

WANDA CRISTINA CAMARGO DE MENEZES

SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA
INVERSO DA GEODÉSIA.
ESTUDO COMPARATIVO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1985

SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA INVERSO DA GEODÉSIA

ESTUDO COMPARATIVO

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

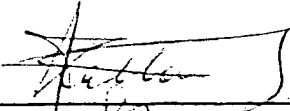
por

WANDA CRISTINA CAMARGO DE MENEZES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ.

1985


BANCA EXAMINADORA:



Prof. EDUARDO RATTÓN - Orientador



Prof. ERNEST ULRICH FISCHER



Prof. ÁLVARO DOUBEK

R E S U M O

O objetivo do presente trabalho é analisar métodos para a solução do Problema Inverso da Geodésia, sendo expostos: o método iterativo de Helmert, um método não-iterativo, o de Sodano, e uma proposta de iterações pelo método de Newton para o método de Helmert.

A B S T R A C T

The objective of the present work is to analyse methods for the solution of the Inverse Problem of Geodesics comparing a non-interactive method, the Sodano's, with the original proposal of Helmert and an interactive proposal of the procedure of Helmert through the algorithm of Newton or of the Tangents.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

CONCEITOS PRELIMINARES

1.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS	01
1.1.1	SISTEMA CARTESIANO GEODÉSICO	01
1.1.2	SISTEMA ELIPSOIDAL	02
1.1.3	AZIMUTE	03
1.1.4	LATITUDE GEOCÊNTRICA	03
1.1.5	LATITUDE REDUZIDA	04
1.2	CURVAS NA SUPERFÍCIE DO ELIPSÓIDE - DEFINIÇÃO DE GEODÉ- SICA	05
1.3	PROBLEMA DIRETO E INVERSO DA GEODÉSIA	06
1.4	PROBLEMA INVERSO DA GEODÉSIA	08
1.4.1	MÉTODO DE RESOLUÇÃO	08

CAPÍTULO II

MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

2.1	DESCRIÇÃO	11
2.2	ORDEM DE CONVERGÊNCIA DE UM MÉTODO ITERATIVO	12
2.3	O MÉTODO DE NEWTON	16
2.4	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE NEWTON	18
2.5	ERRO NO MÉTODO DE NEWTON	22
2.6	DETERMINAÇÃO DO ERRO ABSOLUTO	24

CAPÍTULO III

TRÊS MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

3.1 MÉTODO DE HELMERT	26
3.2 MÉTODOS NÃO-ITERATIVOS	30
3.3 MÉTODO NÃO-ITERATIVO DE SODANO	32
3.4 MÉTODO DE HELMERT ADAPTADO PARA ITERAÇÕES ATRAVÉS DO ALGORITMO DE NEWTON	39
3.4.1 OBTENÇÃO DE σ'_0	40
3.4.2 OBTENÇÃO DE β'_0	40
3.4.3 OBTENÇÃO DE σ'	42
3.4.4 OBTENÇÃO DE A', B' e C'	43
3.4.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON	44

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1. COMPARAÇÃO COM EXEMPLO DE BIBLIOGRAFIA	45
4.2. ALGUNS CASOS ANALISADOS	48
4.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA	48

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

5.1 CONCLUSÕES	57
BIBLIOGRAFIA	60

CAPÍTULO I

CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

1.1.1 SISTEMA CARTESIANO GEODÉSICO

Define-se sistema cartesiano geodésico como um terço ortogonal dextrógiro, com origem no centro do elipsóide de referência; adotando-se um semimeridiano como origem ($P_N G P_S$), a direção OX é estabelecida pela interseção deste com o plano equatorial (qq'); e a direção OZ pelo eixo menor do elipsóide, com orientação positiva para o polo norte.

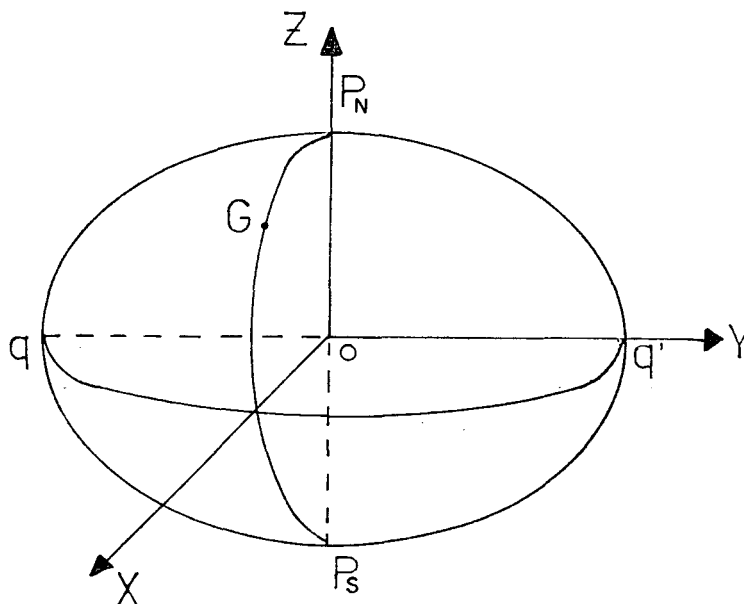


FIG. 01

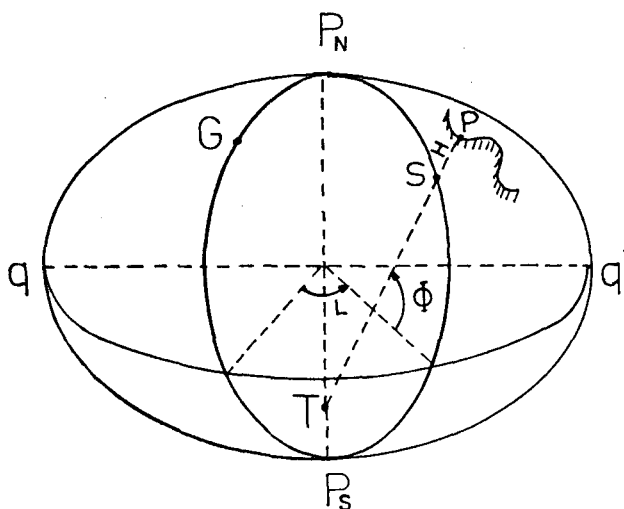
1.1.2 SISTEMA ELIPSOIDAL (L, ϕ, H)

fig.02

As coordenadas geodésicas do ponto P (Fig.2) são as seguintes:

- a longitude, L , que é o ângulo plano do diedro que tem origem na reta que contém os polos norte e sul, e cujas faces são os semiplanos caracterizados pelos semimeridianos origem e do ponto P, variando de 0 a 2π ; positivamente para o oriente.

- a latitude, ϕ ; que é o ângulo que o plano equatorial forma com a normal ao elipsóide em P, orientada para o exterior, ângulo este que varia de $-\pi/2 (P_S)$ a $+\pi/2 (P_N)$;

- a altitude geométrica H, que é a distância do ponto P ao elipsóide, contada sobre a normal a este naquele ponto.

1.1.3 AZIMUTE

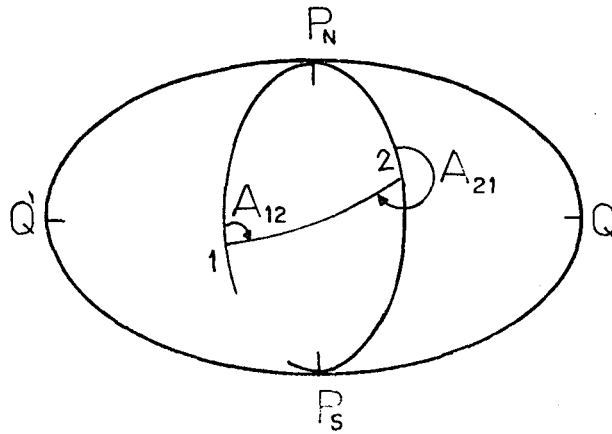


fig.03

A figura 3 representa uma direção 1-2 sobre o elip-sóide e o seu azimute geodésico A_{12} , que pode ser definido como o ângulo que o meridiano do ponto 1 forma com a direção 1-2, contado do norte, por leste. A_{21} é o azimute da direção 2-1, ou o contra-azimute da direção 1-2. (5)

1.1.4 LATITUDE GEOCÊNTRICA

Latitude geocêntrica, ψ , de um ponto P sobre o elip-sóide é o complemento do ângulo que o raio vetor deste ponto forma com o eixo OZ (11)

1.1.5 LATITUDE REDUZIDA

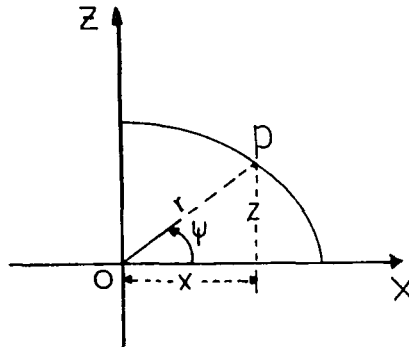


fig.04

Latitude reduzida, β , também chamada latitude paramétrica, é o ângulo medido no centro de uma esfera, tangente ao elipsóide ao longo do equador, conforme figura 5

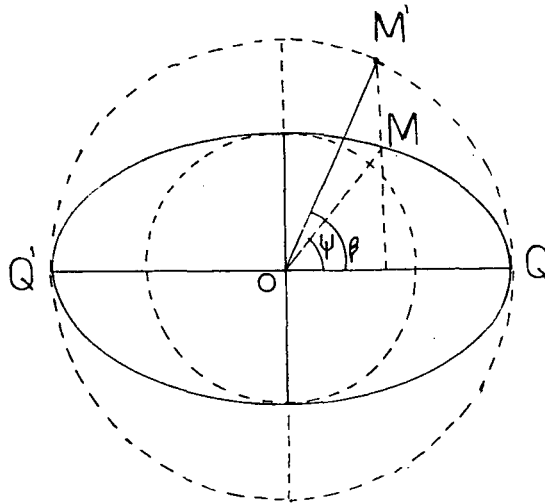


fig.05

O ângulo β é medido entre o plano do equador e o raio vetor do ponto M' , interceptado na esfera pela projeção do ponto M .

Entre as latitudes anteriormente definidas, subsistem as relações:

$$\operatorname{tg}\psi = (1 - e^2)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}\beta = (1 - e^2) \operatorname{tg}\phi, \quad (1.1.5.1)$$

onde e = excentricidade do elipsóide.

1.2 CURVAS NA SUPERFÍCIE DO ELIPSÓIDE - DEFINIÇÃO DE GEODÉSICA.

Admita-se um triângulo diferencial limitado por um meridiano, um paralelo e um segmento de geodésica segundo a figura 6.

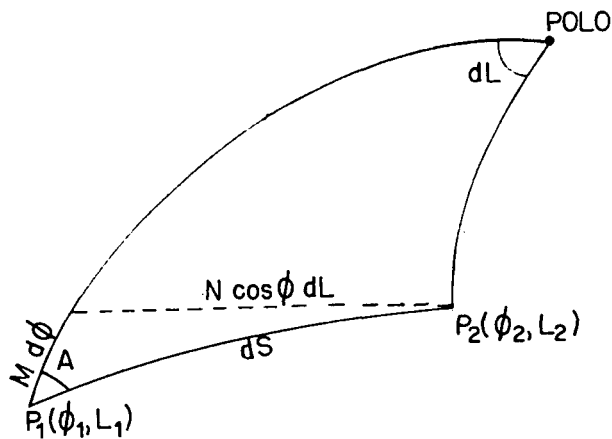


fig.06

Neste

$$dS \cdot \cos A = Md\phi,$$

$$dS \cdot \operatorname{sen} A = N \cos \phi dL, \quad (1.2.1)$$

e portanto

$$\operatorname{tg} A = \frac{N \cos \phi dL}{Md\phi};$$

e finalmente

$$(dS)^2 = (Md\phi)^2 + (N \cos \phi dL)^2. \quad (1.2.2)$$

Supondo na geodésica a longitude como função da latitude, e designando por $r = N \cos \phi$ o raio do paralelo, de (1.2.2) obtém-se:

$$ds = \left| M^2 d\phi^2 + r^2 dL^2 \right|^{1/2} ;$$

$$ds = \left| M^2 \cdot \left(\frac{d\phi}{dL} \right)^2 + r^2 \right|^{1/2} \cdot dL ;$$

donde

$$s = \int_A^B \left| M^2 \left(\frac{d\phi}{dL} \right)^2 + r^2 \right|^{1/2} dL , \quad (1.2.3)$$

e a curva definida por (1.2.3) é uma geodésica, quando o valor da integral é um mínimo.

1.3 PROBLEMA DIRETO E INVERSO DA GEODÉSIA

As coordenadas geodésicas, latitude e longitude, sendo conhecidas sobre um ponto, e conhecidas adicionalmente a distância e o azimute em relação a um segundo ponto, permitem o cálculo das coordenadas do segundo ponto e o azimute da direção do segundo para o primeiro ponto. Este é o chamado problema direto. O problema geodésico inverso é a situação em que as coordenadas dos pontos, inicial e final, são conhecidas e deseja-se conhecer o azimute de 1 para 2, o de 2 para 1 e a distância entre os dois pontos.

A solução para ambos os problemas expostos consiste basicamente na resolução do triângulo elipsoidal mostrado na figura 7.

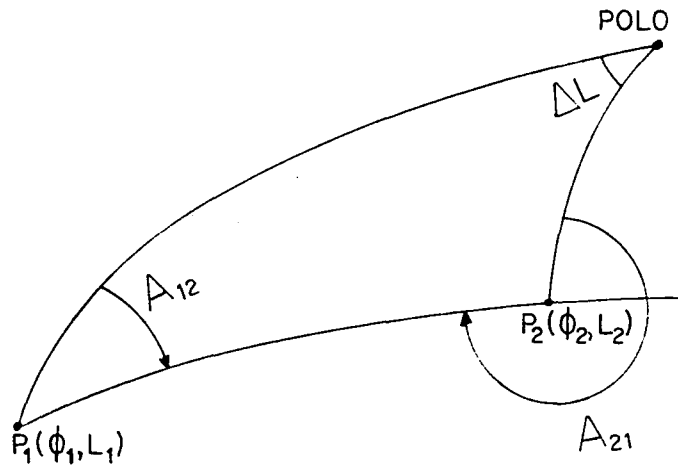


fig.07

Existem muitas soluções para esses problemas; e costumam receber tratamento distinto segundo se trate de pequenas ou grandes distâncias.

Deve-se observar que existe uma peculiaridade na geodésica que se aproxima de 180° em arco, ou seja, meia volta ao mundo. Veja-se o caso de dois pontos no equador, separados por 180° em longitude. Se esses pontos estivessem numa esfera, existiria um número infinito de círculos máximos através de ambos, e todos do mesmo comprimento. No elipsóide, contudo, há somente dois arcos correspondentes a círculos máximos passantes por dois pontos afastados de 180° . Todavia, o arco meridiano é menor que o arco equatorial através dos dois pontos, e é, conseqüentemente, a verdadeira geodésica, ou seja, a linha mais curta entre os pontos.

Entretanto, se dois pontos estão situados perto do equador e são separados por quase 180° de longitude, existe uma certa ambigüidade quanto à geodésica entre eles.

Para eliminar essa dificuldade houve tentativas de dividir-se a linha em duas partes no ponto de latitude mais alta (onde o azimute é 90°), como exposto em (10). Isso não é eficiente, no entanto, no caso desse ponto ser desconhecido.

De maneira geral, o problema de linhas longas tem sido abordado pelo uso de seções planas, pois a geometria é supostamente mais fácil de ser entendida do que aquela das curvas geodésicas em três dimensões. A diferença em comprimento entre geodésica e curva plana é muito pequena, mas a diferença em azimute pode ser apreciável para linhas acima de 800 quilômetros (10).

1.4 PROBLEMA INVERSO DA GEODÉSIA

1.4.1 MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Para resolver o problema inverso, todos os métodos conhecidos representam o elipsóide sobre outra superfície, que pode ser plana, onde em geral se adota projeções conformes, ou esférica, como por exemplo a representação sobre a esfera de JACOBI. (Esfera que tangencia o elipsóide no equador). Uma classificação mais detalhada pode ser vista em (4).

A representação sobre a esfera de JACOBI conserva azimutes, porém modifica latitudes e longitudes, e é também chamada método da esfera paramétrica.

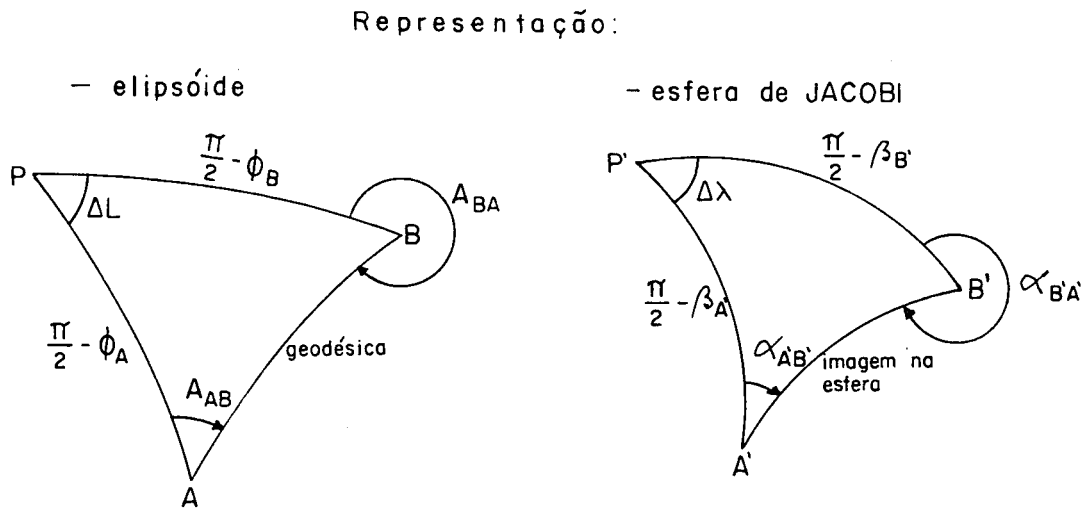


fig.08

onde

ϕ = latitude no elipsóide

β = latitude sobre a esfera.

De acordo com a equação de Laplace, para latitudes, pode-se escrever para a esfera e o elipsóide (ver (3)).

$$\text{sen } \beta \cdot d\lambda = \text{sen } \phi \cdot dL ;$$

$$d\lambda = \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \beta} \cdot dL , \quad (1.4.1.1)$$

e uma vez que a latitude geodésica ϕ é maior ou igual que a latitude reduzida β , a diferença de longitude de dois pontos sobre a esfera reduzida (de JACOBI), λ , é sempre maior que a diferença de longitude dos dois pontos sobre o elipsóide de revo-

lução, L , e a equação (1.4.1.1) pode ser colocada sobre a forma vinda de (2):

$$L = \lambda - F(\lambda); \quad (1.4.1.2)$$

através da qual é fácil perceber ser a resolução do problema inverso da geodésia exatamente a resolução de uma equação transcendente da forma

$$x - F(x) = \text{constante},$$

para a qual dezenas de métodos numéricos (06) (07) (12) propiciam a solução.

CAPÍTULO II

MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

2.1 DESCRIÇÃO

Considere-se o problema de determinar uma raiz real de uma função, $f(x)$, contínua num certo intervalo $|a, b|$. Poucas vezes é possível resolvê-lo por métodos diretos, recorrendo-se então a processos numéricos iterativos. (08).

Um procedimento é dito iterativo quando calcula uma seqüência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... da solução desejada ξ . Cada valor é obtido mediante o uso dos valores anteriores, sendo o inicial, $x^{(0)}$, determinado à priori pela análise do problema em questão.

Um processo iterativo é convergente quando a seqüência dos valores gerados, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... converge para ξ^* . No entanto, o processo deve também convergir em um número finito de tentativas para ser considerado aplicável. No caso desse número finito ser ainda muito grande para finalidades práticas, obtém-se, reduzindo-o, um valor aproximado da raiz, ξ .

Denomina-se erro à diferença entre o valor exato ξ e o valor aproximado ξ de uma raiz. Não é possível avaliar com exatidão o erro de um método numérico já que este depende do valor ξ , e o procedimento comum consiste em delimitá-lo, isto é, garantir que $|\xi - \xi| < e$, para $e > 0$, previamente escolhido. Admite-se então que $\xi = \xi + e$, tendo ξ a precisão e .

Métodos iterativos tem a forma genérica

$$x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots), \quad (2.1.1)$$

onde ϕ é dita função iterativa.

A convergência de um método iterativo, item mais importante na formulação e aplicação de cada método, é estudada por meio da análise dos erros.

2.2 ORDEM DE CONVERGÊNCIA DE UM MÉTODO ITERATIVO

Considere-se que $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ convergem para ξ e que e_n é o erro da iteração $x^{(n)}$, ou seja:

$$e_n = |x^{(n)} - \xi|. \quad (2.2.1)$$

Se existir o número p e a constante $c \neq 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = c \quad (2.2.2)$$

então p é chamado ordem de convergência da seqüência e c é a constante assintótica do erro.

Para $p = 1, 2$ ou 3 a convergência é dita linear, quadrática ou cúbica respectivamente, e a correspondente função iterativa ϕ é considerada de ordem p . (6).

A ordem p pode ser vista como uma adequada medida da possibilidade de melhoramento em exatidão que a aproximação da raiz obtem em cada tentativa.

Por exemplo: para $c=1$, se $x^{(n)}$ é a exata solução ξ em r algarismos significativos, $x^{(n+1)}$ aproximará ξ para $r.p$ algarismos significativos. A precisão é atingida tão mais rapidamente quanto maior for p para menores valores de c .

Alguns valores de p para os mais conhecidos métodos numéricos:

MÉTODO	ORDEM DE CONVERGENCIA
Bisseção (dicotomia)	1
Secante	1.618
Regra falsa (falsa posição)	1.618
DEKKER	1.618
DEKKER - BRENT	1.618
BUS - DEKKER	1.840
NEWTON	2
CHEBYSHEV	3
MULLER	1.839

No entanto, existem também outros parâmetros para análise de bondade (*goodness*) de métodos numéricos, tais como o índice de eficiência Traub e o índice eficiência de Ostroski, à saber:

$$E_1 = \frac{p}{\eta} \quad \text{e} \quad E_2 = p^{1/\eta}, \quad \text{onde } \eta \text{ representa o número}$$

de funções avaliadas em cada iteração (por exemplo $f(x)$, $f'(x)$, etc.)

Outros importantes índices:

FIRESTONE : $E_3 = p^{1/H}$, onde $H = \eta(1 + \frac{A}{B})$, com p e η como anteriormente expostos, A representando o número de operações aritméticas exclusive da avaliação da função necessárias para cada um dos passos do algoritmo, B sendo o número de operações aritméticas necessárias ao cômputo da função e qualquer de suas derivadas requeridas.

PATERSON: $E_4 = \frac{1}{M} \log_2 p$, onde M é o número de divisões e multiplicações requeridas para o cálculo da função iteradora.

$$\text{KUNG - TRAUB: } E_5 = \sum_i \frac{\log_2 p}{\eta_i V(f^{(i)}) + c(\phi)}$$

onde η_i é o número de avaliações de $f^{(i)}$ usados em ϕ , $V(f^{(i)})$ é o número de operações aritméticas para uma avaliação de $f^{(i)}$, $c(\phi)$ é o número mínimo de operações aritméticas necessárias para combinar $f^{(i)}$ à forma ϕ através de qualquer procedimento.

Alguns valores de eficiência para métodos numéricos:

<u>MÉTODO</u>	E3	E4	E5
SECANTE	$\sqrt{1.618}$	$\frac{1}{1.44n}$	$\frac{1}{2.87n}$
NEWTON	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{4n}$
TRAUB	$\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{1.5n}$	$\frac{1}{3n}$
JARRATT	$\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{1.5n}$	$\frac{1}{3n}$

Outra classificação pode ser feita com a consideração de que certos métodos, como por exemplo o de Newton, para avaliar $x^{(i+1)}$ necessita $x^{(i)}$, $f(x^{(i)})$, $f'(x^{(i)})$, enquanto outros necessitariam para avaliar $x^{(i+1)}$ também de $f(x^{i-1})$, $f(x^{i-2})$, etc... Dois exemplos desse último caso são: o método da SECANTE e o método de CHEBISHEV. Estes são chamados métodos "com memória", enquanto o de Newton pode ser classificado com um representante dos métodos "sem memória".

A escolha de um método em particular deve, portanto, levar em consideração antes de mais nada a "estabilidade" da função a ser trabalhada (12), à qual segue-se análises de ordem de convergência e/ou eficiência.

O método de Newton é considerado por toda a literatura especializada como aquele que melhor atende a todos os requisitos simultaneamente.

2.3 O MÉTODO DE NEWTON

Um método de aproximações sucessivas pode ser efetivado ao considerar-se a seqüência de aproximações da raiz ξ de $f(x)$ como obtidas de uma relação de recorrência da forma

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \quad , \quad k=0,1,2, \dots \quad (2.3.1)$$

onde $\phi(x)$ é uma função que tem ξ como ponto fixo, ou seja, $\xi = \phi(\xi)$.

Conforme exposto em (6) as condições suficientes para se assegurar a convergência deste algoritmo são:

a) $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ devem ser funções contínuas em $|a,b|$;

b) $K = \max_{x \in |a,b|} |\phi'(x)| < 1$;

c) $x^{(0)} \in |a,b|$ e $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}) \in |a,b|$

para $n = 0,1,2, \dots$

A forma mais geral de $x = \phi(x)$ equivalente a $f(x) = 0$ é dada por

$$x = x + A(x) \cdot f(x) \equiv \phi(x) \quad (2.3.2)$$

onde $A(x)$ é uma função contínua qualquer, tal que $A(\xi) \neq 0$. Pode-se escolher $A(x)$ de forma a ter $\phi'(\xi) = 0$. Então, derivando-se:

$$\phi'(x) = 1 + A(x) \cdot f'(x) + A'(x) \cdot f(x) \quad (2.3.2)$$

para ξ , a relação resulta em $\phi'(\xi) = 1 + A(\xi) = 0$ (2.3.4)

na qual, supondo $f'(\xi) \neq 0$, tem-se

$$A(\xi) = - \frac{1}{f'(\xi)}, \quad (2.3.5)$$

provando que uma escolha satisfatória para $A(x)$ será

$$A(x) = - \frac{1}{f'(x)}. \quad (2.3.6)$$

Conseqüentemente de (2.3.2) obtem-se

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}; \quad (2.3.7)$$

que constitui o processo iterativo de Newton, definido por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.8)$$

fórmula esta que continua válida mesmo para $f'(\xi) = 0$, posto que $x^{(k)} \neq \xi$.

Sendo o intervalo $|a, b|$ determinado através da condição $|\phi'(x)| < 1$ para todo $x \in |a, b|$, ao invés de determinar esse intervalo, pode-se, por razões de facilidade de cálculo, esco-

lher uma razão de aproximação inicial suficientemente próxima da raiz, aplicar (2.3.8), e se a seqüência obtida não estiver aparentemente convergindo, abandoná-lo e reiniciar o processo com outro valor.

2.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO DE NEWTON

Entende-se como "zeros" de uma função os valores ξ ; da variável independente, tais que os correspondentes valores da variável dependente sejam nulos. Genericamente, diz-se "zero" de uma função $y = f(x)$ o valor específico de x para o qual a curva "corta" o eixo das abcissas.

Porém, supondo-se $f(x)=0$, raramente é possível obter-se raízes exatas dessa equação, o que ocorre, por exemplo, quando $f(x)$ é polinômio fatorável.

Em geral, pode-se obter soluções aproximadas, mediante a escolha de certos algoritmos e adequado programa de cálculo.

No processo abordado, estará implícita a prévia obtenção do intervalo que contém a raiz de $f(x)$. Isso poderá ser conseguido através de vários métodos analíticos que não serão enfocados. Cita-se a existência de um processo dito "empírico", qual seja: a existência de uma raiz de $f(x)$ num intervalo $|a,b|$, pressupõe $f(a)$ com sinal diferente de $f(b)$. Outra forma rápida, porém nem sempre exequível, de determinar o intervalo $|a,b|$ ao

qual pertence a raiz, é a de construir o diagrama da função dada.

Seja a função $y = f(x)$, com raiz $x = \xi$, e os dois pontos $A |a, f(a)|$ e $B |b, f(b)|$, definidores de um intervalo que contém ξ .

Sabendo-se que $a < \xi < b$, pode-se considerar que a tangente geométrica ao diagrama num dos pontos extremos desse intervalo (por exemplo B), intercepta o eixo num ponto suficientemente próximo de ξ , denotado por $x^{(1)}$.

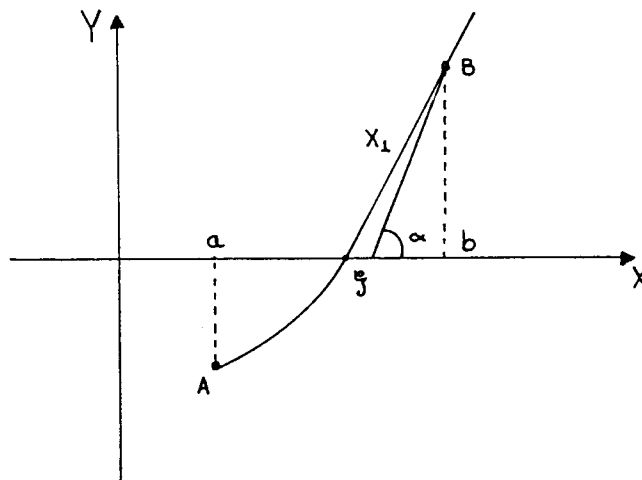


fig.09

Obtenção de $x^{(1)}$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b)}{b - x^{(1)}} . \quad (2.4.1)$$

Mas $\operatorname{tg} \alpha = f'(b)$,

donde:

$$f'(b) = \frac{f(b)}{b-x^{(1)}} \dots$$

$$x^{(1)} = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (2.4.2)$$

O processo é repetível, agora, com os pontos $A|a, f(a)|$ e $X_1|x^{(1)}, f(x^{(1)})|$, obtendo-se:

$$\operatorname{tg} \alpha' = f'(x^{(1)}) = \frac{f(x^{(1)})}{x^{(1)} - x^{(2)}} ,$$

conducente a um valor ainda mais próximo de ξ , denotado $x^{(2)}$, dado por:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} \quad (2.4.3)$$

Tal procedimento poderá ser repetido, tantas vezes quanto necessário, aproximando-se o valor $x^{(k)}$ de ξ , até que seja atingido um grau de precisão julgado mais conforme, ou seja, até que o erro entre duas iterações consecutivas não ultrapasse certo limite previamente fixado, a saber:

$$e < |x^k - x^{k-1}| ,$$

onde: e representa o erro máximo tolerável;
 x^k valor de ξ na k -ésima iteração.

De acordo com (9) se a curvatura de $f(x)$ não muda de sinal nas proximidades da raiz é possível escrever

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left| f'(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|. \quad (2.4.4)$$

Tal procedimento elimina, com razoável precisão, uma das duas desvantagens do método de Newton, que é a necessidade de conhecer $f'(x)$.

Em alguns casos não é possível explicitar essa derivada, pois seu cálculo é comumente muito trabalhoso. No entanto a avaliação de $f'(a)$ pode ser feita numericamente como exposto em (8).

Outra desvantagem do método é a adequada escolha de $x^{(0)}$. De (7) sabe-se que, caso esse valor não seja suficientemente próximo de ξ , o método divergirã, ou vai convergir para outra raiz que não a desejada.

Sob o aspecto computacional, toda a precisão possível de ser atingida depende da precisão com que $f(x)/f'(x)$ possa ser calculado.

2.5 ERRO NO MÉTODO DE NEWTON

Desenvolvendo-se, por Taylor em aproximação quadrática, a função $\phi(x)$ no entorno do ponto $x = a$, tem-se:

$$\phi(x) = \phi(a) + (x-a)\phi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot \phi''(\delta) ; \quad (2.5.1)$$

com $a < \delta < x$, e onde $\frac{(x-a)^2}{2!} \cdot \phi''(\delta)$ é denominado resto depois

de dois termos (1).

Sendo ξ , raiz de $f(x)$, confundida com o ponto a , e $x = x^{(i)}$, obtem-se

$$\phi(x^{(i)}) = \phi(\xi) + (x^{(i)} - \xi) \cdot \phi'(\xi) + \frac{(x^{(i)} - \xi)^2}{2!} \cdot \phi''(\xi) . \quad (2.5.2)$$

Entretanto, por (2.3.4) e (2.3.1) esta última reduz-se a

$$x^{(i+1)} = \xi + \frac{1}{2} \phi''(\xi) \cdot (x^{(i)} - \xi)^2 , \quad (2.5.3)$$

na qual, procedendo-se à consideração de que

$$e_i = x^{(i)} - \xi$$

representa o erro cometido na determinação de $x^{(i)}$ e que, similarmemente

$$e_{(i+1)} = x^{(i+1)} - \xi$$

o erro para $x^{(i+1)}$, pode-se considerar

$$e_{(i+1)} = \frac{1}{2} \cdot \phi''(\delta) \cdot e_i^2, \quad (2.5.4)$$

contanto que $\phi''(x)$ seja contínua e limitada num intervalo no entorno de $x = \xi$.

A equação (2.5.4) demonstra que o erro em uma iteração qualquer é proporcional ao erro da iteração prévia. Um método com essas características é chamado de segunda ordem ou de convergência quadrática, visto que em (2.5.4) pode-se ainda concluir

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{(i+1)}}{e_i^2} = \frac{1}{2} \cdot \phi''(\xi). \quad (2.5.5)$$

Embora seja comum, na literatura sobre o assunto, colocar essa propriedade do método de Newton em termos de que o número de algarismos exatos dobra ao fim de cada iteração, uma descrição mais conveniente diz que essa é uma propriedade assintótica, e não se pode, em geral, esperar uma duplicação do número de algarismos exatos nas iterações iniciais.

2.6 DETERMINAÇÃO DO ERRO ABSOLUTO

Limitando ao terceiro termo o desenvolvimento da função $f(x)$ no entorno de $x = a$ por Taylor,

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \frac{1}{2} (x-a)^2 \cdot f''(\delta). \quad (2.6.1)$$

Considerando, ademais, que para $x = \xi$, $f(\xi) = 0$,

$$0 = f(a) + (\xi-a) f'(a) + \frac{1}{2} (\xi-a)^2 \cdot f''(\delta);$$

$$0 = \frac{f(a)}{f'(a)} + (\xi-a) + \frac{(\xi-a)^2}{2} \cdot \frac{f''(\delta)}{f'(a)}, \text{ isto é,}$$

$$\xi = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{1}{2} \frac{f''(\delta)}{f'(a)} \cdot (\xi-a)^2. \quad (2.6.2)$$

Levando em conta o ponto $a = x^{(i)}$, (2.6.2) torna-se

$$\xi = x^{(i+1)} - \frac{1}{2} \frac{f''(\delta)}{f'(a)} \cdot (\xi-a)^2. \quad (2.6.3)$$

Com a nomenclatura: $e = \text{erro absoluto} = |\xi - x^{(i+1)}|$, em (2.6.3) é possível determinar

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\delta)}{f'(a)} \cdot (\xi-a)^2. \quad (2.6.4)$$

Embora não se conheçam os valores que aparecem no segundo membro de (2.6.4), pode-se tomar seus valores máximos para avaliar a ordem de grandeza.

Por exemplo em (12) atribui-se a $(\xi-a)$ a amplitude do intervalo $|a,b|$, h , e k o valor correspondente ao maior valor de $f''(x)$ no mesmo intervalo. Logo:

$$e < \frac{h^2 \cdot k}{2 \cdot |f'(a)|}, \quad (2.6.5)$$

onde é fácil perceber ser o erro absoluto inversamente proporcional ao valor numérico da derivada no ponto inicial do intervalo e diretamente proporcional ao quadrado do espaçamento entre os pontos inicial e final do intervalo.

CAPÍTULO III

TRÊS MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

3.1 MÉTODO DE HELMERT

A distância e os azimutes pelo método de Helmert são, essencialmente, funções de elementos do seguinte triângulo esférico:

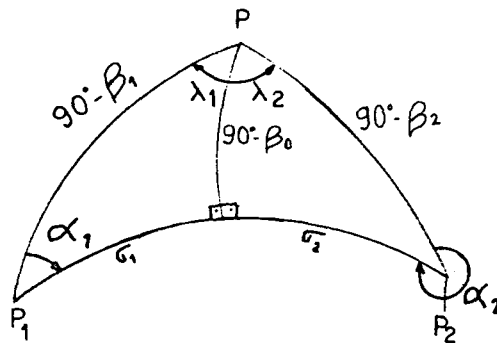


fig.10

onde:

$$\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$\sigma_0 = \sigma_2 - \sigma_1$$

$$2\sigma = \sigma_2 + \sigma_1$$

λ_1 , λ_2 , σ_1 e σ_2 são considerados negativos ou positivos se estão a oeste ou leste do arco perpendicular $90^\circ - \beta_0$.

Na figura 10, λ e σ_0 representam a soma dos componen-

tes absolutos e 2σ a diferença, devido à essa convenção de sinais.

No método de Helmert, somente se pode avaliar o primeiro valor de λ , e a solução subsequente do triângulo esférico inicia com λ e os conhecidos β_1 e β_2 . É necessário conhecer-se previamente também as primeira e segunda excentricidade do elipsoide desejado, além de seu semi-eixo menor.

Obedece-se então a seqüência de cálculos:

$$\cos \sigma_0 = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda \quad (3.1.1)$$

$$\sin \sigma_0 = (\text{ sinal de } \sin \lambda) \sqrt{1 - \cos^2 \sigma_0} \quad (3.1.2)$$

$$\sigma_0 = \text{ em radiano e positivo}$$

$$\sin 2\sigma_0 = 2 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 \quad (3.1.3)$$

$$\sin 3\sigma_0 = 3 \sin \sigma_0 - 4 \sin^3 \sigma_0 \quad (3.1.4)$$

$$\cos \beta_0 = (\cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \lambda) \div \sin \sigma_0 \quad (3.1.5)$$

$$\sin^2 \beta_0 = 1 - \cos^2 \beta_0 \quad (3.1.6)$$

$$\cos 2\sigma = (2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \div \sin^2 \beta_0) - \cos \sigma_0 \quad (3.1.7)$$

$$\cos 4\sigma = -1 + 2 \cos^2 2\sigma \quad (3.1.8)$$

$$\cos 6\sigma = 4 \cos^3 2\sigma - 3 \cos 2\sigma \quad (3.1.9)$$

$$A = \frac{e^2 e'^2}{e'+e} - \frac{e^2 e'^2}{16} \operatorname{sen}^2 \beta_0 + \frac{3e^2 e'^4}{128} \operatorname{sen}^4 \beta_0 \quad (3.1.10)$$

$$B = \frac{e^2 e'^2}{16} \operatorname{sen}^2 \beta_0 - \frac{e^2 e'^4}{32} \operatorname{sen}^4 \beta_0 \quad (3.1.11)$$

$$C = \frac{e^2 e'^4}{256} \operatorname{sen}^4 \beta_0 \quad (3.1.12)$$

$$\gamma = A\sigma_0 - B \operatorname{sen} \sigma_0 \cos 2\sigma + C \operatorname{sen} 2\sigma_0 \cos 4\sigma \quad (3.1.13)$$

A próxima avaliação do valor de λ é feita por $\lambda = L + \gamma \cos \beta_0$, em radianos.

Como β_0 é por sua vez também função de λ , então $\lambda = L + f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = L + F(\lambda)$, caracterizando-se a forma (2.3.1) para a solução, ou seja:

$$\lambda^{(k+1)} = F(\lambda^{(k)}) ,$$

característica do método iterativo linear em que consiste o método de Helmert.

Desde que um λ suficientemente preciso é determinado, a distância geodésica (S) e os azimutes (α) são obtidos como segue:

$$A_0 = 1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \beta_0 - \frac{3e'^4}{64} \operatorname{sen}^4 \beta_0 + \frac{5e'^6}{256} \operatorname{sen}^6 \beta_0$$

$$B_0 = \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \beta_0 - \frac{e'^4}{16} \operatorname{sen}^4 \beta_0 + \frac{15e'^6}{512} \operatorname{sen}^6 \beta_0$$

$$C_0 = \frac{e'^4}{128} \operatorname{sen}^4 \beta_0 - \frac{3e'^6}{512} \operatorname{sen}^6 \beta_0$$

$$D_0 = \frac{e'^6}{1536} \operatorname{sen}^6 \beta_0 \quad (3.1.14)$$

$$S = b(A_0 \sigma_0 + B_0 \operatorname{sen} \sigma_0 \cos 2\sigma - C_0 \operatorname{sen} 2\sigma_0 \cos 4\sigma + D_0 \operatorname{sen} 3\sigma_0 \cos 6\sigma)$$

$$\cot \alpha_{1-2} = \frac{\tan \beta_2 \cos \beta_1 - \cos \lambda \operatorname{sen} \beta_1}{\operatorname{sen} \lambda}$$

$$\cot \alpha_{2-1} = \frac{\operatorname{sen} \beta_2 \cos \lambda - \cos \beta_2 \tan \beta_1}{\operatorname{sen} \lambda}$$

α_{1-2} varia de 0° a 180°

α_{2-1} varia de 180° a 360°

O método de Helmert, assim como qualquer procedimento iterativo, era considerado um processo tedioso, por ser feito manualmente em tabelas de 10 dígitos, e por necessitar ao menos três aproximações para obter-se resultados satisfatórios.

Desenvolveu-se então soluções não-iterativas, como as descritas em (13) e (14), que em termos de processamento consomem mais espaço que as soluções iterativas e podem ser mais vagarosas em tempo de execução.

3.2 MÉTODOS NÃO-ITERATIVOS

Quando se supõe, como em (13), que o valor real de λ seja conhecido, aceita-se que esse valor real seja representado pela diferença absoluta de longitude na esfera, adicionada a uma determinada quantidade X , ou seja:

$$\lambda = L + X . \quad (3.2.1)$$

Então, X deve ser uma quantidade positiva muito pequena, e portanto adequada para o desenvolvimento em série de potências. De (3.2.1) pode-se relacionar

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos (L + X) , \\ &= \cos L \cdot \cos X - \sin L \sin X , \\ &= \cos L \left(1 - \frac{X^2}{2!} + \dots \right) - \sin L \left(X - \dots \right) , \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

e por outro lado

$$\cos \lambda = \cos L - \sin L \cdot X - \frac{1}{2} (\cos L) \cdot X^2 + \dots \quad (3.2.3)$$

Desde que esta formulação começa com uma série algébrica que representa o λ real, a expressão da geodésica a ela associada é completamente não-iterativa, pois requer somente a

longitude geodésica dada. É possível, portanto, a avaliação direta do valor de λ , alongando-o nos seus termos equivalentes à ordem de e^2 , e^4 , e^6 , etc....., de acordo com a precisão que possa ser desejada.

A expressão não-iterativa possível de ser desenvolvida para X sugere imediatamente uma solução numérica de distâncias e azimutes em que, usando o valor real resultante de λ , somente uma avaliação das fórmulas originais de Helmert é necessária.

A proposta não-iterativa deve ter uma formulação escolhida com cuidado, para que não conduza à uma determinação pouco precisa das quantidades requisitadas no triângulo de referência, o que segundo RAINSFORD ocorre normalmente em extremos de latitude, longitude ou azimutes.

É necessário deixar claro que as séries não-iterativas são também funções de elementos de um triângulo esférico, porém definido por β_1 , β_2 e a diferença de longitude L dada.

Isso requer simplesmente uma substituição de λ por L, ou seja, o triângulo esférico possui a correspondência:

HELMERT	NÃO-ITERATIVO
β_1	β_1
β_2	β_2
λ	L
σ_0	σ
$\cos \beta_0$	C
α_{12}	U_1
α_{21}	U_2

3.3. MÉTODO NÃO-ITERATIVO DE SODANO

Consiste basicamente numa alteração do método de Helmert, com a finalidade de torná-lo não-iterativo. O objetivo de tal procedimento é tornar o cálculo não computacional da geodésica e azimutes menos moroso.

O método baseia-se em (3.2.1) para iniciar a solução de Helmert com as séries de potências desenvolvidas em (3.2.2) e (3.2.3), concluindo por

$$\gamma \cos \beta_0 = \frac{e}{128} (128Nc\sigma - 8hc\sigma - 8hc \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma + \\ + 3h^2c\sigma + 5h^2c \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma - 2h^2c \operatorname{sen}^3\sigma \cos\sigma -$$

$$\begin{aligned}
& - 8e'^2 hcP \operatorname{sen}^2 \sigma - 8e' hcP \operatorname{sen}^2 \sigma \cos^2 \sigma + \\
& + 8e'^4 cP^2 \operatorname{sen}^3 \sigma \cos \sigma) - \frac{e^2}{16} (16Nc^2 + 16NP\sigma - \\
& - 2hc^2 - hP\sigma + 2e'^2 c^2 P\sigma - hP \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma + \\
& + 2e'^2 p^2 \operatorname{sen}^2 \sigma) X - \frac{e^2}{2} (Ncm\sigma - 3NcP - \\
& - 3NcP\sigma \cot \sigma) X^2 \tag{3.3.1}
\end{aligned}$$

Desde que a substituição na iteração de Helmert começa com uma série algébrica representando o λ real, a aproximação seguinte de seu valor deve ser igual à anterior, isto é aproximação seguinte = início real.

ou

$$L + \gamma \cos \beta_0 = L + X ,$$

e assim sendo

$$\gamma \cos \beta_0 = X . \tag{3.3.2}$$

Ao colocar $\gamma \cos \beta_0$ em sua série de potências correspondente a (3.3.1), vê-se que esta assume a forma quadrática, a qual, resolvida leva a

$$\begin{aligned}
X = \frac{e \cdot c}{128} & \left| 128N\sigma + 128e^2 N^2 c^2 \sigma^2 - 8h\sigma - 8h \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma + \right. \\
& + 128e^2 N^2 P\sigma^2 + 16e'^2 P \operatorname{sen}^2\sigma + 128e^4 N^3 c^4 \sigma - \\
& - 24e^2 Nhc^2 \sigma + 3h^2 \sigma - 8e^2 Nhc^2 \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma + \\
& + 5h^2 \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma - 64e^4 N^3 c^2 m\sigma^3 - 2h^2 \operatorname{sen}^3\sigma \cos\sigma + \\
& + (16e^2 e'^2 N + 448e^4 N^3) c^2 P\sigma^2 - 16e^2 NhP\sigma^2 + \\
& + 16e^2 e'^2 Nc^2 P \operatorname{sen}^2\sigma - 8e^2 hP \operatorname{sen}^2\sigma - \\
& - 16e^2 NhP\sigma \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma - 192e^4 N^3 c^2 P\sigma^3 \operatorname{coto}\sigma - \\
& - 8e'^2 hP \operatorname{sen}^2\sigma \cos^2\sigma + 128e^4 N^3 P^2 \sigma^3 + \\
& \left. + 32e^2 e'^2 NP^2 \sigma \operatorname{sen}^2\sigma + 8e'^4 P^2 \operatorname{sen}^3\sigma \cos\sigma \right| \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

A expressão (3.3.3) é completamente não-iterativa, pois requer somente a longitude L dada.

Dessa expressão segue-se imediatamente uma solução numérica de distancia e azimutes em que, usando o valor real resultante de λ , somente uma única avaliação das fórmulas originais de Helmert é necessária.

$$S = \frac{b}{64} \left| 64\sigma + 64e^2 Nc^2 \sigma + 16h\sigma + 16h \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 32e'^2 P \text{ sen}^2 \sigma + 64e^4 N^2 c^4 \sigma - 3h^2 \sigma + \\
& + (32e^2 N - 4e^2) hc^2 \sigma - 4e^2 hc^2 \text{ sen} \sigma \cos \sigma - \\
& - 5h^2 \text{ sen} \sigma \cos \sigma + 2h^2 \text{ sen}^3 \sigma \cos \sigma + \\
& + (96e^4 N^2 - 32e^2 e'^2 N) c^2 P \sigma^2 + 8e^2 e'^2 c^2 P \text{ sen}^2 \sigma + \\
& + 8e^2 h P \text{ sen}^2 \sigma + 8e'^2 h P \text{ sen}^2 \sigma \cos^2 \sigma - \\
& - 8e'^4 P^2 \text{ sen}^3 \sigma \cos \sigma \quad \left| \quad (3.3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot \alpha_{1-2} = U & - \frac{e^2 N c \sigma U_2 \cos \beta_1}{\text{sen } L \cos \beta_2} - \frac{e^4 N^2 c^3 U_1 \cos \beta_1}{\text{sen } L \cos \beta_2} + \\
& + \frac{e^2 h c \sigma U_2 \cos \beta_1}{16 \text{ sen } L \cos \beta_2} + \frac{e^2 h c U_2 \text{ sen} \sigma \cos \sigma \cos \beta_1}{16 \text{ sen } L \cos \beta_2} - \\
& - \frac{e^4 N^2 c P \sigma^2 U_2 \cos \beta_1}{\text{sen } L \cos \beta_2} - \frac{e^2 e'^2 c P U_2 \text{ sen}^2 \sigma \cos \beta_1}{8 \text{ sen } L \cos \beta_2} + \\
& + \frac{e^4 N^2 c^2 \sigma^2 U_2 \cos L \cos \beta_1}{2 \text{ sen}^2 L \cos \beta_2} + \frac{e^4 N^2 c^2 \sigma^2 U_1}{2 \text{ sen}^2 L} \quad (3.3.5)
\end{aligned}$$

Em todas as fórmulas apresentadas para o método de Sodano, adotou-se as seguintes convenções:

$$N = \frac{e'}{e' + e} ,$$

$$x = \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen } \beta_2 ,$$

$$y = \text{cos } \beta_1 \cdot \text{cos } \beta_2 ,$$

σ = ângulo esférico central,

$$\text{cos } \sigma = x + y \text{ cos } L ,$$

$$c = \frac{y \cdot \text{sen } L}{\text{sen } \sigma} ,$$

$$m = 1 - c^2 ,$$

$$h = e'^2 \cdot m ,$$

$$p = \frac{m}{\text{tg } \sigma} - \frac{x}{\text{sen } \sigma} = \frac{m \text{ cos } \sigma - x}{\text{sen } \sigma} ;$$

$$U_1 = \frac{\text{tg } \beta_2 \cdot \text{cos } \beta_1 - \text{cos } L \cdot \text{sen } \beta_1}{\text{sen } L} ;$$

$$U_2 = \frac{\text{sen } \beta_2 \cdot \text{cos } L - \text{cos } \beta_2 \cdot \text{tg } \beta_1}{\text{sen } L} .$$

A formulação não-iterativa foi inicialmente desenvolvida para geodésicas extensas, mas o problema parece residir em que, não apenas essas, mas sim também as muito curtas devem ser usadas no ajustamento de triangulações e rêsdes terrestres de trilateração.

Um método como o de Sodano, por exemplo, deve definir mais precisamente seus limites úteis, já que não é aplicável em todos os comprimentos de geodésicas. (15)

A expressão para $\text{ctg } \alpha_{2-1}$ é obtida de (3.3.5) intercambiando U_1 com U_2 , e β_2 com β_1 .

Para linhas muito curtas, ou precisão reduzida em linhas longas, alguns termos podem ser eliminados de (3.3.4) e (3.3.5).

Em linhas curtas, uma opção mais precisa para a computação do valor de σ é dada pela forma:

$$\text{sen } \frac{\sigma}{2} = + \sqrt{y \text{ sen}^2 \frac{L}{2} + \text{sen}^2 \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \right)},$$

$$\text{cos } \frac{\sigma}{2} = (\text{sinal de sen } L) \cdot \sqrt{\frac{1 + \text{cos } \sigma}{2}},$$

$$\text{sen } \sigma = 2 \cdot \text{sen } \frac{\sigma}{2} \cdot \text{cos } \frac{\sigma}{2}.$$

É também conveniente usar-se as co-funções de $\text{tg } \beta$ e

$\text{ctg } \alpha$ quando esses ângulos forem muito grandes. A precisão das distâncias geodésicas calculadas para truncamento das séries em e^2 , e^4 e e^6 para geodésicas muito longas, segundo (13) estão dentro de poucos metros, centímetros e décimos de milímetros respectivamente. Os azimutes são bons em décimos, centésimos e centésimos milésimos de segundo. Em azimutes, os resultados melhoram para linhas muito curtas.

Note-se, ademais, que σ representa uma distância de arco esférico, o qual varia de 0° a 180° ou até mesmo 360° , de acordo com o comprimento da geodésica: curta, meia volta da Terra ou completamente em volta dela. Nesses dois últimos casos $\text{csc } \sigma$, $\text{ctg } \sigma$ e P aproximam-se de infinito. No primeiro caso, a condição que se verifica é que σ e $\text{sen } \sigma$ aproximam-se de zero, sendo, portanto, também problemático.

3.4 MÉTODO DE HELMERT ADAPTADO PARA ITERAÇÕES ATRAVÉS DO ALGORITMO DE NEWTON

Consiste essencialmente no método de Helmert, com a consideração de que, sendo:

$$\lambda = L + \gamma \cos \beta_0 ,$$

então

$$F(\lambda) = L + \gamma \cos \beta_0 - \lambda ; \quad (3.4.2)$$

e ainda, de acordo com (3.1.13)

$$\gamma = A \sigma_0 - B \sin \sigma_0 \cos 2\sigma + C \sin 2\sigma_0 \cos 4\sigma$$

$$\gamma' = A' \sigma_0 + A \sigma_0' - B' \sin \sigma_0 \cdot \cos 2\sigma - B \cos \sigma_0 \cdot \sigma_0' \cos 2\sigma +$$

$$+ B \sin \sigma_0 \cdot \sin(2\sigma) \cdot 2\sigma' + C' \sin 2\sigma_0 \cos 4\sigma +$$

$$+ C \cos 2\sigma_0 \cdot 2(\sigma_0)' \cdot \cos 4\sigma -$$

$$- C \sin 2\sigma_0 \cdot \sin 4\sigma \cdot 4(\sigma)' \quad (3.4.3)$$

Para a obtenção de γ' , necessita-se portanto obter A' , B' , C' , σ_0' , β_0' e σ' , que representam as primeiras derivadas de A , B , C , σ_0 , β_0 , σ em relação à variável λ

3.4.1 OBTENÇÃO DE σ_o'

De (3.1.1) sabe-se que

$$\sigma_o = \text{arc cos} (\text{sen } \beta_1 \text{ sen } \beta_2 + \text{cos } \beta_1 \text{ cos } \beta_2 \text{ cos } \lambda) ,$$

na qual pode-se considerar

$$\text{sen } \beta_1 \text{ sen } \beta_2 = x ,$$

$$\text{cos } \beta_1 \text{ cos } \beta_2 = y ,$$

já que β_1 e β_2 não dependem de λ . Logo

$$\sigma_o' = - \frac{(-y \text{ sen } \lambda)}{\sqrt{1 - (x + y \text{ cos } \lambda)^2}} ;$$

$$\sigma_o' = y \frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } \sigma_o} = \text{cos } \beta_o \quad (3.4.1.1)$$

3.4.2 OBTENÇÃO DE β_o'

De (3.1.5) sabe-se que:

$$\beta_o = \text{arc cos} \left(\frac{\text{cos } \beta_1 \text{ cos } \beta_2 \text{ sen } \lambda}{\text{sen } \sigma_o} \right) = \text{arc cos} \left(y \frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } \sigma_o} \right) ,$$

chamando $U = y \frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } \sigma_0}$,

o qual derivado traz:

$$U' = y \frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } \sigma_0} + y \text{sen } \lambda \cdot \left(\frac{-\cos \sigma_0 \cdot \sigma_0'}{\text{sen}^2 \sigma_0} \right) ;$$

$$U' = y \left(\frac{\cos \lambda \text{sen } \sigma_0 - \text{sen } \lambda \cos \sigma_0 \cdot \sigma_0'}{\text{sen}^2 \sigma_0} \right)$$

que colocado em β_0' traz

$$\beta_0' = \frac{-y \left(\frac{\cos \lambda \text{sen } \sigma_0 - \text{sen } \lambda \cos \sigma_0 \cdot \sigma_0'}{\text{sen}^2 \sigma_0} \right)}{\sqrt{1 - \left(y \frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } \sigma_0} \right)^2}} ,$$

$$\beta_0' = -y \left(\frac{\cos \lambda \cdot \text{sen } \sigma_0 - \text{sen } \lambda \cos \sigma_0 \cdot \cos \beta_0}{\text{sen}^2 \sigma_0 \cdot \text{sen } \beta_0} \right) .$$

(3.4.2.1)

3.4.3 OBTENÇÃO DE σ'

De (3.1.7) tem-se que:

$$(2\sigma) = \arccos \left(\frac{2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \cos \sigma_0 \right) ;$$

$$(2\sigma) = \arccos \left(\frac{2x}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \cos \sigma_0 \right) .$$

Considere-se $U = \frac{2x}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \cos \sigma_0 ;$

$$U' = 2x \cdot \left(\frac{-2 \cdot \operatorname{sen} \beta_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0'}{\operatorname{sen}^4 \beta_0} \right) + \operatorname{sen} \sigma_0 \cdot \sigma_0' ,$$

$$U' = \frac{-4x \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0'}{\operatorname{sen}^3 \beta_0} + \operatorname{sen} \sigma_0 \cdot \sigma_0' .$$

Portanto

$$(2\sigma)' = \frac{-U'}{\sqrt{1 - \cos^2(2\sigma)}} = \frac{-U'}{\operatorname{sen}(2\sigma)} ,$$

logo:

$$\sigma' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4x \cos \beta_0 \cdot \beta_0' - \operatorname{sen} \sigma_0 \cdot \sigma_0'}{\operatorname{sen}(2\sigma)} \right) ,$$

$$\sigma' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4x \cos \beta_0 \cdot \beta_0'}{\sin^3 \beta_0} - \sin \sigma_0 \cdot \cos \beta_0 \right) / \sin 2\sigma ,$$

$$\sigma' = \left(\frac{2x \cdot \beta_0' - \sin \sigma_0 \cdot \sin^3 \beta_0}{\sin^3 \beta_0 \cdot \sin 2\sigma} \right) \cos \beta_0 \quad (3.4.3.1)$$

3.4.4 OBTENÇÃO DE A', B' e C'

De (3.1.10), (3.1.11) e (3.1.12)

$$A' = - \frac{2e^2 e'^2}{16} \cdot \sin \beta_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0' +$$

$$+ \frac{4 \cdot 3}{128} \cdot e^2 e'^4 \cdot \sin^2 \beta_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0' ; \quad (3.4.4.1)$$

$$B' = \frac{2e^2 \cdot e'^2}{16} \cdot \sin^3 \beta_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0' -$$

$$- \frac{4}{32} e^2 e'^4 \beta_0 \sin^3 \beta_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0' \quad (3.4.4.2)$$

$$C' = \frac{4}{256} e^2 \cdot e'^4 \cdot \sin^3 \beta_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \beta_0' \quad (3.4.4.3)$$

3.4.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON

Definidas, portanto, tanto a função quanto sua derivada, é possível, partindo-se do valor inicial da diferença de longitude entre dois pontos genéricos dados sobre o elipsóide, tentar determinar a diferença de longitude sobre a esfera auxiliar através do algoritmo de Newton. De (2.3.8) tem-se

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - F(\lambda^{(k)}) / F'(\lambda^{(k)}). \quad (3.4.5.1)$$

Obtido $\lambda^{(k+1)}$, é necessário verificar se

$$\left| \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \right| < \text{erro máximo admissível.}$$

O método de Helmert, como exposto em (13), tem precisão na ordem de e^4 , considerada suficiente por ser sempre o λ real maior que L na ordem de e^2 , ou seja, aproximadamente 7.10^{-3} radianos.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 COMPARAÇÃO COM EXEMPLO DE BIBLIOGRAFIA

Em (13) encontra-se um exemplo para o método de Sodano, cujas respostas esperadas são:

$$\alpha_{12} = 42^{\circ} 56' 30.03'' ,$$

$$\alpha_{21} = 295^{\circ} 17' 18.59'' ,$$

e em metros, a geodésica $S = 9649412.854$.

Executando-se os programas para os três métodos com arquivo de dados compatível com o exemplo citado, os resultados são obtidos como segue:

METODO DE HELMERT

O ELIPSOIDE TEM

SEMI-EIXO MAIOR 6378388.000

SEMI-EIXO MENOR 6356911.946

E AS LATITUDES SAO RESPECTIVAMENTE IGUAIS A

PRIMEIRO PONTO 20.000

SEGUNDO PONTO 45.000

COM DIFERENCA DE LONGITUDE IGUAL 106.000

GEODESICA = 9649412.804

PARA ALFA12, TEREMOS :

GRAUS 42 MIN 56 SEG 30.04

PARA ALFA21, TEREMOS :

GRAUS 295 MIN 17 SEG 18.60

METODO DE HELMERT-NEWTON

O ELIPSOIDE TEM

SEMI-EIXO MAIOR 6378388.000

SEMI-EIXO MENOR 6356911.946

E AS LATITUDES SAO RESPECTIVAMENTE IGUAIS A

PRIMEIRO PONTO 20.000

SEGUNDO PONTO 45.000

COM DIFERENCA DE LONGITUDE IGUAL 106.000

GEODESICA = 9649412.875

PARA ALFA12, TEREMOS :

GRAUS 42 MIN 56 SEG 30.04

PARA ALFA21, TEREMOS :

GRAUS 295 MIN 17 SEG 18.60

METODO DE SODANO

O ELIPSOIDE TEM

SEMI-EIXO MAIOR 6378388.000
SEMI-EIXO MENOR 6356911.946

E AS LATITUDES SAO RESPECTIVAMENTE IGUAIS A

PRIMEIRO PONTO 20.000
SEGUNDO PONTO 45.000

COM DIFERENCA DE LONGITUDE IGUAL 106.000

GEODESICA = 9649412.884

PARA ALFA12, TEREMOS :

GRAUS 42 MIN 56 SEG 30.04

PARA ALFA21, TEREMOS :

GRAUS 295 MIN 17 SEG 18.60

A diferença no comprimento da geodésica

entre Sodano e Helmert = 0.080 m

entre Sodano e Helmert-Newton = 0.009 m

entre Helmert-Newton e Helmert = 0.071 m

Sendo a precisão dos métodos programados na ordem de e^4 , ou seja, aproximadamente $5 \cdot 10^{-7}$ rd, os azimutes estarão corretos para o segundo e duvidosos no décimo de segundo, visto que um segundo expresso em radianos, está próximo de $5 \cdot 10^{-6}$ rd.

4.2 ALGUNS CASOS ANALISADOS

Deixando de lado os azimutes, executou-se novamente os três programas para o mesmo elipsóide, mesmas latitudes, porém com diferença de longitude variando entre 100° e 110° , para os quais tabelou-se apenas a diferença de longitude e a respectiva geodésica, resultando:

	HELMERT	HELMERT-NEWTON	SODANO
ΔL	GEODÉSICA	GEODÉSICA	GEODÉSICA
100.	9214777.928	9214777.997	9214777.993
101.	9288122.800	9288122.869	9288122.867
102.	9361120.699	9361120.768	9361120.768
103.	9433760.240	9433760.310	9433760.312
104.	9506029.905	9506029.975	9506029.980
105.	9577918.030	9577918.101	9577918.108
105.	9649412.804	9649412.875	9649412.884
107.	9720502.259	9720502.331	9720502.341
108.	9791174.268	9791174.341	9791174.353
109.	9861416.538	9861416.612	9861416.626
110.	9931216.606	9931216.681	9931216.697

4.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Objetivando facilitar a visualização das diferenças entre os valores de geodésica obtidos para as três formulações no intervalo de 100° a 110° , e considerando ainda que tais diferenças encontram-se apenas nas casas decimais, optou-se por um gráfico contendo no eixo das ordenadas apenas a unidade do comprimento de geodésica, ou seja, 1 m e no eixo das abcissas a variação de longitude em graus (Fig.11)

GEODÉSICA EM METROS PARA $\beta_1 = 0^\circ$ e $\beta_2 = 0^\circ$

ΔL	HELMERT	HELMERT-NEWTON	SODANO
0°	0.000	0.000	0.000
90°	10019148.059	10019148.441	10019148.059

Para os casos acima $\alpha_{12} = 90^\circ$ e $\alpha_{21} = 270^\circ$

É fácil concluir que as aproximações entre uma e outras formulações variam ao longo de diferentes latitudes ou longitudes, não havendo obrigatoriamente proximidade maior entre as geodésicas obtidas por Sodano e Helmert-Newton.

O exemplo acima ilustra comprimentos ao longo do equador para o qual, à título de ilustração, calculou-se em programa à parte os arcos de paralelo, obtendo

ΔL	ARCO DE PARALELO EM METROS NO EQUADOR
0°	0.000
90°	10019148.441

Outro exemplo interessante é constituído por $\beta_1 = 0^\circ$ e $\beta_2 = 90^\circ$, para os quais as geodésicas são, em metros:

Por Helmert = 10002288.299

Por Helmert-Newton = 10002288.299

Por Sodano = 10002288.239

Calculado o arco de meridiano chega-se à 10002288.285 metros, valor intermediário em relação aos três métodos, mas perfeitamente adequado às suas precisões.

O método fornece distorção em $\Delta L = 180^\circ$, mas não em valores bastante próximos ou superiores a este. Este ΔL corresponde à meia-volta da Terra, sendo portanto de pouca utilidade prática.

4.4 DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DE PONTOS CRÍTICOS

Com o intuito de proceder à uma análise de pontos críticos, considere-se por exemplo (3.1.1), (3.1.5) e 3.1.7) com as hipóteses básicas.

a) $\beta_1 = -\beta_2$, donde, por ser $\text{sen}\beta_1 = -\text{sen}\beta_2$ e $\text{cos}\beta_1 = \text{cos}\beta_2$, tem-se:

$$\cos\sigma_0 = -\text{sen}^2\beta_1 + \text{cos}^2\beta_1 \cos\lambda;$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\text{cos}^2\beta_1 \text{sen}\lambda}{\text{sen}\sigma_0},$$

$$\cos 2\sigma = \frac{2\text{sen}^2\beta_1}{\text{sen}^2\beta_0} - \cos\sigma_0$$

Supondo $\beta_1 \approx 90^\circ$, visto que $\text{sen}\beta_1 \approx 1$ e $\text{cos}\beta_1 \approx 0$, vem

$$\cos\sigma_0 = -1, \text{ isto é, } \sigma_0 \approx 180^\circ,$$

$\cos \beta_0 \equiv \sin \lambda$, sendo então β_0 e λ aproximadamente arcos complementares, de onde

$$\cos 2\sigma \approx \frac{-2}{\cos^2 \lambda} + 1, \text{ na qual:}$$

sendo $\lambda \approx 0^\circ$, então $\cos^2 \lambda \approx 1$ e $\cos 2\sigma$ é compatível

sendo $\lambda \approx 90^\circ$, então $\cos^2 \lambda \approx 0$ e $\cos 2\sigma$ é não compatível

sendo $\lambda \approx 180^\circ$, então $\cos^2 \lambda \approx 1$ e $\cos 2\sigma$ é compatível

Supondo $\beta_1 \approx 0^\circ$, vem que $\sin \beta_1 \approx 0$ e $\cos \beta_1 \approx 1$, ou

seja

$$\cos \sigma_0 \approx \cos \lambda, \text{ isto é, } \sigma_0 \approx \lambda,$$

$$\cos \beta_0 \approx \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda}, \text{ e portanto } \beta_0 \approx 0^\circ$$

então, nesse caso

$$\cos 2\sigma \equiv -\frac{2 \cdot 0}{0} - \cos \lambda \text{ é indeterminado.}$$

Pode-se ainda considerar $\beta_1 = \beta_2$, que conduz à

$$\cos \sigma_0 = \sin^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_1 \cos \lambda,$$

$$\cos \sigma_0 = \frac{\cos^2 \beta_1 \sin \lambda}{\sin \sigma_0}$$

$$\cos 2\sigma = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \beta_1}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \cos \sigma_0 .$$

Neste caso, se $\beta_1 \approx 90^\circ$, tem-se, por ser $\operatorname{sen} \beta_1 \approx 1$ e $\cos \beta_1 \approx 0$,

$$\cos \sigma_0 \approx 1, \text{ ou seja, } \sigma_0 = 0^\circ ;$$

$\cos \beta_0 \approx \operatorname{sen} \lambda$, então β_0 e λ são aproximadamente complementares, o que conduz ã

$$\cos 2\sigma \equiv \frac{2}{\cos^2 \lambda} - 1, \text{ e sendo}$$

$\lambda \approx 0^\circ$, o $\cos 2\sigma$ é compatível,

$\lambda \approx 90^\circ$, o $\cos 2\sigma$ é incompatível,

$\lambda \approx 180^\circ$, o $\cos 2\sigma$ é compatível.

Mas, se $\beta_1 \approx 0^\circ$, tem-se

$$\cos \sigma_0 \approx \cos \lambda, \text{ o que traz } \sigma_0 \equiv \lambda;$$

$$\cos \beta_0 \approx 1, \text{ ou seja, } \beta_0 \equiv 0^\circ \text{ e}$$

$$\cos 2\sigma = \frac{2 \cdot 0}{0} - \cos \lambda \text{ é indeterminado.}$$

b) β_1 e β_2 são quaisquer,

$$\cos \sigma_0 = \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda ;$$

$$\cos \beta_0 = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \sigma_0} ;$$

$$\cos 2\sigma = \frac{2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \cos \sigma_0$$

Arbitrando $\lambda \approx 0^\circ$, então $\cos \lambda \approx 1$ e $\operatorname{sen} \lambda \approx 0$, tra-

zendo

$$\cos \sigma_0 \approx \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 ,$$

$$\cos \sigma_0 \approx \cos (\beta_1 - \beta_2) , \text{ logo}$$

$$\sigma_0 = \beta_1 - \beta_2 .$$

$$\cos \beta_0 \approx 0 , \text{ de onde } \beta_0 \approx 90^\circ \text{ ao qual segue-se}$$

$$\cos 2\sigma \approx 2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 - \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \beta_2$$

$$\cos 2\sigma \approx \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \beta_2 ,$$

$$\cos 2\sigma \approx \cos (\beta_1 + \beta_2) ,$$

$$2\sigma \approx \beta_1 + \beta_2$$

Para $\lambda \approx 90^\circ$, vem $\cos \lambda \approx 0$ e $\operatorname{sen} \lambda \approx 1$, ou seja:

$$\cos \sigma_0 \approx \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2$$

$$\cos \beta_0 \approx \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\operatorname{sen} \sigma_0}$$

$$\cos 2\sigma = \frac{2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2$$

$$\cos 2\sigma \approx \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - 1 \right)$$

e $\cos 2\sigma$ é compatível sempre que $\operatorname{sen}^2 \beta_0 \neq 0$, ou seja, $\beta_0 \neq 0^\circ$,

o que implica em $\cos \beta_0 \neq 1$, ou seja

$$\cos \beta_1 \cos \beta_2 \neq \operatorname{sen} \sigma_0.$$

Para $\lambda \approx 180^\circ$, vem $\cos \lambda \equiv -1$ e $\operatorname{sen} \lambda \approx 0$ e

$$\cos \sigma_0 \approx \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \beta_2,$$

$$\cos \sigma_0 \approx \cos (\beta_1 + \beta_2),$$

$$\sigma_0 \approx \beta_1 + \beta_2.$$

Ainda:

$$\cos \beta_0 = 0, \text{ ou seja, } \beta_0 = 90^\circ \text{ e}$$

$$\cos 2\sigma = 2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 - \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2$$

$$\cos 2\sigma \equiv \cos (\beta_1 - \beta_2) ,$$

$$2\sigma = \beta_1 - \beta_2 .$$

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

5.1 CONCLUSÕES

1) O método de Helmert, e conseqüentemente o de Sodano por se tratar de uma modificação deste, leva a valores aceitáveis, tanto para a geodésica quanto para azimutes, ressaltando o aspecto de que suas propostas foram realizadas mais para cálculos manuais que computacionais. Tal afirmação deve-se principalmente ao aspecto do processamento necessário para cálculo do valor de σ_0 (mostrado na Fig 10), ao qual se torna necessário acrescentar decisões relativas à correta determinação de quadrantes. A visualização do problema em questão é fundamental para evitar-se os pontos críticos analisados no item 4.4 do CAPÍTULO IV e a conseqüente deterioração dos resultados à partir de determinado valor de diferença de longitude para β_1 e β_2 previamente fixados. Aplicação do método simplesmente considerando σ_0 positivo implica sempre em decréscimo do valor da geodésica à partir de certo limite de diferença de longitude, variável em função das latitudes utilizadas.

2) O tempo de CPU varia também em função das latitudes e longitudes usadas, para nenhum dos três métodos tendo sido superior a 0.18 ou inferior a 0.15s para o cálculo da geodésica e azimutes.

3) O método de Helmert-Newton exige sempre uma iteração a menos que o método de Helmert para atingir o mesmo grau de precisão, sendo portanto mais rápido na execução, embora utilize mais espaço de memória por necessitar a derivada da função que associa a diferença de longitude no elipsóide à da esfera auxiliar.

4) O método utilizado por Helmert em suas iterações é um procedimento do tipo recursivo, pois considera que

$$\lambda^{(k+1)} = F(\lambda^{(k)}) ,$$

conforme exposto em (2.3.1). As condições para a convergência estão asseguradas por ser a função que fornece a geodésica contínua em λ , admitir derivada modularmente menor que um em $\lambda = \Delta L$ e por ter todo o valor gerado pela recursividade pertencente ao intervalo de existência da função.

Então, como a forma mais geral de $\lambda = F(\lambda)$ é dada em (2.3.2) como

$$\lambda = \lambda + A(\lambda) \cdot f(\lambda) = F(\lambda) ;$$

e de acordo com (2.3.6) uma boa escolha de $A(\lambda)$ é

$$A(\lambda) = \frac{1}{f'(\lambda)} , \text{ tem-se}$$

$$F(\lambda) = - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)} , \text{ ou seja:}$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{f(\lambda^k)}{f'(\lambda^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

provando a adequação da escolha das iterações por Newton para o método de Helmert.

5) A maior vantagem na elaboração do método de Helmert com iterações por Newton, todavia, reside na possibilidade de análise do erro cometido na aplicação do método através de (2.6.5), onde η é representado pelo intervalo entre as diferenças de longitude elipsóide-esfera e a derivada da função para o ponto inicial ($\lambda = L$), do intervalo não representa processamento adicional, visto que é indispensável já para a primeira iteração.

Seria impossível, por exemplo, na aplicação de um método iterativo linear como o de Helmert, uma análise prévia do erro, pois para tal o correto valor de λ deveria ser conhecido a priori, conforme exposto em (2.2.1). No entanto, já que é sabido que as referidas diferenças de longitude estão afastadas na ordem de e^2 , a análise prévia do erro seria possível, optando-se então pela aplicação ou não do procedimento, através do método de Newton.

BIBLIOGRAFIA

- 01 AYRES Jr., F. Cálculo Diferencial e Integral. McGraw-Hill do Brasil - 1976.
- 02 BOWRING, B.R. The Geodesic Inverse Problem. Bulletin Géodésique, 1983 - nº 57.
- 03 COSTA, A.M. Métodos para a Solução do Problema Geodésico Inverso mediante representação esférica do elipsóide. UFPR - 1976.
- 04 DUFOUR, H.M. Calcul de Grandes Géodésiques. Bulletin Géodésique - Jun, 1958 - nº 48.
- 05 GEMAEL, Camil . Introdução à Geodésia Geométrica. UFPR -1977.
- 06 HUMES, et allie. Noções de Cálculo Numérico. McGraw-Hill do Brasil - 1984.
- 07 MASSARANI, Giulio. Introdução ao Cálculo Numérico. Ao Livro Técnico S/A - 1970.
- 08 MENEZES, Wanda. Cálculo Numérico - Notas de Aula. UFPR-1982.
- 09 MILNE, W.E. Cálculo Numérico . Polígono, 1968.
- 10 RAINSFORD, H.F. Long Geodesics on the Ellipsoid. Bulletin Géodésique - sept, 1955 - nº 37
- 11 RAPP, R.H. Geodésia Geométrica. Universidade Estadual de Ohio - 1980.
- 12 SADOSKY, M. Cálculo Numérico y Gráfico. Ediciones Libreria del Colégio - 1959.

- 13 SODANO, E.M. A Rigorous Non-Iterative Solution of the Inverse and Direct Geodetic Problems. Bulletin Géodésique - jun. 1958 - n° 48.
- 14 SODANO, E.M. General Non-Iterative Procedure for Rapid Inverse Solution of Very Long Geodesics . Bulletin Géodésique - mars, 1965 - n° 75
- 15 VINCENY, T. Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Applications of Nested Equations. Survey Review - April, 1975 - n° 176.