

MÁRIO SÉRGIO TEIXEIRA DE FREITAS

**ESTUDO ANALÍTICO DE ILHAS MAGNÉTICAS EM  
UM TOKAMAK COM LIMITADORES ERGÓDICOS  
POR APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MÉDIAS.**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

CURITIBA  
1996

## Agradecimentos

Entre todos que colaboraram parã a execução desta dissertação, agradecemos especialmente ao professor orientador Ricardo Luiz Viana e aos professores Valdir Okano e Iberê Caldas pelos esclarecimentos e discussões sobre o método empregado; à Vera, pela atenciosa e eficiente assessoria administrativa durante todo o curso de mestrado.

Ao Departamento de Física do CEFET-Pr, pelo apoio concedido.

## Resumo

Neste trabalho abordamos o problema geral de descrição da estrutura magnética de um plasma que tem sua simetria destruída por uma pequena perturbação magnetostática. Aplicamos um método de médias desenvolvido em 1992 por Kucinski *et al.* estudando a ação de limitadores magnéticos ergódicos sobre um plasma confinado em um Tokamak. O referido método possibilita a inclusão dos efeitos toroidais na aproximação de ordem zero, mediante uma escolha adequada de coordenadas. Por analogia com o espaço de fases de um pêndulo não-linear, é obtida a largura de ilhas magnéticas primárias em função da corrente nos limitadores.

## Abstract

In this work, we deal with the general problem of describing the magnetic structure of a plasma which symmetry is broken by a small magnetostatic perturbation. An averaging method developed in 1992 by Kucinski *et al* is applied to study the action of ergodic magnetic limiters on a plasma confined in a Tokamak. This method allows the inclusion of toroidal effects in zeroth-order approximation, by means of an adequate choice of coordinates. Primary magnetic islands widths, as a function of the limiter current, are obtained by analogy to the phase space exhibited by a nonlinear pendulum.

## Índice

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO UM : CONFINAMENTO DE PLASMAS EM TOKAMAKS	
1.1. Parâmetros descritivos de um Tokamak.....	5
1.2. Equações da Magnetohidrodinâmica.....	6
1.3. Superfícies magnéticas .....	8
1.4. Fator de segurança e transformada rotacional.....	10
1.5. A equação de Grad-Shafranov.....	11
1.6. O limitador ergódico na forma de anel de corrente.....	13
CAPÍTULO DOIS : RESUMO TEÓRICO DO MÉTODO DAS MÉDIAS	
2.1. Sistema de equações na forma original.....	26
2.2. Sistema de equações modificado.....	29
2.3. Solução aproximada.....	31
2.4. Aplicação em coordenadas toroidais polares helicoidais .....	33
CAPÍTULO TRÊS : MODELO DE EQUILÍBRIO	
3.1. Justificativa para escolha do modelo.....	36
3.2. Solução para seção reta e perfil de corrente arbitrários.....	37
3.3. Aplicação a um plasma com seção aproximadamente circular .....	39
3.4. Particularização para um perfil conhecido da densidade de corrente toroidal.....	39
3.4.a. Caso $0 < \rho_t < a$ .....	40
3.4.b. Caso $a < \rho_t < b$ .....	42

CAPÍTULO QUATRO : CAMPO PERTURBATIVO CRIADO PELOS  
ANÉIS DE CORRENTE

4.1. Influência do campo perturbativo na largura das ilhas magnéticas.....	47
4.2. Expansão em série de Fourier do campo radial.....	48
4.3. Coeficientes na forma alternativa da série de Fourier.....	49
4.4. Campo perturbativo obtido pela equação de Laplace.....	51
4.5. Associação do campo calculado com os coeficientes da expansão alternativa.....	55
4.6. Coeficientes de Fourier para a expressão do campo perturbativo radial a ser aplicado no Método das Médias.....	56

CAPÍTULO CINCO : APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MÉDIAS PARA  
CÁLCULO DA LARGURA DE ILHAS MAGNÉTICAS

5.1. Expansão em série de Taylor do fluxo magnético médio.....	58
5.2. Expressão para a derivada segunda do fluxo de equilíbrio.....	59
5.3. Expressão para o fluxo perturbativo.....	61
5.4. Comparação da função de fluxo média com a hamiltoniana do pêndulo não-linear.....	65
5.5. Expressão para a largura das ilhas magnéticas.....	67

CAPÍTULO SEIS : RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS

6.1. Parâmetros do Tokamak (TBR 1).....	71
6.2. Perfil radial das quantidades de equilíbrio.....	74
6.3. Coordenada radial correspondente aos modos estudados.....	75
6.4. Largura das ilhas magnéticas.....	76
6.5. Aplicabilidade do Método ao cálculo da largura de ilhas satélites.....	78

CONCLUSÕES .....	90
APÊNDICE A : COORDENADAS CURVILÍNEAS	
A.1. Coordenadas covariantes e contravariantes .....	94
A.2. Operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilíneas generalizadas .....	98
APÊNDICE B : SISTEMAS DE COORDENADAS ENVOLVIDOS NESTE TRABALHO	
B.1. Coordenadas retangulares .....	102
B.2. Coordenadas cilíndricas .....	103
B.3. Coordenadas cilíndricas helicoidais .....	107
B.4. Coordenadas toroidais convencionais .....	109
B.5. Coordenadas toroidais polares .....	111
B.6. Coordenadas toroidais polares helicoidais .....	114
APÊNDICE C : EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV EM COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS	
C.1. Função de fluxo e função de corrente .....	128
C.2. Aplicação na equação do equilíbrio de pressões .....	130
Lista dos Símbolos Empregados .....	133
Índice das Ilustrações .....	138
REFERÊNCIAS .....	141

## INTRODUÇÃO

No estudo de plasmas em dispositivos toroidais, enfrenta-se o problema da instabilidade do confinamento magnético. A duração da corrente de plasma é comprometida, entre outros fatores, pela interação entre as partículas carregadas e a parede interna do toro, responsável pelo desprendimento de impurezas que contaminam o plasma. A intensidade desses efeitos será significativamente reduzida se for produzida uma pequena região de campo magnético estocástico na periferia da coluna de plasma, que auxilie no controle do transporte de energia. Isso pode ser obtido pela aplicação de correntes externas ao toro, mediante o uso dos chamados limitadores ergódicos na forma de anéis de corrente [Martin e Taylor 1984]. A perturbação ressonante gera então cadeias de ilhas magnéticas, que interagem entre si ampliando a camada estocástica que circunda as separatrizes, permitindo assim a difusão das linhas de campo magnético através da região desejada. Pretende-se que um reforço nessa difusão uniformize o transporte de calor, bem como o de partículas, na parede interna, reduzindo portanto a contaminação do plasma pelo desprendimento dessas impurezas [Feneberg e Wolf 1981].

Nesse sentido, para o estudo analítico da estrutura magnética de um plasma perturbado, é de importância fundamental o equacionamento das superfícies magnéticas, sobre as quais repousam as linhas de campo e que, caracterizando-se por um valor constante da pressão do plasma, são indispensáveis ao confinamento. A condição básica para a existência dessas superfícies está associada à presença de algum tipo de simetria espacial no campo magnético de confinamento, que possibilite a caracterização de um invariante do problema.

Para plasmas não-perturbados, a condição de confinamento imposta pelo equilíbrio entre as forças de natureza cinética e eletromagnética assegura a disposição dessas superfícies na forma de toros aninhados. As equações básicas que regem esta estrutura são fornecidas

pela Teoria MHD (Magnetohidrodinâmica), que combina as Equações de Maxwell com as equações da Mecânica dos Fluidos. Na ausência de perturbação, a simetria possibilita a obtenção de um sistema de equações diferenciais, cuja solução de equilíbrio, na forma de um fluxo magnético constante em termos das coordenadas, é o invariante que descreve essas superfícies magnéticas .

Se for imposta ao equilíbrio uma pequena perturbação, por exemplo, o campo gerado pelos anéis de corrente, perde-se a simetria e, conseqüentemente, o invariante exato, mas a topologia não chega a ser totalmente danificada. Alguns toros podem ser destruídos no caso de ressonância, com a criação de ilhas em sua vizinhança, sendo os outros toros ligeiramente deformados. Isso permite o uso de métodos perturbativos para a obtenção de uma função de fluxo aproximada, que será o novo invariante, para descrever satisfatoriamente as superfícies magnéticas do plasma perturbado. Para tanto, o sistema (dito quase-integrável) deve sofrer certas modificações algébricas que o tornem integrável. É nos critérios seguidos para essa transformação no sistema que residem as principais diferenças entre os métodos.

O Método das Médias [Bogolyubov e Mitropolskii 1961] é um método perturbativo aplicável a sistemas dinâmicos quase-integráveis onde o movimento exiba periodicidade segundo duas escalas diferentes, uma dita "variável rápida" e a outra "variável lenta". Efetuando uma média do campo perturbativo sobre a escala rápida e tomando a evolução desse valor médio ao longo da escala lenta, forja-se um invariante aproximado, integrabilizando assim o sistema. Na aplicação deste método realizada por [Kucinski et al. 1992] a um plasma confinado em Tokamak com perturbação não-simétrica, a periodicidade é estudada na acepção espacial; redefine-se convenientemente as coordenadas para obter o invariante médio, de forma análoga à exposta por [Morozov e Solov'ev 1966] . O critério fundamental a ser seguido é a exigência da inclusão dos efeitos de ressonância na solução de primeira ordem. A função de fluxo obtida faz o papel de um invariante aproximado

que, equacionando as "superfícies magnéticas médias", substitui com boa aproximação a descrição hamiltoniana das linhas de campo do plasma perturbado, cuja obtenção seria de mais difícil acesso [Lichtenberg e Lieberman 1983].

As principais abordagens de que se dispõe como referência iniciam com o modelo teórico proposto em 1984 por Martin e Taylor para o limitador ergódico [Martin e Taylor 1984]. Considerando negligenciáveis os efeitos toroidais para o Tokamak estudado, este é suposto como um tubo cilíndrico com um limitador magnético composto por um único anel, proporcionando um efeito espacialmente periódico. Como a ação do limitador é efetiva unicamente na região interna próxima à parede do tubo, foi utilizada a chamada "aproximação de borda", na qual adota-se um sistema de coordenadas retangulares válido apenas na referida região. É apresentada então uma solução para as componentes do campo magnético gerado pela configuração de corrente. Em 1989, Camargo abordou analiticamente o problema de um plasma toroidal perturbado por hélices ressonantes, empregando para a descrição das ilhas um invariante médio, obtido pelo Método de Cary [Camargo 1989]. Em 1991, partindo do modelo de Martin e Taylor, Viana e Caldas reobtiveram o campo magnético gerado por uma grelha infinita de condutores de corrente, solucionando o problema de valores de contorno em coordenadas retangulares, por abordagem da natureza hamiltoniana das equações das linhas de campo magnético [Viana e Caldas 1991]. No ano seguinte, Kucinski *et al.* desenvolveram um método de médias para o modelo toroidal, aplicando-o na perturbação criada por hélices ressonantes [Kucinski et al. 1992]. O mesmo método foi empregado por Monteiro na análise da estrutura magnética de um plasma cilíndrico em *pinch* de campo reverso (RFP), perturbado por dois modos helicoidais ressonantes [Monteiro 1995]. Em 1994 Pereira obteve a expressão analítica para largura de ilhas magnéticas primárias, criadas pelo anel de corrente num modelo cilíndrico, por aplicação do método de Matsuda e Yoshikawa, verificando os resultados com os obtidos numericamente por mapas de Poincaré [Pereira 1994]. Em 1995 Vasconcelos utilizou a

formulação hamiltoniana para linhas de campo e obteve, simulando a ação do limitador por meio de uma perturbação impulsiva, um outro tratamento analítico para o problema, também num modelo cilíndrico; foram focalizados, em especial, critérios para indicar a formação de estocasticidade na região periférica da coluna de plasma, bem como a expressão para a largura das ilhas magnéticas [Vasconcelos 1995].

Reconhecendo, no campo perturbativo gerado pelos anéis de corrente, conforme apresentado por Pereira [Pereira 1994] para o modelo do cilindro periódico, os requisitos para a aplicação do Método das Médias, este trabalho mostra a obtenção analítica da função de fluxo e a sua interpretação em termos de posicionamento e dimensões das ilhas magnéticas primárias (ilhas satélites também podem ser estudadas pela aplicação deste método de forma totalmente análoga, partindo de uma redefinição adequada das coordenadas; neste trabalho, como primeira etapa, são analisadas apenas ilhas primárias, em aproximação de primeira ordem). O objetivo para um trabalho futuro é o confronto dos resultados obtidos nesta etapa com uma simulação numérica mediante o traçado de mapas de Poincaré; na sequência, pode-se estudar a formação de estocasticidade por inclusão da análise das ilhas satélites e, se necessário, estender a aproximação até segunda ordem, ainda com a possibilidade de aprimorar o modelo para o limitador.

O primeiro capítulo aborda noções preliminares sobre confinamento magnético de plasmas em Tokamaks; o capítulo dois consiste num resumo teórico do Método das Médias; o capítulo três e o capítulo quatro descrevem, respectivamente, o modelo de equilíbrio utilizado e o campo perturbativo provocado pelo limitador ergódico; o capítulo cinco expõe o objeto principal deste trabalho, que é a aplicação do método (cap. 2) ao modelo (caps. 3 e 4). Os resultados obtidos são apresentados no capítulo seis; para os valores numéricos, foram tomados alguns parâmetros do Tokamak TBR-1, em operação no Instituto de Física da USP. Ao final, é apresentada uma conclusão, seguida de três apêndices, que focalizam esclarecimentos sobre os cálculos desenvolvidos.

## CAPÍTULO UM

### CONFINAMENTO DE PLASMAS EM TOKAMAKS

Neste capítulo, são expostas algumas noções preliminares: descrição de um Tokamak, equações MHD, superfícies magnéticas, fator de segurança, equação de Grad-Shafranov e, finalmente, descrição do limitador ergódico na forma de um anel de corrente.

#### 1.1. Parâmetros descritivos de um Tokamak

O dispositivo para confinamento de plasmas conhecido como Tokamak consiste num recipiente metálico em forma de toróide que, mediante a aplicação de campos magnéticos apropriados, mantém o plasma afastado das suas paredes internas, restringindo-o a uma "coluna de plasma". A estabilidade desse confinamento é um pouco maior nesse sistema, quando comparada àquela obtida em dispositivos alternativos [Furth 1975] ; daí o atual interesse no estudo do Tokamak com o propósito de construir reatores a fusão nuclear. Para descrever com objetividade a geometria de um Tokamak, são empregados geralmente os termos toroidal, poloidal e radial, que se referem às direções indicadas na figura (1.1, pag.15).

Um parâmetro importante para caracterização de um Tokamak é a chamada razão de aspecto  $A$ , definida por

$$A \equiv \frac{R_0}{b}, \quad [1.1]$$

onde  $R_0$  é o raio maior e  $b$  o raio menor, conforme indicado na figura (1.2, pag.16).

A coluna de plasma tem seção reta suposta aproximadamente circular e com raio médio  $a$ , conforme indicado na figura (1.3, pag.17).

O campo magnético de confinamento é produzido pela superposição de suas componentes toroidal e poloidal, geradas independentemente uma da outra: são instaladas

espiras de corrente que envolvem externamente o Tokamak na direção poloidal, e que são responsáveis pelo chamado campo toroidal  $\vec{B}_\varphi$ , onde o índice  $\varphi$  é a variável angular associada à direção toroidal; um transformador elétrico, que induz uma variação no fluxo magnético, cria, segundo a direção toroidal, a chamada corrente de plasma  $I_p$ , que por sua vez gera um campo poloidal  $\vec{B}_\theta$ , onde o índice  $\theta$  é a variável angular associada à direção poloidal; a intensidade desse campo poloidal é tipicamente menor que a do campo toroidal. A soma vetorial desses dois campos resulta no chamado campo de equilíbrio  $\vec{B} = \vec{B}_\theta + \vec{B}_\varphi$ , com linhas de campo magnético helicoidais, conforme indicado na figura (1.4, pag.18), e que é o principal responsável pelo confinamento do plasma. Esse campo de equilíbrio, portanto, via de regra tem nula sua componente  $\vec{B}_\rho$ , onde o índice  $\rho$  está associado à direção radial; é de uso, quando existe uma pequena componente radial, incorporá-la ao campo poloidal; nessas condições, o campo total de equilíbrio é representado na forma  $\vec{B} = \vec{B}_P + \vec{B}_\varphi$ , sendo  $\vec{B}_P = \vec{B}_\theta + \vec{B}_\rho$ .

## 1.2. Equações da Magnetohidrodinâmica

A descrição quantitativa de um plasma magneticamente confinado é fundamentada, para o caso de equilíbrio, no grupo de equações chamado de equações MHD (magnetohidrodinâmicas), onde são combinadas as equações de Maxwell com as equações da Mecânica dos Fluidos. O plasma é considerado um fluido condutor, sem cargas elétricas isoladas. Nessa abordagem tem-se, constituindo o grupo de equações MHD (é utilizado aqui como sistema de unidades o SI, ou MKSA) [Wesson 1987] :

a) Conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad [1.2]$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade macroscópica do plasma e  $\rho$  a sua densidade de massa;

b) Equação do movimento

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}, \quad [1.3]$$

onde  $\vec{j}$  é a densidade de corrente,  $\vec{B}$  a indução magnética e  $p$  a pressão cinética exercida pelo plasma, e ainda  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ ;

c) Lei de Ohm generalizada

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}, \quad [1.4]$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\eta$  a resistividade do plasma, suposta nula na teoria MHD ideal;

d) Lei de Gauss para o magnetismo

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad [1.5]$$

e) Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad [1.6]$$

f) Lei de Gauss para o campo elétrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad [1.7]$$

onde a distribuição macroscópica de carga elétrica é considerada nula devido à quase-neutralidade local do plasma;

g) Lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad [1.8]$$

na qual foi negligenciado o termo referente à corrente de deslocamento, visto que na teoria MHD são estudados fenômenos a baixas frequências, se comparadas à girofrequência ou à frequência de plasma.

Nesse contexto, tomando o plasma em equilíbrio, ou seja, tendo anuladas todas as derivadas temporais, e supondo a velocidade do fluido como igual a zero, obtém-se o chamado equilíbrio MHD estático, descrito por:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad [1.9]$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} , \quad [1.10]$$

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} . \quad [1.11]$$

Estas três últimas equações servirão de base para o estudo das chamadas superfícies magnéticas , essenciais para a descrição analítica do comportamento do plasma.

### 1.3. Superfícies magnéticas

Partindo da [1.11], pode-se extrair uma importante propriedade das linhas de campo magnético ; multiplicando-a escalarmente por  $\vec{B}$  tem-se

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 , \quad [1.12]$$

ou seja, as linhas de campo magnético repousam sobre superfícies de pressão constante, conforme a figura (1.5,pag. 19). O mesmo pode ser afirmado sobre as linhas de corrente, multiplicando escalarmente a mesma expressão por  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 . \quad [1.13]$$

Tais superfícies de pressão constante podem ser caracterizadas adequadamente por uma variável que seja função da pressão, por exemplo o fluxo magnético  $\Psi$ . Na configuração de equilíbrio, essas superfícies  $\Psi = \text{constante}$  estão topologicamente dispostas na forma de toróides aninhados em torno de um eixo magnético , e são conhecidas como superfícies magnéticas . O significado preciso de  $\Psi$  depende do tipo de seção transversal tomada como referência; em grande parte dos casos , é adotada a superfície caracterizada por um valor constante da variável poloidal, conforme indicado na figura (1.6, pag.20); a grandeza  $\Psi$  assim definida é chamada "fluxo magnético de fita poloidal" [D'haeseleer et. al.

1991]. Neste trabalho, a escolha do sistema de coordenadas, associada à simetria helicoidal considerada, orienta para uma redefinição dessa superfície, tomada como "fita helicoidal" e caracterizada por um valor constante da variável helicoidal  $u = m\theta - n\varphi$  (com  $m$  e  $n$  inteiros, conforme esclarecido no apêndice B), como ilustra a figura (1.7, pag.21).

Uma característica fundamental, que distingue essas superfícies em duas categorias, se refere ao conjunto de linhas de campo magnético helicoidais que existem sobre cada uma delas; esses dois grupos são as ditas superfícies magnéticas racionais e irracionais.

Uma superfície magnética é racional se uma linha de campo que parte de um dado ponto  $P$  retorna a este ponto após percorrer um número finito de revoluções nas direções poloidal e toroidal, fechando-se sobre si mesma numa trajetória periódica, e portanto interceptando o plano poloidal que contém o ponto  $P$  em um número finito de pontos, conforme esclarecido na figura (1.8.a, pag.22).

A superfície é irracional se a linha de campo parte de um ponto  $P$  e só retorna a ele depois de percorrer infinitas revoluções poloidais e toroidais, ou seja, depois de ter preenchido densamente toda a superfície magnética, conforme esclarecido na figura (1.8.b, pag.22).

Outro parâmetro importante para caracterização de um plasma magneticamente confinado é a razão  $\beta$  entre a pressão cinética e a pressão magnética [Caldas e Vannucci 1985] :

$$\beta \equiv \frac{p}{\frac{B^2}{2\mu_0}} . \quad [1.14]$$

Analogamente, tomando a pressão magnética provocada pelo campo poloidal, pode ser definido o "beta poloidal":

$$\beta_P \equiv \frac{p}{\frac{B_P^2}{2\mu_0}} , \quad [1.15]$$

o qual tem especial interesse neste trabalho, por seu valor estar incluído no cálculo do coeficiente de assimetria do campo poloidal  $\Lambda$  (conforme exposto no capítulo três).

#### 1.4. Fator de segurança e transformada rotacional

Conforme exposto anteriormente, as linhas de campo que repousam sobre uma dada superfície magnética têm geometria helicoidal. O passo dessas hélices pode ser quantificado por um parâmetro conhecido como fator de segurança e definido por

$$q(\rho, \theta) = \frac{d\varphi}{d\theta}, \quad [1.16]$$

ou seja, representa a variação no ângulo toroidal, em relação ao ângulo poloidal, ao longo da linha de campo; quanto maior for o fator de segurança, menos pronunciado será o "enrolamento" das linhas de campo magnético.

Numa seção poloidal  $\varphi = \text{constante}$ , o perfil radial do fator de segurança costuma ser crescente do centro até a borda. Para valores pequenos de  $q$  ( $q < 1$ ), o plasma fica sujeito a uma instabilidade, dita de disruptura interna, critério este conhecido como limite de Kruskal-Shafranov de instabilidade [Manheimer e Lashmore-Davies 1989], o que justifica o nome "fator de segurança".

A variação de  $q$  com  $\theta$  se deve à geometria toroidal; próximo ao equador externo do Tokamak, o deslocamento toroidal é máximo, conduzindo portanto a um valor máximo de  $q$  (verifica-se o oposto junto ao equador interno).

É possível definir um fator de segurança médio  $\bar{q}$  efetuando a média do valor de  $q$  ao longo de uma revolução poloidal completa. A diferença  $q(\rho, \theta) - \bar{q}(\rho)$  recebe o nome de parte oscilante do fator de segurança, tendo seu valor máximo denotado aqui por  $\tilde{q}$ .

Para salientar a distinção entre  $\bar{q}(\rho)$  e  $q(\rho, \theta)$ , denomina-se este último de fator de segurança local. O fator de segurança médio  $\bar{q}$ , para as superfícies magnéticas racionais, é identificado com a razão  $\frac{m}{n}$ , sendo  $m$  o número de revoluções toroidais correspondente às  $n$  revoluções poloidais.

Outra forma de quantificar o passo das linhas de campo magnético é acompanhar o ângulo poloidal descrito ao longo de uma revolução toroidal completa; essa razão, levada

ao limite  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  , fornece a grandeza chamada transformada rotacional  $\iota$  [Caldas e Vannucci 1985]

$$\iota(\rho, \theta) = 2\pi \frac{d\theta}{d\varphi} . \quad [1.17]$$

Por comparação da [1.17] com a [1.16] , observa-se que a transformada rotacional se relaciona com o fator de segurança por

$$\iota = \frac{2\pi}{q} . \quad [1.18]$$

Como o valor de  $\iota$  costuma ser diferente para cada superfície magnética , pode ser definido um cisalhamento magnético , que corresponde à primeira derivada radial da transformada rotacional [D'haeseleer et al. 1991] .

### 1.5. A equação de Grad-Shafranov

Tomando como referência um sistema de coordenadas genérico  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ , um plasma que exiba alguma forma de simetria (axial, translacional ou helicoidal) tem seu campo magnético de equilíbrio descrito por uma função de fluxo  $\Psi = \Psi(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ , a qual deve satisfazer à equação diferencial chamada "equação de Grad-Shafranov", aqui exposta, conforme o apêndice C, em coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi^1} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left( g^{11} \frac{\partial}{\partial \chi^1} \Psi + g^{12} \frac{\partial}{\partial \chi^2} \Psi \right) + \frac{\partial}{\partial \chi^2} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left( g^{12} \frac{\partial}{\partial \chi^1} \Psi + g^{22} \frac{\partial}{\partial \chi^2} \Psi \right) \right] = \\ -\mu_0 g_{33} \frac{dp}{d\Psi} - \mu_0^2 I \frac{dI}{d\Psi} + \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi^1} \left( \frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial \chi^2} \left( \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right] , \end{aligned} \quad [1.19]$$

onde  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  e  $g$  são, respectivamente, as componentes covariantes, contravariantes e o determinante do tensor métrico do sistema de coordenadas curvilíneas  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ ; uma explanação pormenorizada desse formalismo encontra-se no apêndice A;  $I$  é o fluxo de densidade de corrente, cuja expressão  $I = I(\Psi)$  deve ser previamente conhecida, assim como a da pressão cinética  $p = p(\Psi)$ , para que se possa proceder a integração da equação

[1.19], obtendo a função  $\Psi = \Psi(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ , a partir da qual se pode extrair as componentes do campo magnético de equilíbrio, assim como outras grandezas de interesse como o fator de segurança, em função das coordenadas utilizadas.

A [1.19] pode ser aplicada a qualquer sistema de coordenadas; por exemplo, em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z')$  (segunda modalidade, conforme o apêndice B), ao tomar-se a métrica e as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico (obtidas por [B.11], [B.10] e [B.14]), a [1.19] assume a forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -\mu_0 \rho^2 p'(\Psi) - \mu_0^2 I(\Psi) I'(\Psi), \quad [1.20]$$

onde a linha nas funções  $I$  e  $p$  indica a primeira derivada em relação a  $\Psi$ .

Pode-se integrar a [1.20] desde que se disponha de uma distribuição radial da densidade de corrente toroidal conhecida. A solução  $\Psi = \Psi(\rho, \theta)$  descreve as superfícies magnéticas do plasma, suposto retificado como um cilindro de comprimento  $2\pi R_0$ . No caso de se considerar a seção reta da coluna de plasma como sendo aproximadamente circular, o fluxo perde a dependência em  $\theta$  e fica-se com  $\Psi = \Psi(\rho)$ .

Em 1960, Shafranov obteve uma solução com uso de coordenadas toroidais convencionais  $(\xi, \omega, \varphi)$  (este sistema é apresentado no apêndice B), admitindo perfis constantes para a primeira derivada da pressão cinética e para a segunda derivada do fluxo de corrente, e impondo como condições de contorno a anulação do campo e do fluxo magnético na superfície do plasma [Shafranov 1960]. Conforme será exposto no capítulo três, esta solução não se mostrará adequada para aplicação aos parâmetros do TBR-1, o que pode ser constatado por uma acentuada discrepância no perfil  $q(\rho)$  do fator de segurança fornecido, que mostra pouca variação radial em relação aos resultados experimentais conhecidos. Será portanto adotada, neste trabalho, outra solução, proposta por Kucinski *et al.* [Kucinski et al. 1990], que se adapta melhor ao Tokamak aqui estudado. Serão empregadas coordenadas toroidais polares  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$  (conforme o apêndice B); uma expansão do fluxo  $\Psi$

mostra que sua aproximação de ordem zero  $\Psi_0$  pode ser identificada com a solução da equação de Grad-Shafranov para um plasma suposto cilíndrico (desde que respeitadas as diferenças entre as coordenadas). O desenvolvimento pormenorizado do equacionamento da estrutura de equilíbrio está exposto nos capítulos três e cinco.

## 1.6. O limitador ergódico na forma de anel de corrente

A duração da corrente de plasma é comprometida por diversos fatores, sendo um dos mais nocivos a contaminação do plasma por impurezas liberadas pela parede interna do toro, que deterioram a qualidade do confinamento. A instalação dos limitadores ergódicos visa, conforme foi comentado na introdução desse trabalho, uniformizar o transporte de energia, minimizando o processo e conseqüentemente aumentando a duração da corrente de plasma.

As figuras (1.9 e 1.10, pags.23 e 24), esquematizam, respectivamente, a geometria simplificada dos anéis de corrente e a sua distribuição ao longo do percurso toroidal adotada neste trabalho; cada anel é constituído por  $L$  segmentos condutores simetricamente orientados na direção toroidal, ao longo de um comprimento  $g$ , de forma que fios adjacentes conduzam correntes elétricas em sentidos contrários, com intensidade  $I$ . (São negligenciados os efeitos de borda provocados pelos segmentos orientados na direção poloidal).

O efeito da corrente  $I$  na estrutura magnética do plasma é o de uma pequena perturbação, que destrói a superfície racional dita ressonante, criando em seu lugar cadeias de ilhas magnéticas, conforme esquematizado na figura (1.11, pag.25); o aumento dessa corrente implica numa configuração estocástica das linhas de campo em torno dessa região.

Conforme será exposto nos capítulos três e quatro, as grandezas físicas aqui estudadas são, em sua maioria, definidas em termos do perfil radial; ou seja, para o cálculo dos valores de interesse, é necessário localizar radialmente a superfície racional ressonante. Conforme será exposto no capítulo seis, a escolha dos modos de perturbação é feita tendo

em vista a produção de estocasticidade na periferia do plasma; para tanto, escolhe-se um número  $L$  de fios para o anel, que fixa o numerador  $m = \frac{L}{2}$  do fator de segurança  $\bar{q} = \frac{m}{n}$  das superfícies racionais a serem perturbadas; cada valor obtido para  $\bar{q}$ , levado na expressão do perfil radial do fator de segurança, fornece a coordenada radial ("raio da ressonância") por resolução de uma equação por tentativas. O capítulo seis inclui também um esclarecimento sobre a distinção entre os parâmetros utilizados neste trabalho e aqueles correspondentes ao limitador ergódico construído para o Tokamak TBR-1, conforme [Araújo 1993].

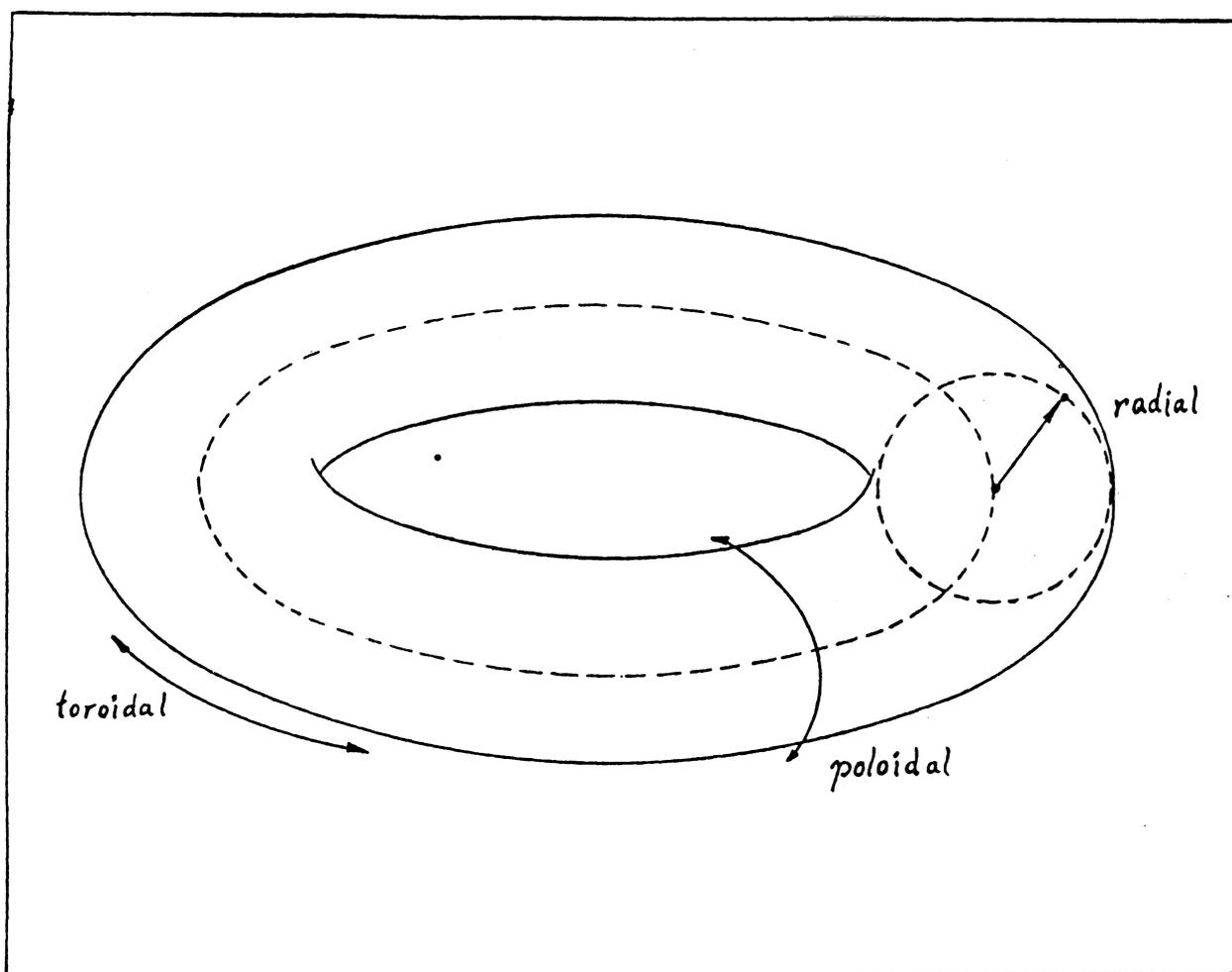


Figura 1.1

Direções de Referência em um Toro

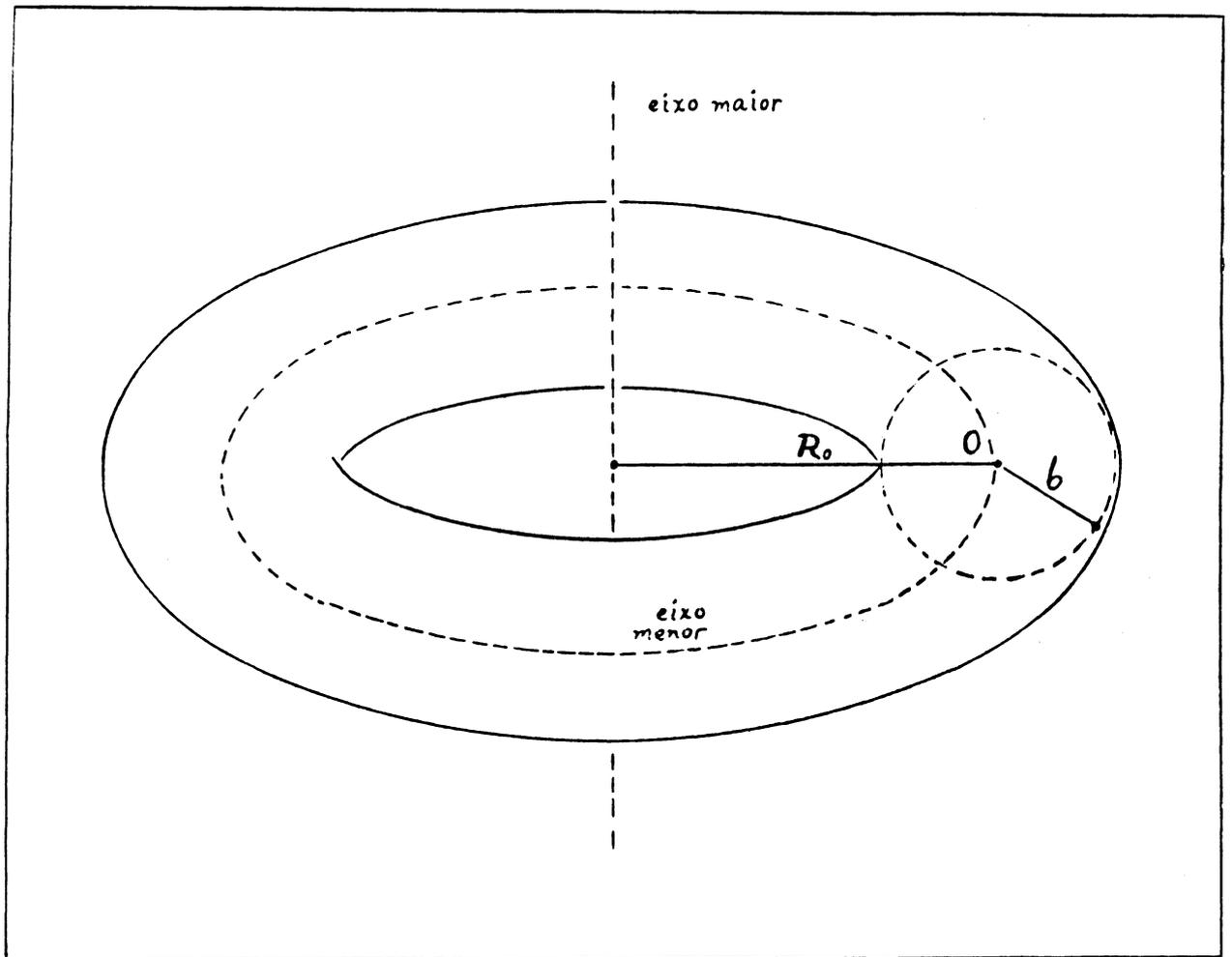


Figura 1.2

Parâmetros Geométricos Básicos de um Toro

$R_0 = \text{raio maior}$

$b = \text{raio menor}$

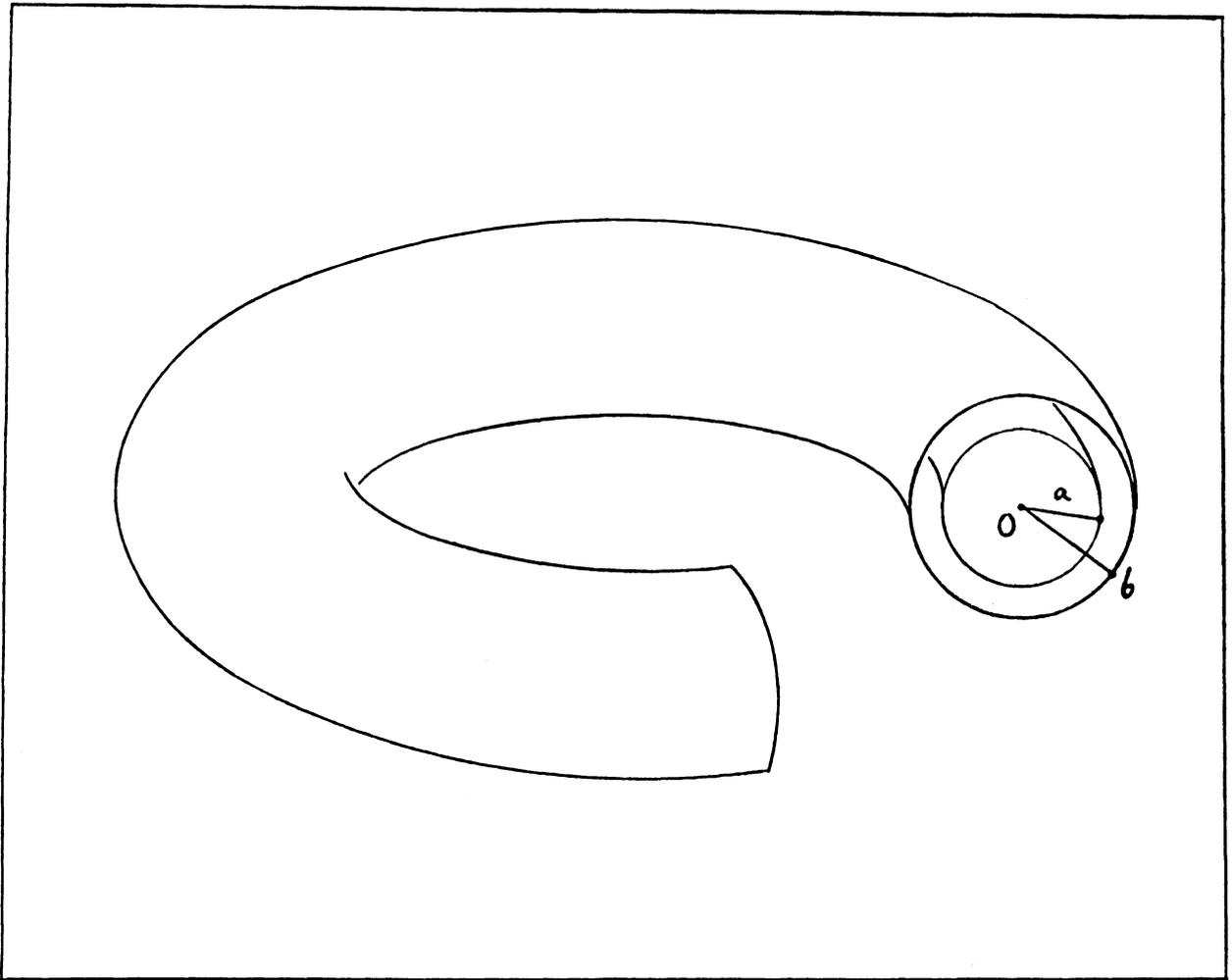


Figura 1.3

Geometria da Coluna de Plasma

$a = \text{raio do plasma}$

$b = \text{raio menor do toro}$

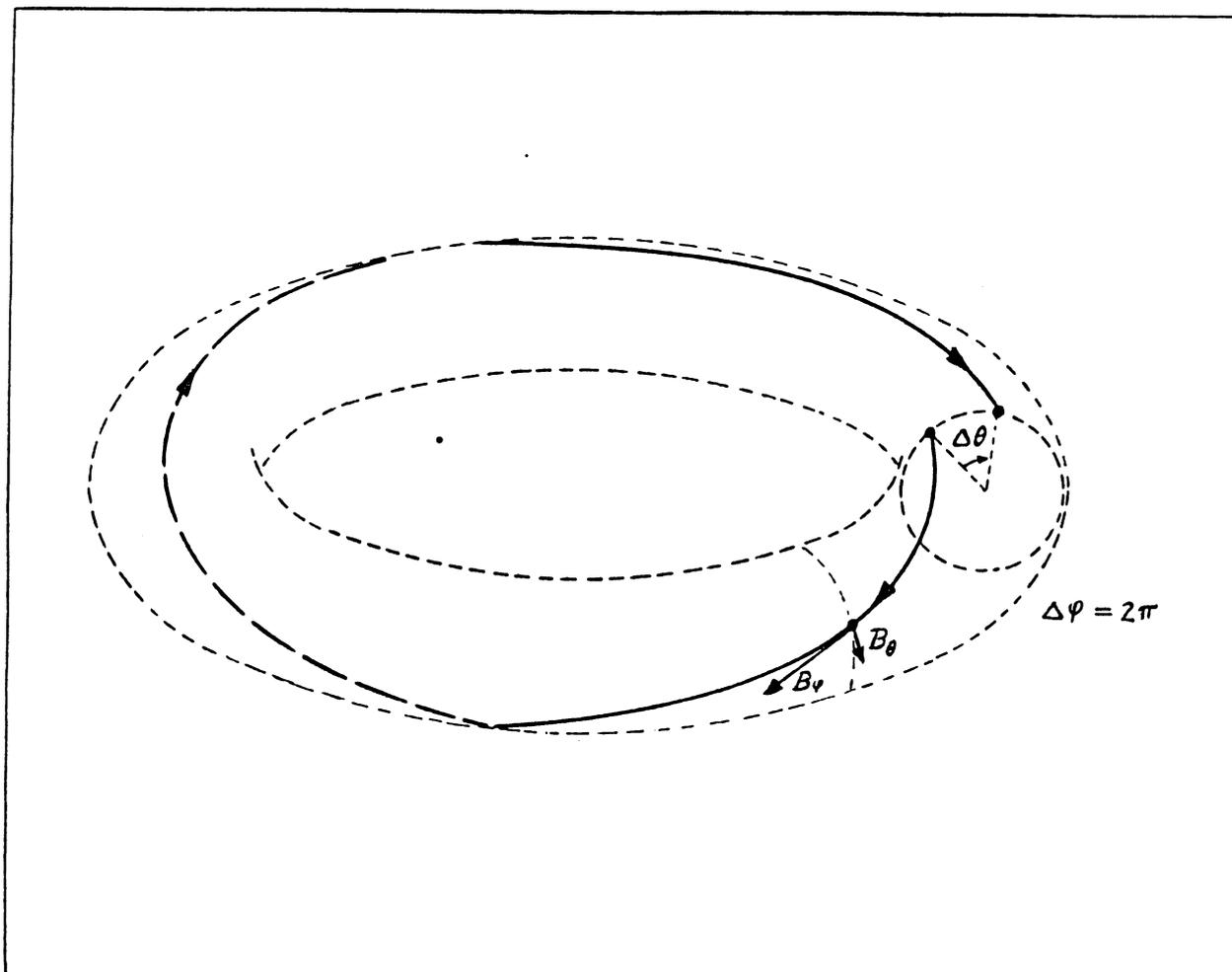


Figura 1.4

Linha de Campo Magnético

A configuração helicoidal de  $\vec{B}$  se deve à soma dos campos poloidal  $\vec{B}_\theta$  e toroidal  $\vec{B}_\varphi$ .

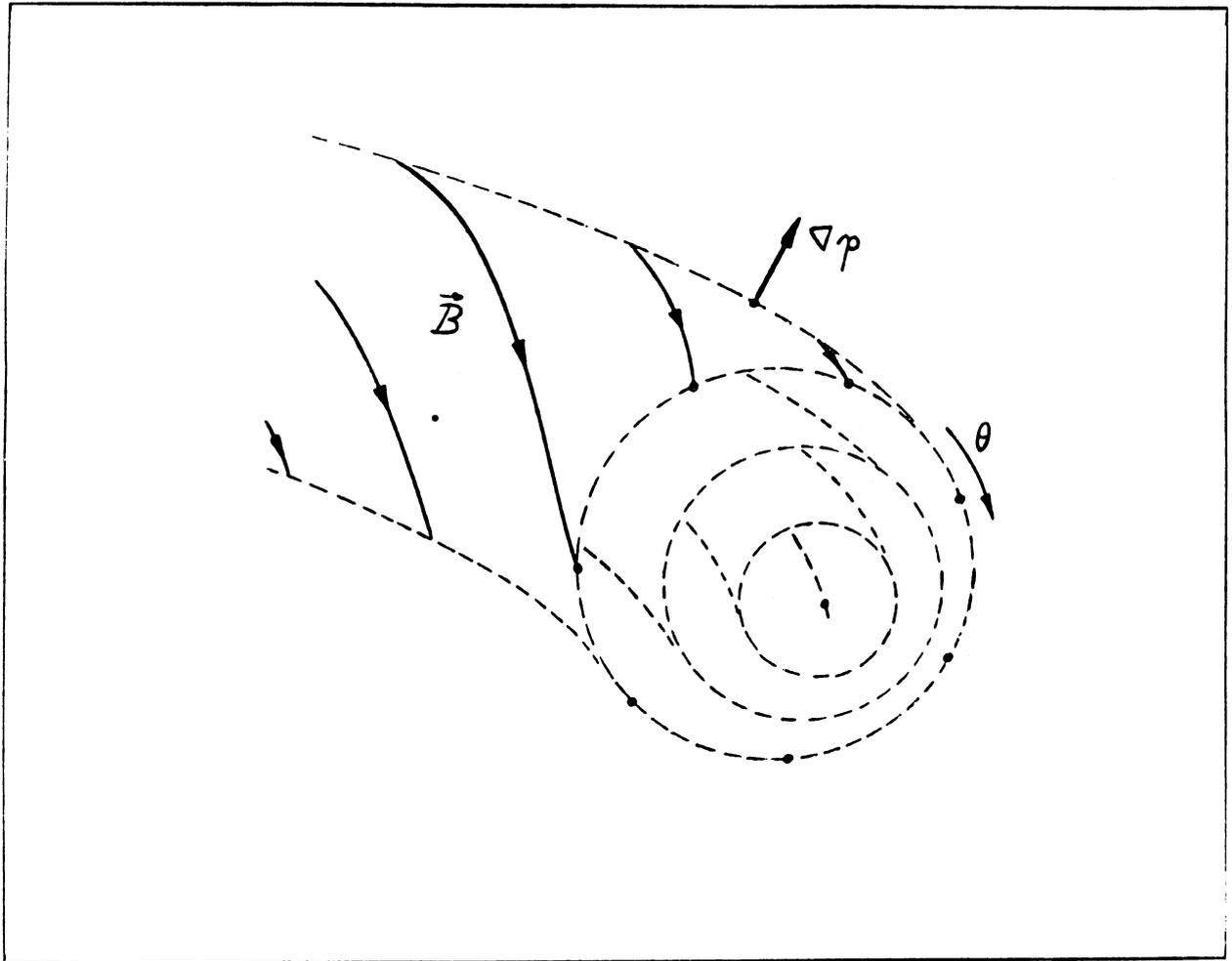


Figura 1.5

Superfícies Magnéticas na  
Estrutura de Equilíbrio

(dispostas como toros aninhados)

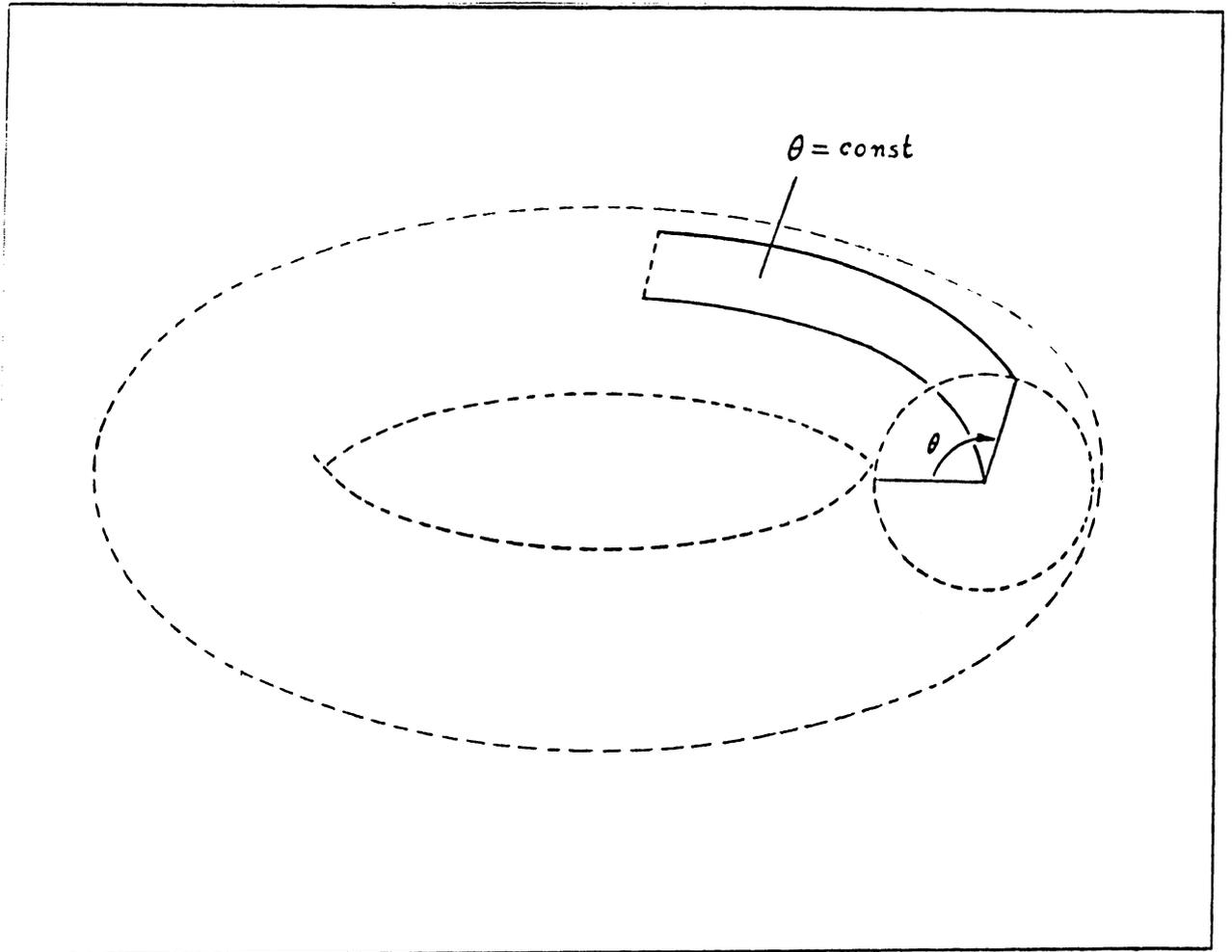


Figura 1.6

Superfície de "Fita Poloidal"

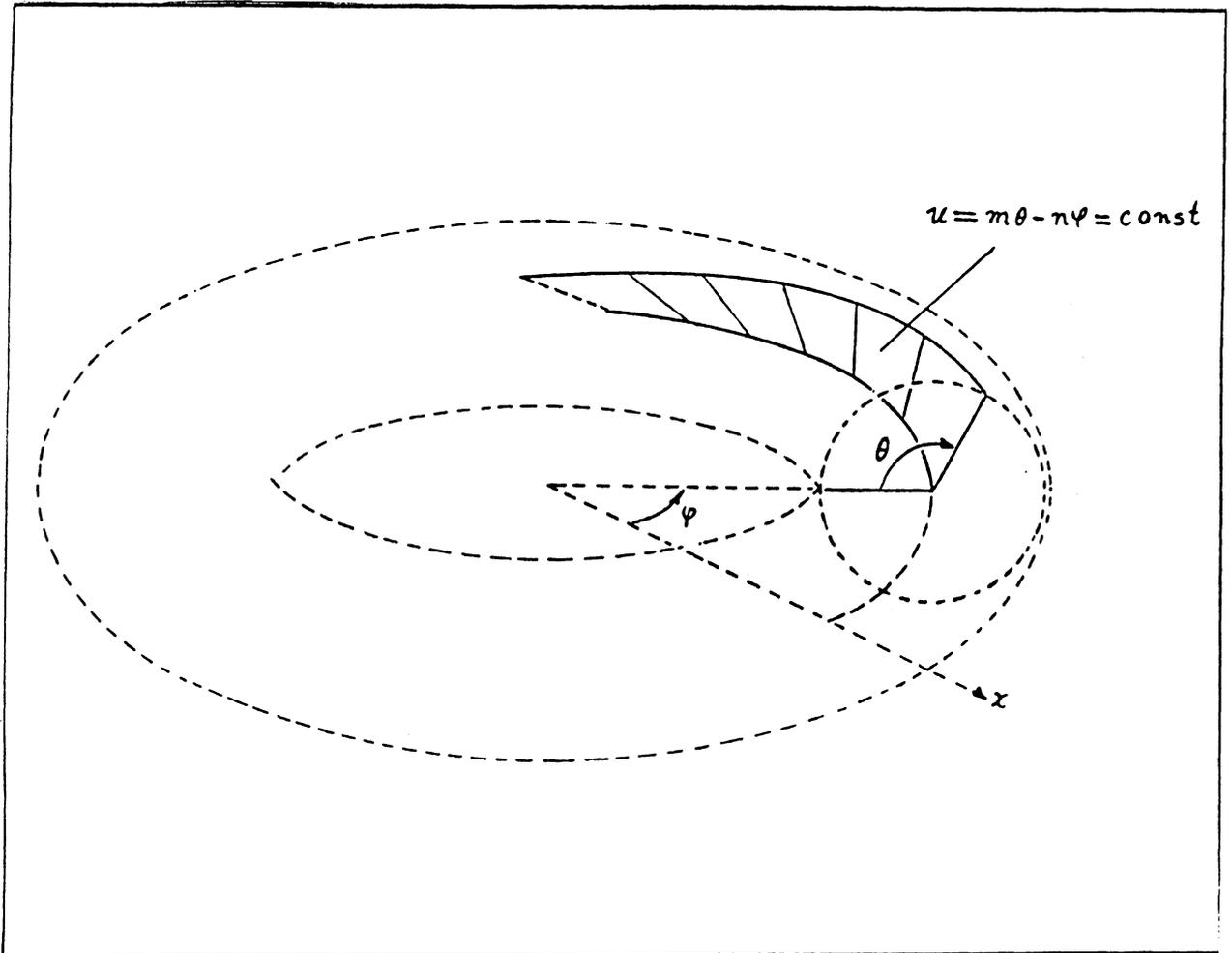


Figura 1.7

Superfície de "Fita Helicoidal"

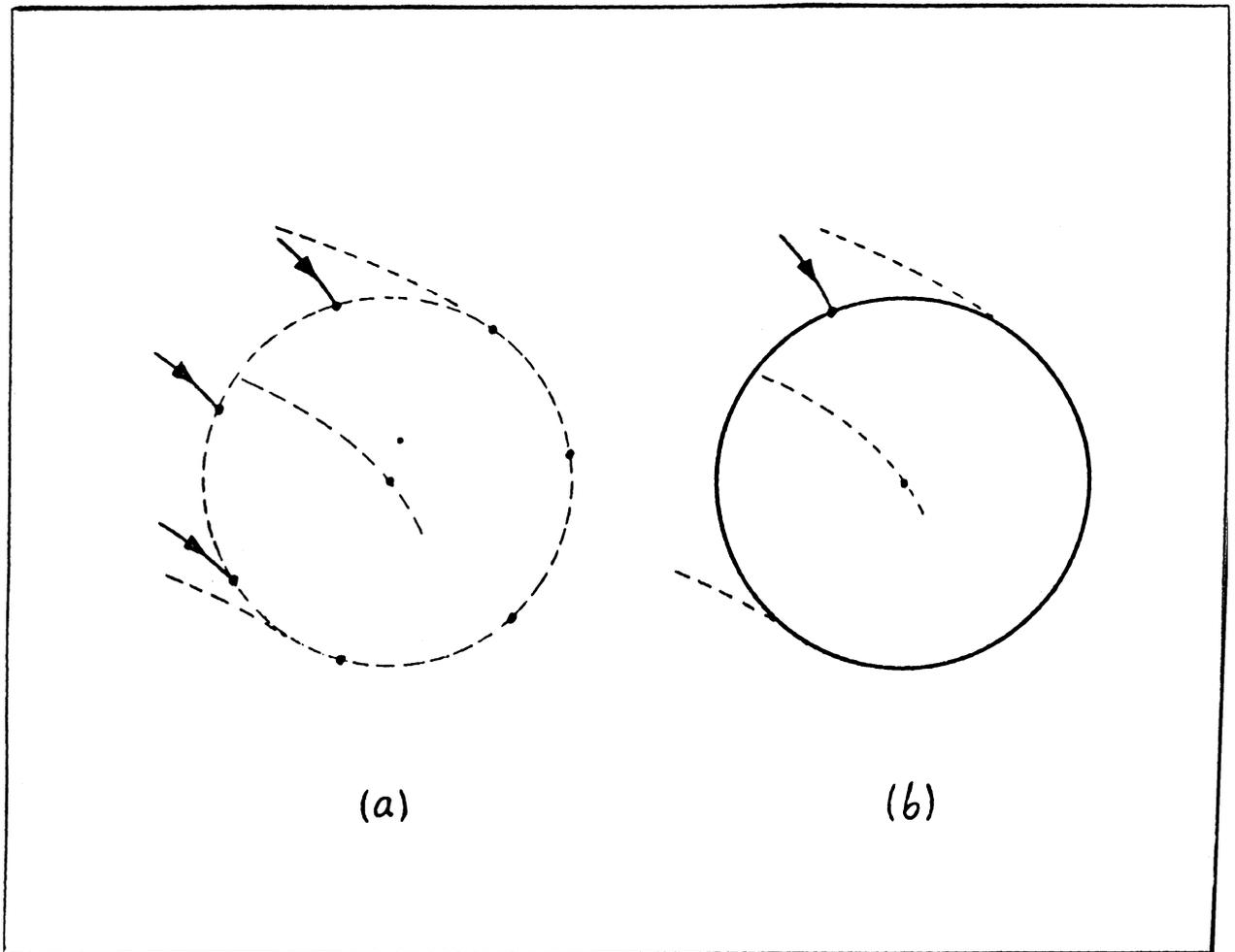


Figura 1.8  
Superfície Magnética Racional (a)  
e Irracional (b)

(a) Uma única linha de campo se fecha sobre si mesma após descrever  $m$  trânsitos toroidais (e  $n$  poloidais), interceptando uma seção  $\varphi = \text{const}$  em um número finito  $m$  de pontos.

(b) Uma única linha de campo descreve infinitos trânsitos toroidais, de forma que intercepta a seção  $\varphi = \text{const}$  preenchendo-a densamente.

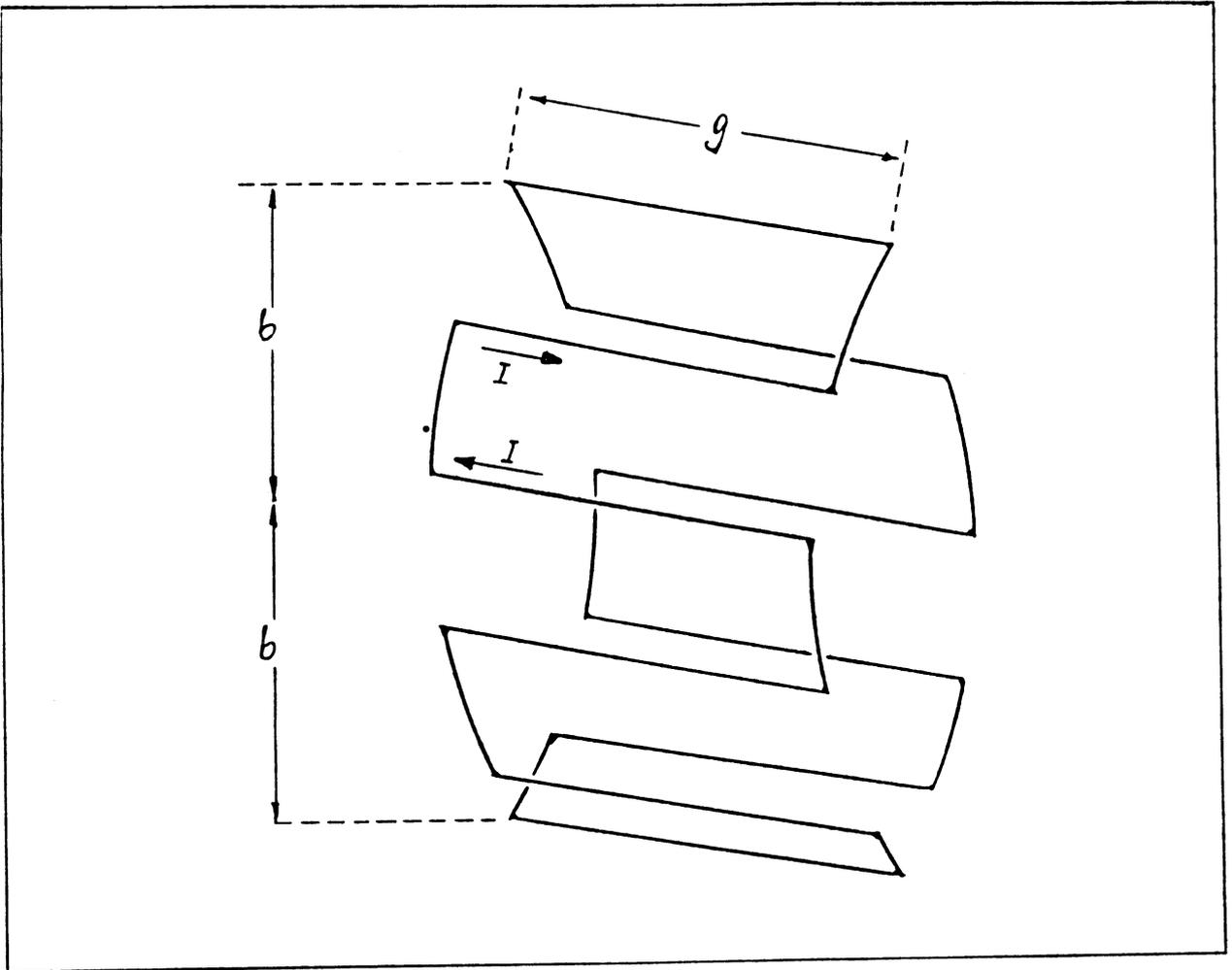


Figura 1.9

Esquema Geométrico do  
Anel de Corrente

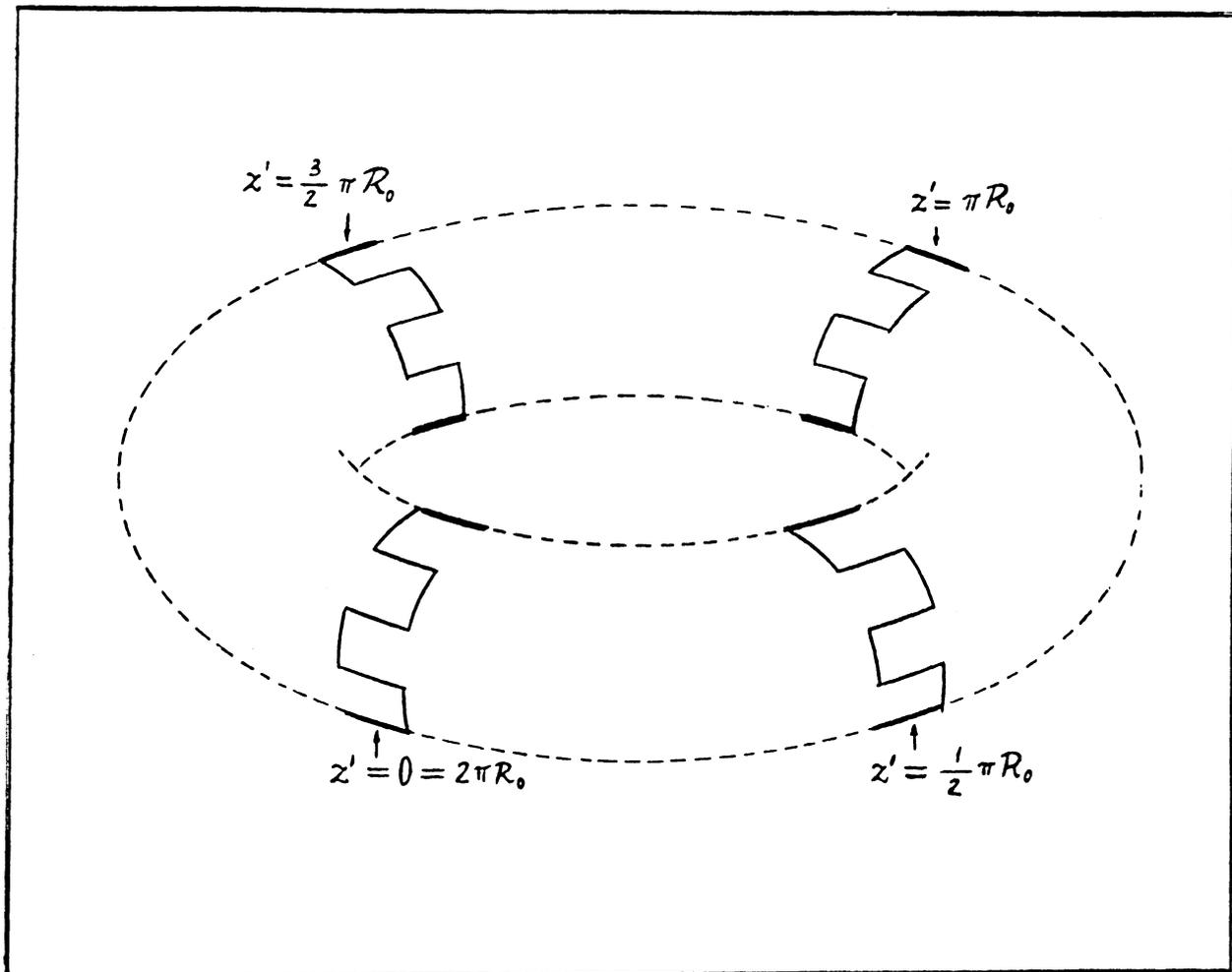


Figura 1.10

Distribuição dos Limitadores no  
Percorso Toroidal

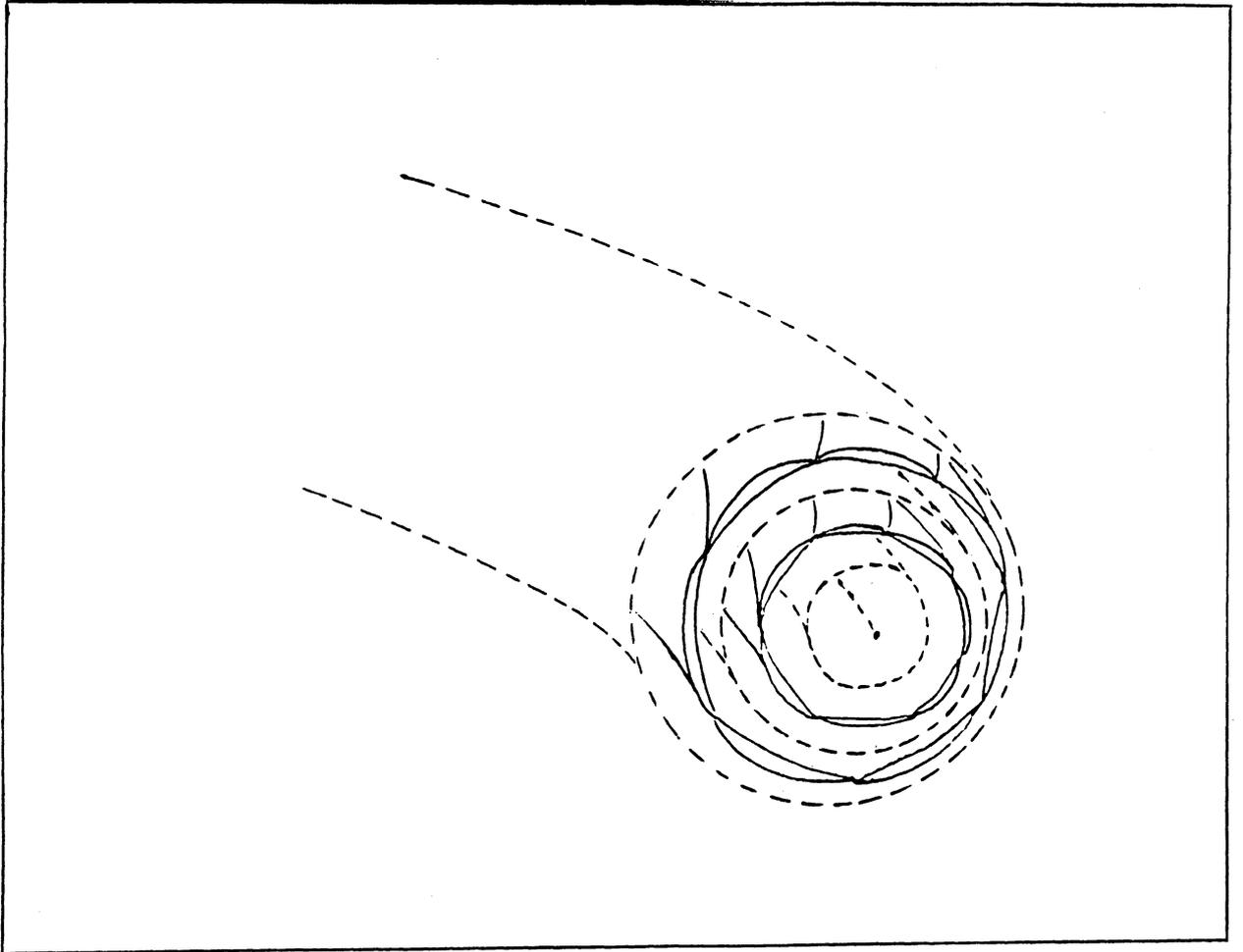


Figura 1.11

### Ilhas Magnéticas

Estrutura magnética do plasma com a ação do limitador ergódico: são representadas duas cadeias de ilhas, formadas nas vizinhanças das superfícies racionais destruídas pela pequena perturbação. Os toros não destruídos são apenas ligeiramente deformados.

## CAPÍTULO DOIS

### RESUMO TEÓRICO DO MÉTODO DAS MÉDIAS

Neste capítulo, é exposto, inicialmente em termos gerais, o equacionamento do método que será utilizado [Kucinski et al. 1992]; em seguida, é particularizado para a aplicação no sistema de coordenadas toroidais polares helicoidais.

#### 2.1. Sistema de equações na forma original

Para um campo magnético total  $\vec{B}$  constituído pelo campo de equilíbrio  $\vec{B}_0$  perturbado por um campo mais fraco  $\vec{b}$  (no caso deste trabalho, criado pelos anéis de corrente que constituem o limitador magnético ergódico), ignora-se a resposta dinâmica do plasma (supondo baixo  $\beta$ ) e pode-se escrever

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}. \quad [2.1]$$

Utilizando um sistema genérico de coordenadas curvilíneas  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ , as equações das linhas de campo magnético, vindas de

$$\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0, \quad [2.2]$$

podem ser expressas como um sistema bidimensional de equações, na forma

$$\frac{d\chi^1}{d\chi^3} = \frac{B^1}{B^3} \quad [2.3]$$

$$\frac{d\chi^2}{d\chi^3} = \frac{B^2}{B^3}, \quad [2.4]$$

onde  $B^i \equiv \vec{B} \cdot \nabla\chi^i$  são as componentes contravariantes do campo total  $\vec{B}$  dado pela [2.1] (uma explanação geral sobre o formalismo envolvido no tratamento de coordenadas curvilíneas encontra-se no Apêndice A).

O sistema [2.3]/[2.4] se refere a um problema dinâmico geral; para sua aplicação no estudo da estrutura magnética de plasmas toroidais, supondo os campos como sendo magnetostáticos, a variável temporal não é envolvida no equacionamento; em seu lugar, toma-se uma das variáveis espaciais segundo a qual o sistema exiba uma certa simetria (no caso,  $\chi^2$ ). Assim, as grandezas físicas tratadas no problema têm sua dinâmica parametrizada em termos dessa coordenada (dita "ignorável"). Se nesse tratamento são empregados termos como "movimento" e "periodicidade rápida" ou "lenta" é por uma extensão de linguagem, sem envolvimento da grandeza "tempo" em sua acepção usual. (Tal tratamento é também indicado ao se aplicar o formalismo hamiltoniano às linhas de campo magnético: a adaptação de  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$  ao modelo de coordenadas canônicas  $(q, p, t)$  que respeitam as equações de Hamilton leva a um comportamento "dinâmico" no qual  $\chi^3$  desempenha o papel de parâmetro "temporal"; a dependência da hamiltoniana nessa coordenada caracteriza um sistema não-autônomo).

Cada componente  $B^i$  é, a princípio, função das três coordenadas  $\chi^i$  adotadas; portanto o sistema não pode ser categorizado como autônomo (só o poderia se fosse independente da coordenada ignorável); em consequência disso, para plasmas perturbados, nas regiões da estrutura de equilíbrio onde o campo perturbativo provoca ressonâncias, as linhas de campo não estarão dispostas exatamente sobre superfícies magnéticas; espera-se, para  $\vec{b} \ll \vec{B}_0$ , uma distribuição dessas linhas de campo ao redor de superfícies "virtuais", chamadas superfícies magnéticas médias, criando as configurações conhecidas como "ilhas magnéticas"; um acréscimo na intensidade do campo perturbativo torna mais pronunciada a estocasticidade espacial nessas regiões.

Para pequenas perturbações, o Método das Médias apresentado por Kucinski *et al.* [Kucinski et al. 1992] propõe uma expressão analítica para as superfícies magnéticas médias, sem a necessidade de envolver integração numérica das linhas de campo, e também evitando a complexidade de um tratamento hamiltoniano. Os resultados, testados para a

configuração de ilhas magnéticas primárias e satélites em plasmas confinados em Tokamak [Kucinski et al. 1992] e *Pinch* de Campo Reverso (RFP) [Monteiro 1995 ] e perturbados por pares de hélices ressonantes, mostraram-se bastante satisfatórios .

O método exige que a simplificação exposta na [2.1] possa ser adotada; além disso, os campos em estudo devem exibir periodicidade (no caso, espacial) segundo duas escalas, uma rápida e uma lenta. A escolha adequada das coordenadas levará, por ocasião da aplicação da média segundo a escala rápida, ao desaparecimento de certos detalhes da estrutura magnética, e é o que se deseja para que o sistema possa se tornar integrável. Porém, para que os aspectos de interesse não sejam também perdidos nesse processo, é fundamental o cuidado quanto ao critério para esta escolha de coordenadas.

De início, é conveniente tomar  $\chi^1$  como uma coordenada radial ou, mais precisamente, uma quantidade de superfície; assim, [2.3] fica em parte simplificada quando se supõe nulo o campo radial de equilíbrio

$$B_0^1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla \chi^1 = 0 . \quad [2.5]$$

Escolhida a variável radial  $\chi^1$ , pode-se tomar  $\chi^2$  como a coordenada ignorável, ou seja, aquela segundo a qual o sistema em equilíbrio exibe simetria (no caso deste trabalho, toma-se a variável helicoidal); assim, a perda de simetria é caracterizada pela dependência em  $\chi^2$  do campo perturbativo  $\vec{b}$ . Para  $\chi^3$  toma-se outra coordenada relevante do sistema (no caso, optou-se pela variável poloidal).

Para exprimir o sistema dado por [2.3] e [2.4] numa notação apropriada à aplicação do método, deve-se considerar [2.1] e em seguida [2.5], obtendo, para  $\vec{b} \ll \vec{B}_0$ :

$$\frac{d\chi^1}{d\chi^3} = \frac{b^1}{B_0^3 + b^3} = \frac{b^1}{B_0^3} \left(1 + \frac{b^3}{B_0^3}\right)^{-1} \quad [2.6]$$

$$\frac{d\chi^2}{d\chi^3} = \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3 + b^3} = \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \left(1 + \frac{b^3}{B_0^3}\right)^{-1} \approx$$

$$\approx \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \left( 1 - \left( \frac{b^3}{B_0^3} \right) + \left( \frac{b^3}{B_0^3} \right)^2 - \dots \right) \approx \frac{B_0^2}{B_0^3} + \frac{b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2 b^3}{B_0^3 B_0^3}, \quad [2.7]$$

onde  $B_0^i$  e  $b^i$  representam os conjuntos de componentes contravariantes do campo magnético de equilíbrio e do campo perturbativo, respectivamente.

Em resumo, a forma final do sistema, antes da aplicação do método, pode ser apresentada, a partir de [2.6] e [2.7], na forma

$$\frac{d\chi^1}{d\chi^3} = \varepsilon f^1(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \quad [2.8]$$

$$\frac{d\chi^2}{d\chi^3} = F^2(\chi^1, \chi^2) + \varepsilon f^2(\chi^1, \chi^2, \chi^3), \quad [2.9]$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro adimensional, comparável a  $\frac{b^3}{B_0^3}$  e introduzido para indicar o grau da aproximação (ao final dos cálculos pode ser feito  $\varepsilon = 1$ );  $f^1$ ,  $F^2$  e  $f^2$  são funções dadas por

$$\varepsilon f^1 = \frac{b^1}{B_0^3} \left( 1 + \frac{b^3}{B_0^3} \right)^{-1}, \quad [2.10]$$

$$F^2 = \frac{B_0^2}{B_0^3}, \quad [2.11]$$

$$\varepsilon f^2 \approx \frac{b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2}{B_0^3} \frac{b^3}{B_0^3}. \quad [2.12]$$

O próximo passo é tornar integrável o sistema dado por [2.8] e [2.9] (pois até o momento só foram feitas pequenas modificações algébricas, a menos das suposições  $B_0^1 = 0$  e  $\vec{b} \ll \vec{B}_0$ ); para tanto, proceder-se-á uma modificação no sistema, conforme o equacionamento previsto no Método das Médias.

## 2.2. Sistema de equações modificado

O sistema dado por [2.8] e [2.9] não é integrável, visto a inexistência de um invariante ou integral do "movimento"; o método utilizado impõe ao referido sistema determinadas transformações, de forma que se torne integrável e admita portanto uma solução analítica

na forma de uma função de fluxo magnético, a qual fornecerá a descrição das superfícies magnéticas médias. Para isso, são envolvidas coordenadas modificadas  $(\bar{\chi}^1(\chi^3), \bar{\chi}^2(\chi^3), \chi^3)$  que se ajustam ao modelo do novo sistema. Este deve assumir a forma

$$\frac{d\bar{\chi}^1}{d\chi^3} = \varepsilon \langle f^1(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2 + \tilde{\chi}^2, \chi^3) \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad [2.13]$$

$$\frac{d\bar{\chi}^2}{d\chi^3} = \langle F^2(\bar{\chi}^1, \chi^3) \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad [2.14]$$

onde a notação

$$\langle f \rangle(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3) d\chi^3 \quad [2.15]$$

indica o procedimento de média na função arbitrária  $f$  sobre um período  $L$  da variável "rápida" (no caso,  $\chi^3$ ); a integração é conduzida com valores fixos de  $\bar{\chi}^1$  e  $\bar{\chi}^2$ ; a parcela  $\tilde{\chi}^2$  na [2.13] aparece em função de uma exigência que será apresentada mais adiante e que diz respeito às correções de segunda ordem.

Desta forma, a complexidade do comportamento das linhas de campo magnético fica incorporada às novas coordenadas, proporcionando assim a integrabilidade do sistema. É importante ressaltar a interpretação dessas novas coordenadas: elas não representam posições aproximadas, sendo mais correto dizer que apenas se ajustam ao sistema aproximado; a notação  $\bar{\chi}^i$  foi escolhida porque essas variáveis decorrem de um método envolvendo médias.

As correções referentes à diferença entre as coordenadas originais e as modificadas são expressas como

$$\delta\chi^1(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3) = \chi^1 - \bar{\chi}^1, \quad [2.16]$$

$$\delta\chi^2(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3) = \chi^2 - \bar{\chi}^2 - \tilde{\chi}^2(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3). \quad [2.17]$$

A parcela  $\tilde{\chi}^2$  é envolvida porque se exige que  $\delta\chi^1$  e  $\delta\chi^2$  sejam da mesma ordem; assim, a solução de primeira ordem pode ser conseguida fazendo  $\delta\chi^1 = \delta\chi^2 = 0$  na função de fluxo obtida, o que será explicado mais detalhadamente na seção seguinte.

### 2.3 Solução aproximada

A família de superfícies magnéticas médias é extraída como solução do sistema modificado [2.13], [2.14] na forma da função de fluxo

$$\Psi(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2) = \text{constante}; \quad [2.18]$$

ou, empregando [2.16] e [2.17],

$$\Psi(\chi^1 - \delta\chi^1, \chi^2 - \tilde{\chi}^2 - \delta\chi^2) = \text{constante}. \quad [2.19]$$

Os critérios apresentados por Kucinski *et al.* têm em vista, principalmente, a inclusão dos fenômenos de ressonância na solução de primeira ordem, ou seja, mesmo fazendo  $\delta\chi^1 \approx \delta\chi^2 \approx 0$  na [2.19], a função de fluxo  $\Psi$  descreverá, com boa aproximação, a configuração das ilhas magnéticas. Portanto, a escolha adequada das coordenadas modificadas que constam no sistema [2.13]/[2.14] deve ser coerente com esses critérios.

Para apresentação das funções envolvidas nessa escolha, será utilizada uma notação semelhante à de Morozov [Morozov e Solov'ev 1966], que inclui a convenção indicada na [2.15] e ainda:

$$\{f\}(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3) = f - \langle f \rangle, \quad [2.20]$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3) &= \left\{ \int_0^{\chi^3} \{f\} d\chi^3 \right\} = \\ &= \int_0^{\chi^3} \{f\} d\chi^3 - \left\langle \int_0^{\chi^3} \{f\} d\chi^3 \right\rangle \end{aligned} \quad [2.21]$$

onde  $f$  é uma função arbitrária e  $\{f\}$  é chamada parte oscilante de  $f$ , a qual descreve o comportamento da função  $f$  a menos da parte fixa, dada pela média  $\langle f \rangle$  conforme a [2.15]. A notação  $\hat{f}$  da [2.21] é definida devido ao aparecimento da referida operação em algumas etapas intermediárias do desenvolvimento.

Dispondo da notação dada em [2.15], [2.20] e [2.21], pode-se apresentar a formulação optada por Kucinski *et al.* para a escolha de  $\bar{\chi}^1$ ,  $\bar{\chi}^2$ ,  $\tilde{\chi}^2$  e  $\Psi$ . É preciso esclarecer que

certos detalhes da formulação que se segue foram arbitrados tendo em vista resultados coerentes com o modelo estudado; o êxito conquistado por esse método pôde ser comprovado numericamente mediante o traçado de mapas de Poincaré para a perturbação com hélices ressonantes [Kucinski et al. 1992]. No presente trabalho, será seguido o mesmo equacionamento, porém orientado para o estudo da perturbação criada pelo limitador ergódico na forma de anéis de corrente.

De início, mostra-se adequado identificar a "parte oscilante"  $\tilde{\chi}^2$  envolvida na [2.19] com uma função relacionada a  $\frac{B_0^2}{B_0^3}$ ; tomando [2.11] e realizando a operação indicada em [2.21] tem-se

$$\tilde{\chi}^2 = \hat{F}^2(\bar{\chi}^1, \chi^3). \quad [2.22]$$

De [2.13] e [2.10] decorre diretamente

$$\frac{d\bar{\chi}^1}{d\chi^3} = \left\langle \frac{b^1}{B_0^3} \right\rangle \left( 1 + \left\langle \frac{b^3}{B_0^3} \right\rangle \right)^{-1}. \quad [2.23]$$

A função de fluxo deve ser expressa pela superposição de duas parcelas, a primeira ( $\Psi^0$ ) devida ao campo de equilíbrio e a segunda ( $\Psi^1$ ) devida ao campo perturbativo, na forma

$$\Psi(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2) = \Psi^0(\bar{\chi}^1) + \Psi^1(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2). \quad [2.24]$$

De acordo com a definição de função de fluxo apresentada no apêndice C, o fluxo para o equilíbrio, que corresponde à solução do sistema não-perturbado, pode ser escrito na forma:

$$\Psi^0(\bar{\chi}^1) = \int_0^{\bar{\chi}^1} \left\langle \sqrt{g} B_0^2(\bar{\chi}^1, \chi^3) \right\rangle d\chi^1. \quad [2.25]$$

Para a parcela do fluxo referente ao campo perturbativo  $\vec{b}$ , o método recomenda a expressão

$$\Psi^1(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2) = - \left\langle \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \sqrt{g} b^1(\bar{\chi}^1, \chi^2, \chi^3) d\chi^2 \right\rangle, \quad [2.26]$$

sendo  $c$  uma constante que pode ser arbitrada convenientemente de forma a anular a média  $\langle \sqrt{gb^2}(\bar{\chi}^1, c, \chi^3) \rangle$ , ou seja, segundo este método, a contribuição da componente do campo perturbativo na direção correspondente à coordenada ignorável perde a relevância na estrutura magnética descrita pela parcela do invariante aproximado  $\Psi^1$ ; conforme a [2.26], apenas o campo perturbativo radial interfere na formação das ilhas magnéticas.

Esta foi a escolha adotada por Kucinski *et al.* para o problema de um plasma toroidal perturbado por hélices ressonantes. Neste trabalho serão seguidos os mesmos critérios, adotando a formulação acima para a descrição das ilhas magnéticas criadas pelos anéis de corrente. O objetivo é desenvolver os cálculos tomando a solução de primeira ordem, com  $\delta\chi^1 = \delta\chi^2 = 0$  na [2.19]. Para um estudo mais acurado, o emprego da solução de segunda ordem requer a integração das equações diferenciais que levam à obtenção das expressões para  $\delta\chi^1(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3)$  e  $\delta\chi^2(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2, \chi^3)$ , e que constam em [Kucinski et al. 1992].

#### 2.4. Aplicação em coordenadas toroidais polares helicoidais

Foi adotado o mesmo sistema de coordenadas utilizado por Kucinski *et al.* [Kucinski et al. 1990] com a introdução de uma variável helicoidal, para descrever a estrutura magnética do plasma perturbado (a explicação sobre essas coordenadas está incluída no apêndice B). No referido sistema, dito "toroidal polar"  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$ , as superfícies coordenadas  $\rho_t = \text{const}$  são deslocadas no sentido do equador externo do Tokamak (uma seção  $\varphi = \text{const}$ , na figura (B.5.b), ilustra esse comportamento), acompanhando melhor a topologia das superfícies magnéticas (fig. B.7)) em comparação com o sistema de coordenadas pseudo-toroidais  $(\rho, \theta, \varphi)$  (fig. B.2.d)) ou com o de coordenadas toroidais convencionais  $(\xi, \omega, \varphi)$  (fig. B.4)). Contudo, ao longo de uma superfície magnética,  $\rho_t$  não é exatamente constante. Para que uma das três variáveis funcione como quantidade de superfície, será adotada a variável  $\rho_0$ , constante ao longo da superfície magnética, e que difere de  $\rho_t$  por uma pequena parcela dependente do coeficiente de assimetria do campo poloidal  $\Lambda$  [Kucinski et al. 1992] (o

parâmetro  $\Lambda(\rho_t)$  será exposto com mais pormenores no capítulo três). Uma opção possível é tomar  $\rho_0$  igual ao valor de  $\rho_t$  na posição  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$  da superfície magnética. Além disso, para caracterizar a dupla periodicidade, é introduzida a variável helicoidal como escala lenta; a variável poloidal, portanto, caracteriza a escala rápida. Tem-se assim:

$$\begin{aligned}\chi^1 &\equiv \rho_0 \\ \chi^2 &\equiv u \equiv m\theta_t - n\varphi \\ \chi^3 &\equiv \theta_t ,\end{aligned}\tag{2.27}$$

onde  $m$  e  $n$  são números inteiros positivos.

Nesse contexto, a função  $F^2$  que será necessária para o equacionamento é, conforme a [2.8],

$$\begin{aligned}F^2 &= \frac{B_0^2}{B_c^3} = \frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla \chi^2}{\vec{B}_c \cdot \nabla \chi^3} = \frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla u}{\vec{B}_c \cdot \nabla \theta_t} = \frac{1}{\vec{B}_c \cdot \nabla \theta_t} \vec{B}_0(m\theta_t - n\varphi) = \\ &= m \frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla \theta_t}{\vec{B}_0 \cdot \nabla \theta_t} - n \frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla \varphi}{\vec{B}_0 \cdot \nabla \theta_t} = m - nq ,\end{aligned}\tag{2.28}$$

onde  $q(\rho_0, \theta_t)$  é o fator de segurança local, descrito com pormenores no capítulo três e fornecido, no modelo de equilíbrio aqui empregado, por

$$q(\rho_0, \theta_t) = \bar{q}(\rho_0) - \tilde{q}(\rho_0) \cos \theta_t ,\tag{2.29}$$

onde  $\bar{q}$  e  $\tilde{q}$  representam respectivamente o valor médio ("parte fixa") e a "parte oscilante" do fator de segurança, conforme explicado no capítulo um.

Tem-se, portanto, levando [2.29] em [2.28],

$$F^2 = m - n\bar{q} + n\tilde{q} \cos \theta_t .\tag{2.30}$$

Também será necessário antecipar o cálculo de  $\langle F^2 \rangle$  e de  $\hat{F}^2$ ; aplicando [2.21], [2.20], e [2.15] em [2.30],

$$\langle F^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (m - n\bar{q} + n\tilde{q} \cos \theta_t) d\theta_t = m - n\bar{q} ;\tag{2.31}$$

assim

$$\{F^2\} = F^2 - \langle F^2 \rangle = n\tilde{q} \cos \theta_t , \quad [2.32]$$

e, finalmente,

$$\hat{F}^2 = \left\{ \int_0^{\theta_t} (n\tilde{q} \cos \theta_t) d\theta_t \right\} = \{n\tilde{q} \sin \theta_t\} = n\tilde{q} \sin \theta_t - \langle n\tilde{q} \sin \theta_t \rangle , \quad [2.33]$$

ou

$$\hat{F}^2 = n\tilde{q} \sin \theta_t , \quad [2.34]$$

onde o fator  $\tilde{q}(\rho_0)$  depende do modelo de equilíbrio, conforme será exposto no capítulo três.

Esse último resultado, levado na [2.26] juntamente com o campo perturbativo gerado pelos anéis de corrente (fornecido pelo capítulo quatro) e em seguida na [2.24], com o fluxo de equilíbrio (dado no capítulo três), permitirá a obtenção da função de fluxo que descreve as superfícies magnéticas médias (capítulo cinco).

## CAPÍTULO TRÊS

### MODELO DE EQUILÍBRIO

Neste capítulo, são obtidas as expressões para as quantidades referentes ao equilíbrio. Escolhido o modelo, particulariza-se para a situação de interesse, que envolve o perfil de corrente dado pelo "peaked model" em um plasma com seção reta aproximadamente circular, aplicando-se para os casos de superfícies magnéticas internas ou externas à coluna de plasma.

#### 3.1. Justificativa para escolha do modelo

A solução da equação de Grad-Shafranov para o equilíbrio toroidal obtida analiticamente por Shafranov [Shafranov 1960], quando aplicada aos parâmetros do TBR-1, leva a um fator de segurança médio cujo perfil radial  $\bar{q}(\rho)$  é praticamente uniforme dentro do plasma, mostrando uma variação aproximada de  $\bar{q}(0) \approx 3.8$  até  $\bar{q}(a) \approx 4.2$ , do eixo magnético até a superfície do plasma [Okano 1990]. Observações experimentais dos modos MHD no TBR-1 indicaram uma variação que vai de  $\bar{q}(0) \approx 1$  até  $\bar{q}(a) \approx 3$  [Vannucci e Gill 1989]; constata-se portanto que o modelo de Shafranov não se mostra adequado para descrever os diferentes modos magnetohidrodinâmicos observáveis no TBR-1.

Uma solução que se adapta ao perfil  $\bar{q}(\rho)$  que se tem em vista é aquela obtida por Kucinski *et al.* [Kucinski et al. 1990]. A equação de Grad-Shafranov é resolvida de forma aproximada, com distribuição de densidade de corrente arbitrária, considerando um plasma com seção reta circular. É adotado um novo sistema de coordenadas, dito toroidal polar  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$ . A solução toroidal  $\Psi_H^0$  é escrita em termos da solução  $\Psi_C$  de um plasma cilíndrico, e em aproximação de ordem zero já inclui o efeito toroidal. Este novo sistema, cuja descrição pormenorizada pode ser encontrada no apêndice B, se reduz, no limite de

grande razão de aspecto  $\frac{R_0}{a} \gg 1$ , ao sistema pseudo-toroidal ( $\rho, \theta, \varphi = \frac{z'}{R_0}$ ). Este será o modelo adotado neste trabalho para descrever o equilíbrio.

### 3.2. Solução para seção reta e perfil de corrente arbitrários

Tomando a equação de Grad-Shafranov em coordenadas generalizadas [C.16] e aplicando a métrica e os componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico para o sistema toroidal polar ( $\rho_t, \theta_t, \varphi$ ) (obtidos por [B.37], [B.36] e [B.39]), esta assume a forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left( \rho_t \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right) + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t^2} = \\ & = \mu_0 j_{30}(\Psi) + \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} \left( 2 \frac{\rho_t}{R_0'} \cos \theta_t + \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sin^2 \theta_t \right) + \frac{\rho_t \cos \theta_t}{R_0'} \left( 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho_t^2} + \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right) + \\ & + \frac{\rho_t \sin \theta_t}{R_0'} \left( \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} - \frac{2}{\rho_t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t \partial \rho_t} \right), \end{aligned} \quad [3.1]$$

onde

$$\mu_0 j_{30}(\Psi) = -\mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} - \frac{d}{d\Psi} \frac{\mu_0^2 I^2}{2}, \quad [3.2]$$

e  $R_0'$  é o raio maior do sistema, conforme explicado no apêndice B e definido por  $R_0' = R_0 \left(1 - \frac{b^2}{R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ . O campo magnético de equilíbrio tem suas componentes contravariantes radial e poloidal dadas por

$$B_0^1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla \rho_t = -\frac{1}{R_0' \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} \quad [3.3.a]$$

$$B_0^2 = \vec{B}_0 \cdot \nabla \theta_t = \frac{1}{R_0' \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t}, \quad [3.3.b]$$

e o campo toroidal dado por:

$$B_{03} = R B_\varphi = -\mu_0 I. \quad [3.3.c]$$

A solução proposta por Kucinski *et al.* envolve uma expansão da função  $\Psi$  cujo termo  $\Psi_0(\rho_t, \theta_t)$ , calculado na aproximação de ordem zero de  $\frac{a}{R_0'}$ , satisfaz

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left( \rho_t \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_t} \right) + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 j_{30}(\Psi_0). \quad [3.4]$$

É exigido que a última função de fluxo magnético  $\Psi_0$  coincida com a fronteira do plasma, mediante aplicação de condição de contorno de Dirichlet.

Pode ser observado que a equação [3.4] se mostra idêntica em forma à equação de Grad-Shafranov no modelo cilíndrico [1.20], a menos das diferenças entre as coordenadas. Como as condições de contorno são as mesmas, a solução de um plasma cilíndrico  $\Psi_C(\rho, \theta)$  pode ser tomada como a aproximação de ordem zero  $\Psi_0(\rho_t, \theta_t)$  da solução  $\Psi_H^0(\rho_t, \theta_t)$  do plasma toroidal, com a vantagem de que boa parte dos efeitos da toroidalidade estarão incluídos nessa aproximação, através das coordenadas utilizadas. Cabe aqui ressaltar que a diferença de significados entre  $\Psi_0(\rho_t, \theta_t)$  e  $\Psi_C(\rho, \theta)$  reside na não-coincidência das superfícies coordenadas correspondentes.

Considera-se ainda as seguintes expansões para  $j_{30}(\Psi)$  e  $\frac{dP}{d\Psi}$ , nas quais  $\delta\Psi = \Psi - \Psi_0$ :

$$j_{30}(\Psi) \approx j_{30}(\Psi_0) + \left[ \frac{d}{d\Psi_0} j_{30}(\Psi_0) \right] \delta\Psi ; \quad [3.5]$$

$$\frac{dp(\Psi)}{d\Psi} \approx \frac{dp(\Psi_0)}{d\Psi_0} + \left[ \frac{d^2 p(\Psi_0)}{d\Psi_0^2} \right] \delta\Psi . \quad [3.6]$$

A correção de primeira ordem mostra-se muito pequena; quando aplicada aos parâmetros do TBR-1, desloca as superfícies magnéticas por menos de 2% do seu raio médio [Kucinski et al. 1990].

Resumindo a notação adotada para as diferentes funções de fluxo: tratando do equilíbrio,  $\Psi_C$  é a solução de um plasma cilíndrico, equivalente a  $\Psi_0$ , que é a aproximação de ordem zero da solução  $\Psi_H^0$  de um plasma toroidal (o sub-índice em  $\Psi_0$  se refere à ordem de aproximação, ao passo que o super-índice em  $\Psi_H^0$  indica a ausência de perturbação e o sub-índice  $H$  a simetria helicoidal considerada). Para o fluxo devido ao campo perturbativo, e para o fluxo total do sistema perturbado (no capítulo cinco), serão usadas respectivamente as notações  $\Psi_H^1$  e  $\Psi_H$ .

### 3.3. Aplicação a um plasma com seção aproximadamente circular

Para o caso de seção reta aproximadamente circular, considera-se  $\Psi_0$  independente de  $\theta_t$ , e obtém-se a partir de [3.4]:

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left( \rho_t \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_t} \right) = \mu_0 j_{30}(\Psi_0) = \mu_0 R_0' j_\varphi, \quad [3.7]$$

onde foi tomado para o perfil de pressão em aproximação cilíndrica:

$$-R_0'^2 \frac{dp}{d\Psi_0}(\Psi_0) = \beta_P j_{30}(\Psi_0), \quad [3.8]$$

onde  $\beta_P$  é dado pela [1.15].

Escolhido o perfil de densidade de corrente, a solução desta equação fornece o termo de ordem zero  $\Psi_0$  da função de fluxo (neste trabalho, conforme será exposto na seção seguinte, o perfil de corrente adotado é o chamado "peaked model"). A correção de primeira ordem é obtida por [Kucinski et al. 1990]:

$$\delta\Psi = \Psi_0'(\rho_t) \cos \theta_t \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R_0'} \Lambda(\rho) d\rho, \quad [3.9]$$

onde  $\Lambda(\rho_t)$  é o coeficiente de assimetria do campo poloidal, obtido de

$$\Lambda(\rho_t) = \frac{1}{2} \ell_i(\rho_t) + \beta_P - 1, \quad [3.10]$$

com

$$\frac{1}{2} \ell_i(\rho_t) = \frac{1}{\rho_t^2 \Psi_0'^2(\rho_t)} \int_0^{\rho_t} \rho \Psi_0'^2(\rho) d\rho, \quad [3.11]$$

sendo  $\ell_i$  a indutância interna normalizada por unidade de comprimento [Mukhovatov 1971]; a linha na função de fluxo indica sua primeira derivada radial.

### 3.4. Particularização para um perfil conhecido da densidade de corrente toroidal

Neste ítem serão obtidas todas as quantidades referentes ao campo magnético de equilíbrio, tanto para a região da coluna de plasma como para a região compreendida entre a fronteira do plasma e a parede interna do Tokamak.

### 3.4.a. Caso $0 < \rho_t < a$

Parte-se do perfil da densidade de corrente conhecido por "peaked model" sugerido por Egorov et al. para o caso  $0 < \rho_t < a$  [Egorov et al. 1987]:

$$j_\varphi(\rho_t) = (\gamma + 1) \frac{I_p}{\pi a^2} \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^\gamma, \quad [3.12]$$

onde  $I_p$  é a corrente de plasma e  $\gamma$  um número positivo (pode-se observar na figura (3.1, pag.46) que, com o aumento de  $\gamma$ , a [3.12] descreve o perfil radial de  $j_\varphi$  com um decaimento mais pronunciado); o fator  $(\gamma + 1) \frac{I_p}{\pi a^2}$  representa o valor máximo da densidade de corrente, verificado próximo ao eixo magnético ( $\rho_t = 0$ ), e geralmente denotado por  $j_0$ . Em resumo, é um modelo de distribuição caracterizado por um pico de corrente bem definido no centro do plasma.

Considerando  $\gamma$  inteiro, a solução da equação de Grad-Shafranov encontrada por Okano foi [Okano, 1990]

$$\begin{aligned} \Psi_0(\rho_t) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{4\pi} & \left[ \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)\right] + \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^2\right] + \dots + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{1}{\gamma + 1} \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right] \right], \quad [3.13] \end{aligned}$$

lembrando que  $\Psi_0(\rho_t)$  representa a aproximação de ordem zero da solução do plasma toroidal, equivalente em forma à solução de um plasma cilíndrico, conforme argumentado na seção precedente, e  $R'_0$  é o raio maior do sistema, conforme esclarecido no apêndice B. Derivando a [3.13] e levando na [3.11] e em seguida na [3.10], é obtida a expressão para o coeficiente de assimetria do campo poloidal  $\Lambda(\rho_t)$  (necessário nesta etapa por estar incluído na expressão do perfil radial da chamada "parte oscilante"  $\tilde{q}(\rho_t)$  do fator de segurança):

$$\begin{aligned} \Lambda(\rho_t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right]^2} & \left\{ \left[ \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)\right] + \dots + \frac{1}{\gamma + 1} \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right] \right] - \right. \\ & \left. \left[ \frac{1}{\gamma + 2} \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^{\gamma+2}\right] + \dots + \frac{1}{2\gamma + 2} \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}\right)^{2\gamma+2}\right] \right] \right\} + \beta_P - 1. \quad [3.14] \end{aligned}$$

A coordenada  $\rho_t$  não é constante ao longo das superfícies magnéticas  $\Psi_0 = \text{constante}$ ; então será mais conveniente adotar uma coordenada que funcione como rótulo dessas superfícies. Uma alternativa é a variável  $\rho_0$ , que difere de  $\rho_t$  por uma pequena parcela que depende de  $\Lambda$  [Kucinski et al. 1992], conforme explicado na seção (2.4). Adotando  $\rho_0$  como coordenada radial, pode-se tomar os resultados, em aproximação de ordem zero, supondo para todas as quantidades envolvidas que

$$f(\rho_t) = f(\rho_0 + \Delta\rho_t(\theta_t)) \approx f(\rho_0), \quad [3.15]$$

onde  $f(\rho_t)$  é uma função arbitrária de  $\rho_t$ .

Nesse modelo, o fator de segurança local, definido por

$$q = \frac{d\varphi}{d\theta_t} = \frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla\varphi}{\vec{B}_0 \cdot \nabla\theta_t}, \quad [3.16]$$

pode ser aproximado considerando sua dependência periódica em  $\theta_t$  como tendo a forma

$$q = \bar{q}(\rho_0) - \tilde{q}(\rho_0) \cos \theta_t, \quad [3.17]$$

onde  $\bar{q}$  é o fator de segurança médio, dado por

$$\bar{q} = \frac{\rho_0 B_0}{R'_0} \frac{1}{\langle B_{\theta_t} \rangle}, \quad [3.18]$$

sendo a média em  $\theta_t$  do campo poloidal fornecida em termos de  $\Psi_0$  por

$$\langle B_{\theta_t} \rangle = \rho_0 \langle \vec{B}_0 \cdot \nabla\theta_t \rangle \approx \frac{\Psi'_0}{R'_0}. \quad [3.19]$$

$\tilde{q}$  é o chamado valor máximo da parte oscilante do fator de segurança, obtido a partir de  $\Lambda(\rho_0)$  por [Kucinski et al. 1991]

$$\tilde{q} = \bar{q} \frac{a}{R'_0} \left[ \frac{\rho_0}{a} (2 + \Lambda(\rho_0)) - \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho_0}^a \frac{\rho}{a} \Lambda(\rho) d\rho \right]. \quad [3.20]$$

Para a determinação da expressão para o fator de segurança médio, parte-se da derivada radial da função de fluxo; reescrevendo [3.13] na forma

$$\Psi_0(\rho_0) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{4\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\gamma+1} \frac{1}{n} - \sum_{n+1}^{\gamma+1} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^n \right], \quad [3.21]$$

e derivando em relação a  $\rho_0$ , tem-se:

$$\Psi'_0(\rho_0) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{2\pi a^2} \rho_0 \sum_{\ell=0}^{\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^{\ell}. \quad [3.22]$$

Levando-se [3.22] na [3.19] e em seguida na [3.18], vem

$$\bar{q} = \frac{2\pi a^2 B_\phi}{\mu_0 I_p R'_0} \left[ \sum_{\ell=0}^{\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^{\ell} \right]^{-1} = \frac{2\pi a^2 B_\phi}{\mu_0 I_p R'_0} \left[ 1 + \sum_{\ell=1}^{\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^{\ell} \right]^{-1}. \quad [3.23]$$

Para  $\rho_0 = a$  a somatória da última expressão torna-se zero; assim pode-se escrever

$$\bar{q} = \bar{q}(a) \left[ \sum_{\ell=0}^{\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^{\ell} \right]^{-1}. \quad [3.24]$$

Também será necessária a derivada radial do fator de segurança médio:

$$\bar{q}'(\rho_0) = \frac{2\bar{q}(a)}{a^2} \rho_0 \left[ \sum_{m=0}^{\gamma-1} (m+1) \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^m \right] \left[ \sum_{\ell=0}^{\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)^{\ell} \right]^{-2}. \quad [3.25]$$

A determinação de  $\bar{q}(\rho_0)$  pela [3.20], com uso da [3.14] e da [3.24], envolve uma integral que não admite resolução analítica; para esse cálculo, será efetuada uma integração numérica, aplicada aos valores de interesse; os resultados estão no capítulo seis.

Conforme foi exposto no capítulo 1, a coordenada  $\rho_0$ , correspondente ao rótulo da superfície magnética de interesse, pode ser determinada a partir do fator de segurança médio por meio de uma equação a ser resolvida por tentativas. Tal equação é obtida igualando, na [3.24],  $\bar{q}(\rho_0)$  a  $\bar{q}(\rho_{mn}) = \frac{m}{n}$ .

#### 3.4.b. Caso $a < \rho_t < b$

Na solução encontrada por Okano, são considerados apenas pontos dentro da coluna de plasma; para a região compreendida entre a fronteira do plasma e a parede interna do

Tokamak, será necessário aqui desenvolver os cálculos desde o princípio. Introduzindo a densidade de corrente toroidal  $j_\varphi = 0$  na [3.7], tem-se a equação diferencial homogênea

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_0} \right) = 0 ; \quad [3.26]$$

de onde vem

$$\rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_0} = \text{constante} = \kappa . \quad [3.27]$$

Como  $\Psi_0$  é considerado como função apenas de  $\rho_0$ , as diferenciais são totais. Integrando nos limites apropriados,

$$\Psi_0(\rho_0) = \Psi_0(a) + \kappa \ln \frac{\rho_0}{a} . \quad [3.28]$$

A constante  $\Psi_0(a)$  pode ser obtida supondo a continuidade de  $\Psi_0$  na fronteira do plasma, ou seja,

$$\Psi_0(a - \delta\rho) = \Psi_0(a + \delta\rho) , \quad [3.29]$$

onde  $\delta\rho$  é um valor pequeno e positivo; assim, pela [3.13]:

$$\Psi_0(a) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\gamma+1} \frac{1}{n} . \quad [3.30]$$

Para a determinação da constante  $\kappa$ , observada a continuidade do campo poloidal em  $\rho_0 = a$ , será suposto

$$\Psi'_0(a - \delta\rho) = \Psi'_0(a + \delta\rho) ; \quad [3.31]$$

assim, pela [3.28],

$$\Psi'_0(\rho_0) = \frac{\kappa}{\rho_0} ; \quad [3.32]$$

ou, aplicando em  $\rho_0 = a$ ,

$$\kappa = a \Psi'_0(a) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{2\pi} . \quad [3.33]$$

Portanto fica-se com

$$\Psi_0(\rho_0) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{4\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\gamma+1} \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{\rho_0}{a} \right] . \quad [3.34]$$

A derivada radial é

$$\Psi'_0(\rho_0) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{2\pi} \frac{1}{\rho_0}. \quad [3.35]$$

O fator de segurança médio, levando [3.35] na [3.19] e na [3.18], fica

$$\bar{q}(\rho_0) = \frac{\rho_0 B_0}{R'_0} \frac{2\pi \rho_0}{\mu_0 I_p} = \bar{q}(a) \frac{\rho_0^2}{a^2}, \quad [3.36]$$

sendo portanto

$$\bar{q}' = \bar{q}(a) \frac{2\rho_0}{a^2} \quad [3.37]$$

sua derivada radial.

O valor de  $\rho_0$  correspondente à superfície magnética de interesse pode ser obtido diretamente da [3.36], igualando  $\bar{q}(\rho_0)$  a  $\bar{q}(\rho_{mn}) = \frac{m}{n}$ .

Para este caso, a expressão de  $\tilde{q}(\rho_0)$  pode ser obtida por analogia, desde que sejam feitas as devidas adaptações. Por exemplo, aplicando a [3.20], pode-se considerar:

$$\tilde{q} = \bar{q} \frac{a}{R'_0} \left[ \frac{\rho_0}{a} (2 + \Lambda(\rho_0)) - \frac{1}{\rho_0} \int_a^{\rho_0} \frac{\rho}{a} \Lambda(\rho) d\rho \right], \quad [3.38]$$

onde  $\bar{q}(\rho_0)$  deve ser tomado da [3.36] para  $a < \rho_t < b$ ; quando aplicação à ressonância, resulta  $\bar{q}(\rho_{mn}) = \frac{m}{n}$ . Será ainda necessário obter a expressão de  $\Lambda(\rho_0)$  para este caso. De início leva-se a [3.35] na [3.11] para obter a indutância interna  $\ell_i(\rho_0)$ . Em primeira aproximação, toma-se  $f(\rho_t) \approx f(\rho_0)$ . A integral deve ser separada em duas parcelas, referentes ao campo poloidal dentro ( $0 < \rho' < a$ ) e fora ( $a < \rho' < \rho_0$ ) da coluna de plasma:

$$\frac{1}{2} \ell_i(\rho_0) = \frac{1}{\rho_0^2 \Psi_0'^2(\rho_0)} \int_0^a \rho' \Psi_0'^2(\rho') d\rho' + \frac{1}{\rho_0^2 \Psi_0'^2(\rho_0)} \int_a^{\rho_0} \rho' \Psi_0'^2(\rho') d\rho'; \quad [3.39]$$

a primeira integral reduz-se em  $\frac{1}{2} \ell_i(a)$ ; levando na segunda integral a [3.35], fica-se com

$$\frac{1}{2} \ell_i(\rho_0) = \frac{1}{2} \ell_i(a) + \ln \frac{\rho_0}{a}; \quad [3.40]$$

para obter o coeficiente de assimetria do campo poloidal  $\Lambda(\rho_0)$ , leva-se a [3.40] na [3.10], obtendo

$$\Lambda(\rho_0) = \Lambda(a) + \ln \frac{\rho_0}{a}. \quad [3.41]$$

Esse resultado, levado na [3.38], fornece, depois de efetuadas as devidas integrações,

$$\tilde{q}(\rho_0) = \frac{\bar{q}}{R'_0} \left[ \frac{1}{2} \rho_0 \ln \frac{\rho_0}{a} + \left( \frac{9 + 2\Lambda(a)}{4} \right) \rho_0 - \frac{(1 - 2\Lambda(a)) a^2}{4} \frac{1}{\rho_0} \right]. \quad [3.42]$$

Portanto, para ambos os casos de interesse, foram obtidas todas as quantidades de equilíbrio necessárias para o cálculo da largura das ilhas magnéticas, o que será feito no capítulo cinco. Os resultados numéricos estão resumidos no capítulo seis, assim como os perfis radiais das quantidades de interesse.

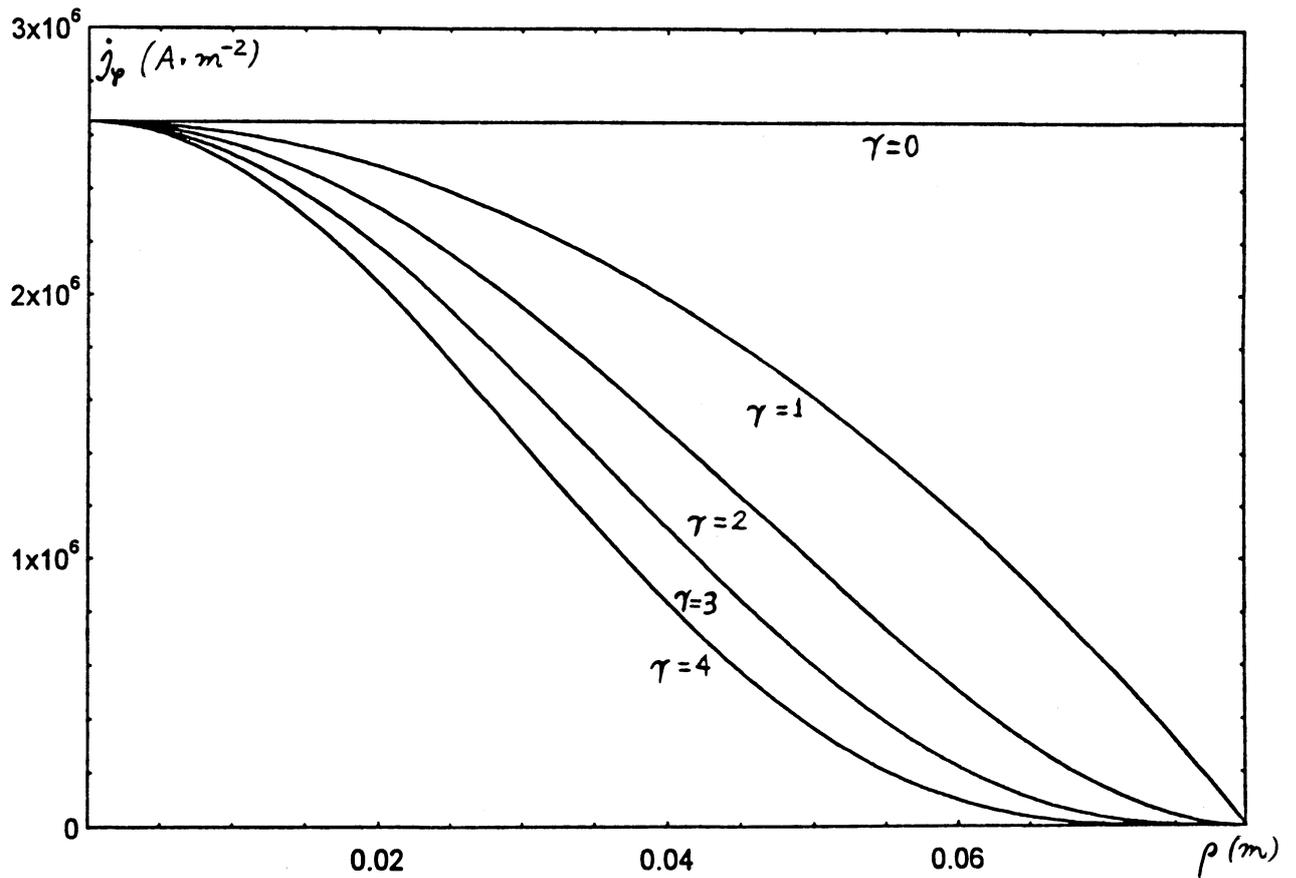


Figura 3.1

Perfil Radial da Densidade de Corrente

(para diferentes valores de  $\gamma$ )

Para uma visualização mais clara dos decaimentos radiais, variou-se a corrente de plasma de modo que todos os valores de  $j_0$  coincidisse com o da curva  $\gamma = 4$ .

## CAPÍTULO QUATRO

### CAMPO PERTURBATIVO CRIADO PELOS ANÉIS DE CORRENTE

Neste capítulo, são apresentados os passos do cálculo necessário à obtenção do campo magnético gerado pelos anéis de corrente em coordenadas cilíndricas. Após uma explanação sobre o modelo que relaciona este campo com a largura das ilhas, é apresentada a expansão da componente radial em série de Fourier dupla; para melhor encaminhamento do cálculo dos coeficientes de Fourier, estes são relacionados a uma forma alternativa da expansão, na qual fica evidenciada a nulidade de grande parte dos coeficientes. Por associação com a solução da equação de Laplace para o potencial magnético criado por um conjunto de fios dispostos de acordo com a geometria do anel, é obtida a expressão desejada, para ser levada ao capítulo cinco para o cálculo da largura das ilhas, mediante o uso da formulação do capítulo dois, que envolve o Método das Médias.

#### 4.1. Influência do campo perturbativo na largura das ilhas magnéticas

Para o cálculo da semi-largura das ilhas magnéticas criadas pelos anéis de corrente, segundo a sequência apresentada no capítulo cinco, é necessária a expressão da componente radial do campo perturbativo  $b^1 = \sqrt{g^{11}}b_{\rho_0}$  envolvida na aplicação do Método das Médias, conforme exposto no capítulo dois (equação [2.19]). Esse campo perturbativo é criado pelo limitador ergódico, na forma de  $p$  anéis de corrente, cada um formado por  $L$  fios de comprimento  $g$  na direção toroidal com corrente  $I$ , de forma que fios adjacentes conduzam correntes em sentidos opostos, conforme esquematizado na figura (1.8). A expressão para  $b_\rho$  foi obtida, em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z' = R_0\varphi)$  (segunda modalidade, conforme o apêndice B), por Pereira [Pereira 1994], na aplicação do Método de Matsuda-Yoshikawa para cálculo da largura das ilhas magnéticas criadas pela perturbação gerada pelos anéis

de corrente. A largura é obtida por uma analogia do modelo com o diagrama de fases do pêndulo não-linear (assim como no Método das Médias, aplicado neste trabalho). Porém, no Método de Matsuda-Yoshikawa, parte-se de uma expansão em série de Taylor da transformada rotacional nas proximidades da ressonância, que, levada nas equações das linhas de campo magnético, conduz, mediante uma série de operações, ao modelo desejado.

#### 4.2. Expansão em série de Fourier do campo radial

Uma das operações intermediárias é a expansão da componente radial do campo perturbativo em série de Fourier dupla, o que é justificável tendo em vista a periodicidade segundo as variáveis poloidal  $\theta$  e toroidal  $\varphi = \frac{z'}{R_0}$ :

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} [a_{mn} \text{sen}(m\theta - n\varphi) + a'_{mn} \text{sen}(m\theta + n\varphi) + c_{mn} \text{cos}(m\theta - n\varphi) + c'_{mn} \text{cos}(m\theta + n\varphi)] , \quad [4.1]$$

pois como a análise se restringe a uma pequena região próxima à ressonância, a variação radial de  $b_\rho$  é negligenciada e toma-se  $b_\rho(\rho, \theta, \varphi) = b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi)$ , onde  $\rho_{mn}$  é o valor (constante) da coordenada radial correspondente à superfície racional caracterizada por  $q = \frac{m_0}{n_0}$ , sendo  $m_0$  e  $n_0$  valores particulares dos índices  $m$  e  $n$ . Verifica-se que a fase  $(m\theta - n\varphi)$  é constante na ressonância, oscilando lentamente nas suas proximidades. Os termos em  $(m\theta + n\varphi)$  oscilam rapidamente, e suas contribuições, em média, se anulam. Com isto, é viável tomar isoladamente a influência do modo  $(m_0, n_0)$ , abstraindo as contribuições dos modos restantes da série, que são mais fortemente direcionadas para valores de  $\rho$  diferentes de  $\rho_{mn}$ . Portanto, retendo da série da [4.1] apenas o modo  $(m, n)$  de interesse,

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = a_{mn} \text{sen}(m\theta - n\varphi) + c_{mn} \text{cos}(m\theta - n\varphi) . \quad [4.2]$$

Esta expressão equivale a

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = \sqrt{a^2_{mn} + c^2_{mn}} \text{sen}(m\theta - n\varphi + \arctan \frac{c}{a}) , \quad [4.3]$$

e definindo:

$$d_{mn} = \sqrt{a^2_{mn} + c^2_{mn}} \quad [4.4]$$

$$\alpha = m\theta - n\varphi + \arctan \frac{c}{a}, \quad [4.5]$$

a [4.3] fica

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = d_{mn} \text{sen } \alpha. \quad [4.6]$$

No Método de Matsuda-Yoshikawa [Pereira 1994], o coeficiente  $d_{mn}$  é envolvido diretamente na expressão da largura das ilhas magnéticas. Neste trabalho, tendo em vista o interesse no valor de  $d_{mn}$  para introduzir a equação [4.6] na [2.19], para aplicação do Método das Médias, será desenvolvido o procedimento para obtenção desse coeficiente.

### 4.3. Coeficientes na forma alternativa da série de Fourier

Os coeficientes  $a_{mn}$  e  $c_{mn}$  são obtidos partindo-se de uma representação alternativa da série de Fourier dupla, com novos índices  $m'$  e  $n'$  e novos coeficientes  $A_{m'n'}$ ,  $B_{m'n'}$ ,  $D_{m'n'}$  e  $E_{m'n'}$ , de forma a facilitar a visualização dos coeficientes nulos. Ao final, as duas representações são relacionadas pelas expressões:

$$m = \left( \frac{2\pi m' \theta}{T_1} \right) \quad [4.7]$$

$$n = \left( \frac{2\pi n' \varphi}{T_2} \right) \quad [4.8]$$

$$a_{mn} = \frac{1}{2}(E_{m'n'} - D_{m'n'}) \quad [4.9]$$

$$a'_{mn} = \frac{1}{2}(E_{m'n'} + D_{m'n'}) \quad [4.10]$$

$$c_{mn} = \frac{1}{2}(A_{m'n'} + B_{m'n'}) \quad [4.11]$$

$$c'_{mn} = \frac{1}{2}(A_{m'n'} - B_{m'n'}), \quad [4.12]$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são os períodos característicos de variação de  $\theta$  e de  $\varphi$ , respectivamente, e  $m'$  e  $n'$  inteiros positivos que caracterizam os modos da expansão. A representação alternativa é

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \left[ A_{m'n'} \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) + B_{m'n'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) + D_{m'n'} \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) + E_{m'n'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \right], \quad [4.13]$$

cujos coeficientes são calculados a partir das expressões:

$$A_{m'n'} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\varphi d\theta b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad [4.14]$$

$$B_{m'n'} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\varphi d\theta b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad [4.15]$$

$$D_{m'n'} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\varphi d\theta b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) \cos\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right) \quad [4.16]$$

$$E_{m'n'} = \frac{4}{T_1 T_2} \int \int d\varphi d\theta b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m'\theta}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi n'\varphi}{T_2}\right). \quad [4.17]$$

A equivalência entre as representações [4.13] e [4.1] é demonstrável por substituição de [4.14], [4.15], [4.16] e [4.17] na [4.13], seguida da aplicação de propriedades inerentes às integrais das funções periódicas envolvidas [Arfken 1987] e de identidades trigonométricas; os pormenores podem ser encontrados em [Pereira 1994].

Considerando que os  $p$  anéis de corrente estão uniformemente espaçados ao longo do percurso toroidal, o período característico de variação em  $\varphi$  é

$$T_2 = \frac{2\pi}{p}, \quad [4.18]$$

e em  $\theta$  é

$$T_1 = 2\pi. \quad [4.19]$$

#### 4.4. Campo perturbativo obtido pela equação de Laplace

Para obtenção da expressão que descreve a componente radial  $b_\rho(\rho, \theta)$  do campo, ignora-se o efeito da parede metálica do vaso toroidal, o que se justifica pelo curto tempo de penetração do campo magnético ( $\approx 100\mu s$ ), se comparado à duração da corrente de plasma ( $\approx 10ms$ ); por outro lado, tendo em vista que a pressão do plasma foi suposta muito pequena (baixo beta), a resposta dinâmica do mesmo a campos magnéticos externos pode ser negligenciada; assim, trabalhando-se praticamente com campos de vácuo, a componente radial é obtida a partir do potencial escalar magnético por

$$\vec{b} = \nabla\Phi , \quad [4.20]$$

onde  $\Phi = \Phi(\rho, \theta, z')$  satisfaz à equação de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$ , que em coordenadas cilíndricas é escrita na forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} = 0 , \quad [4.21]$$

onde, de início, toma-se  $\Phi$  referente a um conjunto de  $m = \frac{L}{2}$  pares de fios de extensão infinita, orientados na direção  $z'$  com corrente  $I$ ; fios adjacentes conduzem correntes opostas.

O campo gerado pelos fios tem componentes radial  $b_\rho$  e azimutal  $b_\theta$ ; este campo perturbativo deve ser superposto ao campo uniforme de equilíbrio  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}'$ . Para tanto, o potencial total  $\Phi$  deve ser composto na forma

$$\Phi(\rho, \theta, z') = \Phi_0(z') + \psi(\rho, \theta) , \quad [4.22]$$

onde

$$(\nabla\Phi)_{z'} = \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = B_0 ; \quad [4.23]$$

portanto

$$\Phi_0 = B_0 z' . \quad [4.24]$$

A parcela  $\psi(\rho, \theta)$  é dada pela solução da equação

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 ; \quad [4.25]$$

procedendo a separação de variáveis na forma

$$\psi(\rho, \theta) = \mathcal{R}(\rho) \Theta(\theta) \quad [4.26]$$

e levando na [4.25], fica-se com

$$\frac{\rho^2}{\mathcal{R}} \frac{d^2 \mathcal{R}}{d\rho^2} + \frac{\rho}{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 . \quad [4.27]$$

Para a resolução, parte-se do termo em  $\theta$  igualando-o à constante de separação  $\lambda$

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \lambda , \quad [4.28]$$

que fornece a solução

$$\Theta(\theta) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}\theta} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}\theta} ; \quad [4.29]$$

sendo que as imposições da periodicidade das soluções em  $\theta$ , bem como da sua unicidade, levam a

$$\lambda = -N^2 \quad [4.30]$$

e

$$\Theta(\theta) = A \operatorname{sen} N\theta + B \operatorname{cos} N\theta , \quad [4.31]$$

na qual pode-se fazer  $B = 0$ , retendo apenas a solução senoidal.

Reescrevendo agora a [4.27]:

$$\rho^2 \frac{d^2 \mathcal{R}}{d\rho^2} + \rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} - N\rho^2 = 0 ,$$

a solução assume a forma [Jackson 1983]:

$$\mathcal{R}(\rho) = a\rho^N + b\rho^{-N} .$$

A solução geral, considerando [4.33] e [4.31], é uma superposição de harmônicos em  $N$ :

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_{N=1}^{\infty} (a\rho^N + b\rho^{-N})A \text{sen } N\theta ; \quad [4.34]$$

fazendo  $aA \equiv A_N$  e  $bA \equiv B_N$ , e em seguida levando, juntamente com a [4.24], na [4.22],

$$\Phi(\rho, \theta, z') = B_0 z' + \sum_{N=1}^{\infty} (A_N \rho^N + B_N \rho^{-N}) \text{sen } N\theta . \quad [4.35]$$

Para a região interna do Tokamak ( $0 < \rho < b$ ), deve ser feito  $B_N = 0$  para não haver divergência na origem:

$$\Phi_{int}(\rho, \theta, z) = B_0 z' + \sum_{N=1}^{\infty} A_N \rho^N \text{sen } N\theta . \quad [4.36]$$

Para a região externa ( $\rho > b$ ), o termo  $B_0 z'$  é excluído, pois se refere a um campo existente apenas dentro do Tokamak. É exigido que  $A_N = 0$  pois o potencial deve se anular assintoticamente no infinito:

$$\Phi_{ext}(\rho, \theta, z') = \sum_{N=1}^{\infty} B_N \rho^{-N} \text{sen } N\theta . \quad [4.37]$$

Os coeficientes  $A_N$  e  $B_N$  são inicialmente calculados para um único fio retilíneo de extensão infinita, posicionado na direção  $z'$ , em  $\rho = b$  e  $\theta = 0$ . Para obter esses coeficientes, são impostas duas condições de contorno; a primeira diz respeito à continuidade da componente radial do campo magnético através da interface  $\rho = b$ :

$$(\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) \cdot \hat{e}_{<\rho>} |_{\rho=b} = 0 , \quad [4.38]$$

de onde decorre

$$B_N = -b^{(2N)} A_N ; \quad [4.39]$$

a segunda condição de contorno se refere à descontinuidade da componente tangencial do campo magnético  $\vec{B}$  na interface  $\rho = b$ :

$$\hat{e}_{<\theta>} \times (\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) |_{\rho=b} = \mu_0 \vec{j} ; \quad [4.40]$$

os coeficientes  $A_N$  e  $B_N$ , em virtude dessas imposições, resultam

$$A_N = -\frac{\mu_0 I}{2\pi N b^N} \quad [4.41]$$

$$B_N = \frac{\mu_0 I b^N}{2\pi N}, \quad [4.42]$$

que, levados na [4.36] e na [4.37], fornecem

$$\Phi_{int}(\rho, \theta, z') = B_0 z' - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{\rho}{b}\right)^N \text{sen } N\theta \quad [4.43]$$

$$\Phi_{ext}(\rho, \theta, z') = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{-N} \text{sen } N\theta. \quad [4.44]$$

Tomando-se, em seguida, o caso de  $2m$  fios retilíneos de forma que fios adjacentes conduzam correntes opostas, a superposição das contribuições individuais corresponde a uma somatória em  $N = (2k + 1)m$ , onde  $k = 0, 1, 2, \dots$  [Pereira 1994]; levando em conta o decréscimo dos termos com o aumento de  $N$ , é viável tomar apenas o termo de ordem mais baixa ( $k = 0$ ). Desta forma,

$$\Phi_{int} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m \text{sen } m\theta; \quad [4.45]$$

e portanto, para o caso de interesse ( $0 < \rho < b$ ),

$$b_\rho(\rho, \theta) = \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_{int} = -\frac{\mu_0 I m}{\pi b} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{m-1} \text{sen } m\theta. \quad [4.46]$$

O resultado obtido é válido nos limites onde pode ser desprezada a contribuição dos trechos de fios orientados segundo a direção poloidal (que é muito menor que o campo toroidal de equilíbrio  $B_0$ ), bem como o efeito de borda causado pela extensão finita dos fios.

#### 4.5. Associação do campo calculado com os coeficientes da expansão alternativa

É a simetria do campo  $b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi)$  em relação ao plano  $\varphi = 0$  que simplifica o cálculo dos coeficientes de Fourier, pois só subsistem os cossenos em  $\varphi$ , sendo assim nulos os coeficientes  $B_{m'n'}$  e  $D_{m'n'}$ . Portanto, existe um único termo não-nulo da expansão, em  $E_{m'n'}$ .

A [4.46] fornece o campo radial gerado por  $2m$  fios de extensão infinita; para obter o campo gerado pelo anel com extensão  $g$ , deve-se introduzir adequadamente a dependência em  $z'$  de acordo com o posicionamento dos anéis de corrente, conforme a figura (1.10). Tratando a ação do limitador como uma perturbação sobre o equilíbrio, dada pela [4.46], é viável adotar uma modulação na forma de pulso quadrado (figura 4.1, pag.57), seguindo o modelo

$$b_\rho(\rho, \theta, \varphi) = b_\rho(\rho, \theta), \quad \text{para } -\frac{g}{2} < z' < \frac{g}{2} \text{ etc,} \quad [4.47a]$$

$$b_\rho(\rho, \theta, \varphi) = 0, \quad \text{para } \frac{g}{2} < z < \frac{\pi R_0}{2} - \frac{g}{2} \text{ etc,} \quad [4.47b]$$

onde foi suposto que a corrente em todos os anéis apresenta a mesma polaridade.

Conduzindo a [4.46] na [4.17] para determinação de  $E_{m'n'}$ , com os períodos característicos dados por [4.18] e [4.19] e aplicando os limites de integração apropriados, tem-se

$$E_{m'n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\left(\frac{L}{2}-1\right)} \int_0^{2\pi} d\theta \text{sen}\left(\frac{L\theta}{2}\right) \text{sen}(m'\theta) \int_{\frac{-g}{2R_0}}^{\frac{g}{2R_0}} d\varphi \cos(pn'\varphi), \quad [4.48]$$

que, passando pelas devidas transformações, fica

$$E_{m'n'} = \frac{4p}{(2\pi)^2} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \pi \delta_{\frac{L}{2}, m'} \frac{2}{pn'} \text{sen}\left(\frac{pn'g}{2R_0}\right). \quad [4.49]$$

A imposição das exigências

$$n' = \frac{n}{p} \quad [4.50]$$

e

$$m' = m = qn = \frac{L}{2} \quad [4.51]$$

leva a

$$E_{m'n'} = \frac{2p \mu_0 I L}{\pi 2\pi b} \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^{(qn-1)} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right). \quad [4.52]$$

Os demais coeficientes são nulos [Pereira 1994]:

$$A_{m'n'} = B_{m'n'} = D_{m'n'} = 0. \quad [4.53]$$

#### 4.6. Coeficientes de Fourier para a expressão do campo perturbativo radial a ser aplicado no Método das Médias

Levando [4.52] e [4.53] nas expressões [4.9], [4.10], [4.11] e [4.12], tem-se

$$a_{mn} = a'_{mn} = \frac{p \mu_0 I L}{\pi n 2\pi b} \left( \frac{\rho_{mn}}{b} \right)^{(qn-1)} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right) \quad [4.54]$$

$$c_{mn} = c'_{mn} = 0, \quad [4.55]$$

e, finalmente, pela [4.4]:

$$d_{mn} = \frac{p \mu_0 I L}{\pi n 2\pi b} \left( \frac{\rho_{mn}}{b} \right)^{(qn-1)} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right). \quad [4.56]$$

É ainda necessário, para introduzir adequadamente na [2.19], a expressão completa da componente radial do campo perturbativo, que é fornecida levando [4.56] em [4.6]. Tendo em vista a [4.55], a [4.5] se reduz a

$$\alpha = m\theta - n\varphi, \quad [4.57]$$

e fica-se portanto com

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = \frac{p \mu_0 I L}{\pi n 2\pi b} \left( \frac{\rho_{mn}}{b} \right)^{(qn-1)} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right) \text{sen}(m\theta - n\varphi); \quad [4.58]$$

ou, mais adequadamente, na forma

$$b_\rho(\rho_{mn}, \theta, \varphi) = \frac{p \mu_0 I L}{\pi n 2\pi b} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right) \left( \frac{\rho}{b} \right)^{m-1} \text{sen} \left( m\theta - \frac{nz'}{R_0} \right). \quad [4.59]$$

Esta é a expressão a ser introduzida na [2.19], para cálculo da largura das ilhas magnéticas criadas pelos anéis de corrente. O procedimento está exposto no capítulo cinco.

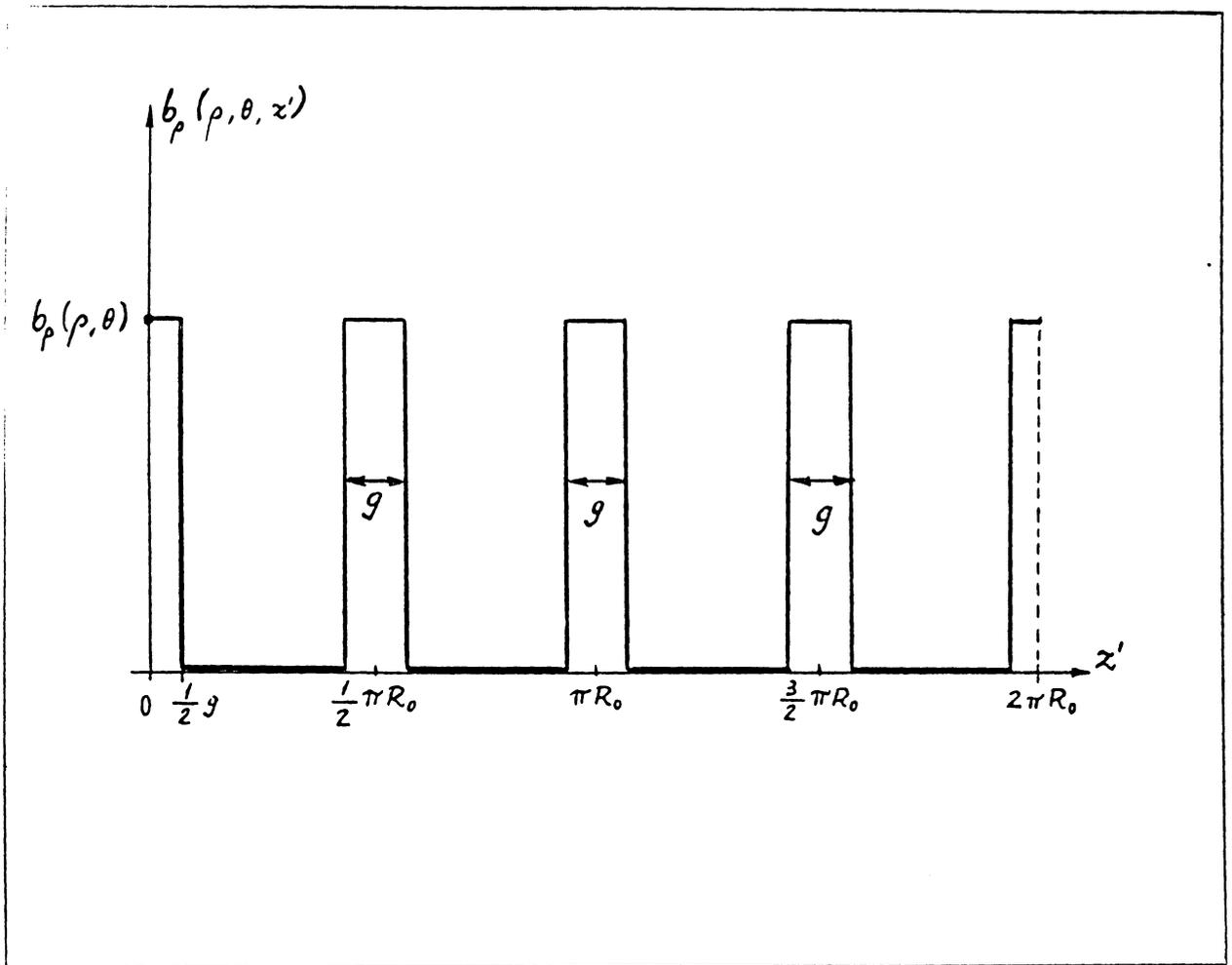


Figura 4.1

#### Sequência de Pulsos Quadrados

Para a dependência em  $z'$  do campo perturbativo radial  $b_\rho(\rho, \theta, z')$ , optou-se pelo modelo da expressão [4.47], que consiste numa sequência de  $p$  pulsos quadrados (no caso,  $p = 4$ ), de amplitude  $b_\rho(\rho, \theta)$  e "duração"  $g$ , com período  $\frac{2\pi}{p}$  e centrados nas posições previstas para a instalação dos anéis de corrente.

## CAPÍTULO CINCO

### APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MÉDIAS PARA CÁLCULO DA LARGURA DE ILHAS MAGNÉTICAS

Neste capítulo, são agrupados os resultados dos capítulos anteriores tendo em vista a obtenção da expressão da largura das ilhas magnéticas; a função de fluxo que descreve as superfícies magnéticas médias será expandida em série de Taylor na vizinhança da superfície racional destruída correspondente à ressonância estudada. O objetivo é dispor algebricamente o resultado de forma que se torne comparável ao modelo dinâmico do pêndulo não-linear, associando o fluxo ao invariante e as superfícies magnéticas às trajetórias de fase. Numa seção poloidal ( $\varphi = \text{constante}$ ), o afastamento entre a separatriz e a superfície racional destruída é função periódica do ângulo poloidal  $\theta_t$ , conforme esquematizado na figura (5.1, pag.69); o valor máximo dessa função corresponde à semi-largura da ilha magnética, conforme a figura (5.2, pag.70). A expansão em Taylor é realizada justamente para que conste no equacionamento o termo correspondente a esse afastamento.

#### 5.1. Expansão em série de Taylor do fluxo magnético médio

Considerando o fluxo magnético  $\Psi_H$  do sistema perturbado como a superposição do fluxo  $\Psi_H^0$  referente ao equilíbrio toroidal com  $\Psi_H^1$  devido ao campo perturbativo, na forma

$$\Psi_H(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2) = \Psi_H^0(\bar{\chi}^1) + \Psi_H^1(\bar{\chi}^1, \bar{\chi}^2); \quad [5.1]$$

fazendo  $\bar{\chi}^1 = \bar{\rho}_0$  e  $\bar{\chi}^2 = \bar{u}$ , e expandindo em termos de  $(\Delta\rho_0) = \rho_0 - \rho_{mn}$  (onde  $\rho_{mn}$  é a coordenada radial correspondente ao modo  $(m, n)$  estudado, obtida do perfil do fator de segurança médio fazendo  $\bar{q}(\rho_{mn}) = \frac{m}{n}$  na [3.23] para  $0 < \bar{\rho}_0 < a$  ou na [3.36] para  $a < \bar{\rho}_0 < b$ ), fica-se com

$$\Psi_H(\bar{\rho}_0, \bar{u}) = \left[ \Psi_H^0|_{\rho_{mn}} + \Psi_H^{0'}|_{\rho_{mn}} (\Delta\rho_0) + \frac{1}{2} \Psi_H^{0''}|_{\rho_{mn}} (\Delta\rho_0)^2 + \dots \right] + \left[ \Psi_H^1|_{\rho_{mn}} + \dots \right], \quad [5.2]$$

onde só foi retido o termo de ordem zero para  $\Psi_H^1$  e os termos até segunda ordem para  $\Psi_H^0$ .

Conforme será demonstrado no ítem seguinte, o termo de primeira ordem em  $\Delta\rho_0$  é nulo se aplicado à ressonância; fica-se com a expressão

$$(\Delta\rho_0)^2 = -\frac{2}{\Psi_H^0''|_{\rho_{mn}}} \left[ -\left( \Psi_H(\bar{\rho}_0, \bar{u}) - \Psi_H^0(\bar{\rho}_0)|_{\rho_{mn}} \right) + \Psi_H^1(\bar{\rho}_0, \bar{u})|_{\rho_{mn}} \right]; \quad [5.3]$$

$\Psi_H$  é o invariante, igualado a uma constante  $k_2$  para descrever a superfície magnética;  $\Psi_H^0|_{\rho_{mn}}$  é outra constante  $k_1$ ; fazendo  $C = k_2 - k_1$  tem-se

$$(\Delta\rho_0)^2 = -\frac{2}{\Psi_H^0''|_{\rho_{mn}}} \left[ -C + \Psi_H^1(\bar{\rho}_0, \bar{u})|_{\rho_{mn}} \right]. \quad [5.4]$$

Para prosseguir o cálculo, é necessário obter  $\Psi_H^0''$  e  $\Psi_H^1$ ; isso será feito nas duas seções subsequentes.

## 5.2. Expressão para a derivada segunda do fluxo de equilíbrio toroidal

Partindo da [2.25] :

$$\Psi_H^0(\bar{\chi}^1) = \int_0^{\bar{\chi}^1} \langle \sqrt{g} B_0^2(\bar{\chi}^1, \chi^3) \rangle d\bar{\chi}^1, \quad [5.5]$$

que, no caso, se escreve como

$$\Psi_H^0(\bar{\rho}_0) = \int_0^{\bar{\rho}_0} \langle \sqrt{g} B_0^2(\bar{\rho}_0, \theta_t) \rangle d\bar{\rho}_0, \quad [5.6]$$

a derivada primeira é imediata:

$$\frac{d\Psi_H^0}{d\bar{\rho}_0} = \langle \sqrt{g} B_0^2(\bar{\rho}_0, \theta_t) \rangle. \quad [5.7]$$

Nesta expressão,  $\Psi_H^0$  é o fluxo correspondente ao equilíbrio toroidal; é interessante manipular este resultado de forma que fique expresso em termos de  $F^2$  (definido pela

[2.11]) e de  $\Psi_0$  (aproximação de ordem zero do equilíbrio toroidal, equivalente ao fluxo do equilíbrio cilíndrico, conforme exposto no capítulo três). Para este fim, mostra-se útil a seguinte expressão do campo de equilíbrio [Edenstraesser 1980]:

$$\sqrt{g}B_0^3 = \Psi'_0(\bar{\rho}_0), \quad [5.8]$$

onde a linha indica a primeira derivada radial; levando [5.8] em [2.11] tem-se

$$\Psi'_0 F^2 = \sqrt{g}B_0^2; \quad [5.9]$$

tomando a média em  $\theta_t$  nos dois membros e comparando com [5.7], vem

$$\Psi_H^0{}'(\bar{\rho}_0) = \langle F^2 \rangle \Psi'_0, \quad [5.10]$$

pois o fluxo cilíndrico independe de  $\theta_t$ .

Usando o valor de  $\langle F^2 \rangle$  obtido pela [2.33] na [5.10], obtém-se

$$\Psi_H^0{}'(\bar{\rho}_0) = (m - n\bar{q})\Psi'_0. \quad [5.11]$$

Para estudar uma cadeia de ilhas magnéticas, fixa-se o par de números inteiros  $m, n$ , que correspondem ao enrolamento da superfície racional destruída, caracterizando o que é chamado de "ressonância". A [5.11], quando aplicada à ressonância, resulta nula, pois

$$\bar{q}|_{\rho_{mn}} = \frac{m}{n}, \quad [5.12]$$

onde  $\rho_{mn}$  representa o valor de  $\bar{\rho}_0$  para a superfície racional destruída correspondente ao modo  $(m, n)$ . Desta forma, é anulado o termo de primeira ordem da expansão em Taylor da [5.2].

A derivada segunda do fluxo de equilíbrio toroidal é

$$\Psi_H^0{}''(\bar{\rho}_0) = \Psi'_0(0 - n\bar{q}') + (m - n\bar{q})\Psi''_0; \quad [5.13]$$

como o segundo termo é anulado na ressonância, fica-se com:

$$\Psi_H^{0''}|_{\rho_{mn}} = -n\bar{q}'\Psi_0'|_{\rho_{mn}} , \quad [5.14]$$

onde, conforme [3.22], [3.25], [3.35] e [3.37], tem-se, para  $0 < \bar{\rho}_0 < a$ ,

$$\Psi_0'(\bar{\rho}_0) = \frac{\mu_0 I_p R_0'}{2\pi a^2} \bar{\rho}_0 \sum_{\ell=0}^{\gamma} \left(1 - \frac{\bar{\rho}_0^2}{a^2}\right)^{\ell} \quad [5.15]$$

e

$$\bar{q}'(\bar{\rho}_0) = \frac{2\bar{q}(a)}{a^2} \bar{\rho}_0 \left[ \sum_{\ell=0}^{\gamma} \left(1 - \frac{\bar{\rho}_0^2}{a^2}\right)^{\ell} \right]^{-2} \sum_{m=0}^{\gamma-1} (m+1) \left(1 - \frac{\bar{\rho}_0^2}{a^2}\right)^m ; \quad [5.16]$$

e, para  $a < \bar{\rho}_0 < b$ ,

$$\Psi_0'(\bar{\rho}_0) = \frac{\mu_0 I_p R_0'}{2\pi} \frac{1}{\bar{\rho}_0} \quad [5.17]$$

e

$$\bar{q}' = \frac{2\bar{q}(a)}{a^2} \bar{\rho}_0 . \quad [5.18]$$

Assim, para um dado modo  $(m, n)$ , fica completamente determinado o valor do denominador  $\Psi_H^{0''}|_{\rho_{mn}}$  na [5.4]. Na seção seguinte, será mostrada a obtenção da parcela  $\Psi_H^1|_{\rho_{mn}}$  do numerador da [5.4].

### 5.3. Expressão para o fluxo perturbativo

Lembrando a [2.26]:

$$\Psi_H^1 = - \left\langle \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \sqrt{gb^1}(\bar{\chi}^1, \chi^2, \chi^3) d\chi^2 \right\rangle , \quad [5.19]$$

que, aplicada ao caso, escreve-se como

$$\Psi_H^1(\bar{\rho}_0, \bar{u}) = - \left\langle \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \sqrt{gb^1}(\bar{\rho}_0, u, \theta_t) d\chi^2 \right\rangle , \quad [5.20]$$

sendo o limite inferior  $c$  uma constante, arbitrada de forma que a componente segundo  $u$  do campo perturbativo aplicada na superfície  $u = c$  tenha anulada sua média em  $\theta_t$ .

Tomando então a componente contravariante radial do campo perturbativo gerado pelo anel de corrente, de acordo com [A.23]:

$$b^1(\bar{\rho}_0, u, \theta_t) = \sqrt{g^{11}} b_{\bar{\rho}_0}(\bar{\rho}_0, u, \theta_t). \quad [5.21]$$

A componente física  $b_{\bar{\rho}_0}$  é dada pela [4.59] em termos de coordenadas cilíndricas (segunda modalidade, conforme o apêndice B):

$$b_{\rho} = \frac{p}{\pi n} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \text{sen}\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \left(\frac{\rho}{b}\right)^{m-1} \text{sen}\left(m\theta - \frac{nz'}{R_0}\right). \quad [5.22]$$

No limite  $\frac{R_0}{a} \gg 1$  pode-se identificar  $\bar{\rho}_0 = \rho$  e  $\theta_t = \theta$ , portanto

$$b_{\rho} = b_{\bar{\rho}_0} = \frac{p}{\pi n} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \text{sen}\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^{m-1} \text{sen } u. \quad [5.23]$$

O cálculo das componentes do tensor métrico  $g^{ij}$  para o sistema toroidal polar helicoidal ( $\rho_t, u = m\theta - n\varphi, \theta_t$ ) consta no apêndice B, bem como o cálculo da métrica  $\sqrt{g}$ ; usando, portanto, [B.36] e [B.37],

$$\sqrt{g^{11}} = \sqrt{1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t} \quad [5.24]$$

e

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{\det(g^{ij})}} = \frac{R'_0 \rho_t}{n}. \quad [5.25]$$

Então, aproximando  $\rho_0 \approx \rho_t$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{g} b^1 &= \sqrt{g} \sqrt{g^{11}} b_{\bar{\rho}_0} = \frac{R'_0 \rho_0}{n} \frac{p}{\pi n} \frac{\mu_0 I L}{2\pi b} \text{sen}\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^{m-1} \text{sen } u \left(1 - \frac{2\rho_0}{R'_0} \cos \theta_t\right)^{\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx \frac{p R'_0}{\pi n^2} \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \text{sen}\left(\frac{ng}{2R_0}\right) \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \text{sen } u \left(1 - \frac{\rho_0}{R'_0} \cos \theta_t + \dots\right); \end{aligned} \quad [5.26]$$

retendo, de início, os termos até primeira ordem de  $\frac{\rho_0}{R'_0}$ , tem-se

$$\sqrt{g} b^1 = Y \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \text{sen } u - \frac{Y b}{R'_0} \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^{m+1} \text{sen } u \cos \theta_t, \quad [5.27]$$

onde foi feito

$$Y = \frac{p R'_0 \mu_0 I L}{\pi n^2} \frac{1}{2\pi} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right). \quad [5.28]$$

Levando então [5.27] na [5.20]

$$\begin{aligned} \Psi_H^1 &= - \left\langle Y \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \text{sen } u \, d\chi^2 - \frac{Yb}{R'_0} \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^{m+1} \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \text{sen } u \cos \theta_t \, d\chi^2 \right\rangle = \\ &= -Y \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \left\langle \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \text{sen } u \, d\chi^2 \right\rangle + \frac{Yb}{R'_0} \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^{m+1} \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \langle \text{sen } u \cos \theta_t \rangle d\chi^2 = \\ &= -Y \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \langle -\cos(\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2) + \cos c \rangle + 0 = Y \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \langle \cos(\bar{\chi}^2 - n\tilde{q} \text{sen } \theta_t) - \cos c \rangle, \quad [5.29] \end{aligned}$$

onde se usou [2.34] para a função  $\hat{F}^2$ ; o termo de primeira ordem de  $\frac{\rho_0}{R'_0}$ , por ser periódico na variável rápida  $\theta_t$ , é anulado ao se extrair a média. Efetuando agora a média em  $\theta_t$  da parcela restante,

$$\begin{aligned} \Psi_H^1 &= - \left\langle \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \sqrt{gb^1} \, d\chi^2 \right\rangle = \\ &= \frac{Y}{2\pi} \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \left[ \int_0^{2\pi} \cos(\bar{\chi}^2 + n\tilde{q} \text{sen } \theta_t) \, d\theta_t - \cos c \int_0^{2\pi} d\theta_t \right]. \quad [5.30] \end{aligned}$$

A constante  $c$  pode ser arbitrada, de forma que o segundo termo se anula; a integral do primeiro termo requer o uso de funções cilíndricas de Bessel:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\bar{\chi}^2 + n\tilde{q} \text{sen } \theta_t) \, d\theta_t = \frac{1}{2} \left[ e^{i\bar{\chi}^2} \int_0^{2\pi} e^{in\tilde{q} \text{sen } \theta_t} \, d\theta_t + e^{-i\bar{\chi}^2} \int_0^{2\pi} e^{-in\tilde{q} \text{sen } \theta_t} \, d\theta_t \right]. \quad [5.31]$$

Utiliza-se, para tanto, as expressões [Arfken, 1985]

$$e^{in\tilde{q} \text{sen } \theta_t} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(n\tilde{q}) e^{i\ell\theta_t} = \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(n\tilde{q}) e^{i\ell\theta_t} + \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \mathcal{J}_\ell(n\tilde{q}) e^{i\ell\theta_t} \quad [5.32]$$

e

$$e^{-in\tilde{q} \text{sen } \theta_t} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(-n\tilde{q}) e^{i\ell\theta_t} = \mathcal{J}_0(-n\tilde{q}) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(-n\tilde{q}) e^{i\ell\theta_t} + \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \mathcal{J}_\ell(-n\tilde{q}) e^{i\ell\theta_t}. \quad [5.33]$$

Usando [5.32], tem-se:

$$\int_0^{2\pi} e^{in\tilde{q}\text{sen } \theta_t} d\theta_t = \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) \int_0^{2\pi} d\theta_t + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(n\tilde{q}) \int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta_t} d\theta_t + \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \mathcal{J}_\ell(n\tilde{q}) \int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta_t} d\theta_t \quad [5.34]$$

mas, para  $\ell \neq 0$ , tem-se

$$\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta_t} d\theta_t = 0, \quad [5.35]$$

e, para  $\ell = 0$ ,

$$\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta_t} d\theta_t = 2\pi; \quad [5.36]$$

então

$$\int_0^{2\pi} e^{in\tilde{q}\text{sen } \theta_t} d\theta_t = 2\pi \mathcal{J}_0(n\tilde{q}), \quad [5.37]$$

e, de forma análoga, partindo da [5.33]

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\tilde{q}\text{sen } \theta_t} d\theta_t = 2\pi \mathcal{J}_0(-n\tilde{q}). \quad [5.38]$$

Portanto

$$\int_0^{2\pi} \cos(\bar{\chi}^2 + n\tilde{q}\text{sen } \theta_t) d\theta_t = \frac{1}{2} \left[ e^{i\bar{\chi}^2} 2\pi \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) + e^{-i\bar{\chi}^2} 2\pi \mathcal{J}_0(-n\tilde{q}) \right]; \quad [5.39]$$

mas

$$\mathcal{J}_0(-n\tilde{q}) = \mathcal{J}_0(n\tilde{q}), \quad [5.40]$$

portanto

$$\int_0^{2\pi} \cos(\bar{\chi}^2 + n\tilde{q}\text{sen } \theta_t) d\theta_t = \frac{1}{2} 2\pi \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) [e^{i\bar{\chi}^2} + e^{-i\bar{\chi}^2}] = 2\pi \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) \cos \bar{\chi}^2. \quad [5.41]$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_H^1(\bar{\rho}_0, \bar{u}) &= - \left\langle \int_c^{\bar{\chi}^2 + \hat{F}^2} \sqrt{gb^1} d\chi^2 \right\rangle = \\ &= Y \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) \cos \bar{\chi}^2. \end{aligned} \quad [5.42]$$

Esse resultado deve ser aplicado à ressonância para a substituição na [5.4] :

$$\Psi_H^1(\bar{\rho}_0, \bar{u})|_{\rho_{mn}} = Y \left( \frac{\rho_{mn}}{b} \right)^m \mathcal{J}_0(n\bar{q})|_{\rho_{mn}} \cos \bar{u} , \quad [5.43]$$

onde  $Y$  , dado pela [5.28] , vale

$$Y = \frac{p R_0' \mu_0 I L}{\pi n^2 2\pi} \text{sen} \left( \frac{ng}{2R_0} \right) , \quad [5.44]$$

e  $\bar{q}(\bar{\rho}_0)$  , dado pela [3.20] para  $0 < \bar{\rho}_0 < a$  , vale

$$\bar{q}(\bar{\rho}_0) = \bar{q}(\bar{\rho}_0) \frac{a}{R_0} \left[ \frac{\bar{\rho}_0}{a} (2 + \Lambda(\bar{\rho}_0)) - \frac{1}{\bar{\rho}_0} \int_{\bar{\rho}_0}^a \frac{\rho}{a} \Lambda(\rho) d\rho \right] , \quad [5.45]$$

onde, uma vez que está sendo estudada uma ressonância específica, tem-se

$$\bar{q}(\rho_{mn}) = \frac{m}{n} , \quad [5.46]$$

sendo o coeficiente de assimetria do campo poloidal  $\Lambda(\rho_0)$  dado pela [3.14]. Para  $a < \bar{\rho}_0 < b$ , a [3.42] fornece

$$\bar{q}(\rho_0) = \frac{\bar{q}}{R_0'} \left[ \frac{1}{2} \rho_0 \ln \frac{\rho_0}{a} + \left( \frac{9 + 2\Lambda(a)}{4} \right) \rho_0 - \frac{(1 - 2\Lambda(a))a^2}{4} \frac{1}{\rho_0} \right] . \quad [5.47]$$

Tem-se assim todos os elementos para proceder a comparação da função de fluxo dada pela [5.2] com a hamiltoniana do pêndulo. Na seção seguinte, os resultados obtidos até aqui serão reunidos de forma apropriada para proceder essa comparação. Como consequência imediata será obtida a expressão analítica para a largura das ilhas magnéticas.

#### 5.4. Comparação da função de fluxo média com a hamiltoniana do pêndulo não-linear

Levando em consideração a [5.43] , pode-se tomar a [5.4] e escrevê-la na forma

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = \frac{2}{A} \left[ -C + Y \left( \frac{\rho_0}{b} \right)^m \mathcal{J}_0(n\bar{q})|_{\rho_{mn}} \cos \bar{u} \right] , \quad [5.48]$$

onde  $A = -\rho_{mn}^2 \Psi_H^0{}''|_{\rho_{mn}}$  ; usando agora  $\cos \bar{u} = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{\bar{u}}{2}$  :

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = \left[ -C + Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q}) - 2Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q})\text{sen}^2 \frac{\bar{u}}{2} \right], \quad [5.49]$$

ou

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = \frac{4Y}{A} \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q})|_{\rho_{mn}} \left[ \left( -\frac{C}{2Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q})} + \frac{1}{2} \right) - \text{sen}^2 \frac{\bar{u}}{2} \right]. \quad [5.50]$$

Fazendo então

$$W^2 = \frac{4Y}{A} \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q})|_{\rho_{mn}} \quad [5.51]$$

e

$$\frac{1}{K^2} = -\frac{C}{2Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q})} + \frac{1}{2}, \quad [5.52]$$

tem-se

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = W^2 \left[ \frac{1}{K^2} - \text{sen}^2 \frac{\bar{u}}{2} \right] = \frac{W^2}{K^2} \left[ 1 - K^2 \text{sen}^2 \frac{\bar{u}}{2} \right]. \quad [5.53]$$

Supondo, em primeira opção,  $W^2 > 0$  e extraíndo a raiz,

$$\frac{(\Delta\rho_0)}{\rho_{mn}} \approx \frac{W}{K} \left( 1 - K^2 \text{sen}^2 \frac{\bar{u}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad [5.54]$$

No caso  $W^2 < 0$  pode-se partir de

$$\Psi_H = \Psi_H^0 - \frac{1}{2}(\Delta\rho_0)^2 n\tilde{q}' \Psi_0' - Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m |\mathcal{J}_0(n\tilde{q})| \cos \bar{u}; \quad [5.55]$$

então, impondo  $\Psi_H = \text{constante}$  e isolando  $(\Delta\rho_0)$ ,

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = \frac{2}{(n\tilde{q}' \Psi_0')|_{\rho_{mn}} \rho_{mn}^2} \left[ -(\Psi_H^0 - \Psi_H) - Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m |\mathcal{J}_0(n\tilde{q})| \cos \bar{u} \right]; \quad [5.56]$$

fazendo  $\cos \bar{u} = -1 + 2 \cos^2 \frac{\bar{u}}{2}$ , vem

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = \frac{2}{A} \left[ -C + Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m |\mathcal{J}_0(n\tilde{q})| - 2Y\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m |\mathcal{J}_0(n\tilde{q})| \cos^2 \frac{\bar{u}}{2} \right], \quad [5.57]$$

ou

$$\frac{(\Delta\rho_0)^2}{\rho_{mn}^2} = \frac{4Y}{A} \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m |\mathcal{J}_0(n\tilde{q})| \left[ \left( -\frac{C}{2Y \left(\frac{\rho_0}{b}\right)^m |\mathcal{J}_0(n\tilde{q})|} + \frac{1}{2} \right) - \cos^2 \frac{\bar{u}}{2} \right]; \quad [5.58]$$

então

$$\frac{(\Delta\rho_0)}{\rho_{mn}} \approx \pm \frac{W}{K} \left(1 - K^2 \cos^2 \frac{\bar{u}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad [5.59]$$

Assim, tomando-se sempre o módulo de  $\mathcal{J}_0(n\tilde{q})|_{\rho_{mn}}$ , a expressão é válida para ambos os casos ( $\mathcal{J}_0(n\tilde{q}) > 0$  ou  $\mathcal{J}_0(n\tilde{q}) < 0$ ), com o único cuidado de alterar o seno para um co-seno no segundo caso.

Resumindo:

$$\frac{(\Delta\rho_0)}{\rho_{mn}} \approx \begin{cases} \pm \frac{W}{K} \left(1 - K^2 \sin^2 \frac{\bar{u}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{para } \mathcal{J}_0(n\tilde{q})|_{\rho_{mn}} > 0; \\ \pm \frac{W}{K} \left(1 - K^2 \cos^2 \frac{\bar{u}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{para } \mathcal{J}_0(n\tilde{q})|_{\rho_{mn}} < 0. \end{cases}$$

Pode-se agora, por comparação com o diagrama de fases do movimento do pêndulo não-linear, deduzir a equação da separatriz e dela obter a largura das ilhas magnéticas. A separatriz é representada com  $K = 1$ ; com  $K > 1$  tem-se as curvas de libração e com  $K < 1$  as curvas de rotação, conforme esquematizado na figura (5.1, pag.69).

### 5.5. Expressão para a largura das ilhas magnéticas

Tomando então  $K = 1$ , com  $\bar{u} = m\theta_t - n\varphi - n\tilde{q}\text{sen}\theta_t$ :

$$\frac{(\Delta\rho_0)}{\rho_{mn}} \approx \pm W \left[ 1 - \text{sen}^2 \left( \frac{m\theta_t - n\tilde{q}\text{sen}\theta_t}{2} - \frac{n\varphi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \pm W \cos \left[ \frac{m\theta_t}{2} - \frac{n\tilde{q}\text{sen}\theta_t}{2} - \frac{n\varphi}{2} \right]. \quad [5.60]$$

Para uma seção  $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \text{etc}$ ,

$$\frac{(\Delta\rho_0)}{\rho_{mn}} \approx \pm W \cos \left( \frac{m\theta_t - n\tilde{q}\text{sen}\theta_t}{2} \right) \quad [5.61]$$

ou

$$(\Delta\rho_0) = \rho_0 - \rho_{mn} = \pm \rho_{mn} W \cos \left( \frac{m\theta_t - n\tilde{q}\text{sen}\theta_t}{2} \right); \quad [5.62]$$

portanto

$$\rho_0 = \rho_{mn} \left[ 1 \pm W \cos \left( \frac{m\theta_t - n\tilde{q}\text{sen}\theta_t}{2} \right) \right]. \quad [5.63]$$

A função dada pela [5.63] é que fornece a estimativa da largura das ilhas magnéticas; para tanto, pode-se esquematizar o seu gráfico em termos de coordenadas pseudo-toroidais, visto que a coordenada  $\rho_0$ , por depender de  $\theta_t$ , não é conveniente como parâmetro para o traçado. A figura (5.2, pag.70) ilustra a [5.63] em termos de  $\rho$  e de  $\theta$  (cuja diferença em relação a  $\theta_t$  foi negligenciada); para evidenciar a dependência de  $\rho_0$  em  $\theta_t$  e seu efeito na descrição das ilhas foi aplicada, ao termo  $(\Delta\rho_0)$ , a conversão dada em [B.40] para  $\rho_t$  (aqui confundido com  $\rho_0$ ). Pelo gráfico, nota-se uma certa desigualdade na largura das ilhas ao longo do percurso poloidal; como se procura apenas uma estimativa para esse valor, tais diferenças não são relevantes. É viável, nesse contexto, tomar a semi-largura das ilhas em termos do próprio  $\rho_0$ , maximizando o co-seno na [5.63]. Ainda no gráfico (5.2), pode ser observada a não-uniformidade na extensão poloidal das ilhas, que se deve aos efeitos toroidais envolvidos na aproximação considerada (evidenciados no fator  $\tilde{q}$ ); em uma aproximação cilíndrica, o ciclo poloidal seria dividido em ângulos iguais.

Desta forma pode-se dizer, partindo da [5.63], que o espaçamento radial entre a separatriz e a superfície racional de equilíbrio é dado pelo termo

$$\delta = \rho_{mn} W \cos \left( \frac{m\theta_t - n\tilde{q}\text{sen}\theta_t}{2} \right); \quad [5.64]$$

e, pela [5.64], a semi-largura aproximada da ilha é obtida para os valores de  $\theta_t$  que maximizam o co-seno; assim,

$$\delta_{max} = \rho_{mn} W, \quad [5.65]$$

que é a fórmula procurada para cálculo da largura das ilhas magnéticas geradas pela pequena perturbação criada pelo anel de corrente, segundo a aplicação do Método das Médias. Os resultados obtidos seguem no capítulo seis.

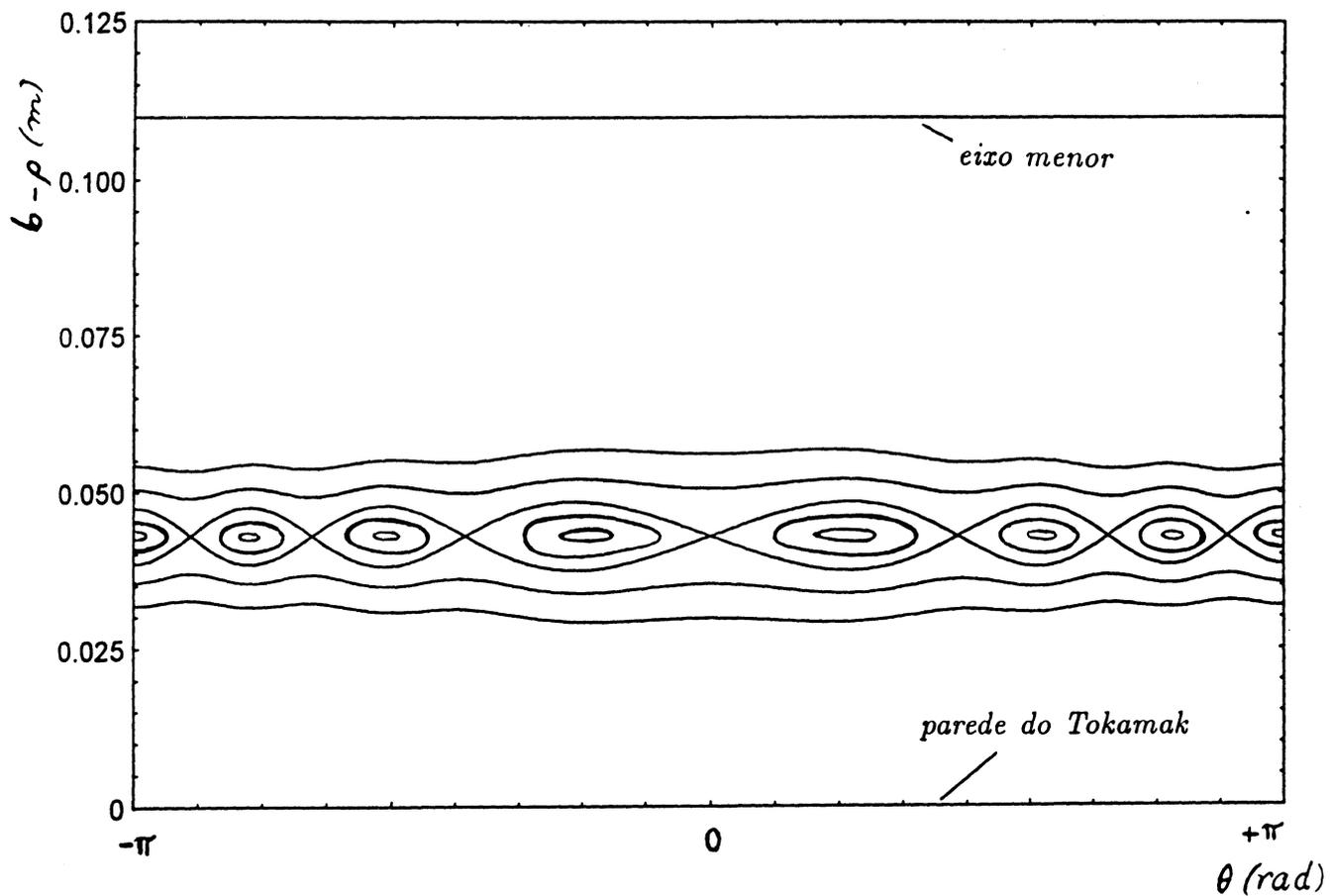


Figura 5.1

Separatriz com Curvas de Libração  
e de Rotação

$$(m = 7 ; n = 2)$$

(para uma visualização mais clara,  
a escala vertical foi exagerada)

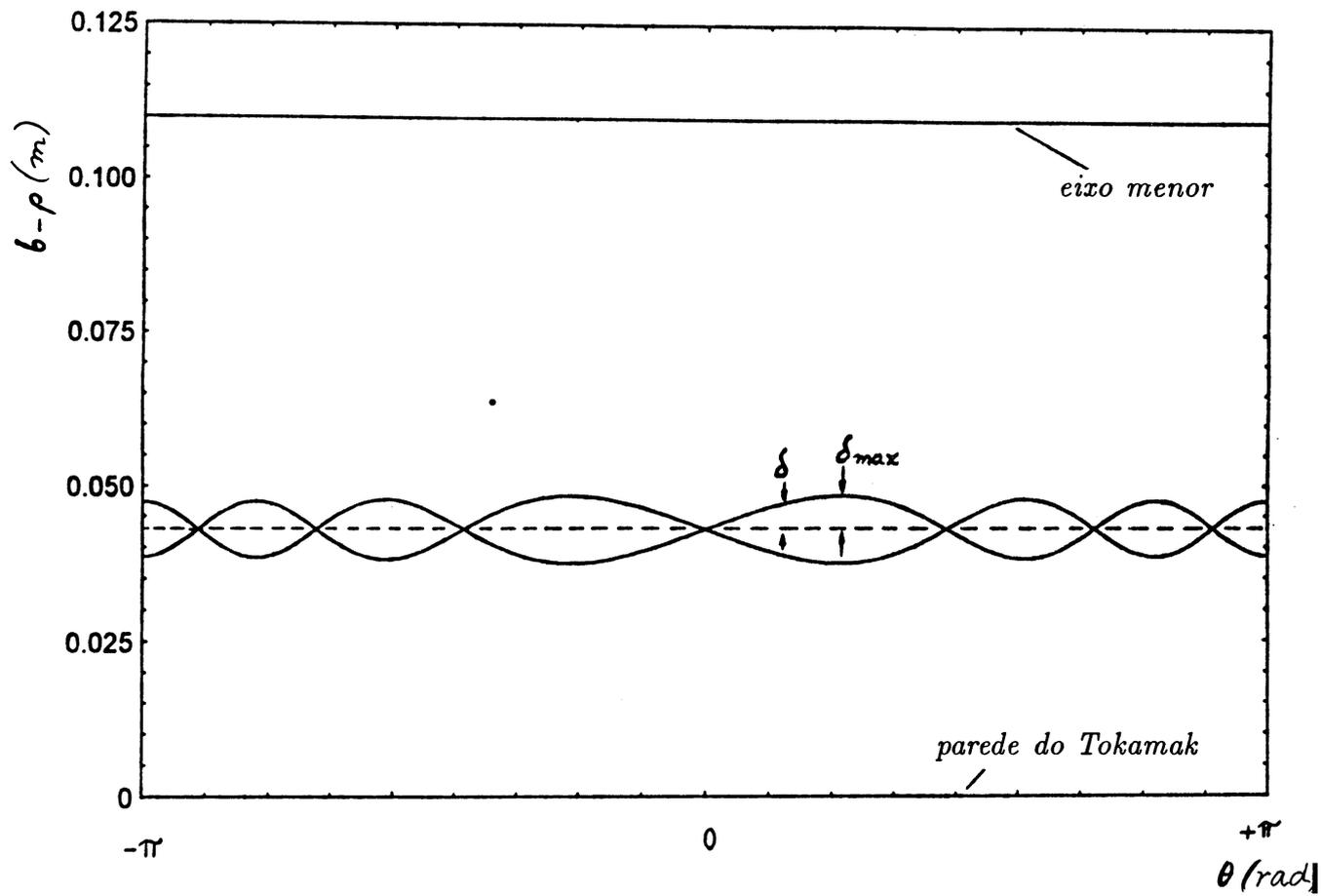


Figura 5.2

Separatriz com Indicação da Largura  
das Ilhas Magnéticas

$$(m = 7 ; n = 2)$$

(para uma visualização mais clara,  
a escala vertical foi exagerada)

## CAPÍTULO SEIS

### RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS

Neste capítulo são apresentados, em termos numéricos, os resultados obtidos para a largura das ilhas magnéticas criadas pelos anéis de corrente, conforme a formulação obtida no capítulo cinco; é exposta uma justificativa para a escolha dos valores dos parâmetros, seguida de um levantamento dos perfis característicos do equilíbrio utilizado. A largura das ilhas é expressa, nos dois modos estudados, em função da corrente  $I$  aplicada no anel.

#### 6.1. Parâmetros do Tokamak (TBR 1)

Neste trabalho, foram escolhidos os parâmetros do Tokamak TBR 1, em operação no Instituto de Física da USP. Seus raios maior ( $R_0$ ) e menor ( $b$ ) são iguais a  $0,30m$  e  $0,11m$ , respectivamente. Para o raio da coluna de plasma ( $a$ ), adota-se  $0,08m$ , que é o raio do chamado "limitador material", que consiste em um anel metálico delgado posicionado em um plano  $\varphi = constante$  e que tem por finalidade deter o deslocamento da coluna de plasma (o limitador material não deve ser confundido com o limitador ergódico, constituído pelos anéis externos ao Tokamak; no presente trabalho, o efeito que o limitador material exerce sobre as linhas de campo e superfícies magnéticas fora da coluna de plasma é ignorado, visando a simplificação do modelo). Para o campo magnético toroidal de equilíbrio tem-se o valor medido de  $0,50T$  no eixo menor do toro. A corrente de plasma  $I_p$ , o fator de segurança na borda do plasma  $\bar{q}(a)$  e o parâmetro  $\gamma$  se encontram vinculados, e devem ser encaminhados certos ajustes para que fiquem consistentes entre si:  $I_p$  pode ser medida por uma bobina externa ao vaso toroidal e é da ordem, tipicamente, de  $10kA$  (este valor se refere ao "platô" da descarga de plasma, com duração da ordem de  $5ms$ ). Quanto à distribuição radial da densidade de corrente  $j_\varphi(\rho)$ , até o momento se dispõe apenas de modelos que procuram conduzir a resultados coerentes com a configuração magnética

esperada. É o caso da função "peaked model", apresentada conforme [3.12], que define um pico ( $j_\varphi(0) = j_0$ ) no centro do plasma, decaindo até  $j_\varphi(a) = 0$  na sua fronteira. Escolhido esse perfil na equação de Grad-Shafranov, o fator de segurança fornecido pela solução envolve o parâmetro  $\gamma$  no seu perfil radial, bem como o valor da corrente de plasma, conforme [3.23]. A comparação entre  $\bar{q}(a)$  e  $\bar{q}(0)$  conduz ao vínculo  $\bar{q}(a) = (\gamma + 1)\bar{q}(0)$  (com  $\bar{q}(0) = 1$ , conforme exposto na seção [1.4]) . Assim, o fator de segurança médio na fronteira do plasma é adotado como inteiro (posto que  $\gamma$  também o foi). Fazendo  $\rho_0 = a$  na [3.23], tem-se

$$\bar{q}(a) = \frac{2\pi a^2 B_\varphi}{\mu_0 I_p R_0}, \quad [6.1]$$

que resulta em  $\bar{q}(a) = 5,3$  tomando  $I_p = 10kA$ ; atendendo à exigência de  $\bar{q}(a)$  inteiro, arredonda-se para 5 e, para tanto,  $I_p$  deve ser ligeiramente modificado usando a [6.1], o que fornece  $I_p = 10,67kA$ . O parâmetro  $\gamma$ , portanto, assume o valor  $\gamma = 5 - 1 = 4$ .

Um resumo desses valores se encontra na Tabela (6.1).

TABELA 6.1. Parâmetros do TBR 1

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	VALOR
$R_0$	raio maior	0.30 m
$b$	raio menor	0.11 m
$a$	raio da coluna de plasma	0.08 m
$q(a)$	fator de segurança na borda do plasma	5
$\gamma$	parâmetro	4
$I_p$	corrente de plasma	10.67 kA
$B_\varphi$	campo toroidal	0.50 T

Quanto aos parâmetros referentes aos anéis de corrente, foram arbitrados tendo em vista um experimento hipotético, cujas disposições construtivas não divergissem muito das condições supostas para simplificação do modelo. Os limitadores ergódicos construídos para o TBR 1 [Araújo, 1993] em número de 4 não são, em primeiro lugar, igualmente espaçados no percurso toroidal (figura 1.10, pag.25), o que dificultaria a introdução da dependência em  $z'$ , modulada em pulso quadrado, conforme [4.47]; além disso, os 14 fios que formam cada anel não são uniformemente espaçados (visando incorporar o efeito toroidal, o que não é considerado por Pereira [Pereira, 1994] devido ao tratamento em geometria cilíndrica).

A escolha do número  $L$  de fios está associada aos modos que se deseja perturbar. No caso, tem-se em vista a produção de estocasticidade na periferia do plasma, situada radialmente em  $a = 8,00\text{cm}$  e que, neste modelo, é caracterizada pelo fator de segurança  $\bar{q}(a) = 5$ . Uma alternativa apropriada é produzir duas cadeias de ilhas magnéticas em posições radiais determinadas, de forma que a fronteira do plasma fique compreendida entre as duas. Os dois modos têm necessariamente o mesmo valor de  $m$ , pois uma vez instalado o anel com  $L$  fios, tem-se, pela [4.51],  $m = \frac{L}{2}$ . Conforme a formulação obtida no capítulo cinco, a largura das ilhas decresce com o aumento de  $n$ . Assim, a fronteira do plasma deve ficar entre as superfícies racionais  $(m, 1)$  e  $(m, 2)$ . É plausível, portanto, a escolha de  $m = 7$ , pois leva à destruição das superfícies magnéticas racionais associadas aos fatores de segurança  $\frac{7}{1} = 7,0$  e  $\frac{7}{2} = 3,5$ ; assim a periferia do plasma, com fator de segurança 5, fica sujeita às condições desejadas. O número de fios do anel de corrente fica determinado pela [4.51]:  $L = 2m = 14$ .

É mantido o valor da largura de cada anel  $g = 8,0\text{cm}$ , e seu posicionamento radial é suposto coincidente com o raio menor do Tokamak, ou seja,  $0,11\text{m}$ . Deve-se lembrar que, de acordo com as suposições feitas no capítulo quatro, a espessura da parede metálica do vaso toroidal foi desprezada, tendo em vista o modelo de campo de vácuo adotado. Os parâmetros analisados nesta seção estão agrupados na Tabela (6.2).

TABELA 6.2. Parâmetros dos anéis de corrente

Modos estudados:

$$m = 7, n = 1;$$

$$m = 7, n = 2.$$

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	VALOR
$p$	número de anéis	4
$g$	largura	0.08 m
$L$	número de fios	14
$I$	corrente	100 a 500A

## 6.2. Perfil radial das quantidades de equilíbrio

Para as quantidades de interesse, a tabela (6.3) referencia as expressões obtidas no capítulo três, que, quando aplicadas aos parâmetros do item anterior, resultam nas curvas das figuras (6.1 a 6.9, pags.79 a 86), que descrevem os seus perfis radiais.  $j_\varphi$  é a densidade de corrente;  $\Lambda$  o coeficiente de assimetria do campo poloidal;  $\Psi_0$  a função de fluxo magnético do modelo cilíndrico, tomada como aproximação de ordem zero do fluxo no modelo toroidal, sendo o campo poloidal médio  $B_\theta$ , proporcional à sua primeira derivada radial  $\Psi_0'$ ;  $\bar{q}$  é o fator de segurança médio. São utilizadas unidades do S.I.

TABELA 6.3. Perfil das quantidades de equilíbrio

SÍMBOLO	$0 < \rho_0 < a$	fig	$a < \rho_0 < b$	fig
$j_\varphi$	[3.12]	(6.1)	(zero)	-
$\Psi_0$	[3.21]	(6.2)	[3.34]	(6.3)
$\langle B_{\theta_i} \rangle$	[3.19]+[3.22]	(6.4)	[3.19]+[3.35]	(6.5)
$\Lambda$	[3.14]	(6.6)	[3.41]	(6.7)
$\bar{q}$	[3.24]	(6.8)	[3.36]	(6.9)

Observação: para a interpretação dos gráficos dos perfis radiais (figuras 6.1 a 6.9, pags. 79 a 86), é viável negligenciar a diferença entre as coordenadas  $\rho_0$  (do sistema adotado) e  $\rho$  (do sistema pseudo-toroidal).

Pode-se destacar, por observação dos gráficos obtidos, o pico da densidade de corrente no centro do plasma e seu decaimento até a anulação na fronteira do plasma; na função de fluxo, o ponto de inflexão próximo à metade do raio da coluna de plasma, responsável pelo máximo do campo poloidal médio nessa posição; o decaimento do campo poloidal fora do plasma, bem como o crescimento significativo do coeficiente de assimetria nessa região; quanto ao fator de segurança, seu perfil dentro do plasma é coerente com os resultados inferidos a partir de observações experimentais realizadas no TBR-1 [Vannucci e Gill 1989].

### 6.3. Coordenada radial correspondente aos modos estudados

#### 6.3.a) modo (7,2)

A superfície magnética racional associada a  $m = 7$  e  $n = 2$  tem seu fator de segurança

médio dado por

$$\bar{q}(\rho_{mn}) = \frac{m}{n} = \frac{7}{2} = 3,5 . \quad [6.2]$$

De acordo com os gráficos (6.8) e (6.9), esta superfície se enquadra no caso  $0 < \rho_0 < a$ . Tomando a [3.24] com  $\gamma = 4$ , para  $m = 7$  e  $n = 1$ , o valor de  $\rho_{mn}$  pode ser obtido com resolução numérica, por tentativa e erro, da equação

$$1 + \left(1 - \frac{\rho_{mn}^2}{a^2}\right) + \left(1 - \frac{\rho_{mn}^2}{a^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\rho_{mn}^2}{a^2}\right)^3 + \left(1 - \frac{\rho_{mn}^2}{a^2}\right)^4 - \frac{n \bar{q}(a)}{m} = 0 , \quad [6.3]$$

que oferece como resultado

$$\rho_{mn} = 0,06685m . \quad [6.4]$$

### 6.3.b) modo (7,1)

Como o fator de segurança médio da superfície magnética racional associada a este modo vale 7, os gráficos (6.8) e (6.9) indicam que se trata do caso  $a < \rho_0 < b$ . O valor de  $\rho_{mn}$  pode ser obtido diretamente da [3.36]:

$$\rho_{mn} = a \sqrt{\frac{m}{n \bar{q}(a)}} , \quad [6.5]$$

e resulta

$$\rho_{mn} = 0,09466m . \quad [6.6]$$

As coordenadas radiais fornecidas por [6.4] e [6.6], quando levadas às expressões dos perfis radiais do ítem 6.2, resultam nos valores utilizados para o cálculo da largura das ilhas magnéticas para os dois modos estudados.

## 6.4. Largura das ilhas magnéticas

A semi-largura das ilhas é fornecida pela [5.65], onde  $\rho_{mn}$  foi obtido no ítem (6.3) e  $W$  é calculado pela [5.51]

$$W^2 = \frac{4Y}{A} \left(\frac{\rho_{mn}}{b}\right)^m \mathcal{J}_0(n\tilde{q})|_{\rho_{mn}} . \quad [6.7]$$

Nesta expressão,  $Y$  representa um agrupamento de parâmetros relacionados principalmente ao limitador, conforme a [5.28] ; tem-se ainda  $A = -\rho_{mn}^2 \Psi_H^0''|_{\rho_{mn}}$  , onde  $\Psi_H^0''$  vem da [5.14]:

$$\Psi_H^0'' = -n \bar{q}' \Psi_0' |_{\rho_{mn}} , \quad [6.8].$$

onde  $\bar{q}'$  e  $\Psi_0'$  são dados, respectivamente, pelas [3.25] e [3.22] para  $0 < \rho_0 < a$  e pelas [3.37] e [3.35] para  $a < \rho_0 < b$ ; para o cálculo de  $W$  na [6.7], é necessário ainda obter o valor de  $\tilde{q}$ , dado pela [3.20] para  $0 < \rho_0 < a$  e pela [3.42] para  $a < \rho_0 < b$ . Na [3.20], o coeficiente de assimetria do campo poloidal  $\Lambda$  deve ser calculado pela [3.14] (o valor final depende de uma integração numérica). Conforme já foi exposto no capítulo cinco, o problema de valores negativos para  $W^2$ , originário do sinal de  $\mathcal{J}_0(n\tilde{q})$ , pode ser facilmente contornado, tomando-se o módulo e trocando a [5.54] pela [5.59], o que altera apenas a disposição poloidal das ilhas, mas não a sua largura.

Alguns resultados intermediários de interesse estão resumidos na Tabela (6.4); são utilizadas unidades do S.I. É interessante expressar a largura das ilhas  $2\delta_{max}$  em função da corrente  $I$  aplicada no limitador.

TABELA 6.4. Resultados numéricos

QUANTIDADE	MODO (7,2)	MODO (7,1)
$\rho_{mn}$	$6,69 \cdot 10^{-2}$	$9,46 \cdot 10^{-2}$
$\mathcal{J}_0(n\tilde{q})$	$-3,25 \cdot 10^{-1}$	$5,49 \cdot 10^{-2}$
$A$	$8,07 \cdot 10^{-3}$	$8,34 \cdot 10^{-3}$
$Y(I)$	$7,05 \cdot 10^{-8} I$	$1,42 \cdot 10^{-7} I$
$W(I)$	$5,89 \cdot 10^{-4} \sqrt{I}$	$3,48 \cdot 10^{-3} \sqrt{I}$
$2\delta_{max}(I)$	$7,88 \cdot 10^{-5} \sqrt{I}$	$6,58 \cdot 10^{-4} \sqrt{I}$

Os valores da largura  $2\delta$  das ilhas magnéticas para os modos (7,2) e (7,1) são mostrados em função da corrente  $I$  no anel, nas figuras (6.10 e 6.11, pags.88 e 89).

É importante lembrar que, apesar de não se ter uma largura uniforme ao longo do percurso poloidal (conforme o esquema mostrado na figura 5.2, pag.70), o interesse é voltado para uma estimativa aproximada das dimensões das ilhas. Fazendo variar  $I$  de 100 a 500 A, a largura varia de 0,8 a 1,8 mm no modo (7,2) e de 6,6 a 14,7 mm no modo (7,1). As ilhas são menores nos modos mais internos devido à ação do limitador, que se concentra na região mais próxima à parede do toro.

### 6.5. Aplicabilidade do Método ao cálculo da largura de ilhas satélites

O método utilizado se aplica de forma idêntica ao cálculo da largura de ilhas satélites. O efeito fica focalizado na escolha da expressão para a coordenada helicoidal. De forma genérica, para o modo  $(m', n)$ , sendo  $m' = m + \Delta m$  (onde  $\Delta m$  é inteiro), a coordenada helicoidal passa a ser  $\chi^2 = m'\theta_t - n\varphi$ . A formulação que descreve o equilíbrio deve ser

reescrita em decorrência dessa alteração, bem como a perturbação no fluxo magnético. Os procedimentos para a obtenção da expressão da semi-largura são análogos, incluindo a função de Bessel  $\mathcal{J}_{\Delta m}(n\tilde{q})$  no lugar de  $\mathcal{J}_0(n\tilde{q})$ , envolvida no cálculo das ilhas primárias. Kucinski e colaboradores efetuaram o cálculo da largura de ilhas magnéticas em plasmas perturbados por hélices ressonantes em Tokamaks: a largura das ilhas satélites mostra forte dependência em  $\tilde{q}$ , ou seja, da assimetria de  $q$  em torno do eixo magnético. O acoplamento entre modos é evidenciado através da função  $\hat{F}^2$  [Kucinski et al. 1991].

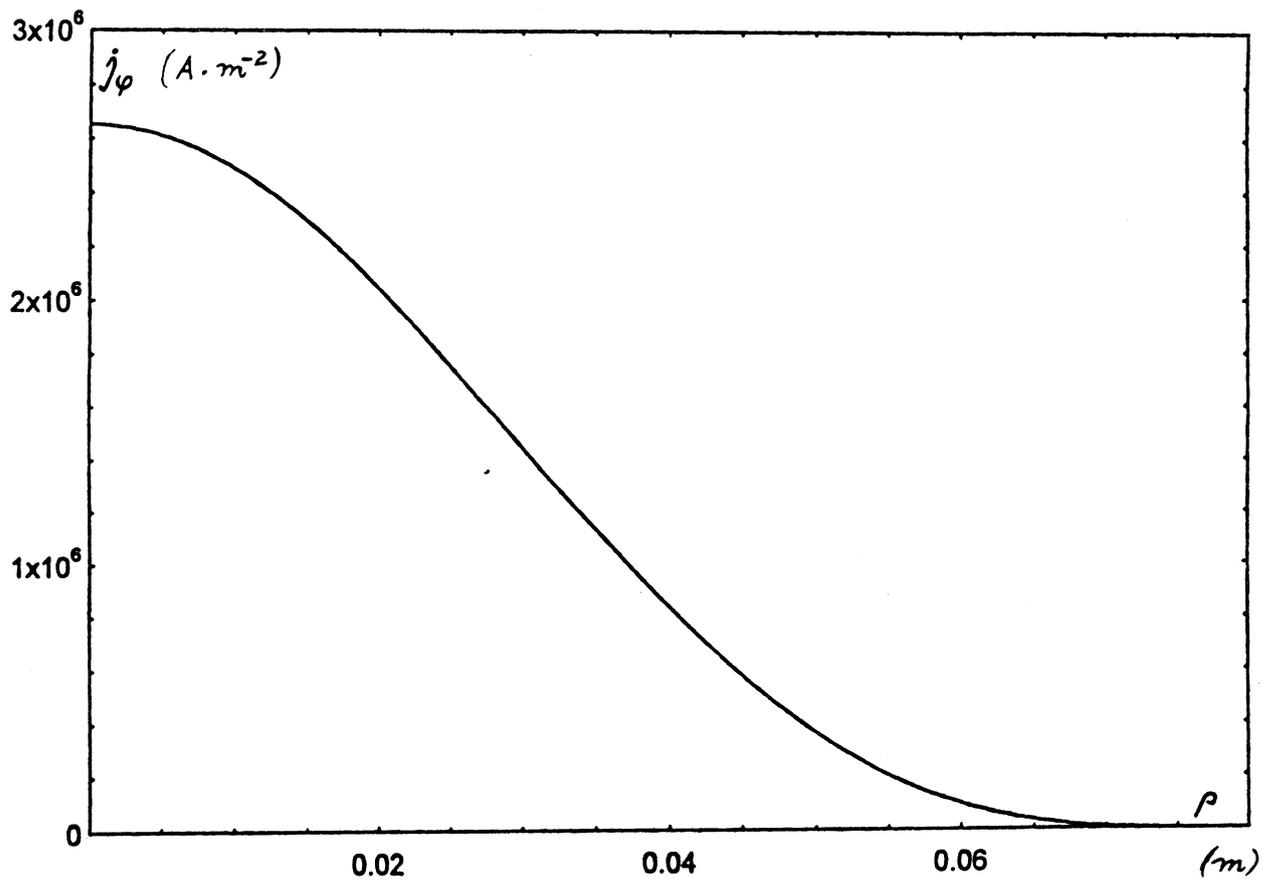


Figura 6.1

Densidade de Corrente

$$\gamma = 4$$

$$(0 < \rho_0 < a)$$

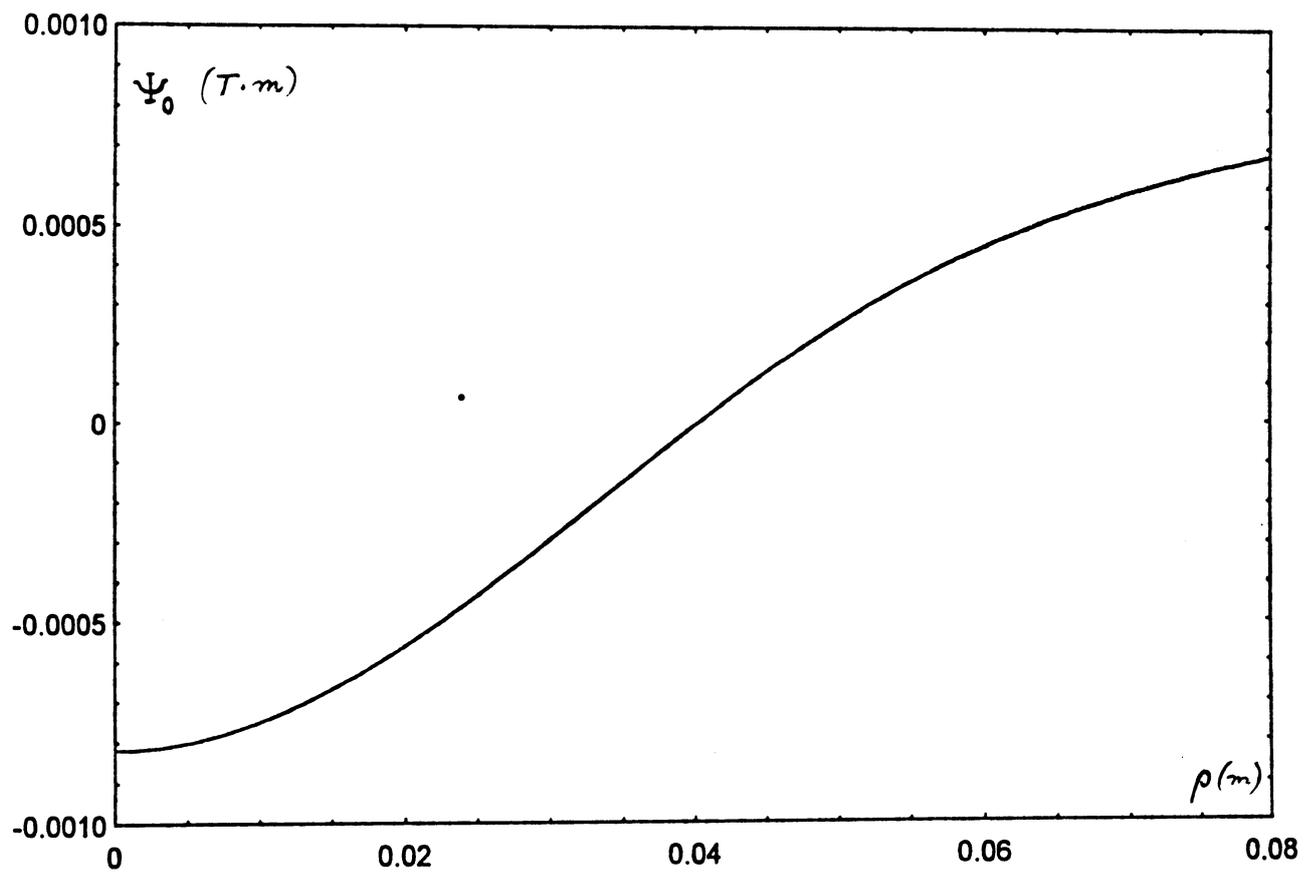


Figura 6.2

Fluxo Toroidal em Aproximação  
de Ordem Zero

(identificável com o fluxo cilíndrico)

$$(0 < \rho_0 < a)$$

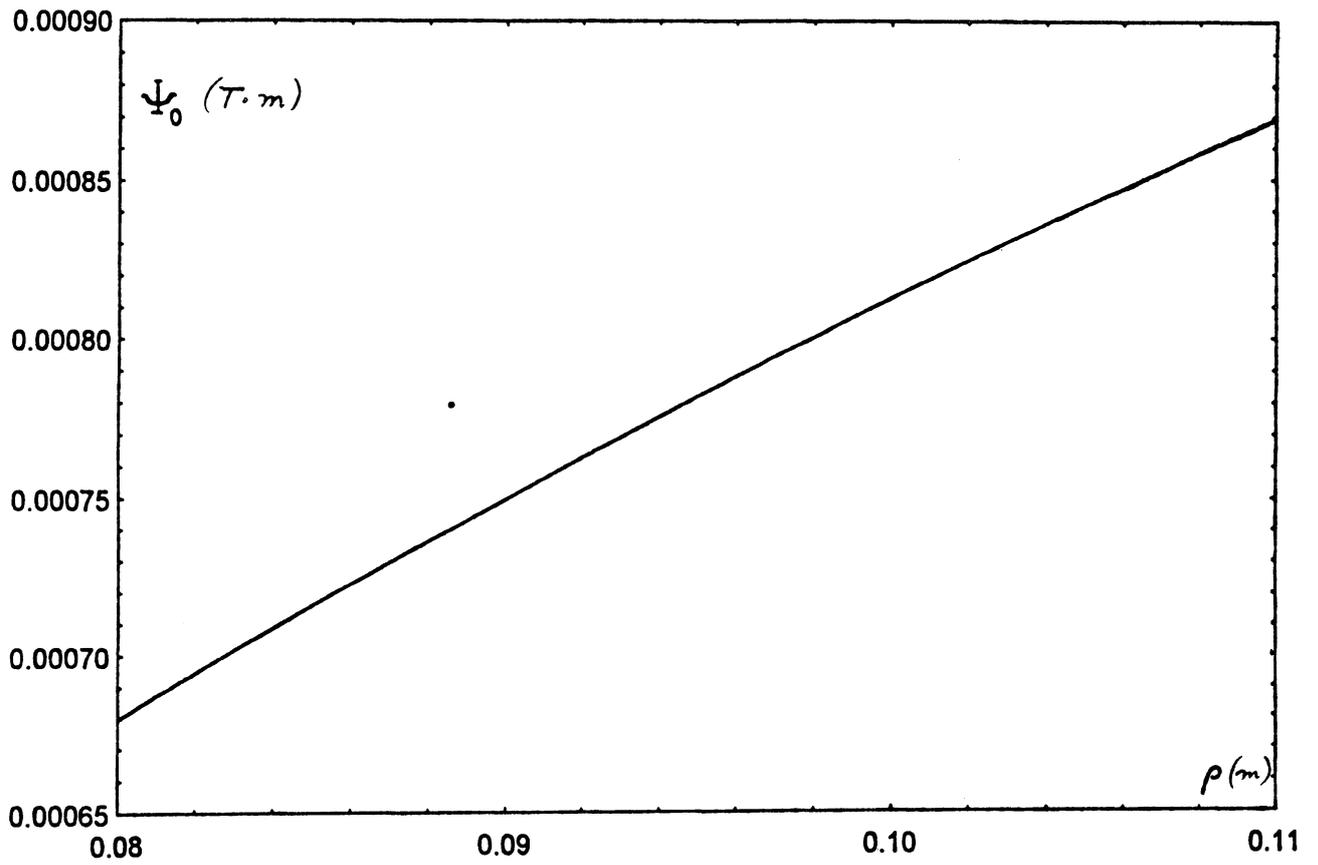


Figura 6.3

Fluxo Toroidal em Aproximação  
de Ordem Zero

(identificável com o fluxo cilíndrico)

$$(a < \rho_0 < b)$$

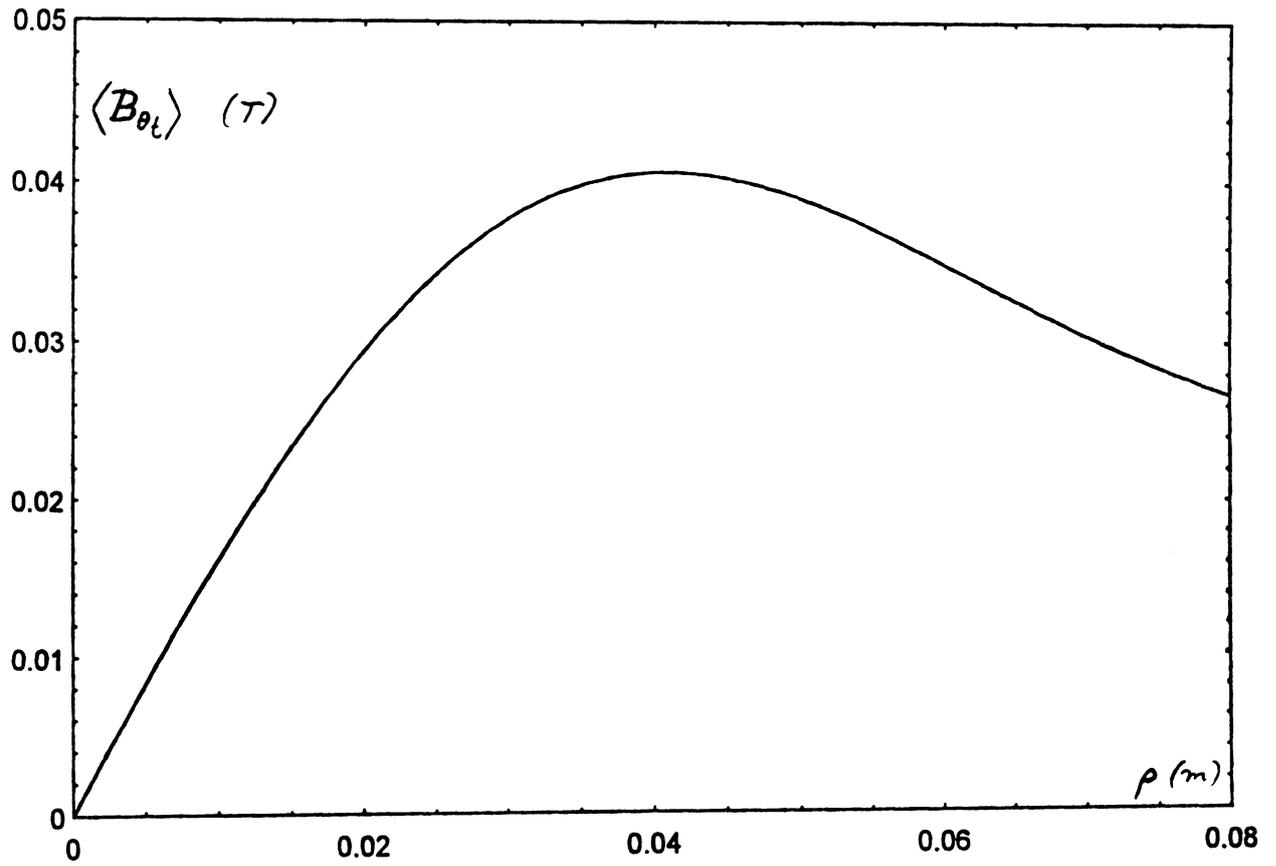


Figura 6.4  
Campo Poloidal Médio

$$(0 < \rho_0 < a)$$

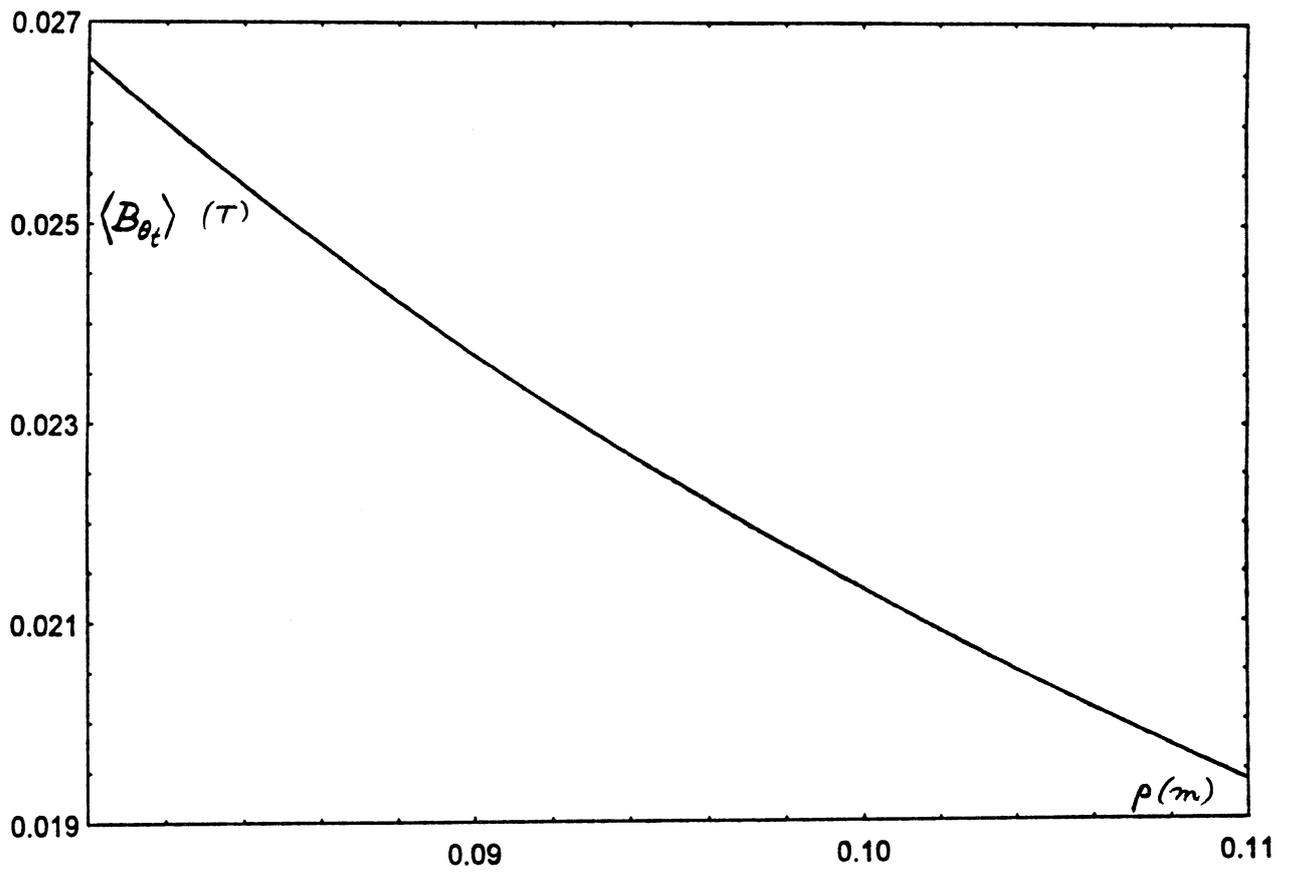


Figura 6.5

Campo Poloidal Médio

$$(a < \rho_0 < b)$$

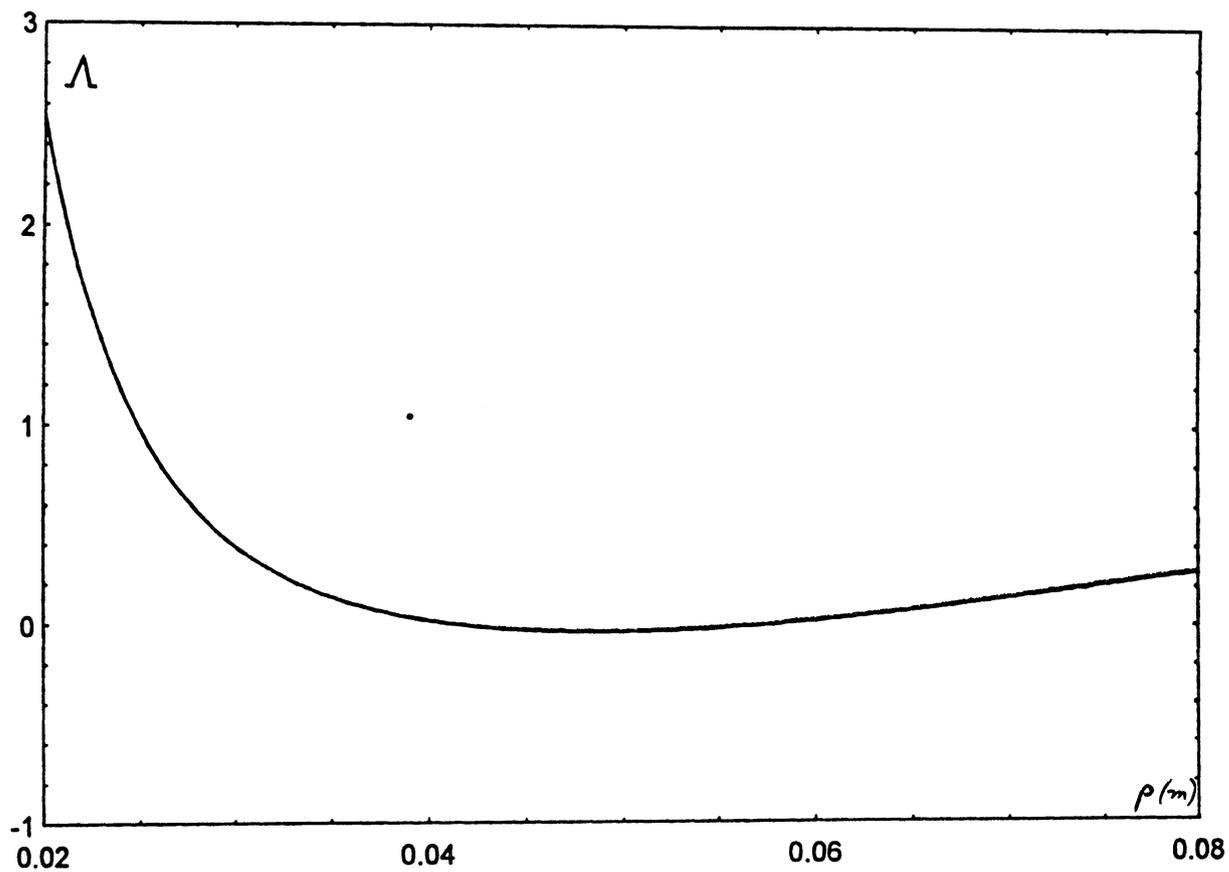


Figura 6.6

Coeficiente de Assimetria do  
Campo Poloidal

$$(0 < \rho_0 < a)$$

Observação: a série adotada para  $\Lambda$  diverge nos pontos próximos ao eixo menor do toro, conforme a [3.14].

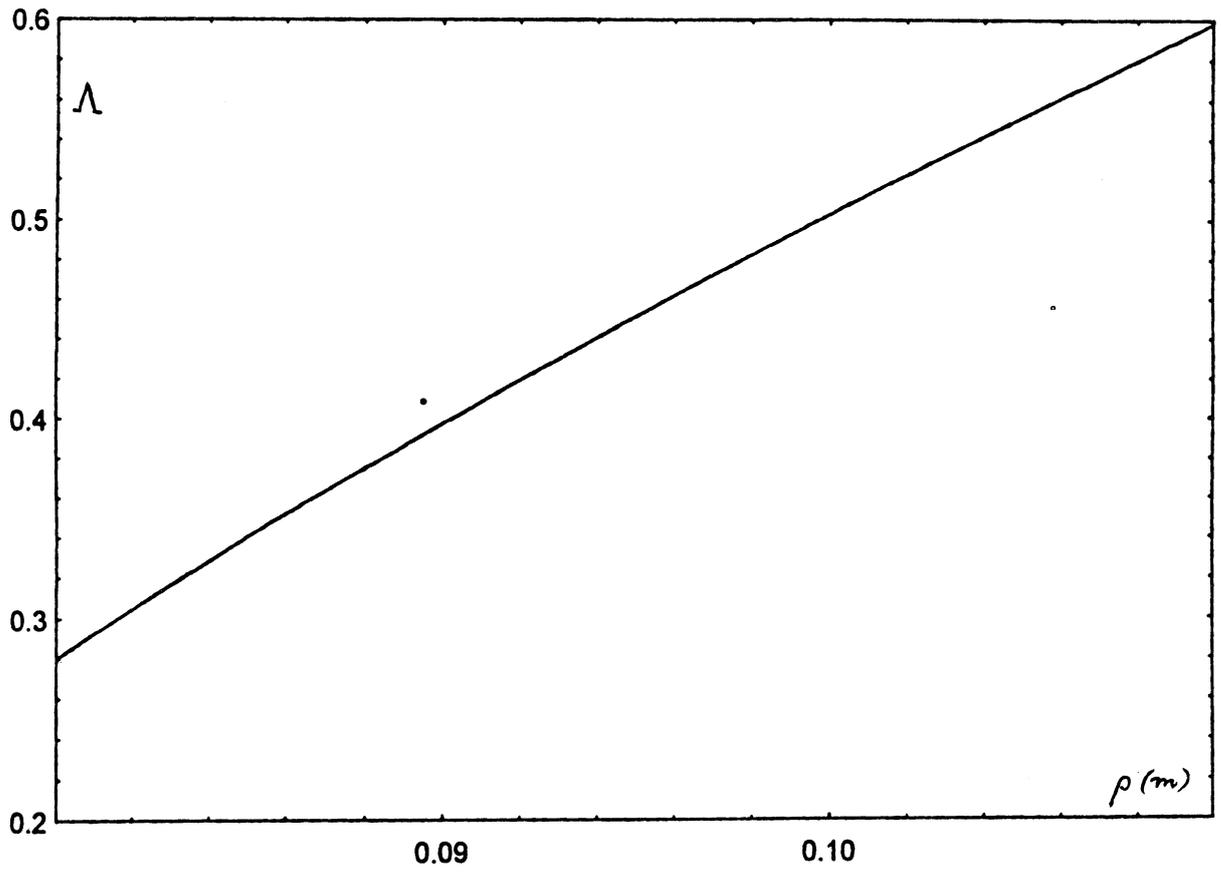


Figura 6.7

Coefficiente de Assimetria do  
Campo Poloidal

$$(a < \rho_0 < b)$$

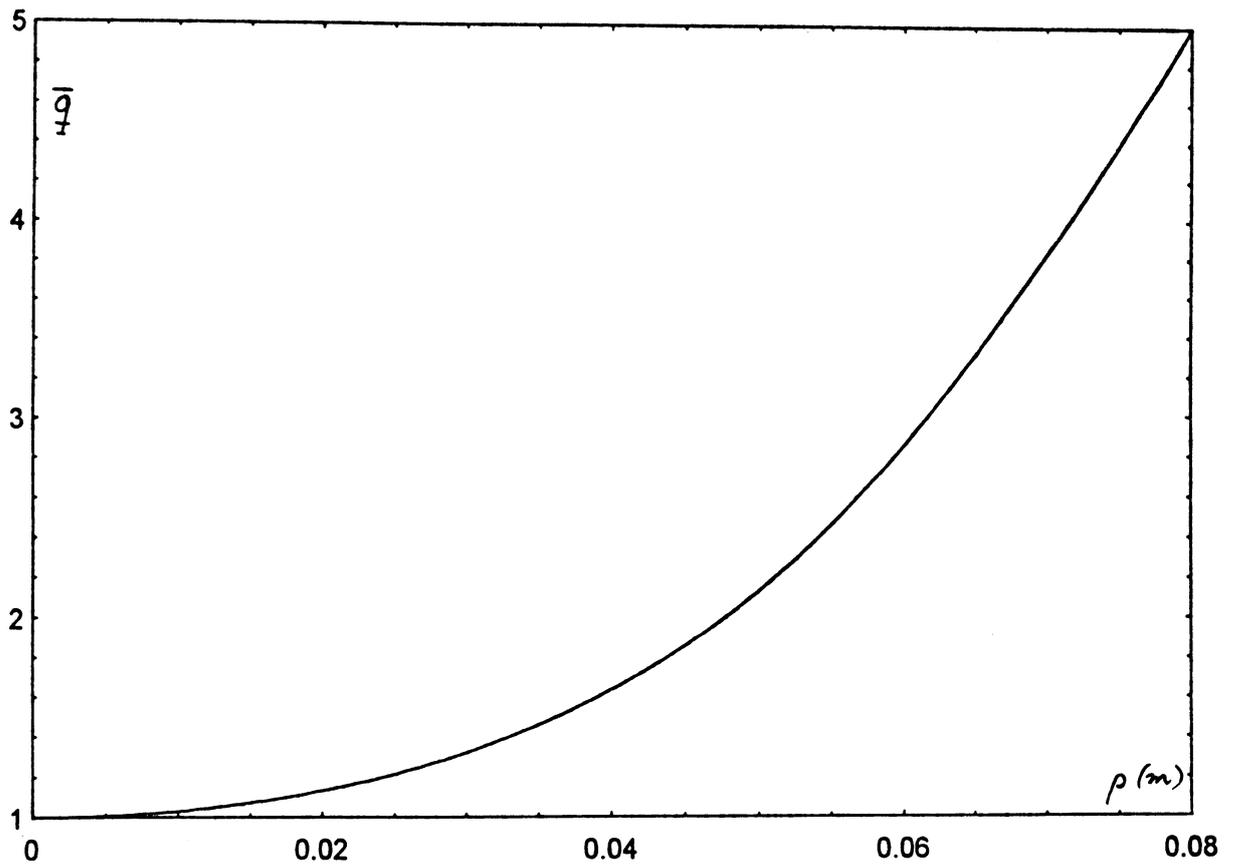


Figura 6.8

Fator de Segurança Médio

$$(0 < \rho_0 < a)$$

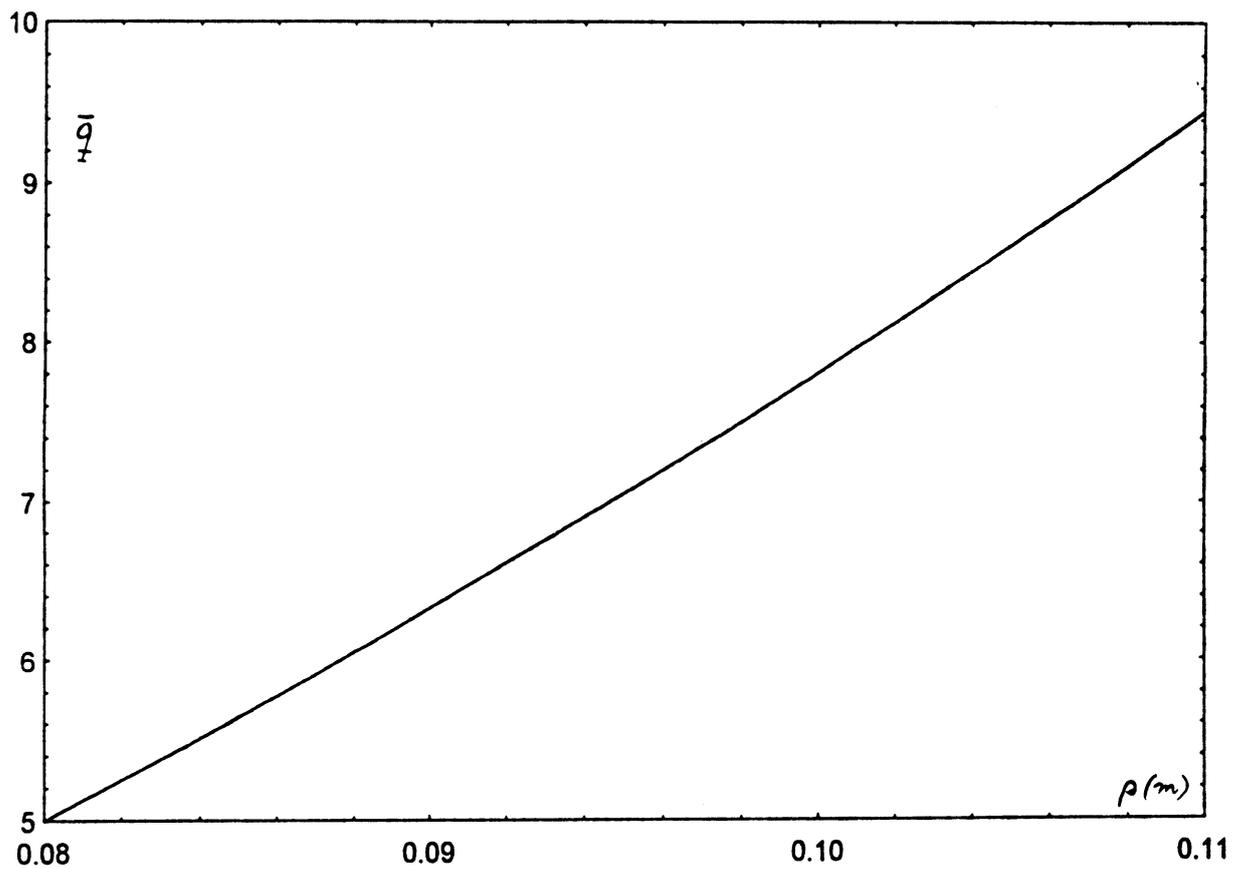


Figura 6.9

Fator de Segurança Médio

$$(a < \rho_0 < b)$$

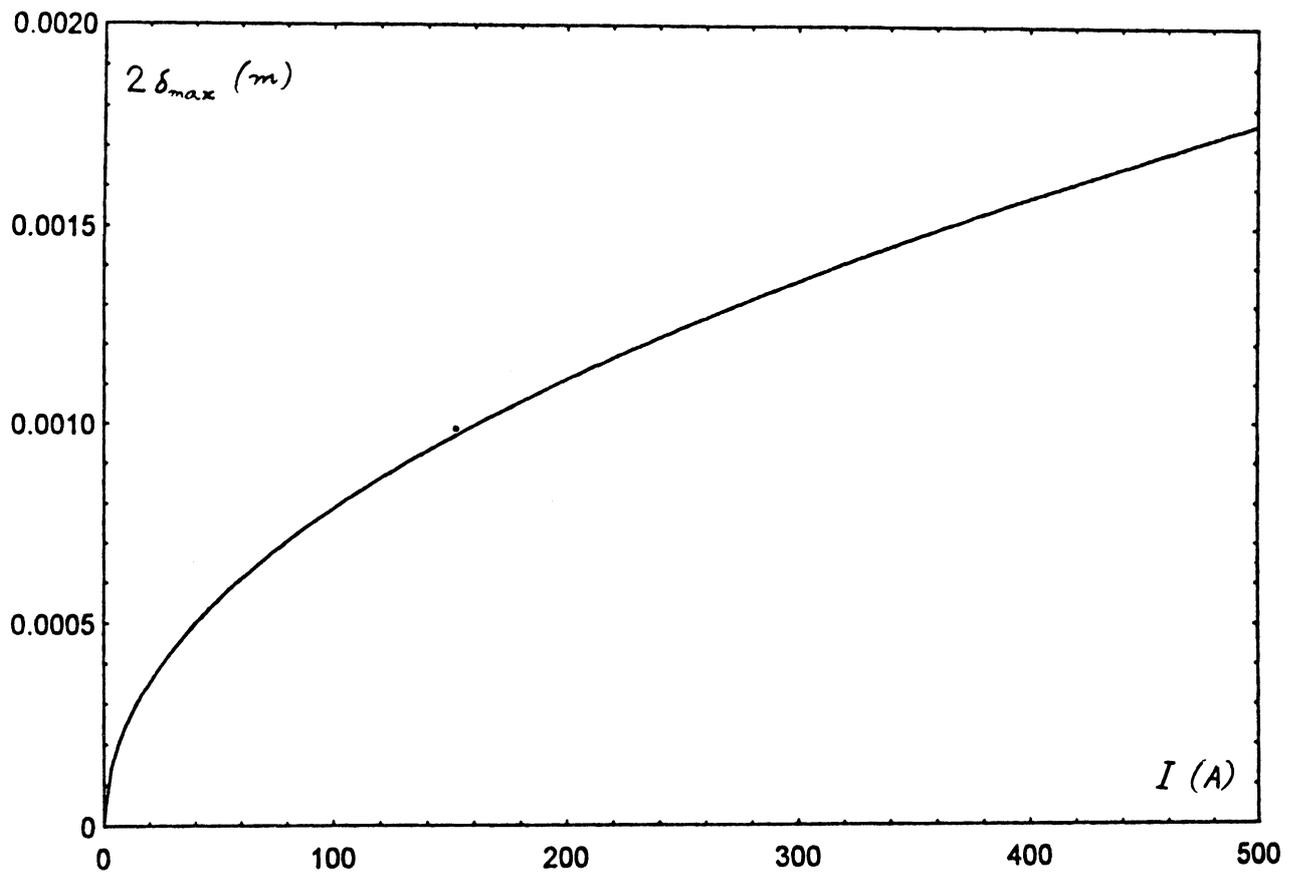


Figura 6.10

Largura das Ilhas Magnéticas Primárias  
em Função da Corrente nos 4 Limitadores

$(m = 7; n = 2)$

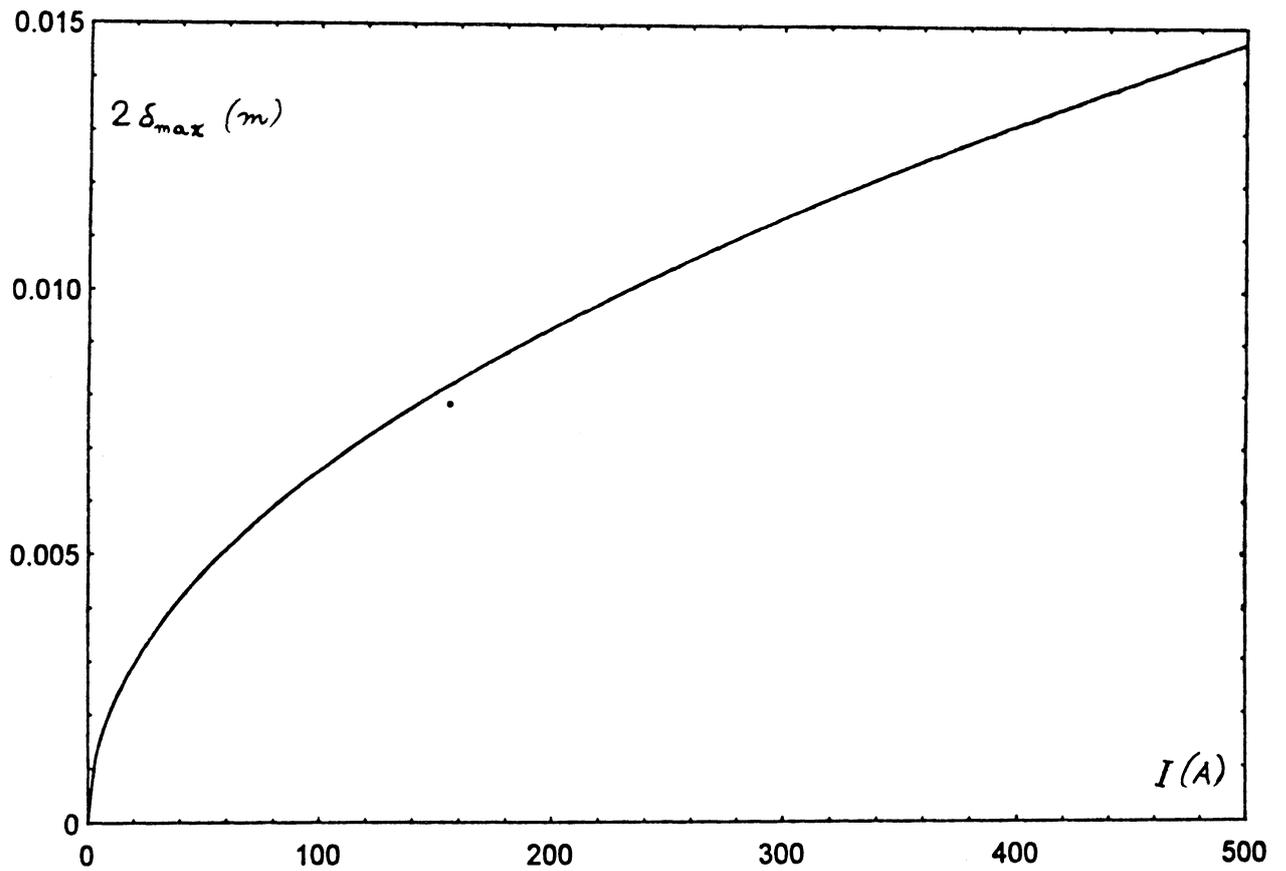


Figura 6.11

Largura das Ilhas Magnéticas Primárias  
em Função da Corrente nos 4 Limitadores

$(m = 7; n = 1)$

## CONCLUSÃO

Este trabalho, de natureza essencialmente analítica, pesquisa a aplicação do Método das Médias [Kucinski et al 1992] na descrição da estrutura magnética de um plasma confinado em Tokamak e perturbado por limitadores ergódicos na forma de anéis de corrente.

Verifica-se que o referido método é aplicável a sistemas dinâmicos em geral, não se restringindo à Física de Plasmas. A condição básica é a existência de alguma forma de simetria, que apresente dupla periodicidade e possa ser destruída por uma pequena perturbação. Um invariante aproximado, fornecido pelo método para descrição do sistema, pode proporcionar uma análise acurada de determinados detalhes do seu comportamento dinâmico. Mostra-se fundamental a escolha apropriada das coordenadas utilizadas, evitando deixar os efeitos de interesse para as correções de ordem superior. Outro ponto crítico é a aplicação da média, que encobre certos aspectos mais complexos do sistema a fim de integrabilizá-lo: a escolha de coordenadas orienta para que os detalhes relevantes sejam preservados nesse processo. Desta forma, o método funciona como um "filtro" para visualizar acuradamente certos aspectos de interesse. Sua eficácia é ideal se a perturbação não for muito intensa; assim o invariante médio não se afasta demasiadamente da realidade física; por outro lado, para perturbações muito pequenas, é viável recorrer a um método aproximativo de formalismo menos sofisticado, que forneça para o sistema uma descrição satisfatória.

Tratando especificamente da estrutura magnética de um plasma toroidal com perturbação não-simétrica, o método se ajusta bem às necessidades do problema: o sistema de coordenadas toroidais polares  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$  apresenta a vantagem de conduzir a um resultado satisfatório em aproximação de ordem zero, por esta englobar os efeitos toroidais: as superfícies coordenadas praticamente coincidem com as superfícies magnéticas, exibindo o mesmo deslocamento no sentido do equador externo do toro. Uma vez estabelecida a

escolha das coordenadas modificadas para o sistema aproximado, a aplicação do método se mostra relativamente simples, conduzindo diretamente à análise da estrutura tanto de ilhas primárias como de ilhas satélites. Pelo Método de Matsuda-Yoshikawa, por exemplo, só se tem acesso à configuração das ilhas primárias; já o emprego da Teoria Canônica de Perturbações envolve maiores dificuldades de ordem matemática [Lichtenberg e Liebermann 1983].

O modelo de equilíbrio utilizado [Kucinski et al. 1990] mostra-se especificamente adequado para os parâmetros do TBR-1 mediante o confronto dos valores do fator de segurança, inferidos a partir de observações experimentais dos modos MHD [Vannucci e Gill 1989], com aqueles fornecidos pelo modelo. Supondo a seção do plasma aproximadamente circular, foram obtidos, a partir da distribuição de densidade de corrente tipo "peaked model", os perfis das demais quantidades de equilíbrio, tanto para a região da coluna de plasma como para a camada de vácuo compreendida entre ela e a parede interna do vaso toroidal. Na aplicação da formulação ao TBR-1, seus efeitos toroidais pronunciados levam a um fator de segurança local  $q(\rho_0, \theta_t)$  cuja variação poloidal, ao longo de uma mesma superfície magnética, é bastante acentuada, notadamente naquelas mais externas. Isso é evidenciado nas expressões obtidas para  $\tilde{q}$  (valor máximo da parte oscilante de  $q$ ), que depende essencialmente do coeficiente  $\Lambda$  (assimetria do campo poloidal, por sua vez associada à indutância interna do plasma). Esse comportamento, característico do modelo de equilíbrio empregado, desempenha um papel importante na configuração das ilhas magnéticas, quando da aplicação da perturbação.

Para a perturbação, foi tomado o limitador ergódico na forma de anéis de corrente: sua principal vantagem sobre as hélices ressonantes vem de disposições construtivas, devido ao espaço exíguo disponível junto à parede externa do vaso toroidal. O estudo do campo criado pelos anéis de corrente foi aproximado mediante simplificações de natureza física e geométrica: ignorou-se o tempo de penetração do campo magnético do anel na parede do

vaso toroidal, e também a resposta dinâmica do plasma; tanto a contribuição dos trechos de fios na direção poloidal quanto os efeitos de borda causados pela sua extensão finita foram tomados como irrelevantes; o espaçamento entre os fios no anel foi considerado uniforme, bem como a distribuição dos anéis no percurso toroidal; além disso, foi suposto que a polaridade da corrente é a mesma em todos os anéis. Quanto à aplicação do método, a componente poloidal do campo provocado pelo limitador tem suprimida sua influência no fluxo aproximado, por ocasião da extração da média, o que é garantido pela imposição de uma constante de integração apropriada. A componente radial, mais diretamente ligada à formação das ilhas, é a que fornece os elementos para a análise da sua estrutura, sendo proporcional à corrente aplicada nos anéis, o que leva a largura das ilhas a ser proporcional à raiz quadrada dessa corrente. A configuração e as dimensões das ilhas são fortemente influenciadas pelo valor máximo da parte oscilante do fator de segurança (mencionada no parágrafo anterior): para Tokamaks com pequena razão de aspecto (o que implica em um alto valor para  $\tilde{q}$ ), verifica-se, pela equação da separatriz, uma distribuição não-uniforme das extensões das ilhas ao longo de um percurso poloidal; numa aproximação cilíndrica [Pereira 1994], [Vasconcelos 1995], essa distribuição se mostra uniforme, assim como o aumento da largura das ilhas com a coordenada radial se mostra mais acentuado. Essa última constatação levaria a crer que a estocasticidade na periferia do plasma pode ser conseguida com um valor crítico de corrente  $I$  que não chega a afetar a região interna do plasma. A introdução do efeito toroidal, evidenciada na [5.51] pelo fator  $\mathcal{J}_0(n\tilde{q})$  (associado à assimetria do campo poloidal), causa um decréscimo na semi-largura  $\delta_{max}$ . Essa interpretação converge com os resultados obtidos analiticamente por Camargo [Camargo 1989] pelo Método de Cary em perturbações de hélices ressonantes, onde se constata que a largura das ilhas, descrita pelo invariante aproximado, é maior sem a introdução da correção toroidal.

Nesse contexto, e atendo-se aos aspectos que concernem às ilhas magnéticas primárias,

seria possível concluir que a corrente crítica, para produzir estocasticidade próximo à fronteira do plasma preservando a estrutura das camadas internas, tende a ser mais baixa para Tokamaks com grande razão de aspecto, nos quais os efeitos toroidais são menos acentuados, levando a uma menor assimetria do campo poloidal e a um fator de segurança local com menor variação poloidal. Contudo, pode-se contestar essa proposição se for considerada a formação das ilhas satélites que ocorre no modelo toroidal: essas cadeias de ilhas, com larguras usualmente inferiores às das ilhas primárias, inserem-se em posições radiais intermediárias, favorecendo a formação de estocasticidade; devido a esse fato, a corrente crítica será mais baixa. Portanto, para uma análise mais rigorosa, seria desejável o estudo da configuração de ilhas satélites.

Os resultados obtidos analiticamente neste trabalho podem ser confrontados com a integração numérica das linhas de campo referentes ao modelo adotado, o que consiste numa próxima etapa dessa pesquisa; na sequência, pode-se proceder a análise das ilhas satélites criadas pelo mesmo limitador, estudando critérios de estocasticidade; se necessário, pode-se adotar um modelo mais aprimorado para o anel de corrente, ou também estender o equacionamento às aproximações de segunda ordem.

## APÊNDICE A

### COORDENADAS CURVILÍNEAS

Neste apêndice, são apresentadas algumas noções básicas envolvendo o formalismo para tratamento de coordenadas curvilíneas, indispensável nos sistemas toroidais empregados neste trabalho; é também exposta a formulação generalizada para os operadores diferenciais vetoriais usados com mais frequência [D'haeseleer et al. 1991].

#### A.1. Coordenadas covariantes e contravariantes

Considerando um sistema genérico de coordenadas curvilíneas no espaço, um vetor posição  $\vec{R}$  pode ser escrito, em termos dessas coordenadas, como

$$\vec{R} = \chi^1 \hat{e}_1 + \chi^2 \hat{e}_2 + \chi^3 \hat{e}_3 , \quad [A.1]$$

ou, alternativamente, como

$$\vec{R} = \chi_1 \hat{e}^1 + \chi_2 \hat{e}^2 + \chi_3 \hat{e}^3 . \quad [A.2]$$

Nessas expressões,  $\chi^i = (\chi^1, \chi^2, \chi^3)$  são as ditas coordenadas contravariantes e  $\chi_k = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  as coordenadas covariantes do vetor  $\vec{R}$ . Os vetores de base covariantes  $\hat{e}_i (i = 1, 2, 3)$  são tangentes às curvas definidas por valores constantes de  $\chi_j$  e  $\chi_k$ , sendo  $\chi_i \neq \chi_j \neq \chi_k$  (chamadas curvas coordenadas), e definidos por

$$\hat{e}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \chi^i} . \quad [A.3]$$

Os vetores de base  $\hat{e}^k (k = 1, 2, 3)$  são normais às superfícies caracterizadas por valores constantes de  $\chi^k$  (chamadas superfícies coordenadas) e são definidos por

$$\hat{e}^k = \nabla \chi^k . \quad [A.4]$$

A figura (A.1, pag.101) ilustra as duas representações indicadas.

Assim, as interseções entre as superfícies coordenadas são as curvas coordenadas; fazendo os índices  $i, j$  e  $k$  em permutação cíclica dos valores 1, 2 e 3, pode-se escrever as relações entre os vetores de base contravariantes e os covariantes na forma:

$$\hat{e}_i = c_i \hat{e}^j \times \hat{e}^k \quad [A.5]$$

$$\hat{e}^i = c^i \hat{e}_j \times \hat{e}_k, \quad [A.6]$$

onde os coeficientes  $c_i$  e  $c^i$  podem ser relacionados multiplicando escalarmente [A.5] e [A.6] por  $\hat{e}_i$  e lançando mão da propriedade de ortonormalidade satisfeita pelos vetores de base, expressa por

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}^k = \delta_i^k. \quad [A.7]$$

Portanto:

$$c_i = \sqrt{g} \quad [A.8]$$

$$c^i = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad [A.9]$$

onde  $\sqrt{g}$  representa o Jacobiano da transformação de coordenadas  $\vec{R} = \vec{R}(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ , dado por

$$\sqrt{g} = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \times \hat{e}_3. \quad [A.10]$$

Nesse contexto, e utilizando a notação de soma de Einstein, o elemento de linha  $d\vec{\ell}^i$  orientado ao longo da curva coordenada  $\chi^i$  tem a forma

$$d\vec{\ell}^i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \chi^i} d\chi^i = \hat{e}_i d\chi^i; \quad [A.11]$$

e o quadrado de seu módulo, empregando a notação de soma de Einstein, pode ser expresso como

$$d\ell^2 = g_{ik} d\chi^i d\chi^k, \quad [A.12]$$

onde  $g_{ik}$  são as componentes covariantes do tensor métrico do sistema de coordenadas curvilíneas.

Comparando [A.11] com [A.12] tem-se

$$g_{ik} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k . \quad [A.13]$$

As componentes contravariantes do tensor métrico são obtidas por um procedimento análogo, que leva ao resultado

$$g^{ik} = \hat{e}^i \cdot \hat{e}^k . \quad [A.14]$$

Pode também ser demonstrada a relação [D'haeseleer et al., 1991]

$$\det g_{ik} = \frac{1}{\det g^{ik}} = g . \quad [A.15]$$

As componentes do tensor métrico permitem obter relações entre as componentes covariantes ( $A_i$ ) e as contravariantes ( $A^i$ ) de um vetor genérico  $\vec{A} = A^i \hat{e}_i = A_i \hat{e}^i$ , pelas chamadas operações de "rebaixamento" e "levantamento" de índices

$$A_i = A^k g_{ki} , \quad [A.16]$$

$$A^i = A_k g^{ki} ; \quad [A.17]$$

onde vale a notação de soma de Einstein.

Como exemplo de aplicação, pode ser dada a expressão para o produto interno de dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B^i , \quad [A.18]$$

ou (sempre usando a notação de Einstein)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i , \quad [A.19]$$

onde foi considerada a propriedade dada em [A.7]; o quadrado do módulo de um vetor  $\vec{A}$  fica

$$|\vec{A}|^2 = g^{ik} A_i A_k . \quad [A.20]$$

No caso particular em que são nulas as componentes não-diagonais do tensor métrico, ou seja,

$$g_{ik} = 0 \text{ para } i \neq k, \quad [A.21]$$

o sistema de coordenadas curvilíneas é dito ortogonal. (Apenas alguns poucos sistemas utilizados em Física, como o helicoidal e o toroidal polar, empregado neste trabalho, fogem a esta categoria).

Nos sistemas ortogonais, a [A.20] pode ser escrita na forma

$$|\vec{A}|^2 = A_{\langle i \rangle} A_{\langle i \rangle}, \quad [A.22]$$

onde

$$A_{\langle i \rangle} = \sqrt{g_{kk}} A^i = \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} A_i, \quad [A.23]$$

sendo que o índice repetido  $k$  não soma.  $A_{\langle i \rangle}$  são chamadas componentes "físicas" do vetor (pois suas dimensões coincidem com as do vetor representado, o que não necessariamente ocorre com  $A^i$  e  $A_i$ ). Para representação do vetor com as componentes "físicas", são geralmente usados os vetores de base ortonormais:

$$\vec{A} = A_{\langle i \rangle} \hat{e}_{\langle i \rangle}, \quad [A.23]$$

que respeitam a propriedade

$$\hat{e}_{\langle i \rangle} \cdot \hat{e}_{\langle j \rangle} = \delta_{ij}, \quad [A.24]$$

relacionando-se com os vetores de base covariantes e contravariantes segundo

$$\hat{e}_{\langle i \rangle} = \sqrt{g^{kk}} \hat{e}_i = \sqrt{g_{kk}} \hat{e}^i, \quad [A.25]$$

onde o índice  $k$  não soma.

Os vetores de base ortonormais de um sistema ortogonal são também empregados como auxiliares na representação covariante ou contravariante em sistemas não-ortogonais.

No apêndice B deste trabalho, por exemplo, o sistema helicoidal cilíndrico utiliza a base ortogonal do sistema cilíndrico; o sistema toroidal polar  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$  utiliza a base ortogonal do sistema toroidal convencional  $(\xi, \omega, \varphi)$ .

Entre os sistemas ortogonais, existem sistemas nos quais as coordenadas contravariantes coincidem com as covariantes para qualquer vetor (por exemplo, coordenadas retangulares), simplificando bastante o cálculo vetorial; contudo, para equacionamentos nos sistemas usados para representação de geometria toroidal, torna-se indispensável adotar o formalismo aqui apresentado.

## A.2. Operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilíneas generalizadas

O gradiente de uma função escalar  $\phi(\vec{R})$  é obtido por

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\chi^i} \nabla\chi^i ; \quad [A.26]$$

ou, considerando a [A.4]:

$$\nabla\phi = \partial_i \hat{e}^i , \quad [A.27]$$

onde

$$\partial_i \phi = (\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial\chi^i} \quad [A.28]$$

são conhecidas como componentes covariantes do gradiente. Apesar de ser também viável exprimir o gradiente usando suas componentes contravariantes, não é um procedimento cômodo, pois envolve o uso do tensor métrico. Para outros operadores, também é mais conveniente a representação covariante.

Tomando uma função vetorial  $\vec{A} = A^i \hat{e}_i$  e lembrando, do cálculo vetorial:

$$\nabla \cdot (\phi \vec{F}) = \phi \nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla \phi , \quad [A.29]$$

o divergente de  $\vec{A}$  fica, considerando a [A.26],

$$\nabla \cdot \vec{A} = A^i \nabla \cdot \hat{e}_i + \frac{\partial A^i}{\partial \chi^i}; \quad [\text{A.30}]$$

mas

$$\nabla \cdot \hat{e}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \chi^k}; \quad [\text{A.31}]$$

levando [A.31] em [A.30], tem-se

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi^k} (\sqrt{g} A^k). \quad [\text{A.32}]$$

Tomando agora a função vetorial  $\vec{A}(\vec{R})$  e empregando a propriedade do cálculo vetorial

$$\nabla \times (\phi \vec{F}) = \nabla \phi \times \vec{F} + \phi (\nabla \times \vec{F}), \quad [\text{A.33}]$$

o rotacional de  $\vec{A}$  fica

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla A_i \times \nabla \chi^i. \quad [\text{A.34}]$$

A primeira componente contravariante do rotacional pode ser expressa na forma

$$(\nabla \times \vec{A})^1 = \frac{\partial A_i}{\partial \chi^j} (\hat{e}_j \times \hat{e}_i \cdot \hat{e}_1), \quad [\text{A.35}]$$

sendo as duas restantes expressas de maneira análoga. Subsistem apenas dois dos nove termos da somatória da [A.35], que são  $(\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1)$  e  $(\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1)$ , resultando

$$(\nabla \times \vec{A})^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2), \quad [\text{A.36}]$$

onde o índice em  $\partial$  se refere á notação exposta em [A.28]; analogamente, as componentes restantes ficam

$$(\nabla \times \vec{A})^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) \quad [\text{A.37}]$$

e

$$(\nabla \times \vec{A})^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1). \quad [\text{A.38}]$$

Finalmente, dada uma função escalar  $\phi$ , o seu laplaciano  $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$  pode ser expresso, usando a [A.32] e a [A.26], como

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\chi^i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial\phi}{\partial\chi^j} \right). \quad [A.39]$$

É ainda utilizado, neste trabalho, o operador diferencial elíptico chamado "Operador de Grad-Shafranov Generalizado", aplicado ao fluxo magnético  $\Psi$  e simbolizado por  $\Delta^*\Psi$ ; sua definição está contextualizada nos cálculos expostos no apêndice C.

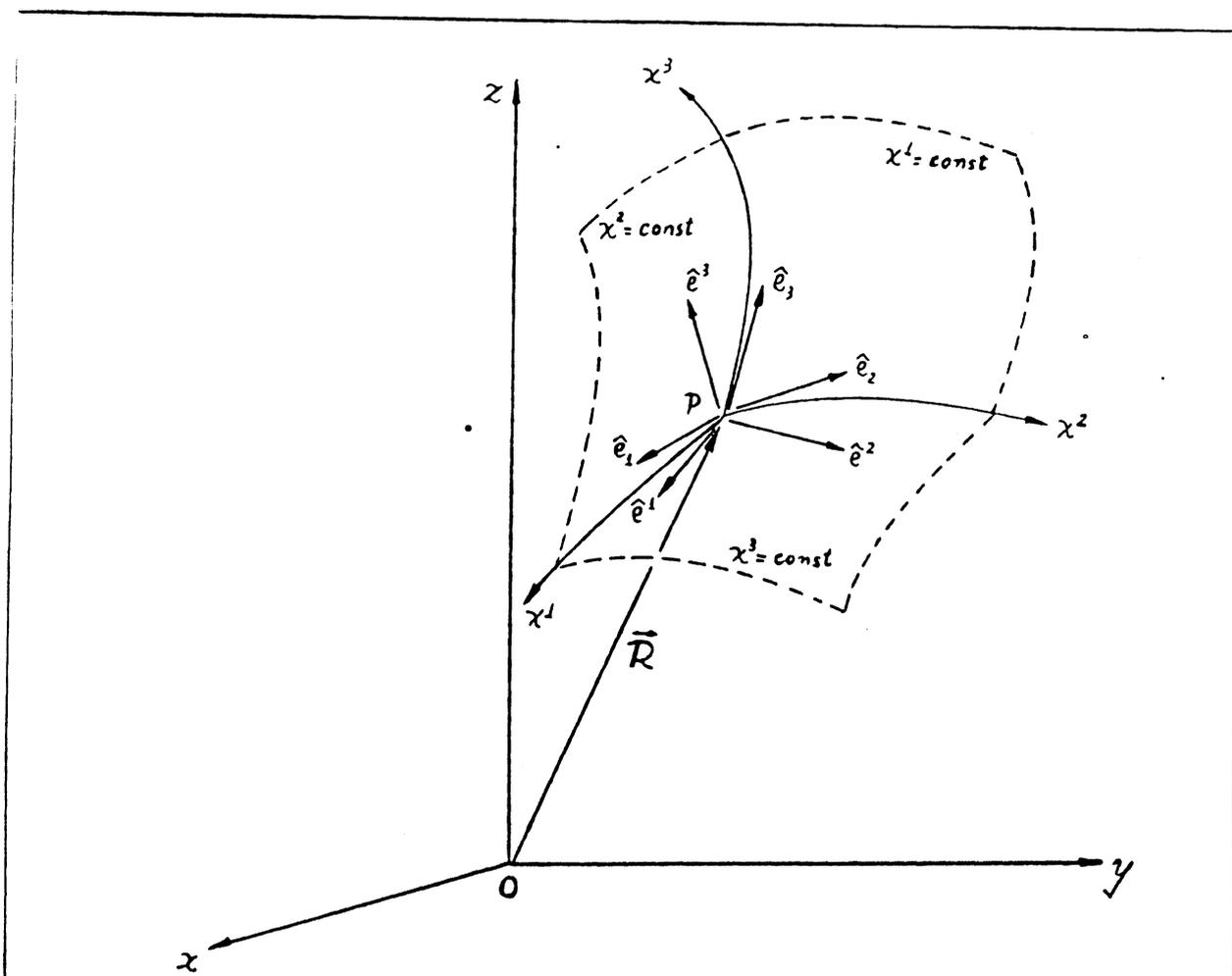


Figura A.1

Coordenadas de um ponto genérico  $P$  em um sistema curvilíneo  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ , referenciadas a um sistema retangular  $(x, y, z)$ . As curvas coordenadas são definidas nas interseções entre as superfícies coordenadas  $\chi^k = \text{const}$  que contêm  $P$ ; os vetores de base covariantes  $\hat{e}_i$ , dados por  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \chi^i}$ , são tangentes às curvas  $\chi^i$ ; os contravariantes  $\hat{e}^k$ , dados por  $\nabla \chi^k$ , são normais às superfícies  $\chi^k = \text{const}$ .

## APÊNDICE B

### SISTEMAS DE COORDENADAS ENVOLVIDOS NESTE TRABALHO

Neste apêndice são apresentados, de acordo com o formalismo exposto no apêndice A para tratamento de coordenadas curvilíneas, os sistemas de coordenadas referidos no trabalho. Por não ter sido encontrada na literatura uma abordagem pormenorizada de todos estes sistemas reunidos, procurou-se expor detalhadamente a definição das superfícies coordenadas em cada um deles, assim como algumas de suas singularidades, em especial daqueles empregados para geometria toroidal. Como referência geral pode-se tomar [Viana 1994] e [Kucinski et al. 1990]. A sequência de apresentação dos sistemas é: retangular, cilíndrico (em três modalidades, incluindo o pseudo-toroidal), cilíndrico helicoidal, toroidal convencional, toroidal polar e toroidal polar helicoidal; para cada um deles, é indicada a determinação de um ponto arbitrário em termos da interseção entre superfícies coordenadas, seguida dos procedimentos necessários para o cálculo das componentes do tensor métrico.

#### B.1. Coordenadas retangulares

A aplicação das relações do apêndice A ao sistema retangular, apesar de ser trivial, tem utilidade como referência para os outros sistemas.

Coordenadas contravariantes:

$$\chi^1 = x, \chi^2 = y, \chi^3 = z; \quad [B.1]$$

conforme a figura (B.1, pag.117); um ponto genérico P fica determinado pela interseção das três superfícies coordenadas  $\chi^i = constante$ .

Superfícies coordenadas:

plano $yz$	$(x = \text{const})$
plano $xz$	$(y = \text{const})$
plano $xy$	$(z = \text{const})$ .

Representação de um vetor :

$$\vec{R} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} . \quad [B.2]$$

Base covariante (pela [A.3]):

$$\hat{e}_1 = \hat{x}, \hat{e}_2 = \hat{y}, \hat{e}_3 = \hat{z} . \quad [B.3]$$

Tensor métrico covariante (pela [A.13]):

$$g_{11} = \hat{x} \cdot \hat{x} = 1, g_{12} = \hat{x} \cdot \hat{y} = 0 = g_{21}, g_{13} = \hat{x} \cdot \hat{z} = 0 = g_{31},$$

$$g_{22} = \hat{y} \cdot \hat{y} = 1, g_{23} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 = g_{32}, g_{33} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 . \quad [B.4]$$

Métrica (pela [A.15]):

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det [g_{ij}]} = 1 . \quad [B.5]$$

A nulidade das componentes não-diagonais do tensor métrico indica que o sistema é ortogonal. Nesse caso particular, o tensor métrico é o próprio tensor identidade e todas as componentes covariantes coincidem com as contravariantes, o que é justificado pela morfologia dos eixos coordenados.

## B.2. Coordenadas cilíndricas

Nesse sistema, assim como nos que seguem, a aplicação das relações do apêndice A esclarece a distinção entre as representações covariante e contravariante.

Coordenadas contravariantes:

$$\chi^1 = r, \chi^2 = \varphi, \chi^3 = z . \quad [B.6]$$

Superfícies coordenadas:

superfície cilíndrica  $(r = \text{const})$

semi-plano  $(\varphi = \text{const})$

plano  $(z = \text{const})$ ,

caracterizando uma disposição dextrógira, conforme esquematizado na figura (B.2.a, pag.118).

Este sistema está ligado ao retangular pelas relações

$$x = r \cos \varphi \quad (r \geq 0)$$

$$y = r \text{sen } \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad [B.7]$$

$$z = z \quad (-\infty < z < \infty),$$

portanto

$$\vec{R} = r \cos \varphi \hat{x} + r \text{sen } \varphi \hat{y} + z \hat{z}. \quad [B.8]$$

Base covariante (pela [A.3]):

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = \cos \varphi \hat{x} + \text{sen } \varphi \hat{y} = \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \varphi} = -r \text{sen } \varphi \hat{x} + r \cos \varphi \hat{y} = \hat{e}_\varphi \quad [B.9]$$

$$\hat{e}_3 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \hat{z} = \hat{e}_z.$$

Tensor métrico covariante (usando [B.9] na [A.13]);

$$g_{11} = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = 1, \quad g_{12} = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\varphi = 0 = g_{21}, \quad g_{13} = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z = 0 = g_{31},$$

$$g_{22} = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = r^2, \quad g_{23} = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z = 0 = g_{32}, \quad g_{33} = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1 \dots \quad [B.10]$$

Métrica (pela [A.15]):

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det [g_{ij}]} = r. \quad [B.11]$$

Portanto este sistema também é ortogonal, pois o tensor métrico é diagonal. Uma forma interessante de verificar os cálculos pela propriedade [A.15] é determinar a base e o tensor métrico contravariantes, a partir da base covariante e da métrica. Além disso, neste trabalho existe interesse em calcular as componentes do tensor métrico nas duas formas, pois ambas são necessárias para escrever a equação de Grad-Shafranov em coordenadas generalizadas.

Base contravariante (usando [A.6] e [A.9]):

$$\begin{aligned}\hat{e}^r &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \\ \hat{e}^\varphi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{e}_z \times \hat{e}_r = -\frac{\sin \varphi}{r} \hat{x} + \frac{\cos \varphi}{r} \hat{y} \\ \hat{e}^z &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi = \hat{z} ;\end{aligned}\tag{B.12}$$

comparando [B.12] com [B.9], tem-se

$$\hat{e}^r = \hat{e}_r, \quad \hat{e}^\varphi = \frac{1}{r^2} \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}^z = \hat{e}_z .\tag{B.13}$$

Tensor métrico contravariante (pela [A.14]):

$$\begin{aligned}g^{11} &= \hat{e}^r \cdot \hat{e}^r = 1 \\ g^{22} &= \hat{e}^\varphi \cdot \hat{e}^\varphi = \frac{1}{r^2} \\ g^{33} &= \hat{e}^z \cdot \hat{e}^z = 1 ;\end{aligned}\tag{B.14}$$

as componentes não-diagonais resultam nulas, assim como as covariantes. A [A.15] é verificada calculando  $\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{\det[g^{ij}]}} = r$ . A escolha para cálculo da métrica a partir da base covariante ou da contravariante é indiferente, e pode ser feita da forma em que os cálculos sejam mais diretos.

Como este sistema é ortogonal, existe a representação ortonormal, que pode ser empregada como auxiliar na representação em sistemas mais complexos e não-ortogonais, como o cilíndrico helicoidal. Pela [A.25], a base ortonormal é:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{\langle r \rangle} &= \sqrt{g_{11}}\hat{e}^1 = \hat{e}^r = \hat{e}_r , \\ \hat{e}_{\langle \varphi \rangle} &= \sqrt{g_{22}}\hat{e}^2 = r\hat{e}^\varphi = \frac{1}{r}\hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_{\langle z \rangle} &= \sqrt{g_{33}}\hat{e}^3 = \hat{e}^z = \hat{e}_z .\end{aligned}\tag{B.15}$$

No tratamento analítico de sistemas toroidais com raio maior  $R_0$  e raio menor  $b$ , o sistema cilíndrico pode ser empregado em três modalidades diferentes:

Na primeira,  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \equiv (r, \varphi, z)$ , de forma que o eixo  $z$  coincida com o eixo maior do toro e  $\varphi$  seja o ângulo toroidal, conforme a figura (B.2.a, pag.118)

Na segunda,  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \equiv (\rho, \theta, z')$ , de forma que o eixo  $z'$  coincida com o eixo menor (retificado) do toro e  $\theta$  seja o ângulo poloidal; a relação entre as duas modalidades apresentadas é

$$r = R_0 - \rho \cos \theta, \quad \varphi = \frac{z'}{R_0}, \quad z = \rho \sin \theta .\tag{B.16}$$

A figura (B.2.b, pag.119) mostra a disposição dessas coordenadas.

Na terceira,  $(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \equiv (\rho, \theta, \varphi)$ , sendo que  $\rho$  e  $\theta$  coincidem com os correspondentes da segunda modalidade apresentada acima;  $\varphi = \frac{z'}{R_0}$  é o próprio ângulo toroidal da primeira modalidade, como ilustra a figura (B.2.c, pag.120); esse novo sistema, conhecido como "pseudo-toroidal", funciona como uma aproximação razoável dos sistemas toroidais mais complexos, principalmente nos limites de grande razão de aspecto; deve ser tratado com cuidado, pois a coordenada radial  $\rho$ , para  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ , é limitada pelo eixo  $z$  da primeira modalidade, conforme a figura (B.2.d, pag.121).

### B.3. Coordenadas cilíndricas helicoidais

Coordenadas contravariantes:

$$\chi^1 \equiv r, \chi^2 \equiv u, \chi^3 \equiv z, \quad [B.17]$$

onde

$$u = \varphi - \alpha z \quad [B.18]$$

e  $\alpha$  é um número real que representa o "passo" das hélices;  $(r, \varphi, z)$  são as coordenadas cilíndricas.

Superfícies coordenadas:

superfície cilíndrica	$(r = \text{const})$
helicóide com eixo em $z$	$(u = \text{const})$
plano	$(z = \text{const}),$

conforme a figura (B.3, pag.122).

A relação entre essas coordenadas e as retangulares é:

$$x = r \cos(u + \alpha z), y = r \sin(u + \alpha z), z = z. \quad [B.19]$$

Portanto, a representação de um vetor fica

$$\vec{R} = r \cos(u + \alpha z)\hat{x} + r \sin(u + \alpha z)\hat{y} + z\hat{z}. \quad [B.20]$$

Devido à dependência entre  $\chi^2$  e  $\chi^3$ , não se espera ortogonalidade nesse sistema.

Base covariante (pela [A.3]):

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 = \hat{e}_r &= \cos(u + \alpha z)\hat{x} + \sin(u + \alpha z)\hat{y} \\ \hat{e}_2 = \hat{e}_u &= -r \sin(u + \alpha z)\hat{x} + r \cos(u + \alpha z)\hat{y} \\ \hat{e}_3 = \hat{e}_z &= -\alpha r \sin(u + \alpha z)\hat{x} + \alpha r \cos(u + \alpha z)\hat{y} + \hat{z}. \end{aligned} \quad [B.21]$$

É conveniente para a sequência dos cálculos expressar a base covariante em termos da base ortonormal do sistema cilíndrico, dada por [B.15] em termos de [B.9]; por comparação com [B.21] tem-se:

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_{\langle r \rangle}$$

$$\hat{e}_2 = r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle} \quad [B.22]$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_{\langle z \rangle} + \alpha r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle} .$$

Tensor métrico covariante (pela [A.13], aplicada em [B.22]):

$$g_{11} = \hat{e}_{\langle r \rangle} \cdot \hat{e}_{\langle r \rangle} = 1$$

$$g_{12} = \hat{e}_{\langle r \rangle} \cdot r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle} = 0 = g_{21}$$

$$g_{13} = \hat{e}_{\langle r \rangle} \cdot (\hat{e}_{\langle z \rangle} + \alpha r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle}) = 0 = g_{31}$$

$$g_{22} = r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle} \cdot r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle} = r^2$$

$$g_{23} = r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle} \cdot (\hat{e}_{\langle z \rangle} + \alpha r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle}) = \alpha r^2 = g_{32}$$

$$g_{33} = (\hat{e}_{\langle z \rangle} + \alpha r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle}) \cdot (\hat{e}_{\langle z \rangle} + \alpha r\hat{e}_{\langle \varphi \rangle}) = 1 + \alpha^2 r^2 \quad [B.23] .$$

O tensor métrico, como se pode observar, não é diagonal, por se tratar de um sistema não-ortogonal.

Métrica :

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det [g_{ij}]} = r^2 ; \quad [B.24]$$

esse resultado pode ser verificado, como foi mostrado para as coordenadas cilíndricas, construindo a base contravariante a partir da covariante por aplicação de [A.6] e [A.9], obtendo em seguida o tensor métrico contravariante pela [A.14] e verificando a métrica pela [A.15].

O sistema helicoidal cilíndrico, para aplicação em geometria toroidal, deve ser construído a partir do cilíndrico na segunda ou na terceira modalidades apresentadas na seção (B.2).

#### B.4. Coordenadas toroidais convencionais

Coordenadas contravariantes: .

$$\chi^1 \equiv \xi, \chi^2 \equiv \omega, \chi^3 \equiv \varphi \quad [B.25]$$

Superfícies coordenadas:

semi-plano com origem sobre o eixo  $z$  ( $\varphi = const$ )

superfície esférica centrada sobre o eixo  $z$  ( $\omega = const$ )

superfície toroidal com eixo menor no plano  $xy$  ( $\xi = const$ ) .

Como ilustra a figura (B.4, pag.123), os centros  $O_\xi$  e  $O_\omega$  das circunferências  $\xi = const$  e  $\omega = const$  são definidos diferentemente para cada ponto  $P$ . A figura é bidimensional, sobre um plano  $\varphi = const$ , tendo  $\varphi$  o mesmo significado que tem no sistema cilíndrico, ou seja, corresponde ao ângulo toroidal. O ponto  $O'$  indica o "centro" do sistema, e  $O$  indica o centro de um sistema pseudo-toroidal de referência (que está no eixo menor do toro). Dado um ponto  $P$ ,  $O_\omega$  fica determinado na interseção do eixo  $z$  com a mediatriz do segmento  $\overline{O'P}$ . A coordenada  $\omega$  é o ângulo medido desde o equador externo até a tangente a  $\omega = const$  no ponto  $O'$ . Para que  $\xi = const$  intercepte ortogonalmente  $\omega = const$ ,  $O_\xi$  deve ser determinado na interseção do eixo  $r$  com a tangente a  $\omega = const$  no ponto  $P$ , tendo raio  $\overline{O_\xi P}$ . A coordenada  $\xi$  varia de zero (pontos sobre o eixo  $z$ ) até  $\infty$  (ponto  $O'$ ).

O sistema toroidal convencional  $(\xi, \omega, \varphi)$  está ligado ao sistema retangular  $(x, y, z)$  pelas relações

$$x = \frac{R'_0 \sinh \xi \cos \varphi}{\cosh \xi - \cos \omega}$$

$$y = \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \varphi}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad [B.26]$$

$$z = \frac{R'_0 \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} ,$$

onde  $R'_0 = r(O') = R_0 \left(1 - \frac{b^2}{R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  é o raio maior correspondente à origem do sistema toroidal ( $\xi = \infty$ ).

A representação de um vetor fica, portanto,;

$$\vec{R} = \frac{R'_0 \sinh \xi \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{x} + \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{y} + \frac{R'_0 \sin \omega}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{z} . \quad [B.27]$$

Base covariante (pela [A.3]):

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_\xi = \frac{R'_0(1 - \cosh \xi \cos \omega) \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{x} + \frac{R'_0(1 - \cosh \xi \cos \omega) \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{y} - \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \omega}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{z}$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_\omega = \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \omega \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{x} + \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \omega \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{y} - \frac{R'_0(1 - \cosh \xi \cos \omega)}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{z} \quad [B.28]$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_\varphi = -\frac{R'_0 \sinh \xi \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{x} + \frac{R'_0 \sinh \xi \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{y} .$$

Tensor métrico covariante (pela [A.13]):

$$g_{11} = \frac{R_0'^2}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2}$$

$$g_{22} = \frac{R_0'^2}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \quad [B.29]$$

$$g_{33} = \frac{R_0'^2 \sinh \xi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} ;$$

as componentes não-diagonais resultam nulas, portanto o sistema é ortogonal.

Métrica (pela [A.15]):

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det [g_{ij}]} = \frac{R_0'^3 \sinh \xi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^3} . \quad [B.30]$$

Na sequência, serão construídos os vetores de base contravariantes, para obtenção da base ortonormal, da mesma forma apresentada na seção (B.2) para o sistema cilíndrico.

Base contravariante (usando [A.6] e [A.9]):

$$\begin{aligned}\hat{e}^\xi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{e}_\omega \times \hat{e}_\varphi = \frac{\cos \varphi (1 - \cosh \xi \cos \omega)}{R'_0} \hat{x} + \frac{\sin \varphi (1 - \cosh \xi \cos \omega)}{R'_0} \hat{y} + \frac{\sinh \xi \sin \omega}{R'_0} \hat{z} \\ \hat{e}^\omega &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_\xi = \frac{\sinh \xi \sin \omega \cos \varphi}{R'_0} \hat{x} + \frac{\sinh \xi \sin \omega \sin \varphi}{R'_0} \hat{y} - \frac{1 - \cosh \xi \cos \omega}{R'_0} \hat{z} \quad [B.31] \\ \hat{e}^\varphi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{e}_\xi \times \hat{e}_\omega = -\frac{(\cosh \xi - \cos \omega) \sin \varphi}{R'_0 \sinh \xi} \hat{x} + \frac{(\cosh \xi - \cos \omega) \cos \varphi}{R'_0 \sinh \xi} \hat{y}.\end{aligned}$$

Base ortonormal (pela [A.25]):

$$\begin{aligned}\hat{e}_{\langle \xi \rangle} &= g_{11} \hat{e}^1 = \frac{R'_0 (1 - \cosh \xi \cos \omega) \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{x} + \frac{R'_0 (1 - \cosh \xi \cos \omega) \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{y} + \\ &\quad + \frac{R'_0 \sinh^3 \xi \sin \omega}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{z} \\ \hat{e}_{\langle \omega \rangle} &= g_{22} \hat{e}^2 = \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \omega \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{x} + \frac{R'_0 \sinh \xi \sin \omega \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{y} - \\ &\quad - \frac{R'_0 \sinh^2 \xi (1 - \cosh \xi \cos \omega)}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \hat{z} \quad [B.32] \\ \hat{e}_{\langle \varphi \rangle} &= g_{33} \hat{e}^3 = -\frac{R'_0 \sinh \xi \sin \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{x} + \frac{R'_0 \sinh \xi \cos \varphi}{(\cosh \xi - \cos \omega)} \hat{y}.\end{aligned}$$

Este resultado tem utilidade como auxiliar no cálculo do tensor métrico do sistema toroidal polar, empregado neste trabalho.

## B.5. Coordenadas toroidais polares

Este sistema, introduzido por Kucinski e colaboradores no tratamento de plasmas confinados em dispositivos toroidais, apresenta vantagens, por exemplo, em métodos perturbativos, por levar à inclusão de efeitos toroidais na aproximação de ordem zero [Kucinski et al. 1990].

Coordenadas contravariantes:

$$\chi^1 \equiv \rho_t, \quad \chi^2 \equiv \theta_t, \quad \chi^3 \equiv \varphi \quad [B.33]$$

Superfícies coordenadas:

semi-plano com origem no eixo  $z$   $(\varphi = \text{const})$

superfície esférica centrada no eixo  $z$   $(\theta_t = \text{const})$

superfície toroidal com eixo menor no plano  $xy$   $(\rho_t = \text{const})$ .

Em relação ao sistema toroidal convencional,  $\varphi$  permanece inalterado; as superfícies  $\theta_t = \text{const}$  são as mesmas, porém a coordenada poloidal  $\theta_t$  é medida a partir do equador interno do toro (sentido horário). A coordenada radial  $\rho_t$ , conforme esquematizado na figura (B.5.a, pag.124), é interpretada como o segmento de reta, inclinado de  $\theta_t$  em relação ao eixo  $r$ , cuja projeção segundo a direção  $z$  coincide com a coordenada  $z$  do sistema retangular. Assim, equivale à medida  $\overline{O'P'}$ , sendo  $P'$  determinado na interseção da paralela ao eixo  $r$  passando por  $P$  com a tangente à circunferência  $\theta_t = \text{const}$  no ponto  $O'$ . As superfícies toroidais  $\rho_t = \text{const}$  não têm seção circular (aproximam-se de elipses para valores não muito elevados de  $\rho_t$ , tendendo a circunferências próximo a  $\rho_t = 0$ , que corresponde ao mesmo ponto  $O'$  do sistema toroidal convencional), e nem interceptam ortogonalmente as superfícies esféricas  $\omega = \text{const}$ , porém sua configuração tem a vantagem de se ajustar melhor ao perfil das superfícies magnéticas no equilíbrio MHD de plasmas confinados em Tokamaks, conforme se pode verificar comparando a figura (B.7, pag.127) com (B.2.d, pag.121), (B.4, pag.123) e (B.5.b, pag.125), onde são esquematizadas as configurações de superfícies magnéticas e de superfícies coordenadas para os sistemas pseudo-toroidal, toroidal convencional e toroidal polar.

Esse sistema está ligado ao toroidal convencional pelas relações:

$$\rho_t = \frac{R'_0}{(\cosh \xi - \cos \omega)}, \quad \theta_t = \pi - \omega, \quad \varphi = \varphi. \quad [B.34]$$

Para obtenção dos vetores de base que levam ao tensor métrico, será tomado um caminho diverso em relação às seções precedentes, que para este caso conduz mais diretamente aos resultados. Conforme [A.4], os vetores de base contravariantes são fornecidos

pelo cálculo do gradiente das novas coordenadas em relação às antigas; para tanto, precisa-se da expressão do gradiente em coordenadas toroidais convencionais, o que pode ser obtido sem dificuldades, derivando apropriadamente [B.34] e levando na [A.26], juntamente com os vetores de base contravariantes  $(\hat{e}^\xi, \hat{e}^\omega, \hat{e}^\varphi) = (\nabla\xi, \nabla\omega, \nabla\varphi)$  dados por [B.31], e expressando em termos da base ortonormal por comparação com [B.32]. Portanto:

$$\begin{aligned}\hat{e}^1 &= (\nabla)_{tor} \rho_t = \frac{\rho_t}{R'_0} \sinh \xi \hat{e}_{\langle \xi \rangle} - \frac{\rho_t}{R'_0} \sin \omega \hat{e}_{\langle \omega \rangle} = \hat{e}^{\rho_t} \\ \hat{e}^2 &= (\nabla)_{tor} \theta_t = -\frac{1}{\rho_t} \hat{e}_{\langle \omega \rangle} = \hat{e}^\omega \\ \hat{e}^3 &= (\nabla)_{tor} \varphi = \frac{1}{\rho_t \sinh \xi} \hat{e}_{\langle \varphi \rangle} = \hat{e}^\varphi.\end{aligned}\tag{B.35}$$

Tensor métrico contravariante (pela [A.14]):

$$\begin{aligned}g^{11} &= \hat{e}^{\rho_t} \cdot \hat{e}^{\rho_t} = \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} (\sinh^2 \xi + \sin^2 \omega) = 1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t \\ g^{12} &= \hat{e}^{\rho_t} \cdot \hat{e}^{\theta_t} = \frac{\sin \theta_t}{R'_0} = g^{21}, \quad g^{13} = \hat{e}^{\rho_t} \cdot \hat{e}^\varphi = 0 = g^{31} \\ g^{22} &= \hat{e}^{\theta_t} \cdot \hat{e}^{\theta_t} = \frac{1}{R_0'^2}, \quad g^{23} = \hat{e}^{\theta_t} \cdot \hat{e}^\varphi = 0 = g^{32} \\ g^{33} &= \hat{e}^\varphi \cdot \hat{e}^\varphi = \frac{1}{\rho_t^2 \sinh^2 \xi} = \frac{1}{R_0'^2 (1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sin^2 \theta_t)}\end{aligned}\tag{B.36};$$

como não é um tensor diagonal, o sistema toroidal polar não é ortogonal.

Métrica (pela [A.15]):

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{\det[g^{ij}]}} = R'_0 \rho_t.\tag{B.37}$$

Para escrever a equação de Grad-Shafranov em coordenadas generalizadas, são necessárias também as componentes covariantes do tensor métrico, o que pode ser obtido construindo-se de início a base covariante por uso da [A.5] e da [A.8] com [B.37] e [B.36], resultando:

$$\hat{e}_1 = -\frac{R'_0}{\rho_t \sinh \xi}$$

$$\hat{e}_2 = -\rho_t \hat{e}_{\langle \omega \rangle} + \frac{\text{sen } \omega}{\rho_t \text{senh } \xi} \hat{e}_{\langle \xi \rangle} \quad [B.38]$$

$$\hat{e}_3 = \rho_t \text{senh } \xi \hat{e}_{\langle \varphi \rangle} ;$$

e em seguida, pela [A.13], tem-se

$$g_{11} = \frac{R_0'^2}{\rho_t^2 \text{senh}^2 \xi} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2\rho_t}{R_0'} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \text{sen}^2 \theta_t\right)}$$

$$g_{12} = -\frac{R_0' \text{sen } \omega}{\rho_t^2 \text{senh}^2 \xi} = -\frac{\text{sen } \omega}{\left(1 - \frac{2\rho_t}{R_0'} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \text{sen}^2 \theta_t\right)} = g_{21}$$

$$g_{13} = 0 = g_{31}$$

$$g_{22} = \rho_t^2 + \frac{\text{sen}^2 \omega}{\rho_t^2 \text{senh}^2 \xi} = \rho_t^2 + \frac{\text{sen}^2 \omega}{R_0'^2 \left(1 - \frac{2\rho_t}{R_0'} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \text{sen}^2 \theta_t\right)}$$

$$g_{23} = 0 = g_{32}$$

$$g_{33} = \rho_t^2 \text{senh}^2 \xi = R_0'^2 \left(1 - \frac{2\rho_t}{R_0'} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \text{sen}^2 \theta_t\right) . \quad [B.39]$$

(Calculando a métrica pela [A.15], fica verificada a [B.37])

Estas coordenadas, dentro do limite de grande razão de aspecto ( $\frac{b}{R_0'} \ll 1$ ), se confundem com as coordenadas pseudo-toroidais  $(\rho, \theta, \varphi)$  apresentadas na seção (A.3) (desde que se tome uma origem comum), o que pode ser verificado fazendo  $\frac{\rho}{R_0'} \ll 1$  nas expressões que ligam os dois sistemas [Kucinski et al. 1990]:

$$\rho_t = \rho \left[ 1 - \frac{\rho}{R_0'} \cos \theta + \left( \frac{\rho}{2R_0'} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{sen } \theta_t = \text{sen } \theta \left[ 1 - \frac{\rho}{R_0'} \cos \theta + \left( \frac{\rho}{2R_0'} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad [B.40]$$

$$\varphi = \varphi .$$

## B.6. Coordenadas toroidais polares helicoidais

Este é o sistema adotado neste trabalho para modelar a função de fluxo que conduz ao cálculo da largura das ilhas magnéticas pelo Método das Médias. É construído a partir do sistema toroidal polar, de forma semelhante à que o sistema helicoidal cilíndrico usa o sistema cilíndrico. A coordenada  $\chi^2$ , que salienta o caráter de dupla periodicidade envolvido no método, é definida em termos de  $m$  e  $n$ , referentes ao modo estudado. Dos resultados aqui obtidos, terão aplicação imediata o componente  $g^{11}$  do tensor métrico contravariante, a ser usado na [5.21], bem como a expressão para a métrica  $\sqrt{g}$ , envolvida na [2.25] e na [2.26].

Coordenadas contravariantes:

$$\chi^1 \equiv \rho_t, \chi^2 \equiv u = m\theta_t - n\varphi, \chi^3 \equiv \theta_t, \quad [B.41]$$

onde  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$  são as coordenadas toroidais polares;  $m$  e  $n$  são números inteiros que caracterizam o "passo" das hélices.

Superfícies coordenadas:

tronco de cone com base menor no eixo menor do toro	$(\theta_t = const)$
helicóide com eixo circular sobre o plano $xy$	$(u = const)$
superfície toroidal com eixo menor sobre o plano $xy$	$(\rho_t = const)$ .

A figura (B.6, pag.126) ilustra essa conformação.

O tensor métrico será obtido da base contravariante, por um caminho análogo ao seguido na seção (B.5), envolvendo a base ortonormal do sistema toroidal convencional.

As relações que ligam um sistema a outro são

$$\rho_t = \frac{R'_0}{(\cosh \xi - \cos \omega)}$$

$$u = m\pi - m\omega - n\varphi \quad [B.42]$$

$$\theta_t = \pi - \omega .$$

Base contravariante (pela [A.4]):

$$\begin{aligned}\hat{e}^1 &= (\nabla)_{tor} \rho_t = -\frac{\rho_t}{R'_0} \sinh \xi \hat{e}_{\langle \xi \rangle} - \frac{\rho_t}{R'_0} \sen \omega \hat{e}_{\langle \omega \rangle} = \hat{e}^{\rho_t} \\ \hat{e}^2 &= (\nabla)_{tor} u = -\frac{m}{\rho_t} \hat{e}_{\langle \omega \rangle} - \frac{n}{\rho_t \sinh \xi} \hat{e}_{\langle \varphi \rangle} = \hat{e}^u \\ \hat{e}^3 &= (\nabla)_{tor} \theta_t = -\frac{1}{\rho_t} \hat{e}_{\langle \omega \rangle} = \hat{e}^{\theta_t} .\end{aligned}\tag{B.43}$$

Tensor métrico contravariante (pela [A.14]):

$$\begin{aligned}g^{11} &= \hat{e}^{\rho_t} \cdot \hat{e}^{\rho_t} = \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} (\sinh^2 \xi + \sen^2 \omega) = 1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t \\ g^{12} &= \hat{e}^{\rho_t} \cdot \hat{e}^u = \frac{m \sen \theta_t}{R'_0} = g^{21} \\ g^{13} &= \hat{e}^{\rho_t} \cdot \hat{e}^{\theta_t} = \frac{\sen \theta_t}{R'_0} = g^{31} \\ g^{22} &= \hat{e}^u \cdot \hat{e}^u = \frac{m^2}{\rho_t^2} + \frac{n^2}{\rho_t^2 \sinh^2 \xi} = \frac{m^2}{\rho_t^2} + \frac{n^2}{R_0'^2 (1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sen^2 \theta_t)} \\ g^{23} &= \hat{e}^u \cdot \hat{e}^{\theta_t} = \frac{m}{\rho_t^2} = g^{32} \\ g^{33} &= \hat{e}^{\theta_t} \cdot \hat{e}^{\theta_t} = \frac{1}{\rho_t^2} ;\end{aligned}\tag{B.44}$$

pode-se observar a não-nulidade de todas as componentes  $g^{ij}$ , decorrente da dependência entre as coordenadas  $\chi^2$  e  $\chi^3$ .

Métrica (pela [A.15]):

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{|g^{ij}|}} = \frac{R'_0 \rho_t}{n} .\tag{B.45}$$

A expressão [B.45] será levada ao integrando na [2.26] para obter a parcela da função de fluxo devida à perturbação provocada pelos anéis de corrente na estrutura magnética do plasma confinado.

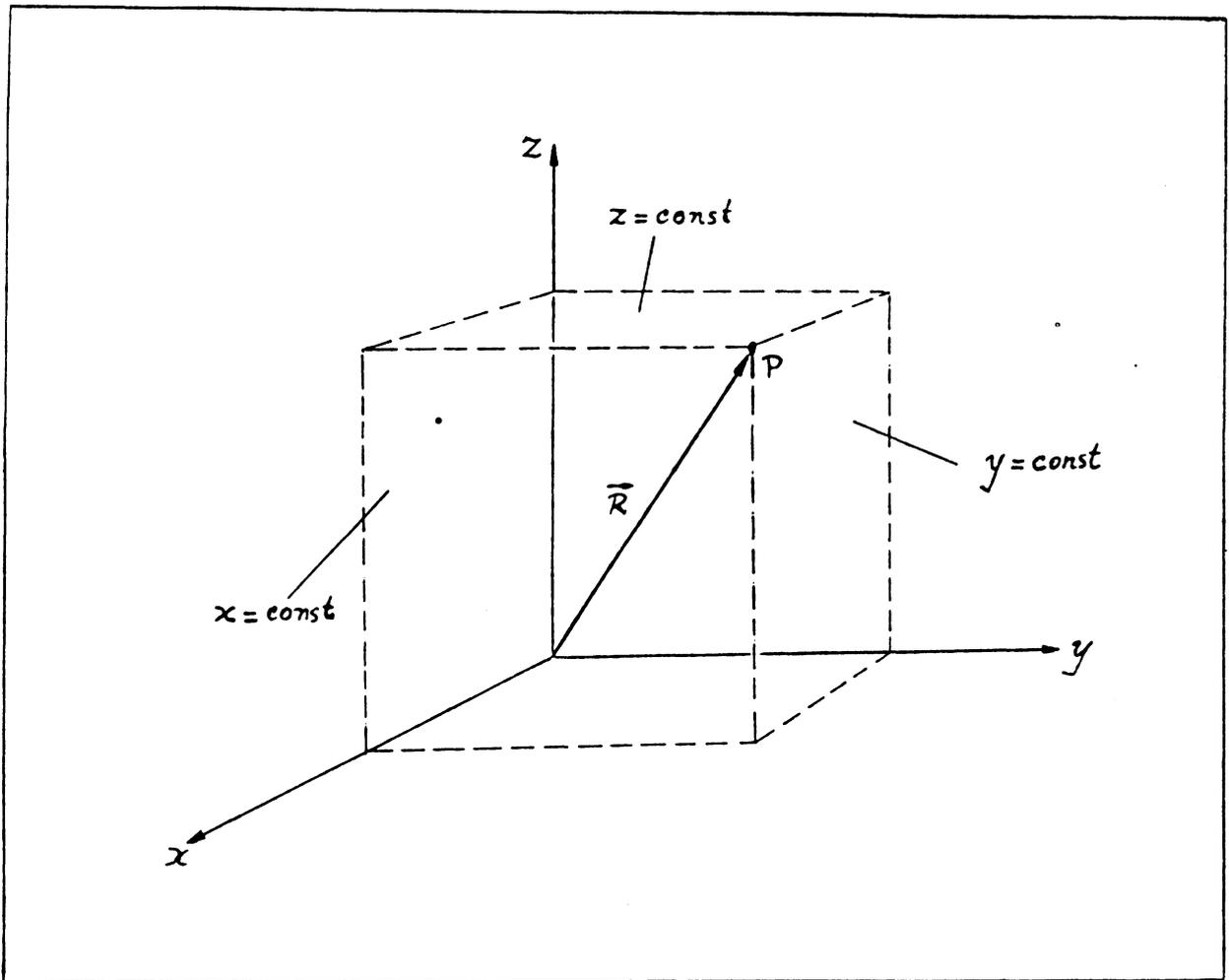


Figura B.1

Coordenadas Retangulares

$x, y, z$

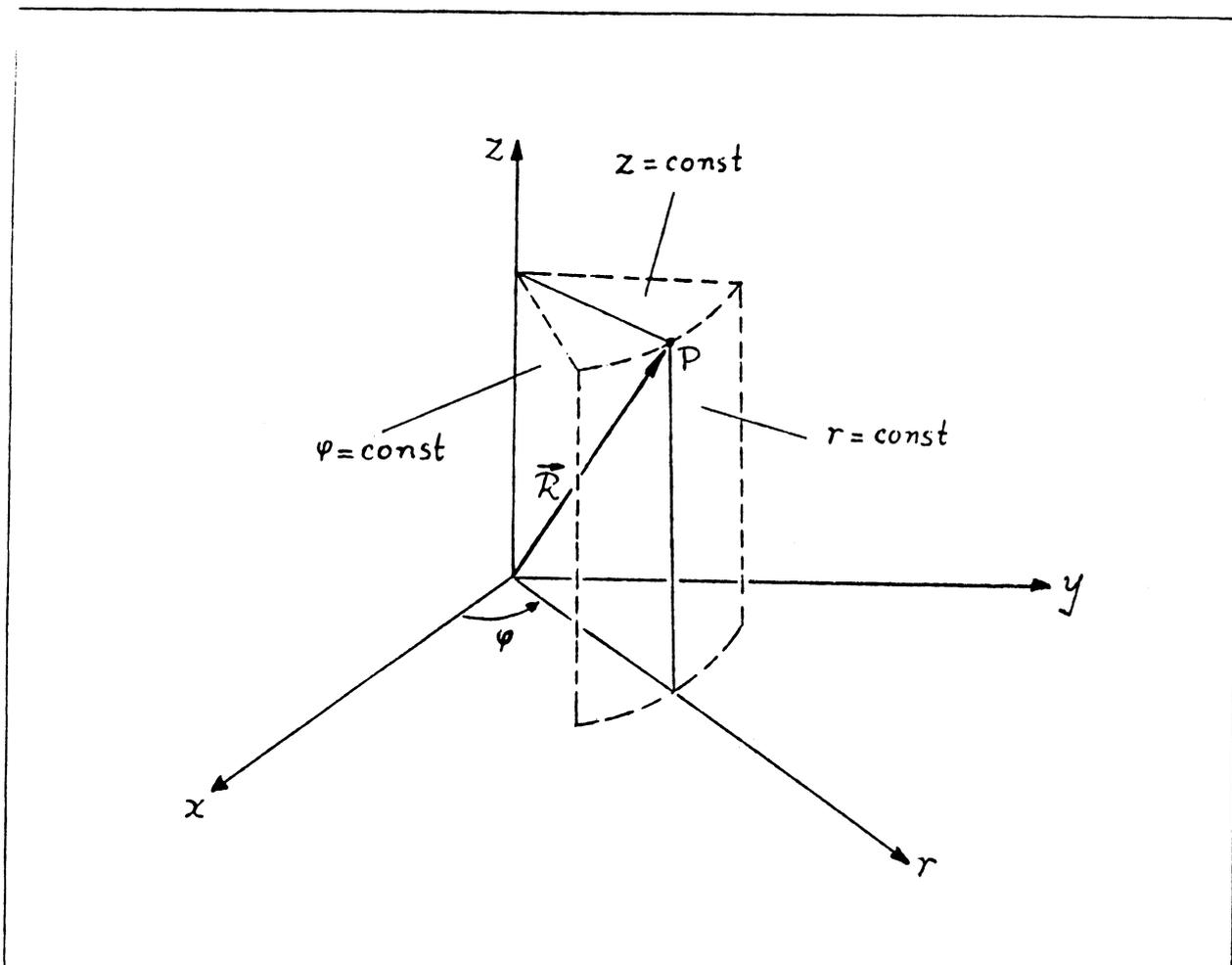


Figura B.2.a  
Coordenadas Cilíndricas  
(primeira modalidade)

$r, \varphi, z$

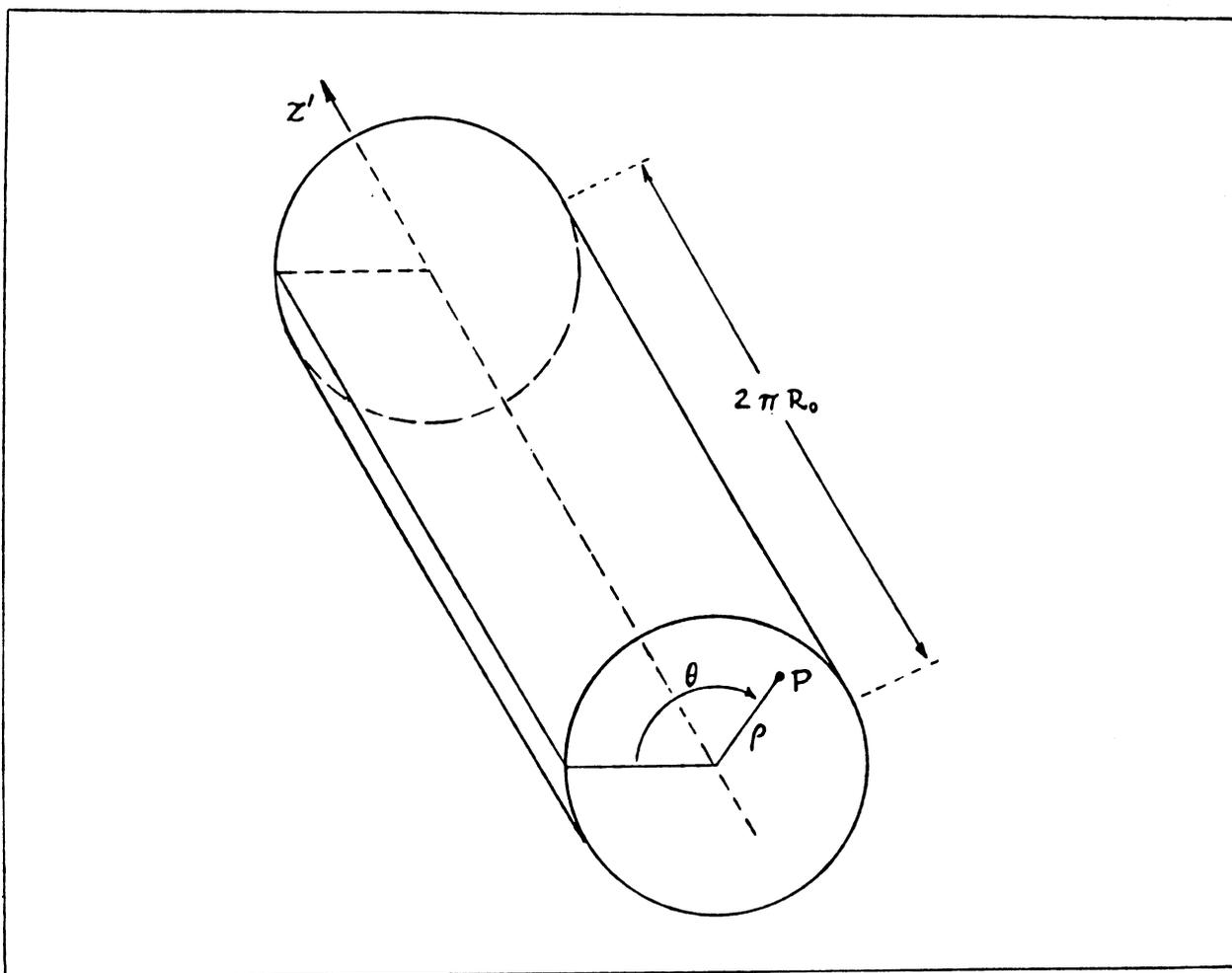


Figura B.2.b  
Coordenadas Cilíndricas  
(segunda modalidade)

$$\rho, \theta, z'$$

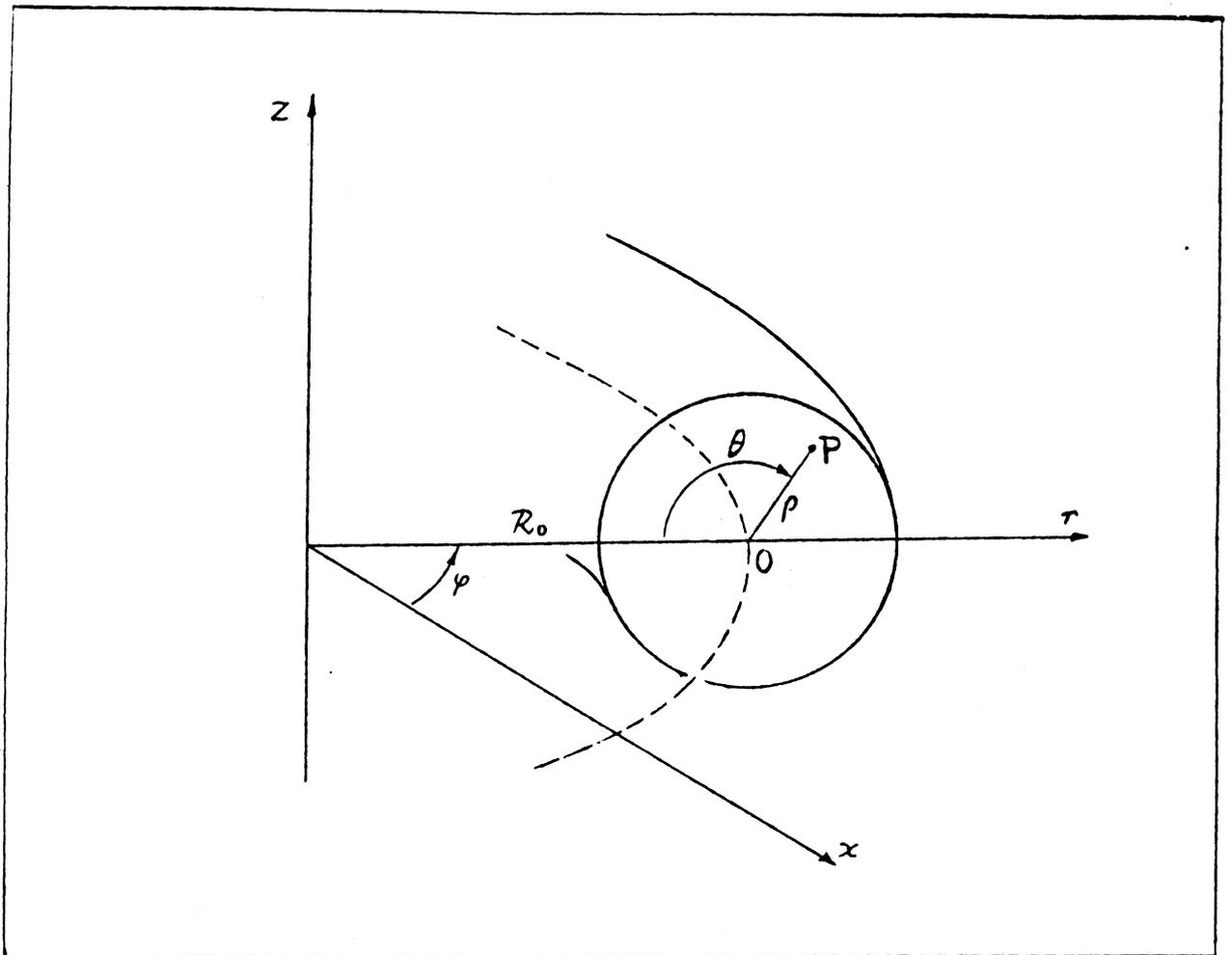


Figura B.2.c

Coordenadas Pseudo-toroidais

(coordenadas cilíndricas, terceira modalidade)

$\rho, \theta, \varphi$

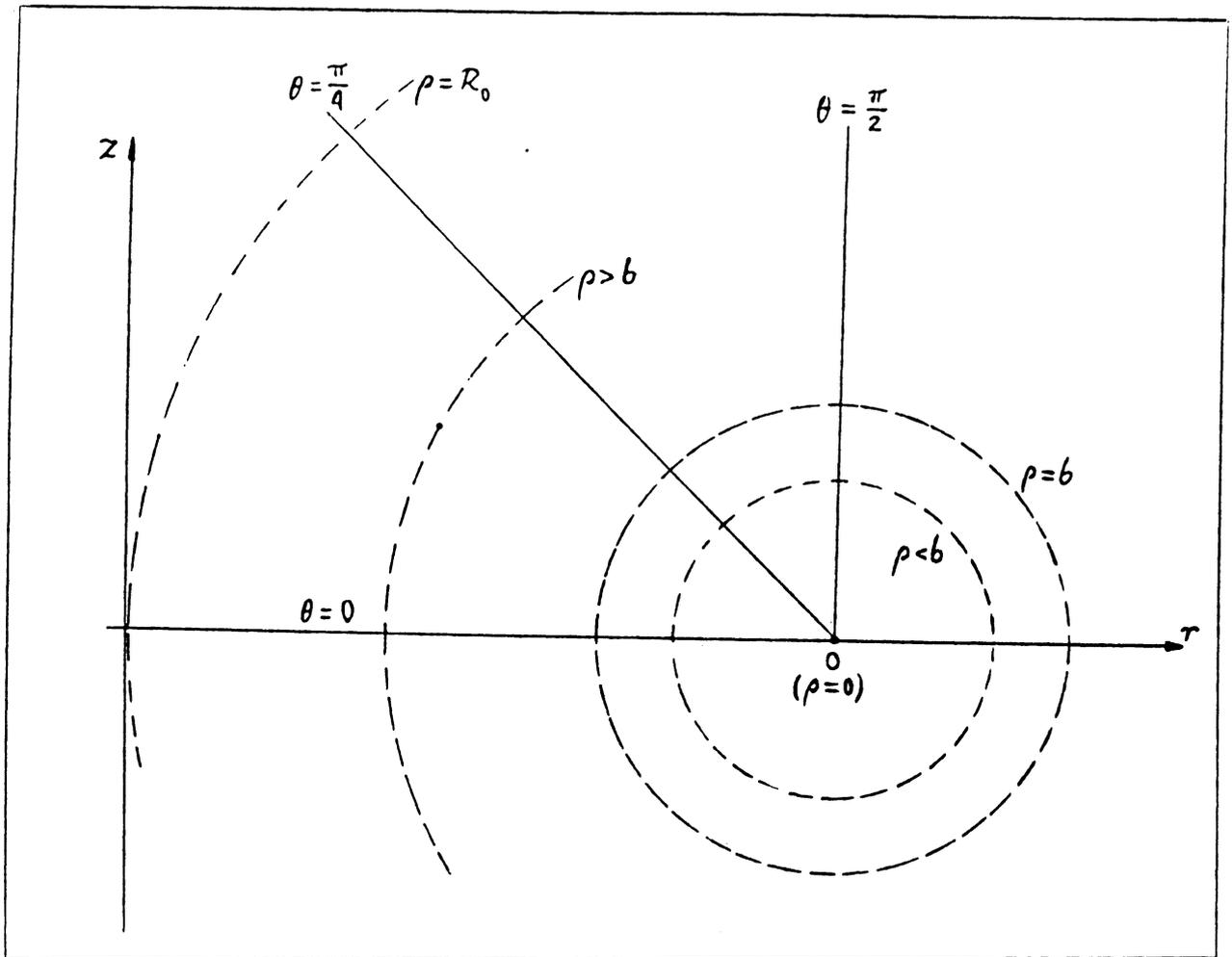


Figura B.2.d

Coordenadas Pseudo-toroidais  $(\rho, \theta, \varphi)$

Interseção de um semi-plano  $\varphi = const$  com as superfícies  $\rho = const$  e  $\theta = const$ ;  $r$  e  $z$  são coordenadas do sistema cilíndrico, na primeira modalidade  $(r, \varphi, z)$ ;  $b$  é o raio menor do toro, sendo o raio maior dado por  $r(O) = R_0$ . As superfícies  $\rho = const$ , sendo concêntricas, não apresentam o deslocamento no sentido do equador externo do toro, próprio das superfícies magnéticas, conforme a figura (B.7).

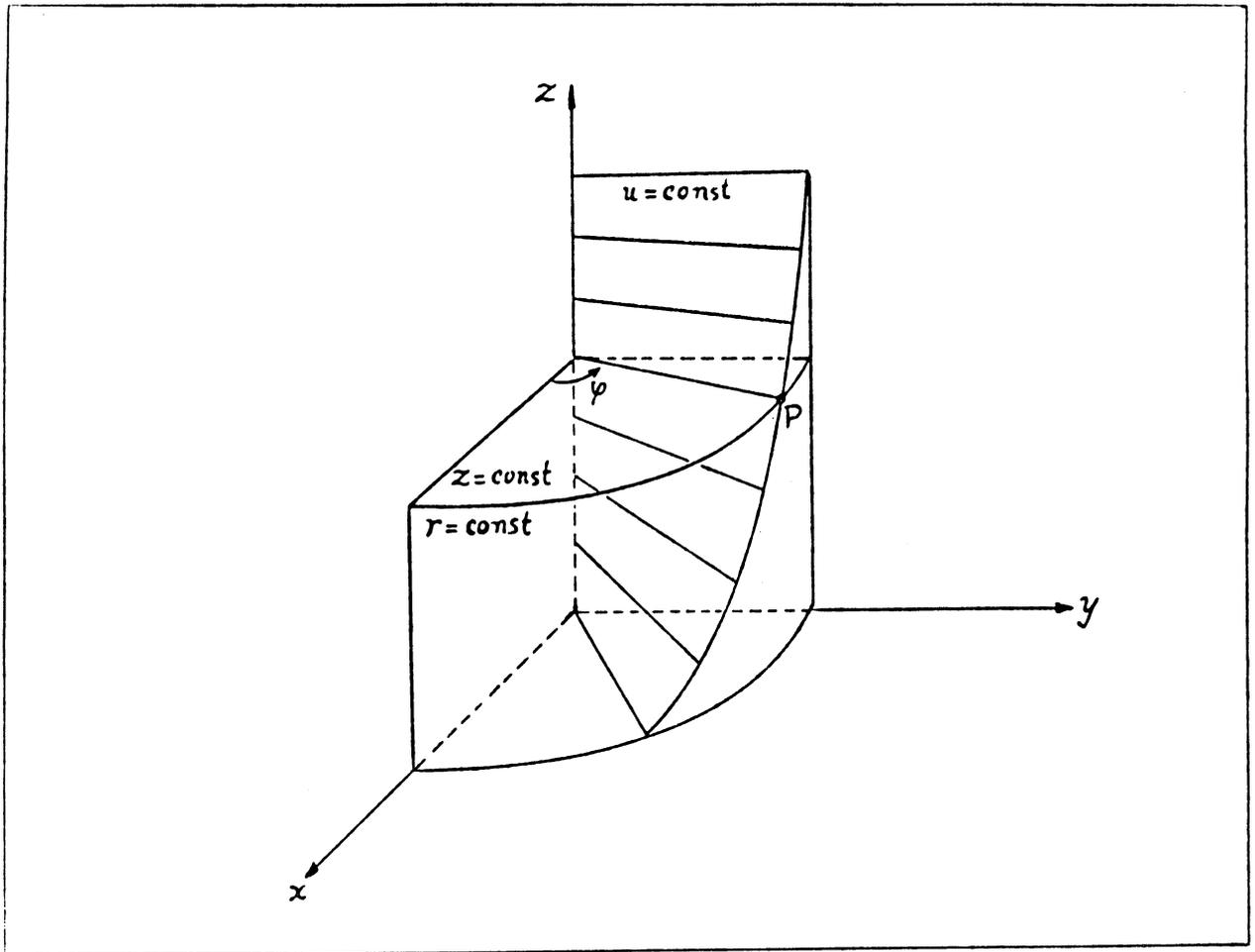


Figura B.3

Coordenadas Cilíndricas Helicoidais

$$r, u = \varphi - \alpha z, z$$

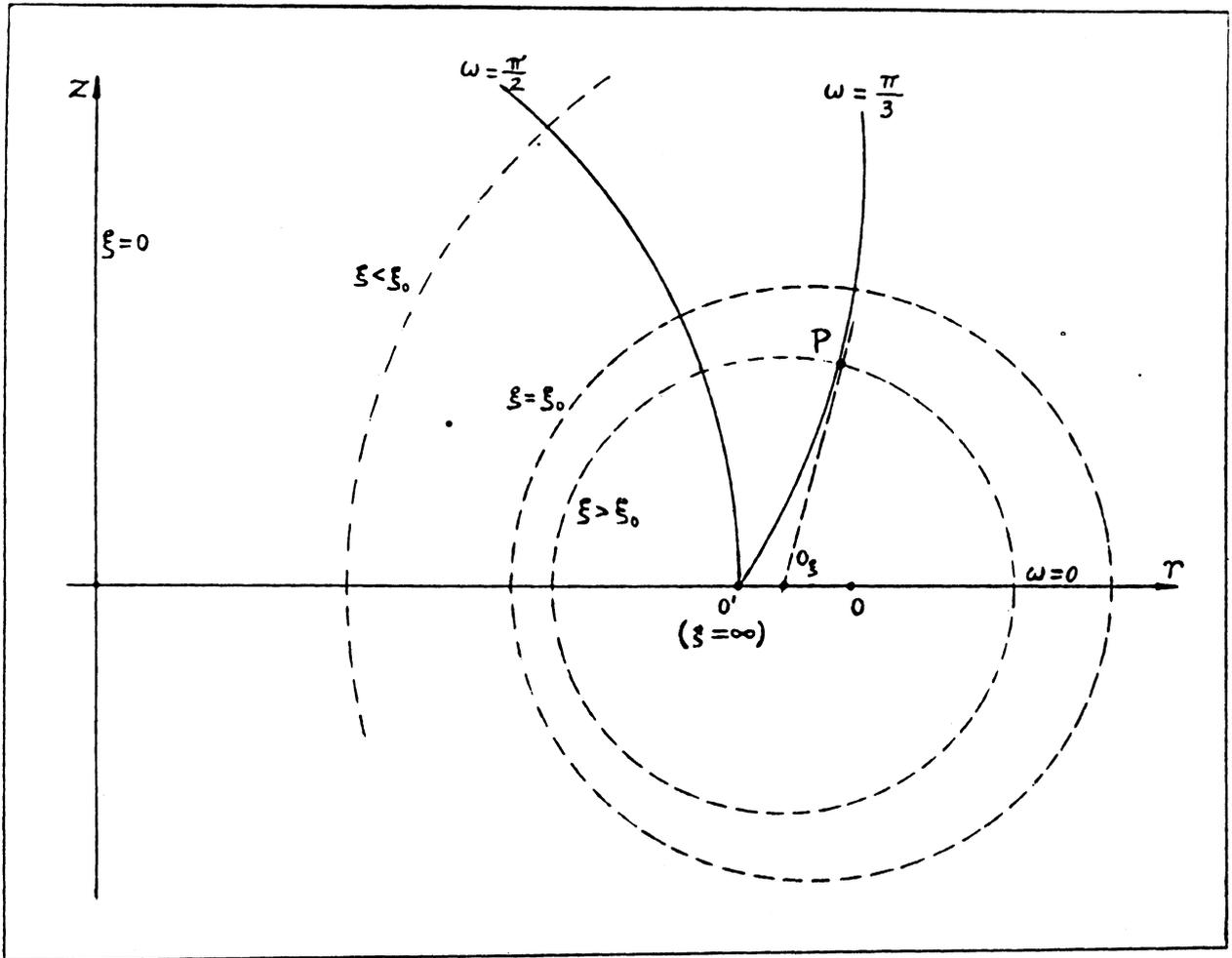


Figura B.4

Coordenadas Toroidais Convencionais  $(\xi, \omega, \varphi)$

Interseção de um semi-plano  $\varphi = \text{const}$  com as superfícies  $\xi = \text{const}$  e  $\omega = \text{const}$ ;  $r$  e  $z$  são coordenadas do sistema cilíndrico, na primeira modalidade  $(r, \varphi, z)$ ; o raio menor  $b$  do toro corresponde à superfície  $\xi = \xi_0$ ; o centro do sistema está em  $r(O') = R'_0 = R_0 [1 - (\frac{b}{R_0})^2]^{\frac{1}{2}}$ , sendo  $R_0 = r(O)$  o raio maior do toro. As superfícies  $\xi = \text{const}$  apresentam deslocamento no sentido do equador interno do toro, contrastando com a disposição das superfícies magnéticas, conforme a figura (B.7).

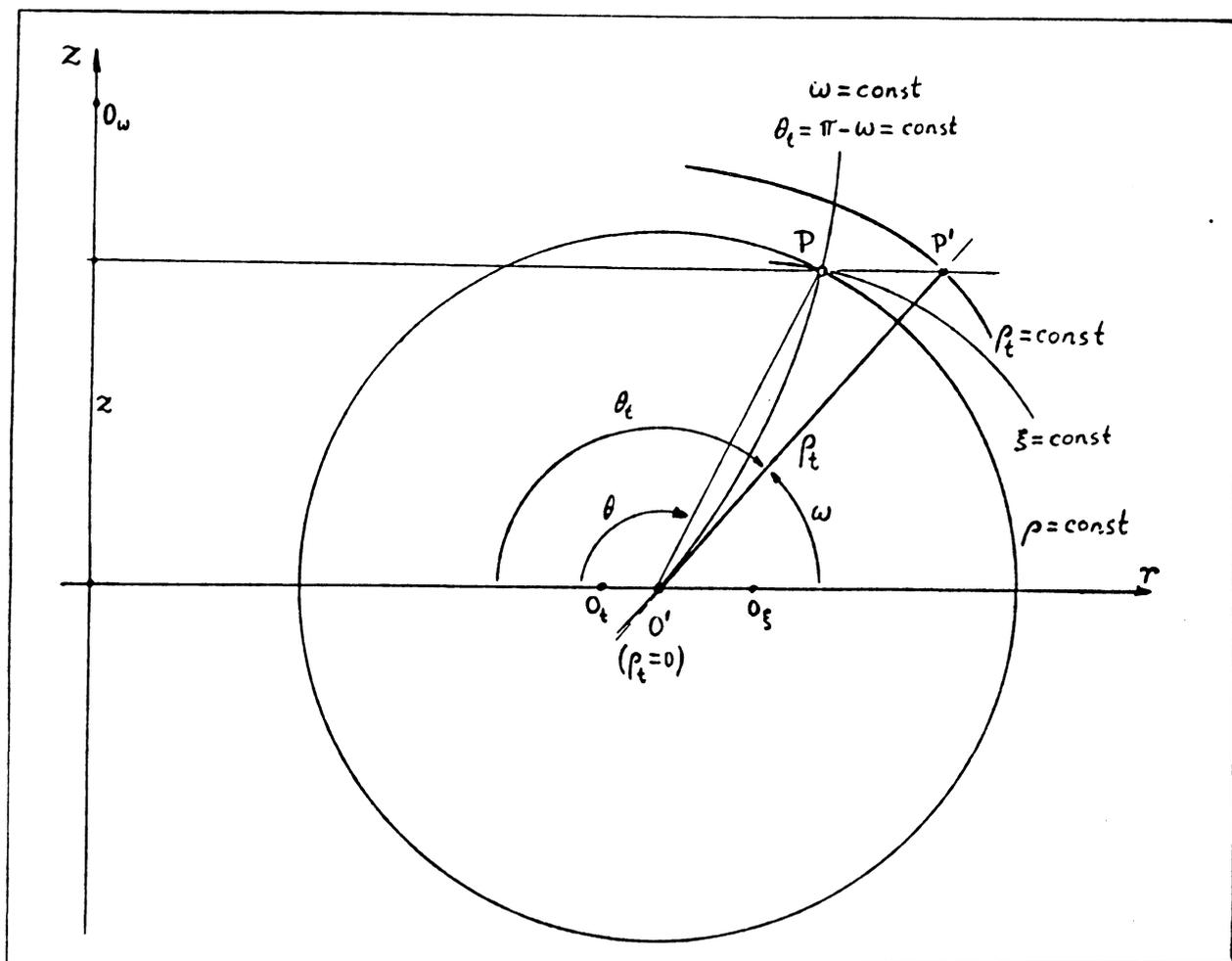


Figura B.5.a

Coordenadas Toroidais Polares  $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$

Comparação com as coordenadas toroidais convencionais  $(\xi, \omega, \varphi)$  e pseudo-toroidais  $(\rho, \theta, \varphi)$  com origem comum  $O'$  num semi-plano  $\varphi = \text{const}$ ;  $r$  e  $z$  são coordenadas do sistema cilíndrico, na primeira modalidade  $(r, \varphi, z)$ ;  $\rho_t$  é definido conforme exposto na seção (B.5); as superfícies  $\rho_t = \text{const}$  não têm seção circular; seus centros aproximados  $O_t$  tendem para  $O'$  à medida que  $\rho_t$  tende para zero, conforme a figura (B.5.b).

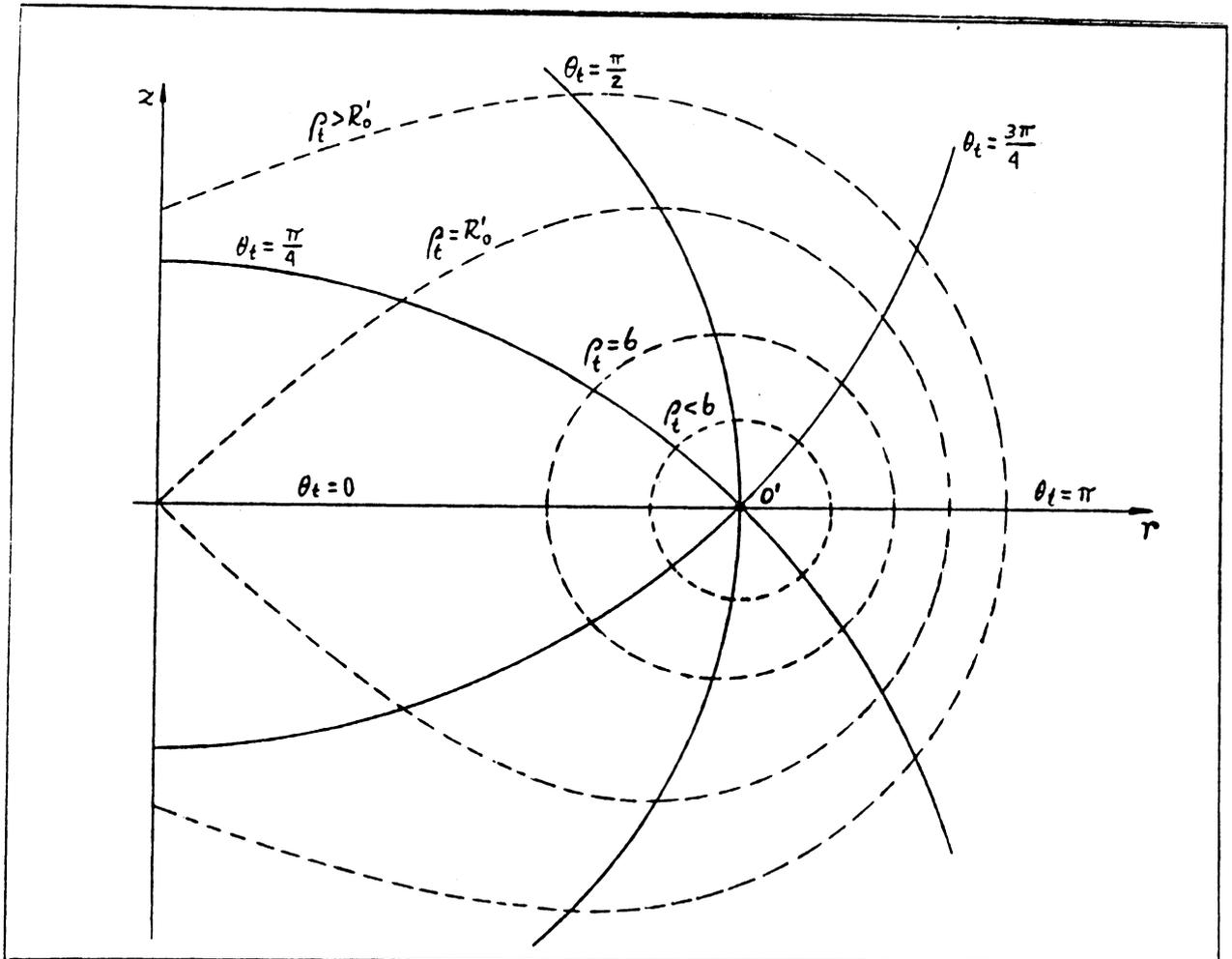


Figura B.5.b

Coordenadas Toroidais Polares ( $\rho_t, \theta_t, \varphi$ )

Interseção de um semi-plano  $\varphi = const$  com as superfícies  $\rho_t = const$  e  $\theta_t = const$ ; as curvas não se interceptam ortogonalmente; em contrapartida, se comparadas com as correspondentes nos outros sistemas, as superfícies  $\rho_t = const$ , nos limites do interior do toro ( $\rho_t < b$ ), se ajustam melhor às superfícies magnéticas da estrutura de equilíbrio ( $\Psi(\rho_t, \theta_t) = const$ , esquematizadas na figura (B.7)), por apresentarem um deslocamento semelhante, no sentido do equador externo do toro.

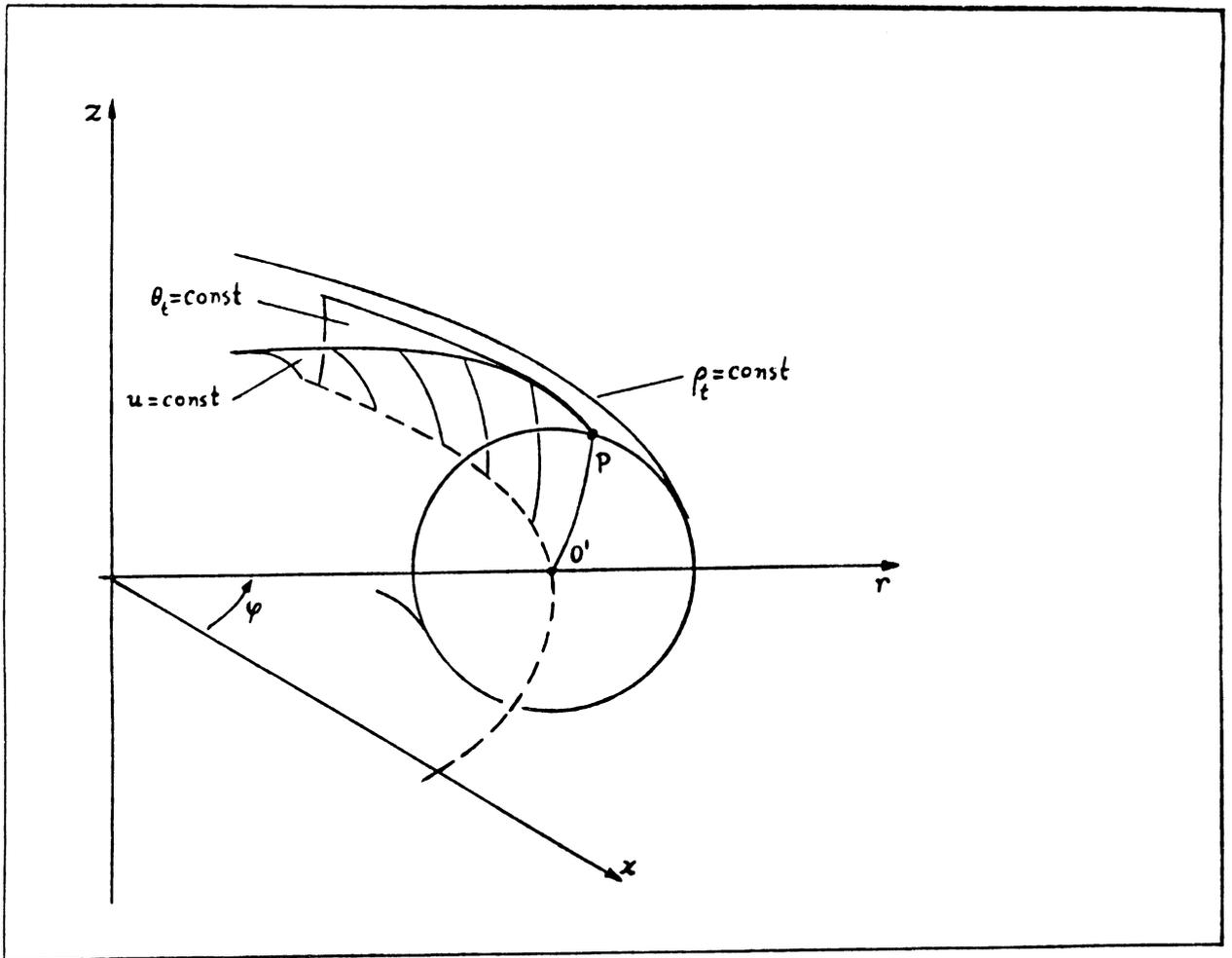


Figura B.6

Coordenadas Toroidais Polares Helicoidais

$$(\rho_t, u = m\theta_t - n\varphi, \theta_t)$$

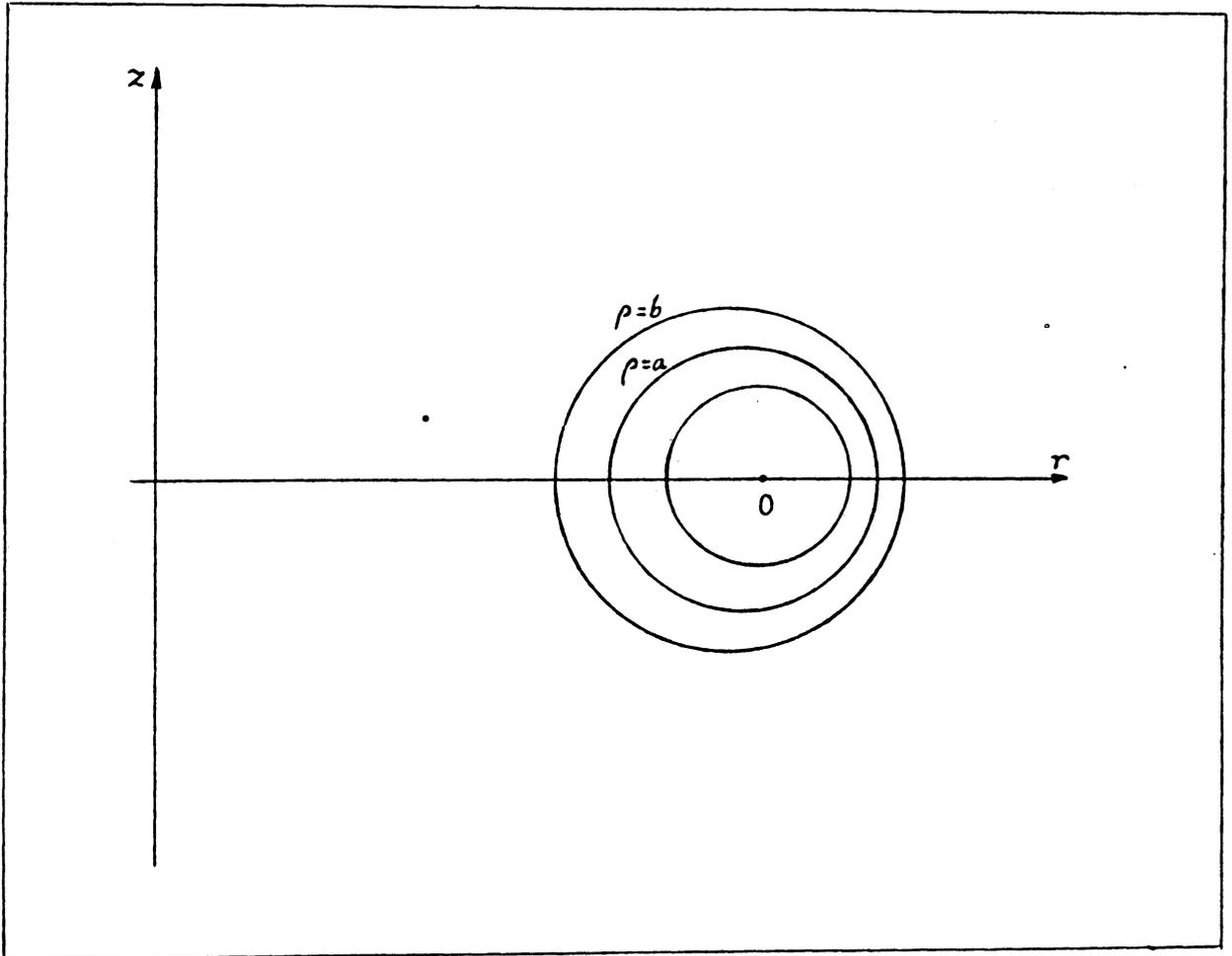


Figura B.7

Superfícies Magnéticas na Estrutura de Equilíbrio

Interseção de um semi-plano  $\varphi = const$  com as superfícies  $\Psi(\rho, \theta) = const$ ; devido ao deslocamento no sentido do equador externo do toro, a configuração física se assemelha à disposição das superfícies  $\rho_i = const$  do sistema toroidal polar; compare-se com o sistema toroidal convencional (figura B.4) ou com o pseudo-toroidal (figura B.2.d).

## APÊNDICE C

### EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Neste apêndice são apresentados os passos essenciais para obtenção da [1.19], com o propósito de esclarecer melhor a sua interpretação física. Como referência geral, pode-se citar [Edenstrassaer 1980] e [Kucinski e Caldas 1990] .

#### C.1. Função de fluxo e função de corrente

Para obter a equação de Grad-Shafranov, inicia-se por definir uma função de fluxo magnético  $\Psi$ , através de uma superfície coordenada  $\chi^i = const$ . É empregado sistematicamente o formalismo apresentado no apêndice A para tratamento de coordenadas curvilíneas. A escolha das coordenadas neste apêndice será feita de forma que o eixo magnético coincida com uma curva coordenada  $\chi^3$ , que caracteriza a direção "longitudinal" e faz o papel de coordenada ignorável;  $\chi^2$  assume a direção "transversal" e  $\chi^1$  se refere à quantidade de superfície.

A figura (C.1, pag.132) mostra um cilindro periódico (com base não necessariamente circular), de comprimento  $L$  segundo a coordenada  $\chi^3$ , e no qual é indicada a superfície  $\chi^2 = const$ , delimitada pelas duas superfícies  $\chi^3 = 0$  e  $\chi^3 = L$ , pelo eixo magnético (tomado como  $\chi^1 = 0$ ) e por uma curva coordenada  $\chi^3$ . Pode-se definir o fluxo de um campo magnético  $\vec{B}$  através de  $\chi^2 = const$  pela expressão

$$\Psi \equiv \frac{1}{L} \int_{\chi^2=const} \vec{B} \cdot d\vec{S}^2, \quad [C.1]$$

onde o elemento diferencial de área é dado por

$$d\vec{S}^2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 d\chi^3 d\chi^1 = \sqrt{g}\hat{e}^2 d\chi^3 d\chi^1, \quad [C.2]$$

e onde se fez uso da [A.6].

Levando [C.2] em [C.1] e considerando os limites definidos para a superfície, tem-se

$$\Psi = \frac{1}{L} \int_0^{\chi^1} d\chi^1 \int_0^L d\chi^3 \sqrt{g} B^2, \quad [C.3]$$

que é a dita "função de fluxo transversal", tomada como invariante para descrever as superfícies magnéticas na configuração de equilíbrio. A partir dessa função, convenientemente manipulada com auxílio das relações do apêndice A para os operadores diferenciais vetoriais, aplicadas ao grupo de equações MHD [1.9], [1.10] e [1.11], escreve-se uma expressão para o campo magnético na forma

$$\vec{B} = \frac{\hat{e}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi + B_3 \frac{\hat{e}_3}{g_{33}}. \quad [C.4]$$

Por analogia, pode-se definir uma "função de corrente"  $I$ , de forma que  $I$  esteja para a densidade de corrente  $\vec{j}$  assim como  $\Psi$  está para  $\vec{B}$ :

$$I = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{L} \int_0^L d\chi^3 B_3; \quad [C.5]$$

que se reduz a

$$I = -\frac{B_3}{\mu_0} \quad [C.6]$$

para o caso em que  $B_3$  independe de  $\chi^3$ , e que no eixo magnético tem-se nula a componente segundo  $\chi^3$  do potencial vetor ( $A_3 = 0$ ), e ainda  $B_3 \neq 0$ . Tomando-se o valor de  $I$  e aplicando a [C.6] em  $\chi^1 = 0$ , tem-se a chamada "função de corrente transversal". Observando a [C.4] e usando a analogia apresentada entre  $\vec{B}$  e  $\vec{j}$ , esta última pode ser escrita na forma

$$\vec{j} = \frac{\hat{e}_3}{g_{33}} \times \nabla I + j_3 \frac{\hat{e}_3}{g_{33}}. \quad [C.7]$$

A [C.4] e a [C.7] serão, na seção seguinte, utilizadas na dedução da equação de Grad-Shafranov.

## C.2. Aplicação na equação do equilíbrio de pressões

Tomando a [1.11]:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad [C.8]$$

e substituindo-se os segundos termos da [C.7] e da [C.4], supondo  $I$  e  $B_3$  independentes de  $\chi^3$ , obtém-se, com o auxílio de propriedades do cálculo vetorial:

$$\nabla p = -\frac{1}{g_{33}} \frac{\nabla \Psi}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B})_3 - \frac{\mu_0 I}{g_{33}} \nabla I; \quad [C.9]$$

com as relações do apêndice A pode-se obter a componente covariante do rotacional do campo magnético; pela suposição de que qualquer quantidade de superfície independe de  $\chi^3$ , obtém-se:

$$(\nabla \times \vec{B})_3 = \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi^2} B_3 - \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi^1} B_3 + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial \chi^1} B_2 \frac{\partial}{\partial \chi^2} B_1 \right), \quad [C.10]$$

sendo

$$B_1 = -\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left( g^{21} \frac{\partial}{\partial \chi^1} \Psi + g^{22} \frac{\partial}{\partial \chi^2} \Psi \right) - \mu_0 I \frac{g_{13}}{g_{33}}, \quad [C.11]$$

$$B_2 = -\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left( g^{11} \frac{\partial}{\partial \chi^1} \Psi + g^{12} \frac{\partial}{\partial \chi^2} \Psi \right) - \mu_0 I \frac{g_{32}}{g_{33}}, \quad [C.12]$$

e

$$B_3 = -\mu_0 I. \quad [C.13]$$

Levando [C.11], [C.12] e [C.13] em [C.10], e em seguida em [C.9], fica-se com:

$$(\Delta^* \Psi) \nabla \Psi = -\mu_0 g_{33} \nabla p - \mu_0^2 I \nabla I + \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi^1} \left( \frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial \chi^2} \left( \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right] \nabla \Psi, \quad [C.14]$$

onde  $\Delta^*$  é um operador diferencial elíptico, que nesse contexto pode ser chamado "Operador de Shafranov Generalizado", e é definido pela expressão:

$$\Delta \Psi \equiv \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi^1} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left( g^{11} \frac{\partial}{\partial \chi^1} \Psi + g^{12} \frac{\partial}{\partial \chi^2} \Psi \right) + \frac{\partial}{\partial \chi^2} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left( g^{12} \frac{\partial}{\partial \chi^1} \Psi + g^{22} \frac{\partial}{\partial \chi^2} \Psi \right) \right]. \quad [C.15]$$

Considerando  $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \Psi} \nabla \Psi \equiv p' \nabla \Psi$  e  $\nabla I = \frac{\partial I}{\partial \Psi} \nabla \Psi \equiv I' \nabla \Psi$  (o que é possível por  $\Psi$ ,  $I$  e  $p$  formarem um conjunto de variáveis de superfície), pode-se reescrever a [C.14] (desde que  $\nabla \Psi \neq 0$ ) na forma:

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 g_{33} p' - \mu_0^2 I I' + \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi^1} \left( \frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial \chi^2} \left( \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right], \quad [C.16]$$

que é a equação de Grad-Shafranov generalizada, a ser aplicada neste trabalho para o cálculo do equilíbrio em coordenadas toroidais polares, cuja aproximação de ordem zero coincide com a solução da [C.16] aplicada em coordenadas cilíndricas, conforme explicado no capítulo três.

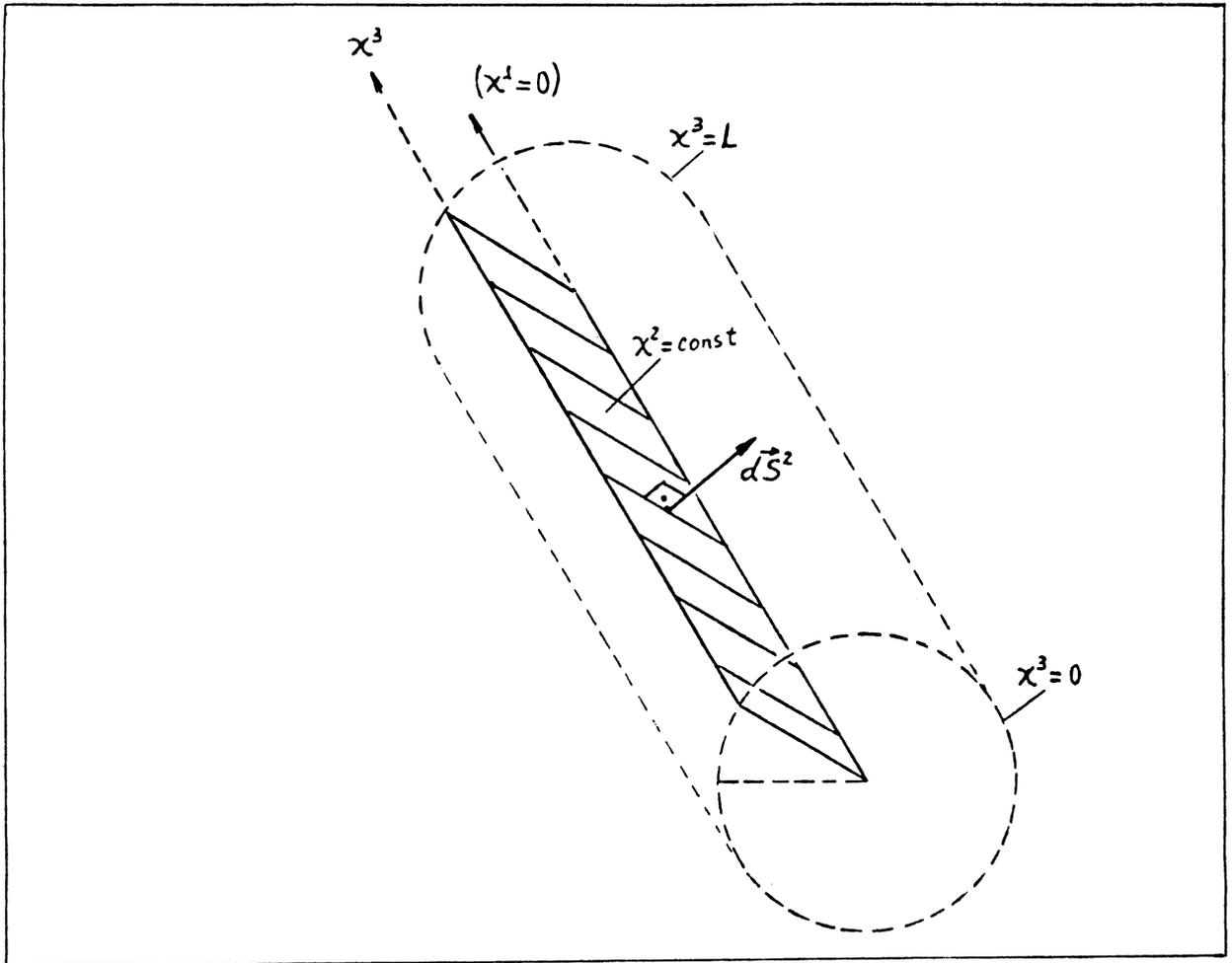


Figura C.1

Fluxo Magnético através de  
uma Superfície Coordenada

## Lista dos Símbolos Empregados

$a$  : raio da coluna de plasma

$a$  : coeficiente na [4.33]

$a_{mn}; a'_{mn}$  : coeficientes de Fourier na [4.1]

$A$  : razão de aspecto pela [1.1]

$A$  : grandeza auxiliar para a [5.48]

$A_{m'n'}$  : coeficiente de Fourier na [4.13]

$A_N$  : coeficiente na [4.35]

$b$  : raio menor do toro

$b$  : coeficiente na [4.33]

$b_{mn}$  : coeficiente de Fourier pela [4.4]

$\vec{b}$  : campo magnético perturbativo

$b_{\rho 0}$  : componente "física" radial de  $\vec{b}$  no sistema adotado no cap. 5

$\vec{B}$  : campo magnético total

$\vec{B}_0$  : campo magnético de equilíbrio

$B_{m'n'}$  : coeficiente de Fourier na [4.13]

$B_N$  : coeficiente na [4.35]

$B_P$  : "campo poloidal" de equilíbrio (incluindo  $B_\theta$  e  $B_\rho$ )

$c$  : limite de integração na [2.26]

$c_{mn}; c'_{mn}$  : coeficientes de Fourier na [4.1]

$C$  : agrupamento de constantes na [5.4]

$d\vec{\ell}$  : elemento de linha

$d\vec{S}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) : elemento de área da superfície coordenada  $\chi^i$

$D_{m'n'}$  : coeficiente de Fourier na [4.13]

$\hat{e}_i; \hat{e}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) : vetores de base covariantes e contravariantes

$\hat{e}_{\langle i \rangle}$  : vetores de base ortonormais  
 $\vec{E}$  : campo elétrico  
 $E_{m'n'}$  : coeficiente de Fourier na [4.13]  
 $f^1; f^2; F^2$  : funções auxiliares no sistema de equações [2.8]/[2.9]  
 $\hat{F}^2$  : aplicação da operação descrita em [2.21] à função  $F^2$   
 $g$  : largura do anel de corrente  
 $g$  : determinante do tensor métrico covariante  
 $g_{ij}; g^{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) : componentes do tensor métrico covariante e do contravariante  
 $I$  : corrente nos limitadores  
 $I$  : função de corrente (na equação de Grad-Shafranov)  
 $I_p$  : corrente de plasma  
 $\vec{j}$  : densidade de corrente  
 $j_\varphi$  : módulo de  $\vec{j}$ , identificável com a sua componente toroidal, pela [3.12]  
 $j_0$  : valor máximo de  $j_\varphi$ , correspondente ao centro do plasma  
 $\mathcal{J}_\ell(x)$  : função de Bessel de ordem  $\ell$  aplicada ao argumento  $x$   
 $K$  : grandeza auxiliar na [5.52]  
 $\ell_i$  : indutância interna do plasma por unidade de comprimento, pela [3.11]  
 $L$  : número de fios do limitador na direção toroidal  
 $L$  : período segundo a coordenada  $\chi^3$   
 $m$  : número de trânsitos toroidais de uma linha de campo magnético  
 $m$  : índice na série de Fourier [4.1]  
 $m'$  : índice na série de Fourier [4.13]  
 $n$  : número de trânsitos poloidais de uma linha de campo magnético  
 $n$  : índice na série de Fourier [4.1]  
 $n'$  : índice na série de Fourier [4.13]  
 $\mathcal{O}(\varepsilon); \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  : termos da ordem de  $\varepsilon$  e de  $\varepsilon^2$

$p$  : número de anéis de corrente, para a [5.28]  
 $p$  : pressão cinética do plasma  
 $q$  : fator de segurança local, pela [1.16]  
 $\bar{q}$  : fator de segurança médio  
 $\tilde{q}$  : valor máximo da parte oscilante do fator de segurança  
 $r$  : primeira coordenada no sistema cilíndrico (primeira modalidade)  
 $\vec{R}$  : vetor genérico (nos apêndices A e B)  
 $R_0$  : raio maior do toro  
 $R'_0$  : raio maior do sistema toroidal convencional  
 $\mathcal{R}$  : função auxiliar, na [4.26]  
 $t$  : tempo (no cap. 1)  
 $T_1$  : período característico na direção poloidal, pela [4.19]  
 $T_2$  : período característico na direção toroidal, pela [4.18]  
 $u$  : segunda coordenada no sistema toroidal polar helicoidal, pela [B.39]  
 $u$  : segunda coordenada no sistema cilíndrico helicoidal (no apêndice B)  
 $\vec{v}$  : velocidade macroscópica do plasma (no cap. 1)  
 $W$  : grandeza auxiliar na [5.51]  
 $x$  : primeira coordenada no sistema retangular  
 $y$  : segunda coordenada no sistema retangular  
 $Y$  : agrupamento de parâmetros do limitador, pela [5.28]  
 $z$  : terceira coordenada nos sistemas retangular e cilíndrico (primeira modalidade)  
 $z'$  : terceira coordenada no sistema cilíndrico (segunda modalidade)  
 $\alpha$  : passo das hélices no sistema cilíndrico helicoidal (no apêndice B)  
 $\alpha$  : ângulo de fase, pela [4.5]  
 $\alpha$  : coeficiente na [4.29]  
 $\beta$  : coeficiente na [4.29]

$\beta$  : razão entre a pressão cinética e a magnética, pela [1.14]  
 $\beta_P$  :  $\beta$  para o campo poloidal, pela [1.15]  
 $\gamma$  : parâmetro que caracteriza o perfil da densidade de corrente, na [3.12]  
 $\delta$  : afastamento entre a separatriz e a superfície destruída, na [5.64]  
 $\delta_{max}$  : semi-largura das ilhas magnéticas, pela [5.65]  
 $\delta\rho$  : pequena variação na coordenada radial, na [3.29]  
 $\delta\chi^i$  ( $i = 1, 2$ ) : correções de segunda ordem para as coordenadas, em [2.16]/[2.17]  
 $\delta\Psi$  : correção de primeira ordem no fluxo de equilíbrio, pela [3.9]  
 $\Delta^*$  : operador de Shafranov generalizado (no apêndice C)  
 $\varepsilon$  : parâmetro de perturbação no sistema [2.8]/[2.9]  
 $\eta$  : resistividade do plasma (na [1.4])  
 $\theta$  : segunda coordenada nos sistemas cilíndrico (segunda modalidade) e pseudo-toroidal  
 $\theta_t$  : segunda coordenada no sistema toroidal polar  
 $\Theta$  : função auxiliar, na [4.26]  
 $\iota$  : transformada rotacional, pela [1.17]  
 $\kappa$  : constante de integração , na [3.28]  
 $\lambda$  : constante de separação , na [4.28]  
 $\Lambda$  : coeficiente de assimetria do campo poloidal, pela [3.10]  
 $\mu_0$  : permeabilidade magnética do vácuo  
 $\xi$  : primeira coordenada no sistema toroidal convencional  
 $\xi_0$  : valor aproximado de  $\xi$  correspondente à parede do vaso toroidal  
 $\rho$  : densidade de massa (na [1.2])  
 $\rho$  : primeira coordenada nos sistemas cilíndrico (segunda modalidade) e pseudo-toroidal  
 $\rho_t$  : primeira coorderrada no sistema toroidal polar

$\rho_0$  : primeira coordenada do sistema adotado no capítulo três, correspondente ao valor de  $\rho_t$  em  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$  na superfície magnética.

$\rho_{mn}$  : valor de  $\rho_0$  na superfície ressonante com  $\bar{q} = \frac{m}{n}$

$\varphi$  : segunda coordenada no sistema cilíndrico (primeira modalidade); terceira coordenada nos sistemas pseudo-toroidal, toroidal convencional e toroidal polar

$\phi$  : função escalar arbitrária (no apêndice A)

$\Phi$  : potencial escalar magnético, na [4.20]

$\chi_i, \chi^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) : coordenadas covariantes e contravariantes

$\bar{\chi}^i$  ( $i = 1, 2$ ) : coordenadas contravariantes do sistema modificado [2.13]/[2.14]

$\tilde{\chi}^2$  : "parte oscilante" envolvida na aproximação de primeira ordem de  $\chi^2$ , na [2.19]

$\psi$  : função auxiliar na [4.22]

$\Psi$  : fluxo magnético

$\Psi_H^0$  : fluxo no modelo toroidal de equilíbrio

$\Psi_H^1$  : fluxo no modelo toroidal devido à perturbação

$\Psi_0$  : aproximação de ordem zero de  $\Psi_H^0$ , identificável com  $\Psi_C$

$\Psi_C$  : fluxo no modelo cilíndrico

$\omega$  : segunda coordenada no sistema toroidal convencional

$\langle \quad \rangle$  : média de uma função em  $\chi^3$ , pela [2.15]

$\{ \quad \}$  : "parte oscilante" de uma função, pela [2.20]

## Índice das Ilustrações

### CAPÍTULO UM

1.1. Direções de Referência em um Toro .....	15
1.2. Parâmetros Geométricos Básicos de um Toro .....	16
1.3. Geometria da Coluna de Plasma .....	17
1.4. Linha de Campo Magnético Helicoidal .....	18
1.5. Superfícies Magnéticas na Estrutura de Equilíbrio .....	19
1.6. Superfície de "Fita Poloidal" .....	20
1.7. Superfície de "Fita Helicoidal" .....	21
1.8.a. Superfície Magnética Racional .....	22
1.8.b. Superfície Magnética Irracional .....	22
1.9. Esquema Geométrico do Anel de Corrente .....	23
1.10. Distribuição dos Limitadores no Percorso Toroidal .....	24
1.11. Ilhas Magnéticas .....	25

### CAPÍTULO TRÊS

3.1. Perfil da Densidade de Corrente para diferentes valores de $\gamma$ .....	46
---	----

### CAPÍTULO QUATRO

4.1. Sequência de Pulsos Quadrados .....	57
--	----

### CAPÍTULO CINCO

5.1. Separatriz com Curvas de Libração e de Rotação .....	69
5.2. Separatriz com Indicação da Largura das Ilhas Magnéticas .....	70

## CAPÍTULO SEIS

6.1. Densidade de Corrente $0 < \rho_0 < a$ ).....	79
6.2. Fluxo Magnético ( $0 < \rho < a$ ).....	80
6.3. Fluxo Magnético ( $a < \rho_0 < b$ ).....	81
6.4. Campo Poloidal Médio ( $0 < \rho_0 < a$ ).....	82
6.5. Campo Poloidal Médio ( $a < \rho_0 < b$ ).....	83
6.6. Coeficiente de Assimetria do Campo Poloidal ( $0 < \rho_0 < a$ ).....	84
6.7. Coeficiente de Assimetria do Campo Poloidal ( $a < \rho_0 < b$ ).....	85
6.8. Fator de Segurança Médio ( $0 < \rho_0 < a$ ).....	86
6.9. Fator de Segurança Médio ( $a < \rho_0 < b$ ).....	87
6.10. Largura das Ilhas Magnéticas Primárias em Função da Corrente nos 4 Limitadores ( $0 < \rho_0 < a$ ).....	88
6.11. Largura das Ilhas Magnéticas Primárias em Função da Corrente nos 4 Limitadores ( $a < \rho_0 < b$ ).....	89

## APÊNDICE A

A.1. Vetores da Base Contra e Covariantes.....	101
--	-----

## APÊNDICE B

B.1. Coordenadas Retangulares.....	117
B.2.a. Coordenadas Cilíndricas (primeira modalidade).....	118
B.2.b. Coordenadas Cilíndricas (segunda modalidade).....	119
B.2.c. Coordenadas Pseudo-toroidais.....	120
B.2.d. Coordenadas Pseudo-toroidais: Perfil das Superfícies Coordenadas.....	121
B.3. Coordenadas Helicoidais.....	122
B.4. Coordenadas Toroidais Convencionais.....	123

B.5.a. Coordenadas Toroidais Polares.....	124
B.5.b. Coordenadas Toroidais Polares: Perfil	
das Superfícies Coordenadas .....	125
B.6. Coordenadas Toroidais Polares Helicoidais.....	126
B.7. Superfícies Magnéticas na Estrutura de Equilíbrio .....	127
 APÊNDICE C	
C.1. Fluxo Magnético por uma Superfície Coordenada.....	132

## Referências

- [01] Araújo, M.S.T. (1993), *Construção dos Anéis do Limitador Ergódico e Magnético do Tokamak TBR-1*, Publicações IFUSP/P-1055.
- [02] Arfken, G. (1985), *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press Inc., N.Y.
- [03] Bogolyubov N. N., Mitropolskii Yu. A. (1961), *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon and Breach, N.Y.
- [04] Caldas I. L., Vannucci A. (1985), *Equilíbrio e Instabilidades do Plasma em Tokamaks*, Publicações IFUSP/P-523.
- [05] Cary J. R. (1984), *Physics of Fluids* **27**, 119.
- [06] Camargo S. J. (1989), Dissertação de Mestrado, IFUSP, não publicado.
- [07] Edenstraesser J. W. (1980), *J. Plas. Phys.* **24**, 299-313.
- [08] Egorov S. M., Kuteev B. V., Miroshnikov I. V., Sergeev V. Yu. (1987), *JETP Lett.* **46**, 180.
- [09] Furth H. P. (1975), *Nucl. Fus.* **15**, 487.
- [10] Feneberg W., Wolf G. H. (1981), *Nucl. Fus.* **27**, 669.
- [11] D'haeseleer W. D., Hitchon W. N. G., Callen J. D., Shohet J. L. (1991), *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure*, Springer Verlag, N.Y.
- [12] Jackson J. D. (1983), *Eletrodinâmica Clássica*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- [13] Kucinski M. Y., Caldas I. L. (1990), *MHD Equilibrium Equation in Symmetric Systems*, Publicações IFUSP.
- [14] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V. (1990), *J. Plas. Phys.* **44**, 303.
- [15] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V. (1992), *Plas. Phys. Contr. Fus.* **34**, 1067.
- [16] Laing E. W., Roberts S. J., Whipple R. T. P. (1954), *Plas. Phys.* **1**, 49.

- [17] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. (1983), *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, N.Y.
- [18] Manheimer W. M., Lashmore-Davies C. (1989), *MHD and Microinstabilities in Confined Plasmas*, Adam Hilger Press, N.Y.
- [19] Martin T. J., Taylor J. B. (1984), *Plas. Phys. Contr. Fus.* **26**, 321.
- [20] Monteiro L.H.A. (1995), *Coupling of Modes on R.F.P. - An Analytical Approach*, Publicações IFUSP.
- [21] Morozov A. I., Solov'ev L. S. (1966), *Rev. Plas. Phys.* vol.2, 1, Acad. M. A. Leontovich, Consultants Bureau, N.Y.
- [22] Mukhovatov V. S., Shafranov V.D. (1971), *Nucl. Fus.* **11**, 605.
- [23] Okano V. (1990), Dissertação de Mestrado, IFUSP, não publicado.
- [24] Pereira J. M. (1994), Dissertação de Mestrado, UFPr, não publicado.
- [25] Shafranov V. D. (1960), *Soviet Physics JETP* **37**, 775.
- [26] Vasconcelos D. B. (1995), Dissertação de Mestrado, UFPr, não publicado.
- [27] Vannucci A., Gill R. D. (1989), *JET Internal Report JET-IR(89)15*.
- [28] Vannucci A., Nascimento I. C., Caldas I. L. (1989), *Plas. Phys. Contr. Fus.* **31**, 147.
- [29] Viana R. L., Caldas I. L. (1991), *Eur. J. Phys.* **12**, 293.
- [30] Viana R. L. (1993), *Rev. Mex. Fís.* **39**, 902.
- [31] Viana R. L. (1994), Tese de Concurso para Professor Titular, UFPr.
- [32] Wesson J. (1987), *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford.