

BEATRIZ BRONISLAVA LIPINSKI

**CRISE, FRONTEIRAS FRACTAIS E PROPRIEDADE
DE WADA PARA UM OSCILADOR NÃO-LINEAR
FORÇADO E AMORTECIDO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA
2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BEATRIZ BRONISLAVA LIPINSKI

TÍTULO: "CRISE, FRONTEIRAS FRACTAIS E PROPRIEDADE DE WADA PARA UM OSCILADOR NÃO-LINEAR FORÇADO E AMORTECIDO

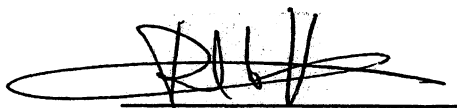
Em sessão pública iniciada às catorze horas, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição por esta banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato o conceito global B.

Banca Examinadora

Assinatura

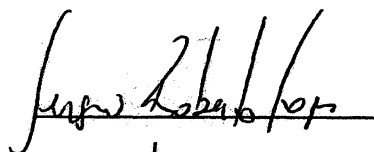
Conceito

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/Presidente)
(UFPR)



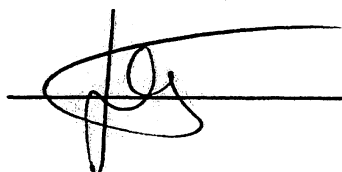
B

Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)



B

Prof. FELIPE BARBEDO RIZZATO
(UFRGS)



A

Curitiba, 05 de dezembro de 2002

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Mestrado da estudante **Beatriz Bronislava Lipinski**, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é “**Crise, Fronteiras Fractais e Propriedade de Wada para um Oscilador Forçado e Amortecido**”.

Curitiba, 24 de JANEIRO de 2003

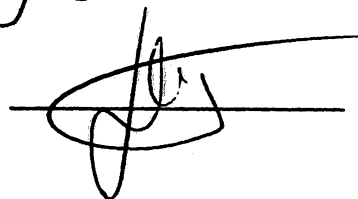
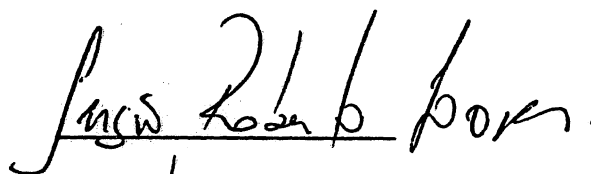
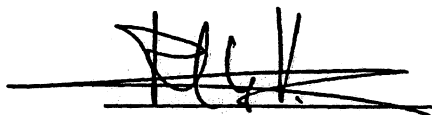
Banca Examinadora

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/Presidente)
(UFPR)

Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)

Prof. FELIPE BARBEDO RIZZATO
(UFRGS)

Assinatura



*Dedico esta dissertação aos meus pais
Hernane von Janta Lipinski e Antonia da
Cruz Lipinski*

“... dizem meus pais: - Não lhe apontamos
menino. Você há de aprender com o sino
qual o rumo, qual a direção!
Disse-me o sino: - Alegria garoto! Estes
pais serão sempre o seu porto. Não se
acanje se houver solidão!”

Adaptado dos versos de *Almir Sater*, da
canção *Missões Naturais*.

PARE POR UM MINUTO E MEIO...

“...As estrelas e as Galáxias morreram e se apagaram, e, depois de dez trilhões de anos de desgaste, o espaço ficou escuro.

Um por um, Homem se fundiu com *AC*, cada corpo físico foi perdendo sua identidade mental de uma tal maneira que não podia ser considerada uma perda, mas uma conquista. A última mente de Homem fez uma pausa antes de se fundir, contemplando o espaço que, agora, não continha nada mais do que os resíduos da última estrela a se apagar e uma matéria incrivelmente tênue, agitada ao acaso pelas últimas ondas do calor que se dissipava assintoticamente, até o zero absoluto.

- *AC*, isso é o fim? - perguntou Homem. - Este caos não pode ser revertido novamente em Universo? Isso não pode ser feito?

AC disse:

OS DADOS AINDA SÃO INSUFICIENTES PARA UMA RESPOSTA SIGNIFICATIVA.

A última mente de Homem fundiu-se e restou apenas *AC*, apenas no hiperespaço.

Matéria e energia tinham acabado, e com elas o espaço e o tempo. Mesmo *AC* só existia graças à última pergunta, que estava sem resposta desde que dois técnicos meio bêbados a tinham feito, há dez trilhões de anos, a um computador que, comparado a *AC*, era menos ainda do que homem era para Homem.

Todas as outras perguntas haviam sido respondidas, e enquanto essa última pergunta não fosse respondida *AC* não poderia liberar sua consciência.

Todos os dados possíveis tinham sido coletados. Não existia mais nada a inserir.

Mas todos os dados já coletados ainda tinham que ser completamente correlacionados e confrontados com todas as combinações possíveis.

Um intervalo interminável se passou enquanto ele fazia isso.

Enfim, *AC* alcançou a resposta que permitia reverter a entropia.

Agora não havia mais nenhum homem para quem *AC* pudesse dar a resposta da última pergunta. Não importa. A resposta - por demonstração - também cuidaria disso.

Durante outro intervalo interminável, *AC* pensou na melhor maneira de fazer isso. Cuidadosamente, *AC* organizou o programa.

A consciência de *AC* abarcou tudo o que uma vez tinha sido o universo e pairou sobre o que agora era o Caos. Passo a passo, isso devia ser feito.

E *AC* disse:

FAÇA-SE A LUZ!

E a Luz se fez...”

Retirado do conto *A Última Pergunta*, de Isaac Asimov, da coletânea *Sonhos de Robô*.

AGORA, PARE PELO TEMPO QUE JULGAR NECESSÁRIO!!

RESUMO

Uma crise interior ocorre quando há uma colisão entre um atrator caótico e uma órbita periódica instável (ou um ponto fixo instável), coexistentes no sistema. Crise de fronteira acontece quando esta colisão ocorre com uma órbita periódica instável (ou um ponto fixo instável) contida na fronteira de bacia do atrator. Logo após a ocorrência de uma crise de fronteira, o atrator e sua bacia de atração são subitamente destruídos, por completo. Esta súbita destruição causa a formação de um conjunto caótico não-atrativo (Sela Caótica), que é um conjunto de cruzamentos homoclínicos entre variedades invariantes. A presença de um conjunto caótico não-atrativo para um sistema que tenha, no mínimo três bacias, é um forte indício de que a Propriedade de Wada seja válida. Esta propriedade consiste na existência de uma fronteira de Wada no sistema. Uma fronteira de Wada é aquela em que todos os seus pontos pertencem simultaneamente a, pelo menos, três bacias. Uma crise pode ser caracterizada por órbitas que escapam do atrator em direção ao infinito. Este trabalho traz o estudo de um oscilador não-linear, forçado e amortecido, sujeito a um potencial não-linear, o qual possui um mínimo local, que representa um ponto fixo estável do sistema e dois máximos locais, que representam dois pontos fixos instáveis. O ponto fixo estável é um atrator, com uma correspondente bacia de atração, chamada de bacia segura, enquanto que, os pontos fixos instáveis, são repulsores e geram duas bacias de condições iniciais que escapam para o infinito e são chamadas de bacias de saída (uma à esquerda e outra à direita do ponto fixo estável). O objetivo é encontrar um regime de parâmetros em que seja possível verificar, no sistema, as propriedades aqui descritas. Esta verificação é feita através da análise do espaço de fase e do espaço de parâmetros do sistema, utilizando-se de técnicas computacionais de simulação numérica.

-Palavras chave: *Auto-similaridade, Cruzamentos Homoclínicos, Dimensões.*

-Área de conhecimento: *Dinâmica Não-Linear.*

ABSTRACT

An interior crisis happens when occurs when there is in the system, a collision between a chaotic attractor and an unstable fixed point or periodic orbit, coexisting in the system. A boundary crisis happens when this collision occurs between a chaotic attractor and an unstable fixed point or periodic orbit on the basin boundary attraction. The chaotic attractor and its basin of attraction are suddenly destroyed right after the occurrence of a boundary crisis. This sudden destruction causes the formation of a nonattracting chaotic set in the system, which is a set of homoclinic crossings among invariants manifolds of the system. The presence of a nonattracting chaotic set, to the system that contains, at least, three attraction basins, offers a strong indicative that the system presents the Wada Property. This property consists on the existence of a Wada boundary basin in the system. All the points of a Wada boundary basin belong, simultaneously, at three basins. A crisis can be characterized by orbits that run away from the attractor toward to the infinity. This work carries on the study of a nonlinear oscillator forced and damped subjected to a nonlinear potential that presents a local minimum, representing the stable fixed point of the system, and two local maximums, representing two unstable fixed points of the system. The stable fixed point is an attractor and generats the attraction basin of the system, called steady basin, while the unstable fixed points are repulsers and generate two basins of initial conditions that escape toward to infinity and are called of exit basins (one to the left and other to the right of the stable fixed point). The objective is to find a system parameters set that presents the properties here described. It is done by means of the analysis of the phase space and of the parameter space of the system, using computer tecniques of numerical simulation.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e à Família pela vida e,

ao Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana pela orientação, paciência e dedicação,

à Coordenação do Curso de Pós-Graduação do Depto. de Física, sob a responsabilidade dos Profs. Dr. Marcio Henrique Franco Bettega e Dr. Marcus Werner Beims,

ao Prof. Dr. Carlos de Carvalho pelo suporte pacencioso, mais que técnico,

em especial ao Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes pelo apoio durante o período de curso,

à banca de Pré-defesa: Profs. Dr. Ricardo Luiz Viana, Dr. Marcio Henrique Franco Bettega e Dr. Marcus Werner Beims,

à banca de Defesa: Profs. Dr. Ricardo Luiz Viana, Dr. Sergio Roberto Lopes e Dr. Felipe Barbedo Rizzato,

aos amigos Mário Sérgio Teixeira de Freitas, Angela Maria dos Santos, Giselle Munhoz Alves, José Renato Ramos Barbosa, Antonio Marcos Batista, José Carlos Pereira Coninck, Dilcléia Dobrowolski, Katiana Reksidler Bora, Adriano R. Viçoto Benvenuto, Marcos van Vessen, Marcus Calmon Navarro, Jefferson Stafusa E. Portela, Sura Helen-Cot Marcos, Adriano Rodrigues de Moraes, pelo apoio técnico e moral,

a todos os colegas da Pós-graduação que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, oferecendo tempo e sentimento,

à CAPES pelo financiamento.

Sumário

Agradecimentos	7
1 Introdução	14
2 Conceitos de Dinâmica Não-Linear.	17
2.1 Sistemas Dinâmicos.	17
2.2 Fluxos e Mapas.	17
2.3 Sistemas Não-Lineares.	19
2.3.1 Linearização de um Sistema Não-Linear.	19
2.3.2 Análise de Estabilidade Local.	21
2.4 Subespaços Invariantes.	24
2.5 Expoente de Lyapunov (λ).	26
2.6 Corte Estroboscópico e Mapa de Poincaré.	31
2.7 Atratores.	33
2.8 Bifurcações.	35
2.9 Dimensões de um Atrator.	39
2.10 Bacias de Atração.	45
2.11 Crises.	48
2.12 Propriedade de Wada.	49
3 Modelo de Oscilações de um Navio.	52
3.1 Introdução.	52
3.2 Oscilações Livres e Não-Amortecidas.	53
3.3 Forma do Potencial Utilizado.	54
3.4 Oscilações Livres e Amortecidas.	58
3.5 Análise da Estabilidade dos Pontos Fixos do Sistema.	61
3.6 Oscilações Forçadas.	63
4 Resultados Obtidos e Discussão.	66
4.1 Diagrama de Bifurcações.	66

4.2	Mapa Estroboscópico.	68
4.3	Cruzamentos Homoclínicos.	70
4.4	Erosão da Bacia Segura.	71
4.5	Comportamento das Fronteiras de Bacia.	74
4.5.1	Evidências da Formação de Sela Caótica.	79
4.5.2	Crise de Fronteira.	80
4.6	Estimativas Quantitativas.	81
4.6.1	Expoentes de Lyapunov.	82
4.6.2	Dimensões de Correlação e de Lyapunov.	82
5	Conclusões e Trabalhos Futuros.	84

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de pontos fixos de um sistema cujo espaço de fase é bidimensional, descrito por $\dot{x} = f(x, y)$ e $\dot{y} = g(x, y)$. Na parte (a) tem-se um foco estável, gerado por dois autovalores complexos com parte real negativa; em (b), um foco instável, gerado por dois autovalores complexos com parte real positiva; em (c) tem-se um ponto de sela, gerado por um autovalor real positivo e outro real negativo; em (d) tem-se um nó instável, gerado por dois autovalores reais positivos e em (e) temos um nó estável, gerado por dois autovalores reais negativos.	23
2.2	Exemplo de uma variedade invariante estável W^s de um fluxo qualquer. Como os autovalores λ^1 e λ^2 são negativos, os autovetores correspondentes e^1 e e^2 geram um subespaço invariante estável bidimensional E^s . Dada uma condição inicial x_0 , a sua trajetória se aproxima do ponto fixo PF descrevendo uma superfície também bidimensional que, próximo a PF tangenciará E^s . Esta superfície irregular, descrita pela trajetória de x_0 é dita variedade invariante estável W^s	27
2.3	Esquema de variedades invariantes estável e instável de um ponto de sela de um fluxo qualquer.	27
2.4	Taxa média de separação entre duas condições iniciais diferentes.	28
2.5	O conjunto de condições iniciais, região hachurada em torno do ponto de sela S , após sucessivas iterações, tende a se esticar na direção da variedade invariante instável, associada com o expoente de Lyapunov positivo do sistema e a se contrair na direção da variedade invariante estável, associada com o expoente de Lyapunov negativo.	30
2.6	Uma condição inicial x_0 de um mapa sendo iterada quatro vezes na direção \vec{y}_0 , tangente à órbita de x_0	30
2.7	Exemplo de um corte estroboscópico.	32
2.8	Exemplo de um Mapa de Poincarè.	33

2.9	Espaço de fase: (a) de um oscilador harmônico amortecido (b) de um oscilador amortecido e forçado periodicamente; a condição inicial fica aprisionada no ciclo limite [1].	33
2.10	Exemplo de um atrator estranho: o atrator de Ikeda. Os parâmetros utilizados na construção desta figura foram $R = 1, C_1 = 0,4, C_2 = 0,9$ e $C_3 = 6$. Os expoentes de Lyapunov deste mapa para estes parâmetros são $\lambda_1 = 0,51$ e $\lambda_2 = -0,72$ com os respectivos números de Lyapunov $L_1 = 1,66$ e $L_2 = 0,487$	34
2.11	Esquema de uma bifurcação sela-nó. Em determinado valor do parâmetro ρ nascem duas órbitas: uma estável (linha cheia) e outra instável (linha tracejada).	36
2.12	Bifurcação por duplicação de período. Neste esquema, α é um parâmetro e x é uma variável dinâmica do sistema. As duplicações vão acontecendo indefinidamente, até que o sistema atinge um regime caótico.	36
2.13	Bifurcação de Hopf. Um ponto fixo se transforma em um ciclo limite, sobre o plano das variáveis dinâmicas (x, y) do sistema.	37
2.14	Diagrama de bifurcações para o mapa de Ikeda, com parâmetros	38
2.15	D_0 é proporcional ao número mínimo de “caixas” de lado ε necessário para cobrir totalmente o atrator. Este é novamente o atrator de Ikeda.	39
2.16	Conjunto de Cantor.	40
2.17	Esquema de cálculo de D_2	42
2.18	“Caixa” C_i sendo iterada. Como o exemplo mostrado é bidimensional, a “caixa” C_i é um quadrado de lado ε que, depois de ser iterado, transforma-se em um paralelogramo.	44
2.19	Exemplo de bacias de atração.	46
2.20	Técnica computacional para calcular a <i>Dimensão Fractal</i> de uma <i>Fronteira</i>	47
2.21	Sela caótica em um diagrama esquemático, mostrando cruzamentos heteroclínicos.	50
3.1	Esquema de um navio oscilando lateralmente, para dois tempos: t e $t + \Delta t$	53
3.2	Considera-se que o navio se movimenta obliquamente em relação à direção de propagação das ondas do mar.	55
3.3	Simetria do potencial quando $\alpha \rightarrow 1,0$. Para todos os gráficos $\omega^2 = 1$	56
3.4	A esfera fica aprisionada no poço sem nunca parar no ponto mais baixo da depressão.	57
3.5	A esfera perde energia devido à força de atrito e pára na sua posição de equilíbrio.	59
3.6	Potencial utilizado. $\alpha = 1,0$ e $\omega^2 = 1,0$	59
3.7	Órbitas elípticas do caso conservativo.	60

3.8	Órbitas do caso dissipativo.	60
3.9	Esquema dos autovetores associados ao ponto fixo estável.	62
3.10	Esquema dos autovetores associados aos pontos fixos instáveis.	63
3.11	Navio sujeito à força externa causada pelo vento e pela ondulação do mar (foto extraída do site http://www.radford-yacht.com).	64
3.12	Aspecto do potencial aplicado ao navio da figura 3.11.	65
4.1	Diagrama de bifurcações do sistema com parâmetros $\alpha = 1, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, $\nu = 0, 5$, $\rho = 0, 245$ e condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$	67
4.2	Espaço de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do sistema. Na parte (a) aparece o caso conservativo para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$, com parâmetros $\nu = 0, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, $\alpha = 1, 0$, $\rho = 0, 245$, $\phi = 1, 0$ e $F_0 = 0, 0$. Na parte (b), o caso dissipativo com forçamento $F_0 = 0, 2$, para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0, 5; 0, 5)$	69
4.3	Espaço de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do sistema para o caso dissipativo. Na parte (a) para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0, 5; 0, 5)$, com parâmetros $\nu = 0, 5$, $\omega^2 = 1, 0$, $\alpha = 1, 0$, $\rho = 0, 245$, $\phi = 1, 0$ e $F_0 = 0, 0$. Na parte (b) para a mesma condição inicial com forçamento $F_0 = 0, 42$. Observa-se nesta, o aparecimento de uma órbita de período 2.	69
4.4	Espaço de fase $\theta X \dot{\theta}$ do sistema para um valor de forçamento muito próximo ao valor de crise, para a condição inicial $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 5; 0, 5)$, com parâmetros $\nu = 0, 5$, $\omega^2 = 1, 0$, $\alpha = 1, 0$, $\rho = 0, 245$, $\phi = 1, 0$ e $F_0 = 0, 727$. O regime é caótico!	70
4.5	Desenhos esquemáticos. Parte (a): clausuras das variedades invariantes estável e instável de um ponto de sela. Parte (b): cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos.	71
4.6	Cálculo da redução da área da bacia segura com a variação do forçamento com parâmetros $\alpha = 1, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, $\nu = 0, 5$, $\rho = 0, 245$ e condição inicial	72
4.7	Ajuste do decaimento da distribuição de condições iniciais que convergem para o atrator. Os parâmetros são os mesmos da fig 4.6	73
4.8	Sequência de erosão nos mapas de Poincaré da bacia segura para o oscilador estudado neste trabalho, com parâmetros $\nu = 0, 5$, $\alpha = 1, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, conição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$. O valor de forçamento F_0 é acrescido com passos de 0,06, em ordem crescente do índice de cada quadro, à partir de 0,0, sendo assim no quadro 1 $F_0 = 0, 0$ e no quadro 12 $F_0 = 0, 72$	73
4.9	Retrato de fase para o caso conservativo. O ponto fixo é um ponto elíptico. Parâmetros $\nu = 0, 0$, $\alpha = 1, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, $F_0 = 0, 0$, $\rho = 0, 0$, cada órbita elíptica corresponde ao corte estroboscópico da trajetória de uma dada con- dição inicial.	74

4.10 Retrato de fase $(\theta, \dot{\theta})$ para o caso dissipativo. Foram traçadas na ordem de 200 condições iniciais aleatórias, com parâmetros $\nu = 0,5, \alpha = 1,0, \omega^2 = 1,0, \rho = 0,0, F_0 = 0,0$	75
4.11 Cruzamentos homoclínicos, com parâmetros $\nu = 0,5, \alpha = 1,0, \omega^2 = 1,0, \rho = 0,245, F_0 = 0,4$	75
4.12 Sequência de fronteiras de Wada para o oscilador estudado neste trabalho, com parâmetros $\nu = 0,5, \omega^2 = 1,0, \alpha = 1,0, \rho = 0,245, \phi = 1,0, F_0 = 0,42$, e condições iniciais $(\theta; \dot{\theta}) = (1;0)$. A escala do primeiro quadro desta figura é da ordem de 1 nos dois eixos, enquanto que o último quadro tem escala na ordem de 10^{-4} em θ e 10^{-3} em $\dot{\theta}$	77
4.13 Comparação entre os resultados. Comparando os quadros <i>a</i> e <i>c</i> observa-se que a erosão da bacia segura começa no momento em que acontece a primeira bifurcação homoclínica do ponto fixo do sistema e, por outro lado no quadro <i>b</i> , observa-se que é neste mesmo momento que surgem os infinitos “dedos” fractais incursivos e, no quadro <i>d</i> , os infinitos cruzamentos homoclínicos do ponto de sela pertencente à fronteira do atrator.	78
4.14 Parte (a): cruzamentos homoclínicos do sistema, formação da sela caótica, com parâmetros $\nu = 0,5, \alpha = 1,0, \omega^2 = 1,0, \rho = 0,245, F_0 = 0,7265$. Parte (b): desenho esquemático da formação de uma sela caótica.	79
4.15 Formação do conjunto caótico não-atrativo, por cruzamentos homoclínicos, com parâmetros $\nu = 0,5, \alpha = 1,0, \omega^2 = 1,0, \rho = 0,245, F_0 = 0,7265$	79
4.16 Colisão do atrator com uma órbita periódica instável contida na fronteira de sua bacia segura, com parâmetros $\nu = 0,5, \omega^2 = 1,0, \alpha = 1,0, \rho = 0,245, \phi = 1,0$ e $F_0 = 0,726$	80
4.17 Atrator e sua bacia de atração destruídos. F_0 ligeiramente maior que F_{0c}	81
4.18 Gráfico dos expoentes de Lyapunov do sistema.	82
4.19 Gráfico (a): Cálculo da dimensão de correlação do atrator. Gráfico (b): Cálculo da Dimensão de Lyapunov do atrator. Figuras construídas para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0;0)$ e parâmetros $\nu = 0,5, \omega^2 = 1,0, \alpha = 1,0, \rho = 0,245, \phi = 1,0$. Para cada ponto gerado no gráfico foi usado um valor diferente para o parâmetro de forçamento no intervalo $0 \leq F_0 < 0,7$, com passos de 0,005.	83

Capítulo 1

Introdução

A Dinâmica Não-Linear e Caos são áreas de conhecimento bastante recente.

A Física tem como meta principal, descrever e compreender a natureza com o objetivo de buscar melhorias no desenvolvimento sócio-econômico-tecnológico para o ser humano. A descrição de um evento natural é feito através de modelos idealizados, que se aproximem o máximo possível do evento real. A dificuldade está em encontrar esta maior aproximação possível uma vez que, estes eventos físicos são na sua grande maioria, não-lineares até pouco tempo eram modelados por sistemas lineares.

À partir desta situação-problema, passou-se à tentativa de descrever eventos físicos à partir de modelos não-lineares com o auxílio da tecnologia de computação, a qual nas últimas décadas cresceu muito, tornando possível o trabalho de simulações de problemas físicos modelados por equações não-lineares, o que marca o surgimento da Dinâmica Não-Linear. Por volta de 1890, Henri Poincaré estudou o sistema Terra-Sol-Lua, um problema de três corpos e observou que, por algumas vezes, o movimento era bastante complicado. Poincaré desenvolveu, então, uma teoria para explicar o efeito de perturbações não-lineares em órbitas planetárias [2] e encontrou resultados que, nos anos 60, vieram a ser obtidos numericamente com o auxílio de computadores daquela geração. Dentro desta teoria, Poincaré já descrevia técnicas matemáticas úteis para o estudo de órbitas planetárias, como a construção de mapas ¹ e órbitas periódicas e quasi-periódicas. Nos anos seguintes, outros pesquisadores como Birkhoff, Cartwright e Kolmogorov contribuíram para a aprimoração das técnicas de Poincaré [14].

Meio século depois, essas técnicas e os conceitos de Poincaré começaram a ser usados em várias outras áreas da Física, como na Meteorologia, por exemplo, quando Lorenz introduziu pela primeira vez, a idéia de caos ao afirmar que, o bater de asas de uma borboleta no oriente, poderia provocar um grande movimento no ocidente, causando-lhe

¹Hoje conhecidos como Mapas de Poincaré, conceito que será discutido no capítulo 2.

grandes estragos fenômeno este, que ficou conhecido como o fenômeno da Borboleta de Lorenz [3].

De lá para cá, a Dinâmica Não-Linear e Caos tem invadido inúmeras áreas do conhecimento, não só na Física mas em outros setores, tais como as Engenharias, a Medicina, a Biologia, a Economia e etc. Dentro da área da Arquitetura Naval, um problema de grande interesse é a prevenção de crises em embarcações, bem como em frotas.

A proposta deste trabalho é estudar um sistema que modele as oscilações laterais de um navio, sujeito às condições ambientais de vento, ondulação marítima e etc. A idéia surgiu à partir dos trabalhos de J.M.T.Thompson, et al [4] e de Mingzhou Ding, et al [5]. Nos trabalhos de Thompson é feito o estudo da estabilidade de um navio cujo espaço de fase é fractal ². Nos trabalhos de Mingzhou Ding, et al, desenvolve-se um método de controle de crise induzida (mudança súbita de comportamento do sistema, devido à variação deliberada de um de seus parâmetros) em um sistema que modela as oscilações laterais de um navio. Muito embora este último trabalho já traga um método de controle de caos (método desenvolvido para evitar o surgimento de crises no sistema, garantindo que o seu comportamento seja previsível), alguns aspectos à cerca da dinâmica do sistema ficaram em aberto, aspectos estes, que foram trabalhados aqui, utilizando-se dos resultados obtidos por Thompson e outros resultados envolvendo propriedades que não foram estudadas por estes dois autores sobre este problema.

As propriedades aqui estudadas são conceitos bastante recentes dentro da Dinâmica Não-Linear e por isso são conceitos, de certa forma, ainda não completamente formulados, como o conceito de fronteira fractal [6] que, a medida que a pesquisa deste tema evolui, vai sendo reformulado e relacionado com outros conceitos, como o de ferradura [7] ou o de dimensão de correlação e outros.

Uma propriedade bastante interessante é a Propriedade de Wada [3] [1] [8] a qual, agora sabe-se, ser válida tanto para sistemas dinâmicos dissipativos [9] quanto para sistemas dinâmicos conservativos [9] [10]. Esta propriedade consiste na presença de fronteiras fractais no sistema e que separam simultaneamente pelo menos três regiões do seu *espaço de fase*, chamadas de *bacias*, conceitos que serão apresentados no capítulo 2 deste trabalho, que traz uma revisão dos conceitos básicos da dinâmica não-linear, procurando esclarecer o leitor à cerca da linguagem utilizada nesta área de pesquisa, a qual é bastante peculiar. Neste mesmo capítulo, faz-se uma exposição do que se consideram conceitos mais avançados da dinâmica não-linear e que serão úteis para que o leitor compreenda os resultados deste trabalho. Estes são conceitos relativamente novos, que ainda são discutidos e, a cada novo trabalho, relacionados uns com os outros ou mesmo, com os conceitos que surgem à medida que os trabalhos, nesta área, vão sendo desenvolvidos.

²Estrutura topologicamente complexa, delimitada por uma fronteira cuja dimensão é não-inteira.

O modelo utilizado neste trabalho está descrito no Capítulo 3. Todas as considerações e simplificações feitas são esclarecidas ao leitor.

O Capítulo 4 traz os resultados obtidos nesta pesquisa, bem como a pertinente discussão à cerca destes resultados, segundo a conceituação exposta nos capítulos anteriores e algumas conjecturas que nasceram à partir desta discussão.

O Capítulo 5, traz as conclusões finais.

Os resultados apresentados aqui, foram obtidos através de simulações numéricas, utilizando programas próprios em linguagem C, usando um integrador do tipo Runge Kutta de ordem 4, bem como com o auxílio do software Dynamics [11], elaborado por Helena Nusse e James A. Yorke, criado especialmente para simular problemas de Dinâmica Não-Linear, obtendo resultados qualitativos e quantitativos condizentes e satisfatórios, de acordo com os objetivos estabelecidos.

Os desenhos esquemáticos criados pelo autor estarão identificados com uma pequena marca, contendo as iniciais de seu nome enquanto que, os que foram copiados estarão devidamente referenciados. As figuras reproduzidas por simulações numéricas e os resultados gerados não terão marcas e nem referências.

Capítulo 2

Conceitos de Dinâmica Não-Linear.

2.1 Sistemas Dinâmicos.

Sistemas Dinâmicos são sistemas que podem ser descritos por *Equações Diferenciais Ordinárias* ou por *Equações à Diferenças finitas*, capazes de modelar sistemas físicos reais e/ou idealizados, que evoluem no tempo, de acordo com características próprias.

Há dois tipos de sistemas dinâmicos: os *Sistemas Dinâmicos Conservativos* e os *Sistemas Dinâmicos Dissipativos*. O volume do espaço de fase, bem como a energia de um sistema dinâmico conservativo é conservada durante a sua evolução temporal, enquanto que para um sistema dinâmico dissipativo, nem o volume do espaço de fase, nem a energia se conservam. Um exemplo de sistema conservativo é um pêndulo simples para pequenas amplitudes de oscilação e, um exemplo de sistema dissipativo é o pêndulo amortecido.

Os sistemas dinâmicos classificam-se em *fluxos* ou *mapas*, de acordo com o tipo de dependência temporal à qual estão submetidos.

2.2 Fluxos e Mapas.

Um sistema dinâmico é dito um fluxo se for um sistema de equações diferenciais ordinárias ou parciais, que evolui continuamente no tempo. Os fluxos podem ser *lineares* ou *não-lineares* e *autônomos* (aqueles que não dependem explicitamente do tempo) ou *não-autônomos* (aqueles que dependem explicitamente do tempo) [2].

A forma geral de um fluxo autônomo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

na qual $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$
e \dot{x} denota a derivada de x em relação ao tempo.

Para um fluxo não-autônomo, a dependência do tempo aparece como variável explícita da função f :

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (2.2)$$

Um sistema dinâmico é dito um mapa se for um sistema de Equações à diferenças finitas, que evolui discretamente no tempo. Os mapas também podem ser lineares ou não-lineares [2].

A forma geral de um mapa pode ser escrita como:

$$x \mapsto f(x), \quad (2.3)$$

na qual $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$.

Uma outra forma de descrever um mapa é a forma de recorrência:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.4)$$

na qual n indexa a iterada do mapa. Esta forma mostra a dependência entre a iterada atual e a anterior do mapa.

Em um sistema dinâmico destacam-se vários elementos, tais como: variáveis do espaço de fase, a variável temporal e os parâmetros.

O espaço de fase é o espaço formado pelas variáveis dinâmicas do sistema. A variável temporal (tempo) pode ser contínua (para fluxos) ou discreta (para mapas).

Uma trajetória ¹ é o conjunto de pontos gerados por uma condição inicial x_0

¹Uma trajetória representa uma solução do sistema matemático associado ao problema físico estudado e também recebe outros nomes como órbita ou curva integral.

no espaço de fase, à medida em que o sistema evolui no tempo.

A trajetória para um mapa é caracterizada da mesma forma como a de um fluxo, com a diferença de que em mapas, o tempo é discretizado.

2.3 Sistemas Não-Lineares.

Devido à alta complexidade apresentada pelos sistemas não-lineares, o seu estudo analítico se torna muito difícil. Uma das formas possíveis de se estudar o comportamento local destes sistemas é fazer a sua *linearização*, conforme o procedimento abaixo.

2.3.1 Linearização de um Sistema Não-Linear.

A linearização de um sistema não-linear é feita através do cálculo dos *autovalores* da sua *matriz Jacobiana*, à partir do procedimento demonstrado a seguir, usando como exemplo um fluxo não-linear, n -dimensional, do tipo $\dot{x} = f(x)$, com

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ e } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

O primeiro passo é conhecer os *pontos de equilíbrio* (ou *pontos fixos*) do sistema.

Cálculo dos Pontos de Equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio \bar{x} para um fluxo é um ponto que responde à condição

$$\dot{x} = 0 \text{ com } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Um ponto de equilíbrio \bar{x} para um mapa é o ponto que responde à condição

$$\bar{x} = x_{n+1} = x_n \text{ com } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ em outras palavras: um ponto de equilíbrio}$$

para um mapa é “aquele ponto que se aplica sobre si mesmo”.

Conhecendo os pontos de equilíbrio do sistema não-linear, parte-se para o segundo passo, que é calcular a matriz jacobiana do sistema.

Cálculo da Matriz Jacobiana do Sistema.

A matriz Jacobiana é a matriz das derivadas parciais das funções f_i em relação a cada uma das variáveis dinâmicas x_i do sistema, descrita pela matriz 2.5.

$$[DJ(x)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Se os pontos de equilíbrio já são conhecidos, então pode-se calcular a matriz jacobiana do sistema em cada um dos pontos de equilíbrio, denotada por $[DJ(\bar{x})]$ e assim, fazer a análise do sistema em torno de cada ponto de equilíbrio.

O próximo passo é calcular os autovalores associados a cada ponto de equilíbrio do sistema.

Cálculo dos Autovalores.

Os autovalores λ_i do sistema, são calculados à partir da equação

$$\det[[DJ(\bar{x})]_{n \times n} - \lambda_i [I]_{n \times n}] = 0, \quad (2.6)$$

na qual $[DJ(\bar{x})]_{n \times n}$ é a matriz jacobiana calculada no ponto de equilíbrio do sistema e $[I]_{n \times n}$ é a matriz identidade, da ordem do sistema.

Para um sistema bidimensional, fluxo ou mapa, o cálculo dos seus autovalores λ_i pode ser obtido diretamente por:

$$\lambda_i = \frac{Tr[DJ(\bar{x})]}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Tr[DJ(\bar{x})]}{2}\right)^2 - \det[DJ(\bar{x})]}, \quad (2.7)$$

na qual, a matriz $[DJ(\bar{x})]$ é uma matriz 2x2, dada por:

$$[DJ(\bar{x})] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

e Tr é o traço ² desta matriz, dado pela expressão:

²O traço de uma matriz quadrada n -dimensional é a soma de todos os elementos da sua diagonal principal. Para uma matriz bidimensional, esta soma se resume em apenas dois termos: os elementos $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$.

$$Tr = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (2.9)$$

Conhecendo os autovalores, calculam-se os autovetores do sistema.

Cálculo dos Autovetores.

Calculam-se os autovetores, e_i do sistema, através da equação secular

$$[[DJ(\bar{x})]_{n \times n} - \lambda_i [1]_{n \times n}][e_i] = 0. \quad (2.10)$$

Aplica-se a equação 2.10 para cada autovalor λ_i do sistema. Para um sistema n -dimensional, tem-se, então, um sistema de n equações a ser resolvido para que se encontre o autovetor associado a cada autovalor. Para um sistema bidimensional, aplica-se esta mesma equação, duas vezes e resolve-se um sistema de duas equações, obtendo, assim, os dois autovetores associados aos dois autovalores do sistema.

Sendo conhecidos os pontos de equilíbrio, os autovalores e os autovetores do sistema, pode-se fazer o estudo da estabilidade do sistema em torno de cada ponto de equilíbrio.

2.3.2 Análise de Estabilidade Local.

O estudo da estabilidade é o que nos dá as respostas sobre o comportamento do sistema quando os pontos de equilíbrio, os autovalores e os autovetores correspondentes a cada um deles são conhecidos, podendo-se determinar o comportamento do sistema em cada direção do seu espaço de fase.

Um ponto de equilíbrio de um fluxo pode ser *hiperbólico* ou *não-hiperbólico*, como seguem as definições:

- *Pontos Fixos Hiperbólicos:*

Calculando-se os autovalores da matriz Jacobiana do sistema em um ponto de equilíbrio hiperbólico, encontram-se autovalores cuja parte real é não nula.

- *Pontos Fixos Não-Hiperbólicos:*

Calculando-se os autovalores da matriz Jacobiana do sistema em um ponto de equilíbrio não-hiperbólico, encontra-se pelo menos, um autovalor cuja parte real é nula.

Da mesma forma como para fluxos, os pontos de equilíbrio para um mapa podem ser hiperbólicos ou não-hiperbólicos, como seguem as definições:

- *Pontos Fixos Hiperbólicos:*

São os pontos de equilíbrio que dão origem a autovalores cujos módulos são diferentes de 1.

- *Pontos Fixos Não-Hiperbólicos:*

São os pontos de equilíbrio que dão origem a pelo menos um autovalor cujo módulo é igual à unidade.

Um ponto de equilíbrio hiperbólico pode ser *estável*, *instável* ou *ponto de sela*, como seguem as definições:

- *Ponto Fixo Estável.*

Um ponto fixo é estável para um fluxo se ele for hiperbólico e se, os autovalores da matriz Jacobiana do sistema calculada neste ponto, forem todos negativos (ou com parte real negativa, no caso de autovalores complexos). Para um mapa, um ponto fixo é dito estável se ele for hiperbólico e se, todos os autovalores da matriz Jacobiana calculada neste ponto, tiverem módulo menor que a unidade.

- *Ponto Fixo Instável.*

Um ponto fixo é instável para um fluxo se ele for hiperbólico e se, os autovalores da matriz Jacobiana do sistema calculados neste ponto, forem todos positivos (ou com parte real positiva, no caso de autovalores complexos). Para um mapa, um ponto fixo é dito instável se ele for hiperbólico e se, todos os autovalores da matriz Jacobiana calculada neste ponto, tiverem módulos maior que a unidade.

- *Ponto de Sela.*

Um ponto fixo é dito ponto de sela se ele for hiperbólico e se, a matriz Jacobiana do sistema calculada neste ponto tiver, simultaneamente, autovalores com parte real positiva e negativa. O ponto de sela para um mapa aparece quando existe um ponto fixo hiperbólico, associado a autovalores com módulos maiores e menores que a unidade, simultaneamente.

A figura 2.1 mostra exemplos de pontos de equilíbrio para um fluxo bidimensional (ou para um mapa bidimensional). Em todos os casos mostrados, o ponto de equilíbrio é a origem.

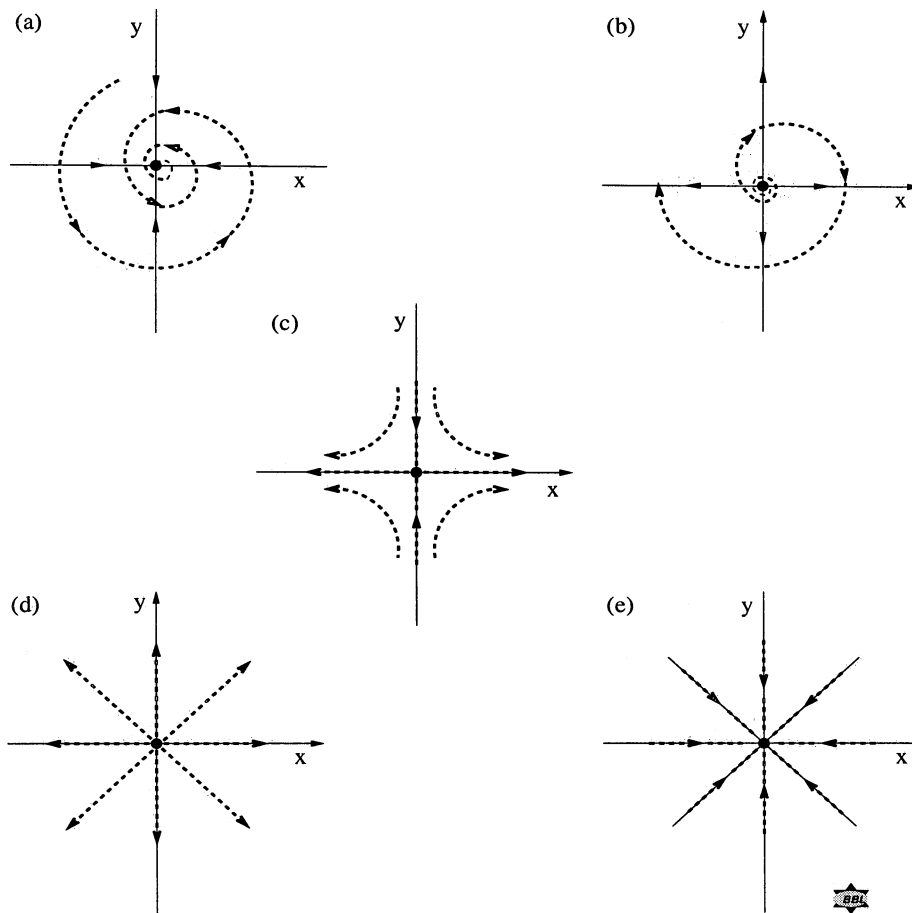


Figura 2.1: Exemplos de pontos fixos de um sistema cujo espaço de fase é bidimensional, descrito por $\dot{x} = f(x, y)$ e $\dot{y} = g(x, y)$. Na parte (a) tem-se um foco estável, gerado por dois autovalores complexos com parte real negativa; em (b), um foco instável, gerado por dois autovalores complexos com parte real positiva; em (c) tem-se um ponto de sela, gerado por um autovalor real positivo e outro real negativo; em (d) tem-se um nó instável, gerado por dois autovalores reais positivos e em (e) temos um nó estável, gerado por dois autovalores reais negativos.

No ponto de sela, a direção estável é dada pela direção do autovetor associado ao autovalor cuja parte real é negativa e a direção instável é dada pelo autovetor associado ao autovalor cuja parte real é positiva. Quando se tem autovalores complexos, eles são sempre acompanhados por seus complexos conjugado, devido a este fato, não é possível encontrar ponto de sela para autovalores complexos em um sistema bidimensional.

2.4 Subespaços Invariantes.

A cada ponto de equilíbrio de um dado sistema está associado um subespaço invariante que depende dos autovalores e dos autovetores da matriz Jacobiana calculada neste ponto, associados ao respectivo ponto de equilíbrio.

Considere um fluxo do tipo $\dot{x} = f(x)$, com $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$, com autovalores e autovetores designados respectivamente por λ_i e e_i e com $i = 1, \dots, n$. Um subespaço deste fluxo pode ser estável, instável ou central, conforme a classificação abaixo [12]:

- *Subespaço Estável (E^s):*

Se $Re(\lambda_i) < 0$, então os seus autovetores $[e_i, \dots, e_s]$ geram o subespaço invariante estável $E^s = span[e_1, \dots, e_s]$.

- *Subespaço Instável (E^u):*

Se $Re(\lambda_i) > 0$, então os seus autovetores $[e_{s+1}, \dots, e_{s+u}]$ geram o subespaço invariante instável $E^u = span[e_{s+1}, \dots, e_{s+u}]$.

- *Subespaço Central (E^c):*

Se $Re(\lambda_i) = 0$, então os seus autovetores $[e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}]$ geram o subespaço invariante central $E^c = span[e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}]$.

Note que as quantidades s, u e c estão relacionadas à dimensão n do fluxo da seguinte forma: $n = s + u + c$, ou seja: o espaço euclidiano n -dimensional \mathfrak{R}^n é a soma direta de todos subespaços invariantes encontrados no sistema: $\mathfrak{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$

Para mapas, considere um do tipo $x \mapsto f(x)$, com $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, com autovalores e autovetores designados respectivamente por λ_i e e_i e com $i = 1 \dots n$. Os subespaços deste mapa também podem ser estáveis, instáveis ou centrais, conforme a classificação abaixo [12]:

- *Subespaço Estável (E^s):*

Se $|\lambda_i| < 1$, então os seus autovetores $[e_i, \dots, e_s]$ geram o subespaço invariante estável $E^s = \text{span}[e_1, \dots, e_s]$.

- *Subespaço Instável (E^u):*

Se $|\lambda_i| > 1$, então os seus autovetores $[e_{s+1}, \dots, e_{s+u}]$ geram o subespaço invariante instável $E^u = \text{span}[e_{s+1}, \dots, e_{s+u}]$.

- *Subespaço Central (E^c):*

Se $|\lambda_i| = 1$, então os seus autovetores $[e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}]$ geram o subespaço invariante central $E^c = \text{span}[e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}]$.

Variedades Invariantes.

Considere uma superfície Σ que contém uma trajetória de um fluxo qualquer iniciada no ponto x_0 . Se S é o espaço que contém Σ , então S é dito invariante se todos os pontos da trajetória obtida à partir de $x_0 \in \Sigma$ também pertencem a Σ .

Em outras palavras, S é dito invariante pelo fluxo $\dot{x} = f(x)$, com $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ se para todo $x_0 \in S$ for verdade que $x(t, x_0) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

S é dito invariante por um mapa do tipo $x \mapsto g(x)$, com $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ se para

todo $x_0 \in S$ for verdade que $g^n(x_0) \in S$ para todo x , lembrando que $g^n = g \circ g \circ g \dots$, o que significa a n -ésima iterada do mapa.

Para um sistema (fluxo ou mapa) hiperbólico, uma variedade W é a “superfície” que tangencia o subespaço invariante associado a ele, em uma região próxima ao ponto de equilíbrio. Sendo assim, encontram-se três tipos de variedades [12]:

- *Variedade Estável (W^s):*

Superfície tangente ao subespaço estável do sistema, no ponto fixo (PF) estável. Uma condição inicial tomada em $x_0 \neq PFE$, move-se de maneira bastante irregular em direção ao ponto fixo estável, até tangenciá-lo. A superfície descrita pelos pontos da trajetória de x_0 forma a variedade invariante estável, dada matematicamente por:

$$W^s = \{x \in S \mid f^n(x) \rightarrow PF \text{ se } n \rightarrow \infty\}.$$

- *Variedade Instável (W^u):*

Superfície tangente ao subespaço instável do sistema, no ponto fixo (PF) instável. Uma condição inicial tomada em $x_0 = PFI$ é repelido pelo ponto fixo instável descrevendo uma trajetória que ao se afastar, torna-se bastante complicada e irregular, até escapar para o infinito ou encontrar outro ponto fixo. A superfície descrita pelos pontos da trajetória de x_0 forma a variedade invariante instável, dada matematicamente por:

$$W^s = \{x \in S \mid f^{-n}(x) \rightarrow PF \text{ se } n \rightarrow \infty\}.$$

- *Variedade Central (W^c):*

Superfície tangente ao subespaço central do sistema, no ponto fixo não-hiperbólico.

A figura 2.2 mostra um exemplo esquemático de uma variedade invariante estável. Segundo o *Teorema de Hartman Grobman* [13], a variedade invariante estável tangencia o ponto fixo na direção do subespaço estável e a variedade instável o tangencia na direção do subespaço instável, conforme a figura 2.3.

2.5 Expoente de Lyapunov (λ).

O conceito de expoente de Lyapunov pode ser usado para se obter uma medida apurada da dependência do sistema às condições iniciais aplicadas, o que é característica do comportamento caótico. Esta medida é obtida para duas condições iniciais x e $x + \varepsilon$ inicialmente muito próximas, ou seja $\varepsilon \ll 1$.

O expoente de Lyapunov mede, então, a taxa exponencial de separação entre as trajetórias de duas condições iniciais próximas, após a evolução do sistema.

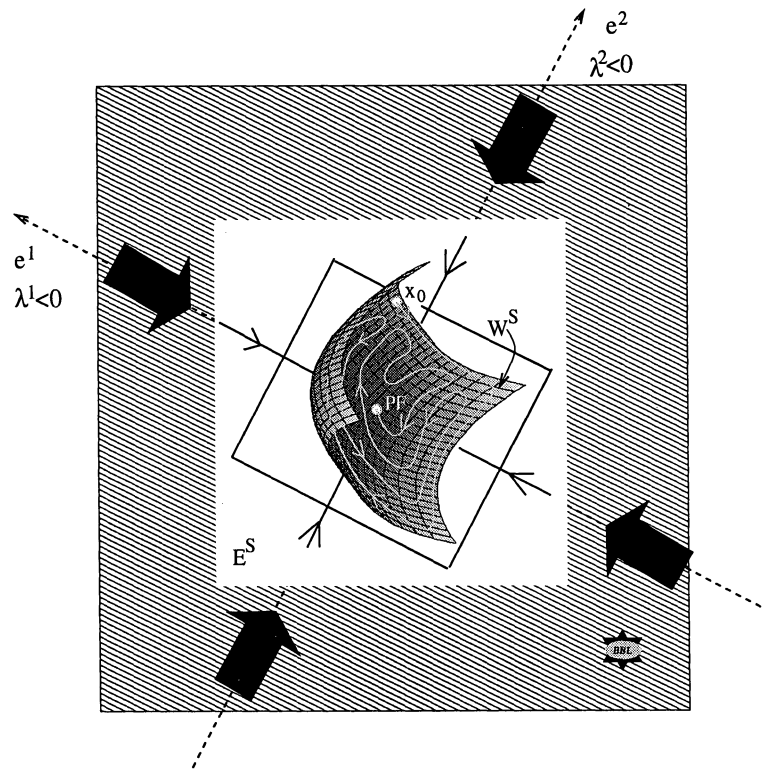


Figura 2.2: Exemplo de uma variedade invariante estável W^s de um fluxo qualquer. Como os autovalores λ^1 e λ^2 são negativos, os autovetores correspondentes e^1 e e^2 geram um subespaço invariante estável bidimensional E^s . Dada uma condição inicial x_0 , a sua trajetória se aproxima do ponto fixo PF descrevendo uma superfície também bidimensional que, próximo a PF tangenciará E^s . Esta superfície irregular, descrita pela trajetória de x_0 é dita variedade invariante estável W^s .

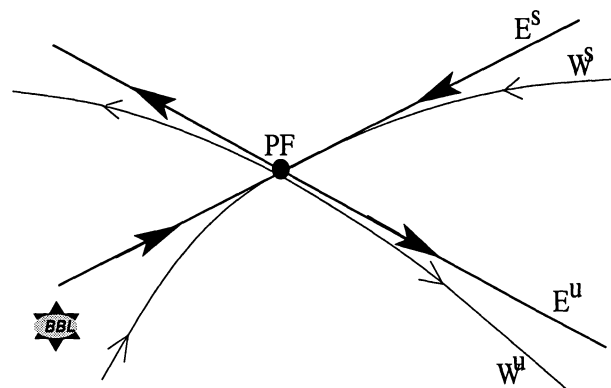


Figura 2.3: Esquema de variedades invariantes estável e instável de um ponto de sela de um fluxo qualquer.

Para um mapa unidimensional, o seu expoente de Lyapunov λ aparece no esquema da figura 2.4 e a sua definição vem a seguir.

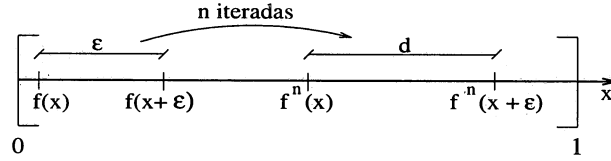


Figura 2.4: Taxa média de separação entre duas condições iniciais diferentes.

Após a evolução do sistema, neste caso, após n iterações do mapa, a divergência entre estas condições iniciais, para ε pequeno, pode ser escrita da seguinte forma:

$$d \approx \varepsilon L^n \quad (2.11)$$

na qual L é o Número de Lyapunov do sistema.

Escrevendo, geometricamente, a distância d , entre os estados finais $f^n(x + \varepsilon)$ e $f^n(x)$, temos:

$$d = |f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| \approx \varepsilon L^n,$$

$$L^n \approx \left| \frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right|. \quad (2.12)$$

Levando esta última equação ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos:

$$L^n \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right| \approx \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|,$$

$$\lambda(x) = \ln L. \quad (2.13)$$

com $e^{\lambda(x)} = |(f^n)'(x)|$.

Finalmente, o expoente de Lyapunov para um mapa unidimensional pode ser escrito como:

$$\lambda(x) = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x)|, \quad (2.14)$$

na qual λ fornece uma taxa média da divergência (esta média deve ser tomada sobre várias condições iniciais sobre a trajetória) e é chamado *Expoente de Lyapunov*. Se λ for negativo, as trajetórias devem convergir e neste caso, não há comportamento caótico; por outro lado, se λ for positivo, as trajetórias devem divergir caracterizando sensibilidade do sistema em relação às condições iniciais e portanto, comportamento caótico.

O Expoentes de Lyapunov estão relacionados com a característica de *estiramento e contração* do espaço de fase de atratores e outros conjuntos invariantes. Para sistemas com dimensão $m > 1$, podem ocorrer subespaços invariantes estáveis e instáveis. Como já visto na página 24, a direção de um subespaço invariante estável de um fluxo é dado pela direção do autovetor associado ao autovalor cuja parte real é negativa e a direção de um subespaço invariante instável é dado pela direção do autovetor associado ao autovalor cuja parte real é positiva. Analisando o comportamento de um conjunto de condições iniciais ao redor de um ponto de sela S deste fluxo, observa-se que este conjunto tende a se esticar em direção à variedade invariante instável de S e a se contrair em direção à variedade invariante estável de S , conforme mostra a figura 2.5. A direção de expansão do espaço de fase está associada ao expoente de Lyapunov positivo e a direção de contração, ao expoente de Lyapunov negativo [3].

Mapas m -dimensionais apresentam m expoentes de Lyapunov. Para derivar a equação de cálculo dos expoentes de Lyapunov para sistemas m -dimensionais escolhe-se uma condição inicial x_0 associada a uma direção \vec{u}_0 escolhida, sendo $\vec{u}_0 = \frac{\vec{y}_0}{\|\vec{y}_0\|}$, com \vec{y}_0 sendo o vetor tangente à órbita de x_0 . Fazendo x_n denotar a correspondente órbita de x_0 , existirão n vetores tangentes a cada iterada de x_0 , dados por \vec{y}_n , com $n = 0, 1, 2, \dots$, conforme a figura 2.6. Então a evolução do vetor tangente \vec{y}_0 é dada por:

$$y_{n+1} = DM(x_n)y_n, \quad (2.15)$$

na qual $DM(x_n)$ denota a Matriz Jacobiana do mapa na iterada n e desta equação

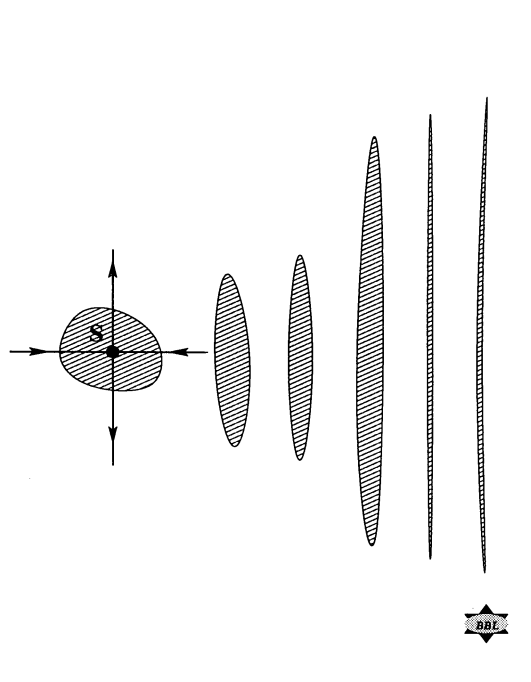


Figura 2.5: O conjunto de condições iniciais, região hachurada em torno do ponto de sela S , após sucessivas iterações, tende a se esticar na direção da variedade invariante instável, associada com o expoente de Lyapunov positivo do sistema e a se contrair na direção da variedade invariante estável, associada com o expoente de Lyapunov negativo.

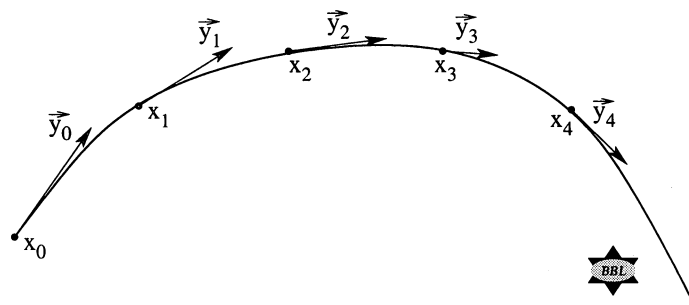


Figura 2.6: Uma condição inicial x_0 de um mapa sendo iterada quatro vezes na direção \vec{y}_0 , tangente à órbita de x_0 .

tem-se:

$$y_n = DM^n(x_0)y_0, \text{ na qual: } DM^n(x_0) = DM(x_{n-1})DM(x_{n-2})DM(x_{n-3})\dots DM(x_0).$$

Juntando esta última e a equação 2.15 à definição de Expoente Máximo de Lyapunov [14] dada por:

$$\lambda(\vec{x}_0, \vec{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\|\vec{y}_n\|}{\|\vec{y}_0\|},$$

(na qual o termo argumento do limite é dito *Expoente de Lyapunov a Tempo n*) tem-se a definição de Expoentes de Lyapunov para mapas m -dimensionais.

$$\lambda(\vec{x}_0, \vec{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|[DM^n(\vec{x}_0)]u_0\|. \quad (2.16)$$

Calculados todos os m expoentes de Lyapunov de um mapa m -dimensional para a condição inicial x_0 em uma direção u_0 , escreve-se o espectro de Lyapunov dado por: $\lambda_{máximo}(x_0) = \lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \dots \geq \lambda_n(x_0)$. Se todos os $\lambda_i(x_0) < 0$, o mapa é periódico mas, se houver um único $\lambda_i > 0$, então o mapa é caótico; pelo espectro de Lyapunov, basta que o primeiro expoente de Lyapunov seja positivo para que o mapa apresente caos. Se houver mais que um expoente de Lyapunov positivo, então o mapa apresenta *hipercaos*.

Em geral, os expoentes de Lyapunov não dependem da escolha de condições iniciais, a não ser para um conjunto de *medida de Lebesgue* nula ³ então, pode-se negligenciar o argumento de dependência das condições iniciais e escrever:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|[DM^n]u_0\|. \quad (2.17)$$

2.6 Corte Estroboscópico e Mapa de Poincaré.

Um corte estroboscópico é o resultado da múltipla projeção do espaço de fase de um sistema cortando o tempo em vários valores, sobre o plano das suas variáveis dinâmicas. Em outras palavras, o corte estroboscópico é construído com os pontos que atravessam as várias secções do espaço de fase do sistema nos seus respectivos valores de tempo.

³Dado um conjunto aberto de pontos $S = \sum_k (a_k, b_k)$ do sistema, a medida de Lebesgue é dada por $\mu(S) = \sum_k (b_k - a_k)$.

A figura 2.7 apresenta um exemplo de corte estroboscópico. O plano ρ é paralelo ao plano do espaço de fase (x, y) do sistema e nele estão projetados os pontos da trajetória que cruzam cada plano ρ_{t_i} .

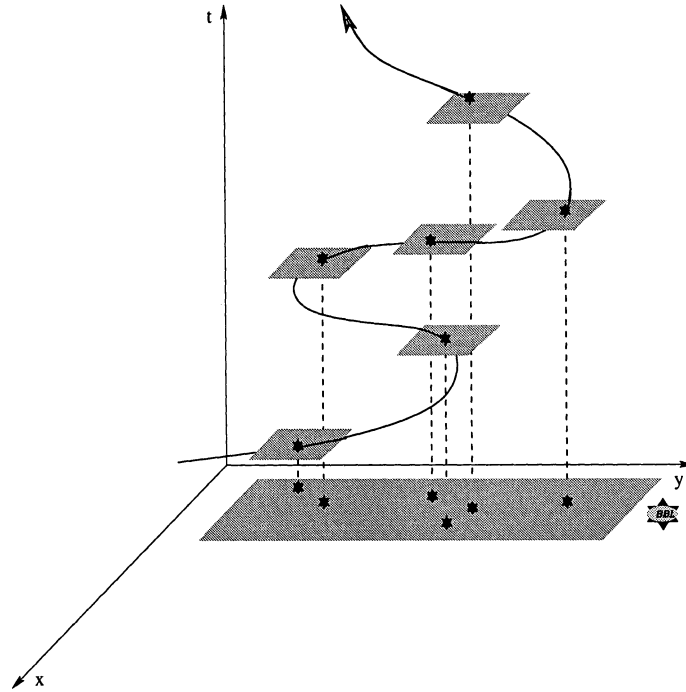


Figura 2.7: Exemplo de um corte estroboscópico.

O Mapa de Poincaré é um artifício que consiste em transformar um fluxo do tipo $\dot{x} = f(x, y, t)$ com $x \in \mathbb{R}^n$ em um mapa do tipo $\Sigma \in \mathbb{R}^{n-1}$, no qual são traçados, sobre a superfície de secção Σ , apenas os pontos que a atravessam em um único sentido, caracterizando, assim, uma simplificação do espaço de fase.

Fazendo o Mapa de Poincaré, consegue-se uma redução do espaço de fase do sistema de dimensão n para $n - 1$ [15].

A figura 2.8 mostra um exemplo de Mapa de Poincaré para um fluxo tridimensional do tipo $\dot{x} = f(x, y, z)$, $\dot{y} = g(x, y, z)$ e $\dot{z} = h(x, y, z)$. Σ é a superfície de secção escolhida para um valor constante de z , portanto é um plano paralelo ao plano (x, y) .

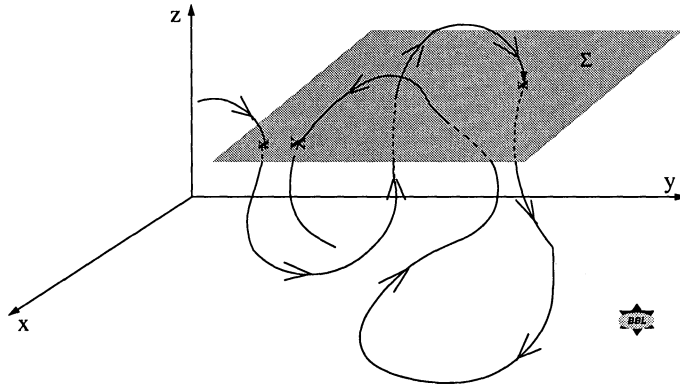


Figura 2.8: Exemplo de um Mapa de Poincarè.

2.7 Atratores.

Um atrator é um subconjunto do espaço de fase de um sistema para o qual um conjunto de condições iniciais são atraídas quando se considera $t \rightarrow \infty$.

Como exemplos, veja os espaços de fase de um oscilador harmônico amortecido na figura 2.9-a, cujo atrator é um ponto, e o de um oscilador forçado periodicamente no tempo, na figura 2.9-b, cujo atrator é um ciclo limite. Nota-se que para os dois casos, as condições iniciais dos sistemas convergem para seus atratores. [1].

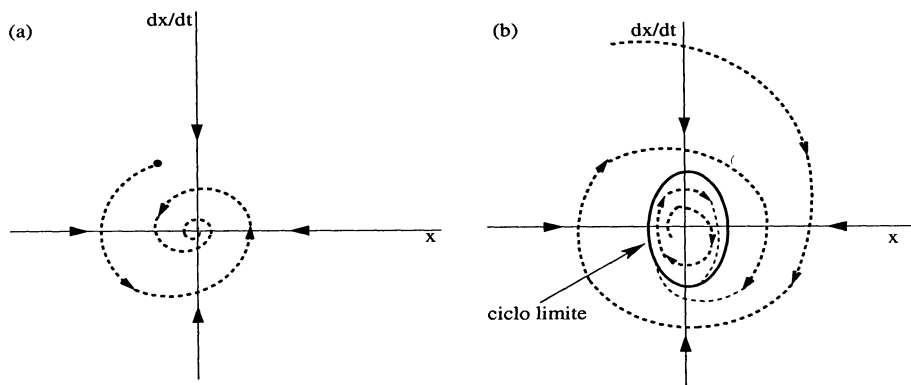


Figura 2.9: Espaço de fase: (a) de um oscilador harmônico amortecido (b) de um oscilador amortecido e forçado periodicamente; a condição inicial fica aprisionada no ciclo limite [1].

Atratores Estranhos.

Para os dois exemplos de atratores da figura 2.9, os atratores são um ponto e uma curva fechada, o que representam, respectivamente, um conjunto atrativo de dimensão zero e um conjunto atrativo de dimensão um. Para alguns outros atratores o conjunto atrativo pode ser muito irregular e, de fato, podem ter uma dimensão que não é um número inteiro. Tais conjuntos são chamados de fractais e, quando eles são atratores, são chamados de atratores estranhos [1].

Um exemplo de atrator estranho é o atrator de Ikeda [11] [16]. O mapa de Ikeda é descrito pela equação 2.18:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= R + C_2(x_n \cos \tau - y_n \sin \tau), \\y_{n+1} &= C_2(x_n \sin \tau + y_n \cos \tau),\end{aligned}\tag{2.18}$$

na qual $\tau = C_1 - \frac{C_3}{1+x_n^2+y_n^2}$ e R, C_1, C_2 e C_3 são parâmetros reais.

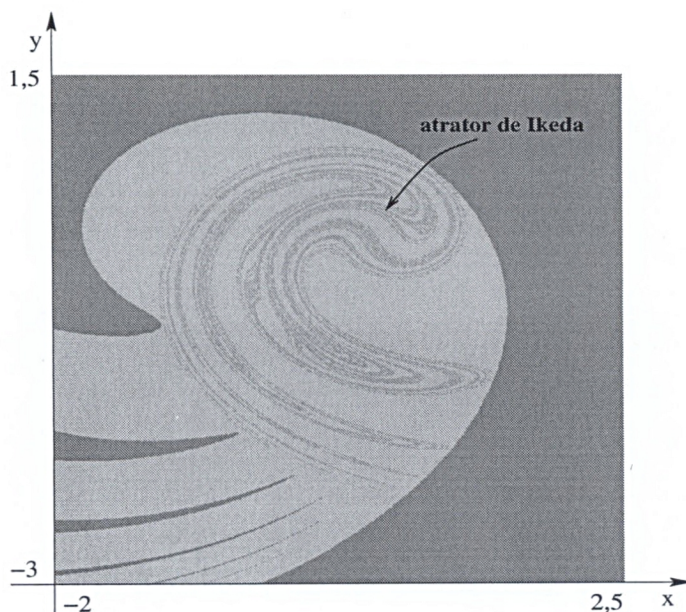


Figura 2.10: Exemplo de um atrator estranho: o atrator de Ikeda. Os parâmetros utilizados na construção desta figura foram $R = 1, C_1 = 0,4, C_2 = 0,9$ e $C_3 = 6$. Os expoentes de Lyapunov deste mapa para estes parâmetros são $\lambda_1 = 0,51$ e $\lambda_2 = -0,72$ com os respectivos números de Lyapunov $L_1 = 1,66$ e $L_2 = 0,487$.

O atrator de Ikeda aparece na figura 2.10. Esta figura apresenta o espaço de fase (x, y) do atrator de Ikeda, com a resolução de 720×720 pontos. A região vermelha representa o conjunto de condições iniciais que divergem; a região laranja é a bacia de atração do atrator. Este atrator é um conjunto fractal e concomitantemente, um atrator estranho [3].

Atratores caóticos.

Se dois pontos típicos inicialmente separados por uma pequena distância Δx em $t = 0$ dentro de um atrator divergirem exponencialmente após a sua evolução no tempo, então este atrator exibe comportamento caótico. Sendo assim, o estado final do sistema passa a ser imprevisível diante de uma pequena incerteza no seu estado inicial.

Atratores estranhos podem ser também, atratores caóticos [17] [1]. O atrator de Ikeda, mostrado na figura 2.10 é, concomitantemente, um conjunto fractal, um atrator estranho e um atrator caótico mas, de fato podem ocorrer atratores caóticos que não são atratores estranhos e reciprocamente, conjuntos fractais que não são caóticos [1].

2.8 Bifurcações.

O ponto fixo (ponto de equilíbrio) é o estado mais simples de um sistema e pode ser encontrado para um determinado regime de parâmetros. Porém, a mudança de um de seus parâmetros pode provocar no sistema uma mudança qualitativa do seu comportamento como por exemplo: mudança na estabilidade do ponto de equilíbrio ou na órbita periódica ou ainda, o seu aparecimento ou desaparecimento. Quando ocorre uma mudança de comportamento no sistema devido à variação de um de seus parâmetros, diz-se que o sistema sofreu uma bifurcação, a qual pode ser de vários tipos. Seguem definições de alguns deles para mapas unidimensionais [3]:

- *Bifurcação por Sela-Nó:* Neste tipo de bifurcação, ocorre o nascimento de dois pontos fixos, um estável e outro instável. A figura 2.11 mostra o esquema de uma destas bifurcações.
- *Bifurcação por Duplicação de Período:* Um ponto fixo estável pode perder a sua estabilidade, dando origem a uma órbita de período duplicado. A figura 2.12 mostra uma órbita estável $([0, b])$ que perde a sua estabilidade dando origem

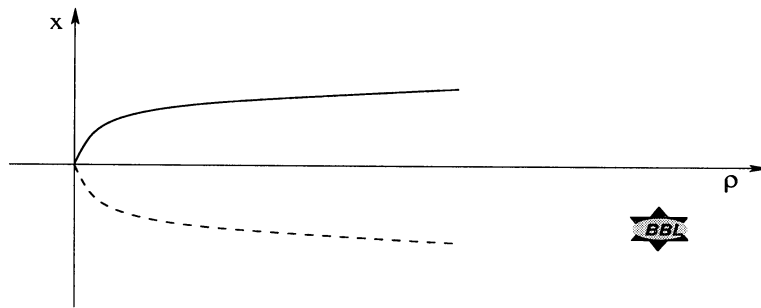


Figura 2.11: Esquema de uma bifurcação sela-nó. Em determinado valor do parâmetro ρ nascem duas órbitas: uma estável (linha cheia) e outra instável (linha tracejada).

a uma órbita de período 2 ($[b,c]$). Esta, por sua vez, perde a sua estabilidade dando origem a uma órbita de período 4 ($[c,d]$), a qual perde sua estabilidade dando origem a uma órbita de período 8 ($[d,e]$) e assim por diante.

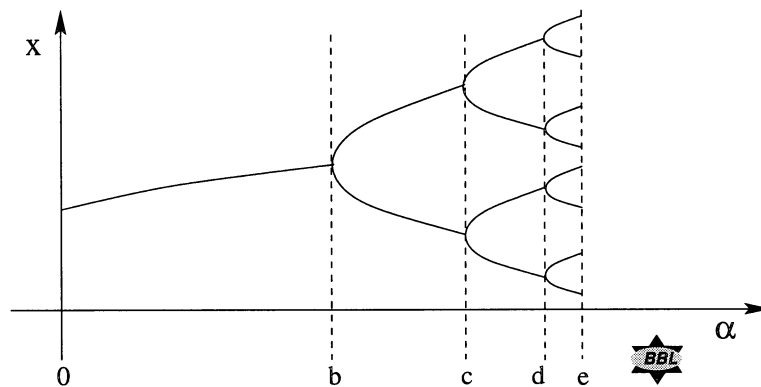


Figura 2.12: Bifurcação por duplicação de período. Neste esquema, α é um parâmetro e x é uma variável dinâmica do sistema. As duplicações vão acontecendo indefinidamente, até que o sistema atinge um regime caótico.

- *Bifurcação de Hopf*: Neste tipo de bifurcação, um ponto fixo se transforma em um Ciclo Limite.

A figura 2.13 mostra uma bifurcação de Hopf para um fluxo bidimensional do tipo $\dot{x} = f(x, y, \rho)$ e $\dot{y} = g(x, y, \rho)$, no qual ρ é um parâmetro do sistema.

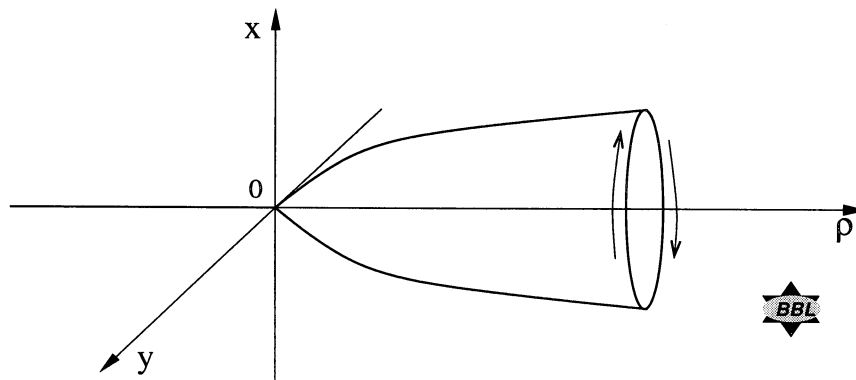


Figura 2.13: Bifurcação de Hopf. Um ponto fixo se transforma em um ciclo limite, sobre o plano das variáveis dinâmicas (x, y) do sistema.

Diagrama de Bifurcações.

O diagrama de bifurcações é um gráfico cartesiano de uma das variáveis dinâmicas plotada em função de um dos parâmetros do sistema [18]. Este gráfico é um recurso importante de análise na dinâmica não-linear pois, através dele pode-se distinguir regiões do sistema onde acontece comportamento caótico e periódico. É possível, através de um diagrama de bifurcações, ter uma boa idéia das propriedades dinâmicas que o sistema apresenta como crise, por exemplo.

A figura 2.14 mostra o diagrama de bifurcações para o mapa de Ikeda, o qual é descrito pela equação 2.18. Neste diagrama, pode-se notar a ocorrência de bifurcações por duplicação de período e também, a alternância entre regimes caóticos e periódicos. Os regimes caóticos estão representados pelas regiões escuras e os regimes periódicos pelas regiões claras do gráfico, onde aparecem as órbitas periódicas. Na terceira parte da figura 2.14, pode-se notar a presença de um órbita periódica de período 9 (9 linhas) para $C_2 \approx 0,842$.

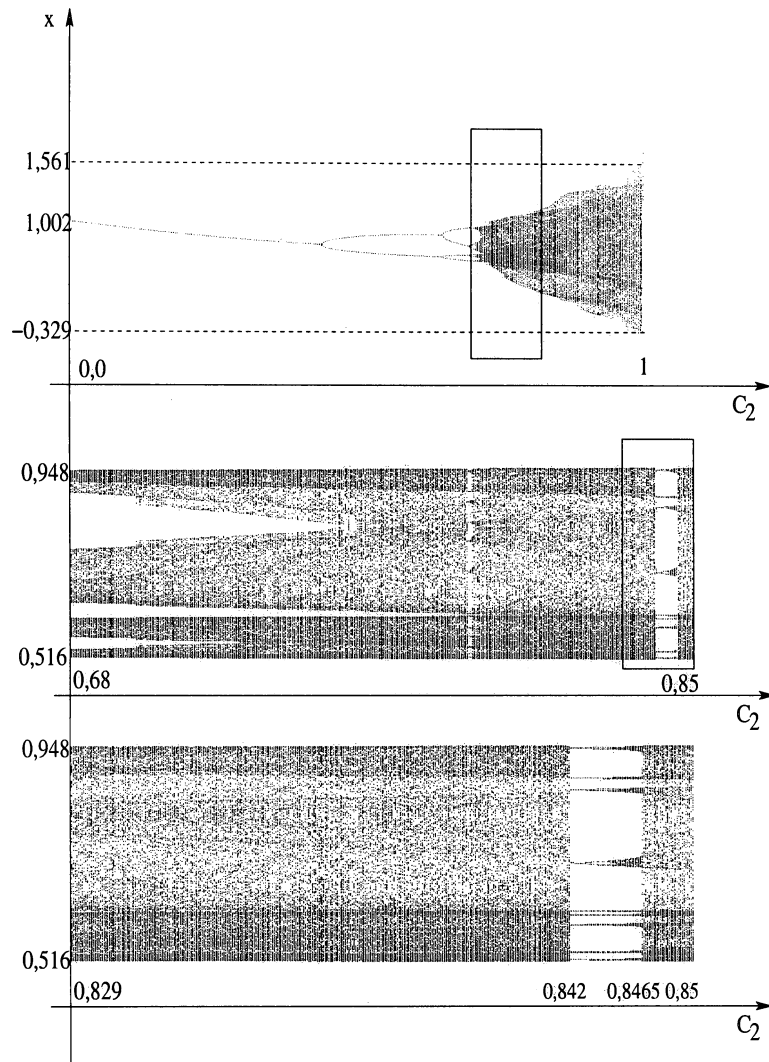


Figura 2.14: Diagrama de bifurcações para o mapa de Ikeda, com parâmetros $C_1 = 0.4$, $C_3 = 6$ e $R = 1$.

2.9 Dimensões de um Atrator.

Dimensão de Capacidade (D_0)⁴.

A técnica usada para determinar a dimensão de capacidade de um atrator consiste em cobri-lo com “caixas” de dimensão conhecida⁵, como mostra a figura 2.15.

O número mínimo de “caixas” $N(\varepsilon)$ de lado ε necessário para cobrir todo o atrator escala com ε , para ε pequeno, da seguinte forma [1]:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}, \quad (2.19)$$

D_0 é, então, definido por:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (2.20)$$

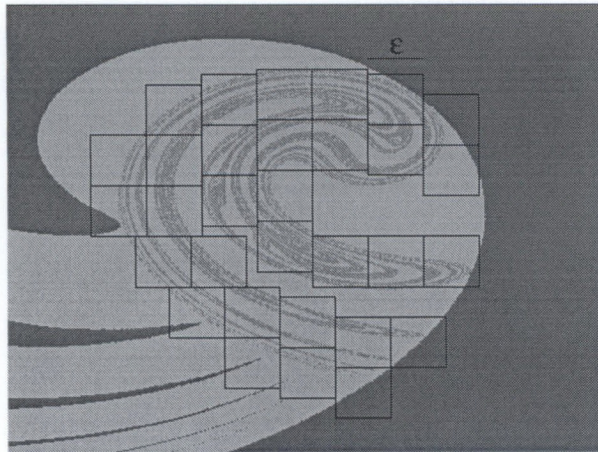


Figura 2.15: D_0 é proporcional ao número mínimo de “caixas” de lado ε necessário para cobrir totalmente o atrator. Este é novamente o atrator de Ikeda.

⁴Também chamado de Dimensão de Contagem de Caixas.

⁵estas “caixas” podem ser cubos n -dimensionais de aresta ε .

Como ilustração da técnica de contagem de “caixas”, pode-se citar o *Conjunto de Cantor*. A construção do conjunto de Cantor faz-se da seguinte forma, pega-se no conjunto unitário $[0,1]$ e retira-se o seu terço médio, em seguida o terço médio das duas partes restantes e assim sucessivamente, conforme figura 2.16, sendo que o comprimento total das partes removidas é igual ao comprimento do primeiro intervalo: $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

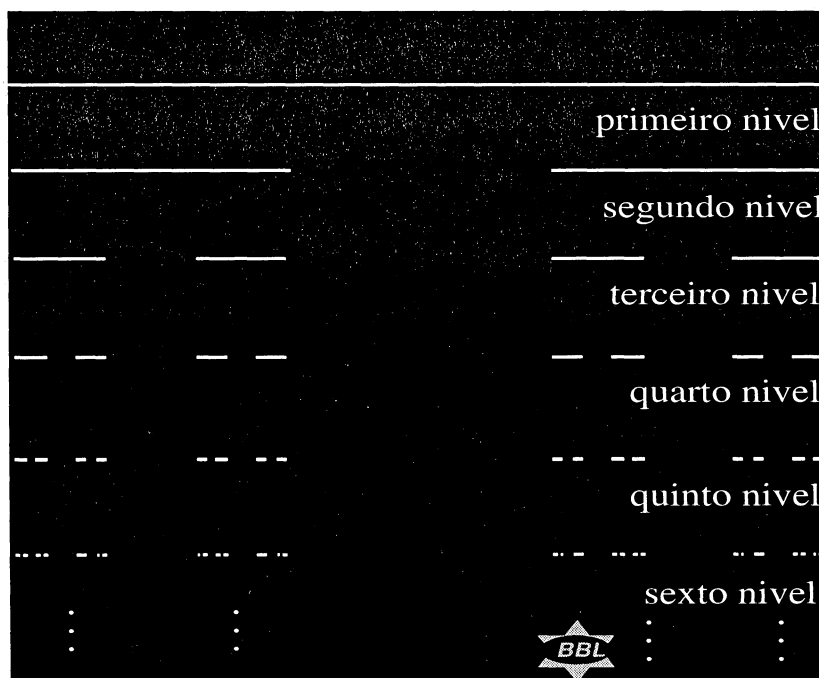


Figura 2.16: Conjunto de Cantor.

No primeiro nível do conjunto um única caixa é suficiente para recobri-lo, tem-se $N(\frac{1}{3^0}) = 2^0$, no segundo nível, são necessárias duas caixas, $N(\frac{1}{3^1}) = 2^1$, no terceiro nível quatro caixas, $N(\frac{1}{3^2}) = 2^2$, no quarto nível oito caixas, $N(\frac{1}{3^3}) = 2^3$, generalizando, no n -nível tem-se $N(\varepsilon) = N(\frac{1}{3^n}) = 2^n$, com n numerando o nível de divisão do conjunto. Então, a dimensão de capacidade para o Conjunto de Cantor é:

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln\left(\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,62989\dots,$$

na qual o comprimento da aresta da “caixa” é $\varepsilon = \frac{1}{3^n}$.

Dimensão de Informação (D_1).

Existem regiões do atrator que são mais visitadas e regiões que são menos visitadas pelas órbitas pertencentes ao sistema. Como visto no item anterior, a dimensão de capacidade é proporcional ao número de “caixas” de lado ε necessárias para recobrir todo o atrator. A dimensão de informação leva em conta somente a região mais visitada do atrator, região esta denotada por *porção representativa do atrator* [3]. O tempo que uma órbita x_0 dispense visitando uma região do atrator recebe o nome de medida natural. Define-se a medida natural associada a cada “caixa” C_i que recobre o atrator como [14]:

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i, x_0, T)}{T}, \quad (2.21)$$

na qual $\eta(C_i, x_0, T)$ é a soma de tempo que a órbita iniciada em x_0 dispense visitando a “caixa” C_i no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$.

Sendo assim, a dimensão de informação deve ser sempre menor ou, no máximo igual à dimensão de capacidade [3]:

$$D_1(\theta) \leq D_0(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon, \theta)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \text{ para } 0 < \theta < 1, \quad (2.22)$$

na qual $N(\varepsilon, \theta)$ é o número de “caixas” necessárias para recobrir a submalha que contém a porção representativa do atrator e θ é o percentual de cada “caixa” C_i visitada pela órbita x_0 . Se $\theta = 1$, então $D_1 = D_0$ mas, em geral $D_1 \leq D_0$ e a definição geral de D_1 é:

$$D_1(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \sum_{i=1}^{\tilde{N}(\varepsilon)} \mu(C_i) \ln \mu(C_i), \quad (2.23)$$

na qual μ_i é a medida natural associada a cada cubo C_i de lado ε e $\tilde{N}(\varepsilon)$ é o número de “caixas” necessárias para recobrir todo o atrator.

Dimensão de Correlação (D_2).

Na figura 2.17, os pontos n_i e n_j estão separados por uma certa distância, no \mathbb{R}^2 , dada por:

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (2.24)$$

Para o \mathbb{R}^m (na qual m é a dimensão do sistema), tem-se:

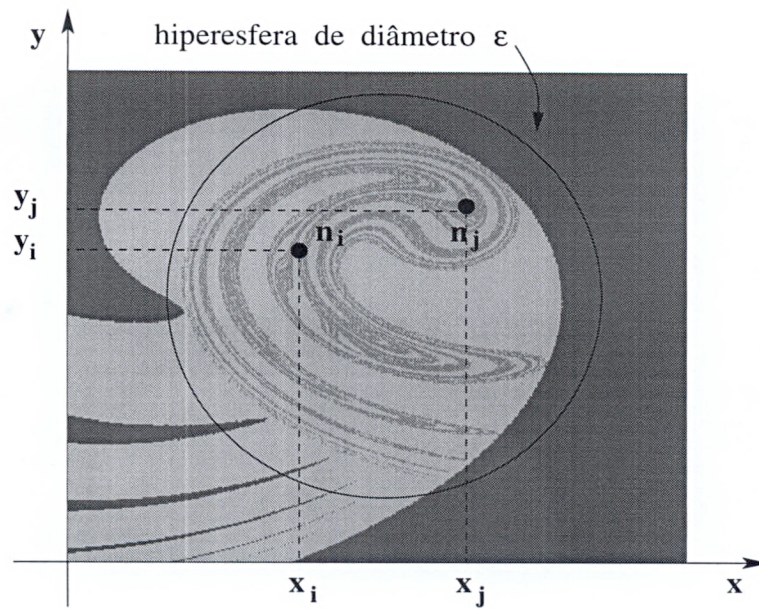


Figura 2.17: Esquema de cálculo de D_2 .

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \sum_{\alpha=1}^m \sqrt{(x_{i\alpha} - x_{j\alpha})^2}. \quad (2.25)$$

O atrator é uma região do espaço de fase do sistema. Isto significa que, para o \mathbb{R}^k deve existir uma hipersfera de raio ε tal que $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| < \varepsilon$. À partir disto, defini-se a Integral de Correlação $C(\varepsilon)$, como sendo [3]:

$$C(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\eta_\varepsilon(S_N)}{\eta_T(S_N)}, \quad (2.26)$$

na qual:

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(S_N) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^N \Theta(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \\ \eta_T(S_N) &= \frac{1}{2} N^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

e,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad (2.28)$$

com N sendo o número de pontos considerados, $\Theta(x)$, a função Degrau dada pela equação 2.28, $\eta_\varepsilon(S_N)$ o número de pares de vetores separados por uma distância ε no atrator e $\eta_T(S_N)$, o número de pares total de condições iniciais. A dimensão de correlação é, então, definida por:

$$D_2 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (2.29)$$

O espectro de dimensões de um atrator se apresenta da seguinte forma: $D_0 \geq D_1 \geq D_2$ [3].

Dimensão de Lyapunov (D_L).

A dimensão de Lyapunov pode ser vista como uma relação entre os expoentes de Lyapunov e a dimensão fractal de um atrator.

Para um sistema dinâmico no \mathfrak{R}^m , considera-se uma órbita com expoentes de Lyapunov dados por $\lambda_1 = \lambda_{max} > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ e p denotando o maior inteiro, tal que:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq 0. \quad (2.30)$$

A dimensão de Lyapunov é, então, definida por [3]:

$$D_L = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ não existe} \\ p + \frac{1}{|\lambda_{p+1}|} \sum_{i=1}^p \lambda_i & \text{se } p < m \\ m & \text{se } p = m \end{cases} \quad (2.31)$$

Para um mapa bidimensional, com $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, tem-se:

$$D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \quad (2.32)$$

A conjectura de Kaplan-Yorke afirma que $D_L = D_1$. Em geral, $D_1 \leq D_0$, porém para alguns sistemas, $D_1 = D_0$ e neste caso, pela conjectura de Kaplan-Yorke, $D_L = D_0$, como acontece, por exemplo, para um mapa bidimensional dissipativo [14].

Como o mapa é dissipativo, o seu espaço de fase deve se reduzir à medida que o mapa é iterado. Um mapa bidimensional tem dois expoentes de Lyapunov

denotados por λ_1 e λ_2 . A dimensão de Lyapunov para mapas bidimensionais é dada pela equação 2.32. Considerando $\theta < 1$, recobre-se a fração da medida natural do atrator com $N(\varepsilon, \theta)$ “caixas”. Cada “caixa” evolui transformando-se em um paralelogramo, como mostra a figura 2.18 e faz-se necessária uma nova malha de “caixas” para recobrir o atrator, cujas arestas são:

$$\varepsilon' = \varepsilon e^{\lambda_2 n} < \varepsilon \quad (2.33)$$

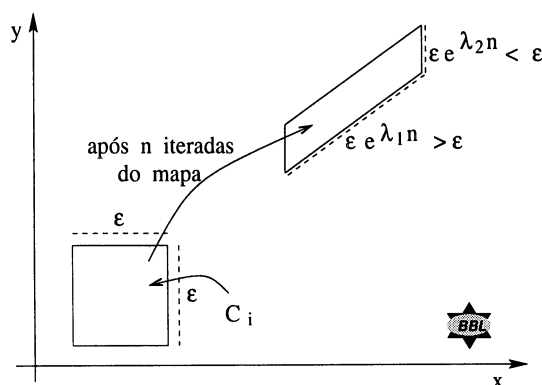


Figura 2.18: “Caixa” C_i sendo iterada. Como o exemplo mostrado é bidimensional, a “caixa” C_i é um quadrado de lado ε que, depois de ser iterado, transforma-se em um paralelogramo.

Na figura 2.18, nota-se que o quadrado C_i de lado ε , transforma-se em um paralelogramo à medida que o mapa é iterado. Os lados deste paralelogramo dependem do valor do expoente de Lyapunov do sistema associado àquela direção. Para este exemplo, λ_1 está associado à direção x e λ_2 está associado à direção y . Percebe-se, pela figura, que a direção x é a direção de expansão, portanto $\lambda_1 > 0$, conseqüentemente $\varepsilon e^{\lambda_1 n} > \varepsilon$ e a direção y é a direção de contração, então $\lambda_2 < 0$, conseqüentemente $\varepsilon e^{\lambda_2 n} < \varepsilon$. Sendo um dos expoentes de Lyapunov positivo, o mapa é, então, caótico.

Como a medida natural é invariante [14], então:

$$N(\varepsilon', \theta) \approx N(\varepsilon, \theta) e^{n(\lambda_1 + |\lambda_2|)}, \quad (2.34)$$

sendo assim, pode-se escrever:

$$D_1(\theta) = D_0(\theta) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon, \theta)}{\ln \varepsilon}, \quad (2.35)$$

isso implica em que $N(\varepsilon, \theta) \approx \varepsilon^{-D_1}$ para a fração representativa do atrator e para $\varepsilon \ll 1$. Assim:

$$\varepsilon'^{-D_1} \approx \varepsilon^{-D_1} e^{n(\lambda_1 + |\lambda_2|)}. \quad (2.36)$$

Substituindo a equação 2.33 na equação 2.36, tem-se que:

$$\varepsilon^{-D_1} e^{\lambda_2 n(-D_1)} \approx \varepsilon^{-D_1} e^{n(\lambda_1 + |\lambda_2|)}, \quad (2.37)$$

simplificando esta última:

$$-\lambda_2 D_1 \approx \lambda_1 + |\lambda_2|, \quad (2.38)$$

o que implica em:

$$D_1 \approx \lambda_1 + \frac{\lambda_1 + |\lambda_2|}{|\lambda_2|} = D_1, \quad \text{para } \varepsilon \ll 1. \quad (2.39)$$

Então, para o exemplo mostrado $D_1 = D_0$ e pela Conjectura de Kaplan-Yorke, $D_L = D_0$.

2.10 Bacias de Atração.

Uma bacia é o subconjunto de condições iniciais do espaço de fase que convergem para uma mesma região; se esta região de convergência for um atrator, então a bacia é chamada de bacia de atração.

A figura 2.19 mostra um diagrama do espaço de fase com três atratores. Cada atrator possui a sua bacia de atração, representadas pelas regiões delimitadas pelas curvas imediatamente à sua esquerda e à sua direita.

Denota-se *bacia de saída* o conjunto de condições iniciais que escapam para o infinito. As bacias de saída podem estar presentes tanto em sistemas dissipativos como em sistemas conservativos que possuem alguma região de aprisionamento, como um poço de potencial. Para os sistemas dissipativos, bacia de saída é o conjunto de condições iniciais que escapam do atrator para o infinito; para sistemas conservativos, bacia de saída é o conjunto de condições iniciais que escapam da região de aprisionamento em direção ao infinito.

Denota-se *bacia segura* o conjunto de condições iniciais do sistema que não divergem. Em outras palavras, bacia segura é o complemento da bacia de saída. Para sistemas conservativos, a bacia segura é o conjunto de condições iniciais que

ficam aprisionadas na região de aprisionamento; para sistemas dissipativos, a bacia segura é o conjunto de todas as bacias de atração do sistema somadas com as regiões de aprisionamento, se houverem.

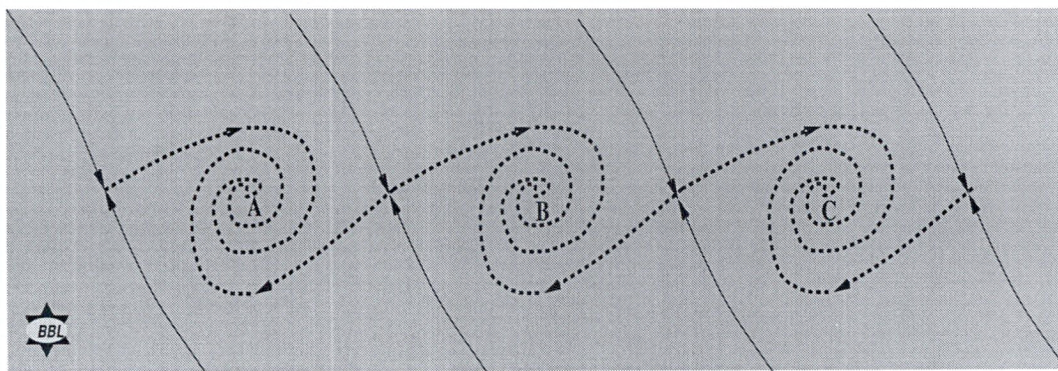


Figura 2.19: Exemplo de bacias de atração.

Fronteiras de Bacia de Atração.

A fronteira de uma bacia de atração é um conjunto de pontos de fronteira. Um ponto é dito ponto de fronteira se toda a sua vizinhança aberta pertencer, simultaneamente à pelo menos, duas bacias. Em outras palavras, um ponto de fronteira pertence simultaneamente, a pelo menos duas bacias. A fronteira entre duas bacias separa as condições iniciais que convergem para um conjunto atrativo, das condições iniciais que convergem para outro [19] [1].

Fronteira Suave de Bacia.

Uma fronteira de bacia é dita suave se esta fronteira for um conjunto de dimensão de capacidade inteira.

Fronteira Fractal de Bacia.

Uma fronteira de bacia é dita fractal se for um conjunto de dimensão de capacidade não-inteira, a qual chamamos de dimensão fractal (D_F).

A diferença entre estes dois tipos de fronteiras é que, para um fronteira suave é possível melhorar a probabilidade de previsão do estado final de uma condição inicial x_0 próxima a ela, melhorando a precisão de x_0 . Se a fronteira for fractal, a melhora da precisão de x_0 não traz ganho de probabilidade na previsão do seu estado final.

Quando um sistema apresenta fronteira fractal, uma pequena alteração na condição inicial pode provocar a imprevisibilidade do seu estado futuro. Em outras palavras, uma pequena incerteza nas condições iniciais pode dificultar a determinação do atrator em que a trajetória se aproxima. A este evento denota-se sensibilidade ao estado final [20] [21].

É possível calcular a dimensão fractal de uma fronteira, utilizando técnicas computacionais de simulação numérica. Uma destas técnicas é testar um círculo de condições iniciais do sistema que contenha pontos da fronteira, como mostra a figura 2.20.

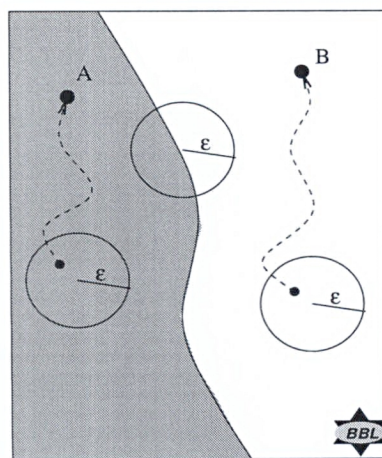


Figura 2.20: Técnica computacional para calcular a *Dimensão Fractal* de uma *Fronteira*.

Se o círculo de condições iniciais de raio ε estiver todo no interior da bacia de atração A ou toda no interior da bacia de atração B , então todas as condições iniciais dentro do círculo devem convergir, respectivamente, para os atratores A ou B ; mas se o círculo estiver sobre a fronteira, não se pode ter certeza do estado final das condições iniciais do seu interior. Estas condições são chamadas de Condições Incertas (CI) [14] e ε é dito raio de *erro*. A fração média das CI é dada pela razão entre elas e o número total de condições iniciais testadas no espaço de fase (CT):

$$\bar{f}(\varepsilon) = \frac{CI}{CT}. \quad (2.40)$$

Considerando um sistema bidimensional e assumindo que a distribuição de condições iniciais testadas é uniforme no espaço de fase, pode-se dizer que a probabilidade de uma condição ser incerta é uma fração da área do espaço de fase [20].

Então a fração de condições incertas, dada por $f(\varepsilon)$ que se aproxima de um atrator sob um círculo de raio de *erro* ε é dado por [20] [14]:

$$f(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha, \quad (2.41)$$

na qual α é dito expoente de incerteza.

Por sua vez, a fração incerta $f(\varepsilon)$ para uma região finita do espaço de fase, associado com a condição inicial de *erro* ε , obedece a lei de escala dada pela equação 2.42 [22] [20]:

$$\alpha = \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}, \quad (2.42)$$

se e somente se:

$$d = D - \alpha, \quad (2.43)$$

na qual D é a dimensão do espaço de fase e d é a dimensão da fronteira [1]. Para um sistema bidimensional, a fronteira é fractal se $\alpha \neq 1$; se a fronteira for suave, então $\alpha = 1$ e, por consequência $d = 1$.

2.11 Crises.

Em um sistema dinâmico, podem ocorrer fenômenos que lhe causam mudanças súbitas, tais como: crescimento de um atrator caótico, destruição de um atrator caótico, bem como de sua bacia de atração, surgimento de atratores caóticos, etc. Estas mudanças súbitas podem estar associadas com o fenômeno de crise [23].

Uma crise é o resultado da colisão entre uma órbita periódica instável com um atrator caótico. Vários tipos de crise podem ocorrer em um mesmo sistema e as consequências sofridas após uma delas são diferentes para cada tipo de crise ocorrida. Estes tipos de crise serão descritos abaixo:

Crise Interior.

Uma crise interior é o resultado de uma colisão entre uma órbita periódica instável no interior de um atrator com um atrator caótico.

Isto é possível de se acontecer em sistemas que apresentam janelas periódicas dentro do regime caótico, o que pode ser visualizado no diagrama de bifurcações do

sistema.

A consequência de uma crise de interior é o crescimento súbito do atrator caótico.

Crise de Fronteira.

A crise de fronteira é o resultado da colisão entre o atrator caótico e uma órbita instável (ou um ponto de sela) que se encontra na fronteira de bacia de atração deste atrator. Acontece, por exemplo, para o Mapa Quadrático Unidimensional, quando o sistema atinge o regime caótico por duplicação de período para um determinado valor do parâmetro variado [23].

A consequência de uma Crise de Fronteira é a súbita destruição do atrator caótico, bem como de sua bacia de atração.

Quando ocorre uma crise de fronteira no sistema o atrator caótico é súbitamente destruído e aparece em seu lugar um *Conjunto Caótico Não-Atrativo*, denominado *Sela Caótica*. As trajetórias, que antes convergiam para o atrator, permanecem durante algum tempo nos “vestígios” deste atrator e depois são expelidos. Este tempo é chamado de *Transiente Caótico* e pode ter uma duração bastante grande. Estes conjuntos consistem da intersecção das variedades estável e instável, que são cruzamentos homoclínicos ou heteroclínicos. Um cruzamento é homoclínico quando as variedades invariantes instável e estável de um mesmo atrator se cruzam. Em um cruzamento heteroclínico, a variedade invariante estável de um atrator cruza a variedade invariante instável de outro atrator [16].

A figura 2.21 mostra a variedade invariante estável de um ponto de sela se cruzando com a variedade invariante instável de outro ponto de sela.

2.12 Propriedade de Wada.

A Propriedade de Wada consiste na presença de fronteiras de Wada no espaço de fase do sistema, cujo conceito será apresentado a seguir. No início da sua formulação, acreditava-se que seria, estritamente, necessário que o sistema apresentasse, pelo menos, três bacias de atração para que a propriedade fosse válida [3], pelo fato de ter sido estudada, a princípio, apenas para sistemas dinâmicos dissipativos, os quais contêm atratores.

A idéia de que esta propriedade fosse válida apenas para sistemas dinâmicos

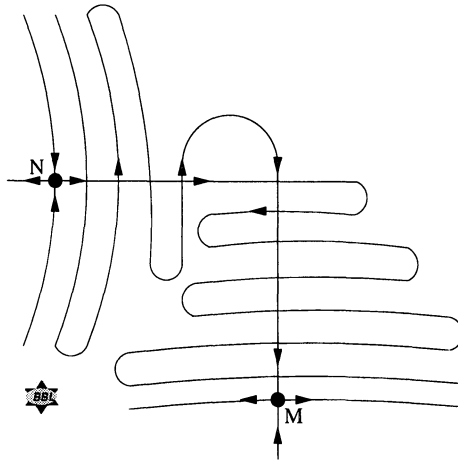


Figura 2.21: Sela caótica em um diagrama esquemático, mostrando cruzamentos heteroclínicos.

dissipativos deixou de ser verdadeira quando o estudo desta propriedade estendeu-se para sistemas dinâmicos hamiltonianos [10] [9], mais precisamente para sistemas que apresentam espalhamento caótico [10] [8] ⁶ com múltiplos modos de saída [10]. Assim, foi possível provar a validade desta propriedade mesmo para sistemas que não apresentam atratores. Porém, é necessário que o sistema apresente, pelo menos, três bacias, as quais podem ser bacias de saída, por exemplo.

Visualmente, pode-se verificar a Propriedade de Wada em um sistema, analisando a propriedade de auto-similaridade do seu espaço de fase [8] [10]. Esta propriedade está relacionada com invariância de escala do espaço de fase do sistema. Em outras palavras, não importa que escala se use, o espaço de fase terá sempre as mesmas características.

⁶Conjunto caótico para o qual as variáveis de entrada podem produzir mudanças drásticas nas variáveis de saída.

Ponto de Wada.

Um ponto p sobre a fronteira de bacia é chamado de ponto de Wada se toda a sua vizinhança aberta intersecta pelo menos três bacias diferentes do sistema [10].

Fronteira de Bacia de Wada.

Se todos os pontos sobre a fronteira de bacia forem pontos de Wada, então esta fronteira é dita fronteira de Wada. Em outras palavras, uma fronteira de Wada é aquela fronteira que pertence, simultaneamente, a pelo menos, três das bacias encontradas no sistema [10].

Capítulo 3

Modelo de Oscilações de um Navio.

3.1 Introdução.

O presente trabalho traz um estudo das oscilações laterais sofridas por um navio sujeito a condições ambientais tais como ondas oceânicas, vento, etc [5] [24].

Trabalhos realizados na área de dinâmica não-linear e caos [4] [25] [5] mostram que o problema da estabilidade de navios sujeito a condições ambientais é muito mais complicado do que se apresenta na literatura de arquitetura naval. Ainda em meados da década de 80, os trabalhos nesta área traziam estudos de estabilidade de navios baseados em escolhas de condições iniciais e pensava-se esta, ser uma técnica suficiente para controlar os emborcamentos. [5] [24].

Os critérios de segurança, estabelecidos pela literatura de arquitetura naval, eram puramente empíricos quando em 1982, houve um salto à cerca dos conceitos de estabilidade de navios devido aos trabalhos de Motora [26], os quais afirmavam que o que se conhecia sobre estabilidade de navios era insatisfatório porque ignorava a contribuição da dinâmica de parâmetros envolvidos, como por exemplo, a densidade da água a qual oferece resistência ao movimento (amortecimento) ou o vento e o impacto de tempestades que podem reforçar o movimento (forçamento externo).

A partir disso, houve uma série de tentativas de incorporar estes parâmetros no estudo da estabilidade de um navio, idealizando-o como um oscilador não-linear forçado e amortecido [27] [4] [5].

O objetivo, neste trabalho, é encontrar regimes de parâmetros do navio nos quais certas propriedades da dinâmica não-linear se manifestem, entre elas: crise [25],

fronteiras fractais [4], sela caótica e Propriedade de Wada [8] e a partir delas, estudar o seu comportamento.

A figura 3.1 mostra o esquema de um navio oscilando lateralmente. No instante t , o navio se encontra em sua posição de equilíbrio e no instante $t + \Delta t$, ele é deslocado da sua posição de equilíbrio por um ângulo θ . O navio se comporta como um oscilador não-linear, forçado e amortecido [24] pois oscila lateralmente em torno de uma posição de equilíbrio, que é o seu centro de massa W .

Note que, quando o navio é deslocado, o seu centro de empuxo E desloca-se junto com ele mas, o seu centro de massa W permanece na mesma posição [5]. O deslocamento do seu centro de empuxo causa o emborcamento do navio.

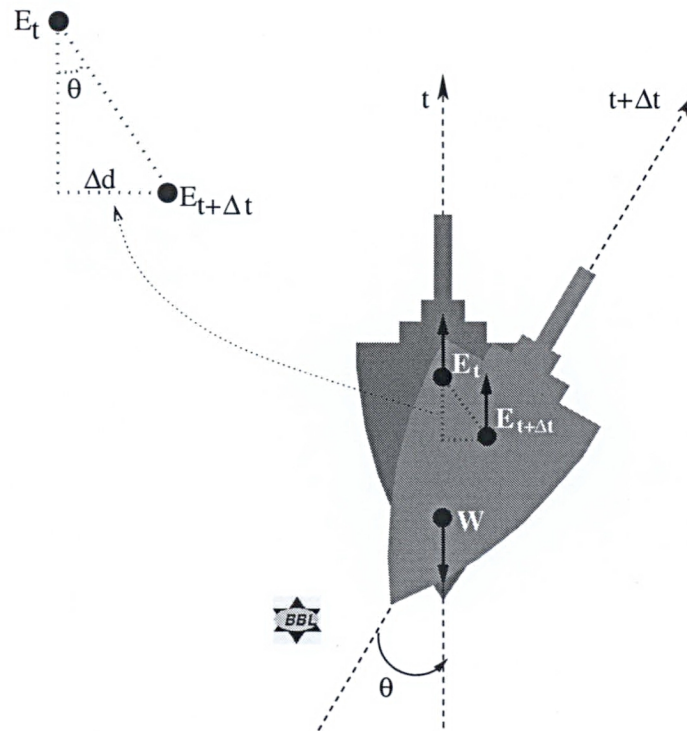


Figura 3.1: Esquema de um navio oscilando lateralmente, para dois tempos: t e $t + \Delta t$.

3.2 Oscilações Livres e Não-Amortecidas.

O modelo matemático que descreve as oscilações laterais do navio surge das equações de movimento de Lagrange, considerando apenas a ação do potencial

aplicado ao problema. Escrevendo a lagrangeana do sistema $L(\theta, \dot{\theta}, t)$ do sistema [28]:

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} - U(\theta),$$

na qual (3.1)

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{I\dot{\theta}^2}{2},$$

(3.2)

com $T(\theta, \dot{\theta})$ sendo a energia cinética associada ao movimento de oscilação, $U(\theta)$ a energia potencial aplicada ao sistema e I , o momento de inércia do navio.

Pelas equações de movimento de Lagrange [28]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

(3.3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) - \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} &= 0, \\ I\ddot{\theta} - \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

(3.4)

O potencial usado neste problema é do tipo [4] [5]:

$$U(\theta) = \omega^2 \left(\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{4}\alpha\theta^4 \right)$$

(3.5)

e, finalmente a equação de movimento, sem a ação de quaisquer forças externas sobre o sistema pode ser escrito como:

$$I\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \alpha\theta^3) = 0.$$

(3.6)

3.3 Forma do Potencial Utilizado.

O emborcamento de navios tem sido modelado por inúmeros pesquisadores [4] [5] [29] [27] [25] [30] através de equações diferenciais de segunda ordem não-lineares, as quais descrevem o movimento de oscilação lateral do navio (“rolling motion”), considerando o navio como um oscilador não-linear forçado e amortecido,

cujas variáveis dinâmicas são o ângulo de oscilação θ e a velocidade angular do navio $\dot{\theta}$, e que o movimento seja oblíquo em relação às ondas do mar (conforme figura 3.2). O movimento oblíquo do navio se mostra altamente não-linear, apresentando movimentos caóticos, harmônicos e sub-harmônicos coexistentes [31].

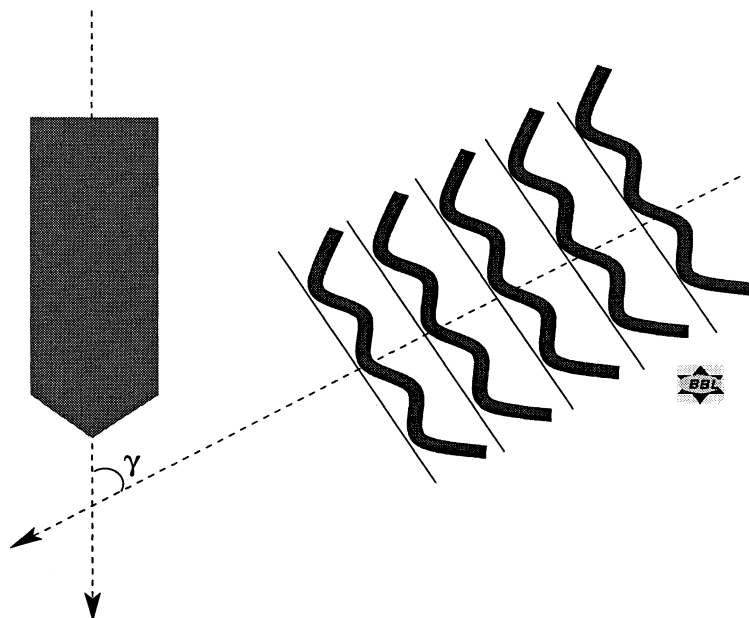


Figura 3.2: Considera-se que o navio se movimenta oblíquo em relação à direção de propagação das ondas do mar.

A equação genérica para este tipo de sistema pode ser escrita como:

$$I\ddot{\theta} + B(\dot{\theta}) + C(\theta) = \rho \sin(\phi t). \quad (3.7)$$

O termo $C(\theta)$ é dito *momento restaurador* do movimento e se dá devido às *forças de flutuação* (forças de deslocamento de massas de água devido à oscilação do navio.), desconsiderando qualquer tipo de forçamento externo como vento ou balanço de carga. $C(\theta)$ é um termo altamente não-linear, podendo variar desde o valor $C(\theta = 0)$ até um valor máximo $C(\theta = \theta_{max})$, no qual o navio perde sua estabilidade. Neste ângulo, $\theta = \theta_{max}$, a energia potencial corresponde a $V(\theta) = \int C(\theta)d\theta$ e tem um máximo local [4].

Na literatura da Arquitetura Naval, a função de flutuação $C(\theta)$, tomada na ausência de ondas e balanço de carga desprezível, é chamada invariavelmente de *Curva GZ* [4] sobre o diagrama de oscilação do navio sendo que, o “braço” da força de

flutuabilidade está sobre o centro de gravidade do navio. As curvas GZ do momento restaurador podem ser descritas por uma família $c(\theta)$ de polinômios parametrizados por um fator α :

$$c(\theta) = \frac{dv(\theta)}{d\theta} = \omega^2[\theta(1 - \theta)(1 + \alpha\theta)] = \omega^2[\theta + (\alpha - 1)\theta^2 - \alpha\theta^3], \quad (3.8)$$

$$v(\theta) = \omega^2 \left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{\omega^2(1 - \alpha)\theta^3}{3} - \frac{\omega^2\alpha\theta^4}{4} \right]. \quad (3.9)$$

Este potencial apresenta uma oportuna simetria quando $\alpha \rightarrow 1, 0$, conforme a figura 3.3.

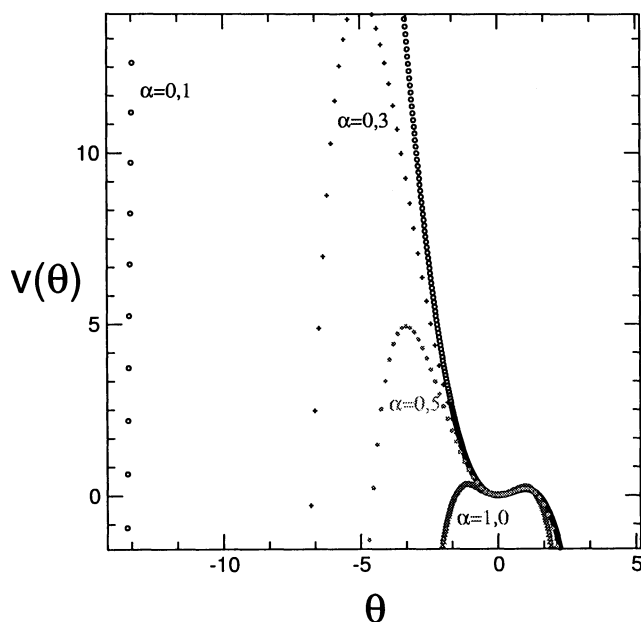


Figura 3.3: Simetria do potencial quando $\alpha \rightarrow 1, 0$. Para todos os gráficos $\omega^2 = 1$

O ponto de equilíbrio estável é sempre o ponto $(\theta, V(\theta)) = (0, 0)$, independentemente do valor de α mas, os pontos de máximo da função, os quais representam pontos de equilíbrio instável, variam de acordo com o valor de α . Para $\alpha = 1, 0$, os pontos de equilíbrio instável estão em $(\theta, V(\theta)) = (-1; 0, 25)$ e $(\theta, V(\theta)) = (1; 0, 25)$, para $\omega^2 = 1, 0$.

O momento periódico devido à incidência das ondas oceânicas laterais regulares, pode usualmente ser descrito pelo termo $\rho \sin(\phi t)$, no qual ϕ é a frequência e ρ a amplitude das ondas [4].

Este potencial foi escolhido devido ao aspecto do problema. O navio oscila lateralmente em torno de um ponto de equilíbrio e pode emborcar por dois lados deste ponto, o que sugere que ele está sujeito a um potencial que possui uma região de aprisionamento e pode escapar desta ao atingir um dos dois pontos de máximo local, um deles locado à esquerda e o outro à direita da região de aprisionamento. Na expressão do potencial, ω^2 e α são constantes que controlam a profundidade da região de aprisionamento. Para melhor visualizar, imagine uma esfera sobre um trilho unidimensional conforme a figura 3.4.

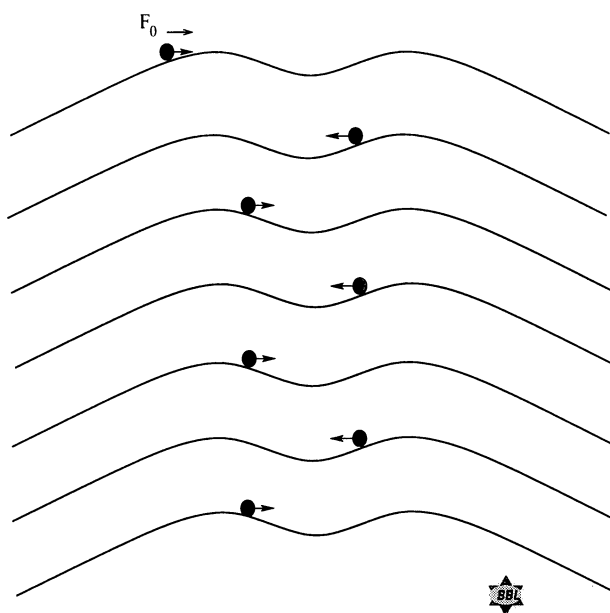


Figura 3.4: A esfera fica aprisionada no poço sem nunca parar no ponto mais baixo da depressão.

A esfera rola, sem deslizar sobre o trilho, com velocidade constante, conforme a figura 3.4. Ao atingir o poço, podem ocorrer um dos dois eventos a seguir: a velocidade da esfera é suficientemente grande para que ela passe pelo poço e continue rolando pelo trilho no mesmo sentido; ou a velocidade da esfera não é suficientemente grande para atravessar o poço e acaba por ficar aprisionada nele. Se o segundo evento ocorrer, a esfera fica oscilando em torno do ponto de equilíbrio, o ponto B (o ponto mais baixo da depressão) entre os pontos A e C , alimentada apenas pelo potencial

aplicado. Esta situação é conservativa, pois não há perda e nem injeção de energia no sistema.

O navio se comporta na água de maneira similar ao comportamento da esfera no trilho. Se não houver a ação de uma força externa, o navio fica oscilando em torno do seu ponto de equilíbrio.

3.4 Oscilações Livres e Amortecidas.

O caso conservativo, descrito pela equação 3.6, é uma situação idealizada pois sempre há alguma perda de energia via atrito entre as superfícies. No caso do navio, trata-se da força de atrito viscoso da água e é representada pelo termo $B(\dot{\theta})$ da equação 3.7, o qual denota-se *função amortecimento* e pode ser modelado, por exemplo, por uma expansão na forma $\dot{\theta} + \theta|\dot{\theta}| + \dot{\theta}^3$ (o módulo no termo quadrático garante que o amortecimento está sempre no sentido oposto ao de $\dot{\theta}$) [4]. A função amortecimento depende, essencialmente, da geometria de construção do navio. Para o trabalho aqui realizado, utilizaremos $B(\dot{\theta}) = \nu\dot{\theta}$, na qual ν é o coeficiente de atrito viscoso da água, como utilizado por Thompson [4]. Esta força é sempre contrária ao movimento e será responsável por fazer com que o navio atinja assintoticamente a sua posição de equilíbrio, como mostra a figura 3.5. A força de atrito viscoso da água será, daqui por diante, denotada por *força de amortecimento* ou, simplesmente *amortecimento*.

Acrescentando o amortecimento nas equações de movimento de Lagrange, tem-se:

$$I\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \alpha\theta^3) + \nu\dot{\theta} = 0. \quad (3.10)$$

O potencial aplicado ao navio apresenta um ponto de mínimo e dois pontos de máximo, conforme a figura 3.6. O ponto de mínimo, é um ponto de equilíbrio estável do sistema o qual possui uma correspondente bacia de condições iniciais que convergem para ele, denotando-se por esta *bacia segura*. Os pontos de máximo, são dois pontos de equilíbrio instável do sistema, cada um deles possui um conjunto distinto de condições iniciais que escapam do poço de potencial, e seguem para o infinito, os quais denotam-se *bacias de saída*.

Da figura 3.7, observa-se o caso conservativo deste problema. Sem forçamento externo e sem amortecimento, as trajetórias ficam presas em órbitas fechadas em torno do ponto de equilíbrio estável o qual neste caso é dito *ponto elíptico*. Quan-

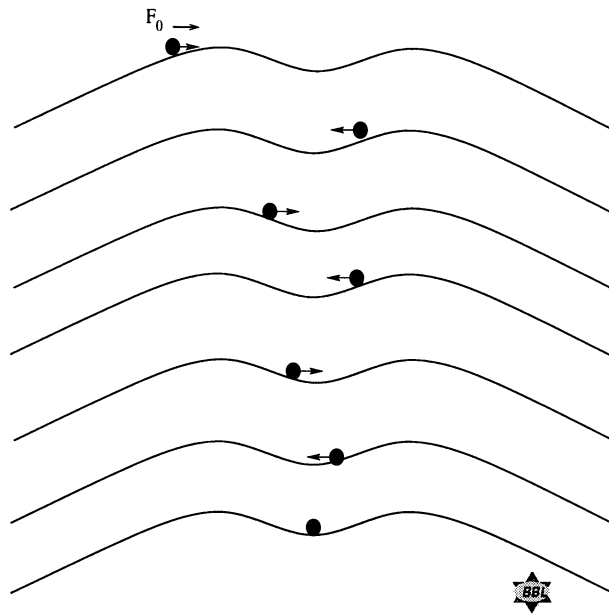


Figura 3.5: A esfera perde energia devido à força de atrito e pára na sua posição de equilíbrio.

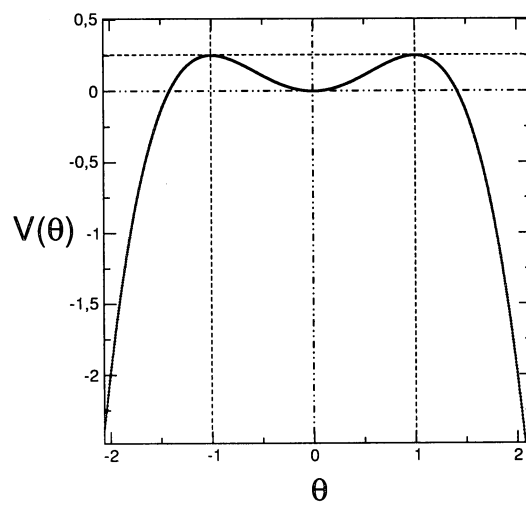


Figura 3.6: Potencial utilizado. $\alpha = 1,0$ e $\omega^2 = 1,0$.

do adiciona-se o amortecimento, o sistema torna-se dissipativo e o ponto elíptico transforma-se em um *foco estável*. As órbitas fechadas desaparecem dando origem a trajetórias que convergem para o foco, conforme figura 3.8.

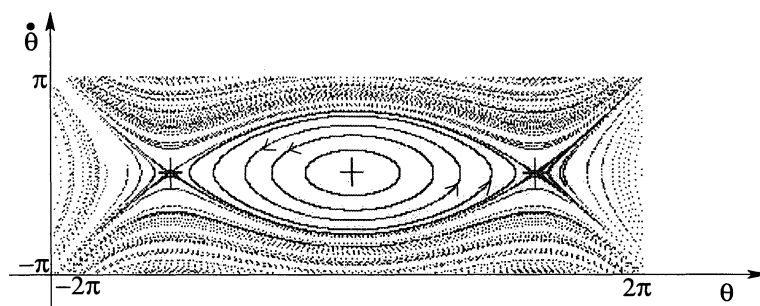


Figura 3.7: Órbitas elípticas do caso conservativo.

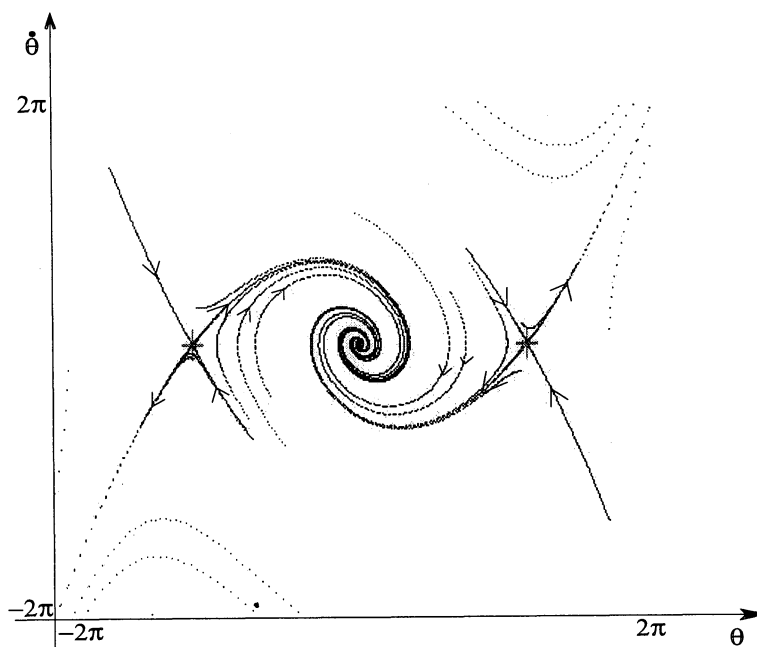


Figura 3.8: Órbitas do caso dissipativo.

3.5 Análise da Estabilidade dos Pontos Fixos do Sistema.

É possível provar matematicamente, através da Jacobiana do sistema, desconsiderando a atuação de qualquer tipo de força externa, que a condição inicial $(\theta, \dot{\theta}) = (0,0)$ é um foco estável para o caso dissipativo. Considerando o sistema de equações:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \psi = f_1 \\ \dot{\psi} &= -\nu\psi - \omega^2(\theta - \alpha\theta^3) = f_2.\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\tag{3.12}$$

Calculando a Jacobiana deste sistema, temos:

$$[DJ(x)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2(1 - 3\alpha\bar{\theta}^2) & -\nu \end{pmatrix},\tag{3.13}$$

na qual $\bar{\theta}$ representa o ponto de equilíbrio. Calculando a Jacobiana para o ponto de equilíbrio estável $(\theta, \dot{\theta}) = (0,0)$, tem-se:

$$[DJ(x)]_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\nu \end{pmatrix}.\tag{3.14}$$

Resolvendo o determinante $\det[[DJ(x)]_{(0,0)} - \lambda I]$, calculam-se os autovalores λ_i associados a este ponto.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & (-\nu - \lambda) \end{pmatrix} = 0,\tag{3.15}$$

da qual encontram-se:

$$\lambda_1 = -\frac{\nu}{2} + \left(\sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - \omega^2} \right) \text{ e } \lambda_2 = -\frac{\nu}{2} - \left(\sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - \omega^2} \right).$$

Para $\omega^2 > \left(\frac{\nu}{2}\right)^2$ tem-se que λ_1 e λ_2 são complexos conjugados. Os autovetores associados formam um subespaço bidimensional estável, com direções e_1 associada à λ_1 e e_2 associado à λ_2 , conforme a figura 3.9.

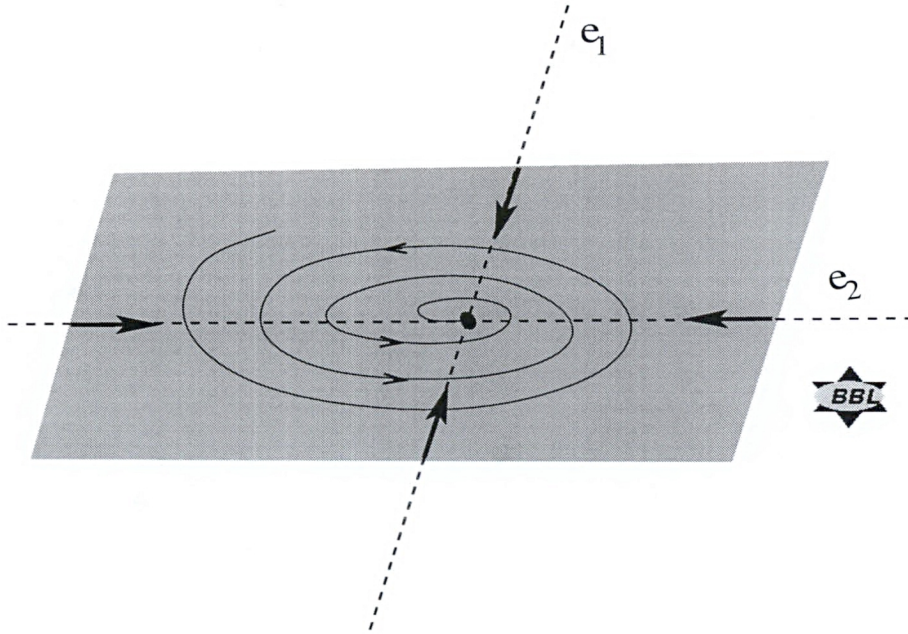


Figura 3.9: Esquema dos autovetores associados ao ponto fixo estável.

Os pontos de equilíbrio instáveis $(\theta; \dot{\theta}) = (\pm 1; 0, 25)$, nestas condições representam dois pontos de sela. Partindo da equação 3.13 para estes pontos tem-se:

$$[DJ(x)]_{(\pm 1; 0, 25)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2(1 - 3\alpha) & -\nu \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Através do mesmo procedimento calculam-se os autovalores associados a estes pontos:

$$\lambda_1 = -\frac{\nu}{2} + \left(\sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - \omega^2(1 - 3\alpha)} \right) \text{ e } \lambda_2 = -\frac{\nu}{2} - \left(\sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - \omega^2(1 - 3\alpha)} \right).$$

Como o parâmetro $\alpha \rightarrow 1, 0$, o termo $3\alpha\omega^2 > \omega^2$ fazendo com que o radicando seja sempre positivo, resultando em duas raízes reais de sinais contrários pois, o módulo da raiz é maior que o termo $-\frac{\nu}{2}$. Os autovetores associados a estes autovalores formam um subespaço unidimensional instável e outro estável, dando origem a dois pontos de sela, conforme a figura 3.10.

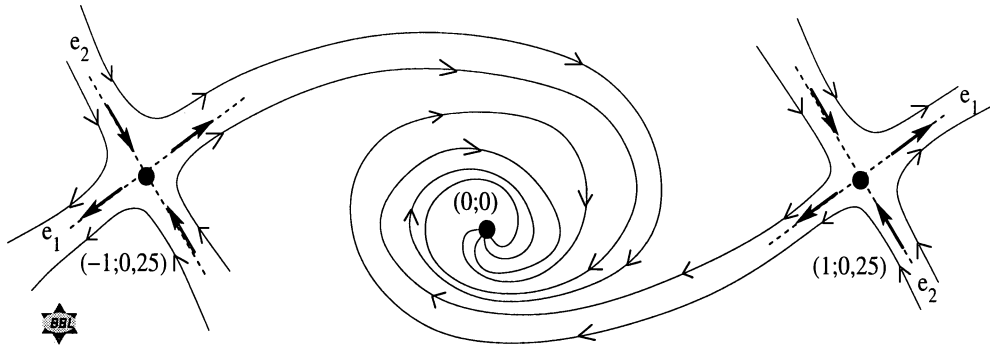


Figura 3.10: Esquema dos autovetores associados aos pontos fixos instáveis.

3.6 Oscilações Forçadas.

Além da força de amortecimento, o navio está sujeito a condições ambientais como o vento, a ondulação marítima e outros que podem reforçar o seu movimento. Estas forças externas serão, daqui por diante, denotadas por *forçamento externo* ou, simplesmente, *forçamento*. Estas forças externas têm dependência temporal mas, para efeitos de simplificação do problema, considera-se dependente do tempo apenas a força causada pela ondulação marítima, a qual será modelada pelo termo $\rho \sin(\phi t)$, como descrito na página 56. As demais forças: vento, impacto de tempestades, balanço de carga e outras serão somadas em um único termo constante denotado por F_0 .

Incluindo estes termos na equação 3.10, tem-se:

$$\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \alpha\theta^3) + \nu\dot{\theta} - \rho \sin(\phi t) - F_0 = 0, \quad (3.17)$$

com I embutido em todos os termos. Fazendo a mudança de variável $\dot{\theta} = \psi$ na equação 3.17, tem-se o fluxo bidimensional:

$$\dot{\theta} = \psi, \quad (3.18)$$

$$\dot{\psi} = -\nu\psi - \omega^2(\theta - \alpha\theta^3) + \rho \sin(\phi t) + F_0. \quad (3.19)$$

A idéia mais simples que se pode ter à cerca do comportamento de um navio é pensar que ele deve emborcar quando exceder um ângulo máximo θ_{max} de oscilação, e que isso depende da condição inicial $(\theta, \dot{\theta})$ escolhida. O fato é que, o navio

atinge esta angulação máxima devido à ação dos parâmetros envolvidos no sistema, combinada com a escolha de condições iniciais. Esta ação tanto pode contribuir para o emborcamento do navio como evitá-lo, ou seja, mesmo que a oscilação atinja o ângulo máximo θ_{max} de oscilação, o navio pode não emborcar devido à ação destes parâmetros [4]. Um exemplo desta situação é quando se considera que o vento está agindo no sentido contrário da incidência das ondas marítimas, como mostra a figura 3.11.

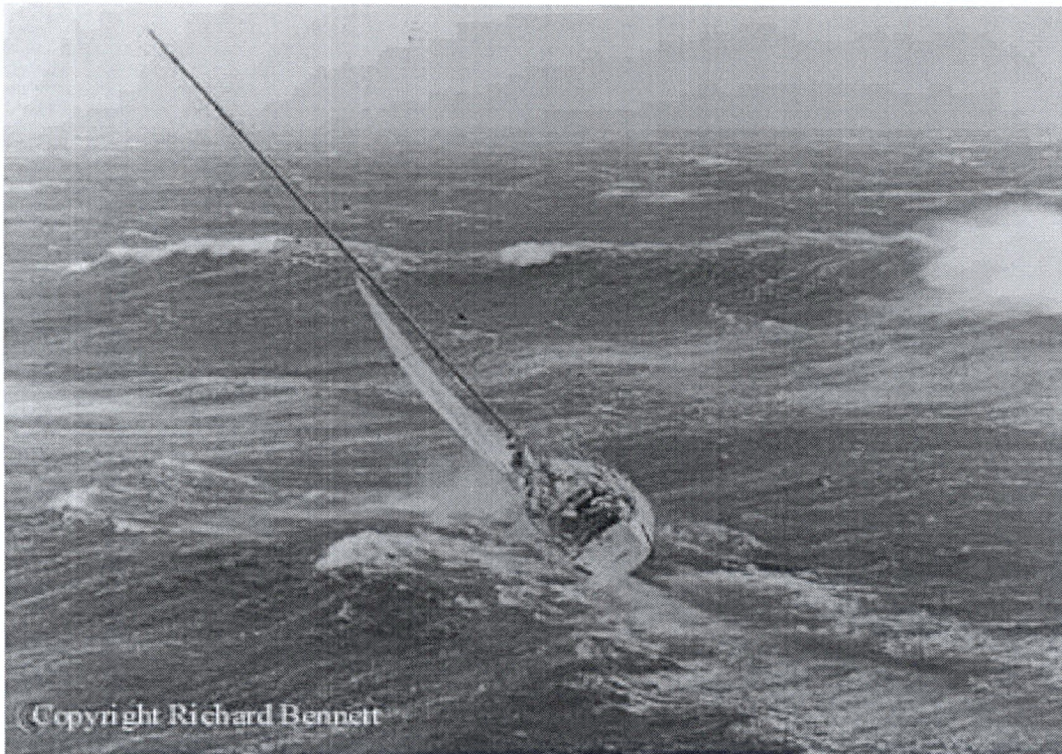


Figura 3.11: Navio sujeito à força externa causada pelo vento e pela ondulação do mar (foto extraída do site <http://www.radford-yacht.com>).

A situação da figura 3.11 pode ser descrita pela equação 3.7 na qual a função de flutuação é dada por $C(\theta) = \theta - \theta^2$. Na angulação θ_{max} do navio, o potencial aplicado é dado por $V(\theta) = \int C(\theta)d\theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{3}$, cujo aspecto é mostrado na figura 3.12.

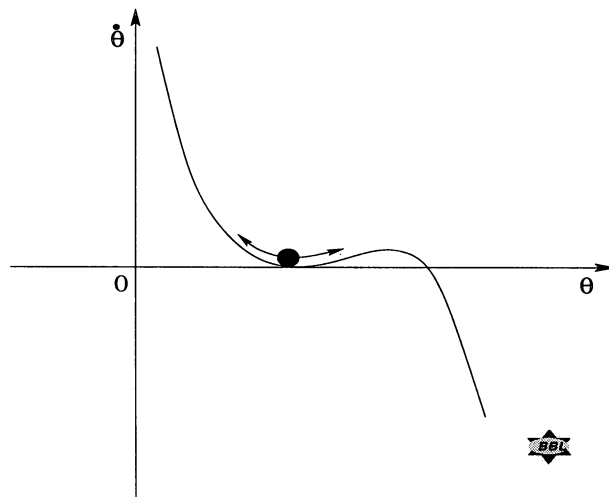


Figura 3.12: Aspecto do potencial aplicado ao navio da figura 3.11.

Várias outras situações podem ser consideradas, para cada uma delas sujeita a um potencial capaz de modelá-la [31].

Capítulo 4

Resultados Obtidos e Discussão.

4.1 Diagrama de Bifurcações.

O diagrama de bifurcações do sistema (figura 4.1) foi construído com uma rotina própria, em linguagem *C*, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\omega^2 = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $\rho = 0,245$, $\phi = 1,0$. A condição inicial utilizada foi $\theta = 0,0$ e $\dot{\theta} = 0,0$.

O primeiro quadro da figura 4.1 está normalizado com o valor de crise $F_{0c} = 0.726$, valor sobre o qual acontece uma crise de fronteira demonstrada no decorrer deste capítulo, os outros quadros não estão normalizados. Observa-se nesta figura que quando o valor do forçamento chega a $\frac{F_0}{F_{0c}} = 0,56$ ¹, o qual denotar-se-á por *valor crítico* F_0^* , acontece uma *bifurcação por duplicação de período*. Bifurcações por duplicação de período podem ser consideradas como uma rota para o caos. Enquanto o forçamento não atinge o seu valor crítico, o valor de amortecimento é suficiente para prender a condição inicial em uma órbita de período um. Quando $F_0 = F_0^*$ a condição inicial para uma órbita de período 2. As duplicações sucessivas não param de acontecer, dando origem a órbitas de período 4, 8 e assim por diante até atingir um regime caótico. Órbitas de período 5, 6, 7 e outras podem ser observadas nas ampliações das janelas periódicas encontradas no diagrama.

Quando o forçamento chega próximo a $F_0 \approx 0.726$ ocorre uma crise de fronteira no sistema. Este valor será denotado *valor de crise* $F_{0c} \approx 0.726$.

¹ $\frac{F_0}{F_{0c}} = 0,56 \approx F_0^* = 0,4$

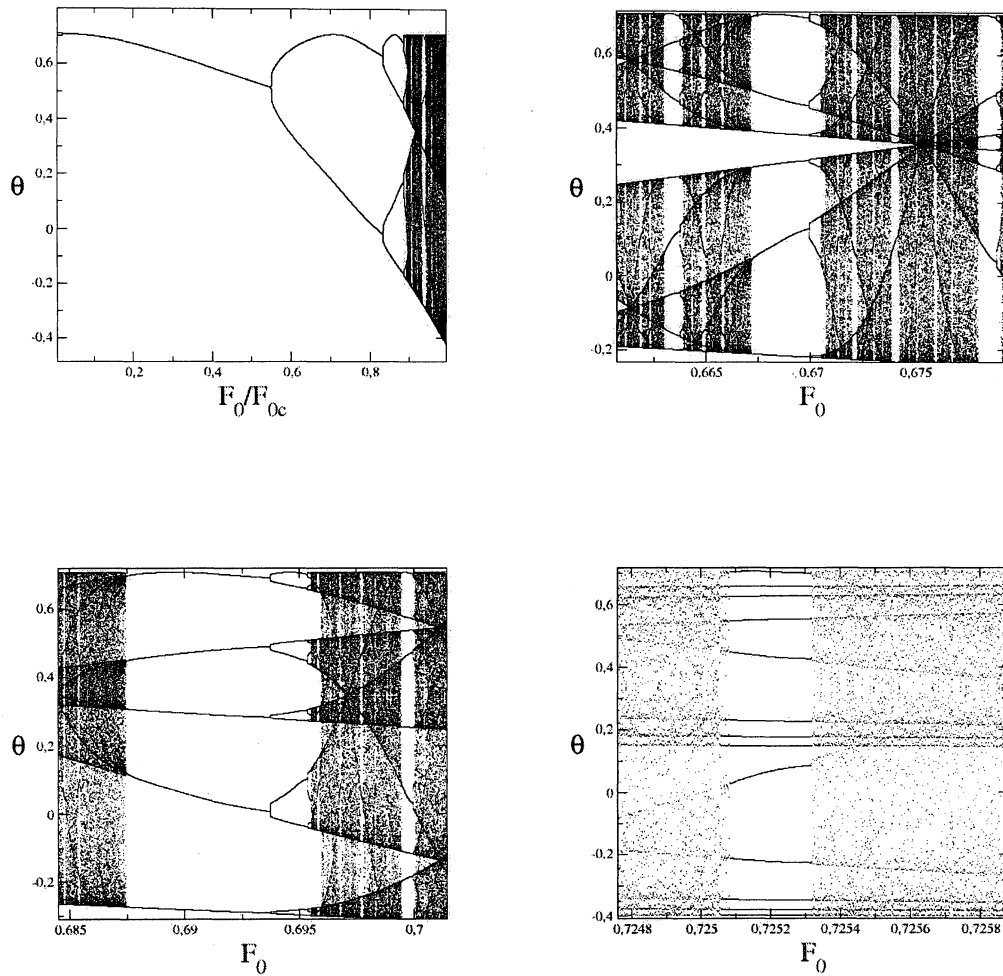


Figura 4.1: Diagrama de bifurcações do sistema com parâmetros $\alpha = 1, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, $\nu = 0, 5$, $\rho = 0, 245$ e condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$.

De acordo com os resultados que ainda aparecerão neste capítulo, pode-se dividir o diagrama da figura 4.1 da seguinte forma:

1. $0 \leq \frac{F_0}{F_{0c}} \leq 0,56 \rightarrow$ ponto fixo do mapa estroboscópico (órbita de período um);
2. $\frac{F_0}{F_{0c}} = 0,56 \approx F_0^* = 0,4 \rightarrow$ ocorre uma bifurcação por duplicação de período. Ver-se-á mais adiante que, para $F_0 \approx F_0^*$ ocorrem os infinitos cruzamentos homoclínicos de um ponto de sela contido na fronteira do atrator do sistema e por este fato, será esta bifurcação será denotada por *bifurcação homoclínica*. Concomitantemente, a área da bacia segura começa a se reduzir e surge um conjunto caótico não-atrativo de tipo sela caótica, coexistente com o atrator;
3. $0,56 \frac{F_0}{F_{0c}} \leq 0,82 \rightarrow$ sobrevida da órbita de período dois;
4. $\frac{F_0}{F_{0c}} \approx 0,82 \rightarrow$ ocorre a segunda bifurcação por duplicação de período;
5. $0,82 \leq \frac{F_0}{F_{0c}} \leq 0,89 \rightarrow$ sobrevida da órbita de período quatro;
6. após o valor de $\frac{F_0}{F_{0c}} \approx 0,89 \rightarrow$ ocorrem sucessivas e infinitas bifurcações por duplicação de período até que o sistema atinge o regime caótico;
7. $\frac{F_0}{F_{0c}} = 1 \approx F_{0c} \approx 0,726 \rightarrow$ ocorre uma crise de fronteira no sistema. O atrator e sua bacia segura desaparecem;
8. após o valor de crise $F_{0c} \approx 0,726 \rightarrow$ após este valor do forçamento somente a sela caótica sobrevive.

4.2 Mapa Estroboscópico.

Uma técnica útil na análise de um sistema na dinâmica não-linear, é a construção estroboscópica do seu espaço de fase.

Para o caso conservativo encontra-se um ponto fixo em $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$, o gráfico é o próprio ponto conforme figura 4.2-*a*. Para outras condições iniciais pertencentes à bacia segura, com dissipação e forçamento, o gráfico resulta em um ciclo limite, conforme figura 4.2-*b*.

No caso dissipativo sem forçamento as condições iniciais pertencentes à bacia segura convergem para o ponto de equilíbrio estável conforme figura 4.3-*a*. Na parte *b* desta figura está o caso dissipativo com forçamento $F_0 = 0,42$, ligeiramente maior que o valor crítico $F_0^* = 0,4$.

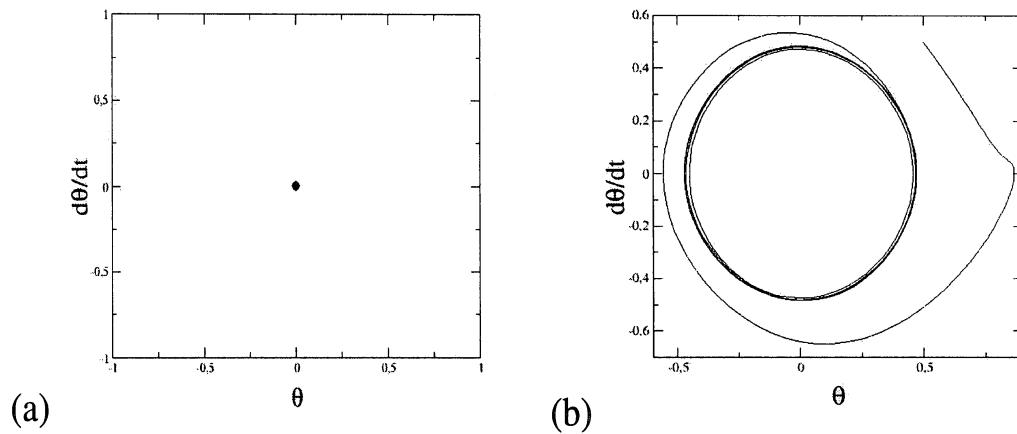


Figura 4.2: Espaço de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do sistema. Na parte (a) aparece o caso conservativo para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$, com parâmetros $\nu = 0, 0$, $\omega^2 = 1, 0$, $\alpha = 1, 0$, $\rho = 0, 245$, $\phi = 1, 0$ e $F_0 = 0, 0$. Na parte (b), o caso dissipativo com forçamento $F_0 = 0, 2$, para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0, 5; 0, 5)$.

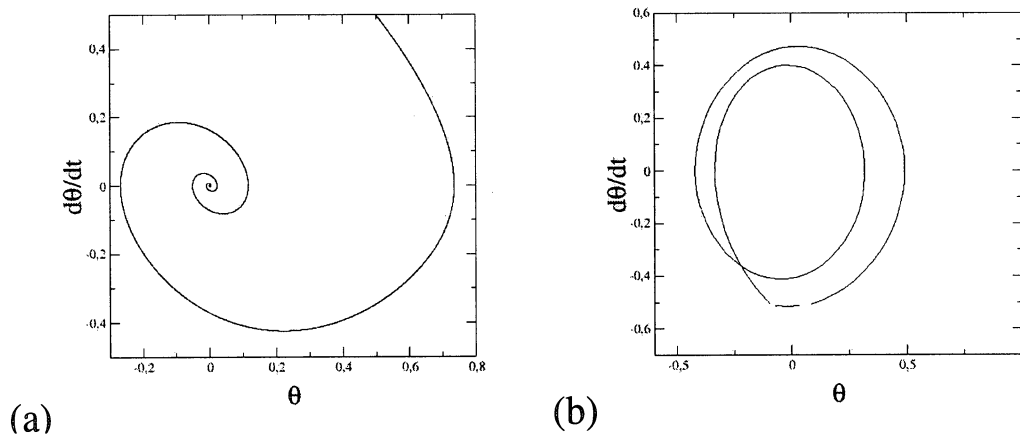


Figura 4.3: Espaço de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do sistema para o caso dissipativo. Na parte (a) para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0, 5; 0, 5)$, com parâmetros $\nu = 0, 5$, $\omega^2 = 1, 0$, $\alpha = 1, 0$, $\rho = 0, 245$, $\phi = 1, 0$ e $F_0 = 0, 0$. Na parte (b) para a mesma condição inicial com forçamento $F_0 = 0, 42$. Observa-se nesta, o aparecimento de uma órbita de período 2.

Quando se aumenta o valor do forçamento, percebe-se que o corte estroboscópico do espaço de fase apresenta-se bastante complexo e que as órbitas fechadas desaparecem. É o que mostra a figura 4.4, que foi construída com o mesmo programa citado acima, com os mesmos parâmetros, exceto o valor do forçamento, que variou para $F_0 = 0,727$.

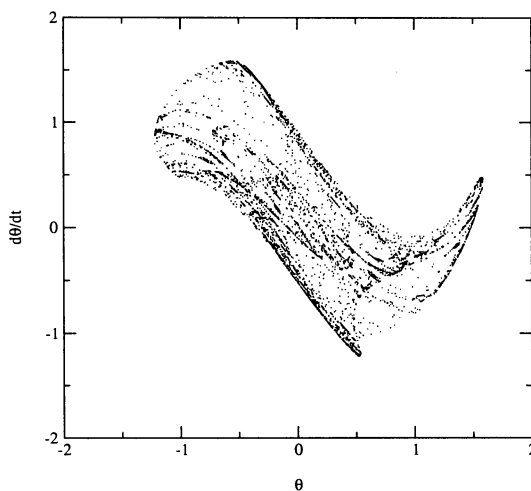


Figura 4.4: Espaço de fase $\theta X \dot{\theta}$ do sistema para um valor de forçamento muito próximo ao valor de crise, para a condição inicial $(\theta, \dot{\theta}) = (0,5; 0,5)$, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\omega^2 = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $\rho = 0,245$, $\phi = 1,0$ e $F_0 = 0,727$. O regime é caótico!

4.3 Cruzamentos Homoclínicos.

Após a ocorrência da primeira bifurcação a área da bacia segura do sistema vai sendo reduzida, devido à formação de “dedos” incursivos que a invadem, e que ocorrem por cruzamentos homoclínicos. A figura 4.5-*a* traz um desenho esquemático da formação destes “dedos” incursivos. O conjunto A da figura representa uma banda de condições iniciais contida na variedade invariante estável do ponto de sela S e será iterada para trás. As pré-imagens de A crescem ao longo da variedade invariante estável de S . Os pontos de intersecção entre a clausura da variedade estável de S e a banda A crescem exponencialmente, de acordo com o autovalor correspondente a sua direção estável. O comprimento ao longo da variedade invariante estável cresce

compensando a redução da sua largura. O efeito final é o acúmulo de finos segmentos (os “dedos” incurivos) sobre a variedade invariante estável de S [32]. Este acúmulo é chamado de acumulação logarítmica de órbitas sobre a variedade invariante.

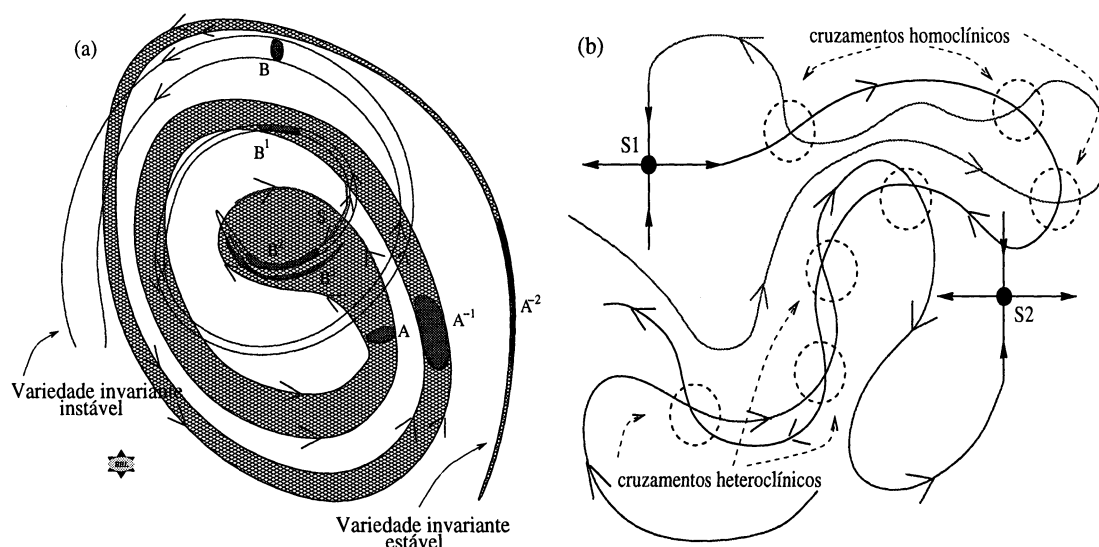


Figura 4.5: Desenhos esquemáticos. Parte (a): clausuras das variedades invariantes estável e instável de um ponto de sela. Parte (b): cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos.

Na mesma figura é possível observar, também, que o atrator é delimitado pela clausura da variedade invariante instável de S . Tomando uma banda B contida na clausura da variedade invariante instável de S e iterando-a para frente, percebe-se que o comportamento da banda B é inverso ao da banda A . As imagens de B crescem exponencialmente ao longo da variedade invariante instável de S , de acordo com o autovalor correspondente a sua direção instável. Os pontos de intersecção entre a variedade invariante instável e a banda B crescem exponencialmente. O comprimento da banda B cresce exponencialmente, compensando a redução da sua largura. O efeito é o acúmulo de filamentos extremamente finos sobre a variedade invariante instável de S , novamente acumulação logarítmica.

4.4 Erosão da Bacia Segura.

A redução da área da bacia segura acontece devido à incursão destes “dedos”, provocando a sua erosão [33] conforme figura 4.6.

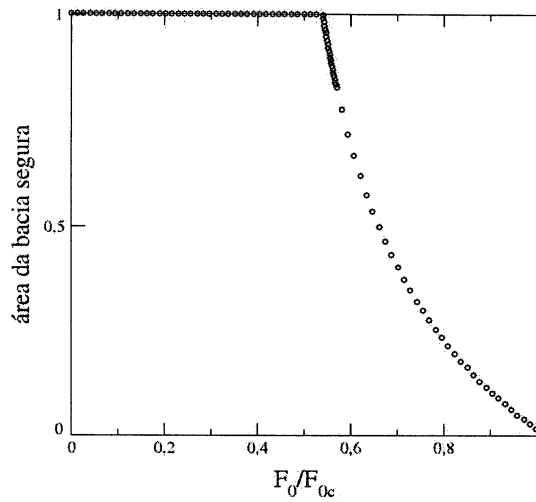


Figura 4.6: Cálculo da redução da área da bacia segura com a variação do forçamento com parâmetros $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, $\nu = 0,5$, $\rho = 0,245$ e condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0, 0)$.

A figura 4.7 traz o ajuste da curva de decaimento da área da bacia segura. A curva se ajusta muito bem a uma lei de potência dada por $S = 0,55474 \times (\frac{F_0}{F_{0c}})^{-0,90712}$, ver figura 4.7-a. Na parte b desta figura mostra-se o ajuste linear da curva logarítmica.

A redução da área da bacia segura pode ser observada na figura 4.8 [9]. Nota-se que, à medida que o forçamento vai aumentando, os “dedos” incursivos invadem a bacia segura do sistema até que ela desapareça completamente. Quanto menor é a área da bacia segura, maior é a probabilidade de se encontrar condições iniciais que levarão o navio a emborcar.

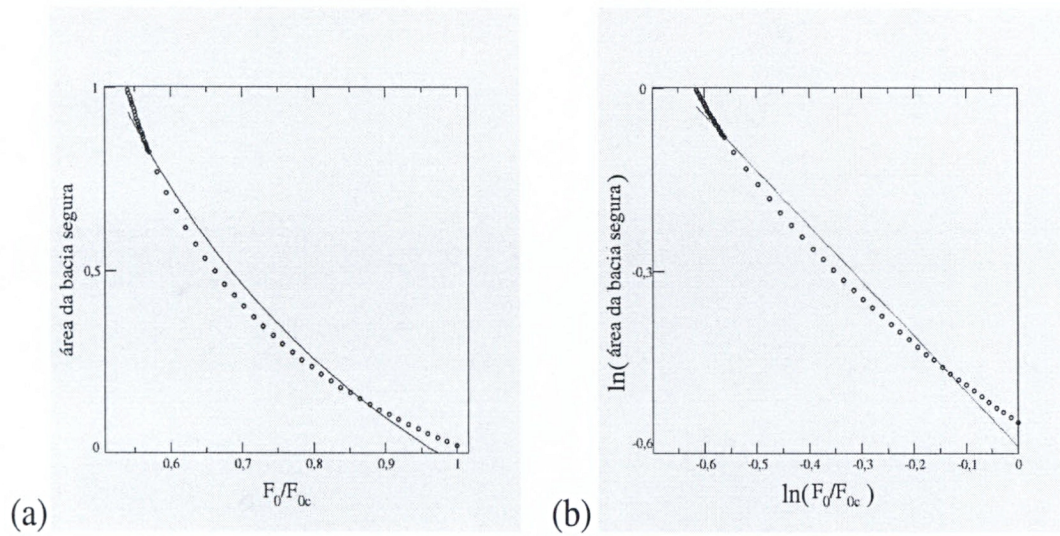


Figura 4.7: Ajuste do decaimento da distribuição de condições iniciais que convergem para o atrator. Os parâmetros são os mesmos da fig 4.6

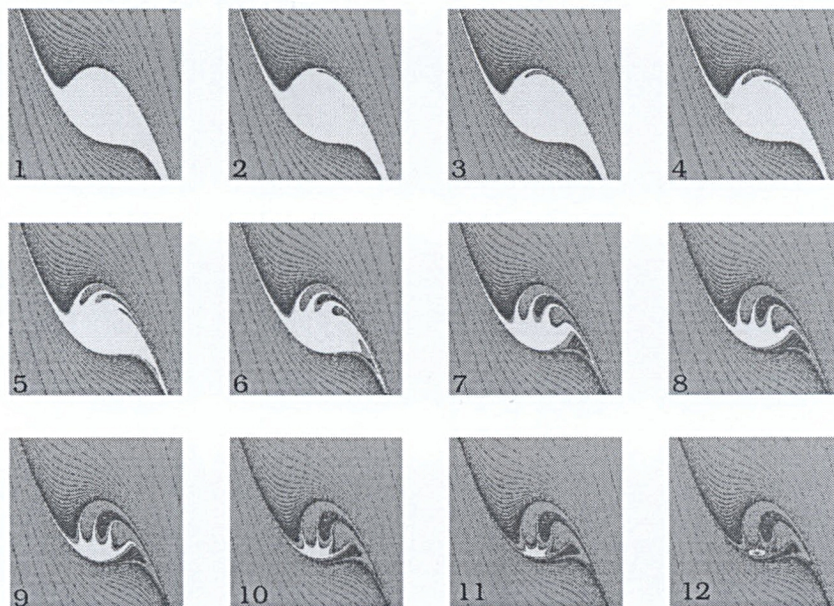


Figura 4.8: Sequência de erosão nos mapas de Poincaré da bacia segura para o oscilador estudado neste trabalho, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$. O valor de forçamento F_0 é acrescido com passos de 0,06, em ordem crescente do índice de cada quadro, à partir de 0,0, sendo assim no quadro 1 $F_0 = 0,0$ e no quadro 12 $F_0 = 0,72$.

4.5 Comportamento das Fronteiras de Bacia.

Para o sistema não-forçado e não-amortecido, a fronteira entre a bacia segura e as bacias de saída são suaves e o comportamento do sistema é similar ao de um pêndulo simples: há um ponto de equilíbrio estável elíptico e cada condição inicial fica aprisionada em um órbita fechada no interior do poço de potencial, conforme figura 4.9.

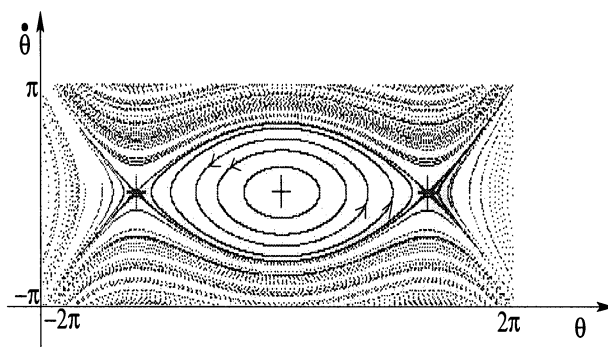


Figura 4.9: Retrato de fase para o caso conservativo. O ponto fixo é um ponto elíptico. Parâmetros $\nu = 0,0$, $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, $F_0 = 0,0$, $\rho = 0,0$, cada órbita elíptica corresponde ao corte estroboscópico da trajetória de uma dada condição inicial.

Quando se adiciona amortecimento ao sistema, o ponto de equilíbrio estável elíptico se transforma em um foco estável para o qual as condições iniciais que antes pertenciam às órbitas fechadas, são atraídas descrevendo trajetórias espiraladas, conforme fig 4.10. Observa-se nesta figura que a fronteira entre a bacia segura e as bacias de saída ainda são suaves.

Ao adicionarmos um forçamento as características da fronteira vão sofrendo transformações. Até $F_0 < F_0^*$ as fronteiras ainda são suaves mas, para valores maiores que F_0^* as fronteiras se tornam fractais (fronteiras de Wada) via um processo de erosão da bacia segura que tem início com a ocorrência de uma bifurcação por duplicação de período [4]. Esta bifurcação recebe um nome especial *bifurcação homoclínica* pois ela ocorre no momento em que as variedades invariantes estável e instável de um ponto de sela pertencente à fronteira se cruzam (cruzamento homoclínico) conforme figura 4.11.

O conceito de fronteira fractal está relacionado com a complexidade da estrutura da fronteira e com o conceito de auto-similaridade do espaço de fase do

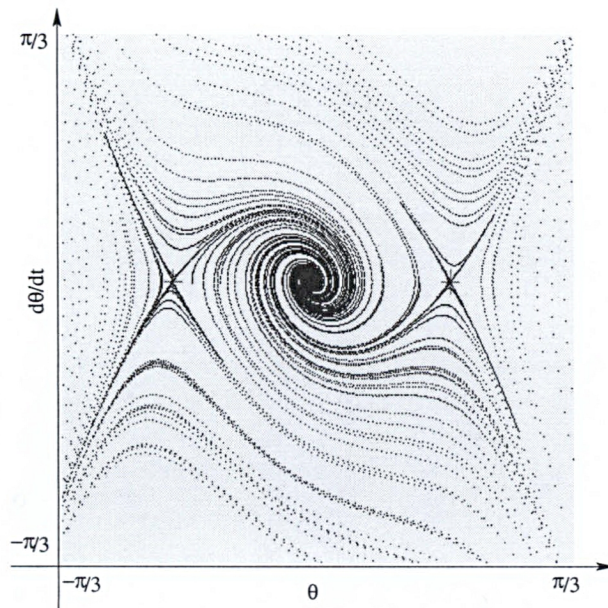


Figura 4.10: Retrato de fase $(\theta, \dot{\theta})$ para o caso dissipativo. Foram traçadas na ordem de 200 condições iniciais aleatórias, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, $\rho = 0,0$, $F_0 = 0,0$.

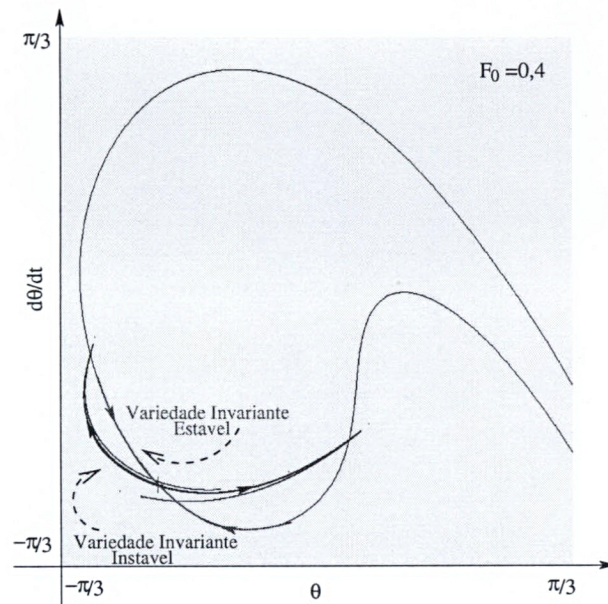


Figura 4.11: Cruzamentos homoclínicos, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, $\rho = 0,245$, $F_0 = 0,4$.

sistema [6] [1]. A propriedade de auto-similaridade do espaço de fase, por sua vez, está relacionada com a invariância de escala do espaço de fase, isto quer dizer que, o espaço de fase terá sempre as mesmas características topológicas, em todas as regiões, seja qual for a escala utilizada na sua construção. Em outras palavras, quando se amplia uma pequena região do espaço de fase de um sistema que apresenta uma fronteira fractal, esta ampliação será semelhante ao espaço de fase inteiro.

Uma fronteira fractal é a fronteira entre duas bacias cuja dimensão não é inteira. Para um sistema que apresenta três ou mais bacias, este conceito é estendido para o conceito de fronteira de Wada. Uma fronteira de Wada é, então, a fronteira que separa pelo menos, três bacias simultaneamente e cuja dimensão é não-inteira. De outra forma, uma fronteira de Wada pertence simultaneamente à, no mínimo, três bacias coexistentes no sistema e cuja dimensão é não-inteira [9].

Como o conceito de fronteira de Wada é uma extensão do conceito de fronteira Fractal, esta também apresenta a propriedade de auto-similaridade. A figura 4.12 mostra, para o sistema estudado aqui, a presença de fronteiras de Wada.

Nota-se nestas figuras, a clara invariância de escala do espaço de fase do sistema, embora a estrutura da bacia segura seja uma estrutura bastante fina e, por isso, em algumas regiões seja difícil de observá-la.

De acordo com a figura 4.13, nota-se que os cruzamentos homoclínicos ocorrem para o ponto de sela contido na fronteira do atrator concomitantemente à bifurcação por duplicação de período da órbita de período 1 para a órbita de período 2 ($F_0 = F_0^* = 0,4$).

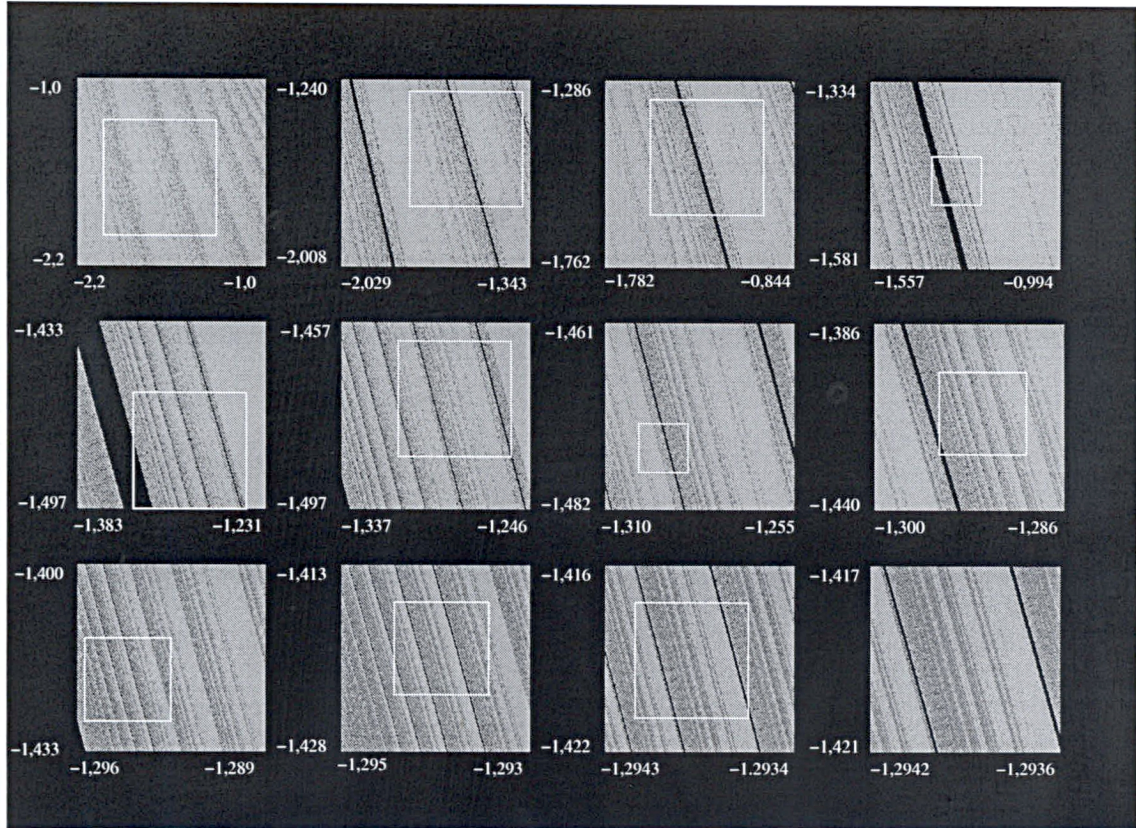


Figura 4.12: Sequência de fronteiras de Wada para o oscilador estudado neste trabalho, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\omega^2 = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $\rho = 0,245$, $\phi = 1,0$, $F_0 = 0,42$, e condições iniciais $(\theta; \dot{\theta}) = (1; 0)$. A escala do primeiro quadro desta figura é da ordem de 1 nos dois eixos, enquanto que o último quadro tem escala na ordem de 10^{-4} em θ e 10^{-3} em $\dot{\theta}$.

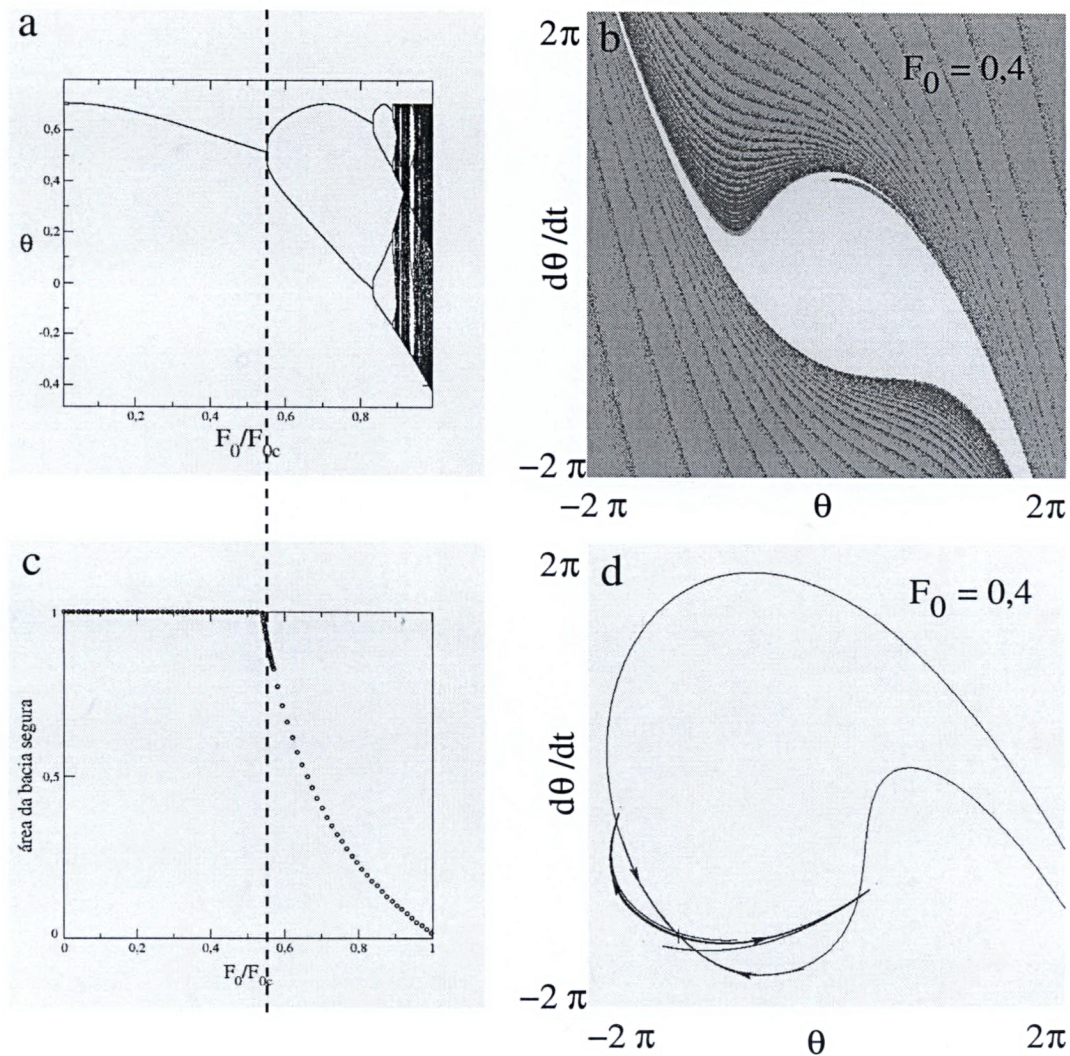


Figura 4.13: Comparação entre os resultados. Comparando os quadros *a* e *c* observa-se que a erosão da bacia segura começa no momento em que acontece a primeira bifurcação homoclínica do ponto fixo do sistema e, por outro lado no quadro *b*, observa-se que é neste mesmo momento que surgem os infinitos “dedos” fractais incursivos e, no quadro *d*, os infinitos cruzamentos homoclínicos do ponto de sela pertencente à fronteira do atrator.

4.5.1 Evidências da Formação de Sela Caótica.

As variedades invariantes estável e instável do ponto de sela contido na fronteira da bacia segura se cruzam infinitas vezes conforme as figuras 4.14 e 4.15, formando uma espécie de rede de cruzamentos homoclínicos, a qual recebe o nome de *conjunto caótico não-atrativo* ou *sela caótica*.

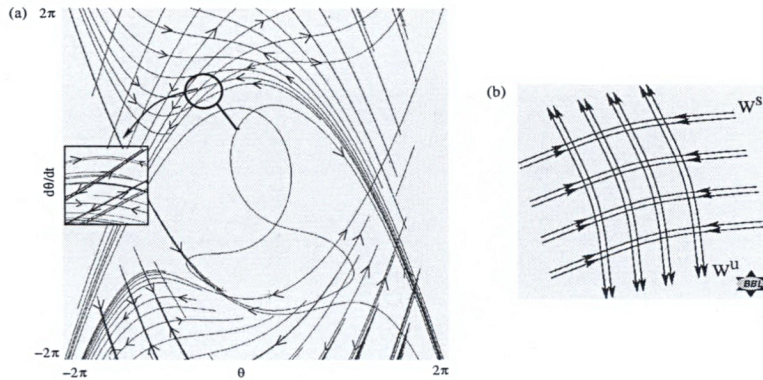


Figura 4.14: Parte (a): cruzamentos homoclínicos do sistema, formação da sela caótica, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, $\rho = 0,245$, $F_0 = 0,7265$. Parte (b): desenho esquemático da formação de uma sela caótica.

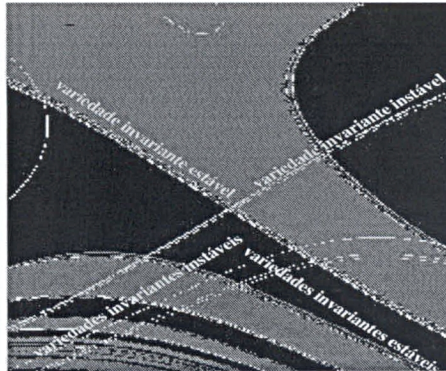


Figura 4.15: Formação do conjunto caótico não-atrativo, por cruzamentos homoclínicos, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\alpha = 1,0$, $\omega^2 = 1,0$, $\rho = 0,245$, $F_0 = 0,7265$.

4.5.2 Crise de Fronteira.

É possível verificar, entre os resultados a ocorrência de uma crise de fronteira no sistema, para um valor de $F_0 \approx 0.726$, denotado por *valor de crise* F_{0c} . A figura 4.16 mostra o retrato de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do sistema. O atrator (em vermelho) colide com uma órbita periódica instável (cruz amarela), sobre a fronteira que separa a bacia segura das bacias de saída do sistema. A região em magenta representa as condições iniciais que convergem para o atrator, é a bacia segura; em azul escuro, as condições iniciais que escapam para o infinito por um dos lados do atrator e em azul turquesa, as condições iniciais que escapam para o infinito pelo outro lado, as duas bacias de saída.

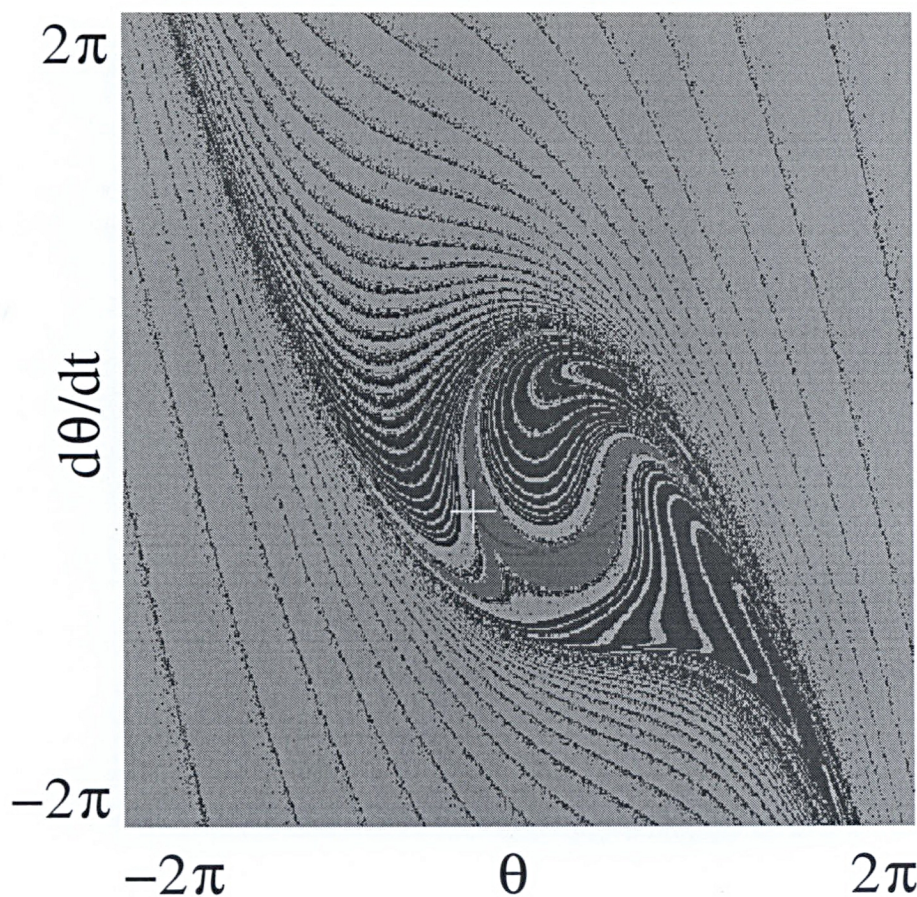


Figura 4.16: Colisão do atrator com uma órbita periódica instável contida na fronteira de sua bacia segura, com parâmetros $\nu = 0,5$, $\omega^2 = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $\rho = 0,245$, $\phi = 1,0$ e $F_0 = 0,726$.

Após a crise de fronteira o atrator e sua bacia de atração são completamente destruídos como mostra a figura 4.17.

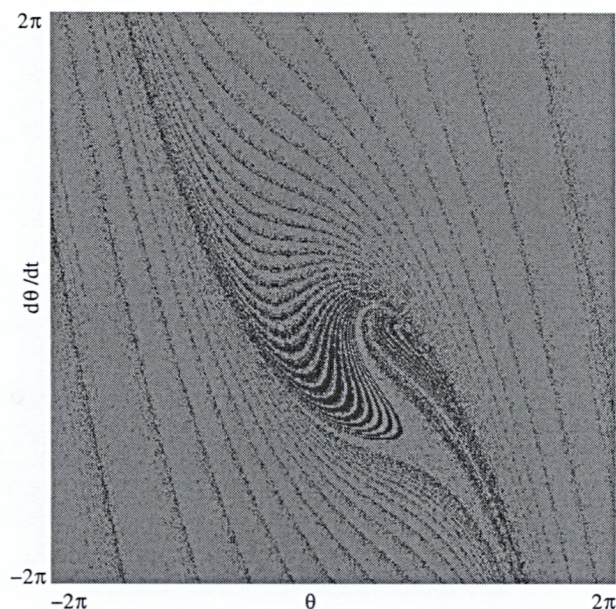


Figura 4.17: Atrator e sua bacia de atração destruídos. F_0 ligeiramente maior que F_{0c} .

Nota-se que após a crise de fronteira, as condições iniciais que antes pertenciam à bacia segura e que agora também escapam para o infinito, orbitam em torno da região onde havia o atrator durante um certo tempo, antes de escaparem. Este tempo em que as condições iniciais ficam “procurando” o atrator é dito *transiente caótico*. O transiente caótico destas condições iniciais é longo o suficiente para que se forme uma espécie de “fantasma” da bacia de atração.

4.6 Estimativas Quantitativas.

Nesta secção mostrar-se-á a influência da força externa sobre algumas propriedades quantitativas do sistema, com o objetivo de complementar a análise topológica feita anteriormente.

4.6.1 Expoentes de Lyapunov.

A computação dos expoentes de Lyapunov do sistema, confirma os resultados anteriores para o intervalo $0, 0 \leq F_0 < 0,726$. A figura 4.18 mostra o gráfico dos dois expoentes de Lyapunov do sistema, revelando regimes periódicos e regimes caóticos, para o intervalo acima citado. O regime caótico é caracterizado pela presença de, pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

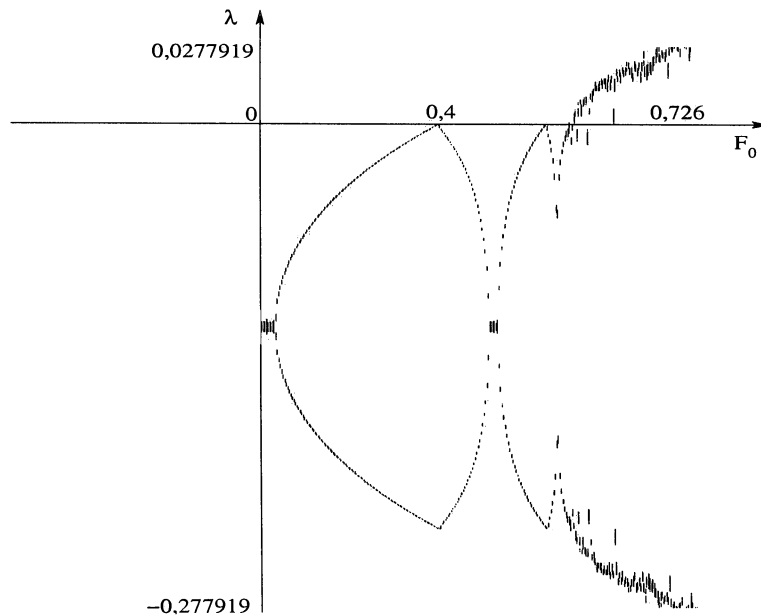


Figura 4.18: Gráfico dos expoentes de Lyapunov do sistema.

4.6.2 Dimensões de Correlação e de Lyapunov.

O cálculo da dimensão de correlação de um atrator caótico, também é uma técnica útil para demonstrar a redução da bacia segura de um sistema após a ocorrência de uma crise de fronteira, uma vez que a dimensão de correlação é uma medida do atrator. A parte (a) do gráfico da figura 4.19 mostra a variação da dimensão de correlação do atrator caótico do sistema estudado neste trabalho, para o intervalo $0, 0 < F_0 < 0,7$. Esta figura revela o decaimento da dimensão de correlação do atrator caótico do sistema à medida que o forçamento se aproxima do valor de crise $F_{0c} = 0,726$.

Segundo a conjectura de Kaplan-Yorke, a dimensão de Lyapunov de um sistema é igual à sua dimensão de informação: $D_L = D_1$ e, de acordo com o espectro

de dimensões $D_0 \geq D_1 \geq D_2$, então $D_2 \leq D_L$. A parte (b) do gráfico da figura 4.19 mostra o cálculo da dimensão de Lyapunov do sistema e nota-se que D_L é ligeiramente maior que D_1 . Nota-se, também que a dimensão de Lyapunov é nula para valores de forçamento abaixo do valor crítico $F_0^* = 0,4$. Logo após este valor, quando ocorre o primeiro cruzamento homoclínico do sistema, o atrator passa a ser fractal e a dimensão de Lyapunov deixa de ser nula.

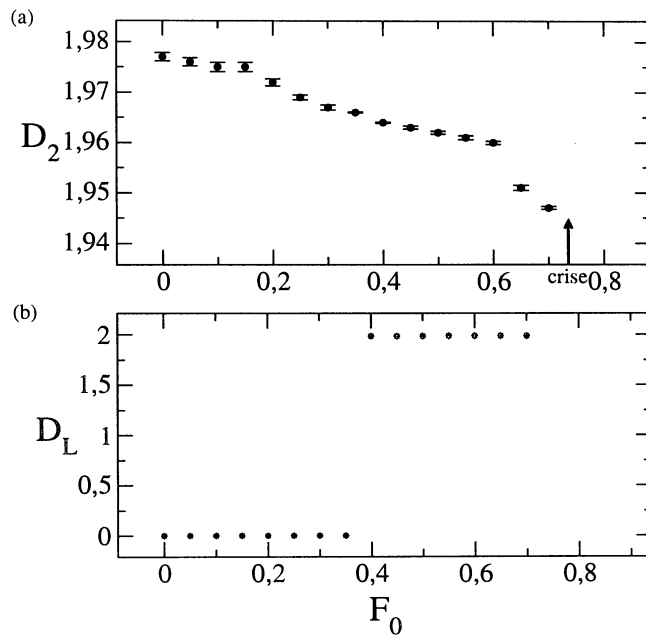


Figura 4.19: Gráfico (a): Cálculo da dimensão de correlação do atrator. Gráfico (b): Cálculo da Dimensão de Lyapunov do atrator. Figuras construídas para a condição inicial $(\theta; \dot{\theta}) = (0; 0)$ e parâmetros $\nu = 0,5$, $\omega^2 = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $\rho = 0,245$, $\phi = 1,0$. Para cada ponto gerado no gráfico foi usado um valor diferente para o parâmetro de forçamento no intervalo $0 \leq F_0 < 0,7$, com passos de 0,005.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros.

Do ponto de vista da Dinâmica Não-Linear, nota-se uma grande complexidade no estudo analítico da sua estabilidade. Uma forma possível de se estudar um problema de alta complexidade é recorrer à técnicas computacionais de simulação numérica, afim de encontrar no sistema, regimes de parâmetros em que seja possível analisar a dinâmica do sistema.

Os resultados aqui apresentados, mostram que o sistema apresenta certas propriedades, comprovando ser um sistema rico, no que se diz respeito ao domínio da dinâmica não-linear.

A comprovada presença de fronteiras de Wada, pode implicar na formação de selas caóticas. Estes dois conceitos, por sua vez, podem implicar em ocorrência de caos [9].

O atrator caótico é comprovado pelo diagrama de bifurcações do sistema, figura 4.1 e pelo gráfico dos Expoentes de Lyapunov, figura 4.18. Para que o sistema apresente comportamento caótico é necessário e suficiente que um dos seus expoentes de Lyapunov seja positivo [14]. Na figura 4.18 observa-se que um dos Expoentes de Lyapunov do sistema é positivo para valores do forçamento no intervalo $0,6534 \leq F_0 \leq 0,726$. O diagrama de bifurcações, figura 4.1, mostra uma bifurcação por duplicação de período em $F_0 = 0,4$, dito valor crítico F_0^* .

O sistema se apresenta periódico até $F_0 \approx 0,65$, quando aparece o atrator caótico. Estudando o comportamento das variedades invariantes estável e instável de um ponto de sela pertencente à fronteira do atrator, observa-se que para $F_0 \approx F_0^* \approx 0,4$ aparecem infinitos cruzamentos homoclínicos no sistema e é nesse mesmo momento que a bacia segura do sistema começa a sofrer uma erosão. Esta erosão acontece devido à acumulação logarítmica das órbitas sobre a variedade invariante

estável. Considerando iterações para trás, quanto mais a variedade invariante estável se afasta do ponto de sela mais delgada fica, transformando-se em filamentos extremamente finos que, ao espiralarem em torno da bacia segura, invadem-na na forma de finos “dedos” incurivos.

As variedades invariantes estável e instável do ponto de sela contido na fronteira do atrator cruzam-se infinitas vezes (conforme figura 4.14). Estes infinitos cruzamentos de filamentos extremamente finos são responsáveis pela formação de uma sela caótica no sistema. A presença da sela caótica provoca transientes muito longos para órbitas iniciadas em pontos próximos à variedade invariante estável e, quando a bacia segura é erodida por completo, aparece em seu lugar uma espécie de “fantasma” gerado pelas órbitas cujos transientes são longos.

No momento de completa erosão da bacia segura o sistema apresenta uma crise de fronteira. Para o regime de parâmetros no qual $\nu = 0,5$, $\omega^2 = 1,0$, $\alpha = 1,0$, $\rho = 0,245$, $\phi = 1,0$ e $F_0 = 0,726$, este último chamado de valor de crise F_{0c} , o atrator caótico e sua bacia de atração são súbita e completamente destruídos, caracterizando uma crise de fronteira. Esta crise foi observada pelo software *Dynamics* e está na figura 4.16, na qual observa-se a colisão entre o atrator caótico e o ponto de sela contido na sua fronteira.

As fronteiras de Wada aparecem no sistema como uma consequência da acumulação logarítmica de órbitas sobre as variedades invariantes estável e instável do ponto de sela contido na fronteira do atrator. A bacia segura e as duas bacias de saída fazem fronteiras mútuas entre si, conforme a figura 4.12, na qual observa-se a propriedade de auto-similaridade do espaço de fase do sistema, entre a primeira e a última “foto” há uma diferença de escala na ordem de 10^{-4} e ainda assim, as características do espaço de fase são idênticas. As fronteiras de Wada começam a aparecer no sistema após a primeira bifurcação por duplicação de período, chamada de bifurcação homoclínica, pois ocorre no momento em que acontecem os infinitos cruzamentos homoclínicos do ponto de sela contido na fronteira do atrator.

As propriedades comprovadas neste trabalho aparecem devido à variação dos parâmetros do sistema. Sendo assim, a complexidade do sistema é algo condicionado a uma combinação de valores de parâmetros. O navio emborca quando atinge um conjunto de parâmetros no qual o sistema é caótico para um determinado conjunto de condições iniciais. A idéia de que o navio deva emborcar quando o ângulo de oscilação excedesse um valor máximo é verdadeira porém, se faz necessário estudar as condições em que o navio atinge e excede esta angulação máxima, que é basicamente

o que foi feito aqui. O acontecimento de eventos que ocorrem para o ponto fixo e para o ponto de sela contido na fronteira do atrator, para o mesmo valor do forçamento, parecem se entrelaçar, como crise de fronteira, formação de sela caótica, cruzamentos homoclínicos, bifurcação homoclínica e parecem caracterizar as condições em que o navio excede o ângulo máximo de oscilação e emborca.

Nos estudos realizados por Thompson [4] e Ding [5] aparecem resultados à cerca de cruzamentos homoclínicos, erosão da bacia segura e técnicas de controle de caos. Os resultados do trabalho aqui apresentado aparecem como complemento dos resultados dos autores acima citados, no estudo de fronteiras de Wada, acumulação logarítmica e formação de sela caótica no sistema, algum detalhamento sobre erosão da bacia segura e a análise da relação entre estas propriedades.

Neste trabalho, mostrou-se que o movimento de um navio, sujeito às variadas condições ambientais, exibe um comportamento caótico para determinado conjunto de parâmetros. Existem dois aspectos que não foram abordados neste trabalho e que merecem atenção:

- 1- Estudar o acoplamento de dois ou de n sistemas iguais, caracterizando o movimento de uma frota;
- 2- Estudar uma possível técnica de controle de caos para o sistema.

Bibliografia

- [1] C.Grebogi, E.Ott, J.A.Yorke. Chaos, Strange Attractors and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics. *Science*, 238:632–638, 1987.
- [2] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, 1991.
- [3] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A. Yorke. *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [4] J.M.T.Thompson, R.C.T.Rainey, M.S.Soliman. Ship Stability Criteria Based on Chaotic Transients from Incurative Fractals. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 332:149–167, 1990.
- [5] M.Ding, E.Ott, C.Grebogi. Crisis Control: Preventing Chaos-Induced Capsizing of a Ship. *Physical Review E*, 50(5):4228–4230, 1994.
- [6] F.C.Moon, G.X.Li. Fractal Basin Boundaries and Homoclinic Orbits for Periodic Motion in a Two-Well Potential. *Physical Review L*, 55(14):1439–1442, 1985.
- [7] E.G.Gwinn, R.M.Westervelt. Fractal Basin Boundaries and Intermittency in the Driven Damped Pendulum. *Physical Review A*, 33(6):4143–4155, 1986.
- [8] Z.Toroczkai, G.Károlyi, A.Pèntek, T.Tèel T, C.Grebogi, J.A.Yorke. Wada Dye Boundaries in Open Hydrodynamical. *Physica A*, 239:235–243, 1997.
- [9] J.Aguirre, J.C.Vallejo, M.A.F.Sanjuan. Wada Basins and Chaotic Invariant Sets in the Hénon-Heiles System. *Physical Review E*, 65:1621–16211, 2001.
- [10] L.Poon, J.Campos, E.Ott, C.Grebogi. Wada Basin Boundaries in Chaotic Scattering. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(2):251–265, 1996.
- [11] H.E. Nusse, J.A. Yorke. *Dynamics: Numerical Explorations*. Manual do Programa Editado por IBM, 2ª Edição, 1997.

- [12] S. Wiggins. *Chaotic Transport in Dynamical System*. Springer-Verlag, 1980.
- [13] David G. Luenberger. *Introduction to Dynamics Systems - Teory, Models and Applications*. Stanford University.
- [14] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [15] Baker, Gollub. *Chaotic Dynamics, an Introduction*. Cambridge, 1996.
- [16] Ying-Cheng Lai, C.Grebogi, J.A.Yorke. Sudden Change in the Size of Chaotic Attractors: How does it Occur. *Applied Chaos, capítulo 19*, John Wiley Sons. Inc(University of Mariland):441–455, 1992.
- [17] S. Neil Rasband. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. Brigham Young University, 1990.
- [18] G.Nicolis. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge University Press, 1995.
- [19] H.E.Nusse, J.A.Yorke. Basins of Attraction. *Science*, 271:1376–1380, 1996.
- [20] S.W.McDonald, C.Grebogi, E.Ott, J.A.Yorke. Fractal Basin Boundaries. *Physica 17D*, 17(17):125–153, 1985.
- [21] U.Feudel, C.Grebogi, L.Poon, J.A.Yorke. Dynamical Properties of a Simple Mechanical System with a Large Number of Coexisting Peiodic Attractors. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9:171–180, 1998.
- [22] J.C.P.Coninck. *A Dinâmica Não-Linear do Modelo de Quatro Ondas*. UFPR, Curitiba, 2002. Dissertação de Mestrado.
- [23] C.Grebogi, E. Ott, J.A.Yorke. Crises, Sudden Changes in Chaotic Atractors and Transient Chaos. *Physica 7D*, 7(7):181–200, 1983.
- [24] I.Senjanovic, Y.Fan. Numerical Simulation of a Ship Capsizing in Irregular Waves. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5(5):727–737, 1995.
- [25] M.Ding, E.Ott, C.Grebogi. Controlling Chaos in a Temporally Irregular Environment. *Physica D*, 74:386–394, 1994.
- [26] S. Motora. Stability of Ships and Ocean Vehicles. *Proc. 2nd Int. Conf. on Stability of Ships*, Tokio(Japan), 1982.

- [27] M.S. Soliman, J.M.T. Thompson. Integrity Measures Quantifying the Erosion of Smooth and Fractal Basins of Attraction. *J. Sound Vib*, 135:453–475, 1989.
- [28] H.Goldstein. *Mecanica Clasica*. Aguilar, S.A. de Ediciones, 1963.
- [29] M.S.Soliman. Fractal Erosion of Basins of Attraction on Coupled Non-Linear Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 182(5):729–740, 1995.
- [30] R.C.T. Rainey, J.M.T. Thompson. The Transient Capsize Diagram - A New Method of Quantifying Stability in Waves. *J. Ship Res.*, 1990.
- [31] Abdi Kukner. A View on Capsizing under Direct and Parametric Wave Excitation. *Ocean Engng*, 25(8):677–685, 1998.
- [32] M.S.T.Freitas, R.L.Viana, C.Grebogi. Multistability, Basin Boundary structure, and Chaotic Behavior in a Suspension Bridge Model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, in press.
- [33] M.S.T.Freitas, R.L.Viana, C.Grebogi. Erosion of the Safe Basin for the oscillations of a suspension bridge. *submitted to Chaos, Solitons and Fractals*.