

CARINA MARIA ZANETTI

**REGIMES ACELERADOS EM MODELOS COSMOLÓGICOS
2D E 3D**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pablo De-vecchi

CURITIBA

2004

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado da estudante **Carina Maria Zanetti** são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação cujo título é **Regime acelerados em modelos cosmológicos 2D E 3D**.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2004.

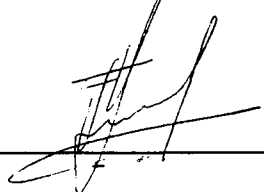
Banca Examinadora

**Prof. FERNANDO PABLO DEVECCHI
(Orientador/ Presidente) (UFPR)**

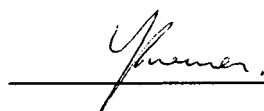
**Prof. JULIO CÉSAR FABRIS
(UFES)**

**Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER
(UFPR)**

Assinatura







Resumo

Apresentamos aqui um estudo das soluções cosmológicas de três modelos de gravitação em dimensões reduzidas: a Relatividade Geral é utilizada nos modelos 3D; as teorias propostas por Jackiw-Teitelboim e Callan *et al* são utilizadas nos modelos 2D. A Termodinâmica Relativística modela as fontes em todos os cenários estudados. A equação de van der Waals (uma equação de estado não barotrópica) é usada na descrição do fluido cosmológico no caso 2D. Enfatizamos o estudo de transições de regimes acelerado para desacelerado (da era inflacionária para a era da matéria) , e desacelerado para acelerado (da era da matéria para o universo atual). Essas transições são análogas às existentes nos modelos cosmológicos realistas em 4D.

Abstract

In this work we present an analysis of the cosmological solutions for three gravitational models in lower dimensions: the theory of General Relativity is used in the 3D formulations; the models proposed by Jackiw-Teitelboim and Callan *et al* appear in the 2D case. The theory of Relativistic Thermodynamics furnishes the sources contributions in all scenarios. The van der Waals equation of state (a non-barotropic equation) is used for the description of the cosmological fluid in the 2D formulations. We focus mainly on the analysis of accelerated-decelerated transitions (from the inflationary period to the matter era), and decelerated-accelerated (from the matter era to the present universe) ones. Those transitions are analogous to the ones present in the 4D realistic cosmological models.

“To confine our attention to terrestrial matters
would be to limit the human spirit.”

Stephen W. Hawking

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Fernando Pablo Devecchi;

À minha família: meus pais, Pedro e Marcia; meu irmão, Fabio; minha tia, Célia e meus avós, Giocondo e Jovina;

Ao meu namorado, Nicolau;

Aos amigos da graduação e pós-graduação;

Aos membros da banca examinadora da Qualificação, Professores José Arruda Freire e Alexandre Schmidt;

Aos membros da banca examinadora da Defesa, Professores Gilberto Medeiros Kremer e Julio César Fabris;

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

Introdução	8
1 Relatividade Geral	11
1.1 Os Princípios da Relatividade Geral	11
1.2 Tensores	13
1.2.1 O tensor métrico	15
1.2.2 Operações algébricas	16
1.3 Equação de Movimento de uma partícula na RG	17
1.4 Derivada Covariante	19
1.4.1 Derivação covariante ao longo de uma curva	21
1.5 Tensor de Riemann	22
1.5.1 Propriedades do tensor de Riemann	23
1.6 Leis de conservação no espaço-tempo curvo	25
1.7 Equações de Campo de Einstein	26
2 Cosmologia Relativística	30
2.1 Fundamentos	31
2.1.1 Princípio Cosmológico e a estrutura do universo em grande escala	31
2.1.2 A Expansão do universo	31
2.1.3 Coordenadas comóveis	32
2.2 Métrica de Robertson-Walker	34
2.3 Descrição termodinâmica do universo	36
2.3.1 Termodinâmica Relativística	36
2.3.2 A pressão dinâmica	38
2.3.3 O fluido cosmológico	39
2.4 O Modelo Padrão	40
2.4.1 Propriedades dinâmicas dos modelos FLRW	42
2.4.2 Desvio para o vermelho cosmológico	43
2.4.3 Medida de distâncias	44
2.4.4 Horizonte de partícula	45
2.4.5 Problemas do modelo padrão	45
2.5 Cosmologia inflacionária	46
2.5.1 Campos escalares	48
2.5.2 Campos escalares e inflação	50
2.5.3 Resolvendo os problemas de valor inicial	52
2.6 Energia escura	53

3	Gravitação e Cosmologia em dimensões reduzidas	54
3.1	Equações de Einstein em $d+1$ dimensões	54
3.2	Gravitação em três dimensões	55
3.2.1	Limite Newtoniano	56
3.2.2	Fontes estáticas	57
3.2.3	Soluções Cosmológicas	59
3.3	Gravitação em duas dimensões	60
3.3.1	Modelo de Jackiw-Teitelboim	60
3.3.2	Modelo CGHS, ou gravitação dilatônica	61
3.3.3	Soluções Cosmológicas	62
4	Regimes de aceleração positiva nas cosmologias bidimensional e tridimensional	64
4.1	Regimes de inflação e energia escura em três dimensões	64
4.1.1	Regimes de inflação	69
4.1.2	Energia escura	75
4.1.3	Discussão e considerações gerais a respeito do modelo 3D	80
4.2	Regimes de inflação nas cosmologias JT e CGHS	81
4.2.1	Equação de van der Waals	81
4.2.2	Regimes de aceleração positiva na cosmologia JT e CGHS	82
4.2.3	Resultados para o modelo JT	83
4.2.4	Resultados para o modelo CGHS	86
	Conclusão	89
	Referências bibliográficas	91

Introdução

A Cosmologia tem como objetivo construir modelos teóricos que descrevem as propriedades do universo em grande escala. Entre os modelos cosmológicos, o modelo padrão, baseado no Princípio Cosmológico, que define a simetria do espaço, é consagrado devido ao seu alto poder de previsão de fatos observacionais [1]. Apesar disso muitas questões não são respondidas por este modelo. Nas últimas décadas surgiram os modelos inflacionários, que assumem a existência de um breve período de forte expansão e grande aceleração. Estes modelos conseguem com sucesso resolver algumas questões em aberto do modelo padrão. Ao lado dos modelos cosmológicos realistas existem também estudos baseados em modelos de gravitação em dimensões reduzidas. Estes modelos possuem algumas vantagens no estudo teórico por serem mais fáceis de manipular matematicamente e ao mesmo tempo preservando os ingredientes fundamentais das teorias de gravitação. A quantização é um resultado notável nestes modelos, que abre a possibilidade de desenvolvimento de técnicas que podem ser utilizadas nos modelos realistas [2]. Além disso os modelos de gravitação em dimensões reduzidas apresentam propriedades físicas peculiares que tem despertado interesse durante as últimas décadas.

A Relatividade Geral, proposta por Einstein em 1915, é uma teoria de gravitação construída a partir dos Princípios da Equivalência e da Covariância Geral [3]. A abordagem de Einstein elimina o conceito de força gravitacional e é baseada em propriedades geométricas descrevendo o campo gravitacional como uma modificação na estrutura do espaço-tempo. A presença de fontes do campo gravitacional faz com que o espaço-tempo se torne curvo. A relação entre geometria e fontes é fornecida pelas equações de Einstein. Por outro lado, uma partícula em queda livre na presença de um campo gravitacional possui uma trajetória curva devido à geometria do espaço-tempo estar modificada pela presença de fontes.

Uma das principais aplicações da RG é a construção de modelos cosmológicos. O modelo padrão é baseado nas equações de campo de Einstein, no Princípio Cosmológico e no fato observacional da expansão do universo. A descrição das fontes do campo gravitacional é feita pela Termodinâmica Relativística, assumindo que em grandes escalas as fontes podem ser descritas como um fluido. De acordo com este modelo o universo evoluiu a partir de uma singularidade com temperatura e densidades infinitas. A partir do instante “zero” o universo se expandiu passando por diversas fases (para uma descrição mais completa, ver [1]):

- 10^{-4} segundos: condensação dos quarks, formando nêutrons e prótons;
- 1 segundo: nucleossíntese dos elementos leves;

- 10^4 anos: a densidade da radiação se torna igual à da matéria, que a partir deste instante é dominante no universo;
- 10^5 anos: desacoplamento da radiação da matéria; formação da radiação de fundo; na mesma época ocorre a recombinação (elétrons livres se combinam com núcleos formando átomos);
- 10^{10} anos: presente.

O modelo padrão é muito bem sucedido em vários aspectos e as previsões deste modelo são notáveis, mas como foi dito deixa algumas questões em aberto [4]. Atualmente acredita-se que no início da expansão o universo primordial era dominado por um campo escalar conhecido como inflaton que causou um breve período de grande aceleração na expansão. A inclusão deste período nos modelos cosmológicos, chamado de período inflacionário, proposto por Alan Guth em 1981 [5], é capaz de resolver algumas questões importantes não respondidas pelo modelo padrão. Recentemente surgiram evidências a partir do estudo de supernovas Tipo-Ia de que o universo no presente está se expandindo de forma acelerada, dominado pelo que ficou conhecido como energia escura, que acredita-se estar relacionada à constante cosmológica ou a um campo escalar [6]. A solução das equações de campo do modelo padrão resulta em uma expansão com aceleração negativa nos períodos dominados pela matéria e radiação. Portanto a história dinâmica do universo de acordo com as teorias atuais deve portanto ter passado por duas transições: do período inflacionário acelerado para o universo dominado pela matéria, e deste para o universo atual acelerado dominado pela energia escura.

As teorias em dimensões reduzidas tem sido alvo de muitos estudos, ver por exemplo [2]. As características e propriedades de uma teoria dependem muitas vezes do número de dimensões do espaço-tempo. Para a gravitação em um espaço-tempo com dimensões menores que quatro a RG fornece resultados diferentes, em relação ao caso 4D. Em um espaço-tempo tridimensional por exemplo os efeitos gravitacionais não se propagam fora das fontes, não havendo portanto interação a distância entre os corpos nem limite newtoniano. Em um espaço-tempo bidimensional as equações de Einstein não são equações dinâmicas, e modelos alternativos vem sendo propostos para descrever fenômenos gravitacionais em duas dimensões (2D), como os modelos de Jackiw-Teitelboim (JT) e Callan *et al* (CGHS). Novos modelos para a gravitação em três dimensões têm sido elaborados com o objetivo de restaurar a propagação, como o modelo de gravitação topologicamente massiva.

Nesta dissertação estudamos as soluções cosmológicas com regimes acelerados em modelos de gravitação 3D e 2D. No caso 3D utilizamos as equações de campo de Einstein da RG para descrever a dinâmica do modelo [7]. Apesar da RG possuir problemas em 3D, como a ausência de propagação, é possível construir modelos cosmológicos consistentes pois neste caso considera-se que as fontes preenchem todo o espaço. De fato este modelo têm mostrado que é possível obter os mesmos tipos de soluções do caso 4D, com regimes acelerados e desacelerados. Nos modelos que foram estudados as fontes são descritas da maneira usual por uma equação de estado barotrópica. Pode-se além disso acrescentar efeitos dissipativos, como a transferência

de energia entre o campo gravitacional e os campos de matéria e radiação, acrescentando no tensor de energia-momento um termo de pressão dinâmica, relacionada à viscosidade do fluido.

Nos caso 2D estudamos as soluções cosmológicas dos modelos JT e CGHS [8][9]. A abordagem usual tem resultado apenas em soluções com regimes desacelerados. Apenas com a inclusão de uma constante cosmológica ou através da violação da “condição de energia forte” é possível a obtenção de regimes acelerados. Uma alternativa que consideramos para obter soluções com regimes acelerados foi a modificação da descrição das fontes. Estudamos aqui o caso em que as fontes são descritas pela equação de estado de van der Waals ao invés da equação de estado barotrópica utilizada usualmente em modelos cosmológicos.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: no capítulo um revisamos a teoria da Relatividade Geral; no capítulo dois discutimos a Cosmologia Relativística e apresentamos os modelos cosmológicos padrão e inflacionário; no capítulo três estudamos três modelos de gravitação em dimensões reduzidas: Relatividade Geral em 3D e JT e CGHS em 2D; no capítulo quatro fazemos um estudo das soluções cosmológicas com regimes acelerados nos modelos de gravitação em dimensões reduzidas estudados, em particular as soluções em que existe transições entre regimes acelerados e desacelerados análogas às que ocorrem nos modelos em 4D; por último apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 1

Relatividade Geral

“Space tells matter how to move
Matter tells space how to curve”
(Wheeler, Thorne, Misner. *Gravitation*, 1972)

A Relatividade Geral foi concebida pela necessidade de uma extensão da teoria da Relatividade Restrita, para incluir fenômenos gravitacionais. O Princípio da Equivalência é inserido na teoria através do Princípio da Covariância Geral [3]. Ao mesmo tempo, a invariância de Lorentz é substituída pela invariância por transformações gerais de coordenadas como princípio de simetria fundamental.

O próximo passo para a formulação da Relatividade Geral (RG) é reconhecer o campo gravitacional como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, que deve ser descrito pela geometria de Riemann. Além disso, o formalismo tensorial é utilizado devido à necessidade de obter equações covariantes, que preservam a forma sob uma transformação geral de coordenadas (TGC).

Este capítulo é dedicado à apresentação da teoria da RG, necessária para o desenvolvimento da dissertação. Inicialmente há uma breve descrição dos princípios da RG, seguido dos princípios básicos do formalismo tensorial e da geometria Riemanniana, sendo estas as ferramentas necessárias para a formulação das equações de campo da gravitação, que serão apresentadas no final do capítulo.

1.1 Os Princípios da Relatividade Geral

A Relatividade Restrita (RR) descreve os fenômenos físicos a partir de *referenciais inerciais*, também chamados de *referenciais de Lorentz*. Um dos postulados básicos da teoria é que as leis da física possuem a mesma forma em todos os referenciais inerciais, ou seja, todos os referenciais inerciais são equivalentes [10]. Entretanto, a RR não é adequada para a descrição de fenômenos gravitacionais, sendo necessário entre outros ingredientes importantes, a extensão do princípio da equivalência das leis físicas para referenciais não-inerciais. A teoria que generaliza o postulado da RR para referenciais não-inerciais é a *Relatividade Geral*, desenvolvida por Einstein [11].

Uma característica fundamental dos referenciais não-inerciais é que são equivalentes a campos gravitacionais. Isto é uma consequência direta do fato experimentalmente comprovado da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional [3].

Assim, para uma partícula em queda livre em um campo gravitacional (que no caso mais geral varia a cada ponto do espaço-tempo) é possível anular os efeitos gravitacionais escolhendo um referencial em uma região infinitesimal na qual o campo gravitacional seja nulo, diz-se então que tal referencial é *localmente inercial* [3]. Neste referencial todas as partículas em queda livre possuem a mesma aceleração devido à equivalência entre as massas inercial e gravitacional, e portanto não é possível detectar o campo gravitacional.

Para um referencial inercial o elemento de linha, que descreve a distância infinitesimal entre dois eventos e caracteriza a geometria do espaço-tempo plano de Minkowski, o chamado *intervalo*, é dado por

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Em um referencial não inercial o intervalo entre dois eventos deve ser descrito por uma métrica não-euclidiana [10]. Assim, a equivalência entre referenciais não-inerciais e campos gravitacionais sugere que o campo gravitacional deve ser descrito como uma modificação na métrica do espaço-tempo que faz, por exemplo, com que as trajetórias das partículas sejam curvas na presença de fontes de campo gravitacional. As fontes por sua vez são a causa da curvatura do espaço-tempo.

O formalismo adequado para a descrição das propriedades do espaço-tempo curvo é a geometria de Riemann ¹. Na geometria de Riemann o objeto fundamental é o *tensor métrico* que caracteriza a métrica do espaço-tempo, generalizando a expressão para o elemento de linha ds . O fato do campo gravitacional estar relacionado a uma modificação na métrica do espaço-tempo implica que o tensor métrico deve fornecer a descrição para o campo gravitacional. Além disso, com a geometria de Riemann podemos generalizar as operações válidas para o espaço-tempo plano, tais como a derivada, de uma forma que sejam independentes do sistema de coordenadas e da natureza do espaço-tempo, sendo então as operações no espaço-tempo plano um caso particular. Além de conhecer a forma geral das operações válidas para qualquer referencial, devemos utilizar um formalismo que permita descrever as leis físicas também de forma independente da natureza do espaço-tempo e do referencial utilizado, sendo que tal condição é satisfeita se utilizarmos o formalismo tensorial. Equações escritas neste formalismo são chamadas de *equações covariantes*.

Podemos resumir tudo que foi dito em dois princípios básicos, que nos permitem estudar qualquer sistema na presença de um campo gravitacional:

Princípio da Equivalência. Em cada ponto do espaço-tempo é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, no qual sejam válidas as leis da física descritas como na teoria da RR.

Princípio da Covariância Geral. Uma lei física é válida na presença de um campo gravitacional se preservar a forma em uma transformação geral de coordenadas, ou seja, precisa ser escrita de forma *covariante*.

Seguindo os princípios enunciados, para descrever um sistema físico na presença de um campo gravitacional devemos escolher um sistema de coordenadas localmente

¹A geometria de Riemann é uma extensão para espaços de n-dimensões da teoria de superfícies curvas de Gauss [12].

inercial onde as leis da física são descritas como na RR. Para incluir os efeitos gravitacionais, substitui-se as operações válidas no espaço plano pelas operações generalizadas do espaço-tempo curvo, preservando a forma da equação, que agora será válida em todos os referenciais. Por outro lado, antes de descrever um sistema na presença de um campo gravitacional, é preciso saber como a geometria do espaço-tempo foi alterada pelas fontes do campo. Para isso utiliza-se uma equação que relaciona as fontes do campo gravitacional com a geometria do espaço-tempo tal que, dada uma distribuição de massa e energia em determinado volume podemos calcular todas as componentes do tensor métrico, que caracterizam a geometria do espaço-tempo. Tal relação é fornecida pelas equações de Einstein [3] (seção 1.7). Nas próximas seções veremos os conceitos básicos de tensores e da geometria de Riemann necessários para a descrição matemática da RG.

1.2 Tensores

Os tensores são objetos que se transformam segundo uma lei *linear e homogênea* sob uma mudança de coordenadas. Devido a esta propriedade uma igualdade entre tensores é preservada em uma mudança de coordenadas. Descrevendo grandezas físicas como tensores, as equações formuladas a partir destes serão covariantes. Nesta seção definiremos os tensores segundo as leis de transformação que obedecem.

Considere a mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, em um espaço de N dimensões, dada por

$$x'^\mu = f^\mu(x^1, x^2, x^3, \dots, x^N), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.1)$$

onde f^μ são funções arbitrárias das antigas coordenadas. Os tensores são definidos a partir das leis de transformação que obedecem sob uma mudança de coordenadas do tipo (1.1). Desta maneira, define-se três tipos de objetos em um espaço de N dimensões, que obedecem diferentes leis de transformação: o *escalar*, o *tensor covariante* e o *tensor contravariante*.

O *escalar* φ (ou *tensor de ordem zero*) é um objeto invariante sob a transformação (1.1):

$$\varphi' = \varphi. \quad (1.2)$$

Um *tensor contravariante de primeira ordem* V^μ ou *vetor contravariante* possui N componentes em um espaço de N dimensões, indicadas pelo índice μ . Sob a mudança de coordenadas (1.1) as componentes do tensor se transformam como ²:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (1.3)$$

onde $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ é a matriz de transformação de (1.1).

Um *tensor covariante de primeira ordem* V_μ ou *vetor covariante* também possui N componentes em um espaço de N dimensões que são indicadas pelo índice μ , e sob a mudança de coordenadas (1.1) se transformam como:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad (1.4)$$

²Usamos a convenção de índices repetidos de Einstein para o somatório.

onde $\partial x^\nu / \partial x'^\mu$ é a matriz de transformação inversa de (1.1).

Os exemplos mais típicos de tensores de primeira ordem são a diferencial das coordenadas dx^μ e o gradiente de uma função escalar $\partial\varphi/\partial x^\mu$, que são respectivamente um tensor contravariante e um tensor covariante de primeira ordem.

A partir das leis de transformações para vetores covariantes e contravariantes (1.3) e (1.4), definimos tensores de ordem superior. Por exemplo, um tensor covariante de segunda ordem em um espaço de N dimensões possui N^2 componentes indicadas por dois índices $(\mu\nu)$, que obedecem à seguinte lei de transformação sob a mudança de coordenadas (1.1):

$$V'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V_{\rho\sigma}. \quad (1.5)$$

Um exemplo de um tensor de segunda ordem é o produto de dois tensores de primeira ordem:

$$U'_\mu W'_\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} U_\rho \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} W_\sigma = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} U_\rho W_\sigma.$$

Analogamente um tensor contravariante de segunda ordem obedecerá à lei de transformação:

$$V'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} V^{\rho\sigma}, \quad (1.6)$$

e um tensor misto de segunda ordem obedecerá à lei de transformação:

$$V'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V^\rho{}_\sigma. \quad (1.7)$$

Generalizando, um tensor de ordem \mathcal{O} qualquer em um espaço de N dimensões é um objeto com $N^\mathcal{O}$ componentes (indicadas por \mathcal{O} índices) que obedecem à seguinte lei de transformação sob uma mudança de coordenadas (1.1):

$$V'^{\dots\mu\dots}{}_{\dots\nu\dots} = \dots \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \dots \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \dots V^{\dots\rho\dots}{}_{\dots\sigma\dots}. \quad (1.8)$$

Observando as leis de transformação, vemos que são lineares e homogêneas. Se existir uma igualdade entre tensores (de mesma ordem), esta é preservada em uma mudança de coordenadas devido à forma da lei de transformação, o que permite a construção de equações covariantes. Por exemplo, no sistema de coordenadas x^μ suponhamos a igualdade

$$V^{\mu\nu} = U^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Multiplicando (1.9) pelas matrizes de transformação $\partial x'^\mu / \partial x^\rho$ e $\partial x'^\nu / \partial x^\sigma$ temos:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} V^{\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} U^{\rho\sigma}.$$

Da lei de transformação para tensores contravariantes de segunda ordem (1.6) temos que a igualdade (1.9) será válida em um referencial x'^μ qualquer:

$$V'^{\mu\nu} = U'^{\mu\nu}.$$

1.2.1 O tensor métrico

Em RR o tensor de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ tem um papel fundamental na definição do intervalo entre dois eventos, caracterizando a métrica do espaço-tempo de Minkowski (ou espaço pseudo-euclidiano). O elemento de linha ds é escrito em função de $\eta_{\alpha\beta}$:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.10)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$, o tensor de Minkowski, é dado pela matriz ³

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e dx^α é a diferencial das coordenadas do espaço-tempo $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Em RG, devido à curvatura do espaço-tempo, o intervalo entre dois eventos deve ser generalizado. Ao invés do tensor de Minkowski, válido somente quando o espaço-tempo é plano, a métrica é determinada pelo *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$ da geometria de Riemann, cujas componentes são funções das coordenadas. O elemento de linha é dado então por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.11)$$

Como o elemento de linha é um invariante, e as diferenciais dx^μ são tensores contravariantes, temos que o $g_{\mu\nu}$ é um tensor covariante. Sendo um tensor covariante, sua lei de transformação é dada por:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (1.12)$$

Uma propriedade importante do tensor métrico é que suas componentes não se alteram em uma troca de índices ⁴, ou seja:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (1.13)$$

Isto significa que em um espaço-tempo quadridimensional das dezesseis componentes do tensor métrico somente dez são independentes.

Define-se o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$ tal que,

$$g_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\nu, \quad (1.14)$$

onde δ_λ^ν é o delta de Kronecker.

E por último define-se a quantidade g ($g < 0$) como o determinante do tensor métrico:

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (1.15)$$

Além disso, o 4-volume invariante em uma mudança de coordenadas (1.1), é definido como:

$$\sqrt{-g} d^4x = \sqrt{-g'} d^4x'. \quad (1.16)$$

³Utilizamos a convenção de sinais de Fock [13]

⁴Ver na próxima seção a definição de tensor simétrico.

1.2.2 Operações algébricas

Para construir equações de forma covariante é preciso utilizar operações tensoriais, ou seja, operações sobre tensores que resultam em tensores. As operações algébricas tensoriais são:

- *Combinação linear.* A combinação linear de dois tensores resulta em um tensor da mesma ordem:

$$V_{\mu\nu} = \alpha W_{\mu\nu} + \beta U_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

onde α e β são constantes.

- *Produto direto.* Multiplicar as componentes de dois tensores resulta em um tensor cuja ordem é a soma das ordens dos tensores multiplicados:

$$V_{\nu\lambda}^{\mu} = W^{\mu} U_{\nu\lambda}. \quad (1.18)$$

- *Operações com os índices.*

Contração: Igualar um índice covariante a um índice contravariante e somar sob seus valores em um tensor misto resulta em um tensor duas ordens inferior ao tensor original:

$$V_{\nu\lambda}^{\mu} \rightarrow V_{\nu\mu}^{\mu} = V_{\nu}. \quad (1.19)$$

Abaixar um índice (tornar um índice contravariante em covariante):

$$V^{\mu} \rightarrow V_{\mu} = g_{\mu\lambda} V^{\lambda}. \quad (1.20)$$

Erguer um índice (tornar um índice covariante em contravariante):

$$V_{\mu} \rightarrow V^{\mu} = g^{\mu\lambda} V_{\lambda}. \quad (1.21)$$

- *Simetria.* Um tensor é dito simétrico se as componentes permanecem inalteradas em uma troca de índices:

$$V_{\mu\nu} = V_{\nu\mu}. \quad (1.22)$$

Podemos *simetrizar* um tensor utilizando a seguinte equação:

$$V_{\{\mu\nu\}} = \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} + V_{\nu\mu}) \quad (1.23)$$

- *Anti-simetria.* Um tensor é dito antissimétrico se as componentes trocam de sinal em uma troca de índices:

$$V_{\mu\nu} = -V_{\nu\mu}. \quad (1.24)$$

Uma consequência desta propriedade é que se um tensor for antissimétrico, todas as componentes da diagonal são nulas:

$$V_{\mu\nu} = -V_{\mu\nu} = 0, \quad \text{para } \mu = \nu. \quad (1.25)$$

Além disso podemos *anti-simetrizar* um tensor utilizando a seguinte equação:

$$V_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(V_{\mu\nu} - V_{\nu\mu}). \quad (1.26)$$

1.3 Equação de Movimento de uma partícula na RG

Nesta seção aplicamos os princípios da RG para descrever o movimento de uma partícula em um campo gravitacional.

O movimento de uma partícula na RG é determinado pelo Princípio da Equivalência. Considerando uma partícula em queda-livre em um campo gravitacional, é possível construir um referencial localmente inercial de coordenadas ξ^α . Neste referencial os efeitos gravitacionais são anulados e a partícula realiza um movimento retilíneo uniforme, dado pela equação diferencial

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} = 0, \quad (1.27)$$

onde λ é a variável que parametriza a curva descrita no espaço-tempo pela partícula, que pode ser o tempo próprio por exemplo.

De um ponto de vista geométrico, a equação (1.27) é a equação de uma reta que em um espaço-tempo plano descreve a menor distância entre dois eventos, a chamada curva *geodésica*. Na presença de um campo gravitacional a trajetória da partícula não é uma reta devido à curvatura do espaço-tempo, assim a trajetória deverá obedecer à equação de uma geodésica no espaço-tempo curvo.

Para obter a equação de uma geodésica podemos recorrer ao cálculo variacional, minimizando a integral do elemento de linha ds :

$$S = \int ds \rightarrow \delta S = \delta \int ds = 0. \quad (1.28)$$

O elemento de linha ds para um espaço-tempo caracterizado por uma métrica $g_{\mu\nu}$ é dado pela equação (1.11). Podemos escrever ds em função de um parâmetro λ da curva $x^\mu = x^\mu(\lambda)$:

$$ds = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (1.29)$$

A minimização da integral será dada então por:

$$\delta S = \delta \int \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda = 0. \quad (1.30)$$

Variando a integral temos:

$$\delta S = \int \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} \delta \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (1.31)$$

Mas $\{g_{\mu\nu}(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)\}^{-\frac{1}{2}} = ds^{-1}$, logo a integral a ser minimizada agora é:

$$\int \delta \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (1.32)$$

A solução é obtida através das equações de Euler-Lagrange (E-L):

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\kappa} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\kappa} = 0. \quad (1.33)$$

onde $\dot{x}^\kappa = dx^\kappa/d\lambda$, e

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (1.34)$$

Resolvendo as equações de E-L para a lagrangeana L dada pela equação anterior, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\kappa} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\ &= g_{\mu\kappa} \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Simetrizando as derivadas do tensor métrico, temos:

$$0 = g_{\mu\kappa} \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda},$$

e, multiplicando por $g^{\kappa\tau}$, chegamos à *equação de uma curva geodésica*, que descreve o movimento de uma partícula em um espaço-tempo caracterizado pela métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2 x^\tau}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (1.35)$$

onde,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\tau = \frac{1}{2} g^{\kappa\tau} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \quad (1.36)$$

são os *símbolos de Christoffel*.

Observando a equação obtida para a curva geodésica (1.35), vemos que esta se reduz à (1.27) em um referencial inercial como esperado, pois neste caso as derivadas do tensor métrico e os símbolos de Christoffel são nulos. Este fato nos mostra também que os símbolos de Christoffel não são tensores, pois quando um tensor é nulo em um referencial deve ser nulo em todos os referenciais, devido às leis de transformação serem lineares e homogêneas.

É interessante notar que esta forma da equação de movimento mostra que o movimento da partícula é determinado somente pela geometria do espaço-tempo, pois o segundo termo da equação depende do tensor métrico através dos símbolos de Christoffel.

Podemos chegar à mesma equação de movimento também através de uma mudança do referencial inercial ξ^α para um referencial qualquer x^μ , com a qual podemos obter a lei de transformação para os símbolos de Christoffel. Numa mudança de referencial $\xi^\alpha \rightarrow x^\mu$, da equação (1.27), temos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0; \quad (1.37)$$

Multiplicando por $\partial x^\mu / \partial \xi^\alpha$, chegamos à equação de movimento no referencial x^μ :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.38)$$

Comparando com (1.35) identificamos os símbolos de Christoffel como sendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (1.39)$$

obtendo assim os símbolos de Christoffel em função das coordenadas x^μ e ξ^α . Através desta expressão é fácil chegar à lei de transformação dos símbolos de Christoffel em uma mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ [3]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (1.40)$$

A presença do termo não-homogêneo mostra que os símbolos de Christoffel não são tensores, como é esperado, pois não obedecem à uma lei de transformação linear e homogênea.

Da equação de movimento podemos traçar um paralelo entre a teoria newtoniana da gravitação e a RG. O termo $d^2 x^\tau / d\lambda^2$ é uma aceleração, então o segundo termo deve corresponder à força gravitacional, ou seja, o termo que envolve os símbolos de Christoffel representa a força exercida pelo campo sobre a partícula. Lembrando que na teoria newtoniana, a força é o negativo do gradiente do potencial gravitacional e olhando para a forma dos símbolos de Christoffel vemos que o tensor métrico deve representar o potencial.

1.4 Derivada Covariante

A definição da derivada aplicada em um tensor contravariante V^μ ,

$$\lim_{\delta x^\kappa \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x^\kappa + \delta x^\kappa) - V^\mu(x^\kappa)}{\delta x^\kappa}, \quad (1.41)$$

mostra que esta não é uma operação tensorial. Na equação anterior a diferença

$$V^\mu(x^\kappa + \delta x^\kappa) - V^\mu(x^\kappa) = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\kappa} \delta x^\kappa = \delta V^\mu \quad (1.42)$$

é tomada entre tensores definidos em pontos diferentes e com matrizes de transformação diferentes, e portanto não é um tensor. Derivando a equação (1.3) obtemos a lei de transformação para a derivada de um tensor contravariante:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V^\rho. \quad (1.43)$$

Observando a equação obtida, vemos que a derivada não obedece à lei de transformação de um tensor devido à presença do segundo termo da direita, que só se

anulará quando a transformação de coordenadas (1.1) for linear. Isto ocorre somente quando o espaço-tempo é euclidiano, no qual utilizam-se as transformações de Lorentz:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (1.44)$$

onde Λ_{ν}^{μ} é a matriz de transformação cujos coeficientes são constantes. Neste caso a derivada torna-se uma operação tensorial. Mas quando (1.1) não é linear deve-se generalizar a expressão da derivada para obter uma operação tensorial, com a qual seja possível construir equações covariantes. Para isso, a partir de quantidades conhecidas, definiremos uma operação diferencial tensorial, a *derivada covariante*.

Utilizaremos as leis de transformação de um tensor contravariante (1.3), da derivada ordinária de um tensor contravariante (1.43) e dos símbolos de Christoffel (1.40), que pode ser escrita na forma [3]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho} - \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}. \quad (1.45)$$

Multiplica-se (1.3) e (1.45):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V^{\nu} = \left[\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho} - \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right] \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} V^{\kappa} \quad (1.46)$$

Somando (1.46) com a lei de transformação da derivada de um tensor contravariante (1.43) temos:

$$\frac{\partial V'^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial V^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} V^{\nu} \right). \quad (1.47)$$

Definimos então a *derivada covariante de um tensor contravariante* como:

$$V^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} V^{\nu}, \quad (1.48)$$

pois como mostra a equação (1.47), trata-se de uma operação tensorial. Observa-se também que no espaço euclidiano a derivada covariante, reduz-se à derivada ordinária como esperado, pois os símbolos de Christoffel se anulam.

De maneira análoga, define-se a derivada covariante de um tensor covariante:

$$V_{\mu;\lambda} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V_{\nu}, \quad (1.49)$$

e a derivada covariante de tensores de ordem superior:

$$V^{\mu\dots}_{\nu\dots;\kappa} = \frac{\partial V^{\mu\dots}_{\nu\dots}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\rho}^{\mu} V^{\rho\dots}_{\nu\dots} + \dots - \Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} V^{\mu\dots}_{\sigma\dots} - \dots \quad (1.50)$$

A derivada covariante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é nula, pois esta se anula em um sistema de coordenadas localmente inercial, onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda} = 0$. Sendo uma operação tensorial, a derivada covariante do tensor métrico portanto é nula em todos os referenciais.

Podemos definir também algumas operações conhecidas do cálculo vetorial de forma covariante ⁵:

⁵Para demonstrações ver [3][10]

- *Gradiente:*

$$\varphi_{;\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \quad (1.51)$$

- *Divergente:*

$$V^\mu_{;\mu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} V^\sigma, \quad (1.52)$$

que também pode ser escrito como

$$V^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}V^\mu)}{\partial x^\mu}. \quad (1.53)$$

- *Rotacional:*

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} \quad (1.54)$$

- *Teorema de Gauss:* Da equação (1.53), definimos o teorema de Gauss para um vetor contravariante, de forma covariante:

$$\oint V^\mu \sqrt{-g} dS_\mu = \int V^\mu_{;\mu} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (1.55)$$

onde dS_μ é o elemento de superfície que envolve o elemento de volume $d\Omega$.

- *Teorema de Stokes:*

$$\oint V_\mu dx^\mu = \int df^{\mu\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \int df^{\mu\nu} (V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu}), \quad (1.56)$$

onde $df^{\mu\nu}$ é o elemento da superfície envolvida por dx^μ .

1.4.1 Derivação covariante ao longo de uma curva

Vamos considerar agora a derivação de um tensor contravariante $V^\mu(\tau)$ definido ao longo de uma curva $x^\mu(\tau)$. Ao invés de definir a derivada de $V^\mu(\tau)$ em relação às coordenadas, deve-se definir em relação ao parâmetro τ da curva.

Define-se então a *derivada covariante de um tensor contravariante ao longo de uma curva*, ou *derivada absoluta*, contraindo a derivada covariante deste tensor com o tensor tangente à curva, $dx^\mu(\tau)/d\tau$:

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = V^\mu_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.57)$$

Da mesma forma, a derivada absoluta de um tensor covariante é dada por:

$$\frac{DV_\mu}{D\tau} = V_{\mu;\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dV_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.58)$$

Quando a derivada absoluta de um tensor é nula, por exemplo, no caso de um tensor covariante, da equação (1.58), temos que

$$\frac{dV_\mu}{d\tau} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1.59)$$

e neste caso diz-se que o tensor é *transportado paralelamente* ao longo da curva, pois as componentes deste tensor permanecem constantes ao longo da curva em um sistema de coordenadas localmente plano, onde os símbolos de Christoffel são nulos. Ou seja, definindo um tensor $V_\mu(P)$ em um ponto P da curva $x^\mu(\tau)$ a equação

$$\frac{DV_\mu}{D\tau} = 0$$

define em cada ponto da curva $x^\mu(\tau)$ um tensor paralelo à $V^\mu(P)$. Por exemplo, na equação de movimento de uma partícula em um campo gravitacional (1.27), definindo o vetor velocidade como $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, temos que

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\lambda U^\nu \rightarrow \frac{DU^\mu}{D\tau} = 0.$$

Logo, neste caso, o tensor velocidade $U^\mu(\tau)$ é transportado paralelamente ao longo da curva que determina a trajetória da partícula. Nota-se que a equação da geodésica escrita através da derivada covariante absoluta está de acordo com o Princípio da Equivalência.

1.5 Tensor de Riemann

A natureza de um espaço não-euclidiano manifesta-se de várias maneiras: as segundas derivadas covariantes de um tensor não comutam, existe um desvio entre curvas geodésicas inicialmente paralelas e uma variação de um tensor no transporte paralelo em uma curva fechada [14]. Todas essas propriedades dependem de um tensor de quarta ordem chamado *tensor de Riemann*, que é nulo somente quando o espaço é plano. A existência de alguma componente não nula do tensor de Riemann implica na existência de um espaço curvo. Assim, sendo a gravidade uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, o tensor de Riemann tem um papel fundamental na RG. Nesta seção será apresentado uma dedução do tensor de Riemann através do transporte paralelo de um tensor em um caminho fechado. Poderíamos utilizar também o desvio geodésico e as segundas derivadas covariantes de um tensor para esta dedução [14].

Consideramos um tensor covariante V_μ . Transportando paralelamente ao longo de um caminho fechado infinitesimal, V_μ sofre uma variação ΔV_μ . Como visto na seção anterior, no transporte paralelo a derivada absoluta do tensor é nula. Então, da equação (1.59), integrando a variação ao longo do caminho, temos

$$\Delta V_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda dx^\nu. \quad (1.60)$$

Integra-se a equação através do teorema de Stokes (1.56):

$$\begin{aligned} \Delta V_\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda)}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial(\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda)}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\kappa\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} V_\lambda - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} V_\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\kappa\nu}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

onde $\Delta f^{\kappa\nu}$ é a área delimitada pelo contorno infinitesimal. Considerando somente variações em primeira ordem para os termos dependentes da derivada de V_μ , de (1.59) teremos:

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\kappa} = \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda. \quad (1.62)$$

Substituindo as derivadas na equação (1.61), temos:

$$\begin{aligned} \Delta V_\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\tau\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau - \Gamma_{\mu\kappa}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \right] V_\lambda \Delta f^{\kappa\nu} \\ &= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda V_\lambda \Delta f^{\kappa\nu}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

onde

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\tau\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau - \Gamma_{\mu\kappa}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\lambda. \quad (1.64)$$

é o *tensor de Riemann* ou *tensor de curvatura* ⁶. Analogamente, para um tensor covariante V^μ teremos

$$\Delta V^\mu = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda V^\mu \Delta f^{\nu\kappa}. \quad (1.65)$$

O tensor de Riemann depende em segunda ordem dos símbolos de Christoffel e linearmente das derivadas destes, e depende portanto das derivadas primeira e segunda do tensor métrico. Assim, em um espaço plano o tensor de Riemann será nulo. Já em um espaço curvo o tensor de Riemann terá sempre componentes não nulas pois, apesar de ser sempre possível anular os símbolos de Christoffel em um sistema de coordenadas localmente plano, o mesmo não ocorre com as derivadas.

1.5.1 Propriedades do tensor de Riemann

As principais propriedades do tensor de Riemann são listadas a seguir.

- Define-se o *tensor de Riemann covariante*:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\tau} R_{\mu\nu\kappa}^\tau, \quad (1.66)$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) + \\ &+ g_{\tau\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma - \Gamma_{\mu\kappa}^\tau \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma) \end{aligned} \quad (1.67)$$

- Da contração do tensor de Riemann, define-se:

O *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^\lambda = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \quad (1.68)$$

⁶A convenção de sinais está de acordo com a convenção utilizada por Fock [13]. Ver também [14] para uma relação das convenções de sinais utilizadas por diversos autores.

A curvatura escalar:

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} = g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \quad (1.69)$$

- Propriedades de simetria e anti-simetria:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = -R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}; \quad (1.70)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} \quad (\rightarrow R_{\mu\mu\nu\kappa} = 0); \quad (1.71)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} \quad (\rightarrow R_{\lambda\mu\nu\nu} = 0); \quad (1.72)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\nu}. \quad (1.73)$$

- Das propriedades de simetria, seguem as identidades:

Permutando os índices μ, ν, κ :

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} + R_{\kappa\mu\nu}^{\lambda} + R_{\nu\kappa\mu}^{\lambda} = 0; \quad (1.74)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (1.75)$$

Identidades de Bianchi:

$$R_{\mu\nu\kappa;\tau}^{\lambda} + R_{\mu\tau\nu;\kappa}^{\lambda} + R_{\mu\kappa\tau;\nu}^{\lambda} = 0. \quad (1.76)$$

Através de contrações sucessivas dos índices, podemos escrever as identidades de Bianchi sob a forma:

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} = 0. \quad (1.77)$$

- Número de componentes independentes do tensor de Riemann:

Devido às propriedades cíclicas e de simetria do tensor de Riemann, é possível mostrar que em um espaço de N dimensões o número de componentes independentes do tensor de Riemann e do tensor de Ricci são dados respectivamente por

$$C_N = \frac{1}{12}N^2(N^2 - 1) \quad (1.78)$$

$$R_N = \frac{1}{2}N(N + 1), \quad \text{para } N > 2. \quad (1.79)$$

Assim, para $N=4$ temos $C_4 = 20$ e $R_4 = 10$, e para $N=3$ temos $C_3 = R_3 = 6$.

Para $N=2$, a equação (1.78) mostra que existe somente uma componente independente do tensor de Riemann, ou seja, $C_N = 1$. Tomando por exemplo a componente R_{0101} , as outras componentes não nulas são relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -R_{1001} = -R_{0110} = R_{1010}, \\ R_{0000} &= R_{1111} = R_{1100} = R_{0011} = 0. \end{aligned}$$

Estas relações podem ser reescritas através da seguinte equação:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{R_{0101}}{g}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}), \quad (1.80)$$

Contraindo os índices, obtemos a seguinte relação:

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{R_{0101}}{g}, \quad (1.81)$$

e contraindo novamente obtemos:

$$R = 2 \frac{R_{0101}}{g}. \quad (1.82)$$

Substituindo (1.82) em (1.80) chegamos a seguinte relação entre o tensor de Riemann e o escalar de curvatura:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}R(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}), \quad (1.83)$$

e das equações (1.81) e (1.82) obtemos uma relação entre o tensor de Ricci e o escalar de curvatura:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.84)$$

Da última equação vemos que os números de componentes independentes do tensor de Ricci em 2D e do tensor métrico são os mesmos. Além disso, em 2D o tensor métrico pode sempre ser mapeado em um plano, fazendo $g_{\mu\nu} = \rho(x)\eta_{\mu\nu}$ ($\rho(x)$ é uma função das coordenadas x^μ), o que implica que em 2D o tensor métrico tem somente uma componente independente. Portanto, em 2D o tensor de Ricci, assim como o tensor de Riemann, possui somente uma componente independente, $R_N = 1$.

1.6 Leis de conservação no espaço-tempo curvo

Quando consideramos um sistema qualquer e queremos representar a energia e o momento desse sistema de forma covariante utilizamos o *tensor energia-momento* $T^{\mu\nu}$. Cada componente do tensor de energia-momento possui um significado físico: a componente T^{00} é a densidade de massa-energia, as componentes espaço-temporais T^{i0} ou T^{0i} são fluxo de momento ou energia, e as componentes espaço-espaço T^{ij} são as componentes do fluxo de momento (pressão).

O exemplo típico é o tensor de energia-momento de um fluido perfeito com densidade de massa-energia ρ , pressão p e 4-velocidade u^μ :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (1.85)$$

A lei de conservação do tensor de energia-momento no espaço-tempo plano é expressa na forma de um divergente nulo. No caso do tensor de energia-momento, temos então:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.86)$$

Integrando esta equação sobre um volume dx^4 , e utilizando o teorema de Gauss para transformar a integral sobre o 4-volume em uma integral sobre a hipersuperfície d^3x_μ ⁷, temos:

$$\int \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} d^4x = \oint T^{\mu\nu} d^3x_\nu = 0. \quad (1.87)$$

Definimos uma quantidade conservada a partir da equação (1.87) considerando uma integral do volume delimitado por duas hipersuperfícies espaciais ($x^0 = \text{constante}$):

$$\oint T^{\mu\nu} d^3x_\nu = \int_{s_2} T^{\mu 0} d^3x - \int_{s_1} T^{\mu 0} d^3x = 0 \rightarrow \int T^{\mu 0} d^3x = \text{constante}. \quad (1.88)$$

Segue então que a quantidade conservada é P^μ , o 4-momento total do sistema:

$$P^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x. \quad (1.89)$$

Em RG, pelo Princípio da Covariância Geral, a generalização da equação (1.86), é dada pela derivada covariante de $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (1.90)$$

que também pode ser escrita através da derivada covariante do tensor de energia-momento misto:

$$T^{\nu}{}_{\mu;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(T^{\nu}{}_{\mu} \sqrt{-g})}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} T^{\nu\lambda} = 0. \quad (1.91)$$

Desta equação não é possível deduzir uma quantidade conservada, como no caso anterior. Isso deve-se ao fato que na formulação de uma lei de conservação na presença de um campo gravitacional é preciso conservar o 4-momento de matéria e energia juntamente com o 4-momento do próprio campo gravitacional. Ou seja, devemos procurar uma lei de conservação do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0, \quad (1.92)$$

onde $t^{\mu\nu}$ descreve a contribuição do campo gravitacional. De maneira análoga ao caso em que o espaço é plano, a quantidade conservada será o 4-momento total:

$$P^\mu = \int (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) d^3x. \quad (1.93)$$

Esta lei de conservação, porém, se torna relevante apenas em casos especiais, pois $t^{\mu\nu}$ é um *pseudo-tensor* e a sua contribuição para a lei de conservação portanto não é covariante. Para uma discussão mais detalhada ver [3][10],[14].

1.7 Equações de Campo de Einstein

Na seção 1.3 foi visto como a geometria do espaço-tempo afeta o movimento das partículas. Agora veremos como as fontes do campo gravitacional, representadas

⁷Ou seja, uma 3-superfície que envolve o 4-volume do espaço-tempo

pelo tensor energia-momento, estão relacionadas com a geometria do espaço-tempo. Esta relação é fornecida pelas equações de campo de Einstein, com as quais calcula-se a geometria do espaço-tempo (o tensor métrico $g_{\mu\nu}$) a partir do tensor energia-momento da região considerada.

As equações de campo podem ser deduzidas pelo princípio da ação mínima para uma variação arbitrária da métrica $\delta g_{\mu\nu}$ para a ação total do sistema: a ação do campo gravitacional S_g e a ação da matéria-energia S_m ,

$$S_T = S_m + S_g \quad \rightarrow \quad \delta(S_g + S_m) = 0.$$

A ação de um sistema é escrita em termos da integral de um escalar, em todo o espaço e em um intervalo de tempo. Vamos considerar primeiro a ação do campo gravitacional, dada por [10]

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}d^4x = S_g = \int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.94)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e c é a velocidade da luz. Esta ação é construída a partir do escalar de curvatura R , que é o escalar mais simples que pode ser construído com o tensor de Riemann.

Variando a ação, teremos

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int [R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}] d^4x. \quad (1.95)$$

Para a variação de $\sqrt{-g}$, observamos a seguinte relação para a contração dos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}},$$

e, da seguinte propriedade de uma matriz M

$$Tr \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{\partial(\ln \text{Det}M)}{\partial x^{\lambda}},$$

temos que a equação anterior pode ser escrita como:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln g = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\lambda}}.$$

Comparando as duas relações para $\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}$, temos que:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (1.96)$$

Assim, a variação da ação fica:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g}d^4x \quad (1.97)$$

Resta calcular a variação $\delta R_{\mu\nu}$. Da contração do tensor de Ricci temos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}. \quad (1.98)$$

Olhando para a lei de transformação dos símbolos de Christoffel (1.40), temos que a diferença entre dois símbolos de Christoffel definidos no mesmo ponto é um tensor, pois os termos inhomogêneos da lei de transformação anulam-se mutuamente. Assim, a diferencial $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é um tensor, pois somente a métrica está sendo variada e não as coordenadas, e podemos definir portanto sua derivada covariante:

$$(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\kappa} = \frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\eta - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \delta\Gamma_{\eta\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\kappa}^\eta \delta\Gamma_{\mu\eta}^\lambda. \quad (1.99)$$

Das equações (1.98) e (1.99) é possível escrever $\delta R_{\mu\nu}$ em função das derivadas covariantes de $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$:

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda}. \quad (1.100)$$

Podemos agora calcular a segunda integral da equação (1.97), dependente de $\delta R_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int \sqrt{-g} [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu} - (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda}] d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda} d^4x \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x^\lambda} [\sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)] d^4x. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Na última passagem utilizamos a definição de divergente (1.53). Da lei de Gauss, esta integral pode ser transformada em uma integral de superfície, que se anula na fronteira de integração. Então, a variação da ação do campo gravitacional é:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.102)$$

Considerando agora a ação das fontes (matéria e energia), dada por [10]

$$S_m = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.103)$$

onde $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ é a densidade de lagrangeana das fontes. Variando a ação, obtemos

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.104)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento das fontes, que está relacionado com a densidade de lagrangeana da seguinte maneira [10]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \quad (1.105)$$

Então, de (1.102) e (1.104), temos que variação da ação total é

$$\delta(S_g + S_m) = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.106)$$

Como $\delta g^{\mu\nu}$ são arbitrários, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.107)$$

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.108)$$

As equações (1.107) são as *equações do campo gravitacional de Einstein*, e o tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.109)$$

é chamado de *tensor de Einstein*.

Podemos reescrever as equações de Einstein sob uma forma mais conveniente, se contraírmos com $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad R = \frac{8\pi G}{c^4} T,$$

onde $T = T^\mu_\mu$ é o traço do tensor energia-momento. Substituindo a curvatura escalar R nas equações de Einstein pela expressão anterior, temos:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.110)$$

Assim, no vácuo onde $T^{\mu\nu}$ é nulo, as equações de Einstein são simplesmente:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.111)$$

Observa-se também que as equações de Einstein devem satisfazer as identidades de Bianchi contraídas (1.77), que estão relacionadas às transformações de simetrias da teoria (TGC). Como consequência, temos que as fontes do campo gravitacional devem obedecer à lei de conservação do tensor energia-momento. Ao introduzir mais um termo linear em $g_{\mu\nu}$ tais condições continuam sendo satisfeitas, pois $g^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0$, e teremos então:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.112)$$

onde Λ é chamada de constante cosmológica, que foi introduzida por Einstein para possibilitar a existência de soluções cosmológicas estacionárias. Hoje em dia este termo é associado à energia de vácuo e é colocado do lado direito da equação, como termo de fonte gravitacional. No próximo capítulo utilizamos a RG para estudar uma das principais aplicações: a Cosmologia Relativística.

Capítulo 2

Cosmologia Relativística

‘‘The evolution of the world can be compared to a display of fireworks that has just ended; some few red wisps, ashes and smoke. Standing on a cooled cinder, we see the slow fading of the suns, and we try to recall the vanished brilliance of the origin of the worlds.’’

(George Lemaître)

A *Cosmologia Relativística* descreve a dinâmica do universo em grandes escalas. Esta descrição é baseada em duas teorias fundamentais: a *Relatividade Geral* e a *Termodinâmica Relativística*.

A gravitação é a força fundamental que domina a dinâmica em escalas astronômicas. No capítulo anterior vimos que na Relatividade Geral (RG) a gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo e as equações de campo de Einstein (ECE) relacionam a geometria com as fontes de campo gravitacional, fornecendo a dinâmica do sistema. Em Cosmologia assume-se que o mesmo é válido em grandes escalas (~ 100 Mpc, $1 \text{ Mpc} = 3.09 \times 10^{24} \text{ cm} = 3.26 \times 10^6$ anos – luz) e através das ECE determina-se a dinâmica do universo.

A Termodinâmica Relativística (TR), que fornece a descrição covariante de gases e fluidos, é utilizada em Cosmologia para descrever as fontes do campo gravitacional. Esta descrição é possível desde que em grande escala assumam-se que as fontes se comportem como um fluido.

Somados à RG e à TR, temos alguns princípios e observações astronômicas que servem como guias na construção de um modelo cosmológico. A partir do *Princípio Cosmológico* assume-se que a métrica do universo é homogênea e isotrópica, o que é comprovado observacionalmente [1][15].

Dentro de cada modelo cosmológico há liberdade para construir diversos cenários dominados por diferentes constituintes. Cada cenário descreve uma era da evolução do universo. Por exemplo, no *modelo padrão* ou “*big-bang quente*” descreve-se desde a era posterior à singularidade inicial, passando pelas eras da radiação e da matéria, até o presente. Este modelo é notável pois prevê a existência da Radiação Cósmica de fundo com temperatura $T \sim 2,7 \text{ K}$ e a abundância cósmica de elementos leves [1]. Veremos porém que apesar das previsões notáveis, este modelo não é capaz de explicar uma série de fenômenos, e deve ser portanto revisto. Outros modelos foram propostos com o objetivo de descrever o universo primordial e resolver os problemas

presentes no modelo padrão. Um exemplo é o *modelo inflacionário* em que o universo possui uma fase de forte aceleração positiva e é dominado pela energia de um campo, como por exemplo, um *campo escalar*.

Este capítulo é dedicado à apresentação dos modelos cosmológicos, incluindo os modelos padrão e inflacionário.

2.1 Fundamentos

Nesta seção será feita uma revisão sobre alguns fundamentos necessários para a construção dos modelos cosmológicos. Primeiro falamos do Princípio Cosmológico e da expansão do universo, a partir dos quais deriva-se a métrica de Robertson-Walker que descreve a geometria do espaço-tempo, e determina-se também como os constituintes presentes no modelo devem estar distribuídos espacialmente. Por último veremos o sistema de coordenadas comóveis que é adotado na maioria dos modelos cosmológicos.

2.1.1 Princípio Cosmológico e a estrutura do universo em grande escala

O *Princípio Cosmológico* estabelece a existência de duas invariâncias espaciais em escalas cosmológicas: a *isotropia* e a *homogeneidade*. Isto significa que a cada instante de tempo na variedade 4-dimensional do espaço-tempo define-se uma hipersuperfície invariante sob translações e rotações, devido respectivamente à homogeneidade e à isotropia [3][14]. Como consequência, em um dado instante o universo “parece” o mesmo em qualquer ponto e em qualquer direção, não havendo posição privilegiada ¹.

A homogeneidade e isotropia do espaço requerem que a distribuição de matéria possua a mesma simetria. Em pequenas escalas observa-se que a matéria se aglomera em forma de estrelas, galáxias, etc. Entretanto, em escalas maiores (~ 100 Mpc) observa-se que as galáxias são distribuídas de maneira uniforme [14]. Além disso, o estudo da Radiação Cósmica de Fundo (*Cosmic Background Radiation*, CBR) fornece evidências do tipo de distribuição de matéria/energia em $t \sim 300\,000$ anos [16] (t é o tempo universal, ver seção 2.1.3). As medidas mostram que a CBR é uniforme em uma parte para 10^5 [16].

2.1.2 A Expansão do universo

Em 1922 o primeiro modelo cosmológico não estático e com fontes ² baseado nas equações de Einstein foi proposto por Friedmann [1]. No final da década o trabalho de Hubble a respeito do *desvio para o vermelho* das galáxias mostrou que estas estão se afastando com uma velocidade proporcional à distância, o que é agora conhecido

¹A não existência de posição privilegiada no universo é conhecido como *Princípio de Copérnico*. Partindo deste também é possível chegar ao Princípio Cosmológico .

²O modelo de DeSitter (1917) é o precursor dos modelos não estáticos. Este modelo porém não possui fontes e a expansão dura para sempre.

como *Lei de Hubble*. Lemaître (1929), revendo o modelo de Friedmann mostrou que a Lei de Hubble é um fenômeno puramente cosmológico devido à expansão do espaço-tempo. O espectro de emissão de luz de uma galáxia pode ainda ser deslocado devido ao *efeito Doppler* e ao *desvio para o vermelho gravitacional*, mas esses efeitos são devidos à interações locais entre as galáxias; a grandes distâncias são desprezíveis [1].

A expansão do universo implica que o espaço entre duas partículas (ou duas galáxias, e.g.), distantes o suficiente para que possamos ignorar uma possível interação com a vizinhança, está aumentando. Consideramos um par de galáxias bem afastadas. A distância própria entre as galáxias é dada por:

$$l(t) = l_0 a(t) \quad (2.1)$$

onde l_0 é a distância no tempo $t = t_0$ (t é o tempo universal) e $a(t)$ é um fator de escala que determina a distância em função do tempo. Derivando a equação anterior obtemos que a velocidade de afastamento de uma galáxia em relação a outra é dada por

$$v = \frac{d}{dt} l(t) = l_0 \frac{d}{dt} a(t) = l \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t) l(t), \quad (2.2)$$

onde $H(t)$ é o fator de escala de Hubble, cujo valor atual é estimado em $H_0 = 72 \pm 8 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 100 h \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, onde $h = 0.72 \pm 8$ é uma constante adimensional referente à incerteza na medida [17].

Se o espaço entre as galáxias está aumentando é possível associar um desvio para o vermelho no espectro de luz emitido por uma galáxia ao ser observado em outra galáxia distante. Define-se então o desvio para o vermelho z , que mede o deslocamento do espectro

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e}, \quad (2.3)$$

onde λ_e é o comprimento de onda emitido por uma galáxia e λ_o é o observado por outra galáxia. É possível relacionar o desvio para o vermelho z ao parâmetro de Hubble. Para baixas velocidades é possível mostrar que [1]

$$z = \frac{v}{c} = \frac{Hl}{c}. \quad (2.4)$$

A expansão do universo deve respeitar o Princípio Cosmológico, ou seja, deve ser a mesma em todos os pontos e em qualquer direção e não deve existir algo como “um centro de expansão” por exemplo. Um argumento dado por Lemaître (1931) mostra como um universo em expansão respeita o Princípio Cosmológico. Sejam três galáxias distantes que definem os vértices de um triângulo. Em um tempo t_0 o triângulo é definido pelas distâncias entre as galáxias e os ângulos de cada vértice. Em um universo isotrópico e homogêneo, em um tempo t posterior o triângulo deverá ter os mesmos ângulos e as distâncias reescaladas por um *único* fator de escala $a(t)$.

2.1.3 Coordenadas comóveis

Para construir a métrica homogênea e isotrópica que descreve o universo é preciso definir o sistema de coordenadas a ser utilizado, o chamado *sistema de coordenadas comóveis*.

Considerando o universo em grande escala, tal que seja possível eliminar os efeitos gravitacionais locais, define-se um conjunto de partículas (que podem ser galáxias, e.g.) em repouso em relação ao movimento médio da vizinhança. Cada partícula possui coordenadas espaciais fixas x^i e possui um relógio que determina o tempo t (o tempo próprio τ no referencial da partícula). O *sistema de coordenadas comóveis* é definido pelo conjunto (x^i, t) de cada partícula. Este sistema é assim chamado por acompanhar o movimento coletivo do sistema de partículas. Por exemplo, em um fluido com velocidade coletiva \vec{v} , uma partícula com a mesma velocidade está em repouso em relação ao sistema de coordenadas comóveis. Em cosmologia adota-se as coordenadas comóveis e um referencial fixo sobre uma galáxia e, portanto, em repouso em relação ao sistema de coordenadas.

A quadrivelocidade coletiva do sistema de partículas U^μ no sistema comóvel é

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (2.5)$$

pois como $x^i = \text{constante}$,

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = 0. \quad (2.6)$$

Além disso, normalizando U^μ tal que

$$U^\mu U_\mu = 1, \quad (2.7)$$

temos que

$$U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = g_{00} U^0 U^0 = 1 \rightarrow U^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \quad (2.8)$$

A seguir mostramos como a métrica em um sistema de coordenadas comóveis pode ser simplificada. Primeiro, para dois eventos ao longo da linha de mundo de um observador típico (fixo sobre uma galáxia, e.g.) a separação espacial será $dx^i = 0$. O intervalo ds será o intervalo de tempo próprio medido pelo observador. Teremos portanto

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2 = g_{00} dt^2. \quad (2.9)$$

Podemos agora sincronizar os relógios fazendo $g_{00} = 1$, tal que o tempo t é o tempo próprio medido em todos os pontos do espaço-tempo. Assim, o tempo t é o *tempo universal*, já que é mesmo para todos os observadores. É possível também eliminar as componentes g_{i0} da métrica, supondo que as partículas estão todas em repouso em $t = 0$ da maneira a seguir. Considere um referencial localmente inercial x'^μ para cada partícula que preenche o espaço. Neste referencial a separação entre as partículas P com as vizinhas de coordenadas comóveis x^μ é espacial:

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^i} \right)_{t=0, x^i=x^i_p} = 0, \quad (2.10)$$

e a trajetória de P no espaço-tempo é temporal:

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial t} \right)_{t=0, x^i=x^i_p} = 0. \quad (2.11)$$

Sendo o referencial x'^{μ} localmente inercial, a métrica é localmente plana $\eta_{\mu\nu}$ e no sistema comóvel x^{μ} em $t=0$ teremos

$$g_{0i}(x^i_P, 0) = \left[\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial t} \right]_{t=0, x^i=x^i_P} = 0. \quad (2.12)$$

Logo temos $g_{i0} = 0$ para todos os pontos do espaço no referencial comóvel. Teremos então que o intervalo infinitesimal no referencial comóvel é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.13)$$

2.2 Métrica de Robertson-Walker

De acordo com o que foi visto nas seções anteriores a métrica que descreve o universo deve ser homogênea e isotrópica em expansão. A métrica mais geral com estas características é a *métrica de Robertson-Walker*. Para construir tal métrica, considera-se o referencial comóvel no qual é possível escrever o elemento de linha segundo a equação (2.13). Introduzindo na parte espacial da métrica uma função do tempo $a(t)$ descreve a expansão do universo temos

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - a(t)^2 d\sigma^2, \quad (2.14)$$

onde t é o tempo universal, γ_{ij} é o 3-tensor métrico que descreve o espaço tridimensional e $a(t)$ é conhecido como fator de escala. A parte espacial $d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ da métrica (2.14) descreve espaços tridimensionais de curvatura constante. Devido à homogeneidade e isotropia a curvatura deve ser constante em cada ponto. O tensor de Riemann dos espaços de curvatura constante é determinado somente pelo tensor métrico [12]:

$$R_{ijkl} = k (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}), \quad (2.15)$$

onde k é chamada de curvatura, que caracteriza a geometria do espaço: se k é positivo, negativo ou nulo a geometria da hipersuperfície é fechada, aberta ou plana, respectivamente. Contraíndo (2.15) obtemos o tensor de Ricci

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = 2k g_{jl}. \quad (2.16)$$

Contraíndo novamente obtemos o escalar de curvatura:

$$R = g^{ij} R_{ij} = 6k. \quad (2.17)$$

Como o espaço é isotrópico em cada ponto, deve ser também esféricamente simétrico; assim o elemento de linha espacial $d\sigma$ pode ser escrito da forma [18]

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.18)$$

As componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são portanto as seguintes

$$g_{11} = e^{\lambda(r)}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.19)$$

Calculando as componentes do tensor de Ricci para a métrica de RW (2.19) obtemos as seguintes componentes não nulas

$$R_{11} = \lambda'/r, \quad R_{22} = -\operatorname{cosec}^2\theta R_{33} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda}. \quad (2.20)$$

Comparando estes resultados com (2.16), temos que

$$\frac{\lambda'}{r} = 2k e^\lambda, \quad 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} = 2kr^2, \quad (2.21)$$

cuja solução é

$$e^{-\lambda} = 1 - kr^2. \quad (2.22)$$

O elemento de linha espacial (2.18) fica da seguinte forma

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.23)$$

Fazendo as seguintes substituições

$$k \rightarrow k/|k|$$

$$r \rightarrow r\sqrt{|k|}$$

$$a \rightarrow a/\sqrt{|k|}$$

a métrica (2.23) permanece invariante e a curvatura é normalizada, assumindo os valores $k = +1, 0, -1$ que correspondem respectivamente a uma métrica fechada, plana e aberta.

Assim, de (2.14) e (2.23), a *métrica de Robertson-Walker* é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.24)$$

e as componentes do tensor métrico são

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{a(t)^2}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = -a(t)^2 r^2, \quad g_{33} = -a(t)^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta. \quad (2.25)$$

A interpretação geométrica da métrica de Robertson-Walker (RW) é a seguinte. A cada instante de tempo t_0 a geometria do espaço tridimensional é dada por

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \right), \quad a(t_0) = a_0. \quad (2.26)$$

Como foi visto, há três valores possíveis para a constante de curvatura, $k = 0, +1, -1$, que correspondem a três tipos de geometria:

- Para $k = 1$ a geometria do espaço é uma esfera S^3 ;
- para $k = -1$ a geometria do espaço é um hiperbolóide H^3 ;
- e para $k = 0$ a geometria do espaço é plana.

2.3 Descrição termodinâmica do universo

Como mencionamos anteriormente os modelos cosmológicos são estabelecidos unindo duas teorias fundamentais: a Relatividade Geral e a Termodinâmica. A primeira descreve a evolução da geometria do espaço-tempo através das equações de Einstein, e a segunda descreve as propriedades constitutivas das fontes. Para descrever as fontes através da Termodinâmica é preciso considerar que os constituintes sejam um fluido, o chamado *fluido cosmológico*, onde desde partículas fundamentais até galáxias são tratadas como partículas. Essa aproximação é razoável ao considerar o universo em grande escala. Além disso é necessário uma teoria covariante da Termodinâmica, a *Termodinâmica Relativística*.

Esta seção trata da descrição termodinâmica das fontes que constituem o universo. Veremos aqui os principais resultados da Termodinâmica Relativística importantes em Cosmologia, encerrando com uma breve discussão a respeito do fluido cosmológico.

2.3.1 Termodinâmica Relativística

Na Termodinâmica Relativística (TR) um gás ou fluido é descrito por três grandezas tensoriais que descrevem as suas propriedades macroscópicas: o tensor de energia-momento (TEM) $T_{\mu\nu}$, o quadrifluxo de partículas N_μ e o quadrifluxo de entropia S_μ [19]. A formas gerais destas grandezas são decompostas em relação a quadrivelocidade U^μ do fluido da seguinte forma³:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu - (p + \varpi) \Delta^{\mu\nu} + (U^\mu q^\nu + U^\nu q^\mu) + p^{<\mu\nu>} \quad (2.27)$$

$$N^\mu = n U^\mu \quad (2.28)$$

$$S^\mu = s N^\mu + \phi^\mu. \quad (2.29)$$

onde:

$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ é a quadrivelocidade do fluido;

$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu$ é o tensor projetor que projeta um tensor qualquer na direção perpendicular à velocidade U^μ ;

$n = N^\mu U_\mu$ é a densidade de número de partículas;

$p^{<\mu\nu>} = \left(\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau} \right) T^{\sigma\tau}$ é o tensor pressão, com traço nulo;

$(p + \varpi) = -\frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ é a soma da pressão hidrostática p e da pressão dinâmica ϖ ;

$q^\mu = \Delta_\sigma^\mu U_\nu T^{\nu\sigma}$ é o fluxo de calor;

$\rho = U_\mu T^{\mu\nu} U_\nu$ é a densidade de energia;

$s = \frac{1}{n} S^\mu U_\mu$ é a entropia por partícula;

$\phi^\mu = \Delta_\nu^\mu S^\nu$ é o fluxo de entropia.

³Aqui estamos considerando o formalismo de Eckart.

As grandezas termodinâmicas obedecem ainda às equações de balanço:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (2.30)$$

$$N^{\mu}_{;\mu} = n\Sigma \quad (2.31)$$

$$S^{\mu}_{;\mu} = \zeta \geq 0, \quad (2.32)$$

onde Σ é a taxa de variação do número de partículas, ζ é a produção de entropia. Em um sistema conservativo como um fluido perfeito, onde não há processos dissipativos, das equações de balanço temos que $\Sigma = 0$ e $\zeta = 0$.

Como já foi visto, em cosmologia usa-se em geral o referencial comóvel, também chamado de referencial de Lorentz em repouso. Neste referencial as componentes espaciais da quadrivelocidade do fluido são nulas, $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, tal que o referencial acompanha o movimento médio das partículas do fluido. Das definições das grandezas termodinâmicas, calcula-se as respectivas formas no referencial comóvel:

$$n = N^0$$

$$p^{<00>} = 0, p^{<0i>} = p^{<i0>} = 0, p^{<ij>} = T^{ij}$$

$$p + \varpi = \frac{1}{3}T^{ii}$$

$$q^0 = 0, q^i = T^{0i}$$

$$\rho = T^{00}$$

$$s = \frac{1}{n}S^0; \phi^0 = 0, \phi^i = S^i.$$

As grandezas ϖ , $p^{<\mu\nu>}$ e q^{μ} são chamadas de fluxos termodinâmicos e são características de processos irreversíveis que ocorrem em fluidos fora do equilíbrio [20]. Os fluxos termodinâmicos são determinados pelas seguintes equações constitutivas:

$$\varpi = -\eta\nabla^{\nu}U_{\nu} \quad (2.33)$$

$$p^{<\mu\nu>} = 2\xi\nabla^{<\nu}U^{\mu>} \quad (2.34)$$

$$q^{\mu} = \lambda \left(\nabla^{\mu}T - \frac{T}{c^2}DU^{\mu} \right). \quad (2.35)$$

Os operadores presentes nas equações acima são definidos da seguinte maneira

$$\nabla^{\mu}U_{\nu} = \Delta^{\mu\kappa}U_{\nu;\kappa},$$

$$\nabla^{<\mu}U^{\nu>} = \left[\frac{1}{2}(\Delta^{\mu}_{\sigma}\Delta^{\nu}_{\tau} + \Delta^{\nu}_{\sigma}\Delta^{\mu}_{\tau}) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau} \right] \nabla^{<\sigma}U^{\tau>},$$

$$DU^{\mu} = U^{\nu}U^{\mu}_{;\nu}.$$

Nas equações (2.33)-(2.34) T é a temperatura e os coeficientes η , ξ e λ são respectivamente chamados de viscosidade volumétrica, viscosidade de cisalhamento (também conhecidos como primeira e segunda viscosidade) e condutividade térmica. Neste trabalho serão estudados somente fluidos com viscosidade volumétrica, assim no próximo item faremos uma análise da pressão dinâmica.

2.3.2 A pressão dinâmica

A pressão dinâmica está associada à viscosidade volumétrica de um fluido, que é caracterizada pelo coeficiente η . A viscosidade volumétrica é característica de processos irreversíveis que ocorrem em um fluido fora do equilíbrio juntamente com uma expansão ou contração do fluido, ou seja, com uma variação do volume (e da densidade, portanto) [21].

A viscosidade volumétrica é importante em Cosmologia pois é o único processo irreversível compatível com uma métrica isotrópica e homogênea [19]. Por exemplo, fluxos de calor são compatíveis com métricas inhomogêneas.

Em cosmologia há processos irreversíveis importantes, como a interação entre os constituintes e a produção de partículas. A produção de partículas é descrita classicamente como um processo irreversível de transferência de energia entre o campo gravitacional e os campos de matéria [22]. Veremos a seguir como a viscosidade relaciona-se com a produção de partículas [23][24].

Consideramos um fluido fora do equilíbrio devido à viscosidade volumétrica. As grandezas macroscópicas $T^{\mu\nu}$, N^μ e S^μ e as respectivas equações de balanço são dadas por:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu - (p + \varpi)\Delta^{\mu\nu} \Rightarrow T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \rightarrow \dot{\rho} + \Theta(\rho + p + \varpi) = 0 \quad (2.36)$$

$$N^\mu = nU^\mu \Rightarrow N^\mu_{;\mu} = n\Sigma \rightarrow \dot{n} + n\Theta = n\Sigma \quad (2.37)$$

$$S^\mu = nsU^\mu \Rightarrow S^\mu_{;\mu} \geq 0 \rightarrow n\dot{s} + ns\Sigma \geq 0 \quad (2.38)$$

onde $\Theta = U^\mu_{;\mu}$ é a taxa de expansão do fluido e Σ é a taxa de produção de partículas.

Introduzimos agora a equação de Gibbs,

$$n\dot{s} = \frac{1}{T} \left(\dot{\rho} - \frac{\rho + p}{n} \dot{n} \right), \quad (2.39)$$

onde o “ponto” significa derivada temporal, e substituímos a dependência das derivadas $\dot{\rho}$ e \dot{n} usando as equações de balanço (2.36), (2.37):

$$n\dot{s} + ns\Sigma = \frac{1}{T} \left[-\varpi\Theta - n \left(\frac{\rho + p}{n} - Ts \right) \Sigma \right]. \quad (2.40)$$

Definindo o potencial químico μ como

$$\mu = \frac{\rho + p}{n} - Ts, \quad (2.41)$$

temos que (2.40) pode ser escrita como

$$n\dot{s} + ns\Sigma = -\frac{1}{T} (\varpi\Theta + n\mu\Sigma). \quad (2.42)$$

Considerando um processo adiabático, onde a entropia por partícula s é constante, da equação (2.42) obtemos a seguinte relação entre a pressão dinâmica ϖ e a produção de partículas Σ

$$ns\Sigma = -\frac{1}{T} (\varpi\Theta + n\mu\Sigma) \Rightarrow \varpi = -\frac{T}{\Theta} (\rho + p)\Sigma. \quad (2.43)$$

A equação (2.43) mostra que a pressão dinâmica neste caso está relacionada diretamente com a produção de partículas, pois fazendo $\Sigma \rightarrow 0$ temos que $\varpi \rightarrow 0$.

2.3.3 O fluido cosmológico

O campo gravitacional é gerado por matéria e energia, que podem ser encontradas sob diferentes formas, como é resumido a seguir.

- Matéria não relativística, cuja pressão é muito menor que a densidade de energia:

bárions: matéria visível presente em estrelas, galáxias, etc ;

bárions escuros: presentes em gases, nuvens moleculares, etc;

neutrinos;

matéria escura não bariônica.

- Energia é referente a constituintes não massivos: ftons, energia escura, energia de vácuo.

O fluido cosmológico é descrito pelas grandezas macroscópicas da Termodinâmica Relativística, $T^{\mu\nu}$, N^μ e S^μ , sendo de grande importância o TEM, que define o termo de fonte nas equações de Einstein.

O TEM de um fluido perfeito é utilizado em grande parte dos modelos cosmológicos. Nestes modelos o universo é composto por N constituintes não interagentes que possuem a mesma quadrivelocidade U^μ , tal que o TEM do fluido cosmológico é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu - p \Delta^{\mu\nu}, \quad \rho = \sum_N \rho_N, \quad p = \sum_N p_N, \quad (2.44)$$

onde ρ_N e p_N são a densidade de energia e a pressão hidrostática do fluido N .

Outra possibilidade é considerar que o fluido cosmológico é descrito por um fluido imperfeito, constituído por dois fluidos diferentes que interagem. Neste caso, supondo que em um instante $t = t_0$ os fluidos estejam em equilíbrio (i.e., com a mesma temperatura T), a evolução temporal da temperatura depende do tipo de constituinte. Assim para $t > t_0$ cada constituinte possui temperaturas diferentes e o fluido cosmológico apresenta um desvio do equilíbrio, que se manifesta através de uma pressão dinâmica (ou *pressão viscosa*) [25]. A interação entre os fluidos ocorre para restabelecer o equilíbrio termodinâmico. Temos então que o tensor de energia-momento do fluido cosmológico neste caso é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu - (p + \varpi) \Delta^{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

e os quadrifluxos de partículas e de entropia

$$N^\mu = n U^\mu, \quad S^\mu = s N^\mu \quad (2.46)$$

onde ρ , p , n e s são a densidade de energia, pressão hidrostática, densidade de número de partículas e densidade de entropia por partícula totais, e ϖ é a pressão dinâmica. As leis de balanço são dadas pelas equações (2.36)-(2.38) calculadas anteriormente. Esta descrição possui a vantagem de descrever fenômenos irreversíveis, como produção de partículas e interação entre os constituintes, que têm um papel importante no universo primordial [23].

2.4 O Modelo Padrão

Encontramos usualmente na literatura modelos cosmológicos baseados em três equações fundamentais: as *Equações de Einstein*, a *lei de conservação do tensor de energia-momento* e a *equação de estado dos constituintes*. Nesta seção apresentamos o modelo padrão, partindo destas equações básicas.

O modelo padrão assume que em grande escala o universo é descrito pela métrica de RW e as fontes (matéria e radiação) são descritas pelo TEM de um fluido perfeito.

Da métrica de RW e do TEM de um fluido perfeito determina-se as Equações de Einstein (1.110) ⁴:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.47)$$

Calculando o tensor de Ricci para a métrica de RW (2.25) obtemos as seguintes componentes não nulas:

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.48)$$

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a \ddot{a} + 2 \dot{a}^2 + 2k) \quad (2.49)$$

O TEM deve ser calculado no referencial comóvel, onde $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Da definição do TEM de um fluido perfeito (2.44), temos que as componentes não nulas são:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ii} = -p g_{ii}, \quad (2.50)$$

cujo traço T é dado por

$$T = \rho - 3p. \quad (2.51)$$

Das equações (2.48)-(2.51) calcula-se as equações de Einstein (2.47), obtendo-se apenas duas equações independentes:

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G (\rho + 3p), \quad (2.52)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} = 4\pi G (\rho - p), \quad (2.53)$$

que podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.54)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.55)$$

Estas equações são conhecidas respectivamente como equação de Friedmann e Raychaudhuri. Os modelos descritos por estas equações são conhecidos também como modelos FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker).

⁴Fazemos daqui em diante $c = 1$.

A seguir, montamos a lei de conservação do tensor de energia-momento ⁵

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.56)$$

Para determinar a evolução temporal do universo é preciso conhecer a *equação de estado* dos constituintes, que dá a relação entre a pressão e a densidade. Neste caso assume-se a equação de estado barotrópica, que relaciona a pressão e a densidade de maneira linear:

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (2.57)$$

onde γ é uma constante. A constante γ caracteriza o constituinte. Segue o valor de γ para alguns constituintes.

matéria: $p = 0 \Rightarrow \gamma = 1$

radiação: $p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \gamma = 4/3$

energia de vácuo: $p = -\rho \Rightarrow \gamma = 0$

Substituindo a equação de estado (2.57) na lei de conservação (2.56), obtemos a lei de evolução para a densidade de energia:

$$\rho \propto a^{-3\gamma}. \quad (2.58)$$

Para a era do universo dominada pela matéria teremos, portanto:

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (2.59)$$

Esta equação mostra o decréscimo de ρ devido ao decréscimo do número de partículas por unidade de volume comóvel devido à expansão do universo.

Para a era dominada pela radiação teremos:

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (2.60)$$

Comparando com (2.59), vemos que a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente que da matéria por um fator a^{-1} . Somado ao decaimento da densidade de fótons devido à expansão, os fótons também perdem energia devido ao desvio para o vermelho.

Substituindo (2.58) na equação de Friedmann (2.54) determina-se o fator de escala $a(t)$. No início da expansão, quando a é pequeno, o termo $8\pi G\rho/3 \gg k/a^2$, neste caso a equação de Friedmann (2.54) é simplificada:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.58) na equação anterior temos

$$a(t) \simeq a_0 t^{2/3\gamma}. \quad (2.62)$$

⁵A lei de conservação (2.56) não é uma equação independente do sistema, pois é possível obtê-la manipulando as equações de Einstein (2.54)-(2.55).

Para as eras da matéria ($\gamma = 1$) e radiação ($\gamma = 4/3$) temos então respectivamente $a(t) \sim t^{2/3}$ e $a(t) \sim t^{1/2}$. O ponto $t = 0$ representa a singularidade inicial, conhecida como *big-bang*, pois para $t \rightarrow 0$ temos que $a \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ (e $T \rightarrow \infty$) e $R \rightarrow \infty$. Para escalas menores que a escala de Planck ($\sim 10^{-33}$ cm) a teoria clássica não pode ser aplicada, pois os efeitos gravitacionais quânticos se tornam importantes, o que limita a validade do modelo à escalas maiores que 10^{-33} cm [1].

Assim, de acordo com este modelo o universo evoluiu de um estado com densidade e temperatura infinitas, o chamado *hot big-bang*. O modelo prevê ainda a existência de uma radiação cósmica de fundo (CBR) com temperatura de $T \sim 2.7$ K. A CBR é resultado do resfriamento do gás de fótons, após o desacoplamento com a matéria, que ocorreu em $t \sim 300\,000$ anos [1]. A detecção da CBR na década de 1960 por Penzias e Wilson foi definitiva para a aceitação deste modelo. Outra previsão importante refere-se à previsão da abundância cósmicas dos elementos leves, D, ^3He , ^4He e ^7Li [1].

2.4.1 Propriedades dinâmicas dos modelos FLRW

Para analisar a dinâmica do universo é conveniente utilizar alguns parâmetros que serão definidos a seguir.

O *parâmetro de Hubble*, como já foi visto anteriormente, caracteriza a taxa de expansão do universo e é definido em termos do fator de escala:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.63)$$

O *parâmetro de desaceleração* caracteriza a taxa de desaceleração do universo. É definido como:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}. \quad (2.64)$$

Nas eras da radiação e da matéria o parâmetro de desaceleração é positivo, pois da equação de Raychaudhuri (2.55) vê-se que aceleração é negativa para ambos os casos, $\ddot{a} \sim -a\rho$. Como veremos além das eras de domínio da matéria e da radiação os modelos cosmológicos atuais prevêem a existência de dois períodos com aceleração positiva ao longo da evolução do universo: o período inflacionário no universo primordial e o período atual. Olhando para a equação (2.55), vemos que para obter uma aceleração positiva a pressão e a densidade de energia devem satisfazer a seguinte relação:

$$\rho + 3p < 0, \quad (2.65)$$

violando a “condição de energia forte” $\rho + 3p > 0$ [26]. Considerando que a densidade de energia é positiva, para satisfazer (2.65) é preciso que a pressão seja negativa. O tipo de energia que pode causar uma aceleração positiva pode estar relacionada à constante cosmológica ou a um campo escalar, que como veremos na seção 2.5, é capaz de causar uma expansão acelerada.

Definiremos agora os *parâmetros de densidade* e *de curvatura*. Podemos reescrever a equação de Friedmann (2.54) da seguinte maneira:

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2H^2}. \quad (2.66)$$

De (2.66) definimos os parâmetros de densidade (densidade total das fontes - matéria mais energia) e curvatura:

$$\Omega_T = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.67)$$

tal que a equação (2.66) é reescrita como:

$$\Omega_T + \Omega_k = 1. \quad (2.68)$$

Veremos agora que a geometria do universo é determinada pela densidade de energia. Para um universo plano temos que $k = 0$, então:

$$\Omega_T = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.69)$$

onde ρ_{crit} é a *densidade de energia crítica* para a qual o universo é plano, cujo valor estimado atualmente é de $\rho_{\text{crit}} \approx 2 \times 10^{-29} \text{h}^2 \text{g/cm}^3$. Chamamos Ω_T simplesmente de Ω daqui em diante. A partir da densidade crítica define-se o modelo do universo:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{\text{crit}} &\longrightarrow \Omega < 1 \longrightarrow k = -1 \Rightarrow \text{universo aberto;} \\ \rho = \rho_{\text{crit}} &\longrightarrow \Omega = 1 \longrightarrow k = 0 \Rightarrow \text{universo plano;} \\ \rho > \rho_{\text{crit}} &\longrightarrow \Omega > 1 \longrightarrow k = 1 \Rightarrow \text{universo fechado;} \end{aligned}$$

Seguem medidas atuais dos parâmetros de cada constituinte (ver por exemplo, [27]).

	constituente	Ω	Total
matéria	bárions	$\Omega_b = 0.044 \pm 0.004$	$\Omega_M \approx 0,29$
	neutrinos	$\Omega_\nu h^2 < 0,0076$	
	CDM	$\Omega_{\text{cdm}} = 0,25 \pm 0,07$	
energia	fótons	$\Omega_\gamma \approx 5 \times 10^{-5}$	$\Omega_E \approx 0.73$
	energia escura	$\Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0,07$	
			$\Omega_{\text{TOTAL}} = 1,02 \pm 0.02$

A medida de Ω é essencial para determinar qual o modelo cosmológico de FLRW corresponde à realidade. Medidas atuais mostram que $\Omega \sim 1$, portanto a geometria do universo deve ser aproximadamente plana. Além disso, de acordo com as estimativas um universo fechado não duraria o suficiente para sequer formar estruturas, como galáxias; já em um universo aberto a densidade diminui rapidamente e também não há formação de estruturas [4]. Dentro dos modelos FLRW, uma geometria plana (ou quase-plana) é portanto a solução mais provável para descrever o universo.

2.4.2 Desvio para o vermelho cosmológico

O *desvio para o vermelho cosmológico* é explicado nos modelos FLRW como consequência da expansão do espaço-tempo. Considerando um pulso de luz que viaja em uma geodésica nula, $ds^2 = 0$. Da métrica de RW na direção radial teremos então,

$$0 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{a(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.70)$$

Para um pulso emitido em um tempo t_e , e observado em um tempo t_o a uma distância r_o , integramos a equação anterior neste intervalo de tempo:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_o). \quad (2.71)$$

Considerando agora a emissão sucessiva de dois pulsos. O primeiro pulso é emitido em t_e e observado em t_o . O segundo pulso é emitido em $t_e + \Delta t_e$ e observado em $t_o + \Delta t_o$ a uma distância r_o . Integrando no intervalo entre emissão e observação, analogamente a equação anterior, temos

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_o} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_o). \quad (2.72)$$

Subtraindo a equação (2.71) de (2.72),

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.73)$$

O intervalo de tempo entre os pulsos (ou seja, o período) em um sinal de luz típico é da ordem de 10^{-14} segundos, tal que o fator de escala $a(t)$ varia pouco durante este intervalo. Temos então de (2.73)

$$\frac{\Delta t_e}{a(t_e)} \approx \frac{\Delta t_o}{a(t_o)} \quad \longrightarrow \quad \frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (2.74)$$

Onde $\nu = (\Delta t)^{-1}$ é a frequência e Δt é o período do sinal. Temos também que $\lambda = \Delta t$ é o comprimento de onda ($c=1$). Define-se então o desvio para o vermelho z como

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (2.75)$$

Devido a simplificação utilizada esta equação é válida para fontes de luz relativamente próximas. Como já mencionamos pode-se mostrar que há uma forma equivalente de escrever (??) em função do parâmetro de Hubble:

$$z = \frac{Hl}{c} = \frac{v}{c}, \quad (2.76)$$

onde v é a velocidade da fonte de luz em relação ao observador e l a distância entre estes.

2.4.3 Medida de distâncias

Para definir separação espacial l entre dois pontos do universo, basta fazer $dt^2 = 0$ e $d\theta = d\phi = 0$ (considerando a distância radial apenas) na métrica de RW:

$$dl^2 = ds^2 = \frac{a^2(t)dr^2}{1 - kr^2}. \quad (2.77)$$

Integrando (2.77) temos a distância espacial entre os pontos $(0, t_0)$ e (r, t_0) :

$$l = \int_0^r \frac{a(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.78)$$

Para o universo plano, $k = 0$, a distância é então

$$l = \int_0^r a(t) dr = a(t)r. \quad (2.79)$$

2.4.4 Horizonte de partícula

O *horizonte de partícula* é a distância radial que a luz percorreu desde o início do universo até um tempo t . O horizonte define a cada instante a região do universo que é visível e está em contato causal com um observador.

Para calcular a distância do horizonte de partícula, partimos da definição de distância em Cosmologia, considerando o caso do universo plano:

$$d = a(t) \int_0^r dr. \quad (2.80)$$

Da métrica de RW calcula-se a distância radial percorrida pela luz no intervalo $t - t_0$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dr^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.81)$$

Substituindo (2.81) na equação (2.80) obtemos a distância do horizonte de uma partícula em função do tempo t ,

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (2.82)$$

Para um universo plano dominado por matéria/radiação o fator de escala é dado por:

$$a(t) = a_0 t^{2/3\gamma}. \quad (2.83)$$

Resolvendo (2.82) para esta solução temos que a distância do horizonte é dada por:

$$d_H(t) = \frac{3\gamma}{3\gamma - 2} t = \frac{2}{3\gamma - 2} H^{-1}(t) \quad \gamma \neq \frac{2}{3}. \quad (2.84)$$

Para a era dominada pela matéria ($\gamma = 1$) e radiação ($\gamma = 4/3$) teremos que a distância do horizonte é dada respectivamente por

$$d_H^{mat} = 3t = \frac{2}{H}, \quad d_H^{rad} = 2t = \frac{1}{H}. \quad (2.85)$$

2.4.5 Problemas do modelo padrão

O modelo padrão possui vários méritos. Além do desvio para o vermelho cosmológico prevê a existência da radiação cósmica de fundo e a abundância cósmica de elementos leves [1]. Apesar dos sucessos do modelo existem questões que este não consegue responder. A solução para os problemas do modelo padrão tem sido rever o modelo nos instantes iniciais de tal maneira que a partir de um certo tempo o modelo padrão passe a ser válido. A seguir revisamos os principais problemas do modelo padrão ⁶.

⁶Para uma discussão mais detalhada ver [16][4]

i. Problema da planura

De acordo com as observações o parâmetro de densidade é estimado em $\Omega \sim 1$. Para este valor a densidade total de energia do universo está próxima da densidade crítica e a geometria do universo é aproximadamente plana. Esta é uma solução muito particular das equações de Einstein e para obtê-la estima-se que seja necessário um ajuste com precisão da ordem de 10^{55} no parâmetro de Hubble [5]. No modelo padrão esta precisão é assumida sem qualquer explicação.

ii. Problema do horizonte

O modelo padrão assume que no início da expansão o universo é homogêneo e isotrópico em boa aproximação. No início o horizonte de partícula era muito pequeno e as regiões do universo visível atualmente não estavam em contato causal nesta época e portanto não há como explicar como estas regiões evoluíram de maneira homogênea e isotrópica. Estima-se que o universo primordial consistia de $\sim 10^{83}$ regiões causalmente desconectadas [5]. Desta maneira o modelo padrão não é capaz de explicar como por exemplo a CBR é homogênea e como as galáxias se formaram a partir das inhomogeneidades locais com uma distribuição espacial homogênea e isotrópica.

Além dos dois problemas citados, existe um problema conhecido como *problema do monopólo* que possui uma grande importância histórica. As teorias de grande unificação (GUT) prevêm a produção de monopolos magnéticos durante as transições de fase que ocorreram no universo primordial, desacoplando as forças fundamentais [4][5]. Os monopolos magnéticos teriam massa da ordem de $M/\alpha \sim 10^6$ Gev, onde $\alpha = g^2/4\pi$ é a constante de estrutura fina da GUT (g é a constante de acoplamento). A existência de tal partícula alteraria a evolução do universo de maneira drástica, fazendo o parâmetro de densidade ser $\Omega \gg 1$. Portanto, assumindo que as GUTs estão corretas, deve haver algum mecanismo que aniquilou os monopolos produzidos. O modelo padrão porém não fornece tal mecanismo. Este não é um problema cosmológico se as GUTs não estiverem corretas, mas foi a motivação para a introdução de uma era *inflacionária* no universo primordial, que será visto na próxima seção. Veremos que inflação não só resolve o problema do monopolo, como dá conta dos outros problemas de valor inicial.

2.5 Cosmologia inflacionária

A *inflação* foi proposta por Allan Guth [5] em 1981 como possível solução para o problema do monopolo. No mesmo artigo Guth mostrou ainda ser uma possível solução para os problemas da planura e do horizonte. Apesar do modelo original de Guth apresentar problemas, pois o universo no fim da inflação não possui homogeneidade e isotropia, a idéia se mostrou muito promissora [4][5]. Os trabalhos posteriores de Steinhart, Linde e outros ajustaram o modelo de maneira que os problemas do modelo de Guth foram superados [4].

A era inflacionária inicia após a era de Planck, tal que as equações da teoria clássica da gravitação, a RG, sejam válidas. Caracteriza-se por um breve período

em que o universo sofre uma expansão muito grande e acelerada. Das equações de Einstein vimos na seção anterior que a condição para que a aceleração seja positiva é:

$$\rho + 3p < 0.$$

Uma forma de energia que satisfaz tal condição é a energia de vácuo, que está relacionada ao estado de energia fundamental (ou seja, de energia mais baixa) de um sistema. O vácuo possui densidade de energia constante (exceto por flutuações quânticas), então da lei de conservação $\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = 0$ obtemos que a equação de estado do vácuo é $p = -\rho$. Quando o volume do vácuo aumenta, a energia total também aumenta, pois a densidade de energia deve permanecer constante. Entretanto ao aumentar o volume de um sistema o que acontece em geral é que a energia decresce e a pressão associada é positiva. A existência de uma *pressão negativa* associada ao vácuo significa que com o aumento do volume há um aumento da energia.

Nas equações de Einstein a energia de vácuo pode ser relacionada à constante cosmológica Λ . Originalmente a constante cosmológica foi proposta como um termo de geometria:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.86)$$

Ao invés de tratar a constante cosmológica como um termo geométrico, tratamos como um termo de fonte, colocando do lado direito da equação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}), \quad (2.87)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}.$$

é o TEM do vácuo. Comparando com o TEM de um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} - pg_{\mu\nu}$$

temos que

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.88)$$

Desta maneira a constante cosmológica pode ser vista como um análogo clássico à energia do vácuo.

Em um universo dominado pela energia de vácuo a equação de Friedmann pode ser reescrita como:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.89)$$

Na era inflacionária o fator de escala cresce rapidamente e é possível ignorar o termo de curvatura k/a^2 , tal que a equação de Friedmann fica da forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda}. \quad (2.90)$$

A solução desta equação é

$$a(t) \sim e^{Ht}, \quad (2.91)$$

onde $H = \left(\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{constante}$.

Esta solução é característica do modelo de DeSitter. Neste modelo o universo, dominado pela energia de vácuo, expande para sempre evoluindo para um Universo vazio. Os modelos inflacionários realistas devem limitar a quantidade de inflação e ter um mecanismo para o “reaquecimento” do universo após o término da era inflacionária. Nestes modelos a inflação ocorre devido ao estado de falso vácuo de um campo escalar, conhecido na literatura como *inflaton*, enquanto este evolui de um estado de falso vácuo para um estado de vácuo verdadeiro.

2.5.1 Campos escalares

Nesta seção faremos uma revisão a respeito da dinâmica de campos escalares. Um campo escalar é uma função contínua do espaço-tempo $\varphi(x^\mu)$ que descreve uma partícula de spin nulo. Como se trata de uma função contínua é conveniente trabalhar com uma densidade de lagrangeana \mathcal{L} , tal que a lagrangeana é dada por:

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \sqrt{-g} d^3x, \quad (2.92)$$

e a ação do sistema é então:

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.93)$$

Variando a ação (2.93) obtemos as equações de Euler-Lagrange (E-L) para \mathcal{L} :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right)_{;\mu} = 0. \quad (2.94)$$

A forma da densidade de lagrangeana para um campo escalar (com massa nula) é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi), \quad (2.95)$$

onde $V(\varphi)$ é a densidade de potencial. A partir daqui nos referimos às densidades de lagrangeana e potencial simplesmente como *lagrangeana* e *potencial*. Das equações de E-L (2.94) para a lagrangeana (2.95) obtemos a equação de movimento para o campo escalar, conhecida com equação de Klein-Gordon:

$$\square \varphi = -V'(\varphi), \quad (2.96)$$

onde $V' = dV/d\varphi$ e $\square \varphi = g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu;\nu}$. Calculando a equação de Klein-Gordon para um campo escalar na métrica de RW obtemos

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi), \quad (2.97)$$

onde, consideramos que o campo escalar é homogêneo $\varphi = \varphi(t)$, foi possível desprezar as derivadas espaciais.

Segundo o *Teorema de Noether* [28] em um sistema cuja lagrangeana não depende das coordenadas x^μ , existe uma corrente conservada associada a uma translação no espaço-tempo: o tensor de energia-momento, que no caso de um campo escalar é dado por [28]:

$$T_\varphi^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.98)$$

De (2.95) temos então que o TEM do campo escalar assume a forma

$$T_\varphi^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\sigma \varphi \partial_\sigma \varphi + g^{\mu\nu} V(\varphi). \quad (2.99)$$

Considerando um campo escalar homogêneo as componentes diagonais são as seguintes:

$$T_\varphi^{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (2.100)$$

$$T_\varphi^{ii} = -g^{ii} \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right]. \quad (2.101)$$

Comparando (2.100)-(2.101) com as componentes diagonais do TEM de um fluido perfeito em um referencial comóvel,

$$T^{00} = \rho, \quad (2.102)$$

$$T^{ii} = -p g^{ii}, \quad (2.103)$$

temos que a densidade de energia e a pressão de um campo escalar homogêneo com potencial $V(\varphi)$ são dadas por

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (2.104)$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (2.105)$$

Do teorema de Noether temos que $T_\varphi^{\mu\nu}$ obedece a lei de conservação:

$$T_{\varphi;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.106)$$

Em função das grandezas ρ_φ e p_φ , num espaço tempo descrito pela métrica de RW, a lei de conservação do campo escalar é dada por

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H(\rho_\varphi + p_\varphi) = 0. \quad (2.107)$$

Na próxima sessão aplicamos a dinâmica dos campos escalares para o campo que gera a inflação, o inflaton.

2.5.2 Campos escalares e inflação

As equações (2.104) e (2.105) fornecem a densidade de energia e a pressão associadas a um campo escalar homogêneo. Observa-se que a condição $p = -\rho$ para obter um regime de aceleração positiva só é satisfeita por um campo escalar se o termo de energia cinética for pequeno em relação ao termo de energia potencial, $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$. Esta condição é chamada de aproximação *slow-roll* (ASR). Um campo escalar que satisfaz a ASR, descreve a energia de vácuo necessária para obter um regime inflacionário.

Definimos agora os parâmetros de *slow-roll* [16][4]:

$$\epsilon(\varphi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (2.108)$$

$$\eta(\varphi) = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right). \quad (2.109)$$

que devem obedecer às seguintes condições:

$$\epsilon \ll 1 \quad | \eta | \ll 1. \quad (2.110)$$

Estas condições garantem que o potencial varia suavemente com o campo, e dessa forma a energia cinética é pequena enquanto o inflaton evolui “descendo” pelo potencial. Além disso, o potencial do inflaton possui um estado de “falso vácuo”, com $\langle \varphi \rangle = 0$ ($\langle \varphi \rangle$ é o valor esperado do inflaton) e $V(\varphi) = V_0$, e um estado de vácuo verdadeiro, com $\langle \varphi \rangle \neq 0$ e $V(\varphi) = V_{min}$, onde V_{min} é o valor mínimo do potencial (ver figura 2.1).

Mostraremos agora que a ASR é equivalente à condição imposta sobre os parâmetros cosmológicos para que ocorra inflação. Tal condição é que a aceleração seja positiva, $\ddot{a} > 0$. Para o parâmetro de Hubble teremos a seguinte condição:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (2.111)$$

Impondo a ASR sobre as equações de Friedmann (2.54) e a equação de movimento do inflaton (2.97), $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$, $\ddot{\varphi} \ll V'(\varphi)$, temos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\varphi), \quad (2.112)$$

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi). \quad (2.113)$$

Usando essas equações na condição de inflação para o parâmetro de Hubble (2.111) chega-se à seguinte relação

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \epsilon < 1, \quad (2.114)$$

Desta equação vemos que ocorre inflação até que $\epsilon \sim 1$, quando $\ddot{a} \rightarrow 0$.

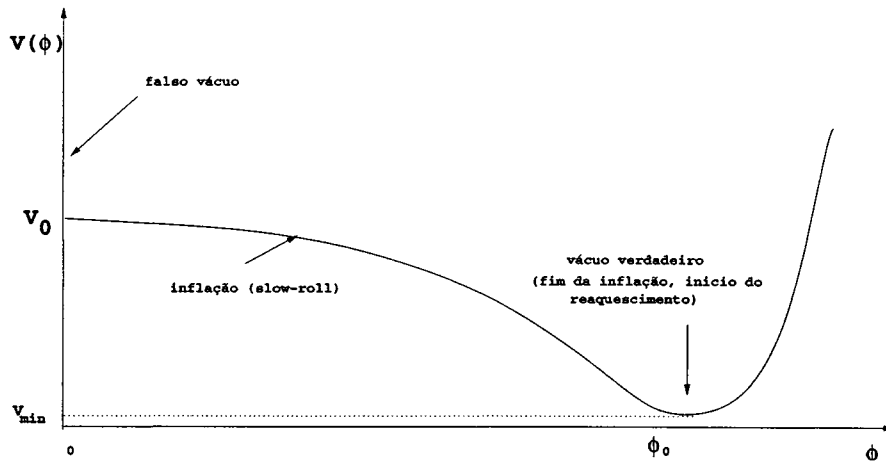


Figura 2.1: Potencial do inflaton

Das condições impostas sobre o campo escalar e seu potencial, a inflação ocorre da seguinte maneira, como mostra a figura 2.1. Inicialmente o universo é dominado pelo inflaton, que está no estado de falso vácuo. Neste estado a pressão do universo é dada por $p_\varphi = -\rho_\varphi = -V_0$. Por algum mecanismo que varia em cada modelo inflacionário, podendo ser devido a transições de fase ou tunelamento [4], o inflaton sai do estado de falso vácuo buscando a configuração mais favorável de energia, ou seja, o vácuo verdadeiro. Após sair do falso vácuo, o inflaton desce lentamente o potencial. Enquanto isto ocorre a pressão é dada por $p_\varphi \approx -\rho_\varphi \approx -V(\phi)$, causando a expansão acelerada do espaço-tempo. Da equação de Friedmann (2.54), desprezando o termo de curvatura, temos que

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}V(\varphi), \quad (2.115)$$

cuja solução é dada por

$$a(t) \sim \exp\left[\int H dt\right], \quad (2.116)$$

onde

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G V(\varphi)}{3}}$$

Enquanto o potencial decresce lentamente com o tempo, $H \approx$ constante e a expansão é aproximadamente exponencial:

$$a(t) \sim e^{Ht}. \quad (2.117)$$

A inflação acaba quando $\epsilon \sim 1$. A grande expansão que ocorreu resfriou o universo. Ao atingir o mínimo do potencial a energia cinética e a aceleração não são mais desprezíveis, e a equação de movimento do inflaton neste caso é

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi). \quad (2.118)$$

Esta equação descreve um oscilador amortecido pelo fator $3H\dot{\varphi}$. Assim, ao atingir o mínimo do potencial o inflaton sofre oscilações amortecidas, perdendo energia

cinética, que é revertida na produção de partículas que reaquecem o universo [16]. Após o reaquecimento o modelo padrão passa a descrever a dinâmica do universo.

2.5.3 Resolvendo os problemas de valor inicial

Veremos agora como os problemas do modelo padrão mencionados anteriormente são resolvidos naturalmente com a inflação, ajustando os valores iniciais.

Problema da Planura. Durante a fase inflacionária o fator de escala expande a uma taxa muito grande, logo o termo de curvatura na equação de Friedmann (2.54) se torna desprezível quando $\Omega \rightarrow 1$:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \Omega \rightarrow 1. \quad (2.119)$$

Ou seja, após uma grande expansão a geometria de um espaço com curvatura diferente de zero se torna aparentemente plana. Desta maneira o problema da planura é resolvido naturalmente pela inflação.

Problema do Horizonte. Em um universo plano o horizonte é dado por

$$d_H = a(t) \int dr \sim \frac{1}{H}, \quad (2.120)$$

que é quase constante durante a inflação, de acordo com $1/\sqrt{V(\varphi)} \approx \text{constante}$ (ver (2.112)). Enquanto isso o fator de escala cresce de maneira quase exponencial. Assim uma região em homogênea e isotrópica contato causal no instante inicial é “esticada” e ultrapassa o horizonte durante a inflação. Desta maneira as regiões que observamos hoje, que são homogêneas e isotrópicas, estavam em contato causal no início da inflação e expandiram para além do horizonte.

Problema do monopolo. Após a inflação a densidade de monopolos se torna desprezível devido a grande expansão que ocorreu no período inflacionário. Durante o reaquecimento é preciso garantir ainda que a temperatura não seja alta o suficiente para que os monopolos voltem a ser produzidos [5].

Para resolver tais problemas de valor inicial é preciso que a inflação dure um tempo suficiente. Uma análise qualitativa da “quantidade de inflação” é dada pelo número de *e-foldings*. Um *e-folding* é definido como o tempo Δt para que o fator de escala cresça por um fator e . Durante a inflação o fator de escala é dado por

$$a \approx \exp(tH). \quad (2.121)$$

Logo, um *e-folding* é dado por

$$t = H^{-1}. \quad (2.122)$$

Temos ainda que

$$a(t) = a_0 e^{Ht} \Rightarrow \ln \left(\frac{a(t)}{a_0} \right) = Ht. \quad (2.123)$$

Supondo agora que H não é constante, então o número de e-foldings \mathcal{N} é dado por

$$\mathcal{N} = \ln \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt. \quad (2.124)$$

Usando a equação de Friedmann (2.54) e a equação de movimento do inflaton (2.97), é possível escrever (2.124) em função do potencial do inflaton da seguinte forma

$$\mathcal{N} = -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} d\varphi. \quad (2.125)$$

Vários trabalhos mostram que para resolver os problemas de valor inicial o número de e-foldings deve ser $\mathcal{N} > 60$, que equivale a um aumento no fator de escala da ordem de $a(t)/a_0 > 10^{26}$ [4].

2.6 Energia escura

Recentemente o estudo de supernovas Tipo-Ia forneceram evidências de que o universo atual está em um regime de aceleração positiva [6][29]. Estes estudos mostraram que a luminosidade das supernovas é 25% mais fraca do que o previsto com base no desvio para o vermelho medido. A explicação encontrada para a diminuição da luminosidade dessas supernovas é que estas estão mais afastadas do que indicam seu desvio para o vermelho ⁷, sugerindo que no passado a expansão devia ser mais lenta e portanto atualmente o universo deve estar acelerando. Para um estudo mais detalhado dos testes com supernovas ver [30].

Como foi visto anteriormente a existência de um regime acelerado depende da violação da condição de energia forte $\rho + 3p > 0$. O universo atual portanto deve ser dominado por uma forma de energia cuja pressão é negativa e satisfaz $p < -\frac{1}{3}\rho$, conhecida na literatura como *energia escura*. É assim chamada pois não interage com a matéria, apenas com o campo gravitacional ⁸ e consigo mesma.

Vimos também que a condição $p < -\frac{1}{3}\rho$ é satisfeita pela energia do vácuo, representada pela constante cosmológica Λ , cujo tensor de energia momento é dado por

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G},$$

e a equação de estado é dada por $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$. Outra abordagem possível para descrever a energia escura é tratá-la de maneira análoga ao inflaton, considerando que esta é representada por um campo escalar dominado pela energia potencial. Para uma discussão mais completa, ver [30][31].

⁷Lembrando que o desvio para o vermelho está relacionado com a distância da fonte emissora de luz: quanto maior a distância, maior é o desvio para o vermelho.

⁸Interagindo com o campo gravitacional, há uma interação indireta com a matéria

Capítulo 3

Gravitação e Cosmologia em dimensões reduzidas

As teorias de gravitação em dimensões reduzidas (2D e 3D) têm sido estudadas por diversos autores [2][7][8][32]. Estas teorias são mais simples que a RG usual em 4D possibilitando o estudo de questões não resolvidas dos modelos realistas, como por exemplo a quantização da interação gravitacional [2]. O estudo das propriedades da gravitação nestes casos mostra que há diferenças fundamentais entre os casos em 2D e 3D e o caso realista em 4D. Por exemplo, no caso tridimensional o efeito causado por uma fonte é local, e não se propaga no espaço-tempo. Já no caso bidimensional as equações de Einstein não são equações dinâmicas. Assim, várias teorias têm sido propostas em que a ação gravitacional é diferente da proposta originalmente por Einstein. Além disso o estudo de sistemas como buracos negros e soluções cosmológicas têm sido abordado em diversos trabalhos [7][9][32][33][34].

Neste capítulo fazemos uma revisão a respeito de três das teorias existentes de gravitação em dimensões reduzidas. A RG é apresentada no caso 3D; para o caso 2D apresentamos os modelos propostos por Jackiw e Teitelboim, que é considerado o análogo em 2D da RG; e o modelo proposto por Callan, *et. al.*, inspirado pela teoria de cordas. Apresentamos também as soluções cosmológicas isotrópicas e homogêneas e com um fluido perfeito existentes na literatura para cada modelo.

3.1 Equações de Einstein em $d+1$ dimensões

Em um espaço tempo de $d+1$ dimensões as equações de Einstein podem ser escritas como [7]

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{d-1}{d-2}G_d S_d T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde a constante de acoplamento κ é escolhida para que no limite de campo fraco e estático e baixas velocidades a RG coincida com o resultado da teoria newtoniana, $\nabla^2 U \approx R_{00} \approx G_d S_d T_{00}$, onde U é o potencial gravitacional newtoniano. Aqui $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2})$ é o ângulo sólido e $G_d = G_3 l^{d-3}$ é a constante gravitacional (G_3 é a constante gravitacional de Newton e l é um comprimento fundamental).

Para $d=3$ obtemos as equações usuais da RG, que é formulada no espaço tempo quadridimensional, com o limite newtoniano $\nabla^2 U = -4\pi G\rho$.

Para $d = 2$ ao impor a existência do limite newtoniano para a teoria a constante de acoplamento κ diverge. Para a RG ser válida em um espaço tempo tridimensional deve-se abrir mão do limite newtoniano e redefinir a constante gravitacional de modo que as equações de campo não sejam divergentes, $G_d/(d - 2) \rightarrow G_d$. As equações de Einstein em 3D são agora dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -2\pi G_2 T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

cujo limite para campos fracos, estáticos e baixas velocidades é $\nabla^2 U = R_{00} = 0$.

Para $d = 1$ a constante de acoplamento se anula, e neste caso temos $G_{\mu\nu} = 0$. Isto implica que as equações de Einstein não são equações dinâmicas em 2D. Para descrever fenômenos gravitacionais em 2D é necessário portanto a formulação de uma nova teoria.

3.2 Gravitação em três dimensões

A gravitação em um espaço-tempo tridimensional (3D) é descrita pelas equações de Einstein com a constante gravitacional redefinida (3.2). A diferença entre a formulação 4D está nas propriedades do tensor de Riemann que, como veremos a seguir, em 3D é escrito em função do tensor de Ricci, o que implica que fora das fontes o espaço-tempo é plano e portanto os efeitos das fontes são locais e não se propagam no espaço-tempo. Além disso em 3D não há limite newtoniano nem ondas gravitacionais [35]. Para uma partícula pontual por exemplo ao invés de uma alteração na curvatura local há uma alteração na topologia global do espaço-tempo.

As características incomuns da RG em 3D motivaram a formulação de teorias alternativas nas quais a ação de Einstein-Hilbert (EH) é modificada acrescentando-se termos com derivadas do tensor métrico de ordem superior. Um exemplo é a gravitação topologicamente massiva (GTM) proposta por Jackiw *et al* [36], cuja equação de campo é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{m}C_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad C_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon_{\mu\alpha\beta}(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}R)_{;\nu}, \quad (3.3)$$

onde $C_{\mu\nu}$ é o tensor de Weyl tridimensional [2]. Neste caso há propagação de efeitos gravitacionais fora das fontes mas não há limite newtoniano. Calculando $C^{\mu\nu}$ para a métrica de RW obtemos $C_{\mu\nu} = 0$. Neste caso as equações de campo da GTM recaem nas equações de Einstein. Neste trabalho utilizaremos a RG em 3D já que estamos interessados nas soluções cosmológicas isotrópicas e homogêneas descritas pela métrica de RW do modelo.

Veremos agora algumas propriedades do tensor de Riemann tridimensional. Em um espaço-tempo de N dimensões, ($N > 2$) o tensor de Riemann pode ser decomposto da seguinte maneira [3]:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{N-2}(g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\nu\lambda}) - \\ &- \frac{R}{(N-1)(N-2)}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) + C_{\lambda\mu\nu\kappa}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ é o tensor de Weyl que corresponde à parte de traço nulo do tensor de Riemann. O tensor de Weyl é invariante sob transformações conformes ($g_{\mu\nu} \rightarrow \rho(x)g_{\mu\nu}$) e se anula quando a métrica é plana [2].

Como vimos no capítulo um, o número de componentes independentes do tensor de Riemann depende da dimensão do espaço-tempo N [3]:

$$C_N = \frac{N^2}{12}(N^2 - 1), \quad (3.5)$$

e para o tensor de Ricci (para $N > 2$) o número de componentes independentes é dado por [3]:

$$R_N = \frac{1}{2}N(N + 1). \quad (3.6)$$

Para $N = 3$ temos que $C_3 = R_3 = 6$, tal que neste caso $C_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$ e o tensor de Riemann é escrito somente em função do tensor de Ricci.

Vamos agora considerar as equações de Einstein no espaço-tempo 3D com uma constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Contraindo a equação anterior obtemos

$$R = 6\Lambda + 2\kappa T, \quad (3.8)$$

tal que podemos reescrever as equações de Einstein da seguinte forma em função do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} - \kappa(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T). \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) na expressão do tensor de Riemann em 3D (com $C_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$) obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = & \kappa[(g_{\lambda\kappa}T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}T_{\lambda\kappa} - g_{\lambda\nu}T_{\mu\kappa} - g_{\mu\kappa}T_{\lambda\nu}) + \\ & + \kappa T(g_{\mu\kappa}g_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\kappa}) + \Lambda(g_{\mu\kappa}g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

tal que a curvatura do espaço-tempo é determinada pela distribuição local de matéria e a constante cosmológica. No vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) a equação anterior resulta em

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \Lambda(g_{\lambda\kappa}g_{\nu\mu} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}). \quad (3.11)$$

Isto significa que os efeitos gravitacionais produzidos pela distribuição local de matéria não se propagam pelo espaço-tempo, e a curvatura fora das fontes é constante, dada pela constante cosmológica: se $\Lambda = 0$ o espaço-tempo é plano e para $\Lambda > 0$ ($\Lambda < 0$) o espaço possui curvatura positiva (negativa).

3.2.1 Limite Newtoniano

Vamos considerar o limite de campos fracos e estáticos e de baixas velocidades da RG em 3D e mostrar que não corresponde ao limite newtoniano, como foi afirmado no início do capítulo.

Na teoria da gravitação de Newton a relação entre fontes e campo gravitacional é definida pela equação de Poisson

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho, \quad (3.12)$$

onde U é o potencial gravitacional e ρ é a distribuição de matéria. A evolução temporal de uma partícula de teste é determinada pela equação de movimento:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} U. \quad (3.13)$$

onde m é a massa da partícula. As equações (3.12) e (3.13) podem ser obtidas como o limite da RG 4D para campos fracos e estáticos e para baixas velocidades (limite newtoniano). Para um espaço-tempo N -dimensional qualquer, este limite é dado por [13]

$$\begin{aligned} v &\ll 1 \\ g_{00} &= 1 - 2U, \quad g_{ij} \approx \delta_{ij} \\ U^i &= 0, \quad U^0 = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} &\ll \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Neste caso o tensor de Ricci e o tensor de energia-momento são dados por [13]

$$\begin{aligned} R_{00} &\approx \frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial x^i} = -\nabla^2 U \quad R_{ij} \approx 0 \\ T_{00} &= \rho, \quad T_{ij} = 0, \quad T = \rho g^{00}. \end{aligned}$$

Com estas relações calculamos as equações de Einstein em um espaço de dimensão N e obtemos

$$\nabla^2 U = -\kappa \left(T_{00} - \frac{g_{00}}{N-2} T \right). \quad (3.14)$$

Para $N = 4$, obtemos a equação de Poisson. Para $N = 3$ porém, obtemos a equação de Laplace

$$\nabla^2 U = 0, \quad (3.15)$$

e concluimos portanto que em 3D no limite de baixas velocidades e campos fracos e estáticos ocorre um desacoplamento entre fonte e campo, que não corresponde ao limite newtoniano.

3.2.2 Fontes estáticas

Nesta seção veremos que apesar das fontes não alterarem a estrutura local, estas afetam a estrutura global do espaço-tempo. Vamos tratar do caso mais simples: uma partícula pontual.

Consideramos uma métrica estática e circularmente simétrica:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\eta(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2, \quad (3.16)$$

e a partícula é descrita pelo tensor de energia momento de um fluido perfeito, com $\rho = M\delta(r)$, $p = 0$. Calculando as equações de Einstein (sem constante cosmológica) obtemos duas equações independentes:

$$\frac{e^{-2\eta}}{r}\eta' = \kappa\rho \quad (3.17)$$

$$\frac{e^{-2\eta}}{r}\nu' = \kappa p. \quad (3.18)$$

Integrando a primeira equação, obtemos

$$e^{-2\eta} = 1 - \frac{\kappa}{\pi}M(r), \quad M(r) = \int 2\pi r\rho(r)dr. \quad (3.19)$$

Substituindo em (3.19),

$$\nu' = \frac{\kappa p r}{1 - \frac{\kappa}{\pi}M(r)}. \quad (3.20)$$

Mas, para uma fonte pontual, $\rho = M\delta(r)$, $p = 0$, obtemos então

$$e^{-2\eta} = 1 - \frac{\kappa}{\pi}M; \quad \nu' = 0 \quad \rightarrow \quad \nu = \text{constante}. \quad (3.21)$$

Escolhemos $\nu = 0$, tal que o elemento de linha fica da seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{\pi}M}dr^2 - r^2d\theta^2. \quad (3.22)$$

Realizamos agora uma mudança de coordenadas,

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 - \kappa M/\pi}}r \quad \rightarrow \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (0 \leq r \leq \infty) \quad (3.23)$$

$$\phi = \sqrt{1 - \kappa M/\pi}\theta \quad \rightarrow \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi\sqrt{1 - \kappa M/\pi} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (3.24)$$

O elemento de linha nas novas coordenadas é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - x^2d\phi^2. \quad (3.25)$$

O elemento de linha (3.25) é plano em todos os pontos, exceto por uma singularidade no ponto onde está localizada a fonte ($x = 0$). A parte espacial possui a geometria de um cone. Isto se deve à restrição imposta sobre o ângulo ϕ , que varia entre 0 e $2\pi\sqrt{1 - \kappa M/\pi}$. Esta restrição equivale a remover uma “cunha” de ângulo $\alpha = 2\pi(1 - \sqrt{1 - \kappa M/\pi})$ do espaço.

A existência de uma partícula produz portanto um efeito global, alterando a topologia do espaço. Apesar de ser plana em todos os pontos (exceto na origem) as propriedades globais são diferentes do espaço-tempo plano e produzem efeitos observáveis. Por exemplo, considerando-se duas partículas de teste que se movem em direções opostas no espaço-tempo dado por (3.25). As geodésicas dessas duas partículas serão defletidas e poderão se cruzar em dois pontos da trajetória, o que não ocorre no espaço-tempo plano. Além disso, calculando a equação da geodésica

$$\frac{d^2x^\tau}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (3.26)$$

para uma partícula de teste e usando a métrica (3.21) obtemos $\frac{d^2x^\tau}{d\lambda^2} = 0$, que mostra a ausência de interação gravitacional entre a partícula de teste e a partícula fonte da métrica.

3.2.3 Soluções Cosmológicas

No trabalho de Cornish *et al.* [7] mostrou-se que no caso de fontes extensas (fluidos hidrostáticos) as soluções que a RG tridimensional fornece são espaços compactos preenchidos de matéria sem “casamento” com uma solução externa às fontes, sendo que estas soluções devem representar portanto cosmologias estáticas. Assim os modelos cosmológicos não-estáticos podem ser modelados da mesma maneira que no caso 4D pois as fontes são descritas como um fluido que preenche cada ponto do espaço-tempo e não são consideradas soluções externas às fontes.

De maneira análoga ao caso quadridimensional consideramos que o Universo é isotrópico e homogêneo tal que o elemento de linha seja dado por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 \right), \quad (3.27)$$

e as fontes são descritas pelo tensor de energia momento de um fluido perfeito.

Calculamos os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura para a métrica (3.27), e obtemos as seguintes componentes não nulas:

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r. \quad (3.28)$$

$$R_{00} = 2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a}(\ddot{a} + \dot{a}^2), \quad R = 2\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}. \quad (3.29)$$

Das equações anteriores obtemos também as componentes do tensor de Einstein:

$$G_{00} = -\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad G_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a}\ddot{a}, \quad i = 1, 2. \quad (3.30)$$

Calculamos agora as equações de Einstein, obtendo duas equações independentes:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \kappa\rho, \quad (3.31)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa p. \quad (3.32)$$

A lei de conservação (local) $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ no referencial comóvel ($U^\mu = (1, 0, 0)$) é dada por

$$\dot{\rho} + 2H(p + \rho) = 0. \quad (3.33)$$

O sistema de equações (3.29)-(3.31) descreve a “cosmologia padrão” em 3D. Estas equações possuem soluções exatas para os casos em que a fonte é poeira ($p = 0$) e radiação ($\rho = p/2$), que foram obtidas por Cornish, *et al.* [7].

Da equação para a aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa p,$$

vemos que o modelo permite a existência de regimes com aceleração positiva, isto dependendo somente da pressão do(s) constituinte(s), que deve ser negativa. Por exemplo, se o constituinte for um campo escalar a aceleração será positiva [37][38].

3.3 Gravitação em duas dimensões

Vimos no capítulo um que em um espaço-tempo bidimensional os tensores de Riemann e de Ricci possuem somente uma componente independente, e ambos podem ser escritos em termos do escalar de curvatura:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}R(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}), \quad (3.34)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.35)$$

A geometria portanto é determinada completamente pelo escalar de curvatura. Desta relação segue que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ presente nas equações de campo da RG é identicamente nulo em 2D:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (3.36)$$

de modo que as equações de Einstein não são equações dinâmicas e portanto a RG não é a teoria que descreve a gravitação em 2D, sendo então necessário uma nova teoria.

Como o escalar de curvatura descreve completamente a geometria do espaço-tempo em 2D, o primeiro modelo proposto para a gravitação bidimensional possui a equação de campo escrita em termos do escalar de curvatura. Entretanto não é possível escrever uma ação dependente apenas da geometria: é necessário a introdução de um campo escalar acoplado ao escalar de curvatura, o chamado *dilaton* [2]. Outro modelo para a gravitação bidimensional é o CGHS [9], inspirado em teoria de cordas. Estes modelos possuem aspectos bastante interessantes do ponto de vista teórico. Tratam-se de modelos quantizáveis e que podem ser descritos como teorias de gauge [39].

Estudamos aqui dois destes modelos: o primeiro foi proposto por Jackiw e Teitelboim (JT), e o segundo inspirado em teoria de cordas foi utilizado pela primeira vez como uma teoria de gravitação bidimensional por Callan, Giddings, Harvey e Strominger (CGHS).

3.3.1 Modelo de Jackiw-Teitelboim

O modelo de gravitação bidimensional de Jackiw-Teitelboim (JT) supõe que a equação de campo no vácuo é

$$R - \Lambda = 0. \quad (3.37)$$

onde Λ é uma constante cosmológica, e significa que no vácuo a curvatura é constante. Esta equação de campo é tida como o análogo da RG em 2D, pois o campo é descrito somente por quantidades geométricas.

A equação (3.37) deve ser derivada do princípio de ação mínima, como toda teoria de campo. Entretanto não é possível construir uma ação local e invariante por

TGC cuja aplicação do princípio variacional forneça a equação (3.37) somente com quantidades geométricas. Assim, Jackiw propôs a seguinte ação

$$S = \frac{1}{K} \int dx^2 \sqrt{-g} \eta (R - \Lambda), \quad (3.38)$$

onde η é um campo auxiliar que faz o papel de um multiplicador de Lagrange, e K é uma constante de acoplamento. A equação de campo (3.37) é obtida do princípio da ação mínima variando a ação (3.38) em relação a η ; variando em relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ obtemos uma equação para η :

$$\eta_{;\mu;\nu} + \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} \eta = 0, \quad (3.39)$$

Esta equação determina η sem restrições sobre $g_{\mu\nu}$, que é determinado completamente por (3.37).

Incluindo campos de matéria na ação de JT as equações de campo são:

$$R = \Lambda - K \mathcal{L}_m = \Lambda - KT \quad (3.40)$$

$$\eta_{;\mu;\nu} + \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} \eta = -\frac{K}{2} (T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T), \quad (3.41)$$

Neste caso a matéria se acopla à métrica e ao campo escalar, $g_{\mu\nu}$ e η . Entretanto é possível utilizar somente a equação de campo (3.40) fazendo com que o campo η seja absorvido pelos campos de matéria [2].

3.3.2 Modelo CGHS, ou gravitação dilatônica

O modelo CGHS para a gravitação bidimensional parte de uma ação “inspirada” pela teoria de cordas:

$$S = \int dx^2 \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\varphi} [R + 4\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \Lambda g_{\mu\nu} + J] + \mathcal{L}_m \right\} \quad (3.42)$$

onde φ é um campo escalar conhecido como *dilaton*, \mathcal{L}_m é a lagrangeana dos campos de matéria e J é o termo de fonte do dilaton. O campo escalar neste caso, diferente do modelo de JT, é um campo dinâmico análogo ao campo escalar presente na gravitação de Brans-Dicke [40]. Esta ação foi utilizada pela primeira vez em uma teoria de gravitação bidimensional por Callan, Giddings, Harvey e Strominger, que mostraram que esta ação possui soluções características de teorias de gravitação, mostrando a existência de soluções de buraco negro e radiação Hawking [9].

Utilizamos o princípio da ação mínima, variando a ação (3.42) em relação a $g_{\mu\nu}$ e φ obtemos as equações de campo [32]

$$e^{-2\varphi} (R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} - 2\varphi_{;\mu;\nu}) = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

$$R - \Lambda - 4(\partial_\mu \varphi)^2 + 4\Box\varphi + J = 0. \quad (3.44)$$

Das equações de campo segue a lei de conservação que relaciona o termo de fonte da matéria e do dilaton [32]

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} e^{-\varphi} J^{;\mu}. \quad (3.45)$$

Esta equação mostra que se considerarmos que a matéria obedece à lei de conservação local, $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$, o termo de fonte do dilaton é constante $J = c$; trata-se do “vácuo” (o estado fundamental) do dilaton que pode ser escolhido como sendo nulo.

3.3.3 Soluções Cosmológicas

Nesta seção fazemos uma breve revisão sobre soluções cosmológicas que já foram estudadas por diversos autores nos dois modelos de gravitação bidimensional aqui apresentados [32][33][34][41].

O “universo” bidimensional é modelado pela métrica de RW, que em 2D é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} dr^2. \quad (3.46)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$r \rightarrow \text{arc sin}(\sqrt{kr})/\sqrt{k}, \quad (3.47)$$

a métrica (3.46) é reescrita como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dr^2. \quad (3.48)$$

A evolução do Universo em 2D não depende portanto do valor de k , somente do fator de escala $a(t)$. Geometricamente isto pode ser entendido devido ao fato de que todos os espaços bidimensionais são conformemente planos, ou seja, é sempre possível encontrar um referencial onde a métrica é dada por $g_{\mu\nu} = \rho(x^\mu)\eta_{\mu\nu}$, onde $\rho(x^\mu)$ é um campo escalar.

Para a métrica (3.48), calculamos as componentes dos símbolos de Christoffel, do tensor de Ricci e do escalar de curvatura. As componentes não nulas são as seguintes

$$R_{00} = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = -\ddot{a}a, \quad R = 2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.49)$$

$$\Gamma_{11}^0 = -\dot{a}a, \quad \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.50)$$

Consideramos primeiro as soluções cosmológicas para o modelo JT. Calculando a equação de campo (3.40) para a métrica (3.48), para o caso de fontes descritas por um fluido perfeito, obtemos:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - \kappa(\rho - p), \quad (3.51)$$

e a equação de balanço para o TEM é

$$\dot{\rho} + H(\rho + p) = 0. \quad (3.52)$$

Assumindo que o fluido obedece uma equação de estado barotrópica, $p = (\gamma - 1)\rho$, a equação de campo pode ser reescrita como

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda + \kappa(\gamma - 2)\rho; \quad (3.53)$$

da equação de balanço obtemos uma relação entre a densidade de energia e o fator de escala

$$\dot{\rho} + \gamma\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \rightarrow \rho \propto a^{-\gamma}. \quad (3.54)$$

Considerando que γ varia entre $0 < \gamma < 2$ ($\gamma = 2$ é radiação¹ e $\gamma = 0$ é o falso vácuo), a equação de campo nos mostra que a aceleração \ddot{a} será sempre negativa (ou nula, para $\gamma = 2$), no caso em que $\Lambda = 0$. Um regime de aceleração positiva existiria somente considerando que a densidade de energia seja negativa, violando a *condição de energia fraca* ($\rho > 0$) [26]. Para $\Lambda \neq 0$ um regime de aceleração positiva dependerá somente do valor da constante cosmológica que deve ser maior que o termo das fontes, $\Lambda > |\kappa(\gamma - 2)|\rho$.

No caso de um fluido fora do equilíbrio (com um termo de viscosidade no tensor de energia-momento) ocorre o mesmo comportamento. A equação de campo (sem a constante cosmológica), é dada por [41]

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = \kappa(\gamma - 2 - \alpha H)\rho, \quad (3.55)$$

que só permite regime de aceleração negativa.

Passamos agora ao modelo CGHS. As equações de campo do modelo CGHS (3.41) calculadas para a métrica de RW (3.48) e para um fluido perfeito e $J = 0$ são dadas por

$$e^{-2\varphi} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\ddot{\varphi} \right) = -\kappa\rho, \quad (3.56)$$

$$e^{-2\varphi} \left(-\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) = -\kappa a^2 p. \quad (3.57)$$

Podemos reescrever estas equações da seguinte maneira

$$e^{-2\varphi} \left(2\ddot{\varphi} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) = -\kappa(\rho + p) \quad , \quad (3.58)$$

$$e^{-2\varphi} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\ddot{\varphi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) = -\kappa(\rho - p). \quad (3.59)$$

Para um fluido barotrópico podemos reescrever as equações anteriores da seguinte maneira

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa}{2}e^{2\varphi}(\gamma - 2)\rho - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \ddot{\varphi}, \quad (3.60)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\kappa}{2}e^{2\varphi}\gamma\rho + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}. \quad (3.61)$$

Calculamos também a equação para o dilatón (3.42) e obtemos

$$\ddot{a} + 2a\dot{\varphi}^2 - 2a\ddot{\varphi} - 2\dot{a}\dot{\varphi} = 0. \quad (3.62)$$

O sistema de equações (3.54)-(3.56) pode ser resolvido analiticamente em alguns casos. Por exemplo, para $\gamma = 1$ (poeira) e $\gamma = 2$ (radiação) [32]. A existência de regimes de aceleração positiva ocorre somente para $\rho < 0$ da mesma maneira que no modelo JT.

No próximo capítulo exploraremos com mais detalhes as soluções cosmológicas possíveis nos modelos JT e CGHS. Em particular, os regimes que incluem expansão com aceleração positiva.

¹Na verdade não existe radiação eletromagnética em 2D, como foi mostrado por Schwinger [42]. Assim, em 2D a radiação estaria relacionada à partículas sem massa como o fóton.

Capítulo 4

Regimes de aceleração positiva nas cosmologias bidimensional e tridimensional

Neste capítulo aplicamos o que foi visto nos capítulos anteriores para estudar a existência de regimes cosmológicos de aceleração positiva (inflação e energia escura) em três modelos de gravitação em dimensões reduzidas, no caso em que a geometria do universo é plana ($k = 0$). O primeiro modelo é um universo isotrópico e homogêneo em 3D constituído de uma mistura de campo escalar e matéria/radiação, modelado pelas equações de Einstein da Relatividade Geral. O campo escalar representa o inflaton ou a energia escura, dependendo da era sob análise. Os outros modelos são de gravitação bidimensional: JT e CGHS. Vimos no capítulo anterior que as soluções cosmológicas já estudadas para estes modelos só apresentam regimes de aceleração positiva devido à introdução de uma constante cosmológica nas equações de campo. Analisamos aqui a possibilidade da existência destes regimes propondo a substituição da equação de estado barotrópica dos constituintes pela equação de estado de van der Waals [43][44][45].

4.1 Regimes de inflação e energia escura em três dimensões

O modelo cosmológico tridimensional que estudamos é construído de maneira análoga ao caso 4D, como foi visto no capítulo anterior. As equações de campo de Einstein (ECE) fornecem a dinâmica do campo gravitacional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde κ é a constante de acoplamento gravitacional em 3D. A métrica plana de RW tridimensional é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [dr^2 + r^2 d\theta^2], \quad (4.2)$$

considerando as hipóteses de homogeneidade e isotropia do Princípio Cosmológico. O fator de escala $a(t)$ é determinado pelas ECE ao especificarmos as fontes através do tensor de energia-momento.

Consideramos primeiro o termo de geometria das ECE, o lado esquerdo da equação (4.1). Calculando os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura obtemos para a métrica (4.2):

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r. \quad (4.3)$$

$$R_{00} = 2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a}(\ddot{a} + \dot{a}^2), \quad R = 2\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}. \quad (4.4)$$

A partir das equações anteriores calculamos as componentes do tensor de Einstein:

$$G_{00} = -\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad G_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a}\ddot{a}, \quad i = 1, 2. \quad (4.5)$$

Consideramos agora o termo de fonte das ECE. O fluido cosmológico é composto de uma mistura de dois constituintes: a matéria/radiação e o campo escalar, que representa o “inflaton” na era inflacionária ou a energia escura na era atual. Estes constituintes são caracterizados por uma equação de estado barotrópica:

$$p_m = (\gamma - 1)\rho_m, \quad 1 \leq \gamma \leq 2, \quad (4.6)$$

$$p_\psi = (\nu - 1)\rho_\psi, \quad 0 \leq \nu < 1, \quad (4.7)$$

onde p_m e p_ψ (e ρ_m e ρ_ψ) são as pressões hidrostáticas (e as densidades de energia) da matéria (m) e do campo escalar (ψ). O intervalo de valores da constante ν da equação de estado do campo escalar é tal que restringe a pressão a valores negativos.

Levando em conta efeitos dissipativos, consideramos que os constituintes interagem através do campo gravitacional e tal interação é modelada através de um termo de pressão dinâmica presente no tensor de energia momento:

$$T_{\mu\nu} = (\rho_m + \rho_\psi + p_m + p_\psi + \varpi) U_\mu U_\nu - (p_m + p_\psi + \varpi) g_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

A inclusão da pressão dinâmica permite modelar classicamente e fenomenologicamente a criação de partículas através de um processo irreversível de transferência de energia entre o campo gravitacional e os campos de matéria [22]. Utilizamos a decomposição de Eckart descrita no capítulo dois, onde a pressão dinâmica é dada pela equação constitutiva

$$\varpi = -\eta\Theta = -\eta U_{;\mu}^\mu. \quad (4.9)$$

onde η é o coeficiente de viscosidade e $\Theta = U_{;\mu}^\mu = 2H$ é taxa de expansão na métrica de RW (4.2). Assumimos também que o coeficiente de viscosidade é proporcional à densidade de energia dos constituintes, $\eta = \alpha(\rho_m + \rho_\psi)$. Logo a pressão dinâmica é dada por

$$\varpi = -2\alpha(\rho_m + \rho_\psi)H, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4.10)$$

Podemos agora escrever as equações de Einstein para o modelo. As componentes não nulas do tensor de Einstein são dadas por (4.5); as componentes do tensor de energia-momento (4.9) no referencial comóvel são

$$T_{00} = \rho_m + \rho_\psi, \quad T_{ii} = -g_{ii}(\rho_m + \rho_\psi + \varpi). \quad (4.11)$$

As equações dinâmicas são dadas portanto por

$$H^2 = \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = \kappa(\rho_m + \rho_\psi), \quad (4.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa(p_m + p_\psi + \varpi). \quad (4.13)$$

Consideramos agora as leis de conservação. O tensor de energia-momento obedece à lei de conservação local $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, que calculada em um referencial comóvel fornece a seguinte equação

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\psi + 2H(\rho_m + \rho_\psi + p_m + p_\psi + \varpi) = 0. \quad (4.14)$$

Esta equação pode ser desacoplada se considerarmos que o campo escalar interage apenas consigo mesmo e com o campo gravitacional. De fato, vimos no capítulo dois que um campo escalar obedece à equação de Klein-Gordon em um espaço curvo, que no caso em que a métrica é RW em três dimensões é dada por

$$\ddot{\psi} + 2H\dot{\psi} = -V'(\psi), \quad (4.15)$$

e que considerando o teorema de Noether obtem-se uma lei de conservação de um fluido perfeito para o campo escalar. Fazendo isto obtemos uma equação de conservação para o campo escalar e outra para a matéria:

$$\dot{\rho}_\psi + 2H(\rho_\psi + p_\psi) = 0, \quad (4.16)$$

$$\dot{\rho}_m + 2H(\rho_m + p_m) = -2H\varpi. \quad (4.17)$$

A equação para o campo escalar pode ser integrada diretamente utilizando a equação de estado (4.7)

$$\dot{\rho}_\psi + 2H[\rho_\psi + (\nu - 1)\rho_\psi] = 0 \rightarrow \rho_\psi = \rho_\psi^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\nu},$$

onde ρ_ψ^0 e a_0 são os valores de $\rho_\psi(t)$ e $a(t)$ no instante inicial $t = 0$ (através do ajuste dos relógios). Como vimos no capítulo dois, através do Teorema de Noether obtêm-se as seguintes expressões para a densidade de energia e pressão hidrostática de um campo escalar:

$$\rho_\psi = \frac{1}{2}\dot{\rho}_\psi^2 + V(\psi), \quad p_\psi = \frac{1}{2}\dot{\rho}_\psi^2 - V(\psi). \quad (4.18)$$

Utilizando a equação de estado para o campo escalar (4.7) nas equações anteriores, obtemos uma expressão para o potencial do campo escalar em função do fator de escala:

$$V(\psi) = \rho_\psi^0 \left(\frac{2-\nu}{2}\right) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\nu}. \quad (4.19)$$

A lei de conservação da matéria (4.17) não pode ser integrada diretamente devido ao termo dependente da pressão dinâmica. Discutiremos a interpretação desta equação adiante. Utilizaremos agora a equação (4.12); conhecemos como ρ_ψ depende de $a(t)$, e obtemos uma equação para ρ_m em função de $a(t)$ e $\dot{a}(t)$:

$$\rho_m = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \rho_\psi, \quad \rho_\psi = \rho_\psi^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2\nu}. \quad (4.20)$$

Analisamos agora a lei de conservação da matéria (4.17). Somando as densidades de energia dos constituintes não obtemos uma constante, pois a lei de conservação (4.14) é uma lei de conservação *local* e não leva em conta a densidade de energia do campo gravitacional. Para obtermos uma análise completa devemos calcular o pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional, dado pela seguinte equação [10]:

$$T_G^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{g^{\mu\tau}}{\sqrt{g}} (\Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \delta_{\beta\alpha}^\nu \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma) \frac{\partial(g^{\alpha\beta} \sqrt{g})}{\partial x^\tau} - g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\tau}^\tau - \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \Gamma_{\beta\rho}^\sigma) g^{\mu\nu} \right]. \quad (4.21)$$

Utilizando os símbolos de Christoffel calculados (4.3), obtemos para a componente T_{00}^G , que é identificada como a densidade de energia do campo gravitacional

$$T_{00}^G = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \rho_G. \quad (4.22)$$

Comparando com a equação (4.12) temos

$$\rho_G = -(\rho_m + \rho_\psi). \quad (4.23)$$

Derivando a equação anterior,

$$\dot{\rho}_G = -(\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\psi), \quad (4.24)$$

e utilizando a lei de conservação local (4.14) chegamos a uma lei de conservação para a densidade de energia do campo gravitacional

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_G &= 2H(\rho_m + \rho_\psi + p_m + p_\psi + \varpi) \rightarrow \\ \dot{\rho}_G + 2H(\rho_G - p_m - p_\psi) &= 2H\varpi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comparando com a lei de conservação da matéria (4.17) vemos que o termo do lado direito é idêntico mas com sinal oposto. Este termo é responsável pela transferência de energia entre o campo gravitacional e os campos de matéria. Durante a expansão temos $\varpi < 0$, e portanto o campo gravitacional transfere energia para os campos de matéria.

Observamos que todos os termos presentes nas equações de campo (4.12) e (4.13) podem ser escritos em função do fator de escala $a(t)$ e $\dot{a}(t)$. Portanto o sistema de equações (4.12),(4.13) pode ser reescrito como uma equação apenas. Temos que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2.$$

Assim, da equação (4.12) temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\kappa(p_m + p_\psi + \varpi),$$

e substituindo o termo H^2 utilizando a equação (4.12), obtemos

$$\dot{H} = -\kappa(\rho_m + \rho_\psi + p_m + p_\psi + \varpi). \quad (4.26)$$

Utilizamos agora as equações de estado dos constituintes (4.6), (4.7) e a equação constitutiva da pressão dinâmica (4.10) e eliminamos da equação anterior os termos dependentes das pressões

$$\dot{H} = \kappa[(2\alpha H - \gamma)\rho_m + (2\alpha H - \nu)\rho_\psi]. \quad (4.27)$$

Substituímos as equações para as densidades de energia (4.20) na equação (4.27) e obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para o fator de escala:

$$\begin{aligned} \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \kappa \left[(2\alpha H - \gamma) \left(\frac{H^2}{\kappa} - \rho_\psi \right) + (2\alpha H - \nu)\rho_\psi \right] \\ &= (2\alpha H - \gamma)H^2 + (\gamma - \nu)\kappa\rho_\psi^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2\nu}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Redefinimos as funções em termos de quantidades adimensionais:

$$\begin{aligned} H &\equiv H/H_0, \quad t \equiv tH_0, \quad a \equiv a/a_0, \quad \alpha \equiv \alpha H_0, \quad \varpi \equiv \kappa\varpi/H_0^2, \\ \rho_\psi &\equiv \rho_\psi/\rho_\psi^0, \quad \rho_m \equiv \rho_m/\rho_\psi^0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $H(0) = H_0$, $a(0) = a_0$, etc. A relação entre H_0 , ρ_m^0 e ρ_ψ^0 é obtida da equação (4.12), que no instante inicial $t = 0$ é dada por

$$H_0^2 = \kappa(\rho_m^0 + \rho_\psi^0), \quad \rightarrow \quad \rho_\psi^0 = \frac{H_0^2}{\kappa(1 + \rho_m^0/\rho_\psi^0)}. \quad (4.30)$$

Reescrevemos agora as equações em função dos parâmetros adimensionais dados por (4.29) e (4.30). Para as densidades de energia do campo escalar e da matéria obtemos as seguintes relações

$$\rho_\psi = \left(\frac{1}{a} \right)^{2\nu}, \quad (4.31)$$

$$\rho_m = \left(1 + \frac{\rho_m^0}{\rho_\psi^0} \right) H^2 - \left(\frac{1}{a} \right)^{2\nu}; \quad (4.32)$$

e para a equação de campo obtemos

$$\dot{H} = (2\alpha H - \gamma)H^2 + \frac{\gamma - \nu}{1 + \rho_m^0/\rho_\psi^0} \left(\frac{1}{a} \right)^{2\nu}, \quad (4.33)$$

que escrita em função do fator de escala é

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(2\alpha \frac{\dot{a}}{a} - \gamma \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\gamma - \nu}{1 + \rho_m^0/\rho_\psi^0} \left(\frac{1}{a} \right)^{2\nu}. \quad (4.34)$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem para $a(t)$, que pode ser resolvida numericamente. Para resolvê-la devemos especificar duas condições iniciais, $a(0)$ e $\dot{a}(0)$, e os quatro parâmetros α , γ , ν e ρ_m^0/ρ_ψ^0 . O intervalo de valores para estes parâmetros e os valores utilizados para as condições iniciais estão relacionados na tabela a seguir.

viscosidade	$0 < \alpha < 1$
eq. de estado da matéria	$2 < \gamma < 1$
eq. de estado da energia escura	$0 < \nu < 1$
$a(0)$	1, 0
$\dot{a}(0)$	1, 0

Assumimos como condições iniciais $a(0) = \dot{a}(0) = 1$ pois com tais condições, das equações para as densidades de energia dos constituintes (4.31) e (4.32), no instante $t = 0$ temos $\rho_m(0) = \rho_m^0/\rho_\psi^0$ e $\rho_\psi(0) = 1$.

A princípio não há qualquer restrição para o valor de ρ_m^0/ρ_ψ^0 . No caso inflacionário supomos que a densidade de energia do campo escalar, que neste caso trata-se do inflaton ϕ , $\rho_\psi = \rho_\phi$ é dominante no instante inicial e portanto devemos ter $\rho_m^0/\rho_\psi^0 < 1$. No caso do universo “atual”, o regime dominado pela energia escura é precedido por um regime dominado pela matéria/radiação, assim neste caso devemos ter $\rho_m^0/\rho_\psi^0 > 1$.

A dinâmica obtida na sequência acima permite analisar dois regimes diferentes: um período inflacionário em um universo “jovem” e uma era dominada pela energia escura correspondente ao um universo “atual”. As grandezas que permitem fazer a descrição desses regimes são: o fator de escala; a aceleração; a densidades de energia e as pressões hidrostáticas dos constituintes. Procedemos à apresentação dos resultados numéricos obtidos.

4.1.1 Regimes de inflação

Na sequência de gráficos a seguir apresentamos os resultados obtidos para o modelo cosmológico 3D com soluções inflacionárias. As soluções obtidas apresentam inicialmente um regime inflacionário com aceleração positiva, que posteriormente sofre uma transição para um regime de aceleração negativa dominado pela matéria. Chamaremos este tipo de transição de regimes de acelerado-desacelerado.

Para a curva cheia de cada gráfico foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0,5; \quad \nu = 0,95; \quad \gamma = 1,5; \quad \rho_m^0/\rho_\phi^0 = 0.$$

Analizamos também os efeitos causados nas solução devido à variação dos parâmetros. Para isto outras curvas foram obtidas para variações de cada parâmetro presente nas equações de campo, como estão indicados nas legendas das figuras.

¹Este modelo portanto não possui soluções que descrevam a evolução dinâmica do universo completamente, desde a era inflacionária até a era atual.

I Fator de escala

A figura (4.1) mostra a evolução temporal do fator de escala. A solução é de um universo 3D em expansão permanente. A variação dos parâmetros da equação leva às seguintes mudanças no comportamento do fator de escala:

- α menor: a expansão é mais lenta, ou seja, o crescimento do fator de escala é mais lento;
- γ maior: a expansão é mais lenta;
- ν menor: expansão é mais rápida;
- ρ_m^0/ρ_ϕ^0 maior: expansão é mais lenta.

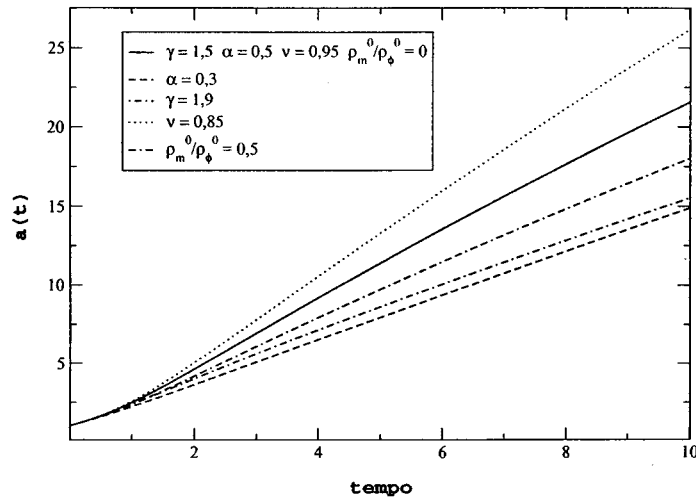


Figura 4.1: Evolução temporal do fator de escala para o modelo 3D no caso inflacionário.

II Aceleração

A figura (4.2) mostra a evolução temporal da aceleração. As soluções apresentam uma transição de regimes do tipo acelerado-desacelerado. Após a transição, a desaceleração atinge um valor máximo e depois decresce assintoticamente para zero. A variação dos parâmetros da equação de campo causa as seguintes mudanças na solução:

- α menor: o valor inicial da aceleração é menor, e o instante da transição é próximo da curva cheia; além disso a transição para o regime desacelerado é mais suave e o valor máximo da desaceleração é menor.

- γ maior: a aceleração decai mais rapidamente; o período inflacionário é mais curto e o valor máximo da desaceleração é menor.
- ν menor: nos instantes iniciais há um acréscimo na aceleração, chegando a um valor máximo e depois ocorre um decréscimo acompanhando a curva cheia; o regime inflacionário é mais longo e o valor máximo da desaceleração é menor.
- ρ_m^0/ρ_ϕ^0 maior: a aceleração sofre um decaimento mais lento; o valor inicial da aceleração é menor; o período inflacionário é mais curto e o valor máximo da desaceleração é menor.

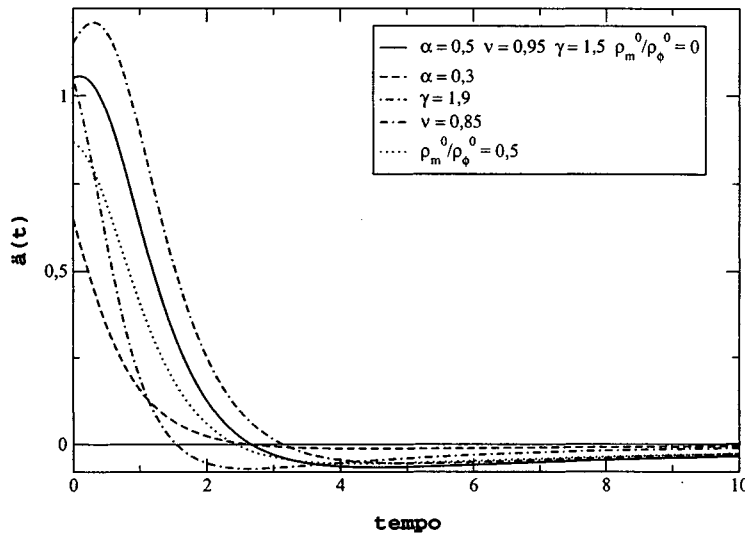


Figura 4.2: Evolução temporal da aceleração para o modelo 3D o caso inflacionário.

III Densidades de energia

A figura (4.3) mostra a evolução das densidades de energia dos constituintes: do inflaton $\rho_\phi(t)$ e da matéria $\rho_m(t)$.

A densidade de energia do inflaton está plotada em escala logarítmica e mostra um decaimento com o passar do tempo devido à expansão. Observa-se que a variação dos parâmetros causa as seguintes mudanças no comportamento de ρ_ϕ :

- α ou ν menor: decaimento mais lento;
- γ ou ρ_m^0/ρ_ϕ^0 maior: decaimento mais lento;

A densidade de energia da matéria $\rho_m(t)$ apresenta um período de criação de matéria nos instantes iniciais, chegando a um máximo e depois decaindo. A variação dos parâmetros afeta a criação de matéria, causando as seguintes mudanças no comportamento:

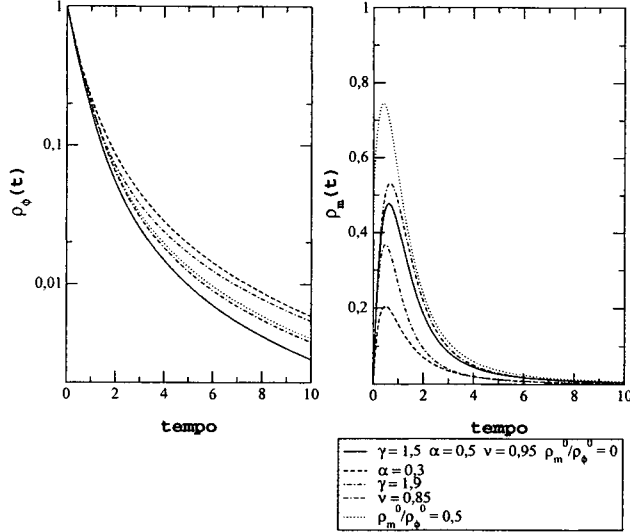


Figura 4.3: Evolução temporal das densidades de energia do inflaton $\rho_\phi(t)$ e da matéria $\rho_m(t)$ para o modelo 3D no caso inflacionário.

- α menor: o pico da criação de matéria é menor; após o pico de crescimento, o decaimento é mais suave;
- γ maior: o pico da criação de matéria é menor;
- ν menor: o pico da criação de matéria é maior;
- ρ_m^0/ρ_ϕ^0 maior: o pico da criação é maior;

IV Pressão

A figura (4.4) mostra a evolução temporal das pressões hidrostáticas dos constituintes p_m e p_ϕ , da pressão dinâmica ϖ e da pressão total $p_{Total} = p_m + p_\phi + \varpi$.

A pressão hidrostática da matéria está relacionada à densidade pela equação barotrópica $p_m = (\gamma - 1)\rho_m$. Apresenta portanto o mesmo comportamento da densidade de energia (figura (4.2)) durante a evolução e para a variação dos parâmetros da equação de campo. A pressão hidrostática do inflaton, cuja equação de estado é $p_\phi = (\nu - 1)\rho_\phi$ com $0 \leq \nu \leq 1$, é negativa. Apresenta portanto o mesmo comportamento durante a evolução, mas com valores negativos.

A pressão dinâmica possui valores negativos ao longo da evolução temporal. Da equação (4.10) vemos que isso deve ocorrer, já que as soluções apresentadas são de um universo em expansão ($H > 0$). Observa-se que ao longo do tempo a pressão dinâmica diminui (em módulo) se aproximando assintoticamente de zero. A variação dos parâmetros não afeta de forma significativa a evolução da pressão dinâmica; apenas para os parâmetros α e ρ_m^0/ρ_ϕ^0 o valor inicial varia significativamente.

Observa-se na figura (4.4d) que a pressão total é inicialmente negativa e decresce (em módulo) com o passar do tempo, sendo dominada portanto pelas pressões do inflaton e dinâmica. No instante em que a pressão total é zero a ocorre a transição

do regime acelerado para o desacelerado, quando a pressão da matéria domina. Após um breve crescimento, a pressão decresce assintoticamente para zero. A variação dos parâmetros afeta a transição do período de domínio da pressão negativa $p_\phi + \varpi$ para o período de domínio da pressão da matéria, da seguinte maneira:

- α menor; ou γ ou ρ_m/ρ_ϕ maior: a transição ocorre antes;
- γ maior: a transição ocorre antes.

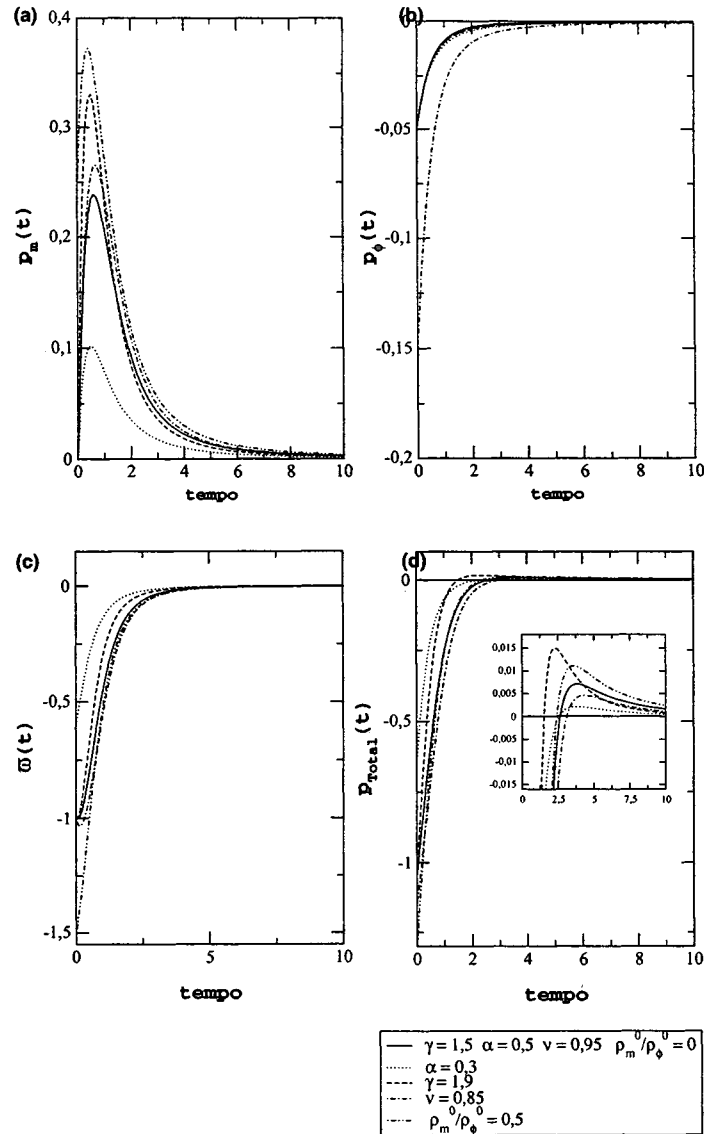


Figura 4.4: Os gráficos da evolução temporal das pressões do modelo 3D no caso inflacionário: (a) pressão hidrostática da matéria; (b) pressão hidrostática do inflaton; (c) pressão dinâmica; (d) pressão total.

IV Soluções para um fluido perfeito

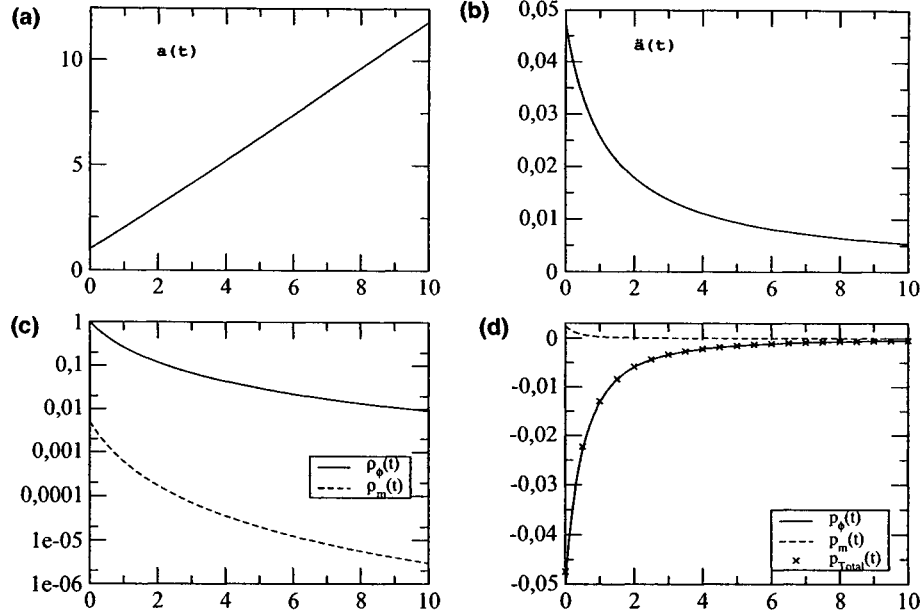


Figura 4.5: Gráficos da evolução temporal para o caso $\alpha = 0$: (a) fator de escala; (b) aceleração; (c) densidades de energia do inflaton $\rho_\varphi(t)$ e da matéria $\rho_m(t)$, (d) pressões hidrostáticas do inflaton $p_\varphi(t)$, da matéria $p_m(t)$ e total p_{Total} .

Consideramos agora o caso de um fluido perfeito, fazendo $\alpha = 0$, para verificar qual a importância da inclusão de efeitos dissipativos no modelo. Neste caso, a equação de campo do modelo em função das variáveis adimensionais (4.29) é dada por:

$$\dot{H} = -\gamma H^2 + \frac{\gamma - \nu}{1 + \rho_m^0/\rho_\varphi^0} \left(\frac{1}{a}\right)^{2\nu}; \quad (4.35)$$

a densidade de energia do inflaton permanece igual:

$$\rho_\varphi = \left(\frac{1}{a}\right)^{2\nu}, \quad (4.36)$$

e a lei de conservação da matéria pode agora ser integrada, resultando em:

$$\rho_m = \frac{\rho_m^0}{\rho_\varphi^0} \left(\frac{1}{a}\right)^{2\gamma}. \quad (4.37)$$

Para o caso inflacionário resolvemos estas equações para um caso típico, com parâmetros:

$$\gamma = 1,5, \quad \nu = 0,95, \quad \rho_m^0/\rho_\varphi^0 = 0,005.$$

A figura (4.5) mostra a evolução temporal do fator de escala, da aceleração, das densidades de energia e das pressões hidrostáticas dos constituintes. Observamos que

neste caso a pressão é dominada pelo inflaton e a aceleração é sempre positiva, não havendo transição para um regime desacelerado. Isso se deve ao fato da densidade de energia da matéria decair muito mais rápido que a densidade de energia do inflaton, (4.36) e (4.37). Como a razão inicial ρ_m^0/ρ_ϕ^0 é pequena, a densidade de energia (e a pressão) do inflaton sempre dominará sobre a matéria. Verificamos que isto ocorre para casos em que a razão inicial de densidades dos constituintes possui valores de até $\rho_m^0/\rho_\phi^0 \sim 0,01$. Para outros casos, como $\rho_m^0/\rho_\phi^0 \sim 0,2$, ocorrem transições do tipo desacelerado-acelerado.

Esta breve análise mostra que no caso inflacionário a inclusão de efeitos dissipativos é essencial para haver soluções cosmológicas com transições de fase do tipo acelerado-desacelerado. Caso a razão inicial dos constituintes seja grande o suficiente este tipo de solução não ocorre, mas sim as soluções típicas do caso da energia escura.

4.1.2 Energia escura

Passamos agora para a apresentação dos resultados obtidos para o caso em que o modelo cosmológico em 3D apresenta soluções de energia escura. As soluções obtidas apresentam o seguinte comportamento: há uma transição de um regime desacelerado, que corresponde ao período de domínio da matéria, para um regime acelerado, que corresponde ao período de domínio da energia escura. Chamaremos este tipo de transição de regimes de desacelerado-acelerado.

Os parâmetros utilizados para a curva cheia de cada gráfico foram os seguintes:

$$\alpha = 0,01; \quad \gamma = 1,5; \quad \nu = 0,5; \quad \rho_m^0/\rho_X^0 = 2.$$

De maneira semelhante ao caso inflacionário, analisamos os efeitos causados pela variação dos parâmetros presentes na equação de campo. As outras curvas de cada gráfico foram obtidas variando cada parâmetro, como está indicado nas legendas das figuras.

I Fator de escala

A figura (4.6) mostra a evolução temporal do fator de escala. A solução neste caso é de um universo em expansão permanente.

A variação dos parâmetros afeta a expansão, causando as seguintes mudanças nas soluções:

- α maior: a expansão é maior;
- γ maior: a expansão é menor;
- ν ou ρ_m^0/ρ_ϕ^0 menor: a expansão é maior;

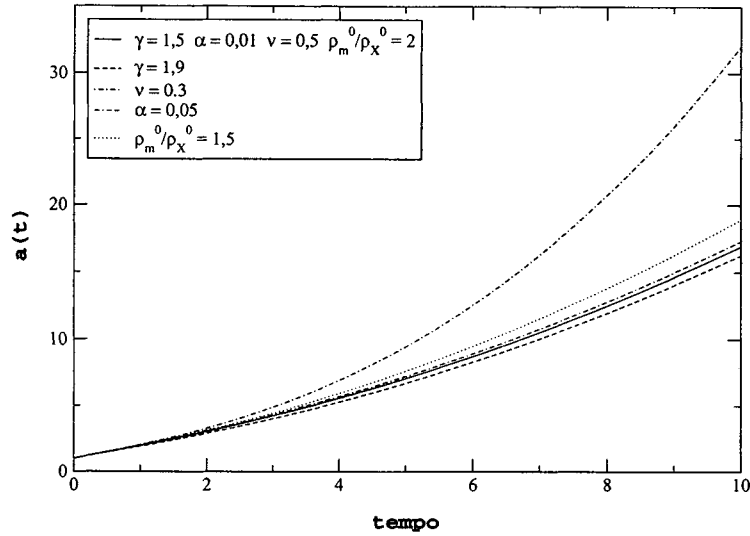


Figura 4.6: Evolução temporal do fator de escala para o caso da energia escura.

II Aceleração

A figura (4.7) mostra a evolução temporal da aceleração. Como foi dito no início, as soluções apresentam uma transição de regimes do tipo desacelerado-acelerado. Na curva cheia vemos que após a transição a aceleração cresce cada vez mais lentamente tendendo assintoticamente para um valor constante. A variação dos parâmetros da equação de campo afetam a duração dos regimes e o crescimento da aceleração após a transição, causando as seguintes mudanças nas soluções:

- α maior: inicialmente o valor da desaceleração é menor; a duração do regime desacelerado é menor; após a transição a aceleração evolui rapidamente se aproximando da curva cheia, e tendendo para um valor constante.
- γ maior: inicialmente valor da desaceleração é maior; o regime desacelerado tem maior duração; após a transição a evolução ocorre de maneira semelhante ao caso anterior.
- ν menor: inicialmente a desaceleração é menor, e ao contrário dos outros casos, após a transição para o regime acelerado a aceleração continua a crescer; para $t \approx 2$ o crescimento se torna mais lento.
- ρ_m^0/ρ_ϕ^0 menor: inicialmente o valor da desaceleração é menor, e a evolução ocorre de maneira semelhante aos dois primeiros casos.

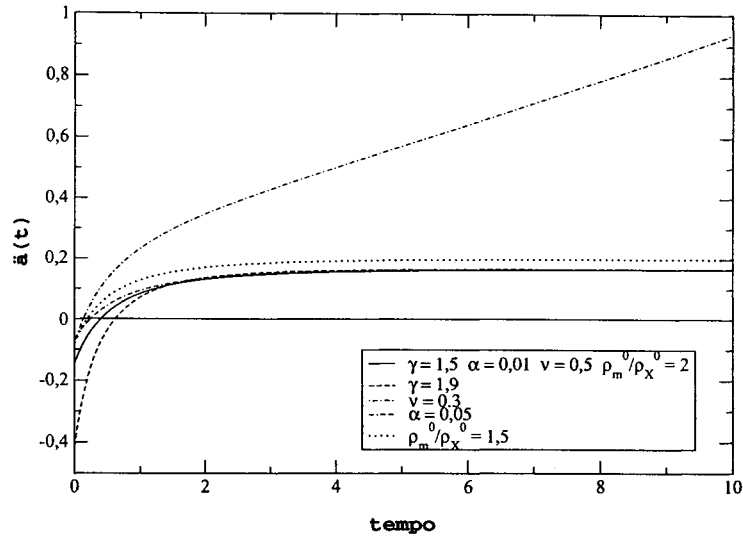


Figura 4.7: Evolução temporal da aceleração para o caso da energia escura.

III Densidade de energia

A figura (4.8) mostra a evolução temporal para as densidades de energia dos constituintes: a energia escura $\rho_X(t)$ e matéria $\rho_m(t)$. Com o passar do tempo, devido à expansão do Universo, as densidades de energia decaem, de acordo com as equações (4.32) e (4.31). Os gráficos estão em escala logarítmica. Observa-se que a densidade de energia da matéria decai mais rapidamente comparada com o decaimento da energia escura.

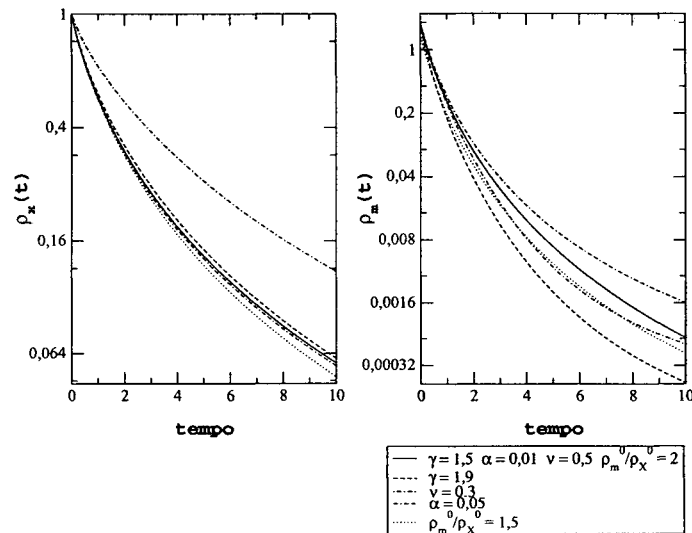


Figura 4.8: Evolução temporal das densidades de energia da energia escura $\rho_X(t)$ e da matéria $\rho_m(t)$:

A variação dos parâmetros da equação de campo causa as seguintes mudanças no

comportamento das densidades:

- Para $\rho_X(t)$:
 - α maior: o decaimento é ligeiramente mais rápido;
 - γ maior: o decaimento é ligeiramente mais lento;
 - ν menor: o decaimento é mais lento;
 - ρ_m^0/ρ_ϕ^0 menor: o decaimento é mais rápido.
- Para $\rho_m(t)$
 - α maior: o decaimento é mais lento;
 - γ maior: o decaimento é mais rápido;
 - ν e ρ_m^0/ρ_ϕ^0 menor: o decaimento é mais rápido;

IV Pressão

A figura (4.9) mostra a evolução temporal das pressões hidrostáticas dos constituintes p_m e p_X , da pressão dinâmica ϖ e da pressão total $p_{Total} = p_m + p_X + \varpi$.

A evolução das pressões hidrostáticas estão relacionadas à evolução das densidades através das respectivas equações de estado, como no caso inflacionário.

A pressão dinâmica possui valores negativos ao longo da evolução temporal, e diminui (em módulo) assintoticamente para zero. A variação dos parâmetros α (aumento) e ρ_m^0/ρ_X^0 (diminuição) causa um grande aumento da pressão dinâmica. Para os outros parâmetros não mudança significativa no comportamento das curvas.

Observa-se na figura (4.9d) que a pressão total é inicialmente positiva e decresce com o passar do tempo; neste período a pressão da matéria domina. No instante em que a pressão total é zero ocorre a transição do regime desacelerado para o regime acelerado, quando as pressões negativas dominam. Após um breve crescimento (em módulo), a pressão decresce assintoticamente para zero. A variação dos parâmetros afeta a transição do período de domínio da da matéria para o período de domínio da pressão negativa $p_X + \varpi$, da seguinte maneira:

- α menor; ou γ ou ρ_m/ρ_X maior: a transição ocorre antes;
- γ maior: a transição ocorre depois.

V Soluções para um fluido perfeito

Consideramos agora o caso em que $\alpha = 0$, para verificar a influência dos efeitos dissipativos no caso da energia escura. A equação de campo e as relações para a densidade de energia são dadas por (4.36) e (4.37). Observamos que neste caso as soluções são qualitativamente idênticas ao caso com $\alpha \neq 0$, ocorrendo as transições de regimes do tipo desacelerado-acelerado. No caso em que $\alpha \neq 0$ ocorrem as seguintes variações nas soluções:

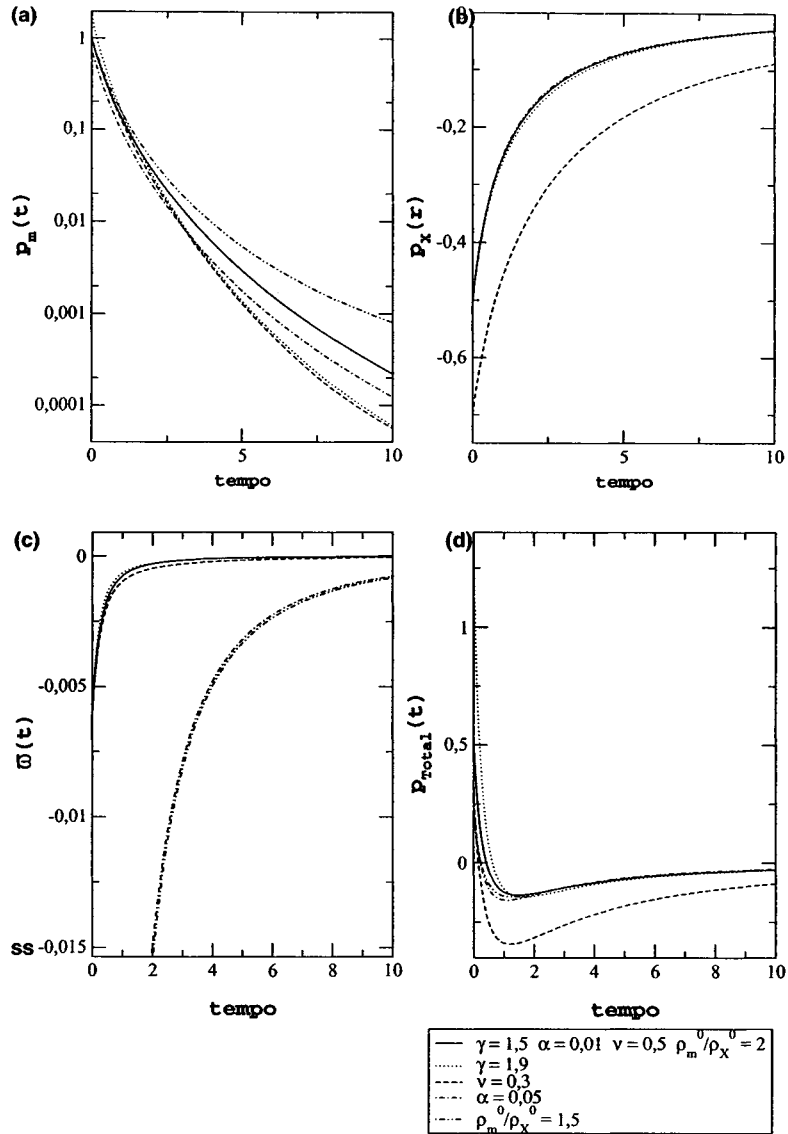


Figura 4.9: Os gráficos da evolução temporal das pressões do modelo 3D no caso da energia escura: (a) Pressão hidrostática da matéria; (b) pressão hidrostática do inflaton; (c) pressão dinâmica; (d) pressão total.

- a expansão e a aceleração são maiores;
- devido à existência de transferência de energia entre o campo gravitacional e os campos de matéria e radiação para $\alpha \neq 0$, o decaimento da densidade de energia e da pressão hidrostática da matéria é mais rápido quando $\alpha = 0$;
- para as densidades de energia e pressão hidrostática da energia escura o decaimento é mais rápido quando $\alpha \neq 0$.

Esta análise mostra que os efeitos dissipativos incluídos no modelo produzem resultados qualitativamente idênticos de quando não são incluído.

4.1.3 Discussão e considerações gerais a respeito do modelo 3D

O modelo cosmológico em 3D que apresentamos possui soluções análogas ao caso realista em 4D [46][47], com transições de um período inflacionário para um período de domínio da matéria ² (acelerado-desacelerado) ou deste para um período de domínio da energia escura (desacelerado-acelerado). O parâmetro que a existência destes dois tipos de solução depende da razão inicial entre as densidades de energia de matéria e do campo escalar: se $\rho_m^0/\rho_\psi^0 < 1$ obtemos soluções do tipo acelerado-desacelerado; se $\rho_m^0/\rho_\psi^0 > 1$ obtemos soluções do tipo desacelerado-acelerado. Verificamos também que a inclusão de fenômenos dissipativos através do termo de pressão dinâmica é essencial apenas no caso inflacionário.

Os efeitos principais da variação dos parâmetros são alterar a expansão (e por consequência o decaimento das densidades de energia e pressões) e a duração de cada regime.

Observamos ainda que estes tipos de soluções não ocorrem para todos os valores possíveis dos parâmetros: existe uma janela de valores para cada parâmetro cujas soluções são do tipo acelerado-desacelerado ou desacelerado-acelerado.

No caso inflacionário, tomamos como solução típica o caso em que $\gamma = 1,5$; $\alpha = 0,5$; $\nu = 0,95$; $\rho_m^0/\rho_\phi^0 = 0$. Variando cada parâmetro separadamente obtemos as seguintes janelas de valores nas quais é possível obter soluções do tipo acelerado-desacelerado semelhantes as que foram apresentadas:

$$0,3 \leq \alpha \leq 0,65$$

$$\gamma \geq 1,03$$

$$\nu \geq 0,7$$

$$\rho_m^0/\rho_\phi^0 \leq 0,8.$$

No caso da energia escura, tomamos como solução típica o caso em que $\gamma = 1,5$; $\alpha = 0,001$; $\nu = 0,5$; $\rho_m^0/\rho_X^0 = 2$. Neste caso as janelas de valores cujas soluções são do tipo desacelerado-acelerado são as seguintes:

²Como vimos do domínio de uma pressão negativa ou positiva governa as transições de fase.

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq 0,09 \\
\gamma &\geq 1,28 \\
\nu &\geq 0,06 \\
\rho_m^0/\rho_X^0 &\geq 1,08.
\end{aligned}$$

Para valores fora destas janelas ocorrem soluções em que não há transição de regimes ou a aceleração diverge. Outra possibilidade para modelos cosmológicos em 3D é utilizar uma equação de campo escalar, semelhante ao modelo JT em 2D. Esta alternativa está sendo estudada [48].

4.2 Regimes de inflação nas cosmologias JT e CGHS

No capítulo anterior vimos que a existência de regimes de aceleração positiva nas cosmologias JT e CGHS só é possível supondo que a densidade de energia seja negativa, violando a “condição de energia fraca”. Uma alternativa é utilizar outra equação de estado dos constituintes. De fato, se utilizarmos a equação de estado de van der Waals obtemos resultados interessantes para a dinâmica dos modelos cosmológicos bidimensionais.

4.2.1 Equação de van der Waals

A equação de estado barotrópica é uma aproximação válida para fluidos de baixas densidades. Uma possível generalização desta é a equação de estado de van der Waals que é dada por

$$p_w = \frac{w\rho}{1 - \alpha\rho} - \beta\rho^2. \quad (4.38)$$

O primeiro termo é uma correção que leva em conta o volume ocupado pelas partículas, e o segundo termo é uma correção devido à interação entre essas partículas. Os coeficientes presentes na equação (4.38) são dados por

$$\beta = 3p_c v_c^2, \quad \alpha = \frac{1}{3}v_c, \quad w = \frac{c_s^2}{c^2},$$

onde p_c e v_c são a pressão e o volume crítico, c_s é a velocidade do som e c é a velocidade da luz. Observe que fazendo $\alpha \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 0$ recuperamos a equação de estado barotrópica.

A equação de van der Waals foi utilizada pela primeira vez em Cosmologia recentemente por Capozziello *et al* [43][44]. A idéia deste trabalho foi obter a transição de um regime acelerado para um desacelerado sem a necessidade de utilizar um campo escalar ou uma constante cosmológica, o que foi possível substituindo a equação de estado barotrópica pela equação de van der Waals.

4.2.2 Regimes de aceleração positiva na cosmologia JT e CGHS

Investigamos nesta seção o uso da equação de estado de van der Waals nos modelos de gravitação bidimensional de Jackiw-Teitelboim (JT) e Callan *et al* (CGHS). Vamos desprezar o termo de interação tal que a equação de estado utilizada será dada por

$$p = \frac{w\rho}{1 - \alpha\rho}. \quad (4.39)$$

Consideramos primeiro o modelo JT. Como vimos no capítulo anterior, a equação de campo do modelo JT é dada por

$$R = -8\pi T_\mu^\mu + \Lambda. \quad (4.40)$$

A equação dinâmica deste modelo para a métrica de RW foi calculada no capítulo anterior e é a seguinte

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho - p) + \frac{\Lambda}{2}. \quad (4.41)$$

Da lei de conservação $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ obtemos

$$\dot{\rho} + H(\rho + p) = 0. \quad (4.42)$$

Substituindo a equação de van der Waals (4.39) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi \left(\rho - \frac{w\rho}{1 - \alpha\rho} \right) + \frac{\Lambda}{2}, \quad (4.43)$$

$$\dot{\rho} + H \left(\rho + \frac{w\rho}{1 - \alpha\rho} \right) = 0. \quad (4.44)$$

Para resolver o sistema de equações (4.43)-(4.44) deve-se especificar as seguintes condições iniciais: $a(0)$, $\dot{a}(0)$ e $\rho(0)$, além de atribuir valores para os parâmetros α e w e para a constante cosmológica Λ .

No modelo CGHS temos duas equações dinâmicas: uma que descreve o tensor métrico:

$$e^{-2\varphi}[R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} - 2\varphi_{;\mu;\nu}] = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.45)$$

e outra equação que descreve o dilaton:

$$R - \Lambda - 4(\partial_\mu\varphi)^2 + 4\Box\varphi = 0. \quad (4.46)$$

No capítulo anterior obtivemos estas equações no caso em que a métrica é de RW, o dilaton é um campo homogêneo (ou seja $\varphi(x^\mu) = \varphi(t)$, $\nabla^i\varphi = 0$) e o fluido é um fluido perfeito. Substituindo a equação de van der Waals, e juntamente com a lei de conservação (4.44) obtemos um sistema de três equações para $\rho(t)$, $a(t)$ e $\varphi(t)$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi e^{2\varphi} \left(\rho - \frac{w\rho}{1 - \alpha\rho} \right) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi} + \frac{\Lambda}{2}, \quad (4.47)$$

$$\ddot{\varphi} = 4\pi e^{2\varphi} \left(\rho + \frac{w\rho}{1 - \alpha\rho} \right) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}. \quad (4.48)$$

Para resolver o sistema (4.47), (4.48) e (4.44) devemos especificar as condições iniciais $a(0)$, $\dot{a}(0)$, $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$ e $\rho(0)$, além dos parâmetros w , α e da constante cosmológica Λ . Na tabela abaixo estão relacionados os intervalos de valores utilizados para os parâmetros da equação de campo e as condições iniciais.

<i>parâmetros da equação de estado</i>	$0 \leq \alpha \leq 0,5$
	$0 < w \leq 1$
<i>Constante Cosmológica</i>	$\Lambda \geq 0$
<i>Condições iniciais</i>	
$a(0)$	1,0
$\dot{a}(0)$	1,0
$\rho(0)$	1,0
<i>Para o modelo CGHS</i>	
$\varphi(0) = b$	$b \in \mathbb{R}$
$\dot{\varphi}(0) = c$	$c \in \mathbb{R}$

A seguir apresentamos os resultados numéricos obtidos.

4.2.3 Resultados para o modelo JT

Na sequência de gráficos a seguir apresentamos os resultados obtidos para o modelo JT. As soluções obtidas com o uso da equação de estado de van der Waals apresentam três regimes: inicialmente há um regime de aceleração positiva correspondente a um regime inflacionário; em seguida há uma transição para um regime de aceleração negativa correspondente a um regime dominado pela matéria; por último se a constante cosmológica for maior que zero há uma transição para um regime acelerado correspondente à era atual dominada pela energia escura, neste caso representada pela constante cosmológica Λ . Chamaremos as transições de regimes de acelerado-desacelerado e desacelerado acelerado, da mesma maneira que no modelo 3D.

Para a curva cheia de cada gráfico foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0,5; w = 0,9; \Lambda = 0,002.$$

As outras curvas foram obtidas variando cada parâmetro do sistema de equações do modelo, como está indicado nas legendas das figuras.

I Fator de escala

A figura (4.10) mostra a evolução do fator de escala. As soluções apresentadas correspondem a um universo em expansão permanente para $\Lambda \neq 0$. Observa-se que e variação dos parâmetros do sistema de equações causa as seguintes mudanças nas soluções obtidas:

- w ou α menores: a expansão é mais lenta;
- $\Lambda = 0$: a expansão é mais lenta e para tempos maiores (além da escala mostrada no gráfico) a expansão para e começa a contrair, ocorrendo um colapso ou *big crunch*.

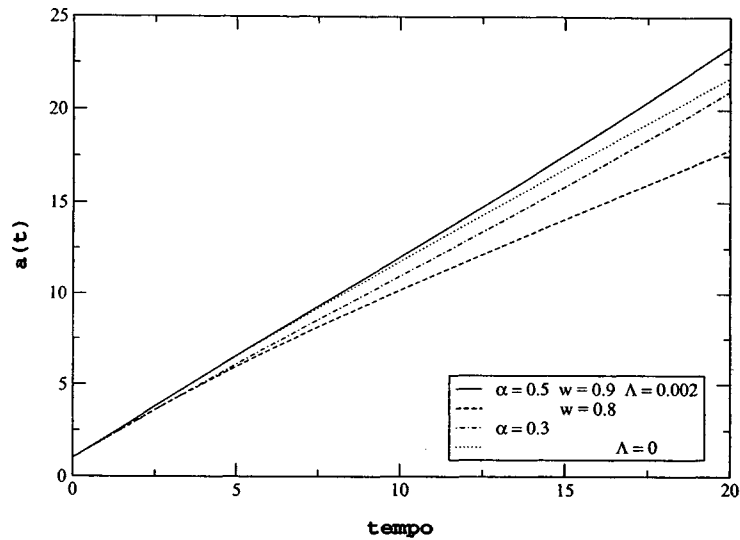


Figura 4.10: Fator de escala para o modelo JT.

II Aceleração

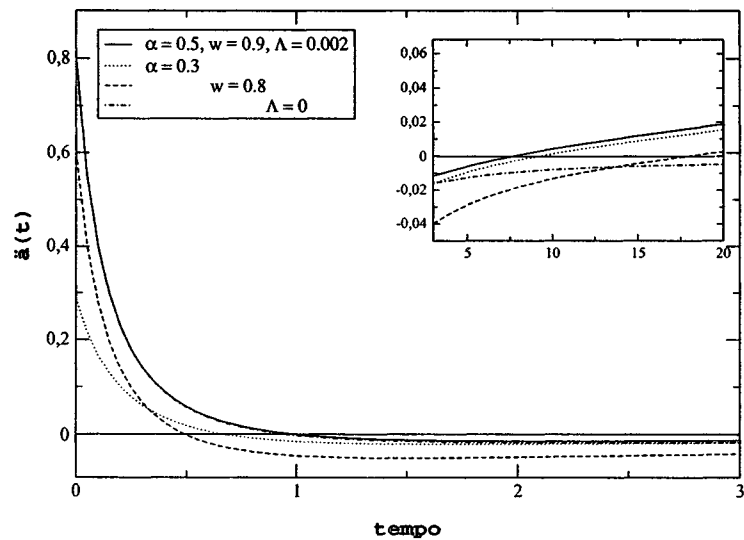


Figura 4.11: Aceleração para o modelo JT.

A figura (4.11) mostra a evolução temporal da aceleração. Como já foi dito no início da seção as soluções apresentam no início uma transição de regimes do tipo acelerado-desacelerado. No detalhe do gráfico vemos que com exceção da curva em que $\Lambda = 0$ há um terceiro regime após o regime desacelerado havendo uma nova transição do tipo desacelerado-acelerado.

A variação dos parâmetros da equação de estado no caso em que $\Lambda \neq 0$ causam as seguintes mudanças nas soluções:

- w menor: o período inflacionário é mais curto; após a transição para o regime desacelerado o ponto de desaceleração máxima é maior e a transição para o regime acelerado ocorre mais tarde.
- α menor: a duração do regime acelerado é menor; a transição do regime acelerado para o desacelerado é mais suave; a desaceleração máxima é maior e o período de domínio da matéria é ligeiramente maior.

III Densidade de energia

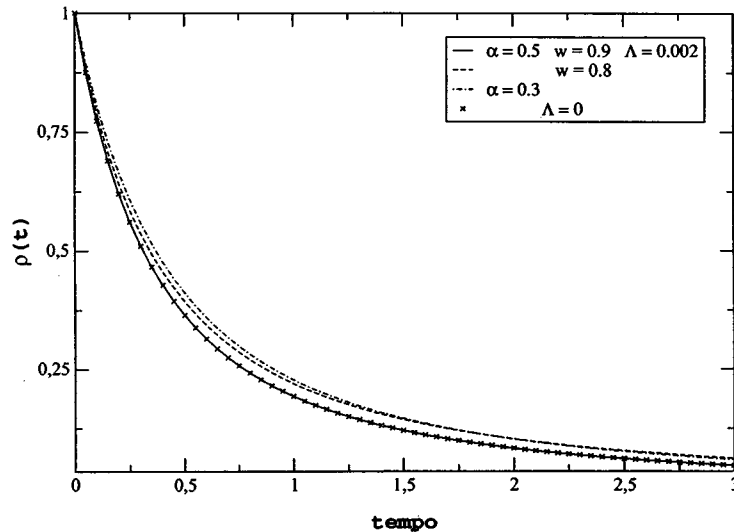


Figura 4.12: Densidade de energia do fluido de van der Waals para o modelo JT.

A figura (4.12) mostra a evolução temporal da densidade de energia do fluido de van der Waals. Observa-se que a variação dos parâmetros do sistema de equações do modelo causam as seguintes mudanças:

- w e α menores: o decaimento da densidade de energia é mais lento;
- $\Lambda = 0$: a curva difere ligeiramente e esta diferença não é visível no gráfico.

IV Pressão hidrostática

A evolução temporal da pressão do fluido de van der Waals é mostrada na figura (4.13). Observa-se que em todos os instantes a pressão é positiva. Observamos que a variação dos parâmetros do sistema de equações do modelo causa as seguintes mudanças nas soluções:

- w menor: inicialmente a pressão é menor, mas o decaimento é mais lento, assim para tempos maiores a curva da pressão ultrapassa a curva cheia.

- α menor: ocorre o mesmo que o caso anterior.
- $\Lambda = 0$: as curvas praticamente coincidem, da mesma forma que para $\rho(t)$.

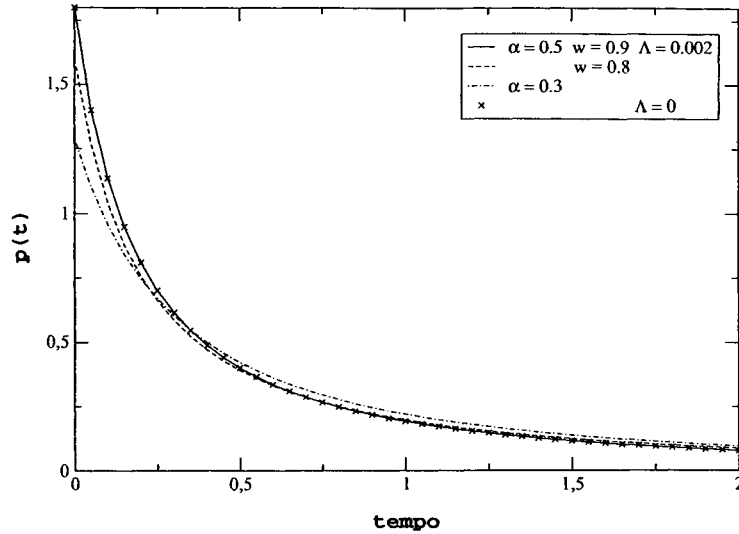


Figura 4.13: Pressão hidrostática do fluido de van der Waals para o modelo JT.

4.2.4 Resultados para o modelo CGHS

Resolvemos numericamente o sistema de equações do modelo CGHS (4.47), (4.48) e (4.44), para os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0,5, w = 0,9, \Lambda = 0,002.$$

Os resultados obtidos mostram que o comportamento da aceleração e a existência de transições entre diferentes regimes dependem fortemente das condições iniciais do dilaton $\varphi(0) = b$ e $\dot{\varphi}(0) = c$. As figuras (4.14) e (4.15) mostram a evolução temporal da aceleração para diferentes valores de b e c . Observa-se que para $b > 0,34$ e $b > -0,62$ a aceleração é positiva e divergente.

Para $-0,08 \leq b \leq 0,34$ e $-1,8 \leq c \leq -0,62$ obtemos soluções com uma transição de regimes do tipo acelerado-desacelerado. Na figura (4.16) apresentamos um caso em que $b = 0$ e $c = -1$ que possuem este tipo de transição. Para valores grandes de t a aceleração se anula e não há uma nova transição para um regime acelerado, mesmo nos casos em que a constante cosmológica não é nula. Além disso quando $\Lambda = 0$ o fator de escala tende rapidamente para um valor constante, ou seja, a solução neste caso é de um universo 2D estático. Para $\Lambda \neq 0$ a expansão é permanente.

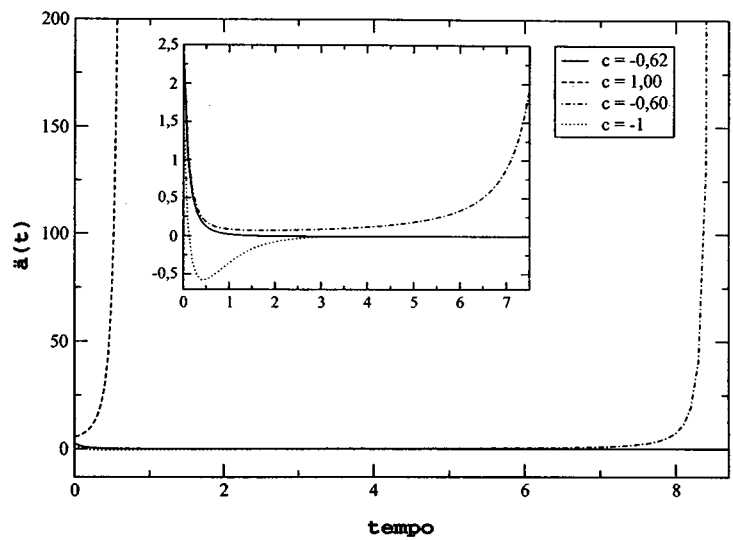


Figura 4.14: Aceleração para diferentes condições iniciais do inflaton $\dot{\phi}(0) = c$.

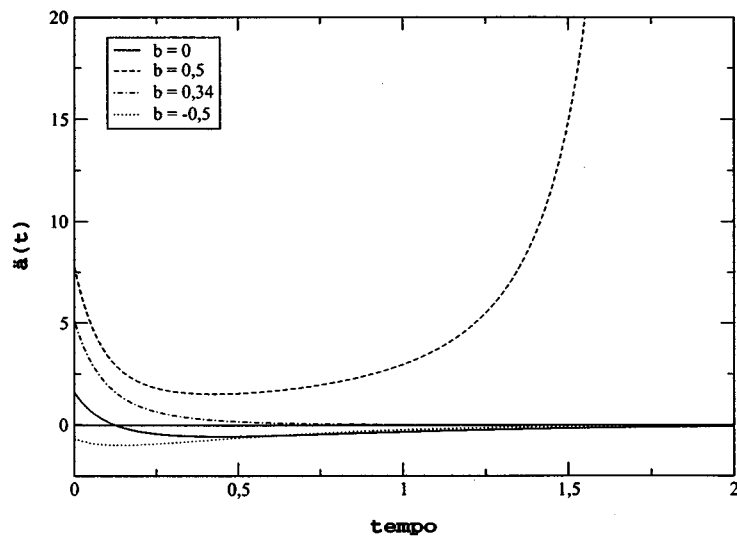


Figura 4.15: Aceleração para diferentes condições iniciais do inflaton $\phi(0) = b$.

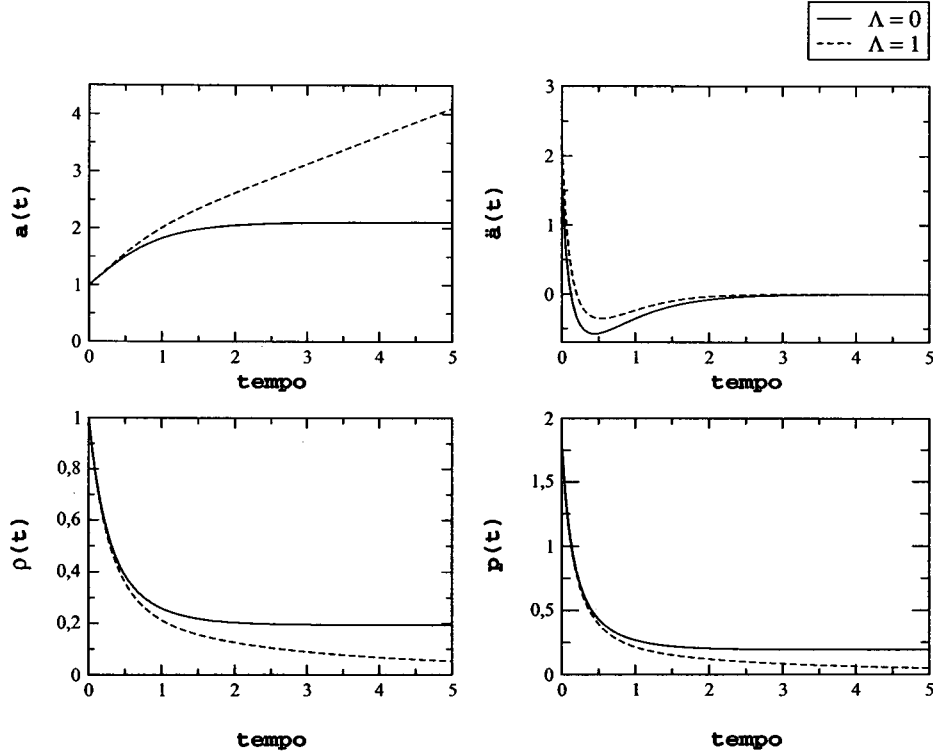


Figura 4.16: Fator de escala, aceleração, densidade de energia e pressão hidrostática para o modelo CGHS com e sem a constante cosmológica.

Não há dados experimentais que permitam fixar as condições iniciais do dilaton (ao contrário do que acontece com a métrica). Assim, o amplo leque de valores dos parâmetros b e c possibilitam a existência de regimes qualitativamente diferentes entre si. As soluções cosmológicas incluem cenários em que a interpretação física se torna obscura, como mostram os gráficos que apresentam soluções em que a aceleração diverge, apontando para o modelo JT como mais adequado para a construção de modelos cosmológicos em 2D.

Conclusão

Nesta dissertação, em um primeiro estágio, estudamos a teoria da Relatividade Geral (RG), onde fizemos uma breve revisão a respeito dos conceitos relacionados aos Princípios da Equivalência e da Covariância Geral. Revisamos as ferramentas matemáticas utilizadas na teoria: o formalismo e a álgebra tensorial e a geometria Riemanniana. A partir dos princípios da teoria vimos como a geometria do espaço-tempo afeta o movimento de uma partícula, calculando a geodésica no espaço-tempo curvo; e por outro lado vimos como uma distribuição de matéria determina a geometria do espaço-tempo através das equações de Einstein.

Foram estudados conceitos e propriedades dos modelos cosmológicos padrão e inflacionário, baseados na teorias da RG e TR. Vimos que a evolução dinâmica do universo possui duas transições de regimes: do período inflacionário (regime acelerado) para o período de domínio da radiação e matéria descrito pela cosmologia padrão (desacelerado); e deste para o período atual de domínio da energia escura (desacelerado).

Estudamos modelos de gravitação em dimensões reduzidas, que possuem diferenças fundamentais em relação ao caso 4D. Estudamos a RG em 3D e em 2D vimos que existe a necessidade de teorias alternativas para descrever fenômenos gravitacionais; dois exemplos desses modelos foram estudados: JT e CGHS. Além das propriedades dos modelos citados revimos as soluções cosmológicas que já foram estudadas na literatura.

Em um segundo estágio passamos a trabalhar em nossas contribuições originais. A partir dos modelos de gravitação em dimensões reduzidas estudados analisamos a possibilidade da existência de soluções com transições de fase e regimes semelhantes ao caso 4D. Os resultados obtidos foram os seguintes:

- **Modelo 3D.** Utilizando uma mistura de matéria e campo escalar e levando em conta a existência de fenômenos dissipativos de primeira ordem, obtivemos dois tipos de soluções: (i) um universo em expansão inflacionário (acelerado) que sofre uma transição para um regime desacelerado de domínio da matéria; (ii) um universo também em expansão dominado pela matéria (desacelerado) que sofre uma transição para um regime acelerado de domínio da energia escura. Estes resultados são análogos ao caso realista em 4D [46],[47]. Verificamos que a inclusão de fenômenos dissipativos é significativa somente no caso inflacionário. Além disso verificamos que existe uma janela para cada conjunto de parâmetros na qual estes tipos de soluções ocorrem. Dentro dessa janela, os parâmetros não alteram significativamente a dinâmica dos modelos, influenciando em fatores como a duração dos regimes e a expansão.

- **Modelo JT.** Utilizamos como fonte um fluido perfeito descrito pela equação de estado de Van der Waals. Esta alternativa foi considerada pois utilizando a equação de estado barotrópica, as soluções são de um universo desacelerado [46]. Obtivemos dois tipos de solução de universos em expansão permanente, que dependem da constante cosmológica Λ [45]: (i) para $\Lambda \neq 0$ o universo apresenta três regimes: um regime acelerado (inflacionário), seguido de uma transição para um regime desacelerado (dominado pela matéria) e por último há uma nova transição para um regime acelerado que é dominado pela energia escura (representado pela constante cosmológica); (ii) para $\Lambda = 0$ o universo apresenta dois regimes: acelerado seguido da transição para desacelerado, não havendo a última transição para um regime acelerado. Os parâmetros da equação de estado não alteram significativamente a dinâmica do modelo, afetando por exemplo a taxa de expansão e a duração dos regimes, como no caso 3D.
- **Modelo CGHS.** Utilizamos o mesmo tipo de fluido do caso anterior, descrito pela equação de estado de Van der Waals. As soluções deste modelo porém apresentam uma forte dependência nas condições iniciais do dilaton. Dependendo dos valores escolhidos para os parâmetros surgem regimes cosmológicos qualitativamente diferentes entre si. Para os melhores resultados obtidos há uma transição do tipo acelerado-desacelerado. Porém, mesmo com a inclusão da constante cosmológica a aceleração para tempos grandes se anula, não havendo uma nova transição para um regime acelerado [45]. Além disso, para $\Lambda = 0$ o universo tende rapidamente para uma solução estática após a transição para o regime desacelerado.

Para os modelos bidimensionais concluímos que o modelo de JT (que considera o dilaton um campo auxiliar) produz resultados mais consistentes que o modelo CGHS (que considera o dilaton um campo dinâmico). A forte dependência nas condições iniciais do dilaton produz soluções diferentes para um mesmo conjunto de parâmetros e diferentes condições iniciais. O fato de não possuímos bases físicas para impor condições iniciais para o dilaton faz com que os resultados produzidos pelo modelo incluam cenários inconsistentes para uma interpretação cosmológica, embora produzam bons resultados no estudo de buracos negros [9].

Referências bibliográficas

- [1] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton Univ Pr, 1993.
- [2] J. D. Brown, *Lower dimensional gravity*. World Scientific, 1988.
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 1972.
- [4] A. Linde, *Particle physics as inflationary cosmology*. Harwood Academic Publisher, 1993.
- [5] A. Guth, “Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems,” *Physical Review D*, vol. 23, pp. 347–356, 1981.
- [6] A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant,” *Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, pp. 1009–1038, 1998.
- [7] N. J. Cornish, N. E. Frankel, “Gravitation in 2+1 dimensions,” *Physical Review D*, vol. 43, p. 2555, 1991.
- [8] R. Jackiw, “Lower dimensional gravity,” *Nuclear Physics B*, vol. 252, pp. 343–356, 1985.
- [9] J. C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey , A. Strominger, “Evanecent black holes,” *Physical Review D*, vol. 45, no. 4, pp. 1005–1009, 1992.
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Teoria do Campo*. Editora Mir, 1980.
- [11] A. Einstein, *Os fundamentos da teoria da relatividade geral*. Textos fundamentais da física moderna, volume I, Fundação Calouste Gulbenkian, 1958. Texto original publicado em *Annalen der Physik*, 49 (1916).
- [12] L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*. Princeton University Press, 1949.
- [13] V. Fock, *The theory of space time and gravitation*. Pergamon Press, 1959.
- [14] C. W. Misner, J. A. Wheeler , K. S. Thorne, *Gravitation*. W H Freeman and Co, 1973.
- [15] E. W. Kolb, M. S. Turner, “The pocket cosmology,” *European Physical Journal C*, vol. 15, 2000, available on the PDG WWW pages, <http://pdg.lbl.gov/>.

- [16] G. S. Watson, “An exposition on inflationary cosmology,” *Los Alamos Preprint archives*, 2003, astro-ph/0005003.
- [17] W. L. Freedman *et al.*, “Final results from the Hubble Space Telescope Key Project to measure the Hubble constant,” *The Astrophysical Journal*, vol. 553, pp. 47–72, 2001.
- [18] R. A. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1997.
- [19] C. Cercignani, G. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Birkhauser Verlag AG, 2002.
- [20] G. Kremer, *Uma introdução à teoria cinética relativística*. Editora UFPR, 1998.
- [21] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Reed Educational and Professional Publishing Ltd.
- [22] I. Prigogine, J. Geheniau, E. Gunzig, P. Nardone, “Thermodynamics and cosmology,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 21, no. 8, 1989.
- [23] W. Zimdahl, “Bulk viscous cosmology,” *Physical Review D*, vol. 53, pp. 5483–5493, 1996.
- [24] W. Zimdahl, “Kinetic theory, particle production and the inflationary universe,” *Proceedings of the Second Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics*, 1997, available on <http://kaluza.physik.uni-konstanz.de/2MS/procm.html>.
- [25] W. Zimdahl, D. Pavón, “Cosmological two-fluid thermodynamics,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 33, pp. 791–804, 2001.
- [26] S. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [27] D. N. Spergel *et al.*, “First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters,” *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 148, pp. 233–241, 2003, available on astro-ph/0302209.
- [28] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [29] S. Perlmutter *et al.*, “Discovery of a supernovae explosion at half age of the universe,” *Nature*, vol. 391, no. 51, 1998.
- [30] T. Padmanabhan, “Cosmological constant: the weight of the vacuum,” *Los Alamos Preprint archives*, 2002, hep-th/0212290.
- [31] M. Turner, “Dark matter and dark energy: the critical questions,” *Los Alamos Preprint archives*, 2002, astro-ph/0207287.
- [32] J. S. F. Chan, R. B. Mann, “Gravitation and cosmology in (1+1)-dimensional dilaton gravity,” *Physical Review D*, vol. 47, pp. 3312–3318, 1993.

- [33] J. S. F. Chan, R. B. Mann, “Gravitational cosmology in generalized (1+1)-dimensional dilaton gravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 12, pp. 351–372, 1995.
- [34] K. C. K. Chan, R. B. Mann, “Cosmological models in two spacetime dimensions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 10, pp. 913–930, 1993.
- [35] S. Giddings, J. Abbot , K. Kuchař, “Einstein’s theory in a three-dimensional space-time,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 16, no. 8, 1984.
- [36] S. Deser, R. Jackiw , S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals of physics*, vol. 281, pp. 409–449, 2000.
- [37] J. D. Barrow, A. B. Burd , D. Lancaster, “Three-dimensional classical spacetimes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 3, pp. 551–567, 1986.
- [38] N. Cruz, C. Martínez, “Cosmological scaling solutions of minimally coupled scalar fields in three dimensions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 17, pp. 2867–2874, 2000.
- [39] R. Jackiw, “Gauge theories for gravity on a line,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 92, pp. 979–987, 1992.
- [40] C. Brans, R. H. Dicke, “Mach principle and a relativistic theory of gravitation,” *Physical Review*, vol. 124, no. 3, pp. 925–935, 1961.
- [41] G. M. Kremer, F. P. Devecchi, “Thermodynamics and kinetic theory of relativistic gases in 2d cosmological models,” *Physical Review D*, vol. 65, p. 083515, 2002.
- [42] J. Schwinger, “Gauge invariance and mass,” *Physical Review*, vol. 128, p. 2425, 1962.
- [43] S. Capozziello, S. D. Martino , M. Falanga, “Van der Waals quintessence,” *Physics Letters A*, vol. 299, pp. 494–498, 2002.
- [44] G. M. Kremer, “Cosmological models described by a mixture of van der Waals fluid and dark energy,” *Physical Review D*, vol. 68, p. 123507, 2003.
- [45] M. B. Christmann, F. Devecchi, G. Kremer , C. M. Zanetti, “Transition from accelerated to decelerated regimes in JT and CGHS cosmologies,” *submetido à Physical Review D*, 2003.
- [46] G. M. Kremer, F. P. Devecchi, “Viscous cosmological models and accelerated universes,” *Physical Review D*, vol. 67, p. 047301, 2003.
- [47] G. M. Kremer, F. P. Devecchi, “Irreversible processes in inflationary cosmological models,” *Physical Review D*, vol. 66, p. 063503, 2002.
- [48] M. B. Christmann, F. Devecchi, G. Kremer , C. M. Zanetti *em preparação*.