Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Espaços Hurewicz e Conceitos Relacionados

Por

Clarice Aparecida Roika

Orientação

Prof ^{a}. Dr^{a}. Soraya Rosana Torres Kudri

e co-orientação

Prof ^{o}. Tomas Keller Breuckmann

Curitiba / PR

2006

Espaços Hurewicz e Conceitos Relacionados

Por

Clarice Aparecida Roika

Orientação

Prof^a. Dr^a. Soraya Rosana Torres Kudri

e co-orientação

Prof^o. Tomas Keller Breuckmann

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba / PR

2006

S U M Á R I O

LISTA de SíMBOLOS

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais $\{1, 2, ...\}$
$\mathbb{R}$	o conjunto dos números reais
$\emptyset$	conjunto vazio
$\langle X, T \rangle$	par ordenado representando um espaço topológico
$\overline{A}$	fecho do conjunto A
$int(A)$	interior do conjunto A
A^c	complementar do conjunto A
$\{x \in X; P(x)\}$	o conjunto dos elementos $x \in X$ que satisfazem P
$A \subset B$	A está contido em B
$A \subset_{<\infty} B$	A é um subconjunto finito de B
$\{A_j\}_{j \in J}$	família indexada de conjuntos
$\bigcup_{j \in J} A_j$	união dos elementos da família $\{A_j\}_{j \in J}$
$\bigcap_{j \in J} A_j$	interseção dos elementos da família $\{A_j\}_{j \in J}$
$\bigcap_{j=1}^{n} A_j$	interseção dos conjuntos A_j para $j = 1, ..., n$
$\sum_{j \in J} A_j$	espaço soma, ver definição 1.1.3
$f : X \to Y$	uma função de X em Y
$f(A)$ e $f^{-1}(A)$	imagens direta e inversa do conjunto A
$\forall$ e $\exists$	quantificadores "para todo" e "existe"

RESUMO

Baseado nos espaços Hurewicz definidos por W. Hurewicz, propomos definições de espaços localmente Hurewicz, fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz, propomos a equivalência dessas definições em espaço topológico de Hausdorff que satisfazem uma propriedade que aqui chamaremos de C-espaço. Apresentamos os espaços almost Hurewicz definidos por Breuckmann e Kudri e propomos definições de espaços nearly Hurewicz. Obtemos relações entre os espaços nearly Hurewicz e os espaços Hurewicz, almost Hurewicz e nearly Lindelöff. Apresentamos também a propriedade ω^* e sua relação com os espaços Hurewicz. Introduzimos a propriedade nearly-ω^* e obtemos um teorema que relaciona esta propriedade com os espaços nearly Hurewicz.

Palavras-chave: Espaços topológicos Hurewicz, localmente Hurewicz, almost e nearly Hurewicz, propriedades ω^* e nearly-ω^*.

ABSTRACT

Based on Hurewicz spaces defined by Hurewicz, we propose definitions for locally Hurewicz spaces, weakly locally Hurewicz spaces and relatively locally Hurewicz spaces. We prove the equivalence of these definitions in Hausdorff spaces satisfying a property which is called here C-space. We present the almost Hurewicz spaces, defined by Breuckmann and Kudri and propose definition for nearly Hurewicz spaces. We compare nearly Hurewicz spaces to Hurewicz spaces, almost Hurewicz and nearly Lindelöf spaces. We also present the ω^*-property and its relation to Hurewicz spaces. We introduce the nearly-ω^*-property and obtain its relationhip to nearly-Hurewicz spaces.

Keywords: Hurewicz topological spaces, locally Hurewicz spaces, almost and nearly Hurewicz spaces, ω^* and nearly-ω^*-properties.

INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é introduzir novas classes de espaços topológicos. Em [7] Hurewicz introduziu os espaços topológicos Hurewicz, esta classe de espaços topológicos é uma generalização dos espaços topológicos compactos e está contida na classe de espaços topológicos Lindelöf, isto é,

$$\text{Compacto} \Rightarrow \text{Hurewicz} \Rightarrow \text{Lindelöf}.$$

Na Literatura existem várias generalizações de espaços topológicos compactos, como os espaços topológicos localmente compacto, almost compacto e nearly compacto, entre outros. Em [3] Breuckmann e Kudri introduziram os espaços topológicos almost Hurewicz que são uma generalização para os espaços topológicos Hurewicz e portanto uma generalização para os espaços topológicos compactos. Neste trabalho definiremos os espaços topológicos localmente Hurewicz e os espaços topológicos nearly Hurewicz, que também são generalizações dos espaços Hurewicz e dos espaços compactos.

Encontramos na literatura três definições para espaços topológicos localmente compactos, que aqui serão chamados de espaços topológicos localmente compacto (ver 1.2.5), fracamente localmente compacto (ver 1.2.6), e relativamente localmente compacto (ver 1.2.7). Definiremos neste trabalho os espaços topológicos localmente Hurewicz (ver 3.2.1), fracamente localmente Hurewicz (ver 3.2.2) e relativamente localmente Hurewicz (ver 3.2.3). Em espaços de Hausdorff as definições dos espaços topológicos localmente compactos são equivalêntes, porém para obtermos a equivalência das definições dos espaços topológicos localmente Hurewicz é necessário que além de Hausdorff o espaço topológico tenha uma propriedade que aqui chamaremos de C-espaço (ver 3.1.1). Com essa propriedade obtemos um teorema importante que diz que em um C-espaço de Hausdorff todo subespaço Hurewicz é fechado, o qual será utilizado para obter a equivalência dos espaços topológicos localmente

Hurewicz.

Para espaços topológicos quaisquer temos as seguintes relações entre os espaços topológicos localmente Hurewicz

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 3.2.4 & \text{Fracamente Localmente} & 3.2.6 & \text{Localmente} \\
\text{Hurewicz} & \longrightarrow & \text{Hurewicz} & \longleftarrow & \text{Hurewicz} \\
\searrow & & \uparrow 3.2.7 & & \\
3.2.5 & & & & \\
 & & \text{Relativamente Localmente} & & \\
 & & \text{Hurewicz} & &
\end{array}
$$

Serão também apresentados neste trabalho os espaços almost Hurewicz que foram definidos por Breuckmann e Kudri em [3] e alguns resultados obtidos, como um teorema que trata os espaços almost Hurewicz através de conjuntos regularmente abertos e algumas propriedades que envolvem funções.

Em [12] Singal e Mathur introduziram os espaços topológicos nearly compactos (ver 1.2.10) e apresentaram algumas propriedades. Neste trabalho definiremos os espaços topológicos nearly Hurewicz (ver 4.3.1) que é uma generalização dos espaços Hurewicz e como os espaços Hurewicz generalizam espaços compactos temos que nearly Hurewicz também é uma generalização de compacto. Esta classe de espaços topológicos contém os espaços nearly compacto e está contida na classe dos espaços almost Hurewicz e na classe dos espaços nearly Lindelöff, a seguir temos um esquema das relações entre esses espaços

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1.2.11 & \text{Nearly Compacto} & 4.3.6 & & 4.3.7 & \text{Nearly Lindelöf} \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
\text{Compacto} & & & & \text{Nearly Hurewicz} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 2.1.5 & \text{Hurewicz} & 4.3.3 & & 4.3.8 & \text{Almost Hurewicz}
\end{array}
$$

Apresentaremos ainda propriedades obtidas através de funções e mostraremos que os espaços nearly Hurewicz podem ser definidos através de conjuntos regularmente abertos.

Em [8] Scheepers definiu a propriedade ω (selectively ω-grouping property) e apresentou uma condição necessária e suficiente para que um espaço tenha a propriedade ω através da propriedade Hurewicz. Em [2] Breuckmann fez alterações nesta propriedade chamando-a de propriedade ω^* e neste trabalho definimos a propriedade nearly-ω^* (nearly selectively ω^*-grouping property) e obteremos um teorema que relaciona esta propriedade com os espaços nearly Hurewicz.

A dissertação está dividida em quatro capítulos.

O primeiro capítulo contém definições e propriedades básicas que serão utilizadas nos demais capítulos, entre elas a definição de compacidade e de compacidade local.

O segundo capítulo trata de duas propriedades de recobrimento, os espaços Hurewicz e a propriedade ω^* (selectively ω^*-grouping property). A propriedade de Hurewicz foi introduzida por Hurewicz em [7] e trata de sequencias de coberturas abertas, a propriedade ω^* foi introduzida por Breuckmann em [2] e trata de sequencias de ω^*-coberturas.

No terceiro capítulo propomos uma definição para o que aqui chamamos de C-espaço. E propomos também definições para espaços localmente Hurewicz, fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz, e obtemos a equivalência em C-espaços de Hausdorff.

No quarto capítulo trabalhamos com generalizações das propriedades Hurewicz e ω^*, apresentamos os espaços almost Hurewicz e a propriedade almost-ω^* (Almost selectively ω^* grouping property) introduzidas por Breuckmann e Kudri em [3] e propomos definições para espaços nearly Hurewicz e para a propriedade nearly-ω^* (nearly selectively ω^*-grouping property) e obtemos um teorema que relaciona as propriedades nearly Hurewicz e nearly-ω^*.

Em todos os capítulos os resultados e definições sem atribuição de autoria são de nossa contribuição.

CAPÍTULO I

Teoria Básica

Este capítulo consiste de definições e resultados necessários no desenvolvimento deste trabalho.

Dividimos este capítulo em duas seções.

A primeira seção contém definições e resultados gerais de espaços topológicos, que serão utilizadas diretamente nos demais capítulos. Podemos destacar as definições de conjunto regularmente aberto, função contínua, almost contínua, fortemente contínua e fracamente contínua.

A segunda seção é dedicada a definições e resultados que estão relacionados a compacidade, tais como definição de espaço topológico compacto, localmente compacto e generalizações de espaço compacto. Algumas destas definições e resultados podem ser encontradas em livros de topologia geral como [6] e [10] e outras em artigos como [12] e [11].

1.1 Conceitos Básicos

O termo "vizinhança" pode ser entendido de várias formas. Nesta dissertação, diremos que U é uma vizinhança de x quando U é um conjunto aberto contendo x.

Definição 1.1.1 *[10](Espaços de Hausdorff)* :

Um espaço topológico X é chamado espaço de Hausdorff se, e somente se, para cada par de pontos distintos x_1 e x_2 de X, existem vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente.

Definição 1.1.2 *[10] (Topologia do ponto particular p):*

Em qualquer conjunto não vazio X, podemos definir uma topológia em X, considerando os conjuntos abertos como sendo $\emptyset$ e qualquer subconjunto que contém um ponto particular p. A essa topologia chamaremos topologia do ponto particular p.

Definição 1.1.3 *[2]: Seja $\{\langle X_k, T_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços topológicos disjuntos. Seja $\mathbb{X} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ e defina T onde, $U \in T$ se e somente se, $\forall k \in \mathbb{N}$ $U \cap X_k \in T_k$.*

A proxima proposição mostra que $\langle \mathbb{X}, T\rangle$ é um espaço topológico, chamaremos $\langle \mathbb{X}, T\rangle$ de espaço soma e denotaremos por $\mathbb{X} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$.

Proposição 1.1.4 *[2]: Na definição 1.1.3 temos que T realmente define uma topologia em $\mathbb{X}$.*

Demonstração : É imediato da definição que:

(i) $\emptyset \in T$ e $\mathbb{X} \in T$, pois para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que $\emptyset \cap X_k = \emptyset \in T_k$ e $\mathbb{X} \cap X_k = X_k \in T_k$.

(ii) Para uma família $\{U_j\}_{j\in J}$ em T, temos que $\forall j \in J$ e $\forall k \in \mathbb{N}$ $U_j \cap X_k \in T_k$, com isso $U = \bigcup\limits_{j\in J} U_j \in T$, pois $\forall k \in \mathbb{N}$ $U \cap X_k = (\bigcup\limits_{j\in J} U_j) \cap X_k = \bigcup\limits_{j\in J} (U_j \cap X_k) \in T_k$.

(iii) Para uma coleção finita $\{U_j\}_{j=1}^n$ em T, temos que $\forall j = 1, ..., n$ e $\forall k \in \mathbb{N}$ $U_j \cap X_k \in T_k$, com isso temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ $U \cap X_k = (\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j) \cap X_k = \bigcap\limits_{j=1}^{n} (U_j \cap X_k) \in T_k$, então $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in T$. ■

Definição 1.1.5 *[6]: Seja X um espaço topológico. Um subconjunto B de X é chamado:*

(a) regularmente aberto se, e somente se, $B = int(\overline{B})$.

(b) regularmente fechado se, e somente se, $B = \overline{int(B)}$.

Proposição 1.1.6 *[3]: Se F é um conjunto fechado, então $int(F)$ é regularmente aberto.*

Demonstração : Considere $B = int(F)$, devemos mostrar que $B = int(\overline{B})$.

$int(\overline{B}) \subset B$, pois $B = int(F) \subset F$, daí $\overline{B} \subset \overline{F} = F$, pois F é fechado, portanto $int(\overline{B}) \subset int(F) = B$.

$B \subset int(\overline{B})$, pois $int(F) = B \subset \overline{B}$, daí $int(int(F)) \subset int(\overline{B})$, mas como $int(F)$ é aberto temos que $int(int(F)) = int(F)$, daí $B = int(F) \subset int(\overline{B})$.

Logo $int(F)$ é regularmente aberto. ■

Proposição 1.1.7 *[3]: Se A é um conjunto aberto então $\overline{A}$ é regularmente fechado.*

Demonstração : Análoga a da proposição 1.1.6 ■

Definição 1.1.8 *[10] (Função Contínua) :*

Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser contínua se, e somente se, para cada V subconjunto aberto em Y temos que $f^{-1}(V)$ é aberto em X.

Proposição 1.1.9 *[10] : Sejam X e Y espaços topológicos, então $f : X \to Y$ é uma função contínua se, e somente se, para cada $A \subset X$ temos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Definição 1.1.10 *[3](Função Almost Contínua) :*

Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é almost contínua se, e somente se, $f^{-1}(B)$ é aberto em X para cada $B \subset Y$ regularmente aberto.

Definição 1.1.11 *[12] (Função Fortemente Contínua) :*

Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é fortemente contínua se, e somente se, para cada $A \subset X$ temos que $f(\overline{A}) \subset f(A)$.

Obs: temos que se f é uma função fortemente contínua então f é contínua, pois dado $A \subset X$ por f ser fortemente contínua temos que $f(\overline{A}) \subset f(A) \subset \overline{f(A)}$, então pela proposição 1.1.9 temos que f é contínua.

Definição 1.1.12 *[12](Função Fracamente Contínua) :*

Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é fracamente contínua se, e somente se, $f^{-1}(B) \subset int(f^{-1}(\overline{B}))$ para cada B aberto em Y .

Definição 1.1.13 *[10] (Função Aberta) :*

Sejam X e Y espaços topológicos, uma função $f : X \to Y$ é dita aberta se, e somente se, para cada U subconjunto aberto em X temos que $f(U)$ é aberto em Y.

Definição 1.1.14 *[11](Função Almost Aberta):*

Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é almost aberta quando, $f(B)$ é aberto em Y para cada $B \subset X$ regularmente aberto.

Definição 1.1.15 *[12] (Espaço Semi-regular) :*

Um espaço topológico X é dito ser semi-regular se, e somente se, para cada $x \in X$ e para cada vizinhança U de x, existe V regularmente aberto tal que $x \in V \subset U$.

Definição 1.1.16 *[11] (Espaço extremally desconexo) :*

Um espaço topológico X é dito ser extremally desconexo se, e somente se, para cada U aberto em X temos que $\overline{U}$ é aberto em X.

Definição 1.1.17 *[10] (Cobertura) :*

Uma coleção $\mathbb{U}$ de subconjuntos de X é dita uma cobertura aberta de X, quando os elementos de $\mathbb{U}$ são abertos e a união dos elementos de $\mathbb{U}$ é igual a X.

Definição 1.1.18 *[2] (ω^*-coberturas):*

Uma ω^*-cobertura em X é uma família de abertos $\mathbb{U}$ tal que para cada subconjunto finito F de X, existe $V \in \mathbb{U}$ com $F \subset V$.

1.2 Compacidade

Definição 1.2.1 *[10] (Compacto):*

Um espaço topológico X é dito ser compacto quando, toda cobertura aberta de X contém uma subcobertura finita.

Proposição 1.2.2 *[10] : Todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.*

Proposição 1.2.3 *[10] : Seja X um espaço de Hausdorff, então todo subconjunto compacto de X é fechado.*

Proposição 1.2.4 *[10]: Sejam X um espaço topológico e A um compacto em X. Considere X^n com a topologia produto. Se W é um aberto em X^n tal que $A^n \subset W$ então existe V aberto em X tal que $A \subset V$ e $A^n \subset V^n \subset W$.*

Em topologia geral existem 3 modos de se definir espaços localmente compacto, os quais serão chamadas aqui de espaço topológico localmente compacto, espaço topológico fracamente localmente compacto e espaço topológico relativamente localmente compacto, definidos a seguir:

Definição 1.2.5 *[9] (Espaço Topológico Localmente Compacto):*

Um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ e $V \in T$ tal que $x \in V$, existe $U \in T$ e $C \subset X$ compacto tais que $x \in U \subset C \subset V$.

Definição 1.2.6 *[9] (Espaço Topológico Fracamente Localmente Compacto):*

Um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ é fracamente localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ existem $U \in T$ e $C \subset X$ compacto tais que $x \in U \subset C$.

Definição 1.2.7 *[9] (Espaço Topológico Relativamente Localmente Compacto):*

Um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ é relativamente localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ existe $U \in T$ tal que $x \in U$ e $\overline{U}$ é compacto.

Proposição 1.2.8 *[9] : Em espaços de Hausdorff as definições anteriores sobre compacidade local são equivalentes.*

Definição 1.2.9 *[4](Almost Compacto) :*

Um espaço topológico X é dito almost compacto se, e somente se, para cada cobertura aberta $\mathbb{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de X, existe $I \subset_{<\infty} J$ tal que $X \subset \bigcup_{j \in I} \overline{U_j}$.

Definição 1.2.10 *[12](Nearly Compacto) :*

Um espaço topológico X é nearly compacto se, e somente se, para cada cobertura aberta $\mathbb{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de X, existe $I \subset_{<\infty} J$ tal que $X \subset \bigcup_{j \in I} int(\overline{U_j})$.

Proposição 1.2.11 : *Seja X um espaço topológico compacto, então X é nearly compacto.*

Demonstração : Seja $\mathbb{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de X, como X é compacto existe $I \subset_{<\infty} J$ tal que $X \subset \bigcup_{j\in I} U_j$, com isso temos que $X \subset \bigcup_{j\in I} int(\overline{U_j})$, pois dado $x \in X$, temos que existe $j \in I$ com $x \in U_j \subset \overline{U_j}$, mas como U_j é aberto temos que $x \in int(\overline{U_j})$. ∎

Definição 1.2.12 *[10]* (*Espaços Lindelöf*) :

Um espaço topológico X é Lindelöf se, e somente se, cada cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.

Definição 1.2.13 *[1]*(*Nearly Lindelöf*) :

Um espaço topológico X é dito ser nearly Lindelöf se, e somente se, para cada cobertura aberta $\mathbb{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ de X existe I subconjunto enumerável de J tal que $X = \bigcup_{j\in I} int(\overline{U_j})$.

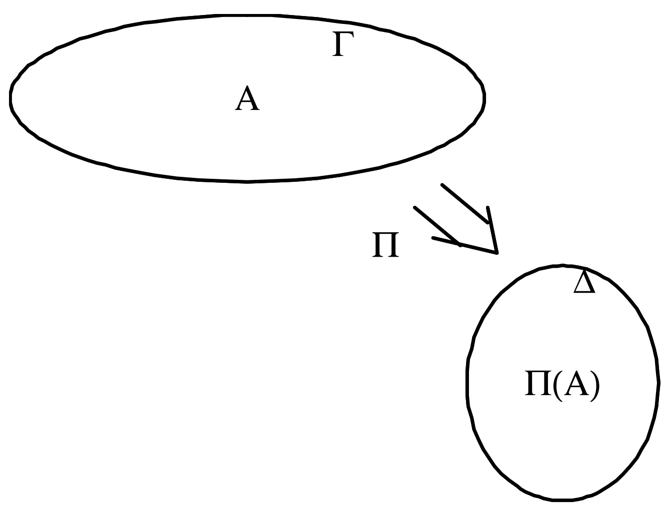
Definição 1.2.14 *[5]*(*Almost Lindelöf*) :

Um espaço topológico X é dito ser almost Lindelöf se, e somente se, para toda cobertura aberta $\mathbb{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ de X existe I subconjunto enumerável de J tal que $X = \bigcup_{j\in I} \overline{U_j}$.

CAPÍTULO II

Algumas Propriedades de Recobrimento: Hurewicz e ω^*

As propriedades de recobrimento Hurewicz e ω^* que trataremos neste capítulo se enquadram dentro do que Scheepers chama em seus artigos de "princípio de seleção". Tal princípio diz o seguinte: dada uma classe de objetos Γ e uma classe de objetos Δ, mediante um certo procedimento Π podemos obter para cada objeto $A \in \Gamma$ um objeto $\Pi(A) \in \Delta$.



Um exemplo conhecido de propriedade que se enquadra neste princípio é a compacidade. Seja

$\Gamma = \Delta = \{$ coberturas abertas $\}$

$\Pi =$ existir subcobertura finita.

Dizemos que um espaço topológico X é compacto se, e somente se, satisfaz o princípio de seleção acima, isto é, $X \in \Pi(\Gamma, \Delta)$.

Este capítulo está dividido em duas seções.

Na primeira seção trataremos de espaços Hurewicz que foram introduzidos em [7]. Nesta seção apresentamos exemplos sobre esse espaço, além de alguns resultados como a invariância por funções contínuas, e a relação com espaços compactos e Lindelöff.

Na segunda seção trataremos da propriedade ω^* que foi introduzida em [2]. Apresentamos alguns resultados, entre eles uma condição necessária e suficiente para que um espaço possua a propriedade ω^* através da propriedade Hurewicz.

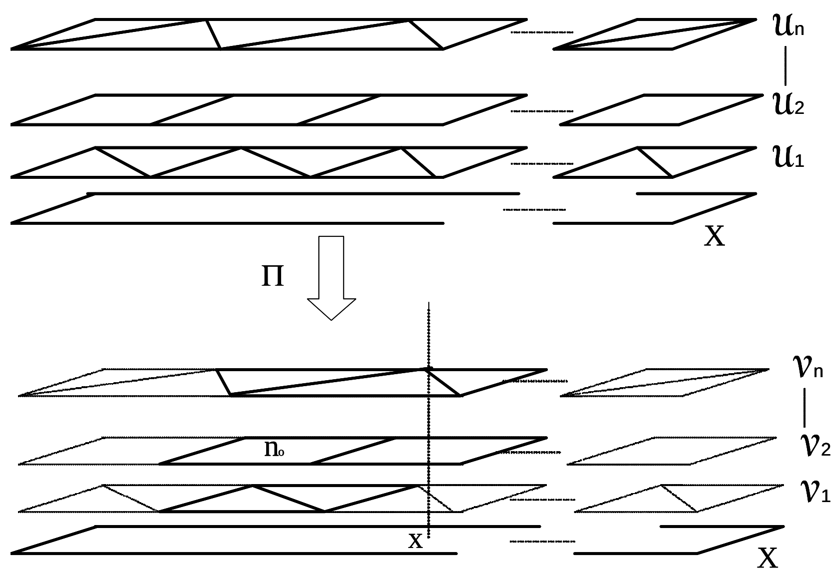
2.1 Espaços Hurewicz

Definição 2.1.1 *[7] (Hurewicz) :*

Um espaço topológico $\langle X, T\rangle$ é Hurewicz se e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$;

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n > n_0$, então existe $V \in \mathbb{V}_n$ com $x \in V$.



Vamos agora verificar que esta propriedade se enquadra no princípio de seleção.

Basta tomarmos

$\Gamma = \Delta =$ conjunto de todas as sequencias de coberturas abertas.

$\Pi =$ existir um elemento de Δ satisfazendo (i) e (ii).

Com isso dizemos que X tem a propriedade Hurewicz se, e somente se, $X \in \Pi(\Gamma, \Delta)$.

Vamos apresentar um exemplo de espaço Hurewicz

Exemplo 2.1.2 : *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a topologia usual é um espaço Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de $\mathbb{R}$, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como cada $[-n, n] \subset \mathbb{R}$ é compacto, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$ é uma cobertura de $[-n, n]$, daí a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, com isso temos que $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $x \in \mathbb{R}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq n_0$. Para $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq n_0$, então $|x| \leq n_0 \leq n$, isto é, $x \in [-n, n]$, mas $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$ é uma cobertura de $[-n, n]$, então existe $j \in I_n$ tal que $x \in U_{nj} \in \mathbb{V}_n$.

Proposição 2.1.3 : *Seja $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$, onde $\forall n \in \mathbb{N}$ K_i é compacto e $K_i \subset K_{i+1}$, então X é Hurewicz.*

Demonstração : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como $\forall n \in \mathbb{N}$ $K_n \subset X$ temos que $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de K_n, como K_n é compacto existe $I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $K_n \subset \bigcup_{j\in I_n} U_{nj}$.

Considere então $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, daí a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $x \in X$, como $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_{n_0} \subset \bigcup_{j\in I_{n_0}} U_{n_0 j}$, daí $x \in U_{n_0 j_0}$ para algum $j_0 \in I_{n_0}$, mas como $j_0 \in I_{n_0}$ temos que $U_{n_0 j_0} \in \mathbb{V}_{n_0}$. De $K_i \subset K_{i+1}$ temos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$ $x \in K_{n_0} \subset K_n \subset \bigcup_{j\in I_n} U_{nj}$, portanto existe $j \in I_n$ tal que $x \in U_{nj} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto X é Hurewicz. ∎

Proposição 2.1.4 *: Se $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ onde cada K_i é compacto, então X é Hurewicz.*

Demonstração : Seja $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$, considere $\forall i \in \mathbb{N}$ $K'_i = \bigcup_{j=1}^{i} K_j$ temos que K'_i é compacto, $K'_i \subset K'_{i+1}$ e $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K'_i$ então pela proposição anterior X é Hurewicz. ∎

Corolário 2.1.5 *: Se um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ é compacto, então $\langle X, T \rangle$ é Hurewicz.*

Demonstração : Considerando $\forall i \in \mathbb{N}$ $X_i = X$, temos que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$, então pela proposição anterior temos que X é Hurewicz. ∎

Proposição 2.1.6 *:Se um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ é Hurewicz, então $\langle X, T \rangle$ é Lindelöf.*

Demonstração : Seja $\mathbb{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ uma cobertura aberta de X, considere então a sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}$. Como X é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} J$ tal que, $\mathbb{V}_n = \{U_j\}_{j \in I_n}$.
(ii) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{V}_n$ com $x \in V$.

Considere $\mathbb{V} = \{U_j; j \in I_n, n \in \mathbb{N}\}$, então, $\mathbb{V}$ é uma subcobertura enumerável de X, pois $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n é finito, e dado $x \in X$, por (ii) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{V}_n$ com $x \in V$, logo existe $V \in \mathbb{V}_{n_0}$, com $x \in V$, mas de $V \in \mathbb{V}_{n_0}$, temos que, $V = U_j$, para algum $j \in I_{n_0}$, logo $V \in \mathbb{V}$.

Logo X é um espaço Lindelöf. ∎

Apresentamos agora um exemplo de espaço que não é Hurewicz

Exemplo 2.1.7 *: O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a topologia do ponto particular p (ver def 1.1.2) não é Lindelöff, pois $\{\{x, p\} \subset \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}\}$ é uma cobertura aberta de X que não possui subcobertura enumerável. Logo, pela proposição anterior, $\mathbb{R}$ com essa topologia não é Hurewicz.*

Definição 2.1.8 *: Seja X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Diremos que Y é Hurewicz se, e somente se, Y é um espaço Hurewicz como subespaço de X.*

Proposição 2.1.9 : *Seja Y subespaço de X. Y é Hurewicz se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas de Y por abertos em X, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) $\forall y \in Y, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{V}_n$ com $y \in V$.

Demonstração : $\Rightarrow$) Suponha Y Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas de Y, por abertos em X, onde $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{W}_n = \{W_{nj}\}_{j\in J_n}$ com $W_{nj} = U_{nj} \cap Y$, então $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de Y, pois dado $y \in Y$ como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de Y temos que existe $j \in J_n$ com $y \in U_{nj}$, mas $y \in Y$ então $y \in U_{nj} \cap Y = W_{nj}$, e $\mathbb{W}_n$ é formado por conjuntos abertos em Y, como Y é Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{H}_n = \{W_{nj}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall y \in Y, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $y \in V$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, daí a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $y \in Y$, por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $y \in V$, mas de $V \in \mathbb{H}_n$ temos que existe $j \in I_n$ com $V = W_{nj} = U_{nj} \cap Y$. Então como $j \in I_n$ temos que $U_{nj} \in \mathbb{V}_n$ e $y \in U_{nj}$.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que Y é Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas de Y por abertos em Y, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Por Y ser subespaço de X, para cada $n \in \mathbb{N}$, e para cada $j \in J_n$, existe V_{nj} aberto em X tal que, $U_{nj} = V_{nj} \cap Y$. Considere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W}_n = \{V_{nj}\}_{j\in J_n}$, então $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de Y pois, se $y \in Y$, $\exists j \in J_n$ tal que $y \in U_{nj}$, daí $y \in V_{nj}$, e daí a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas de Y por abertos em X, então por hipótese, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que, $\mathbb{H}_n = \{V_{nj}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall y \in Y$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $y \in V$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, daí a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $y \in Y$, por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $y \in V$, de $V \in \mathbb{H}_n$ temos que existe $j \in I_n$ com $y \in V_{nj}$, mas como $y \in Y$, então $y \in V_{nj} \cap Y = U_{nj} \in \mathbb{V}_n$, pois $j \in I_n$.

Logo Y é um espaço Hurewicz. ■

PROPOSIÇÃO 2.1.10 : *Todo subespaço fechado F de um espaço Hurewicz X, é Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas de F, por abertos em X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como F é fechado, F^c é aberto. Considere $\mathbb{W}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n} \cup F^c$, então $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura aberta de X, pois dado $x \in X$, se $x \in F$ como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de F, então existe $j \in J_n$ tal que $x \in U_{nj}$, se $x \notin F$ então $x \in F^c$. daí $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de X. Como X é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, existe I_n conjunto finito tal que $\mathbb{H}_n = \{V_{nj}\}_{j\in I_n}$ onde $V_{nj} = U_{ni}$ para algum $i \in J_n$ ou $V_{nj} = F^c$.

(2) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $x \in V$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{U_{nj} \in \mathbb{U}_n; U_{nj} \in \mathbb{H}_n\}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$, pois $\mathbb{H}_n$ é formado por finitos elementos.

(ii) Seja $y \in F$, como $F \subset X$ temos $y \in X$, daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, existe $V \in \mathbb{H}_n$, com $y \in V$. Como $V \in \mathbb{H}_n$, temos que $V = U_{ni} \in \mathbb{U}_n$ ou $V = F^c$, mas como $y \in F$ temos que $y \notin F^c$, então $V = U_{ni} \in \mathbb{U}_n$, daí $V \in \mathbb{V}_n$, com isso temos $y \in V \in \mathbb{V}_n$.

Por 2.1.9 F é um espaço Hurewicz. ■

PROPOSIÇÃO 2.1.11 : *Sejam X e Y espaços topológicos com X Hurewicz. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua e sobrejetora, então Y é Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de Y, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in J_n}$, como f é contínua, $f^{-1}(U_{nj})$ é aberto em X, e ainda $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de X, pois se $x \in X$,temos que $f(x) \in Y$, daí $\exists j \in J_n$ tal que $f(x) \in U_{nj}$, então $x \in f^{-1}(U_{nj})$, com isso $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de X. Como X é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, existe $I_n \subset_{<\infty} J_n$, tal que, $\mathbb{H}_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j \in I_n}$.

(2) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $x \in V$, isto é, existe $j \in I_n$ com $x \in f^{-1}(U_{nj})$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j \in I_n}$, daí a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$, mas de $x \in X$, por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in f^{-1}(U_{nj})$, com isso temos que $y = f(x) \in f(f^{-1}(U_{nj})) \subset U_{nj} \in \mathbb{V}_n$, pois $j \in I_n$.

Logo Y é um espaço Hurewicz. ∎

Sabemos que dada uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$, se A é compacto então f assume máximo e mínimo. Esse resultado não é valido para espaços Hurewicz, veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.1.12 : *Já vimos que $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é um espaço Hurewicz, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é contínua e não assume máximo nem mínimo.*

Proposição 2.1.13 : *Seja $\{\langle X_k, T_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$, uma família de espaços topológicos disjuntos. Se $\forall k \in \mathbb{N}$ X_k é Hurewicz, então o espaço soma $X = \sum_{k \in \mathbb{N}} X_k$ (ver 1.1.3) é um espaço Hurewicz.*

Demonstração : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j \in J_n}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo, e considere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_n^k = \{U_{nj} \cap X_k\}_{j \in J_n}$, então a sequência $\{\mathbb{U}_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$, é uma sequência de coberturas abertas de X_k, pois dado $x \in X_k \subset X$ como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de X, temos que existe $j \in J_n$ tal que $x \in U_{nj}$, mas como $x \in X_k$, temos que $x \in U_{nj} \cap X_k$.

Como X_k é Hurewicz, então existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n^k \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n^k$, isto é, existe $I_n^k \subset_{<\infty} J_n$, tal que, $\mathbb{V}_n^k = \{U_{nj} \cap X_k\}_{j \in I_n^k}$.

(2) $\forall x \in X_k$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, existe $V \in \mathbb{V}_n^k$ com $x \in V$.

Considere então, $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}; j \in I_n^k, k = 1, ..., n\}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, fazendo $I_n = \{j \in J_n; j \in I_n^k$ para $k = 1, ..., n\}$, temos que $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, com isso $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.
(ii) Seja $x \in X$, como $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ então, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x \in X_{k_0}$, daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, que podemos escolher maior que k_0, onde $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, existe $V \in \mathbb{V}_n^{k_0}$ com $x \in V$, de $V \in \mathbb{V}_n^{k_0}$ temos que existe $j \in I_n^{k_0}$ com $V = U_{nj} \cap X_{k_0}$, como $k_0 \leq n_0 \leq n$ temos que $j \in I_n$, como $x \in U_{nj} \cap X_k \subset U_{nj}$, temos $x \in U_{nj} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto, X é um espaço Hurewicz. ■

Proposição 2.1.14 : *Seja X um espaço topológico e sejam H e Y subespaços de X, com H Hurewicz e Y fechado, então $H \cap Y$ é Hurewicz.*

Demonstração : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas de $H \cap Y$ por abertos em X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{H}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n} \cup Y^c$, então $\mathbb{H}_n$ é uma cobertura de H por abertos em X, pois como Y é fechado temos que Y^c é aberto em X, e dado $x \in H$ se $x \in Y$ então $x \in H \cap Y$ daí existe $j \in J_n$ tal que $x \in U_{nj}$, se $x \notin Y$ então $x \in Y^c$. Portanto temos que a sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de H por abertos em X, como H é Hurewicz em X por 2.1.9, existe uma sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:
(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W}_n \subset_{<\infty} \mathbb{H}_n$, isto é, existe I_n subconjunto finito tal que $\mathbb{W}_n = \{V_{nj}\}_{j\in I_n}$ onde $V_{nj} = U_{ni}$ para algum $i \in J_n$ ou $V_{nj} = Y^c$.
(2) $\forall x \in H$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{W}_n$ com $x \in V$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{U_{nj} \in \mathbb{H}_n; U_{nj} \in \mathbb{U}_n\}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$, pois $\mathbb{H}_n$ é formado por finitos elementos.
(ii) Seja $x \in H \cap Y$, temos que $x \in H$ e $x \in Y$, de $x \in H$, por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{W}_n$ com $x \in V$, como $V \in \mathbb{H}_n$, temos que $V = U_{ni} \in \mathbb{U}_n$ ou $V = Y^c$, mas como $y \in Y$ temos que $y \notin Y^c$, então $V = U_{ni} \in \mathbb{U}_n$, daí $V \in \mathbb{V}_n$, com isso temos $y \in V \in \mathbb{V}_n$.

Logo por 2.1.9 $H \cap Y$ é um espaço Hurewicz. ■

2.2 Propriedade ω^*

Definição 2.2.1 *[2] (ω^*-coberturas):*

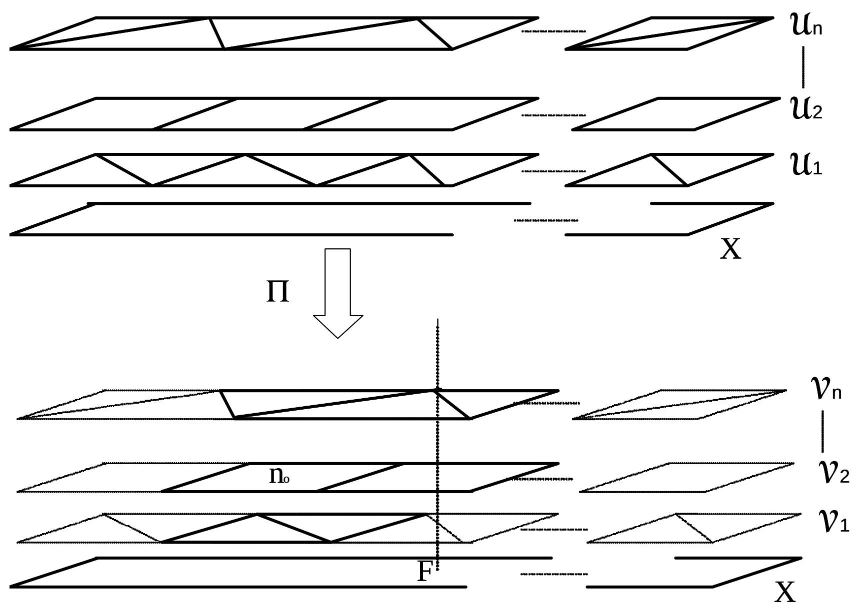
Uma ω^*-cobertura em X é uma família de abertos $\mathbb{U}$ tal que para cada subconjunto finito F de X, existe $V \in \mathbb{U}$ com $F \subset V$.

Definição 2.2.2 *[2] (Propriedade ω^*) :*

Um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ tem a propriedade ω^* se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ω^*-coberturas de X, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, temos $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n > n_0$ então, existe $V \in \mathbb{V}_n$ com $F \subset V$.



Vamos verificar que a propriedade ω^* também se enquadra no princípio de seleção, tomando

$\Gamma =$ conjunto de sequencias de ω^*-coberturas.

$\Delta =$ conjunto de sequencias de coberturas.

$\Pi =$ existir um elemento de Δ satisfazendo as propriedades (i) e (ii).

Então dizemos que um espaço X possui a propriedade ω^* se, e somente se, $X \in \Pi(\Gamma, \Delta)$.

Proposição 2.2.3 : *Sejam $\langle X, T_X \rangle$ e $\langle Y, T_Y \rangle$ espaços topológicos, onde X tem a propriedade ω^*, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora, então Y tem a propriedade ω^*.*

Demonstração : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de ω^*-coberturas, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in J_n}$, então $\mathbb{W}_n$ é uma ω^*-cobertura de X, pois como f é contínua, $\mathbb{W}_n$ é uma família de abertos, e para cada $G \subset_{<\infty} X$, temos que $f(G) \subset_{<\infty} Y$, daí por $\mathbb{U}_n$ ser uma ω^*-cobertura $\exists j \in J_n$ com $f(G) \subset U_{nj}$, então $G \subset f^{-1}f(G) \subset f^{-1}(U_{nj})$. Então $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de ω^*-coberturas de X, como X tem a propriedade ω^*, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, existe $I_n \subset_{<\infty} J_n$, tal que, $\mathbb{H}_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall G \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n > n_0$ então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $G \subset V$.

Considere agora $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, temos $I_n \subset_{<\infty} J_n$,e $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, daí $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} Y$, podemos considerar $F = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, como f é sobrejetora existem $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ tais que $\forall i = 1, ..., k$ temos $f(x_i) = y_i$, e considerando $G = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ temos que $G \subset_{<\infty} X$, daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n > n_0$, então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $G \subset V$, mas de $V \in \mathbb{H}_n$ temos que existe $j \in I_n$ com $V = f^{-1}(U_{nj})$, então $F = f(G) \subset f(f^{-1}(U_{nj})) \subset U_{nj} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto Y tem a propriedade ω^*. ∎

Proposição 2.2.4 : *Um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ tem a propriedade ω^* se, e somente se, $\forall n \in \mathbb{N}$ X^n é Hurewicz.*

Demonstração : $\Rightarrow$) Suponha que X tem a propriedade ω^*, e seja $k \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que X^k é Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X^k, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Seja $F \subset_{<\infty} X$, então $F^k \subset_{<\infty} X^k$, portanto F^k é compacto. Como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura aberta de X^k, $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura aberta de F^k, portanto existem $J_n^F \subset_{<\infty} J_n$ tais que $F^k \subset \bigcup\limits_{j \in J_n^F} U_{nj}$, então pelo teorema 1.2.4, existe um subconjuto V_F aberto em X tal que $F \subset V_F$ e $V_F^k \subset \bigcup\limits_{j \in J_n^F} U_{nj}$ $^{(\triangle)}$.

Considere $\mathbb{W}_n = \{V_F \in T; F \subset_{<\infty} X\}$, então $\mathbb{W}_n$ é ω^*-cobertura de X, pois cada V_F é aberto e se $F \subset_{<\infty} X$ existe $V_F \in \mathbb{W}_n$ tal que $F \subset V_F$. Então a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de ω^*-coberturas de X. Como X tem a propriedade ω^*, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, existe K_n finito tal que $\mathbb{H}_n = \{V_{F_i}\}_{i \in K_n}$.

(2) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n > n_0$, então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $F \subset V$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}; j \in J_n^{F_i}, i \in K_n\}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, fazendo $I_n = \{j \in J_n; j \in J_n^{F_i}, i \in K_n\}$, temos que $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j \in I_n}$, daí $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $x \in X^k$, temos $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ com $x_1, x_2, ..., x_k \in X$. Então considerando o conjunto $F = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, temos que $F \subset_{<\infty} X$, daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $F \subset V$, mas de $V \in \mathbb{H}_n$ existe $i \in K_n$ com $F \subset V_{F_i}$, mas de $F \subset V_{F_i}$, temos que $F^k \subset V_{F_i}^k$, mas por $(\triangle)$, temos que $V_{F_i}^k \subset \bigcup\limits_{j \in J_n^{F_i}} U_{nj}$, portanto $x \in F^k \subset \bigcup\limits_{j \in J_n^{F_i}} U_{nj}$, logo $\exists j \in J_n^{F_i}$ tal que $x \in U_{nj}$, mas como $i \in K_n$ e $j \in J_n^{F_i}$ então $j \in I_n$, logo $x \in U_{nj} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto, X^k é um espaço Hurewicz, e como $k \in \mathbb{N}$ era qualquer, temos que $\forall n \in \mathbb{N}$ X^n é um espaço Hurewicz.

$\Leftarrow$) Suponha que $\forall n \in \mathbb{N}$ X^n é Hurewicz, vamos mostrar que X tem a propriedade ω^*. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de ω^*-coberturas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j \in J_n}$.

Seja $\mathbb{X} = X \cup X^2 \cup ... \cup X^n \cup ...$ o espaço soma, e vamos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{W}_n = \{U_{nj}^k; j \in J_n, k \in \mathbb{N}\}$, então $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{X}$, pois cada U_{nj}^k é aberto em $\mathbb{X}$ e dado $x \in \mathbb{X}$ temos que $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, mas daí considerando $F = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ temos que $F \subset_{<\infty} X$, por $\mathbb{U}_n$ ser uma ω^*-cobertura de X, então existe $V \in \mathbb{U}_n$ com $F \subset V$, isto é, $\exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$, portanto $x \in F^m \subset U_{nj}^m \in \mathbb{W}_n$. daí $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de $\mathbb{X}$, mas como $\forall n \in \mathbb{N}$ X^n é Hurewicz por 2.1.13 temos que $\mathbb{X}$ é Hurewicz, então existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, existem $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $K_n \subset_{<\infty} \mathbb{N}$, de forma que podemos escrever $\mathbb{H}_n = \{U_{nj}^k; j \in I_n, k \in K_n\}$.

(2) $\forall x \in \mathbb{X}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $x \in V$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, daí $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} X$, digamos $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, considerando $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ temos que $x \in X^p \subset \mathbb{X}$, daí por (2) temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $x \in V$, de $V \in \mathbb{H}_n$ temos que $\exists j \in I_n$ e $p \in k_n$ tais que $V = U_{nj}^p$, logo $x \in U_{nj}^p$ e portanto $\forall i = 1, ..., p$, $x_i \in U_{nj}$, então $F \subset U_{nj} \in \mathbb{V}_n$, pois $j \in I_n$.

Logo X tem a propriedade ω^*. ■

CAPÍTULO III

Espaços Localmente Hurewicz

Neste capítulo propomos três definições de espaços localmente Hurewicz e provaremos a equivalência dessas definições em espaços de Hausdorff que satisfazem uma propriedade que aqui chamaremos C-espaço.

A primeira seção é dedicada ao estudo dos C-espaços. O resultado principal desta seção é que todo subespaço Hurewicz em um C-espaço de Hausdorff é fechado, este é o resultado que será utilizado para mostrar a equivalência dos espaços localmente Hurewicz em C-espaços de Hausdorff.

A segunda seção é dedicada aos espaços localmente Hurewicz, que serão aqui chamados de espaços topológicos localmente Hurewicz, fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz e obtemos alguns resultados como a equivalência em C-espaços de Hausdorff.

3.1 C-espaço

Definição 3.1.1 (*C-espaço*) :

Seja $\langle X, T\rangle$ *um espaço topológico,* X *é um C-espaço se, e somente se, para cada* $x \in X$, *e para cada sequência* $\{\mathbb{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *onde cada* $\mathbb{A}_n = \{A_{nj} \in T; 1 \leq j \leq k_n\}$ *com* $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{k_n} A_{nj}$, *existe* $V \in T$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in V \subset \bigcap\limits_{j=1}^{k_n} A_{nj}$.

Temos a seguir um exemplo de um C-espaço

Exemplo 3.1.2 : *Considere X um espaço qualquer, com a topologia discreta. X é um C-espaço, pois dado $x \in X$ e uma sequência $\{\mathbb{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_n = \{A_{nj}\}_{j=1}^{k_n}$ com A_{jn} aberto, e, $x \in \bigcap_{j=1}^{k_n} A_{nj}$, então, $\{x\}$ é um aberto tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in \{x\} \subset \bigcap_{j=1}^{k_n} A_{nj}$.*

A seguir temos um exemplo de um espaço topológico que não é um C-espaço

Exemplo 3.1.3 : *$\mathbb{R}$ com a topologia usual não é um C-espaço, pois $0 \in \mathbb{R}$ e considerando a sequência $\{\mathbb{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{A}_n = \{(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}); \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ $0 \in \bigcap_{k=1}^{n} (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, mas não existe U aberto em $\mathbb{R}$, tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \in U \subset \bigcap_{k=1}^{n} (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$.*

Lema 3.1.4 : *Seja X um C-espaço de Hausdorff, A um subespaço Hurewicz de X e $x_0 \notin A$, então existem conjuntos abertos disjuntos V e U em X contendo x_0 e A, respectivamente.*

Demonstração : Considere $a \in A$, como $x_0 \notin A$ temos que $x_0 \neq a$, como X é um espaço de Hausdorff existem V_a e U_a abertos disjuntos em X contendo x_0 e a.

Considere então $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n = \{U_a\}_{a\in A}$, temos então que $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas de A por abertos em X. Como A é Hurewicz por 2.1.9 existe uma sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} A$ tal que $\mathbb{W}_n = \{U_a\}_{a\in I_n}$.

(ii) $\forall y \in A$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, existe $a \in I_n$ com $y \in U_a$.

Considere agora, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{V_a\}_{a\in I_n}$, como para cada $a \in A$, $x_0 \in V_a$ então $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_0 \in \bigcap_{a\in I_n} V_a$, mas como X é um C-espaço temos que existe V aberto em X tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_0 \in V \subset \bigcap_{a\in I_n} V_a$.

Vamos considerar $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{a\in I_n} U_a)$ temos que U é aberto em X e que $A \subset U$, pois dado $y \in A$ por (ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ existe $a \in I_n$ tal que $y \in U_a$, logo $y \in \bigcup_{a\in I_{n_0}} U_a \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{a\in I_n} U_a) = U$.

Vamos verificar agora que V e U são disjuntos. Suponha por absurdo que $\exists y \in V \cap U$ então $y \in U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{a\in I_n} U_a)$ logo $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in \bigcup_{a\in I_{n_0}} U_a$ e daí $\exists a_0 \in I_{n_0}$ tal que $y \in U_{a_0}$, mas como $y \in V$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ $V \subset \bigcap_{a \in I_n} V_a$ então temos que $V \subset \bigcap_{a \in I_{n_0}} V_a$, logo $y \in V \subset \bigcap_{a \in I_{n_0}} V_a$ portanto $\forall a \in I_{n_0}$ $y \in V_a$ logo $y \in V_{a_0}$, mas daí $V_{a_0} \cap U_{a_0} \neq \emptyset$, contradição. ■

Proposição 3.1.5 *: Sejam $\langle X, T \rangle$ um C-espaço topológico de Hausdorff e A um subespaço Hurewicz de X, então A é fechado.*

Demonstração : Vamos mostrar que A^c é aberto, ou seja, se $x \in A^c$ existe $U \in T$ tal que $x \in U \subset A^c$.

Como $x \notin A$, A é Hurewicz e X é um C-espaço de Hausdorff pelo lema 3.1.4, existem V e U abertos disjuntos contendo x e A, respec. Com isso temos que $x \in V \subset A^c$, pois como $A \subset U$ e $U \cap V = \emptyset$ então $A \cap V = \emptyset$.

Portanto A^c é aberto logo A é fechado. ■

Proposição 3.1.6 *: Sejam $\langle X, T_X \rangle$ um C-espaço topológico, e $\langle Y, T_Y \rangle$ um subespaço de X, então Y é um C-espaço topológico.*

Demonstração : Seja $x \in Y$, e seja $\{\mathbb{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_n = \{A_{nj} \in T_Y; j = 1, ..., K_n\}$, e $x \in \bigcap_{j=1}^{k_n} A_{nj}$, então, como Y é subespaço de X, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall j = 1, ..., k_n$, existe $U_{nj} \in T_X$ tal que $A_{nj} = U_{nj} \cap Y$. Com isso $A_{nj} \subset U_{nj}$, logo $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in \bigcap_{j=1}^{k_n} U_{nj}$, como X é um C-espaço, existe $U \in T_X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $x \in U \subset \bigcap_{j=1}^{k_n} U_{nj}$, logo $V = U \cap Y$ é tal que, $V \in T_Y$, $x \in V$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ $V = U \cap Y \subset (\bigcap_{j=1}^{k_n} U_{nj}) \cap Y = \bigcap_{j=1}^{k_n} (U_{nj} \cap Y) = \bigcap_{j=1}^{k_n} A_{nj}$.

Portanto Y é um C-espaço topológico. ■

Proposição 3.1.7 *: Sejam $\langle X, T_X \rangle$um C-espaço topológico, $\langle Y, T_Y \rangle$ um espaço topológico e seja $f : X \to Y$ trasformação aberta, contínua e sobrejetora, então Y é um C-espaço topológico.*

Demonstração :Sejam $y \in Y$ e $\{\mathbb{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{A}_n = \{A_{nj} \in T_Y; j = 1, ..., k_n\}$ e $y \in \bigcap_{j=1}^{k_n} A_{nj}$. Como f é sobrejetora, $\exists x \in X$ tal que,

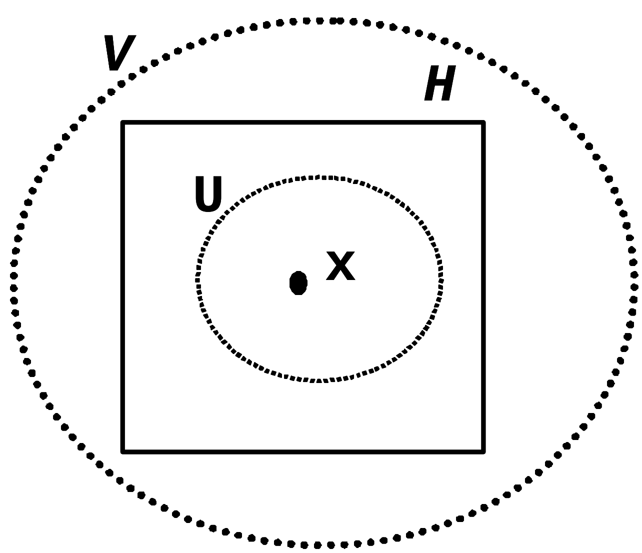
$f(x) = y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $j = 1, ..., k_n$ como f é contínua e $A_{nj} \in T_Y$, então $f^{-1}(A_{nj}) \in T_X$. Logo para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\bigcap_{j=1}^{k_n} A_{nj}) = \bigcap_{j=1}^{k_n} f^{-1}(A_{nj})$, daí como X é um C-espaço, existe $U \in T_X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ $x \in U \subset \bigcap_{j=1}^{k_n} f^{-1}(A_{nj})$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ $y = f(x) \in f(U) \subset f(\bigcap_{j=1}^{k_n} f^{-1}(A_{nj})) \subset \bigcap_{j=1}^{k_n}(A_{nj})$, como f é aberta, temos $f(U)$ é aberto. Logo $\forall n \in \mathbb{N}$, $y \in f(U) \subset \bigcap_{j=1}^{k_n}(A_{nj})$, com $f(U)$ aberto.

Portanto Y é um C-espaço. ■

3.2 Espaços Localmente Hurewicz

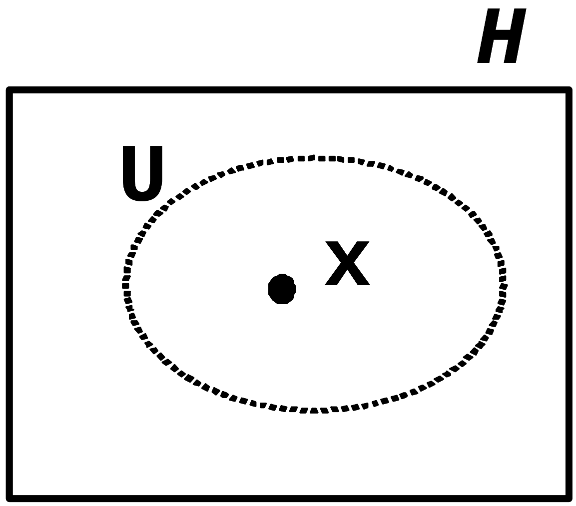
DEFINIÇÃO 3.2.1 (*Espaço Topológico Localmente Hurewicz*):

Um espaço topológico $\langle X, T \rangle$ é localmente Hurewicz se, e somente se, para cada $x \in X$ e para cada $V \in T$ tal que $x \in V$, existe $U \in T$ e H Hurewicz, onde $x \in U \subset H \subset V$.



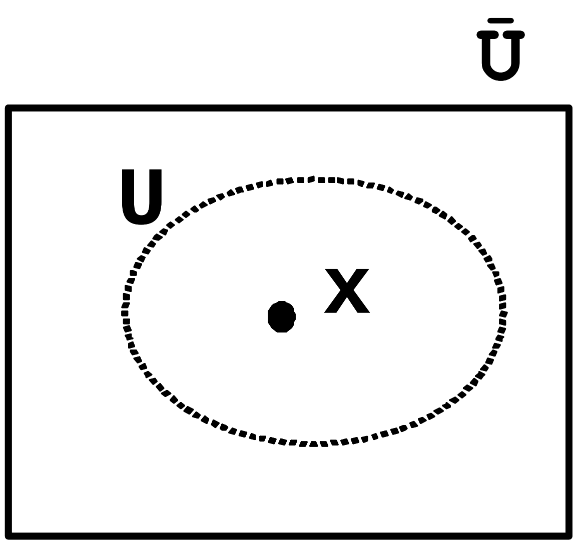
Definição 3.2.2 (*Espaço Topológico Fracamente Localmente Hurewicz*):

Um espaço topológico $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente Hurewicz se, e somente se, para cada $x \in X$, existe $U \in T$ e H Hurewicz, tal que, $x \in U \subset H$.



Definição 3.2.3 (*Espaço Topológico Relativamente Localmente Hurewicz*):

Um espaço topológico $\langle X, T\rangle$ é relativamente localmente Hurewicz se, e somente se, para cada $x \in X$ existe $U \in T$ com $\overline{U}$ Hurewicz, tal que $x \in U$.



A figura abaixo apresenta as relações entre os espaços localmente Hurewicz que serão demonstradas a seguir

$$\begin{tikzcd}
\text{Hurewicz} \arrow[r, "3.2.4"] \arrow[dr, "3.2.5"'] & \text{Fracamente Localmente Hurewicz} \arrow[r, shift right, "3.2.8"'] \arrow[d, shift right, "3.2.9"'] & \text{Localmente Hurewicz} \arrow[l, shift right, "3.2.6"'] \\
& \text{Relativamente Localmente Hurewicz} \arrow[u, shift right, "3.2.7"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposição 3.2.4 : *Todo espaço topológico $\langle X, T\rangle$ Hurewicz é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$, tome $U = X$ e $H = X$, então $U \in T$, H é Hurewicz e $x \in U \subset H$. Portanto X é um espaço fracamente localmente Hurewicz. ∎

Proposição 3.2.5 : *Um espaço topológico Hurewicz é relativamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$, escolha $U = X$ então $x \in U$ e como X é fechado $\overline{U} = X$, logo $\overline{U}$ é Hurewicz. Portanto X é um espaço relativamente localmente Hurewicz ∎

Proposição 3.2.6 : *Um espaço topológico $\langle X, T\rangle$ localmente Hurewicz é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$, como X é localmente Hurewicz, para $V = X$ existem U aberto em X e H Hurewicz tais que, $x \in U \subset H \subset X$. Portanto X é um espaço fracamente localmente Hurewicz. ∎

Proposição 3.2.7 : *Um espaço topológico $\langle X, T\rangle$ relativamente localmente Hurewicz é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$, como X é relativamente localmente Hurewicz, existe U aberto em X, com $\overline{U}$ Hurewicz tal que $x \in U$, logo $x \in U \subset \overline{U}$ com $\overline{U}$ Hurewicz. Portanto X é um espaço fracamente localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.8 : *Um C-espaço topológico $\langle X, T \rangle$ de Hausdorff é localmente Hurewicz se, e somente se, é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : $\Rightarrow$) ver 3.2.6

$\Leftarrow$) Dado $x \in X$, e V uma vizinhança de x, como X é fracamente localmente Hurewicz, existe um subespaço H Hurewicz contendo uma vizinhança de x.

Considere $A = H \cap V^c$, como $x \in V$ temos que $x \notin A$, e ainda A é Hurewicz pois, como H é Hurewicz e X é um C-espaço de Hausdorff por 3.1.5 H é fechado, daí $A = H \cap V^c$ é fechado, e como $A \subset H$ por 2.1.10 A é Hurewicz,daí pelo lema 3.1.4 existem W_x e W_A abertos disjuntos contendo x e A, respc.

Defina $U = W_x \cap int(H)$, então U é um aberto contendo x, e $U \subset int(H) \subset H$, daí $\overline{U} \subset \overline{H}$, mas como H é fechado $\overline{U} \subset H$, logo $\overline{U}$ é um subespaço fechado de um espaço Hurewicz daí por 2.1.10 $\overline{U}$ é Hurewicz.

Vamos verificar que $\overline{U} \subset V$. Note primeiro que $\overline{U} \cap A = \emptyset$ pois, caso contrário, $\exists y \in \overline{U} \cap A$, daí $y \in \overline{U}$ logo qualquer vizinhança de y intersecta U, e $y \in A \subset W_A$ logo $W_A \cap U \neq \emptyset$, mas $U \subset W_x$ temos que $W_A \cap W_x \neq \emptyset$, contradição. Então temos que $\overline{U} \subset H$, e $\overline{U} \cap A = \emptyset$, logo $\overline{U} \subset V$, com isso temos que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.

Portanto X é um espaço localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.9 : *Um C-espaço topológico $\langle X, T \rangle$ de Hausdorff é relativamente localmente Hurewicz se, e somente se, é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : $\Rightarrow$) ver 3.2.7

$\Leftarrow$) Dado $x \in X$, como X é fracamente localmente Hurewicz, existem U aberto em X e H Hurewicz tais que $x \in U \subset H$, então temos que $\overline{U} \subset \overline{H}$, como H é um subespaço Hurewicz de um C-espaço de Hausdorff por 3.1.5 H é fechado, logo $\overline{U} \subset H$, mas $\overline{U}$ é fechado então por 2.1.10 $\overline{U}$ é Hurewicz, daí $x \in U$, com $\overline{U}$ Hurewicz.

Portanto X é um espaço relativamente localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.10 : *Todo espaço topológico $\langle X, T\rangle$ localmente compacto é localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$ e V uma vizinhança de x, como X é localmente compacto existem U aberto em X e C compacto tais que $x \in U \subset C \subset V$, mas por 2.1.5 C é Hurewicz logo X é localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.11 : *Todo espaço topológico $\langle X, T\rangle$ fracamente localmente compacto é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$, como X é fracamente localmente compacto existem U aberto em X e C compacto tais que $x \in U \subset C$, mas por 2.1.5 C é Hurewicz, logo X é fracamente localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.12 : *Todo espaço topológico $\langle X, T\rangle$ relativamente localmente compacto é relativamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Dado $x \in X$, como X é relativamente localmente compacto existe U aberto em X com $\overline{U}$ compacto tal que $x \in U$, mas por 2.1.5 $\overline{U}$ é Hurewicz, logo X é relativamente localmente Hurewicz. ■

A seguir apresentamos exemplos e contra-exemplos de espaços localmente Hurewicz.

No próximo exemplo temos um espaço topológico localmente Hurewicz, fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz

Exemplo 3.2.13 : *Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual, já vimos que neste caso $\mathbb{R}$ é Hurewicz, daí por 3.2.4 e por 3.2.5 temos que $\mathbb{R}$ é fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz. Apesar de $\mathbb{R}$ não ser um C-espaço, temos ainda que $\mathbb{R}$ é localmente Hurewicz, pois dado $x \in \mathbb{R}$ e V aberto em $\mathbb{R}$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$, mas daí $(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2})$ é tal que $x \in (x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \subset [x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}] \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$, onde $(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2})$ é aberto e $[x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}]$ é compacto, logo 2.1.5 é Hurewicz.*

O próximo exemplo mostra um espaço topológico que não é Hurewicz, mas é localmente Hurewicz, fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz

EXEMPLO 3.2.14 : *Considere $\mathbb{R}$ com a topologia discreta, temos então que $\mathbb{R}$ não é Lindelöf, pois $\{\{x\}/x \in \mathbb{R}\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ que não possui subcobertura enumerável, logo por 2.1.6 $\mathbb{R}$ com a topologia discreta não é Hurewicz, mas para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ é compacto logo é Hurewicz, com isso temos que $\mathbb{R}$ com a topologia discreta é localmente Hurewicz, pois dado $x \in \mathbb{R}$ e V uma vizinhança de x, temos que $x \in \{x\} \subset V$, com $\{x\}$ aberto e $\{x\}$ Hurewicz, como $\mathbb{R}$ com a topologia discreta é um C-espaço de Hausdorff, temos que neste caso $\mathbb{R}$ é também fracamente localmente Hurewicz e relativamente localmente Hurewicz.*

O próximo exemplo trata de um espaço topológico fracamente localmente Hurewicz que não é relativamente localmente Hurewicz

EXEMPLO 3.2.15 : *Seja $\mathbb{R}$ com a topologia do ponto particular p (ver def 1.1.2), já vimos no exemplo 2.1.7 que neste caso $\mathbb{R}$ não é Hurewicz. Dado A aberto em $\mathbb{R}$ e não vazio, temos que $\overline{A} = \mathbb{R}$, pois para qualquer $y \in \mathbb{R}$, temos que qualquer vizinhança de y é não vazio, então contem p, daí intersecta A. Logo $\mathbb{R}$ não é relativamente localmente Hurewicz, pois dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer vizinhança V de x é um aberto não vazio, então $\overline{V} = \mathbb{R}$, mas já vimos que neste caso $\mathbb{R}$ não é Hurewicz, então não podemos encontrar uma vizinhança de x onde o fecho é Hurewicz. Mas $\mathbb{R}$ é fracamente localmente compacto, pois dado $x \in \mathbb{R}$ temos que $x \in \{x, p\}$ e $\{x, p\}$ é aberto e compacto (todo conjunto finito é compacto), logo por 3.2.11 $\mathbb{R}$ é fracamente localmente Hurewicz.*

PROPOSIÇÃO 3.2.16 : *Sejam $\langle X, T_X \rangle$ e $\langle Y, T_Y \rangle$ espaços topológicos, onde X é localmente Hurewicz, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua, sobrejetora e aberta, então Y é localmente Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Sejam $y \in Y$ e V uma vizinhança de y, como f é sobrejetora $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$, como f é contínua e V é um aberto em Y, temos que $f^{-1}(V)$ é aberto em X, e ainda $x \in f^{-1}(V)$, como X é localmente Hurewicz, existem U aberto em X e H Hurewicz tais que, $x \in U \subset H \subset f^{-1}(V)$, daí $y = f(x) \in f(U) \subset f(H) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$, como f é aberta $f(U)$ é aberto em Y, como f é contínua $f(H)$ é Hurewicz por 2.1.11.

Portanto Y é localmente Hurewicz. ∎

PROPOSIÇÃO 3.2.17 : *Sejam $\langle X, T_X \rangle$ e $\langle Y, T_Y \rangle$ espaços topológicos com X fracamente localmente Hurewicz, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua, sobrejetora e aberta, então Y é fracamente localmente Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$, como X é fracamente localmente Hurewicz, existem U aberto em X, e H Hurewicz tais que $x \in U \subset H$, daí $y = f(x) \in f(U) \subset f(H)$, como f é aberta temos que $f(U)$ é aberto em Y, e como f é contínua temos por 2.1.11 que $f(H)$ é Hurewicz.

Portanto Y é fracamente localmente Hurewicz. ∎

PROPOSIÇÃO 3.2.18 : *Sejam $\langle X, T_X \rangle$ e $\langle Y, T_Y \rangle$ espaços topológicos com X relativamente localmente Hurewicz e Y um C-espaço de Hausdorff, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua, sobrejetora e aberta, então Y é relativamente localmente Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$, como X é relativamente localmente Hurewicz, existe U aberto em X, com $\overline{U}$ Hurewicz, tal que $x \in U$, daí $y = f(x) \in f(U)$, como $\overline{U}$ é Hurewicz e f é contínua por 2.1.11 $f(\overline{U})$ é Hurewicz, mas $\overline{f(U)} \subset \overline{f(\overline{U})}$, como Y é um C-espaço de Hausdorff e $f(\overline{U})$ é Hurewicz, temos que $f(\overline{U})$ é fechado, daí $\overline{f(U)} \subset f(\overline{U})$, então $\overline{f(U)}$ é um subespaço fechado de um espaço Hurewicz, logo $\overline{f(U)}$ é Hurewicz, então $y \in f(U) \subset \overline{f(U)}$, com $f(U)$ aberto e $\overline{f(U)}$ Hurewicz.

Portanto Y é relativamente localmente Hurewicz. ∎

PROPOSIÇÃO 3.2.19 : *Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço topológico localmente Hurewicz e seja $\langle Y, T_Y \rangle$ subespaço fechado de X, então Y é localmente Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $y \in Y$ e seja V um aberto em Y tal que $y \in V$, então $y \in X$ e existe V' aberto em X, tal que $V = V' \cap Y$, daí $x \in V'$, como X é localmente Hurewicz, existem

U' aberto em X e H Hurewicz tais que $y \in U' \subset H \subset V'$, mas como $y \in Y$ temos que $y \in U' \cap Y \subset H \cap Y \subset V' \cap Y = V$, onde $U' \cap Y$ é aberto em Y, e $H \cap Y$ é Hurewicz por 2.1.14 , logo Y é localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.20 : *Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço topológico fracamente localmente Hurewicz e seja $\langle Y, T_Y \rangle$ subespaço fechado de X, então Y é fracamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Seja $y \in Y$, então $y \in X$, como X é fracamente localmente Hurewicz, existem U aberto em X e H Hurewicz em X tais que $y \in U \subset H$, mas como $y \in Y$ temos que $y \in U \cap Y \subset H \cap Y$, onde $U \cap Y$ é aberto em Y e $H \cap Y$ é Hurewicz por 2.1.14, logo Y é fracamente localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.21 : *Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço topológico relativamente localmente Hurewicz e $\langle Y, T_Y \rangle$ subespaço fechado de X, então Y é relativamente localmente Hurewicz.*

Demonstração : Seja $y \in Y$, então $y \in X$, como X é relativamente localmente Hurewicz, temos que existe U aberto em X com $\overline{U}$ Hurewicz tal que $y \in U$, como $y \in Y$ temos que $y \in U \cap Y$, e pela prop 2.1.14 $\overline{U} \cap Y$ é Hurewicz, mas $\overline{U \cap Y} \subset \overline{U} \cap \overline{Y} = \overline{U} \cap Y$ pois Y é fechado, e como $\overline{U \cap Y}$ é fechado por 2.1.10 temos que $\overline{U \cap Y}$ é Hurewicz, logo Y é relativamente localmente Hurewicz. ■

Proposição 3.2.22 : *Seja X espaço topológico fracamente localmente Hurewicz, então $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz.*

Demonstração : $\Rightarrow$) Se A é aberto em X então $A \cap H$ é aberto em H por definição de subespaço.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que A é aberto em X, seja $a \in A$, vamos encontrar um aberto contendo a e contido em A.

Como $a \in A$ temos que $a \in X$ e como X é fracamente localmente Hurewicz existem U aberto em X e H Hurewicz tais que $a \in U \subset H$. Como H é Hurewicz por hipótese $A \cap H$ é aberto em H, daí como $A \cap U = (A \cap H) \cap U$ temos que $A \cap U$ é aberto em U, mas U

também é subespaço de X, então existe V aberto em X tal que $A \cap U = U \cap V$, mas como U e V são abertos em X temos que $U \cap V$ é aberto em X, e com isso $U \cap A$ também é aberto em X, logo $a \in A \cap U \subset A$ com $A \cap U$ aberto em X.

Como $a \in A$ era qualquer temos que A é aberto. ■

Proposição 3.2.23 : *Seja X espaço topológico localmente Hurewicz, daí um subconjunto A de X é aberto em X se, e somente se, $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz.*

Demonstração : $\Rightarrow$) Se A é aberto em X então $A \cap H$ é aberto em H por definição de subespaço.

$\Leftarrow$) Se X é localmente Hurewicz e $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz, então por 3.2.6 temos que X é fracamente localmente Hurewicz e $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz, daí por 3.2.22 temos que A é aberto em X. ■

Proposição 3.2.24 : *Sejam X um espaço topológico relativamente localmente Hurewicz e A um subconjunto de X, então A é aberto em X se, e somente se, $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz.*

Demonstração : $\Rightarrow$) Se A é aberto em X então $A \cap H$ é aberto em H por definição de subespaço.

$\Leftarrow$) Se X é relativamente localmente Hurewicz e $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz, então por 3.2.7 temos que X é fracamente localmente Hurewicz e $A \cap H$ é aberto em H para todo H Hurewicz, daí por 3.2.22 A é aberto em X. ■

CAPÍTULO IV

Generalizações das Propriedades Hurewicz e ω^*

Neste capítulo tratamos de generalizações das propriedades Hurewicz e ω^*, os espaços almost Hurewicz e nearly Hurewicz e as propriedades almost-ω^* e nearly-ω^*.

Na primeira seção apresentamos os espaços almost Hurewicz introduzido por Breuckmann e Kudri em [3], e apresentaremos de alguns resultados como a invariância por função contínua e a equivalência com uma definição utilizando conjuntos regularmente abertos.

Na segunda seção apresentamos espaços que possuem a propriedade almost-ω^*, os principais resultados apresentados nesta seção são a equivalência com uma definição através de regularmente abertos e um resultado que apresenta uma condição necessária e suficiente para que um espaço possua a propriedade almost-ω^* através da propriedade almost Hurewicz.

Na terceira seção definimos espaços nearly Hurewicz e obtemos alguns resultados como as relações entre espaços nearly Hurewicz com nearly compacto, nearly Lindelöff e almost Hurewicz. Mostramos também que espaços nearly Hurewicz podem ser definidos através de conjuntos regularmente abertos.

Na quarta seção definimos espaços que possuem a propriedade nearly-ω^*, mostramos que esta propriedade também pode ser definida através de conjuntos regularmente abertos e apresentamos uma condição necessária para que um espaço possua a propriedade nearly-ω^* através da propriedade nearly Hurewicz.

4.1 Espaços Almost Hurewicz

DEFINIÇÃO 4.1.1 *[3](Almost Hurewicz) :*

Um espaço topológico X é almost Hurewicz se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas abertas de X, onde $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n; \mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{U_{nj}}$.

PROPOSIÇÃO 4.1.2 *[3]: Seja X um espaço topológico Hurewicz, então X é almost Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como X é Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que, $\mathbb{W}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $V \in \mathbb{W}_n$ com $x \in V$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X$, por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $V \in \mathbb{W}_n$ com $x \in V$, de $V \in \mathbb{W}_n$ temos que existe $j \in I_n$ com $V = U_{nj}$, mas como $U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$ temos que $x \in \overline{U_{nj}}$.

Portanto X é um espaço almost Hurewicz. ■

PROPOSIÇÃO 4.1.3 *: Seja X um espaço almost Hurewicz então X é almost Lindelöf.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}_j\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de X, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}$, então $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de X, como X é almost Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J$ tal que $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_j}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{U_j}$.

Considere $\mathbb{V} = \{U_j; j \in I_n, n \in \mathbb{N}\}$ então fazendo $I = \{j \in J; j \in I_n, n \in \mathbb{N}\}$ temos que I é subconjunto enumerável de J e $X = \bigcup\limits_{j\in I} \overline{U_j}$, pois dado $x \in X$, por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{U_j}$, então existe $j \in I_{n_0}$ com $x \in \overline{U_j}$, como $n_0 \in \mathbb{N}$ temos que $j \in I$, logo $x \in \bigcup\limits_{j \in I} \overline{U_j}$.

Portanto X é almost Lindelöf. ■

Proposição 4.1.4 *[3]: Um espaço topológico X é almost Hurewicz se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas de X por conjuntos regularmente abertos, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J}$, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que, $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.
(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{U_{nj}}$.

Demonstração :$\Rightarrow$) Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas de X por conjuntos regularmente abertos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ suponha que $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, onde cada U_{nj} é um conjunto regularmente aberto , então cada U_{nj} é um conjunto aberto, pois $U_{nj} = int(\overline{U_{nj}})$.

Como X é um espaço almost Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.
(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{U_{nj}}$.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que X é almost Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como cada $\overline{U_{nj}}$ é fechado por 1.1.6 temos que $int(\overline{U_{nj}})$ é regularmente aberto. Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}'_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in J_n}$, temos então que $\{\mathbb{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas de X por conjuntos regularmente abertos, pois dado $x \in X$ existe $j \in J_n$ com $x \in U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$, como U_{nj} é aberto temos $x \in int(\overline{U_{nj}})$.

Por hipótese existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{\overline{int(\overline{U_{nj}})}\}_{j\in I_n}$, mas como U_{nj} é um conjunto aberto temos por 1.1.7 que $\overline{U_{nj}}$ é regularmente fechado, portanto $\overline{U_{nj}} = \overline{int(\overline{U_{nj}})}$, então temos $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.
(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{U_{nj}}$.

Portanto X é um espaço almost Hurewicz. ■

Proposição 4.1.5 *[3] : Sejam X e Y espaços topológicos com X almost Hurewicz, se $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora e almost contínua (ver 1.1.10), então Y é um espaço* *almost Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas de Y por conjuntos regularmente abertos, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}'_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in J_n}$ temos que $\mathbb{U}'_n$ é uma cobertura aberta de X, pois U_{nj} é regularmente aberto e f é almost contínua daí $f^{-1}(U_{nj})$ é aberto e dado $x \in X$ temos que $f(x) \in Y$ daí existe $j \in J_n$ com $f(x) \in U_{nj}$ daí $x \in f^{-1}(U_{nj})$.

Como X é almost Hurewicz temos que existe uma sequência $\{\mathbb{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}'_n = \{\overline{f^{-1}(U_{nj})}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{f^{-1}(U_{nj})}$.

Considere então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$, temos que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall y \in Y$, como f é sobrejetora existe $x \in X$ com $f(x) = y$, de $x \in X$ por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{f^{-1}(U_{nj})}$, então $y = f(x) \in f(\overline{f^{-1}(U_{nj})})$, mas como U_{nj} é aberto temos que $\overline{U_{nj}}$ é regularmente fechado por 1.1.7, como f é almost contínua temos que $f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ é fechado, como $f^{-1}(U_{nj}) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ temos que $\overline{f^{-1}(U_{nj})} \subset \overline{f^{-1}(\overline{U_{nj}})} = f^{-1}(\overline{U_{nj}})$, pois como vimos $f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ é fechado, então $y \in f(\overline{f^{-1}(U_{nj})}) \subset f(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset \overline{U_{nj}}$.

Portanto Y é um espaço almost Hurewicz. ■

PROPOSIÇÃO 4.1.6 : *Sejam X e Y espaços topológicos com X Hurewicz e seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora fracamente contínua (ver 1.1.12), então Y é almost Hurewicz.*

DEMONSTRAÇÃO : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de Y, onde $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in J_n}$ temos que $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de X, pois dado $x \in X$ temos $f(x) \in Y$, como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de Y, existe $j \in J_n$ tal que $f(x) \in U_{nj}$, com isso $x \in f^{-1}(U_{nj})$, e ainda como f é fracamente contínua temos $f^{-1}(U_{nj}) \subset int(f^{-1}(\overline{U_{nj}}))$.

Considere então $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{H}_n = \{int(f^{-1}(\overline{U_{nj}}))\}_{j\in J_n}$, daí $\mathbb{H}_n$ é uma cobertura aberta de X, pois dado $x \in X$ como $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de X temos que $\exists j \in J_n$ tal que,

$x \in f^{-1}(U_{nj}) \subset int(f^{-1}(\overline{U_{nj}}))$. Como X é Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{K}_n = \{int(f^{-1}(\overline{U_{nj}}))\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, existe $j \in I_n$ com $x \in int(f^{-1}(\overline{U_{nj}})$.

Considere agora $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$ então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora temos que existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, mas de $x \in X$ por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, temos que existe $j \in I_n$ com $x \in int(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ com isso temos que $y = f(x) \in f(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset \overline{U_{nj}}$.

Logo Y é um espaço almost Hurewicz. ■

Proposição 4.1.7 : *Sejam X e Y espaços topológicos com X almost Hurewicz, e seja $f : X \to Y$ é uma função fortemente contínua (ver 1.1.11), então Y é Hurewicz.*

Demonstração : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de Y, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in J_n}$, então cada $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura aberta de X, pois de f ser fortemente contínua já vimos que f é contínua então $f^{-1}(U_{nj})$ é aberto, e dado $x \in X$ temos que $f(x) \in Y$, como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de Y, existe $j \in J_n$ com $f(x) \in U_{nj}$ logo $x \in f^{-1}(U_{nj})$. Como X é almost Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{H}_n = \{\overline{f^{-1}(U_{nj})}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{f^{-1}(U_{nj})}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$ então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, então $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, mas de $x \in X$ por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in \overline{f^{-1}(U_{nj})}$, logo $y = f(x) \in f(\overline{f^{-1}(U_{nj})})$, mas f é fortemente contínua então $f(\overline{f^{-1}(U_{nj})}) \subset f(f^{-1}(U_{nj}))$, daí $y \in f(\overline{f^{-1}(U_{nj})}) \subset f(f^{-1}(U_{nj})) \subset U_{nj}$ e como $j \in I_n$ temos que $U_{nj} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto Y é um espaço Hurewicz. ■

Proposição 4.1.8 *[3] : Seja $\{\langle X_k, T_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços topológicos disjuntos. Se $\forall k \in \mathbb{N}$ X_k é um espaço almost Hurewicz, então o espaço soma $X = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ (ver 1.1.3) é um espaço almost Hurewicz.*

Demonstração : Seja $X = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ e seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo, e considere a sequência $\{\mathbb{U}_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n^k = \{U_{nj} \cap X_k\}_{j\in J_n}$. Temos que cada $\mathbb{U}_n^k$ é uma cobertura aberta de X_k, pois $U_{nj} \cap X_k$ é aberto em X_k por definição e dado $x \in X_k$ temos que $x \in X$ daí como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de X existe $j \in J_n$ com $x \in U_{nj}$, mas como $x \in X_k$ temos $x \in U_{nj} \cap X_k$.

Como X_k é um espaço almost Hurewicz temos que existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists J_n^k \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n^k = \{\overline{U_{nj} \cap X_k}\}_{j\in J_n^k}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in J_n^k$ com $x \in \overline{U_{nj} \cap X_k}$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}} \in \mathbb{U}_n; j \in J_n^k, k = 1, ..., n\}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ tomando $I_n = \{j \in J_n^k; k = 1, ..., n\}$ temos que $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X$, como $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_k$, mas daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, que pode ser escolhido maior que k, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in J_n^k$ com $x \in \overline{U_{nj} \cap X_k}$, mas como $\overline{U_{nj} \cap X_k} \subset \overline{U_{nj}} \cap \overline{X_k} \subset \overline{U_{nj}}$, temos que $x \in \overline{U_{nj}}$ com $j \in J_n^k$, mas como $k \leq n_0 \leq n$ então $j \in I_n$.

Portanto X é um espaço almost Hurewicz. ∎

4.2 Propriedade Almost-ω^*

Definição 4.2.1 *[2] (ω^*-coberturas):*

Uma ω^*-cobertura em X é uma família de abertos $\mathbb{U}$ tal que para cada subconjunto finito F de X, existe $V \in \mathbb{U}$ com $F \subset V$.

Definição 4.2.2 *[3](Propriedade almost-ω^*) :*

Um espaço topológico X tem a propriedade almost-ω^* se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ω^*-coberturas de X, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ *tal que* $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $n \geq n_0$, *então existe* $j \in I_n$ *com* $F \subset \overline{U_{nj}}$.

Proposição 4.2.3 *[3]: Um espaço topológico X tem a propriedade almost-ω^* se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de conjuntos regularmente abertos tais que, $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ *tal que* $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $n \geq n_0$, *então existe* $j \in I_n$ *com* $F \subset_{<\infty} \overline{U_{nj}}$.

Demonstração :$\Rightarrow$) Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de conjuntos regularmente abertos tais que $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$. Mas como todo conjunto regularmente aberto é aberto, temos então que $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de ω^*-coberturas de X.

Como X tem a propriedade almost-ω^* temos que existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $F \subset \overline{U_{nj}}$.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que X tem a propriedade almost-ω^*. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de ω^*-coberturas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, então $\forall n \in \mathbb{N}$ dado $F \subset_{<\infty} X, \exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$ $^{(1)}$.

Considere a sequência $\{\mathbb{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}'_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in J_n}$, então como cada $\overline{U_{nj}}$ é fechado por 1.1.6 temos que $int(\overline{U_{nj}})$ é um conjunto regularmente aberto e ainda dado $F \subset_\infty X$ por (1) existe $j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$, mas como $U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$ temos $F \subset \overline{U_{nj}}$.

Por hipótese existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{\overline{int(\overline{U_{nj}})}\}_{j\in I_n}$, mas como U_{nj} é aberto por 1.1.7 temos que $\overline{U_{nj}}$ é regularmente fechado, daí $\overline{U_{nj}} = \overline{int(\overline{U_{nj}})}$ então temos que $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $F \subset \overline{U_{nj}}$.

Portanto X tem a propriedade almost-ω^*. ■

PROPOSIÇÃO 4.2.4 *[3]: Sejam X e Y espaços topológicos onde X tem a propriedade almost-ω^*. Se $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora e almost contínua (ver 1.1.10), então Y tem a propriedade almost-ω^*.*

DEMONSTRAÇÃO : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de conjuntos regularmente abertos em Y tal que, $\forall F \subset_{<\infty} Y, \exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$ $(\triangle)$.

Considere $\{\mathbb{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{U}'_n = \{f^{-1}(U_{nj})\}_{j\in J_n}$, então cada $\mathbb{U}'_n$ é uma ω^*-cobertura de X, pois como f é almost contínua e U_{nj} é regularmente aberto temos que $f^{-1}(U_{nj})$ é aberto em X, e dado $G \subset_{<\infty} X$, digamos que $G = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ daí $F = f(G) = \{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)\} \subset_{<\infty} Y$, então por $(\triangle)$ existe $j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$, mas daí $G \subset f^{-1}(F) \subset f^{-1}(U_{nj}) \in \mathbb{U}'_n$.

Como X tem a propriedade almost-ω^* existe uma sequência $\{\mathbb{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}'_n = \{\overline{f^{-1}(U_{nj})}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall G \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $G \subset \overline{f^{-1}(U_{nj})}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} Y$, digamos $F = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, como f é sobrejetora $\forall i = 1, ..., p$ existem $x_i \in X$ tais que $f(x_i) = y_i$, considerando $G = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ temos que $G \subset_{<\infty} X$, daí por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $G \subset \overline{f^{-1}(U_{nj})}$, portanto $F = f(G) \subset f(\overline{f^{-1}(U_{nj})})$, mas como U_{nj} é aberto por 1.1.7 temos que $\overline{U_{nj}}$ é regularmente fechado, então por f ser almost contínua temos que $f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ é fechado, daí por $f^{-1}(U_{nj}) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ temos que $\overline{f^{-1}(U_{nj})} \subset \overline{f^{-1}(\overline{U_{nj}})} = f^{-1}(\overline{U_{nj}})$, pois $f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ é fechado, com isso $F \subset f(\overline{f^{-1}(U_{nj})}) \subset f(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset \overline{U_{nj}}$.

Portanto Y tem a propriedade almost-ω^*. ■

PROPOSIÇÃO 4.2.5 *[3]: Um espaço topológico X tem a propriedade almost-ω^* se, e somente se, X^n é um espaço almost Hurewicz para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração : $\Rightarrow$) Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo, vamos supor que X tem a propriedade almost-ω^* e vamos mostrar que X^k é almost Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X^k, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Seja $F \subset_{<\infty} X$, então $F^k \subset_{<\infty} X^k$, logo F^k é compacto, pois todo conjunto finito é compacto. Como cada $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura aberta de X^k, então é também cobertura aberta de F^k, daí existe $J_n^F \subset_{<\infty} J_n$ tal que $F^k \subset \bigcup\limits_{j\in J_n^F} U_{nj}$ $^{(\triangle)}$. Mas por 1.2.4 existe um conjunto V_F aberto em X tal que $F \subset V_F$ e $V_F^k \subset \bigcup\limits_{j\in J_n^F} U_{nj}$.

Considere a sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{H}_n = \{V_F; F \subset_{<\infty} X\}$, então cada V_F é aberto em X e para cada $F \subset_{<\infty} X$ existe $V_F \in \mathbb{H}_n$ com $F \subset V_F$, com isso temos que $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de ω^*-coberturas de X. Como X tem a propriedade almost-ω^*, existe uma sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto K_n finito, tal que $\mathbb{W}_n = \{\overline{V_{F_i}}\}_{i\in K_n}$.

(2) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $i \in K_n$ com $F \subset \overline{V_{F_i}}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}; j \in J_n^{F_i}, i \in K_n\}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ tomando $I_n = \{j \in J_n; j \in J_n^{F_i}, i \in K_n\}$, temos então que $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $x \in X^k$, temos $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, daí considerando $F = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ temos que $F \subset_{<\infty} X$, logo por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $i \in K_n$ com $F \subset \overline{V_{F_i}}$, com isso temos que $F^k \subset \overline{V_{F_i}}^k \subset \overline{V_{F_i}^k}$ mas como por $(\triangle)$ temos que $V_F^k \subset \bigcup\limits_{j\in J_n^F} U_{nj}$, então $F_k \subset \overline{\bigcup\limits_{j\in J_n^{F_i}} U_{nj}} \subset \bigcup\limits_{j\in J_n^{F_i}} \overline{U_{nj}}$, daí existe $j \in J_n^{F_i}$ com $F^k \subset \overline{U_{nj}}$, então $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \overline{U_{nj}}$ e como $i \in K_n$ temos que $j \in I_n$.

Portanto X^k é um espaço almost Hurewicz.

Como k é qualquer teremos X^n almost Hurewicz para cada $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Suponha agora que $\forall n \in \mathbb{N}$ X^n é almost Hurewicz, vamos mostrar que X tem a propriedade almost-ω^*.

Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de ω^*-coberturas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere $\mathbb{X} = X \cup X^2 \cup ...$, o espaço soma, e considere $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{H}_n = \{U_{nj}^k; k \in \mathbb{N}, j \in J_n\}$, então cada $\mathbb{H}_n$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{X}$, pois como cada U_{nj} é aberto em X temos que U_{nj}^k é aberto em $\mathbb{X}$ pela definição de espaço soma, e dado $x \in \mathbb{X}$, temos que $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, mas daí considerando $F = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ temos que $F \subset_{<\infty} X$, então existe $j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$, com isso temos que $x \in U_{nj}^k \in \mathbb{H}_n$. Como cada X^k é almost Hurewicz por 4.1.8 temos que o espaço soma $\mathbb{X}$ é almost Hurewicz. Então existe uma sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ existem $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $K_n \subset_{<\infty} \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{W}_n = \{\overline{U_{nj}^k}; j \in I_n, k \in K_n\}$.

(2) $\forall x \in \mathbb{X}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ e $k \in K_n$ com $x \in \overline{U_{nj}^k}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} X$, digamos $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, fazendo $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ temos que $x \in X^p \subset \mathbb{X}$, daí por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ e $p \in K_n$ com $x \in \overline{U_{nj}^p} = \overline{U_{nj}}^p$, então $\forall i = 1, ..., p$ $x_i \in \overline{U_{nj}}$, dai $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\} \in \overline{U_{nj}}$ e como $j \in I_n$ temos que $\overline{U_{nj}} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto X tem a propriedade almost-ω^*. ∎

4.3 Espaços Nearly Hurewicz

Definição 4.3.1 (*Nearly Hurewicz*) :

Um espaço topológico X é nearly Hurewicz se, e somente se, para toda sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$, *tal que* $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $n \geq n_0$, *então existe* $j \in I_n$ *com* $x \in int(\overline{U_{nj}})$.

Proposição 4.3.2 : *Um espaço topológico X é nearly Hurewicz se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas de X por conjuntos regularmente abertos, onde cada*

$\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, *existe uma sequência* $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$, *isto é,* $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ *tal que* $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $n \geq n_0$, *então existe* $j \in I_n$ *com* $x \in U_{nj}$.

Demonstração :$\Rightarrow$) Considere X nearly Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas de X por conjuntos regularmente abertos, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como todo regularmente aberto é aberto, temos que $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de X. Como X é nearly Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$, tal que $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$, mas como U_{nj} é regularmente aberto temos que $int(\overline{U_{nj}}) = U_{nj}$, daí $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, isto é, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}}) = U_{nj}$.

$\Leftarrow$) Queremos mostrar que X é nearly Hurewicz. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Temos por 1.1.7 que $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall j \in J_n$ $int(\overline{U_{nj}})$ é regularmente aberto, pois $\overline{U_{nj}}$ é fechado. Considere a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{W}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in J_n}$ é uma cobertura de X por conjuntos regularmente abertos, pois se $x \in X$ como $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de cobertura de X, temos que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists j \in J_n$ tal que $x \in U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$, mas como U_{nj} é aberto temos que $x \in int(\overline{U_{nj}})$.

Então por hipótese existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$, tal que $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}})$.

Logo X é nearly Hurewicz. ∎

A figura a seguir apresenta as relações entre os espaços nearly Hurewicz e os espaços nearly Compacto, Hurewicz, almost Hurewicz e nearly Lindelöf

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \text{nearly compacto} & & \\
 & & \downarrow 4.3.6 & & \\
 & 4.3.3 & & 4.3.8 & \\
\text{Hurewicz} & \rightleftarrows & \text{nearly Hurewicz} & \rightleftarrows & \text{almost Hurewicz} \\
 & 4.3.5 & & 4.3.10 & \\
 & & \downarrow 4.3.7 & & \\
 & & \text{nearly Lindelöf} & &
\end{array}
$$

Proposição 4.3.3 : *Se um espaço topológico X é Hurewicz, então X é nearly Hurewicz.*

Demonstração : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como X é Hurewicz temos que existe uma sequência $\{\mathbb{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:
(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{V}'_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$, onde $\mathbb{V}'_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$.
(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{V}'_n$ com $x \in V$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset_{<\infty} J_n$, e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.
(ii) Seja $x \in X$, por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $V \in \mathbb{V}'_n$ com $x \in V$, mas de $V \in \mathbb{V}'_n$ temos que existe $j \in I_n$ com $x \in U_{nj}$, com isso $x \in U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$ e como U_{nj} é aberto $x \in int(\overline{U_{nj}}) \in \mathbb{V}_n$, pois $j \in I_n$.

Portanto X é nearly Hurewicz. ■

Porém a recíproca dessa proposição não é verdadeira, veja o exemplo a seguir

Exemplo 4.3.4 : *Considere $\mathbb{R}$ com a topologia do ponto particular p, já vimos no exemplo 2.1.7 que neste caso $\mathbb{R}$ não é Hurewicz. Vamos mostrar que $\mathbb{R}$ com essa topologia é nearly Hurewicz, seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de $\mathbb{R}$, onde $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, tomaremos a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nk_n}})\}$ onde $k_n \in J_n$ é tal que $1 \in U_{nk_n}$ (tal k_n existe pois cada $\mathbb{U}_n$ é cobertura de $\mathbb{R}$), como $1 \in U_{nk_n}$ temos que $U_{nk_n} \neq \emptyset$ e U_{nk_n} é aberto então $p \in U_{nk_n}$, então $\overline{U_{nk_n}} = \mathbb{R}$, pois dado $y \in \mathbb{R}$ qualquer vizinhança* *de y é não vazio, logo contém p e portanto intersecta U_{nk_n}, como $\mathbb{R}$ é aberto temos que $int(\overline{U_{nk_n}}) = \mathbb{R}$, logo a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ tomando $I_n = \{k_n\}$ temos $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $x \in \mathbb{R}$, tomando $n_0 = 1$ temos que $\forall n \geq n_0$, como $int(\overline{U_{nk_n}}) = \mathbb{R}$ existe $k_n \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nk_n}})$.

Proposição 4.3.5 : *Seja X espaço topológico semi-regular (ver 1.1.15), X é Hurewicz se, e somente se, é nearly Hurewicz.*

Demonstração :$\Rightarrow$) Ver 4.3.3.

$\Leftarrow$) Seja X um espaço topológico semi-regular nearly Hurewicz, vamos mostrar que X é Hurewicz. Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, então dado $x \in X$ temos que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $j_x \in J_n$ tal que $x \in U_{nj_x}$. Como X é semi-regular, temos que existe V_{nx} regularmente aberto tal que $x \in V_{nx} \subset U_{nj_x}$ $^{(\triangle)}$. Considere a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{W}_n = \{V_{nx}; x \in X\}$, então cada $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de X por conjuntos regularmente abertos. Como X é nearly Hurewicz por 4.3.2 existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, existe I_n conjunto finito tal que $\mathbb{H}_n = \{V_{nx_i}\}_{i\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $i \in I_n$ com $x \in V_{nx_i}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{V}_n = \{U_{nj_{x_i}}\}_{i\in I_n}$ então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$

(ii) $\forall x \in X$, por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $i \in I_n$ com $x \in V_{nx_i}$, mas por $(\triangle)$ temos que $V_{nx_i} \subset U_{nj_{x_i}}$, então $x \in U_{nj_{x_i}}$ e como $i \in I_n$ temos que $U_{nj_{x_i}} \in \mathbb{V}_n$.

Portanto X é Hurewicz. ∎

Proposição 4.3.6 : *Se um espaço topológico X é nearly compacto, então X é nearly Hurewicz.*

Demonstração : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como X é nearly compacto temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$ é uma cobertura de X, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $x \in X$, escolhendo $n_0 = 1$ temos que $\forall n \geq n_0$, $\mathbb{V}_n$ é uma cobertura de X, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}})$. ∎

Proposição 4.3.7 : *Se X é um espaço topológico nearly Hurewicz, então X é nearly Lindelöf.*

Demonstração : Seja $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}_{nj}\}_{j\in J_n}$ uma cobertura de X por conjuntos regularmente abertos. Considere então $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}$, daí a sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas de X, por conjuntos regularmente abertos, como X é nearly Hurewicz por 4.3.2, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, isto é, $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in U_{nj}$.

Considere $\mathbb{V} = \{U_{nj}; j \in I_n, n \in \mathbb{N}\}$, então $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ é enumerável pois $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n é finito, e ainda $\mathbb{V}$ é uma cobertura de X, pois dado $x \in X$ por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in U_{nj}$, mas então existe $j \in I_{n_0}$ com $x \in U_{nj}$, como $n_0 \in \mathbb{N}$ e $j \in I_{n_0}$ temos que $U_{nj} \in \mathbb{V}$.

Logo X é nearly Lindelöf. ∎

Proposição 4.3.8 : *Se um espaço topológico X é nearly Hurewicz, então X é almost Hurewicz.*

Demonstração : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como X é nearly Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}'_n = \{int(\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}})$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j \in I_n}$.

(ii) Seja $x \in X$, por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}})$, com isso temos que $x \in int(\overline{U_{nj}}) \subset \overline{U_{nj}}$, e como $j \in I_n$ temos que $\overline{U_{nj}} \in \mathbb{V}_n$.

Logo X é almost Hurewicz. ■

Porém a recíproca dessa proposição não é verdadeira, veja o exemplo a seguir

Exemplo 4.3.9 : *Seja Ω o menor ordinal não enumerável e $A = [0, \Omega)$. O conjunto A tem a propriedade que para cada $a \in A$ o subconjunto $[0, a)$ é enumerável. Seja $X = \{a_{ij}, b_{ij}, c_i, a, b\}$ onde $i \in A$ e $j \in \mathbb{N}$, considere uma topologia em X que tem como base os seguintes conjuntos: $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$, $B^n_{c_i} = \{c_i, a_{ij}, b_{ij}\}_{j \geq n}$, $B^\alpha_a = \{a, a_{ij}\}_{\substack{i \geq \alpha \\ j \in \mathbb{N}}}$ e $B^\alpha_b = \{b, b_{ij}\}_{\substack{i \geq \alpha \\ j \in \mathbb{N}}}$.*

Temos que X não é nearly Lindelöf, pois considerando $\mathbb{U} = (\bigcup_{i \in A} B^0_{c_i}) \cup B^1_a \cup B^1_b$, temos que $\mathbb{U}$ é uma cobertura de X por conjuntos regularmente abertos que não possui subcobertura enumerável, então por 4.3.7 temos que X não é nearly Hurewicz.

Vamos mostrar que X é almost Hurewicz, seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j \in J_n}$.

Sendo cada $\mathbb{U}_n$ uma cobertura aberta de X temos:

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists U_{nj_{an}} \in \mathbb{U}_n$ *tal que* $a \in U_{nj_{an}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists U_{nj_{bn}} \in \mathbb{U}_n$ *tal que* $b \in U_{nj_{bn}}$

Com isso $\forall n \in \mathbb{N}$ $\;X = \overline{U_{nj_{an}}} \cup \overline{U_{nj_{bn}}} \cup \{d_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, \forall l, k = 1, ..., n, \exists U_{nj_{lk_n}} \in \mathbb{U}_n$ *tal que* $d_{lk} \in U_{nj_{lk_n}}$ $(*)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considre $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj_{an}}}, \overline{U_{nj_{bn}}}, \overline{U_{nj_{lk_n}}}\}_{l,k=1,\ldots,n}$ então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que:

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, considere $I_n = \{j_{an}, j_{bn}, j_{lk_n}\}_{l,k=1,\ldots,n}$ então $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j \in I_n}$.*

2. *Seja $x \in X$, temos:*

   (a) *Caso 1: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in (\overline{U_{nj_{an}}} \cup \overline{U_{nj_{bn}}})$, então $x \in \overline{U_{nj_{an}}} \in \mathbb{V}_n$ ou $x \in \overline{U_{nj_{bn}}} \in \mathbb{V}_n$.*

   (b) *caso 2: existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (\overline{U_{l_0 j_{al_0}}} \cup \overline{U_{l_0 j_{bl_0}}})^c = \{d_{l_0 k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, então $x = d_{l_0 k_0}$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$. Seja $n_0 = \max\{l_0, k_0\}$. Temos por $(*)$ que*

$\forall n \geq n_0, \forall l, k = 1, ..., n, \exists U_{nj_{lk_n}}$ *tal que* $d_{lk} \in U_{nj_{lk_n}}$,

Como $l_0, k_0 \leq n_0 \leq n$ *existe* $U_{nj_{l_0 k_{0n}}}$ *tal que* $x = d_{l_0 k_0} \in U_{nj_{l_0 k_{0n}}} \subset \overline{U_{nj_{l_0 k_{0n}}}} \in \mathbb{V}_n$.

Proposição 4.3.10 : *Um espaço topológico X extremally desconexo (ver 1.1.16) é nearly Hurewicz se, e somente se, é almost Hurewicz.*

Demonstração :$\Rightarrow$) Ver 4.3.8.

$\Leftarrow$) Seja X um espaço topológico extremally desconexo e almost Hurewicz, vamos mostrar que X é nearly Hurewicz.

Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Como X é almost Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{\overline{U_{nj}}\}_{j\in I_n}$. Como U_{nj} é aberto e X é extremally desconexo temos que $\overline{U_{nj}}$ é aberto, então $int(\overline{U_{nj}}) = \overline{U_{nj}}$, podemos escrever $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.
(ii) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}})$.

Portanto X é um espaço nearly Hurewicz. ■

Proposição 4.3.11 : *Sejam X e Y espaços topológicos com X nearly Hurewicz. Seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora, almost contínua (ver 1.1.10) e almost aberta (ver 1.1.14) então Y é nearly Hurewicz.*

Demonstração : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de coberturas abertas de Y, onde $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere a sequência $\{\mathbb{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{K}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in J_n}$, temos então que $\mathbb{K}_n$ é uma cobertura de Y, pois dado $y \in Y$ como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de Y existe $j \in J_n$ tal que $y \in U_{nj}$, mas daí $y \in U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$ e como U_{nj} é aberto, temos que $y \in int(\overline{U_{nj}})$, e temos ainda que cada $\mathbb{K}_n$ é formado por abertos regulares, pois $\overline{U_{nj}}$ é fechado e daí pela proposição 1.1.6 temos que $int(\overline{U_{nj}})$ é aberto regular.

Considere agora a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))\}_{j\in J_n}$, como f é almost contínua e cada $int(\overline{U_{nj}})$ é aberto regular temos que $f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$ é aberto, e ainda cada $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura de X, pois dado $x \in X$ temos que $f(x) \in Y$, daí existe $j \in J_n$

tal que $f(x) \in int(\overline{U_{nj}})$, com isso temos $x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$. Então $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas de X, como X é nearly Hurewicz temos que existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{H}_n = \{int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, então existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$.

Considere então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$, temos que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, mas de $x \in X$ temos por (2) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, existe $j \in I_n$ com $x \in int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$. Mas temos que $f^{-1}(int(\overline{U_{nj}})) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$, e por 1.1.7 $\overline{U_{nj}}$ é regularmente fechado, daí por f ser almost contínua $f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ é fechado, então $\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))} \subset \overline{f^{-1}(\overline{U_{nj}})} = f^{-1}(\overline{U_{nj}})$, com isso temos que $int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}) \subset int(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$, mas de $x \in int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$ e $y = f(x)$ temos então que $y \in f(int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})) \subset f(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset \overline{U_{nj}}$, mas como $\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}$ é fechado por 1.1.6 temos que $int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$ é regularmente aberto e por f ser almost aberta temos que $f(int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}))$ é aberto logo $y \in int(\overline{U_{nj}})$.

Portanto Y é nearly Hurewicz. ∎

Proposição 4.3.12 : *Sejam X e Y espaços topológicos com X Hurewicz e seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora almost contínua (ver 1.1.10). Então Y é nearly Hurewicz.*

Demonstração : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de Y, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Então a sequência $\{\mathbb{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{K}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in J_n}$, é uma sequência de coberturas de Y, pois dado $y \in Y$ como $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura de Y temos que existe $j \in J_n$ tal que $y \in U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$, mas de U_{nj} ser aberto temos que $y \in int(\overline{U_{nj}})$, ainda temos que cada $\mathbb{K}_n$ é formado por conjuntos regularmente abertos pois como $\overline{U_{nj}}$ é fechado por 1.1.6 temos $int(\overline{U_{nj}})$ regularmente aberto.

Considere a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))\}_{j\in J_n}$, temos que cada $\mathbb{W}_n$ é uma cobertura aberta de X, pois já vimos que cada $int(\overline{U_{nj}})$ é regularmente aberto e como f é almost contínua $f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$ é aberto, e dado $x \in X$ temos que $f(x) \in Y$ então existe $j \in J_n$ tal que $f(x) \in int(\overline{U_{nj}})$ daí $x \in f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$. Mas X é Hurewicz então existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{W}_n$, isto é, $\exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{H}_n = \{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))\}_{j\in I_n}$.

(2) $\forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $V \in \mathbb{H}_n$ com $x \in V$.

Considere então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$, temos então que a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $y \in Y$, como f é sobrejetora existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, mas de $x \in X$ por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $V \in \mathbb{V}_n$ com $x \in V$, mas de $V \in \mathbb{V}_n$ temos que existe $j \in I_n$ tal que $x \in f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$, daí $y = f(x) \in f(f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))) \subset int(\overline{U_{nj}})$.

Portanto Y é nearly Hurewicz. ■

Proposição 4.3.13 : *Sejam X e Y espaços topológicos onde X é nearly Hurewicz e Y é extremally desconexo (ver 1.1.16). Se $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora e almost contínua (1.1.10), então Y é nearly Hurewicz.*

Demonstração : Como X é nearly Hurewicz por 4.3.8 temos que X é almost Hurewicz, daí por f ser almost contínua e sobrejetora temos por 4.1.5 temos que Y é almost Hurewicz, mas como Y é extremally desconexo por4.3.10 temos que Y é nearly Hurewicz. ■

Proposição 4.3.14 : *Sejam X e Y espaços topológicos onde X é nearly Hurewicz e Y é extremally desconexo (ver 1.1.16). Se $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora e fracamente contínua (ver 1.1.12),então Y é nearly Hurewicz.*

Demonstração : Como f é fracamente contínua e Y é extremally desconexo então f é almost contínua. De fato, seja A um conjunto regularmente aberto em Y, temos que $A = int(\overline{A})$, mas como Y é extremally desconexo e A é aberto temos que $\overline{A}$ é aberto, então $A = \overline{A}$. Como f é fracamente contínua temos que $f^{-1}(A) \subset int(f^{-1}(\overline{A})) = int(f^{-1}(A))$, logo $f^{-1}(A) = int(f^{-1}(A))$, então $f^{-1}(A)$ é aberto, portanto f é almost contínua. Então Y é nearly Hurewicz pela proposição anterior. ■

Proposição 4.3.15 *: Seja $\{\langle X_k, T_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços topológicos disjuntos. Se $\forall k \in \mathbb{N}$ X_k é nearly Hurewicz, então o espaço soma $X = \sum_{k\in\mathbb{N}} X_k$ (ver 1.1.3) é um espaço nearly Hurewicz.*

Demonstração : Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere $k \in \mathbb{N}$ fixo, e a sequência $\{\mathbb{U}_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{U}_n^k = \{U_{nj} \cap X_k\}_{j\in J_n}$. Então $\mathbb{U}_n^k$ é uma cobertura aberta de X_k, pois $U_{nj} \cap X_k \in T_k$ por definição e dado $x \in X_k$, temos que $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, logo existe $j \in J_n$ tal que $x \in U_{nj}$, então $x \in U_{nj} \cap X_k$. Mas como X_k é nearly Hurewicz existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists J_n^k \subset_{<\infty} J_n$, tal que $\mathbb{V}_n^k = \{int(\overline{U_{nj} \cap X_k})\}_{j\in J_n^k}$.

(2) $\forall x \in X_k, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in J_n^k$ com $x \in int(\overline{U_{nj} \cap X_k})$).

Defina $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}}); j \in J_n^k \text{ e } k = 1, ..., n\}$ então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, se $I_n = \{j \in J_n^k; k = 1, ..., n\}$, temos que $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $x \in X$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x \in X_{k_0}$, daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, que pode ser escohido maior que k_0, tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in J_n^{k_0}$ com $x \in int(\overline{U_{nj} \cap X_{k_0}})$), mas daí $x \in int(\overline{U_{nj} \cap X_{k_0}}) \subset \overline{U_{nj} \cap X_{k_0}} \subset \overline{U_{nj}} \cap \overline{X_{k_0}} \subset \overline{U_{nj}}$, mas como $int(\overline{U_{nj} \cap X_{k_0}})$ é aberto temos que $x \in int(\overline{U_{nj}})$, e ainda como $n_0 > k_0$, $j \in I_n$, então $int(\overline{U_{nj}}) \in \mathbb{V}_n$.

Logo o espaço X é nearly Hurewicz. ∎

4.4 Propriedade nearly-ω^*

Definição 4.4.1 *[2] (ω^*-coberturas):*

Uma ω^*-cobertura em X é uma família de abertos $\mathbb{U}$ tal que para cada subconjunto finito F de X, existe $V \in \mathbb{U}$ com $F \subset V$.

Definição 4.4.2 (*propriedade nearly -ω^**) :

Um espaço topológico X tem a propriedade nearly-ω^* se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ω^*-coberturas de X, onde cada, $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, existe uma sequência

$\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ *tal que* $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $n \geq n_0$ *então, existe* $j \in I_n$ *com* $F \subset int(\overline{U_{nj}})$.

PROPOSIÇÃO 4.4.3 : *Um espaço topológico X tem a propriedade nearly-ω^* se, e somente se, para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada, $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de conjuntos regularmente abertos tais que, $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists V \in \mathbb{U}_n$ com $F \subset V$, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ *tal que* $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $n \geq n_0$ *então existe* $j \in I_n$ *com* $F \subset U_{nj}$.

DEMONSTRAÇÃO : $\Rightarrow$) Suponha que X é um espaço topológico com a propriedade nearly-ω^*. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada, $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de conjuntos regularmente abertos tal que, $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists V \in \mathbb{U}_n$ com $F \subset V$.

Como todo regularmente aberto é aberto, temos que $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de ω^*-coberturas de X, como X tem a propriedade nearly-ω^* existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$, mas como U_{nj} é um regularmente aberto $U_{nj} = int(\overline{U_{nj}})$, daí $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então existe $V \in \mathbb{V}_n$com $F \subset V$, isto é, $\exists j \in I_n$ com $F \subset int(\overline{U_{nj}}) = U_{nj}$.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que X tem a propriedade nearly-ω^*. Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de ω^*-coberturas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, temos então que cada $\mathbb{U}_n$ é uma família de conjuntos abertos tal que $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj}$ $^{(1)}$. Vamos mostra que X é nearly Hurewicz.

Por 1.1.6 $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall j \in J_n$ temos que $int(\overline{U_{nj}})$ é um conjunto regularmente aberto, pois $\overline{U_{nj}}$ é fechado. Considere então a sequência $\{\mathbb{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada $\mathbb{U}'_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in J_n}$, então $\mathbb{U}'_n$ é um família de conjuntos regularmente abertos e $\forall F \subset_{<\infty} X$, por (1) temos que $\exists j \in J_n$ com $F \subset U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$, mas como U_{nj} é aberto temos $F \subset int(\overline{U_{nj}}) \in \mathbb{U}'_n$. Então por hipótese existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j \in I_n}$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in I_n$ com $F \subset int(\overline{U_{nj}})$.

Portanto X tem a propriedade nearly-ω^*. ∎

Proposição 4.4.4 : *Sejam X e Y espaços topológicos onde X tem a propriedade nearly-ω^* e seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora, almost contínua (ver 1.1.10) e almost aberta (ver 1.1.14), então Y tem a propriedade nearly-ω^*.*

Demonstração : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de ω^*-coberturas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j \in J_n}$.

Considere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{H}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j \in J_n}$, temos que $\mathbb{H}_n$ é uma família de regularmente abertos em X, pois como $\overline{U_{nj}}$ é fechado por 1.1.6 $int(\overline{U_{nj}})$ é regularmente aberto, e $\forall F \subset_{<\infty} X$ como $\mathbb{U}_n$ é uma ω^*-cobertura de X, existe $V \in \mathbb{U}_n$ com $F \subset V$, então existe $j \in I_n$ com $F \subset U_{nj}$, mas daí $F \subset U_{nj} \subset \overline{U_{nj}}$ e como U_{nj} é aberto temos que $F \subset int(\overline{U_{nj}})$.

Considere a sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{W}_n = \{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))\}_{j \in J_n}$, como $int(\overline{U_{nj}})$ é regularmente aberto e f é almost contínua temos que $f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$ é aberto em X, e ainda dado $G \subset_{<\infty} X$, considere $G = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, daí $F = \{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)\} \subset_{<\infty} Y$, então existe $j \in J_n$ tal que $F \subset int(\overline{U_{nj}})$, logo $G \subset f^{-1}(F) \subset f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))$. Como X tem a propriedade nearly-ω^* existe uma sequência $\{\mathbb{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists I_n \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\mathbb{K}_n = \{int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})\}_{j \in I_n}$.

(2) $\forall G \subset_{<\infty} X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$, temos que existe $j \in I_n$ com $G \subset int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j \in I_n}$, daí a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j \in I_n}$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} Y$, digamos que $F = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, como f é sobrejetora $\exists x_1, x_2, ..., x_p \in X$ tais que $\forall i = 1, ..., p$, $f(x_i) = y_i$, considere $G = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ então $G \subset_{<\infty} X$, logo por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existe $j \in I_n$ com $G \subset int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$, daí $F = f(G) \subset f(int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}))$. Como sabemos que $int(\overline{U_{nj}}) \subset \overline{U_{nj}}$, temos que $f^{-1}(int(\overline{U_{nj}})) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ mas U_{nj} é aberto então por 1.1.7 $\overline{U_{nj}}$ é regularmente fechado, daí por f ser almost contínua $f^{-1}(\overline{U_{nj}})$ é fechado, daí $\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))} \subset \overline{f^{-1}(\overline{U_{nj}})} = f^{-1}(\overline{U_{nj}})$, portanto $int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}) \subset int(f^{-1}(\overline{U_{nj}}) \subset f^{-1}(\overline{U_{nj}})$. Agora como já tinhamos concluído que $F \subset f(int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}))$ temos que $F \subset f(f^{-1}(\overline{U_{nj}})) \subset \overline{U_{nj}}$, mas como temos $\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}$ fechado por 1.1.6 $int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))})$ é regularmente aberto, como f é almost aberta, $f(int(\overline{f^{-1}(int(\overline{U_{nj}}))}))$ é aberto, então $F \subset int(\overline{U_{nj}})$.

Portanto Y tem a propriedade nearly-ω^*. ■

PROPOSIÇÃO 4.4.5 : *Se X^n é nearly Hurewicz para cada $n \in \mathbb{N}$, então X tem a propriedade nearly-ω^*.*

DEMONSTRAÇÃO : Considere $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de ω^*-cobeturas de X, onde cada $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$.

Considere $\mathbb{X} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X^n$ e defina $\mathbb{H}_n = \{U_{nj}^k; k \in \mathbb{N}$ e $j \in J_n\}$, então $\mathbb{H}_n$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{X}$, pois se $x \in \mathbb{X}$, temos que para algun $m \in \mathbb{N}$ $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, considere então $F = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, então $F \subset_{<\infty} X$, daí como $\mathbb{U}_n$ é uma ω^*-cobertura de X temos que existe $V \in \mathbb{U}_n$ com $F \subset V$, mas de $V \in \mathbb{U}_n$ existe $j \in J_n$, tal que $V = U_{nj}$, com isso $x \in F^m \subset U_{nj}^m \in \mathbb{H}_n$.

Como cada X^n é nearly Hurewicz, por 4.3.15 temos que $\mathbb{X}$ é nearly Hurewicz, então existe uma sequência $\{\mathbb{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que existem $I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $K_n \subset_{<\infty} \mathbb{N}$, de forma que $\mathbb{W}_n = \{int(\overline{U_{nj}^k}); j \in I_n$ e $k \in K_n\}$.

(2) $\forall x \in Y, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existem $j \in I_n$ e $k \in K_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}^k})$.

Considere $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$, então a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset_{<\infty} J_n$ e $\mathbb{V}_n = \{int(\overline{U_{nj}})\}_{j\in I_n}$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} X$, digamos $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, então $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ é tal que $x \in \mathbb{X}$, daí por (2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se $n \geq n_0$ então, existem $j \in I_n$ e $k \in K_n$ com $x \in int(\overline{U_{nj}^k}) = [int(\overline{U_{nj}})]^k$, com isso, $\forall i = 1, ..., p$, temos $x_i \in int(\overline{U_{nj}})$, logo $F \subset int(\overline{U_{nj}})$, e como $j \in I_n$ $int(\overline{U_{nj}}) \in \mathbb{V}_n$. Portanto X tem a propriedade nearly-ω^*. ■

Bibliografia

[1] G. Balasubramanian, "On some generalizations of compact spaces", Glasnik Mat., 17 (37) (1982), 367-380.

[2] T.K. Breuckmann, "Alguns tópicos em L espaços topológicos: compacidade local, espaços de Hurewicz e propriedade ω^*", Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, UFPR, Curitiba, (2004).

[3] T.K. Breuckmann, S.R.T. Kudri, "Almost Hurewicz spaces and the almost selectively ω^*-grouping property", submetido.

[4] D.E. Cameron, "Propreties of S-closed spaces", Proc of American math. soc. 72 (1978) 581-586.

[5] F. Cammaroto, G. Santoro, "Some countrexamples and properties on generalizations of Lindelöf spaces", Internat. J. Math. & Math. Sci. 19, (4) (1996) 737-746.

[6] J. Dugundji, "Topology", Allyn and Bacon, Boston (1988).

[7] W. Hurewicz, "Über eine verallgeneinerung des Borelschen Theorems", Math. Zeitschrift 24 (1925) 401-421.

[8] Lj. Kočinac, M Scheepers, "Functin spaces and a property of Reznichenko", Topology and its Applications 123 (2002) 135-143.

[9] E.L. Lima, "Elementos de topologia geral", Editora da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro (1970).

[10] J. Munkres, "Topology: A First Course", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1999).

[11] T. Noiri, "Properties of S-closed spaces", Acta Mathematics Acad. Sci. Hungaricae 35 (1980) 431-436.

[12] M.K. Singal and A. Mathur,"On nealy compact spaces", Boll. Un. Mat. Ital. (4), 2 (1969), 702-710.

[13] L. Wingers, "Box products and Hurewicz spaces", Topology and its Applications 64 (1995) 9-21.