

Setor de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em
Física
Dissertação de Mestrado

Igor Tauscher Martynetz

Acoplamento Químico para Modelo Unidimensional e
Bidimensional de Redes de Neurônios

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade
Federal do Paraná como parte dos requisitos necessá-
rios à obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: *Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana*

Curitiba-PR

2015

M388a

Martynetz, Igor Tauscher

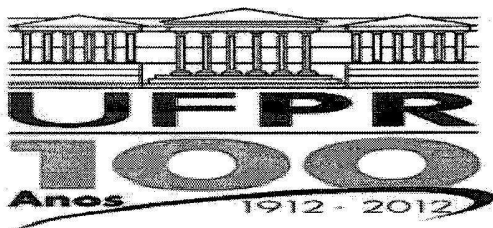
Acoplamento químico para modelo unidimensional e bidimensional de redes de neurônios/ Igor Tauscher Martynetz. – Curitiba, 2015.
72 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2015.

Orientador: Ricardo Luiz Viana .
Bibliografia: p. 69-72.

1. Neuroquímica. 2. Redes neurais. 3. Sincronização. 4. Drogas neurotrópicas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana, Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 612.8042



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

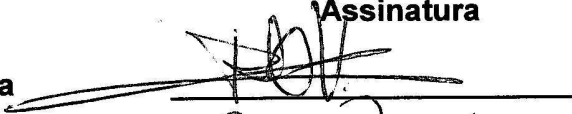

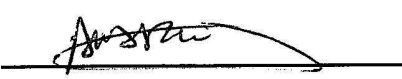
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

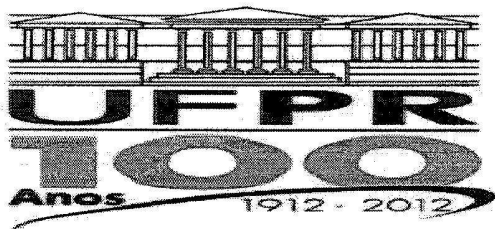
**Acoplamento Químico para Modelo Unidimensional e Bidimensional
de Redes de Neurônios.**

ALUNO

IGOR TAUSCHER MARTYNETZ

Em sessão pública iniciada às 14 horas do dia 20 de março de 2015, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu APROVAR o candidato com o conceito global B.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)		<u>B</u>
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes (UFPR)		<u>B</u>
Prof. Dr. Antônio Marcos Batista (UEPG)		<u>B</u>



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do aluno **IGOR TAUSCHER MARTYNETZ**, consideram aprovada a redação final da dissertação, cujo título é: *“Acoplamento Químico para Modelo Unidimensional e Bidimensional de Redes de Neurônios”*.

Curitiba, 20 de março de 2015.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
(UFPR)

Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes
(UFPR)

Prof. Dr. Antônio Marcos Batista
(UEPG)

Assinatura

*O problema do que deseja é que às vezes ele se realiza.
Stephen King em “O vento pela Fechadura”*

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana pela Orientação.
- Ao Carlos Schneider Batista pela ajuda nas simulações e dúvidas.
- Ao Fernando César (China) e ao Rudolf Copi Eckelberg pela ajuda aos temíveis segment fault.
- Aos meus pais Marcos Aurélio Martynetz e Crista Tauscher Martynetz e ao meu irmão Rafael Tauscher Martynetz pela paciência.
- À Cintia Enes da Silva pelo apoio e paciência (que deve ter sido muita), e não me fazer desistir.
- A Karla Kariny e ao Robson Maiocchi pela ajuda na correção ortográfica.
- Ao CNPQ pela bolsa de estudos.
- Ao Prof. Dr. Carlos de Carvalho pelo apoio computacional.
- Esse trabalho foi parcialmente financiado pela FINEP através dos projetos CT-INFRA/UFPR.
- Aos membros da banca.

Resumo

A sincronização de uma rede neuronal pode levar a problemas patológicos já estudados, tais como mal de Parkinson e epilepsia. Logo, os estudos sobre sincronização entre os neurônios e como suprimi-los podem ajudar a entender se realmente a sincronização está relacionada com essas patologias. A sincronização pode acontecer por vários fatores internos e externos ao sistema. Internamente podemos ter a dinâmica de cada neurônio muito próxima, *i.e*, neurônios semelhantes, e externamente podemos ter sincronia devido à frequência do forçamento externo ser próximo à frequência natural da rede. Neste trabalho serão estudados os supracitados tipos de fatores para uma rede neuronal, cuja dinâmica é governada pelo mapa de Rulkov e, também, utilizado um modelo de acoplamento que ocorre a partir de uma difusão de um elemento químico em seu meio, podendo assim determinar em quais casos temos sincronias. Usando um forçamento externo periódico podemos controlar a intensidade e a frequência desse forçamento e observar em quais casos permanece a sincronia entre os neurônios.

Palavra chave: sincronização, mapa de Rulkov, acoplamento químico.

Abstract

The synchronization of neuronal network may bring several pathological diseases, such as Parkinson and epilepsy, so studies about synchronization factors and how to avoid them can help us to understand if the synchronization is related with this diseases. The synchronization may occur for several internal and external factors. In the internal case, we can have a similar neuron dynamics, and in the external we can have the synchronization due to an external signal close to natural frequency system. In this work, this kind of factors for a network, governed by the dynamics given by Rulkov map, will be studied using a chemical coupling model due to a diffusing substance such that we can determine in which cases it will occur synchronization. Using a periodic external signal with a control in frequency and intensity we can note in which cases the synchrony persists.

Keyword: Synchronization, Rulkov network, chemical coupling

Sumário

Agradecimentos	5
Resumo	6
Abstract	7
Sumário	8
Lista de Figuras	10
1 Introdução	1
2 Modelo de Kuramoto	4
2.1 Introdução	4
2.2 Definição de Fase e parâmetro de ordem	6
2.3 Modelo de Kuramoto	7
2.4 Evolução do parâmetro de ordem	8
2.4.1 Resultados Numéricos	12
3 Mapa de Rulkov	15
3.1 <i>Spike e Burst</i>	15
3.2 Mapa de Rulkov	17
3.3 Acoplamento	20

3.4	Sincronização Externa	24
4	Acoplamento químico unidimensional e bidimensional	30
4.1	Modelo	30
4.2	Caso Unidimensional	34
4.2.1	Limites para $\gamma \rightarrow 0$ para o caso Unidimensional	35
4.3	Caso Bidimensional	36
4.4	Resultados Numéricos	38
4.4.1	Casos com Forçamento externo	47
5	Conclusões	60
A	Travamento de frequência	62
B	Resolução da Equação 4.3	64
B.0.2	Resolução para $d = 1$	65
B.0.3	Resolução para $d = 2$	66
B.0.4	Resolução para $d = 3$	67
	Referências Bibliográficas	69

Lista de Figuras

2.1	Desenho original feito por Christiaan Huygens ilustrando seu experimento com dois relógios de pêndulo colocados em um suporte comum	5
2.2	Podemos descrever a trajetória de um sistema oscilatório como uma curva fechada Γ chamada de ciclo limite	6
2.3	Representação do parâmetro de ordem em maneira vetorial.	7
2.4	Fase e frequência dos osciladores para um conjunto de $N = 1000$ osciladores.	13
2.5	Simulação numérica do parâmetro de ordem para vários tamanhos de rede.	14
3.1	<i>Spike</i> Neuronal	16
3.2	Tipos de <i>burst</i> para diferentes neurônios.	16
3.3	Dinâmica do Mapa de Rulkov para $\alpha = 4, 1$	19
3.4	Dinâmica do Mapa de Rulkov para $\alpha = 4, 3$	19
3.5	Dinâmica do Mapa de Rulkov para $\alpha = 4, 5$	20
3.6	Definição de fase de <i>burst</i>	20
3.7	Campo médio(\bar{x}_n) e perfil do <i>burst</i> para $\varepsilon = 0$	21
3.8	Campo médio(\bar{x}_n) e perfil do <i>burst</i> para $\varepsilon = 0,04$	22
3.9	Frequência de <i>burst</i> de um sistema acoplado	23
3.10	Parâmetro de ordem <i>versus</i> ε , $N = 1000$	24
3.11	Frequência externa <i>versus</i> diferença entre a frequência de <i>burst</i> e a frequência externa	26

3.12	Valores de ω somente dos platôs em função da intensidade de acoplamento.	26
3.13	Grafico log x log do tamanho dos platôs $\Delta\omega$ em função de d .	27
3.14	Evolução temporal da diferença de fase entre o neurônio e o forçamento	28
3.15	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede	29
4.1	Figura esquemática da distribuição espacial dos osciladores.	31
4.2	Função de Green para cada dimensão.	33
4.3	Representação da distribuição radial dos neurônios.	37
4.4	Série temporal unidimensional para $\gamma = 0,005$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 1001$.	39
4.5	Série temporal unidimensional para $\gamma = 0,05$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 1001$.	39
4.6	Série temporal unidimensional para $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 1001$.	40
4.7	Série temporal bidimensional para $\gamma = 0,005$, $\varepsilon = 0,04$ e $N=51 \times 51$.	40
4.8	Série temporal bidimensional para $\gamma = 0,05$, $\varepsilon = 0,04$ e $N=51 \times 51$.	41
4.9	Série temporal bidimensional para $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0,04$ e $N=51 \times 51$.	42
4.10	Parâmetro de ordem para o caso unidimensional em função da constante de acoplamento ε ($N=1001$).	42
4.11	Parâmetro de ordem para o caso bidimensional em função da constante de acoplamento ε ($N=51 \times 51$).	43
4.12	Frequência de <i>burst</i> para o caso unidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,005$ e $N= 1001$	44
4.13	Frequência de <i>burst</i> para o caso unidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,05$ e $N= 1001$	44
4.14	Frequência de <i>burst</i> para o caso unidimensional para cada valor de α , $\gamma = 1$ e $N= 1001$	45
4.15	Frequência de <i>burst</i> para o caso bidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,005$ e $N= 51 \times 51$	46
4.16	Frequência de <i>burst</i> para o caso bidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,05$ e $N=51 \times 51$	46

4.17	Frequência de <i>burst</i> para o caso bidimensional para cada valor de α , $\gamma = 1$ e $N = 51 \times 51$	47
4.18	Diferença entre a frequência de <i>burst</i> com a frequência externa para os casos unidimensionais	48
4.19	Diferença entre a frequência de <i>burst</i> com a frequência externa para os casos bidimensionais	49
4.20	Travamento de frequência, ou as Línguas de Arnold	50
4.21	Evolução do tamanho do platô (unidimensional) em função da intensidade do forçamento externo para $\gamma = 0,005$ e $N=51$	51
4.22	Evolução do tamanho do platô (unidimensional) em função da intensidade do forçamento externo para $\gamma = 0,05$ e $N=51$	51
4.23	Evolução do tamanho do platô (bidimensional) em função da intensidade do forçamento externo para $\gamma = 0,005$ e $N=7 \times 7$	52
4.24	Evolução do tamanho do platô (bidimensional) em função da intensidade do forçamento externo para $\gamma = 0,05$ e $N=7 \times 7$	52
4.25	Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (unidimensional) $\gamma = 0,005$	53
4.26	Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (unidimensional) $\gamma = 0,05$	54
4.27	Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (unidimensional) $\gamma = 1$	54
4.28	Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (bidimensional) $\gamma = 0,005$	55
4.29	Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (bidimensional) $\gamma = 0,05$	55
4.30	Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (bidimensional) $\gamma = 1$	56
4.31	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede (unidimensional) para $\gamma = 0,005$	56
4.32	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede (unidimensional) para $\gamma = 0,05$	57

4.33	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede (unidimensional) para $\gamma = 1$	58
4.34	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede (bidimensional) para $\gamma = 0,005$	58
4.35	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede (bidimensional) para $\gamma = 0,05$	59
4.36	Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede (bidimensional) para $\gamma = 1$	59
A.1	Região de sincronização.	63
B.1	Curva de integração.	66

Introdução

Vários cientistas se esforçaram para desenvolver modelos matemáticos a fim de descrever funções básicas do cérebro, como a transmissão de informação entre os neurônios através de sinapses ou os fenômenos de disparos de corrente através da membrana celular, e com isso entender as causas de sincronia entre os neurônios, que podem estar por trás das causas de patologias como: Mal de Parkinson e epilepsia [1] [2].

Um dos primeiros a formular um modelo matemático do potencial de ação neuronal, foram Alan Hodgkin e Andrew Huxley. Eles desenvolveram esse modelo a partir de estudos com o axônio gigante da lula, e conseguiram assim descrever o fenômeno de *spikes*, ou disparos do potencial de ação [3].

Outros modelos matemáticos surgiram para tentar descrever o funcionamento dos disparos neuronais, alguns descrevem *spikes* e outros descrevem um outro fenômeno chamado de *burst*, que são disparos sucessivos seguidos por períodos de quiescência [4]. Nicolai Rulkov criou um modelo matemático para descrever estes fenômenos de *bursts* [5]. Neste modelo, ele considerou que cada neurônio é um oscilador com uma frequência de *burst*.

Mikhail V. Ivanchenko *et.al* [6], utilizaram este modelo de Rulkov para simular redes de neurônios acoplados a partir de seus campos médios, observando, assim, fenômenos de sincronia entre eles e maneiras de suprimir estas sincronias a partir de um forçamento externo periódico.

Para tentar se aproximar cada vez mais de um modelo real, R. L. Viana *et.al* [7] trabalharam com o modelo de Rulkov para uma rede de neurônios acoplados por meio de uma difusão de uma substância química na rede, cujo modelo de acoplamento foi proposto inicialmente por Hiroya Nakao[8], e por Yoshiki Kuramoto [9]. R. L. Viana *et.al* em seu trabalho utilizaram esse acoplamento químico unidimensionalmente, determinando sua

série temporal, fase de *burst* e parâmetro de ordem, que mede o grau de sincronia do sistema acoplado. Como a sincronia entre neurônios pode estar por trás de problemas patológicos como Parkinson, entre outros [10], foi tratada uma maneira de suprimir estas sincronia, utilizando um sinal externo periódico, semelhante ao utilizado por Mikhail Ivanchenko *et.al* [6].

Este trabalho é uma continuação do trabalho inicialmente feito por R.L. Viana *et.al* [7]. Foram obtidos alguns resultados novos para o caso unidimensional, como a influência do tamanho da rede neuronal e da quantidade de neurônios submetidos a um forçamento externo, no tamanho da largura dos platôs de sincronia e reproduzidos alguns resultados para uma região maior de neurônios submetidos ao forçamento externo. Foi abordada, também, uma rede na qual os neurônios estão distribuídos em um espaço bidimensional, determinando sua dinâmica individual, como também a dinâmica coletiva a partir do acoplamento não local pela difusão de uma substância química. Foi analisado para o caso bidimensional, através da evolução do parâmetro de ordem, para quais valores da intensidade de acoplamento ocorre sincronia e para quais não ocorre. A partir disso foi utilizado o forçamento externo para suprimir a sincronia, determinando assim os platôs de sincronia, tanto no caso do sistema sincronizado, como no caso do sistema dessincronizado. Outra análise feita é de como ocorre a mudança da largura dos platôs de sincronia com a mudança da frequência e da intensidade do forçamento externo, determinando assim as línguas de Arnold, como também a influência do tamanho da rede.

Esse trabalho será dividido da seguinte maneira:

O capítulo 2 abordaremos o modelo desenvolvido por Yoshiki Kuramoto [11], [12] que descreve um conjunto de osciladores acoplados, determinaremos assim sua fase, bem como a definição do parâmetro de ordem, que mostra se o sistema está sincronizado ou não, que são ferramentas a serem utilizadas no modelo de Rulkov.

O capítulo 3 trataremos do modelo de Rulkov, suas equações e simulações numéricas, sua série temporal e uma maneira de determinar uma fase para este sistema. Baseado no artigo de Mikhail V. Ivanchenko [6], trabalharemos com um acoplamento global a partir de um campo médio, observaremos quando acontece sincronia dos neurônios, e a maneira de suprimir a sincronia, através de um modelo já utilizado por outros pesquisadores citados, ou seja, um pulso externo periódico. Com isso, queremos observar quando o modelo sai da sincronia e quando o forçamento externo intensifica a sincronia.

No capítulo 4 abordaremos o modelo de Rulkov com acoplamento entre neurônios a partir da difusão de uma substância química; reproduziremos os resultados do aco-

plamento unidimensional já obtidos por R. L Viana *et.al* [7], e obteremos dados novos baseados no artigo de Mikhail Ivanchenko *et.al* [6]; estudaremos o modelo de Rulkov com o acoplamento químico em duas dimensões e compararemos os resultados unidimensionais e bidimensionais.

Modelo de Kuramoto

2.1 Introdução

O modelo de Kuramoto é um modelo matemático que descreve a sincronização entre osciladores. A sincronia foi inicialmente estudada por Christiaan Huygens (1629-1695), um cientista holandês que contribuiu para várias áreas, como Física, Matemática, Astronomia e Horologia, sendo mais conhecido pela criação dos relógios de pêndulo, porém, também foi o descobridor da lua Titã de Saturno, bem como o primeiro a começar os estudos sobre os anéis de Saturno sendo que, para isso, teve que aprimorar o telescópio [13].

Em uma viagem de navio, com o intuito de determinar a longitude com precisão, Huygens percebeu que um conjunto de relógios de pêndulos sobre um mesmo suporte sincroniza, isto é, suas oscilações coincidem perfeitamente, mesmo se inicialmente seus movimentos forem diferentes. Intrigado com isso, numa época em que ele esteve doente, Huygens pediu para que fosse colocado em seu quarto um sistema de dois relógios de pêndulos presos a uma haste em comum (Figura 2.1). Com isso ele percebeu que a sincronização se deve ao movimento da haste que conecta os dois pêndulos. Inicialmente este fenômeno foi chamado por Huygens como simpatia de dois relógios e mencionado pela primeira vez em 1665, em uma carta para seu pai [13].

Com o passar do tempo, foram observados vários fenômenos na natureza em que também acontecia o fenômeno de sincronização, tais como: ciclo menstrual [14], células marca-passo no coração [15], sincronização de *flash* dos vaga-lumes [16], entre outros [17]. Para se entender melhor sobre sincronia e os mecanismos por trás deste fenômeno é necessário desenvolver um modelo matemático.

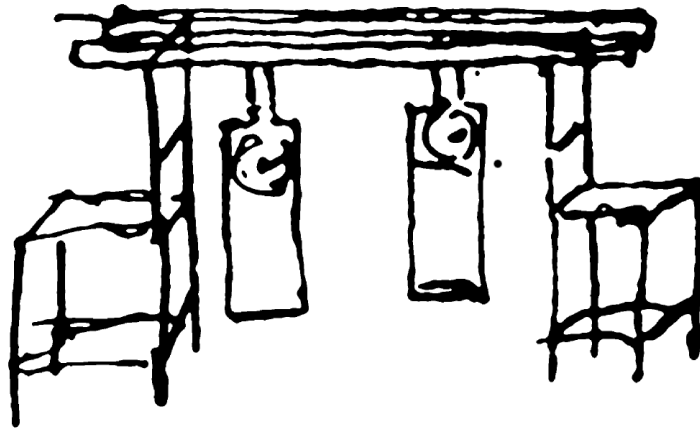


Figura 2.1: Desenho original feito por Christiaan Huygens ilustrando seu experimento com dois relógios de pêndulo colocados em um suporte comum. Figura retirada de [13]

Após várias pesquisas sobre a dinâmica não linear de sistemas de um conjunto de osciladores acoplados, Arthur Winfree reconheceu que para problemas biológicos seria necessária uma nova abordagem [18]. Nos modelos físicos, como no problema de muitos corpos, os osciladores eram considerados como idênticos e conservativos, porém num modelo biológico, os osciladores são autossustentáveis e não idênticos. Em um oscilador autossustentável sua trajetória é fechada e estável (também chamada de ciclo limite). Esta abordagem de Winfree foi apropriada, pois em um sistema biológico, se perturbado, ele retorna para o seu ciclo padrão, enquanto que num sistema conservativo, *i.e.*, um sistema na qual a energia total do sistema é conservada, uma perturbação faz com que a dinâmica do sistema mude, pois essa perturbação faz com que a energia total do sistema mude.

Arthur Winfree publicou em 1967 [19] um trabalho que fez com que a comunidade científica tivesse uma nova maneira de pensar sobre o problema. Engenheiros e matemáticos tinham explorado o caso de um simples oscilador, com um período natural T , sobre a influência de um sinal externo de período T_0 , e eles sabiam que para $|T - T_0|$ suficientemente pequeno, o oscilador sincronizaria com o sinal externo. Winfree considerou um caso com uma grande população de osciladores com interação fraca entre eles e cada oscilador com um período T distribuído aleatoriamente. Ele percebeu que para um acoplamento fraco, os osciladores eram dessincronizados, porém com o aumento deste acoplamento, a população de osciladores abruptamente saía do regime não sincronizado para o regime sincronizado. Estes resultados divulgados por Winfree levaram muitos cientistas a examinar a interação de osciladores acoplados em diversas áreas [20].

2.2 Definição de Fase e parâmetro de ordem

Movimentos oscilatórios são movimentos que se repetem depois de um certo tempo. Eles podem ser representados em uma trajetória fechada, Γ , chamada de ciclo limite. Uma vez definido o ciclo limite, podemos determinar uma função contínua Ω , que pega cada ponto desta curva Γ e transforma em um círculo unitário U , ou seja, podemos escolher um ponto inicial de Γ e chamá-lo de x_0 . A função ξ é tal que o ponto x_0 em Γ é transformado em $\theta = 0$ no círculo unitário U (Figura 2.2). Com isso, a dinâmica do ciclo limite original é transformado em um oscilador de fase

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (2.1)$$

onde θ é a fase relativa e x_0 e ω é a velocidade de fase [21].

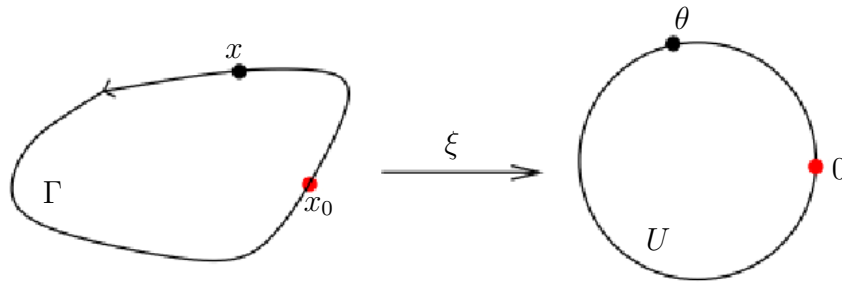


Figura 2.2: Podemos descrever a trajetória de um sistema oscilatório como uma curva fechada Γ chamada de ciclo limite, e assim aplicar uma função ξ para transformá-la em um círculo unitário U .

Num conjunto de osciladores, uma maneira de medir o comportamento coletivo é através do grau de sincronia. Podemos ter osciladores que estão espalhados através do círculo em fases bem diferentes, chamamos estes osciladores de osciladores em deriva (vide Figura 2.3a). Em contraste, se todos osciladores estão ao redor do círculo com a mesma fase, dizemos então que eles estão sincronizados, ou travados. Porém podemos ter graus leves de sincronia, como quando os osciladores estão ao redor do círculo, aproximadamente em fase (vide Figura 2.3 b). Para medir este grau de sincronia é utilizado o parâmetro de ordem de Kuramoto, que é definido como:

$$z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2.2)$$

onde θ_j é a fase do j -ésimo oscilador.

Para entender o que é o parâmetro de ordem, podemos imaginar que cada oscilador é representado por um vetor da origem até a sua posição no círculo complexo. O parâmetro de ordem é uma soma de todos os vetores dos osciladores, e através da norma deste parâmetro de ordem, isto é $|z| = R$, que terá valor máximo de 1, podemos determinar a “intensidade” da sincronia. Isso pode ser observado na Figura 2.3. Nesta figura temos o caso de todos os osciladores com suas fases distribuídas ao redor do círculo no plano complexo e seu vetor resultante. O módulo deste vetor resultante nos mostra a intensidade da sincronia, quanto mais próximo de zero está este módulo, menos sincronizados estão os osciladores (Figura 2.3 a). Em contrapartida, quanto mais próximo de 1, mais sincronizados eles se encontram (Figura 2.3 b).

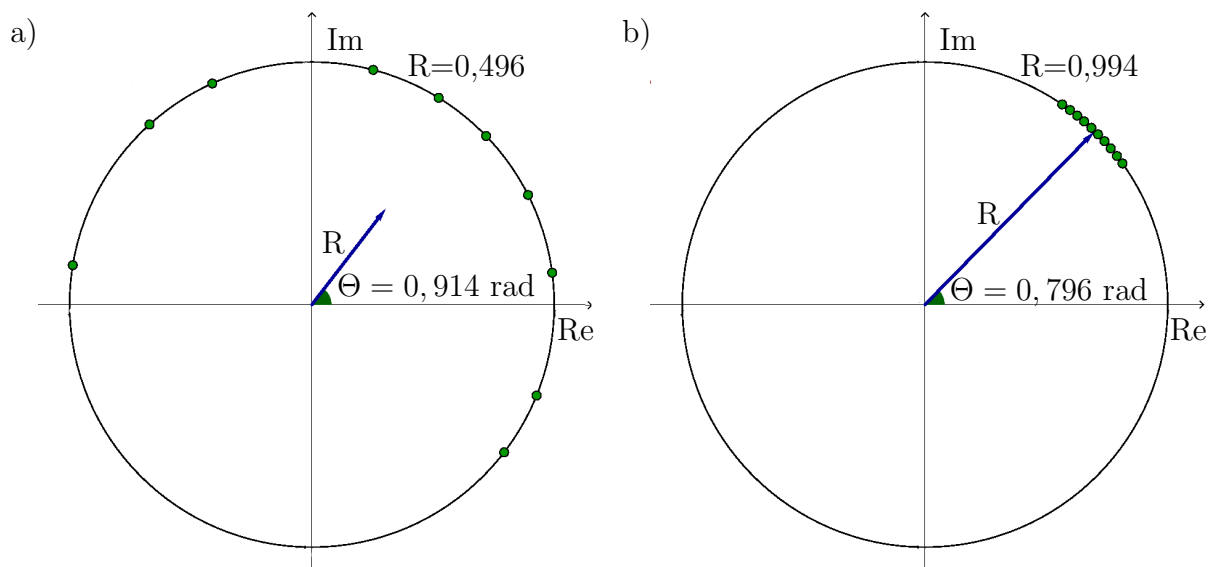


Figura 2.3: Representação do parâmetro de ordem em maneira vetorial em um círculo unitário. Re é o eixo real e Im o imaginário. Na Figura a temos todos osciladores com suas fases distribuídas ao redor do círculo, ou seja, um caso de não sincronia, e com isso o módulo do vetor soma é próximo de zero. Na figura b temos os osciladores com suas fases bem próximas, o que faz com que o módulo do vetor seja próximo a 1. Figura adaptada de [22].

2.3 Modelo de Kuramoto

Inspirado pelos resultados obtidos por Arthur Winfree, em 1975, Yoshiki Kuramoto [23] começou a trabalhar com sincronização coletiva, sendo que seu primeiro trabalho sobre o tema, foi uma breve nota anunciando resultados exatos, que seriam mais tarde chamados de Modelo de Kuramoto. Nos anos seguintes Kuramoto continuou a trabalhar

com o modelo, tentando refiná-lo, mas sempre encontrando novas questões. Assumindo que para qualquer sistema fracamente acoplado, e osciladores com ciclo limites quase idênticos, a dinâmica do sistema é dada por uma equação de fase que segue a forma [24]

$$\Omega = \dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad (2.3)$$

onde ω_i é a frequência natural do sistema, Ω é a frequência de fase, θ é a fase e Γ é a função de interação. Kuramoto percebeu que a maneira mais simples de trabalhar com a Equação (2.3) é quando

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad (2.4)$$

que é assumindo um termo de interação a partir de um campo médio. K é a intensidade desta interação e o termo $\frac{1}{N}$ é para que a função seja bem comportada no limite termodinâmico, ou seja, $N \rightarrow \infty$, com isso podemos reescrever modelo de Kuramoto como

$$\Omega = \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_i). \quad (2.5)$$

2.4 Evolução do parâmetro de ordem

Utilizando o parâmetro de ordem dado pela Equação (2.2), podemos reescrever a Equação (2.5) de tal maneira que o trabalho torna-se menos árduo. O parâmetro de ordem pode ser reescrito de uma maneira mais geral como

$$z = R e^{i\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2.6)$$

multiplicando por $e^{-i\theta_i}$ e utilizando a fórmula de Euler, podemos reescrever ainda como

$$R \cos(\Theta - \theta_i) + iR \text{sen}(\Theta - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\cos(\theta_j - \theta_i) + i \text{sen}(\theta_i - \theta_j)), \quad (2.7)$$

Observando a parte complexa do termo da direita, vemos que é igual ao termo em seno da Equação (2.5), com isso podemos reescrevê-la como

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + KR \text{sen}(\Theta - \theta_i). \quad (2.8)$$

Para melhor análise da Equação (2.8) é preciso assumir soluções estacionárias, ou

seja, $R(t)$ e $\Theta(t)$ rotaciona uniformemente com uma frequência $\dot{\theta} = \Omega$. Assumindo um referencial girando com frequência Ω e escolhendo a origem deste referencial corretamente, podemos assumir $\Theta = 0$ sem perda de generalidade [24], com isso podemos reescrever a Equação (2.8) da seguinte forma

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - KR \text{sen}(\theta_i). \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) tem dois tipos de soluções. Uma solução é quando temos o caso em que $|\omega_i| \leq KR$, com isso os osciladores se aproximam ao ponto fixo estável, definido como

$$\omega_i = KR \text{sen}(\theta_i). \quad (2.10)$$

Desta forma temos osciladores travados com uma frequência Ω no referencial original. Outra solução é quando $|\omega_i| > KR$, neste caso os osciladores estão à deriva, eles percorrem através do círculo unitário de uma maneira não uniforme.

A primeira coisa a se estranhar é o fato de termos osciladores à deriva, se inicialmente foi assumido que R e Θ são constantes. Kuramoto contornou este problema assumindo que os osciladores à deriva formam uma distribuição estacionária ao redor do círculo [24].

Vamos denotar por $\rho(\theta, \omega)d\theta$ como sendo a fração de osciladores com frequência ω que estão entre θ e $\theta + d\theta$. A estacionaridade requer que $\rho(\theta, \omega)$ seja inversamente proporcional à velocidade de fase $\dot{\theta}$, com isso os osciladores se acumulam em lugares lentos e se diluem em lugares rápidos do círculo. Logo

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\dot{\theta}|} = \frac{C}{|\omega - KR \text{sen} \theta|}. \quad (2.11)$$

A constante de normalização C é determinada por $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega)d\theta = 1$ para cada ω , com isso

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (KR)^2}. \quad (2.12)$$

Para este caso foram identificados dois grupos de osciladores: os osciladores travados, que estão oscilando com as mesmas frequências, e os osciladores à deriva, que são os que estão espalhados ao redor do círculo com frequências diferentes. Com isso, podemos escrever a média do parâmetro de ordem como sendo a soma da média dos osciladores à

deriva com a média dos osciladores travados, logo

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{travado}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deriva}}, \quad (2.13)$$

como foi assumido que $\Theta = 0$, temos que $\langle e^{i\theta} \rangle = R e^{i\Theta} = R$, assim

$$R = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{travado}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deriva}}. \quad (2.14)$$

Dessa forma, podemos resolver separadamente as contribuições. Primeiramente, será resolvido para o termo em deriva.

Assumindo uma distribuição de frequências $g(\omega)$ que seja simétrica, com isso $g(\omega) = g(-\omega)$ o termo de deriva pode ser escrito como

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deriva}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega|KR}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta, \quad (2.15)$$

que pode ser escrito como uma soma de duas integrais

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deriva}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{-KR} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{KR}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (2.16)$$

Na primeira integral podemos fazer a seguinte mudança de variável, $\omega = -\omega'$, com isso $d\omega = -d\omega'$ e mudando os índices de integração para ficar de acordo com esta mudança

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\infty}^{KR} e^{i\theta} \rho(\theta, -\omega') g(-\omega') d\omega' d\theta. \quad (2.17)$$

De acordo com a Equação (2.11), podemos observar que, $\rho(\omega, \theta) = \rho(-\omega, -\theta)$ para a integral acima conter este termo, uma outra mudança de variável é necessária. Fazendo a mudança $\theta' = \theta - \pi$ temos

$$- \int_{-2\pi}^0 \int_{\infty}^{KR} e^{i\theta'} e^{i\pi} \rho(\theta' + \pi, -\omega') g(-\omega') d\omega' d\theta', \quad (2.18)$$

como $e^{i\pi} = -1$ e $\rho(\omega' + \pi, -\theta) = \rho(-\omega', -\theta) = \rho(\omega, \theta)$ e $g(\omega) = g(-\omega)$, a integral se torna

$$\int_{-2\pi}^0 \int_{\infty}^{KR} e^{i\theta'} e^{i\pi} \rho(\theta', \omega') g(\omega') d\omega' d\theta' = - \int_{-2\pi}^0 \int_{KR}^{\infty} e^{i\theta'} e^{i\pi} \rho(\theta', \omega') g(\omega') d\omega' d\theta'. \quad (2.19)$$

Por causa das condições de contorno periódicas em θ , isto é, os valores de θ estão restritos em um círculo periódico, podemos deslocar a integração em π sem mudar nada,

e com isso reescrever a integral como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\infty}^{KR} e^{i\theta'} e^{i\pi} \rho(\theta', \omega') g(\omega') d\omega' d\theta', \quad (2.20)$$

que é exatamente a mesma da segunda integral da Equação (2.16), logo o valor médio do parâmetro de ordem para o termo em deriva é zero.

Para os osciladores travados temos que $\sin(\theta) = \frac{\omega}{KR}$ e com isso $d\omega = KR \cos(\theta) d\theta$ de acordo com a Equação (2.10), e que para $N \rightarrow \infty$ a distribuição dos osciladores travados estão simétricos ao redor de $\theta = 0$ e por causa que $g(\omega) = g(-\omega)$ temos a mesma quantidade de osciladores em θ e em $-\theta$. Com isso $\langle \sin(\theta) \rangle_{\text{travados}} = 0$, logo somente os termos em cosseno que contribuem para a média dos osciladores travados, e com isso a média do parâmetro de ordem para os osciladores travados torna-se

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{travados}} = R = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) g(KR \sin(\theta)) KR \cos(\theta) d\theta, \quad (2.21)$$

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(KR \sin(\theta)) d\theta. \quad (2.22)$$

Para resolver a integral acima podemos supor duas situações, uma para $R = 0$, que é o caso em que todos os osciladores estão dessincronizados, e através da Equação (2.11) temos que $\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}$, isso significa que os osciladores estão distribuídos ao redor do círculo. Outra situação é quando $R = 1$ com isso todos os osciladores estão travados, deste modo temos

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(K \sin(\theta)) d\theta. \quad (2.23)$$

Winfree percebeu que com o aumento da intensidade do acoplamento, o parâmetro de ordem sai abruptamente do estado não sincronizado para o estado sincronizado, com isso existe um valor crítico (K_c) para K que indica quando o sistema sai do estado não sincronizado para o estado sincronizado. Para determinar esse valor matematicamente podemos utilizar a integral dada pela Equação (2.23) e fazer $R \rightarrow 0^+$, logo

$$1 = K_c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) g(0) d\theta, \quad (2.24)$$

integrando e isolando K_c

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.25)$$

Como $g(0)$ é uma distribuição de frequência dos osciladores, esta distribuição pode ser qualquer, mas foi visto que para uma distribuição de Lorentz podemos ter um resultado analítico para K_c , a distribuição de Lorentz é

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 - \omega^2)}, \quad (2.26)$$

substituindo (2.26) em (2.23) e integrando temos [25] [24]

$$R = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}. \quad (2.27)$$

Para determinar analiticamente o valor do ponto crítico K_c , podemos substituir a Equação (2.26) na Equação (2.25) e obter um $K_c = 2\gamma$. Para este trabalho será utilizado um $\gamma = 0.5$, e com isso tem-se um $K_c = 1$.

2.4.1 Resultados Numéricos

Através da Equação (2.5) e utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, podemos integrar e obter o estado dos osciladores. Através do parâmetro de ordem, podemos determinar como é sua evolução numericamente e observar se condiz com o resultado obtido na Equação (2.27).

Para esta simulação foi utilizada uma distribuição de frequências dada pela Equação (2.26) com $\gamma = 0,5$, para podermos comparar com o resultado numérico dado pela Equação (2.27).

A fase e a frequência dos osciladores são mostradas na Figura 2.4. Para esta figura foi utilizada a Equação (2.8), com uma rede de $N = 1000$ osciladores e integrado por 500002 tempos, sendo que 500000 tempos foram descartados para que o sistema estabilize. O passo de integração utilizado foi de 0,01, com isso o total de tempos plotados são de 200.

Na Figura 2.4 é observado que para uma interação fraca $K = 0,7$ a fase dos osciladores (Figuras 2.4(a)) estão distribuídos entre 0 e 2π , e os osciladores tem frequências diferentes (Figura 2.4(d)), com o aumento do acoplamento ($K = 1$ na Figura 2.4(b) e na Figura 2.4(e)). Observa-se que alguns osciladores começam a travar, ou seja, são osciladores que têm as fases próximas (Figura 2.4(b) e Figura 2.4(c)) e estão oscilando com frequências

iguais (parte plana da Figura 2.4 (e) e Figura 2.4(f)) caracterizando, nessas situações, a sincronização de frequência.

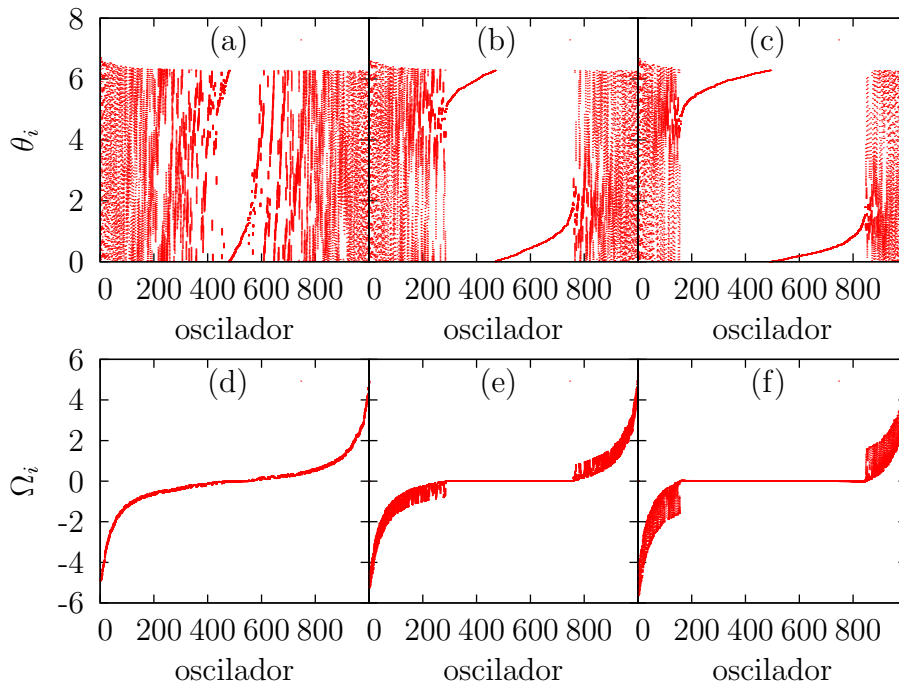


Figura 2.4: Fase e frequência dos osciladores para um conjunto de $N = 1000$ osciladores. De (a) a (c) temos a fase de cada oscilador, em (a) temos $K = 0,7$, em (b) $K = 1,0$ e em (c) $K = 1,3$. De (d) a (f) são mostradas as frequências dos mesmos sistemas. Ambos os casos são mostrados os osciladores organizados a partir de suas frequências, da menor para a maior.

A transição do estado de não sincronia para o estado de sincronia pode ser observada na Figura 2.5. Para esta figura foi utilizada a Equação (2.6), e fazendo os valores de K variar de zero a 6 podemos observar que o sistema tem inicialmente um estado não sincronizado, e a partir de um K aproximadamente igual a 1, o que condiz com o resultado obtido pela Equação (2.27), o sistema sai do estado não sincronizado e alguns osciladores começam a sincronizar, sendo que esta mudança se torna mais visível para um aumento do tamanho da rede. Se N cresce as curvas simuladas tendem a se aproximar da curva teórica, sendo que para $N \rightarrow \infty$ a curva teórica coincide com a curva simulada.

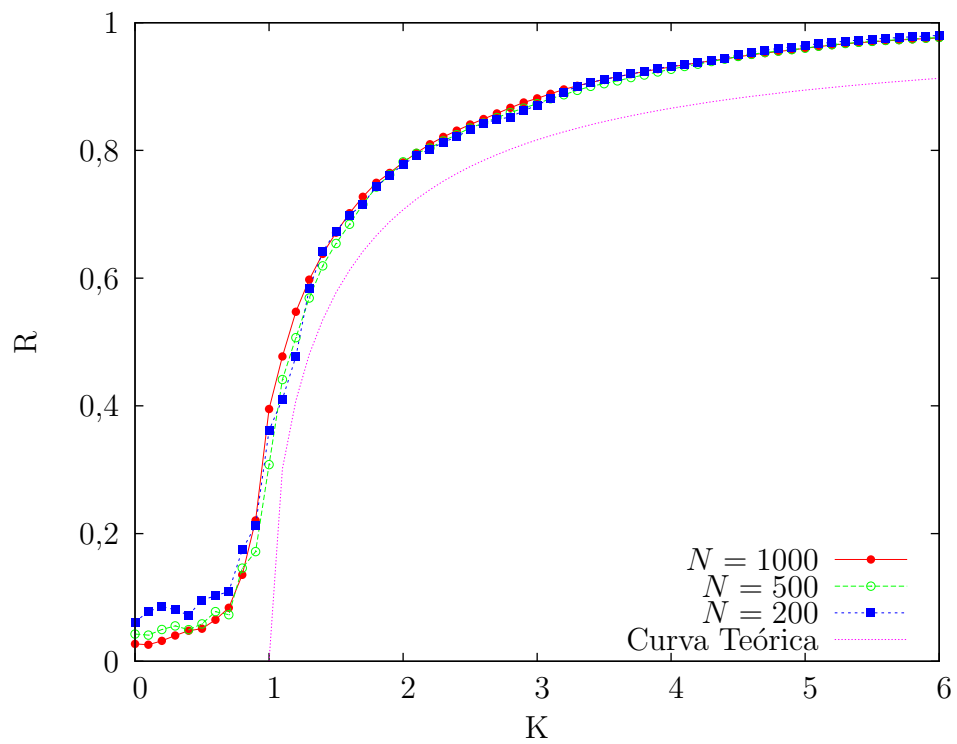


Figura 2.5: Simulação numérica do parâmetro de ordem para vários tamanhos de rede (linhas com pontos) e a curva teórica dada pela Equação (2.27).

Mapa de Rulkov

3.1 *Spike e Burst*

A dinâmica neuronal foi estudada matematicamente por Alan Lloyd Hodgkin e Andrew Huxley, ganhadores do prêmio Nobel de Fisiologia em 1952 por esse estudo. Os neurônios armazenam uma quantidade de íons até um certo limiar, e quando esse limiar é atingido, eles liberam uma corrente elétrica.

Existem neurônios que apresentam um comportamento de *spike*, que é quando o neurônio dispara somente uma vez, similar ao que acontece com a descarga de um capacitor. Existem também neurônios que possuem um comportamento de *burst*, que é uma dinâmica na qual o neurônio dispara um grupo discreto de disparos seguidos por um período de quiescência, antes do próximo conjunto de disparos ocorrer (Figura 3.2).

Em quase todos os neurônios pode ocorrer *burst*, se estimulados ou manipulados farmacologicamente [26] [27]. Muitos *bursts* ocorrem de maneira autônoma, através da ação de correntes iônicas rápidas, responsáveis pela atividade dos disparos, e correntes lentas, que modulam essa atividade. Alguns exemplos desses neurônios são [28]:

- Neocortex
 - CH (*Chattering neurons*): Neurônios com alta frequência de *burst* e com um período de quiescência curto (Figura 3.2 a)).
 - IB (*Intrinsically bursting*): Neurônio de *burst* intrínseco, se estimulado com um longo pulso de corrente dc, dispara um *burst* inicial seguido por pequenos *burst* (Figura 3.2 c)).

- Tálamo
 - TC: Neurônios Tálamo-corticais podem disparar *burst* se inibidos e, em seguida, liberar-se da inibição (Figura 3.2 b)).
 - RTN: Núcleo reticular talâmico, são neurônios inibitórios que têm propriedades de *burst*, similar às células TC.
- Neurônios respiratórios do complexo de pré-Bötzinger, disparam *burst* ritmados que controlam o ciclo de respiração (Figura 3.2 d)).

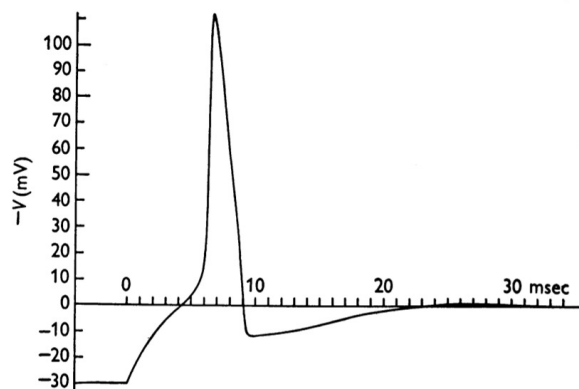


Figura 3.1: *Spike* Neuronal. Figura retirada de [29].

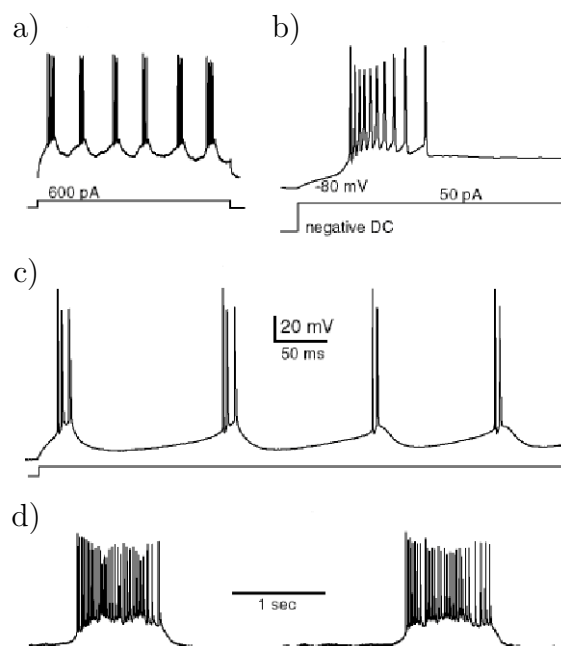


Figura 3.2: Tipos de *burst* para diferentes neurônios; a) são *burst* de neurônios cortical CH (*in vivo*); b) são de neurônios do Tálamo-cortical TC (*in vivo*); c) são neurônios corticais IB (*in vitro*); d) são neurônios do complexo pré-Bötzinger (*in vitro*). Figura retirada de [30].

Alguns neurônios podem disparar se estimulados com uma corrente externa, que lentamente faz com que o potencial da membrana passe por um certo limiar. Esse tipo de corrente pode ser injetado através de um eletrodo ou então é gerado por uma sinapse, que conecta dois ou mais neurônios.

Alguns tipos de neurônios possuem uma corrente de membrana intrínseca, que pode modular a atividade dos disparos rápidos. Tipicamente, a corrente se acumula durante disparos sucessivos, hiperpolarizando a célula e ocasionando uma sucessão de disparos. Enquanto a célula está quiescente, a corrente decai lentamente, a célula se recupera e com isso está pronta para um novo *burst*.

Para cada mecanismo iônico de *burst* é necessário um modelo matemático diferente. Portanto, muitos esforços têm sido feitos para estudar e classificar a dinâmica de *burst*.

Vários modelos matemáticos para *burst* podem ser escritos na forma rápida-lenta

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \text{disparos rápidos,} \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad \text{modulação lenta,} \quad (3.2)$$

onde x é a variável rápida que descreve os disparos, e está relacionado ao potencial de membrana, y a variável lenta que modula os disparos, f e g são equações que descrevem a dinâmica neuronal.

Existem modelos matemáticos que ao invés de trabalhar com equações diferenciais, trabalham com modelos discretos, ou mapas, porém mantém o mesmo formato, nos quais uma variável rápida é responsável por descrever os disparos, e uma variável lenta que modula esses disparos. Um desses modelos matemáticos, e que será usado nesse trabalho, é o modelo de Rulkov.

3.2 Mapa de Rulkov

Os *bursts* no mapa de Rulkov ocorrem através de bifurcações e estabilidade dos pontos fixos, e as equações que governam o mapa são dada por:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + y_n, \quad (3.3)$$

$$y_{n+1} = y_n - \sigma x_n - \beta,$$

x é chamada de variável rápida, que dá origem aos *bursts* (e pode ser interpretado como o potencial da membrana) e é dependente de α que dá a característica dos *burst*. y é chamada de variável lenta, e é responsável pelo controle do início e término dos *burst*. A evolução lenta de y é devida a valores pequenos dos parâmetros β e σ , que é 0,001. Os índices n indicam que as variáveis são do tempo atual e os índices $n + 1$ indicam que seus valores no tempo seguinte.

Podemos ver como α modifica a dinâmica dos *bursts*, simulando a série temporal para alguns valores de α . Sabe-se que somente ocorrem os *burst* para valores entre $4,0 < \alpha < 4,4$ [5]. Na Figura 3.3 a dinâmica do sistema é mostrada para $\alpha = 4,1$, e pode-se observar que a duração dos *bursts* são bem semelhantes, assim como o intervalo entre cada *burst*. Aumentando o valor $\alpha = 4,3$ (Figura 3.4), observa-se já uma modificação no intervalo e tempo de *burst*, a irregularidade na frequência de *burst* começa a ficar mais evidente. Para um $\alpha = 4,5$ (Figura 3.5) o sistema já deixa de ter uma dinâmica de *burst*, pois não se pode determinar quando temos um começo de *burst* e sua duração.

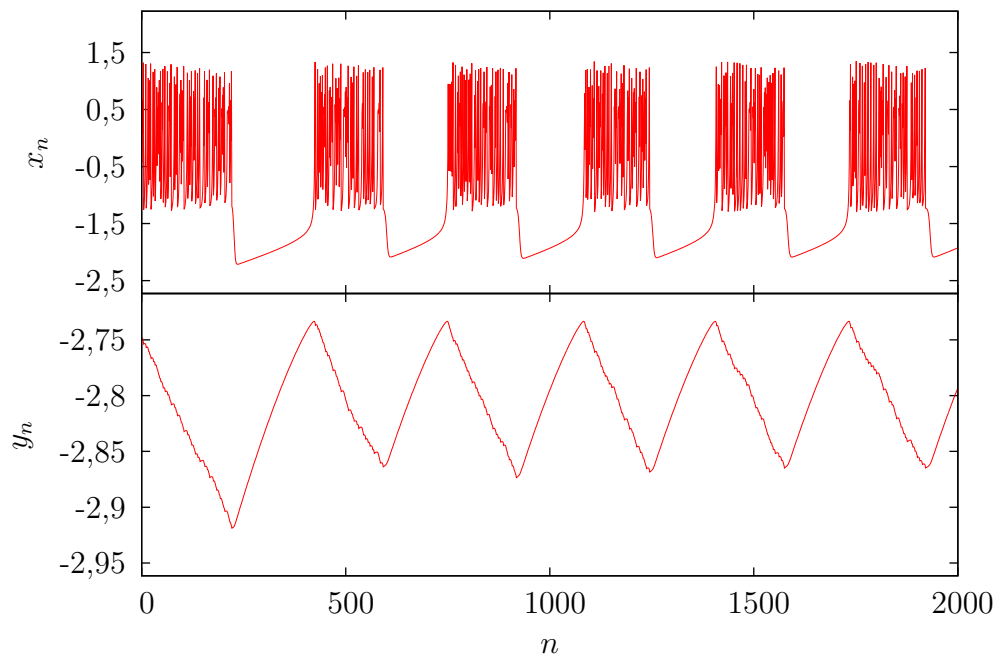
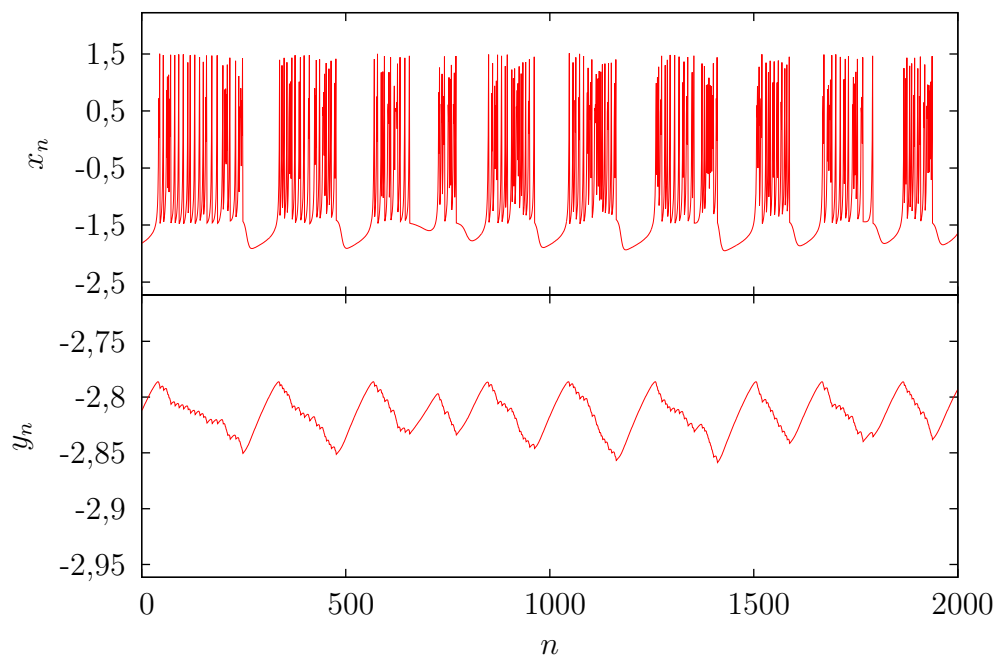
Para poder observar melhor a irregularidade na frequência, devemos primeiramente determinar o início de cada *burst* com uma boa precisão. Observando a Figura 3.6, vemos que o início de cada *burst* é caracterizado quando a variável lenta atinge o seu valor máximo, algo que podemos determinar com mais precisão do que determinar o início de cada *burst*. Para determinar esse máximo devemos tomar cuidado, pois quando a variável lenta vai do seu valor mínimo para seu valor máximo, a dinâmica é “suave”, porém quando a variável lenta vai do seu valor máximo para o seu mínimo, a sua dinâmica é irregular, o que faz com que possa ser detectados falsos máximos neste intervalo (vide Figura 3.3 e Figura 3.4). Determinados os máximos, e conseqüentemente o início de cada *burst*, observa-se que o intervalo entre cada início não é o mesmo.

Considerando cada máximo como sendo $n_k, n_{k+1} \dots$, podemos determinar uma fase como sendo,

$$\phi(n) = 2\pi k + 2\pi \frac{(n - n_k)}{(n_{k+1} - n_k)} \quad (n_k \leq n \leq n_{k+1}), \quad (3.4)$$

e a partir disto a sua frequência como

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n) - \phi(0)}{n}. \quad (3.5)$$

Figura 3.3: Dinâmica do Mapa de Rulkov para $\alpha = 4, 1$.Figura 3.4: Dinâmica do Mapa de Rulkov para $\alpha = 4, 3$.

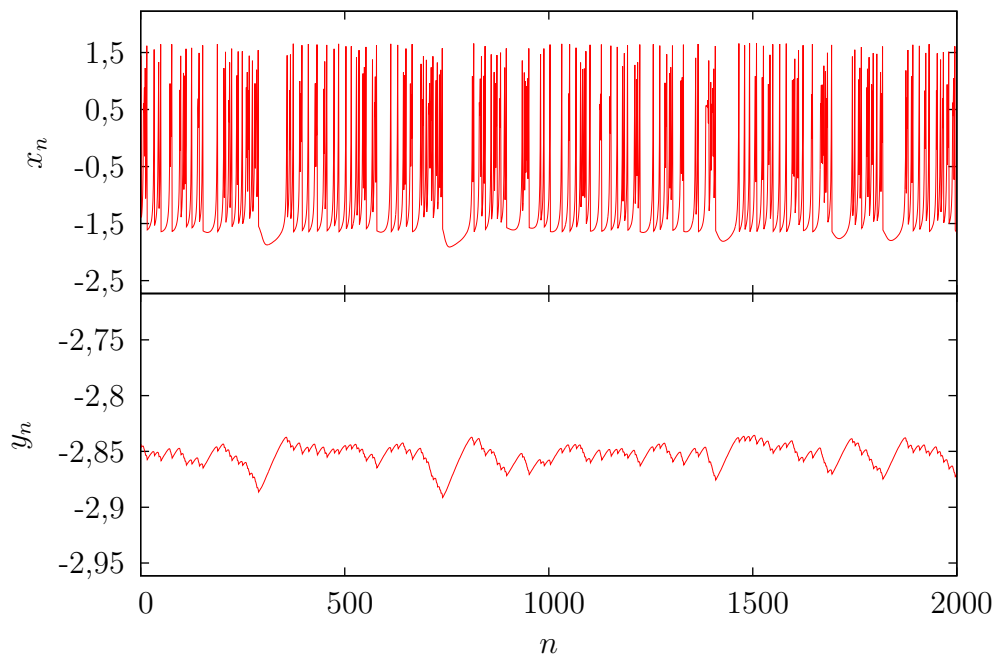


Figura 3.5: Dinâmica do Mapa de Rulkov para $\alpha = 4, 5$.

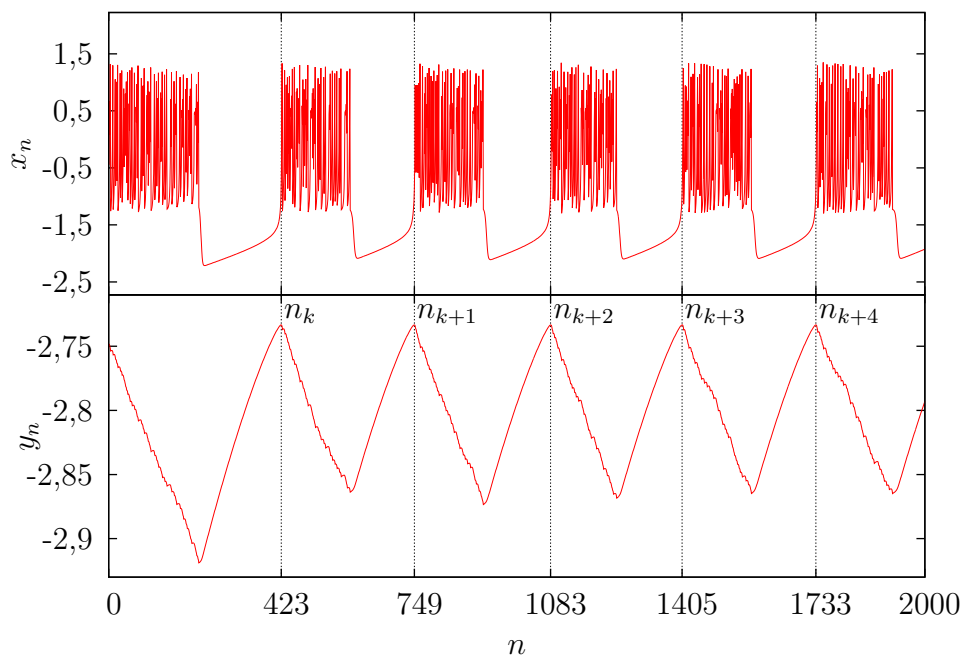


Figura 3.6: Quando a variável lenta y atinge um máximo, tem-se o início do *burst*, podendo assim definir uma fase de burst $\phi(n)$.

3.3 Acoplamento

A Equação (3.3) descreve a dinâmica de um neurônio isolado, mas no cérebro temos vários neurônios trabalhando em conjunto, *i.e.*, existe um acoplamento entre cada

neurônio. De maneira análoga ao utilizado por Kuramoto na Equação (2.4), *i.e.*, um acoplamento entre os neurônios através do campo médio, temos [5]

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\alpha}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)}, \quad (3.6)$$

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} - \beta. \quad (3.7)$$

onde ε é o parâmetro que indica a intensidade do acoplamento entre os neurônios, e o termo do somatório é o que determina o campo médio do sistema, que será denominado como \bar{x}_n . Através do conjunto de Equações (3.6) e (3.7) podemos simular vários neurônios e observar o que acontece com sua dinâmica individual e coletiva. Esta simulação foi feita para um conjunto de 1000 neurônios e α , que faz com que cada neurônio seja diferente, é distribuído uniformemente entre $[4, 1 : 4, 4]$. A simulação foi feita com 80000 iterações, porém 60000 foram descartados para que o sistema estabilizasse. Como só foram utilizados valores a partir de 60000 iterações, podemos setar esse valor como $n = 0$.

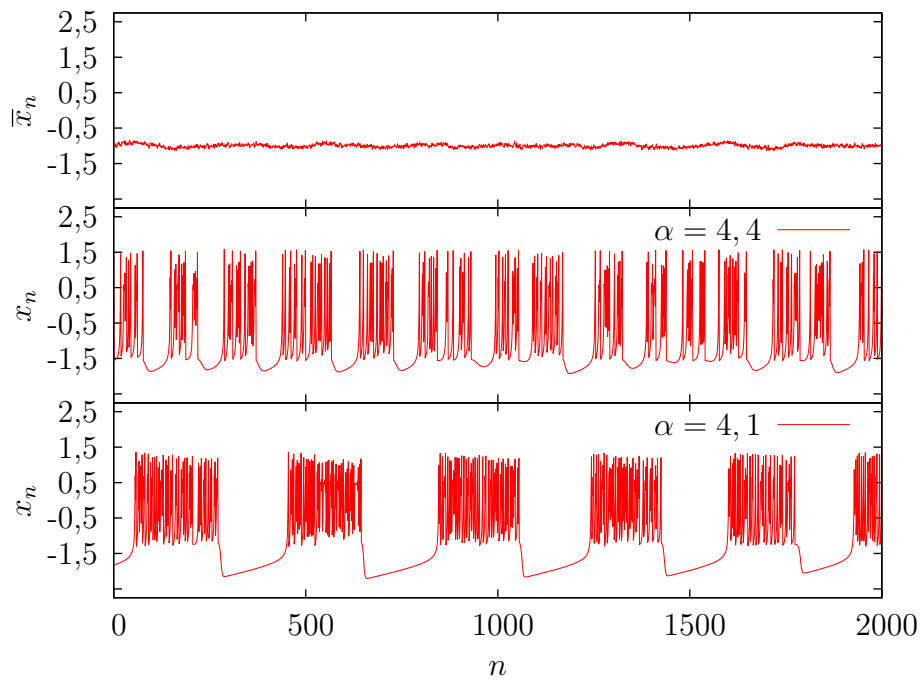


Figura 3.7: Campo médio(\bar{x}_n) e perfil do *burst* para dois neurônios de uma rede de $N = 1000$ neurônios acoplados, um neurônio com $\alpha = 4, 1$ e outro com $\alpha = 4, 4$; $\varepsilon = 0$.

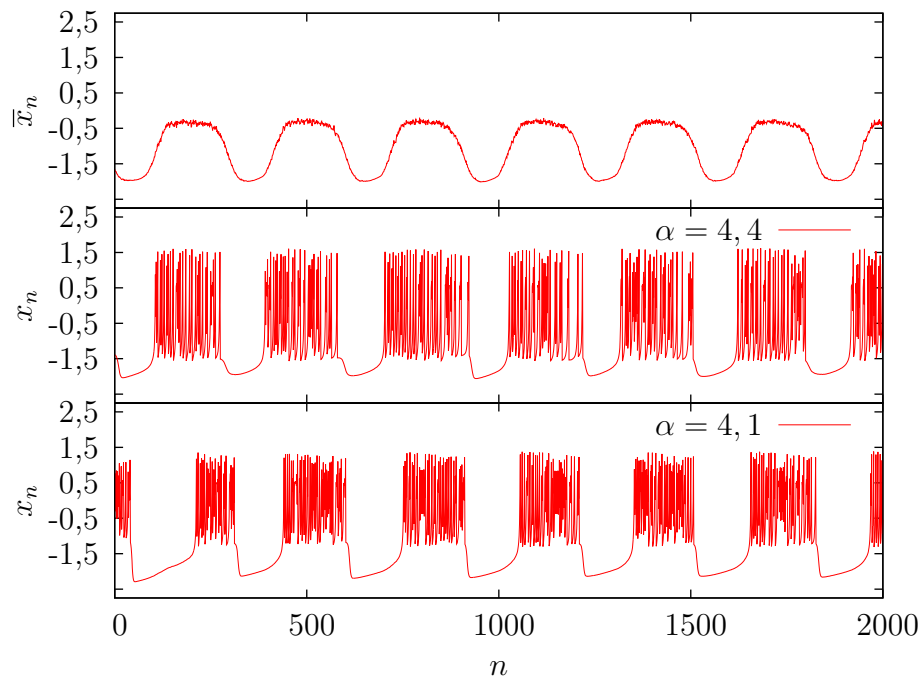


Figura 3.8: Campo médio (\bar{x}_n) e perfil do *burst* para dois neurônios de uma rede de $N = 1000$ neurônios acoplados, um neurônio com $\alpha = 4, 1$ e outro com $\alpha = 4, 4$; $\varepsilon = 0, 04$.

Para acoplamentos fracos a amplitude do campo médio do sistema é pequena, ou seja, a interação entre eles é fraca e faz com que a dinâmica de um neurônio não seja influenciada pela dinâmica de outro, como pode ser visto na dinâmica individual de dois neurônios na Figura 3.7. O aumento da intensidade de acoplamento faz com que a dinâmica do sistema seja mais coletiva, como pode ser visto na Figura 3.8, a amplitude do campo médio do sistema aumenta e a dinâmica de dois neurônios, com valores de α diferentes, se tornam muito semelhantes.

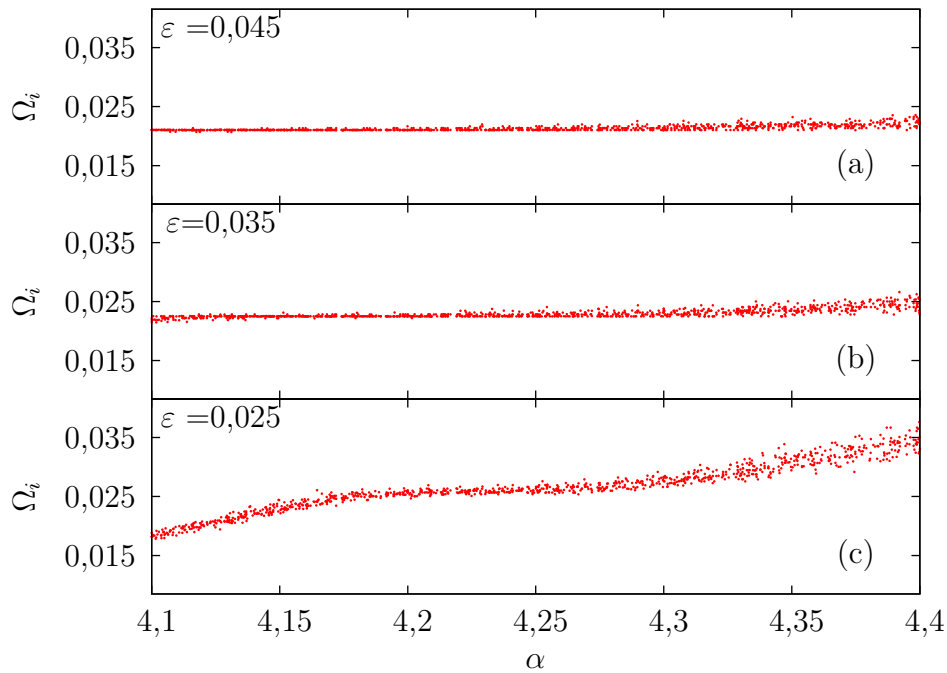


Figura 3.9: Frequência de *burst* de um sistema acoplado Ω_i para cada dinâmica de neurônio (α), $N = 1000$.

Neurônios quase idênticos, *i.e.*, valores de α próximos, têm dinâmicas semelhantes, como pode ser visto na Figura 3.9, onde é mostrado a frequência (Ω_i) de um sistema acoplado para cada valor de α . Para um valor de ε baixo (Figura 3.9c.) os neurônios com valores de α próximos tem frequência de *bursts* parecidas, e neurônios com valores maiores de α apresentam uma dispersão de frequência de *burst* maior. Isso se deve ao fato de quando maior o valor de α mais irregular se torna a frequência de *burst* (Figura 3.4). Um aumento na intensidade de acoplamento (Figura 3.9b) faz com que a frequência de *burst* dos neurônios fiquem mais próximas, e um maior aumento (Figura 3.9a) faz com que mais neurônios tenham praticamente a mesma frequência, porém ainda é observado uma dispersão de frequência para neurônios com valores de α próximo a 4,4.

Podemos determinar quando acontece a transição do sistema do estado não sincronizado para o estado sincronizado através do parâmetro de ordem de Kuramoto, definido pela Equação (2.2), que com as devidas modificações para o modelo de Rulkov, o parâmetro de ordem é escrito como

$$Z_n = R_n e^{i\Phi(n)} \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi(n)^{(j)}}, \quad (3.8)$$

com $\phi(n)^{(j)}$ dada pela Equação (3.4), sendo o índice j só para identificar que estamos somando a fase de cada neurônio.

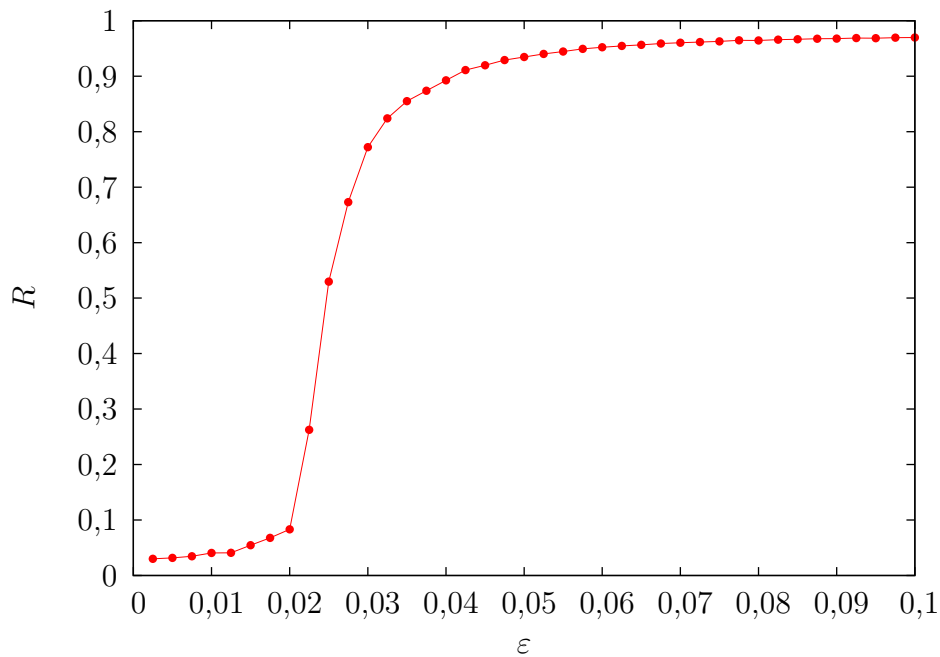


Figura 3.10: Parâmetro de ordem *versus* ε , $N = 1000$.

Simulando o parâmetro de ordem para cada valor de acoplamento, similarmente ao feito no modelo de Kuramoto, podemos observar para quais valores de ε ocorre sincronia quase total, parcial ou dessincronizada. Deste modo, temos a Figura 3.10, que é bem semelhante ao caso de Kuramoto (Figura 2.5). Para valores baixos de acoplamento temos dessincronia de fase, nos valores médios ocorre a sincronia parcial, e para valores altos temos sincronia quase total da fase dos neurônios. Estes resultados obtidos pelo parâmetro de ordem também concordam com os obtidos na Figura 3.9, a qual mostra que, para valores acima do de transição, *i.e.* $\varepsilon > 0,02$, o sistema está parcialmente sincronizado, que é representado por neurônios com mesmos valores de Ω_i , e com o aumento de ε mais neurônios sincronizam, fazendo com que a quantidade de neurônios com a mesma frequência aumente. O valor do parâmetro de ordem nunca irá ser exatamente igual a 1, isso se deve ao fato da diferença de fase entre *bursts* não ser a mesma (vide Figura 3.6).

3.4 Sincronização Externa

A sincronização dos neurônios em uma rede real pode causar várias patologias, tais como epilepsia e mal de Parkinson [10] [2]. Vários métodos são utilizados para fazer com que o sistema saia da sincronia; em um deles é utilizando um forçamento externo periódico [6] [7].

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i^*)} &= \frac{\alpha^{(i^*)}}{1 + (x_n^{(i^*)})^2} + y_n^{(i^*)} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)} + d \operatorname{sen}(\omega n), \\
y_{n+1}^{(i^*)} &= y_n^{(i^*)} - \sigma x_n^{(i^*)} - \beta,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

d é a intensidade do forçamento e ω é a frequência deste forçamento. O asterisco representa os neurônios que são perturbados, enquanto o resto da rede não é afetado. Este forçamento somente altera a variável rápida, e a região de forçamento mudará dependendo da necessidade. Será utilizada uma rede de 50 neurônios para comparar com resultados obtidos por Ivanchenko *et.al* [6] e Pontes *et.al* [31], e um sistema com um sincronismo forte, *i.e.*, $\varepsilon = 0,1$ para o qual, observando a Figura 2.2, temos $R \approx 1$.

Uma primeira análise a ser feita é a influência deste forçamento externo na dinâmica da rede. Uma maneira de se observar isso é analisar a diferença entre a frequência do sistema e a frequência do forçamento externo ($\Omega - \omega$). Esta análise é mostrada no conjunto de Figuras 3.11. Para uma intensidade de forçamento externo d pequena (Figura 3.11c) é observado que para um menor valor de ω , os neurônios têm praticamente a mesma frequência de *burst* (o forçamento externo não remove a sincronia entre os neurônios), a partir de um certo valor de ω (em torno de $\omega = 0,0153$), ocorre o chamado travamento de frequência (vide Apêndice A), ou, nesse caso, os chamados platôs de sincronia, que é quando a frequência de *burst* se torna igual a frequência de forçamento externo. Esses platôs de sincronia duram até um valor de ω , após o platô de sincronia a diferença entre a frequência de *burst* e a frequência de forçamento externo voltam a mudar, como também muda a frequência de *burst* entre os neurônios (o forçamento externo faz com que alguns neurônios deixem de sincronizar). Para um aumento de d (Figura 3.11b) ocorre um aumento da largura do platô de sincronia, ou seja, ele dura por um maior intervalo de ω . Antes do platô de sincronia começa a ser observado uma diferença entre as frequências de *burst* dos neurônios, e após o platô a diferença da frequência de *burst* se torna maior, *i.e.*, o forçamento externo consegue eliminar a sincronia entre os neurônios. Um maior aumento de d (Figura 3.11a) faz com que o forçamento externa, nas regiões antes e após o platô de sincronia, elimine a sincronização entre os neurônios, como também faz com que a largura do platô aumente.

O aumento da largura destes platôs é caracterizado pelo aumento da intensidade de acoplamento d , como pode ser visto na Figura 3.12. Inicialmente, o aumento da intensidade faz com que o platô cresça rapidamente e, depois, esse crescimento ocorre de maneira mais lenta. Esta mudança da taxa de crescimento é mostrada na Figura

3.13, onde é determinada uma lei de potência para cada região. A lei de potência foi determinada pelo gnuplot. Nesta figura $\Delta\omega$ é o mesmo definido na Figura 3.12, com isso temos as seguintes leis de potência: para a região I $\Delta\omega \propto d^{1,405 \pm 0,073}$, e para a região II $\Delta\omega \propto d^{0,768 \pm 0,154}$.

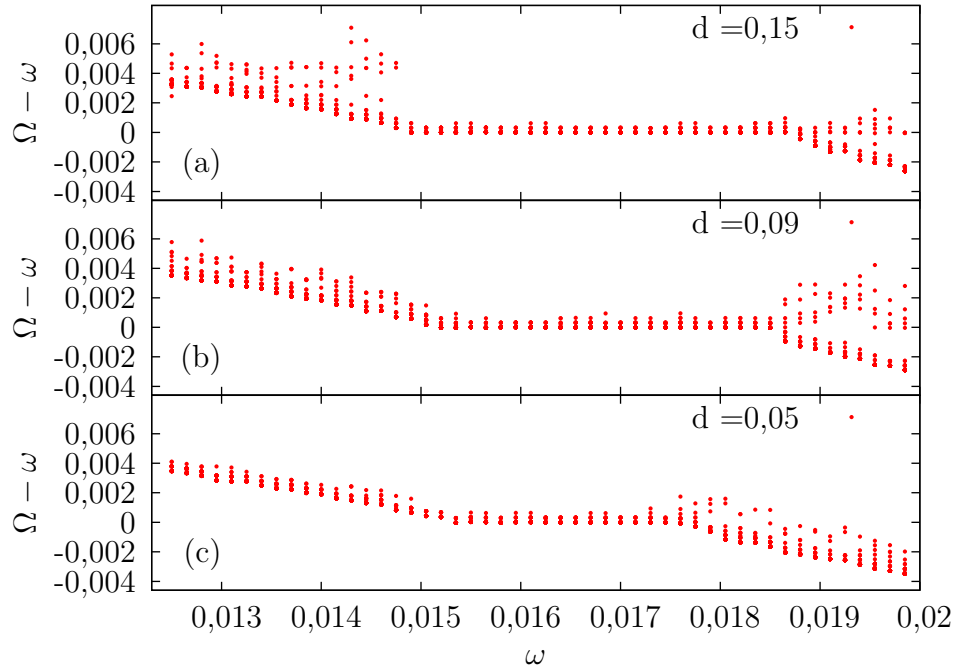


Figura 3.11: Frequência externa *versus* diferença entre a frequência de *burst* e a frequência externa para três valores de intensidade de forçamento.

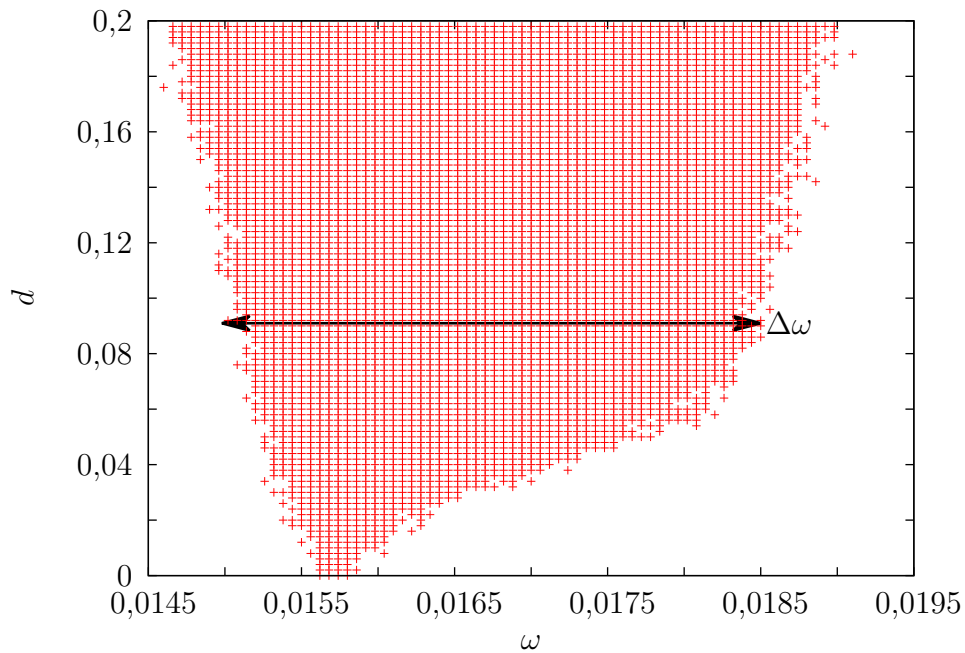


Figura 3.12: Valores de ω somente dos platôs em função da intensidade de acoplamento. O sistema tende a ter um maior crescimento do tamanho do platô para baixas intensidades, e um crescimento mais linear para valores de intensidade maiores.

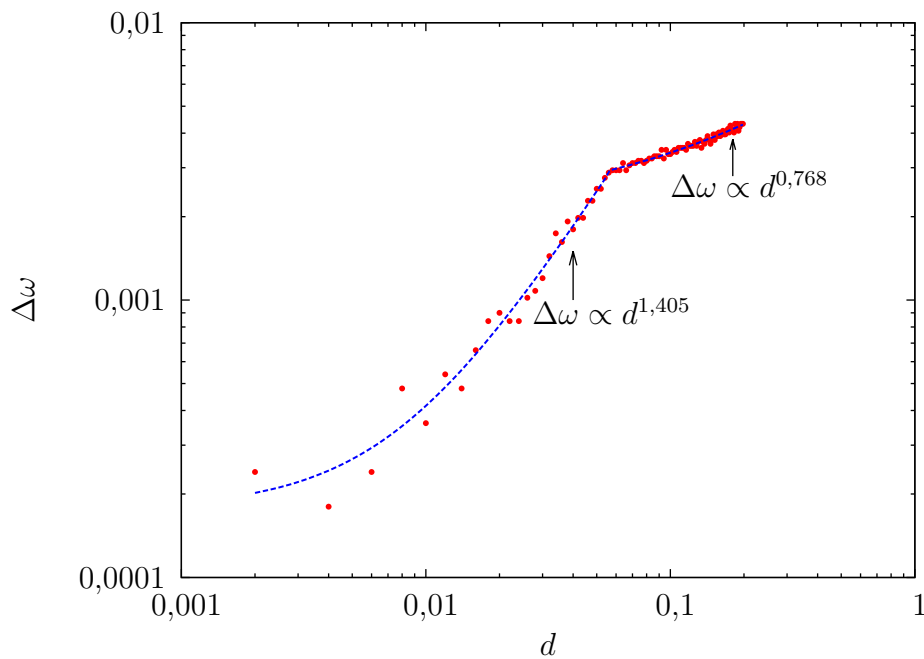


Figura 3.13: Gráfico log x log do tamanho dos platôs $\Delta\omega$ em função de d . Para valores baixos de d o crescimento do platô é rápido, a partir de um valor esta evolução se torna mais lenta.

Quando os neurônios estão travados com a frequência do forçamento externo, a evolução temporal da fase é constante (vide Figura 3.14 para os casos de $\omega = 0,0153$ e $\omega = 0,0165$, que são regiões no início e final do platô da Figura 3.11), na Figura 3.14 $n\omega$ é a fase da frequência externa, e ϕ é a fase de somente um neurônio que foi submetido ao forçamento externo. Nas regiões dos neurônios à deriva (casos $\omega = 0,019$ e $\omega = 0,018$ da Figura 3.14) há um crescimento da diferença da fase da frequência externa com a fase do neurônio.

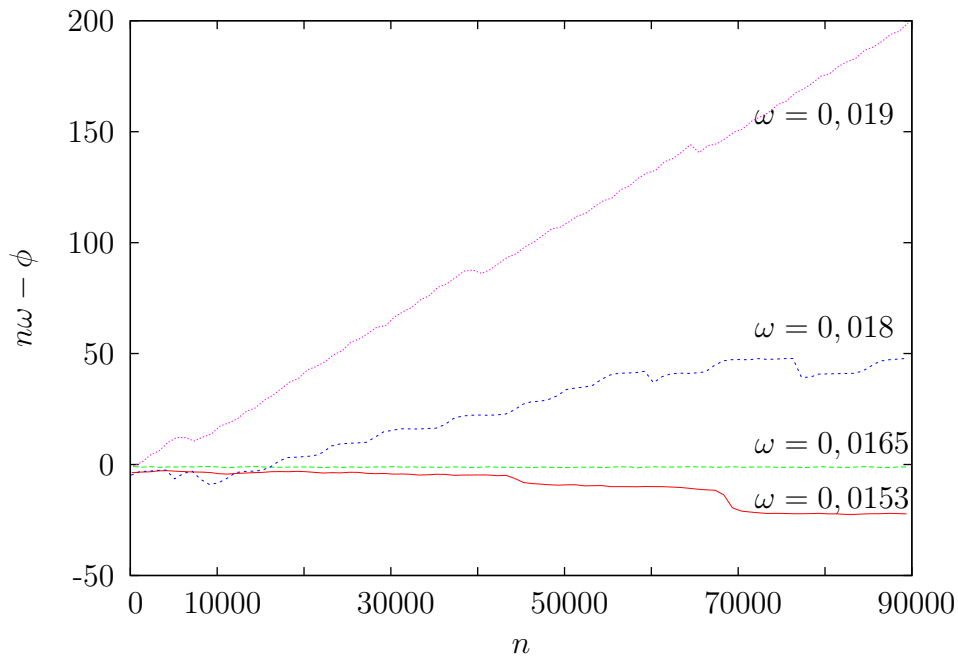


Figura 3.14: Evolução temporal da diferença de fase entre o neurônio e o forçamento para os casos: osciladores travados ($\omega = 0,0153$ e $\omega = 0,0165$); osciladores à deriva ($\omega = 0,018$ e $\omega = 0,019$). $d = 0,05$ e $N = 50$.

O aumento do número de sítios perturbados também influencia no aumento do tamanho dos platôs de sincronia. Na Figura 3.15 podemos perceber isso, onde o tamanho dos platôs é plotado em função do inverso do tamanho da rede para um número de sítios perturbados N_r . Para um pequeno valor de sítios perturbados, o aumento do platô se torna quase linear; quando a quantidade de sítios perturbados se torna próxima ao tamanho da rede (na figura N varia de 51 a 251 neurônios), o tamanho do platô se torna muito grande, fazendo com que quase toda rede sincronize.

Podemos definir uma variável f que determina a porcentagem de sítios perturbados $f = \frac{N_r}{N}$, e através dessa variável podemos perceber que para uma dada porcentagem, o tamanho da largura dos platôs é o mesmo, independentemente do tamanho da rede. Com isso podemos trabalhar com uma rede pequena, para reduzirmos o tempo computacional, e obter o mesmo resultado de uma rede grande, se a porcentagem de sítios perturbados for mantida.

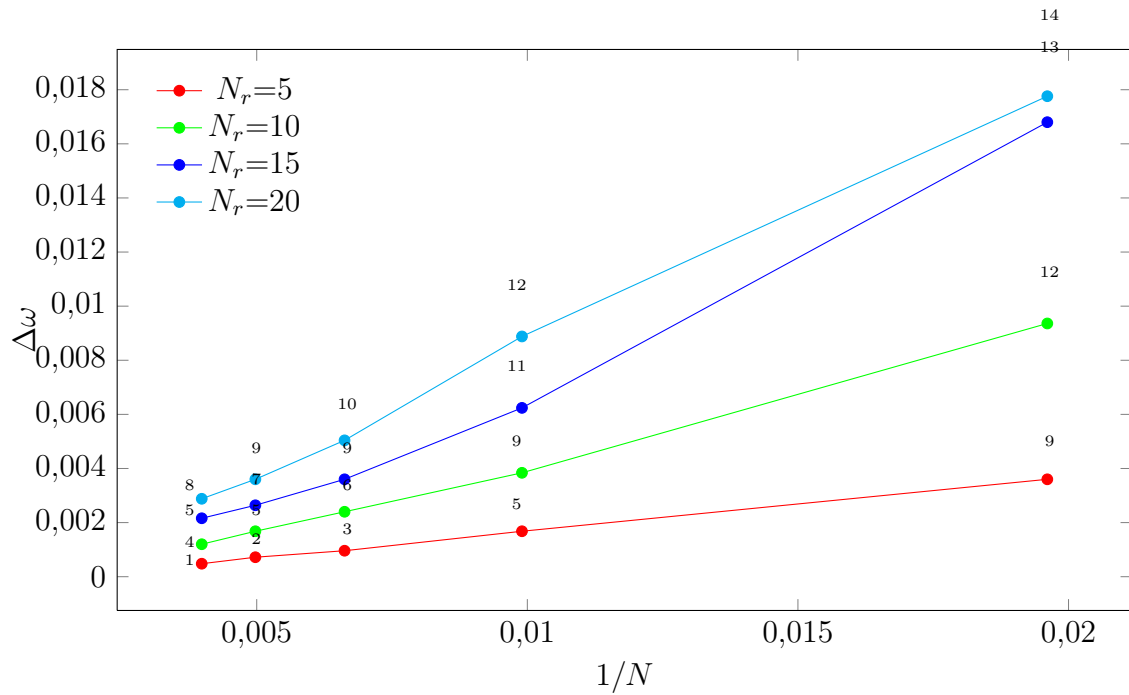


Figura 3.15: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede. Cada número representa uma fração de neurônios forçados (f): 1 temos $f=2\%$; 2 temos $f=2,5\%$; 3 temos $f=3,3\%$; 4 temos $f=4\%$; 5 temos $f=5\%$; 6 temos $f=6,6\%$; 7 temos $f=7,5\%$; 8 temos $f=8\%$; 9 temos $f=10\%$; 10 temos $f=13\%$; 11 temos $f=15\%$; 12 temos $f=20\%$; 13 temos $f=30\%$; 14 temos $f=40\%$.

Acoplamento químico unidimensional e bidimensional

4.1 Modelo

Até agora trabalhamos com um sistema no qual o acoplamento entre os neurônios é do tipo global, ou seja, a informação é transmitida para todos os neurônios da rede simultaneamente. Numa rede neuronal real isso não ocorre, pois os neurônios mais afastados são menos influenciados do que os próximos. Uma maneira para trabalhar com esse tipo de acoplamento é através de um acoplamento químico.

O acoplamento químico, mediado pela difusão de um elemento químico, pode ser matematicamente descrito por um modelo proposto por Kuramoto, levando a um acoplamento não local [9]. Nesse modelo, a variável de estado de cada oscilador influencia na secreção da substância química que obedece uma equação de difusão [8]. A taxa de absorção depende da concentração dessa substância em cada célula.

Para esse modelo se trabalhará com duas classes de vetores, que serão representados com diferentes notações: (i) Posição r em um espaço Euclidiano d -dimensional, na qual os osciladores estão localizados; (ii) variáveis de estado $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ em um espaço de fase M -dimensional de variáveis dinâmicas que caracterizam o estado do sistema em um dado tempo t .

Existem N osciladores localizados em posições discretas \mathbf{r}_j onde $j = 1, 2, \dots, N$, em um espaço Euclidiano d -dimensional, cuja evolução temporal é governada por um campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{X}_j)$ onde \mathbf{X}_j é a variável de estado de cada oscilador (vide Figura 4.1). Os osciladores não precisam ser idênticos, embora eles possam ser semelhantes.

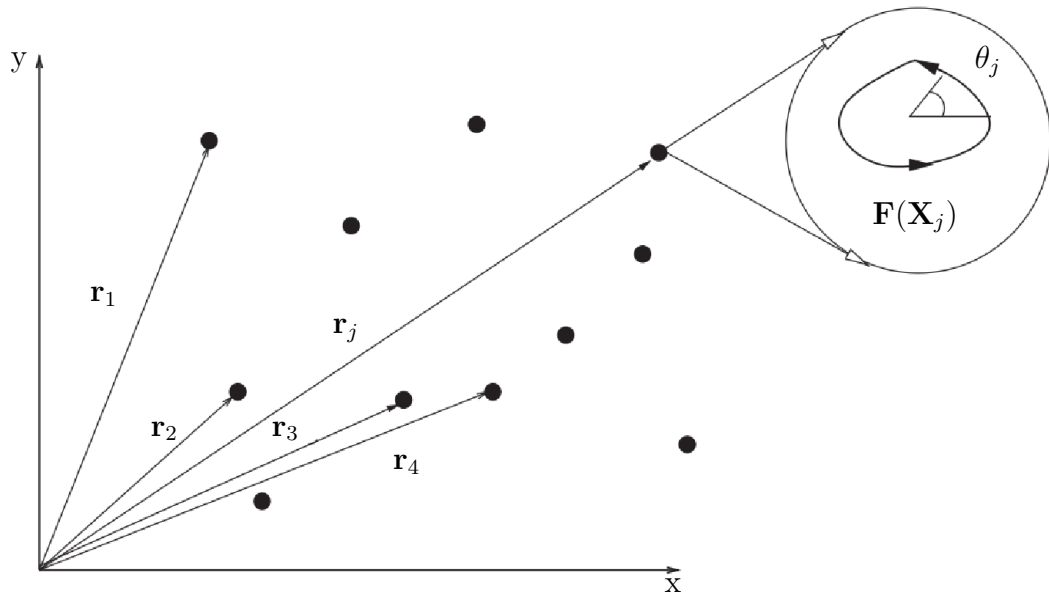


Figura 4.1: Figura esquemática da distribuição espacial dos osciladores. Figura retirada de [7].

Iremos supor que a evolução temporal é afetada pela concentração local da substância, dada por $A(\mathbf{r}, t)$, através de uma função de acoplamento dependente do tempo \mathbf{g}

$$\dot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j) + \mathbf{g}(A(\mathbf{r}, t)), \quad (4.1)$$

onde a concentração da substância satisfaz uma equação de difusão adimensional da forma

$$\epsilon \dot{A}(\mathbf{r}, t) = -\eta A(\mathbf{r}, t) + D \nabla^2 A(\mathbf{r}, t) + \sum_{k=1}^N h(\mathbf{X}_k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (4.2)$$

onde D é o coeficiente de difusão, η representa o parâmetro de amortecimento fenomenológico e o termo no somatório representa o termo de fonte, h é a função que especifica como os osciladores produzem a substância química que se difunde e é absorvida pelos outros osciladores, produzindo o acoplamento.

Podemos considerar que a difusão da substância ocorre em uma escala de tempo mais rápida que o período intrínseco do oscilador individual, com isso podemos fazer o limite $\epsilon \rightarrow 0$, e assim $\epsilon \dot{A} = 0$, isso faz com que a difusão da substância ocorra de maneira adiabática, podendo assim reescrever a Equação (4.2) como

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) - \frac{\eta A}{D} = -\frac{1}{D} \sum_{k=1}^N h(\mathbf{X}_k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (4.3)$$

que é uma equação modificada de Helmholtz não homogênea, cuja solução é dada por

$$A(\mathbf{r}_j) = \int G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \sum_{k=1}^N h(\mathbf{X}_k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) d^d \mathbf{r}, \quad (4.4)$$

onde $G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})$ é a função de Green. Colocando a função de Green dentro do somatório e utilizando a propriedade da filtragem da função delta temos

$$A(\mathbf{r}_j) = \sum_{k=1}^N h(\mathbf{X}_k) G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \quad (4.5)$$

Substituindo a Equação (4.5) na Equação (4.1) podemos obter uma expressão para a equação de acoplamento não local em uma aproximação adiabática

$$\dot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j) + \mathbf{g} \left(\sum_{k=1}^N h(\mathbf{X}_k) G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \right). \quad (4.6)$$

Assumindo \mathbf{g} uma função linear de \mathbf{X}_k , mas não necessariamente da posição, podemos reescrever a Equação (4.7) como

$$\dot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j) + \sum_{k=1}^N G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \mathbf{g}(h(\mathbf{X}_k)). \quad (4.7)$$

Dessa maneira podemos notar alguns casos de interesse:

- Acoplamento Linear

$$\mathbf{g}(h(\mathbf{X}_j)) = \mathbf{A} \mathbf{X}_j, \quad (4.8)$$

- Acoplamento Futuro

$$\mathbf{g}(h(\mathbf{X}_j)) = \mathbf{A} \mathbf{F}(\mathbf{X}_j), \quad (4.9)$$

- Acoplamento Não linear

$$\mathbf{g}(h(\mathbf{X}_j)) = \mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{X}_j), \quad (4.10)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz $M \times M$ que indica quais variáveis do oscilador estão acoplados e \mathbf{H} é uma função não linear.

Nesse trabalho será utilizado o acoplamento linear. O modelo de Kuramoto, abordado no Capítulo 2, é um modelo de acoplamento não linear, com $\mathbf{X}_j = \theta_j \in [0, 2\pi)$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}_j) = \omega_j$, $\mathbf{H}(\mathbf{X}_j) = \text{sen}(\theta_j - \theta_i)$ e com a matriz $\mathbf{A} = 1$

Sendo $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k = \mathbf{R}$ a função de Green para cada valor de dimensão d do espaço é (vide Apêndice B),

$$G(\mathbf{R}) = Ce^{-\gamma\mathbf{R}} \quad d = 1, \quad (4.11)$$

$$G(\mathbf{R}) = CK_0(\gamma\mathbf{R}) \quad d = 2, \quad (4.12)$$

$$G(\mathbf{R}) = C\frac{e^{-\gamma\mathbf{R}}}{\gamma\mathbf{R}} \quad d = 3, \quad (4.13)$$

onde $K_0(\gamma R)$ é a função modificada de Bessel de ordem zero, $\gamma = \sqrt{\frac{\eta}{D}}$ determina a taxa de decaimento da substância, e C é uma constante de normalização que pode ser determinada como

$$\int d^d\mathbf{R}G(\mathbf{R}) = 1. \quad (4.14)$$

A função de Green para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional pode ser observada na Figura 4.2. É observado que para todos os casos a função de Green tende a zero aproximadamente nos mesmos valores. Para valores baixos de γR é observado um maior valor quando maior a dimensão.

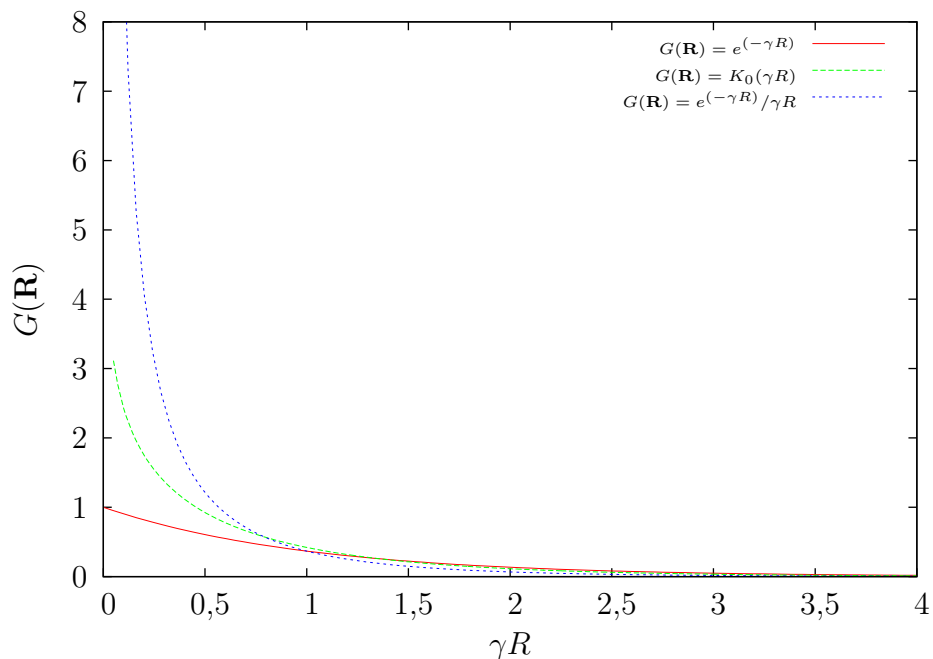


Figura 4.2: Função de Green para cada dimensão.

4.2 Caso Unidimensional

Considere somente o eixo positivo x do plano cartesiano de 0 até N , onde N é o número total de neurônios, cada coordenada nesse eixo, que será chamada de j , contém um neurônio. Quando um neurônio secreta uma substância, supondo que esse neurônio esteja localizado na coordenada $j = 5$, os neurônios localizados em $j = 6$ e $j = 4$ sentirão a intensidade desta substância de forma igual, pois estão à mesma distância $l\Delta$ do neurônio que secretou, onde Δ é a escala do sistema e l a distância até o neurônio que secretou a substância. Os neurônios localizados em $2l\Delta$, *i.e.*, neurônios localizados em $j = 7$ e $j = 3$ sentirão também a substância na mesma intensidade, porém mais fraca que os neurônios localizados a uma distância $l\Delta$ do neurônio que secretou a substância, e assim por diante. Considerando que o sistema tem condição de contorno periódica, ou seja, para uma rede de $N = 7$ neurônios, o neurônio localizado a uma distância $6l\Delta$ do neurônio em $j = 5$ será o neurônio localizado em $j = N$, pois o ponto $j = 0$ contém um neurônio. Através dessa análise podemos escrever a função de Green para o caso de $d = 1$ como

$$G(R) = Ce^{-\gamma l\Delta}, \quad (4.15)$$

onde a constante de normalização é calculada pela Equação (4.14) trocando a integral por um somatório, pois estamos trabalhando com um sistema discreto e não contínuo

$$\sum_{l=1}^N G(\mathbf{R}) = 1. \quad (4.16)$$

Ao invés de somarmos de 1 até N , podemos fazer esta soma de 1 até um N' , onde $N' = \frac{N-1}{2}$ e multiplicarmos por 2 este somatório, devido à simetria do sistema que foi descrito, com isso a constante de normalização torna-se

$$C = \left[2 \sum_{l=1}^{N'} e^{-\gamma l\Delta} \right]^{-1}. \quad (4.17)$$

A equação para o mapa de Rulkov unidimensional acoplado é

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)}}{1 + (x_n^{(j)})^2} + y_n^{(j)} + \varepsilon C \sum_{l=1}^{N'} e^{-\gamma l\Delta} [x_n^{(j-l)} + x_n^{(j+l)}], \quad (4.18)$$

$$y_{n+1}^{(j)} = y_n^{(j)} - \sigma x_n^{(j)} - \beta, \quad (4.19)$$

com σ e β dado pelos mesmos valores anteriores. E igual ao feito anterior, podemos tentar suprimir a sincronia entre os neurônios a partir de um forçamento externo, neste caso temos

$$x_{n+1}^{(j^*)} = \frac{\alpha^{(j^*)}}{1 + (x_n^{(j^*)})^2} + y_n^{(j^*)} + \varepsilon C \sum_{l=1}^{N'} e^{-\gamma l \Delta} [x_n^{(j^*-l)} + x_n^{(j^*+l)}] + d \operatorname{sen}(\omega n), \quad (4.20)$$

$$y_{n+1}^{(j^*)} = y_n^{(j^*)} - \sigma x_n^{(j^*)} - \beta, \quad (4.21)$$

onde o asterisco significa que essas equações serão utilizadas somente para uma região da rede, para o restante serão utilizadas as Equações (4.18) e (4.20).

4.2.1 Limites para $\gamma \rightarrow 0$ para o caso Unidimensional

Lembrando que $\gamma = \sqrt{\frac{\eta}{D}}$ representa a taxa de decaimento da substância secretada, podemos analisar os dois casos extremos, $\gamma \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow \infty$. Para $\gamma = 0$ temos o caso em que a substância não decai com a distância, ou seja, temos o caso global. Isso também pode ser percebido analisando a Equação (4.11). Fazendo

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} G(\mathbf{R}) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} C e^{-\gamma l \Delta}, \quad (4.22)$$

a exponencial tende a 1, e com a constante de normalização, dada pela Equação (4.17), se torna uma soma de 1 N' vezes, com isso a equação de Rulkov para o caso unidimensional se torna

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)}}{1 + (x_n^{(j)})^2} + y_n^{(j)} + \varepsilon \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{N'} [x_n^{(j-l)} + x_n^{(j+l)}], \quad (4.23)$$

$$y_{n+1}^{(j)} = y_n^{(j)} - \sigma x_n^{(j)} - \beta, \quad (4.24)$$

que é justamente a equação de Rulkov para o caso de acoplamento global dado pelo conjunto de Equações (3.6) (3.7), exceto pelo fato de que no conjunto de Equações (4.23) (4.24) é excluído o termo de própria interação.

Para o caso de $\gamma \rightarrow \infty$ a exponencial da Equação (4.11) decai rapidamente com a distância, fazendo com que somente o termo de $l = 1$ contribua para o somatório. Assim

a constante de normalização pode ser escrita como

$$C \approx \frac{1}{2e^{-\gamma\Delta}}, \quad (4.25)$$

e a equações de Rulkov como

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)}}{1 + (x_n^{(j)})^2} + y_n^{(j)} + \varepsilon \frac{1}{2} [x_n^{(j-l)} + x_n^{(j+l)}], \quad (4.26)$$

$$y_{n+1}^{(j)} = y_n^{(j)} - \sigma x_n^{(j)} - \beta, \quad (4.27)$$

observando assim que somente os dois termos vizinhos mais próximos contribuem para o acoplamento, caracterizando assim, um acoplamento local.

4.3 Caso Bidimensional

No caso bidimensional, utilizaremos a expressão dada pela Equação (4.12), K_0 que é a função de Bessel, modificada de primeira ordem. Similarmente feito anteriormente, as integrais serão trocadas por somatórios, e com isso a constante de normalização será dada pela relação

$$\sum_{R=1}^{R'} CK_0(\gamma R) = 1. \quad (4.28)$$

Para representar este caso, considere um sistema de coordenadas dado pela Figura 4.3. Cada coordenada contém um neurônio, logo, temos um conjunto de 9×9 neurônios com condição de contorno periódica, por isso os valores ao lado esquerdo do eixo x não são negativos. Observando a Figura 4.3 e usando como base o neurônio localizado na posição $Y = 0$ e $X = 0$, temos 9 raios de interação, sendo que em R_1 temos 4 neurônios, em R_2 também 4 neurônios porém em R_4 temos 8 neurônios. Para determinar o raio entre cada neurônio é utilizado $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, onde as coordenadas nos raios serão dadas por letras maiúsculas para não se confundir com as variáveis x e y da equação de Rulkov. Outro cuidado é referente às coordenadas utilizadas para determinar os raios dos neurônios localizados à esquerda do eixo x, e na parte de baixo do eixo y, pois levando em consideração a Figura 4.3 como referência, o neurônio que está representado por um círculo, está localizado nas coordenadas $x=7$ e $y=8$, porém sua distância ao neurônio localizado na origem é $X = 1$ e $Y = 2$.

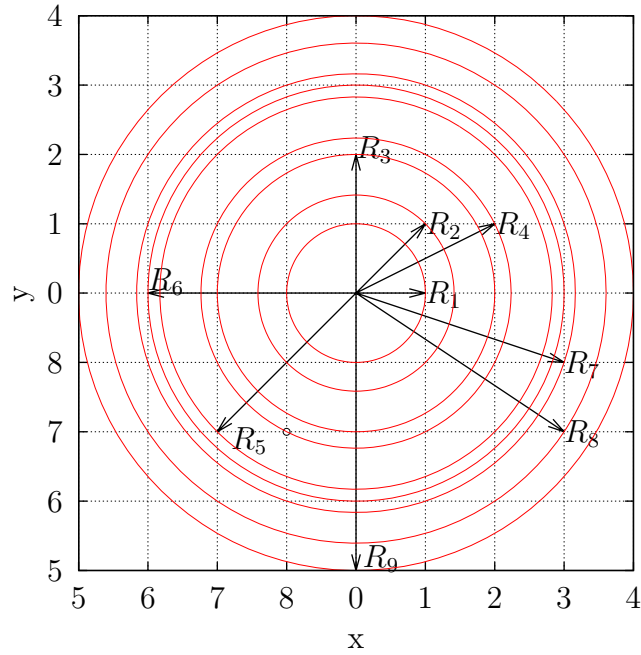


Figura 4.3: Representação da distribuição radial dos neurônios, cada coordenada (X,Y) contém um neurônio, considerando em (0,0) o neurônio calculado, os outros para acoplamentos estão distribuídos em vários Raios.

Na Figura 4.3 podemos observar que para uma rede de 9x9 neurônios o raio máximo, ou seja, o raio do neurônio mais afastado é $R_9 = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$, com isso o somatório para determinar a constante de normalização pode ser feito somente até um $R' = \sqrt{4^2 + 4^2}$ e multiplicar este valor por 4, com isso temos

$$C = [4 \sum_{R=1}^{R'} K_0(\gamma R)]^{-1}, \quad (4.29)$$

e a equação para o mapa de Rulkov bidimensional acoplado é

$$x_{n+1}^{(X,Y)} = \frac{\alpha^{(X,Y)}}{1 + (x_n^{(X,Y)})^2} + y_n^{(X,Y)} + \varepsilon C \sum_{R=1}^{R'} K_0(\gamma R) [x_n^R], \quad (4.30)$$

$$y_{n+1}^{(X,Y)} = y_n^{(X,Y)} - \sigma x_n^{(X,Y)} - \beta. \quad (4.31)$$

E como similarmente feito para o caso unidimensional, a supressão da sincronização será feita a partir de um forçamento externo periódico.

$$x_{n+1}^{(X^*, Y^*)} = \frac{\alpha^{(X^*, Y^*)}}{1 + (x_n^{(X^*, Y^*)})^2} + y_n^{(X^*, Y^*)} + \varepsilon C \sum_{R=1}^{R=R_n} K_0(\gamma R^*) [x_n^{R^*}] + d \operatorname{sen}(\omega n), \quad (4.32)$$

$$y_{n+1}^{(X^*, Y^*)} = y_n^{(X^*, Y^*)} - \sigma x_n^{(X^*, Y^*)} - \beta. \quad (4.33)$$

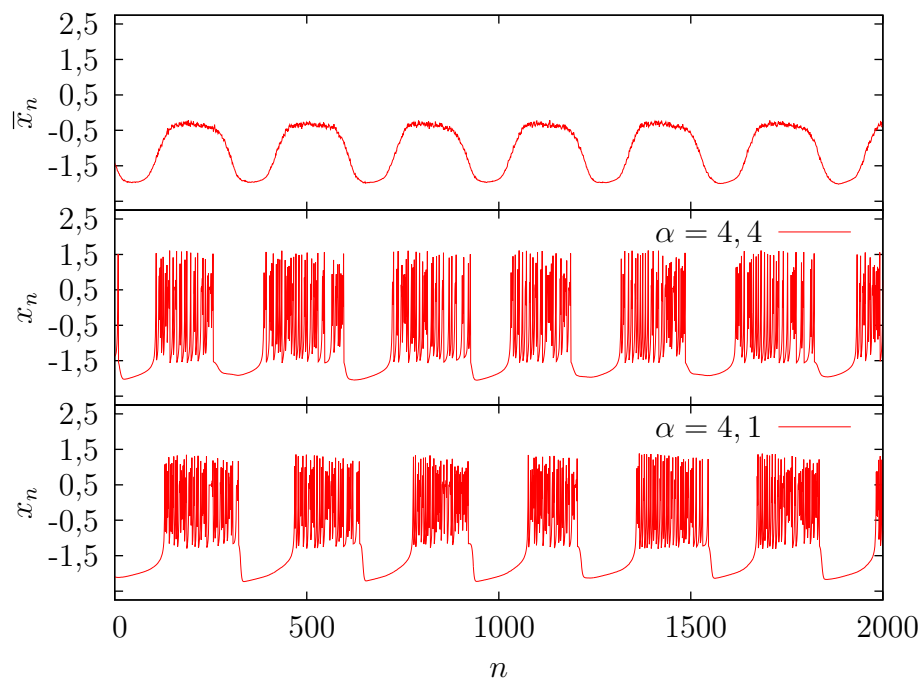
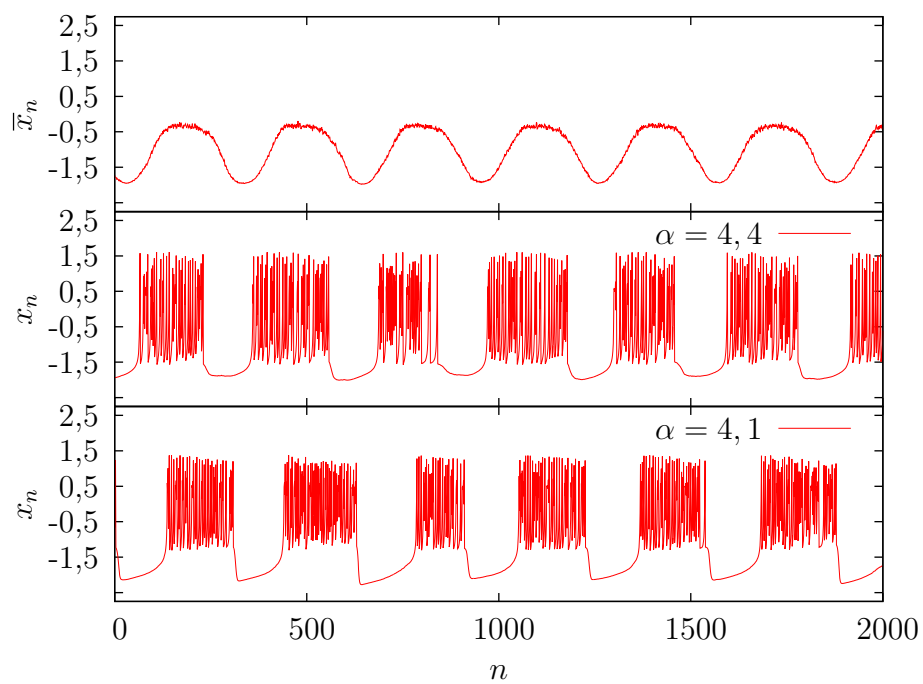
onde o asterisco significa que essas equações serão utilizadas somente para uma região da rede, para o restante serão utilizadas as Equações (4.30) e (4.32).

Como a função de Bessel tem um comportamento semelhante à função exponencial, os casos limites de $\gamma \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow \infty$ também são semelhantes. Para $\gamma \rightarrow 0$ faz com que se observe um acoplamento global e para $\gamma \rightarrow \infty$ faz com que se observe um acoplamento de primeiros vizinhos, ou local.

4.4 Resultados Numéricos

As simulações foram feitas utilizando as Equações (4.18) e (4.19) para o caso unidimensional, e através das Equações (4.30) e (4.31) para o caso bidimensional. Nos dois casos foi utilizado um tempo de 80 mil e descartados 60 mil para o sistema estabilizar. O caso unidimensional foi determinado a partir de um sistema de 1001 neurônios, e o bidimensional através de 51×51 neurônios.

No caso unidimensional, para um valor de γ pequeno ($\gamma = 0,005$, vide Figura 4.4), os neurônios têm uma dinâmica semelhante. Para esse valor o sistema se torna sincronizado, e muito semelhante ao caso em que o acoplamento é global (vide Figura 3.8). Isso pode ser observado através do campo médio do sistema e das dinâmicas individuais dos neurônios, pois dois neurônios com valores de α distintos (um neurônios com $\alpha = 4,1$ e outro com $\alpha = 4,4$) apresentam um comportamento de *burst* semelhante. Um aumento de γ ($\gamma = 0,05$, vide Figura 4.5) faz com que a dinâmica do sistema seja menos semelhante, pois observando a dinâmica individual dos neurônios os tempos de duração dos *bursts* e o intervalo entre eles, não são iguais. Para um caso de γ alto ($\gamma = 1$, vide Figura 4.6), o sistema está dessincronizado, em razão do campo médio ter uma amplitude pequena e pelo fato da dinâmica individual ser diferente.

Figura 4.4: Série temporal unidimensional para $\gamma = 0,005$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 1001$.Figura 4.5: Série temporal unidimensional para $\gamma = 0,05$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 1001$.

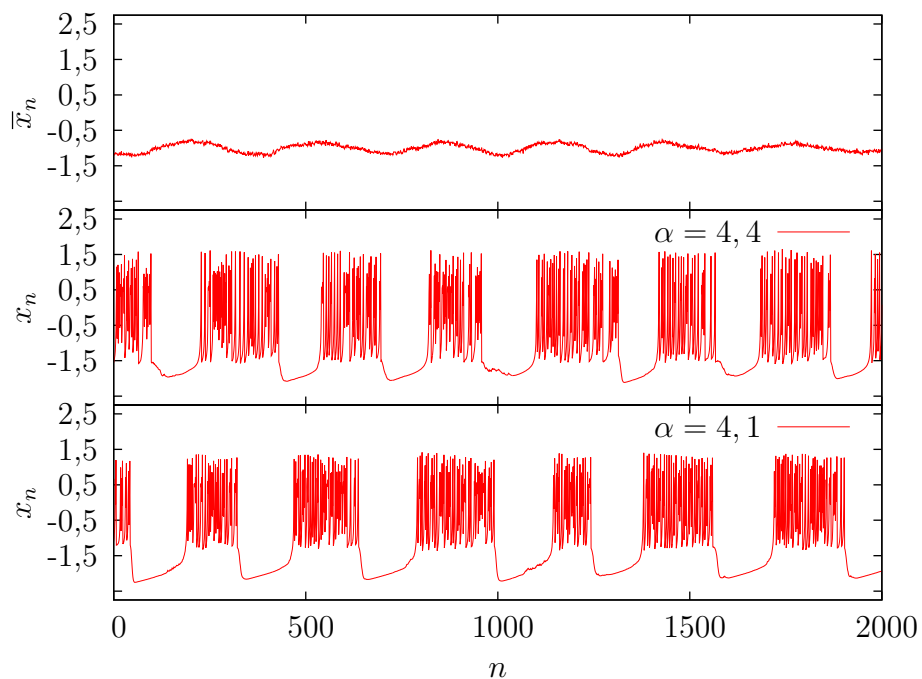


Figura 4.6: Série temporal unidimensional para $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 1001$.

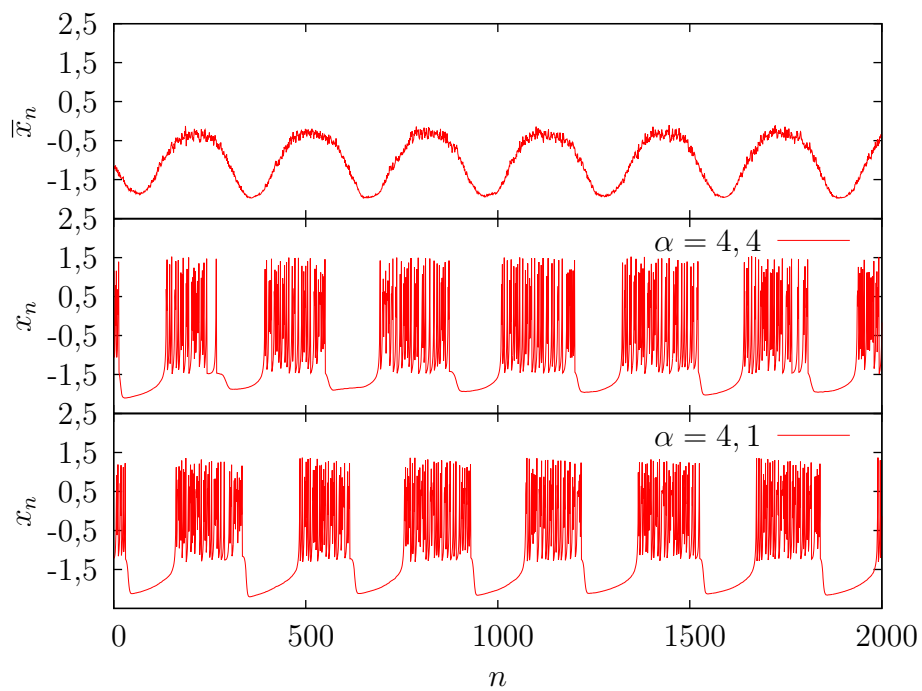


Figura 4.7: Série temporal bidimensional para $\gamma = 0,005$, $\varepsilon = 0,04$ e $N = 51 \times 51$.

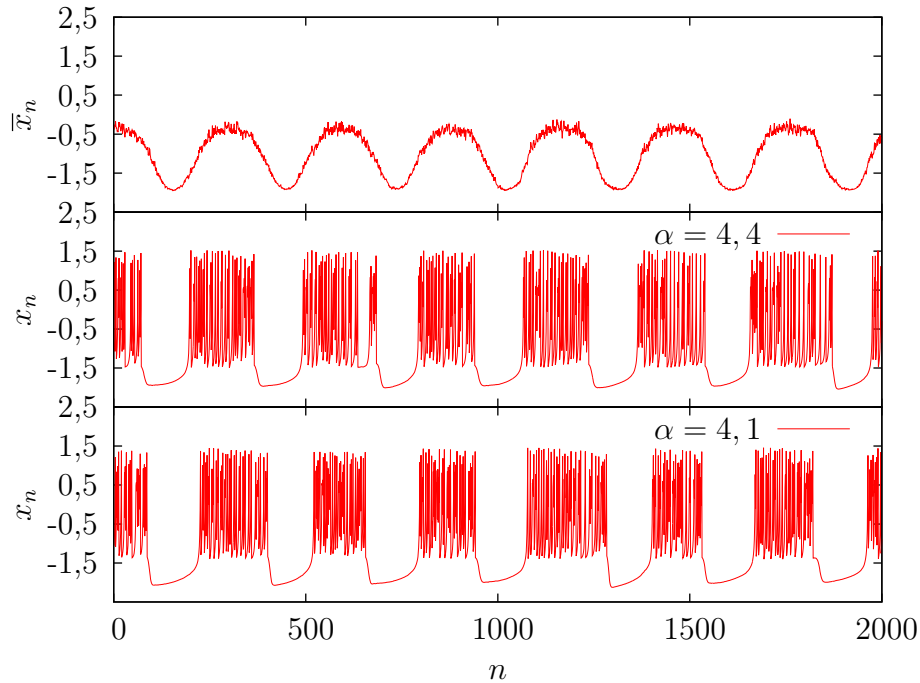


Figura 4.8: Série temporal bidimensional para $\gamma = 0,05$, $\varepsilon = 0,04$ e $N=51 \times 51$.

No caso bidimensional, a um pequeno aumento de γ altera muito pouco a dinâmica neuronal, como pode ser observado entre as Figuras 4.7 e Figura 4.8. O fato de, praticamente não haver alteração no caso bidimensional se deve ao termo de acoplamento dependente da função de Bessel, que tem um maior valor para pequenas distâncias, que a exponencial do caso unidimensional, e também ao fato de que no caso unidimensional os neurônios somente são influenciados por dois neurônios a uma mesma distância, e o caso bidimensional termos 4 neurônios numa mesma distância. No caso unidimensional foram utilizados 1001 neurônios e a distância do neurônio mais afastado era 500; no caso bidimensional foram utilizados 2601 neurônios, porém a distância do neurônio mais afastado foi 625. Para um aumento para $\gamma = 1$ já é observada uma diferença na dinâmica (vide Figura 4.9), pois o campo médio do sistema tem uma amplitude pequena e as dinâmicas individuais dos neurônios são diferentes.

Para melhor determinar em quais situações ocorre sincronia e em quais não ocorre, é utilizado o parâmetro de Ordem de Kuramoto, que para esses casos foi definido pela Equação (3.8), tomando o cuidado que j para os casos unidimensional e bidimensional será a posição dos neurônios na rede. No caso unidimensional, vide Figura 4.10, quando $\gamma = 0,005$ a evolução do parâmetro de ordem em função da constante de acoplamento ε se assemelha ao caso em que temos acoplamento global, para valores de γ alto, *i.e.*, $\gamma = 0,5$ e $\gamma = 1$, o sistema se torna não sincronizado para todos os valores de ε .

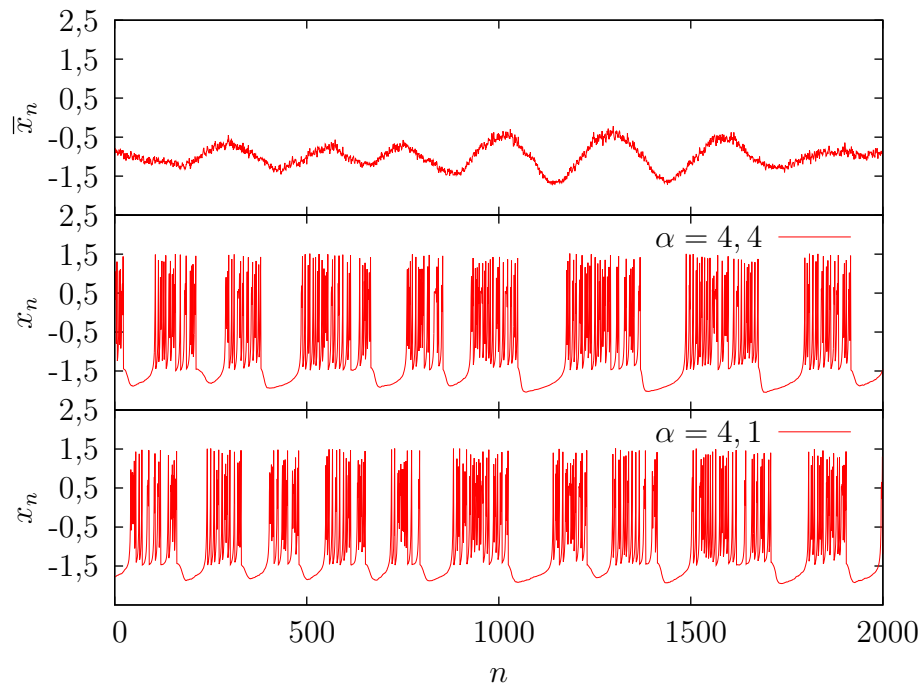


Figura 4.9: Série temporal bidimensional para $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0,04$ e $N=51 \times 51$.

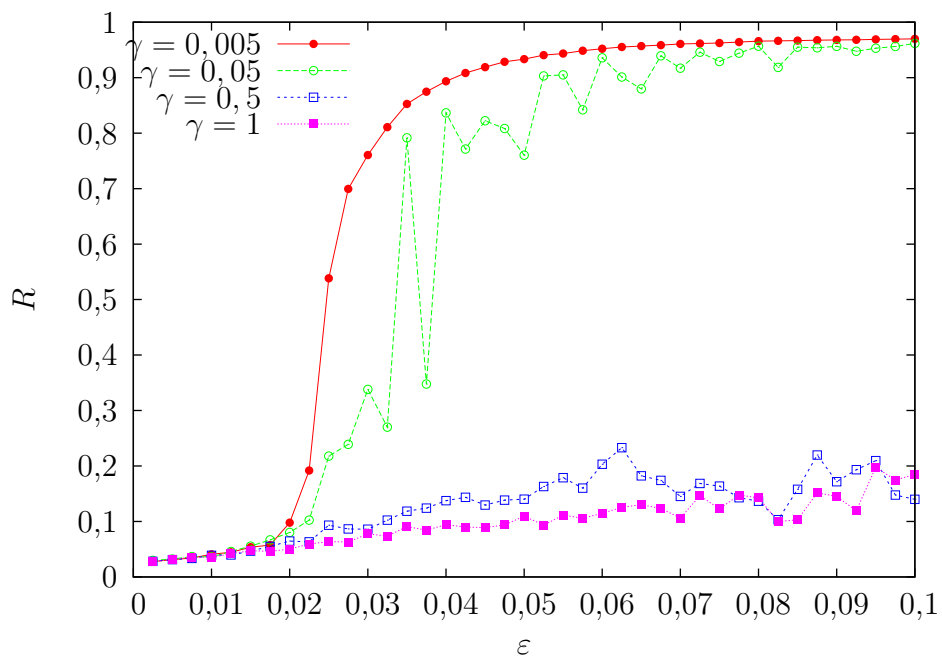


Figura 4.10: Parâmetro de ordem para o caso unidimensional em função da constante de acoplamento ε ($N=1001$).

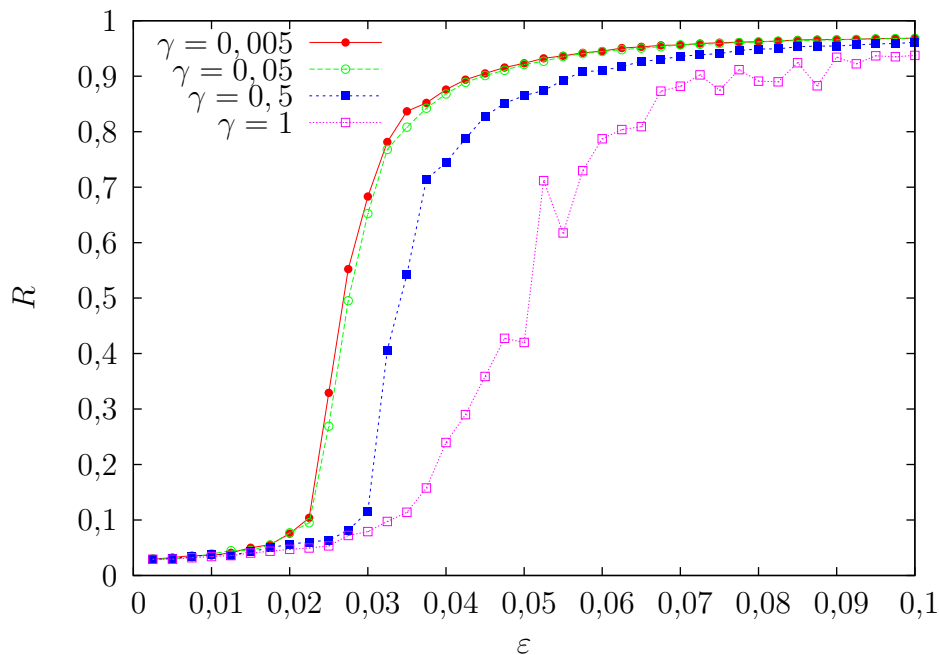


Figura 4.11: Parâmetro de ordem para o caso bidimensional em função da constante de acoplamento ε ($N=51 \times 51$).

Já no caso bidimensional mostrado na Figura 4.11, a evolução do parâmetro de ordem em função da constante de acoplamento ε , para diferentes valores de γ é praticamente o mesmo, e em todos os casos de *gamma* é observado um sincronismo mesmo quando temos $\varepsilon = 0,1$. Em ambos os casos, unidimensional e bidimensional, a transição do estado não sincronizado para o estado sincronizado (que chamaremos de estado crítico) ocorre praticamente no mesmo valor de $\varepsilon_c \approx 0,02$.

A distribuição de frequência para cada valor de α pode ser determinada similarmente ao caso global (Figura 3.9). Para o caso unidimensional e um valor de γ baixo, *i.e.*, um caso próximo ao global ($\gamma = 0,005$, vide Figura 4.12), quando temos um valor baixo da constante de acoplamento $\varepsilon = 0,025$ (Figura 4.12(c)), alguns neurônios são observados com a mesma frequência, ou seja, somente alguns neurônios estão sincronizados. Para um aumento de ε ($\varepsilon = 0,035$ Figura 4.12(b)) é observada uma maior sincronização dos neurônios, pois uma maior quantidade de neurônios estão com uma mesma frequência. Já para um caso em que o valor de ε é alto ($\varepsilon = 0,045$ Figura 4.12(a)), quase todos os neurônios estão sincronizados, e somente os neurônios com valores próximo a $\alpha = 4,4$ ainda não estão na mesma frequência. Quando o valor aumentado o valor de γ ($\gamma = 0,05$, vide conjunto de Figuras 4.13) praticamente não é observada mudança com o caso em que $\gamma = 0,005$. Já para um caso de $\gamma = 1$ (vide conjunto de Figuras 4.14), poucos neurônios estão na mesma frequência, por mais que seja utilizado um acoplamento forte ($\varepsilon = 0,045$ Figura 4.14(a)), o que condiz com o observado na evolução do parâmetro de

Ordem (Figura 4.10), pois para o valor de $\varepsilon = 0,045$ e $\gamma = 1$ o valor do parâmetro de ordem é próximo a 1.

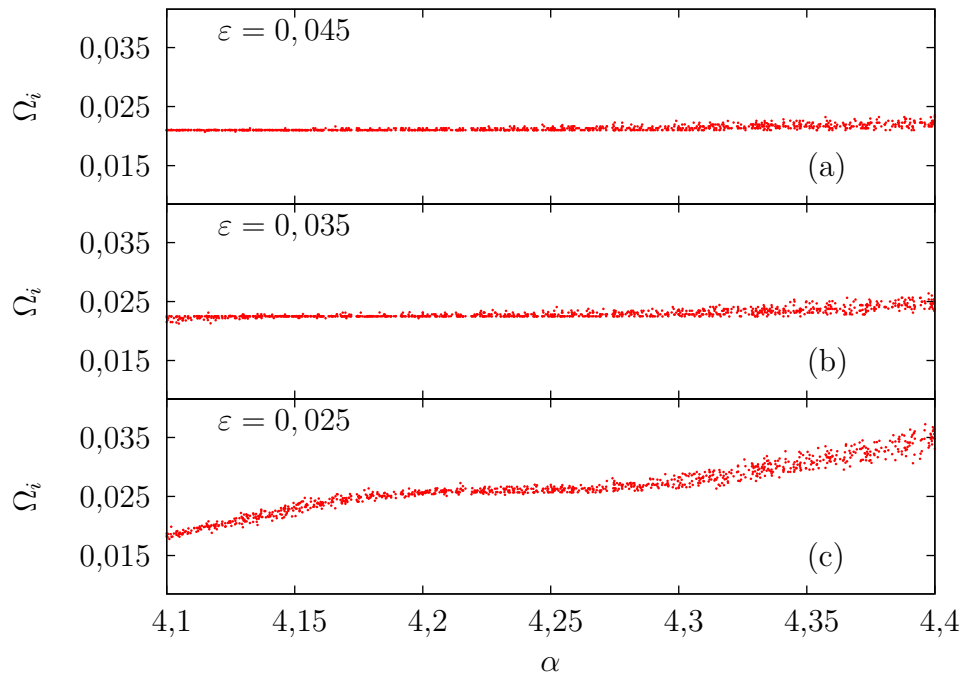


Figura 4.12: Frequência de *burst* para o caso unidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,005$ e $N = 1001$

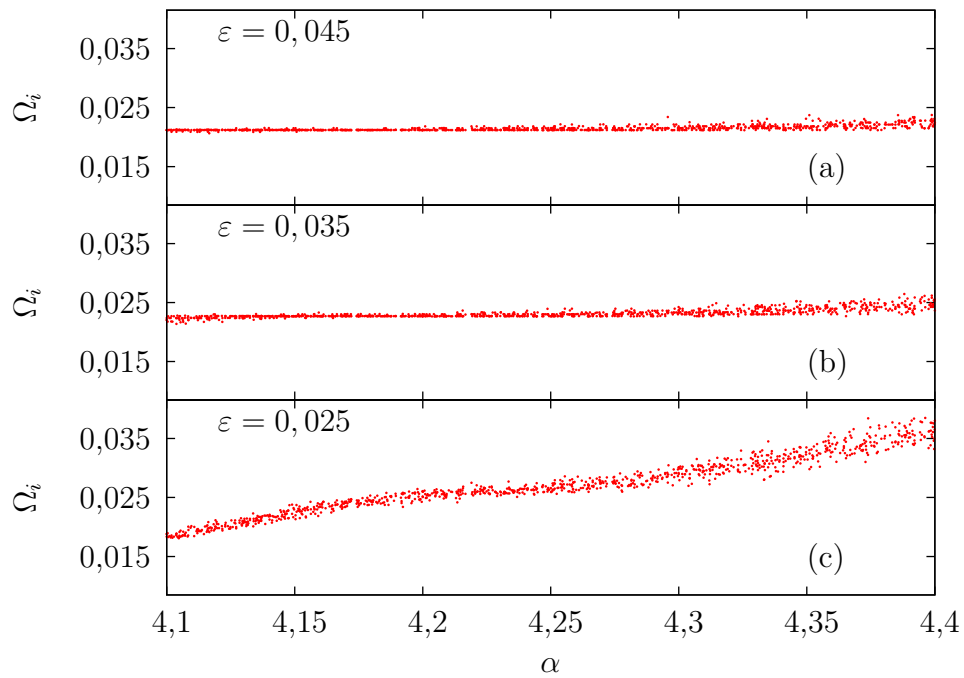


Figura 4.13: Frequência de *burst* para o caso unidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,05$ e $N = 1001$

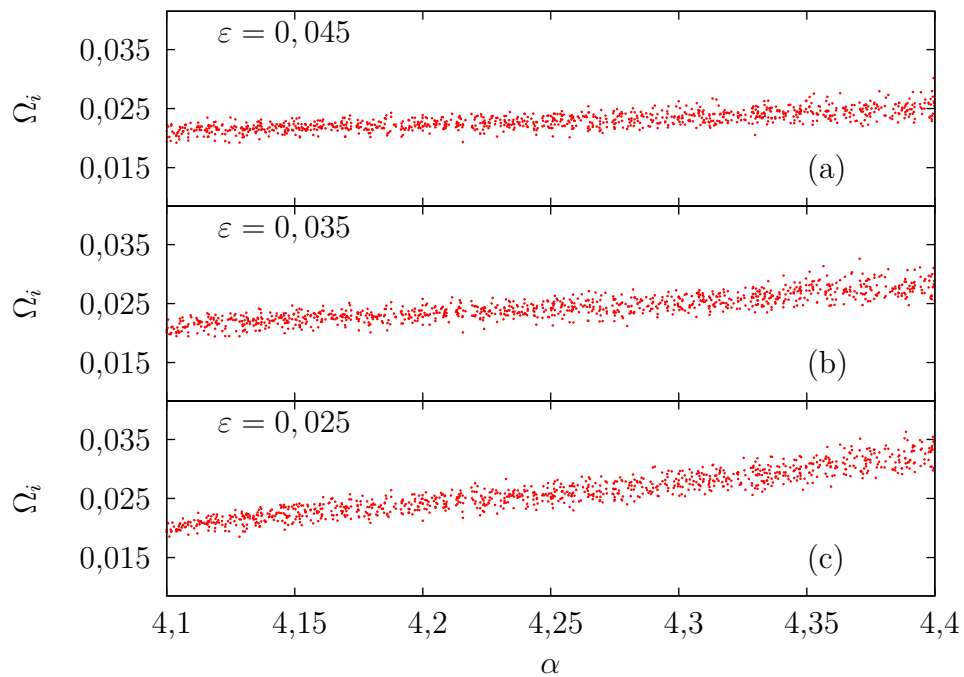


Figura 4.14: Frequência de *burst* para o caso unidimensional para cada valor de α , $\gamma = 1$ e $N = 1001$

Para o caso bidimensional não é observada muita mudança em relação ao caso unidimensional para os casos de $\gamma = 0,005$ (conjunto de Figuras 4.15) e para $\gamma = 0,05$ (Figuras 4.16). Uma grande diferença é observada para quando temos um valor de $\gamma = 1$ (Figuras 4.17), pois para o caso bidimensional ainda é observado um acoplamento entre os neurônios mesmo quando observado a Figura 4.17(a) pelo fato de a frequência de *burst* dos neurônios serem próxima.

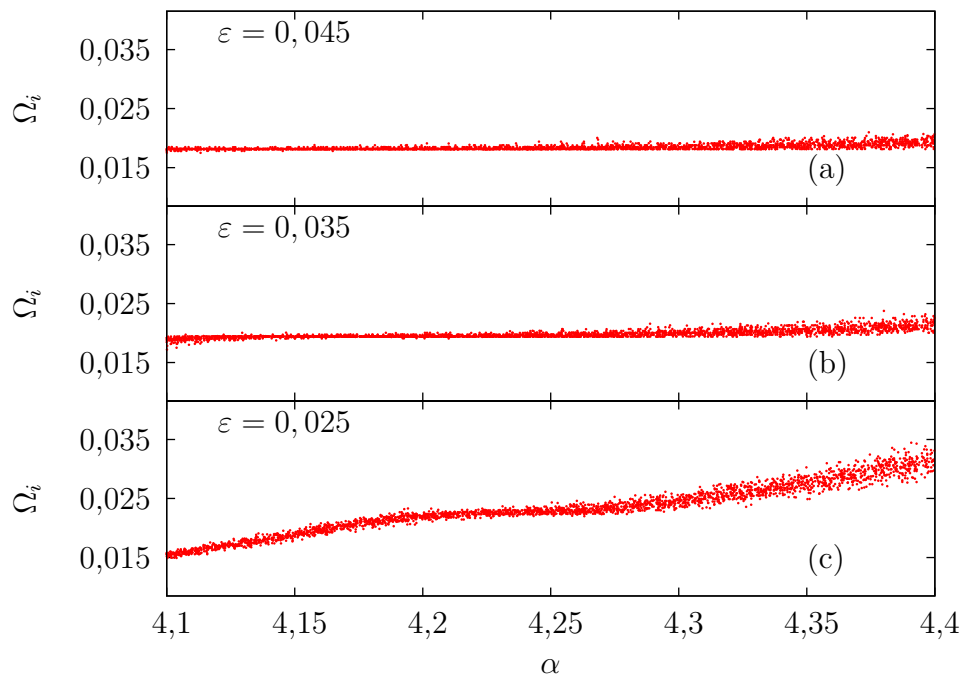


Figura 4.15: Frequência de *burst* para o caso bidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,005$ e $N = 51 \times 51$

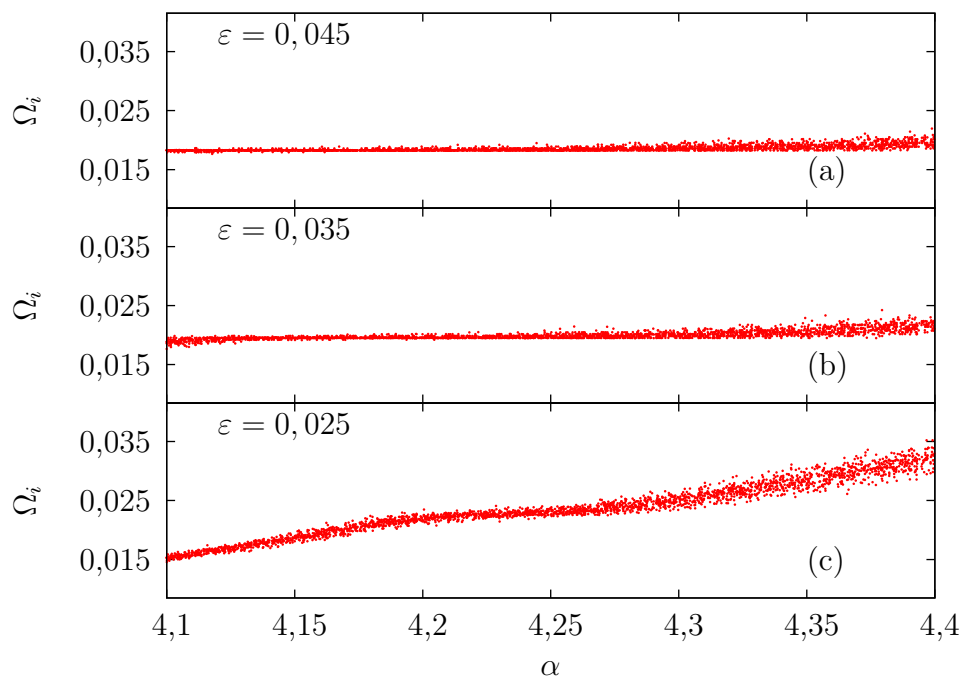


Figura 4.16: Frequência de *burst* para o caso bidimensional para cada valor de α , $\gamma = 0,05$ e $N = 51 \times 51$

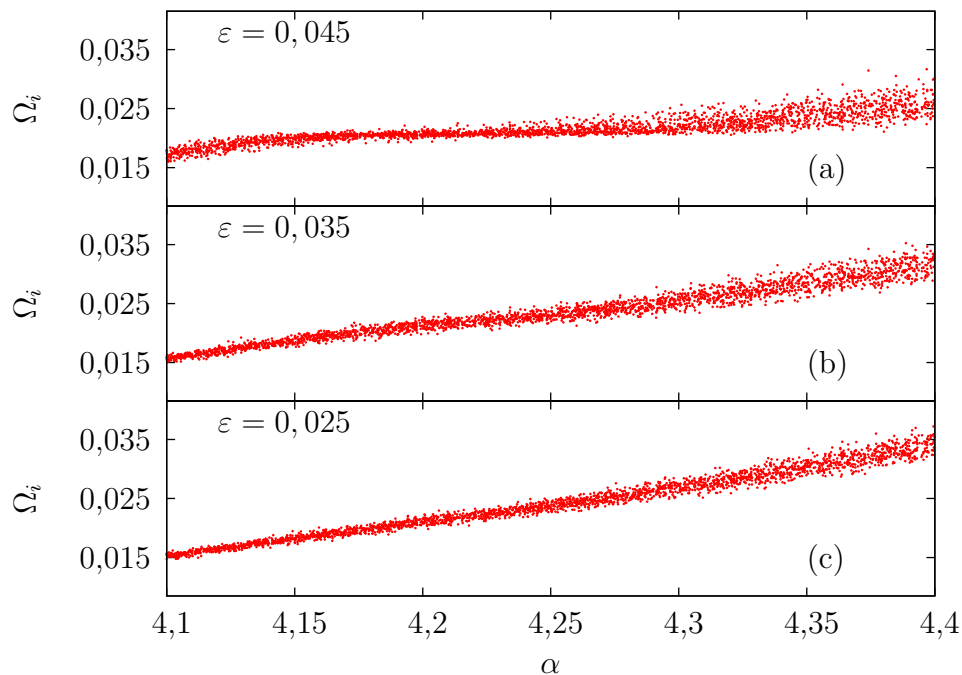


Figura 4.17: Frequência de *burst* para o caso bidimensional para cada valor de α , $\gamma = 1$ e $N = 51 \times 51$

4.4.1 Casos com Forçamento externo

Para os casos com forçamento externo (Equações (4.20) e (4.21) para o caso unidimensional foi utilizado uma rede de $N = 51$ neurônios e uma região de forçamento $N_r = 5$, e para o caso bidimensional, cuja equação é dada pelo conjunto de Equações (4.32) e (4.33) foi utilizada uma rede de 7×7 neurônios, para podermos comparar com os resultados obtidos pela no Capítulo 3. Como o objetivo do forçamento externo é fazer com que o sistema saia do estado de sincronia, as simulações foram feitas para $\varepsilon = 0, 1$, pois observando os parâmetros de ordem para o caso unidimensional (Figura 4.10) e bidimensional (Figura 4.11), para esse valor o sistema está sincronizado.

Com o forçamento externo são observados platôs de sincronia semelhante ao caso global (Figura 3.11). Para o caso unidimensional (Figura 4.18) um valor de $\gamma = 0,005$ e $\gamma = 0,05$ os platôs são bem semelhantes ao caso global. Já para um caso de $\gamma = 1$ começam a aparecer alguns comportamentos diferentes. Ao invés de termos todos os neurônios sincronizando numa mesma frequência externa ω e formando os platôs de sincronia, temos que alguns neurônios, os da região na qual o forçamento é aplicado (N_r), sincronizam com uma frequência externa ω menor que o resto do sistema, formando um platô antes dos demais neurônios (Figuras 4.18(f) e (c)), para que depois o resto do sistema sincronize com eles. Isso se deve ao fato de que no caso $\gamma = 1$ a difusão da

concentração da substância decaia mais rapidamente com a distância, fazendo com que ocorra um acoplamento quase local.

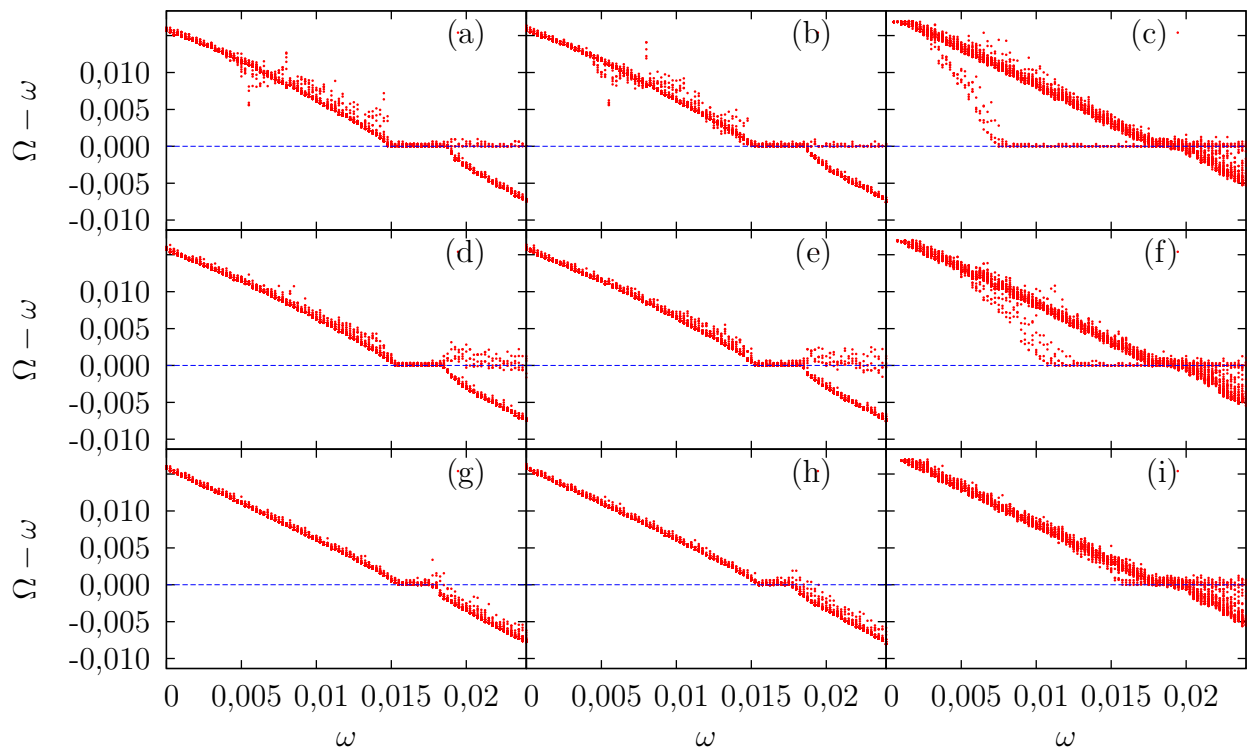


Figura 4.18: Diferença entre a frequência de *burst* com a frequência externa para os casos unidimensionais. $N = 51$ e a região de neurônios perturbados é uma região de $N_r = 5$ e $\varepsilon = 0,1$. Em (a) temos $\gamma = 0,005$ e $d = 0,15$; (b) $\gamma = 0,05$ e $d = 0,15$; (c) $\gamma = 1$ e $d = 0,15$; (d) $\gamma = 0,005$ e $d = 0,09$; (e) $\gamma = 0,05$ e $d = 0,09$; (f) $\gamma = 1$ e $d = 0,09$; (g) $\gamma = 0,005$ e $d = 0,05$; (h) $\gamma = 0,05$ e $d = 0,05$; (i) $\gamma = 1$ e $d = 0,05$.

Para o caso bidimensional (Figura 4.19), os platôs se assemelham ao caso unidimensional para uma intensidade de forçamento $d = 0,05$ e $d = 0,09$, mas para uma maior intensidade ($d = 0,15$ Figuras 4.19 (a), (b) e (c)) é observada uma sincronização com a frequência externa de alguns neurônios antes do resto do sistema. Outro fato a ser observado na Figura 4.18 e na Figura 4.19 é que os platôs de sincronia ocorrem até em casos em que o sistema está totalmente dessincronizado (caso em que $\gamma = 1$), logo o forçamento externo também faz com que o sistema não sincronizado entre em sincronia com o forçamento externo.

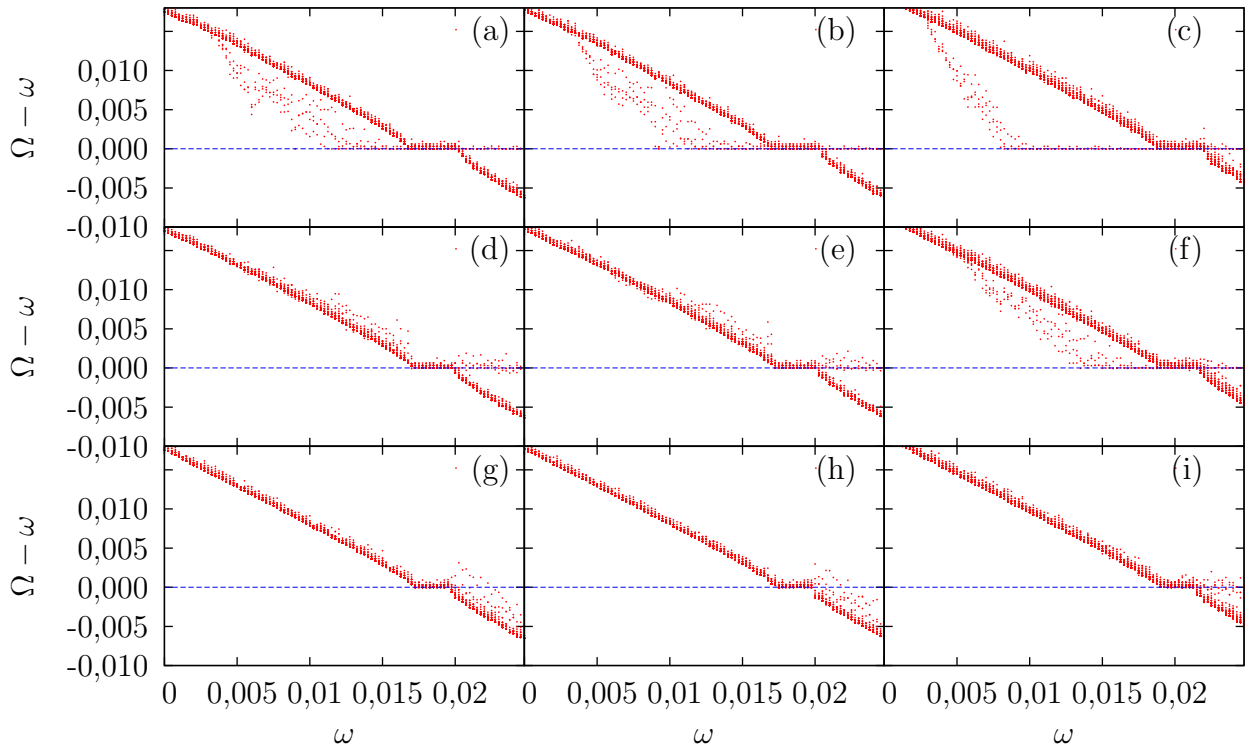


Figura 4.19: Diferença entre a frequência de *burst* com a frequência externa em função da frequência externa nos casos bidimensionais. $N=7 \times 7$ e a região de neurônios perturbados é uma região de $N_r=2 \times 2$ e $\varepsilon = 0,1$. Em (a) temos $\gamma = 0,005$ e $d = 0,15$; (b) $\gamma = 0,05$ e $d = 0,15$; (c) $\gamma = 1$ e $d = 0,15$; (d) $\gamma = 0,005$ e $d = 0,09$; (e) $\gamma = 0,05$ e $d = 0,09$; (f) $\gamma = 1$ e $d = 0,09$; (g) $\gamma = 0,005$ e $d = 0,05$; (h) $\gamma = 0,05$ e $d = 0,05$; (i) $\gamma = 1$ e $d = 0,05$.

Variando a intensidade do forçamento d e sua frequência ω , ocorre um aumento da largura dos platôs de sincronia (as chamadas Línguas de Arnold). É observado um maior crescimento da largura dos platôs para baixos valores de d (que chamaremos de região I), e um menor aumento para valores altos de d (que chamaremos de região II), como pode ser observado para o caso unidimensional e bidimensional da Figura 4.20. Essas duas regiões são observadas tanto para o caso unidimensional quanto para o caso bidimensional. Para $\gamma = 1$, para o caso unidimensional (Figura 4.20(a)), não é possível observar a Língua de Arnold por causa da dispersão de dados pelo fato que para $\gamma = 1$ o acoplamento é local. Já para o caso bidimensional é observada a Língua de Arnold, porém com uma grande dispersão.

Na Figura 4.20 foi trabalhado com $\varepsilon = 0,1$, para o caso unidimensional $N = 51$ e $N_r = 5$, e para o caso bidimensional $N = 7 \times 7$ e $N_r = 2 \times 2$.

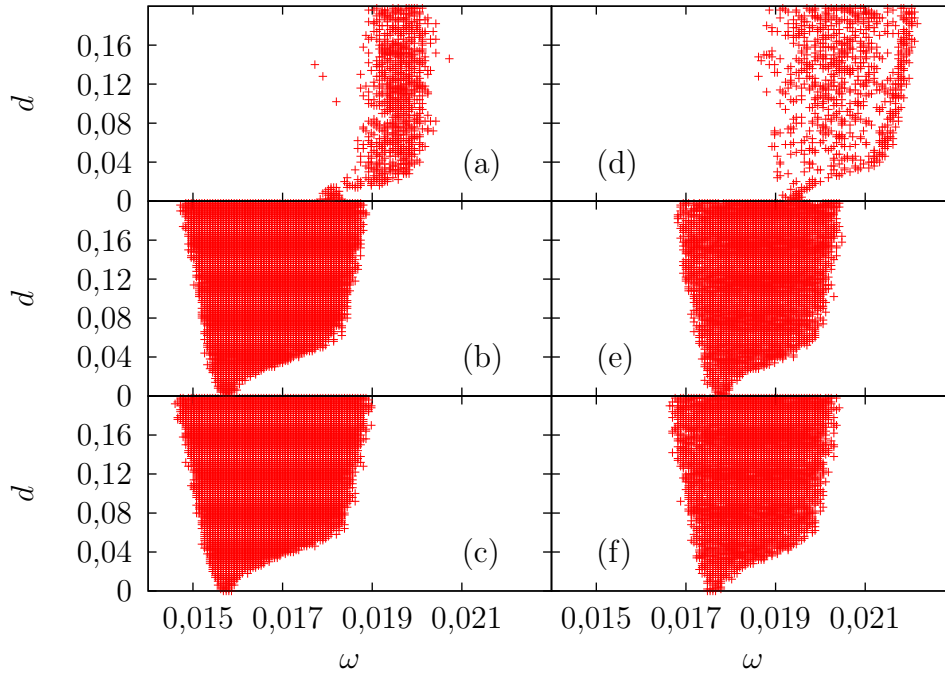


Figura 4.20: Travamento de frequência, ou as Línguas de Arnold para os casos Unidimensionais com $\gamma = 1$ em (a), $\gamma = 0,05$ em (b) e $\gamma = 0,005$ em (c). E para os casos Bidimensionais com $\gamma = 1$ em (d), $\gamma = 0,05$ em (e) e $\gamma = 0,005$ em (f).

Outra maneira de perceber esta diferença de aumento do tamanho dos platôs é determinando uma lei de potência para a largura das regiões de travamento de frequência nos casos unidimensional e bidimensional. Para o caso unidimensional foram determinadas as leis de potência, cujos resultados são: para $\gamma = 0,005$ (Figura 4.21) potência $\Delta\omega \propto d^{1,58 \pm 0,11}$ para a região I, e $\Delta\omega \propto d^{0,23 \pm 0,15}$ para a região II; e para $\gamma = 0,05$ (Figura 4.22) temos $\Delta\omega \propto d^{1,49 \pm 0,11}$ para a região I e $\Delta\omega \propto d^{0,24 \pm 0,14}$ para região II. Para os casos de $\gamma = 1$ (Figura 4.20(a)) não pode ser determinadas a lei de potência, pois a Língua de Arnold não tem um formato regular como o caso em que $\gamma = 0,005$ (Figura 4.20(c)) e $\gamma = 0,05$ (Figura 4.20(c)).

Para o caso bidimensional foram determinadas as leis de potência, cujos resultados são: para $\gamma = 0,005$ (Figura 4.23) $\Delta\omega \propto d^{1,49 \pm 0,14}$ para a a região I e $\Delta\omega \propto d^{0,07 \pm 0,23}$ para a região II; para $\gamma = 0,05$ (Figura 4.24) obtido $\Delta\omega \propto d^{1,32 \pm 0,12}$ para a região I e $\Delta\omega \propto d^{0,21 \pm 0,29}$ para a região II e para o caso de $\gamma = 1$ não foi possível determinar pelo mesmo motivo que não foi possível para o caso unidimensional.

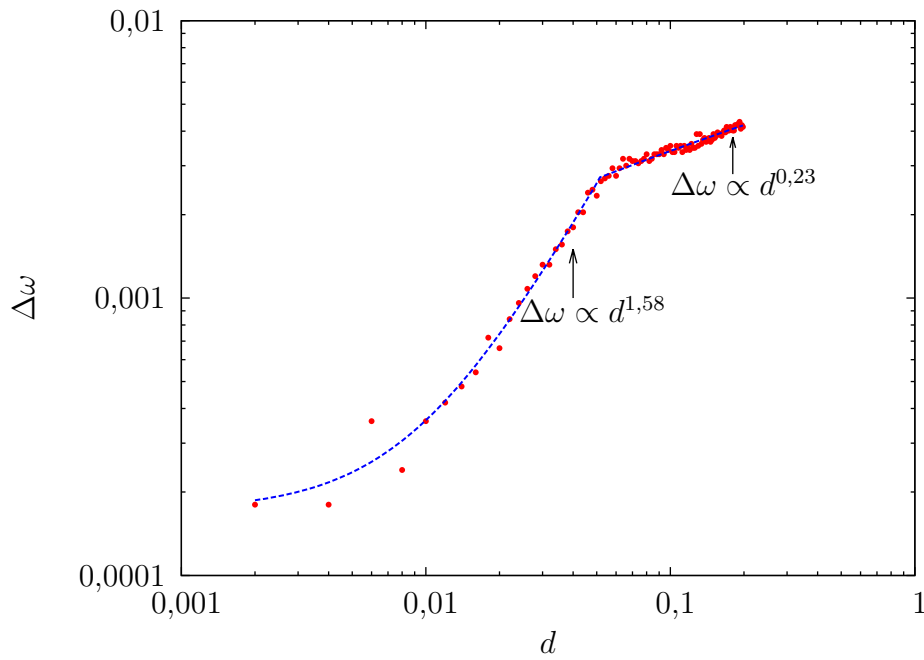


Figura 4.21: Evolução do tamanho do platô (unidimensional) em função da intensidade do forçamento externo, $\gamma = 0,005$ e $N=51$.

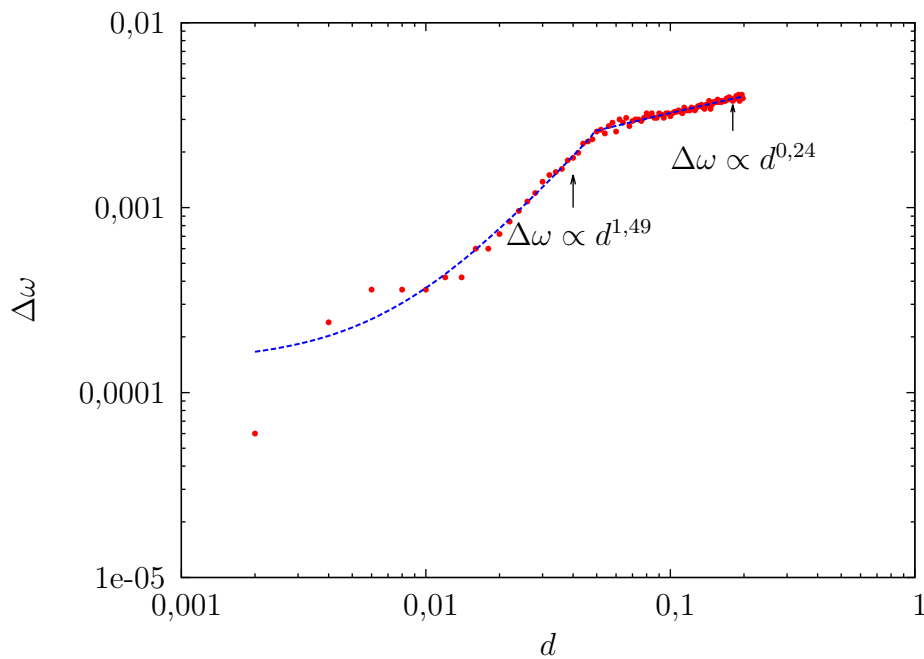


Figura 4.22: Evolução do tamanho do platô (unidimensional) em função da intensidade do forçamento externo, $\gamma = 0,05$ e $N=51$.

Por mais que os valores de γ mudem e façam com que o sistema tenha uma dinâmica diferente para cada caso, as leis de potência para estas evoluções não sofrem muita diferença com a mudança de γ , mesmo nos casos unidimensional e bidimensional.

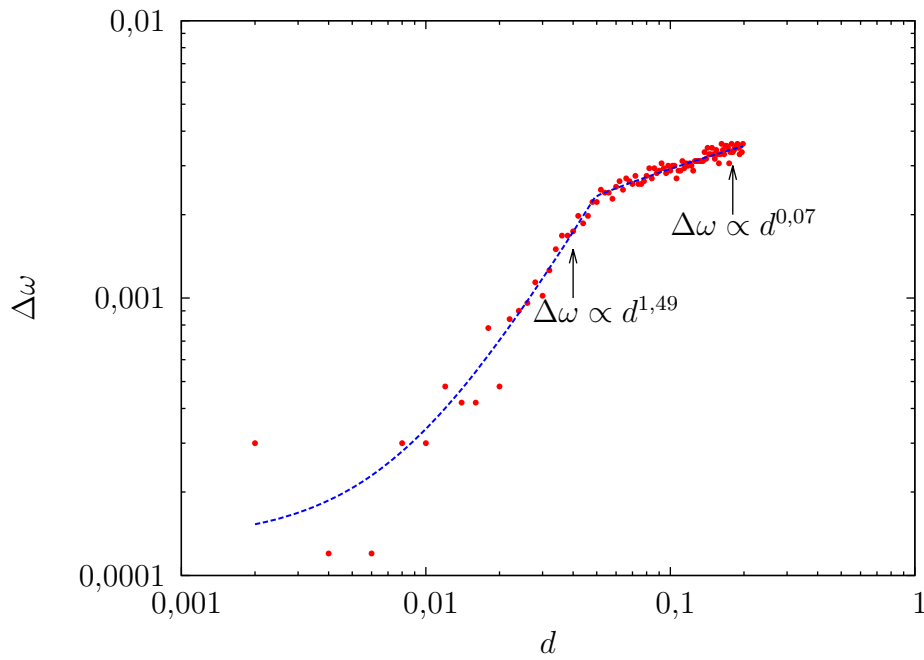


Figura 4.23: Evolução do tamanho do platô (bidimensional) em função da intensidade do forçamento externo, $\gamma = 0,005$, $N = 7 \times 7$ e $N_r = 2 \times 2$.

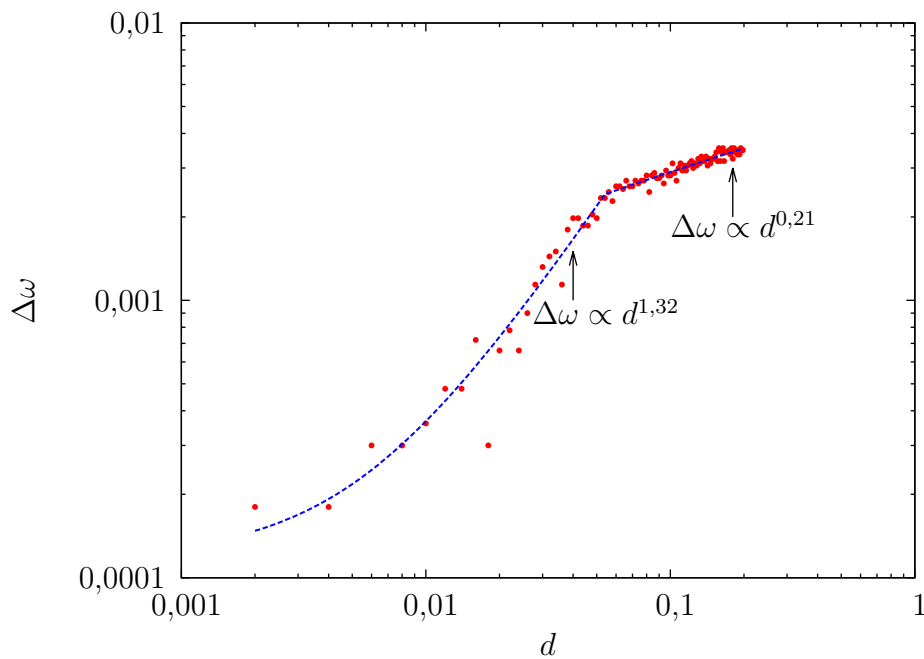


Figura 4.24: Evolução do tamanho do platô (bidimensional) em função da intensidade do forçamento externo, $\gamma = 0,05$ e $N = 7 \times 7$ $N_r = 2 \times 2$.

Na Figura 4.25 é mostrada a diferença entre a fase de forçamento ($n\omega$) e a fase de *burst* (ϕ) para os casos em que os neurônios estão travados e para os casos em que neurônios estão à deriva. Os neurônios travados consistem em neurônios em que suas fases não mudam com o passar do tempo, que observando a Figura 4.18 são neurônios localizados

nos platôs de sincronia ($\omega = 0,0153$ e $\omega = 0,0165$). Os neurônios à deriva são neurônios em que suas fases mudam com o passar do tempo, caracterizado pelos neurônios na Figura 4.18 por neurônios localizados antes ou depois dos platôs.

Na Figura 4.25 foi utilizada uma intensidade de forçamento externo de $d = 0,05$, pois observando a Figura 4.18, para esse valor de d é observada uma menor dispersão das frequências, logo um sistema mais sincronizado. Na Figura 4.25 é observado que quando o sistema está travado, a diferença de fase dos neurônios com a fase do forçamento externo não muda com o passar do tempo, já com os neurônios à deriva, a diferença de fase entre eles muda com o passar do tempo. Essa mesma análise pode ser feita para o caso $\gamma = 0,05$ (Figura 4.26) e para $\gamma = 1$ na Figura 4.27, porém para esse caso quando $\omega = 0,0153$ os neurônios estão antes do platô de sincronia, por esse motivo é observado que a diferença entre a fase externa e a fase neuronal decresce.

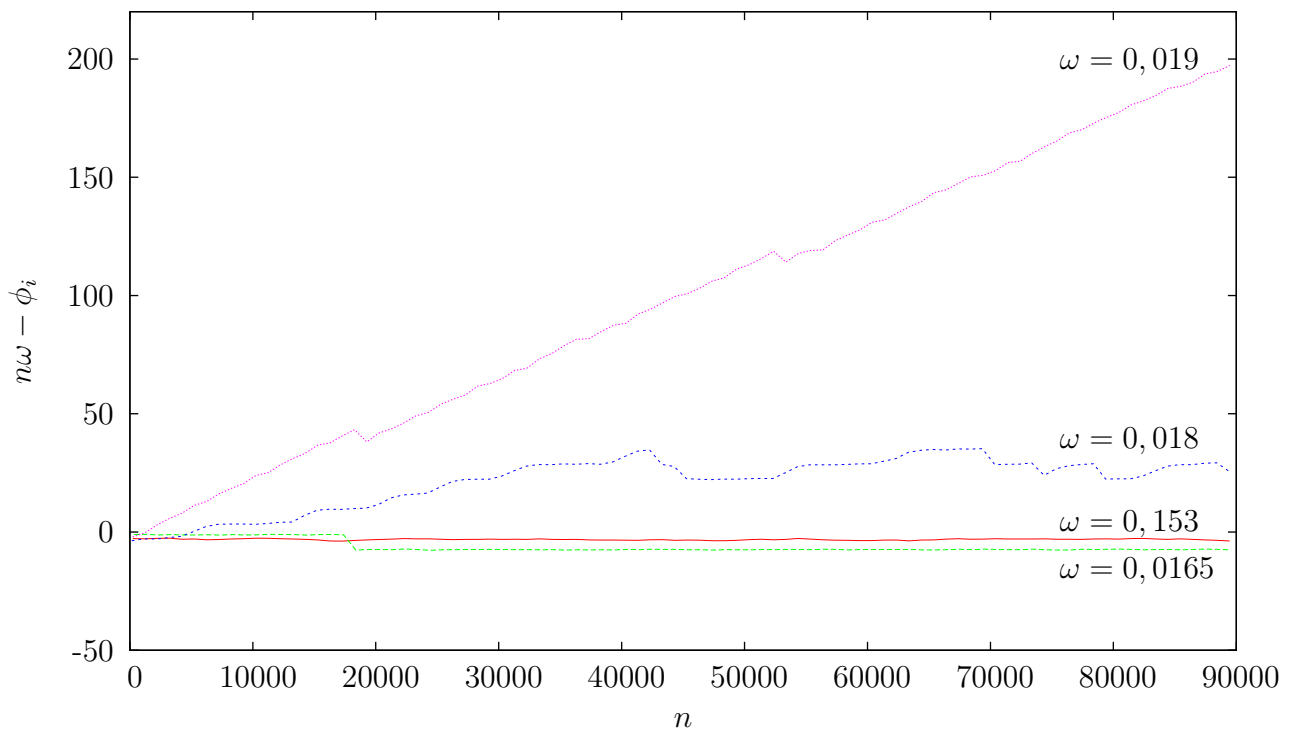


Figura 4.25: Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (unidimensional) para: osciladores travados ($\omega = 0,0153$ e $\omega = 0,0165$); osciladores à deriva ($\omega = 0,018$ e $\omega = 0,019$), $d = 0,05$ $\gamma = 0,005$ e $N=51$.

No caso bidimensional é observado a mesma característica do caso unidimensional, Figura 4.28 para $\gamma = 0,005$ e Figura 4.29 para $\gamma = 0,05$ e na Figura 4.30 para o caso de $\gamma = 1$.

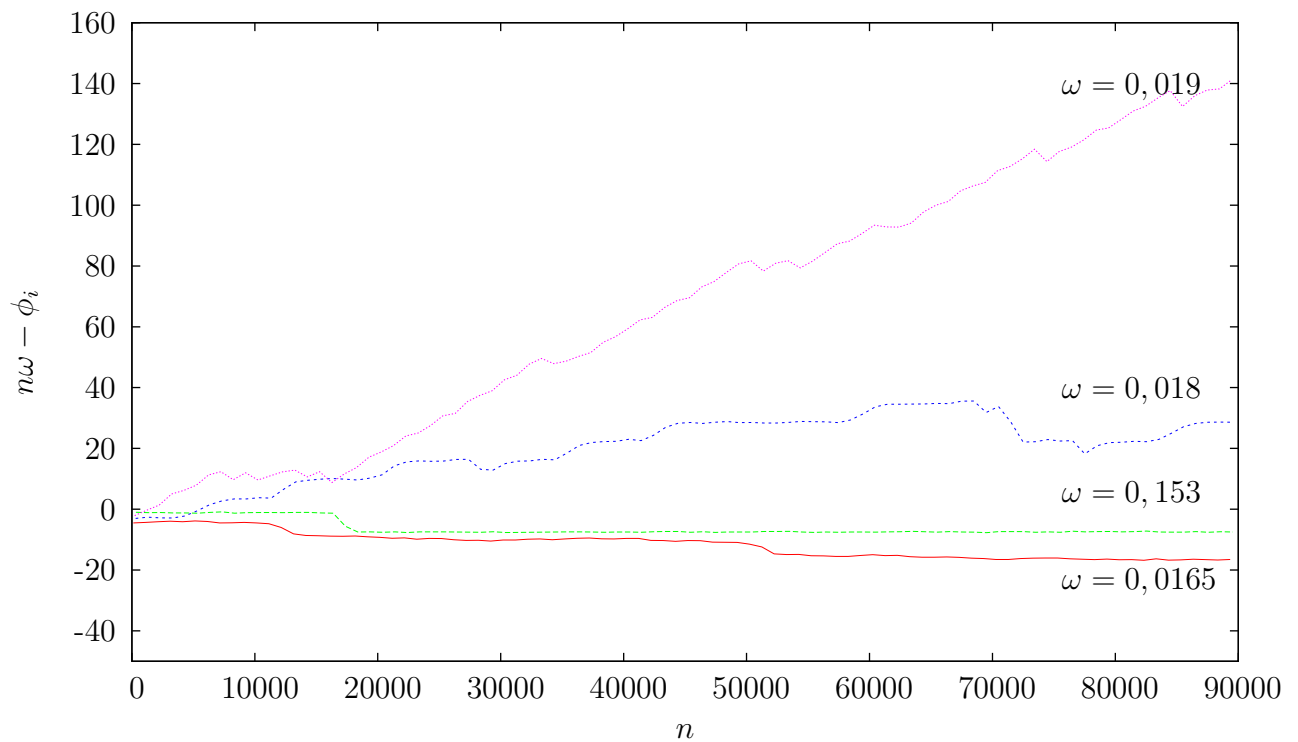


Figura 4.26: Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (unidimensional) para: osciladores travados ($\omega = 0,0153$ e $\omega = 0,0165$); osciladores à deriva ($\omega = 0,018$ e $\omega = 0,019$), $d = 0,05$ $\gamma = 0,05$ e $N=51$.

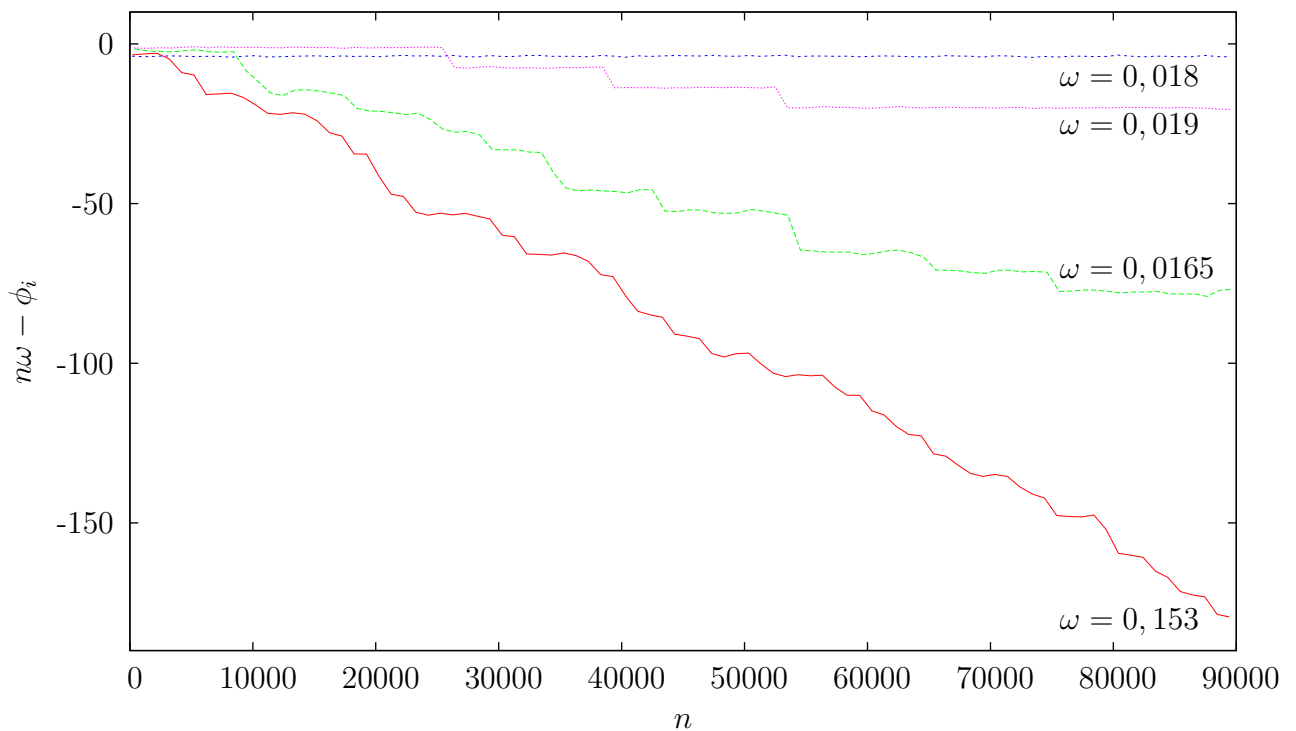


Figura 4.27: Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (unidimensional) para: osciladores travados ($\omega = 0,0153$ e $\omega = 0,0165$); osciladores à deriva ($\omega = 0,018$ e $\omega = 0,019$), $d = 0,05$ $\gamma = 1$ e $N=51$.

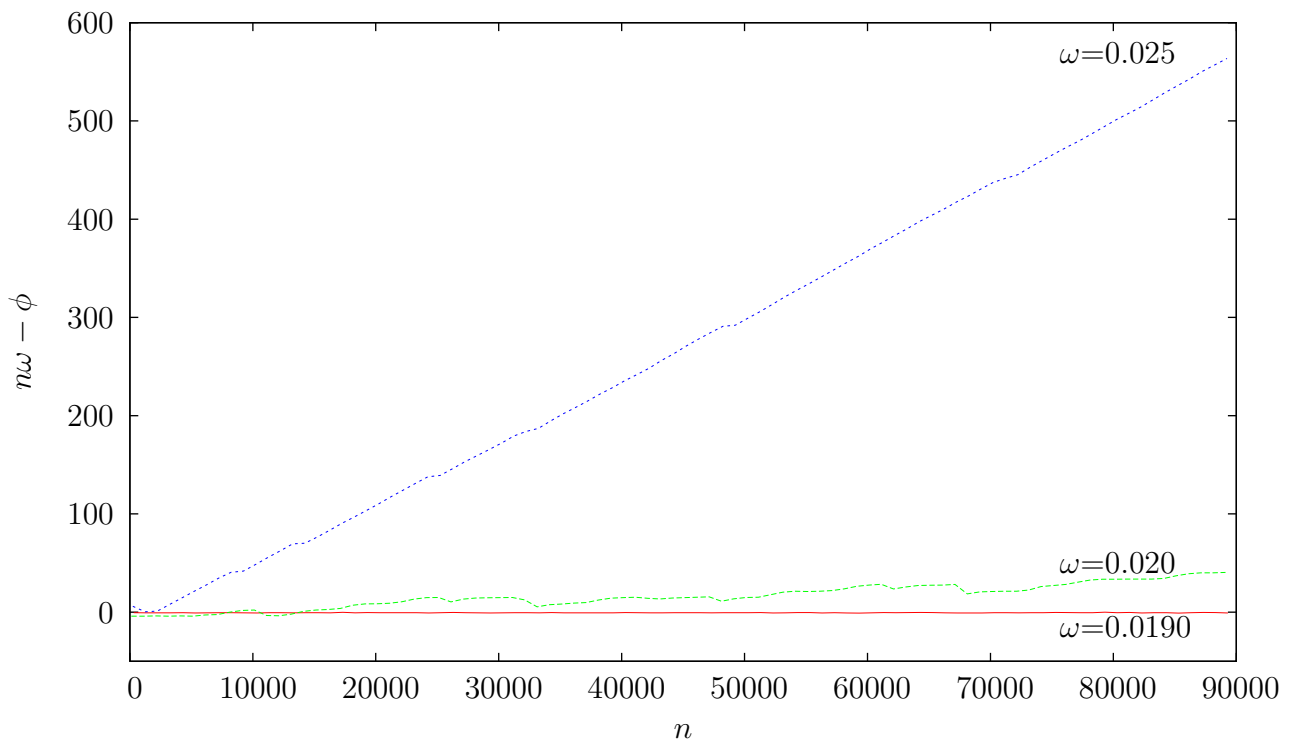


Figura 4.28: Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (bidimensional) para: osciladores travados ($\omega = 0,0190$); osciladores à deriva ($\omega = 0,020$ e $\omega = 0,025$), $d = 0,05$, $N = 7 \times 7$ e $\gamma = 0,005$.

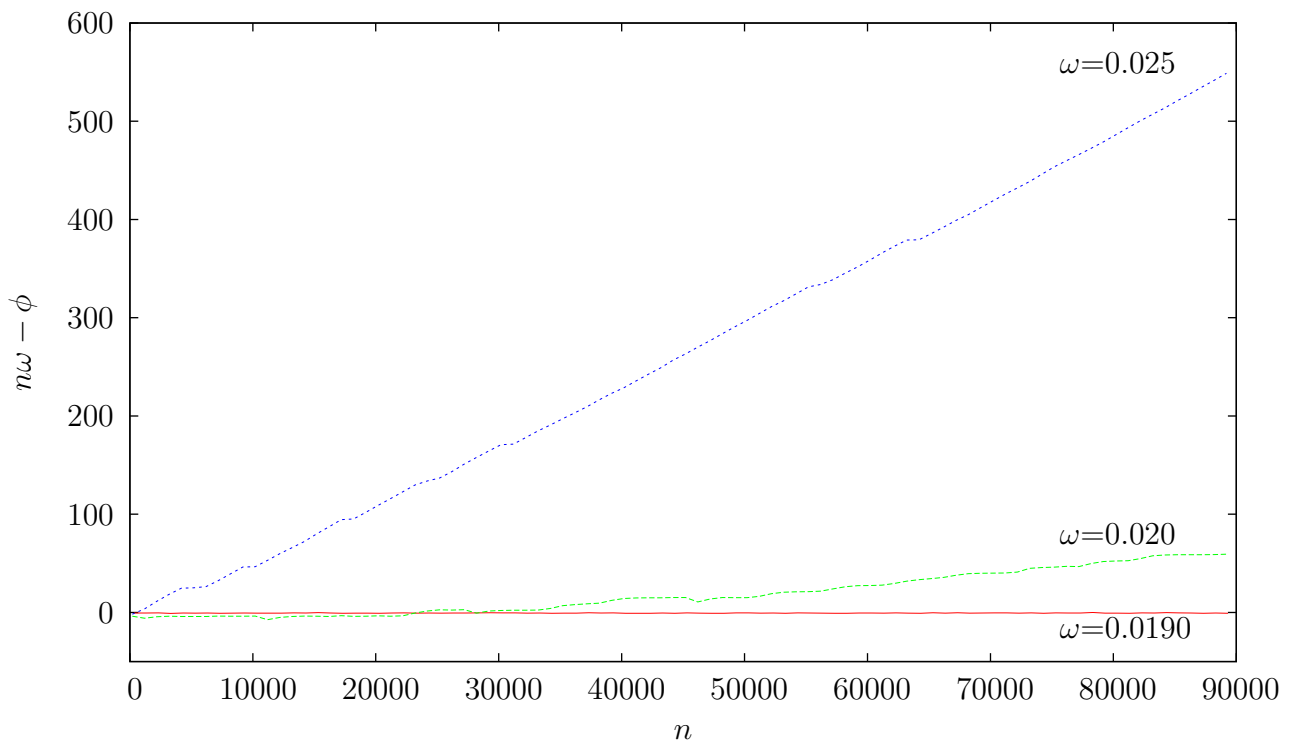


Figura 4.29: Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (bidimensional) para: osciladores travados ($\omega = 0,0190$); osciladores à deriva ($\omega = 0,020$ e $\omega = 0,025$), $d = 0,05$, $N = 7 \times 7$ e $\gamma = 0,05$.

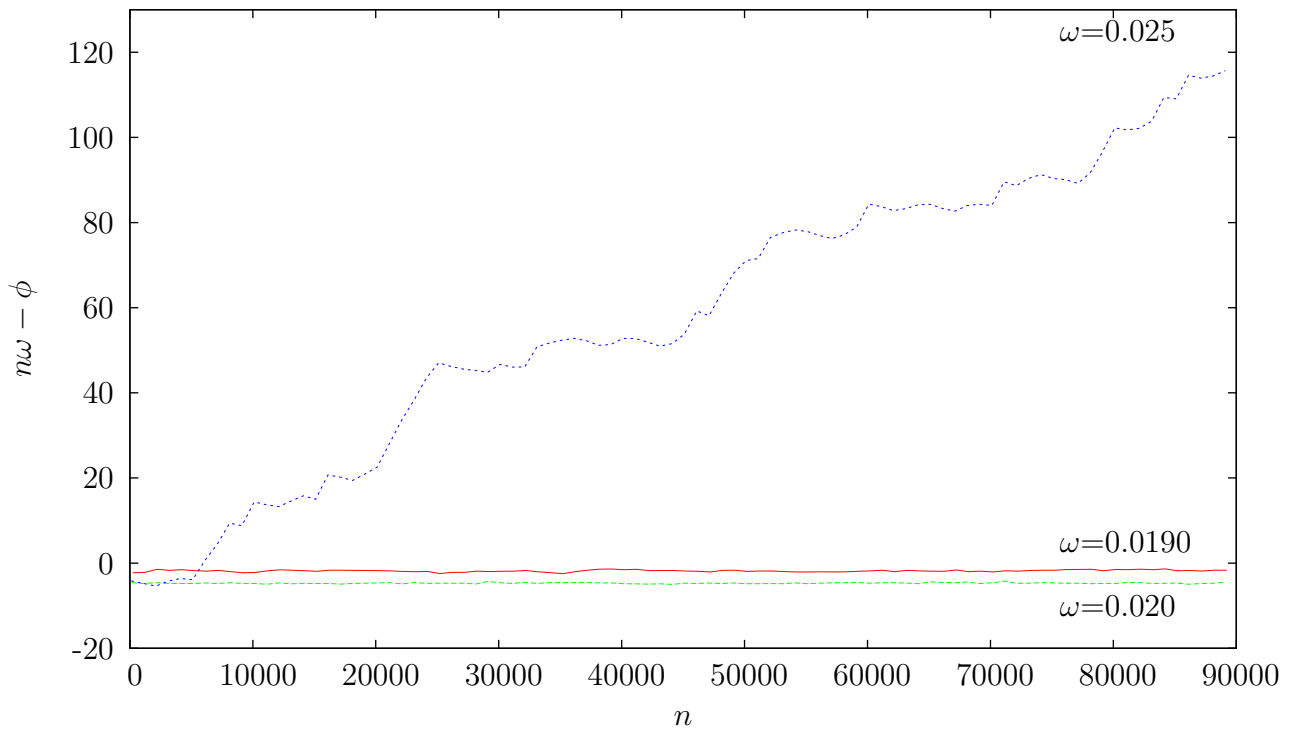


Figura 4.30: Evolução temporal da diferença entre fase dos neurônio e o forçamento externo (bidimensional) para; osciladores travados ($\omega = 0,0190$); e osciladores à deriva ($\omega = 0,020$ e $\omega = 0,025$), $d = 0,05$, $N = 7 \times 7$ e $\gamma = 1$.

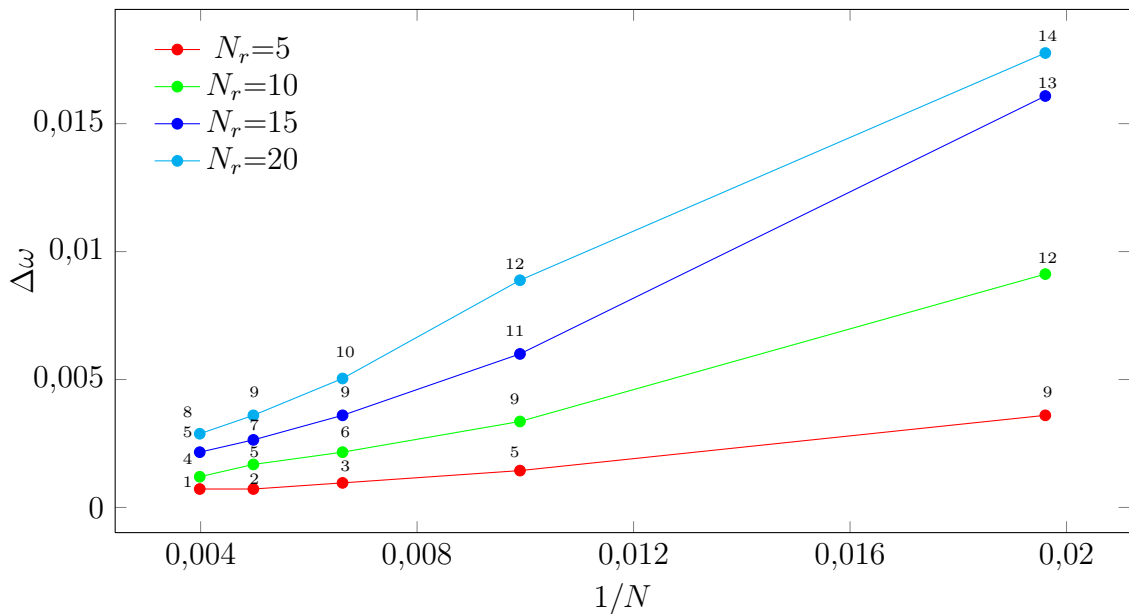


Figura 4.31: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede para vários valores de neurônios forçados para o caso unidimensional $\gamma = 0,005$ $d = 0,15$. Cada número representa uma fração de neurônios forçados (f): 1 temos $f=2\%$; 2 temos $f=2,5\%$; 3 temos $f=3,3\%$; 4 temos $f=4\%$; 5 temos $f=5\%$; 6 temos $f=6,6\%$; 7 temos $f=7,5\%$; 8 temos $f=8\%$; 9 temos $f=10\%$; 10 temos $f=13\%$; 11 temos $f=15\%$; 12 temos $f=20\%$; 13 temos $f=30\%$; 14 temos $f=40\%$.

Tanto o aumento da região de forçamento (N_r) quanto o tamanho da rede influencia no tamanho dos platôs de sincronia. Isso pode ser observado para o caso unidimensional na Figura 4.31 para $\gamma = 0,005$, na Figura 4.32 para $\gamma = 0,05$ e na Figura 4.33 para $\gamma = 1$, e para o caso bidimensional na Figura 4.34 para um $\gamma = 0,005$, na Figura 4.35 para $\gamma = 0,05$ e na Figura 4.36 para $\gamma = 1$, que retrata o tamanho dos platôs ($\Delta\omega$) em função do inverso do tamanho da rede para vários tamanhos de região de forçamento. Em todos os casos é observado que para um mesmo tamanho de região de forçamento, o aumento do tamanho da rede faz com que ocorra uma diminuição do tamanho dos platôs, já um aumento da região de forçamento faz com que ocorra um aumento do tamanho dos platôs. Para o caso unidimensional, as porcentagens de sítios perturbados são as mesmas que o caso global (Figura 3.15), e é observado o mesmo comportamento, para o caso $\gamma = 0,005$, que para o caso global. Já para $\gamma = 0,05$ é observada uma diferença da largura dos platôs para as mesmas porcentagem de sítios perturbados. Para um $\gamma = 1$ mudando o tamanho de sítios perturbados praticamente não alterou a largura dos platôs, isso pode ser explicado observando a Figura 4.20(a), o tamanho do platô é praticamente o mesmo com um aumento da intensidade de forçamento d .

Para o caso bidimensional, o tamanho da rede varia entre 6x6 e 14x14, com isso a porcentagem de sítios perturbados é diferente do caso unidimensional (Figura 4.34), porém para $\gamma = 0,005$ e para $\gamma = 0,05$, o tamanho da largura dos platôs muda pouco para uma mesma porcentagem de sítios perturbados, uma diferença é somente observada para $\gamma = 1$.

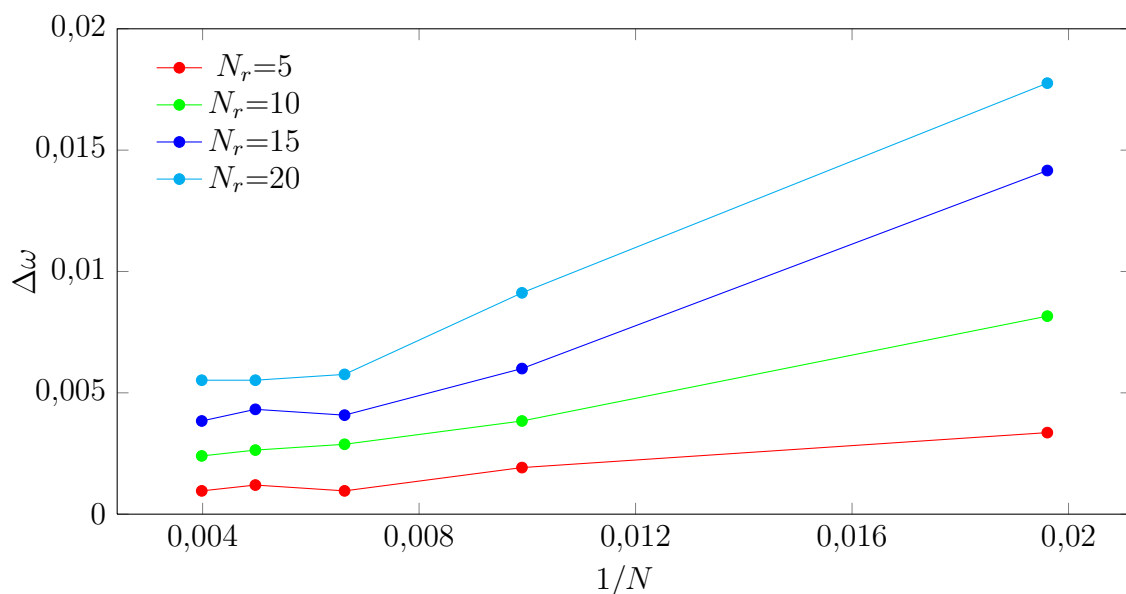


Figura 4.32: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede para vários valores de neurônios forçados para o caso unidimensional $\gamma = 0,05$ $d = 0,15$. As frações de neurônios forçados são as mesmas do caso unidimensional para $\gamma = 0,005$.

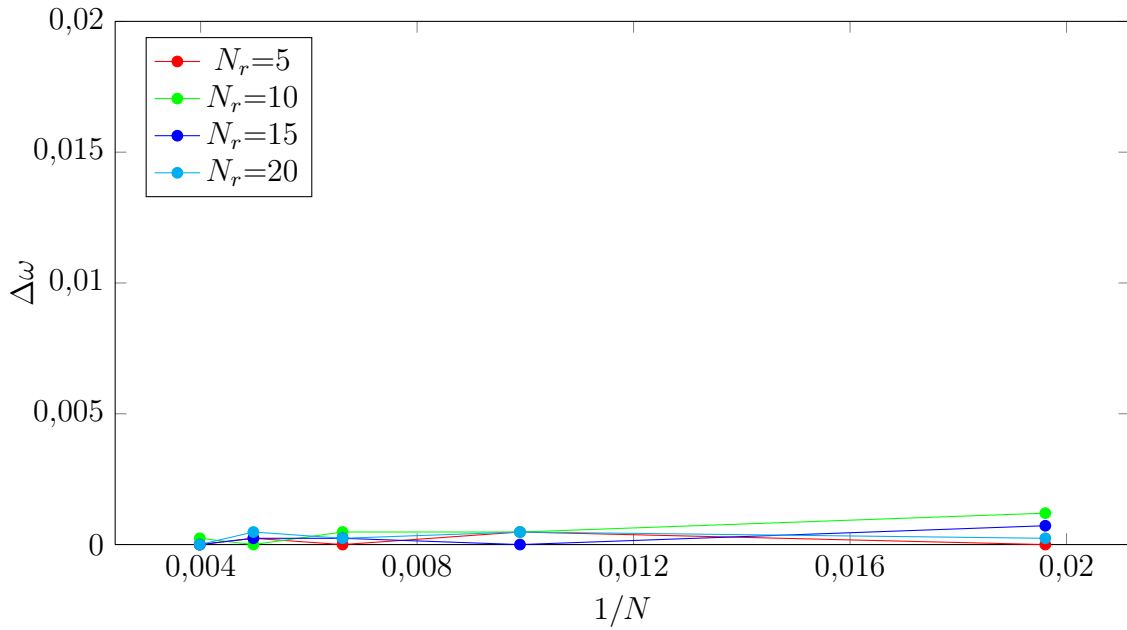


Figura 4.33: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede para vários valores de neurônios forçados para o caso unidimensional $\gamma = 1$ $d = 0, 15$.

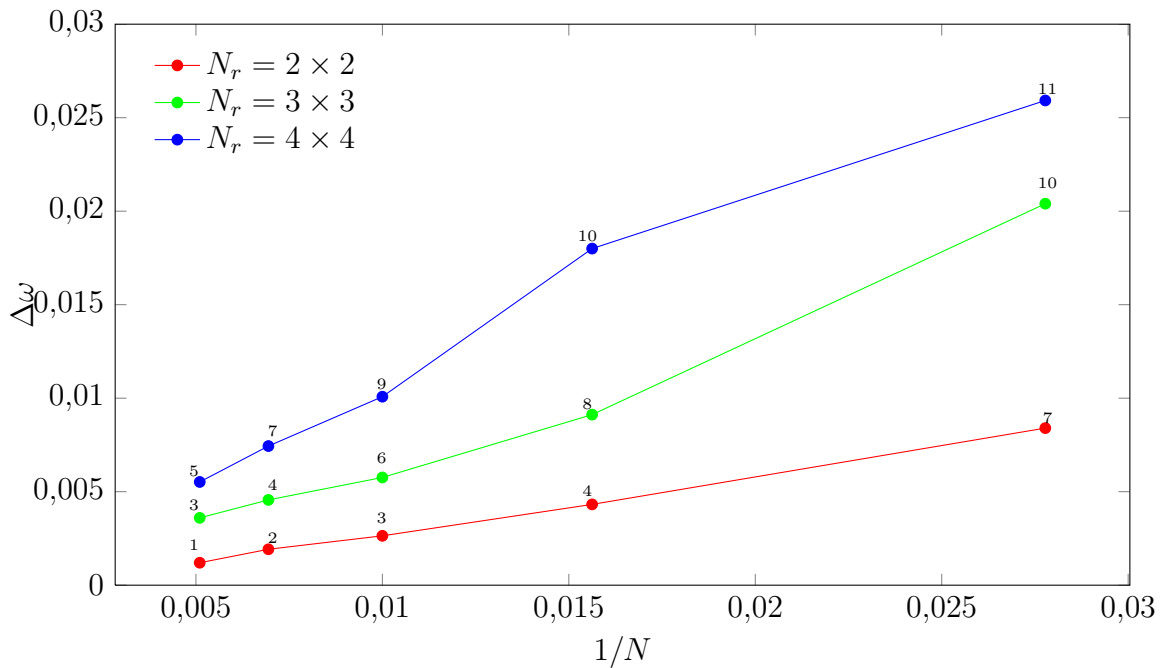


Figura 4.34: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede para vários valores de neurônios forçados para o caso bidimensional $\gamma = 0,005$ $d = 0, 15$. Cada número representa uma fração de neurônios forçados (f): 1 temos $f=2\%$; 2 temos $f=3\%$; 3 temos $f=4\%$; 4 temos $f=6\%$; 5 temos $f=8\%$; 6 temos $f=9\%$; 7 temos $f=11\%$; 8 temos $f=14\%$; 9 temos $f=16\%$; 10 temos $f=25\%$; 11 temos $f=44\%$.

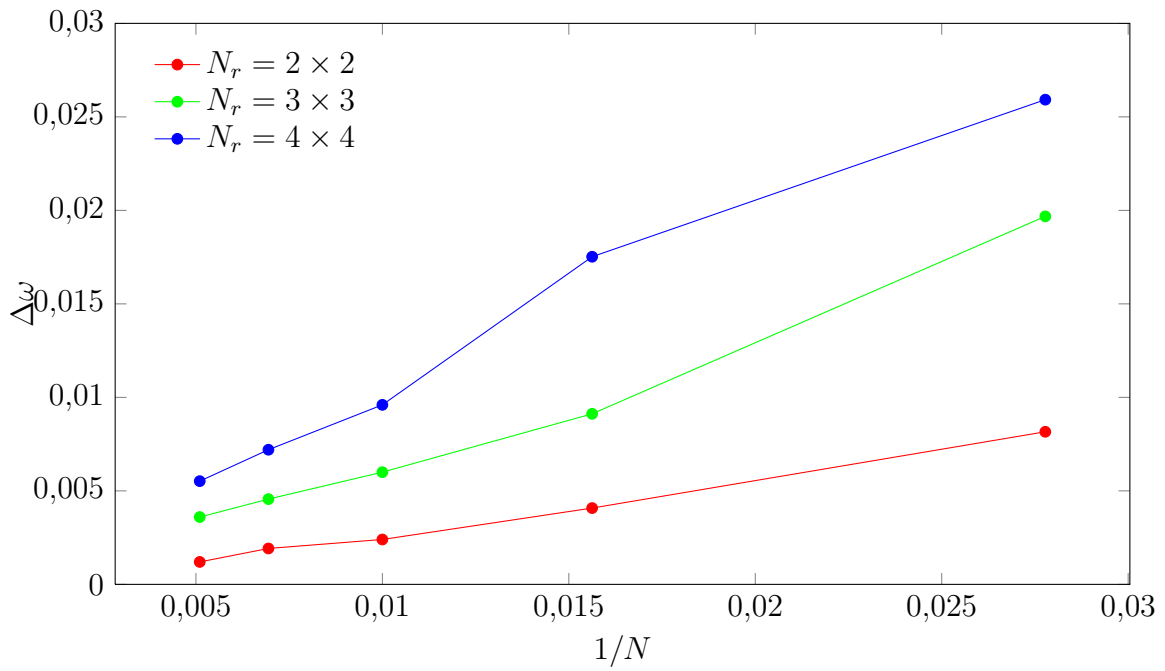


Figura 4.35: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede para vários valores de neurônios forçados para o caso bidimensional $\gamma = 0,05$ $d = 0,15$. As frações de neurônios forçados são as mesmas do caso bidimensional para $\gamma = 0,005$.

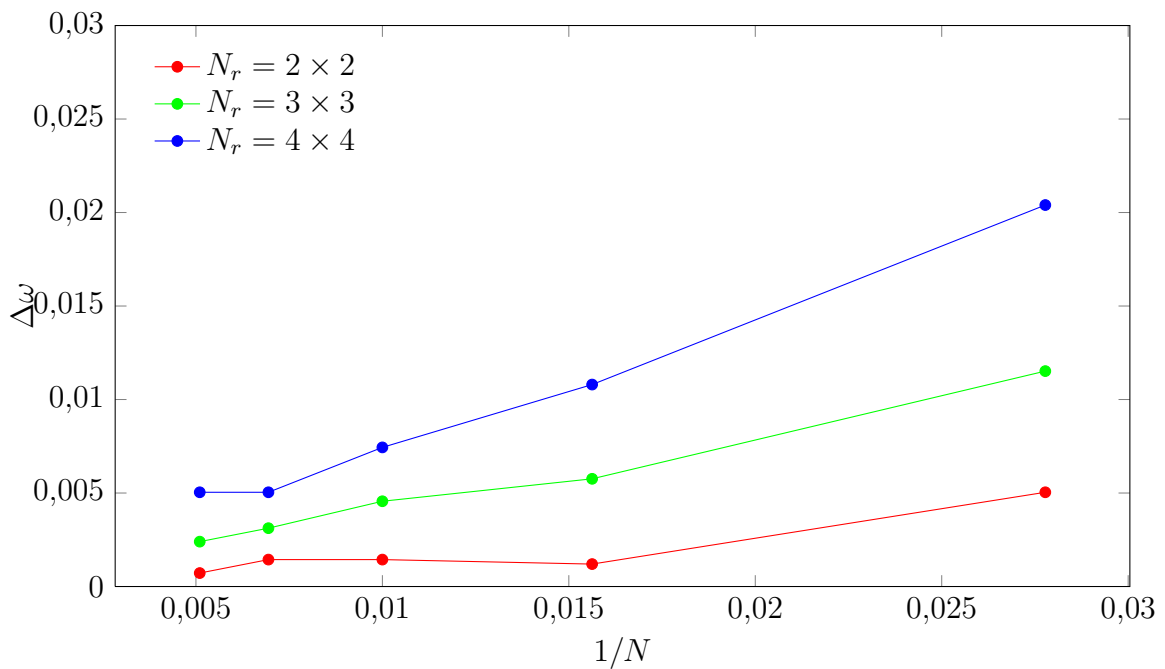


Figura 4.36: Evolução do tamanho dos platôs em função do inverso do tamanho da rede para vários valores de neurônios forçados para o caso bidimensional $\gamma = 1$ $d = 0,15$. As frações de neurônios forçados são as mesmas do caso bidimensional para $\gamma = 0,005$.

Conclusões

Com o intuito de determinar casos de sincronia entre neurônios e maneira de suprimir essa sincronia, simulou-se computacionalmente um modelo neuronal usando o mapa de Rulkov para a dinâmica de cada neurônio, e suas interações foram dadas a partir de um modelo na qual uma substância é secretada e absorvida por um neurônio e difundida no meio celular. Esta difusão faz com que a concentração da substância química decaia com a distância, fazendo com que neurônios mais afastados sejam menos influenciados dos que os próximos. O decaimento se deve a uma variável γ e foi analisado como o sistema se comporta com a mudança de seu valor. Quanto maior o valor de γ , menos a substância se difunde no meio logo temos um acoplamento local, e se $\gamma = 0$, a substância se difunde em todo o meio, caracterizando assim um acoplamento global (todos com todos).

Outro parâmetro analisado foi a intensidade do acoplamento, dado pela variável ε . Quando o acoplamento é fraco ($\varepsilon \leq 0,02$) a dinâmica de um neurônio não tem influência significativa na dinâmica de outro. Quando $\varepsilon \geq 0,02$ é observada uma sincronização parcial entre os neurônios, fazendo com que a dinâmica de um neurônio influencie nos outros, e essa influência aumenta quanto mais próximo de 1 é o parâmetro de ordem.

Para suprimir a sincronia, é injetado no sistema um forçamento externo periódico com uma frequência ω e uma intensidade d , sendo esse forçamento injetado em uma região N_r da rede. Com isso, pode-se observar que, para uma frequência baixa, o forçamento não muda a dinâmica neuronal, porém o aumento da frequência externa faz com que essa frequência e a frequência de *burst* (Ω) sincronizem, ocasionando assim os chamados platôs de sincronia. Esse fenômeno é observado tanto para os casos de γ baixo (sistema sincronizado) como para γ alto (sistema dessincronizado). Um maior aumento da frequência ω faz com que o sistema saia do estado de sincronia. Logo esse forçamento externo pode fazer com que o sistema dessincronizado sincronize, como também pode fazer com que o

sistema saia do estado de sincronia.

O aumento da intensidade do forçamento d faz com que aumente a região de sincronização entre ω e Ω , ou seja, aumento da largura dos platôs de sincronia. Outro fato que faz com que aumente a largura dos platôs é o tamanho da rede (N) para quando $\gamma \leq 0,5$, e o tamanho da região (N_r) em que é aplicado o forçamento externo. Utilizando $f = \frac{N_r}{N}$ como a porcentagem de neurônios perturbados, pode-se observar que quanto maior o valor de f maior a largura dos platôs. Tanto para um valor de γ baixo ($0,005 \leq \gamma \leq 0,05$) quanto para o caso global, é observado que para um mesmo valor de f , a largura dos platôs de sincronia são iguais. Já com um aumento de γ para dois casos em que tem-se um mesmo valor de f , a largura do platô é maior para o sistema na qual a região de forçamento N_r é maior.

O crescimento da largura dos platôs por causa do aumento da intensidade d não ocorre de maneira regular, mas sim foi observado um crescimento mais rápido para valores baixos de d , e um crescimento lento para valores altos.

Como os casos estudados foram casos de acoplamento unidimensional e bidimensional, o intuito agora é estudar o caso tridimensional com uma rede maior e comparar com os casos obtidos, porém utilizando redes maiores. Outro estudo que pode ser feito é mudar o formato da rede, pois em ambos os casos, unidimensional ou bidimensional, foram estudados levando em consideração um sistema em que os neurônios estão igualmente espaçados. Utilizar um sistema no qual a posição de cada neurônio seja aleatoriamente estabelecida, para fazer com que o sistema se assemelhe mais com um caso real.

Travamento de frequência

Considere um caso simples de um oscilador forçado externamente por uma força periódica com frequência ω e amplitude ϵ . As equações do sistema perturbado podem ser escritas como

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \epsilon Q(\phi, \omega t), \quad (\text{A.1})$$

com ω_0 sendo a frequência natural do oscilador, Q é uma função de acoplamento 2π periódica e ϕ é a fase do oscilador.

Podemos reescrever A.1 a partir da diferença de fase entre o oscilador e a frequência externa

$$\Psi = \phi - \omega t \Rightarrow \phi = \Psi + \omega t, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d(\Psi + \omega t)}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} + \frac{d(\omega t)}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} + \omega \frac{dt}{dt} + t \frac{d\omega}{dt}, \quad (\text{A.3})$$

como ω é constante e substituindo em A.1

$$\frac{d\Psi}{dt} = -(\omega - \omega_0) + \epsilon Q(\Psi). \quad (\text{A.4})$$

No caso mais simples $Q(\Psi) = \sin(\Psi)$ e usando $\nu = \omega - \omega_0$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\nu + \epsilon \sin(\Psi), \quad (\text{A.5})$$

que é conhecida como equação de Adler. Podemos analisar 2 casos

1) Quando $\omega \approx \omega_0$ ou seja no caso de ressonância, neste caso

$$\frac{d\Psi}{dt} = \epsilon Q(\Psi), \quad (\text{A.6})$$

tendo somente um ponto estável, que é em $\Psi = 0$, logo A.3 fica $\phi = \omega t$ mostrando que a fase do sistema cresce linearmente.

2) No segundo caso é analisada a periodicidade da função $Q(\Psi)$. Como ela foi definida como 2π periódica logo existe um Q_{min} e um Q_{max} então a frequência ν está no intervalo [13]

$$\epsilon Q_{min} < \nu < \epsilon Q_{max}, \quad (\text{A.7})$$

com isso, a diferença de frequência $\omega - \omega_0$ é uma constante, sendo assim, a fase do oscilador fica travada com a fase da frequência externa ωt , chamado assim esta região de travamento de frequência, ou observando a Figura A.1, o formato desta região de sincronia parece uma língua, com isso essa região também é chamada de Língua de Arnold.

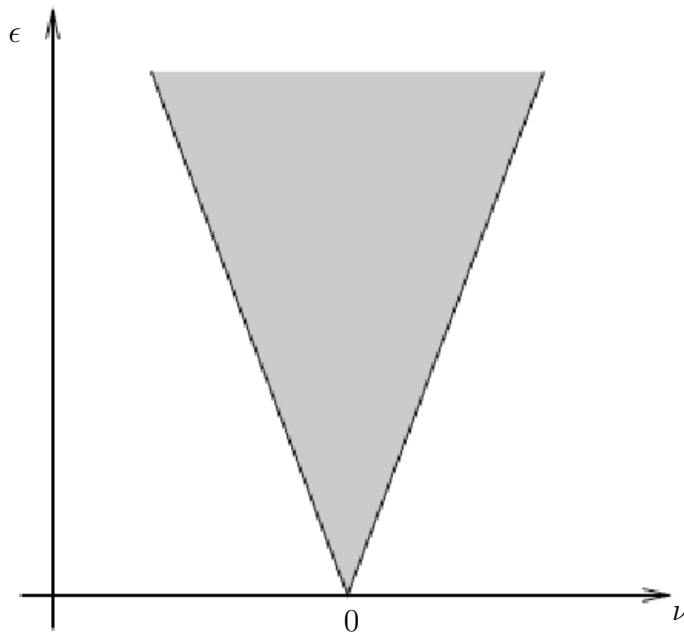


Figura A.1: Região de sincronização.

Resolução da Equação 4.3

Por simplicidade, chamaremos $\gamma^2 = \frac{\eta}{D}$. Utilizando a função de Green, podemos escrever a Equação 4.3 como,

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) - \gamma^2 G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}). \quad (\text{B.1})$$

Para resolver a Equação B.1 é aplicada a transformada de Fourier em cada termo, mas antes algumas relações são necessárias [32].

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = f_F(\mathbf{p}), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{F}\{\nabla^2 f(\mathbf{r})\} = -\mathbf{p}^2 f_F(\mathbf{p}), \quad (\text{B.3})$$

onde a transformada de Fourier e sua inversa é dada por

$$f_F(\mathbf{p}) = \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d \mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (\text{B.4})$$

$$f(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\{f_F(\mathbf{p})\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d \mathbf{p} f_F(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (\text{B.5})$$

Aplicando a transformada de Fourier na Equação B.1 temos

$$-\mathbf{p}^2 G_F(\mathbf{r}_j - \mathbf{p}) - \gamma^2 G_F(\mathbf{r}_j - \mathbf{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_j}, \quad (\text{B.6})$$

onde a propriedade da filtragem da função delta foi utilizada na transformada de Fourier, isolando $G_F(\mathbf{p})$ chegamos à seguinte relação

$$G_F(\mathbf{r}_j - \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_j}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2}. \quad (\text{B.7})$$

Utilizando a transformada inversa na Equação B.7, podemos determinar a função de Green para a Equação 4.3

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_f(\mathbf{r}_j - \mathbf{p})\} = G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2}. \quad (\text{B.8})$$

Com isso podemos resolver a Equação B.8 para cada dimensão.

B.0.2 Resolução para $d = 1$

A Equação B.8 se torna

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \mathcal{I} = \frac{1}{(2\pi)} \int dp_x \frac{e^{ip_x(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}}{p_x^2 + \gamma^2}. \quad (\text{B.9})$$

Essa integral pode ser resolvida através do teorema dos resíduos. Transpondo essa integral para o plano complexo, e integrando em um semicírculo temos

$$\mathcal{I} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-R}^{+R} dp_x \frac{e^{ip_x(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}}{p_x^2 + \gamma^2}. \quad (\text{B.10})$$

O teorema de resíduos nos diz que

$$\mathcal{I} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f(z_i), a_i), \quad (\text{B.11})$$

onde a_i são os polos de $f(z_i)$. Para esse caso

$$f(z_i) = \frac{e^{ip_x(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}}{p_x^2 + \gamma^2}, \quad (\text{B.12})$$

cujo os polos são $\pm i\gamma$, e são polos simples por não estarem elevados a nenhuma potência, neste caso o resíduo é

$$\text{Res}(f(z_i), a_i) = \lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i) f(z_i). \quad (\text{B.13})$$

Para essa integração iremos utilizar um semi-círculo no eixo positivo (Figura B.1),

com isso temos um dos polos ($i\gamma$) dentro da curva de integração e outro polo ($-i\gamma$), que se encontra fora da curva de integração, logo o resíduo neste polo fora da curva é zero.

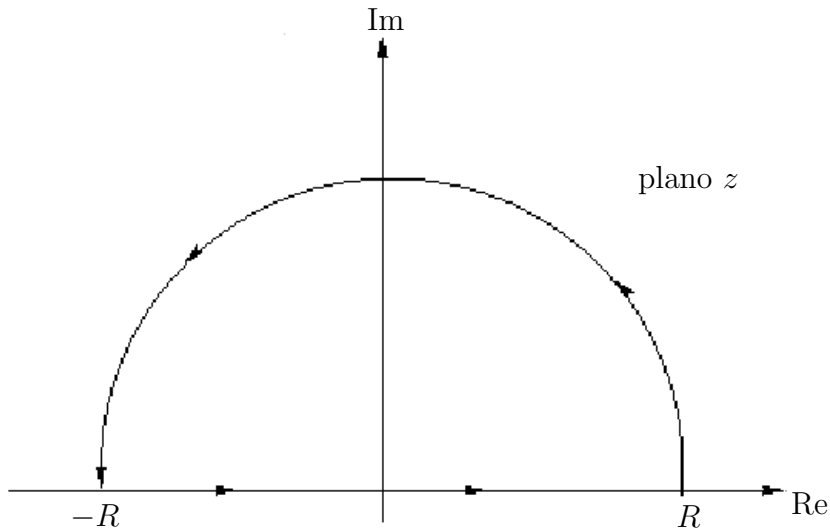


Figura B.1: Curva de integração.

Logo

$$\lim_{z \rightarrow +i\gamma} (z - i\gamma) \frac{e^{izR}}{(z - i\gamma)(z + i\gamma)} = \frac{e^{-\gamma R}}{2i\gamma}, \quad (\text{B.14})$$

Com isso podemos reescrever a função de Green como

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = C_1 \frac{e^{-\gamma R}}{\gamma}, \quad (\text{B.15})$$

onde C_1 é a constante de normalização.

B.0.3 Resolução para $d = 2$

Para esse caso a Equação B.8 é

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2}. \quad (\text{B.16})$$

Para duas dimensões são usadas coordenadas polares, com isso $\mathbf{r} = (r, \theta)$ e $\mathbf{p} = (p, \vartheta)$, o elemento de superfície neste caso se torna $d^2\mathbf{p} = pdp d\vartheta$, e lembrando que podemos escrever $\mathbf{p}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = p|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}| \cos(\vartheta)$, e com isso podemos reescrever a Equação B.16

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2} \int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}| \cos(\vartheta)} d\vartheta. \quad (\text{B.17})$$

Através da relação de Jacobi-Anger

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\theta), \quad (\text{B.18})$$

segundo Abramowitz e Stegun [33]

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos(\theta)} \cos(n\theta) d\theta. \quad (\text{B.19})$$

Fazendo $n = 0$ na Equação B.19 temos

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos(\theta)} d\theta, \quad (\text{B.20})$$

que é justamente a segunda integral da Equação B.17 com $z = \mathbf{p}|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|$. Com isso essa equação se torna

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = C \int_0^\infty \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2} J_0(p|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|), \quad (\text{B.21})$$

Podemos substituir as constantes antes da integral por C_2 sem perda de generalidade. Outra relação importante é a integral de Hankel-Nicholson, dada por

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu+1} J_\nu(at) dt}{(t^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az), \quad (\text{B.22})$$

onde Γ é a função gama, e $K_{\nu-\mu}$ é a função modificada de Bessel. Fazendo $\nu = 0, \mu = 0, t = p, z = \gamma$ e $a = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|$ na integral de Hankel-Nicholson, obtemos justamente a integral da Equação B.26, e com isso podemos determinar a função de Green para o caso $d = 2$ e chegar em

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = C_2 K_0(\gamma|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|). \quad (\text{B.23})$$

B.0.4 Resolução para $d = 3$

Para esse caso, a equação B.8 é

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2}. \quad (\text{B.24})$$

Para este caso serão utilizadas coordenadas esféricas, com isso $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ e $\mathbf{p} = (p, \vartheta, \varphi)$, o elemento de volume neste caso se torna $d^3\mathbf{p} = p^2 \sin(\vartheta) dp d\vartheta d\varphi$, podemos reescrever o elemento de volume como $d^3\mathbf{p} = p^2 dp d(\cos(\vartheta)) d\varphi$ substituindo na Equação B.24 temos

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2} \int_{-1}^{+1} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \cos(\vartheta)} d(\cos(\vartheta)). \quad (\text{B.25})$$

A primeira integral pode ser resolvida facilmente, integrando e aplicando os limites de integração e usando a propriedade dos senos. $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ temos

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{-i}{(2\pi)^2 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{p} d\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + \gamma^2} e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|}. \quad (\text{B.26})$$

Para resolver essa integral algumas substituições são necessárias, usando $\mathbf{q} = \mathbf{p}|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|$, $\sigma = \gamma|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|$ a integral B.26 se torna

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{-i}{(2\pi)^2 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}d\mathbf{q}}}{\mathbf{q}^2 + \sigma^2} e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|}. \quad (\text{B.27})$$

Para resolver essa integral utiliza-se o teorema dos resíduos, que é similar ao utilizado para o caso $d = 1$. Os polos neste caso são $\pm i\sigma$, definindo uma curva de integração um semi-círculo no eixo imaginário positivo, o resíduo para $-i\sigma$ é zero por estar fora da curva de integração, logo somente o resíduo $i\sigma$ é levado em consideração. Com isso o resíduo para este caso é

$$\text{Res}(f(z), i\sigma) = \lim_{z \rightarrow i\sigma} (z - i\sigma) \frac{z e^{iz}}{(z + i\sigma)(z - i\sigma)} = \frac{e^{-\sigma}}{2}, \quad (\text{B.28})$$

e a função de Green para o caso $D = 3$ se torna

$$G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) = \frac{C e^{-\gamma R}}{\gamma R}, \quad (\text{B.29})$$

onde podemos trocar as constantes por $\frac{C_3}{\gamma}$ sem perda de generalidade e $R = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|$. A constante C_3 será determinada de maneira para deixar a função de Green normalizada, *i.e*

$$\int G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1. \quad (\text{B.30})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. L. Benabid, P. Pollak, D. Hoffmann, C. Gervason, M. Hommel, J. E. Perret, J. de Rougemont e D. M. Gao. Long-term suppression of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamic nucleus. *Lancet* **337**, 403–406 (1991).
- [2] A. Dovzhenok, C. Park, R. Worth e Rubchinsky. Failure of Delayed Feedback Deep Brain Stimulation for Intermittent Pathological Synchronization in Parkinson’s Disease. *PLoS ONE* **8**, 58264 (2013). doi: 10.1371/journal.pone.0058264. arXiv:1302.1758.
- [3] C. J. Schwiening. A brief historical perspective: Hodgkin and Huxley. *The Journal of Physiology* **590**, 11, 2571–2575 (2012). doi: 10.1113/jphysiol.2012.230458. arXiv:<http://jp.physoc.org/content/590/11/2571.full.pdf+html>, URL <http://jp.physoc.org/content/590/11/2571.short>.
- [4] M. S. B. Ibarz, J.M. Casado. Map-based models in neuronal dynamics (2011).
- [5] N. F. Rulkov. Regularization of Synchronized Chaotic Bursts. *Physical Review Letters* **86**, 1, 183–186 (2001).
- [6] M. V. Ivanchenko, G. V. Osipov, V. D. Shalfeev e J. Kurths. Phase Synchronization in Ensembles of Bursting Oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 134101 (2004). doi: 10.1103/PhysRevLett.93.134101. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.134101>.
- [7] R. Viana, A. Batista, C. Batista, J. de Pontes, F. Silva e S. Lopes. Bursting synchronization in networks with long-range coupling mediated by a diffusing chemical substance. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* **17**, 2924–2942 (2012). doi: 10.1016/j.cnsns.2011.11.016. arXiv:1109.3332.

- [8] H. Nakao. Anomalous spatio-temporal chaos in a two-dimensional system of non-locally coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **9**, 4, 902–909 (1999). doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.166463>. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/chaos/9/4/10.1063/1.166463>.
- [9] Y. Kuramoto. Scaling Behavior of Turbulent Oscillators with Non-Local Interaction. *Progress of Theoretical Physics* **94**, 3, 321–330 (1995). doi: 10.1143/PTP.94.321. arXiv:<http://ptp.oxfordjournals.org/content/94/3/321.full.pdf+html>, URL <http://ptp.oxfordjournals.org/content/94/3/321.abstract>.
- [10] P. J. Uhlhaas e W. Singer. Neural Synchrony in Brain Disorders: Relevance for Cognitive Dysfunctions and Pathophysiology. *Neuron* **52**, 1, 155 – 168 (2006). doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.neuron.2006.09.020>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0896627306007276>.
- [11] Y. Kuramoto e I. Nishikawa. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. Case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics* **49**, 3-4, 569–605 (1987). doi: 10.1007/BF01009349. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01009349>.
- [12] Y. Kuramoto. Cooperative Dynamics of Oscillator Community: A Study Based on Lattice of Rings. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **79**, 223–240 (1984). doi: 10.1143/PTPS.79.223. arXiv:<http://ptps.oxfordjournals.org/content/79/223.full.pdf+html>, URL <http://ptps.oxfordjournals.org/content/79/223.abstract>.
- [13] A. Pikovsky, M. Rosenblum e J. Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series (Cambridge University Press, 2003). URL <http://books.google.com.br/books?id=FuIv845q3QUC>.
- [14] M. K. Mclintock. Menstrual Synchrony and Suppression. *Nature* **229**, 244–245 (1971).
- [15] C. S. Peskin. Mathematical Aspect of Heart Physiology. *Courant Inst. of Math. Sci. Publication* páginas 268–278 (1975).
- [16] B. J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies II. *Quart. Rev. Biol.* páginas 265–289 (1988).
- [17] S. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* (Hyperion, 2003). URL <http://books.google.com.br/books?id=mtQvcPbzFfwC>.

- [18] A. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Interdisciplinary Applied Mathematics (Springer New York, 2001). URL <http://books.google.com.br/books?id=5YktgBuog1AC>.
- [19] A. Winfree. Biological rhythms and the behavior of population of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology* **49**, 15–42 (1967).
- [20] J. J. Tyson e L. Glass. Arthur T. Winfree (1942–2002). *Journal of Theoretical Biology* **230**, 4, 433 – 439 (2004). doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.04.042>. Special Issue in honour of Arthur T. Winfree, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519304002346>.
- [21] R. Bertram. Synchronization and Phase Oscillators URL http://www.math.fsu.edu/~bertram/presentations/workshops/MBI_08/sync.pdf.
- [22] URL http://mathinsight.org/synchrony_phase_oscillators_idea.
- [23] A. Kuramoto, Yoshiki. H. *Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics* (1975).
- [24] S. H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D Nonlinear Phenomena* **143**, 1–20 (2000). doi: 10.1016/S0167-2789(00)00094-4.
- [25] B. C. Daniels. Synchronization of Globally Coupled Nonlinear Oscillators: the Rich Behavior of the Kuramoto Model (2005).
- [26] A. Luo e J. Sun. *Complex Systems: Fractionality, Time-delay and Synchronization*. Nonlinear Physical Science (Springer, 2011). URL <https://books.google.com.br/books?id=-pvWCKtFQwgC>.
- [27] V. Ivancevic e T. Ivancevic. *Computational Mind: A Complex Dynamics Perspective*. Studies in Computational Intelligence (Springer, 2007). URL <https://books.google.com.br/books?id=tNZLF8gtx-EC>.
- [28] E. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience*. Computational neuroscience (MIT Press, 2007). URL <http://books.google.com.br/books?id=kVjM6DFk-twC>.
- [29] A. L. Hodgkin e A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology* **117**, 4, 500–544 (1952). arXiv:<http://jp.physoc.org/content/117/4/500.full.pdf+html>, URL <http://jp.physoc.org/content/117/4/500.short>.

- [30] URL <http://www.scholarpedia.org/article/Bursting>.
- [31] J. de Pontes, R. Viana, S. Lopes, C. Batista e A. Batista. Bursting synchronization in non-locally coupled maps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **387**, 16–17, 4417 – 4428 (2008). doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2008.03.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108002884>.
- [32] D. Duffy. *Green's Functions with Applications*. Applied Mathematics (Taylor & Francis, 2001). URL <http://books.google.com.br/books?id=J-HQL3nEOAwC>.
- [33] I. A. S. Milton Abramowitz. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Cambridge Nonlinear Science Series (Dover Publications, 1964).