

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CÉSAR AUGUSTO MARIN

**ESTUDO NUMÉRICO DA INFLUÊNCIA DE PARCELAS
IMPERMEÁVEIS EM BACIAS DE DRENAGEM**

CURITIBA

2010

CÉSAR AUGUSTO MARIN

**ESTUDO NUMÉRICO DA INFLUÊNCIA DE PARCELAS
IMPERMEÁVEIS EM BACIAS DE DRENAGEM**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do grau mestre em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental do Departamento de Hidráulica e Saneamento da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Marcelo Risso Errera, Ph.D.

CURITIBA

2010

M337e

Marin, César Augusto

Estudo numérico da influência de parcelas impermeáveis em bacias de drenagem/ César Augusto Marin. – Curitiba, 2010.

131 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Hídricos, 2010.

Orientador: Marcelo Riso Errera .

Bibliografia: p. 126-131.

1. Redes de longa distância (Redes de computação). 2. Formação de padrões (Ciências físicas). 3. Geomorfologia. 4. Método dos Elementos Finitos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Errera, Marcelo Riso. III. Título.

CDD: 514.74



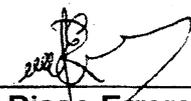
TERMO DE APROVAÇÃO

CÉSAR AUGUSTO MARIN

“ESTUDO NUMÉRICO DA INFLUÊNCIA DE PARCELAS IMPERMEÁVEIS EM BACIAS
DE DRENAGEM”

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, pela comissão formada pelos professores:

PRESIDENTE:



Marcelo Riso Errera
Universidade Federal do Paraná
Orientador

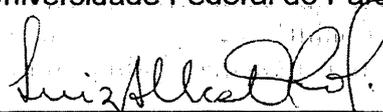
MEMBROS:



Cristovão Vicente Scapulatempo Fernandes
Universidade Federal do Paraná



Mauricio Felga Gobbi
Universidade Federal do Paraná



Luiz Alberto de Oliveira Rocha
Universidade Federal do Rio Grande



Silvio Luis de Mello Junqueira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Curitiba, 16 de abril de 2010

*Dedico este trabalho ao Senhor Jesus
Cristo e a toda a minha família.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço imensamente a Deus, pela iluminação e por criar os caminhos quem me levaram até aqui, e a Jesus, seu Filho, por ter vindo até aqui para nos mostrar o caminho de seu Pai.

Gostaria de expressar minha total admiração ao prof. Dr. Marcelo Risso Errera, pelo tempo dedicado à supervisão deste trabalho e os conselhos profissionais, que serão muito úteis em minha carreira. A dedicação aos seus alunos e à pesquisa, bem como sua paciência, fizeram muita diferença ao longo deste trabalho.

Gostaria de agradecer também ao prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha, por conseguir o nosso acesso ao FIDAP® no sistema da Duke University, sem o qual este trabalho não teria possível; e pelo apoio durante a realização do III MCSUL. Agradeço também aos professores que junto formaram a banca deste trabalho, pelo tempo dispendido e pelas valiosas avaliações.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Décio e Marlene, pelo apoio infinitamente disponibilizado, muitas vezes se sacrificando para tornar o meu estudo possível; à minha irmã e seu cônjuge, pela ajuda também infinita. Também a todos os amigos antigos, e aos novos grandes amigos formados ao longo de minha trajetória na universidade, em especial ao Osires e ao Marcão, sempre compartilhando as alegrias e tristezas um do outro; e aos companheiros da quase-extinta banda Catavento.

Gostaria de agradecer a todo o pessoal do Laboratório de Energia e Meio Ambiente da UFPR pela ajuda disponibilizada em diversos setores do trabalho, e, principalmente, pela amizade obtida ao longo destes dois anos de convivência.

É importante também agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante a realização deste estudo, e ao corpo docente, discente e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental (PPGERHA) da UFPR pela oportunidade, pelo ensino e pelas experiências trocadas.

A todos, dedico a minha imensa gratidão.

*“Quando os ventos de mudança
sopram, umas pessoas levantam
barreiras, outras constroem moinhos
de vento.”*

Érico Veríssimo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	15
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1 Formas e estruturas naturais: redes tipo árvore.....	20
2.2 Geomorfologia fluvial e modelos de formação de bacias.....	23
2.2.1 <i>Características fractais de bacias hidrográficas.....</i>	28
2.2.2 <i>Modelos de geração de bacias hidrográficas</i>	30
2.3 Teoria dos constructais e a formação determinística de redes	34
2.3.1 <i>Aplicações da teoria dos constructais.....</i>	37
2.3.2 <i>Redes constructais</i>	39
2.3.3 <i>Modelo bidimensional de erosão em meio poroso.....</i>	42
3. METODOLOGIA	49
3.1 Simulador de evolução morfológica	49
3.1.1 <i>Dinâmica de formação da rede.....</i>	49
3.1.2 <i>Solução do campo e dos gradientes de pressão.....</i>	54
3.1.3 <i>Algoritmo de simulação</i>	60
3.2 Modelos com aleatoriedade	67
3.3 Experimentos computacionais com os blocos irremovíveis	70
3.3.1 <i>Configurações com um conjunto de blocos irremovíveis.....</i>	75
3.3.2 <i>Configurações com mais de um conjunto de blocos irremovíveis</i>	76
3.3.3 <i>Barreiras de fluxo.....</i>	79
4. RESULTADOS	82
4.1 Consolidação do simulador	82
4.2 Modelos com aleatoriedade	85

4.3	Blocos irremovíveis	89
4.3.1	<i>Configurações com um conjunto de blocos irremovíveis.....</i>	<i>89</i>
4.3.2	<i>Configurações com mais de um conjunto de blocos irremovíveis</i>	<i>98</i>
4.3.3	<i>Configurações com barreiras de fluxo</i>	<i>109</i>
5.	CONCLUSÕES.....	123
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	125
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	126

LISTA DE FIGURAS

- FIGURA 1 - Exemplos de rede tipo árvore: a) a geometria dos galhos de uma árvore de folha caduca; b) um angiograma de um coração humano, mostrando claramente a rede formada pelos vasos sanguíneos, incluindo as artérias coronárias direita e esquerda (NATIONAL GEOGRAPHIC), c) uma imagem de uma folha de álamo, onde se percebe claramente a rede formada pelas nervuras (RUNIONS *et al*, 2005); d) digitalização da rede de drenagem do rio Caeté, afluente do rio Iaco, pertencente à bacia do rio Purus, no Estado do Amazonas (SILVA *et al*, 2008). Nenhuma rede é idêntica á outra, mas são facilmente reconhecíveis como rede tipo árvore. 22
- FIGURA 2 - Exemplo de ordenamento seguindo um esquema de Horton-Strahler, aplicado a uma projeção planar de uma bacia fictícia 26
- FIGURA 3 - Configurações produzidas por modelos de geração de redes em comparação com uma bacia real: a) Bacia fictícia criada com um algoritmo de escolha aleatória; b) Aplicação do algoritmo de crescimento de Eden para múltiplas exutórias; c) Aplicação do algoritmo de construção de Scheidegger, também para múltiplas exutórias; d) rio Dry Fog Turk, extraído de modelos digitais de terreno; e) Uma rede de canais otimizados, para simulação do rio da figura anterior; f) a mesma rede anterior, onde qualquer mudança aleatória é aceita, desde que mantenha uma forma de árvore. FONTE: a) CIEPLAK *et al.*, 1998; b-c) RINALDO, RODRIGUEZ-ITURBE e RIGON.,1998; d-f)RINALDO, BANAVAR e MARITAN, 2006. 32
- FIGURA 4 - Caminhos de evolução de sistemas naturais de tamanho finito, segundo a teoria dos constructais, considerando a escala de comprimento externo constante. FONTE: Adaptado de BEJAN e LORENTE, 2006. 36
- FIGURA 5 - Resultados obtidos por BEJAN, 1997a: a) o volume elementar, como geração volumétrica de calor e um caminho de alta condutividade ao longo do eixo x; b) o primeiro arranjo, com um grande número de volumes elementares conectados a um caminho central; c) o melhor segundo arranjo, um quadrado feito com dois primeiros arranjos; d) o melhor terceiro arranjo, um retângulo com dois segundos arranjos; e) o melhor quarto arranjo, um quadrado com dois terceiros arranjos; f) a configuração até o quarto arranjo. É importante notar que, a partir do segundo arranjo, a bifurcação aparece como um resultado de otimização, e não uma consideração. FONTE: BEJAN, 1997a. 41
- FIGURA 6 - Modelo bidimensional de um escoamento área a ponto, utilizado em ERRERA e BEJAN, 1998, com o solo sendo simulado como blocos

quadrados de lado D , que podem ser desconectados para formar um escoamento em canal aberto.	43
FIGURA 7 – Evolução do sistema da Figura 6 com $K/K_p = 0,1$ e M é incrementado em passos: a) $\Delta M = 10^{-3}$; b) $\Delta M = 10^{-4}$. FONTE: ERRERA e BEJAN, 1998.	46
FIGURA 8 – Decréscimo monotônico da resistência ao escoamento nos processos mostrados na Figura 6. FONTE: ERRERA e BEJAN, 1998.	47
FIGURA 9 – Representação dos blocos adjacentes á exutória no caso de $N_{D,y}$ par ou ímpar, evidenciando a obrigatoriedade de $N_{D,y}$ ser ímpar para desenvolvimento da dinâmica	51
FIGURA 10 – Esquema representando as condições de contorno para solução da Eq. (16), já considerando a simetria em relação ao eixo x	53
FIGURA 11 – Reprodução de um bloco genérico da Fig. 5, sujeito a um campo de pressão externo $P_*(x^*,y^*)$, considerado como um bloco sólido, sem influência do campo de pressão interno em sua dinâmica, e representado pela coordenada do vértice inferior esquerdo. Em relação á pressão, os índices E , D , I e S denotam a face do bloco em que a pressão está sendo exercida: esquerda, direita, inferior e superior, respectivamente.	55
FIGURA 12 – Detalhes geométricos da simulação do campo de pressão: a) esquema representativo de um elemento finito biquadrático (Adaptado de BURNETT, 1987); b) discretização utilizada para cada bloco, com o uso de 4 elementos finitos biquadráticos, totalizando cinco pontos nodais em cada face.	58
FIGURA 13 – Esquema com o processo preparatório da simulação, para geometrização da configuração inicial da bacia e obtenção de M_c (valor de M para desalojamento do primeiro bloco). Os retângulos pontilhados simbolizam os programas utilizados nesta etapa.	64
FIGURA 14 – Esquema com o processo de simulação utilizado no chamado <i>modelo</i> inicial, sendo que os retângulos pontilhados simbolizam os programas utilizados nesta etapa.	66
FIGURA 15 – Esquema com o processo de simulação utilizado nos modelos aleatórios, sendo que os retângulos pontilhados simbolizam os programas utilizados nesta etapa.	68
FIGURA 16 – Novas condições do contorno quando da adição de conjuntos de blocos impermeáveis: a) com centro localizado no eixo x ; b) sem contato com o eixo x	73

FIGURA 17 – Configurações testadas para apenas um conjunto de blocos irremovíveis, localizado com o centro sob o eixo x, e ocupando 10% da área total da área de drenagem	75
FIGURA 18 – Configurações testadas para 5 (a) e 24 (b) conjuntos de blocos irremovíveis homogeneamente distribuídos, contabilizando uma área impermeável e irremovível de 10% da área total em ambos os casos.....	77
FIGURA 19 – Configuração testada para verificar a influência da heterogeneidade da distribuição das singularidades, entretanto mantendo a simetria.....	78
FIGURA 20 – Configurações com uma barreira, utilizadas para verificar a influência destas estruturas e o efeito causado pela distância em relação à exutória	79
FIGURA 21 – Outras configurações estudadas: a) com uma barreira bloqueando a geração de rede na direção do eixo x; b) o mesmo de (a) mas com comprimento que permita apenas a criação de dois caminhos de largura 1 à sua montante.....	80
FIGURA 22 – Resultados de ERRERA e BEJAN, 1998 (a), para $\Delta M = 10^{-3}$ e $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$ em comparação com os resultados obtidos com o modelo base, nas mesmas condições (b), mostrando perfeita concordância.....	83
FIGURA 23 – Resultados de ERRERA e BEJAN, 1998 (a), para $\Delta M = 10^{-4}$ e $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$ em comparação com os resultados obtidos com o modelo base, nas mesmas condições (b), mostrando novamente perfeita concordância	84
FIGURA 24 – Sobreposição das seis simulações realizadas com os modelos aleatórios: (a) escolha aleatória; (b) completamente aleatório; sendo que a intensidade de cinza é característica da quantidade de simulações em que o respectivo bloco foi desalojado. Por exemplo: blocos brancos foram blocos que em nenhuma simulação foram desalojados, e blocos pretos são aqueles que foram desalojados em todas as simulações. Ou seja, a intensidade de preto é característica da probabilidade de remoção daquele bloco, obtida após seis simulações.	86
FIGURA 25 – Redução da resistência global ao escoamento nos modelos aleatórios em comparação com a redução obtida pelo modelo de erosão, considerando $K/K_p = 0,1$ e $\Delta M = 10^{-3}$	88
FIGURA 26 – Redes obtidas para as configurações da Figura 17 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-3}$	90

FIGURA 27 – Redes obtidas para as configurações da Figura 17 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-4}$	91
FIGURA 28 – Dinâmica do pico de pressão e de M para as configurações da Figura 26 ($\Delta M = 10^{-3}$)	93
FIGURA 29 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 27 ($\Delta M = 10^{-4}$)	94
FIGURA 30 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 27 e 28	96
FIGURA 31 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com blocos irremovíveis e impermeáveis (Figuras 26 e 27) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 22 e 23).....	97
FIGURA 32 – Redes obtidas para as configurações da Figura 18a, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	99
FIGURA 33 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 32, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	100
FIGURA 34 – Redes obtidas para as configurações da Figura 18b, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	102
FIGURA 35 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 34, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	103
FIGURA 36 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 32 e 34	104
FIGURA 37 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com blocos irremovíveis e impermeáveis (das Figuras 32 e 34) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 22 e 23).....	105
FIGURA 38 – Redes obtidas para as configurações da Figura 19, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	106
FIGURA 39 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 38, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	107
FIGURA 40 – Aspectos relacionados às Figuras 38 e 34: a) dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações; b) comparação da resistência ao escoamento das configurações com blocos homoganeamente distribuídos em relação às redes formadas com blocos aleatoriamente distribuídos.....	108

FIGURA 41 – Redes obtidas para as configurações da Figura 20 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-3}$	110
FIGURA 42 – Redes obtidas para as configurações da Figura 20 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-4}$	111
FIGURA 43 – Dinâmica do pico de pressão e de M para as configurações da Figura 41 ($\Delta M = 10^{-3}$)	113
FIGURA 44 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 42 ($\Delta M = 10^{-4}$)	114
FIGURA 45 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 41 e 42	115
FIGURA 46 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com uma barreira (Figuras 46 e 47) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 22 e 23).....	116
FIGURA 47 – Redes obtidas para as configurações da Figura 21a, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	117
FIGURA 48 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 47, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	118
FIGURA 49 – Redes obtidas para as configurações da Figura 21b, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	119
FIGURA 50 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 49, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$	120
FIGURA 51 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 47 e 49	121
FIGURA 52 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com barreiras (das Figuras 47 e 49) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 23 e 24).....	122

RESUMO

As redes em forma de árvore (sem *loops*) são formas geométricas onipresentes na natureza, tendo sua formação e configuração sido alvo de importantes pesquisas. Em especial, estão as redes de drenagem hidrográfica. Entretanto, boa parte dos trabalhos tem considerado estas redes como resultado de chance e necessidade, com forte presença de aleatoriedade. Em contrapartida, uma linha de pesquisa recente tem tratado o tema a partir de termos completamente determinísticos, a partir de princípios termodinâmicos aplicados na Teoria dos Constructais. Este trabalho tem por objetivo dar continuidade a trabalhos anteriores nesta linha. Propõe-se simular a formação determinística de uma bacia hidrográfica plana, inicialmente de permeabilidade homogênea e isotrópica (idealizada em trabalhos anteriores), com exceção a algumas parcelas impermeáveis e sem liberdade de movimento. A bacia recebe uma carga hidráulica (chuva) homogênea, e os canais são formados a partir do campo de pressão estabelecido. A hidrodinâmica é simulada considerando um fluxo de Darcy em solo saturado, e o campo de pressão é, então, obtido numericamente, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Os resultados apontam para três conclusões importantes: ocorre a criação de regiões de estagnação anteriores às singularidades; a transposição destas singularidades representa um grande alívio à resistência do sistema; quanto maior a dispersão espacial das singularidades e menor a distância destas para a exutória, menor o ganho de performance com a formação da rede.

Palavras-chave: redes determinísticas, teoria dos constructais, geomorfologia, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

Tree-shaped networks are geometrical forms omnipresent in nature, whose formation and configuration have been aims of important researches. Namely there are the hydrographic drainage networks (river basins). However, most studies have considered networks as a result of chance and necessity, with strong randomness presence. On the other hand, a recent line of research has been approaching the question based on fully deterministic terms, with the help of *Constructal Theory* principles. This work aims to continue previous works on this subject. A planar river basin formation within a deterministic framework is proposed (idealized in previous works), with the exception of some impermeable parts without freedom to morph. The basin receives a homogeneous hydraulic source (rain), with the channels being formed to reduce the established pressure field. The hydrodynamics is simulated assuming Darcy flow. The pressure field is then computed numerically, using the Finite Element Method. The results have leaded to three main conclusions: there is the formation of stagnation regions prior to the singularities; the system global performance has a great boost after the transposition of these singularities; the larger are the singularities spatial dispersion and the longer are their distance to the outlet, the lesser is the performance gain from the network formation.

Keywords: deterministic networks, Constructal Theory, Geomorphology, Finite Elements Method.

1. INTRODUÇÃO

Compreender os mecanismos de desenvolvimento da natureza é fundamental para analisar efetivamente os riscos ambientais envolvidos em atividades antrópicas. Como discutido em RINALDO *et al.* (1998) a ciência tem uma forte tendência em abordar essa necessidade de forma reducionista, compartimentando os mecanismos naturais cada vez mais especificamente, mas isso origina, conseqüentemente, uma considerável perda da visão global de sistema.

Provavelmente devido a esse fato, as abordagens reducionistas não têm tido sucesso em explicar questões básicas como, por exemplo, a natureza das formas geométricas existentes no meio ambiente. É interessante notar, porém, que grande parte das formas naturais consegue ser descrita por basicamente três geometrias: o formato circular da seção transversal de um tubo; a forma da seção transversal de canais abertos; e as redes tipo árvore ou redes dendríticas (BEJAN, 1999). Estas últimas, em especial, são formas resilientes e inextricáveis do cotidiano humano. Basta apenas apreciar uma sombra de uma árvore e reparar as redes formadas pelo tronco, os galhos e seus ramos. Os exemplos deste tipo de estrutura são extensos, tanto no mundo animado como no inanimado: rachaduras em sólidos, os padrões de trincas em solos áridos, as redes de drenagem de bacias hidrográficas, a distribuição de seiva nas folhas, a distribuição de artérias para irrigação de sangue aos órgãos, a rede bronquial, entre outros.

MANDELBROT (1983) mostrou que grande parte das estruturas naturais era mais facilmente descrita utilizando geometria não-euclidiana conhecida como *fractal*. AVNIR *et al.* (1998) mostram que a abordagem *fractal* no estudo de geometrias naturais tem grande utilidade por poder sintetizar grandes volumes de informações em alguns poucos parâmetros, o que com certeza facilita o estudo e identificação de semelhanças e diferenças. No entanto, como visto neste mesmo artigo, a interpretação de que geometrias naturais são de fato *fractais* é errônea, pois induz intrinsecamente ao conceito de repetições *ad infinitum*, enquanto que, para as formas naturais, sempre há um ponto finito

onde as bifurcações e modificações geométricas tem fim. Além deste fato, apesar de ser uma potente forma de descrição, o uso de geometria *fractal* não oferece nenhum tipo de explicação a respeito dos mecanismos físicos envolvidos (BEJAN, 1997c, ERRERA e BEJAN, 1998, BEJAN e TONDEUR, 1998).

Este problema é recorrente, também, no estudo das bacias hidrográficas. As redes de drenagem naturais são provavelmente as formas naturais complexas mais extensivamente estudadas, principalmente devido aos estudos de geomorfologia. Como se verifica em vários compêndios deste assunto (por exemplo, CHORLEY *et al.*, 1984; LEOPOLD *et al.*, 1964; e CLIFFORD, 2008), têm sido desenvolvidas técnicas excelentes de descrição, mas poucas explicações. Um fato que permanece aberto nestes estudos é a fundamentação a respeito da natureza de redes, ou seja, o porquê de redes serem formadas, em detrimento de outras estruturas mais simples.

Neste âmbito, estudos com bacias hidrográficas geraram parâmetros topológicos úteis como as Leis de Horton e de Hack, que foram inicialmente interpretados como uma consequência de aleatoriedade, ou seja, que redes são uma consequência de fenômenos aleatórios (LEOPOLD *et al.*, 1964). Com este pano de fundo, modelos de geração de redes com base em preceitos aleatórios foram desenvolvidos (CIEPLAK *et al.*, 1998). A aplicação dos conceitos de geometria *fractal* a redes de drenagem culminou em novos parâmetros, grande parte estatísticos, para descrição destas estruturas (MARITAN *et al.*, 1996), que por sua vez evidenciaram que as redes criadas com algoritmos aleatórios diferiam dos padrões naturais (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001). Percebeu-se então que a aleatoriedade, por si só, não é capaz de explicar estes fenômenos.

Para contornar este problema, algoritmos para criação das chamadas *Optimized Channel Networks* (OCN), ou numa tradução direta, Redes Otimizadas de Canais, foram desenvolvidos (RINALDO *et al.*, 2001). Estes algoritmos seguem uma idéia semelhante à da teoria da seleção natural darwinista. Parte-se de uma rede gerada por um algoritmo aleatório, e mudanças (também aleatórias) são realizadas. Cada mudança só é aceita se melhorar a aptidão do sistema, o que, para bacias hidrográficas, é interpretada

como a redução de um funcional relacionado com o gasto de energia total. As OCNs, diferentemente das redes fundamentalmente aleatórias, geraram parâmetros de escala semelhantes aos de bacias naturais (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001).

Entretanto, a existência da rede é uma consideração feita *a priori* e, portanto, não há uma explicação efetiva de sua natureza. A informação que se obtém é que a tendência natural das redes de drenagem é se adaptar de forma a reduzir ao máximo o gasto de energia.

Além das OCNs, modelos determinísticos de formação de paisagens têm sido aplicados à dinâmica de bacias hidrográficas. Estes modelos consideram a elevação do terreno como incógnita, e sua variação espaço-temporal é determinada por três fenômenos básicos, que agem em escalas de tempo distintas: difusão geológica, erosão e levantamento tectônico (HOWARD, 1997; RINALDO *et al.*, 2006). Estes modelos têm sido úteis para previsão de mudanças em paisagens a partir das configurações já conhecidas, e são baseados em uma compreensão global acerca dos fenômenos existentes. Esses modelos explicam a formação de redes a partir da atuação destes fenômenos em conjunto com aleatoriedades iniciais no relevo ou a heterogeneidade do meio (PELLETIER, 2007).

No entanto, ERRERA e BEJAN (1998) mostraram que redes de drenagem podem ser formadas também a partir de relevos planos em um meio homogêneo, como sistemas de pequena escala, efêmeros ou perenes (por exemplo, uma precipitação em uma caixa de areia). Neste estudo, a abordagem utilizou-se de conceitos acerca da recente Teoria dos *Constructais* (CT, do inglês *Constructal Theory*). A CT foi apresentada inicialmente por BEJAN (1997a), como um pensamento de que o mesmo princípio usado na Engenharia para atingir um objetivo mediante restrições ocorre na natureza para gerar a forma e estrutura dos sistemas onde há escoamento, a partir da seguinte Lei: “para um sistema de tamanho finito persistir no tempo (viver), ele deve evoluir de forma a fornecer o mais fácil acesso às correntes que fluem ao longo dele”. A CT tem sido utilizada com sucesso para prever grande parte dos padrões verificados na natureza e nos sistemas humanos (BEJAN e TONDEUR, 1998; BEJAN *et al.*, 2000; BEJAN, 2005; 2007; BEJAN e

LORENTE, 2006; REIS, 2006; REIS e BEJAN, 2006; BEJAN e MARDEN, 2008; BEJAN *et al.* 2008; CHARLES e BEJAN, 2009).

A grande contribuição da CT no trabalho de ERRERA e BEJAN (1998) foi em relação à forma de abordagem utilizada. Considerou-se inicialmente uma bacia plana, retangular, formada por blocos quadrados, em um meio poroso inicialmente formado por uma permeabilidade uniforme e isotrópica. A diferença em relação às abordagens usuais de geomorfologia é a consideração de que, quando os blocos são desalojados, formam canais que por sua vez são modelados com um valor de permeabilidade maior do que o até então característico do local. É dessa forma que os trabalhos sobre redes a partir da CT são desenvolvidos, para permeabilidades a qualquer tipo de escoamento (BEJAN, 1997b, 1997c, 2002; BEJAN e TONDEUR, 1998; LEWIS, 2003; REIS, 2006; GOSSELIN, 2007; QUEIROS-CONDE *et al.*, 2007), e mostra-se que as redes são resultados da necessidade de equipartição e de alocação ótima destes caminhos facilitadores, objetivando a redução máxima da resistência global ao escoamento.

A formação das redes, no caso do trabalho de ERRERA e BEJAN (1998), é estruturada apenas no conceito de erosão. Mais tarde, mostra-se que, a cada passo das simulações, a resistência global ao escoamento é consideravelmente reduzida, e isso é interpretado como uma evidência da CT. Contudo, a redução ocorrida deve ocorrer não importando a localização dos blocos, pois o sistema passa a coter progressivamente uma maior área preenchida por espaços de permeabilidade maior. Assim, é necessária uma abordagem que permita evidenciar **se as estruturas obtidas pelo processo de erosão são de fato configurações otimizadas**. Para responder a isso, neste trabalho a **dinâmica de erosão do modelo de ERRERA e BEJAN (1998)** que é completamente determinística, **foi substituída por uma dinâmica aleatória e as configurações obtidas foram comparadas com as redes de drenagem formadas unicamente por critérios determinísticos**.

A linha de pesquisa nesta área permaneceu inativa até recentemente, quando REIS (2006) utilizou uma abordagem semelhante à de BEJAN (1997a) aplicada a bacias hidrográficas, e mostrou que a CT é hábil para explicar não só os parâmetros, como também as formas das Leis de Horton, de Hack e de

Melton. Entretanto, o estudo através do processo erosivo se manteve estático, e este trabalho pretende reiniciar estudos nesta linha de pesquisa, dada sua potencialidade para compreensão dos fenômenos naturais.

Em especial, uma tendência dos estudos em CT tem sido a **compreensão das dinâmicas naturais quando sujeitas a restrições fundamentais ou de espaço** (GOSSELIN, 2007). Bacias hidrográficas frequentemente são afetadas por condições do terreno como picos resultantes de movimento tectônico, que são erodidos apenas em regiões inferiores ou a presença de afloramentos rochosos firmes, com poucas fissuras, resultando em baixíssima permeabilidade (CHORLEY *et al.*, 1984). A proposta deste trabalho é adicionar estas condições ao modelo de ERRERA e BEJAN, 1998, na forma de blocos irremovíveis e impermeáveis, e estudar seus efeitos comparados às dinâmicas sem essas restrições.

O objetivo geral deste trabalho é então aumentar o escopo de conhecimento a respeito da formação determinística de redes, no âmbito da discussão sobre a globalidade *versus* localidade e sobre o efeito de restrições espaciais. Pretende-se alcançar este objetivo utilizando a seguinte sequência de trabalho:

- Criação de um simulador de formação determinística de bacias de drenagem;
- Consolidação do simulador;
- Modificação do simulador para critérios de formação aleatória;
- Inclusão, no simulador, de restrições na forma de blocos irremovíveis e impermeáveis;
- Comparação com as configurações livres de restrições.

É importante salientar que os resultados obtidos aqui não se restringem apenas ao campo da geomorfologia. Os assuntos abordados fazem parte de uma extensa linha de pesquisa acerca de formas naturais, mais especificamente, redes naturais. Assim, conquanto os resultados obtidos aqui se mantenham dentro desta perspectiva, a sua aplicação em outras áreas da ciência é praticamente direta.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este trabalho trata de uma aplicação de um modelo de erosão para formação de redes de drenagem hidrográfica, em casos particulares, estando assim associado a temas recorrentes em geomorfologia, *fractais* e Teoria dos *Constructais* (TC). A revisão aqui utilizada propõe então uma sequência de estudo praticamente cronológica, partindo dos primeiros trabalhos de geomorfologia sobre redes, passando para as descrições mais modernas e em sequência aos estudos em TC.

Além disso, por fins de contextualização, é apresentada uma breve revisão sobre geometrias naturais, e espera-se que esta crie também um maior grau de expectativa em relação aos assuntos abordados.

2.1 Formas e estruturas naturais: redes tipo árvore

Formas geométricas diversas fazem parte do cotidiano de cada indivíduo, tanto as formas de objetos construídos pelo ser humano como as formas inerentes aos sistemas naturais. Estes, em especial, possuem formas intrigantes do ponto de vista científico, devido à complexidade e à recorrência.

A recorrência das formas geométricas naturais pode ser percebida pela semelhança (o que não implica em igualdade) de leis alométricas ou de escalonamento, mesmo geradas por processos física, química e biologicamente diferentes. Por exemplo, em STANLEY *et al.* (1996), foram resumidos diversos estudos sobre escalonamento de sistemas físicos, biofísicos ou econômicos, mostrando semelhança entre o desenvolvimento do DNA, batimento cardíaco e relações econômicas.

Segundo BEJAN (1999), a maioria das formas naturais pode ser descrita por apenas três geometrias: o formato circular da seção transversal de um tubo, a forma da seção transversal de dutos, e as redes tipo árvore ou redes dendríticas. Nesta definição, considera-se que forma não implica em igualdade. Por exemplo, qualquer polígono apresenta função semelhante a um círculo (mantendo a área constante e aumentando o número de lados do polígono, tende-se a um círculo). Assim, cada gomo de uma colméia (geometria

hexagonal) pode ser interpretado com tendo a *forma* de uma seção transversal de tubos.

Essa linha de raciocínio fica mais clara ao falar de redes tipo árvore: são aquelas em que há fluxo a partir de vários pontos (ou uma infinidade deles) direcionado a um ponto final (uma saída ou entrada, dependendo da direção do fluxo), sendo que cada ponto possui um caminho único até o ponto final. (RINALDO *et al.*, 2006). São chamadas “tipo árvore” porque o contorno geométrico se assemelha ao de árvores, imagens ubíquas ao cotidiano humano.

A Figura 1 mostra exemplos destas redes. Na Figura 1a, é exposta uma imagem de uma árvore desfolhada, para mostrar claramente o padrão geométrico sendo abordado. O tronco se ramifica em galhos, os galhos se ramificam em galhos menores, e esse processo se repete até uma escala finita. A Figura 1b apresenta um angiograma de um coração humano, onde se vêem claramente os vasos sanguíneos responsáveis pela irrigação do miocárdio. Os ramos coronários principais se dividem em sub-ramos, que também se dividem. Assim, percebe-se facilmente que os vasos sanguíneos formam redes tipo árvore. Na figura 1c, percebe-se que as nervuras no limbo de uma folha de álamos também formam redes, para distribuição da seiva. E, finalmente, a Figura 1d mostra uma digitalização da rede de drenagem do rio Caeté, afluente do rio Iaco, pertencente à bacia do rio Purus, no Estado do Amazonas, em sua semelhança com as outras figuras.

O importante ao se examinar essa sequência de figuras é reconhecer que, apesar de não serem idênticas, todas apresentam a mesma forma geométrica. Entretanto, os processos envolvidos são em parte diferentes. O coração humano, a árvore e a folha são sistemas vivos, enquanto a rede é um sistema físico, inanimado. O fato de apresentarem a mesma forma geométrica direciona a uma intuição a respeito de uma globalidade que possa ser aplicada para compreensão deste tipo de constituição.

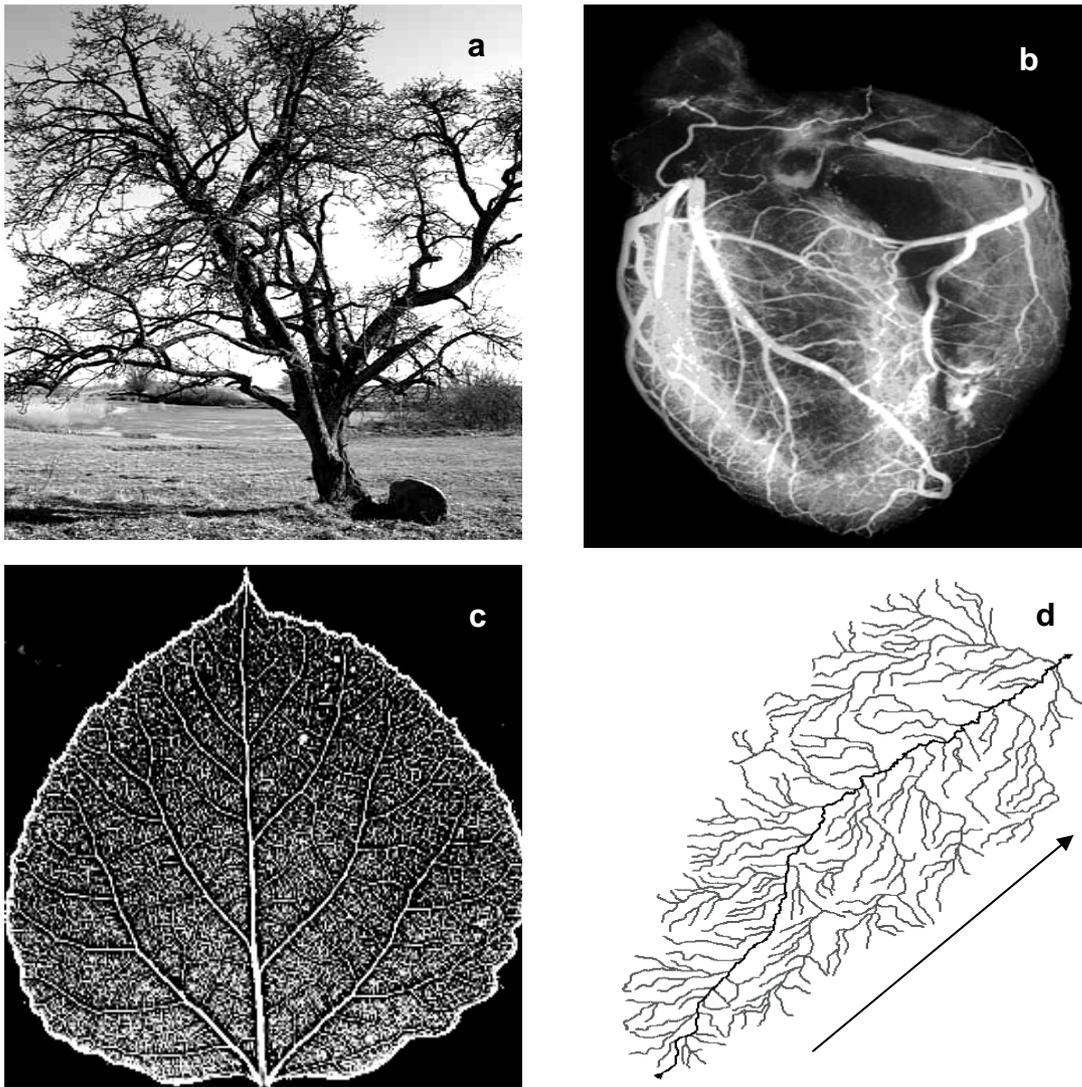


FIGURA 1 - Exemplos de rede tipo árvore: a) a geometria dos galhos de uma árvore de folha caduca; b) um angiograma de um coração humano, mostrando claramente a rede formada pelos vasos sanguíneos, incluindo as artérias coronárias direita e esquerda (NATIONAL GEOGRAPHIC), c) uma imagem de uma folha de álamo, onde se percebe claramente a rede formada pelas nervuras (RUNIONS *et al*, 2005); d) digitalização da rede de drenagem do rio Caeté, afluente do rio Iaco, pertencente à bacia do rio Purus, no Estado do Amazonas (SILVA *et al*, 2008). Nenhuma rede é *exatamente igual* à outra, mas são facilmente reconhecíveis como redes tipo árvore, com o mesmo objetivo.

Essa foi uma das motivações, por exemplo, para o trabalho de MANDELBROT (1983), que percebeu que muitas formas naturais, como as redes, não podem ser descritas utilizando princípios clássicos de geometria, e mostrou que a geometria *fractal* é eficaz para tal. Uma importante inovação deste trabalho foi a mudança de paradigma na análise destas geometrias, partindo para uma abordagem em forma global, e reconhecendo estas formas como mais complexas do que as formas de geometria euclidiana clássicas.

Entretanto, estudos sobre redes já haviam sido iniciados antes, com o advento da geomorfologia, mais especificamente a geomorfologia fluvial. Segundo CLIFFORD (2008), entre 1890 e 1965 todas as bases para o estudo moderno de geomorfologia fluvial foram construídas, em grande parte a respeito de dinâmica de paisagens e redes hidrográficas, com os avanços em engenharia hidráulica, hidrologia e geologia, e é nesse tema que a revisão segue.

2.2 Geomorfologia fluvial e modelos de formação de bacias

Geomorfologia (do grego *geo* – terra, *morphe* – forma e *logos* – conhecimento) é o estudo científico das características geométricas da superfície da terra, incluindo todos os aspectos da interface entre crosta terrestre, hidrosfera e atmosfera (CHORLEY *et al.*, 1984). Os grandes desafios desta linha da ciência são a compreensão da dinâmica de formação de paisagens e dos processos formativos e o desenvolvimento da habilidade de prever mudanças. Para isso, tem sido utilizadas observações de campo, estudos experimentais e modelos matemáticos (THORNDYCRAFT *et al.*, 2008).

A gênese de paisagens naturais é conceitualmente simples de compreender. Começa-se com rochas de certas características, distribuídas em um relevo já pré-estabelecido por erupções vulcânicas e atividade tectônica. Essas rochas sofrem de ação de intemperismo físico e químico (principalmente pela ação da água, vento e gelo) até entrarem em equilíbrio com o ambiente. Nesse processo, paisagens de várias formas são criadas. Segundo LEOPOLD *et al.* (1964), se fosse possível avaliar todas as

propriedades das rochas e as capacidades precedentes e presentes dos agentes de intemperismo, seria simples desenvolver um método racional que projetasse a história e a configuração de equilíbrio de qualquer paisagem. O grande desafio da geomorfologia reside no fato de que, além das rochas apresentarem uma grande heterogeneidade, a física dos agentes de intemperismo ainda precisa ser melhor compreendida (CHORLEY *et al.*, 1984).

A geomorfologia fluvial é a área da geomorfologia que se encarrega das características e mecanismos de formação de bacias hidrográficas. Os primeiros trabalhos em geomorfologia surgiram no final do século XIX, no intuito de compreender a relação entre o aumento de cheias e assoreamento de corpos hídricos com a modificação no uso do solo (CLIFFORD, 2008). Eram estudos baseados na experiência, com uma coleção considerável de empirismo. Nesta época foram desenvolvidas a equação de Manning e as equações da chamada “teoria de regime” (LEOPOLD *et al.*, 1964), muito utilizadas desde então para prever formas estáveis de seções transversais de rios ou capacidade de descarga a partir de características já conhecidas.

Mesmo estes estudos, abordando os rios em sua forma de equilíbrio, i.e., sedimentação compensando erosão, em muitos casos não eram capazes de prever mudanças a partir de eventos extremos, e essas relações começaram a ser vistas como insuficientes para explicar o mecanismo de ajuste de canais naturais (HUANG e NANSON, 2000). Com o advento dos conceitos de camada limite e de transporte de sedimentos, teorias de extremos passaram a ser utilizadas. A partir da equação de Du´Boys, famosa na área de transporte de sedimentos, foi desenvolvida a hipótese de capacidade máxima de descarga. Outras hipóteses de extremos são a mínima dissipação de energia e a mínima potência de corrente (CLIFFORD, 2008).

O principal objetivo destas linhas de estudo era até então obter equações racionais que pudessem explicar o mecanismo de auto-ajuste da seção transversal de canais naturais, a partir de várias condições locais como leito rochoso, solo, vegetação, relevo, entre outros. O mérito dessas conquistas científicas é inquestionável, mas uma importante brecha na geomorfologia fluvial ainda ficava aberta: o estudo da distribuição geométrica dos canais como redes de drenagem fluvial.

Em 1945, o hidrólogo Robert E. Horton publicou o que seria a base para o estudo morfológico de redes de drenagem. Ele aplicou conceitos de topologia para representações bidimensionais de redes de bacias hidrográficas, e mostrou que a grande complexidade envolvida pode ser reduzida ordenando os canais e obtendo correlações em um determinado esquema de ordenamento (CHORLEY *et al.*, 1984). Após uma breve modificação introduzida por Strahler, a rotina de ordenamento (então conhecida como *esquema de ordenamento de Horton-Strahler*) é executada da seguinte forma (CHOW *et al.*, 1988):

- Os menores canais visíveis são denominados de ordem 1.
- Quando dois canais de ordem i se encontram, o canal à jusante é de ordem $i + 1$.
- Quando dois canais de ordem diferente se encontram, o canal à jusante retém a maior das ordens dos canais conjugados.
- A ordem da bacia hidrográfica é a ordem do canal que drena a exutória, de ordem ω (obrigatoriamente, o canal de maior ordem da bacia).

A Figura 2 apresenta um exemplo de ordenamento de Horton-Strahler em uma bacia fictícia. Apesar de considerável grau de empirismo, realizando este ordenamento em uma projeção planar, importantes parâmetros globais de bacias são obtidos: as conhecidas *Leis de Horton* (de número e de comprimento de canais), a *Lei de Áreas de Schumm* e a *Lei de Hack*, (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001).

A *Lei de Horton* de número de canais indica que a razão:

$$\frac{N_i}{N_{i+1}} = R_B \quad (1)$$

é constante ao longo da bacia, onde N_i é o número de canais de ordem i e R_B é a razão de bifurcação, abrangendo valores entre 3 e 5 (tipicamente 4).

A razão de comprimento de canais é expressa de forma semelhante:

$$\frac{\bar{L}_{i+1}}{\bar{L}_i} = R_L \quad (2)$$

onde \bar{L}_i é a média do comprimento dos canais de ordem i e R_L é a razão de comprimento, abrangendo valores entre 1,5 e 3,5 (tipicamente 2). A *Lei de Áreas de Schumm* é expressa analogamente:

$$\frac{\bar{A}_{i+1}}{\bar{A}_i} = R_A \quad (3)$$

onde \bar{A}_i é a média da área de contribuição dos canais de ordem i e R_A é a razão de área, com um valor típico ao redor de 5.

Estas três relações mostram que há uma tendência nas bacias hidrográficas, independente de sua localização, de terem os canais de maior ordem formados por 4 canais de ordem inferior, que tem metade do comprimento e abrangem 20% da área de contribuição.

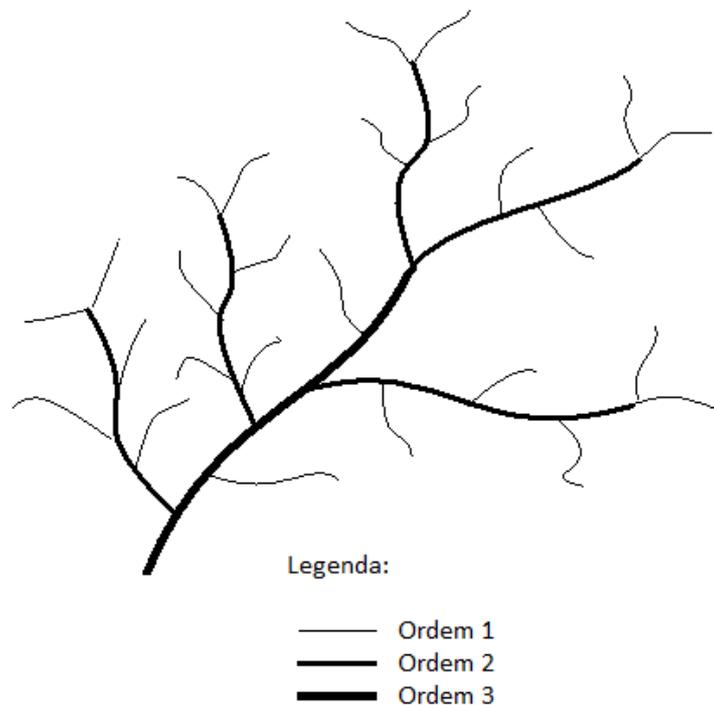


FIGURA 2 - Exemplo de ordenamento seguindo um esquema de Horton-Strahler, aplicado a uma projeção planar de uma bacia fictícia

A *Lei de Hack* prevê uma relação de potência entre o comprimento L_ω do canal principal e a área A_ω (lembrando que ω é a ordem da bacia):

$$L_\omega \propto (A_\omega)^h \quad (4)$$

onde h possui valores entre 0.56 e 0.6, geralmente 0.568. Percebe-se que h varia muito pouco entre diferentes bacias, diferentemente do que acontece para as três razões anteriores. Enquanto estas razões são parâmetros descritivos de cada bacia em particular (e, portanto, não necessariamente “Leis”), o parâmetro da *Lei de Hack* de 0.6 pode ser usado praticamente para qualquer bacia (LEOPOLD *et al.*, 1964). Como $h > 0.5$, a *Lei de Hack* sugere que há uma tendência natural de bacias de maior área serem mais compridas e estreitas que bacias menores. Esse é um dos principais indícios da similaridade geométrica encontrada neste escopo.

Existe ainda outro esquema de ordenamento, criado por Shreve em 1966. O esquema de ordenamento de Shreve é semelhante ao de Horton-Strahler, atribuindo aos menores canais um valor de magnitude igual a 1 e a cada bifurcação a soma dos canais a montante ao canal à jusante. Ou seja, a magnitude representa o número de fontes sendo drenadas até aquele canal. Apesar da sólida fundamentação teórica, poucos resultados práticos têm sido obtidos com este esquema (CLIFFORD, 2008). Enquanto isso, os avanços obtidos com o ordenamento de Horton-Strahler são notórios, sendo que a partir deles uma lei geral de formação de bacias foi encontrada (*Lei de Hack*) e a comparação entre bacias pôde ser reduzida a menos parâmetros.

O desafio que há ainda de ser enfrentado diz respeito à *natureza* e à *formação* das redes em questão. De forma mais específica, encontrar os motivos de as bacias hidrográficas se desenvolverem em forma de rede e como essas redes são alteradas no tempo. A ocorrência de relações geométricas regulares tem sido interpretada como um critério de evolução e ao mesmo tempo como uma evidência de que as bacias são topologicamente aleatórias. Essa dicotomia entre determinismo e aleatoriedade tem sido motivo de controvérsia a respeito dos modelos de geomorfologia fluvial (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001). O fato é que as *Leis de Horton* são apenas

descritivas, não sendo aplicáveis para compreensão da física de formação procurada, enquanto a *Lei de Hack* fornece uma condição da dinâmica, mas não os fundamentos envolvidos.

Maiores avanços nesta questão foram obtidos a partir da abordagem *fractal* à geometria de redes.

2.2.1 Características fractais de bacias hidrográficas

A definição formal de *fractal* é a seguinte: “Um *fractal* é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede rigorosamente sua dimensão topológica” (e.g. MANDELROT, 1983). A dimensão topológica é a dimensão usualmente atribuída a um objeto. Por exemplo: zero para pontos, um para linhas ou curvas, dois para superfícies e três para sólidos. Portanto, dimensões topológicas são sempre valores inteiros (a mente humana não teve até então capacidade de imaginar um objeto com dimensões fracionárias).

Por outro lado, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é substancialmente mais complicada. Preenchendo completamente uma região E de um espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^n com orbes de raio menor ou igual a $r > 0$, em diferentes distribuições, e computando o menor valor $N(r)$ de orbes necessário, se $N(r)$ cresce proporcionalmente com $1/r^d$ à medida que r tende a zero, d é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (FALCONER, 1985), que pode assumir valores não-inteiros. Esse tipo de cálculo é complicado e não usual, principalmente devido à definição correta da forma dos orbes, sendo usualmente substituído pelo de *dimensão fractal* (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001). Para uma imagem bidimensional, que é o caso de interesse, cobre-se a superfície com N quadrados de lado l . Então:

$$N(l) \propto l^{-D_f} \quad (5)$$

e D_f é a *dimensão fractal*. São necessárias de duas a três ordens de magnitude de l para o cálculo de valores aceitáveis de D_f (TAYLOR *et al.*, 1999). Para os assuntos aqui estudados, D_f e d são intercambiáveis, por se tratar de estruturas normalmente estudadas no plano bidimensional.

Como pode ser visto em RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO (2001), análises experimentais de redes hidrográficas tem mostrado claros exemplos de *dimensões fractais* não-inteiras e auto-similaridade entre a bacia e suas sub-bacias, creditando então um comportamento *fractal* a estas formas.

O grau de auto-similaridade é uma característica importante de um *fractal*. Um objeto auto-similar é exatamente ou estatisticamente similar a uma parte de si mesmo, enquanto um objeto com auto-afinidade é auto-similar de forma anisotrópica, ou seja, as peças são escalonadas por diferentes quantidades nas três direções. Uma medida do grau de auto-similaridade é o expoente de Hurst (MARITAN *et al*, 1996). No caso de superfícies com distâncias longitudinal e transversal típicas ξ_{\parallel} e ξ_{\perp} :

$$\xi_{\perp} \propto (\xi_{\parallel})^H \quad (6)$$

e H é o expoente de Hurst. Se $H = 1$, o objeto é auto-similar. Se $H < 1$, o objeto possui auto-afinidade. O fato é que a maioria dos dados observacionais de redes hidrográficas é consistente com a segunda descrição (RINALDO *et al.*, 1998), o que já era previsto pela Lei de Hack (Eq. 4).

Baseando-se na constatação de que redes hidrográficas apresentam características fractais, novos parâmetros para descrição de redes foram criados, baseados em similaridade estatística. A partir de um Mapa Digital de Terreno, a área efetiva de cada *pixel* x , definida como S_x , é a área de contribuição total ou o número de locais drenando o local x , e pode ser calculada como:

$$S_x = \sum_{y \in \text{vmp}(x)} W_{x,y} S_y + 1 \quad (7)$$

onde $W_{x,y}$ é uma matriz com valor 1 se x coleta água de seu vizinho mais próximo (VMP) y e 0 em outro caso (MARITAN *et al*, 1996). Em redes reais, o valor de S compõe uma variável aleatória da seguinte forma:

$$P[S \geq s] = s^{-\beta} F\left(\frac{s}{\xi^{1+H}}\right) \quad (8)$$

onde F é uma *função densidade acumulada* para S , com $\beta \sim 0,5$ (RINALDO *et al.*, 1998). Uma consideração análoga pode ser aplicada para a distribuição de comprimentos de canais, gerando os Hidrogramas Geomorfológicos Unitários Instantâneos (MOUSSA, 2003). Há ainda um considerável volume de parâmetros, resumidos por MARITAN *et al.* (1996).

Abordar as bacias hidrográficas como objetos de geometria fractal é uma forma útil de condensar uma geometria complexa em alguns parâmetros. Entretanto, é sempre importante ter em mente que bacias, como outras configurações naturais, não são essencialmente fractais, mas apenas apresentam características semelhantes às de fractais (AVNIR *et al.*, 1998).

2.2.2 Modelos de geração de bacias hidrográficas

O desenvolvimento e a compreensão das características globais de redes naturais foram cruciais no afastamento do conceito de que redes hidrográficas são resultados aleatórios. LEOPOLD *et al.* (1964) resumem uma das primeiras tentativas de simulação do desenvolvimento de redes de drenagem, a partir de caminhos aleatórios em uma região a ser drenada. Essa região era separada em *pixels* de área unitária. Parte-se de um *pixel* selecionado aleatoriamente, e a direção de drenagem pode ser endereçada para qualquer *pixel* adjacente com a mesma probabilidade. Quando o primeiro caminho atinge a fronteira, um segundo caminho é criado, e assim sucessivamente. O processo é repetido até que todos os *pixels* estejam sendo drenados. Algumas restrições são feitas, como a impossibilidade de *loops*. Outros modelos de formação de redes semelhantes são os agregados de Eden e a construção de Scheidegger. Entretanto, apesar de gerarem formas semelhantes a redes naturais, RINALDO *et al.* (1998), mostram que esses modelos não reproduzem os parâmetros globais de bacias, nos termos discutidos anteriormente. Diversos trabalhos apresentam um melhoramento dessa abordagem (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001, RINALDO *et al.*,

1998, RINALDO *et al.*, 2006) a partir do conceito de mínima dissipação de energia, e as redes criadas desse processo foram chamadas de *Optimized Channel Networks* (OCNs) ou Redes Otimizadas de Canais.

Na criação de OCNs, parte-se de uma rede gerada aleatoriamente e realizam-se mudanças na direção dos canais. A idéia básica do algoritmo é que, a cada mudança, a dissipação de energia total deve diminuir. Esse valor é representado por uma funcional de uma determinada configuração s (RODRIGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001):

$$E(s) = \sum_x S_x^\gamma \quad (9)$$

onde γ é representativo da física do problema, sendo que, obrigatoriamente, $\gamma < 1$ (geralmente 0,5, segundo RINALDO *et al.*, 2006). Então, uma nova configuração s só é aceita se $E(s)$ reduzir. O processo segue até que $E(s)$ não é mais reduzido após um número considerável de tentativas. A configuração mantida é então considerada uma OCN.

Os princípios introduzidos na criação das OCNs, e para a formulação da Eq. (9), são os seguintes (RINALDO *et al.*, 1998):

1. princípio de mínimo gasto de energia em cada canal da rede, para o transporte de uma dada descarga;
2. princípio de mesmo gasto de energia para cada área unitária do canal (gasto de energia homogêneo);
3. princípio de mínimo gasto de energia na rede como um todo.

O princípio 2 é basicamente o princípio da equipartição, verificado por BEJAN, 1998. Ele traz uma simplicidade ímpar à análise, permitindo a definição de um funcional de energia de fácil aplicação (Eq. 9).

Algumas configurações produzidas com estes modelos são apresentadas na Figura 3, bem como uma bacia real extraída de um modelo digital de terreno. Na Figura 3a, é apresentada uma bacia fictícia criada com um algoritmo de escolha aleatória, semelhante aos de LEOPOLD *et al.* (1964). Na Figura 3b, é mostrada uma aplicação do algoritmo de crescimento de Eden; e na Figura 3c uma aplicação do algoritmo de construção de Scheidegger,

ambos para múltiplas exutórias (RINALDO *et al.*, 1998). As redes apresentam características visuais semelhantes, mas propriedades diferentes de figuras reais, como no caso do rio Dry Fog Turk, mostrado na Figura 3d. Aliás, dados desta bacia foram utilizados para criações de redes de canais otimizados, mostrados nas Figuras 3e e 3f (RINALDO *et al.*, 2006).

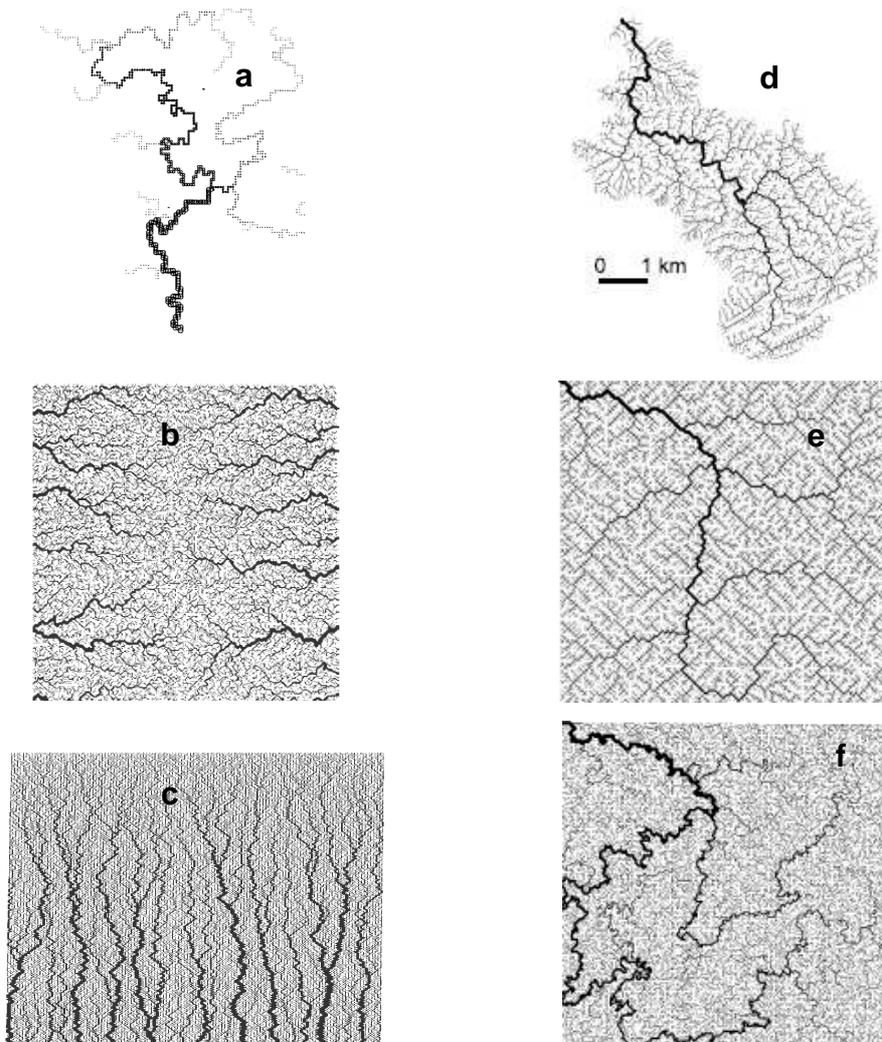


FIGURA 3 - Configurações produzidas por modelos de geração de redes em comparação com uma bacia real: a) Bacia fictícia criada com um algoritmo de escolha aleatória; b) Aplicação do algoritmo de crescimento de Eden; c) Aplicação do algoritmo de construção de Scheidegger; d) rio Dry Fog Turk; e) Uma OCN, para simulação do rio da figura anterior; f) a mesma rede anterior, onde qualquer mudança aleatória é aceita, desde que mantenha uma forma de árvore. FONTE: a) CIEPLAK *et al.*, 1998; b-c) RINALDO *et al.*, 1998; d-f) RINALDO *et al.*, 2006.

No caso da Figura 3f, foi utilizado um algoritmo diferente para OCNs, onde qualquer mudança aleatória é aceita, desde que se mantenha dentro de uma condição pré-estabelecida. Neste caso, assume-se que a natureza tem a capacidade de realizar mudanças aparentemente desfavoráveis, mas que possam criar melhores condições futuras. Entretanto, o resultado destes modelos se distancia dos valores de escala de bacias reais (RINALDO, *et al.* 2006), inclusive isso sendo utilizado como um indício de que a possibilidade de previsão da natureza seja limitada e direta (ou seja, as mudanças ocorrem devido a uma necessidade momentânea).

Existem também modelos determinísticos que predizem a dinâmica de formação de paisagens, considerando o relevo como um todo (por exemplo: HOWARD, 1997; PELLETIER, 2007; RINALDO *et al.*, 2006). Nestes modelos, a física é simplificada em três termos majoritários: difusão de massa, erosão e elevação tectônica. A difusão de massa é uma característica verificada em escalas geológicas que tende a reduzir a presença de picos, como uma forma de diminuição de energia total (HOWARD, 1997). As equações geralmente são da seguinte forma (RINALDO *et al.*, 2006):

$$\frac{\partial z(x, y, t)}{\partial t} = D_g \nabla^2 z(x, y, t) - \lambda J(x, y, t) |\vec{\nabla} z(x, y, t)|^2 + U + \eta(x, y, t) \quad (10)$$

onde $z(x, y, t)$ é a elevação do terreno, D_g é um coeficiente de difusão geológica, $J(x, y, t)$ é o módulo do fluxo de água em um ponto determinado, e λ é um coeficiente de intensidade de erosão (x, y e t são, respectivamente, as coordenadas longitudinal e transversal e o tempo). O primeiro termo da esquerda representa a difusão de massa. O segundo termo é o termo erosivo, que depende da declividade e do fluxo de água. O terceiro termo, U , é a taxa de elevação tectônica que, para as escalas envolvidas em bacias, é constante ao longo do terreno (HOWARD, 1997). O quarto termo é um ruído adicionado algumas vezes à dinâmica do sistema. Nestes modelos, apenas o valor de z é simulado, e a presença dos canais é determinada por técnicas de interpretação de modelos digitais de terreno.

Entretanto, o objetivo destes modelos é prever mudanças de relevo, sendo que, para a geração de redes, existem alguns pontos em que é necessário o uso de aleatoriedade. A previsão de configurações é feita geralmente em escalas de tempo menores que a escala de elevação tectônica, e por isso esta é desconsiderada (RINALDO *et al.*, 2006). Entretanto, a não-presença deste termo implica, em escalas maiores de tempo, a um desaparecimento completo de relevo (na equação, z tende a zero), pois o processo erosivo é não-conservativo (LEOPOLD *et al.*, 1964). A formação de redes está associada à dinâmica completa da bacia e, neste caso, U deve ser considerado. Além disso, muitos destes modelos são caracterizados por apresentarem equifinalidade (mesma resposta para diferentes combinações de parâmetros) o que atesta grande possibilidade de equívoco (SAVENIJE, 2001).

Outro ponto diz respeito à forma como as redes surgem. Ou é atribuída uma topografia inicial aleatória, ou a resistência à erosão é aleatória, ou ainda ruídos são adicionados (PELLETIER, 2007). Em outros casos, a paisagem permanece muitas vezes imutável, apenas com redução no valor de z . Assim, apesar de derivar de um fenômeno físico determinístico, o mecanismo de formação de redes é tido como não-determinístico, como consequência de algumas variações aleatórias no sistema.

Existe uma linha de pesquisa que trabalha com uma clara oposição a este raciocínio, afirmando que redes na verdade são um resultado determinístico de uma otimização termodinâmica, baseando-se na Teoria dos Constructais. Os trabalhos nesta linha são apresentados no item seguinte.

2.3 Teoria dos constructais e a formação determinística de redes

A Teoria dos Constructais é um pensamento de que o mesmo princípio usado na Engenharia para atingir um objetivo mediante restrições ocorre na natureza para gerar a forma e estrutura dos sistemas onde há escoamento. Tem origem no artigo de BEJAN (1997a) onde um sistema de canalização térmica para resfriamento de um volume produtor de calor (como, por exemplo, em componentes de microeletrônica) foi otimizado para redução da temperatura máxima no volume, ou seja, reduzir a resistência ao fluxo de calor.

Na ocasião, uma rede com características próximas de redes naturais foi formada, abrindo espaço para a associação do fundamento utilizado com um princípio natural. Foi então proposta a seguinte Lei: “Para um sistema de tamanho finito persistir no tempo (viver), ele deve evoluir de forma a fornecer o mais fácil acesso às correntes impostas (globais) que fluem ao longo dele” (BEJAN, 1997a).

É importante se observar que, na definição desta Lei física, não há referência a um processo específico, ou seja, espera-se que ela seja aplicável em qualquer sistema onde haja fluxo. O grande avanço trazido por esta nova linha da ciência é a unificação de conceitos usados em diferentes áreas. Por exemplo, a noção de redução no gasto de energia, proposto na criação das redes de canais otimizados (RINALDO *et al.*, 1998; RINALDO *et al.*, 2006), é aplicada especificamente para bacias hidrográficas, mas, na verdade, é um corolário da teoria dos constructais aplicada para este processo (REIS, 2006). Outras noções como, por exemplo, a necessidade de redução de congestionamento em sistemas de transporte, o controle de temperatura pelo corpo em relação ao tamanho do corpo, o aproveitamento do volume do pulmão para respiração, a distribuição de energia por turbulência, entre outros, podem ser associados a essa teoria. BEJAN e MARDEN, 2008 destacam ainda que a unificação é válida tanto para sistemas inanimados como para sistemas animados.

Em trabalhos recentes, tem sido proposta a inclusão da uma nova “Lei Constructal” dentro da termodinâmica, criando uma nova extensão dessa ciência: a termodinâmica de sistemas com configuração fora de equilíbrio (LEWINS, 2003; BEJAN e LORENTE, 2004).

Esta formulação é apresentada na Figura 4. Um sistema com escoamento possui propriedades que o distinguem de sistemas estáticos: comprimento externo global (por exemplo, a escala de comprimento de uma bacia hidrográfica); comprimento interno global (no mesmo exemplo, o comprimento total de canais); ao menos um objetivo global; configuração ou arquitetura; e a liberdade de alteração, ou seja, liberdade para alterar a configuração (BEJAN e LORENTE, 2006; BEJAN, 2007).

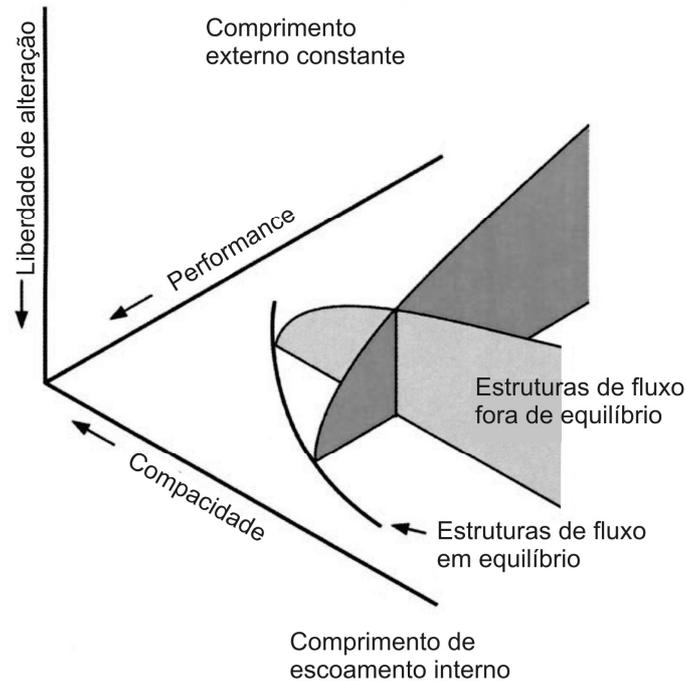


FIGURA 4 - Caminhos de evolução de sistemas naturais de tamanho finito, segundo a teoria dos constructais, considerando a escala de comprimento externo constante. FONTE: Adaptado de BEJAN e LORENTE, 2006.

Os comprimentos externos e internos podem ser reduzidos em uma razão adimensional, a compacidade S_v (de *sveltiness*):

$$S_v = \frac{\text{escalade comprimento externo}}{\text{escalade comprimento interno}} = \frac{\xi}{V^{1/3}} \quad (11)$$

onde ξ é representativo da escala de comprimento externo, e V é o volume interno de escoamento ($V^{1/3}$ é o comprimento total dos canais internos). Nesta definição, o que se observa na Figura 4 é que os sistemas naturais evoluem em desempenho (como a redução na resistência ao escoamento) e em compacidade. Se o comprimento externo é fixo, isso significa que o sistema necessita diminuir o volume interno de escoamento para evoluir. Entretanto, essas mudanças só são possíveis enquanto haja liberdade de alteração.

A curva apresentada no plano performance VS compacidade representa um sistema natural em equilíbrio, quando a liberdade de alteração é nula.

Neste caso, percebe-se que o objetivo do sistema pode ser alcançado por diferentes combinações destes dois fatores, dependendo do caminho traçado.

2.3.1 Aplicações da teoria dos constructais

Desde seu advento até hoje, a teoria dos constructais tem sido aplicável em muitas áreas da ciência, explicando escalas de geometrias naturais e utilizando os conceitos aplicados à engenharia. É importante ter em mente que o objetivo desta teoria é elucidar escalas e configurações globais de sistemas naturais à luz do determinismo, mas os finos detalhes, que são reconhecidamente influenciados por condições locais e temporais muitas vezes desconhecidas, não são procurados (BEJAN e TONDEUR, 1998).

Isto fica claro nos exemplos mostrados em BEJAN (1999). As formas de seções transversais de rios são bastante irregulares, dependendo de diversas características como o relevo, o tipo de leito, vegetação circundante, regime de cheias, entre outras. Entretanto, a relação entre largura e profundidade é pouco variável para diferentes rios, e isso é interpretado como a necessidade de redução da perda de carga. Ou seja, uma característica global é explicada deterministicamente. Neste artigo ainda, são esclarecidos deterministicamente o critério do número de Reynolds; os padrões presentes na convecção de Bénard; a formação dendrítica de sólidos durante rápida solidificação, como os cristais de gelo; e a formação de redes nas trincas e fraturas de sólidos.

Após estas conquistas, ainda no campo dos sistemas inanimados, as pesquisas avançaram. REIS (2006) deduziu não só os valores, como a forma das razões de escala de bacias hidrográficas, como as Leis de Horton, Schumm e Hack, apresentadas na seção 2.2, em um complemento ao trabalho de ERRERA e BEJAN (1998). REIS e BEJAN (2006), considerando a necessidade da atmosfera em maximizar o acesso ao fluxo do calor fornecido pelo Sol, calcularam as fronteiras entre as células de Hadley e Ferrel e entre a de Ferrel e a Polar como $25^{\circ}40'$ e $53^{\circ}10'$, respectivamente, enquanto os valores reais são de aproximadamente 25° e 60° . A temperatura média da superfície terrestre, que gira em torno de 15°C , foi computada como sendo de

10 °C, próximo do valor real (288 K para a real e 283 K para a calculada). Além disso, a diferença de temperatura de 7 °C entre dia e noite também foi prevista.

REIS (2008) mostra que as redes de tráfego e as leis de escala de comprimentos e nós, que geralmente formam leis de potência, são consequências da necessidade da otimização do fluxo de pessoas e bens ao mesmo tempo. Em uma abordagem semelhante, BEJAN *et al.* (2000) já tinham verificado que as redes não eram obtidas da minimização de custos, mas sim da maximização das receitas, ou seja, a maximização do escoamento.

Além de antecipar configurações naturais, a teoria dos constructais tem sido aplicada também à engenharia, no design de redes para melhor condução de prótons em membranas de células a combustível (VARGAS *et al.* 2005); maximização da troca térmica em trocadores de calor (BEJAN, 2002) ou em outras necessidades de engenharia (LORENTE e BEJAN, 1997a; LEDEZMA *et al.*, 1997); redes para manutenção de fluxo com redução na utilização de materiais (BEJAN e LORENTE, 2007); maximização da eficiência em sistemas baseados em aquecimento solar (MIGUEL, 2008); manutenção de resistência e melhor isolamento térmico em paredes de alvenaria com cavidades preenchidas com ar (LORENTE e BEJAN, 2002), entre outros.

Grandes progressos foram obtidos também na área dos sistemas animados (biológicos). As leis de potência alométricas de 1/4 para o batimento cardíaco e de 3/4 para a taxa metabólica, ambos em relação à massa corpórea, foram calculadas considerando uma otimização entre tamanho do corpo e perda de calor pela circulação sanguínea (BEJAN, 2005). Foram obtidas também leis alométricas de velocidade e frequência de movimento em corrida, nado e vôo, em leis de potência de 1/6 e -1/6, respectivamente, também em relação à massa corpórea, o que é bem suportado por dados reais (BEJAN e MARDEN, 2008). A partir destas leis, foi verificado que a convergência natural é de que atletas tenham maior altura e maior peso e sejam mais delgados, para obterem maiores velocidades (CHARLES e BEJAN, 2009). REIS *et al.* (2004), explicaram que a estrutura bronquial é formada em 23 níveis de bifurcação para o melhor acesso possível de oxigênio aos sacos alveolares. BEJAN *et al.* (2008), abordando as árvores e florestas como componentes integrais que facilitam o fluxo cíclico de água, deduziram

aspectos geométricos e leis alométricas verificadas na natureza, como a forma cônica da copa de pinheiros, a distribuição de larguras de copas, o formato de raízes, entre outros.

Contíguas a estas aquisições, algumas críticas foram procedidas. GHODOOSI (2004) e KUDDUSI e EĞRICAN (2008), empregam a mesma metodologia utilizada em BEJAN (1997a e 1997b), e mostram que o aumento de complexidade no sistema de arranjo proposto não melhora o desempenho de diversos sistemas estudados, e que, então, as geometrias obtidas não eram resultado de otimização. Em resposta às críticas, recentemente foram publicadas duas revisões sobre novas conquistas e aplicações da teoria dos constructais (BEJAN e LORENTE, 2004; BEJAN, 2007), evidenciando que a sua aplicabilidade a configurações naturais tem sido frutífera em praticamente toda aplicação onde seja necessária uma otimização de fluxo.

Entretanto, GHODOOSI (2004) e KUDDUSI e EĞRICAN (2008) afirmam que as redes naturais não são explicadas apenas pela idéia inicial da teoria dos constructais, e este é um dos assuntos em que este trabalho procura se inserir. Para tal, é importante verificar como é feita a dedução constructal de redes, apresentada a seguir.

2.3.2 *Redes constructais*

A teoria dos constructais sempre esteve associada ao estudo de redes. No artigo origem (BEJAN, 1997a), era investigada uma disposição de materiais de alta condução térmica em aparatos eletrônicos que otimizasse a transferência do calor gerado no volume em operação, direcionando-o para um sumidouro localizado em uma das arestas do aparato. Neste caso, a formatação resultante foi a de uma rede tipo árvore. BEJAN (1997b) realizou o mesmo tipo de dedução para o escoamento de um fluido, e obteve resultados semelhantes. Em ambos os trabalhos, há uma semelhança importante: há escoamento (massa ou energia) direcionado de uma infinidade de pontos (um volume ou uma área) para um ponto só (uma fonte ou um sumidouro), ou vice-versa. Como afirmam BEJAN e LORENTE (2006), esse é o típico caso onde as redes são configurações que facilitam o acesso ao componente em

escoamento, provendo equipartição e menor resistência. BEJAN e LORENTE (2007) estenderam esse conceito para escoamentos a partir de números finitos de pontos, e verificaram que a complexidade ótima é dependente do número de pontos a serem drenados ou irrigados.

A idéia central dos trabalhos de BEJAN (1997a e 1997b) foi abordar o meio produtor ou receptor do escoamento como tendo um valor de permeabilidade k ao fluxo, e adicionar caminhos de maior permeabilidade k_p ($k_p > k$) através de arranjos realizados a partir de uma mínima configuração, irreduzível, chamada de volume elementar. É no volume elementar que é feita a primeira transição de escoamento. Os resultados obtidos por BEJAN (1997a), são apresentados na Figura 5. Neste caso, o meio é produtor de calor e esse calor é direcionado para um sumidouro, localizado na origem do sistema. Percebe-se nitidamente, no resultado final, a formação de uma rede tipo árvore, e, de forma importante, um considerável número de bifurcações. Ou seja, a bifurcação é um resultado de otimização.

Em BEJAN (1997a), o problema de otimização foi abordado de forma completamente determinística. Para isso, foram necessárias as seguintes simplificações: i) a condutividade térmica dos canais era suficientemente larga, i.e., $k_p \gg k$; ii) a fração de volume ocupada por k_p era suficientemente pequena, i.e., $V_p \ll V$; iii) a espessura de cada canal k_p era uniforme; iv) como consequência de i , os caminhos k_p formaram ângulos de 90° entre si.

LEDEZMA *et al.* (1997) investigaram o mesmo problema sem considerar essas simplificações, necessitando então de uma abordagem numérica. É conveniente observar, porém, que o desempenho global do sistema final teve apenas pequenas melhorias. Por exemplo, o ângulo ótimo de inclinação encontrado foi de 4° (ou de 94° entre cada caminho), mas a melhoria no sistema em relação a nenhuma inclinação (90°) foi de apenas 5,2%. Uma consequência interessante deste trabalho foi a verificação dos limites de aplicabilidade do modelo de BEJAN (1997a).

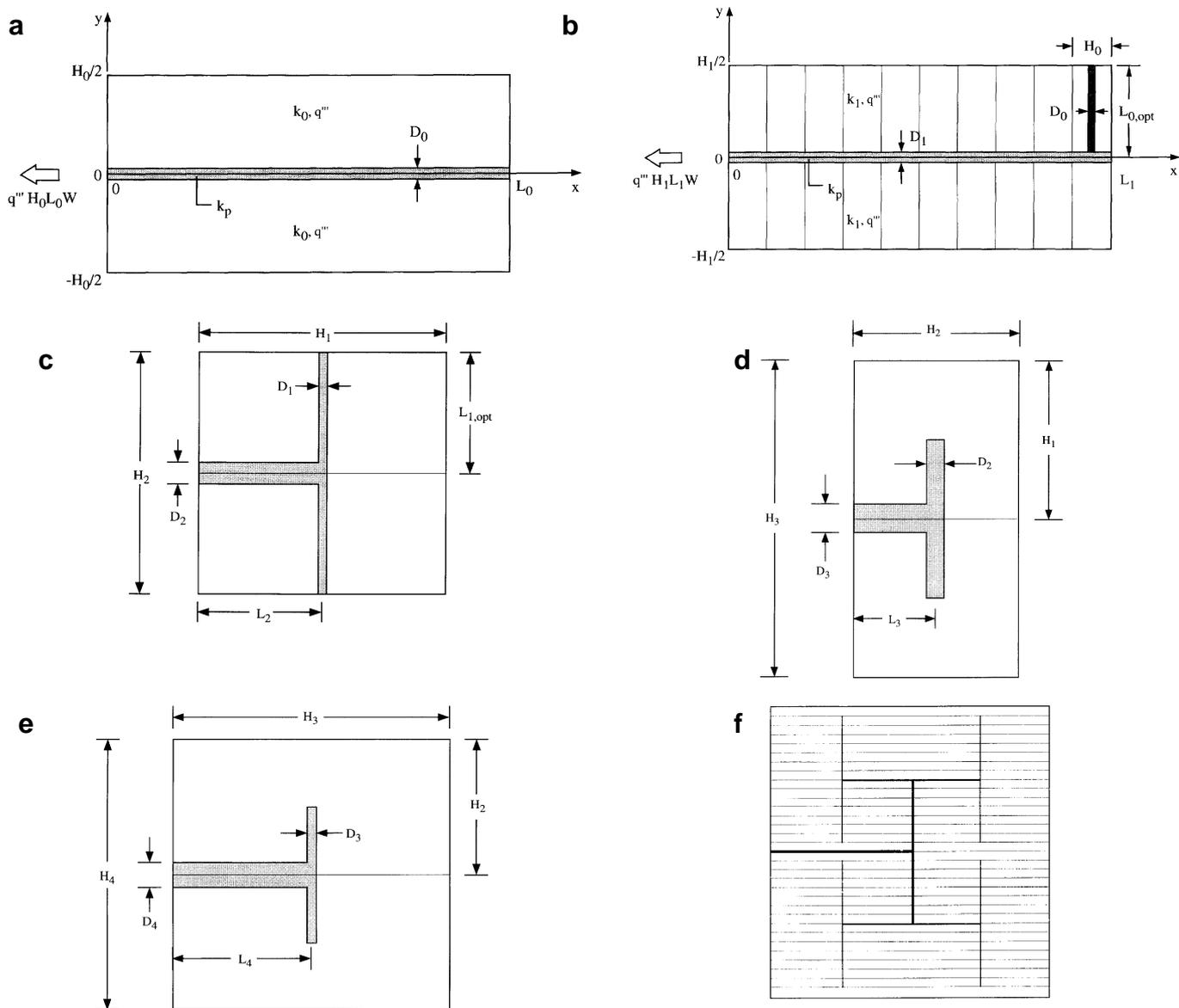


FIGURA 5 - Resultados obtidos por BEJAN (1997a): a) o volume elementar, como geração volumétrica de calor e um caminho de alta condutividade ao longo do eixo x ; b) o primeiro arranjo, com um grande número de volumes elementares conectados a um caminho central; c) o melhor segundo arranjo, um quadrado feito com dois primeiros arranjos; d) o melhor terceiro arranjo, um retângulo com dois segundos arranjos; e) o melhor quarto arranjo, um quadrado com dois terceiros arranjos; f) a configuração até o quarto arranjo. É importante notar que, a partir do segundo arranjo, a bifurcação aparece como um resultado de otimização, e não uma consideração.

Diversos trabalhos foram publicados seguindo esta mesma linha, para diferentes tipos de escoamento (por exemplo: BEJAN (1997b, 1997c, 2002); BEJAN e TONDEUR, 1998; LEWIS, 2003; REIS, 2006; GOSELIN, 2007; QUEIROS-CONDE *et al.*, 2007). Entretanto, na área da geomorfologia, poucas são as aplicações estudadas. ERRERA e BEJAN (1998) aplicaram um modelo de erosão a uma bacia simplificada e o compararam com um modelo de otimização (este trabalho será melhor discutido no próximo item). Mais tarde, REIS (2006), aplicou um modelo semelhante ao de BEJAN (1997a) para a mesma bacia simplificada de ERRERA e BEJAN (1998) e obteve relações muito próximas das leis de escala de Horton, Hack e Melton. As pesquisas nesta área ficam restritas a estes dois temas.

2.3.3 Modelo bidimensional de erosão em meio poroso

O modelo bidimensional de erosão em meio poroso (ERRERA e BEJAN, 1998) apresentado neste item é base para o trabalho em questão, e trouxe consideráveis avanços na associação da formação determinística de redes com a geomorfologia.

A física básica é apresentado na Figura 6. Uma superfície de área $A = HL$ e razão de forma H/L fixas é inicialmente revestido de uma camada porosa de permeabilidade K , com uma espessura suficientemente pequena $W \ll (H,L)$. Essa área recebe uma vazão mássica constante $m'' A$ de um fluido Newtoniano, que simula um efeito de precipitação homogênea. O fluido é descarregado por uma pequena abertura de tamanho $D \times W$ localizada na origem do sistema (a exutória). É estabelecido então um campo de pressão $P(x,y)$ que dirige o fluido recebido para a exutória. Considerando que o escoamento no meio poroso é regido por um fluxo de Darcy, têm-se:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (12)$$

$$v = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (13)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, e u e v são as componentes da velocidade do fluido na direção x e na direção y , respectivamente.

Aplicando a conservação de massa para um volume infinitesimal, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\dot{m}''}{\rho W} = 0 \quad (14)$$

onde ρ é a densidade do fluido. Utilizando o fluxo de Darcy (Eqs. 12 e 13), obtêm-se uma equação de Poisson para o campo de pressão:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\dot{m}'' v}{WK} = 0 \quad (15)$$

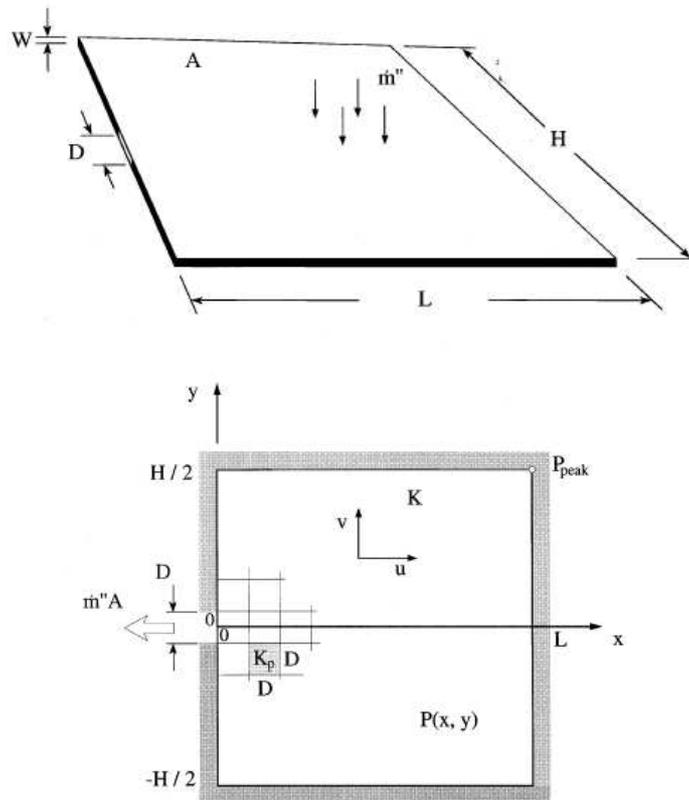


FIGURA 6 - Modelo bidimensional de um escoamento área a ponto, utilizado em ERRERA e BEJAN (1998), com o solo sendo simulado como blocos quadrados de lado D , que podem ser desconectados para formar um escoamento em canal aberto.

A erosão ocorre como consequência do campo de pressão $P(x,y)$. A coesão do solo é simulada considerando blocos quadrados de lado D , que possuem uma tensão máxima de suporte a ruptura, de valor τ . Esse fato foi usado para realizar uma adimensionalização da Eq. (15):

$$\frac{\partial^2 P_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 P_*}{\partial y_*^2} + M = 0 \quad (16)$$

onde:

$$(x_*, y_*) = \frac{(x, y)}{D} \quad (17)$$

$$P_* = \frac{P}{\tau D/W} \quad (18)$$

$$M = \dot{m}'' \frac{\nu D}{\tau K} \quad (19)$$

e ν é a viscosidade cinemática do fluido. Com esta transformação, pode-se avaliar o efeito da erosão bloco a bloco, sendo que a área de cada bloco é unitária. Além disso, o valor de M incorpora vários aspectos físicos da bacia e do fluido em um parâmetro adimensional, de forma a ser possível concentrar-se no aspecto principal da dinâmica, que é a erosão.

Os blocos são removidos quando a força exercida pelo campo de pressão é maior que a força de coesão do bloco com o resto do meio poroso. Sendo s a direção da força resultante atuando no bloco, ele se mantém conectado enquanto:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right) < \frac{\tau}{W} \quad (20)$$

que, a partir da adimensionalização realizada, cria o seguinte critério de remoção:

$$\left(\frac{\partial \overline{P}_*}{\partial s_*} \right) < 1 \quad (21)$$

onde o valor da esquerda é a média do gradiente de pressão adimensionalizado sobre a área de cada bloco.

Quando esta condição é violada, o bloco é removido e o lugar por si anteriormente ocupado passa a ser um canal aberto. ERRERA e BEJAN (1998) aplicaram a analogia de Darcy para o campo de velocidade no canal aberto, utilizando as Eqs. (12) e (13) para este, mas com um novo valor de permeabilidade K_p de forma que $K_p > K$. Ou seja, o canal aberto possui uma condutividade hidráulica maior que a permeabilidade do meio poroso. Isso é um conceito utilizado repetidamente em teoria dos constructais, como pode ser visto em BEJAN (1997c).

A partir disto, diferentes dinâmicas de ação do meio, representadas pelo valor de M , foram simuladas, partindo de um primeiro valor crítico M_c , responsável pela remoção do bloco adjacente à exutória. Para $L = H = 51D$, a resolução usada em ERRERA e BEJAN (1998), este valor é de $8,8932 \times 10^{-4}$. Entre as várias simulações feitas neste artigo, destacam-se as dinâmicas com ΔM constante, mostradas na Figura 7, onde n é o número de blocos deslocados.

Segundo a teoria dos constructais, o processo natural de formação da rede, então simulado, deve ser regido pela necessidade de maximização equiparticionada ao fluxo desenvolvido. Neste caso, isso implica em uma ótima redução da resistência global ao escoamento, mensurada pela razão entre $P_{*,máx}$ (P_{peak} , o pico de pressão no sistema) e M , ou seja, a razão entre resposta e forçante. Na Figura 7, percebe-se que existem modificações que geram uma considerável redução no pico de pressão, por exemplo, entre 400 e 700, aproximadamente, na Figura 7a, e entre 90 e 190 e entre 350 e 560, aproximadamente, na Figura 7b, o que é um indício de que a mudança seja de fato otimizada.

Ainda sobre a Figura 7, são nítidas as diferenças de configuração e dinâmica proporcionadas quando o grau de modificação do forçante é alterado.

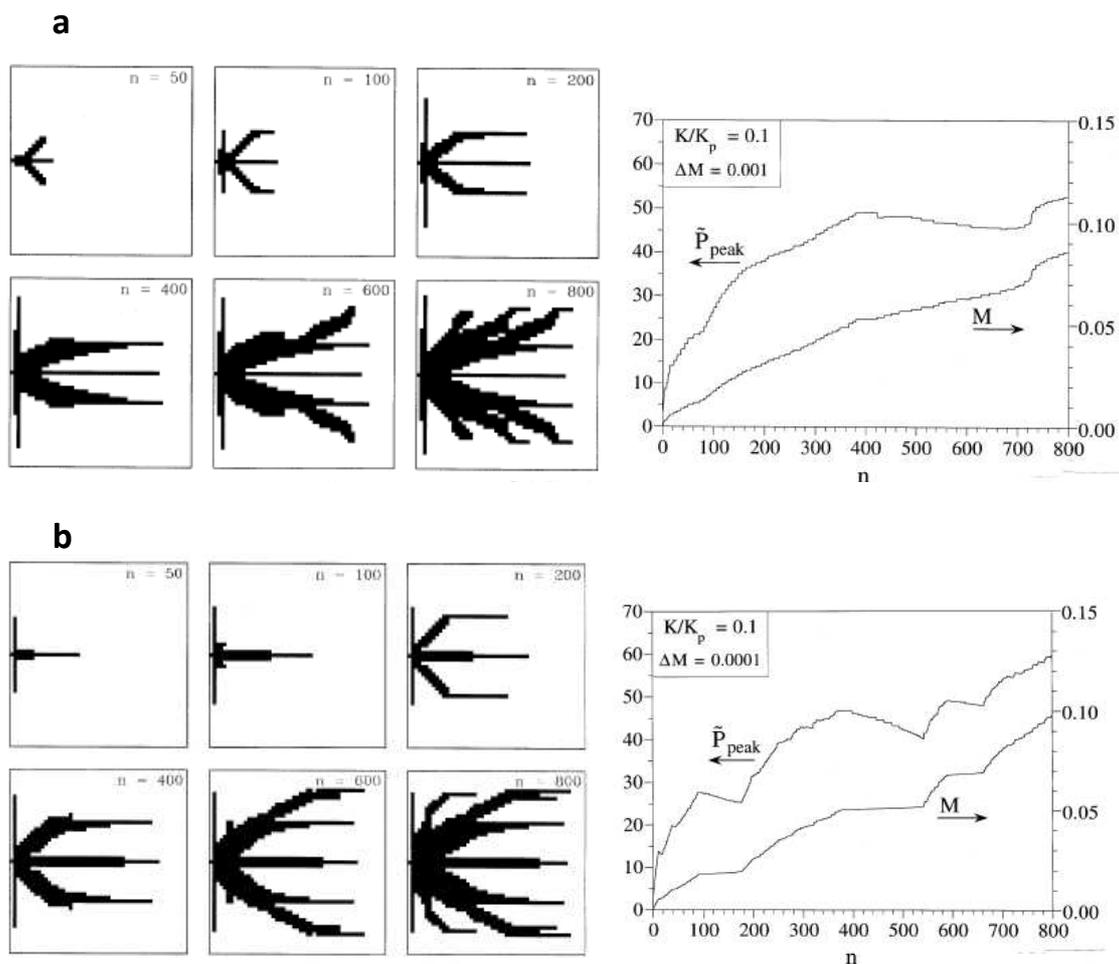


FIGURA 7 – Evolução do sistema da Figura 6 com $K/K_p = 0,1$ e M é incrementado em passos: a) $\Delta M = 10^{-3}$; b) $\Delta M = 10^{-4}$. FONTE: ERRERA e BEJAN, 1998.

As configurações produzidas quando o forçante é alterado com mais intensidade (Figura 7a) são mais irregulares, ao passo que o sistema possui uma menor possibilidade de auto-configuração. Entretanto, a resistência global ao escoamento, que é o fator de otimização segundo a teoria dos constructais, possui uma dinâmica semelhante em ambos os casos, como mostra a Figura 8, permanecendo interessantemente insensível ao valor de ΔM . Essa conclusão é consistente com os objetivos da análise que, como visto em BEJAN e TONDEUR (1998), é reproduzir características globais das geometrias, e não as finas diferenças geradas por processos locais.

Importante também de ser verificado na Figura 8 é o decréscimo monotônico da resistência ao escoamento. Entretanto, qualquer modificação interna de K por K_p obrigatoriamente reduz esse parâmetro, pois o sistema passa a possuir partes onde a permeabilidade é maior. Assim, o decréscimo verificado é esperado a partir de qualquer modificação, mesmo sendo ela completamente aleatória. No mesmo artigo, ERRERA e BEJAN (1998) criaram um critério de remoção baseado unicamente na otimização, ou seja, cada bloco que é deslocado é aquele que irá produzir a maior redução no valor o pico de pressão. Foi verificado que as estruturas da Figura 6 possuem uma dinâmica muito próxima do ótimo. O fato de não chegarem a este ótimo pode ser explicado pelos argumentos da Figura 4, já que a existência de um forçante externo reduz o grau de liberdade de alteração que a bacia teria se fosse auto-modelada. Ainda assim, pretende-se estudar se o controle destas estruturas é exercido globalmente ou localmente, a partir de um esquema aleatório de remoção de blocos, próximo dos modelos propostos em LEOPOLD *et al.*, 1964, mas sem a consideração *a priori* da existência de rede.

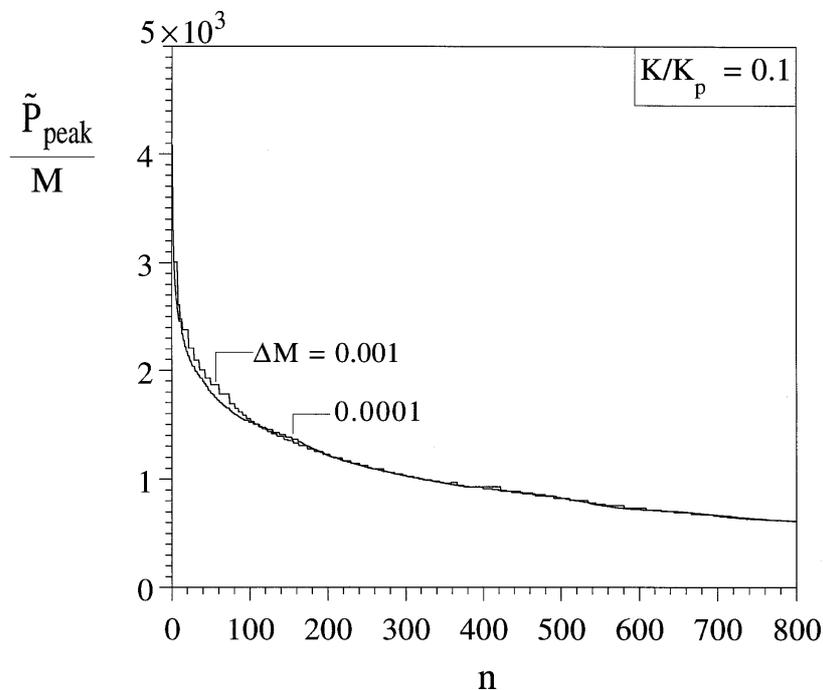


FIGURA 8 – Decréscimo monotônico da resistência ao escoamento nos processos mostrados na Figura 6. FONTE: ERRERA e BEJAN (1998)

Aliás, é neste fato que se encontra o maior avanço do artigo de ERRERA e BEJAN (1998). Em nenhum momento é assumido que uma rede irá se formar. Ela é criada a partir da própria natureza do escoamento, da necessidade de um compromisso no uso das partes de maior permeabilidade, em um escoamento área a ponto. Ou seja, é o primeiro trabalho onde se prova que a rede é uma característica intrínseca deste tipo de processo.

ERRERA e BEJAN (1998) também realizaram simulações onde a liberdade de alteração foi aumentada, relaxando a condição de área A e razão H/L fixas. Entretanto, há uma tendência de se verificar o comportamento destes sistemas sujeitos a reduções no grau de liberdade, como o trabalho de GOSSELIN (2007). No caso de bacias hidrográficas, por diversos fatores físicos, podem existir áreas praticamente imutáveis pelos canais, principalmente pela presença de afloramentos rochosos firmes, com poucas fissuras, resultando em baixa permeabilidade, ou picos resultantes de movimento tectônico, que são erodidos apenas em regiões inferiores (CHORLEY *et al.*, 1984). Esses fenômenos são o objetivo de análise deste trabalho.

Deve ser lembrado que, encaixando as respostas obtidas no contexto da teoria dos constructais, a associação com outros processos é praticamente direta. Ou seja, os resultados obtidos aqui não se restringem apenas ao campo da geomorfologia, mas sim a todos os processos onde haja escoamentos semelhantes e restrições semelhantes.

3. METODOLOGIA

A metodologia apresentada aqui trata dos recursos empreendidos para a obtenção dos objetivos citados. Neste trabalho, a dinâmica de formação de bacias de drenagem de pequena escala será simulada.

Para compreender questões acerca da globalidade *versus* localidade na formação destas estruturas, dinâmicas aleatórias foram inicialmente estudadas, e a metodologia empreendida para tal está apresentada na seção 3.2.

Em seguida, retornou-se aos modelos determinísticos, e verificou-se a influência da presença de regiões irremovíveis e impermeáveis na formação e na adaptação global do sistema, e os métodos usados estão apresentados na seção 3.3.

Entretanto, nada disso seria possível sem a criação e consolidação de um simulador, o qual está apresentado na seção seguinte.

3.1 Simulador de evolução morfológica

O modelo chamado aqui de “modelo base” é um simulador usado para reproduzir os resultados de ERRERA e BEJAN (1998), mais especificamente os apresentados nas Figuras 7 e 8. A física envolvida e os critérios para a simulação já foram descritos no item 2.3.3: o modelo é baseado na Figura 6, e se utiliza da Eq. (16) com as condições de contorno referentes à Figura 10, mais o critério de remoção apresentado na Eq. (21).

A seguir, será descrita a dinâmica da remoção dos blocos, dando especial atenção à solução do campo de pressão e, em sequência, o algoritmo realizado para tal fim.

3.1.1 Dinâmica de formação da rede

Inicialmente, a bacia é uma superfície de área $A = HL$ totalmente preenchida por uma camada de um meio poroso homogêneo de permeabilidade K , como na Figura 6. A precipitação de um fluido Newtoniano homogêneo, semelhante a um evento de chuva, cria um campo de pressão

$P(x,y)$ na bacia, regido por uma equação de Poisson (Eq. (15) ou (16)). A dedução dessa equação passa por algumas importantes considerações:

- Fluxo de Darcy, representado nas Eqs. (12) e (13);
- Meio poroso em estado saturado;
- Regime permanente;
- Precipitação homogênea sobre a superfície A ;
- Espessura suficientemente pequena da camada porosa, ou seja, $W \ll (H,L)$, assim criando um escoamento bidimensional.

O meio poroso é dividido em blocos com a face quadrada de lado D que apresentam uma resistência interna coesiva representada por uma tensão máxima de suporte a ruptura, de valor τ . Se esse valor for superado pelo campo de pressão estabelecido, o bloco é desalojado e cria-se em seu lugar um escoamento em canal aberto, que é considerado como um escoamento com fluxo de Darcy, mas com permeabilidade $K_p \gg K$. Essas considerações foram usadas por ERRERA e BEJAN (1998), para adimensionalização da equação do campo de pressão, resultando na seguinte, novamente apresentada:

$$\frac{\partial^2 P_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 P_*}{\partial y_*^2} + M = 0 \quad (16).$$

Chamando $N_{D,x}$ e $N_{D,y}$ como o número de blocos de tamanho D nas direções x e y , respectivamente, a Eq. (16) é válida então em um domínio $0 < x_* < N_{D,x}$ e $-N_{D,y}/2 < y_* < N_{D,y}/2$. Na forma como o modelo é criado, a exutória é localizada no centro da face esquerda da bacia, e isso cria uma importante restrição do modelo. Se fosse escolhido um valor $N_{D,y}$ par, então a exutória seria adjacente a dois blocos, mas nenhum completamente livre para passagem, como mostrado na Figura 9. Os blocos impediriam um ao outro de se movimentarem na direção y e de rotacionarem. Como os blocos são unidades inquebráveis, não importa qual fosse a pressão exercida, nenhum deles se desalojariam. Sendo que os blocos adjacentes a exutória não seriam desalojados, nenhum outro bloco poderia ser desalojado também e, assim, a superfície permaneceria imutável. Portanto, não é possível utilizar um valor par

de $N_{D,y}$. Por outro lado, ainda como mostra a Figura 9, com um valor de $N_{D,y}$ ímpar, a exutória permanece com apenas um bloco adjacente a si, perfeitamente livre para o movimento. Assim, é imprescindível que $N_{D,y}$ seja ímpar.

Há ainda uma importante consequência da maneira como é formulado o problema. A exutória é localizada com seu centro exatamente no eixo x . Consequentemente, o problema todo é simétrico em relação ao eixo x . Portanto, não é necessário realizar a solução do campo de pressão ao longo de todo o domínio, mas apenas para $0 < x^* < N_{D,x}$ e $0 < y^* < N_{D,y}/2$, o que poupará tempo de simulação de frente.

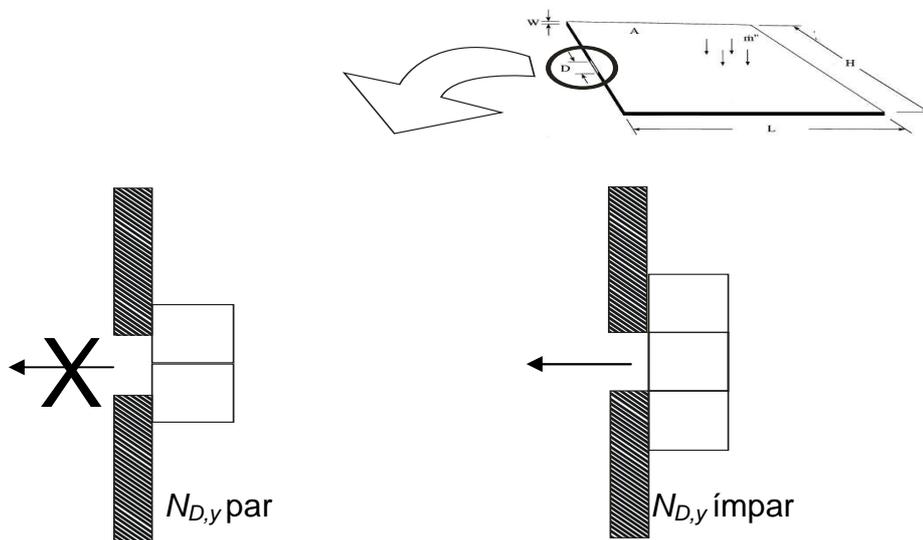


FIGURA 9 – Representação dos blocos adjacentes á exutória no caso de $N_{D,y}$ par ou ímpar, evidenciando a obrigatoriedade de $N_{D,y}$ ser ímpar para desenvolvimento da dinâmica

A Eq. (16) é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) que, por si só, não é bem definida. Como ela não possui termos temporais, faltam definir apenas as condições de contorno. Elas provêm de outra consideração do modelo: as fronteiras do sistema são impermeáveis, com exceção da exutória. Na exutória, o valor de pressão é nulo, como em um sistema aberto. Um esquema destas condições, junto com o domínio, é apresentado na Figura 10, já na forma simétrica do sistema.

O fato de o sistema possuir fronteiras impermeáveis significa que as velocidades na transversal destas fronteiras são nulas, ou seja:

$$\frac{\partial P_*}{\partial x_*} = 0, \quad \left(x_* = 0, \frac{1}{2} < y_* < \frac{N_{D,y}}{2} \right) \text{ e } \left(x_* = N_{D,x}, 0 < y_* < \frac{N_{D,y}}{2} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial P_*}{\partial y_*} = 0, \quad \left(0 < x_* < N_{D,x}, y_* = \frac{N_{D,y}}{2} \right) \quad (23),$$

a simetria em relação ao eixo x compõe uma outra espécie de condição de contorno no eixo x :

$$\frac{\partial P_*}{\partial y_*} = 0, \quad \left(0 < x_* < N_{D,x}, y_* = 0 \right) \quad (24)$$

e a exutória livre é a última condição de contorno, fechando completamente a superfície:

$$P_* = 0, \quad \left(x_* = 0, 0 < y_* < \frac{1}{2} \right) \quad (25)$$

A partir de um valor predeterminado de M , a Eq. (16) associada às condições de contorno das Eqs. (22) a (25) determina o campo de pressão completo em todo o sistema. No caso da dinâmica que se pretende simular, M parte de um valor inicial e é aumentado em intervalos ΔM . O valor inicial de M é o que produz um campo de pressão suficiente para que o bloco adjacente à exutória seja desalojado, ou seja, para que a condição da Eq. (21) seja violada. Este valor é chamado de forçante crítica M_c que, para $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$, assume o valor $8,8932 \times 10^{-4}$ (ERRERA e BEJAN, 1998).

Após o primeiro bloco ser removido, o espaço deixado passa a possuir uma nova permeabilidade, de valor K_p e, nessas regiões, o campo de pressão adimensional assume outra forma:

$$\frac{\partial^2 P_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 P_*}{\partial y_*^2} + M \frac{K}{K_p} = 0 \quad (26)$$

para que seja mantida a mesma adimensionalização mostrada nas Eqs. (17) a (19). Qualquer bloco que tiver uma das faces em contato com uma região K_p passa a ser um bloco livre para desalojamento. Para simplicidade, estes blocos serão chamados apenas de blocos livres. Só não podem se tornar livres os blocos adjacentes à fronteira do sistema.

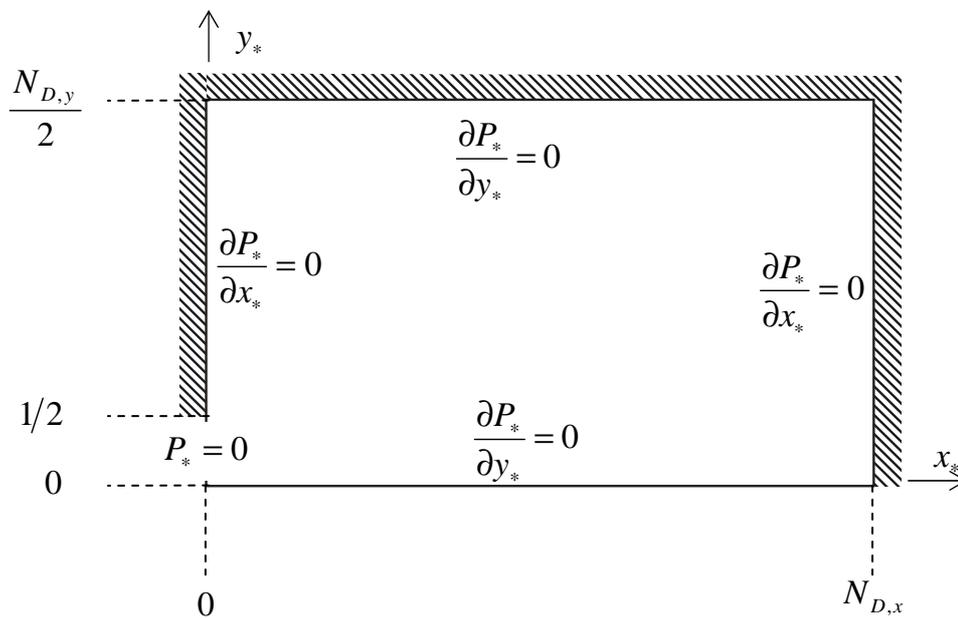


FIGURA 10 – Esquema representando as condições de contorno para solução da Eq. (16), já considerando a simetria em relação ao eixo x .

O valor de M é aumentado então em um passo ΔM , e a condição de remoção da Eq. (21) é testada para todos os blocos livres. Aqueles que tiverem a condição violada são removidos, e passam a ser caminhos K_p . Se nenhum ou quando mais nenhum bloco livre tiver a condição de remoção violada, M é novamente aumentado por ΔM . O número de blocos desalojados é representado por n , e o processo se repete até um valor de n desejado.

É importante salientar aqui que a simulação de erosão realizada por este modelo compreende apenas um tipo específico, que ocorre a partir de eventos

de precipitação com longa duração. Não se consideram, por exemplo, a erosão provocada pelo choque das moléculas de água com o solo descoberto, ou a erosão por incisão do leito rochoso, que exigem maiores informações a respeito de cobertura do solo e composição rochosa (CHORLEY *et al.*, 1984). Nesse caso, apenas a erosão provocada pelo gradiente de pressão é calculada e, como é considerado regime permanente e solo saturado, apenas eventos duradouros o suficiente são analisados.

Assim como o que discorrem BEJAN e TONDEUR (1998) a respeito das estruturas obtidas com teoria dos constructais, o modelo acima não procura reproduzir configurações perfeitas de redes, mas sim, as características globais que se apresentam a partir de um modelo simples, considerando eventos globais.

3.1.2 Solução do campo e dos gradientes de pressão

O campo de pressão a ser resolvido a cada passo é dado pelas Eq. (16) para as regiões de permeabilidade K e pela Eq. (25) para as regiões de permeabilidade K_p , sujeitos as condições de contorno mostradas nas Eqs. (22) a (25). As Eqs. (16) e (25) são equações de Poisson bidimensionais, que nada mais são que representantes não-homogêneas da equação de Laplace. Estas equações podem possuir soluções analíticas, dependendo da forma do domínio e das condições de contorno (ver, por exemplo, o capítulo 20 de GREENBERG, 1998). Entretanto, tentativas de lidar com o problema de forma analítica foram infrutíferas, por causa do aspecto das condições de contorno.

Por isso, recorreu-se a soluções numéricas. Para solução de EDPs, os métodos mais utilizados são o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). Para este trabalho, existem grandes vantagens no uso do MEF. O MEF consegue trabalhar eficazmente com as mudanças estruturais ocorridas a cada passo da simulação, pois cada elemento fica homogêneo. Além disso, os resultados, apesar de serem apresentados por pontos (os pontos nodais), provêm funções de interpolação entre os respectivos pontos nodais. Assim, subsequentes

interpolações são condizentes com o MEF. Essas características do MEF são reportadas em vários livros texto, como em BURNETT (1987).

As interpolações são necessárias para o cálculo dos gradientes de pressão. As respostas do MEF valem praticamente para todo o domínio contínuo do problema (por causa das interpolações realizadas) desde que se siga o mesmo processo de interpolação utilizado na solução. O campo de pressão, então, é uma resposta contínua, mas os gradientes devem ser avaliados na forma de médias aplicadas a cada bloco em separado, conforme a Eq. (21), que por sua vez é uma análise em um domínio discreto.

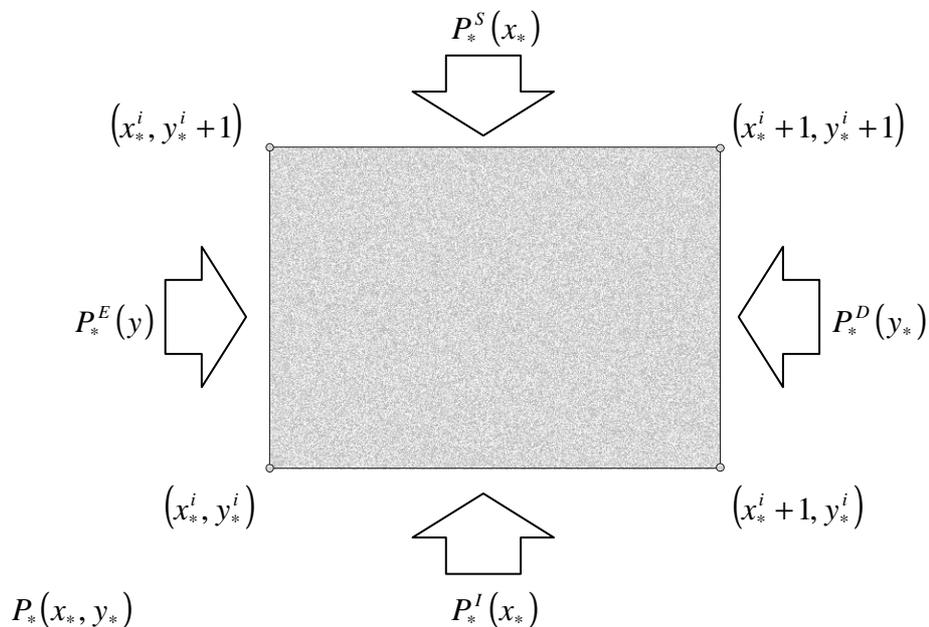


FIGURA 11 – Reprodução de um bloco genérico da Fig. 5, sujeito a um campo de pressão externo $P_*(x_*, y_*)$, considerado como um bloco sólido, sem influência do campo de pressão interno em sua dinâmica, e representado pela coordenada do vértice inferior esquerdo. Em relação á pressão, os índices E , D , I e S denotam a face do bloco em que a pressão está sendo exercida: esquerda, direita, inferior e superior, respectivamente.

A Figura 11 apresenta um bloco genérico, em uma visualização efetiva para o cálculo do gradiente de pressão necessário. Já havia sido visto que o

bloco é inquebrável e, com isso, ele pode ser considerado como um bloco sólido. Essa é também uma importante simplificação do modelo. Nesse caso, a média em y do gradiente de pressão na direção x pode ser aproximada por:

$$\left(\overline{\frac{\partial P_*}{\partial x_*}} \right) \approx \frac{\Delta \bar{P}_*}{\Delta x_*} = \bar{P}_*^D - \bar{P}_*^E \quad (27)$$

já que $\Delta x_* = 1$ onde os índices D e E representam, respectivamente, as faces direita e esquerda do bloco.

O valor médio da pressão exercido na face direita é calculado por:

$$\bar{P}_*^D = \frac{\int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} P_*^D(y_*) dy}{\int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} dy} = \frac{\int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} P_*(x_*^i + 1, y_*) dy}{\int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} dy} = \int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} P_*(x_*^i + 1, y_*) dy \quad (28)$$

e, por analogia, o valor médio da pressão exercido na face esquerda:

$$\bar{P}_*^E = \int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} P_*(x_*^i, y_*) dy \quad (29)$$

Substituindo as Eqs. (28) e (29) na Eq. (27), têm-se uma aproximação do valor do gradiente de pressão em x :

$$\begin{aligned} \left(\overline{\frac{\partial P_*}{\partial x_*}} \right) &\approx \int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} P_*(x_*^i + 1, y_*) dy - \int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} P_*(x_*^i, y_*) dy \\ &= \int_{y_*^i}^{y_*^{i+1}} [P_*(x_*^i + 1, y_*) - P_*(x_*^i, y_*)] dy \end{aligned} \quad (30)$$

De forma análoga, pode ser encontrada uma aproximação para o gradiente de pressão em y :

$$\left(\overline{\frac{\partial P_*}{\partial y_*}}\right) \approx \int_{x_*^i}^{x_*^{i+1}} [P_*(x_*, y_*^i + 1) - P_*(x_*, y_*^i)] dx \quad (31).$$

Quando o bloco é livre apenas para se mover na direção do eixo x , o critério de remoção da Eq. (21) é testado a partir do gradiente da Eq. (30), enquanto no caso de movimento livre apenas na direção do eixo y , é válido o valor da Eq. (31). Quando ambas as direções são livres para movimento, é necessário aplicar a resultante conforme a Eq. (21). Neste caso, a distância de aplicação da pressão é sempre a mesma, de valor unitário. Assim, pode-se aplicar a definição de resultante também para o gradiente de pressão:

$$\left(\overline{\frac{\partial P_*}{\partial s_*}}\right) = \sqrt{\left(\overline{\frac{\partial P_*}{\partial x_*}}\right)^2 + \left(\overline{\frac{\partial P_*}{\partial y_*}}\right)^2} \quad (32).$$

Com isso, têm-se todas as condições necessárias para aplicação do teste de remoção nos blocos livres.

Entretanto, a função $P_*(x_*, y_*)$ é respondida pelo modelo de forma discreta, ou seja, o valor da pressão em pontos determinados. Assim, as integrais das Eqs. (30) e (31) devem também ser desenvolvidas de forma discreta, o que é facilmente feito por métodos numéricos. No caso do MEF, apesar de a resposta ser também por pontos, o método usa interpolações entre esses pontos na ocasião dos cálculos, e é importante então que o método de integração numérica seja coerente com o tipo de função de interpolação usada no MEF.

Na aplicação do MEF, as funções de interpolação são chamadas de *funções de forma*, que usualmente são polinômios. Devido à forma do problema envolvido, é intuitivo o uso de elementos quadriláteros, ou seja, que possuam a mesma forma que os blocos a serem analisados. A forma mais simples e direta de obter funções de forma para este tipo de elemento é o produto de funções de interpolação unidimensional para cada dimensão (BURNETT, 1987).

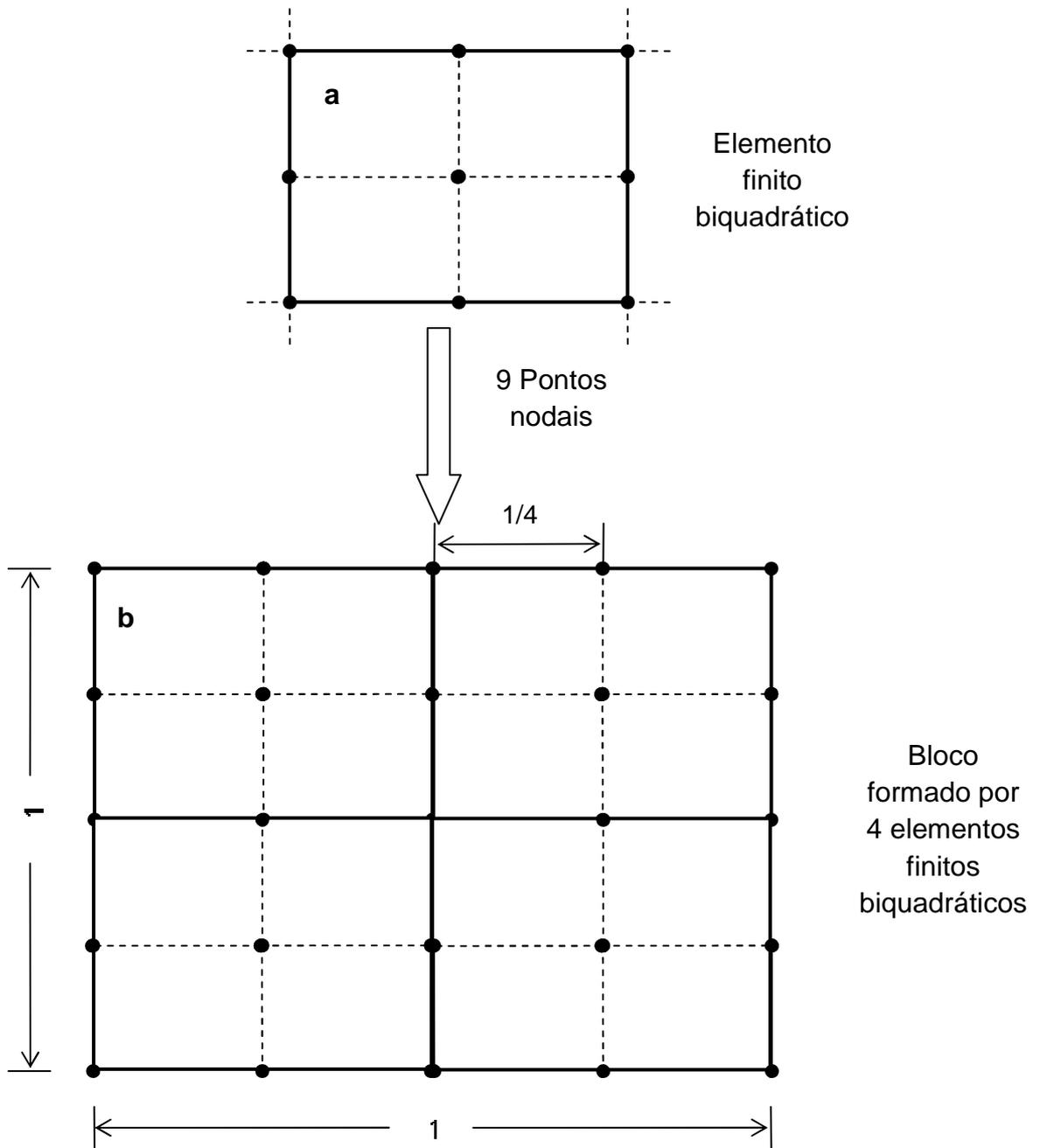


FIGURA 12 – Detalhes geométricos da simulação do campo de pressão: a) esquema representativo de um elemento finito biquadrático (Adaptado de BURNETT, 1987); b) discretização utilizada para cada bloco, com o uso de 4 elementos finitos biquadráticos, totalizando cinco pontos nodais em cada face.

Cada elemento possui um determinado número de *pontos nodais*, que caracterizam a forma do elemento e são dependentes do tipo de interpolação

usada. No caso de uma interpolação biquadrática, são utilizados polinômios de 2º grau para as funções de forma, que possuem o seguinte aspecto geral:

$$f(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^2 y + \alpha_7 xy^2 + \alpha_8 x^2 y^2 \quad (33)$$

ou seja, o produto entre um polinômio de 2ª ordem em x e outro de mesma ordem em y . Usualmente, os valores x e y são substituídos por valores adimensionais que produzem “áreas” unitárias de elementos e coordenadas nulas no centro de cada elemento (BURNETT, 1987). Entretanto, este tipo de definição é útil para generalização, mas não é necessário nesta discussão. O que se pretende mostrar aqui é que o FEM biquadrático usa-se de polinômios de 2º grau e que, como a equação de forma, como a Eq. (33), possui nove parâmetros, são necessários então nove pontos nodais para cada elemento, ficando cada elemento conforme mostrado na Figura 12a.

Para aumentar a precisão das respostas, foram utilizados quatro elementos para cada bloco, de forma que possuam cinco pontos nodais em cada uma de suas faces (ver Figura 11b), e são estes pontos que são usados para a integração. Dessa forma, o número total de elementos, N_E , é calculado da seguinte forma:

$$N_E = 4N_{D,x} \frac{(N_{D,y} + 1)}{2} \quad (34)$$

e, de forma semelhante, o número total de pontos nodais, N_p :

$$N_p = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) \quad (35).$$

Para manter a coerência desejada, a integração foi realizada utilizando a bem conhecida regra de 1/3 de Simpson, que também utiliza polinômios de 2º grau para aproximação das integrais.

Para a simulação numérica, foi utilizado um software de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD, de *Computational Fluid Dynamics*), com o uso

cedido como cortesia pela Duke University, o FIDAP[®], da Fluent Inc., que usa como base o MEF. Por isso, foi necessário desenvolver uma rotina que, para cada passo da simulação, crie um arquivo de entrada ao programa, com as configurações modificadas da bacia, e interprete a saída do programa para o cálculo dos gradientes de pressão. Este procedimento é descrito no item seguinte.

3.1.3 Algoritmo de simulação

Neste item, a rotina de simulação para o modelo inicial é reportada, de uma forma geral, para compreensão da sequência computacional e das mudanças necessárias para cada passo do trabalho. É importante salientar que não é pretendida uma descrição minuciosa dos programas, mas sim uma apresentação geral para que a metodologia utilizada se torne mais clara e aberta para discussão. A Tabela 1 apresenta uma síntese de todos os programas utilizados na simulação. Dois programas são executados *a priori*, o *BGen* (*Basin Generation*) e o *FidGen* (FIDAP[®] Entry Generation), gerando as bases da simulação (ambos foram desenvolvidos em C++, pois a utilização de objetos facilitou a manipulação de grandes conjuntos de *strings*). Os programas restantes são controlados pela rotina *Erosion.m*, que realiza os cálculos e as modificações necessárias.

A simulação começa a partir do executável *BGen*. Antes da compilação, define-se o número de blocos $N_{D,x}$ e $N_{D,y}$ no código-fonte. A sua execução cria um arquivo fundamental para as simulações seguintes, o arquivo texto *mapa_0.txt*. Este arquivo contém uma matriz com configuração inicial da bacia, compreendendo o estado de cada bloco. Antes da simulação, este arquivo é clonado no arquivo *mapa_1.txt*, que é então modificado a cada passo. Assim, *mapa_0.txt* se mantém inalterado durante toda a simulação, e *mapa_1.txt* passa a ser um arquivo mutável. Neste arquivo, o estado de cada bloco é representado pelos caracteres *K*, *L* e *c* que simulam, respectivamente, solo sem possibilidade de movimento, solo livre para movimento, e canal livre.

TABELA 1 – Resumo dos programas utilizadas para as simulações

Programa	Linguagem	Atribuição
BGen	C++	Cria o arquivo <i>mapa_0.txt</i> , com a configuração inicial da área de simulação.
FidGen	C++	A partir da configuração inicial da bacia, cria um arquivo <i>FDREAD.txt</i> , com as informações necessárias para a simulação do campo de pressão e para criação do arquivo de entrada ao FIDAP, <i>[id].FDREAD²</i> e o arquivo <i>BConfgeo.txt</i> , que contém as informações para localização geométrica de cada bloco
BConf	C	Altera as configurações da bacia a partir dos blocos removidos, determina os blocos livres, reportados em <i>cand.txt</i> , e reconfigura o arquivo <i>[id].FDREAD²</i> para nova simulação.
FilterOUT	C	Extrai das informações contidas no arquivo <i>[id].FDOUT³</i> após cada simulação os valores de pressão para cada ponto nodal, e reporta no arquivo <i>results.dat</i> em colunas.
XYtoMESH	C	Recebe as informações de <i>results.dat</i> e transfere para o arquivo <i>xy_mesh.dat</i> na forma de matriz de pressões, associadas com o respectivo par (x,y).
Erosion.m ¹	GNU Octave	Linha de comando que controla a execução de cada um dos programas anteriores determina os blocos a serem removidos. É assistido pela sub-rotina <i>CalcGrad.m</i> , que realiza o cálculo dos gradientes para os blocos livres.

¹Arquivos de extensão *.m* são próprios para MatLab®, e reconhecidos pelo GNU Octave, mas não criam executáveis. Neste caso, a sua descrição como programas não é exata, se adaptando mais como linha de comando. Mas, no contexto da simulação, a sua utilidade é a mesma de a de um programa.

²*[id]* simboliza a identidade pela qual é denominado o arquivo de entrada para o FIDAP®, que deve ser de extensão *.FDREAD*. A chamada da simulação deve ser feita por esta mesma identidade.

³O arquivo de extensão *.FDOUT* é um dentre os vários arquivos de saída gerados após a simulação pelo FIDAP®. Contém os resultados dos cálculos, dentre outras informações, e é criado com a mesma identidade do arquivo de entrada.

A partir do *mapa_1.txt* (derivado do *mapa_0.txt*), o programa *FidGen* gera dois arquivos importantes para a continuidade da simulação. O primeiro deles é o arquivo *BConfgeo.txt* (*Basin Geometric Configuration*). Este arquivo é uma base de dados que contém identificadores de cada bloco dispostos em colunas: a numeração do bloco; a numeração dos vértices inferior esquerdo e superior direito; e as coordenadas destes vértices. Essas informações são usadas ao longo de toda a simulação, para uma localização ordenada de cada parte da bacia.

O segundo arquivo gerado pelo *FidGen* é o arquivo *FDREAD.txt*. Este arquivo possui duas funções básicas. Inicialmente, ele é usado para criar um *[id].FDREAD*. Nesta definição, *[id]* simboliza a identidade pela qual é denominado o arquivo de entrada para o FIDAP[®], que deve ser de extensão *FDREAD*. A chamada da simulação deve ser feita por esta mesma identidade. Esta primeira simulação é realizada por dois motivos: verificar possíveis erros no arquivo de entrada e, este estando adequado, obter a simulação para a bacia formada somente pela camada de permeabilidade *K*, o que é usado para a obtenção do valor de M_c .

A outra função do arquivo *FDREAD.txt* é fornecer os alicerces para a criação do arquivo *matrix.FDREAD*. O arquivo *matrix.FDREAD* possui apenas as informações que se mantêm constantes ao longo da simulação, como a definição e localização de pontos, dos elementos e das fronteiras. Entre as informações imutáveis e mutáveis, foram criados “flags” que são compreendidos pelo programa *BConf* (*Basin Configuration*), o qual cria o *[id].FDREAD* para cada etapa da simulação, com base em outros arquivos.

Este programa, o *BConf*, é um dos mais importantes da simulação. Ele é responsável por quase toda a etapa de pré-processamento. O arquivo *mapa_1.txt* é lido pelo *BConf*, o qual identifica a localização e o estado de cada bloco (com auxílio do *BConfgeo.txt*) e interpreta isso de uma forma que o FIDAP compreenda para a correta simulação, ou seja, o arquivo *[id].FDREAD*. Este arquivo, neste caso, é formado essencialmente pelo *matrix.FDREAD*, acrescido das informações mutáveis da bacia e de informações sobre o pós-processamento ao FIDAP, que estão presentes em um arquivo auxiliar, livre para edição, *FI_PREP.FDREAD*. Além disso, o *BConf* cria outras informações

a partir de *mapa_1.txt*, fazendo a verificação dos blocos livres e salvando os seus identificadores em um arquivo *cand.txt* (ou seja, um arquivo que contém os candidatos à remoção), e destes determinando os blocos que possuem as duas direções livres para o movimento, aos quais a Eq. (32) deve ser aplicada, e que são salvos no arquivo *corner.txt*.

A importância supracitada do *BConf* reside no fato de que ele cria todas as informações necessárias e auxiliares para os cálculos seguintes em cada passo, ou seja, ele é o responsável por formatar os alicerces da simulação. A cada passo, ele é o primeiro programa a ser executado. Então, o FIDAP[®] recebe o arquivo *[id].FDREAD*, realiza a simulação do campo de pressão, conforme descrito no item anterior, e cria os arquivos de saída. O programa *FilterOUT* recebe o principal destes, o *[id].FDOUT*, e encontra neste arquivo os resultados obtidos para o campo de pressão, criando um outro arquivo, *results.dat*, que contém os valores de pressão para cada ponto nodal. Um outro programa, *XYtoMESH*, transforma os valores de *results.dat* para uma matriz de pressão, com os valores obtidos para cada par (x^*, y^*) .

A sequência onde se executa o *BConf*, se ativa a simulação pelo FIDAP[®], e se executam *FilterOUT* (*Filter FIDAP[®] OUT Data*) e *XYtoMESH* (*XY Vector to Pressure Mesh*) é comandada por uma linha de código preparada para o GNU Octave[®], *Erosion.m*. Esta sequência é feita a cada passo. Além disso, antes de iniciar outro passo, o *Erosion.m* também realiza o cálculo do gradiente de pressão e determina os blocos a serem removidos.

Após esta descrição dos programas, a dinâmica de simulação pode ser mais bem elucidada. A Figura 13 apresenta um esquema da etapa preparatória da simulação. Como já foi discutido, com os valores $N_{D,y}$ e $N_{D,x}$ definidos, o *BGen* determina a configuração inicial da bacia. A partir disto, o *FidGen* cria um arquivo de entrada para a simulação em MEF. Este arquivo é usado para o cálculo do valor de M_c . Realizam-se duas simulações, com dois valores diferentes de M , chamados M_a e M_b . Para cada simulação, calculam-se os gradientes de pressão no único bloco livre, adjacente à exutória.

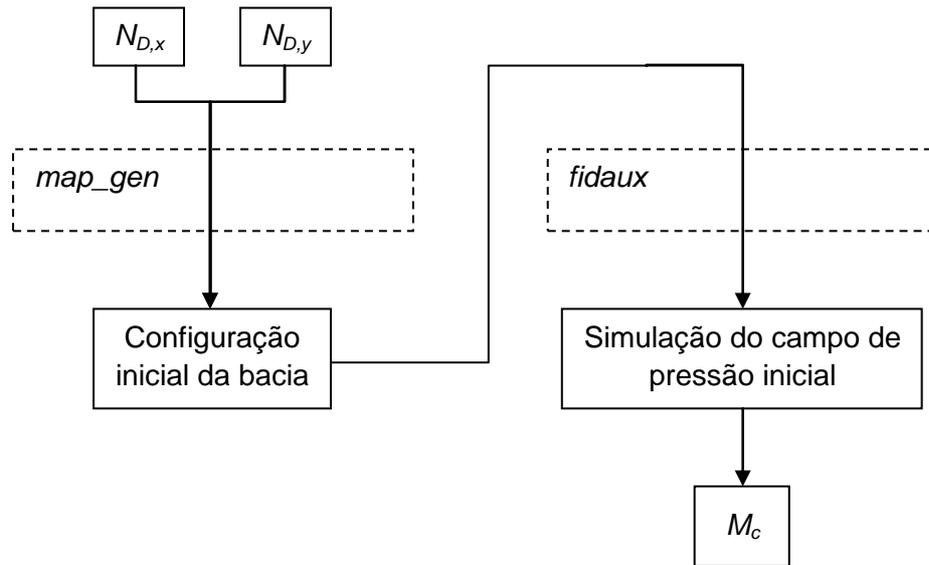


FIGURA 13 – Esquema com o processo preparatório da simulação, para geometrização da configuração inicial da bacia e obtenção de M_c (valor de M para desalojamento do primeiro bloco). Os retângulos pontilhados simbolizam os programas utilizados nesta etapa.

A ordem da numeração dos blocos é feita a partir do bloco em contato com o vértice superior esquerdo da área, e segue sempre da direita para a esquerda, pulando para o início da linha inferior a cada fim de linha. Assim, o bloco adjacente à exutória, chamado de N_1 é obtido por:

$$N_1 = N_{D,x} \frac{(N_{D,y} - 1)}{2} + 1 \quad (36)$$

lembrando que $N_{D,x}$ e $N_{D,y}$ são o número de blocos na direção do eixo x e do eixo y, respectivamente.

A Eq. (16), que representa o campo de pressão estabelecido, é uma equação linear e, portanto, a pressão é proporcional ao valor de M , enquanto o sistema se mantiver inalterado. O mesmo é válido para o valor do gradiente de pressão. Esse fato foi usado para calcular o valor de M_c :

$$M_c = M_a + \frac{1 - \varphi_a}{\varphi_b - \varphi_a} (M_b - M_a) \quad (37)$$

onde φ_a e φ_b são os gradientes de pressão, obtidos pela Eq. (30), para o bloco adjacente à exutória (localizado pela numeração N_i) quando o sistema é submetido, respectivamente, a valores de $M = M_a$ e $M = M_b$.

Com a configuração inicial da bacia e o valor de M_c computados, a simulação está pronta para ser realizada em plenitude. A Figura 14 apresenta um esquema resumindo as principais etapas da simulação e os programas responsáveis. Circundando todos os outros programas está a rotina *Erosion.m* que, conforme comentado, controla toda a execução da simulação. Ela recebe, inicialmente, os arquivos com a configuração inicial e geometrização da bacia, e com isso determina os blocos susceptíveis ao desalojamento.

Ao mesmo tempo, a partir desta configuração e do valor de M_c , a rotina direciona, através de um arquivo gerado pelo *BConf*, a simulação do campo de pressão pelo FIDAP®. Dos resultados gerados por esta simulação, o programa *FilterOUT* extrai o campo de pressão em colunas, e o programa *XYtoMESH* transforma estes dados em uma matriz de pressões, ou seja, a discretização e as respectivas magnitudes para campo de pressão bidimensional.

Com base nesta matriz, a sub-rotina *CalcGrad.m* realiza a integração no campo de pressão para os blocos susceptíveis ao desalojamento, e determina os gradientes de pressão existentes nas direções livres, conforme as Eqs. (30), (31) e (32). Ao bloco com maior valor do gradiente é aplicado o teste da Eq. (21), ou seja, é verificado se o valor respectivo é maior que 1. Se o for, o bloco passa a ser então um canal de permeabilidade K_p , e o número de sua localização geométrica é atribuído a ω . O processo é então repetido para o segundo maior gradiente, e assim por diante, enquanto ω for não-nulo.

O valor padrão de ω é zero, ou seja, quando mais nenhum bloco for removido, $\omega = 0$. Nesse caso, o valor de M é acrescido em um passo ΔM , a bacia é reestruturada com as novas definições dos domínios K e K_p (definidos a partir dos blocos removidos para o valor anterior de M), e uma nova simulação do campo de pressão é realizada. A partir desta simulação, as etapas se seguem com anteriormente.

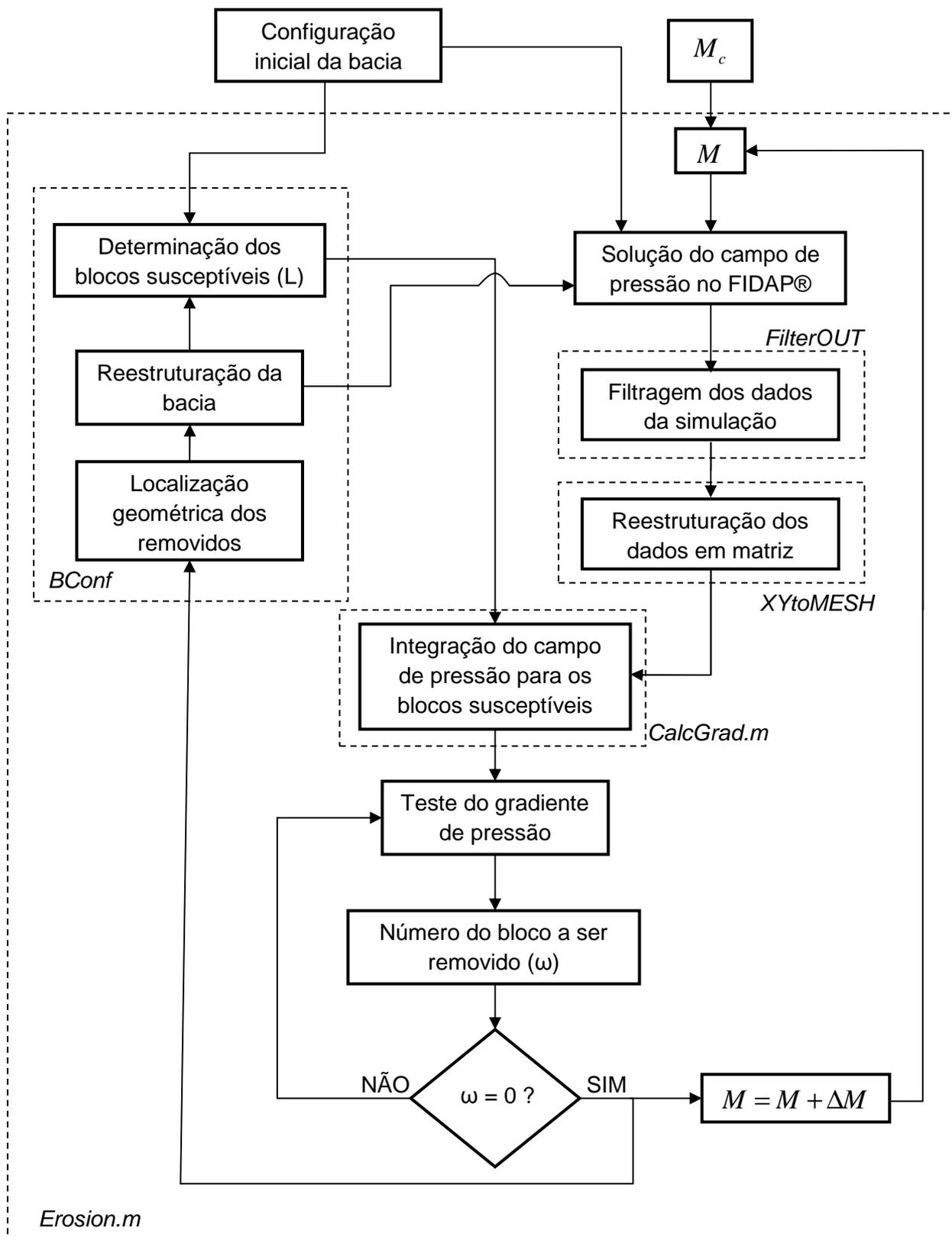


FIGURA 14 – Esquema com o processo de simulação utilizado no chamado *modelo* inicial, sendo que os retângulos pontilhados simbolizam os programas utilizados nesta etapa

O número de blocos removidos é representado pelo valor n . O processo é então repetido até que n atinja um valor desejado, ou enquanto M seja menor que um valor limite determinado para este parâmetro, usualmente 1.

Esse é o processo utilizado nas simulações do modelo inicial, com o objetivo de reproduzir os resultados de ERRERA e BEJAN (1998). Com base nesta descrição, as alterações necessárias para cada modelo ficam mais fáceis de compreender, como será mostrado nos itens seguintes.

3.2 Modelos com aleatoriedade

Na Figura 7, verifica-se claramente que, na criação das redes a partir do modelo de erosão de ERRERA e BEJAN (1998), a resistência ao escoamento, representada pela razão entre o pico de pressão e o forçante externo (M), é consideravelmente reduzida a cada bloco removido. Entretanto, uma tendência de redução da resistência ao escoamento é esperada simplesmente devido à troca de espaços de baixa permeabilidade por blocos de alta permeabilidade, e não está claro se o tipo da configuração exerce influência considerável neste aspecto.

Para elucidar esta questão, foram desenvolvidos dois modelos aleatórios, com base no modelo inicial já explicado.

No primeiro modelo, o critério de remoção da Eq. (21) é substituído por um esquema de escolha aleatória. Neste caso, em um conjunto de blocos susceptíveis a remoção, determinado em cada passo conforme a configuração da bacia, todos possuem a mesma chance de serem removidos. De uma forma matemática, isso significa que, se o bloco a ser removido é definido como uma variável aleatória Ω , a probabilidade de Ω ser igual a um determinado valor ω é:

$$P[\Omega = \omega] = \frac{1}{N_L} \quad (38)$$

onde N_L é o número de blocos susceptíveis a remoção em um determinado passo da simulação. Este número varia ao longo das diferentes configurações obtidas. Este modelo foi chamado de *Modelo de Escolha Aleatória* (MEA).

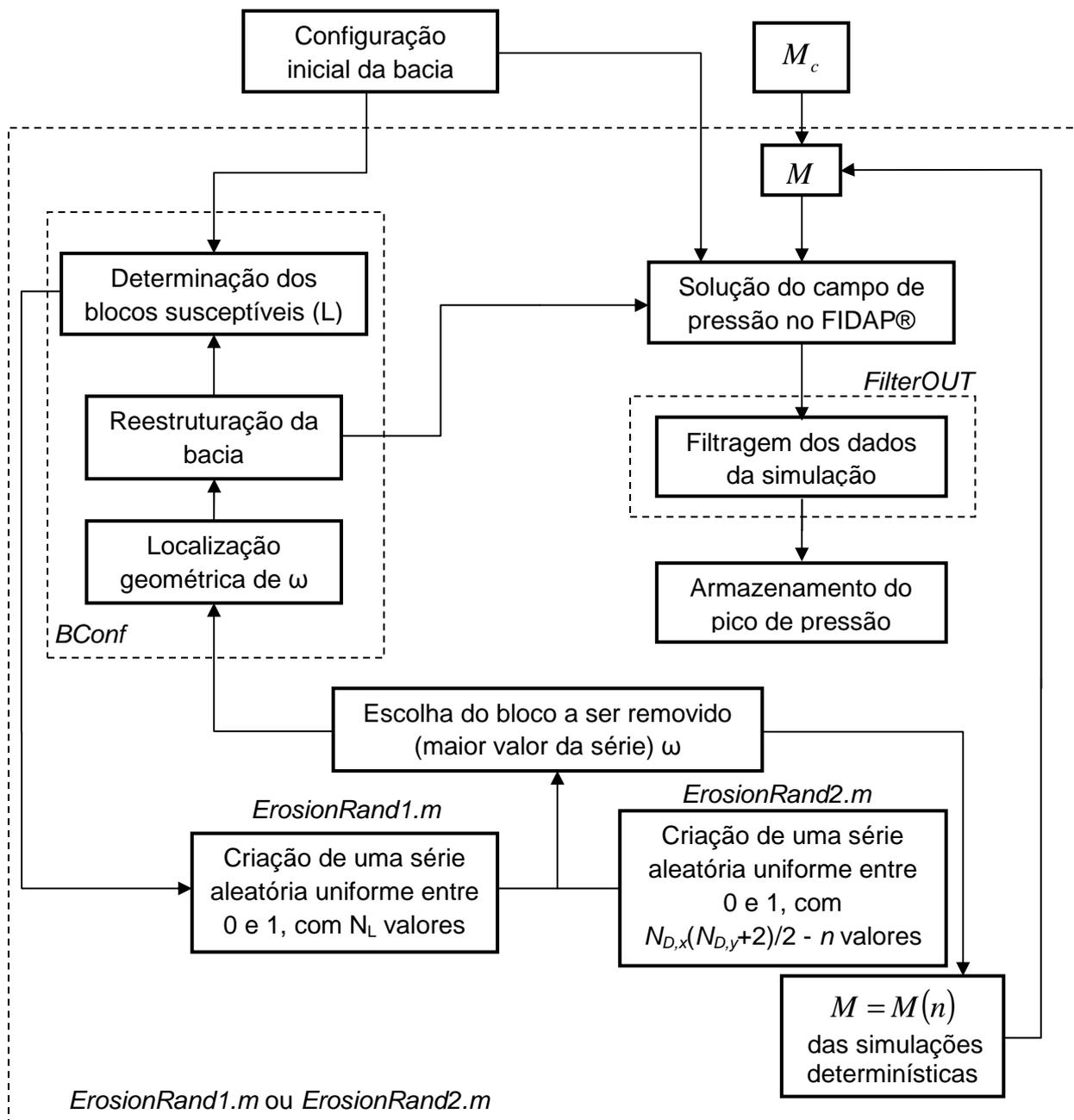


FIGURA 15 – Esquema com o processo de simulação utilizado nos modelos aleatórios, sendo que os retângulos pontilhados simbolizam os programas utilizados nesta etapa

No segundo modelo, a condição de remoção apenas para blocos livres é relaxada, e então os blocos a serem removidos são escolhidos dentre todos os blocos da área A . Pelo caráter deste modelo, foi atribuída a denominação de *Modelo Completamente Aleatório* (MCA), ou seja, não há nenhum fator determinístico que influencia no desenvolvimento das configurações. Neste

caso, usando a mesma definição da variável aleatória Ω , a probabilidade de Ω ser igual a um determinado valor ω passa a ser:

$$P[\Omega = \omega] = \left[N_{D,x} \left(\frac{N_{D,y} + 1}{2} \right) - n \right]^{-1} \quad (39)$$

ou seja, os blocos livres para remoção são todos os blocos existentes, $N_{D,x}(N_{D,y}-1)/2$, menos o número de blocos já removidos n . É importante notar que, em ambos os modelos aleatórios, é utilizada também a hipótese de simetria em relação ao eixo x . Isso não é, evidentemente, uma característica existente em um modelo aleatório. Entretanto, a aleatoriedade é presente apenas na criação das configurações, sendo que o cálculo do campo de pressão continua sendo feito de forma determinística. Essa consideração foi utilizada apenas para redução dos esforços computacionais, já elevados para estes cálculos, e não cria problemas em relação aos objetivos de comparação desejados. Neste caso, é inclusive interessante pois isola-se a questão da assimetria das comparações.

Outro ponto importante relacionado aos modelos aleatórios é em relação à dinâmica dos valores de M . Apesar de não exercer nenhum efeito na formação das configurações, este valor exerce, é claro, influência no campo de pressão. Porém, este é obtido a partir de equações lineares e, com isso, as magnitudes do campo de pressão são diretamente proporcionais ao valor de M . Assim, a resistência ao escoamento, que é o parâmetro pertinente à análise, não é dependente do valor de M . Para não gerar dúvidas, foi mantida a mesma sequência $M \times n$ obtida no modelo determinístico, mas é importante que o fato supracitado seja abarcado.

Para criar a aleatoriedade descrita, séries de números aleatórios uniformes entre 0 e 1 foram criadas para cada etapa das simulações. Cada bloco que é submetido a teste recebe um valor determinado pela série criada. O bloco a ser removido é então aquele que possui o maior valor dentre todos.

Isto é feito com auxílio de outro programa, *RandNGen* (*Random Numbers Generation*), criado também com o código-fonte em C. As séries criadas, na verdade, são pseudo-aleatórias, pois a semente é determinada

para a primeira série. As sementes das próximas séries são provenientes do último valor (multiplicado por um valor inteiro base do C) das séries anteriores.

Para esta alteração, a linha de comando principal foi modificada para *ErosionRand1.m*, no caso do MEA, e para *ErosionRand2.m*, para o caso do MCA, apresentados na Figura 15. A grande diferença entre o modelo inicial é que o cálculo dos gradientes passa a ser desnecessário. Neste caso, apenas a simulação da pressão é importante, pois é utilizada para o cálculo da resistência ao escoamento.

3.3 Experimentos computacionais com os blocos irremovíveis

A parte essencial deste trabalho consiste em inserir blocos irremovíveis nas dinâmicas de formação de redes de drenagem obtidas em ERRERA e BEJAN, 1998, e verificar a consequência destas restrições na formação da configuração global. No caso de bacias hidrográficas, por diversos fatores físicos, podem existir áreas praticamente imutáveis pelos canais. Dois exemplos são importantes de serem citados: (i) picos resultantes de movimento tectônico, que são erodidos apenas em regiões inferiores; (ii) presença de afloramentos rochosos firmes, com poucas fissuras, resultando em baixíssima permeabilidade (CHORLEY *et al.*, 1984).

Para essa sequência, adaptações ao modelo inicial são necessárias. A primeira mudança realizada diz respeito à obtenção dos blocos susceptíveis à remoção. Foi necessário estabelecer uma condição simples: se o bloco for irremovível, ele não pode ser considerado candidato à remoção, bem como os blocos imediatamente adjacentes. Matematicamente, isso significa que o conjunto dos blocos irremovíveis e seus adjacentes, além de ser imutável, não pode pertencer a nenhum outro conjunto.

Em relação à outra alteração, é adicionada ainda a restrição de permeabilidade nula aos blocos irremovíveis, sendo testadas duas abordagens para tal.

A abordagem básica consiste em simplesmente modificar a região do domínio ocupada por blocos irremovíveis para uma região de nova

permeabilidade K_s , sendo obviamente $K_s < K$. Nesta nova região, o campo de pressão, utilizando a mesma adimensionalização da Eq. (16) passaria a ser:

$$\frac{\partial^2 P_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 P_*}{\partial y_*^2} + M \frac{K}{K_s} = 0 \quad (40).$$

Essa equação é perfeitamente aplicável conquanto K_s não seja nulo. Entretanto, este é justamente o caso sendo abordado. Neste caso, a Eq. (39) não é definida e, assim, essa abordagem não é possível. Uma alternativa é o uso de um valor de magnitude finita próxima de zero, o que claramente não representa exatamente o fenômeno procurado, mas pode oferecer resultados aproximados adequáveis ao trabalho.

Para resolver este problema, outra abordagem possível é a remoção destes blocos do domínio do problema. É nesta alternativa que foi creditada a possibilidade de melhores resultados.

Se os blocos são impermeáveis, isso significa que suas fronteiras possuem fluxo nulo, e isso caracteriza uma mudança nas condições de contorno, que ocorrem de forma diferente dependendo da localização do conjunto de blocos impermeáveis. A Figura 16 mostra as duas possibilidades.

Na Figura 16a, é apresentado o caso de o conjunto ter seu centro localizado no eixo x . Neste caso, a condição de contorno de simetria, representada na Eq. (24), é alterada. Supondo que a coordenada dos vértices superiores esquerdo e direito sejam dadas respectivamente por $(x_{*,e}, y_{*,s})$ e $(x_{*,d}, y_{*,s})$, então as novas condições de contorno seriam as seguintes:

$$\frac{\partial P_*}{\partial x_*} = 0, \quad (x_* = x_{*,e}, 0 < y_* < y_{*,s}) \text{ e } (x_* = x_{*,d}, 0 < y_* < y_{*,s}) \quad (41)$$

$$\frac{\partial P_*}{\partial y_*} = 0, \quad (0 < x_* < x_{*,e} \text{ e } x_{*,d} < x_* < N_{D,x}, y_* = 0) , \quad (42)$$

$$(x_{*,e} < x_* < x_{*,d}, y_* = y_{*,s})$$

associadas ainda com as Eqs. (22), (23) e (25).

Já na Figura 16b é apresentado o caso de o conjunto não possuir contato com o eixo x. É importante notar que nessa forma dois conjuntos são representados, já que é necessária a manutenção da simetria. Se as coordenadas dos vértices inferior esquerdo e superior direito sejam dadas respectivamente por $(x_{*,e}, y_{*,i})$ e $(x_{*,d}, y_{*,s})$, novas condições de contorno são adicionadas ao sistema:

$$\frac{\partial P_*}{\partial x_*} = 0, \quad (x_* = x_{*,e}, y_{*,i} < y_* < y_{*,s}) \text{ e } (x_* = x_{*,d}, y_{*,i} < y_* < y_{*,s}) \quad (43)$$

$$\frac{\partial P_*}{\partial y_*} = 0, \quad (x_{*,e} < x_* < x_{*,d}, y_* = y_{*,i}) \text{ e } (x_{*,e} < x_* < x_{*,d}, y_* = y_{*,s}) \quad (44)$$

e as condições dadas pelas Eqs. (22) a (25) são mantidas.

As simulações subjacentes foram compostas pelas duas formas de conjuntos acima propostos. Há ainda uma terceira forma de ocorrência, que seria o contato com o eixo x, sem a necessidade de o centro do conjunto ser localizado no eixo x. No entanto, com este procedimento não é possível manter a simetria do sistema, e por isto será desconsiderado.

Apesar de as modificações físicas serem relativamente simples com a adição de blocos impermeáveis, a simulação em sua plenitude, como apresentada na Figura 14, só é possível com alterações consideráveis nos programas responsáveis pela filtragem dos dados (*FilterOUT*) e pela estruturação dos dados na forma de matrizes (*XYtoMESH*). No caso da não existência de blocos irremovíveis, o número total de pontos nodais é calculado pela Eq. (35). Quando blocos irremovíveis são inseridos, o número de pontos nodais é reduzido, já que parte do sistema deixa de existir.

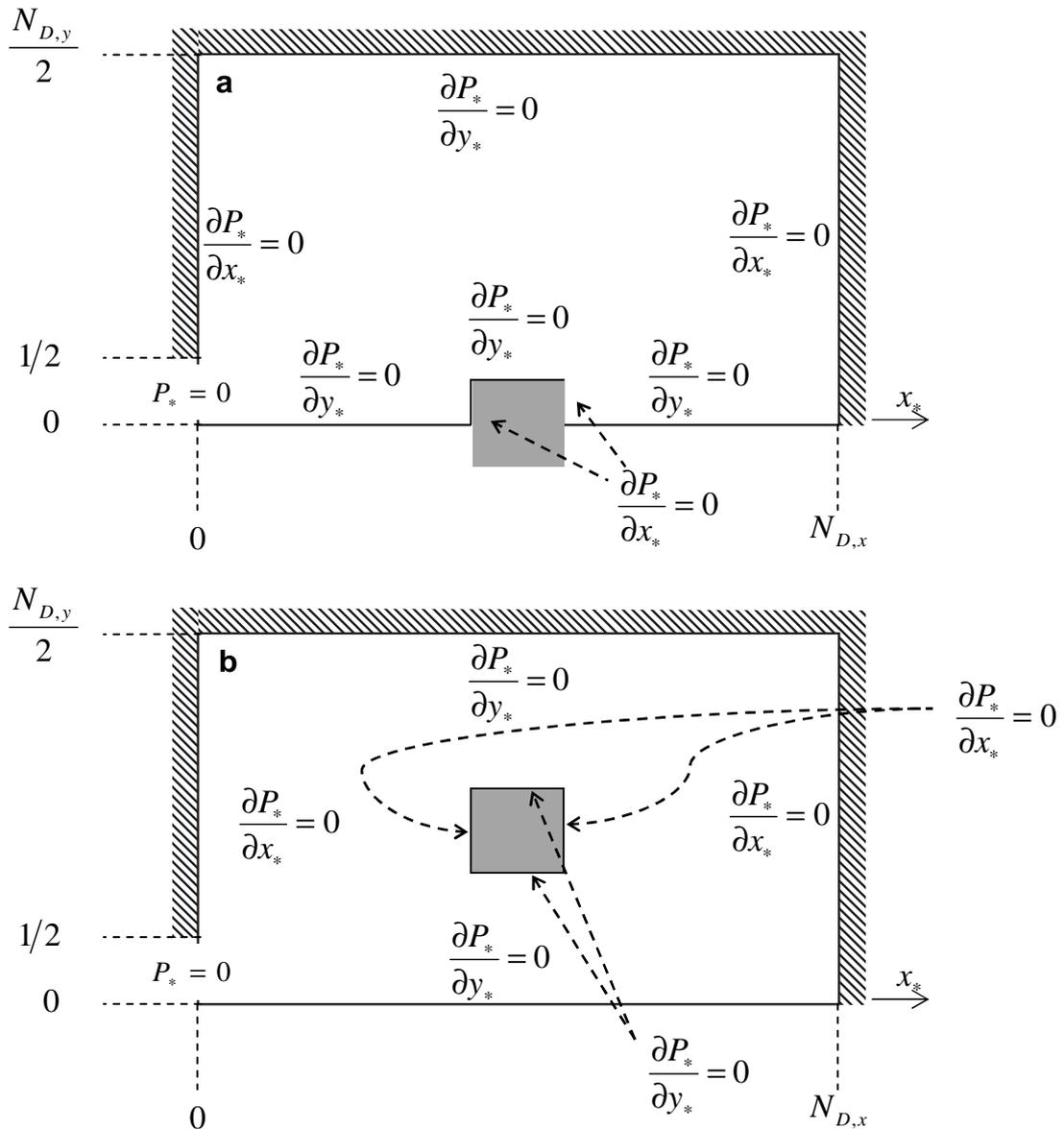


FIGURA 16 – Novas condições do contorno quando da adição de conjuntos de blocos impermeáveis: a) com centro localizado no eixo x ; b) sem contato com o eixo x .

Lembrando que a simulação é feita apenas para valores positivos de y , e que cada aresta de cada bloco possui 5 pontos nodais, a redução no número total de pontos nodais, ΔN_p , é calculada como se segue. Chamando de $L_{x,i}$ e $L_{y,i}$ a quantidade de blocos em x e y , respectivamente, de um determinado conjunto i de blocos irremovíveis, e $\Delta N_{p,i}$ a redução de pontos nodais devida a esse conjunto, têm-se duas situações:

- O conjunto i ter seu centro localizado sob o eixo x :

$$\Delta N_{p,i} = 2(4L_{x,i} - 1)(L_{y,i} + 1) \quad (45)$$

- O conjunto i ter seu centro localizado fora do eixo x :

$$\Delta N_{p,i} = (4L_{x,i} - 1)(4L_{y,i} - 1) \quad (46)$$

O valor total de ΔN_p é calculado pela soma dos valores em (45) e (46), considerando apenas os valores positivos de y . Se $N_{p,0}$ for o número de pontos nodais no caso da não existência de blocos irremovíveis, calculado pela Eq.(35), então o número total de pontos nodais para cada configuração será dado por:

$$N_p = N_{p,0} - \sum_i \Delta N_{p,i} = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) - \sum_i \Delta N_{p,i} \quad (47)$$

Outra mudança importante nas rotinas de simulação diz respeito á numeração dos pontos nodais. Como parte destes é removida do sistema, o esquema de numeração utilizado pelo FIDAP® passa a ser diferente. Para isto, o programa *XYtoMESH* foi alterado para uma segunda versão, *XYtoMESHs*, onde a diferença reside na forma com que os dados em tabela são transferidos para a matriz de pressão. No caso do *XYtoMESHs*, os próprios valores de x e y de um determinado valor $P(x,y)$ são usados para definição dos índices da matriz. Além disso, para evitar interpretações errôneas, nas regiões compreendidas pela parte impermeável do sistema, é atribuído o valor -1.

Seguindo esta metodologia, várias configurações de blocos irremovíveis foram exploradas, com base em uma sequência de raciocínio. Inicialmente, foram simulados casos com apenas um conjunto de blocos irremovíveis, localizado com seu centro sob o eixo x , e compreendendo 10% da área total. Em seguida, o número de conjuntos foi aumentado, mantendo ainda um ou mais conjuntos com seu centro no eixo x , e mantendo a condição de apenas 10% de preenchimento da área total. Finalmente, experimentos com

configurações simulando barreiras de fluxo foram estudados. Os esquemas de cada configuração de sólidos estudada são apresentados a seguir.

3.3.1 Configurações com um conjunto de blocos irremovíveis

Nesta altura do trabalho, é importante salientar que o estudo com os blocos irremovíveis foi feito com um caráter exploratório, a fim de compreender detalhes sobre a influência que estes blocos exercem na dinâmica da bacia de drenagem e como a rede desenvolvida contorna estes obstáculos ao seu desenvolvimento.

Por isso, é natural que a primeira abordagem seja feita com apenas um conjunto de blocos. Foram elaboradas três configurações para um conjunto de blocos, mostradas na Figura 17. Para todas elas o espaço ocupado por blocos irremovíveis é de 10% da área total.

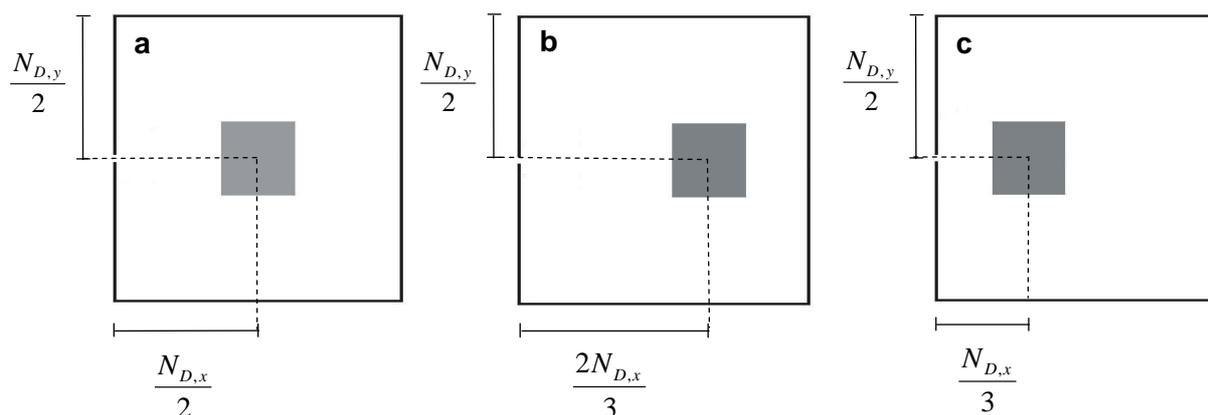


FIGURA 17 – Configurações testadas para apenas um conjunto de blocos irremovíveis, localizado com o centro sob o eixo x, e ocupando 10% da área total da área de drenagem

No primeiro caso (Figura 17a), o conjunto está localizado com seu centro exatamente no centro da bacia. Os outros casos são variações deste, a fim de verificar a influência da distância do conjunto em relação à exutória. Neste sentido, para o segundo caso (Figura 17b) o conjunto teve seu centro deslocado do centro para $\frac{2}{3}$ de $N_{D,x}$, ou seja, mais distante da exutória, e no terceiro caso (Figura 17c) o centro deslocado para $\frac{1}{3}$ de $N_{D,x}$, ou seja, mais

próximo da exutória. Em relação às dimensões, foram testados apenas conjuntos quadrados. Assim, a quantidade de blocos em x e y são iguais, ou seja, $L_{x,i} = L_{y,i} = L_i$. Definindo-se L como a quantidade de blocos em cada face do conjunto, têm-se então que, agora, o número de pontos nodais da simulação será dado por:

$$N_p = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) - 2(4L - 1)(L + 1) \quad (48)$$

expressão essa obtida a partir das Eqs. (45) e (47).

A partir destas três configurações, detalhes da dinâmica foram obtidos, e partiu-se, então, para as simulações com mais de um conjunto de blocos irremovíveis.

3.3.2 Configurações com mais de um conjunto de blocos irremovíveis

No caso das configurações com um número plural de conjuntos de blocos irremovíveis, foram estudados fundamentalmente dois tipos de configurações: homogeneamente distribuídos e aleatoriamente distribuídos. O objetivo agora passa a ser verificar a influencia que um conjunto de blocos exerce sobre os outros, e como isso altera a dinâmica da bacia.

As configurações com conjuntos homogeneamente distribuídos estão apresentadas na Figura 18, mantendo a condição de 10% da área ocupada. Na Figura 18a, foram testados blocos maiores, o que representa um menor espalhamento, enquanto na Figura 18b foi testado exatamente o contrário. Além disso, nesta configuração não existem blocos com seu centro no eixo x .

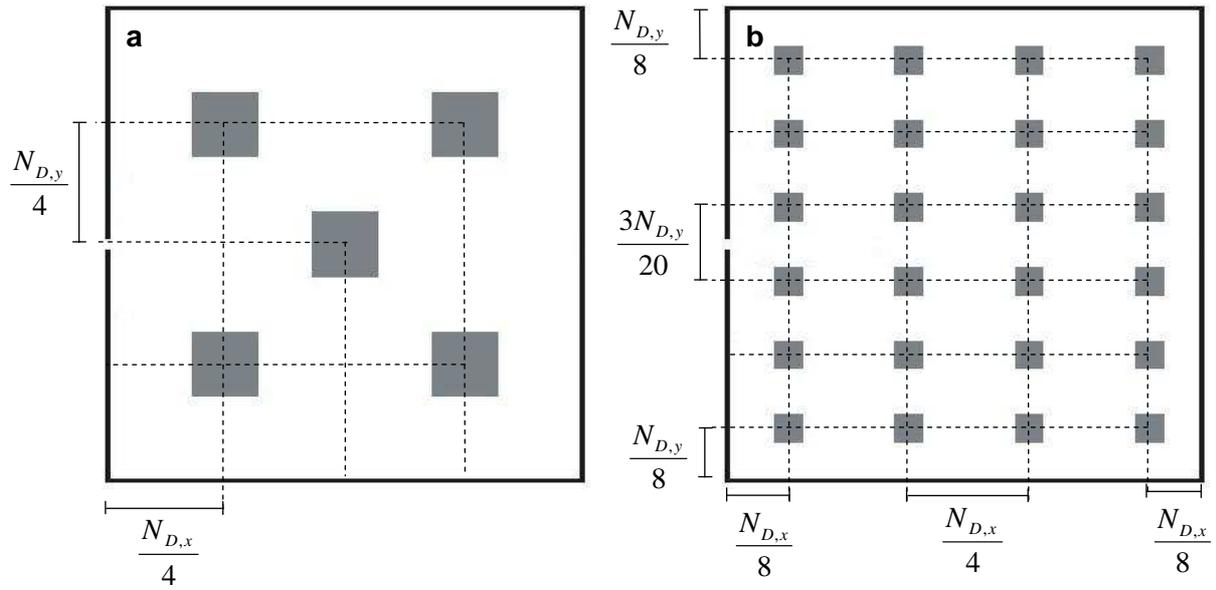


FIGURA 18 – Configurações testadas para 5 (a) e 24 (b) conjuntos de blocos irremovíveis homogeneamente distribuídos, contabilizando uma área impermeável e irremovível de 10% da área total em ambos os casos

Em relação às condições de simulação, se L for a quantidade de blocos em cada face do conjunto, então o total de pontos nodais para a simulação da Figura 18a será dado por:

$$N_p = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) - 6L(4L - 1) \quad (49)$$

e para a Figura 18b:

$$N_p = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) - 12(4L - 1)^2 \quad (50)$$

ambas obtidas das Eqs. (45) a (47).

Até as análises das configurações da Figura 18 os blocos são distribuídos com equipartição. Essa condição foi retirada em configurações seguintes, de forma que a rede final fique com seu aspecto mais próximo de uma rede natural. Para isso, os centros dos conjuntos da Figura 18b foram deslocados seguindo uma distribuição aleatória uniforme, mas mantendo a simetria em relação ao eixo x .

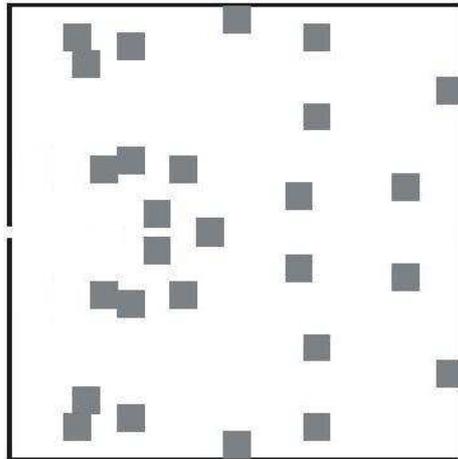


FIGURA 19 – Configuração testada para verificar a influência da heterogeneidade da distribuição das singularidades, entretanto mantendo a simetria

Os blocos da região $y > 0$ foram numerados de 1 a $N_{D,x}(N_{D,y}+1)/2$, partindo do bloco do canto superior esquerdo, aumentando da esquerda para a direita e de cima para baixo, sendo que o bloco inferior direito possui valor $N_{D,x}(N_{D,y}+1)/2$. Então, séries de números aleatórios uniformemente distribuídas entre 1 e $N_{D,x}(N_{D,y}+1)/2$, que são utilizadas para seleção dos centros das regiões K_s . No entanto, é natural que se escolham configurações onde não há intersecções entre conjuntos K_s e, por isso, nem toda série criada é viável.

Para a Figura 19, o número de pontos nodais para a simulação será dado por:

$$N_p = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) - 10(5L - 1)(4L - 1) \quad (51)$$

novamente utilizando das Eqs. (45) a (47).

Com o conjunto dessas simulações, importantes fatores da dinâmica de bacias de drenagem sujeitas a regiões impermeáveis previamente existentes puderam ser obtidos: o efeito de uma região e sua localização, da presença de outras regiões na direção do caminho da rede, homoganeamente ou aleatoriamente distribuídas, e a área ocupada pelas regiões.

O próximo passo da exploração consiste no estudo de barreiras ao fluxo, apresentado no próximo item.

3.3.3 Barreiras de fluxo

Nesta etapa, o estudo foi dirigido na compreensão da influência que barreiras exercem na criação de uma rede. Neste sentido, as barreiras são regiões impermeáveis, distribuídas ao longo do eixo y, onde $L_x = 1$. Foram desenvolvidas barreiras que ocupam aproximadamente metade da área disponível para o escoamento, ou seja:

$$L_y = \frac{(N_{D,y} - 1)}{2} \quad (52)$$

onde a subtração é utilizada pois $N_{D,y}$ é obrigatoriamente de valor ímpar, e L_y deve ser um valor inteiro. Além disso, as barreiras são localizadas com seu centro no eixo x, ou seja, mantêm a figura simétrica e fazem a oposição ao fluxo na direção da exutória.

Assim como no item 3.3.1, é natural que o primeiro teste seja feito com uma barreira localizada com seu centro coincidindo com o centro da bacia de drenagem, conforme mostra a Figura 20a.

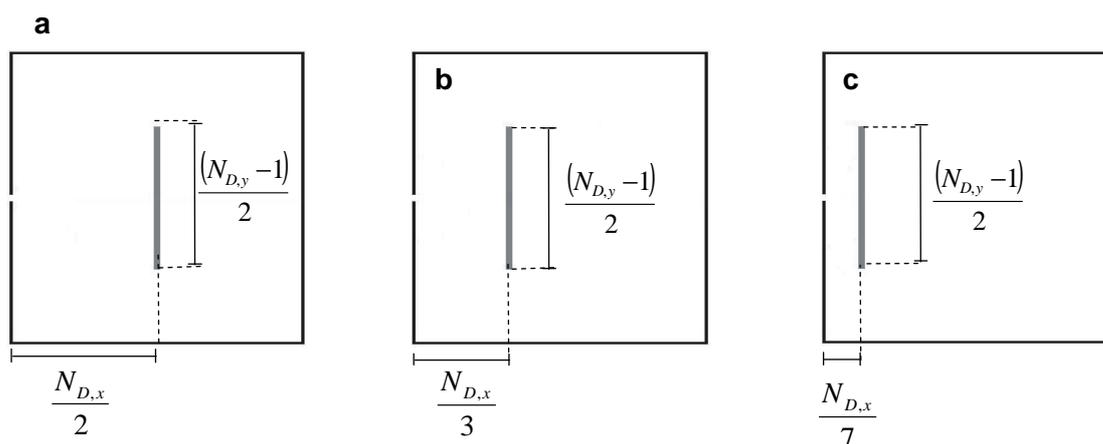


FIGURA 20 – Configurações com uma barreira, utilizadas para verificar a influência destas estruturas e o efeito causado pela distância em relação à exutória

Assim como feito para os conjuntos de blocos irremovíveis, as barreiras foram mantidas com seu centro sob o eixo x, e a sua posição foi transladada seguindo este eixo. Entretanto, os testes agora foram feitos para barreiras cada vez mais próximas da exutória, onde se esperou obter os maiores graus de variação. Essas configurações estão apresentadas nas Figuras 20b, 20c e 21a.

Até este pontos, o número de pontos nodais da simulação é o mesmo, sendo calculado por:

$$N_p = (4N_{D,x} + 1)(2N_{D,y} + 3) - 15(5N_{D,y} - 7) \quad (53)$$

onde foi usado $L_x = 1$ e L_y dado pela equação (52), substituindo nas Eqs. (45) a (47).

As configurações da Figura 21 apresentam uma diferença fundamental em relação àquelas da Figura 20. Nesta figura, há certo grau de liberdade para a formatação da rede logo à montante da exutória, principalmente em relação à largura. Já no caso da Figura 21, a barreira está localizada na quarta coluna de blocos, o que restringe a formação de um canal de largura 1 até o momento que a rede transpõe a barreira. Ou seja, há uma região onde a trajetória da rede é previamente definida, e o efeito desta restrição na liberdade de configuração que é procurado por estas configurações.

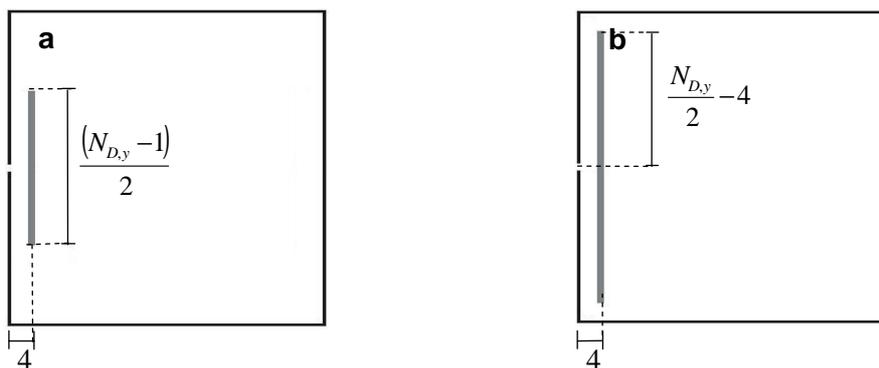


FIGURA 21 – Outras configurações estudadas: a) com uma barreira bloqueando a geração de rede na direção do eixo x; b) o mesmo de (a) mas com comprimento que permita apenas a criação de dois caminhos de largura 1 à sua montante

Além disso, na Figura 21b é adicionada ainda uma segunda restrição. A barreira criada restringe a transposição a um local predefinido, em contato com a fronteira do sistema, e de largura unitária. Ou seja, o escoamento passa de uma área para dois pontos e desses dois pontos para um ponto singular, a exutória. Espera-se que isso gere um grande impacto na dinâmica do sistema.

Com esta gama de experimentos, têm-se um grande número de informações levantadas a respeito de diferentes configurações possíveis para a presença de blocos irremovíveis e impermeáveis: efeito da distância em relação à exutória, grau de ocupação da área total, distribuição espacial, efeito de barreiras e número de conjuntos.

Com isto, espera-se que o comportamento deste tipo de sistema tenha mais aspectos aclarados, os quais são evidenciados no item seguinte.

4. RESULTADOS

A metodologia apresentada anteriormente foi consolidada comparando seus resultados com os disponíveis em ERRERA e BEJAN (1998). Após esta etapa, o modelo foi estendido para uma dinâmica com a remoção dos blocos realizada em termos aleatórios, onde resultados acerca dos aspectos intrínsecos de formação de redes são discutidos.

As simulações com conjuntos de blocos irremovíveis são apresentadas na sequência, bem como as discussões sobre os resultados pertinentes.

4.1 Consolidação do simulador

Antes de criar novas aplicações, é imprescindível verificar a consistência do modelo base. Uma forma eficaz para tal é a comparação dos resultados obtidos por este com resultados previamente obtidos na literatura. Esta comparação foi feita com base nas configurações geométricas obtidas e nas dinâmicas de M e do campo de pressão.

As Figuras 22 e 23 mostram os resultados obtidos pelo modelo base juntamente com os dados de ERRERA e BEJAN (1998) nas simulações realizadas com $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$ e dinâmicas de precipitação $\Delta M = 10^{-3}$ (Figura 16) e $\Delta M = 10^{-4}$ (Figura 17).

Pode ser percebida uma perfeita concordância entre os resultados. Além do formato geral das configurações, pequenos detalhes específicos são exatamente reproduzidos. De fato, este é exatamente o comportamento esperado. As Figuras 22a e 23a são completamente determinísticas e, portanto, reproduzíveis em sua totalidade. Se o método base deste trabalho pretende recriar o ambiente de simulação anteriormente utilizado, então só terá tido sucesso se os resultados anteriores forem, como foram, reproduzidos nos seus mínimos detalhes.

Outro ponto importante de se observar é a concordância das dinâmicas de M e de $P^*,máx$. Isso mostra que a simulação em MEF está coerente com os resultados da literatura, o que também é crucial para a obtenção de configurações semelhantes.

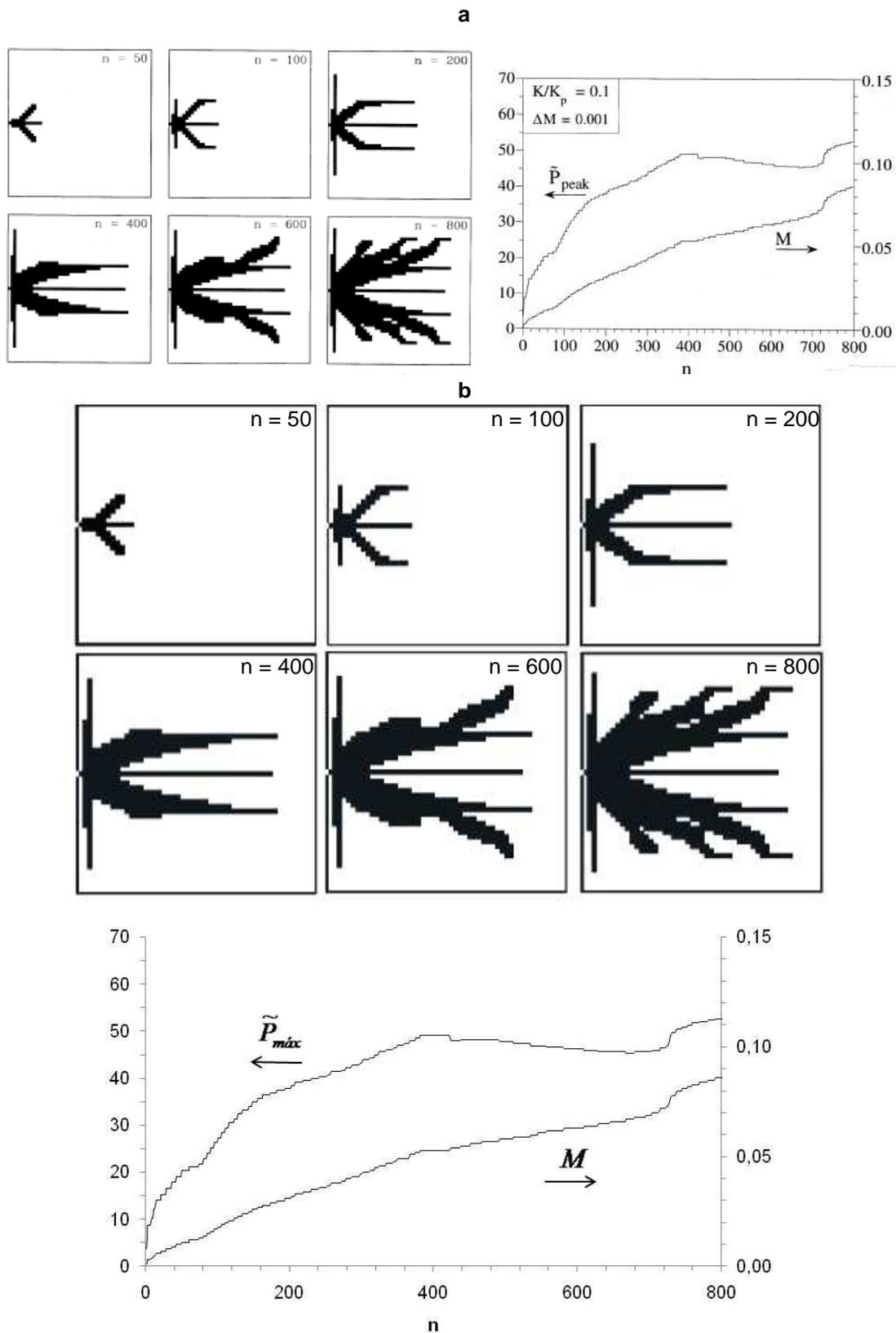


FIGURA 22 – (a) Resultados de ERRERA e BEJAN (1998), para $\Delta M = 10^{-3}$ e $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$ em comparação com: (b) resultados obtidos com o modelo base, nas mesmas condições, mostrando perfeita concordância

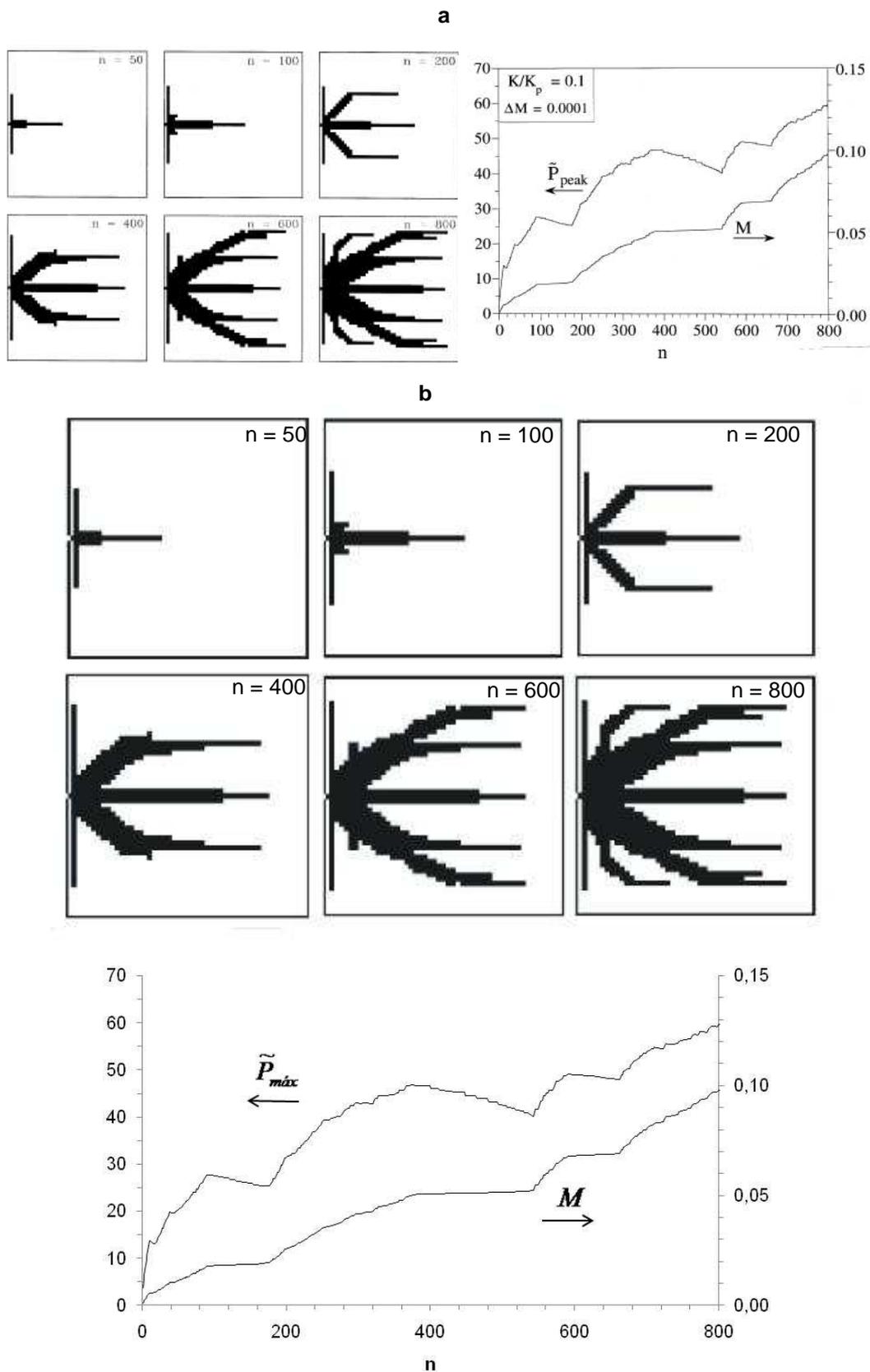


FIGURA 23 – (a) Resultados de ERRERA e BEJAN (1998), para $\Delta M = 10^{-4}$ e $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$ em comparação com: (b) resultados obtidos com o modelo base, nas mesmas condições, mostrando novamente perfeita concordância

Visto que as configurações geométricas, as dinâmicas de M e a dependência do campo de pressão com este valor foram reproduzidos em plenitude, é possível afirmar que o simulador está consolidado.

Mas existem ainda outros pontos importantes que corroboram a afirmação acima. Foram procedidos testes de lógica em cada parte do simulador em separado, cobrindo uma vasta de gama de possibilidades, e verificado a consistência lógica e numérica. Além disso, o critério de convergência do FIDAP® para este problema, o resíduo normalizado, ficou em menos de $10^{-8}\%$ para praticamente todas as simulações, ou seja, a convergência foi plenamente obtida.

Tendo o simulador consolidado, foi possível passar para as próximas etapas do trabalho.

4.2 Modelos com aleatoriedade

Tendo o modelo base sido consolidado, a primeira mudança significativa realizada foi a introdução de aleatoriedade à dinâmica, conforme explicado na metodologia. Foram realizadas seis simulações para ambos os modelos aleatórios, com $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$, que se mostraram suficientes devido à baixa dispersão de dados em relação a cada simulação.

A Figura 24 apresenta superposições das configurações impetradas em cada simulação, sendo a Figura 24a a superposição das seis simulações do Método de Escolha Aleatória (MEA) e a Figura 24b seis simulações do Método Completamente Aleatório (MCA). Nas figuras, a intensidade de cinza de um bloco é característica do número de simulações em que este bloco foi desalojado, sendo que preto representa os blocos seis vezes desalojados e branco aqueles que permaneceram inalterados em todas as simulações.

É importante notar que nenhuma das imagens geradas pelos modelos aleatórios pode ser classificada como rede. Na Figura 24b, nem sequer um padrão é verificado. Entretanto, é importante apresentar esta figura para evidenciar o fato de a escolha ser aleatória, e perceber que ela foi, de fato, uniforme.

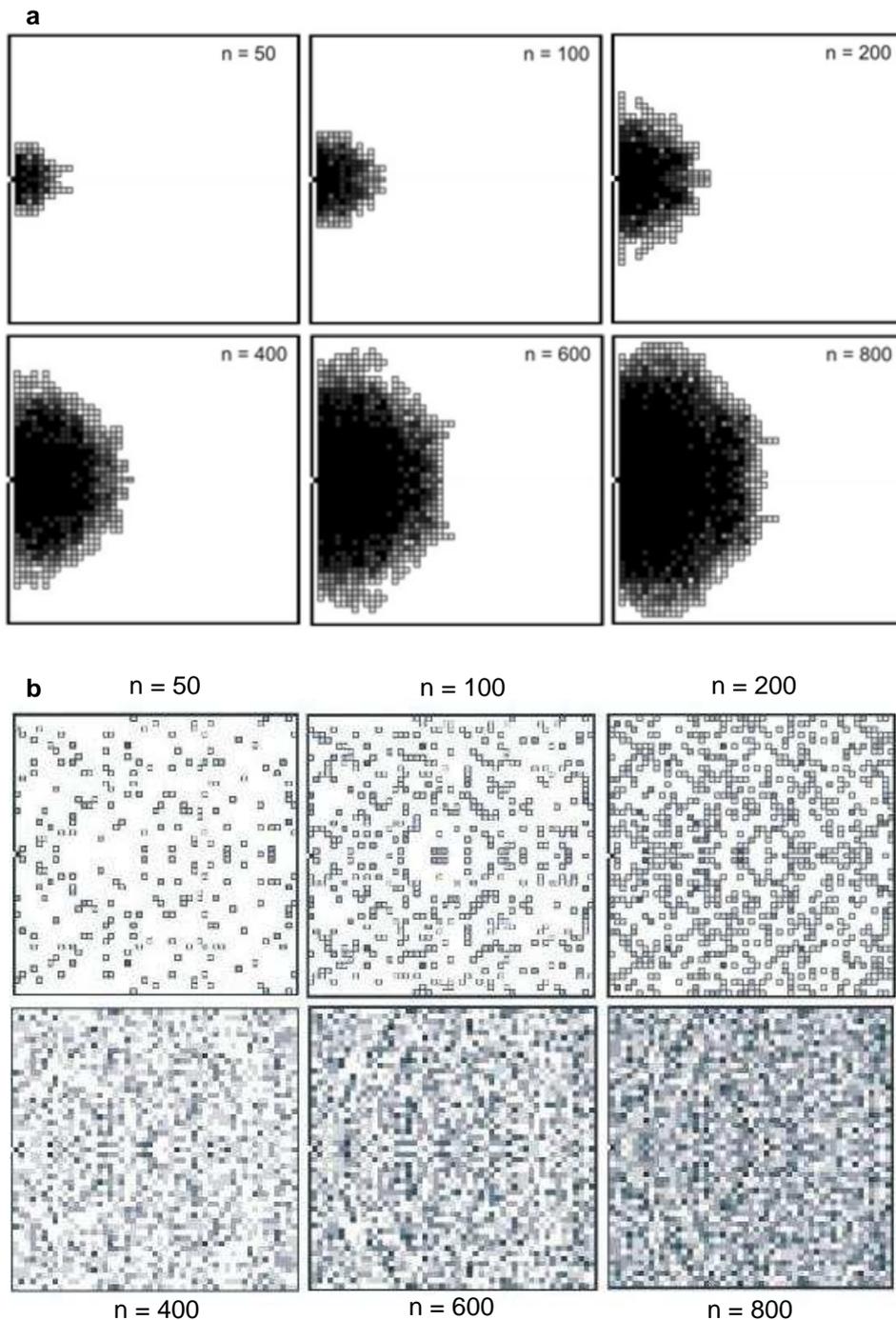


FIGURA 24 – Sobreposição das seis simulações realizadas com os modelos aleatórios: (a) escolha aleatória; (b) completamente aleatório; sendo que a intensidade de cinza é característica da quantidade de simulações em que o respectivo bloco foi desalojado. Por exemplo: blocos brancos foram blocos que em nenhuma simulação foram desalojados, e blocos pretos são aqueles que foram desalojados em todas as simulações. Ou seja, a intensidade de cinza é característica da probabilidade de remoção daquele bloco, obtida após seis simulações.

Já na Figura 24a, são verificadas configurações que se assemelham aos padrões de difusão molecular, que foram também obtidos por BEJAN e ERRERA (1998) quando na consideração de que $K/K_p \sim 1$, ou seja, que o canal proporciona pouco ganho no escoamento. Esta coincidência entre estes resultados mostra que, se a redução na resistência ao escoamento criada por caminhos K_p não for significativa, a chance de cada bloco livre ser removido é praticamente a mesma e, portanto, nenhuma rede é criada.

Entretanto, pode-se observar a formação de “dedos” – pequenas saliências que se destacam do padrão de difusão, semelhantes a dedos em uma mão – que podem, em cada etapa, ser entendidas como princípios de canais. Mas isso na verdade não acontece, pois estes “dedos” aparecem e logo somem. Isso mostra duas coisas importantes. A criação de “dedos” nem sempre é um indício de que uma rede irá se formar, e o simples aparecimento de “dedos” pode ser aleatório, o que mostra uma possibilidade diferente dos argumentos de que tais estruturas sejam conseqüências somente de princípios físicos (como em BEJAN e LORENTE, 2007).

Apesar de o MEA não formar redes, a redução na resistência global tem a mesma dinâmica da formada pelo processo de erosão, se mantendo praticamente indiferente até $n \sim 50$, como pode se observar na Figura 25, onde foram plotadas as resistências globais em relação com n , para as simulações dos modelos aleatórios e do modelo de erosão (este para $\Delta M = 10^{-3}$). Para $n > 50$ a resistência global gerada pelas redes do modelo de erosão é menor que a das configurações de dispersão do MEA. Não obstante, esta diferença é pequena, e não indica ser suficiente para explicar a natureza da rede. Por outro lado, a diferença entre a resistência gerada pelo MEA e pelo MCA é considerável, inclusive na forma da redução. Percebe-se então que, em termos de resistência global, a informação de que somente os blocos adjacentes aos canais podem ser desalojados melhora consideravelmente a performance, enquanto que para a segunda informação, a respeito do campo de pressão e do critério de remoção, o ganho é pequeno.

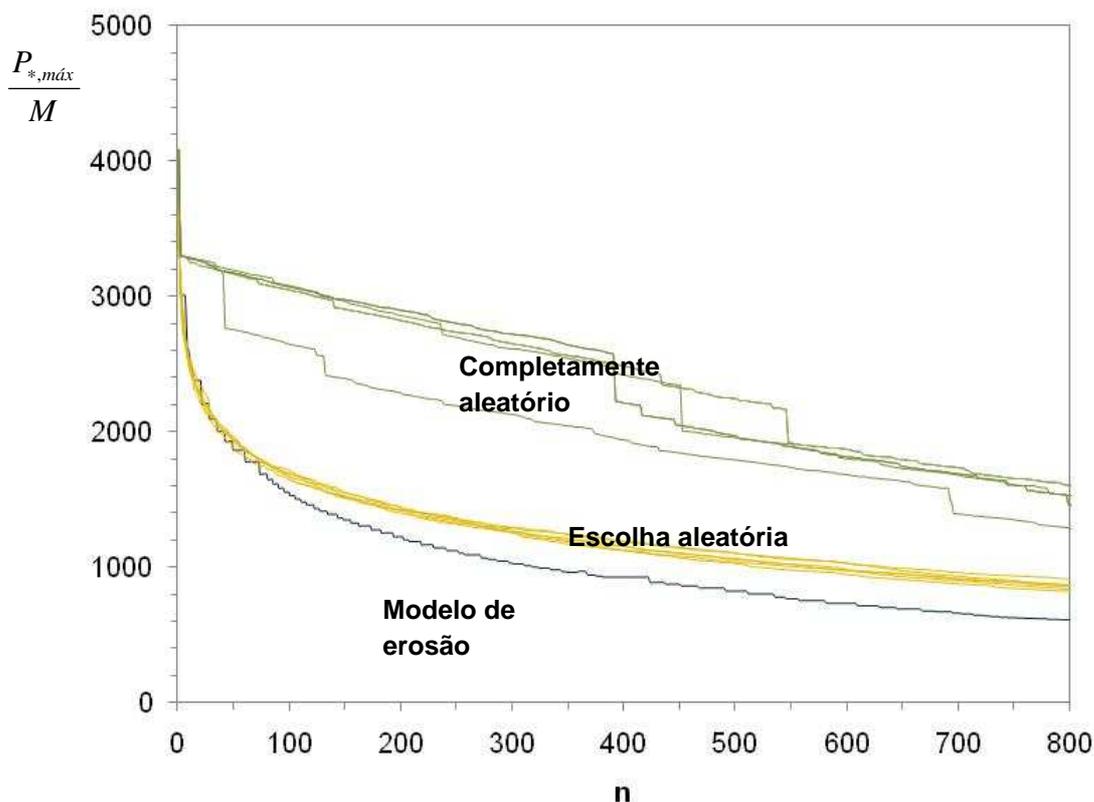


FIGURA 25 – Redução da resistência global ao escoamento nos modelos aleatórios em comparação com a redução obtida pelo modelo de erosão, considerando $K/K_p = 0,1$ e $\Delta M = 10^{-3}$.

Isto mostra que a formação de redes fatores locais, como a redução da pressão exercida pelo sistema em um determinado ponto que, no modelo de erosão, é o ponto que sofre esse efeito, também são determinantes para formação das redes.

Há ainda um importante aspecto a ser verificado na Figura 25. No caso do MCA, em todas as simulações, existem blocos que, quando removidos, provocam uma queda considerável na performance do sistema. Como esperado, esse são os blocos localizados próximos da jusante, o que evidencia o ganho da informação dos blocos susceptíveis.

De posse dessas informações, passou-se então para as análises com os blocos irremovíveis.

4.3 Blocos irremovíveis

Nesta seção, são apresentados os resultados necessários à obtenção do objetivo principal deste trabalho, que é a introdução de blocos irremovíveis e impermeáveis no critério determinístico, e verificar o efeito destas alterações no sistema como um todo.

Todas as simulações foram realizadas para $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$, assim como nas simulações realizadas anteriormente, e os resultados são apresentados em sequência.

4.3.1 Configurações com um conjunto de blocos irremovíveis

Assim como apresentado na metodologia, começou-se a exploração com a introdução de um único conjunto de blocos impermeáveis e irremovíveis, e os resultados estão apresentados a seguir. Para estas simulações, foi utilizado um conjunto com $L_x = L_y = 15$ blocos, totalizando pouco mais de 9% da área total ocupada (para manter a singularidade em formato quadrado, um novo aumento levaria a área impermeável para 16%).

As configurações obtidas estão apresentadas na Figura 26, para $\Delta M = 10^{-3}$, e na Figura 27, para $\Delta M = 10^{-4}$. Observam-se nítidas diferenças nas configurações obtidas para a variação do valor de ΔM . Nas Figuras 26a e 27a, persiste uma região onde há apenas a criação de um canal horizontal, à esquerda do conjunto de blocos, em um formato aproximadamente parabólico. Mas, para o caso da Figura 26b, a área é nitidamente menor, já que o forçante externo aumenta de forma mais suave, e com isso o sistema é capaz de verificar gradientes maiores que 1 em partes que o sistema da Figura 26a não é capaz.

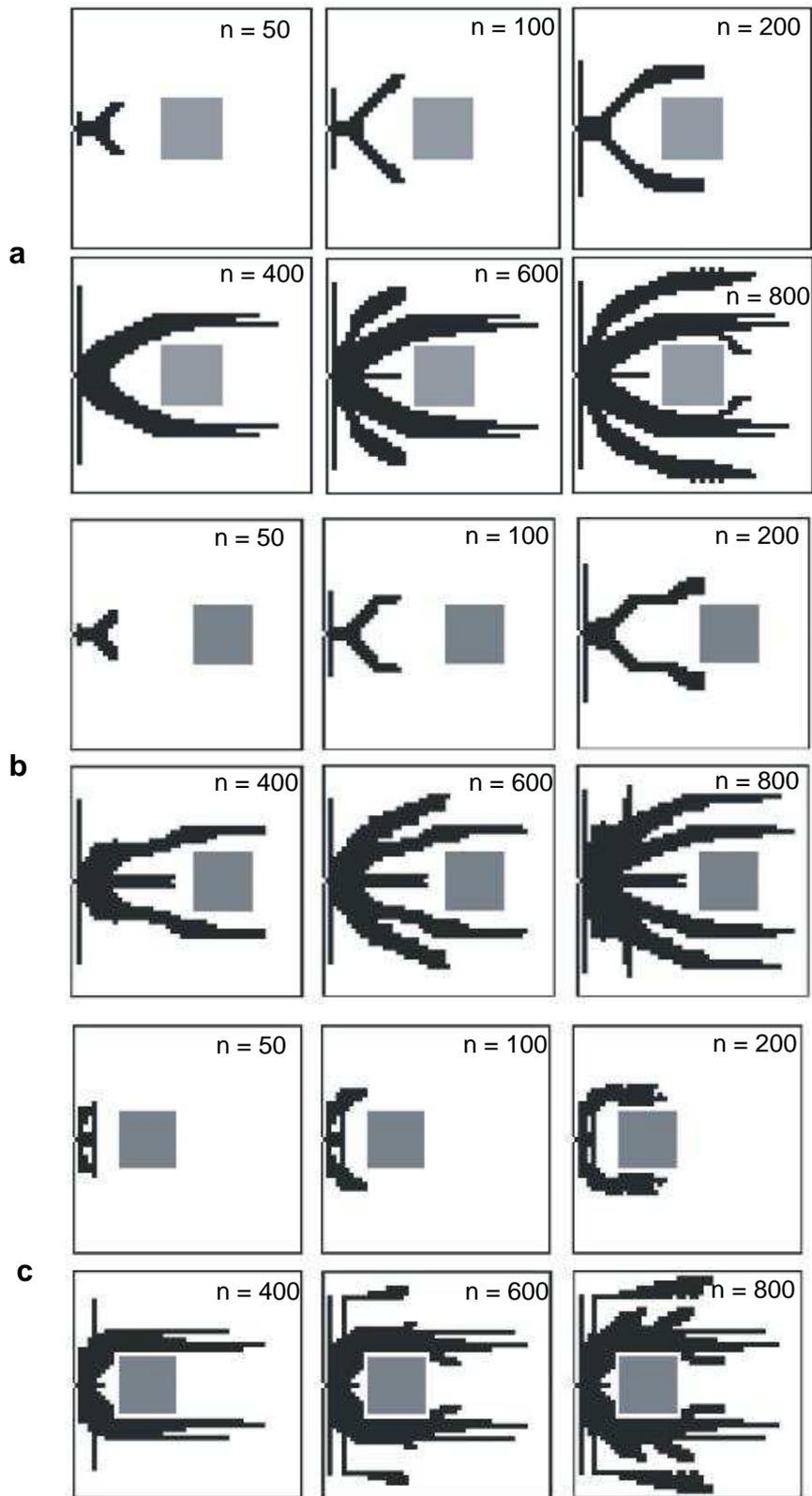


FIGURA 26 – Redes obtidas para as configurações da Figura 17 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-3}$

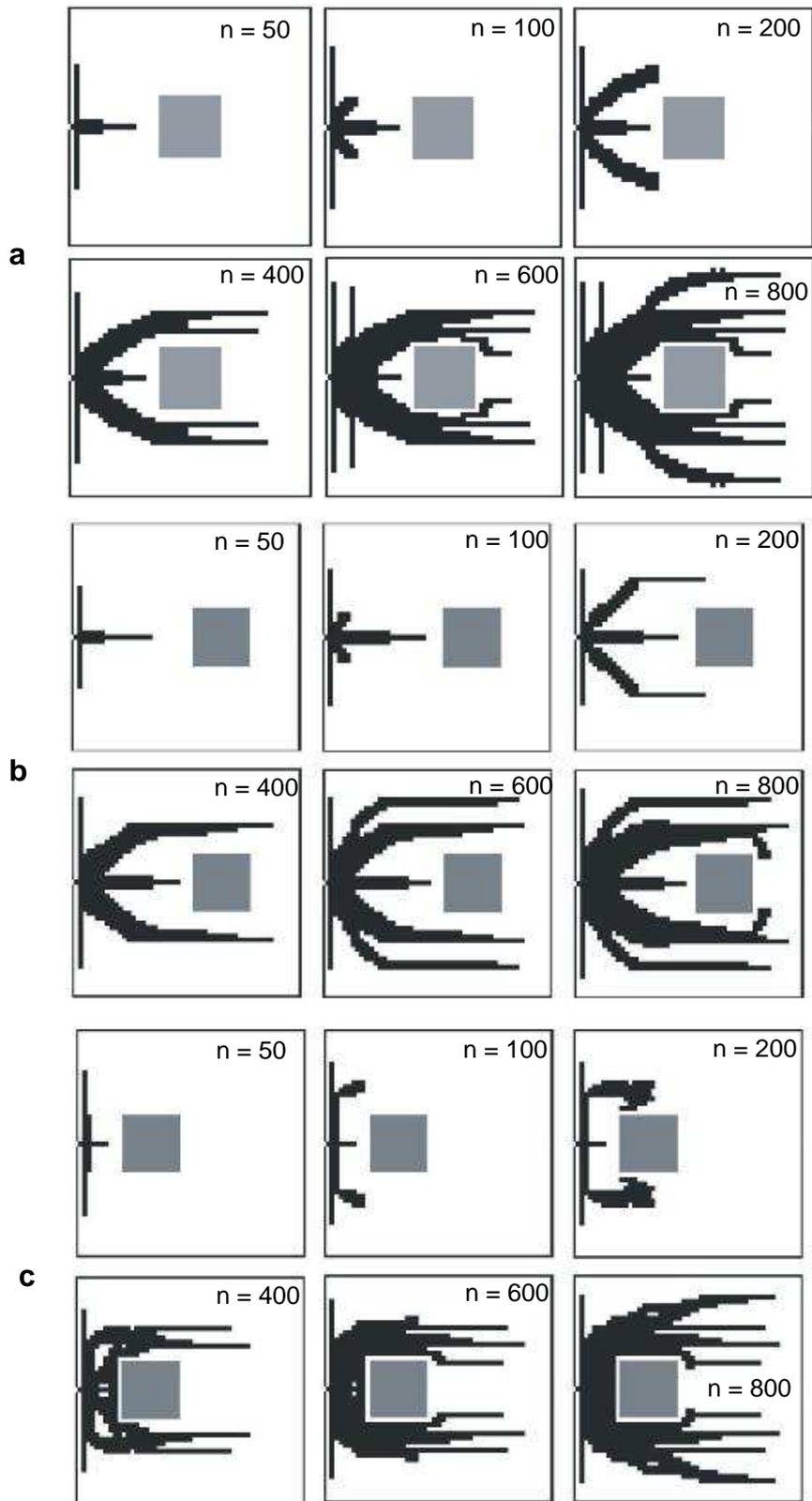


FIGURA 27 – Redes obtidas para as configurações da Figura 17 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-4}$

Essa região citada também se apresenta para o caso do conjunto deslocado mais para a direita (Figuras 26b e 27b), com seu ponto de início mais distante da face do conjunto de blocos. É interessante notar também que este ponto é localizado em um local muito próximo daqueles para o conjunto no centro da bacia. Por outro lado, quando este conjunto é deslocado para um local próximo da exutória (Figuras 26c e 27c), esse ponto também é deslocado para a esquerda e, no caso de $\Delta M = 10^{-4}$, a região citada não existe mais, sendo toda ocupada pela rede de drenagem.

É interessante notar que essa região permanece praticamente imutável morfológicamente ao longo da dinâmica, ou seja, há praticamente uma estagnação na estrutura geral daquela parte da rede de drenagem. Por isso, propõe-se o nome de “**região de estagnação morfológica**” (da estrutura horizontal) para esta região, e ao ponto inicial desta região pode-se dar o nome de “ponto de estagnação morfológica”. É interessante notar que, sendo $\Delta M = 10^{-3}$, a formação do pequeno canal na região de estagnação se dá apenas a partir de $n \sim 400$, enquanto que para $\Delta M = 10^{-4}$ o canal existe desde o princípio.

Isso sugere que o sistema passa por diferentes fases de aperfeiçoamento, e que existam acidentes de maior importância para a configuração global. Nas dinâmicas dos picos de pressão e dos valores de M , apresentadas nas Figuras 28 e 29, podem ser localizadas algumas fases diferentes na sequência de construção.

Tomando como exemplo o caso do conjunto localizado centralmente à bacia, para $\Delta M = 10^{-3}$ (Figuras 28a), enquanto $n < 100$, o pico de pressão tem um aumento considerável. Voltando então para a Figura 26a, vê-se que até este momento, a rede está na tentativa de transpor a singularidade, e com isso está formando a região de estagnação. Após a rede atravessar mais da metade do bloco, o pico de pressão volta a subir, até que, logo após $n = 400$, os canais sofrem bifurcação, facilmente verificáveis para $n = 600$ e a pressão estagna então em um patamar final, mesmo com o aumento de M . A partir de então, o sistema mantém o aspecto morfológico, apenas realizando ajustes finos.

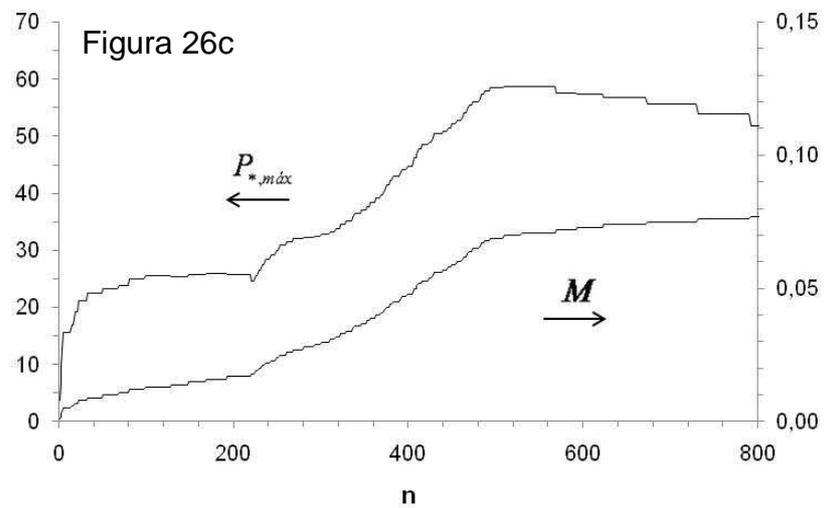
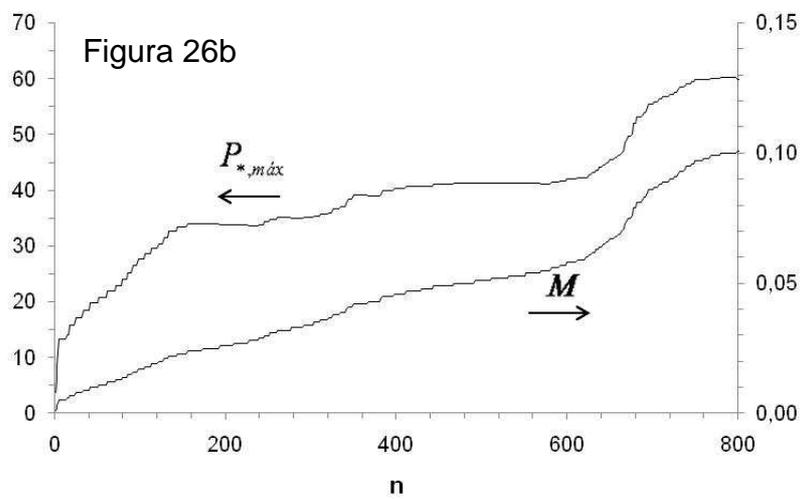
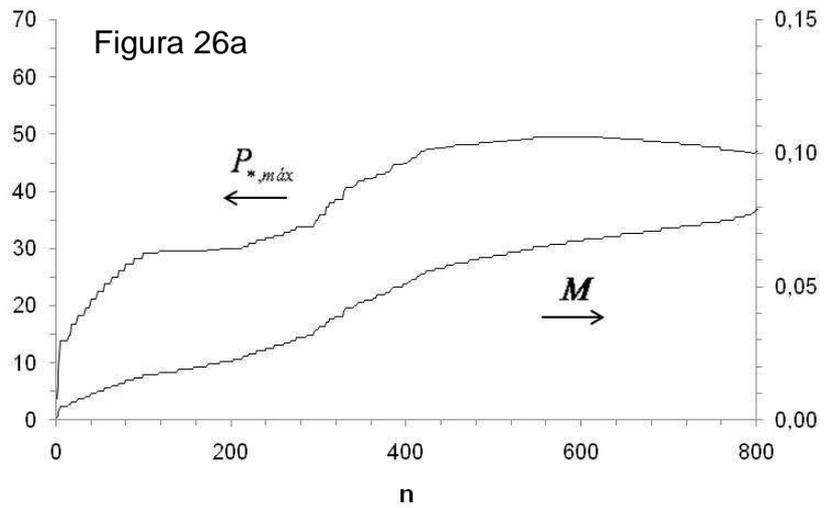


FIGURA 28 – Dinâmica do pico de pressão e de M para as configurações da Figura 26 ($\Delta M = 10^{-3}$)

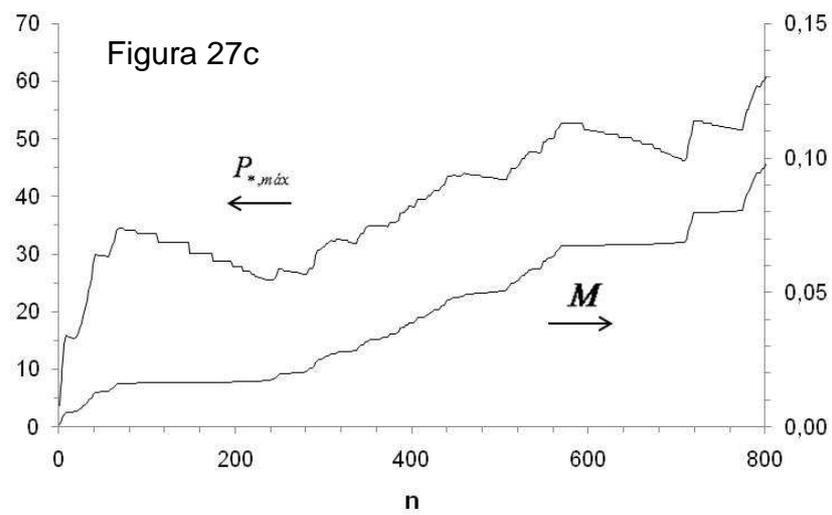
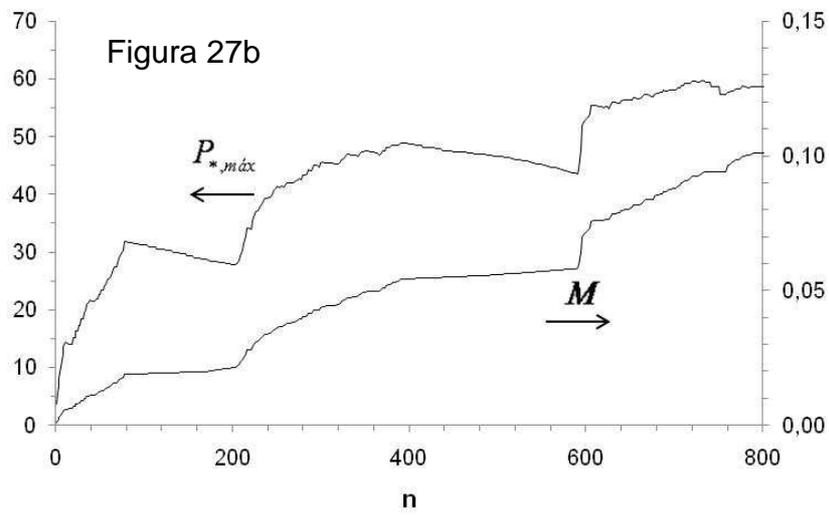
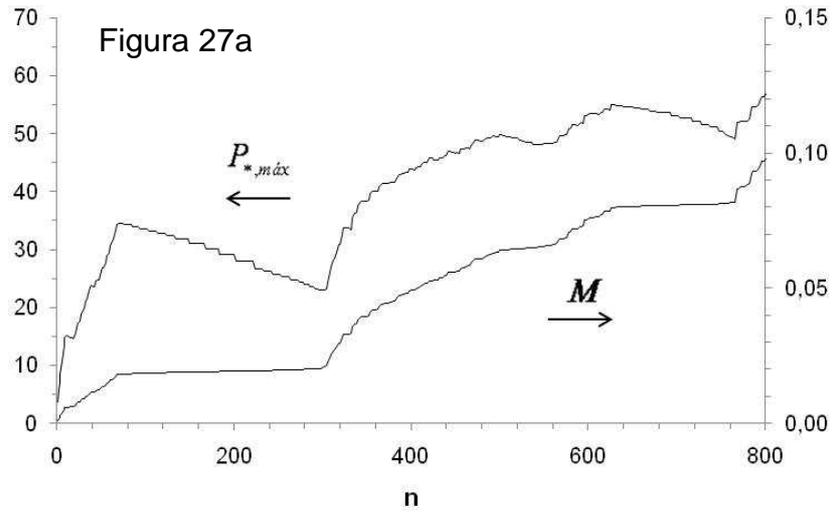


FIGURA 29 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 27 ($\Delta M = 10^{-4}$)

Fases semelhantes são percebidas para os outros casos das Figuras 26 e 27, apenas com variação nos limiares de cada etapa. Por isso, pode-se dizer que a evolução destes sistemas é composta por basicamente quatro fases: formação da região de estagnação, transposição da singularidade, bifurcação posterior e ajustes finais.

No caso da dinâmica para $\Delta M=10^{-4}$, essas fases são ainda mais pronunciadas. Tomando como exemplo novamente o bloco central, após $n=100$ o pico de pressão sofre uma redução drástica, e o sistema passa a remover um grande número de blocos para cada ΔM . Comparando isto com a Figura 27a, o que se percebe é que, diferente do caso com $\Delta M=10^{-3}$, o pequeno canal da região de estagnação é formado antes da região propriamente dita, e só quando este canal se abre para a formação da rede de estagnação é que a pressão começa a cair. A pressão começa a subir de novo para $n \sim 300$, justamente o momento em que a rede transpõe metade da singularidade. A dinâmica até então é um pouco irregular, mas passa por eventos semelhantes ao caso de $\Delta M=10^{-3}$, aparecendo mais pontos de bifurcação.

É interessante verificar, porém, que estas nuances relacionadas com a transposição da singularidade não são perceptíveis no caso da resistência global ao escoamento. A dinâmica deste parâmetro é apresentada na Figura 30. Todas as curvas apresentam um decréscimo monotônico na resistência global ao escoamento muito próximo de um decaimento exponencial. No caso dos conjuntos localizados centralmente ou mais distantes da exutória, o comportamento da resistência global é semelhante, e praticamente indiferente ao valor do forçante hidráulico. Ou seja, para estes casos, a resistência global ao escoamento é praticamente indiferente ao valor de ΔM ou à distância em relação à exutória, sendo que, na configuração final, todos produzem um valor levemente maior que 600.

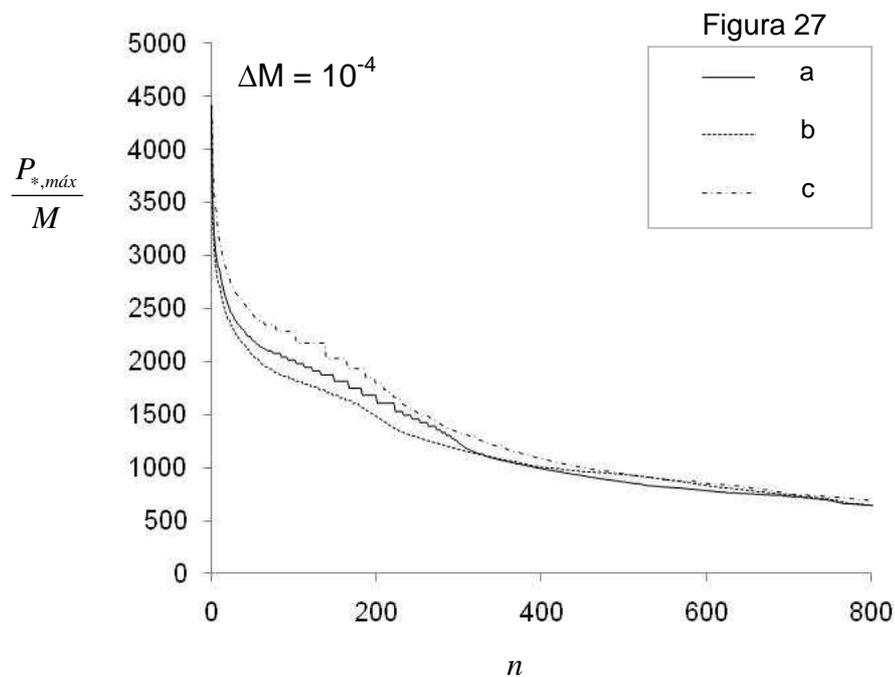
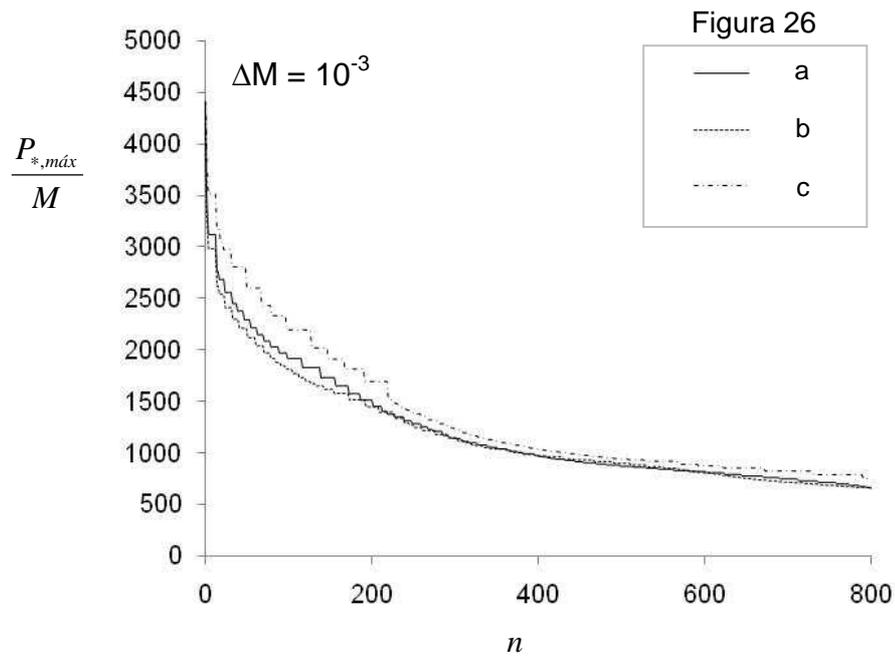


FIGURA 30 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 27 e 28

Por outro lado, ao aproximar a singularidade da exutória, esse valor passa a ser mais instável. Com $\Delta M = 10^{-3}$, a curva de decaimento é levemente superior às citadas anteriormente, ao passo de que com $\Delta M = 10^{-4}$, a curva se mantém praticamente indiferente, sendo que a diferença entre a resistência final nos dois casos é de 12,5%.

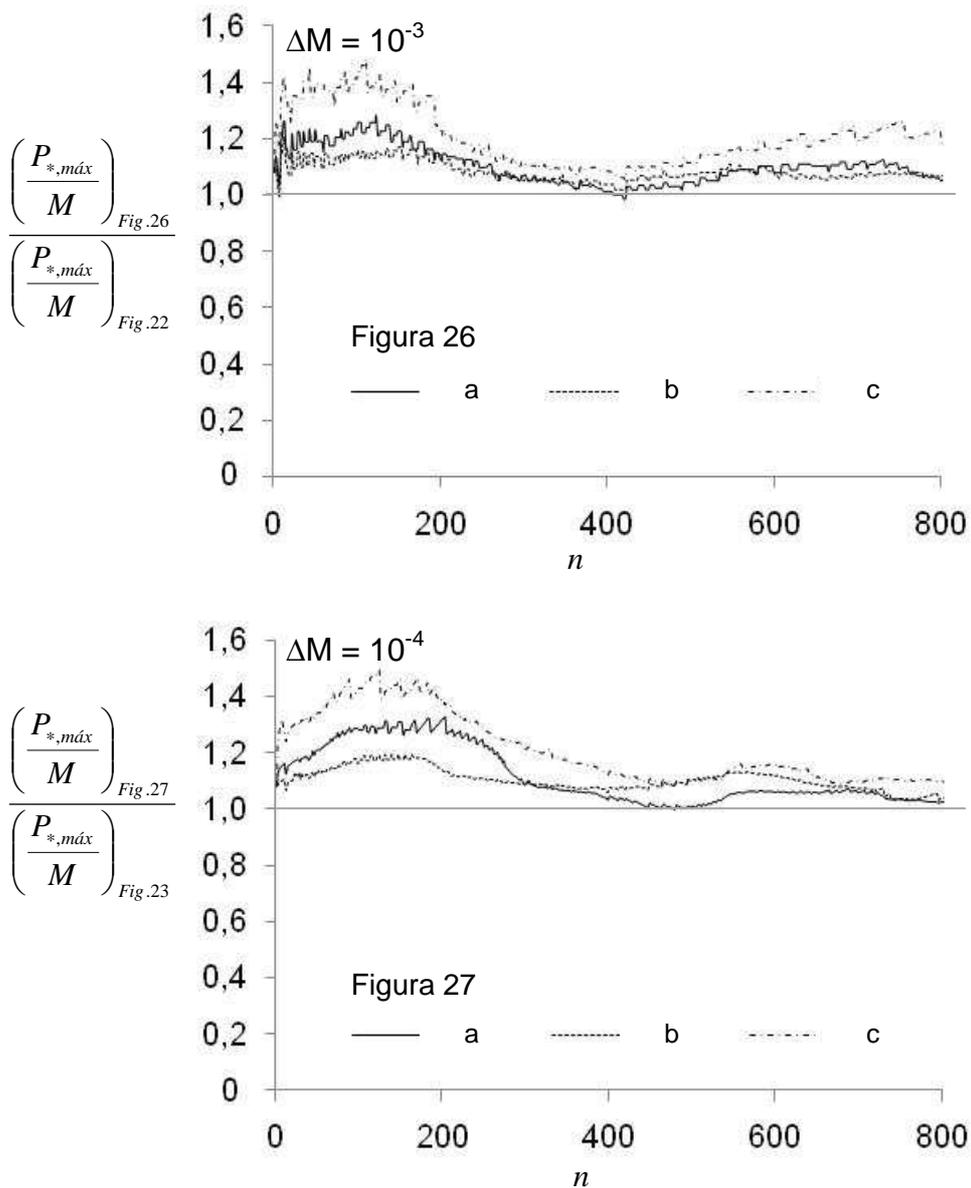


FIGURA 31 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com blocos irremovíveis e impermeáveis (Figuras 26 e 27) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 22 e 23)

Para compreender melhor este fato, os valores de resistência foram normalizados com base na dinâmica de resistência para o caso das configurações sem singularidades (Figuras 22 e 23) e apresentados na Figura 31. Neste caso, percebe-se facilmente o descolamento que as curvas para o conjunto de blocos próximos da exutória se descolam das demais.

A Figura 31 corrobora grande parte da análise realizada até então. Percebe-se que a resistência global só é sensível à posição da singularidade se ela estiver próxima da exutória, e que para os outros casos a singularidade praticamente não exerce influência.

Mas há uma importante informação nova a ser obtida, e que esclarece em muito o efeito que remoção de parte da liberdade de alteração do sistema provoca ao comportamento global. Em todos os casos estudados até então, a formação da região de estagnação e a transposição da singularidade estão completas somente após $n = 200$. Percebe-se na Figura 31 que até este ponto a resistência se apresenta com os valores mais elevados, chegando até a mais de 40% de aumento em relação a não existência de singularidade (lembrando que o espaço ocupado por ela é de apenas 10% da área total). Entretanto, após a singularidade ser contornada, a resistência decai consideravelmente, chegando até a ser desprezível para alguns casos. Ou seja, quanto menor a liberdade para alteração morfológica, menor o ganho de performance com a readequação interna.

4.3.2 *Configurações com mais de um conjunto de blocos irremovíveis*

Resumindo a análise realizada para o caso de uma singularidade, pôde-se constatar vários fatos: **a presença de quatro fases distintas na dinâmica da formação de rede, a criação de uma região de estagnação morfológica, a relativa indiferença à performance global do sistema após a singularidade ser transpassada, no caso da singularidade localizada distante da exutória, e o contrário para o caso de estar próxima da exutória.** Com estas informações em mente, procedeu-se à adição de mais singularidades, e agora então o objetivo é verificar a influência que uma exerce sobre a outra.

O primeiro caso testado está apresentado na Figura 32. Para este caso, as singularidades foram criadas com $L_x = L_y = 7$, totalizando pouco mais de 9% da área total ocupada. O fato mais importante de se notar é que a região de estagnação morfológica sofre consideráveis alterações.

Olhando primeiro para o caso com $\Delta M = 10^{-3}$, quando havia apenas uma singularidade central, a região de estagnação morfológica era a primeira estrutura a ser formada. Para o caso da Figura 32a, existem singularidades justamente no local para onde a rede seria dirigida, e agora a preferência inicial é o desvio destas singularidades, e a formação de um canal que praticamente atinge a singularidade central. O contorno completo das singularidades localizadas à esquerda do centro só é percebido em $n = 800$.

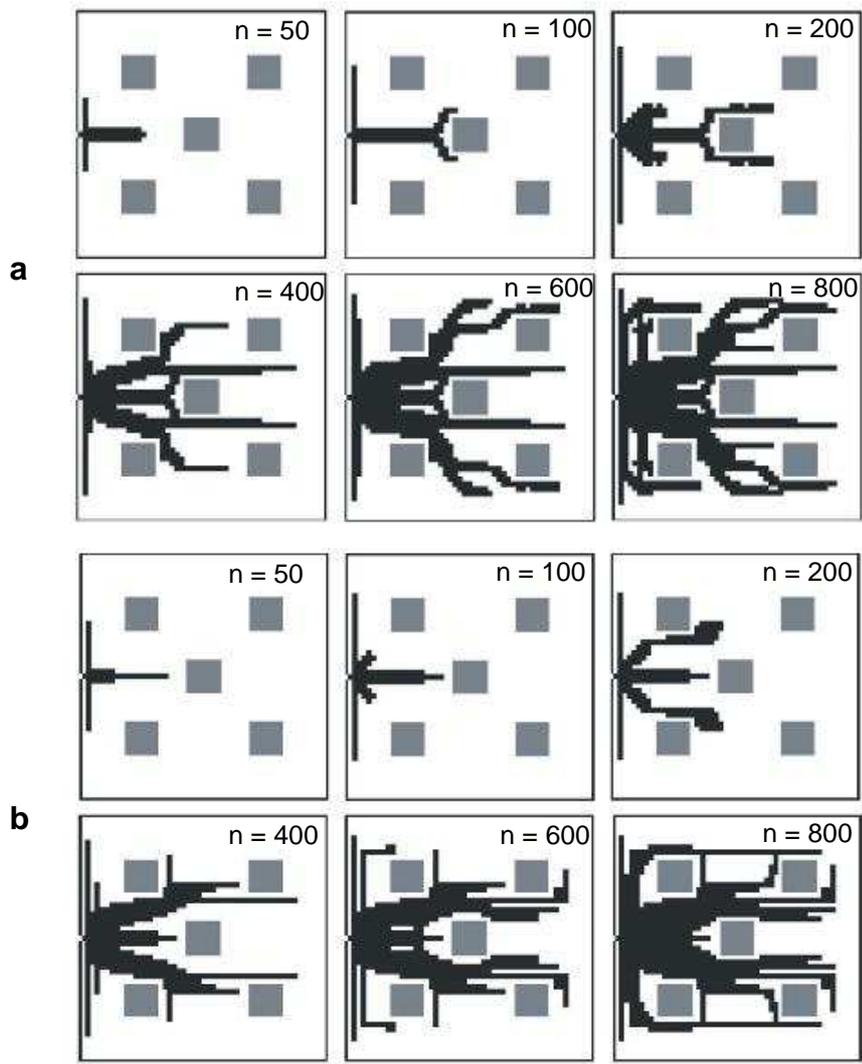


FIGURA 32 – Redes obtidas para as configurações da Figura 18a, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Já para $\Delta M = 10^{-4}$, até $n = 200$ a configuração é praticamente a mesma daquela em que só havia uma singularidade central. Há a formação de uma

região de estagnação morfológica, mas seu tamanho é constantemente reduzido, e o ponto de estagnação morfológica tende a se aproximar da singularidade central. A partir de $n = 400$, a variação na configuração é considerável, e já se verifica a criação de uma ramificação para transposição das singularidades localizadas à esquerda do centro.

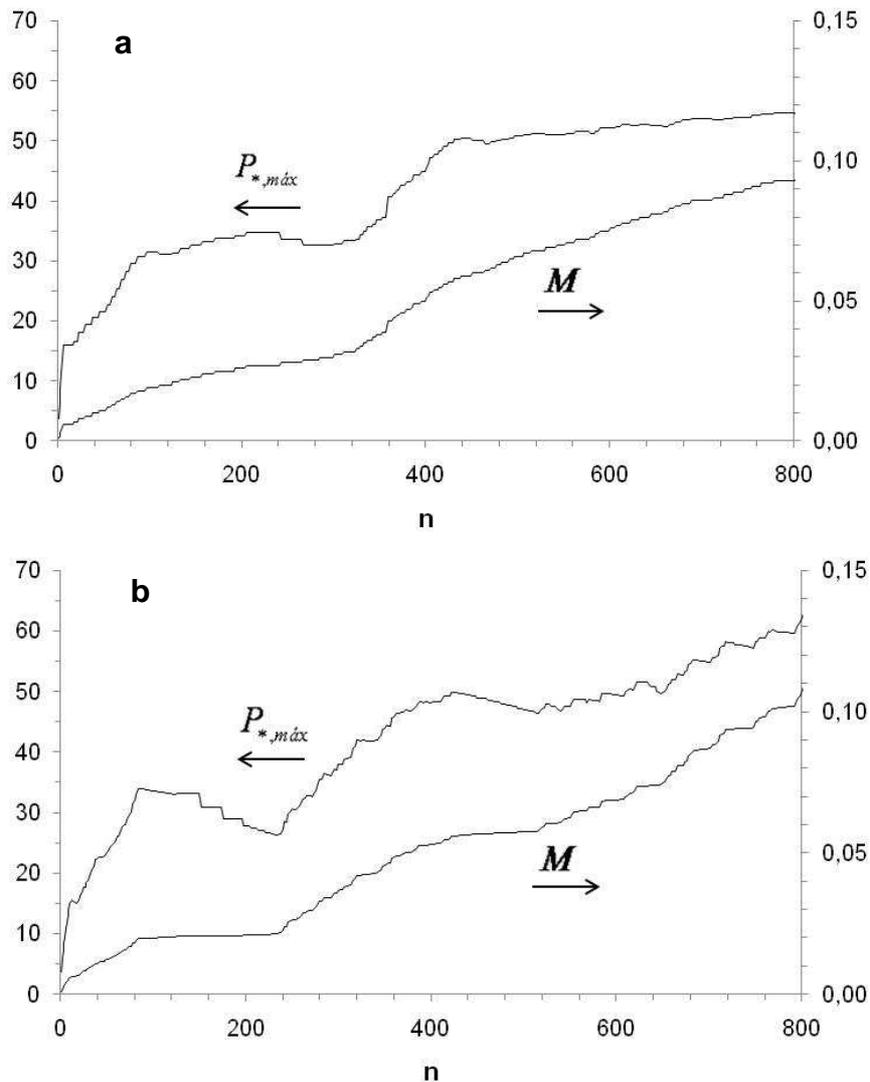


FIGURA 33 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 32, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Para ambos os caso, as singularidades localizadas à direita do centro exercem apenas uma pequena influência em relação ao direcionamento do

escoamento, mas é importante notar que não é perceptível a presença de regiões de estagnação para estes casos. Outro ponto interessante é notar que a transposição de todos os blocos leva à geração de *loops* no sistema, o que não era notado nos casos anteriores.

A Figura 33 apresenta a dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 32. Curiosamente, nota-se novamente que a etapa mais importante é a transposição da singularidade central, verificada quando $n \sim 200$. **Pode-se então assumir que a singularidade central é a que exerce a maior influência sobre a rede.** Na Figura 33b, verifica-se um segundo local onde ocorre uma redução considerável do pico de pressão. Entretanto, comparando com a Figura 32b, não foi possível determinar qual evento foi responsável por este fato.

A afirmação de que a singularidade central é a que exerce a maior influência sobre a rede pode ser mais bem compreendida analisando o segundo teste com número plural de singularidades. Na Figura 34, existem 24 conjuntos de blocos irremovíveis e impermeáveis com tamanho $L_x = L_y = 3$, totalizando 9% da área ocupada. Agora, essas singularidades foram distribuídas sem nenhuma ficar em contato com o eixo x .

Analisando a Figura 34, fica claro que a presença de uma singularidade centralizada alteraria a dinâmica. A primeira tendência é a formação do canal justamente na direção do eixo x . Agora, as singularidades exercem um forte direcionamento da rede, e as conclusões mais importantes dizem respeito à ordem com que as ramificações vão sendo criadas.

Após o canal central alcançar os blocos localizados entre as duas últimas colunas de singularidades (da esquerda para a direita), forma-se a primeira ramificação, que parte da exutória, entra nos caminhos imediatamente adjacentes ao caminho central, mas pula um caminho antes de transpor a segunda singularidade. Este caminho liberado passa a ser utilizado pela terceira ramificação, provinda do canal central, na região entre as duas primeiras colunas de singularidades. A quarta ramificação é semelhante à segunda, apenas com um caminho de diferença. Outras ramificações surgem do canal secundário, e é interessante notar que mais nenhuma ramificação é criada a partir do canal central.

Olhando para a dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M , apresentada na Figura 35, é interessante notar que, para $\Delta M = 10^{-4}$, o momento de cada uma das ramificações é facilmente identificado. A primeira região de queda no pico de pressão ocorre próxima de $n = 100$, e vê-se, na Figura 34b, que é justamente neste momento que ocorreu a formação da primeira ramificação.

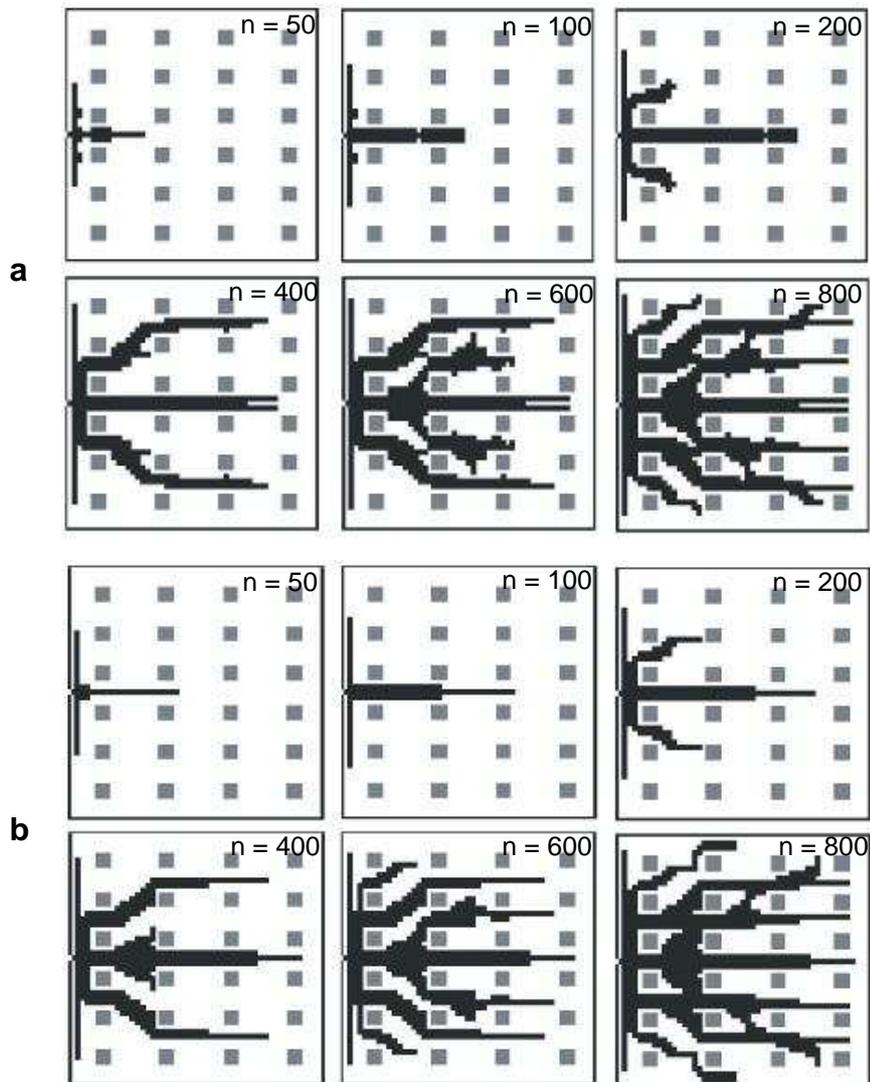


FIGURA 34 – Redes obtidas para as configurações da Figura 18b, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

A segunda queda é registrada pouco após $n = 200$, provavelmente quando se forma a terceira ramificação. A terceira queda pouco após $n = 400$,

também provavelmente quando se formou a quarta ramificação. Isso mostra o quanto as ramificações são importantes para alívio nos gradientes locais.

Mas os resultados mais interessantes são obtidos quando se comparam as dinâmicas da resistência global ao escoamento das Figuras 32 e 34. A Figura 36 apresenta estes resultados. Na forma como está apresentado, pode-se imaginar que há uma diferença praticamente imperceptível entre as duas configurações.

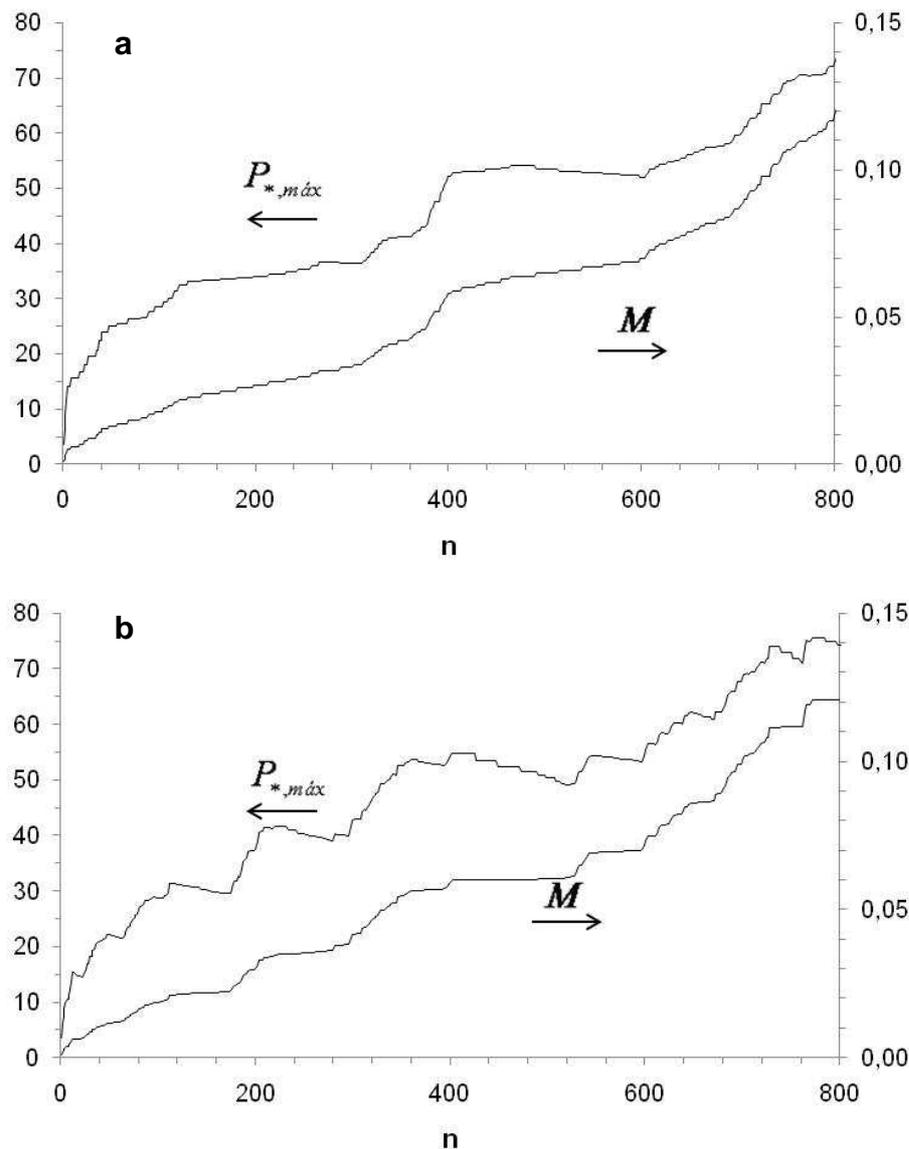


FIGURA 35 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 34, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

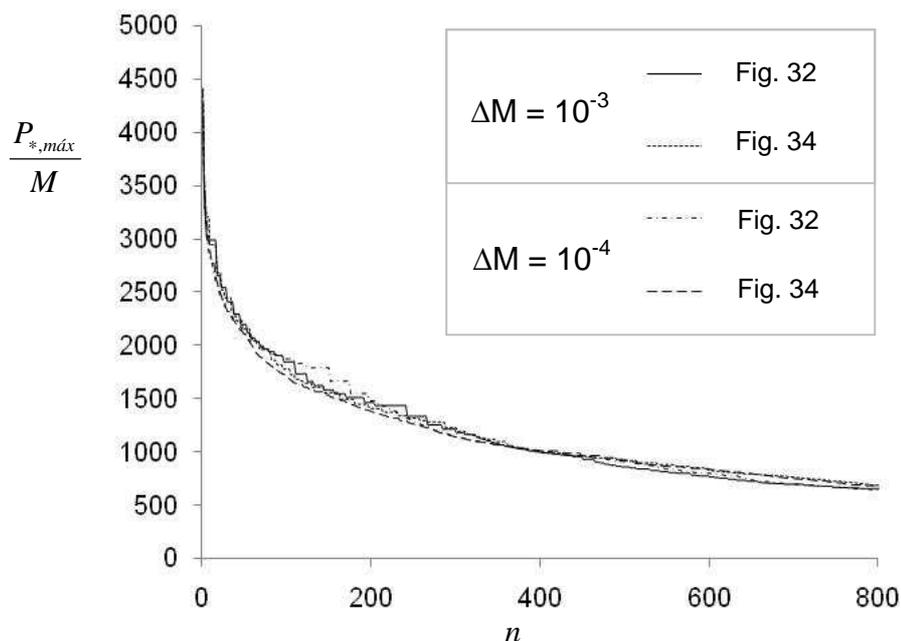


FIGURA 36 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 32 e 34

Entretanto, quando estes dados são normalizados em relação às configurações sem presença de singularidades (o que é apresentado na Figura 37), percebe-se uma clara diferença. Nos primórdios, o desempenho é semelhante, mas após $n \sim 400$ as curvas para a Figura 34 descolam das da Figura 32. A resistência global para o caso da Figura 34, em $n = 800$, é de pouco mais de 10%, mesmo com a área sendo mantida a mesma.

Isso ocorre porque não há um ponto onde a resistência global se aproxima daquela sem singularidades. É fácil verificar que, se fosse ajustada uma reta a cada curva referente à Figura 34, esta reta estaria praticamente com nenhuma inclinação. E é nesta parte que reside a diferença básica entre a Figura 32 e a Figura 34. Nesta última, os blocos são mais espalhados e, sendo isso feito de forma homogênea, a liberdade de alteração é bastante restrita. A resistência ao escoamento para este caso, em $n = 800$, é de 10% a mais que a resistência sem as singularidades.

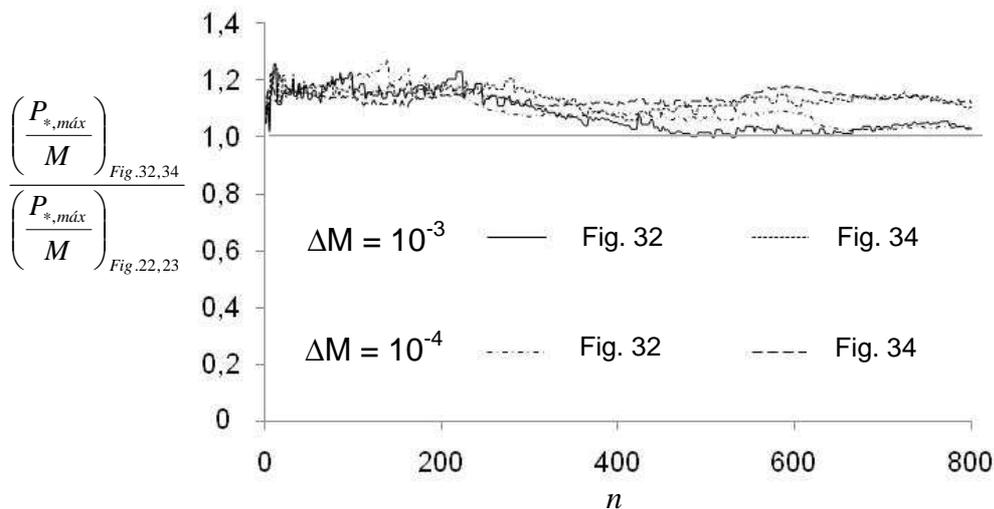


FIGURA 37 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com blocos irremovíveis e impermeáveis (das Figuras 32 e 34) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 22 e 23)

É para esta discussão que foi desenvolvido o teste seguinte. Na Figura 38, existem 27 conjuntos de blocos irremovíveis e impermeáveis com tamanho $L_x = L_y = 3$, totalizando 10% da área ocupada, o que é praticamente o mesmo do verificado na Figura 36. Entretanto, agora os blocos foram distribuídos aleatoriamente seguindo o procedimento descrito na metodologia.

Com os blocos mais espalhados, há a liberdade em alguns espaços para que a largura dos canais possa ser aumentada, e o sistema é um pouco menos restrito. O número de bifurcações produzido é bem menor. Há ainda a presença de blocos bem próximos da exutória, inclusive bloqueando a criação do canal central, e isso influencia drasticamente na dinâmica.

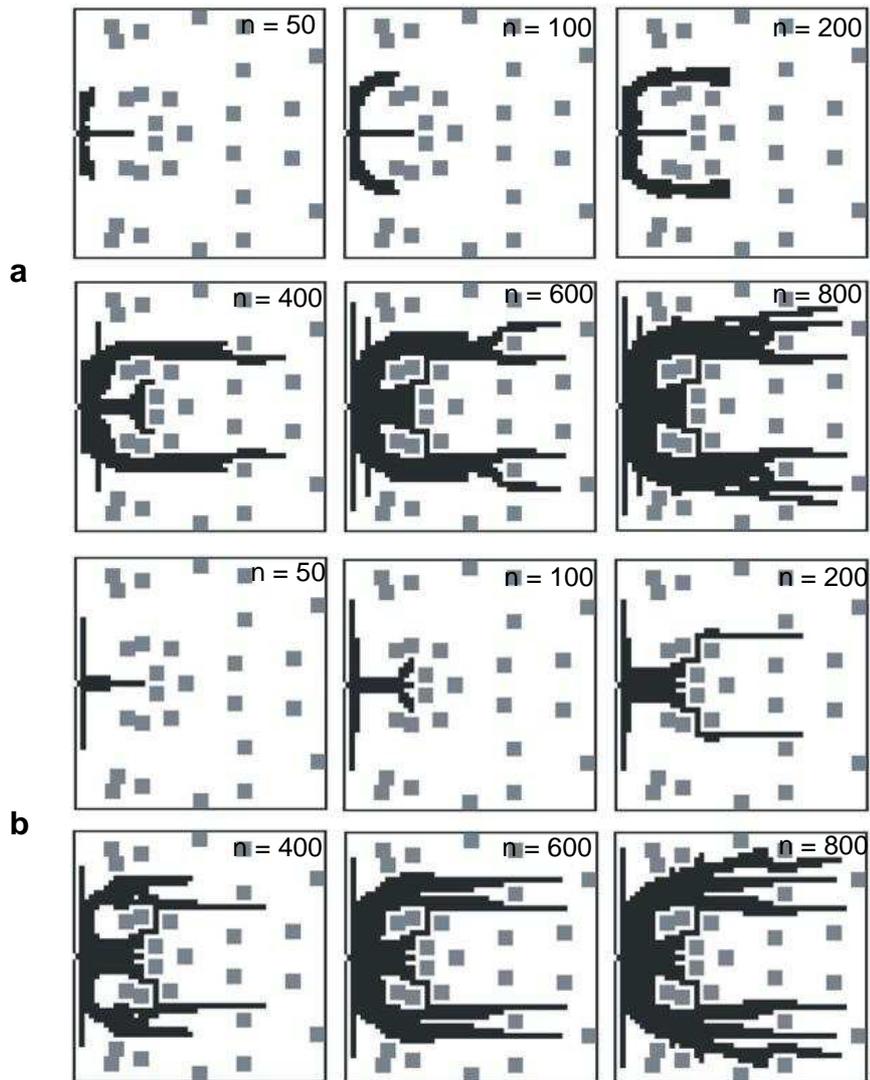


FIGURA 38 – Redes obtidas para as configurações da Figura 19, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Olhando para os picos de pressão e os valores de M (Figura 39), novamente é possível perceber algumas regiões importantes para a construção da rede, onde ocorrem quedas consideráveis no valor do pico de pressão, principalmente para $\Delta M = 10^{-4}$. Os casos mais pronunciados são os intervalos de n entre 200 e pouco mais de 400, e entre 600 e 700, na Figura 39b, que justamente correspondem a pontos de formação de ramificações.

Entretanto, apesar de algumas diferenças notadas, o fato de as singularidades terem sido distribuídas aleatoriamente praticamente não produz efeito em relação à resistência global ao escoamento, o que pode ser visto na Figura 40.

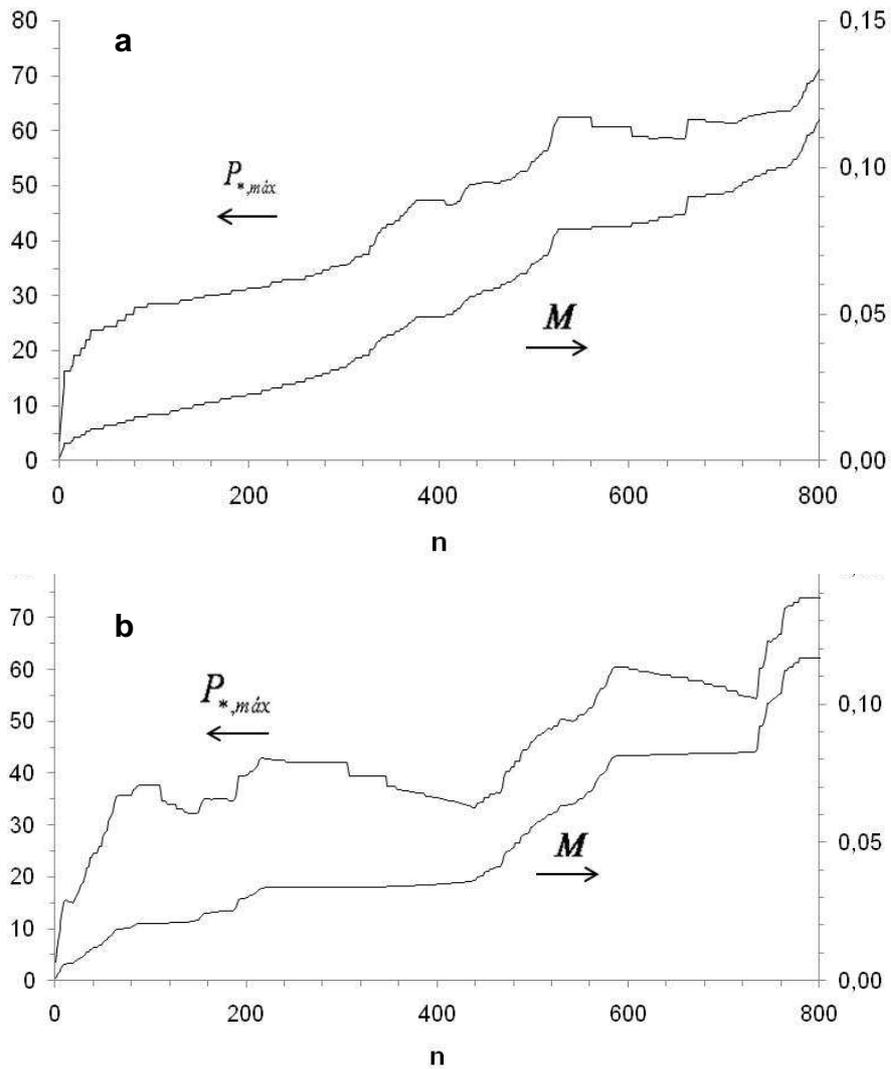


FIGURA 39 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 38, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

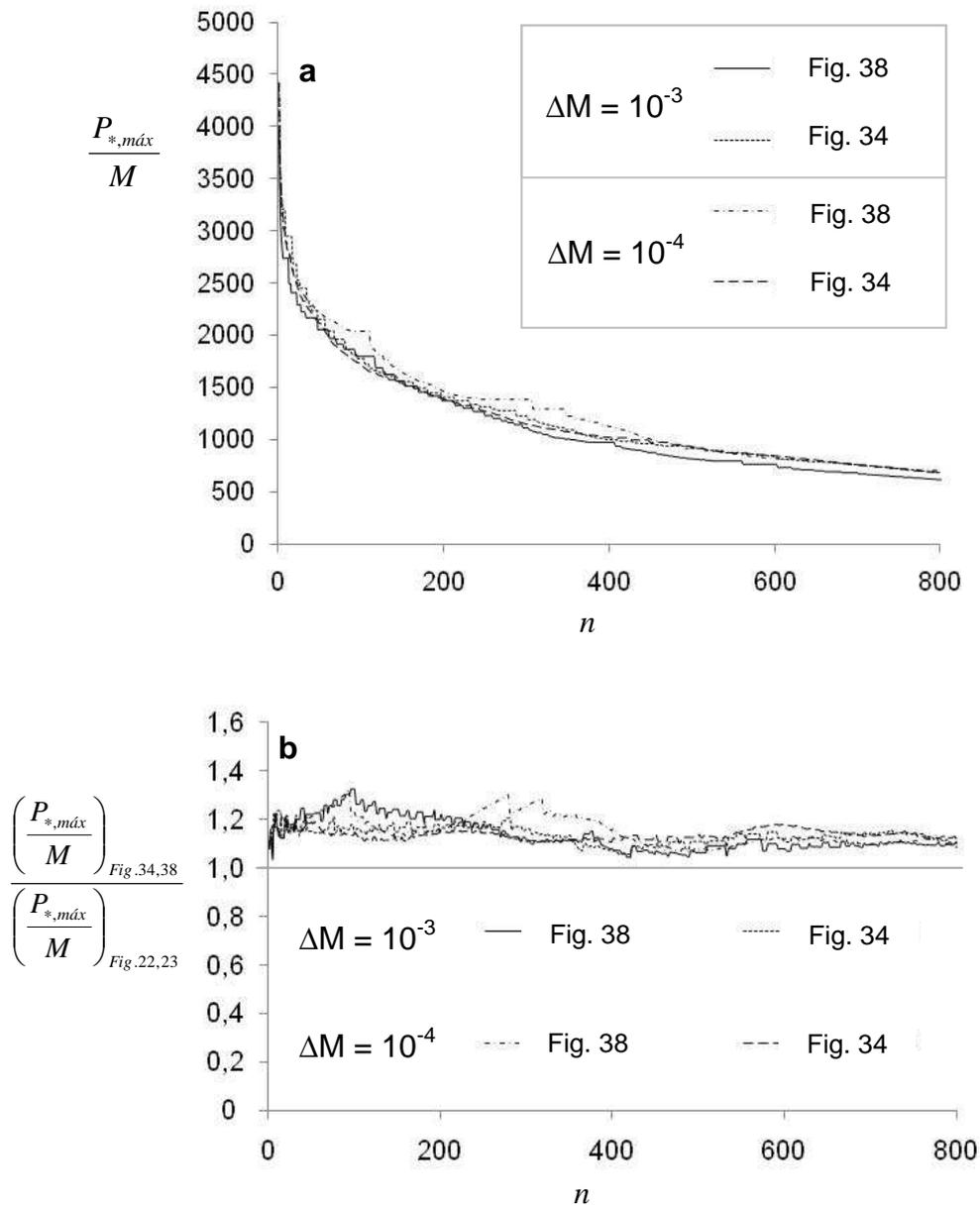


FIGURA 40 – Aspectos relacionados às Figuras 38 e 34: a) dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações; b) comparação da resistência ao escoamento das configurações com blocos homogeneamente distribuídos em relação às redes formadas com blocos aleatoriamente distribuídos

Comparando estes resultados com os da Figura 37, é possível perceber que o grau de espalhamento ou o número total de singularidades, para uma mesma área ocupada, influencia mais na performance global do que a forma com que estes blocos são distribuídos.

4.3.3 Configurações com barreiras de fluxo

Até este ponto, diversas características relacionadas com a presença de regiões irremovíveis e impermeáveis na dinâmica de construção de bacias de drenagem foram obtidas. Para o caso de uma singularidade, há a presença de quatro fases distintas na dinâmica da formação de rede, há a criação de uma região de estagnação morfológica, após a singularidade ser transpassada a performance global do sistema passa a ser indiferente à forma como novas estruturas são criadas, no caso da singularidade localizada distante da exutória, e o contrário para o caso de estar próxima da exutória. Com estas informações em mente, procedeu-se à adição de mais singularidades, o que evidenciou que a presença da região de estagnação fica dificultada neste caso, e que o grau de espalhamento influencia mais na performance global do sistema do que a forma como este espalhamento é dado.

Entretanto, há ainda uma parte da dinâmica não abordada. Até este momento, pouca coisa foi possível compreender a respeito da dinâmica da rede após a singularidade. É neste sentido que o estudo com barreiras foi desenvolvido. Naturalmente, o primeiro estudo feito foi com uma barreira localizada no centro da bacia de drenagem. Conforme a Eq. (52), a barreira foi criada com $L_x = 1$ e $L_y = 13$. Já foi visto que deslocar a singularidade mais distante da exutória não surte efeito na performance global do sistema. Então, agora os testes realizados foram feitos com as barreiras cada vez mais próximas da exutória.

As redes formadas estão apresentadas nas Figuras 41 e 42. É interessante observar que, no caso das Figuras 41a, 41b, 42a e 42b novamente ocorre a formação de uma região de estagnação. Entretanto, à medida que a barreira é deslocada para perto da exutória, a distância entre a barreira e o ponto de estagnação diminui, chegando a região a desaparecer quando a barreira está muito próxima, como no caso das Figuras 41c e 42c.

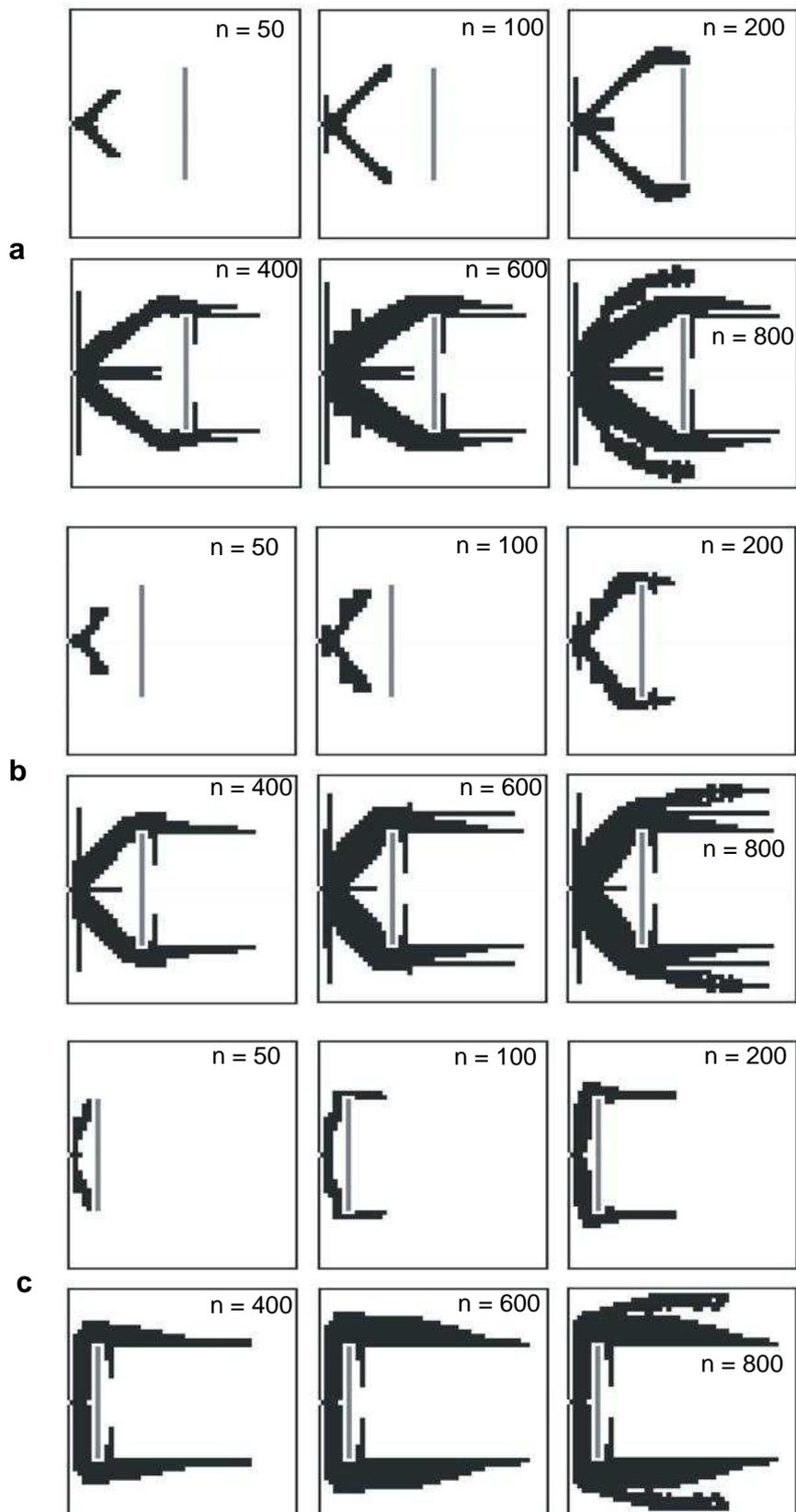


FIGURA 41 – Redes obtidas para as configurações da Figura 20 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-3}$

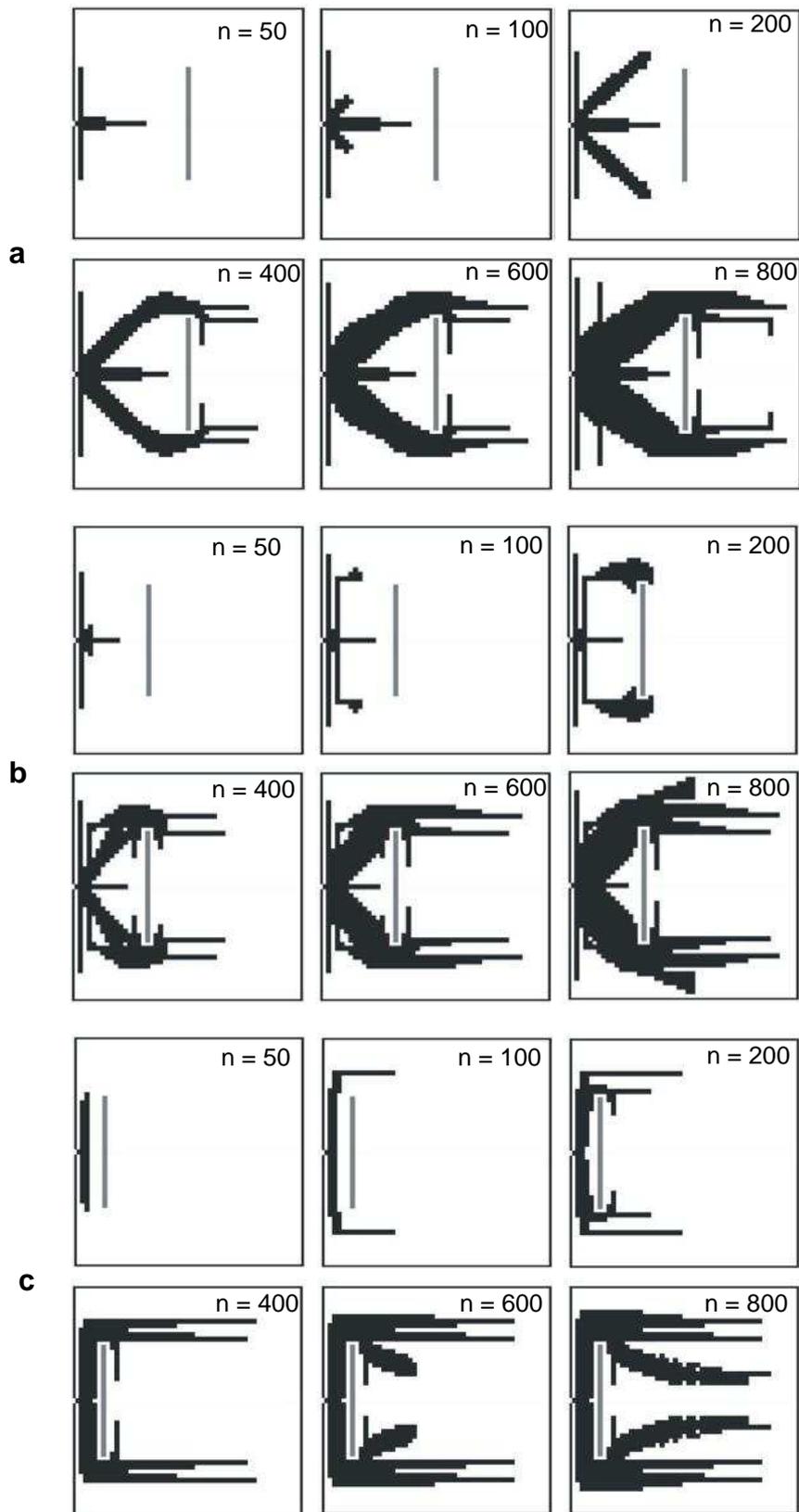


FIGURA 42 – Redes obtidas para as configurações da Figura 20 (a, b e c), considerando $\Delta M = 10^{-4}$

Fica claro que deve haver um limiar entre a ocorrência ou não ocorrência deste tipo de formação, mas este fato não foi abordado nestas simulações. Não obstante, verificando as configurações, as configurações das Figuras 41c e 42c estejam muito próximas deste limiar, ou seja, com a barreira localizada a $1/7 N_{D,x}$ da exutória.

Ao analisar a dinâmica dos valores do pico de pressão e de M , apresentados nas Figuras 43 e 44, percebe-se um fato interessante, não tão visível no caso dos conjuntos de blocos. Neste caso, após a transposição da singularidade, o valor de pressão passava por uma queda considerável, mas de uma forma aparentemente contínua. Já no caso das barreiras, ocorre uma queda brusca, descontínua, no momento em que a rede consegue transpor o obstáculo. Isso mostra a grande influência que uma singularidade de fluxo exerce no comportamento global do sistema.

Outro ponto interessante a se observar é a dinâmica da rede após a barreira. Em todos os casos, assim como acontecia com os conjuntos de blocos irremovíveis estudados anteriormente, formam-se dois pequenos canais, ambos na direção de y , tendendo ao eixo x . Esses pequenos canais aparentam ser suficientes para o escoamento do precipitado na região posterior à singularidade. Apenas no caso da Figura 42c ($\Delta M = 10^{-4}$) forma-se efetivamente um canal de maior largura, após $n = 400$. Para o mesmo caso, mas com $\Delta M = 10^{-3}$, o forçante hidráulico aumenta de tal grau que não se formam gradientes suficientes neste local, e apenas os canais direcionados ao ponto superior direito, que é o ponto onde ocorre o pico de pressão, é que são desenvolvidos.

Isto mostra a grande influência do forçante externo na configuração final da bacia. Comparando as Figuras 43c e 44c, percebe-se que, nesta última, ocorre uma considerável tendência de redução para $n \sim 500$, o que, comparando com a Figura 42c, é provavelmente o momento onde a rede na região posterior à barreira começa a se formar.

Entretanto, quando se avalia isso na forma da redução da resistência ao escoamento, apresentadas na Figura 45, ambas as tendências são semelhantes. A rede formada não cria uma melhora de performance global ao sistema de grande magnitude.

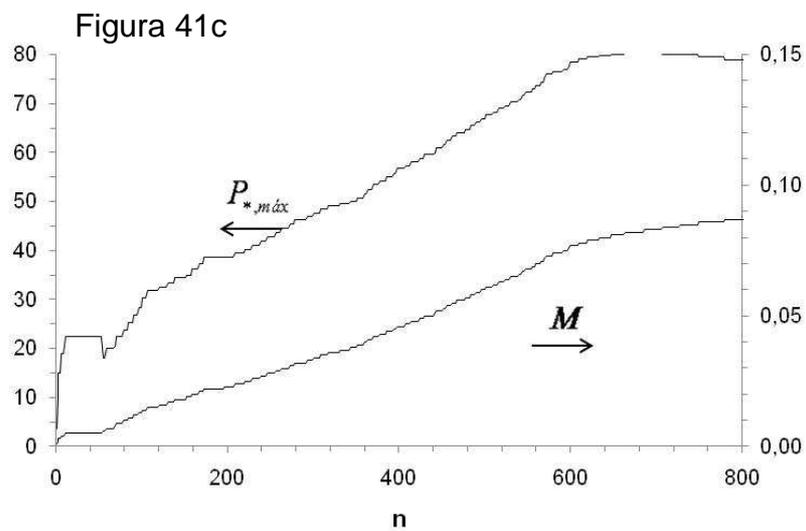
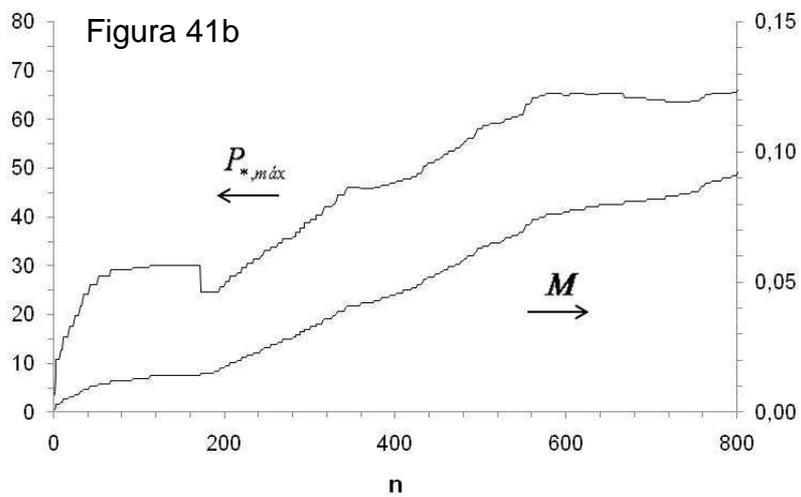
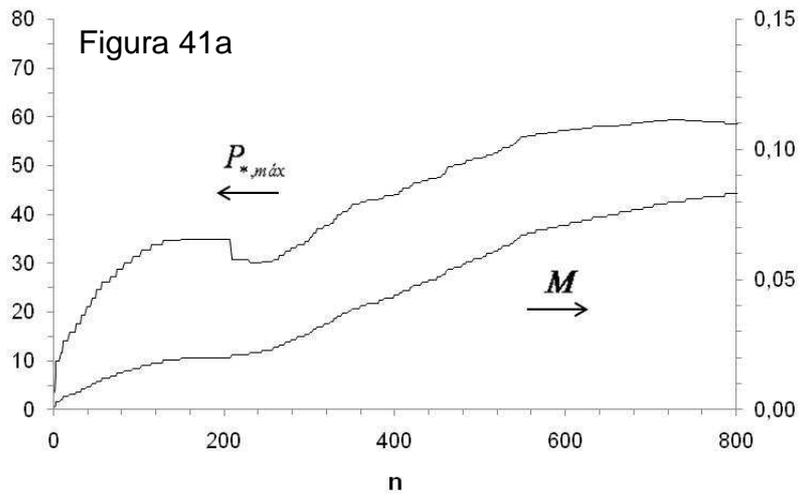


FIGURA 43 – Dinâmica do pico de pressão e de M para as configurações da Figura 41 ($\Delta M = 10^{-3}$)

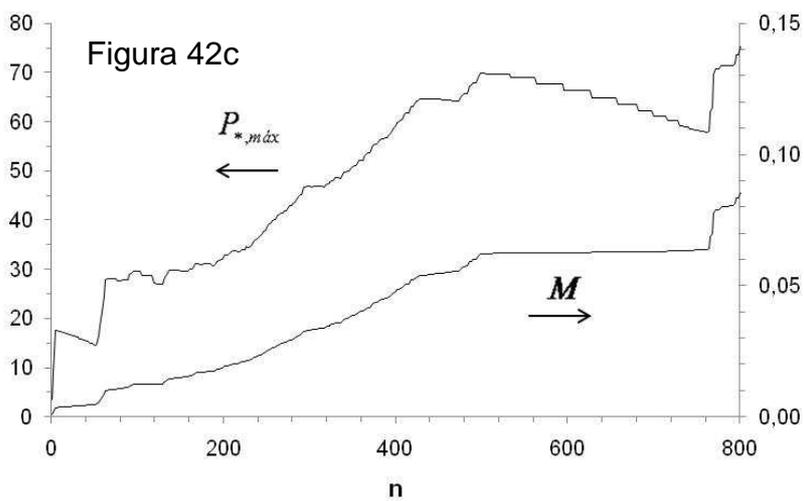
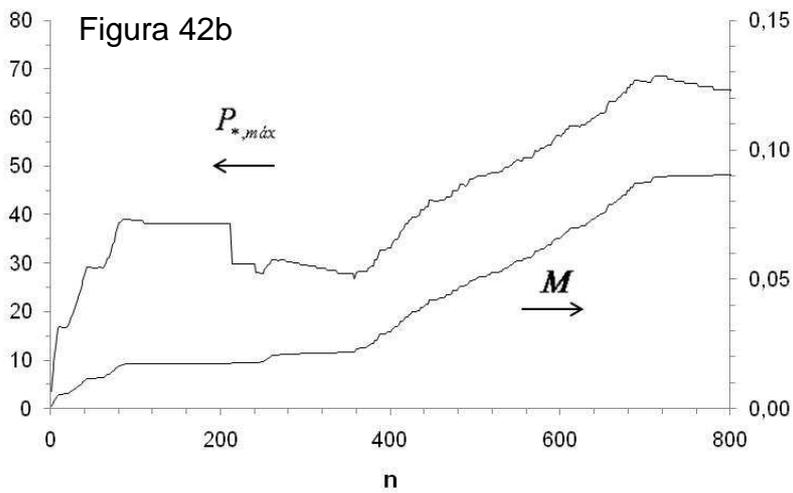
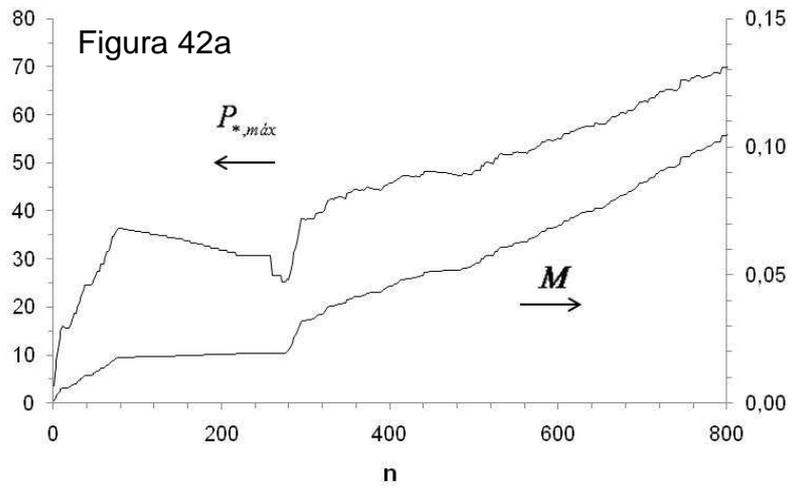


FIGURA 44 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 42 ($\Delta M = 10^{-4}$)

Por outro lado, sempre que as barreiras são transpostas, observam-se nítidas quedas na resistência global ao escoamento. Aliás, para o caso das barreiras, verificam-se nítidas descontinuidades nas dinâmicas e, comparando com as configurações geradas, essas descontinuidades ocorrem sempre que o canal consegue atingir as extremidades da barreira.

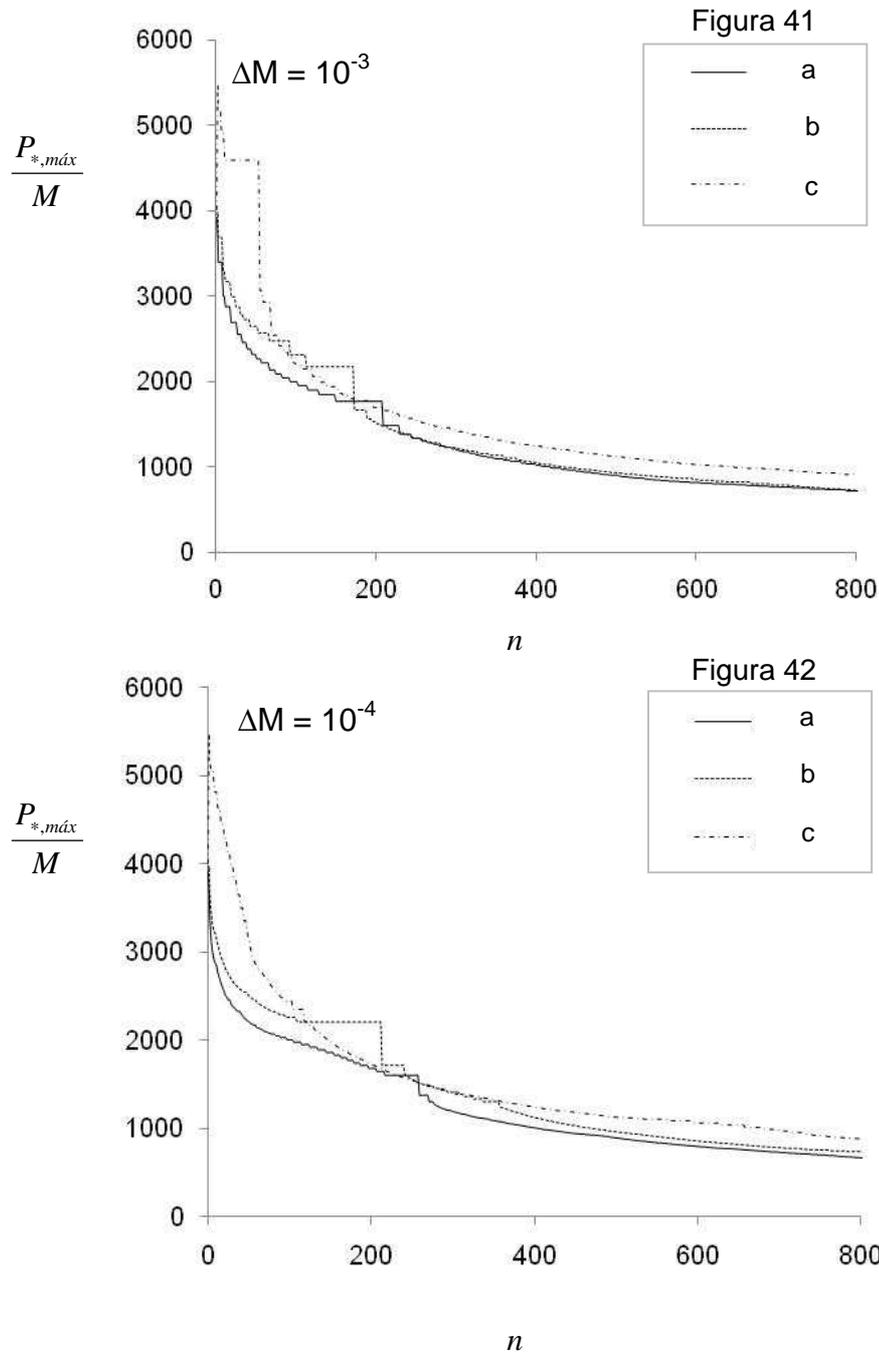


FIGURA 45 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 41 e 42

Outra análise interessante é apresentada na Figura 46. Seguindo sempre a mesma rotina de exploração, as razões entre a resistência ao escoamento para o caso com barreiras e o caso sem singularidades foram plotadas, e percebe-se nitidamente como o sistema é carregado enquanto não ocorre a transposição das barreiras. Entretanto, após esse fato, a resistência ao escoamento sofre uma queda brusca e, para as duas primeiras configurações, chega a patamares próximos aos dos casos com conjuntos de blocos irremovíveis. Ou seja, globalmente, as barreiras e os conjuntos de blocos surtem efeitos semelhantes.

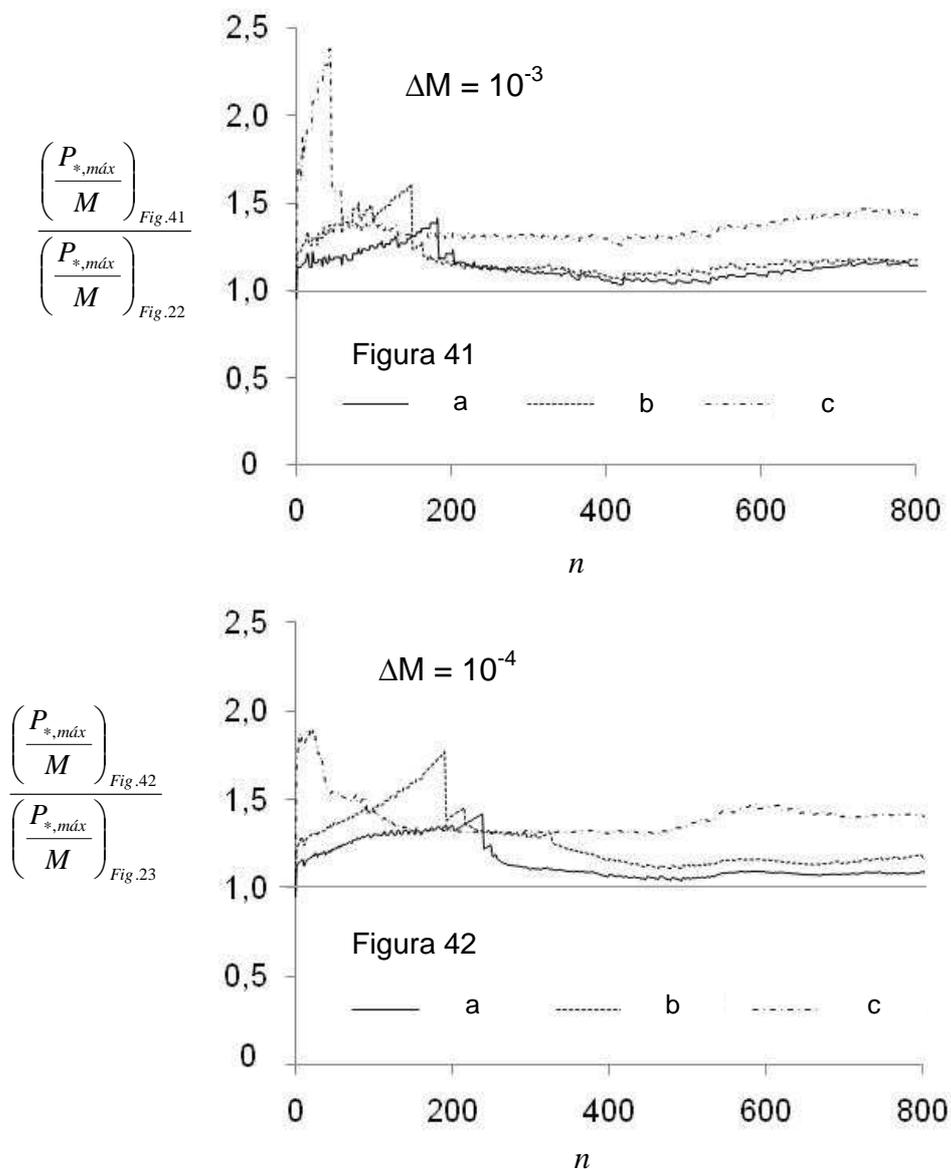


FIGURA 46 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com uma barreira (Figuras 46 e 47) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 22 e 23)

Entretanto, quando a barreira está localizada muito próxima da exutória, a diferença na resistência final é acentuada. É neste sentido de estudo que os próximos testes foram realizados. Agora, a barreira foi introduzida de forma que, até o canal chegar a sua extremidade, ele não tenha livre criação. A única forma possível são canais de largura 1. As configurações obtidas estão apresentadas na Figura 47.

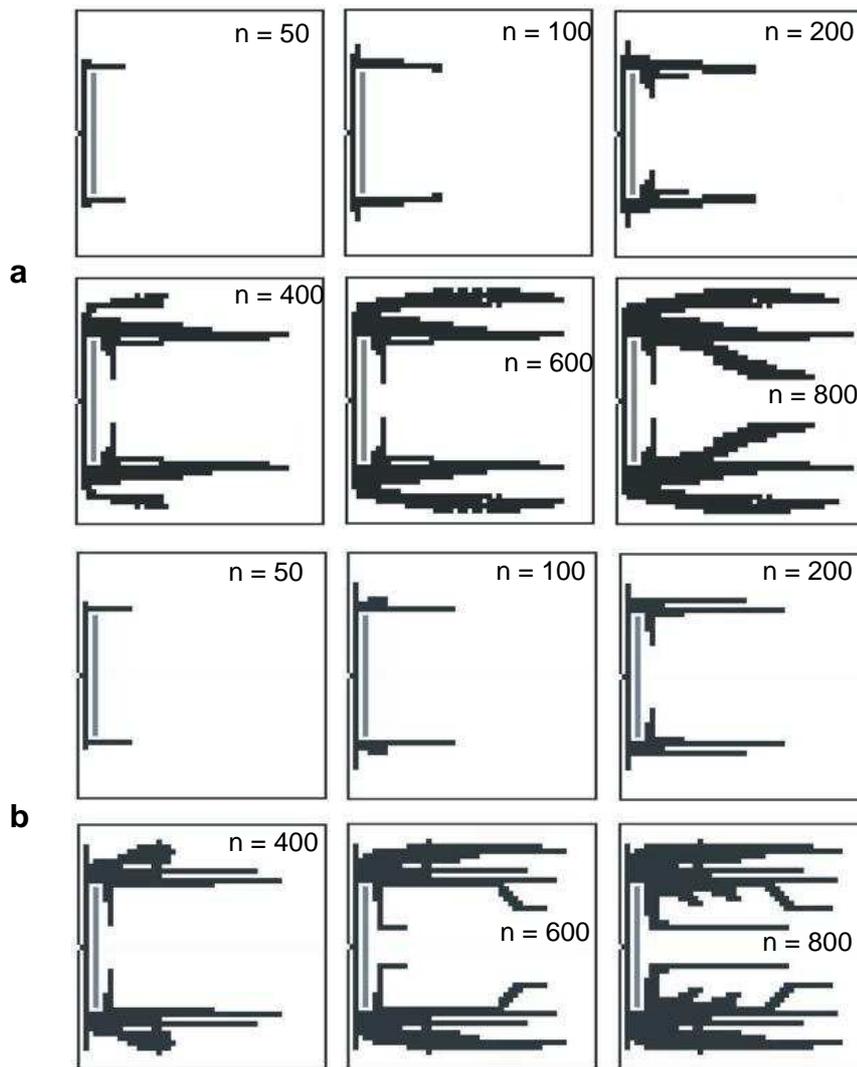


FIGURA 47 – Redes obtidas para as configurações da Figura 21a, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Agora, independente do valor de ΔM , sempre ocorre a formação de canais na região posterior à barreira. Forma-se então uma região efetiva de escoamento, pois a área de contribuição passa a assumir um valor onde os gradientes criados atingem o valor crítico. Inclusive, para $\Delta M = 10^{-4}$, os pequenos canais que se criam adjacentes à face direita das barreiras aumentam em largura e em um determinado momento se direcionam para o fundo da bacia.

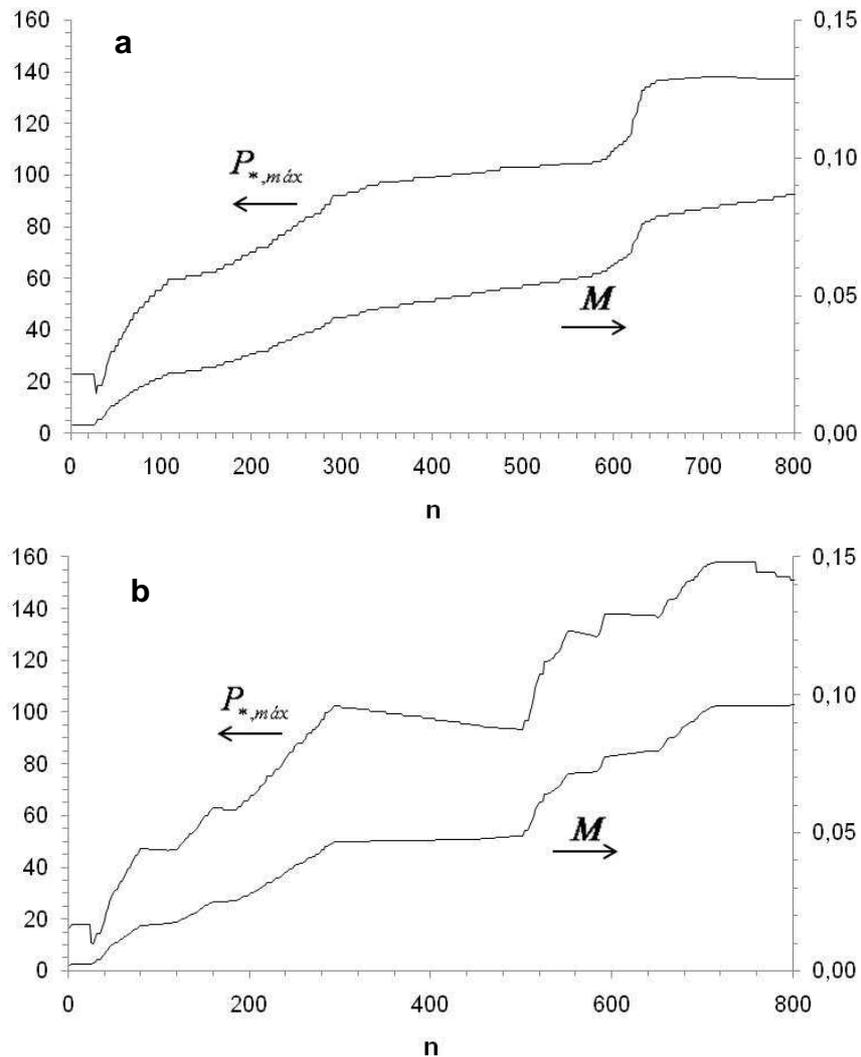


FIGURA 48 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 47, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Novamente, uma inspeção nas dinâmicas dos picos de pressão e de M revela pontos importantes na dinâmica da rede. A Figura 48b mostra vários pontos onde ocorre uma mudança súbita na inclinação da curva do pico de pressão, e inclusive uma descontinuidade, que coincide com o momento que a barreira é transposta.

Visto que a barreira nesta posição exerce grande influência sobre o sistema, a restrição foi aumentada para o próximo teste. Agora, a barreira foi criada com comprimento tal que o canal que exerce a transposição tem sua largura limitada a 1. Seria praticamente como se fossem criadas duas exutórias, mas onde o valor de pressão é maior que 0.

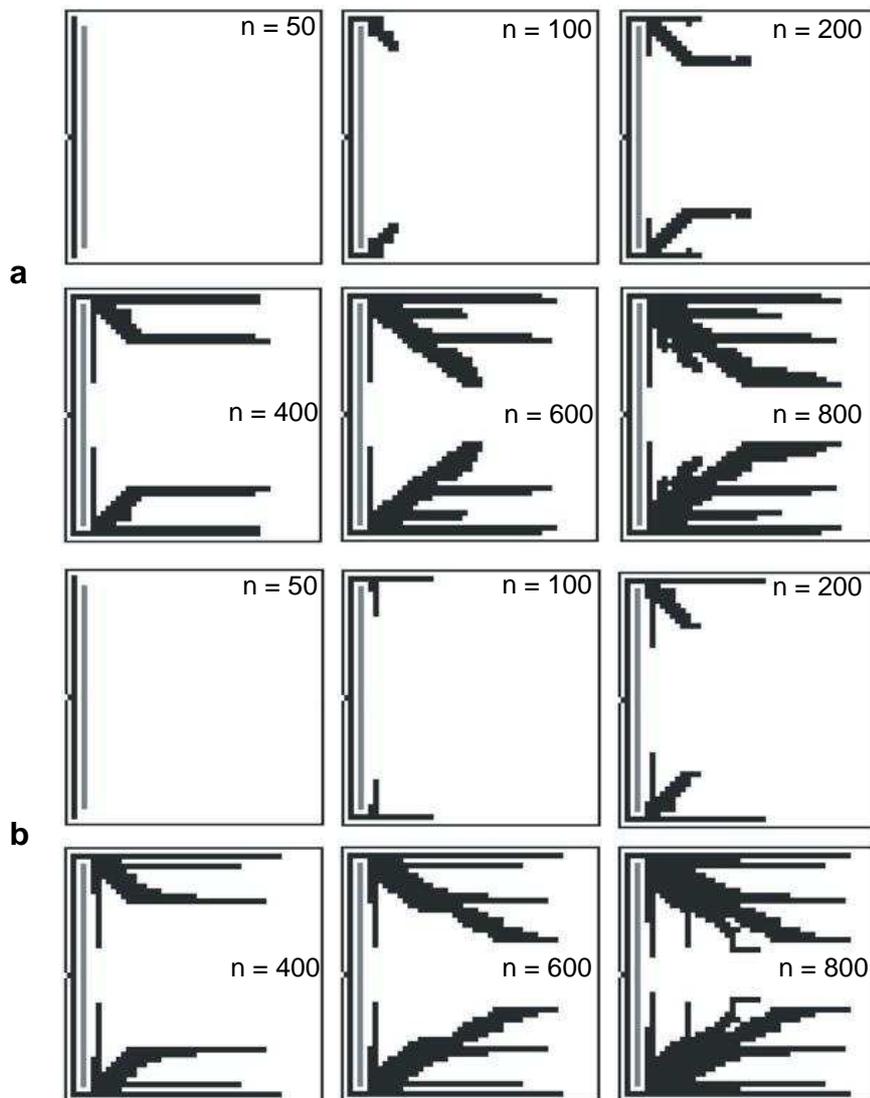


FIGURA 49 – Redes obtidas para as configurações da Figura 21b, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Nestes resultados o que se percebe é que a rede construída após a transposição não é mais direcionada para o ponto superior direito, mas sim em direção ao fundo da bacia, tendendo a alcançar o eixo x. Na verdade, o pico de pressão já não ocorre mais no local das outras simulações, mas sim em $y^* = 0$ e $x^* = N_{D,x}$, pois este é o local de maior distância para a exutória.

Comparando as configurações obtidas com a dinâmica do pico de pressão, novamente se encontram pontos importantes da dinâmica. Ao transpor a barreira, ocorre uma queda súbita de pressão, como foi visto no caso das barreiras. A formação de cada nova ramificação gera também uma curva de decréscimo no pico de pressão.

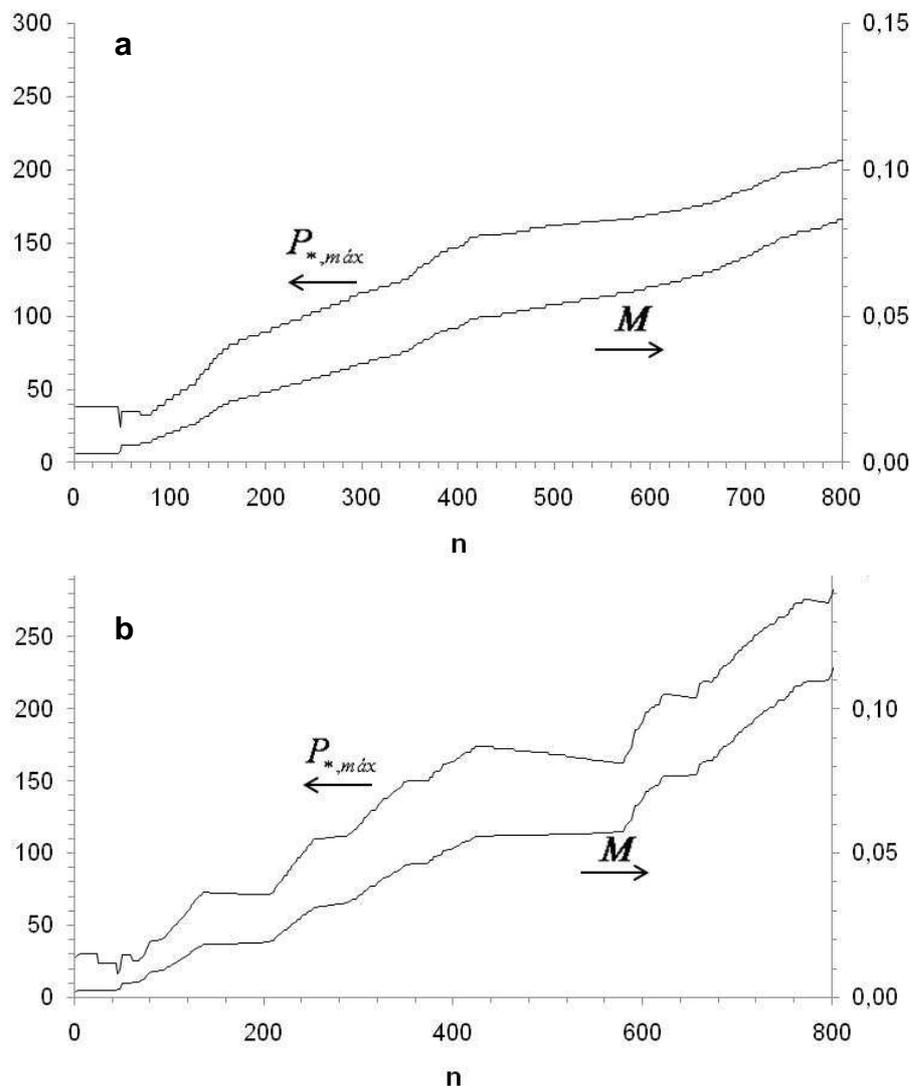


FIGURA 50 – Dinâmica dos picos de pressão e dos valores de M para as configurações da Figura 49, sendo a) $\Delta M = 10^{-3}$ e b) $\Delta M = 10^{-4}$

Mas, assim como nos outros casos, essas reduções não são percebidas na forma de aprimoramento da performance global. Esta dinâmica, para as Figuras 47 e 49, é apresentada na Figura 51. É interessante observar que, para cada caso, ocorre uma súbita redução na resistência global ao escoamento quando da transposição da barreira. Após este fato, a resistência continua decaindo, mas com uma inclinação muito pequena, semelhante ao final de uma curva de decaimento exponencial. Mas é importante verificar a persistência do argumento da Figura 4 sobre a formação de configurações naturais: enquanto o sistema é direcionado pela barreira (ou seja, não há nenhum grau de liberdade para o movimento), a performance do sistema não se altera, mesmo com a introdução de blocos com maior permeabilidade. Já quando o sistema passa a ter liberdade, ao invés de um simples decaimento, a curva sofre uma queda brusca. Isso atesta a importância da liberdade de transformação dos sistemas naturais para a melhora da performance global.

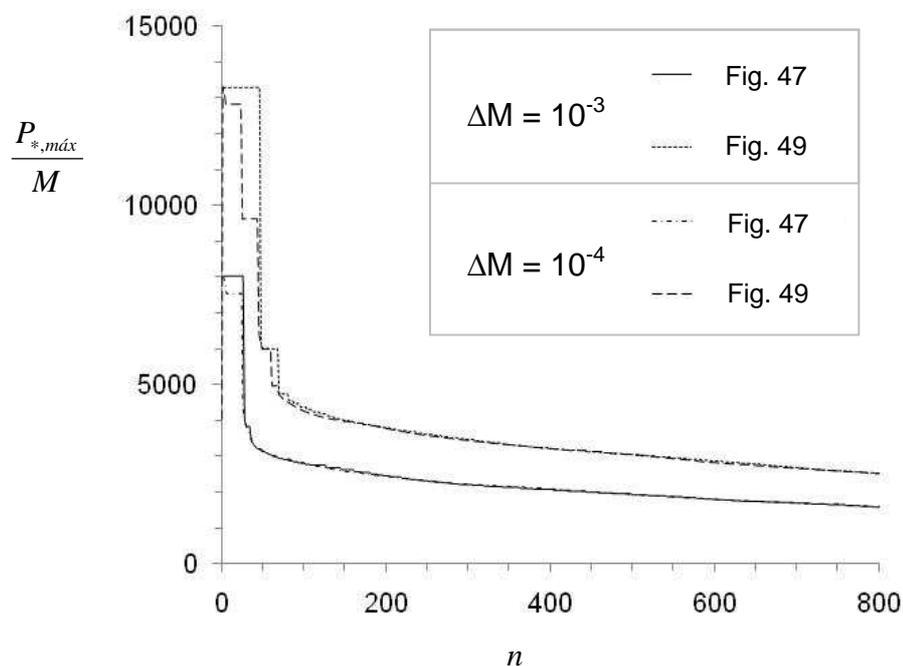


FIGURA 51 – Dinâmica de redução da resistência ao escoamento das configurações das Figuras 47 e 49

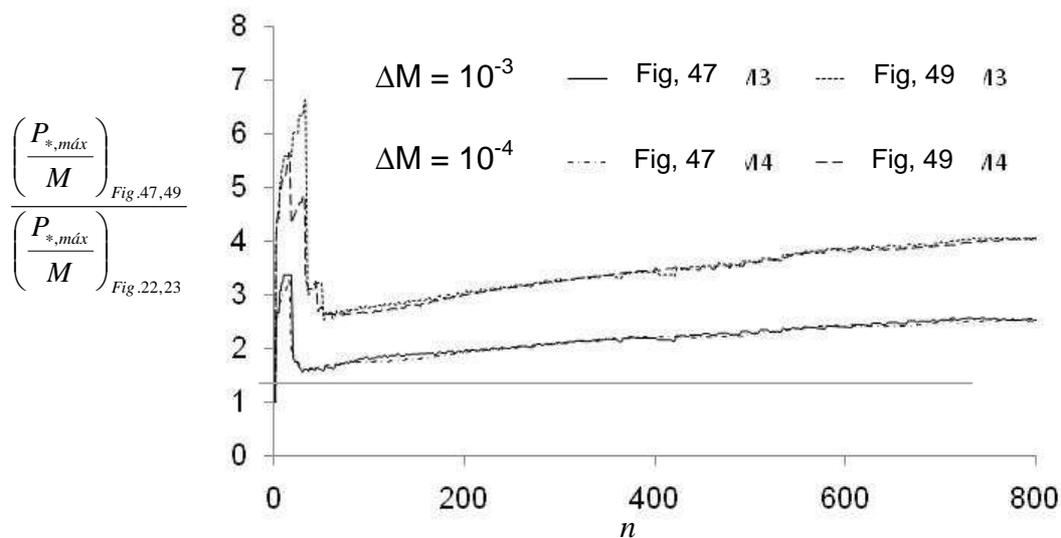


FIGURA 52 – Comparação da resistência ao escoamento das configurações com barreiras (das Figuras 47 e 49) em relação às redes formadas sem essas restrições (Figuras 23 e 24)

Outro ponto a ser citado é a grande diferença entre as resistências formadas até $n = 800$. O valor de ΔM praticamente não exerce influência, mas a diferença entre os dois comprimentos de barreira é de mais de 100%, apesar do pequeno aumento no tamanho da barreira.

Isso é mais bem percebido na análise da Figura 52, que evidencia o resultado mais importante destas configurações. As barreiras, quando localizadas muito próximas da exutória, exercem tal grau de influência que o sistema como um todo não consegue se recuperar. Percebe-se que a curva da razão entre os casos com barreira nesta forma e com os casos sem singularidades, após a queda brusca da transposição sem barreiras, apresenta uma tendência sempre de aumento. Ou seja, mesmo com a barreira transposta, as redes sendo formadas geram uma redução na resistência ao escoamento em um ritmo bem menor que no caso sem singularidades. Isso acontecendo, a resistência no final do processo chega a ser o dobro para a Figura 47 e mais de 4 vezes para a Figura 49.

Esta última análise fecha esta seção, e com base em todos estes resultados algumas importantes conclusões foram tiradas, e apresentadas a seguir.

5. CONCLUSÕES

Algumas questões em aberto foram abordadas por este trabalho, o que gerou a metodologia apresentada. O simulador criado foi verificado consistente. Com este, os resultados de ERRERA e BEJAN (1998) foram exatamente reproduzidos, tanto as configurações geométricas como as dinâmicas do campo de pressão e dos valores de M (forçante externo, relação entre a força de atrito provocada pelo escoamento do fluido e a tensão de ruptura dos blocos), o que é mostrado nas Figuras 22 e 23.

A remoção dos blocos no simulador foi determinada por critérios determinísticos. A primeira alteração deste trabalho foi neste âmbito, trocando estes critérios por critérios aleatórios. **Neste caso, redes não foram formadas, como visto na Figura 24, mas a eficiência global do sistema não foi sensivelmente prejudicada**, o que mostra que é possível que, para compreensão da formação de redes, considerações sobre pressão local tenham de ser adicionadas. Essa informação é vista na Fig. 25, de onde se extraem outras importantes informações a respeito do comportamento do sistema. **A informação de que somente os blocos adjacentes aos canais podem ser removidos é fundamental para a performance da bacia**, enquanto a informação do critério de remoção tem um peso menor. A outra informação provém do Modelo Completamente Aleatório, que mostra que a remoção de alguns blocos provoca uma redução abrupta da resistência global, efetivamente os mais próximos da exutória, o que prova que a aleatoriedade completa não é eficiente.

A etapa principal do trabalho, que é a inclusão de termos irremovíveis, foi realizada com sucesso. Diversas configurações foram estudadas, e uma gama de informações foram obtidas. Todas as configurações foram criadas para $N_{D,x} = N_{D,y} = 51$ e $K/K_p = 0,1$.

A primeira análise foi feita para o caso de um conjunto de blocos irremovíveis e impermeáveis introduzido com seu centro sob o eixo x , ocupando aproximadamente 10% da área total de escoamento, com os resultados mostrados nas Figuras 26 a 31. Para o caso, foi verificada a **formação de uma região de estagnação morfológica na região anterior ao**

bloco, responsável pela transposição da singularidade introduzida. Além disso, foi possível de perceber distintas fases na formação da rede. Não obstante, **após a região de estagnação ser formada, seu formato morfológico permanece praticamente inalterado.**

Entretanto, a presença destas singularidades praticamente não exerce influência no decaimento da resistência global ao escoamento, com exceção do caso em que a singularidade é colocada próxima da exutória. Se isso for interpretado **para sistemas de engenharia**, é importante afirmar então que singularidades que possam existir não sejam introduzidas próximas da região de dissipação de algum tipo de energia, ou que a **rede construída tenha seu ponto de dissipação localizado distante da singularidade.**

Em outros testes, mais conjuntos foram inseridos, mantendo ainda o grau de ocupação de 10%, mostrados nas Figuras 32 a 40. Destes testes, foi importante verificar que a influência de uma singularidade sobre outra elimina o aparecimento de regiões de estagnação, principalmente se distribuídas homogeneamente. Para a resistência global, **foi possível verificar que quanto mais ocorre um aumento no grau de espalhamento dos conjuntos (ou a seu quantidade) menor é a performance global do sistema.**

Na etapa final do trabalho, os conjuntos foram substituídos por barreiras, e nesse ponto foi possível perceber melhor a influência destas singularidades na formação das redes, isso evidenciado nas Figuras 41 a 46. Verificou-se que, enquanto as barreiras não eram transpostas, a resistência ao escoamento se mantia em patamares altos e, após este fato, sofria uma queda brusca. Novamente, quanto mais perto da exutória, maior o efeito sobre o sistema.

Isso culmina nos casos onde o canal formado entre a exutória e a barreira é forçado a ter sua largura de valor unitário, apresentados nas Figuras 47 a 52. Nestes casos, a influência sobre o sistema é tão grande, que a **formação das redes após a transposição das barreiras apresenta uma tendência de redução da resistência ao escoamento de caimento menor do que no caso sem singularidades.** Essa é a consequência ao resto da bacia da presença de tal restrição.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As simulações deste trabalho foram realizadas considerando que as singularidades não recebiam a precipitação do resto da bacia. Ou seja, não havia produção de fluxo nestes locais. É importante que testes semelhantes sejam realizados considerando este fato, principalmente na verificação das conclusões a respeito da posição das singularidades. Sobre as singularidades, o desenvolvimento de um sistema que possibilitasse estudar outras geometrias, incluindo circulares e ovais, possibilitaria a compreensão de bacias mais reais.

Não era do escopo deste trabalho desenvolver um sistema físico para teste em laboratório e comparação dos resultados, porém isto traria uma grande contribuição na verificação da acurácia do modelo.

Outra sugestão ainda de estudo envolve a modificação da direção do escoamento. Ou seja, o estudo da distribuição de um ponto de produção de fluxo para uma região de aproveitamento (por exemplo, um sistema de irrigação).

É importante salientar também a necessidade de realização destes testes para blocos que ocupem áreas consideravelmente menores, o que ainda não foi possível neste trabalho, devido ao esforço computacional envolvido. Para mesurar este fato, nas simulações com 51x51 blocos, o tempo médio computacional passava facilmente de 15 horas.

Por fim, o trabalho demonstrou que nem sempre a complexidade aumenta a performance do sistema, mas que o maior impactante é o grau de liberdade para alteração, por isto poderia ser estudada a possibilidade de maiores saídas e como as redes distribuem as áreas de contribuição.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVNIR, D., BIHAM, O., LIDAR, D., MALCAI, O., "Is the geometry of nature fractal?", **Science**, Vol. 279, N° 5347, pp 39-40. (1998)

BEJAN, A., "Constructal theory of pattern formation", **Hydrology and Earth System Sciences**, Vol. 11, pp 753-768. (2007)

BEJAN, A., "Constructal tree network for fluid flow between a finite-size volume and one source or sink", **Revue Générale de Thermique**, Vol. 36, pp 592-604. (1997b)

BEJAN, A., "Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 40, N° 4, pp 799-816. (1997a)

BEJAN, A., "Dendritic constructal heat exchanger with small-scale crossflows and larger-scales counterflows", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 45, pp 4607-4620. (2002)

BEJAN, A., "How nature takes shape: extensions of constructal theory to ducts, rivers, turbulence, cracks, dendritic crystals and spatial economics", **International Journal of Thermal Science**, Vol. 38, pp 653-663. (1999)

BEJAN, A., "The constructal law of organization in nature: tree-shaped flows and body size", **The Journal of Experimental Biology**, Vol. 208, pp 1677-1686. (2005)

BEJAN, A., **Advanced Engineering Thermodynamics**, 2ª Edição, Wiley, Nova Iorque, Estados Unidos da América. (1997c)

BEJAN, A., BADESCU, V., DE VOS, A., "Constructal theory of economics", **Applied Energy**, Vol. 67, pp 37-60. (2000)

BEJAN, A., LORENTE, S., "Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering", **Journal of Applied Physics**, Vol. 100, pp 1-27. (2006)

BEJAN, A., LORENTE, S., “Constructal tree-shaped flow structures”, **Applied Thermal Engineering**, Vol. 27, pp 755-761. (2007)

BEJAN, A., LORENTE, S., “The constructal law and the thermodynamics of flow systems with configuration”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 47, pp 3203-3214. (2004)

BEJAN, A., LORENTE, S., LEE, K., “Unifying constructal theory of tree roots, canopies and forests”, **Journal of Theoretical Biology**, doi:10.1016/j.jtbi.2008.06.026. (2008)

BEJAN, A., MARDEN, J. H., “The constructal unification of biological and geophysical design”, **Physics of Life Reviews**, doi:10.1016/j.plrev.2008.12.002. (2008)

BEJAN, A., MARDEN, J. H., “Unifying constructal theory for scale effects in running, swimming and flying”, **The Journal of Experimental Biology**, Vol. 209, pp 238-248. (2006)

BEJAN, A., TONDEUR., D., “Equipartition, optimal allocation, and the constructal approach to predicting organization in nature”, **Revue Générale de Thermique**, Vol. 37, pp 165-180. (1998)

BURNETT, D. S., **Finite Element Analysis: From Concepts to Applications**, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, Estados Unidos da América. (1987)

CHARLES, J. D., BEJAN, A., “The evolution of speed, size and shape in modern athletics”, **The Journal of Experimental Biology**, Vol. 212, pp 2419-2425. (2009)

CHORLEY, R. J., SCHUMM, S. A., SUGDEN, D. E., **Geomorphology**, Ed. Methuen & Co. Ltda, Nova Iorque, Estados Unidos da América. (1984)

CHOW, V. T., MAIDMENT, D. R., MAYS, L. W. **Applied Hydrology**, Ed. McGraw-Hill Inc., Estados Unidos da América. (1988)

CIEPLAK, M., GIACOMETTI, A., MARITAN, A., RINALDO, A., RODRIGUEZ-ITURBE, I., BANAVAR, J., "Models of fractal river BConfs", **Journal of Statistical Physics**, Vol 91, Nº 1-2, pp 1-15. (1998)

CLIFFORD, N. J., "River Channel Processes and Landform", **The History of the Study of Landforms: Quaternary and recent processes and Forms and the Mid-Century Revolutions**, Editado por T. P. Burt, R. J. Chorley, D. Brunsten, N. J. Cox, A. S. Goudie, The Geological Society of London. (2008)

ERRERA, M. R., BEJAN, A., "Deterministic tree networks for river drainage BConfs", **Fractals**, Vol. 6, Nº 3, pp 245-261. (1998)

FALCONER, K. J., **The geometry of fractal sets**, Ed. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido. (1985)

GHODOOSI, L., "Conceptual study on constructal theory", **Energy & Conversion Management**, Vol. 45, pp 1379-1395. (2004)

GOSSELIN, L., "Optimization of tree-shaped fluid networks with size limitations", **International Journal of Thermal Sciences**, Vol. 46, pp. 434-443. (2007)

GREENBERG, M. D., **Advanced Engineering Mathematics**, 2ª Edição, Ed. Prentice-Hall, New Jersey, Estados Unidos da América. (1998)

HOWARD, A., D., "Badland morphology and evolution: interpretation using a simulation model", **Earth Surface Processes and Landforms**, Vol. 22, pp 211-227. (1997)

HUANG, H. Q., NANSON, G. C., "Hydraulic geometry and maximum flow efficiency as products of the principle of least action", **Earth, Surfaces, Process & Landforms**, Vol. 25, pp 1-16. (2000)

KUDDUSI, L., EĞRICAN, N., "A critical review of constructal theory", **Energy & Conversion Management**, Vol. 49, pp 1283-1294. (2008)

LEDEZMA, G. A., A. BEJAN, M. R. ERRERA, "Constructal tree networks for heat transfer", **Journal of Applied Physics**, Vol. 82, Nº 1, pp 89-1000. (1997)

LEOPOLD, L. B., WOLMAN, M. G., MILLER, J. P., **Fluvial Processes in Geomorphology**, Ed. W.H. Freeman and Company, San Francisco, Estados Unidos da América. (1964)

LEWINS, J., "Bejan's constructal theory of equal potential distribution", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 46, pp 1541-1543. (2003)

LORENTE, S., BEJAN, A., "Combined 'flow and strength' geometric optimization: internal structure in a vertical insulating wall with air cavities and prescribed strength", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 45, pp 3313-3320. (2002)

MANDELBROT, B. B., **The Fractal Geometry of Nature**, Ed. W. H. Freeman and Company, San Francisco, Estados Unidos da América. (1983)

MARITAN, A., RINALDO, A., RIGON, R., GIACOMETTI, A., RODRÍGUEZ-ITURBE, I., "Scaling laws for river networks", **Physical Review E**, Vol. 53, Nº 2, pp 1510-1515. (1996)

MIGUEL, A. F., "Constructal design of solar energy-based systems for buildings", **Energy and Buildings**, Vol. 40, pp 1020-1030. (2008)

MOUSSA, R., "On morphometric properties of BConfs, scale effects and hydrological response", **Hydrological Processes**, Vol. 27, pp 33-58. (2003)

NATIONAL GEOGRAPHIC, <http://science.nationalgeographic.com>, acessado em 26 de agosto de 2009.

PELLETIER, J. D., "Fractal behavior in space and time in a simplified model of fluvial landform evolution", **Geomorphology**, Vol. 91, pp 291-301. (2007)

QUEIROS-CONDE, D., BONJOUR, J., WECHSATOL, W., BEJAN, A., "Parabolic scaling of tree-shaped constructal network", **Physica A**, Vol. 384, pp 719-724. (2007)

REIS, A. H., "Constructal view of scaling laws of river BConfs", **Geomorphology**, Vol. 78, pp 201-216. (2006)

REIS, A. H., BEJAN, A., "Constructal theory of global circulation and climate", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 49, pp 1857-1875. (2006)

REIS, A. H., MIGUEL, A. F., AYDIN, M., "Constructal theory of flow architecture of the lungs", **Journal of Medical Physics**, Vol. 31, Nº 5, pp 1135-1140. (2004)

RINALDO, A., BANAVAR, J. R., MARITAN, A., "Trees, network and hydrology", **Water Resources Research**, Vol. 42, pp. 984-996. (2006)

RINALDO, A., RODRIGUEZ-ITURBE, I., RIGON, R., "Channel Networks", **Annual Review on Earth & Planetary Sciences**, Vol. 26, pp 289-327. (1998)

RODRIGUEZ-ITURBE, I., RINALDO, A., **Fractal River BConfs**, Ed. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido. (2001)

RUNIONS, A., FUHRER, M., LANE, B., FEDERL, P., ROLLAND-LAGAN, A., PRUSINKIEWICZ, P., "Modeling and visualization of leaf venation patterns", **ACM Transactions on Graphics**, Vol. 24, Nº 3, pp. 702-711. (2005)

SAVENIJE, H. H. G., "Equifinality, a blessing in disguise?", **Hydrological Processes**, Vol. 15, pp 2835-2838. (2001)

SILVA, N. S., RIBEIRO, C. A. A. S., BARROSO, W. R., RIBEIRO, P. E. Á., SOARES, V. P., SILVA, E., "Sistema de otto-codificação modificado para endereçamento de redes hidrográficas", **Revista Árvore**, Vol. 32, Nº 5, pp 891-897. (2008)

STANLEY, H. E., AMARAL, L. A. N., BULDYREV, S. V., GOLDBERGER, A. L., HAVLIN, S., LESCHHORN, H., MAASS, P., MAKSE, H. A., PENG, C. K.,

SALINGERD, M. A., STANLEY, M. H. R., VISWANATHAN, G. M., "Scaling and universality in animate and inanimate systems", **Physica A: Statistical and Theoretical Physics**, Vol. 231, N° 1-3, pp 20-48. (1996)

TAYLOR, R. P., MICOLICH, A. P., JONAS, D., "Fractal analysis of Pollock's drip paintings", **Nature**, Vol. 399, pg 422. (1999)

THORNDYCRAFT, V. R., BENITO, G., GREGORY, K. J., "Fluvial geomorphology: A perspective on current status and methods", **Geomorphology**, Vol. 98, N° 1-2, pp 2-12. (2008)

VARGAS, J. V. C., ORDONEZ, J. C., BEJAN, A., "Constructal flow structure for a PEM fuel cell", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 47, pp 4177-4193. (2004)

VARGAS, J. V. C., ORDONEZ, J. C., BEJAN, A., "Constructal PEM fuel cell stack design", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 48, pp 4410-4427. (2005)

