimensional dipping anisotropic conductivity structures. *Geophysical Journal International*, vol. 185, pp. 622-636, 2011.
- Liu, Y. *Fast Multipole Boundary Element Method*. Cambridge University Press. New York, 2009.
- Mathews, J. *Numerical Methods Using Matlab*. Prentice-Hall Inc. New Jersey, 2004.
- Monk, P. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford Science Publications. New York, 2003.
- Monk, P. A finite element method for approximating the time - harmonic Maxwell equation. *Numerische Mathematik*. vol. 63, pp. 243-261, 1991.
- Monk, P. A simple Proof of Convergence for an Edge Element Discretization of Maxwell Equations. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. vol. 28, pp. 127-141, 2003
- Monk, P. and Parrot, A. Dispersion analysis of finite element methods for Maxwell equations. *SIAM J. Sci. Comput.* vol. 15, pp. 916-937, 1994.
- Monk, P. and Cohen, G. Gauss point mass lumping schemes for Maxwell equations. *Numerical Methods for PDEs*. vol. 14, pp 63-88, 1998.
- Nédélec, J. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik* vol. 35, pp. 315-341, 1980.
- Nédélec, J. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik* vol. 50, pp. 57-81, 1986.
- Oliveira, S.P. and Seriani, G. Optimal blended spectral-element operators for acoustic wave modeling. *Geophysics* vol. 72(5), pp. 95–106, 2007.

- Olver, F.W., Lozier D.W., Boivert, R.F. and Clark, C.W. *NIST - Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press. New York, 2010.
- Reddy, B. *Funcional Analysis and Boundary-Value Problems: an Introductory Treatment*. John Wiley and Sons. New York, 1986.
- Smith, J. Human exposure assessment in the near field of GSM base-station antennas using a hybrid finite element/method of moments technique. *Biomedical Engineering IEEE T.* vol. 50 pp. 224-233, 2003.
- Soares, D. and Vinagre, M. P. Numerical Computation of Electromagnetic Fields by the Time-Domain Boundary Element Method and the Complex Variable Method *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. vol. 25 pp. 1–8, 2008.
- Pavel Šolín, P. Segeth, K. and Doležel, I. Higher-Order Finite Element Methods *Mathematics of Computation*. vol. 74(250) pp. 1049–1052, 2004.
- Schwartz, M. Green, S. and Rutledge, W. *Vector Analysis with Applications to Geometry and Phisics*. Harper and Brothers. New York, 1960.
- Thompson, L. and Pinsky, P. Complex wavenumber Fourier analysis of the p-version finite element method. *Computat. Mech.* vol. 13, pp. 255-275, 1994.
- Vajta, M. Some remarks on Padé Approximations. 3<sup>rd</sup> TEMPUS-INTCOM Symposium, September 9-14, 2000, Veszprém, Hungary.
- Warren, G. S. and Scott, W. R. Numerical Dispersion in the finite-element method using triangular edge elements. *Microwave and Optical Technology Letters*. vol. 9(6), pp. 315-319, 1995.
- Whitney, H. *Geometry Integration Theory*. Princeton University Press. New Jersey, 1957.

# Apêndice A

## Introdução aos Espaços de Sobolev

### A.1 Alguns Espaços de Funções

Inicia-se esta seção definindo alguns espaços de funções Adams (1995), Kreyszig (1978), Lima (2006), Reddy (1986). Para qualquer conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , com  $N = 1, 2, 3$ , define-se  $L^p(\Omega)$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ , como o conjunto das funções  $u$  aplicadas em  $\Omega$ , para as quais,  $|u|^p$  é integrável, isto é, são as funções tais que

$$\int_{\Omega} |u|^p d\Omega < \infty$$

O mais importante caso é quando  $p = 2$ , cujo conjunto  $L^2(\Omega)$  é denominado conjunto das funções quadrado integráveis em  $\Omega$ . Além deste, define-se também  $C^k(\Omega)$  como o conjunto das funções que são  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis em  $\Omega$  e o conjunto  $C^k(\bar{\Omega})$  das funções  $u \in C^k(\Omega)$ , cujas derivadas são uniformemente contínuas e limitadas até ordem  $k$ .

Suponha que uma função  $\phi$  definida em  $\Omega$  é diferente de zero apenas em pontos pertencentes a  $K \subset \Omega$ . Logo, chama-se  $\bar{K}$ , o fecho de  $K$ , de suporte de  $\phi$ .

**Definição A.1.1** *Dize-se que uma função  $\phi$  definida sobre  $\Omega$  tem suporte compacto, se o seu suporte  $\bar{K}$  é um conjunto limitado em  $\Omega$ .*

**Definição A.1.2** *Define-se  $C_0^K(\Omega)$  como sendo o espaço de todas as funções  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis, as quais juntamente com suas derivadas, tem suporte compacto em  $\Omega$ , onde  $\Omega$  é um conjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$ .*



**Definição A.1.3** Define-se  $C_0^\infty(\Omega)$  como sendo o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis, as quais juntamente com suas derivadas, tem suporte compacto em  $\Omega$ , onde  $\Omega$  é um conjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$ .

## A.2 Domínios Lipschitz

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio com contorno  $\Gamma$ . Seja  $\mathbf{x}_0$  um ponto arbitrário de  $\Gamma$ , o qual pode-se tomar, para algum  $\epsilon > 0$ , uma bola  $B(\mathbf{x}_0; \epsilon)$ . Na sequência, é estabelecido um sistema de coordenadas  $(w_1, w_2, \dots, w_N)$  tal que  $\Gamma \cap B(\mathbf{x}_0; \epsilon)$  possa ser expressada como  $w_1 = f(w_2, w_3, \dots, w_N)$ , onde  $f$  é uma função definida sobre  $\Omega$ . Dize-se que  $\Gamma$  é Lipschitz contínuo se  $f$  é Lipschitz contínua, isto é, se existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|f(\mathbf{w}) - f(\boldsymbol{\eta})| < C|\mathbf{w} - \boldsymbol{\eta}|$ , onde  $\mathbf{w} = (w_2, w_3, \dots, w_N)$  e  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_N)$ . Ou ainda, se  $\Gamma \cap B(\mathbf{x}_0; \epsilon)$  for o gráfico de uma função Lipschitz contínua, então  $\Gamma$  é dito ser um contorno Lipschitz contínuo. Além disso, deve-se denominar  $\Omega$  de Domínio Lipschitz sempre que seu contorno for Lipschitz Contínuo.

## A.3 Notação Multi-índice

Seja  $\mathbb{Z}_+^N$  o conjunto de todas as  $n$ -uplas de inteiros não negativos. Um elemento de  $\mathbb{Z}_+^N$  é denotado por  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ , onde cada  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Denota-se  $|\boldsymbol{\alpha}|$  como a soma das componentes de  $\boldsymbol{\alpha}$  e a derivada de uma função  $\phi \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , por  $D^\alpha \phi$ , tal que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Por exemplo, se  $N = 2$  e  $\boldsymbol{\alpha} = (2, 1)$ , então

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

Assim, se  $|\boldsymbol{\alpha}| = m$ , então  $D^\alpha \phi$  será chamada de  $m$ -ésima derivada parcial de  $\phi$ .

## A.4 Distribuições

Define-se uma distribuição num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  como um funcional linear limitado aplicado em  $C_0^\infty(\Omega)$ , isto é, uma distribuição é um mapeamento contínuo de  $C_0^\infty(\Omega)$  para  $\mathbb{R}$ .

Denota-se o espaço das distribuições por  $C_0^\infty(\Omega)'$ .

**Definição A.4.1** : Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser localmente integrável se para todo conjunto limitado  $K \subset \Omega$  tem-se

$$\int_K |f(\mathbf{x})| d\Omega < \infty$$

Para essa função pode-se definir uma distribuição  $F \in C_0^\infty(\Omega)'$  por  $F : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(\phi) = \int_\Omega f\phi d\Omega \quad \text{onde, } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Considerando que o suporte de  $\phi$  é  $K \subset \Omega$ , logo

$$|F(\phi)| = \left| \int_\Omega f\phi d\Omega \right| = \left| \int_K f\phi d\Omega \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in K} |\phi(\mathbf{x})| \int_K |f(\mathbf{x})| d\Omega$$

isto mostra que  $F$  é limitado e diz-se que  $F$  é uma distribuição gerada por  $f$ . Uma distribuição que é gerada por uma função localmente integrável é dita distribuição regular.

A partir de agora, será tomada a mesma notação para uma função e uma distribuição. No entanto, a diferença deverá ficar clara no contexto, por exemplo, na expressão  $\int_\Omega f\phi d\Omega$ ,  $f$  é interpretada como uma função, já na expressão  $f(\phi)$ ,  $f$  é uma distribuição.

## A.5 Derivada Fraca

Suponha que a função  $u$  é localmente integrável e que a distribuição gerada por  $u$  possui derivadas de todas as ordens, em particular a derivada da distribuição  $D^\alpha u$  é definida por

$$D^\alpha u(\phi) = (-1)^m u(D^\alpha \phi) \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Se  $D^\alpha u$  é uma distribuição regular, então naturalmente, é caracterizada desta forma porque foi gerada por uma função  $D^\alpha u$  localmente integrável tal que

$$D^\alpha u(\phi) = \int_\Omega (D^\alpha u)\phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.1})$$

As funções  $u$  e  $D^\alpha u$  estão relacionadas por

$$\int_\Omega D^\alpha u(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\Omega = (-1)^m \int_\Omega u(\mathbf{x})(D^\alpha \phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad \text{com } |\alpha| = m \quad (\text{A.2})$$

**Definição A.5.1** Diz-se que a função  $D^\alpha u$  obtida neste processo é a  $m$ -ésima derivada fraca da função  $u$ .

Pode-se ver que, se  $u$  é suficientemente suave tal que  $u \in C^m(\Omega)$ , então a sua derivada fraca  $D^\alpha u$  coincide com a sua derivada no sentido usual para  $|\alpha| \leq m$ .

## A.6 Espaços de Sobolev

Seja  $m > 0$  um inteiro e seja  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Definição A.6.1** O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , é definido como sendo a coleção de todas as funções em  $L^p(\Omega)$  tais que todas as derivadas fracas até ordem  $m$  estão também em  $L^p(\Omega)$ , ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ onde } |\alpha| \leq m\}$$

Para o caso  $p = 2$ , tem-se a seguinte notação

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ onde } |\alpha| \leq m\}$$

Pode-se definir o seguinte produto interno para  $H^m(\Omega)$

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u D^\alpha v d\Omega \quad \text{para } u, v \in H^m(\Omega)$$

Este produto interno induz a norma de Sobolev  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$  definida por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = (u, u)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)^2 d\Omega$$

observe que se  $m = 0$ , então

$$\|u\|_{H^0(\Omega)}^2 = (u, u)_{H^0} = \int_{\Omega} (u)^2 d\Omega \tag{A.3}$$

e assim,  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . Além disso, pode-se escrever

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

e portanto,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \quad (\text{A.4})$$

A correspondente semi-norma, usada na análise de interpolação do método dos elementos finitos é dada por

$$|u|_{H^m(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2 d\Omega$$

Outro espaço de funções que não se pode deixar de mencionar é o espaço:

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega); u(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma\},$$

onde  $\Gamma$  é a fronteira de  $\Omega$ .

## A.7 Derivada da Distribuição

Pode-se definir a derivada de uma distribuição de tal forma que a distribuição deva ser gerada por uma função continuamente diferenciável, deste modo, a derivada da distribuição coincide com a derivada usual. Para isso, utilizar-se-á a fórmula de Green Ciarlet (1978), a qual expressa que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} u v n_i d\Gamma = \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.5})$$

é válida para duas funções  $u, v \in H^1(\Omega)$ , onde  $n_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor normal  $\mathbf{n}$  externo à  $\Gamma$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Este teorema pode ser generalizado para resultados envolvendo derivadas parciais de ordem  $m$  de funções  $u, v \in H^m(\Omega)$ , com  $|\alpha| = m$ . Desta forma (A.5) fica

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) v d\Omega = (-1)^m \int_{\Omega} u (D^\alpha v) d\Omega + \int_{\Gamma} H(u, v) d\Gamma, \quad (\text{A.6})$$

onde  $H(u, v)$  é uma expressão envolvendo uma soma dos produtos de  $u$  e  $v$  de ordem menor que  $m$ .

Agora, suponha  $u \in C^m(\Omega) \cap H^m(\Omega)$  e  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Desde de que  $\phi$  seja identicamente nula fora de seu suporte  $\bar{K} \subset \Omega$ , obtém-se pela integração por partes

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) \phi d\Omega = (-1)^m \int_{\Omega} u (D^\alpha \phi) d\Omega \quad (\text{A.7})$$

Sabendo que toda função contínua é localmente integrável, logo para  $u \in C^m(\Omega) \cap H^m(\Omega)$  define-se a distribuição  $u$  gerada por  $u$  por

$$u(\phi) = \int_{\Omega} u\phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.8})$$

considerando que  $D^\alpha\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , tem-se

$$u(D^\alpha\phi) = \int_{\Omega} uD^\alpha\phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.9})$$

Além disso,  $D^\alpha u$ ,  $|\alpha| = m$  é contínua, logo esta também é capaz de gerar uma distribuição satisfazendo

$$D^\alpha u(\phi) = \int_{\Omega} (D^\alpha u)\phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.10})$$

substituindo (A.9) e (A.10) em (A.7), tem-se

$$D^\alpha u(\phi) = (-1)^m u(D^\alpha\phi) \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.11})$$

Logo, a derivada da distribuição  $u$  é definida como sendo a distribuição denotada por  $D^\alpha u$  que satisfaz (A.11).

# Apêndice B

## Operadores Diferenciais

### B.1 Campo Gradiente

Seja um campo escalar  $f = f(x, y, z)$  diferenciável no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . As derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existem neste domínio e estas formam as componentes do vetor gradiente do campo escalar  $f$ , ou seja

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

ou ainda,

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

onde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são vetores unitários canônicos. Por conveniência representa-se o operador  $\nabla$  na forma de um vetor  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Um fato importante é que  $\nabla f$  aponta na direção do máximo crescimento de  $f$ .

#### Propriedades do Gradiente

Se  $f$  e  $g$  são campos escalares, então

- $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

Se  $f$  é um campo escalar e  $c$  é uma constante, então

- $\nabla(cf) = c\nabla f$

## B.2 Rotacional do Campo Vetorial

Dado um campo vetorial  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  em um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  representa-se o *rotacional* deste campo vetorial pelo produto vetorial entre  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\mathbf{v}$ , ou seja

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

### Propriedades do Rotacional

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são campos vetoriais, então

- $\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$

Se  $\mathbf{u}$  é um campo vetorial e  $f$  é uma função escalar, então

- $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + \nabla f \times \mathbf{u}$

**Teorema B.2.1 (Teorema de StokesKaplan (1970))** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio Lipschitz limitado com vetor tangente unitário  $\mathbf{t}$  à  $\Gamma$ , contorno de  $\Omega$ . Se  $\mathbf{v} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$  e  $w \in C^1(\overline{\Omega})$ , então*

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{v})w \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times w) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})w \, d\Gamma$$

## B.3 Divergente do Campo Vetorial

Seja  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  um campo vetorial em um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , e  $v_x, v_y$  e  $v_z$  são funções escalares diferenciáveis em  $\Omega$ . Representa-se o divergente deste campo vetorial pelo produto interno entre  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\mathbf{v}$ , ou seja

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x, v_y, v_z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

onde  $v_x, v_y$  e  $v_z$  são funções escalares diferenciáveis em  $\Omega$ .

## Propriedades do Divergente

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são campos vetoriais, então

$$\bullet \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Se  $\mathbf{u}$  é um campo vetorial e  $f$  é uma função escalar, então

$$\bullet \nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla f \cdot \mathbf{u})$$

**Teorema B.3.1 (Teorema da Divergência)** : Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , com contorno Lipschitz

$\Gamma$  e vetor unitário externo  $\mathbf{n}$ . Seja  $\mathbf{F} \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$  um campo vetorial. Tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

## Laplaciano

Ao expandir o produto interno

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{B.1})$$

tem-se o que se chama de divergente do gradiente. O lado direito de (B.1) é conhecido como laplaciano de  $f$  e é também denotado por  $\nabla^2 f$ .

## Identidades Diferenciais

Sejam  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $f$  funções suaves, vetoriais e escalar, respectivamente. São válidas as seguintes identidades:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{B.5})$$



$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (\text{B.7})$$

## B.4 Operadores Diferenciais sobre uma Superfície

### B.4.1 Gradiente de Superfície

Seja  $S$  uma superfície com contorno suave e vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . Para uma função escalar  $f \in H^1(S)$  define-se o gradiente de superfície  $\nabla_S f \in L_t^2(S)$  por

$$\nabla_S f = (\mathbf{n} \times \nabla f) \times \mathbf{n}$$

onde  $L_t^2(S) = \{\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \in (L^2(S))^2; \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sobre } S\}$ , com  $\mathbf{n}$  sendo o vetor normal unitário.

### B.4.2 O Escalar Rotacional de Superfície

Pode-se denotar o escalar rotacional de superfície por  $\nabla_S \times : L_t^2(S) \longrightarrow H^1(S)'$ , onde  $H^1(S)'$  é o dual de  $H^1(S)$ , ou seja, se  $g \in H^1(S)'$ , tem-se que  $g : H^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Assim, se  $\mathbf{u} \in L_t^2(S)$ , define-se o rotacional escalar de superfície por

$$\nabla_S \times \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \forall \mathbf{u} \in L_t^2(S) \quad (\text{B.8})$$

### B.4.3 O Vetor Rotacional de Superfície

Se  $S$  denota um domínio Lipschitz no plano  $(x, y)$ , então para dada função escalar  $\phi = \phi(x, y)$  definida sobre  $S$ , pode-se denotar e definir o vetor rotacional de superfície, respectivamente, por  $\vec{\nabla}_S \times : H^1(S) \longrightarrow L_t^2(S)$  e

$$\vec{\nabla}_S \times \phi = \nabla_S \phi \times \mathbf{n} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \forall f \in H^1(S). \quad (\text{B.9})$$

Note que a equação (B.9) nada mais é do que o produto entre a matriz de rotação e o gradiente de  $\phi$ ,  $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$ .

**Corolário B.4.1 (Teorema de Stokes no Plano)** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^2$  um domínio Lipschitz limitado com vetor tangente unitário  $\mathbf{t}$  a  $\Gamma$ . Se  $\mathbf{v} \in (C^1(\bar{S}))^2$  e  $w \in C^1(\bar{S})$ , então*

$$\int_S (\nabla_S \times \mathbf{v})w \, d\Omega = \int_S \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w \, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}w \, d\Gamma$$

**Demonstração:** Dados  $\mathbf{v} \in (C^1(\bar{S}))^2$ ,  $w = w(x_1, x_2) \in C^1(\bar{S})$  e  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ , o vetor normal unitário externo. Seja  $\mathbf{u} \in (C^1(\bar{S}))^2$  um campo vetorial tal que

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (wv_2, -wv_1)$$

Tem-se pelo Teorema da Divergência que

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{B.10})$$

Por outro lado, note que  $\mathbf{v}w = (-u_2, u_1)$ . Assim, se  $\mathbf{t} = (-n_2, n_1)$  é o vetor tangente unitário correspondente a  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ , então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}w \cdot \mathbf{t}$$

logo, pode-se escrever (B.10) como

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{v}w \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma$$

Agora, usando equações (B.8) e (B.9), encontra-se que

$$\nabla_S \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}_S \times w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)$$

logo,

$$(\nabla_S \times \mathbf{v})w = w \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - w \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (\text{B.11})$$

além disso, observe que

$$\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w = (v_1, v_2) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = v_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (\text{B.12})$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ , usa-se a definição dada à  $\mathbf{u}$  para obter-se

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial(wv_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(wv_1)}{\partial x_2} \\ &= w \frac{\partial(v_2)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial(w)}{\partial x_1} - w \frac{\partial(v_1)}{\partial x_2} - v_1 \frac{\partial(w)}{\partial x_2}\end{aligned}$$

De (B.11) e (B.12), tem-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = (\nabla_S \times \mathbf{v})w - \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w$$

e portanto,

$$\int_S (\nabla_S \times \mathbf{v})w \, d\Omega = \int_S \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w \, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{v}w \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma$$

■

#### B.4.4 Divergente de Superfície

Tendo definido o gradiente de superfície, pode-se definir o divergente de superfície como o operador  $\nabla_{S^\cdot} : L_t^2(S) \rightarrow H^1(S)'$  como

$$\nabla_{S^\cdot} \cdot \mathbf{v} = \nabla_S \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in L_t^2(S) \quad (\text{B.13})$$

Deve-se entender  $(\mathbf{n} \times \mathbf{v})$  como uma rotação  $90^\circ$  do vetor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  sobre a superfície, isto é,  $(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = (-v_2, v_1)$ . Além disso, de acordo com o Teorema B.3.1, o operador  $\nabla_{S^\cdot}$  satisfaz

$$\int_S \nabla_{S^\cdot} \cdot \mathbf{v}f \, d\Omega = - \int_S \mathbf{v} \cdot \nabla_S f \, d\Omega \quad \forall f \in H^1(S) \text{ e } \forall \mathbf{v} \in L_t^2(S)$$

#### B.4.5 Produto Vetorial no Plano $(x, y)$

Sejam  $\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$  e  $\mathbf{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  vetores no plano  $\mathbb{R}^2$ . Estendendo a definição do produto vetorial para estes vetores da seguinte forma

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_1(x, y)v_2(x, y) - u_2(x, y)v_1(x, y) \quad (\text{B.14})$$

Esta definição é consistente com (B.8) e é motivada pelo fato de que, dados os vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$ , tem-se que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}, \quad (\text{B.15})$$

onde  $\mathbf{k}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $z$ .

#### B.4.6 Identidades Diferenciais sobre uma Superfície

Seja  $S$  uma superfície com contorno suave e vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  e sejam  $\mathbf{v}$  e  $f$  funções suaves, vetorial e escalar, respectivamente, definidas numa vizinhança de  $S$ . Seguem as seguintes identidades:

$$\nabla_S f = (\mathbf{n} \times \nabla f|_S) \times \mathbf{n} \quad (\text{B.16})$$

$$\vec{\nabla}_S \times f = -\mathbf{n} \times \nabla_S f \quad (\text{B.17})$$

$$\nabla_S \times \mathbf{v} = -\nabla_S \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (\text{B.18})$$

$$\nabla_S \cdot \mathbf{v} = \nabla_S \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (\text{B.19})$$

$$\nabla_S \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})|_S \quad (\text{B.20})$$

#### B.4.7 Identidades Integrais

Agora, será apropriado fazer uma breve revisão de algumas identidades integrais básicas para o estudo. Começa-se, então, com o Teorema da Divergência de Gauss para um domínio Lipschitz.

**Teorema B.4.1 (Teorema da Divergência)** : *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , com contorno Lipschitz  $\Gamma$  e vetor unitário externo  $\mathbf{n}$ . Seja  $\mathbf{F} \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$  um campo vetorial. Tem-se que*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Schwartz et al. (1960).

**Corolário B.4.2 (Identidades de Green)** : *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio Lipschitz limitado com contorno  $\Gamma$  e vetor normal unitário externo  $\mathbf{n}$ .*

(1) Se  $w \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $\mathbf{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} w \, d\Gamma$$

(2) Se  $w \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $p \in C^2(\bar{\Omega})$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma$$

(3) Se  $w \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $p \in C^2(\bar{\Omega})$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p w - p \nabla^2 w \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} w - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} p \, d\Gamma$$

(4) Suponha  $\mathbf{u}, \phi \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \times \phi \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{u} \cdot \phi \, d\Gamma$$

**Demonstração:** A ideia é utilizar o Teorema da Divergência e algumas identidades diferenciais.

(1) Do Teorema da Divergência, para um campo vetorial  $\mathbf{F} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$  pode-se escrever

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \, d\Gamma$$

Tomando  $\mathbf{F} = \mathbf{u} w$  e usando a identidade  $\nabla \cdot (\mathbf{u} w) = \nabla w \cdot \mathbf{u} + w \nabla \cdot \mathbf{u}$ , tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u} w) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} w) \, d\Gamma$$

e assim,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{u} + w \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} w) \, d\Gamma$$

integrando a soma  $\nabla w \cdot \mathbf{u} + w \nabla \cdot \mathbf{u}$  separadamente, tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} w) \, d\Gamma$$

(2) Na identidade (1) escolha  $\mathbf{u} = \nabla p$ .

(3) Tome a seguinte identidade, garantida por (2)

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w p \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla p \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} p \, d\Gamma$$

agora, basta subtrair esta identidade de (2).

(4) No Teorema da Divergência escolha  $\mathbf{F} = \mathbf{u} \times \phi$  e use as identidades (B.6) e  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$  para o contorno. ■

# Apêndice C

## Forma Sesquilinear

Em Monk (2003a) podemos obter as seguintes definições:

**Definição C.0.1 (Forma Sesquilinear)** *Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Hilbert. Um mapeamento  $S(\cdot, \cdot) = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  é chamado uma forma sesquilinear se*

$$S(\alpha_1 u + \alpha_2 v, \phi) = \alpha_1 S(u, \phi) + \alpha_2 S(v, \phi), \quad \text{onde } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \text{ com } u, v \in \mathcal{X} \text{ e } \phi \in \mathcal{X}.$$

$$S(u, \beta_1 \phi + \beta_2 \chi) = \overline{\beta_1} S(u, \phi) + \overline{\beta_2} S(u, \chi), \quad \text{onde } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C} \text{ com } u \in \mathcal{X} \text{ e } \phi, \chi \in \mathcal{X}.$$

**Definição C.0.2 (Forma Sesquilinear Coerciva)** *Uma forma sesquilinear  $S(\cdot, \cdot) = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\mathcal{X}$  é um espaço de Hilbert, é sesquilinear coerciva se existe uma constante  $\alpha > 0$  independente de  $u \in \mathcal{X}$  tal que*

$$|S(u, u)| \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{X}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{X}.$$

**Definição C.0.3 (Forma Sesquilinear Limitada)** *Uma forma sesquilinear  $S(\cdot, \cdot)$  definida sobre  $\mathcal{X}$ , um espaço de Hilbert, é dita limitada se existe uma constante  $C > 0$  independente de  $u \in \mathcal{X}$  tal que*

$$|S(u, \phi)| \leq C \|u\|_{\mathcal{X}} \|\phi\|_{\mathcal{X}} \quad \forall u, \phi \in \mathcal{X}. \quad (\text{C.1})$$

**Teorema C.0.2 (Lema de Lax-Milgram)** *Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Hilbert e seja  $S(\cdot, \cdot)$  uma forma sesquilinear limitada e coerciva sobre  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Se  $g \in \mathcal{X}'$ , então existe um único  $u \in \mathcal{X}$  tal que*

$$S(u, \phi) = g(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{X} \quad (\text{C.2})$$

onde  $\mathcal{X}'$  é o conjunto dos funcionais lineares sobre  $\mathcal{X}$ . Além disso, existe uma constante  $C > 0$  independente de  $u \in \mathcal{X}$  tal que

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq C \|g\|_{\mathcal{X}'}$$

Este teorema é demonstrado em Reddy (1986).



# Apêndice D

## Método de Aproximação Racional - Aproximação de Padé

Agora, será tratado um método de aproximação racional para funções. A ideia central é explicitar uma função racional  $R$  que será a aproximação de uma função  $f$  numa pequena parte de um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , onde ambas estão definidas. Por exemplo, a aproximação racional para  $f$  sobre  $\Omega = [a, b]$  é o quociente de dois polinômios,  $P_M(x)$  e  $Q_N(x)$ , de graus  $M$  e  $N$ , respectivamente. Usa-se a notação  $R_{M,N}(x)$  para denotar tal quociente.

$$R_{M,N}(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)} \quad (\text{D.1})$$

O objetivo é fazer com que o erro máximo na aproximação seja tão pequeno quanto possível. A aproximação, aqui desenvolvida, é conhecida como aproximação de Padé.

O método de Padé requer que  $f$  seja contínua no domínio, e que sua derivada, por conveniência, seja contínua no ponto  $x = 0$ .

Os polinômios usados em (D.1) são os seguintes:

$$P_M(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Mx^M \quad (\text{D.2})$$

$$Q_N(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Nx^N \quad (\text{D.3})$$

No caso em que  $N = 0$ , a aproximação fica sendo apenas o polinômio de Maclaurin para  $f(x)$ . Para um valor fixado de  $M + N$ , usualmente, o erro fica menor quando  $M$  e  $N$

são iguais, ou quando  $M > N$ , ou seja, quando o grau de (D.2) é maior do que o de (D.3), Mathews (2004). No entanto, alguns casos podem ter melhor desempenho quando  $M < N$ , veja em Vajta (2000).

Note que  $q_0 = 1$ , isso fará com que a função racional (D.1) tenha  $M + N + 1$  coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a função  $f$  seja contínua e suave em torno do ponto  $x = 0$ . Pode-se escrever a expansão de  $f$ , em torno do ponto zero, como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots \quad (\text{D.4})$$

em seguida forma-se a seguinte expressão de diferença

$$f(x)Q_N(x) - P_M(x) = Z(x) \quad \text{com} \quad Z(x) = \sum_{j=M+N+1}^{\infty} z_jx^j \quad (\text{D.5})$$

Substituindo as expressões (D.2),(D.3) e (D.4), obtém-se

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_jx^j \right) \left( \sum_{j=0}^N q_jx^j \right) - \left( \sum_{j=0}^M p_jx^j \right) = \sum_{j=M+N+1}^{\infty} z_jx^j \quad (\text{D.6})$$

usando a propriedade distributiva, pode-se organizar a expressão acima como um sistema de  $M + N + 1$  de equações lineares com  $k = 0, 1, \dots, M + N$ . Em  $k = M + N$ , será feito o truncamento de (D.4), assim, conclui-se que quanto maior for o valor de  $M + N$ , melhor será a aproximação. Ao separar o sistema linear em dois conjuntos de equações, tem-se as  $M + 1$  primeiras são

$$\begin{aligned} a_0 - p_0 &= 0 \\ q_1a_0 + a_1 - p_1 &= 0 \\ q_2a_0 + q_1a_1 + a_2 - p_2 &= 0 \\ q_3a_0 + q_2a_1 + q_1a_2 + a_3 - p_3 &= 0 \\ &\vdots \\ q_Na_{M-N-1} + q_{N-1}a_{M-N} + \dots + a_{M-1} - p_{M-1} &= 0 \\ q_Na_{M-N} + q_{N-1}a_{M-N+1} + \dots + a_M - p_M &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

enquanto que as  $N$  equações seguintes são

$$\begin{aligned}
 q_N a_{M-N+1} + q_{N-1} a_{M-N+2} + \dots + q_1 a_M + a_{M+1} &= 0 \\
 q_N a_{M-N+2} + q_{N-1} a_{M-N+3} + \dots + q_1 a_{M+1} + a_{M+2} &= 0 \\
 &\vdots \\
 q_N a_M + q_{N-1} a_{M+1} + \dots + q_1 a_{M+N-1} + a_{M+N} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{D.8}$$

Note que em cada equação a soma dos subscritos nos fatores de cada produto são os mesmos, e esta soma cresce consecutivamente de 0 a  $M+N$ . As  $N$  equações em (D.8) envolvem apenas as incógnitas  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , que devem ser resolvidas primeiro, só assim, as equações (D.7) são usadas sucessivamente para encontrar  $p_0, p_1, \dots, p_M$ .

Na literatura pode-se encontrar a seguinte notação para identificar a Aproximação de Padé

$$[M/N]_{f(x)},$$

onde  $M$  é o grau do polinômio do numerador da função racional,  $N$  é o grau do seu denominador e  $f(x)$  representa a imagem da função  $f$  a ser aproximada.

# Apêndice E

## Transformação Covariante

Considere um vetor tangente  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^N$  e sejam  $E_i$ , com  $i = 1, \dots, N$ , suas componentes. Seja  $e_i$  uma base para  $\mathbb{R}^N$ . Agora sobre uma outra base  $e'_i$  para  $\mathbb{R}^N$ , considere as componentes  $E'_i$  de algum vetor em  $\mathbb{R}^N$ , de modo que

$$\mathbf{E} = \sum_i E_i e_i = \sum_i E'_i e'_i$$

suponha ainda que

$$E_i = \frac{dx_i}{d\lambda} \quad e \quad E'_i = \frac{dx'_i}{d\lambda},$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro. Se as novas componentes  $E'_i$  forem expressadas em termos das componentes anteriores  $E_i$ , então, de acordo com Kaplan (1970), tem-se

$$E'_i = \frac{dx'_i}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} E_j \quad (\text{E.1})$$

Esta é a forma explícita da transformação chamada transformação covariante.

# Apêndice F

## Relação de Dispersão Discreta para Elementos em 3D

Aqui é apresentada uma versão em três dimensões para a relação dispersão para elementos de Nédélec de ordem zero (elementos de Whitney). Considerando  $\mathbf{J}_a = \mathbf{0}$ , o campo elétrico  $\mathbf{E}$  satisfaz a equação de Maxwell harmônica de segunda ordem:

$$-\omega^2 \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{F.1})$$

A relação de dispersão para esta equação pode ser descrita ao procurar uma onda plana, como solução não-trivial, da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{F.2})$$

onde  $\mathbf{x}$  é uma variável espacial e  $\boldsymbol{\xi}$  aponta para a direção de propagação da onda plana.

Considerando o campo  $\mathbf{E}$  definido num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , tem-se que  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Substituindo (F.2) em (F.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \times e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{i} (i\xi_2 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \alpha_3 - i\xi_3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \alpha_2) + \mathbf{j} (i\xi_3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \alpha_1 - i\xi_1 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \alpha_2) \\ &+ \mathbf{k} (i\xi_1 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \alpha_2 - i\xi_2 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \alpha_1) \end{aligned}$$

Aplica-se novamente o operador  $\nabla \times$ , assim

$$\nabla \times \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} (-e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}})$$

Assim, considerando (F.2), pode-se escrever  $-\omega^2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} + \nabla \times \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$  como

$$-\omega^2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Multiplicando ambos os lados por  $-e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}$ , tem-se

$$\omega^2 \boldsymbol{\alpha} + M_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (\text{F.3})$$

onde  $M_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \end{bmatrix}$ . Seguindo o mesmo procedimento realizado para escrever  $\nabla \times \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha}$  na forma matricial, pode-se ver que

$$\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} (-\xi_2^2 - \xi_3^2)\alpha_1 + \xi_1 \xi_2 \alpha_2 + \xi_1 \xi_3 \alpha_3 \\ \xi_1 \xi_2 \alpha_1 + (-\xi_1^2 - \xi_3^2)\alpha_2 + \xi_3 \xi_2 \alpha_3 \\ \xi_3 \xi_1 \alpha_1 + \xi_3 \xi_2 \alpha_2 + (-\xi_1^2 - \xi_2^2)\alpha_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,  $M_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\alpha})$ . Assim, (4.23) dá a condição

$$\omega^2 \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (\text{F.4})$$

De (4.24), tem-se que

$$(\omega^2 I + M_{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (\text{F.5})$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Considerando agora uma solução não-trivial para (4.25), tem-se que  $\det(\omega^2 I + M_{\boldsymbol{\xi}}) = 0$ , ou seja

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \omega^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \omega^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante e fazendo as devidas simplificações, obtém-se

$$\omega^2(\omega^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^2 = 0 \quad (\text{F.6})$$

Deste modo, se  $\omega$  é diferente de zero, segue o que se definiu como a relação de dispersão

$$\omega = \|\xi\| \quad (\text{F.7})$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclídeana.

Suponha que o domínio está particionado numa malha uniforme infinita consistindo de cubos de lado  $h$ , com eixos de coordenadas cartesianas escolhidas de forma a coincidir com as direções das arestas dos cubos, como na figura F.1 abaixo.

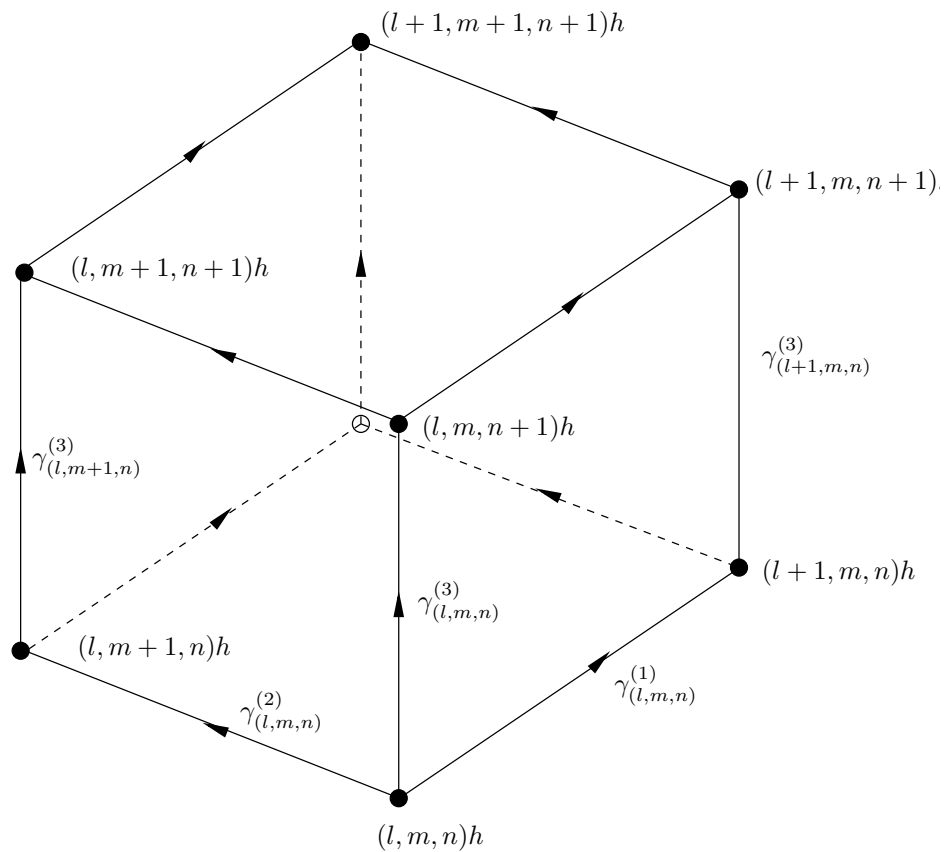


Figura F.1: Notação usada para descrever as arestas relativas aos vértices de um típico elemento cúbico, de lado  $h$ , retirado de uma malha uniforme infinita.

Denota-se  $V_h$  como o espaço dos elementos de Nédélec de ordem zero construído sobre

esta malha. Os campos  $\mathbf{E}_h = (E_h^{(1)}, E_h^{(2)}, E_h^{(3)}) \in \mathbf{V}_h$  serão expandidos forma

$$E_h^{(d)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \alpha_{\mathbf{n}}^{(d)} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \quad (\text{F.8})$$

onde

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2)\theta_{n3}(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.9})$$

com expressões análogas para as demais componentes, ou seja

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\chi_{n2}(x_2)\theta_{n3}(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi_{\mathbf{n}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2)\chi_{n3}(x_3) \end{bmatrix}$$

Aqui,  $\chi_n$  é a função característica (descontínua) para o intervalo  $(nh, nh + h)$  dada por

$$\chi_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in (nh, nh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

enquanto que  $\theta_n$  é a função de interpolação linear e contínua por partes dada por

$$\theta_n(s) = \begin{cases} 1 - \left(n - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (nh - h, nh] \\ 1 + \left(n - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (nh, nh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

A integral de linha de uma função de base,  $\phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \in \mathbf{V}_h$ , tomada ao longo das arestas do cubo, tem a seguinte forma

$$\int_{\gamma_m^{(e)}} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \cdot d\mathbf{x} = \begin{cases} h & \text{se } \mathbf{m} = \mathbf{n} \text{ e } d = e \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

onde  $\gamma_m^{(e)}$  denota a aresta alinhada com o  $a$ -ésimo eixo coordenado iniciando no vértice indexado por  $\mathbf{m}$ , veja figura F.1. A partir de (F.12), pode-se calcular os coeficientes do campo  $\mathbf{E}_h$



em (F.11) procedendo da seguinte forma:

Multiplicando (F.12) por  $\alpha_n^{(a)}$  e considerando  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$  juntamente com  $a = e$ , tem-se

$$\alpha_n^{(e)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(e)}} \alpha_n^{(e)} \phi_n^{(e)} \cdot d\mathbf{x}$$

e usando (F.8) para a  $d$ -ésima componente espacial, obtém-se

$$\alpha_n^{(e)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(e)}} \mathbf{E}_h \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{F.13})$$

Além disso, considera-se que uma solução discreta não-trivial  $\mathbf{E}_h$  satisfaz a condição

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x} + h\mathbf{n}) = e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}) \quad (\text{F.14})$$

onde  $\xi_h$  é o vetor de onda discreto relacionado à uma prescrita frequência temporal  $\omega$  pela relação de dispersão discreta.

Aplicando uma mudança de variável em (F.13) e considerando a invariância de translação da malha, deduz-se que

$$\alpha_n^{(d)} = e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \alpha_0^{(d)} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3 \quad (\text{F.15})$$

Substituindo (F.15) em (F.8), tem-se

$$\mathbf{E}_h^{(d)} = \alpha_0^{(d)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \phi_n^{(d)} \quad (\text{F.16})$$

e então, considerando o fato de que a somatória se desacopla em contribuições separadas de cada componente de  $\mathbf{n}$ , segue que

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_0^{(1)} \Upsilon_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(2)} = \alpha_0^{(2)} \Theta_h(\xi_1; x_1) \Upsilon_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(3)} = \alpha_0^{(3)} \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Upsilon_h(\xi_3; x_3), \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

onde

$$\Upsilon_h(\xi; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \chi_n(s) \quad (\text{F.18})$$

$$\Theta_h(\xi; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \theta_n(s) \quad (\text{F.19})$$

A equação (F.17) é uma versão discreta análoga à equação (F.2) e reflete o fato que ambos os campos, discreto e contínuo, tem apenas três graus de liberdade,  $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_0^{(3)}$  correspondentes às escalas aplicadas individualmente às componentes da solução discreta.

As funções  $\Theta_h$  e  $\Upsilon_h$  no caso de três dimensões, apresentam as mesmas propriedades que as suas equivalentes em duas dimensões vistas no capítulo 5, veja a equação (4.36). Portanto, a partir de  $\Theta_h$  também encontra-se a relação de dispersão discreta para a equação escalar de Helmholtz em uma dimensão

$$\omega_h(\xi)^2 = \frac{6}{h^2} \frac{1 - \cos(h\xi)}{2 + \cos(h\xi)} \quad (\text{F.20})$$

e

$$\Theta'_h(\xi; \cdot) = \Delta(\xi; h) \Upsilon_h(\xi; \cdot) \quad (\text{F.21})$$

onde

$$\Delta(\xi; h) = \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \rightarrow i\xi \quad \text{com } h \rightarrow 0 \quad (\text{F.22})$$

Esta propriedade indica que a função  $\mathbf{E}_h$  definida em (F.17) pode ser expressa de uma forma alternativa, ou seja

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(2)} = \alpha_2 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(3)} = \alpha_3 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3), \end{cases} \quad (\text{F.23})$$

onde  $\alpha_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\Delta(\xi_1; h)}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\alpha_0^{(2)}}{\Delta(\xi_2; h)}$  e  $\alpha_3 = \frac{\alpha_0^{(3)}}{\Delta(\xi_3; h)}$ .

Com o objetivo de determinar a relação de dispersão discreta, uma solução discreta não-trivial da forma (F.23) é buscada de modo a satisfazer a forma variacional apresentada em (F.1):

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) - \omega^2(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (\text{F.24})$$

Primeiramente, para qualquer  $n \in \mathbb{Z}^3$ , escolhe-se  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  da forma

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} \theta'_{n1}(x_1) \theta_{n2}(x_2) \theta_{n3}(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.25})$$

Um cálculo usando a propriedade (4.40) revela que

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E_h^{(1)} v_h^{(1)} dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \omega_h(\xi_1)^2 \alpha_1 \prod_{l=1}^3 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_l; x_l) \theta_{nl}(x_l) dx_l
 \end{aligned} \tag{F.26}$$

e explicitando  $\nabla \times \mathbf{E}_h = \mathbf{w}_1$  e  $\nabla \times \mathbf{v}_h = \mathbf{w}_2$ , onde

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta_h'(\xi_2; x_2) \Theta_h'(\xi_3; x_3) - \alpha_2 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta_h'(\xi_2; x_2) \Theta_h'(\xi_3; x_3) \\ \alpha_1 \Theta_h'(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta_h'(\xi_3; x_3) - \alpha_3 \Theta_h'(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta_h'(\xi_3; x_3) \\ \alpha_2 \Theta_h'(\xi_1; x_1) \Theta_h'(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) - \alpha_1 \Theta_h'(\xi_1; x_1) \Theta_h'(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) \end{bmatrix}^T$$

e

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n1}'(x_1) \theta_{n2}(x_2) \theta_{n3}'(x_3) \\ -\theta_{n1}'(x_1) \theta_{n2}'(x_2) \theta_{n3}(x_3) \end{bmatrix}^T$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) = (\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n_1}(x_1) \theta_{n_2}(x_2) \theta'_{n_3}(x_3) - \\
&\quad \alpha_3 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n_1}(x_1) \theta_{n_2}(x_2) \theta'_{n_3}(x_3) - \\
&\quad \alpha_2 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n_1}(x_1) \theta'_{n_2}(x_2) \theta_{n_3}(x_3) + \\
&\quad \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n_1}(x_1) \theta'_{n_2}(x_2) \theta_{n_3}(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_3)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n_1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n_2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n_3}(x_3) dx_3 \right) \\
&\quad - \alpha_3 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_3)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n_1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n_2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n_3}(x_3) dx_3 \right) \\
&\quad - \alpha_2 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_2)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n_1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n_2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n_3}(x_3) dx_3 \right) \\
&\quad + \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_2)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n_1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n_2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n_3}(x_3) dx_3 \right) \\
&= \left( \prod_{l=1}^3 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_l; x_l) \theta_{n_l}(x_l) dx_l \right) (\omega_h(\xi_1)^2 [\alpha_1 (\omega_h(\xi_2)^2 + \omega_h(\xi_3)^2) - \alpha_2 \omega_h(\xi_2)^2 - \alpha_3 \omega_h(\xi_3)^2])
\end{aligned}$$

Deste modo, com esta escolha para  $\mathbf{v}_h$ , a equação (F.24) simplifica-se para a condição algébrica

$$\alpha_1 (\omega_h(\xi_2)^2 + \omega_h(\xi_3)^2 - \omega^2) - \alpha_2 \omega_h(\xi_2)^2 - \alpha_3 \omega_h(\xi_3)^2 = 0 \quad (\text{F.27})$$

Observe que a mesma condição algébrica aparece independente da com a escolha do multi-índice  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ . O mesmo argumento aplica-se as demais componentes, ou seja, escolhendo

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n_1}(x_1) \theta'_{n_2}(x_2) \theta_{n_3}(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.28})$$

obtém-se a condição algébrica

$$\alpha_2 (\omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_3)^2 - \omega^2) - \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 - \alpha_3 \omega_h(\xi_3)^2 = 0$$

e escolhendo

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2)\theta'_{n3}(x_3) \end{bmatrix} \quad (\text{F.29})$$

obtem-se a condição algébrica

$$\alpha_3 (\omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_2)^2 - \omega^2) - \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 - \alpha_2 \omega_h(\xi_2)^2 = 0$$

Por isso, como descrito acima, a equação (F.24) se reduz a apenas três condições independentes. Consequentemente, chega-se à seguinte condição equivalente para a existência de uma solução não-trivial  $\mathbf{E}_h$ .

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_h(\xi_2)^2 - \omega_h(\xi_3)^2 & \omega_h(\xi_2)^2 & \omega_h(\xi_3)^2 \\ \omega_h(\xi_1)^2 & \omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_3)^2 & \omega_h(\xi_3)^2 \\ \omega_h(\xi_1)^2 & \omega_h(\xi_2)^2 & \omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_2)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante acima obtém-se

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_2)^2 - \omega_h(\xi_3)^2)^2 = 0$$

e, deste modo, para  $\omega$  não-zero, tem-se que

$$\omega^2 = \omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_2)^2 + \omega_h(\xi_3)^2 \quad (\text{F.30})$$

Agora, inserindo a expressão (F.20) para cada componente  $\xi_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , chega-se a uma expressão para a relação de dispersão discreta correspondente aos elementos de Nédélec de ordem zero, que é

$$\omega^2 = \frac{6}{h^2} \left[ \frac{1 - \cos(h\xi_1)}{2 + \cos(h\xi_1)} + \frac{1 - \cos(h\xi_2)}{2 + \cos(h\xi_2)} + \frac{1 - \cos(h\xi_3)}{2 + \cos(h\xi_3)} \right] \quad (\text{F.31})$$

se  $h|\xi_h| \ll 1$ , pela expansão da série de Maclaurin de (F.31), obtém-se

$$\omega^2 = |\xi_h|^2 + \frac{1}{12} h^2 (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + \dots \quad (\text{F.32})$$

o qual exibe a precisão de segunda ordem da relação de dispersão discreta para o espaço de elementos de Nédélec de ordem zero.

# Apêndice G

## Lemas de Correlação

### G.1 Lema de Correlação Parte 1

Antes de iniciar o estudo das propriedades dispersivas da aproximação por elementos finitos nodais, enunciam-se dois lemas, os quais, permitirão, se conveniente, usar soluções da equação escalar homogênea de Helmholtz, observada no capítulo 3, para construir soluções para o sistema de Maxwell de segunda ordem e vice-versa.

**Lema G.1.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio Lipschitz limitado com vetor normal externo  $n$ . Se  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  são soluções para o sistema de primeira ordem de Maxwell harmônico no tempo*

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (\text{G.1})$$

*então as componentes escalares dos campos  $\tilde{\mathbf{E}}$  e  $\tilde{\mathbf{H}}$  são soluções para a equação escalar homogênea de Helmholtz.*

**Demonstração:** Multiplicando a segunda equação do sistema (G.1) por  $i\kappa$ , e em seguida aplicando o operador rotacional na primeira equação do sistema, pode-se eliminar  $\mathbf{H}$  da primeira equação para obter  $\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - \kappa^2 \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ . Note que pela identidade (B.3), tem-se da segunda equação do sistema (G.1) que  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$ . Logo, pela identidade (B.5), tem-se  $\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - \kappa^2 \tilde{\mathbf{E}} = \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \kappa^2 \tilde{\mathbf{E}}$ , como se queria demonstrar. De maneira análoga mostra-se o mesmo para o campo  $\tilde{\mathbf{H}}$ . ■

## G.2 Lema de Correlação Parte 2

**Lema G.2.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio Lipschitz limitado. Sempre que  $\phi = \phi(x_1, x_2) \in H^1(\Omega)$  se apresentar como uma solução para a equação escalar homogênea de Helmholtz, o campo definido por  $\mathbf{E} = \nabla \times \phi$  será uma solução para o sistema de segunda ordem de Maxwell*

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (\text{G.2})$$

**Demonstração:** Considerando as equações (B.8) e (B.9), aplica-se o rotacional de superfície duas vezes sobre o campo  $\mathbf{E} = \nabla \times \phi$  para obter

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \left( -\frac{\partial^3 \phi}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_2^3}, \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1^3} \right)$$

Logo, tem-se que  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{E} = \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} [\nabla^2 \phi + \omega^2 \phi], \frac{\partial}{\partial x_1} [\nabla^2 \phi + \omega^2 \phi] \right)$ . Como se queria demonstrar. ■

Tendo em vista os Lemas G.1.1-G.2.1, se  $\phi \in H^1(\Omega)$  é uma solução analítica para o problema (3.24)-(3.25), então  $\mathbf{E} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)$  é uma solução analítica para o problema (3.67)-(3.68). Além disso, surge a possibilidade de construir um modelo de aproximação por elementos finitos para o sistema de segunda ordem de Maxwell tomando soluções aproximadas para a equação escalar homogênea de Helmholtz apresentadas na seção anterior. Para tanto, se a aproximação for de ordem  $p = 2$ , considera-se  $\phi_h \in \mathcal{X}_{h2}$  como uma solução aproximada para o problema (3.24)-(3.25). Logo, a aproximação por elementos finitos para o problema (3.67)-(3.68) é encontrar  $\mathbf{E}_h \in \mathcal{X}_{h1}$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{w}_h) - \omega^2 (\mathbf{E}_h, \mathbf{w}_h) = 0 \quad (\text{G.3})$$

para todo  $\mathbf{w}_h \in \mathcal{X}_{h1} \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ . Note que o espaço de elementos finitos  $\mathcal{X}_{h2}$  pode ser usado para definir o espaço  $\mathcal{X}_{h1}$ .

Para resolver este problema pode-se definir a aproximação por elementos finitos como  $\mathbf{E}_h = \nabla \times \phi_h$ , onde as componentes deste campo estão definidas por

$$E_h^{(1)} = +\frac{\partial \phi_h}{\partial x_2} \quad (\text{G.4})$$

$$E_h^{(2)} = -\frac{\partial \phi_h}{\partial x_1} \quad (\text{G.5})$$

A seguir, será visto que correlação entre as duas equações, escalar e vetorial, abre a possibilidade de descrever uma expressão para a relação de dispersão discreta para elementos Whitney e Nédélec a partir da Equação de Helmholtz.