

Estudo de problemas de minimização de funções quadráticas com restrição de bola ou de variedade linear

Wilfredo Tomaselli

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFPR

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Elizabeth Wegner Karas

Co-orientador: Prof. Dr. Ademir Alves Ribeiro

Março / 2006

- 1 Programação não linear
- 2 Problemas irrestritos
- 3 Problemas com restrições
- 4 Problemas particulares
- 5 Conclusão e referências

Programação não linear

Problema geral

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min f_0(x) \\ & \text{s. a } x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Função objetivo: $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Conjunto viável: $S \subset \mathbb{R}^n$

Problemas irrestritos

O problema

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s. a} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Função objetivo: $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Conjunto viável: $S = \mathbb{R}^n$

Problemas irrestritos

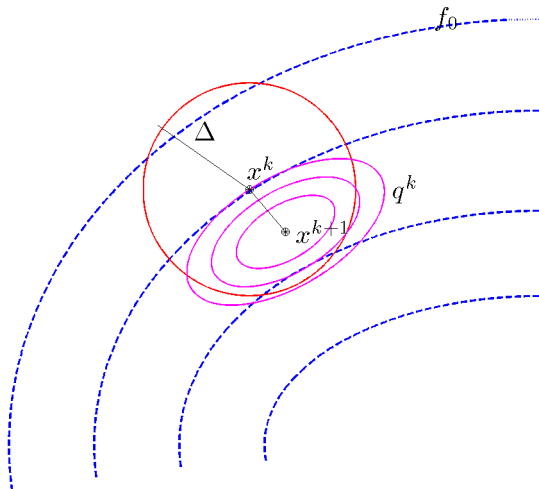
O problema

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s. a} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Métodos

- Busca linear
 - Região de confiança
- Subproblema quadrático**

Região de confiança



Problemas com restrições

O problema

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s. a} & f_E(x) = \bar{0} \\ & f_I(x) \leq \bar{0} \end{array}$$

Função objetivo: $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Restrições: $f_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-p}$

Conjunto viável: $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_E(x) = \bar{0}, f_I(x) \leq \bar{0}\}$

Problemas com restrições

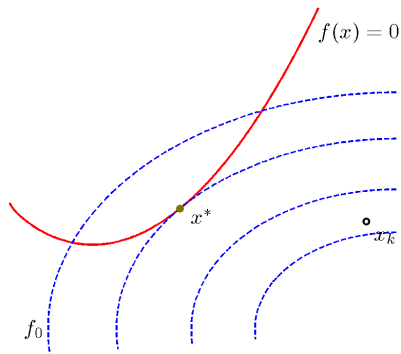
O problema

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s. a} & f_E(x) = \bar{0} \\ & f_I(x) \leq \bar{0} \end{array}$$

Métodos

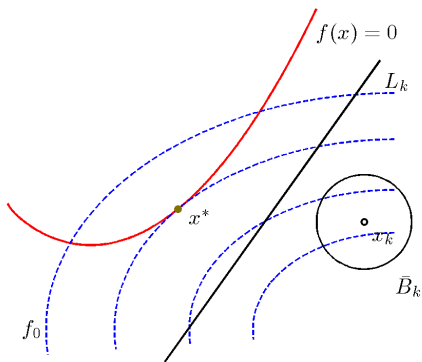
- Penalidade
- Programação quadrática seqüencial
- Restauração inexata

Programação quadrática seqüencial



Ponto corrente

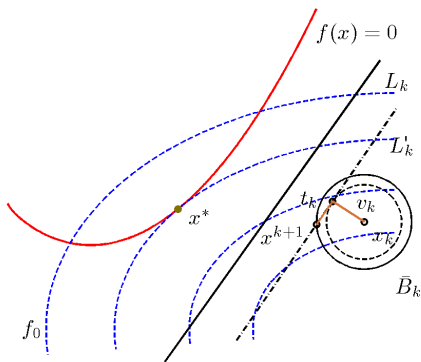
Programação quadrática seqüencial



$$\bar{B}_k = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| \leq \Delta_k\}$$

$$L_k = \{p \in \mathbb{R}^n \mid A_k p + f^k = \bar{0}\}$$

Programação quadrática seqüencial



Passos normal e tangencial

Programação quadrática seqüencial

Fase de viabilidade

$$\begin{array}{ll} \text{(PQSN)} & \min \|A_k v + f^k\| \\ & \text{s. a } \|v\| \leq \zeta \Delta_k \end{array}$$

Tipo de problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P3)} & \min \|Az - b\| \\ & \text{s. a } z \in \bar{B} \end{array}$$

Programação quadrática seqüencial

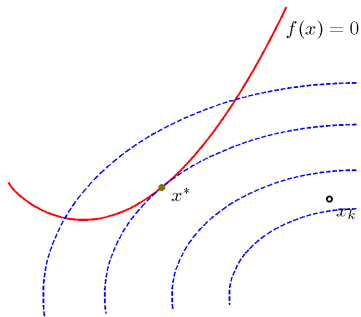
Fase de viabilidade

$$\begin{array}{ll} \text{(PQSN)} & \min \|A_k v + f^k\| \\ & \text{s. a } \|v\| \leq \zeta \Delta_k \end{array}$$

Tipo de problema

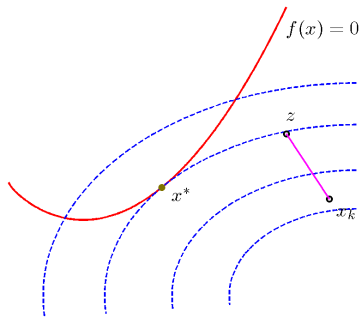
$$\begin{array}{ll} \text{(P3)} & \min \|Az - b\| \\ & \text{s. a } z \in \bar{B} \end{array}$$

Restauração inexata



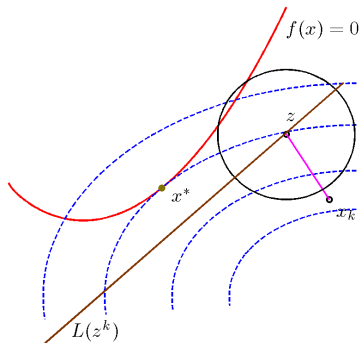
Ponto corrente

Restauração inexata



Passo de viabilidade

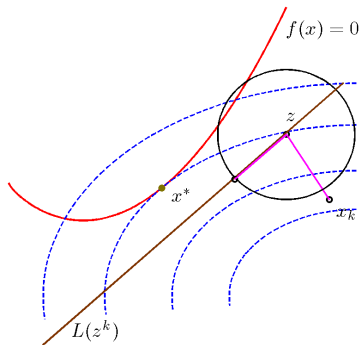
Restauração inexata



Restrições para o passo de otimalidade

$$L(z^k) = \mathcal{N}(A(z^k))$$

Restauração inexata



Passo de otimalidade

Restauração inexata

Fase de viabilidade

$$\begin{array}{ll} \text{(RIV)} & \min \quad \|v\| \\ & \text{s. a} \quad v \in L(x^k) \end{array}$$

Tipo de problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min \quad \|x\| \\ & \text{s. a} \quad x \in L \end{array}$$

Restauração inexata

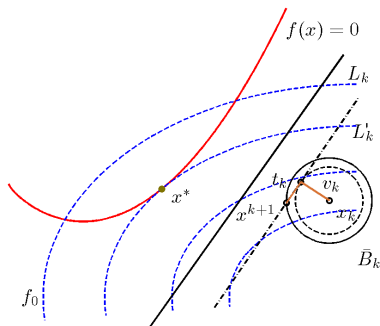
Fase de viabilidade

$$\begin{array}{ll} \text{(RIV)} & \min \quad \|v\| \\ & \text{s. a} \quad v \in L(x^k) \end{array}$$

Tipo de problema

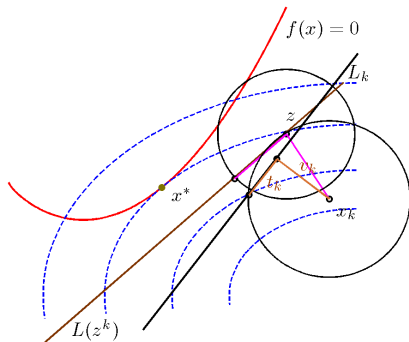
$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min \quad \|x\| \\ & \text{s. a} \quad x \in L \end{array}$$

Comparação entre os métodos



Programação quadrática seqüencial

Comparação entre os métodos



Programação quadrática seqüencial
e restauração inexata

Problemas particulares

Dados

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n, b \in \mathbb{R}^m, \\ \Delta > 0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \Delta\}$$

Problemas

$$\text{(P1)} \quad \begin{array}{ll} \min & \|x\| \\ \text{s. a} & x \in L \end{array}$$

$$\text{(P2)} \quad \begin{array}{ll} \min & d(y, L) \\ \text{s. a} & y \in \bar{B} \end{array}$$

$$\text{(P3)} \quad \begin{array}{ll} \min & \|Az - b\| \\ \text{s. a} & z \in \bar{B} \end{array}$$

Problemas particulares

Dados

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n, b \in \mathbb{R}^m, \\ \Delta > 0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \Delta\}$$

Problemas

$$\text{(P1)} \quad \begin{array}{ll} \min & \|x\| \\ \text{s. a} & x \in L \end{array}$$

$$\text{(P2)} \quad \begin{array}{ll} \min & d(y, L) \\ \text{s. a} & y \in \bar{B} \end{array}$$

$$\text{(P3)} \quad \begin{array}{ll} \min & \|Az - b\| \\ \text{s. a} & z \in \bar{B} \end{array}$$

Problemas particulares

Dados

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n, b \in \mathbb{R}^m, \\ \Delta > 0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \Delta\}$$

Problemas

$$\text{(P1)} \quad \begin{array}{ll} \min & \|x\| \\ \text{s. a} & x \in L \end{array}$$

$$\text{(P2)} \quad \begin{array}{ll} \min & d(y, L) \\ \text{s. a} & y \in \bar{B} \end{array}$$

$$\text{(P3)} \quad \begin{array}{ll} \min & \|Az - b\| \\ \text{s. a} & z \in \bar{B} \end{array}$$

Problema (P1)

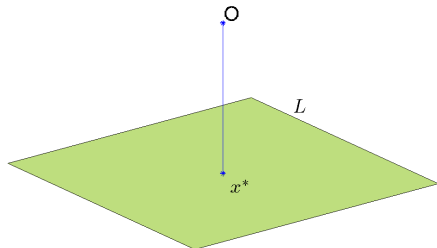
O problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min \|x\| \\ & \text{s. a } x \in L \end{array}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$$

Problema quadrático
equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T x \\ \text{s. a} & x \in L \end{array}$$



Problema (P1)

Solução

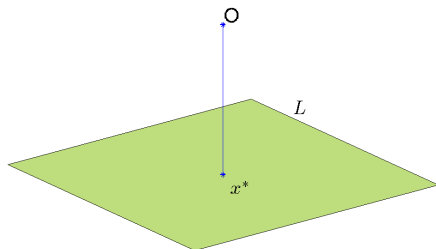
x^* solução de (P1)



$$\{x^*\} = L \cap \text{Im}(A^T)$$

Propriedades

- Solução única
- $x^* \perp L$



Hiperplano associado ao problema (P1)

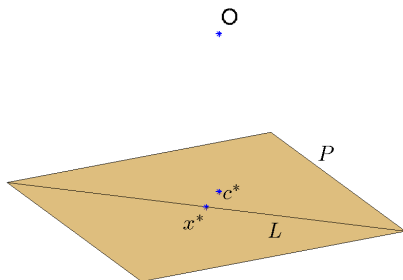
Dados

- $c = A^T b$
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \|b\|^2\}$
- $c^* = \frac{b^T b}{c^T c} c$

Fatos

- $c, c^* \in \text{Im}(A^T)$
- $L \subset P$
- c^* : ponto de menor norma euclidiana do hiperplano P

Hiperplano associado ao problema (P1)



Hiperplano associado ao problema (P1)

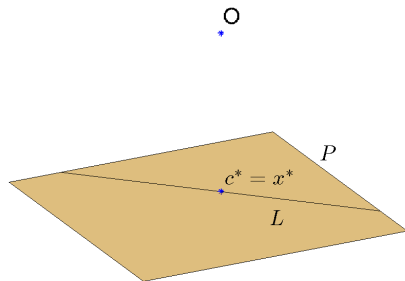
Resultado

$$x^* = c^*$$



$$A^T A c = \gamma c, \quad \gamma > 0$$

$$x^* = \frac{1}{\gamma} c$$



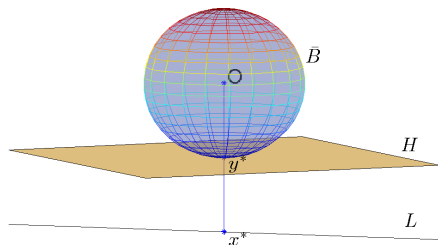
Problema (P2)

O problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P2)} & \min d(y, L) \\ & \text{s. a } y \in \bar{B} \end{array}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \Delta\}$$



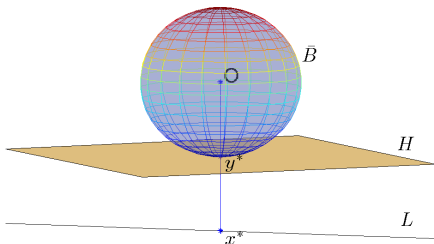
Problema (P2)

Solução

- x^* solução de (P1)
- $y^* = \frac{\Delta}{\|x^*\|} x^*$
 \Downarrow
- y^* solução de (P2)
- $d(y^*, L) = \|x^*\| - \Delta$

Propriedades

- Solução única
- $y^* \in \text{Im}(A^T)$
- $\|y^*\| = \Delta$



Problema (P3)

O problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P3)} & \min \|Az - b\| \\ & \text{s. a } z \in \bar{B} \end{array}$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \Delta\}$$

Problema quadrático equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} \|Az - b\|^2 \\ \text{s. a} & z \in \bar{B} \end{array}$$

Problema (P3)

Solução

z^* solução de (P3)

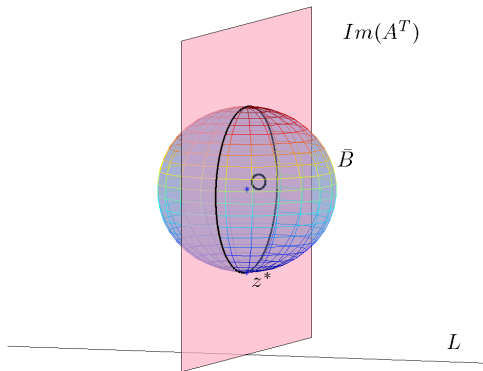


- $\|z^*\| = \Delta$
- Existe $\mu^* > 0$ tal que
 $(A^T A + \mu^* I)z^* = A^T b$

Propriedades

- Solução única
- $z^* \in \text{Im}(A^T)$

Problema (P3)



Problemas (P2) e (P3)

Propriedades da soluções

- $y^*, z^* \in \text{Im}(A^T)$ e únicos
- y^* e z^* estão na fronteira da bola
- $(A^T A + \mu^* I)z^* = A^T b$, com $\mu^* > 0$

Questões

- $y^* = z^*$?
- Propriedade quando $A^T b \in \mathbb{R}^n$ é autovetor de $A^T A$

Problemas (P2) e (P3)

Propriedades da soluções

- $y^*, z^* \in \text{Im}(A^T)$ e únicos
- y^* e z^* estão na fronteira da bola
- $(A^T A + \mu^* I)z^* = A^T b$, com $\mu^* > 0$

Questões

- $y^* = z^*$?
- Propriedade quando $A^T b \in \mathbb{R}^n$ é autovetor de $A^T A$

Problemas (P2) e (P3)

$$b \neq \bar{0}$$

Condição

Solução de (P2) e (P3)
coincidem



$$AA^T b = \gamma b, \quad \gamma > 0$$



$$c = A^T b \neq \bar{0}$$

Condição

Solução de (P2) e (P3)
coincidem



$$A^T A c = \gamma c, \quad \gamma > 0$$

Relações entre os problemas

Dados

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n, b \in \mathbb{R}^m, \Delta > 0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \Delta\}$$

Problemas

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min \|x\| \\ & \text{s. a } x \in L \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P2)} & \min d(y, L) \\ & \text{s. a } y \in \bar{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P3)} & \min \|Az - b\| \\ & \text{s. a } z \in \bar{B} \end{array}$$

Relações entre os problemas

Problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min \|x\| \\ & \text{s. a } x \in L \end{array}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{array}{ll} & \min \frac{1}{2}x^T x \\ & \text{s. a } x \in L \end{array}$$

Problema equivalente

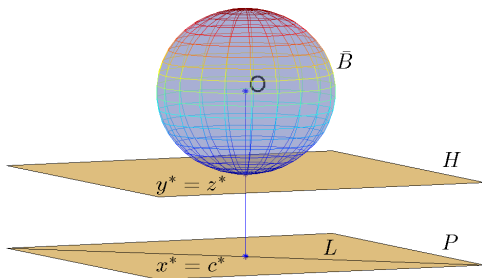
$$\begin{array}{ll} \text{(P3)} & \min \|Az - b\| \\ & \text{s. a } z \in \bar{B} \end{array}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{array}{ll} & \min \frac{1}{2}\|Az - b\|^2 \\ & \text{s. a } z \in \bar{B} \end{array}$$

Problemas quadráticos com restrição de bola fechada ou de variedade linear

Relações entre os problemas



Primeiro exemplo

Dados

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 2$$

Fatos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = A^T b = [48 \ 36 \ 0]^T$$

$$x^* = [3 \ 4 \ 0]^T \quad \|x^*\| = 5$$

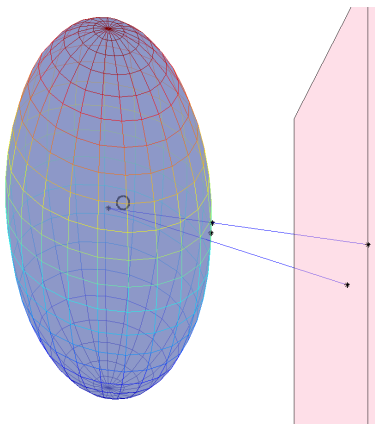
$$c^* = [3,84 \ 2,88 \ 0] \quad \|c^*\| = 4,8$$

$$y^* = 0, 4x^* = [1,2 \ 1,6 \ 0]^T$$

$$z^* = [1,449278 \ 1,378257 \ 0]^T$$

$$\|Az^* - b\| = 10,02 < \|Ay^* - b\| = 10,18$$

Primeiro exemplo



Segundo exemplo

Dados

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 2$$

Fatos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

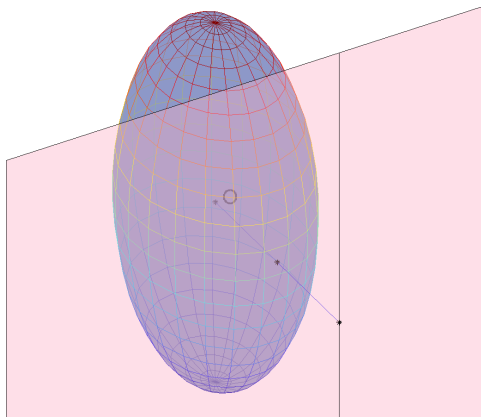
$$c = A^T b = [64 \ 0 \ 0]$$

$$A^T A c = 16 c$$

$$x^* = c^* = [4 \ 0 \ 0]^T = \frac{1}{16} c$$

$$y^* = z^* = [2 \ 0 \ 0]^T$$

Segundo exemplo



Conclusão

Métodos para problemas com restrições

- Programação quadrática seqüencial
Fase de viabilidade: $(PQSN) \leftrightarrow (P3)$.
- Método de restauração inexata
Fase de viabilidade: $(RIV) \leftrightarrow (P1)$.

Problemas quadráticos com restrição de bola ou de variedade linear

- Caracterização das soluções
- Relações entre os problemas

Conclusão

Métodos para problemas com restrições

- Programação quadrática seqüencial
Fase de viabilidade: $(PQSN) \leftrightarrow (P3)$.
- Método de restauração inexata
Fase de viabilidade: $(RIV) \leftrightarrow (P1)$.

Problemas quadráticos com restrição de bola ou de variedade linear

- Caracterização das soluções
- Relações entre os problemas

Bibliografia

Principais referências



R. H. Byrd, J. C. Gilbert, J. Nocedal.

A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming.

Mathematical Programming, 89(1):149–185, 2000.



J. M. Martínez, E. A. Pilotta.

Inexact Restoration Algorithm for Constrained Optimization.

Journal of Optimization Theory and Applications, 104:135–163, 2000.



J. Nocedal, S. J. Wright.

Numerical Optimization

Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, 1999.