

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FRANCIELLY ELIZABETH DE CASTRO SILVA

OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL, DE FORMA E TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
TRELIÇADAS UTILIZANDO UM ALGORITMO HÍBRIDO

CURITIBA

2015

FRANCIELLY ELIZABETH DE CASTRO SILVA

OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL, DE FORMA E TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
TRELIÇADAS UTILIZANDO UM ALGORITMO HÍBRIDO

Dissertação aprovada com requisito parcial à obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira.

CURITIBA

2015

Silva, Francielly Elizabeth de Castro.

Otimização dimensional, de forma e topológica de estruturas treliçadas utilizando um algoritmo híbrido / Francielly Elizabeth de Castro Silva – Curitiba 2015.

141 f.: il. color; 30 cm.

Dissertação Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, 2015.

Orientador: Jucélio Tomás Pereira .

Bibliografia: p. 126-136.

1. Treliças (Construção civil). 2. Otimização estrutural. 3. Algoritmos genéticos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pereira, Jucélio Tomás. III. Título.

CDD: 624.17713

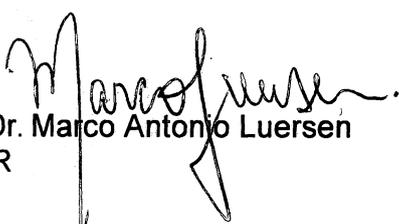
TERMO DE APROVAÇÃO

FRANCIELLY ELIZABETH DE CASTRO SILVA

OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL, DE FORMA E TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS UTILIZANDO UM ALGORITMO HÍBRIDO

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Marco Antonio Luersen
UTFPR


Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho
UTFPR


Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
UFPR

Curitiba, 20 fevereiro de 2015.

*Dedico este trabalho à Deus
e aos meus familiares.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me capacitado para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Jucélio Tomás Pereira pela orientação, atenção e contribuição para a elaboração deste trabalho.

À minha família, que me deu todo o apoio nesta jornada, especialmente à minha mãe Izilda, que me deu todo o suporte para enfrentar este desafio.

Aos meus amigos, que sempre me apoiaram e proporcionaram momentos de alegria e distração.

Aos meus colegas e a todo o grupo do Laboratório de Vibrações e Mecânica dos Sólidos Computacional da UFPR, que contribuíram e foram fundamentais nesta caminhada.

À Universidade Federal do Paraná (UFPR) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PGMEC), pela oportunidade e por propiciarem as condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás PRH, ANP e MCTI, bem como da Petrobras.

Tudo quanto fizerdes,
fazei-o de todo o coração
como para o Senhor
e não para homens.

Colossenses 3:23

Ao que está assentado sobre o trono,
e ao Cordeiro, seja o louvor,
e a honra, e a glória,
e o domínio pelos séculos dos séculos.

Apocalipse 5:13b

RESUMO

As estruturas treliçadas desempenham um importante papel na economia, uma vez que frequentemente levam a soluções em que é utilizado menos material, além de possuírem inúmeras aplicações. O objetivo principal do presente estudo é contribuir no desenvolvimento de uma técnica que visa projetar essas estruturas de forma ótima. Este texto discute um problema de otimização estrutural dimensional, de forma e de topologia, que busca a minimização do peso de treliças tridimensionais, considerando como restrições a falha material, a falha por instabilidade estrutural local (flambagem de cada barra) e deslocamentos nodais. A estrutura pode ser submetida a múltiplos casos de carregamento. A configuração ótima é obtida pela aplicação de uma técnica híbrida de otimização a qual utiliza Algoritmos Genéticos (AG), com o intuito de aproximar o ponto de mínimo global e, posteriormente, um método de Programação Não Linear para realizar uma busca local. A implementação do AG considera abordagens adaptativas de penalização das restrições, de cruzamento e mutação. Como variáveis de projeto, têm-se as áreas das seções transversais de cada elemento e algumas coordenadas nodais móveis. As variáveis de área podem variar continuamente ou de forma discreta (a fim de utilizar elementos disponíveis comercialmente) e as variáveis de coordenadas dos nós móveis variam continuamente. A fim de reduzir o número de variáveis de projeto e manter possíveis simetrias da estrutura, são considerados agrupamentos de elementos. A metodologia proposta foi implementada no software Matlab[®] e foram avaliados seis casos encontrados na literatura, evidenciando que a mesma é promissora.

Palavras-chave: Estruturas treliçadas. Otimização estrutural dimensional. Otimização estrutural de forma. Otimização estrutural topológica. Algoritmos Genéticos. Algoritmo híbrido.

ABSTRACT

Truss structures have an important role in the economy, since they often lead to solutions with less material, besides having numerous applications. Optimal design of these structures is the main objective of the present study. It discusses a problem of sizing, shape and topology structural optimization, which seeks to minimize the weight of three-dimensional trusses, considering as constraints the material failure, the failure by local structural instability (buckling of each bar) and the nodal displacements. The structure may be subjected to multiple load cases. The optimum truss configuration is obtained by applying a hybrid optimization technique, which uses Genetic Algorithms (GA) to approach the global minimum point and, subsequently, a Nonlinear Programming to perform a local search. The implementation of GA considers adaptive approaches to penalize the constraints and to crossover and mutation. The design variables are the areas of the cross sections of each element and some movable nodal coordinates. The variable area may vary continuously or discretely (in order to use commercially available elements), and whereas the variables of movable coordinates of the nodes vary continuously. In order to reduce the number of design variables and maintain possible structure symmetries, grouping of elements are considered. The proposed methodology is implemented in Matlab and employed to evaluate six cases found in the literature, showing that it is promising.

Keywords: Truss structures. Sizing optimization. Shape optimization. Topology optimization. Genetic Algorithms. Hybrid algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de: (a) otimização de estrutura discreta, (b) otimização de estrutura contínua.	25
Figura 2 – Exemplo de uma estrutura na qual ocorreu os três tipos básicos de otimização: (a) dimensional, (b) de forma e (c) topológica.....	31
Figura 3 – Limites impostos no processo de otimização de forma (a) somente nos nós previamente determinados, (b) globalmente, para todos os nós.....	35
Figura 4 – Tipos de <i>ground structure</i> (a) conexão dos nós primária, (b) conexão dos nós.....	35
Figura 5 – (a) Estrutura inicial com uma <i>ground-structure</i> e (b) solução ótima da estrutura.....	36
Figura 6 – Tipos de filhos: (a) filho por elitismo, (b) por cruzamento e (c) por mutação.....	53
Figura 7 – Fluxograma de algoritmos genéticos.....	53
Figura 8 – Indivíduo binarizado.	54
Figura 9 – Seleção via método da roleta.....	55
Figura 10 – Processo de cruzamento entre dois indivíduos.....	56
Figura 11 – Formas de realizar uma mutação (a) <i>Flipping</i> , (b) <i>Interchanging</i> e (c) <i>Reversing</i>	57
Figura 12 – Elemento finito linear de barra no sistema local de coordenadas.	59
Figura 13 – Elemento finito posto no sistema global de coordenadas.	61
Figura 14 – Sistema global de referência.....	61
Figura 15 – Exemplo de aplicação da função de penalização das restrições, (a) com as funções objetivo original da população e (b) com a função penalizada.....	69
Figura 16 – (a) Representação da probabilidade de cruzamento e (b) de mutação..	71
Figura 17 – Exemplo de tipo de mecanismo com duas barras alinhadas (a) estrutura inicial com a barra que evita o mecanismo, (b) mecanismo criado com a eliminação da barra e (c) solução para eliminar o mecanismo.....	72
Figura 18 – Exemplo de tipo de mecanismo com duas barras quase alinhadas (a) estrutura inicial com a barra que evita o mecanismo, (b) mecanismo criado com a eliminação da barra e (c) solução para eliminar o mecanismo.....	73
Figura 19 – Exemplo de estrutura para a identificação de mecanismo.....	73

Figura 20 – Exemplo de uma situação onde os nós podem ser colapsados.....	74
Figura 21 – Exemplo de situações para o colapso de nós, (a) condição de contorno de vínculo em ambos os nós e b) em somente um dos nós.....	75
Figura 22 – Exemplo de situações para o colapso de nós quando ambos possuem condição de contorno de força (Neuman).	75
Figura 23 – Fluxograma geral do problema de otimização estrutural de treliça utilizando algoritmo híbrido.....	76
Figura 24 – Função para validação do Algoritmo Genético (a) com vista em perspectiva e (b) com vista frontal.....	78
Figura 25 – Curvas de níveis da função e solução obtida na validação do AG.....	78
Figura 26 – Plotagem da função de validação do AG, com o corte na restrição g_4 . ..	79
Figura 27 – Representação da região viável e solução obtida na validação do AG, considerando restrições impostas ao problema.	79
Figura 28 – Estrutura para o caso de 10 barras.....	82
Figura 29 – Estrutura final para a otimização dimensional do caso de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.....	83
Figura 30 – Curva de convergência do algoritmo para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.	84
Figura 31 - Estrutura final para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.....	85
Figura 32 – Curva de convergência do algoritmo para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.	85
Figura 33 – Topologia ótima da treliça de 10 barras (a) com as áreas variando conforme a lista 1 e (b) lista 2.	86
Figura 34 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma, do primeiro caso, da treliça de 10 barras (a) utilizando somente AG e (b) utilizando PNL.....	88
Figura 35 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.	89
Figura 36 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma, do segundo caso, da treliça de 10 barras, (a) utilizando somente o AG e (b) utilizando o PNL.....	89

Figura 37 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma, do segundo caso, da treliça de 10 barras.	90
Figura 38 – Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.	91
Figura 39 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do segundo caso, da treliça de 10 barras e (b) com um ajuste das coordenadas móveis.	93
Figura 40 – Treliça plana de 15 barras.....	93
Figura 41 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 15 barras utilizando somente AG e (b) utilizando PNL.	94
Figura 42 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 15 barras.....	94
Figura 43 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 15 barras e (b) com um ajuste das coordenadas móveis via PNL.....	96
Figura 44 – Treliça plana de 18 barras.....	98
Figura 45 – (a) Estrutura final para a otimização dimensional da treliça de 18 barras via AG e (b) via PNL a partir da solução obtida pelo AG.....	99
Figura 46 – Curva de convergência do algoritmo de otimização dimensional da treliça de 18 barras.....	99
Figura 47 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente, somente via AG.	101
Figura 48 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente, via PNL a partir da solução de AG.	101
Figura 49 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente.	101
Figura 50 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 1, considerando somente AG.....	103
Figura 51 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 1, considerando PNL a partir da solução obtida pelo AG.	103

Figura 52 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.	103
Figura 53 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 2, considerando somente AG.....	104
Figura 54 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 2, considerando PNL a partir da solução obtida pelo AG.	104
Figura 55 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.	104
Figura 56 – Treliça espacial de 25 barras.	105
Figura 57 – Estrutura final para a otimização dimensional da treliça de 25 barras.	106
Figura 58 – Curva de convergência do algoritmo para o problema de otimização dimensional da treliça de 25 barras.....	106
Figura 59 – Topologia ótima da treliça de 25 barras.	107
Figura 60 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras, somente via AG.....	109
Figura 61 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras, via PNL a partir da solução obtida pelo AG.....	109
Figura 62 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras.....	109
Figura 63 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 25 barras e (b) com um ajuste das coordenadas móveis via PNL.....	111
Figura 64 – Torre treliçada de 47 barras.	112
Figura 65 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras, somente via AG, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.	114
Figura 66 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras, via PNL a partir da solução obtida pelo AG, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.	114
Figura 67 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras.....	115

Figura 68 – Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da torre de 47 barras, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.	116
Figura 69 – Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da torre de 47 barras, com um ajuste das coordenadas móveis via PNL, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.....	117
Figura 70 – Domo de 120 barras.....	118
Figura 71 – Estrutura final para a otimização dimensional do domo de 120 barras.	119
Figura 72 – Curva de convergência do algoritmo para a otimização dimensional do domo de 120 barras.	119
Figura 73 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras, somente via AG.....	121
Figura 74 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras, via PNL a partir da solução obtida pelo AG.....	121
Figura 75 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras.	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Seções transversais disponíveis conforme a lista 6 (norma AISC-ASD).	81
Tabela 2 - Resultados para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.....	83
Tabela 3 – Resultados para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.....	84
Tabela 4 – Resultados para a otimização topológica da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.....	86
Tabela 5 – Resultados para a otimização topológica da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a Lista 2.	87
Tabela 6 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.	88
Tabela 7 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma, do segundo caso, da treliça de 10 barras.	90
Tabela 8 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.	91
Tabela 9 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do segundo caso, da treliça de 10 barras.	92
Tabela 10 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 15 barras.	95
Tabela 11 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 15 barras.....	97
Tabela 12 – Resultados para o caso de 18 barras considerando otimização dimensional.	99
Tabela 13 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente.	100
Tabela 14 – Resultados das otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme as listas 1 e 2.	102
Tabela 15 – Carregamento para a estrutura de 25 barras.	105
Tabela 16 – Resultados para o problema de otimização dimensional da treliça de 25 barras.	106

Tabela 17 – Resultados para o problema de otimização topológica da treliça de 25 barras.	107
Tabela 18 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras	108
Tabela 19 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 25 barras.....	110
Tabela 20 – Múltiplos casos de carregamentos para a torre de 47 barras.....	111
Tabela 21 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras	113
Tabela 22 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica da torre de 47 barras.....	116
Tabela 23 – Resultados para a otimização dimensional do domo de 120 barras. ..	119
Tabela 24 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras.	120

LISTA DE ABREVIATURAS

AG	Algoritmos Genéticos
AISC-ASD	<i>American Institute of Steel Construction – Allowable Strength Design</i>
FCD	<i>Fully Constrained Design</i>
FSD	<i>Fully Stressed Design</i>
Kip	Unidade de força no sistema inglês (<i>kilopound</i>) equivalente a 4448,22 Newtons
Ksi	Unidade de tensão no sistema inglês (<i>kilopound</i> por polegada ao quadrado) equivalente a 6894757,29 pascais
Lb	Unidade de peso no sistema inglês (libra) equivalente a 0,45359237 quilogramas
MEF	Método dos Elementos Finitos
ND	Não disponível pelos autores
PNL	Programação Não-Linear
Pol	Unidade de comprimento no sistema inglês (polegada) equivalente a $2,54 \cdot 10^{-2}$ metros
Pol ²	Unidade de área no sistema inglês (polegada quadrada) equivalente a $6,4516 \cdot 10^{-4}$ metros quadrados
Pol ³	Unidade de volume no sistema inglês (polegada cúbica) equivalente a $1,6387 \cdot 10^{-5}$ metros cúbicos
SA	<i>Simulated Annealing</i>
SODA	<i>Structural Optimization Design and Analysis</i>
TLBO	<i>Teaching-Learning based optimization</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

\mathbf{A}	Vetor que contém a área de todos os elementos da estrutura
A_l	Limite inferior de área
A_u	Limite superior de área
$A^{(e)}$	Área do elemento
A_e^+	Área nova quando aplicado o método FSD
$f A_e^+$	Área nova para o critério de flambagem quando aplicado o método FSD
$m A_e^+$	Área nova para o critério de falha material quando aplicado o método FSD
B	Forma bilinear associada à equação diferencial
B	Conjunto de números reais, ou de valores discretos ou a união de conjuntos de naturezas diferentes
C	Coeficiente para o cálculo da flambagem que depende da geometria do elemento
$cons$	Corrente restrição avaliada
e	Corrente elemento
\mathbf{e}_i	Vetores unitários da base do sistema global de coordenadas
E	Módulo de elasticidade (módulo de Young)
$E^{(e)}$	Módulo de elasticidade (módulo de Young) do elemento
\mathbf{f}	Vetor de forças externas nodais aplicadas à estrutura
$\bar{\mathbf{f}}$	Vetor de forças externas nodais modificado pela aplicação das condições de contorno de Dirichlet
f_l	Mínima função objetivo da população
f_u	Máxima função objetivo da população
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
$f(\mathbf{x}^*)$	Função objetivo avaliada no vetor de variáveis de projeto candidato á mínimo ou máximo global
$\mathbf{F}^{(e)}$	Vetor de forças nodais elementar no sistema de coordenadas global

$\bar{\mathbf{F}}^e$	Vetor de forças nodais elementar no sistema de coordenadas local
fit_i	Aptidão do i-ésimo indivíduo da população
fit_l	Menor aptidão da população
fit_m	Aptidão média da população
fit_u	Maior aptidão da população
gl	Grau de liberdade para a avaliação da restrição de deslocamentos nodais
g_l	Mínima restrição violada
g_m	Média das restrições violadas
g_u	Máxima restrição violada
$g^{(cons)}$	Corrente restrição a ser avaliada
$g_i(\mathbf{x})$	Restrições de desigualdade
$GLsR$	Número total de graus de liberdade associados aos nós restritos ao deslocamento
$h_j(\mathbf{x})$	Restrições de igualdade
ino	Corrente nó movível a ser avaliado
$I^{(e)}$	Momento de inércia da seção transversal do elemento
k	k-ésimo grau de liberdade associado ao nó movível ino
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
$\bar{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez final modificada pela aplicação das condições de contorno de Dirichlet
$\mathbf{K}^{(e)}$	Matriz de rigidez elementar no sistema de coordenadas global
$\bar{\mathbf{K}}^e$	Matriz de rigidez elementar no sistema de coordenadas local
k_{ij}^{no}	Matriz de rigidez que contém todos os graus de liberdade do nó no
k_{int}	Rigidez intermediária que o nó no possui
$k_{máx}$	Maior rigidez que o nó no possui
k_{min}	Menor rigidez que o nó no possui
k_{tol}	Tolerância de rigidez predeterminada para a verificação de mecanismo
l	Funcional linear associado aos termos de carregamento.
$L^{(e)}$	Comprimento do elemento
m	Número total de restrições de desigualdade

M	Massa total da estrutura
n	Número de parâmetro codificados das variáveis de projeto
n	Número de variáveis de projeto
N	Vizinha do vetor de variáveis de projeto candidato á mínimo/máximo global
no	Nó a ser avaliado o mecanismo
N_c	Número total de restrições violadas pelo indivíduo
$Nels$	Número total de elementos da estrutura
$NCons$	Número de restrições do problema de otimização
$NGLm$	Número total de graus de liberdade associados a todos os nós móveis
$NNom$	Número total de nós móveis do processo de otimização de forma
ρ	Precisão da representação binária
ρ	Número de restrições de igualdade
P	Somatório das penalizações associadas às restrições violadas
ρ_c	Probabilidade de cruzamento
ρ_m	Probabilidade de mutação
P_c	Probabilidade de cruzamento adaptativo
P_{cons}	Penalização associada a restrição avaliada
P_m	Probabilidade de mutação adaptativa
$q(x)$	Termo de carregamento distribuído de dominio
$[R]^{(e)}$	Matriz de transformação de coordenadas
S	Conjunto viável
u	Solução do problema de Elementos Finitos
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos globais de todos os nós
u_p	Deslocamento limite prescrito
$\mathbf{u}^{(e)}$	Vetor de deslocamentos nodais elementar no sistema de coordenadas global
$\bar{\mathbf{u}}^e$	Vetor de deslocamentos nodais elementar no sistema de coordenadas local
$\bar{u}_1^{(e)}$	Deslocamento do nó 1 de um elemento no sistema de coordenadas local
$\bar{u}_2^{(e)}$	Deslocamento do nó 2 de um elemento no sistema de coordenadas local
$\mathbf{u}_1^{(e)}$	Deslocamento do nó 1 de um elemento no sistema de coordenadas global
$\mathbf{u}_2^{(e)}$	Deslocamento do nó 2 de um elemento no sistema de coordenadas global

$u_{m\acute{a}x}$	Máximo deslocamento da estrutura
U	Conjunto de funções admissíveis
V	Conjunto de funções das variações admissíveis
V_p	Variável de projeto codificada
w	Variação admissível qualquer
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto
\mathbf{X}	População
$\bar{\mathbf{x}}$	Deslocamentos nodais ainda desconhecidos na estrutura.
\mathbf{x}^*	Vetor de variáveis de projeto candidato á mínimo ou máximo global
\mathbf{x}_i	Vetor de variáveis de projeto inicial
\mathbf{x}_{i+1}	Vetor de variáveis de projeto da próxima iteração
\mathbf{X}_m	Vetor das coordenadas nodais móveis
$X_{mk}^{(ino)}$	Corrente coordenada do nó móvel (<i>ino</i>) a ser avaliada na direção <i>k</i>
$X_{mk}^{(ino)l}$	Limite inferior de coordenada que o nó móvel (<i>ino</i>) pode se movimentar na direção <i>k</i>
$X_{mk}^{(ino)u}$	Limite superior de coordenada que o nó móvel (<i>ino</i>) pode se movimentar na direção <i>k</i>

Alfabeto Grego

α	Fator de relaxação da área nova aplicado ao método FSD
δ	Medida da vizinhança
ΔL	Variação entre o comprimento final e o inicial do elemento
$\varepsilon^{(e)}$	Deformações elementares
λ	Vetor adjunto para o deslocamento restrito
$\mathbf{\Lambda}^{(e)}$	Vetor dos cossenos diretores
ρ	Densidade do material
σ_t	Tensão máxima admissível em tração
σ_c	Tensão máxima admissível em compressão
$\sigma^{(e)}$	Tensão do elemento
$\sigma_F^{(e)}$	Tensão crítica de flambagem de Euler do elemento

- Φ_i Corrente função objetivo penalizada a ser avaliada
- Φ_l Mínima função objetivo penalizada da população
- Φ_u Máxima função objetivo penalizada da população
- $\Phi(x)$ Função objetivo penalizada
- Ψ Função resposta do problema

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	OBJETIVOS	27
1.1.1	Objetivos gerais	27
1.1.2	Objetivos específicos	28
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	28
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
2.1	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	29
2.1.1	Definição matemática de um problema geral de otimização	32
2.1.2	Otimização estrutural de forma	34
2.1.3	Otimização estrutural topológica	35
2.1.4	Otimização estrutural dimensional, de forma e topológica	37
2.2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM ALGORITMOS GENÉTICOS	38
2.2.1	Algoritmos Genéticos (AG)	39
2.2.2	Aplicação de AG em problemas com restrição	39
2.2.3	Abordagem adaptativa para mutação e cruzamento	41
2.3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM ALGORÍTMOS HÍBRIDOS	42
2.3.1	Otimização estrutural híbrida com um algoritmo determinístico seguido de AG	43
2.3.2	Otimização estrutural híbrida com AG seguido de um algoritmo determinístico	44
2.4	GRUPO DE BARRAS	45
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	47
3.1	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	47
3.1.1	Definições de mínimo local e global	47
3.2	PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR	49
3.3	ALGORITMOS GENÉTICOS	50
3.3.1	Analogia entre o AG e a biologia	51
3.3.2	Codificação dos indivíduos	54
3.3.3	Seleção	55
3.3.4	Operador de cruzamento	56
3.3.5	Operador de mutação	56
3.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS	58
3.4.1	Treliça tridimensional	60
3.4.2	Pós-processamento	63
4	PROBLEMA PROPOSTO	64
4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL	64
4.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	67
4.2.1	Penalização Adaptativa das Restrições	68
4.2.2	Aptidão (<i>Fitness</i>)	69
4.2.3	Operadores Adaptativos de Cruzamento e Mutação	70
4.3	METODOLOGIA COMPUTACIONAL	71

4.3.1 Metodologia para o problema de otimização topológica	72
5 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	77
5.1 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO	77
5.2 ABORDAGENS DISCUTIDAS NOS EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	79
5.3 LISTAS DE ELEMENTOS (BARRAS/TUBOS) DISCRETOS	80
5.4 TRELIÇA PLANA DE 10 BARRAS	81
5.4.1 Otimização dimensional.....	82
5.4.2 Otimização topológica	86
5.4.3 Otimizações dimensional e de forma.....	87
5.4.4 Otimizações dimensional, de forma e topológica.....	91
5.5 TRELIÇA PLANA DE 15 BARRAS	93
5.5.1 Otimizações dimensional e de forma.....	94
5.5.2 Otimizações dimensional, de forma e topológica.....	96
5.6 TRELIÇA PLANA DE 18 BARRAS	98
5.6.1 Otimização dimensional.....	98
5.6.2 Otimizações dimensional e de forma.....	100
5.7 TRELIÇA ESPACIAL DE 25 BARRAS.....	105
5.7.1 Otimização dimensional.....	105
5.7.2 Otimização topológica	107
5.7.3 Otimizações dimensional e de forma.....	108
5.7.4 Otimizações dimensional, de forma e topológica.....	110
5.8 TORRE DE 47 BARRAS.....	111
5.8.1 Otimizações dimensional e de forma.....	111
5.8.2 Otimizações dimensional, de forma e topológica.....	115
5.9 DOMO DE 120 BARRAS	117
5.9.1 Otimização dimensional.....	117
5.9.2 Otimizações dimensional e de forma.....	120
6 CONCLUSÕES.....	123
REFERÊNCIAS.....	126
APÊNDICE A – Método <i>Fully Stressed Design</i>.....	137
APÊNDICE B – Análise de Sensibilidade	139

1 INTRODUÇÃO

Cada vez mais a competitividade do mercado tem ocupado uma grande importância nas empresas motivando reduções de custos, porém sem diminuir o desempenho e a confiabilidade de seus produtos. Devido a estas exigências, há a necessidade de projetos de alta performance.

As metodologias de projeto convencionais, muitas vezes são baseadas em processos iterativos, que podem levar a resultados errôneos e perigosos, sem garantias de que a solução encontrada seja a melhor do ponto de vista econômico. Para obter um projeto ótimo de um sistema qualquer é necessário identificar as variáveis de projeto, a função de mérito que indica o nível de excelência de uma dada configuração e as restrições impostas ao mesmo. As técnicas de otimização são um conjunto de ferramentas numérico/matemáticas que possibilitam a obtenção de uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções (no caso de otimização multi-objetivo) (ARORA, 2007).

Na engenharia estrutural mais especificamente, há a exigência da busca de mecanismos para obter projetos estruturais que disponham elementos suficientemente capazes de suportar os carregamentos solicitados sem risco à segurança. A otimização estrutural é um método numérico tradicionalmente aplicado a dois tipos de problemas: otimização de estruturas contínuas e otimização de estruturas discretas (BENDSOE e SIGMUND, 2003). A diferença entre esses dois casos pode ser representada na Figura 1.

A otimização de estruturas discretas é o objeto de estudo do presente trabalho. Mais precisamente, este trabalho trata da otimização de estruturas treliçadas, que são estruturas estáveis compostas por barras ou tubos flexíveis submetidas apenas à forças axiais e conectadas em suas extremidades por articulações. Tais estruturas são muito importantes devido ao baixo peso e à facilidade na montagem, desempenhando um papel imprescindível na economia, uma vez que frequentemente levam a soluções em que é utilizado menos material. Em virtude dessas vantagens, essas estruturas possuem inúmeras aplicações, tais como pontes, torres, guindastes, estruturas *offshore*, suportes de telhado, estruturas espaciais *etc.*. Mais conceitos sobre estruturas do tipo treliças podem ser encontrados em Zuk (1963). Além disso, diversos autores apresentam técnicas

analíticas e numéricas para avaliação de tensões e deslocamentos nessas estruturas, como Livesley (1975), McCormac e Nelson (1996), McGuire *et al.* (1999) e Hutton (2003).

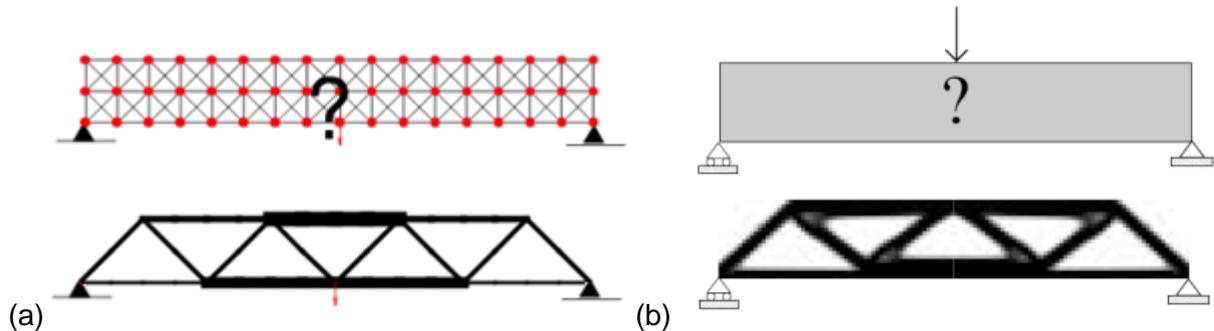


Figura 1 – Exemplos de: (a) otimização de estrutura discreta, (b) otimização de estrutura contínua.

FONTE: (a) TORII (2008) e (b) SIGMUND (2001).

Os problemas de otimização estrutural podem ser agrupados em três categorias principais: otimização dimensional, de forma (ou geométrica) e topológica. A OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL de estruturas discretas, consiste na modificação das dimensões das seções dos elementos. Em estruturas treliçadas, esta técnica se constitui em um procedimento automatizado de alteração da área da seção transversal de cada elemento.

No processo de OTIMIZAÇÃO DE FORMA de estruturas discretas, algumas posições nodais podem ser alteradas, sendo que em geral estas são restritas por certos limites que são definidos por um conjunto de posições admissíveis (BENOIT e RAJAN, 2013). A geometria ótima de treliças foi estudada, entre outros, por Dobbs e Felton¹ (1969, citado por Cheng e Guo, 1997; Kirsch, 1990; Ohsaki e Katoh, 2005) e por Vanderplaats e Moses (1972) que buscam um projeto de mínimo peso com restrições de tensão e de flambagem local.

A OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA de estruturas treliçadas surgiu no início da década de 1960 com o resultado clássico de um problema de otimização de mínimo peso com carregamento único e restrição de tensão (DORN *et al.*², 1964, *apud* ROZVANY, 1996; ZHOU, 1996 e HEMP, 1973). A mesma consiste na eliminação

¹ DOBBS, M. W.; FELTON, L.P. Optimization of truss geometry. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 95, p. 2105-2118, 1969.

² DORN, W. S.; GOMORY, R. E.; GREENBERG, H. J. Automatic design of optimal structures. **Journal de Mecanique**, v. 3, p. 25-52, 1964.

dos elementos pouco solicitados, ou seja, elementos cujas áreas são tão pequenas a ponto de poderem ser retirados da estrutura. Pode ser referido Bendsoe (1995) na introdução à otimização topológica de estruturas discretas e contínuas.

Geralmente, os problemas de otimização são resolvidos através de algoritmos de otimização determinísticos e/ou estocásticos. Os métodos determinísticos, via de regra, exigem o conhecimento da primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Já nos algoritmos estocásticos, dado um ou mais valores ou vetores de entrada, a configuração ótima (ou quase ótima) é obtida sendo guiada por alguns processos randômicos e, em geral, imita algum processo de evolução da natureza. A combinação de um algoritmo evolucionário com um algoritmo determinístico é chamado de algoritmo híbrido (KIDO *et al.*, 1994), que frequentemente apresenta-se mais hábil para lidar com problemas de otimização de difícil combinatória (SARKER *et al.*, 2003).

Os algoritmos de programação não linear (PNL) fazem parte dos algoritmos determinísticos, nos quais é possível encontrar uma variedade de técnicas para solução de problemas irrestritos, com restrições laterais, com restrições genéricas de desigualdade e restrições genéricas de igualdade.

Dentre os métodos estocásticos, encontra-se o método dos Algoritmos Genéticos (AG), entre outros, desenvolvido inicialmente por John Henry Holland³ no início da década de 1960 (citado por HAJELA e LEE, 1995; OHSAKI, 1995). O AG opera num conjunto de soluções aplicando conceitos da evolução natural de Charles Darwin, para produzir conjuntos de soluções cada vez melhores. Este algoritmo simula os processos naturais da evolução de espécies, através de operadores básicos da genética tais como seleção, cruzamento, mutação, entre outros (GOLDBERG, 1989; MITCHELL, 1996; BÄCK e SCHWEFEL, 1992). Além disso, o AG tem a possibilidade de operar tanto com variáveis contínuas como com variáveis discretas.

A maioria dos métodos matemáticos e numéricos destinados ao projeto ótimo de treliças é baseada em técnicas que consideram o espaço de busca contínuo, quando na realidade o problema é, na maioria das vezes, discreto. Essa característica se justifica pelo fato de que, em geral os elementos disponíveis no

³ HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, EUA, 1975.

mercado possuem propriedades predefinidas (diâmetro, espessura, área *etc*). Esses métodos que tratam as variáveis como contínuas são geralmente simples, eficientes e rápidos, mas conduzem a dimensões não disponíveis comercialmente. Entretanto, segundo Fletcher (1987) não existe garantia de que esse procedimento produza bons resultados quando os valores das variáveis discretas estão muito espaçados. Portanto, é necessário empregar um método de otimização, mais robusto, que seja capaz de lidar com esses tipos de problemas, proporcionando uma melhor solução.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos gerais

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia que busca a minimização do peso de estruturas do tipo treliça, podendo admitir uma estrutura composta por elementos com seções comerciais (variáveis discretas) ou que variam continuamente, considerando como restrições a falha material (tração e compressão), falha por instabilidade estrutural local (flambagem local de cada barra) e deslocamentos nodais, e com a possibilidade de ser submetida a múltiplos casos de carregamentos.

São utilizadas como variáveis de projeto a área da seção transversal das barras e as coordenadas de alguns nós predeterminados que, por sua vez, podem ser reposicionados numa região delimitada admissível. Num pós-processamento, as barras que possuem a área igual ao valor mínimo disponível no catálogo (caso em que são utilizadas variáveis discretas), ou tenderem à um mínimo valor estipulado (caso em que as áreas podem variar de forma contínua), podem ser eliminadas da estrutura. Tem-se, portanto, um problema de otimização estrutural dimensional, de forma e de topologia. A configuração ótima é obtida pela aplicação de uma técnica híbrida de otimização, na qual são utilizados os Algoritmos Genéticos com o intuito de aproximar o ponto de mínimo global e, posteriormente, um método de programação não linear para refinar essa solução na busca do mínimo global exato.

1.1.2 Objetivos específicos

O objetivo geral pode ser detalhado nos seguintes objetivos específicos:

1. Desenvolver uma metodologia para o problema de otimização dimensional, de forma e topológica de treliças.
2. Implementar computacionalmente um código com a metodologia apresentada.
3. Validar a metodologia através de comparação com casos clássicos encontrados na literatura.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

Os objetivos delineados anteriormente são desenvolvidos conceitualmente ao longo do corrente texto utilizando a estrutura apresentada na sequência.

No corrente capítulo, é apresentado o problema de otimização estrutural dimensional, de forma e topológica, utilizando um algoritmo híbrido, mostrando sua importância e relevância para o desenvolvimento de projetos de estruturas treliçadas. Também são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

No segundo Capítulo têm-se a revisão bibliográfica, onde são explanadas as teorias e o histórico (estado da arte) de estudos sobre otimização estrutural, Algoritmos Genéticos, algoritmo híbrido, juntamente com trabalhos que relacionem estes temas e suas aplicações em projetos e análises estruturais.

No terceiro Capítulo é apresentada a fundamentação teórica relacionada ao tema proposto. No quarto Capítulo é apresentado o problema de otimização a ser resolvido e a formulação utilizada no Algoritmo Genético. No quinto Capítulo são apresentados os resultados obtidos através da metodologia proposta, onde são comparados com os trabalhos disponíveis na literatura. Finalmente no sexto Capítulo são analisados e discutidos os resultados obtidos, através de uma conclusão.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura referente ao estado da arte e aos tópicos de relevância deste trabalho.

2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Com a busca por produtos cada vez mais baratos e eficazes, concebidos em um reduzido intervalo de tempo, têm-se algumas técnicas que não dependam unicamente de normas técnicas, da experiência, intuição e dos conhecimentos do projetista. Segundo Pereira (2001), atualmente procura-se organizar essas técnicas por meio de metodologias, as quais em geral necessitam de ferramentas numérico/matemáticas para a solução de problemas de engenharia.

Nos métodos convencionais de projeto não existem garantias de que a solução encontrada seja a melhor do ponto de vista econômico. Nesse sentido, a melhor maneira de conceber um projeto ótimo, é através de processos iterativos, dados os parâmetros corretos e necessários para a concepção do mesmo.

Do ponto de vista prático de engenharia, o projeto ótimo de estruturas pode incluir muitos aspectos, tais como custo de produção, energia, custo do material, montagem, massa, valores limites para as tensões e os deslocamentos *etc.*, que podem ser escritos na forma de uma análise de custo extensa (DOMINGUEZ *et al.*, 2006).

Segundo Rozvany (1992), a otimização estrutural tem por principal objetivo a minimização ou maximização de uma função objetivo sujeita a restrições geométricas e/ou comportamentais. Como restrições geométricas podem ser citadas as restrições no comprimento e variações prescritas de seções transversais ao longo de determinados segmentos. Por outro lado, entende-se como restrições comportamentais valores associados à resposta da estrutura como as tensões, os deslocamentos, a carga de flambagem, frequências naturais *etc.*

Dessa maneira, a otimização estrutural torna-se uma opção atraente para o projeto de novas estruturas, pois resultará em uma criação racional de um projeto estrutural que é melhor que todos os projetos possíveis, considerando uma medida de mérito prescrita e um determinado conjunto de limitações.

O problema de otimização estrutural vem sendo objeto de estudo de vários pesquisadores e teve início com Michell (1904) que buscou minimizar o volume de estruturas formadas por barras (treliças) sujeitas a carregamentos aplicados em determinados pontos no domínio e com restrições de deslocamentos de alguns pontos (nós). Seus resultados são referências na área de otimização estrutural.

Naquela época, esses estudos foram considerados muito teóricos e sem aplicações práticas. Somente na metade do século, com o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF) e da programação matemática, foi possível a criação de técnicas para a solução dos problemas de otimização estrutural, podendo assim processar grandes quantidades de dados rapidamente, beneficiando a engenharia de projeto e os processos de otimização (ARORA, 2004). Antes desse período eram estudados apenas casos baseados em soluções analíticas de um conjunto de equações diferenciais.

De acordo com a bibliografia, a área de otimização estrutural pode ser dividida em três grandes categorias (KIRSH 1989; HAFTKA e GRANDHI 1986): otimização dimensional, de forma (ou geométrica) e topológica.

Em um típico problema de otimização dimensional (*sizing optimization*), a forma é fixa ao longo do processo de busca da melhor configuração e as variáveis de projeto são algumas dimensões geométricas das barras como a espessura, a altura e a área (STOLPE, 2003; STAINKO, 2006a). A Figura 2a, mostra uma representação desse processo de otimização, em que somente a área dos elementos estão sendo alteradas.

A otimização de forma (*shape optimization*), segundo Pedersen (2003), visa determinar a forma ótima dos contornos da estrutura, sendo aplicada, por exemplo, a problemas de concentração de tensões, no caso de estruturas contínuas, e à modificação do posicionamento dos nós de uma estrutura treliçada (Figura 2b). Em ambas, otimização de forma e otimização dimensional, a formulação do problema não permite a introdução ou remoção dos elementos e nem dos nós que constituem a estrutura, o que caracteriza o processo de otimização topológica (*topology optimization*). Uma representação desse tipo de processo pode ser observada na Figura 2c.

A seleção de uma topologia ideal é, sem dúvida, um problema de difícil resolução. Nesse caso, dados um conjunto de apoios, cargas aplicadas e nós num domínio estrutural, o problema é a determinação da melhor conectividade dos

elementos e de suas características geométricas (área da seção transversal, momento de inércia *etc.*), que resultaria em uma estrutura ótima seguindo algum critério de mérito e também satisfazendo as restrições que o projeto impõe.

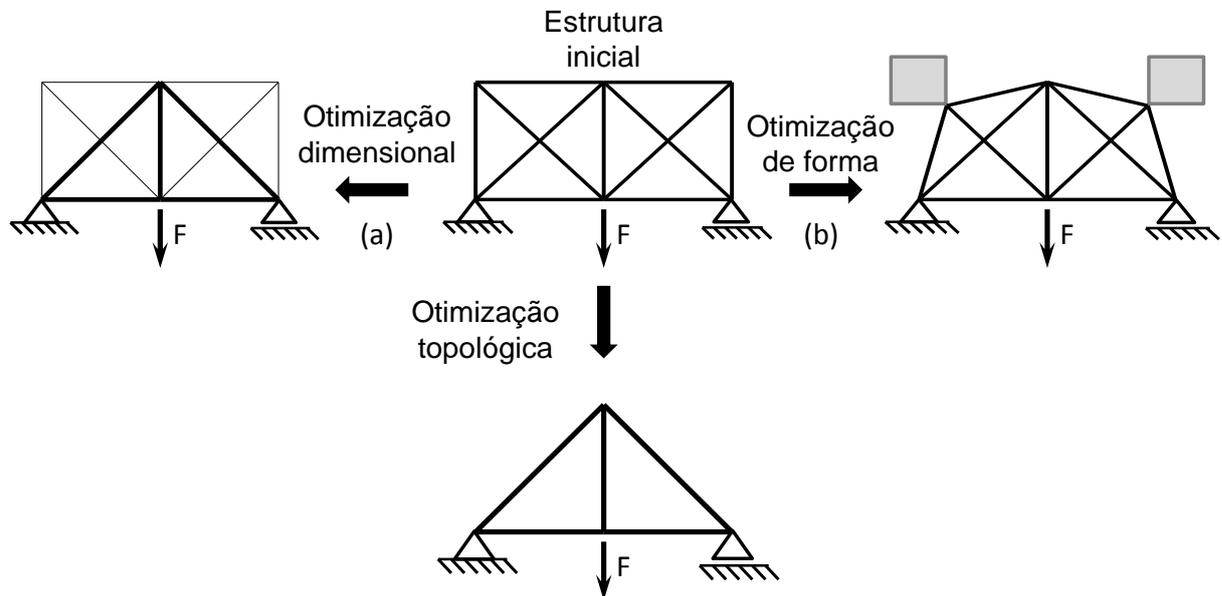


Figura 2 – Exemplo de uma estrutura na qual ocorreu os três tipos básicos de otimização: (a) dimensional, (b) de forma e (c) topológica.

Os métodos formais de otimização estrutural têm evoluído como consequência de muitos trabalhos desenvolvidos e pesquisas nesse ramo. Dado o aumento da disponibilidade de *hardwares* de computador mais eficientes, estes desenvolvimentos oferecem uma capacidade significativa para examinar sistematicamente o domínio da solução para problemas de projeto estruturais complexos.

A maioria dos esforços de investigação na otimização estrutural se concentrou em problemas onde a geometria (forma) da estrutura é fixa e as dimensões dos componentes são avaliadas a fim de atender alguns requisitos de projeto. Métodos baseados nos critérios de otimalidade (BERKE e KHOT, 1987; FLAGER *et al.*, 2014), abordagem de programação matemática (SCHMIT, 1981) e algoritmos heurísticos como Colônia de Abelhas Artificial (SONMEZ, 2011), Algoritmos Genéticos (WU e CHOW, 1995; SOH e YANG, 1996 e DEDE *et al.*, 2011) e *Particle Swarm Optimization* (GHOLIZADEH, 2013), foram efetivamente utilizados nesses problemas.

Variações na geometria da estrutura podem resultar num aumento da complexidade do problema de otimização. No caso de estruturas discretas do tipo treliças, as variações na geometria se dão através de mudanças introduzidas nas coordenadas nodais, o que caracteriza alteração de forma (PEDERSEN, 1987).

Svanberg (1981) considerou a otimização de forma e dimensional para o projeto de mínimo peso de estruturas treliçadas, com restrições sobre deslocamentos, tensões e de flambagem local. Outras estratégias como o *Fully Stressed Design* (WANG *et al.*, 2002; AHRARI e ATAI, 2013) foram utilizadas na solução desse problema. A combinação da otimização topológica com a de forma é de um nível maior de complexidade, porém podem promover uma grande melhoria no projeto (BENDSOE *et al.*, 1991; KIRSCH, 1989; TOPPING, 1983).

Diferentes formulações do problema de otimização de estruturas discretas podem ser encontradas na literatura, entre as mais discutidas estão:

- Minimização da compliância ou da flexibilidade (maximização da rigidez) com restrição em massa/volume, onde podem ser citados, entre outros, os trabalhos de Bendsøe e Sigmund (2003) e Achtziger e Stolpe (2007).
- Minimização da massa (ou do volume) com restrição em tensão. Alguns exemplos desse tipo de formulação podem ser encontrados nos trabalhos de Cheng e Guo (1997), Guo *et al.* (2004), Ohsaki e Katoh (2005) e Stolpe e Svanberg (2003).
- Minimização da massa (ou do volume) com restrição em deslocamento e tensão, abordada, entre outros, por Kirsch (1990), Zhou e Xia (1990), Wang *et al.* (2002) e Xu *et al.* (2010).
- Minimização da massa (ou do volume) com restrição em tensão e flambagem. Alguns exemplos desse tipo de formulação podem ser encontrados nos trabalhos de Rozvany (1996), Zhou (1996) e Guo *et al.* (2001, 2005).

2.1.1 Definição matemática de um problema geral de otimização

Para descrever conceitos e métodos de otimização é necessário a definição de um formato matemático geral para problemas de otimização. Deste modo, como

apresentado por Arora (2004), o problema padrão de otimização pode ser expresso na seguinte forma:

Encontrar um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de variáveis de projeto para minimizar ou maximizar uma função objetivo

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

sujeita a p restrições de igualdade

$$h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, (j = 1, \dots, p) \quad (2.2)$$

e a m restrições de desigualdade

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, (i = 1, \dots, m). \quad (2.3)$$

Neste caso, o conjunto de variáveis de projeto que satisfazem todas as restrições é denominado de conjunto viável S e pode ser posto como

$$S = \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in B^n; h_j(\mathbf{x}) = 0, (j = 1, \dots, p); g_i(\mathbf{x}) \leq 0, (i = 1, \dots, m) \}. \quad (2.4)$$

Para variáveis contínuas, B é o conjunto de números reais. Para variáveis discretas, B é o conjunto de valores discretos. Para variáveis de projeto mistas, B é a união de conjuntos de naturezas diferentes.

O conjunto inviável é o conjunto de variáveis de projeto que violam pelo menos uma das restrições impostas ao problema.

Se a função objetivo e as restrições de igualdade/desigualdade são funções lineares das variáveis de projeto, o problema é denominado problema de otimização linear. Já em um problema de otimização não linear, a função objetivo ou pelo menos uma restrição de igualdade/desigualdade é uma função não linear das variáveis de projeto. Em geral, problemas de otimização estrutural são não lineares.

2.1.2 Otimização estrutural de forma

O problema de otimização de forma é de grande complexidade. Como muitos autores já apontaram, em muitos casos podem existir vários ótimos locais (ACHTZIGER, 2007; ROZVANY, 1997). Neste contexto, existe um esforço crescente em alcançar o ótimo global para os problema de otimização dimensional e de forma, simultaneamente.

Para realizar a otimização de forma, é necessário definir os limites das coordenadas nodais a serem modificadas no processo de otimização. Existem duas abordagens diferentes para a definição desses limites. Na primeira abordagem, estes podem ser definidos localmente para cada variável de projeto, como mostra a Figura 3.a. Neste caso, existem limites diferentes para cada variável de projeto, e isto pode ser obtido através da definição de uma região viável retangular (no caso 2D) em torno de cada nó móvel (ACHTZIGER, 1997). A segunda abordagem baseia-se em definir limites para todas as variáveis de projeto de uma só vez, como mostra a Figura 3.b.

Estas duas abordagens podem levar a resultados diferentes, uma vez que o domínio viável definido na primeira abordagem é menor. No entanto, a primeira abordagem pode evitar problemas relacionados com a superposição dos nós, se os limites forem definidos adequadamente. Portanto, essa abordagem pode ser recomendada quando há muitos nós para os quais as coordenadas são tomadas como variáveis de projeto no processo de otimização (TORII *et al.*, 2011).

A sobreposição dos nós ocorre quando mais de um nó da estrutura assume a mesma posição dentro do domínio viável. Nesse caso, algumas barras podem ter um comprimento igual à zero, tornando a matriz de rigidez mal condicionada. Uma medida para evitar esse problema é através da imposição de limites sobre as coordenadas nodais. No entanto, essa abordagem pode evitar que o algoritmo de otimização obtenha soluções ótimas. Uma abordagem interessante para lidar com a superposição dos nós é proposta por Achtziger (2007), que permite que nós ocupem a mesma posição, sem bloquear o processo de otimização.

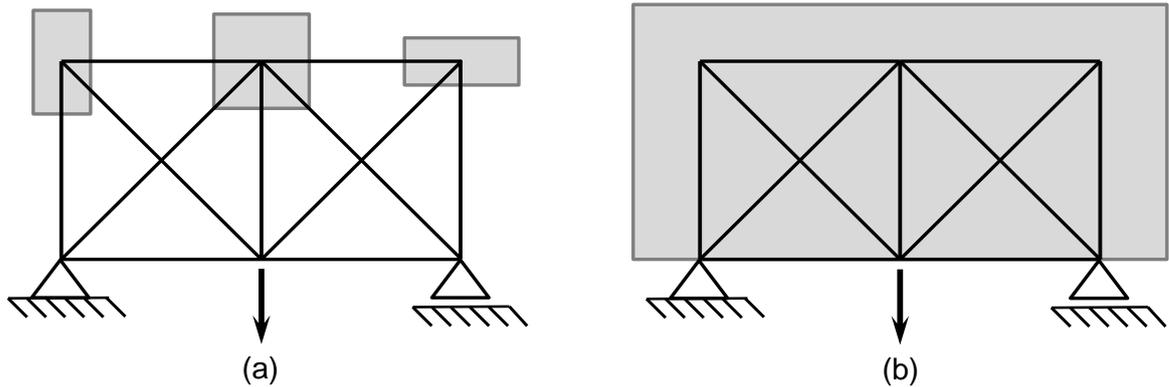


Figura 3 – Limites impostos no processo de otimização de forma (a) somente nos nós previamente determinados, (b) globalmente, para todos os nós.

2.1.3 Otimização estrutural topológica

Devido às evoluções dos recursos computacionais, começaram a surgir um grande número de algoritmos de otimização implementados para a solução dos problemas. Metodologias de otimização estrutural estão visivelmente amadurecidas e estes métodos têm sido implementados em programas comerciais de elementos finitos (ARORA, 2007). Com isso houve o desenvolvimento da otimização topológica, sendo um dos campos mais promissores para a aprimoração de projetos de estruturas na indústria automotiva e aeroespacial (ARORA, 2007; HUANG e XIE, 2010).

Como posto por Dobbs e Felton (1969), Dorn *et al.*, (1964), Beckers e Fleury (1997) e Rozvany *et al.* (1995), a otimização topológica baseia-se na definição inicial de um conjunto de elementos dispostos sobre uma região do espaço e com densidade predeterminada denominada *ground structure*, dentro do qual busca-se a melhor conectividade entre os elementos (Figura 4).

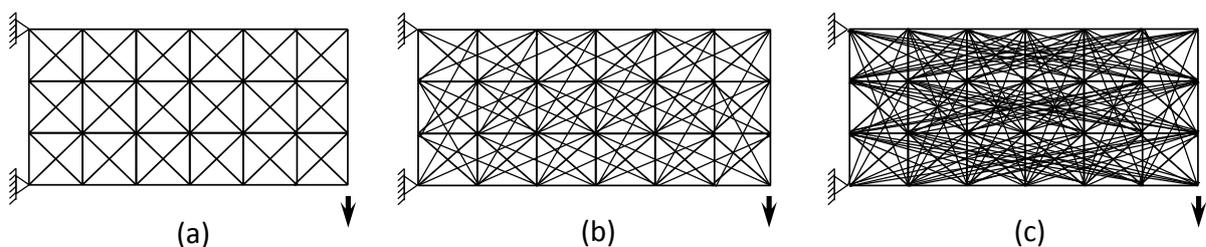


Figura 4 – Tipos de *ground structure* (a) conexão dos nós primária, (b) conexão dos nós secundária e (c) todas conexões de todos os nós são incluídas.

Este tipo de estrutura é uma aproximação discretizada de um universo de barras na busca da solução exata. De acordo com esse estudo, as áreas dos elementos poderão tender a zero e, conseqüentemente, poderão ser removidas automaticamente da estrutura. Esta característica é considerada uma importante vantagem e virtude dessa metodologia. A Figura 5.a mostra um exemplo de uma estrutura inicial em que foi utilizada uma *ground structure*. Após o processo de otimização topológica, reduz-se o número de barras da estrutura gerando a configuração ótima para o problema, como mostra a Figura 5.b.

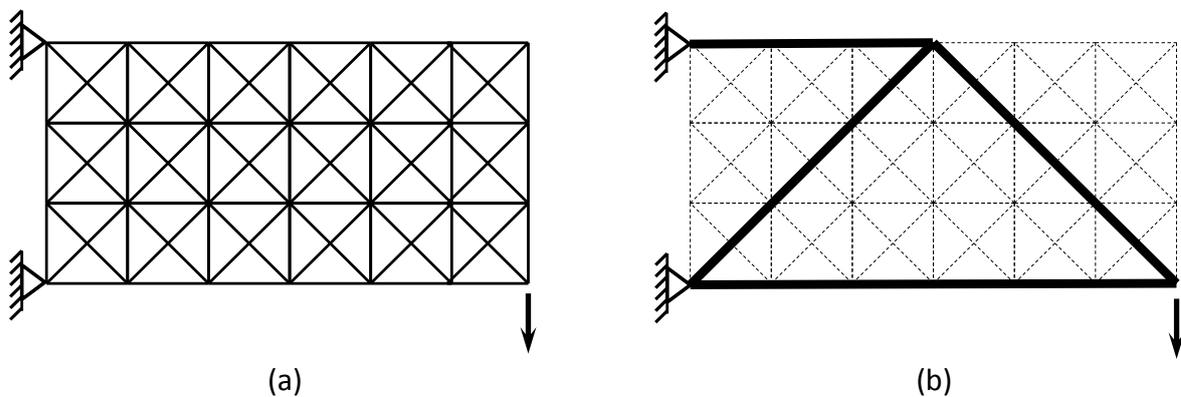


Figura 5 – (a) Estrutura inicial com uma *ground-structure* e (b) solução ótima da estrutura.

Para uma introdução à otimização topológica de estruturas contínuas pode-se referir a Bendsoe (1995). Para uma visão geral de otimização topológica de estruturas discretas, tem-se o trabalho desenvolvido por Rozvany (1997).

Uma das principais dificuldades na otimização topológica com restrições em tensão é que as mesmas não necessitam ser satisfeitas pelo elemento cuja área da seção transversal está na iminência de desaparecer, ou seja, a restrição não existe para um membro que não existe (KIRSCH, 1989, 1990; SVED e GINOS, 1968). Por conseguinte, o problema de otimização tem descontinuidade na formulação das restrições (CHENG e JIANG, 1992). Como resultado, a região viável não é convexa e a solução ideal é muitas vezes localizada em um limite dessa região viável.

Em um processo de otimização dimensional, é comum a situação em que a área da seção transversal de um elemento diminua de forma contínua de um valor finito para zero. Nessa situação pode ocorrer o importante fenômeno de singularidade de tensões (SVED e GINOS, 1968). Isso ocorre principalmente em regiões pouco solicitadas, em que a área dos elementos e as forças atuantes são muito pequenas. Os elementos cuja área é pequena, quando solicitado, podem

sofrer grandes deformações e conseqüentemente tensões muito elevadas. Neste contexto, quando utilizado um algoritmo de otimização baseado em gradientes, o mesmo não admite que a área dos elementos diminua ainda mais devido à agressão das restrições, não permitindo que o elemento desapareça e inibindo, assim, a obtenção da solução topológica ótima.

A questão da singularidade de tensão em otimização topológica foi identificada e abordada inicialmente por Sved e Ginos (1968). Kirsch (1989,1990), Kirsch e Topping (1992), Ohsaki e Nakamura (1996), Cheng e Guo (1997) e Guo e Cheng (2000), propuseram algumas metodologias a fim de solucionar o problema de singularidade de tensões, quando a estrutura é submetida somente à restrições quanto à falha material.

Além do problema de singularidade na restrição de tensão, o mesmo também ocorre na restrição de flambagem. Zhou (1996), Ohsaki e Katoh (2005) Kravanja *et al.* (1998), Rozvany (1996) e Guo *et al.* (2001), apresentaram metodologias para evitar esse tipo de problema.

2.1.4 Otimização estrutural dimensional, de forma e topológica

A otimização estrutural tem por objetivo obter a melhor configuração de uma determinada estrutura. Trabalhar simultaneamente com os três tipos de otimização (dimensional, de forma e topológica) torna o problema ainda mais complexo, pois frequentemente não é convexo. Quando utiliza variáveis de projeto discretas e contínuas (simultaneamente), torna-se também descontínuo. Portanto, esse problema deve ser resolvido por um método de otimização capaz de considerar esse tipo de característica limitante (TANG *et al.*, 2005 e SILIH *et al.*, 2010).

Sakamoto e Oda (1993) solucionam esse problema de otimização através da criação de uma *ground structure* para determinar a melhor topologia da estrutura com a forma (geometria) fixa.

Achtziger (2007) propôs uma metodologia para simplificar o processo de otimização de forma e topológica, fixando a topologia para resolver o problema de otimização de forma. Depois de encontrar uma geometria ideal, a nova topologia é avaliada e o processo é repetido até que o problema venha a convergir para a solução ótima.

Grierson e Pak (1993), Shrestha e Ghaboussi (1998), Deb e Gulati (2001), Tang *et al.* (2005), Benoit e Rajan (2013) e Miguel *et al.*, 2013, resolveram o problema de otimização estrutural dimensional, de forma e topológica simultaneamente.

2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM ALGORITMOS GENÉTICOS

Enquanto os métodos de programação não linear tradicionais têm sido empregados com sucesso em problemas menores, um aumento do número de variáveis de projeto, em geral, é prejudicial à eficácia dessas técnicas de otimização. A natureza descontínua do espaço de projeto e a existência de mínimos locais, requerem considerações em relação à busca de técnicas alternativas.

Um dos grandes empecilhos encontrados durante um projeto é o de associar os resultados obtidos através dos cálculos estruturais com os itens fornecidos comercialmente. Por exemplo, as áreas das seções transversais das barras de uma estrutura ótima podem não ser encontradas no mercado, impondo, assim, elevados custos de fabricação.

Uma ampla revisão da literatura na área de otimização estrutural utilizando variáveis discretas, pode ser encontrada em Shea *et al.* (1997) e Arora (2002). Os primeiros trabalhos foram baseados nos métodos determinísticos como programação inteira mista (TOAKLEY, 1968), técnicas *branch and bound* (CELLA e LOGCHER, 1971; JOHN e RAMAKRISHNAN, 1987), abordagem de penalização (LIEBMAN *et al.*, 1981), abordagem segmentar de programação linear (TEMPLEMAN e YATES, 1983), e entre outros.

Abordagens não determinísticas, como *Simulated Annealing* (SA) (ELPERIN, 1988), AG (RAJEEV E KRISHNAMOORTHY, 1992), Algoritmo de Colônia de Formigas (CAMP e BICHON, 2004), teoria do Big-Bang (CAMP, 2007 e KAVEH e TALATAHARI, 2009), o método *Teaching – Learning based optimization* (TLBO) (CAMP e FARSHCHIN, 2014) *etc.*, foram utilizadas com sucesso para resolver problemas de projeto ótimo com variáveis de projeto discretas. Tem sido observado que essas técnicas são computacionalmente dispendiosas e os esforços computacionais crescem exponencialmente com o número de combinações a serem consideradas.

2.2.1 Algoritmos Genéticos (AG)

O problema de otimização estrutural tem sido comumente reconhecido como um problema não convexo (ANTHONY *et al.*, 2000), restrito e, dependendo do caso, com variáveis discretas. A função de custo pode não ser contínua e, conseqüentemente, não diferenciável. Assim, a rotina de otimização baseada em gradientes implica em algumas dificuldades devido ao cálculo das derivadas. Considerando isto, o método de otimização deve ser escolhido entre os métodos estocásticos que tenham a capacidade de resolver problemas discretos e contínuos, além de serem capazes de encontrar o ótimo global, ou obter uma solução aproximada deste. O AG é um método que pode atender a estes requisitos.

O AG foi aplicado pela primeira vez por Holland (1975) e posteriormente por Goldberg e Samtani (1986), a fim de otimizar estruturas visando o menor peso sob restrições de tensão. Este método estabelece as bases de uma exploração global no espaço de busca, o que o torna uma ferramenta robusta e aplicável a uma grande variedade de problemas estruturais. Quatro diferenças separam o AG das técnicas de otimização convencionais (GOLDBERG e SAMTANI, 1986):

1. A manipulação direta de uma codificação;
2. A busca de uma população, e não um único ponto;
3. Busca por amostragem (uma busca quase cega);
4. Busca usando operadores estocásticos (regras não determinísticas).

Por conseguinte, o AG prova ser um otimizador de confiança para problemas discretos e contínuos, multiparamétricos e têm a capacidade de aplicar diferentes restrições e funções de penalização, sem qualquer preocupação com a continuidade e diferenciabilidade da função objetivo.

2.2.2 Aplicação de AG em problemas com restrição

Uma das principais dificuldades na utilização do AG em aplicações práticas está na forma de associar a função objetivo do problema à uma medida de aptidão do indivíduo (elemento essencial no processo de adaptação evolutiva). A estimativa

comparativa do quão boa é uma solução acaba por ser suficiente na maioria dos casos, por exemplo, o maior ou menor valor tem de estar mais perto do máximo ou mínimo global em problemas sem restrição, mas lidando com problemas restritos, é necessário encontrar uma maneira de evidenciar as soluções que se encontram na região viável. Esta não é uma tarefa fácil, visto que a maioria dos problemas reais possuem restrições complexas lineares e/ou não lineares (MICHALEWICZ, 1995; MICHALEWICZ *et al.*, 1996; MICHALEWICZ e SCHOENAUER, 1996; DASGUPTA e MICHALEWICZ, 1997).

A função de penalidade parece ser ainda a técnica mais popular em problemas de otimização na engenharia (COELLO, 1999), pois esta quantifica a função objetivo quando alguma restrição é agredida. Entretanto, as dificuldades intrínsecas para definir bons valores de penalização representa um agravante no processo de otimização utilizando AG (RICHARDSON *et al.*, 1989).

Em essência, as funções de penalidade penalizam as soluções inviáveis, reduzindo ou aumentando os seus valores na função objetivo na proporção da violação. Em outras palavras, a função de penalidade é aplicada sempre que as restrições forem violadas. Diferentes tipos de funções de penalidade têm sido propostas para lidar com as restrições.

Nos métodos determinísticos, tais como as técnicas sequenciais de minimização restrita, é frequentemente empregada uma função de penalização quadrática a fim de manter a continuidade dos gradientes (PARDALOS e ROSEN, 1987). Funções similares em combinação com AG tem sido aplicadas por Galante (1996) e Goldberg e Samtani (1986), utilizando penalização quadrática. Constantes de penalização são utilizadas por Deb e Gulati (2001).

Michalewicz *et al.* (1996) e Michalewicz e Schoenauer (1996) têm reconhecido a importância do uso da penalização adaptativa em otimização evolutiva e consideram esta abordagem como uma direção muito promissora de pesquisa na otimização evolucionária. Chen e Rajan (2000) apresentaram um algoritmo onde a penalização da massa da estrutura é calculada automaticamente e se ajusta de forma adaptativa. Outras técnicas de penalização adaptativa podem ser encontradas nos trabalhos de Nanakorn e Meesomklin (2001) e Togan e Dologlu (2006, 2008).

2.2.3 Abordagem adaptativa para mutação e cruzamento

Existem três principais operadores genéticos que executam as tarefas necessárias para o funcionamento do AG: elitismo, cruzamento e mutação. O elitismo é um operador que copia o conjunto de dados de um indivíduo para uma nova população, ou seja, todas as características de um determinado indivíduo se matém na próxima geração. O cruzamento consiste em permitir que os indivíduos selecionados de uma população troquem características entre si, e a mutação é o passo que previne uma perda prematura de material genético, pois modifica alguma característica de um indivíduo para a próxima geração.

Os operadores genéticos manipulam as informações encontradas no indivíduo, denominada genes. Em programação binária, os genes compõem o valor da variável de projeto, chamado de bit.

Os métodos de cruzamento tradicionais, foram sugeridos inicialmente por Holland (1975) e Goldberg (1989) que utilizaram um único ponto de cruzamento. Por sua vez, Rajeev e Krishnamoorthy (1992) utilizaram dois pontos de cruzamento. Sob o pensamento de desenvolver operadores de cruzamento mais eficientes, De Jong (1975) e Spears e De Jong (1990) inovaram utilizando múltiplos pontos de cruzamento, que se mostraram benéficos para o algoritmo, o que também foi apontado por Syswerda (1989), Eshelman *et al.* (1989) e Camp *et al.* (1998).

Srinivas e Patnaik (1994) desenvolveram novos métodos relacionados aos operadores de cruzamento e de mutação. Esses autores estudaram a probabilidade do operador correspondente atuar no processo de otimização e isso é visto por meio da aptidão do indivíduo. A operação é dependente do desempenho de cada indivíduo e só ocorre quando necessária (YOSHIMOTO *et al.*, 2003).

A estratégia adaptativa é um técnica que permite uma avaliação das variáveis de projeto no tocante à sua contribuição para a aptidão do indivíduo (TOGAN e DALOGLU, 2006). Em geral, a probabilidade de ocorrer o cruzamento é usualmente determinada pelo usuário e depende da experiência do mesmo. O método posto por Togan e Daloglu (2006) não se baseia na escolha aleatória da quantidade de variáveis a serem trocadas. Essa quantidade, no entanto, é definida dependendo da probabilidade de cruzamento, obtidas por meio das aptidões dos indivíduos na população.

O operador de mutação é um operador relevante no AG pois aumenta a variedade de soluções. O papel deste operador é o de impedir as soluções ótimas locais, restaurando o material genético perdido ou inexplorado na população (SRINIVAS e PATNAIK, 1994). As soluções ótimas locais podem ser resultados de uma convergência prematura. Além disso, algumas regiões importantes do espaço de busca, podem nunca terem sido exploradas quando este operador não é introduzido no AG (CAMP *et al.*, 1998).

A fim de permitir que o operador desempenhe um papel mais atraente, deve-se aplicar um controle do grau de aptidão dos indivíduos. Conseqüentemente, é necessário um operador de mutação que tenha qualidade adaptativa.

Jenkins (2002) e Foley e Schinler (2003), aplicaram um tipo de mutação auto-adaptativa no AG, denominada de mutação inteligente. Este tipo de mutação pode ser considerado como uma intervenção determinística na busca de material genético para a solução ótima (DEDE *et al.*, 2003).

Além das estratégias adaptativas a fim de traçar o AG, bem como melhorias associadas aos operadores genéticos, outro ponto importante a ser considerado, são os tipos alternativos de codificação do AG.

A codificação do AG foi estudada e foi avaliado o desempenho do AG quando da modificação desta. Na literatura, houve uma série de estudos sobre a codificação de valor ou codificação binária, com o propósito de investigar a codificação mais eficiente (DEDE *et al.*, 2003; ERBATUR *et al.*, 2000 e EKLUND *et al.*, 2006). Os estudos mostram que a utilização de diferentes tipos de codificação afeta diretamente o desempenho do AG. Outros tipos de codificação, tais como codificação quaternária e octal, também foram avaliadas por Bekiroglu *et al.* (2009).

A eficiência da codificação binária, aplicada ao estudo de estruturas treliçadas com variáveis discretas e contínuas, buscando o mínimo peso, foi objeto de estudo de Dede *et al.* (2011).

2.3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM ALGORÍTMOS HÍBRIDOS

Entre os métodos de otimização, duas grandes famílias destacam-se: os algoritmos determinísticos e os estocásticos. Algumas técnicas determinísticas, buscam o ponto de mínimo, com base na informação fornecida pelo gradiente da

função objetivo. Naturalmente, a eficiência dos mesmos depende de vários fatores, tais como o ponto de partida, a precisão da avaliação da direção descendente, o método usado para executar a busca, bem como os critérios de parada (VASCONCELOS e SALDANHA, 1997). A solução obtida é geralmente um ponto de mínimo local, o qual também pode ser um mínimo global se a função for unimodal. As duas principais desvantagens são a ausência de garantia de obtenção do mínimo global e, na maioria dos casos, a necessidade de avaliações do gradiente. Os métodos estocásticos não precisam do cálculo do gradiente e são capazes de encontrar a solução global. No entanto, o número de avaliações da função objetivo, necessários para encontrar a solução ótima, é normalmente maior do que o número exigido pelos métodos determinísticos.

A combinação das duas famílias de algoritmos, em um problema de otimização, é denominada algoritmo híbrido. Ou seja, esta combinação associa um algoritmo determinístico com um algoritmo estocástico, ou vice e versa, num processo de otimização. Essa estratégia pode promover soluções mais precisas e melhorias na eficiência do algoritmo. Adeli *et al.* (1994), Yeh (1999), Sahab *et al.* (2004) e Rahami *et al.* (2011) utilizaram um algoritmo híbrido com AG em problemas de otimização de treliças.

Em geral, a utilização de um algoritmo determinístico no processo de otimização híbrida envolvendo o AG, pode ser empregada de duas maneiras: antes da otimização por AG, ou posteriormente. Estas duas abordagens são esclarecidas a seguir.

2.3.1 Otimização estrutural híbrida com um algoritmo determinístico seguido de AG

O desempenho do AG, como qualquer algoritmo de otimização global, depende de mecanismos para equilibrar dois objetivos conflitantes, que é o caso da exploração das melhores soluções encontradas até então e, ao mesmo tempo, a busca das soluções promissoras. O poder do AG vem de sua capacidade de combinar tanto a prospecção quanto a exploração, de uma forma eficiente (HOLLAND, 1975). No entanto, na prática existem algumas dificuldades.

A população inicial é um fator importante para a solução final, tanto no aspecto do seu tamanho, quanto na questão de sua constituição. Dede *et al.* (2011)

ressaltou a importância do tamanho da população pois, se a mesma aumenta, a probabilidade de obter uma solução ótima também aumenta. O tamanho da população influencia na capacidade de amostragem do AG, afetando o seu desempenho.

Com relação à constituição da população inicial, se a mesma é composta a partir de bons indivíduos, o tempo de obtenção da solução será reduzido e a solução poderá ser melhor (TOGAN e DALOGLU, 2008). Assim, incorporando um método de busca local, ou outros métodos como por exemplo o *Fully Stressed Design*⁴, anterior ao AG, pode ajudar a superar obstáculos que surgem devido aos tamanhos populacionais e a composição da população inicial (THIERENS *et al.*, 1998), podendo melhorar a capacidade de exploração do algoritmo de busca (GRUAU e WHITLEY, 1993 e HART, 1994), possibilitando acelerar a busca para o ótimo global que, por sua vez, pode garantir uma boa taxa de convergência.

2.3.2 Otimização estrutural híbrida com AG seguido de um algoritmo determinístico

Embora os algoritmos genéticos possam rapidamente localizar a região onde existe o ótimo global, eles levam um tempo relativamente longo para localizar o ponto de ótimo com precisão (PREUX e TALBI, 1999 e DE JONG, 2005).

Se houver um equilíbrio entre a exploração global e as capacidades de busca local, o algoritmo pode facilmente produzir soluções com alta precisão (LOBO e GOLDBERG, 1997). Porém, a condição do critério de parada do AG para iniciar um algoritmo determinístico, é o principal problema quando se lida com tais técnicas híbridas (HOLLAND, 1975).

A ideia principal é continuar o processo de otimização com o método determinístico, após encontrar a região de mínimo global obtida pelo AG. O objetivo é explorar as boas características de ambos os métodos, isto é, a convergência global com um número relativamente pequeno de avaliações da função objetivo e com precisão na solução final. No entanto, é difícil determinar quando o AG alcança

⁴ Esta abordagem parte da hipótese de que, para a concepção de um projeto ótimo, cada elemento da estrutura que não está na sua geometria mínima (área da seção transversal), deve ser totalmente estressado, ou seja, a tensão no elemento deve estar muito próxima ou ser equivalente à tensão de escoamento (ou admissível ou outro critério de tensão), em pelo menos um dos casos de carregamento.

o mínimo global, ou seja, seu critério de parada. Os critérios para a comutação entre o AG e um método determinístico podem ser definidos da seguinte maneira:

- a) Número de gerações. Este é o caso mais simples. O AG para quando um número predeterminado de gerações é atingido e o melhor resultado é transmitido para o método determinístico. A principal desvantagem desse critério de parada, é que a geração pode não ser a melhor geração, nem tão pouco conter a melhor solução do problema.
- b) A diferença entre a função de custo dos valores médios de um conjunto de gerações. O grande inconveniente deste critério é que a evolução da curva de valor médio pode apresentar grandes variações de uma geração para outra.
- c) Diferença entre os melhores valores da função de custo em um conjunto de gerações. Este procedimento é mais promissor, pois indica a convergência do método, através do “histórico” dos melhores valores da função objetivo.

2.4 GRUPO DE BARRAS

Uma população inicial deve ser gerada para iniciar o processo de evolução no AG. A convergência, o desempenho e a capacidade do AG são afetadas significativamente pela geração dessa população inicial. Se o tamanho do espaço de projeto é reduzido, estas propriedades do AG podem não sofrer muita influência. No entanto, para as aplicações mais práticas do AG na engenharia estrutural, em geral, o espaço de soluções pode possuir variáveis discretas e contínuas, simultaneamente, e ser grande porte.

A estratégia de agrupamento de membros pode ser adotada para reduzir o tamanho do problema, além de possibilitar a obtenção de uma estrutura final, do ponto de vista da engenharia, mais adequada no que diz respeito à fabricação e aos recursos disponíveis, além de garantir alguma possível simetria da mesma (TOGAN e DALOGLU, 2006; KRISHNAMOORTHY *et al.*, 2002; SUDARSHAN, 2000).

Um grupo pode ser definido a partir dos membros de uma estrutura que possuem a mesma seção. Shea *et al.* (1997), Krishnamoorthy *et al.* (2002), Provatidis e Venetsanos (2006), e Togan e Doloğlu (2006) desenvolveram um método de agrupamento de membros de treliças de acordo com a magnitude das

forças axiais dos membros. Biedermann e Grierson (1995) agruparam membros de treliças com base nos comprimentos dos membros.

O principal contratempo de agrupar os membros de acordo com as tensões internas, forças, ou energias é que, em geral, apenas um único caso de carregamento pode ser considerado ao mesmo tempo. Quando agrupados com base em seu comprimento, as propriedades geométricas, as forças nos membros e os critérios de deflexão e de tensão podem não ser contabilizados.

Walls e Elvin (2010) propuseram um agrupamento de acordo com a massa por unidade de comprimento do elemento, resolvendo os problemas associados aos múltiplos casos de carregamento e requisitos de resistência. É importante notar que, ao otimizar as estruturas buscando o mínimo peso, a massa por unidade de comprimento dos membros serve como parte da função objetivo.

Neste trabalho, a estratégia de agrupamento de barras adotada considera como um grupo os elementos que devem possuir a mesma seção. Além disso, para efeito de comparação, os casos avaliados nos resultados devem apresentar os mesmos agrupamentos que os trabalhos referenciados utilizaram. Quanto à abordagem de otimização empregada, esta se dá pela aplicação de uma técnica híbrida, através de AG (que emprega técnicas de penalização das restrições, cruzamento e mutação adaptativas) e uma técnica de PNL, afim de obter uma estrutura ótima que incorpore os três tipos de otimização estrutural (dimensional, de forma e de topologia).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem por objetivo central discutir três elementos essenciais para o desenvolvimento do corrente trabalho: Algoritmos Genéticos (AG), programação não linear (PNL) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) de treliças tridimensionais.

3.1 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Para realizar um projeto ótimo, é necessário que o projetista identifique explicitamente as variáveis de projeto, a função de mérito que indica o nível de excelência de uma dada configuração do sistema (como por exemplo, o custo do material ou do produto, a massa, energia *etc.*) e as restrições impostas ao mesmo.

As variáveis de projeto são aquelas que podem ser manipuladas diretamente pelo usuário ou pelo código de otimização e que caracterizam a disposição do sistema em análise. São estas a serem alteradas com o objetivo de atingir a melhor configuração. Estas podem ser contínuas, inteiras ou discretas, ou seja, com valores compreendidos dentro de um determinado conjunto fixo. Do ponto de vista da mecânica estrutural, estas podem representar as propriedades mecânicas ou físicas do material, a configuração da forma da estrutura, as dimensões das seções transversais, dentre outras.

As restrições são funções de igualdade e/ou desigualdade que descrevem as limitações físicas ou comportamentais do projeto, tais como os valores limite sobre a falha do material em tensão, deslocamentos admissíveis, frequência natural *etc.*

3.1.1 Definições de mínimo local e global

Em um problema de otimização, nem sempre é possível garantir a existência do ponto de mínimo global. Por outro lado, em certos casos, pode-se garantir sua existência, mesmo que não se saiba como encontrá-lo. O teorema de Weierstrass estabelece que, quando certas condições são satisfeitas, tais como (ARORA, 2004):

1. Se $f(\mathbf{x})$ é uma função contínua no conjunto viável S ;
2. S é não vazio;
3. S é fechado e limitado,

pode-se garantir que $f(\mathbf{x})$ possui um mínimo global em S .

Uma função $f(\mathbf{x})$ de n variáveis de projeto, possui um mínimo global (absoluto) em \mathbf{x}^* se

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

para todo \mathbf{x} no conjunto de projeto viável S . Se essa desigualdade vale para todo \mathbf{x} exceto para \mathbf{x}^* , então \mathbf{x}^* é denominado mínimo global forte, do contrário é dito mínimo global fraco.

A função $f(\mathbf{x})$ de n variáveis tem um mínimo local (relativo) em \mathbf{x}^* se a desigualdade (3.1) é válida para todo \mathbf{x} numa pequena vizinhança N de \mathbf{x}^* no denominado conjunto viável S . Se a desigualdade estrita vale, então \mathbf{x}^* é chamado de mínimo local forte, caso contrário, este é dito mínimo local fraco. A vizinhança N do ponto \mathbf{x}^* é definida como um conjunto de pontos, dado por

$$N = \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in S, \text{ com } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta \}, \quad (3.2)$$

sendo δ a medida da vizinhança e um valor pequeno maior que 0.

Em problemas de otimização com variáveis reais, um ponto é dito ponto de mínimo local se satisfizer duas condições (ARORA, 2004):

- a) Condição necessária de derivada de primeira ordem e
- b) Condição de suficiência de derivadas de ordem superior.

Estas condições são obtidas a partir das derivadas da função objetivo, no caso de otimização irrestrita, ou da função gerada pela combinação da função objetivo e das restrições.

As condições que devem ser satisfeitas no ponto de ótimo são chamadas de necessárias. Dito de outra forma, se um ponto não satisfaz as condições necessárias, este não é um ponto candidato a ótimo. Entretanto, a satisfação das condições necessárias não garante a otimalidade do ponto, sendo necessário satisfazer as condições de suficiência (ARORA, 2004).

3.2 PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

O tipo de algoritmo a ser utilizado na busca do ponto de ótimo, aqui denotado \mathbf{x}^* , em um problema de otimização, depende das características desse problema. No caso de as variáveis de projeto serem contínuas e a função objetivo e as restrições serem lineares tem-se um problema linear. Nesse caso, a melhor alternativa é a utilização de técnicas de programação linear. Caso contrário, se a função objetivo e/ou as restrições não forem lineares, tem-se um problema não linear.

Os métodos de otimização não linear requerem um ponto de projeto inicial \mathbf{x}_i , a fim de iniciar o processo iterativo. Conforme as iterações são realizadas, o ponto \mathbf{x}_{i+1} é atualizado. Assim, o processo de otimização fornece uma solução que é sucessivamente melhor do que a última. O valor de \mathbf{x}_{i+1} depende da obtenção da direção de descida e do tamanho do passo (a “velocidade” com que o algoritmo percorre o espaço de projeto até obter uma boa aproximação para o ponto de ótimo ao longo dessa direção). Os métodos do Passo Constante, de Armijo e o da Seção Áurea, são exemplos de métodos para determinar o tamanho do passo (ARORA, 2004).

Para o cálculo da direção de descida, alguns métodos utilizam somente a informação do gradiente, tais como o método da máxima descida, o método do gradiente conjugado *etc.*. Porém, no caso de aproximações quadráticas, são necessárias também informações da segunda derivada, necessitando assim da matriz Hessiana. Nesse caso, têm-se os métodos de Newton, Newton modificado, Marquardt, dentre outros. Como a obtenção da matriz Hessiana, em geral, é de difícil obtenção, alguns métodos foram desenvolvidos com o objetivo de aproximar essa matriz, agilizando o processo de otimização. A ideia fundamental é, durante o processo iterativo, atualizar uma aproximação da matriz Hessiana (ou de sua inversa) usando informações relacionadas às mudanças nas variáveis de projeto e nas direções de descida. Os métodos de Quase-Newton mais largamente empregados na comunidade científica são os métodos DFP (Davidon, Fletcher e Powell) e BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno).

Os problemas de otimização não linear podem ser divididos em dois grupos: problemas sem restrições e problemas com restrições. Em geral, os problemas

práticos encontrados na vida real são do segundo tipo, pois apresentam restrições que devem ser consideradas para que o projeto realmente venha ter uma boa funcionalidade. Vale ressaltar que os problemas sem restrição têm uma grande importância nos processos de otimização. Uma boa justificativa para essa afirmação, é que muitas vezes os problemas de otimização com restrição são escritos na forma de uma sequência de problemas de otimização irrestritos. Esses métodos de solução são denominados de métodos indiretos.

Alguns métodos indiretos utilizados são: Método da Função de Penalização Interna; o Método da Função Penalização Externa e o Método do Lagrangeano Aumentado (NOCEDAL e WRIGHT, 1999). Esses métodos funcionam através da criação de uma nova função objetivo, que incorpora as restrições, penalizando-as nas soluções inviáveis. O problema torna-se irrestrito, uma vez que as restrições são incorporadas à função objetivo e pode ser resolvido pelos métodos discutidos anteriormente. Na maioria dos casos, o Método do Lagrangeano Aumentado tem uma melhor taxa de convergência e é mais robusto do que os outros dois métodos (TORII, 2008).

3.3 ALGORITMOS GENÉTICOS

Como já mencionado, o AG é um método de otimização baseado na teoria da evolução de Charles Darwin, apresentada em 1859, o que justifica os muitos termos originários da biologia. Esse método foi introduzido inicialmente por John Henry Holland no início da década de 1960. O livro *Adaptation in Natural and Artificial System* (Adaptação no Sistema Natural e Artificial), publicado em 1975, foi o resultado desse trabalho e descreve como aplicar os princípios da evolução natural em problemas de otimização. A ideia principal é que uma nova população que contém um conjunto de indivíduos é gerada a partir da população anterior, de forma que, a cada geração, esta nova população tenha um desempenho melhor que a antecessora.

Em primeiro lugar, o AG é um algoritmo estocástico e atua com alguma aleatoriedade. Um segundo ponto muito importante é que o AG sempre considera uma população de soluções. O algoritmo pode recombinar soluções diferentes para obter outras melhores e, por isso, pode utilizar os benefícios da variedade de

soluções. A robustez do algoritmo também deve ser mencionada como algo essencial, o que contribui para tratá-lo como um algoritmo de sucesso.

3.3.1 Analogia entre o AG e a biologia

Holland (1975) e Goldberg (1989) mostraram a analogia dos fenômenos biológicos com a otimização, sendo que a estrutura básica deste método consiste na aplicação de seus operadores genéticos. Os principais conceitos, terminologias e operadores, podem ser assim explicados (GOLDBERG, 1989):

Cromossomo e genoma: Na biologia, genoma é o conjunto completo de genes de um organismo. Um genoma pode ter vários cromossomos. No AG, ambos os termos representam a estrutura de dados que codifica uma solução para um problema, ou seja, um cromossomo ou genoma representa um simples ponto no espaço de busca, denominado indivíduo.

Gen ou gene: Na biologia, gene é a unidade de hereditariedade que é transmitida pelo cromossomo e que controla as características do organismo. No AG, gene é um parâmetro codificado no cromossomo, ou seja, um elemento do vetor de variáveis de projeto que representa o cromossomo.

Genótipo: Na biologia, representa a composição genética contida no genoma. No AG, representa a informação contida no cromossomo.

Fenótipo: Na biologia, são as características observáveis de um organismo ou população. Ou seja, representa o objeto, estrutura ou organismo construído a partir das informações do genótipo. No AG é o cromossomo decodificado para o problema físico.

Alelo: Na biologia, representa uma das formas alternativas de um gene. No AG, representa os valores que o gene pode assumir.

Indivíduo: Na biologia corresponde à um simples membro da população. No AG, um indivíduo é formado pelo cromossomo. Ou seja, é um conjunto de valores dados pelas variáveis de projeto que definem um ponto no qual se pode avaliar a função objetivo.

População: É representada pelo conjunto indivíduos na biologia. Já no AG, corresponde à totalidade de indivíduos (cromossomos) constituintes de um espaço de busca. Ou seja, o conjunto de soluções.

Geração: Na biologia, corresponde à descendência de uma população. No AG, equivale ao número de iterações que o algoritmo executa. As gerações mostram a evolução que as populações vão tendo ao longo do tempo, em função da aplicação dos operadores genéticos.

Pais e filhos: Em cada geração, tanto na biologia quanto no AG, tem-se uma nova população. Uma delas é denominada de população de pais a qual é usada para criar indivíduos para a próxima geração, dita população de filhos.

Seleção: Processo pelo qual indivíduos de uma população são selecionados de acordo com seu grau de adaptação ao meio.

Elitismo: Este operador influencia o processo de busca em favor dos membros mais aptos na população atual. Esses podem passar direto para a próxima geração sem sofrer alterações em suas características genéticas.

Mutação: É responsável pela introdução e manutenção da diversidade genética nas populações. O operador altera, algum(s) gen(s) de alguns indivíduos.

Cruzamento: Forma pela qual, o material genético de indivíduos é trocado a fim de produzir filhos com características mistas de ambos os pais.

Diversidade: Refere-se à distância média entre os indivíduos da população. Uma população tem alta diversidade se a distância média é grande. Isso é importante porque permite que o algoritmo pesquise numa região mais apta do espaço de busca.

Função de aptidão: Representa o quão apto é um determinado indivíduo perante os outros indivíduos da população daquela geração. É um valor associado à função objetivo e às restrições impostas ao problema de otimização.

No processo de otimização via AG, é gerada uma população constituída de indivíduos, sendo que os indivíduos são compostos por uma estrutura de dados que representa uma possível solução do problema. Inicialmente, cada indivíduo da geração é avaliado a fim de realizar a seleção dos pais para gerar novos indivíduos. Três tipos de filhos podem ser criados para a próxima geração, são eles:

Filhos de elitismo: São indivíduos da geração atual com os melhores valores de aptidão e que automaticamente sobrevivem para a próxima geração (Figura 6a);

Filhos de cruzamento: São criados combinando as características dos pais (Figura 6b);

Filhos de mutação: São criados introduzindo mudanças aleatórias ou não nos genes de um pai (Figura 6c).

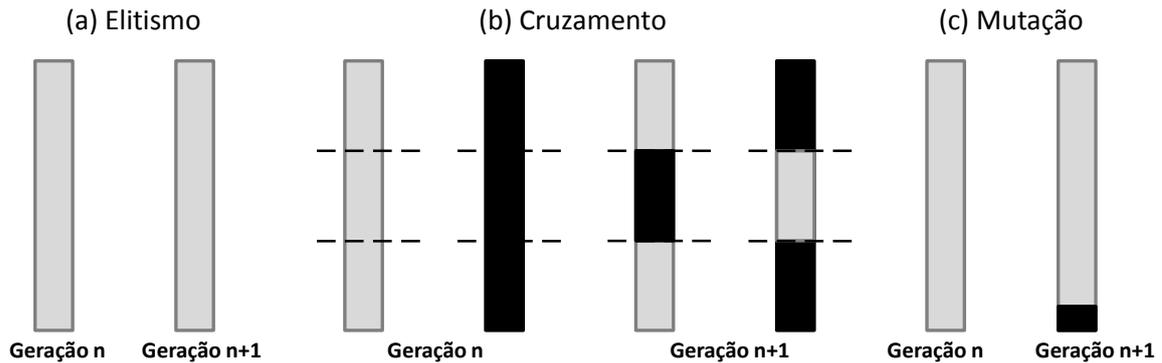


Figura 6 – Tipos de filhos: (a) filho por elitismo, (b) por cruzamento e (c) por mutação.

Quando o critério de parada é satisfeito, seja pelo número de gerações e/ou por convergência na qualidade do resultado, se obtém a possível solução ótima do problema. Ou seja, é obtido o melhor valor encontrado da função objetivo que mostra o melhor indivíduo que, conseqüentemente, possui a melhor aptidão. Caso o critério de parada não seja satisfeito, selecionam-se novamente os pais para gerar uma nova população e a próxima geração, até que o critério de parada seja satisfeito. A Figura 7 mostra um esquema na forma de um fluxograma para representar um processo de otimização via AG.

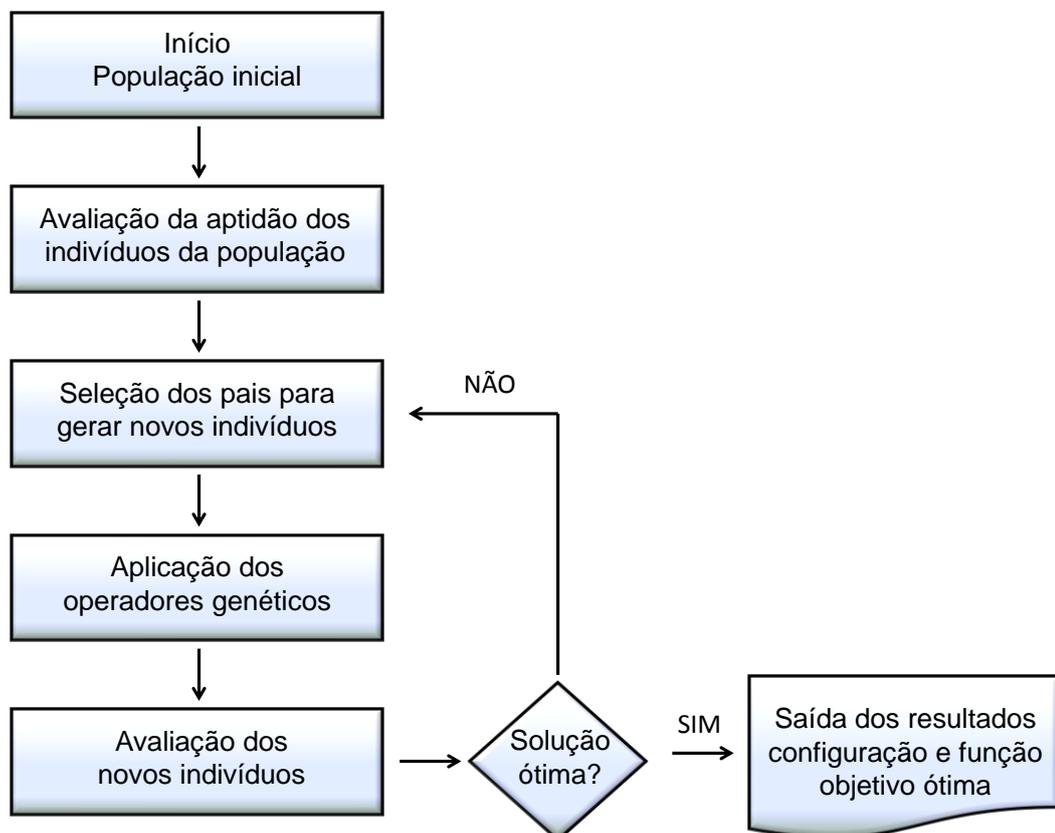


Figura 7 – Fluxograma de algoritmos genéticos.

3.3.2 Codificação dos indivíduos

Na metodologia mais usual do AG, cada parâmetro do vetor de variáveis de projeto (indivíduo) é expresso em um formato de número binário. Deve ser frisado neste ponto que há outras maneiras de representação. O número de algarismos usados para cada variável de projeto, depende de uma precisão. Convenientemente, as variáveis podem ser transformados para a base decimal. A Figura 8 mostra um indivíduo (binarizado) com 3 variáveis de projeto e com 7 parâmetros codificados cada.

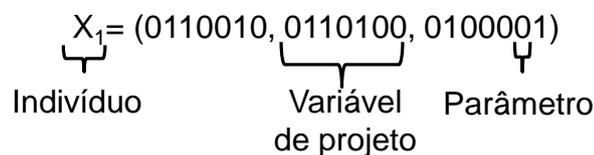


Figura 8 – Indivíduo binarizado.

A precisão p , da representação binária empregada, pode ser obtida por,

$$p = 2^n, \quad (3.3)$$

sendo n o número de parâmetros codificados que a variável de projeto contém. Assim, considerando o exemplo da Figura 8, a precisão é de $p = 2^7 = 128$. Isso significa que entre os limites inferior e superior da variável de projeto, existem p possíveis valores para as variáveis de projeto. Tomando a primeira variável de projeto da Figura 8, aqui denotada de V_p , o cálculo do valor real obtido por essa codificação binária (processo de decodificação), pode ser realizado na forma

$$V_p = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 50. \quad (3.4)$$

Assim, a variável de projeto corresponde à quinquagésima parte entre os limites inferior e superior. Como já visto, para se obter uma boa precisão do problema, o valor de n deve ser suficientemente grande, realizando uma adequada aproximação discreta para a variação contínua de cada variável. Nos problemas de otimização estrutural de seleção de tubos variando discretamente e que utilizam uma codificação binária, a precisão p deve resultar no número total de tubos disponíveis

em um catálogo. Uma outra forma de representar os valores disponíveis num catálogo, é através da utilização desses valores numa codificação discreta, ou seja, a variável de projeto pode assumir o valor exato contido no catálogo, sem a necessidade de utilizar uma codificação binária.

3.3.3 Seleção

A partir de uma população inicial, é feita a avaliação da função objetivo e da aptidão de cada um dos indivíduos. O método de escolha dos indivíduos que irão para as próximas etapas do processo de evolução, é denominado seleção. Existem vários métodos de seleção. Um método bastante conhecido e comumente utilizado no AG é o método da roleta. Neste método, cada indivíduo possui uma fração da roleta de acordo com o valor da sua aptidão. Os indivíduos com os melhores valores de aptidão ocupam uma região maior na roleta, tendo, portanto, maior probabilidade de serem selecionados após a rotação da roleta. A Figura 9 mostra um exemplo do processo de seleção via método da roleta, dada uma população \mathbf{X} , constituída por 4 indivíduos, onde o indivíduo 2 possui maior chance de ser selecionado que os demais.

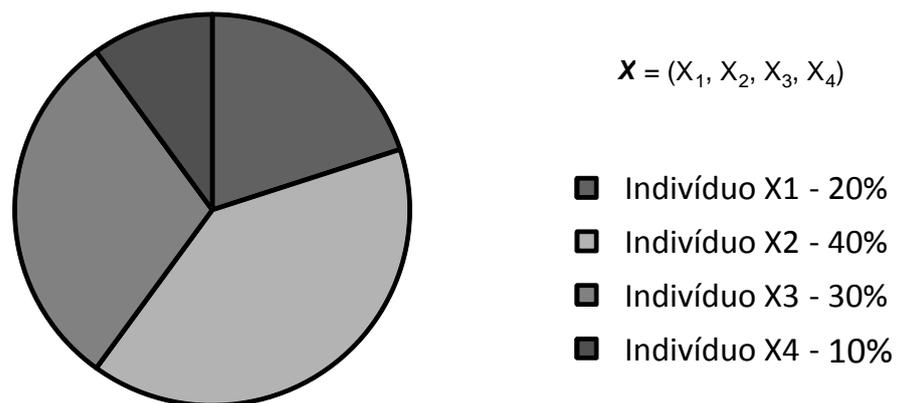


Figura 9 – Seleção via método da roleta.

A quantidade que a roleta rotaciona é determinada de forma randômica. Um número real entre 0 e 1 é gerado randomicamente e multiplicado por 360. Este método tem a desvantagem de possuir uma alta variância, podendo levar a um grande número de cópias de um bom indivíduo, podendo diminuir a diversidade da

população. Esta falha pode ocasionar uma convergência prematura do algoritmo para uma solução não almejada. Por outro lado, quando a evolução está avançada, onde as aptidões não diferem muito entre os indivíduos, observa-se uma estagnação do algoritmo.

3.3.4 Operador de cruzamento

Após a seleção dos indivíduos, a obtenção da nova população é feita pela aplicação dos operadores genéticos de cruzamento, mutação e elitismo. No processo de cruzamento ocorre a geração de dois novos indivíduos (denominados filhos) a partir da combinação dos genes de dois outros indivíduos previamente selecionados (ditos pais). De forma randômica, ou não, é (são) selecionado(s) o(s) parâmetro(s) ou variável(is) de projeto que irá(ão) sofrer a combinação. A Figura 10 mostra um processo de cruzamento entre dois indivíduos. Neste exemplo, a partir do quinto algarismo, os algarismos (parâmetros) do vetor X_1 são substituídos pelos algarismos (parâmetros) do vetor X_2 . A operação inversa é feita similarmente. Esta operação é feita considerando somente um ponto de cruzamento, mas pode ser realizada com mais pontos.

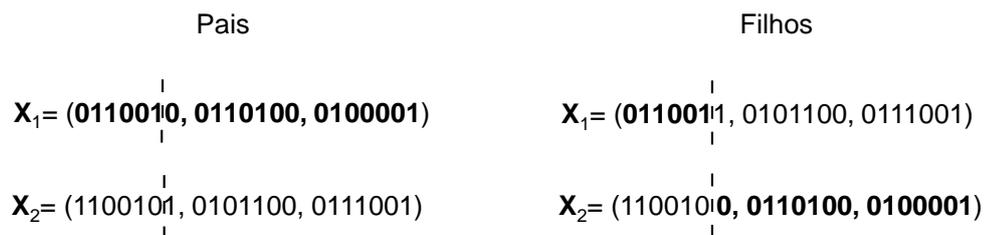


Figura 10 – Processo de cruzamento entre dois indivíduos.

3.3.5 Operador de mutação

A mutação pode ser feita com os indivíduos provenientes do cruzamento ou simplesmente provenientes da seleção. Neste processo, o indivíduo sofre perturbações em seus parâmetros de acordo com uma determinada probabilidade.

Existem muitas formas diferentes de fazer mutação, tais como (SIVANANDAM e DEEPA, 2008):

Flipping: Um pai é considerado e um indivíduo de mutação é gerado aleatoriamente. Quando o parâmetro é 1 no indivíduo de mutação, ocorre a mudança (1 para 0 ou vice-versa) no filho e os demais parâmetros são copiados do pai (Figura 11.a).

Interchanging: Duas posições da variável ou do indivíduo são selecionadas de forma aleatória e mudadas (Figura 11.b).

Reversing: Uma posição aleatória é escolhida e todos os próximos parâmetros são mudados (Figura 11.c).

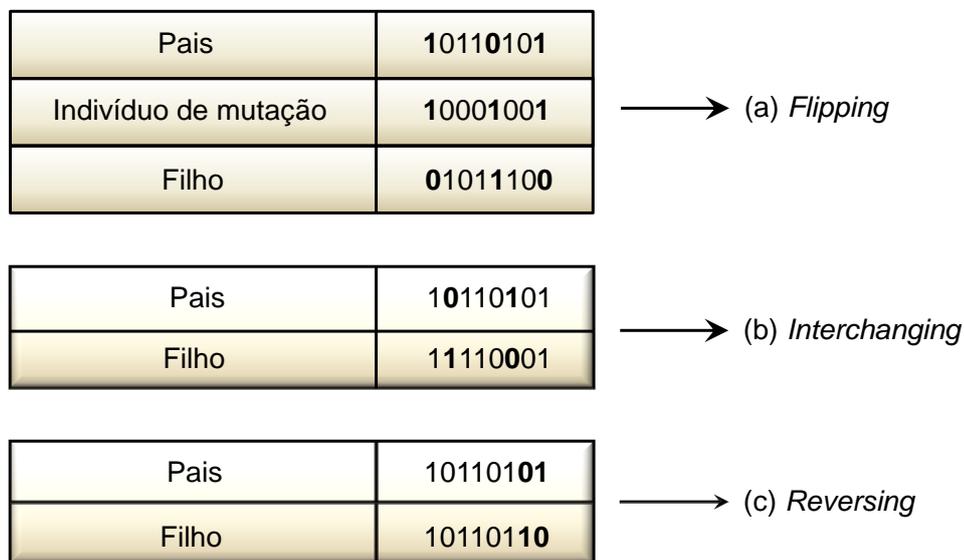


Figura 11 – Formas de realizar uma mutação (a) *Flipping*, (b) *Interchanging* e (c) *Reversing*.

Para a representação binária, uma mutação simples pode consistir em trocar o valor de um ou mais parâmetros codificados de 0 para 1 (mutação do tipo *Interchanging*), através de uma probabilidade. Além dos tipos de mutação supracitados, podem existir outras maneiras de realizar essa operação.

A probabilidade de mutação p_m é um parâmetro do algoritmo. Cuidados devem ser tomados, pois uma probabilidade pequena pode reduzir a diversidade da população e fazer com que o algoritmo convirja para um ótimo local. Goldberg (1989) sugere uma probabilidade de mutação entre 0,1% a 2% dos indivíduos da população.

É também possível aplicar um operador de mutação que só faz a mutação se melhorar a qualidade da solução. Tal operador é de grande importância, pois pode acelerar o processo de busca.

3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE TRELIÇAS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma ferramenta de simulação numérica para obtenção de soluções aproximadas para os diversos problemas de engenharia, como a análise de tensões, escoamento de fluido, transferência de calor *etc.*.

Segundo Reddy (2006), o método realiza uma discretização do domínio de análise em um conjunto de subdomínios denominado elementos. Em cada elemento a solução do problema é aproximada utilizando um conjunto discreto e de baixa dimensão de parâmetros (valores nodais) e funções de forma.

A aplicação do MEF se baseia na transformação de um problema de valores no contorno, dado pelo conjunto de equações diferenciais e as condições de contorno do problema, denominado de forma forte, em um problema equivalente, posto em forma integral e com requisitos de diferenciação das variáveis primárias mais enfraquecidas. Esta forma integral é denominada forma fraca.

O problema de valor de contorno, aplicado à solução de um problema de barra unidimensional, é governado por uma equação diferencial de segunda ordem e as condições de contorno, e pode ser posto como:

$$\left\{ \begin{array}{l} -EA(x)\frac{d^2u}{dx^2} = q(x), \\ + \text{condições de contorno} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

onde $A(x)$ corresponde à área da barra, E ao módulo de elasticidade e $q(x)$ ao termo de carregamento distribuído de domínio.

Uma outra abordagem se dá pela aplicação do Princípio do Trabalho Virtual (COOK *et al.*, 2002), recaindo na forma variacional:

$$\text{Encontrar } u \in U, \text{ tal que } B(u, w) = I(w), \quad \forall w \in V, \quad (3.6)$$

sendo u a solução do problema, w uma variação admissível qualquer, U o conjunto de funções admissíveis, V o conjunto de funções de variações admissíveis,

B a forma bilinear associada à equação diferencial e I o funcional linear associado aos termos de carregamento.

Neste trabalho, o elemento de barra atende às seguintes condições:

- 1) Na barra não atuam tensões de flexão, torção ou cisalhamento, suportando somente cargas axiais;
- 2) Material linear, elástico e isotrópico; e
- 3) Pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

É suposto que em um elemento finito 1D de comprimento $L^{(e)}$ (Figura 12), o campo de deslocamentos $\bar{u}^e(x)$ pode ser aproximado de maneira linear como

$$\bar{u}^e(x) = N_1^{(e)}(x)\bar{u}_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)\bar{u}_2^{(e)}, \quad (3.7)$$

onde $\bar{u}_1^{(e)}$ e $\bar{u}_2^{(e)}$ são os deslocamentos dos nós 1 e 2 no sistema local de coordenadas e

$$\begin{aligned} N_1^{(e)}(x) &= 1 - \frac{x - x_1^{(e)}}{L^{(e)}} \text{ e} \\ N_2^{(e)}(x) &= \frac{x - x_1^{(e)}}{L^{(e)}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Neste caso $N_i^{(e)}(x)$ e $x_i^{(e)}$ correspondem à função de forma e à coordenada associada ao i -ésimo nó do elemento (e), sendo $i = 1$ a 2.

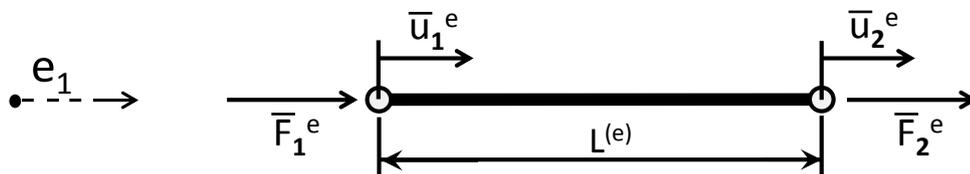


Figura 12 – Elemento finito linear de barra no sistema local de coordenadas.

Aplicando a forma variacional ao problema de valor de contorno (Equação 3.5) e considerando o domínio elementar, obtém-se um sistema matricial de equações que relaciona o vetor de deslocamentos nodais ($\bar{\mathbf{u}}^e$) e o vetor de forças nodais ($\bar{\mathbf{F}}^e$) através da matriz de rigidez ($\bar{\mathbf{K}}^e$), todos elementares, na forma

$$\bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{u}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e. \quad (3.9)$$

Para este problema,

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{A^{(e)} E^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde $A^{(e)}$ é a área da seção transversal da barra, $E^{(e)}$ o módulo de elasticidade (módulo de Young) e $L^{(e)}$ o comprimento do elemento. Nota-se que esse sistema de equações é definido em um sistema de coordenadas local para o elemento.

3.4.1 Treliça tridimensional

Considerando uma treliça tridimensional, um elemento unidimensional de barra ligado por dois nós, num sistema de referência global 3D (Figura 13), é expresso através do vetor dos cossenos diretores (Figura 14), por

$$\lambda^{(e)} = \cos\theta_1^{(e)} \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\theta_2^{(e)} \cdot \mathbf{e}_2 + \cos\theta_3^{(e)} \cdot \mathbf{e}_3, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{e}_i , com $i=1, \dots, 3$, corresponde aos vetores unitários da base do sistema global de coordenadas e θ_i ao ângulo do cosseno diretor.

É possível, dessa maneira, obter a matriz de transformação de coordenadas $[\mathbf{R}]^{(e)}$, que relaciona tanto o vetor de deslocamentos quanto o vetor de forças, definidos no sistema de coordenadas global tridimensional, à suas representações no sistema local. Neste caso, esta matriz é dada por

$$[\mathbf{R}]^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1^{(e)} & \cos\theta_2^{(e)} & \cos\theta_3^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_1^{(e)} & \cos\theta_2^{(e)} & \cos\theta_3^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Desta forma, a matriz de rigidez no sistema de coordenadas local, \bar{K}^e é transformada para um sistema tridimensional de coordenadas pela expressão

$$[K^{(e)}] = [R]^{(e)T} \frac{A^{(e)}E}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [R]^{(e)}. \quad (3.13)$$

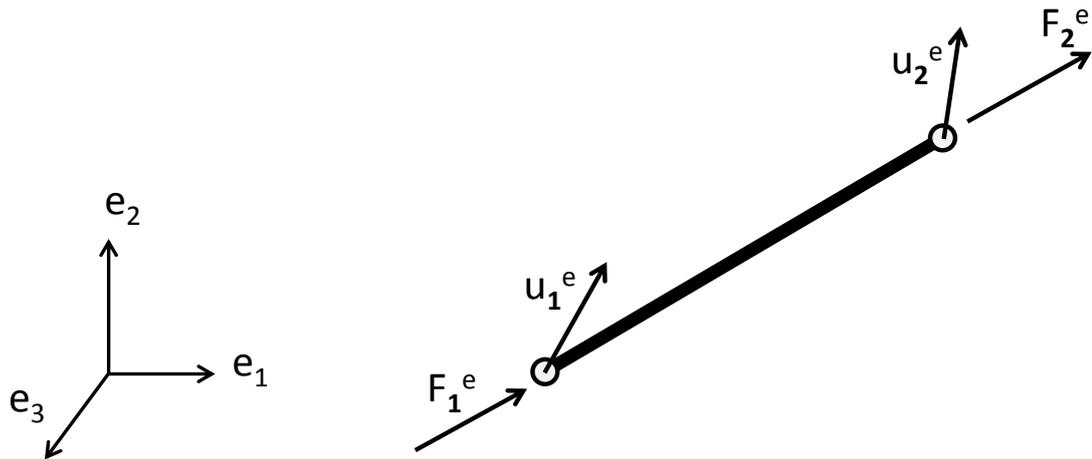


Figura 13 – Elemento finito posto no sistema global de coordenadas.

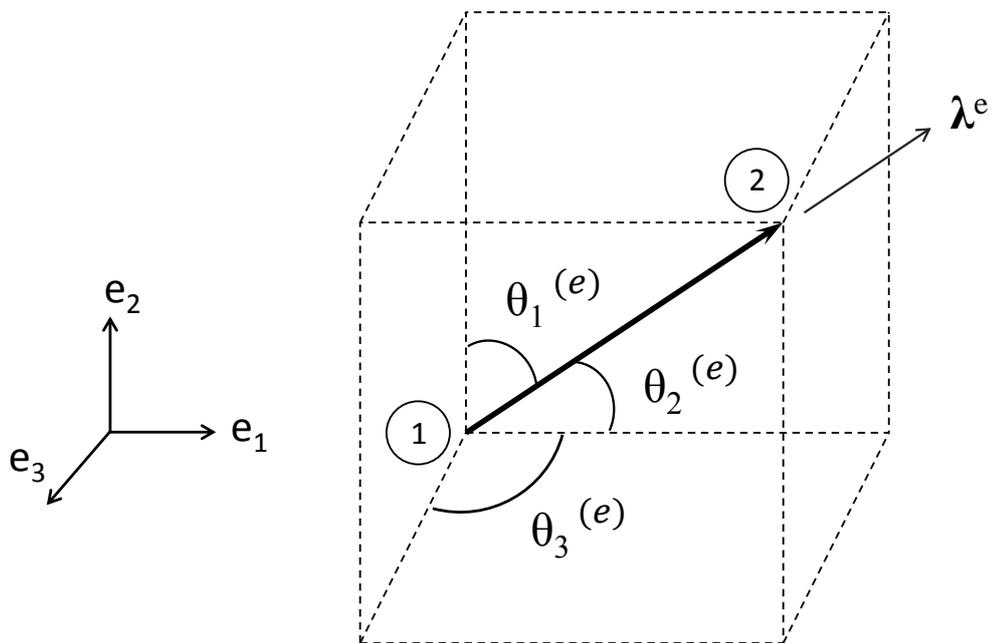


Figura 14 – Sistema global de referência.

Os deslocamentos e as forças nodais nos nós 1 e 2 do elemento, são expressos em componentes no sistema global 3D, respectivamente, como

$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \end{Bmatrix} = [R]^{(e)} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(e)} \\ u_{1y}^{(e)} \\ u_{1z}^{(e)} \\ u_{2x}^{(e)} \\ u_{2y}^{(e)} \\ u_{2z}^{(e)} \end{Bmatrix} = [R]^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad \text{e} \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{(e)} \\ \bar{F}_2^{(e)} \end{Bmatrix} = [R]^{(e)} \begin{Bmatrix} F_{1x}^{(e)} \\ F_{1y}^{(e)} \\ F_{1z}^{(e)} \\ F_{2x}^{(e)} \\ F_{2y}^{(e)} \\ F_{2z}^{(e)} \end{Bmatrix} = [R]^{(e)} \mathbf{F}^{(e)}. \quad (3.15)$$

O sistema global de equações pode ser obtido através de um adequado processo de superposição dos sistemas de equações elementares, resultando em

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.16)$$

Neste caso \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos globais de todos os nós e \mathbf{f} o vetor de forças externas nodais aplicadas à estrutura.

Considerando que alguns nós possuem deslocamentos conhecidos (vínculos e deslocamentos prescritos), estas informações são introduzidas ao sistema (3.16) resultando no sistema final linear de equações

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.17)$$

Neste caso, $\bar{\mathbf{K}}$ é a matriz de rigidez final e $\bar{\mathbf{f}}$ o vetor de forças externas nodais modificados pela aplicação das condições de contorno de Dirichlet. O vetor $\bar{\mathbf{x}}$ representa os deslocamentos nodais ainda desconhecidos na estrutura.

O sistema de equações (3.17) é resolvido por alguma técnica adequada, sendo obtidos todos os deslocamentos da estrutura (\mathbf{u}). Caso necessário, em uma

etapa posterior, utilizando os deslocamentos obtidos, podem ser calculados também as forças reativas.

3.4.2 Pós-processamento

Com o valor de todos os deslocamentos nodais \mathbf{u} , é possível calcular as deformações e as tensões por diferenciação em cada elemento. Como o trabalho proposto tem por objetivo minimizar a massa de uma estrutura treliçada considerando como restrições do projeto a falha material e a flambagem local, o cálculo das tensões é imprescindível. Como são considerados como premissas pequenos deslocamentos e pequenas deformações, as deformações elementares podem ser obtidas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \frac{\Delta L}{L^{(e)}} = \frac{\bar{u}_2^{(e)} - \bar{u}_1^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{\mathbf{u}_2^{(e)} - \mathbf{u}_1^{(e)}}{L^{(e)}} \cdot \lambda^{(e)}, \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{u}_1^{(e)}$ e $\mathbf{u}_2^{(e)}$ correspondem aos deslocamentos dos nós 1 e 2 no sistema global de coordenadas, respectivamente.

Considerando o material elástico, linear e isotrópico, a relação constitutiva recai na Lei de Hooke para um caso unidimensional e as tensões elementares podem ser obtidas como

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = E \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \frac{E}{L^{(e)}} (\mathbf{u}_2^{(e)} - \mathbf{u}_1^{(e)}) \cdot \lambda^{(e)}. \quad (3.19)$$

Assim, dado um valor de tensão no elemento, o algoritmo é capaz de identificar se a restrição está sendo agredida, ou seja, se a tensão na barra excede uma tensão admissível.

4 PROBLEMA PROPOSTO

Este capítulo tem como finalidade expor a formulação geral na qual fundamenta-se o presente trabalho. Inicialmente, é apresentado um breve resumo do equacionamento matemático para o problema de otimização estrutural dimensional e de forma do problema proposto. Na sequência, são apresentadas as formulações para a penalização das restrições e para os operadores genéticos adaptativos de cruzamento e mutação, bem como a metodologia computacional do problema de otimização topológica. Ao final do capítulo é apresentada a estrutura computacional implementada.

4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Neste trabalho, as informações necessárias para descrever o problema padrão de otimização podem ser escritas como:

Função objetivo: É uma função que descreve o mérito de cada configuração do sistema ao longo do processo de busca da solução ótima. Para o problema em tela, trata-se da massa total da estrutura, ou seja, a soma das massas de todos os elementos ($Nels$). Considerando ρ a densidade do material, $A^{(e)}$ a área da seção transversal do elemento e $L^{(e)}$ o comprimento do elemento. A massa total da estrutura M é dada por

$$M = \sum_{e=1}^{Nels} \rho A^{(e)} L^{(e)}. \quad (4.1)$$

Variáveis de projeto: Correspondem aos parâmetros que se alteram no processo de otimização. Neste trabalho, o vetor de variáveis de projeto (\mathbf{x}) é composto das áreas da seção transversal dos elementos \mathbf{A} , que podem variar de forma contínua ou discreta, e também das coordenadas nodais móveis (predeterminadas) \mathbf{X}_m , variando somente continuamente, o qual pode ser posto como

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}, \mathbf{X}_m). \quad (4.2)$$

Restrições: As limitações do projeto são descritas na formulação do problema de otimização, na forma de funções restrições impostas ao mesmo. As restrições consideradas neste trabalho são quanto à falha material, instabilidade local e deslocamentos nodais. Ou seja, a tensão no elemento não deve exceder valores limites de tensão em tração (σ_t), em compressão (σ_c), em relação à tensão crítica de flambagem de Euler $\sigma_F^{(e)}$, obtida em cada barra, e para alguns nós predeterminados, estes não devem exceder um valor de deslocamento limite prescrito u_p . Assim, estes quatro conjuntos de restrições comportamentais do sistema podem ser postos, como

$$g^{(e)} = \sigma^{(e)} - \sigma_t \leq 0, \quad (4.3)$$

$$g^{(e+NeIs)} = -\sigma^{(e)} - \sigma_c \leq 0, \quad (4.4)$$

$$g^{(e+2NeIs)} = -\sigma^{(e)} - \sigma_F^{(e)} \leq 0, \quad (4.5)$$

$$g^{(gl+3NeIs)} = |u^{(gl)}| - u_p \leq 0, \quad (4.6)$$

sendo $e=1,\dots,NeIs$ e $gl=0,\dots,GLsR$, onde $GLsR$ corresponde ao número de graus de liberdade associados aos nós restritos ao deslocamento. A tensão crítica de flambagem $\sigma_F^{(e)}$, é dada pela equação de flambagem elástica de Euler de uma coluna biarticulada, como

$$\sigma_F^{(e)} = \frac{\pi^2 EI^{(e)}}{A^{(e)} L^{(e)2}}, \quad (4.7)$$

sendo $I^{(e)}$ o menor momento de inércia da seção transversal do elemento (momento de segunda ordem de área).

Outra restrição necessária para este problema é baseada no Teorema de Weierstrass, onde o conjunto viável S deve ser fechado e limitado (Item 3 do teorema). Portanto, limites simples devem ser impostos à todas as variáveis de projeto do problema. Ou seja, para cada uma das barras o valor da área não deve ultrapassar um valor limite superior (A_u) e nem deve ser menor que um valor limite inferior (A_l),

$$g^{(e+3Nels+GLsR)} = A^{(e)} - A_u \leq 0 \text{ e} \quad (4.8)$$

$$g^{(e+4Nels+GLsR)} = -A^{(e)} + A_l \leq 0. \quad (4.9)$$

Além disso, cada uma das coordenadas nodais móveis também devem possuir limites similares. Ou seja,

$$g^{(5Nels+GLsR+k)} = X_{mk}^{(ino)u} - X_{mk}^{(ino)l} \leq 0 \text{ e} \quad (4.10)$$

$$g^{(5Nels+GLsR+NGLm+k)} = -X_{mk}^{(ino)} + X_{mk}^{(ino)l} \leq 0, \quad (4.11)$$

onde, $X_{mk}^{(ino)u}$ e $X_{mk}^{(ino)l}$ representam, respectivamente, os limites superior e inferior da coordenada k-ésima do nó móvel ino , onde $ino = 0, \dots, NNom$, sendo $NNom$ o número total de nós móveis e $k = 0, \dots, NGLm$, onde $NGLm$ corresponde ao número total de graus de liberdade móveis.

Tomando como base essas informações supracitadas, o problema padrão de otimização do presente trabalho pode ser posto como:

$$\text{Minimizar} \quad M = \sum_{e=1}^{Nels} \rho A^{(e)} L^{(e)} \quad (4.12.a)$$

$$\text{Sujeito a} \quad g^{(e)} = \sigma^{(e)} - \sigma_t \leq 0, \quad (4.12.b)$$

$$g^{(e+Nels)} = -\sigma^{(e)} - \sigma_c \leq 0, \quad (4.12.c)$$

$$g^{(e+2Nels)} = -\sigma^{(e)} - \sigma_F^{(e)} \leq 0, \quad (4.12.d)$$

$$g^{(gl+3Nels)} = |u^{(gl)}| - u_p \leq 0, \quad (4.12.e)$$

$$g^{(e+3Nels+GLsR)} = A^{(e)} - A_u \leq 0, \quad (4.12.f)$$

$$g^{(e+4Nels+GLsR)} = -A^{(e)} + A_l \leq 0, \quad (4.12.g)$$

$$g^{(5Nels+GLsR+k)} = X_{mk}^{(ino)u} - X_{mk}^{(ino)l} \leq 0 \text{ e} \quad (4.12.h)$$

$$g^{(5Nels+GLsR+NGLm+k)} = -X_{mk}^{(ino)} + X_{mk}^{(ino)l} \leq 0. \quad (4.12.i)$$

4.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O trabalho proposto tem por objetivo obter a melhor configuração dos elementos numa dada estrutura treliçada, a fim de atingir a menor massa possível, atendendo alguns critérios comportamentais da mesma. Em termos matemáticos, não é possível garantir que o problema seja convexo, portanto, podem ocorrer pontos de mínimos locais. Uma forma de evitar este problema é pela utilização de uma técnica híbrida de otimização, pelo emprego de dois algoritmos de diferentes naturezas:

Otimização via AG: O AG é capaz de localizar, de forma aproximada ou exata, uma configuração ótima global. Além disso, como as variáveis de projeto podem variar de forma discreta e contínua, simultaneamente, é necessária uma programação que leve em consideração esta característica.

Otimização via PNL: Neste caso, quando cabível, é utilizada uma ferramenta para a busca local, que se dá por PNL, sendo utilizada a rotina *fmincon* do *toolbox* do Matlab®.

Quando considerados os processos de otimizações dimensional e de forma simultaneamente, a otimização via AG realizará o processo de busca global a fim de encontrar a melhor configuração de barras disponíveis comercialmente \mathbf{A} , com variáveis discretas, e a melhor disposição das coordenadas móveis determinadas (\mathbf{X}_m), com variáveis contínuas. Com a solução ótima obtida pelo AG, inicia-se um processo de otimização via PNL, onde as variáveis de projeto são somente as coordenadas nodais móveis (\mathbf{X}_m), mantendo fixas as áreas obtidas através do processo anterior.

Outra abordagem também possível de realizar, utiliza como variáveis de projeto as áreas e as coordenadas variando continuamente. Assim, o AG é capaz de obter uma aproximação do ótimo global e, a partir desse ponto (indivíduo), parte para a PNL em busca do ótimo local, pois sabe-se que o AG pode levar um tempo relativamente alto para localizar o ótimo global com uma boa precisão.

4.2.1 Penalização Adaptativa das Restrições

Como não há uma única forma de definir a penalização em problemas com restrições, várias propostas podem ser encontradas na literatura (COELLO, 1999; RAJAEV e KRISHNAMOORTHY, 1992; ERBATUR *et al.*, 2000 e CHEN e RAJAN, 2000). Comumente, a intensidade da penalização depende do valor de diferentes fatores tratados como constantes predefinidas durante o cálculo da função de penalização. Na maioria dos casos, os valores destes fatores são definidos por um processo de tentativa e erro. A intensidade de penalidade pode ser controlada variando esses parâmetros que, por sinal, são muito difíceis de selecionar e, na prática, um valor é usado para todos os coeficientes, o que simplifica significativamente a situação.

Aqui é apresentado um sistema de penalização adaptativa que é capaz de se ajustar automaticamente durante o processo de otimização por AG. Neste caso, a função objetivo original do problema, $f(x)$ (Equação 4.1), é modificada utilizando penalizações e gerando uma função objetivo penalizada, $\Phi(x)$, na forma:

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } N_c = 0 \text{ e} \\ (f_u - f_l) + ((P + N_c)f(x)), & \text{se } N_c > 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

onde N_c corresponde ao número de restrições agredidas pelo indivíduo e f_u e f_l são os valores máximo e mínimo da função objetivo da corrente geração. $P = \sum_{cons=1}^{NCons} P_{cons}$ é a penalização associada à n -ésima restrição agredida (P_{cons}), dada por

$$P_{cons} = \begin{cases} \left(\frac{1,1g_u - g_m}{1,1g_u - g^{(cons)}} \right) & \text{se } g^{(cons)} \geq g_m, \\ \left(\frac{g^{(cons)} - 0,9g_l}{g_m - 0,9g_l} \right) & \text{se } g^{(cons)} < g_m \text{ e} \\ 0 & \text{se } g^{(cons)} \leq 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Neste caso, g_u , g_m e g_l correspondem, respectivamente, aos valores máximo, médio e mínimo das restrições violadas da corrente geração, $g^{(cons)}$ corresponde à corrente restrição avaliada e $NCons$ ao número total de restrições do problema.

A Figura 15 mostra uma representação, através de um exemplo, da função de penalização das restrições adaptativa (Equação 4.13). Nesta, é suposto que cada bloco representa um indivíduo e que o bloco verde corresponde ao único indivíduo que esteja agredindo alguma restrição ($N_c > 0$). O primeiro termo da função de penalização ($f_u - f_l$) permite que este indivíduo fique com sua função objetivo, no mínimo, com o mesmo valor da máxima função objetivo não penalizada da população (Figura15b). Como este indivíduo deve ser pior que todos os outros, pois é inactível, é necessário que a função objetivo deste seja maior que a dos demais indivíduos factíveis. Para isto, o segundo termo da função de penalização $(P + N_c)f(x)$ faz com que a função objetivo do mesmo aumente, tornando sua função objetivo maior do que a dos indivíduos factíveis e consequentemente, neste exemplo, a maior da população.

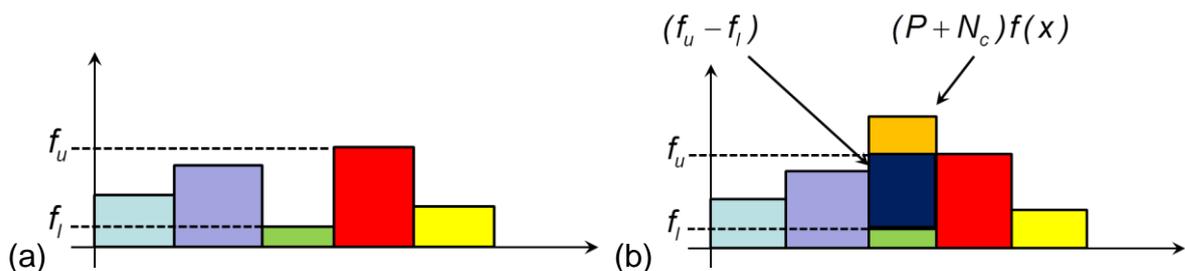


Figura 15 – Exemplo de aplicação da função de penalização das restrições, (a) com as funções objetivo original da população e (b) com a função penalizada.

4.2.2 Aptidão (*Fitness*)

Em geral, em problemas de otimização com restrições utilizando AG, os indivíduos gerados numa população podem estar agredindo alguma(s) restrição(ões). Para evitar que esses indivíduos (que não se encontram na região viável) tenham uma boa aptidão, é inserida uma penalização nesses, como mencionado no item 4.2.1. Um problema que pode ocorrer nesse tipo de situação é que os indivíduos que estão na região viável (soluções factíveis) podem não se destacar dos outros indivíduos que são inviáveis, ou seja, a aptidão dos indivíduos factíveis pode não ser suficientemente melhor que a dos inactíveis. Comumente, o cálculo da aptidão (*fitness*) para o i -ésimo indivíduo é feito a partir dos valores das funções objetivo penalizadas, dados por

$$fit_i = 100 \frac{(\Phi_u - \Phi_i)}{(\Phi_u - \Phi_l)}, \quad (4.15)$$

onde fit_i corresponde a aptidão do corrente indivíduo, Φ_u e Φ_l correspondem aos valores máximo e mínimo das funções objetivo penalizadas, respectivamente, e Φ_i é a função objetivo penalizada do i -ésimo indivíduo analisado. Esses valores podem variar com várias ordens de grandeza. Com isso, na obtenção da aptidão, os indivíduos viáveis possuem valores muito próximos dos inviáveis, o que não diferencia de maneira significativa o mérito de cada indivíduo viável. Para evitar esse tipo de problema, o presente trabalho propõe utilizar a função logaritmo da função penalizada. Assim há uma maior evidência de que os indivíduos factíveis possuem uma aptidão suficientemente maior do que a dos infactíveis. Neste caso, a aptidão (*fitness*) do i -ésimo indivíduo é dada por

$$fit_i = 100 \frac{(\log_{10} \Phi_u - \log_{10} \Phi_i)}{(\log_{10} \Phi_u - \log_{10} \Phi_l)}. \quad (4.16)$$

4.2.3 Operadores Adaptativos de Cruzamento e Mutação

Os operadores genéticos são aplicados para produzir novas soluções candidatas. Tanto no AG simples, quanto em versões melhoradas, os operadores de cruzamento e mutação são os que geralmente recebem mais atenção em relação aos outros operadores genéticos. Embora a escolha das probabilidades de mutação (p_m) e de cruzamento (p_c) afetem fortemente o desempenho do AG, a literatura não fornece valores fixos para estes parâmetros. Tradicionalmente, os operadores de cruzamento e de mutação são baseados num mecanismo randômico.

Os processos de cruzamento e mutação adaptativos operam de acordo com o valor da aptidão dos indivíduos. As probabilidades de cruzamento P_c e de mutação P_m adaptativas desenvolvidas neste trabalho, são postas na seguinte forma:

$$P_c = \begin{cases} \frac{0,5 (fit_u - 2fit_m + fit_i)}{(fit_u - fit_m)} & \text{se } fit_i \geq fit_m \\ \frac{0,5 (fit_i - fit_l)}{(fit_m - fit_l)} & \text{se } fit_i < fit_m \text{ e} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$P_m = \begin{cases} \frac{0,25(2fit_m - fit_l - fit_i)}{(fit_m - fit_l)} & \text{se } fit_i < fit_m, \\ \frac{0,25(fit_u - fit_i)}{(fit_u - fit_m)} & \text{se } fit_i \geq fit_m \end{cases} \quad (4.18)$$

sendo fit_m a aptidão média da população e fit_u e fit_l os valores máximo e mínimo da aptidão da população, respectivamente.

A Figura 16a mostra uma representação da probabilidade de cruzamento adaptativo (Equação 4.17), onde quanto maior for a aptidão do indivíduo, maior chance de cruzar este possui. Com relação à probabilidade de mutação adaptativa (Equação 4.18), esta pode ser representada pela Figura 16b, onde, quanto menor for a aptidão do indivíduo, maior chance este possui de mutar.

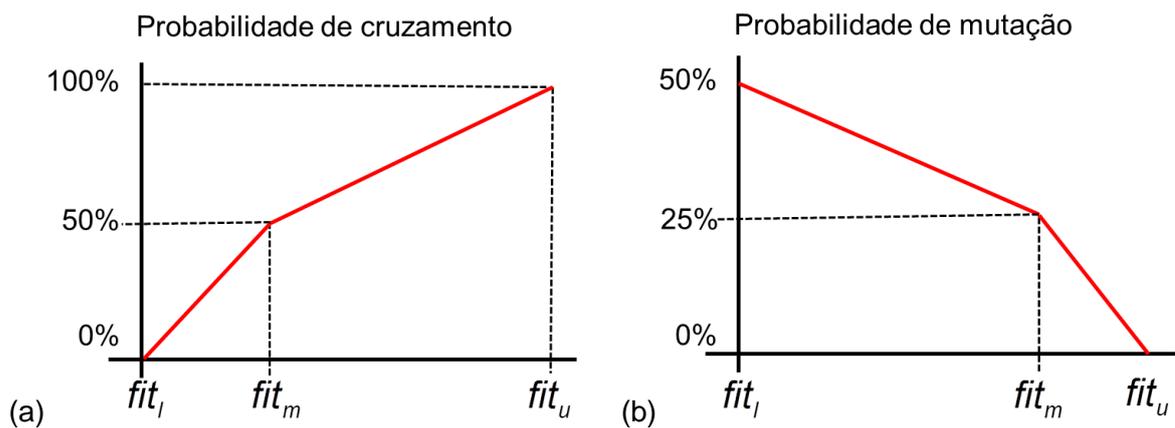


Figura 16 – (a) Representação da probabilidade de cruzamento e (b) de mutação.

4.3 METODOLOGIA COMPUTACIONAL

Em geral, a geração da população inicial no AG é realizada randomicamente. Com isso, pode ser gerada uma população em que todos os indivíduos (todas configurações) são inviáveis. Isso provoca uma deterioração do processo de busca do mínimo, visto que os valores das aptidões são dominados pelas penalizações das restrições agredidas. Para superar esta dificuldade, é aplicada a técnica *Fully Stressed Design* (Topping, 1983) com o objetivo de garantir a existência de pelo menos um indivíduo viável na população inicial. Esta técnica é melhor apresentada no Apêndice A.

4.3.1 Metodologia para o problema de otimização topológica

O grande problema em um processo de otimização topológica se encontra na eliminação dos elementos cujas áreas da seção transversal dos elementos sejam mínimas e também na eliminação dos nós que não conectam elemento algum. Quando considerado um problema utilizando variáveis de projeto de área discretas, pode-se cogitar como elementos suscetíveis à eliminação da estrutura, aqueles cuja área atingiu o valor mínimo disponível na lista de áreas do catálogo. Quando essas variáveis são contínuas, é necessário definir uma tolerância, onde os valores de área inferiores a essa tolerância indicam que o elemento é suscetível a desaparecer da estrutura.

Criação, detecção e eliminação de mecanismos: Quando os elementos são eliminados da estrutura, essa pode apresentar mecanismos. Isto significa que o elemento que desapareceu impedia o deslocamento do nó numa determinada direção e, quando esse desaparece, o nó fica com rigidez nula (ou quase nula) naquela direção (ou numa direção próxima). Dois exemplos de mecanismos são mostrados nas Figuras 17 e 18.

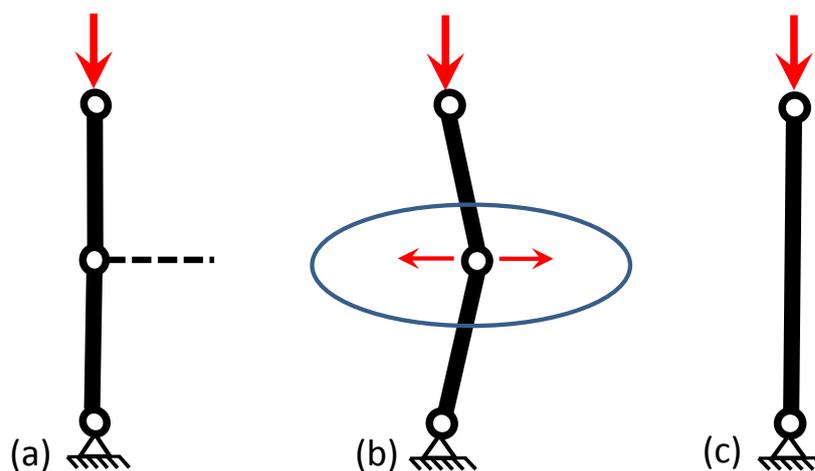


Figura 17 – Exemplo de tipo de mecanismo com duas barras alinhadas (a) estrutura inicial com a barra que evita o mecanismo, (b) mecanismo criado com a eliminação da barra e (c) solução para eliminar o mecanismo.

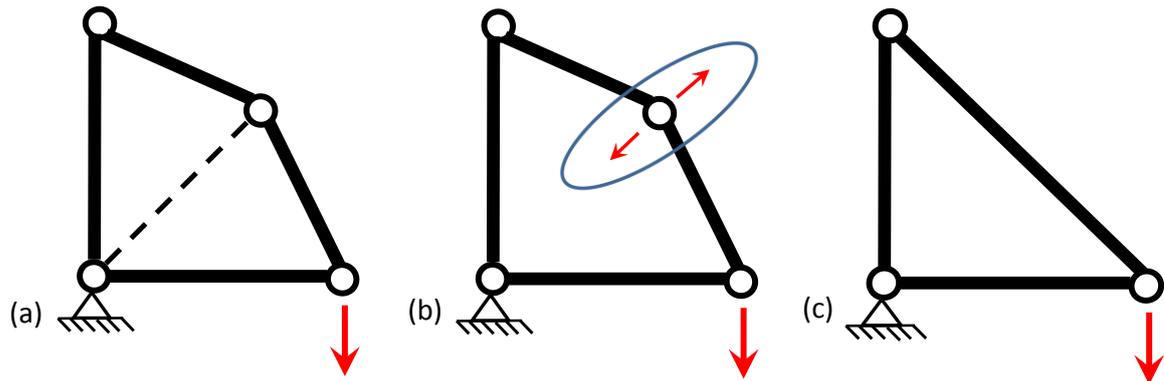


Figura 18 – Exemplo de tipo de mecanismo com duas barras quase alinhadas (a) estrutura inicial com a barra que evita o mecanismo, (b) mecanismo criado com a eliminação da barra e (c) solução para eliminar o mecanismo.

Tomando uma estrutura qualquer, como é apresentada na Figura 19, supõe-se que o nó *no* possui um mecanismo local, que pode ser detectado através dos valores da matriz de rigidez do sistema (\mathbf{K}).

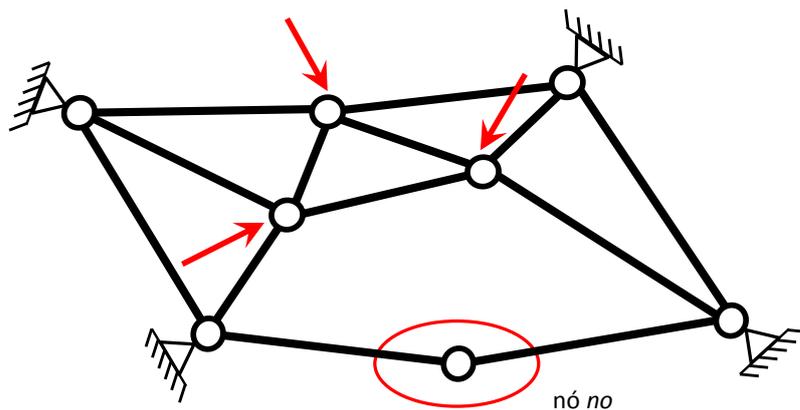


Figura 19 – Exemplo de estrutura para a identificação de mecanismo.

Neste caso, tomando a sub-matriz de rigidez que contém todos os graus de liberdade do nó *no*, dada por

$$k_{ij}^{no} = \begin{bmatrix} k_{11}^{no} & k_{12}^{no} & k_{13}^{no} \\ k_{21}^{no} & k_{22}^{no} & k_{23}^{no} \\ k_{31}^{no} & k_{32}^{no} & k_{33}^{no} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

onde k_{ij}^{no} corresponde a força aplicada no grau de liberdade i do nó *no*, para que ocorra um deslocamento unitário no grau de liberdade j ($u_j = 1$) e todos os outros deslocamentos são nulos, obtêm-se os seus autovalores, escritos como

$$k^{no} = \begin{bmatrix} k_{m\acute{a}x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{int} & 0 \\ 0 & 0 & k_{min} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

e os seus autovetores associados. Neste caso, $k_{m\acute{a}x}$, k_{min} e k_{int} correspondem, respectivamente, à maior, à menor e à rigidez intermediária que o nó no possui. Se k_{min} é um valor muito pequeno ($k_{min} < k_{tol}$, onde k_{tol} é um valor predeterminado), na direção do autovetor associado, a rigidez deste nó é muito pequena em relação à rigidez da estrutura. Isto evidencia um mecanismo local.

Uma maneira de evitar esse tipo de mecanismo é eliminando o nó e os dois elementos que conectam este nó com mecanismo, inserindo-se um único elemento conectando os nós cujos elementos eliminados eram conectados (Figuras 17c e 18c). Caso haja alguma força ou um vínculo nesse nó com mecanismo, o elemento eliminado é recuperado. Nesse caso não é feita a modificação da topologia, pois esse elemento é necessário para não comprometer a estrutura.

Colapso de nós: Outra possível alternativa para a eliminação de elementos e/ou de nós que não possuam mais função alguma numa determinada estrutura, é o colapso de nós. Nesse caso, no processo de otimização dimensional e de forma, dois nós podem se aproximar ao ponto de ambos se tornarem um único nó. Com isso, há a necessidade de eliminar os elementos que conectam esses nós e eliminar o nó a ser colapsado. A Figura 20 mostra uma situação em que os nós podem ser colapsados.

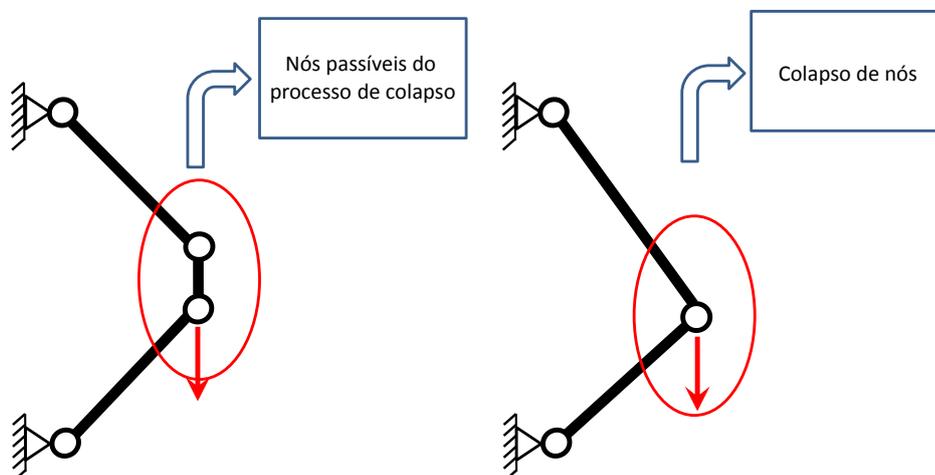


Figura 20 – Exemplo de uma situação onde os nós podem ser colapsados.

Algumas considerações devem ser feitas quando ocorre esse tipo de situação. A primeira é quando ambos os nós a serem colapsados possuem condição de contorno de vínculo (Dirichlet), como mostra a Figura 21a. Nesse caso, ambos os nós são colapsados e se tornam um único nó na posição central entre os nós colapsados, e um dos dois elementos é eliminado. Uma outra situação é quando somente um dos nós possui vínculo. Nesse caso, o nó que não possui vínculo desaparece e o elemento que conecta esse a um outro nó é eliminado, como mostra a Figura 21b.

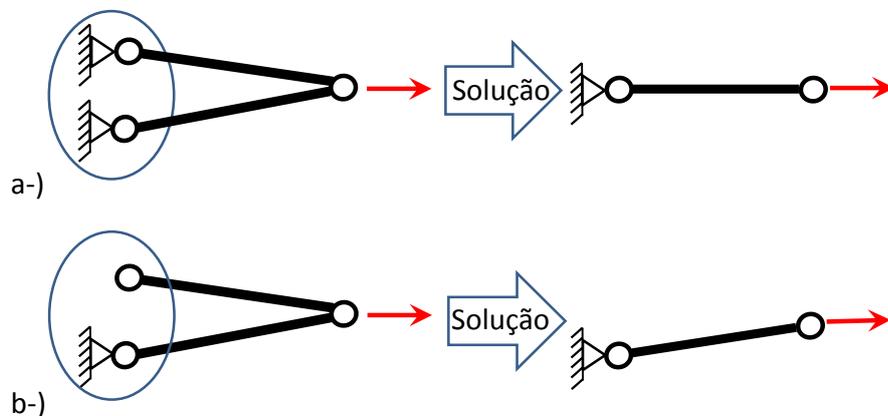


Figura 21 – Exemplo de situações para o colapso de nós, (a) condição de contorno de vínculo em ambos os nós e b) em somente um dos nós.

Quando dois nós podem ser colapsados e ambos possuem condições de contorno de força (Neuman) não homogêneas, faz-se o colapso criando um nó no ponto médio entre aqueles a serem deletados e somam-se as forças aplicadas, como mostra um exemplo na Figura 22. Caso somente um dos nós possua força, faz-se o colapso de ambos os nós, porém mantém a posição do nó que possui a força aplicada como mostrado a Figura 20.

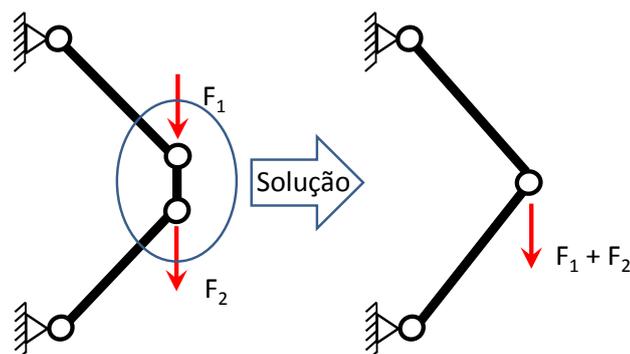


Figura 22 – Exemplo de situações para o colapso de nós quando ambos possuem condição de contorno de força (Neuman).

Após o processo de otimização topológica, algum(ns) elemento(s) pode(m) vir a ter falha material, ou por flambagem. O mesmo se aplica aos nós que possuem restrições quanto ao deslocamento nodal. Quando isso ocorre, a solução pode vir através de duas maneiras: a primeira utiliza PNL para ajustar as coordenadas nos nós móveis de maneira que não mais viole estas restrições. A segunda maneira toma a área dos elementos que estão agredindo a restrição de tensão ou de flambagem e aumenta-a conforme a conveniência. Quanto à restrição de deslocamentos nodais, também pode ser realizada uma análise de sensibilidade em relação à uma função restrição (APÊNDICE B), onde a área dos elementos que possuem uma sensibilidade maior é aumentada de acordo com a necessidade. A escolha de qual metodologia o algoritmo assume depende do resultado final que estas fornecem e se estas resolvem o problema.

Algoritmo da estrutura computacional: O algoritmo geral da estrutura computacional utilizada no presente trabalho pode ser representado através do fluxograma simplificado e apresentado na Figura 23.

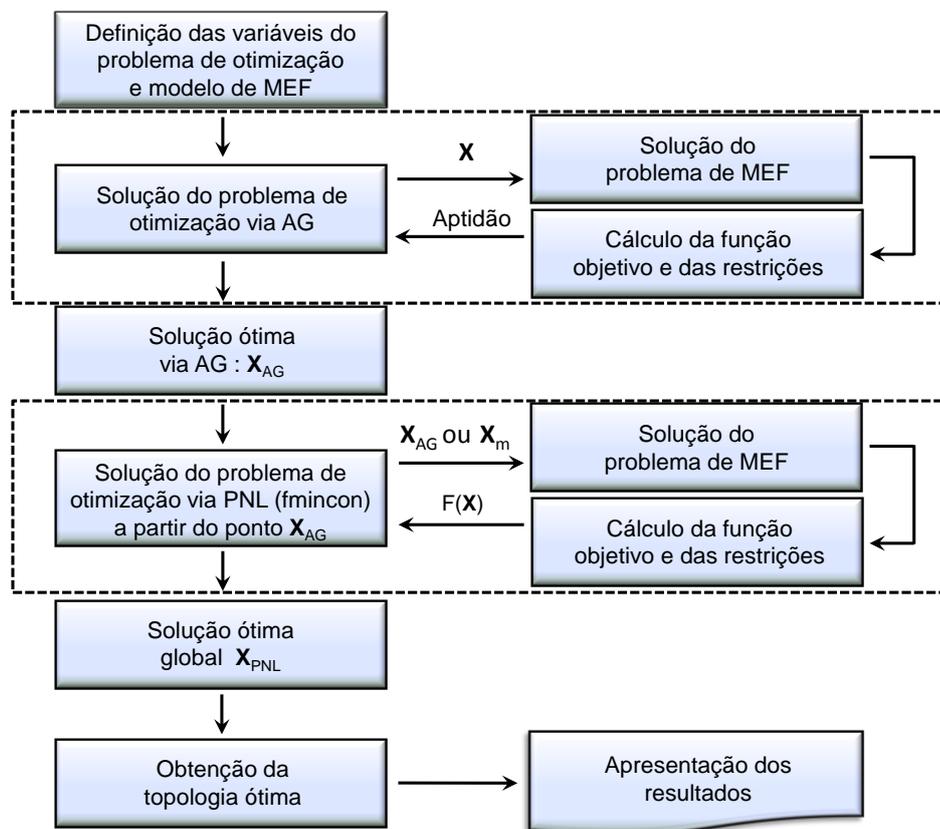


Figura 23 – Fluxograma geral do problema de otimização estrutural de treliça utilizando algoritmo híbrido.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados referentes à formulação e à metodologia propostas neste trabalho.

A solução ótima obtida pelo AG, ou seja, o melhor indivíduo da última geração avaliada, deve satisfazer ao menos um dos seguintes **critérios de parada**:

- a) Quando o valor médio da função objetivo penalizada da população não é alterado por 5 gerações;
- b) Quando a diferença entre os valores médio e mínimo da função objetivo modificada da população é equivalente a 1% da função objetivo mínima modificada;
- c) Quando atinge um valor limite de gerações.

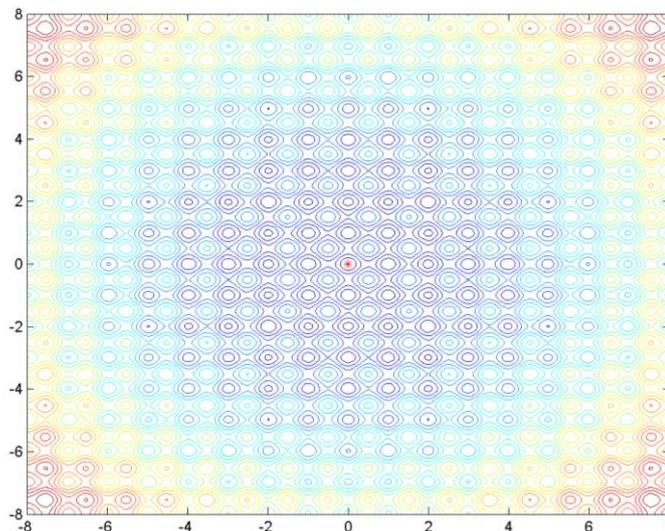
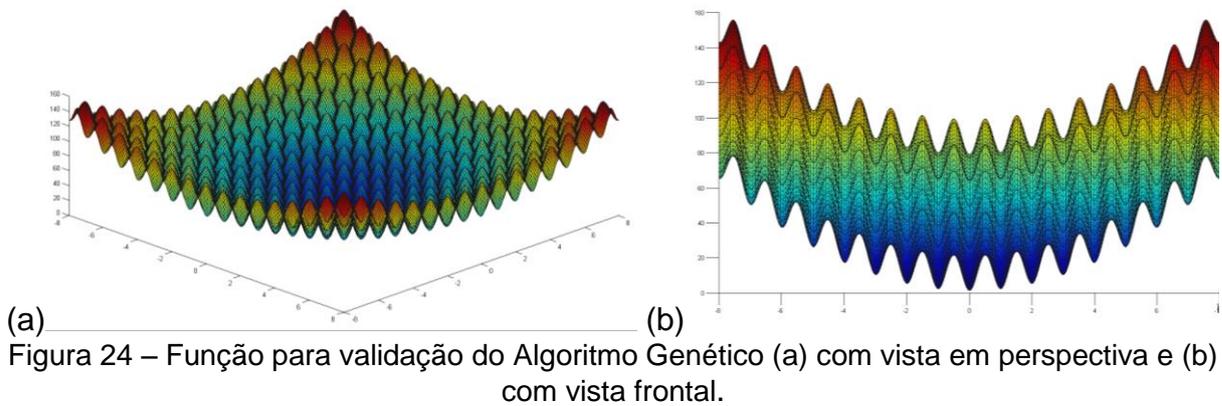
O número de análises executadas corresponde ao número de avaliações da função objetivo, ou seja, o número de indivíduos vezes o número de gerações.

Quanto aos parâmetros referentes ao AG, como o tamanho da população, o número de gerações e o número de indivíduos de elite, vários testes foram realizados e verificou-se que, com uma população inferior a 10 vezes o número de variáveis de projeto, os resultados convergiam prematuramente para um mínimo local. Assim, o tamanho da população adotado em todas as análises é de 10 vezes o número de variáveis de projeto. Com relação ao número de gerações, adotou-se 100 vezes o número de variáveis de projeto vezes o número de casos de carregamento. Tomando 10% dos indivíduos mais aptos da população, tem-se a quantidade de indivíduos de elite que passam para a próxima geração de forma direta, após as operações de cruzamento e mutação, ou seja, são inseridos na geração seguinte, porém, não são submetidos à nenhuma operação.

5.1 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

Para validar o AG implementado é utilizada uma função que possui muitos mínimos locais (Figuras 24.a e 24.b). Este problema inicialmente é solucionado sem considerar funções de restrição. As variáveis de projeto são as coordenadas x e y . A Figura 25 apresenta o resultado para o teste do AG, onde a solução ótima global pode ser visualizada. Portanto, o ponto ótimo global desta função sem restrições ocorre quando $x = 0$ e $y = 0$. Esta função é dada por

$$f(x, y) = 20 + x^2 + y^2 - 10(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)). \quad (5.1)$$



Como o problema proposto em tela trata da minimização de estruturas treliçadas considerando restrições, é importante que o AG seja capaz de solucionar uma função de validação considerando este tipo de característica. Neste caso, é utilizado a mesma função de validação e são consideradas as seguintes restrições:

$$g_1(x, y) = -y - x - 8 \leq 0, \quad (5.2)$$

$$g_2(x, y) = -y + x - 8 \leq 0, \quad (5.3)$$

$$g_3(x, y) = y - \frac{x}{2} + 4 \leq 0 \text{ e} \quad (5.4)$$

$$g_4(x, y) = y - \frac{x}{2} - 4 \leq 0. \quad (5.5)$$

O ponto de ótimo ocorre com a restrição g_4 ativa e pode ser obtido analiticamente, sendo $x = 2$ e $y = -3$. A Figura 26 mostra um corte da função objetivo de validação feito ao longo da restrição g_4 . A solução fornecida pelo AG é $x = 1,9941$ e $y = -3,0264$ e pode ser visualizada na Figura 27, onde as linhas retas em azul representam as restrições, a região hachurada corresponde à região viável e o ponto vermelho representa a solução ótima obtida pelo AG.

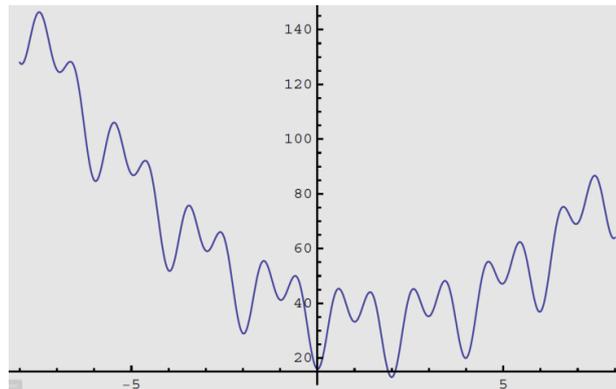


Figura 26 – Plotagem da função de validação do AG, com o corte na restrição g_4 .

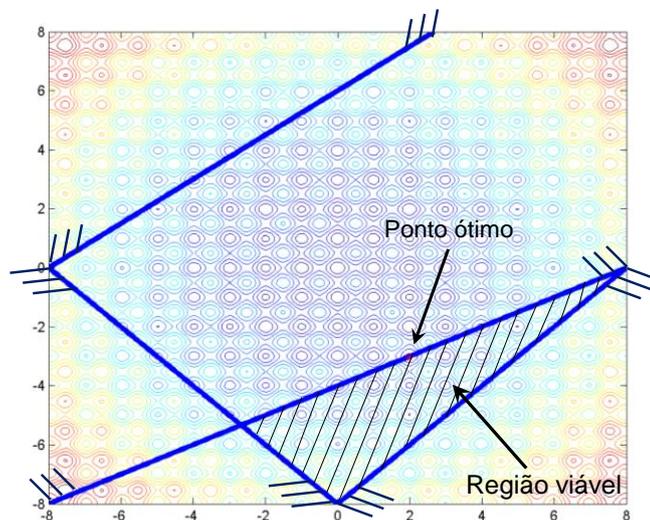


Figura 27 – Representação da região viável e solução obtida na validação do AG, considerando restrições impostas ao problema.

5.2 ABORDAGENS DISCUTIDAS NOS EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com a validação do AG, seis casos clássicos encontrados na literatura foram avaliados a fim de comparar a metodologia em tela com os demais autores. Quatro abordagens podem ser adotadas nos processos de otimização:

Abordagem 1: Trata do problema de otimização dimensional, considerando como variáveis de projeto somente a área da seção transversal das barras da estrutura.

Abordagem 2: Ocorre através da modificação da topologia da estrutura, partindo do resultado obtido no processo anterior de otimização dimensional, caso a estrutura possua elementos com o menor valor de área disponível nas listas (para variáveis discretas) ou menor que uma tolerância de área (para os problemas considerando variáveis contínuas).

Abordagem 3: Se dá através da inserção das variáveis de projeto de coordenadas móveis, caracterizando um processo de otimização dimensional e de forma (geométrica), sendo que as variáveis de projeto de área podem variar de forma discreta ou contínua e as variáveis de coordenadas variam somente continuamente.

Abordagem 4: Finalmente, a última abordagem trata da otimização dimensional, de forma e topológica, através da eliminação dos elementos pouco solicitados detectados no processo anterior de otimização dimensional e de forma.

Nos casos avaliados, uma ou mais abordagens podem ser consideradas. Isso varia conforme as propostas encontradas na literatura.

5.3 LISTAS DE ELEMENTOS (BARRAS/TUBOS) DISCRETOS

Como o objetivo aqui é uma comparação com a literatura, a área da seção transversal de cada elemento da estrutura pode variar conforme seis listas, dependendo do caso analisado. Estas listas funcionam como catálogos disponíveis comercialmente. Foram utilizadas listas de acordo com as referências citadas:

Lista 1 – Jenkins (2002): {0,100; 0,347; 0,440; 0,539; 0,954; 1,081; 1,174; 1,333; 1,488; 1,764; 2,142; 2,697; 2,800; 3,131; 3,565; 3,813; 4,805; 5,952; 6,572; 7,192; 8,525; 9,300; 10,850; 13,330; 14,290; 17,170; 19,180; 23,680; 28,080; 33,700 (pol²)};

Lista 2 – Lee e Geem (2004): {1,62; 1,80; 1,99; 2,13; 2,38; 2,62; 2,63; 2,88; 2,93; 3,09; 3,13; 3,38; 3,47; 3,55; 3,63; 3,84; 3,87; 3,88; 4,18; 4,22; 4,49; 4,59; 4,80; 4,97; 5,12; 5,74; 7,22; 7,97; 11,50; 13,50; 13,90; 14,20; 15,50; 16,00; 16,90; 18,80; 19,90; 22,00; 22,90; 26,50; 30,00; 33,50 (pol²)};

Lista 3 – Nanakorn e Meesomklin (2001): {0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9; 3,0; 3,2; 3,4 (pol²)};

Lista 4 – Tang et al. (2005): {0,111; 0,141; 0,174; 0,220; 0,270; 0,287; 0,347; 0,440; 0,539; 0,954; 1,081; 1,174; 1,333; 1,488; 1,764; 2,142; 2,697; 2,800; 3,131; 3,565; 3,813; 4,805; 5,952; 6,572; 7,192; 8,525; 9,300; 10,850; 13,330; 14,290; 17,170; 19,180 (pol²)}.

Lista 5 – Hasancebi e Erbatur (2001): {0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9; 3,0; 3,2; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 4,0; 4,1; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 4,6; 4,7; 4,8; 4,9; 5,0 (pol²)};

Lista 6: Trata de tubos, sendo necessário considerar o diâmetro externo e o interno para o cálculo do momento de inércia da seção transversal do elemento. A Tabela 1 mostra os valores para o diâmetro nominal, o diâmetro externo, diâmetro interno e as áreas de acordo com a norma- AISC-ASD (*American Institute of Steel Construction – Allowable Strength Design*):

Tabela 1 – Seções transversais disponíveis conforme a lista 6 (norma AISC-ASD).

Diâmetro Nominal (pol)	Diâmetro Externo (pol)	Diâmetro Interno (pol)	Área (pol ²)
½	0,840	0,622	0,250
¾	1,050	0,824	0,333
1	1,315	1,049	0,494
1¼	1,660	1,380	0,669
1½	1,900	1,610	0,799
2	2,375	2,067	1,070
2½	2,875	2,469	1,700
3	3,500	3,068	2,230
3½	4,000	3,548	2,680
4	4,500	4,026	3,170

5.4 TRELIÇA PLANA DE 10 BARRAS

A estrutura treliçada de 10 barras (Figura 28) é um caso clássico encontrado na literatura. Neste problema, os membros estão restritos à uma tensão limite para a falha material de ± 25 ksi e cada nó da estrutura possui limites de deslocamentos de 2,0 pol. O material considerado possui densidade de 0,1 lbs/pol³ e 10000 ksi de

módulo de elasticidade. O carregamento é simultaneamente aplicado nos nós 2 e 4, com uma magnitude P de -100 kips na direção vertical (eixo y).

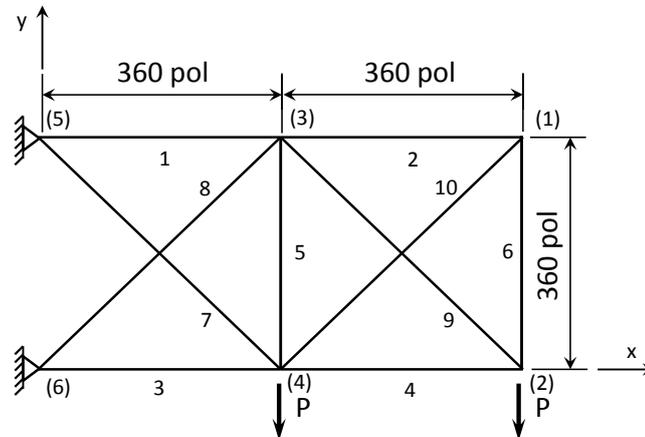


Figura 28 – Estrutura para o caso de 10 barras.

5.4.1 Otimização dimensional

Nesta primeira análise, há 10 variáveis de projeto independentes que correspondem às áreas dos elementos da estrutura. Neste caso não é utilizada a estratégia de agrupamento de barras. Muitos métodos heurísticos têm sido aplicados a este problema, incluindo os Algoritmos Genéticos (NANAKORN e MEESOMKLIN, 2001; RAJEEV e KRISHNAMOORTHY, 1992; CAMP *et al.*, 1998 e TOGAN e DALOGLU, 2008), estratégias evolucionárias (JENKINS, 2002), o métodos heurístico *Particle Swarm Optimization* (LI *et al.*, 2009), os métodos *Fully Constrained Design* (FCD) (FLAGER *et al.*, 2014) e *Structural Optimization Design and Analysis* (SODA) (GRIERSON e CAMERON, 1987) *etc.*. As soluções obtidas com as áreas variando de forma contínua postas por Khot *et al.* (1979), foram arredondadas para o primeiro valor discreto superior de seção de cada barra. Duas análises são consideradas para a otimização dimensional desta estrutura. A primeira utiliza a lista 1 para as variáveis de projeto, ou seja, às áreas das barras podem variar discretamente conforme esta lista. A segunda análise utiliza do mesmo processo só que com a lista 2. As Figuras 29 e 31 mostram a estrutura final otimizada e as Figuras 30 e 32 mostram as curvas de convergência do algoritmo para as duas análises. Os resultados finais, com os valores de áreas ótimas, são apresentados nas Tabelas 2 e 3, utilizando as áreas disponíveis nas listas 1 e 2, respectivamente.

Tabela 2 - Resultados para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.

Métodos	Métodos heurísticos		Critério de otimalidade		FCD	AG
Referências	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	Presente trabalho
Número de análises	40000	30000	18	14	461	69400
$u_{máx}$ (pol)	2,02	2,01	2,00	ND	2,01	2,00
Peso total (lb)	5153	5046	5576	5356	5109	5177
A ₁ (pol ²)	33,7	28,08	33,7	33,7	33,7	33,7
A ₂ (pol ²)	0,1	0,1	0,1	0,347	0,1	0,1
A ₃ (pol ²)	23,68	23,68	23,68	19,18	23,68	23,68
A ₄ (pol ²)	14,2	17,17	17,17	19,18	13,33	13,33
A ₅ (pol ²)	0,347	0,1	0,1	0,347	0,1	0,1
A ₆ (pol ²)	0,1	0,1	0,1	0,593	0,1	0,1
A ₇ (pol ²)	7,192	7,192	8,525	10,85	7,192	8,525
A ₈ (pol ²)	19,18	19,18	23,68	23,00	19,18	19,18
A ₉ (pol ²)	23,68	23,68	23,68	19,18	23,68	23,68
A ₁₀ (pol ²)	0,1	0,1	0,1	0,347	0,1	0,1

[1] Jenkins (2002), [2] Togan e Daloglu (2008), [3] Khot *et al.* (1979), [4] Grierson e Cameron (1987) e [5] Flager *et al.* (2014).

$u_{máx}$: Valor máximo das componentes de deslocamentos nodais.

ND = Não disponível pelos autores

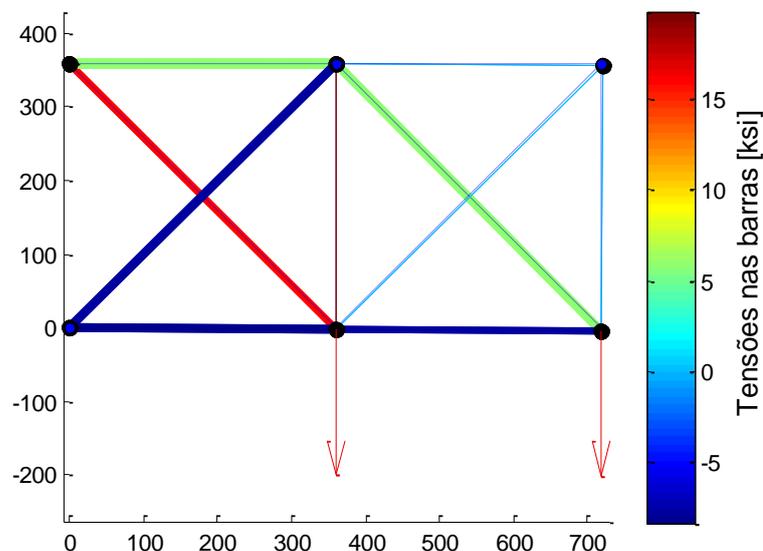


Figura 29 – Estrutura final para a otimização dimensional do caso de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.

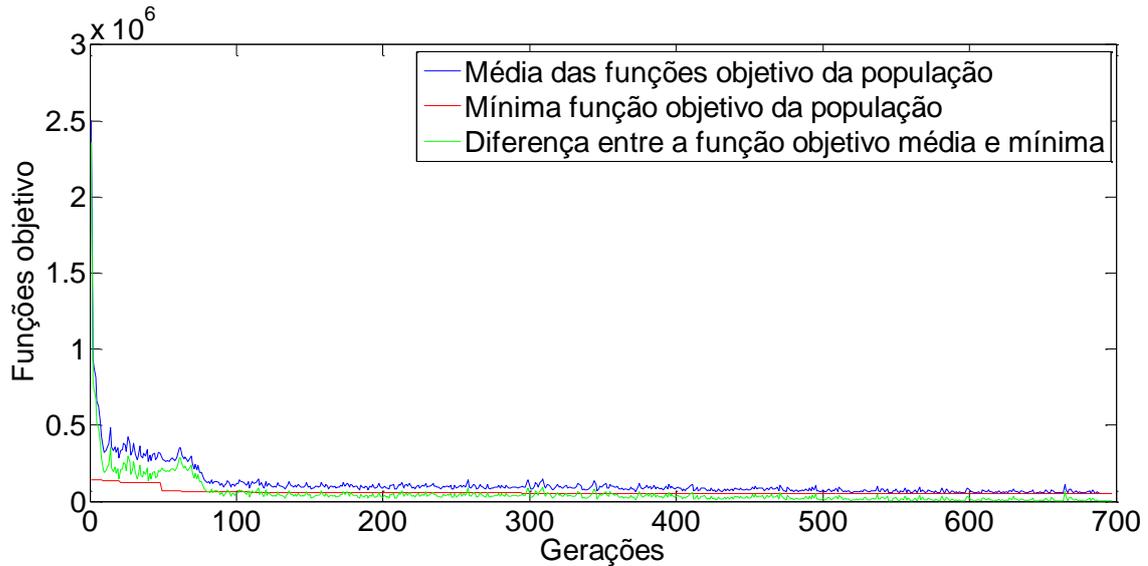


Figura 30 – Curva de convergência do algoritmo para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.

Tabela 3 – Resultados para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.

Métodos	Métodos heurísticos					FCD	AG
Referências	[6]	[7]	[2]	[8]	[9]	[5]	Presente trabalho
Número de análises	50000	ND	30000	ND	80000	14	100000
$u_{máx}$ (pol)	ND	ND	2,01	ND	ND	1,99	2,00
Peso total (lb)	5532	5499	5480	5491	5491	5559	5525
A ₁ (pol ²)	33,00	33,50	33,50	33,50	33,50	33,50	33,50
A ₂ (pol ²)	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62
A ₃ (pol ²)	22,90	22,90	22,90	22,90	22,90	26,50	26,50
A ₄ (pol ²)	13,50	15,50	13,90	14,20	14,20	14,20	13,90
A ₅ (pol ²)	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62
A ₆ (pol ²)	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62
A ₇ (pol ²)	7,97	7,22	7,97	7,97	7,97	11,50	7,22
A ₈ (pol ²)	26,50	22,90	22,90	22,90	22,90	19,19	22,00
A ₉ (pol ²)	22,00	22,00	22,00	22,00	22,00	19,19	22,00
A ₁₀ (pol ²)	1,8	1,62	1,62	1,62	1,62	1,99	1,62

[6] Li *et al.* (2009), [7] Nanakorn e Meesomklin (2001), [8] Sahad *et al.* (2004) e [9] Silva (2009).

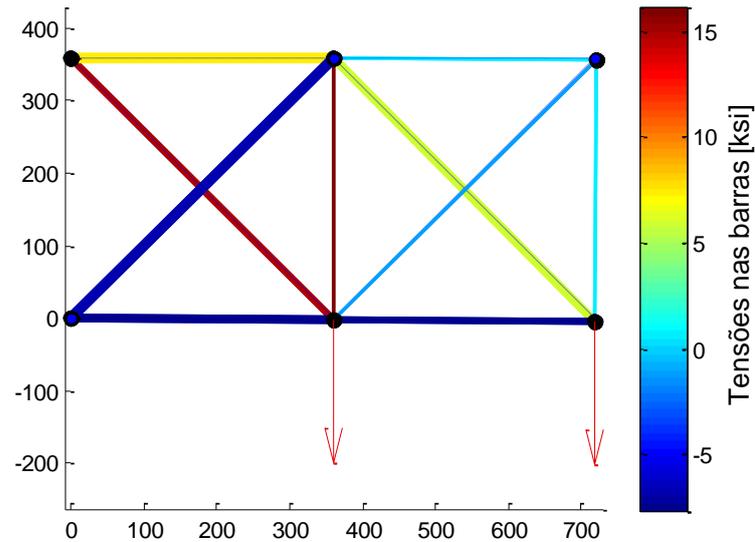


Figura 31 - Estrutura final para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.

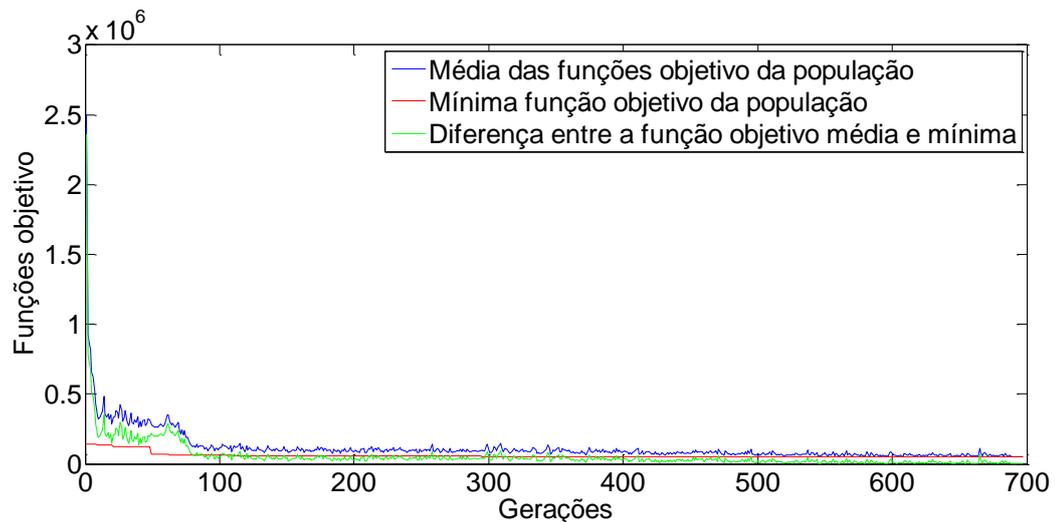


Figura 32 – Curva de convergência do algoritmo para a otimização dimensional da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.

Os resultados obtidos nas duas análises se mostram semelhantes aos disponíveis na literatura, visto que os valores das variáveis, as áreas, são próximos ou iguais aos encontrados pelos autores aqui citados. Em alguns trabalhos, os valores do peso total da estrutura foram menores do que o apresentado pela metodologia em tela. Entretanto, é possível observar na primeira análise, que considera que as áreas possam variar conforme a lista 1, que a restrição quanto ao máximo deslocamento dos nós foi agredida. Já na segunda análise, com as áreas variando conforme a lista 2, esta comparação torna-se mais difícil devido à não disponibilidade dos dados referentes à máxima deflexão por parte dos autores citados.

5.4.2 Otimização topológica

Esta seção trata da otimização topológica da mesma estrutura de 10 barras, apresentada no item anterior. Assim, conforme a abordagem 2, é possível remover as barras pouco solicitadas da estrutura, que correspondem aos elementos 2, 5, 6 e 10, e eliminando o nó 1 que não conecta mais nenhum elemento, tem-se, portanto, a topologia ótima para esta estrutura.

As relações das áreas ótimas finais obtidas neste processo são apresentadas na Tabela 4 para a lista 1 e na Tabela 5 para a lista 2. Nestes casos, deve-se realçar que a máxima deflexão obtida foi de 2,0 pol e que nenhuma restrição de tensão foi agredida. As Figuras 33a e 33b mostram a estrutura final considerando as listas 1 e 2, respectivamente.

Tabela 4 – Resultados para a otimização topológica da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.

Seções ótimas (pol ²)										Peso total (lb)
A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	
33,7	0,0	23,68	13,33	0,0	0,0	8,525	23,68	19,18	0,0	5162

$$u_{m\acute{a}x} = 2,00 \text{ (pol)}$$

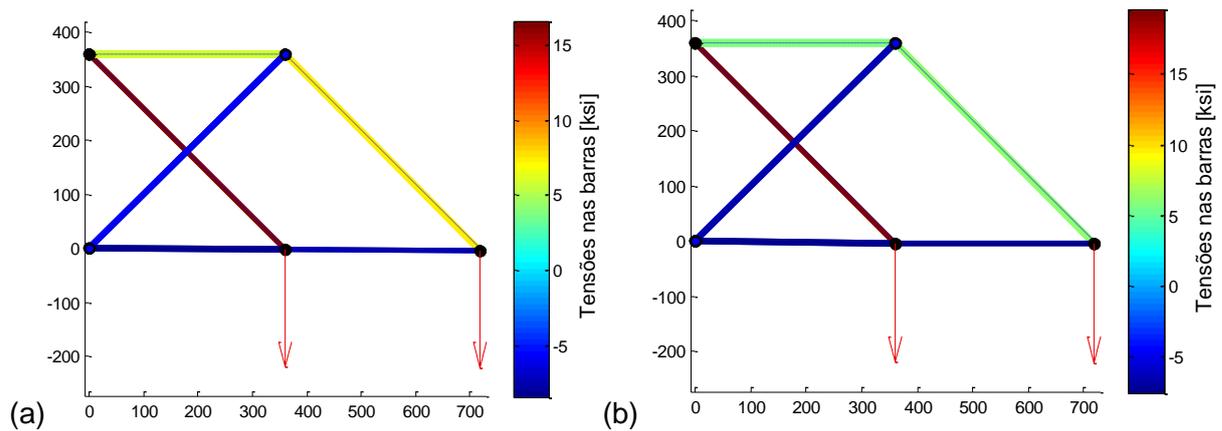


Figura 33 – Topologia ótima da treliça de 10 barras (a) com as áreas variando conforme a lista 1 e (b) lista 2.

Tabela 5 – Resultados para a otimização topológica da treliça de 10 barras, com as áreas variando conforme a Lista 2.

Métodos	AG		AG Binário	AG Inteiro	AG
Referências	Rajan (1995)		<i>Tang et al.</i> (2005)		Presente trabalho
Número de análises	7000	7000	35500	35500	69400
$u_{máx}$ (pol)	2,07	2,07	2,05	2,05	2,00
Peso total (lb)	4981,7	4962,1	4921,25	4921,25	5268,1
A ₁ (pol ²)	33,00	33,00	30,00	30,00	33,50
A ₂ (pol ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A ₃ (pol ²)	19,90	19,90	26,50	26,50	26,50
A ₄ (pol ²)	13,50	15,50	14,20	14,20	13,90
A ₅ (pol ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A ₆ (pol ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A ₇ (pol ²)	7,22	7,55	7,97	7,97	7,22
A ₈ (pol ²)	22,90	22,00	19,90	19,90	22,00
A ₉ (pol ²)	22,90	22,00	18,80	18,80	22,00
A ₁₀ (pol ²)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Quando aplicado o processo de otimização topológica na estrutura de 10 barras, é possível observar na primeira e na segunda análise que houve uma redução de 5 e de 256,9 libras no peso total da estrutura, respectivamente. Na segunda análise, o peso total da estrutura obtido pelos autores aqui citados são menores que o apresentado nesta metodologia, porém, todos estes agrediram a restrição de deslocamento nodal.

5.4.3 Otimizações dimensional e de forma

Considerando a mesma estrutura de 10 barras (Figura 28), dois casos de otimizações dimensional e de forma são discutidos: **Primeiro caso:** Neste problema é considerado a possibilidade da movimentação dos nós 1 e 3 nas coordenadas x e y. As áreas dos elementos da estrutura podem variar conforme a lista 2. A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos nesta análise, as Figuras 34a e 34b apresentam a estrutura final otimizada, considerando somente a otimização via AG e considerando a otimização via PNL partindo do ponto fornecido pelo AG, respectivamente, e a Figura 35 apresenta a curva de convergência do algoritmo.

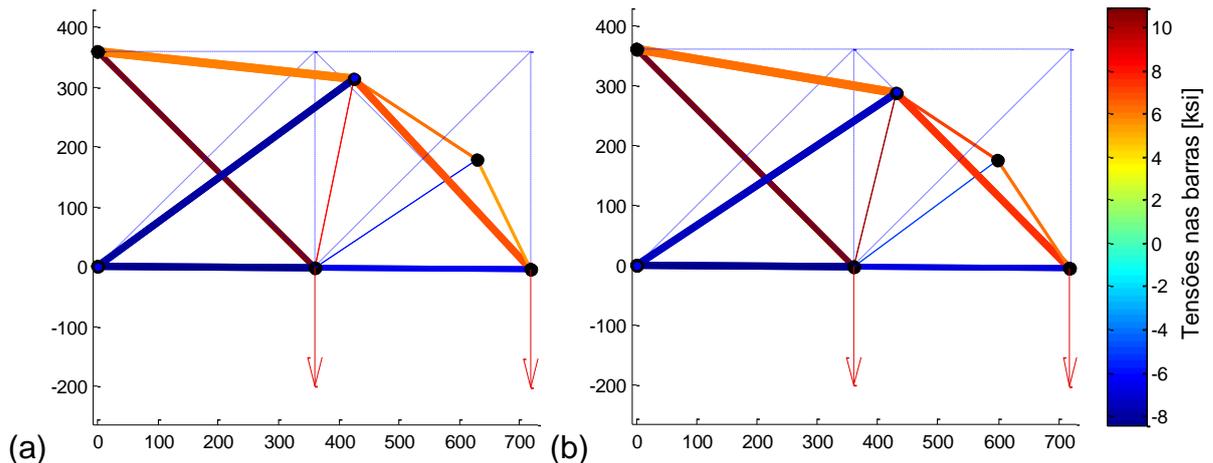


Figura 34 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma, do primeiro caso, da treliça de 10 barras (a) utilizando somente AG e (b) utilizando PNL.

Tabela 6 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.

Variáveis de projeto	Zheng <i>et al.</i> (2006)	Galante (1996)	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
A ₁ (pol ²)	30,00	33,50	33,50	33,50
A ₂ (pol ²)	2,63	4,80	2,88	2,88
A ₃ (pol ²)	22,90	22,90	22,00	22,00
A ₄ (pol ²)	15,50	15,50	13,90	13,90
A ₅ (pol ²)	1,62	1,62	1,62	1,62
A ₆ (pol ²)	2,13	3,88	3,09	3,09
A ₇ (pol ²)	7,22	7,22	11,50	11,50
A ₈ (pol ²)	18,80	18,80	18,80	18,80
A ₉ (pol ²)	22,00	16,90	16,00	16,00
A ₁₀ (pol ²)	1,62	1,80	1,62	1,62
X ₁ (pol)	640,94	638,98	630,09	598,37
Y ₁ (pol)	107,87	107,48	181,76	180,00
X ₃ (pol)	442,91	413,39	425,69	431,58
Y ₃ (pol)	280,71	279,13	315,23	290,29
Número de análises	93000	ND	139900	139907
$u_{máx}$ (pol)	ND	ND	2,00	2,00
Peso total (lb)	5145	5086	5235	5196

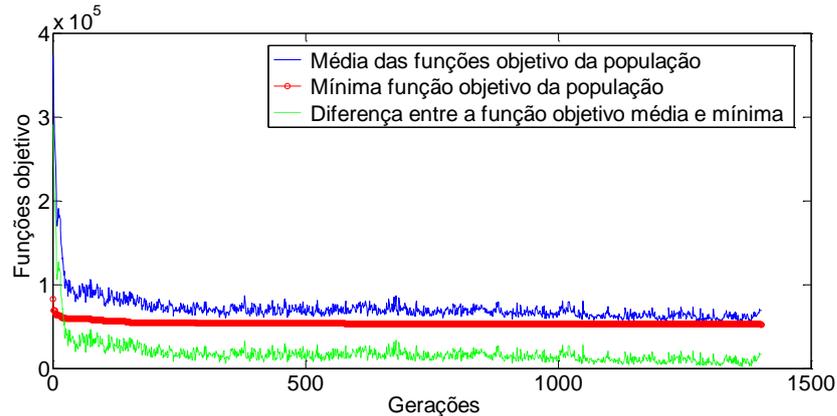


Figura 35 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.

Segundo caso: Este caso possibilita a modificação das coordenadas dos nós 1, 3 e 5 somente na direção y . De acordo com a literatura, são empregados alguns intervalos para a movimentação dos nós que sofrerão o processo de otimização de forma, ou seja, os nós predeterminados 1, 3 e 5 podem se movimentar entre 180 a 1000 polegadas na direção y . A Tabela 7 mostra os resultados para esta análise, as Figuras 36a e 36b mostram as estruturas finais utilizando AG e utilizando PNL partindo da solução obtida pelo AG, respectivamente, e a Figura 37 apresenta a curva de convergência do algoritmo.

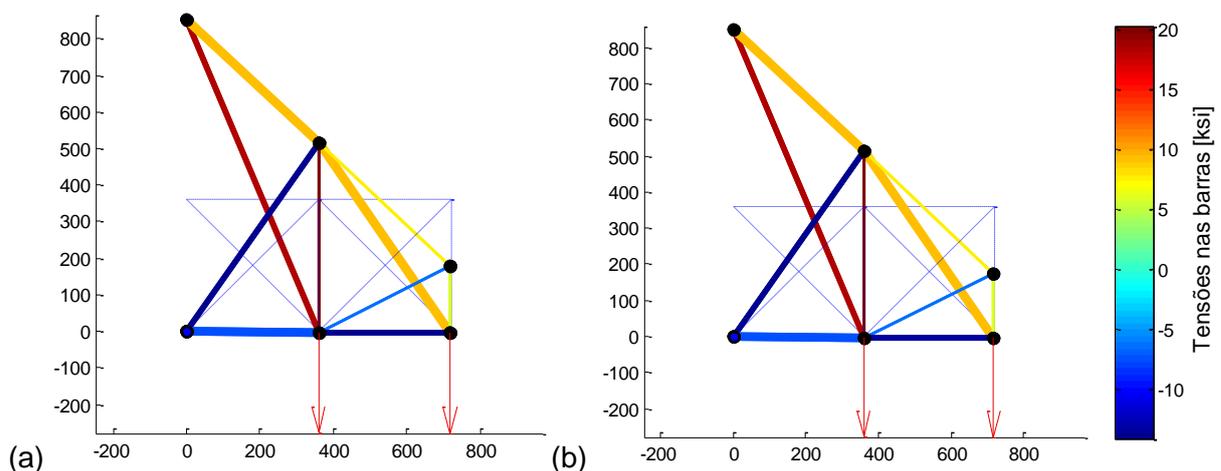


Figura 36 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma, do segundo caso, da treliça de 10 barras, (a) utilizando somente o AG e (b) utilizando o PNL.

Tanto no primeiro caso quanto no segundo, as modificações provocados pelo processo de otimização via PNL são bem pequenas, visto que as áreas são mantidas a partir da solução obtida pelo AG. Portanto, é realizada uma alteração sutil das coordenadas móveis com um número pequeno de iterações. Devido a

este motivo, é quase imperceptível visualmente estas modificações quando comparadas as Figuras 34a com a 34b e as Figuras 36a com a 36b.

Tabela 7 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma, do segundo caso, da treliça de 10 barras.

Variáveis de projeto	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
A ₁ (pol ²)	13,90	13,90
A ₂ (pol ²)	1,62	1,62
A ₃ (pol ²)	13,50	13,50
A ₄ (pol ²)	4,49	4,49
A ₅ (pol ²)	1,62	1,62
A ₆ (pol ²)	2,13	2,13
A ₇ (pol ²)	4,18	4,18
A ₈ (pol ²)	3,38	3,38
A ₉ (pol ²)	11,50	11,50
A ₁₀ (pol ²)	1,62	1,62
Y ₁ (pol)	184,81	180,00
Y ₃ (pol)	516,67	517,35
Y ₅ (pol)	851,71	848,74
Número de análises	260000	260011
$u_{máx}$ (pol)	2,00	2,00
Peso total (lb)	2922,7	2918,3

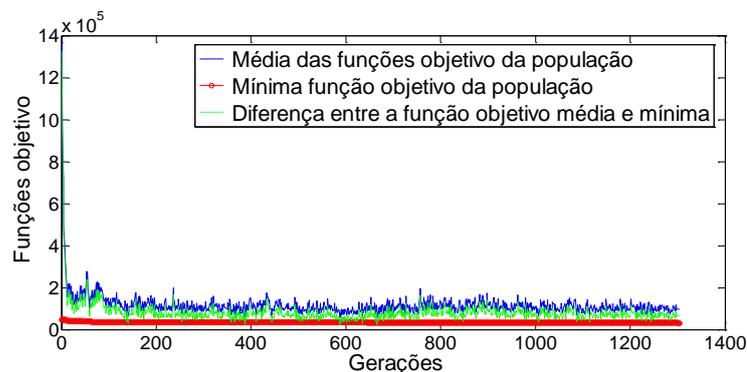


Figura 37 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma, do segundo caso, da treliça de 10 barras.

Nos resultados obtidos para o primeiro caso é possível observar que estes são semelhantes aos demais fornecidos na literatura, visto que os valores das variáveis, as áreas e as coordenadas móveis, são próximos ou iguais aos

encontrados pelos autores aqui citados. Nesta análise nenhuma restrição foi agredida, o que não foi evidenciado nos outros trabalhos. No segundo caso, o objetivo é ter uma configuração ótima para as otimizações dimensional e de forma, a fim de utilizá-la num processo posterior de otimização topológica.

5.4.4 Otimizações dimensional, de forma e topológica

No primeiro caso de otimizações dimensional e de forma, para a movimentação dos nós 1 e 3, é possível observar na Tabela 6 que os elementos 5 e 10 poderiam desaparecer da estrutura no processo de otimização topológica. Quando estes elementos são eliminados, ocorre um mecanismo no nó 1 que pode ser evitado eliminando os elementos que conectam este nó e substituindo-os por um único elemento conectando o nó 3 ao 2. Porém, o algoritmo detecta que este elemento já existe na estrutura, então o desconsidera. Em resumo, neste processo de otimização topológica, os elementos 2, 5, 6 e 10 e o nó 1 podem ser eliminados da estrutura, pois a mesma continua suportando os carregamentos. A Tabela 8 apresenta o resultado final desta estrutura e a Figura 38 mostra a configuração final para esta análise.

Tabela 8 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.

Áreas (pol ²)										Coordenadas (pol)		Peso total (lb)
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	X3	Y3	
33,5	0,0	22	13,9	0,0	0,0	11,5	18,8	16	0,0	431,6	290,3	4975

$$u_{máx} = 2,00 \text{ (pol)}$$

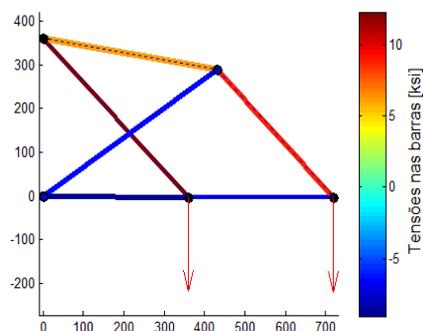


Figura 38 – Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do primeiro caso, da treliça de 10 barras.

No segundo caso de otimizações dimensional e de forma, a Tabela 7 mostra que os elementos 2, 5 e 10 podem ser eliminados no processo de otimização topológica. Quando isto ocorre, surge um mecanismo no nó 1. Para evita-lo, o elemento 6 e o nó 1 também são eliminados da estrutura. Após este processo de otimização topológica, os elementos 7 e 8 passam a falhar em termos materiais e os nós 4 e 5 passam a agredir a restrição quanto ao limite de deslocamento nodal. Para solucionar estes problemas, os elementos que estão agredindo as restrições quanto à falha material têm suas áreas aumentadas (conforme a máxima tensão admissível e o valor da força interna nestes). Para os nós que estão agredindo a restrição quanto à deflexão máxima permissível, modificam-se as áreas dos elementos através de uma análise de sensibilidade. Com estas alterações tem-se a configuração final apresentada pela Figura 39a. Por fim, faz-se um último ajuste das coordenadas móveis, via PNL, adequando-as à topologia da estrutura (Figura 39b). Conseqüentemente, este processo reduz ainda mais a massa da estrutura.

Tabela 9 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do segundo caso, da treliça de 10 barras.

Variáveis de projeto	[10]	[11]	[12]	[13]	Presente trabalho	Presente trabalho (PNL)
A ₁ (pol ²)	8,30	13,5	11,50	11,50	13,90	13,90
A ₂ (pol ²)	1,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A ₃ (pol ²)	17,80	7,97	11,50	11,50	16,90	16,90
A ₄ (pol ²)	12,00	7,22	5,74	7,22	4,59	4,59
A ₅ (pol ²)	0,00	1,62	0,00	0,00	0,00	0,00
A ₆ (pol ²)	3,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A ₇ (pol ²)	5,70	4,49	5,74	5,74	5,74	5,74
A ₈ (pol ²)	4,10	3,13	3,84	2,88	3,47	3,47
A ₉ (pol ²)	0,00	13,5	13,50	13,50	11,50	11,50
A ₁₀ (pol ²)	25,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Y ₁ (pol)	709,40	888,88	789,73	ND	851,71	815,08
Y ₃ (pol)	444,70	527,9	506,420	ND	516,66	514,42
Y ₅ (pol)	225,20	-	-	-	-	-
Número de análises	6720	8000	8000	5000	260011	260018
$u_{máx}$ (pol)	ND	2,00	1,99	ND	2,00	2,00
Peso total (lb)	3207	2814	2723	2705	2926	2878

[10] Rajan (1995), [11] Tang *et al.* (2005), [12] Rahami *et al.* (2008) e [13] Miguel *et al.* (2013).

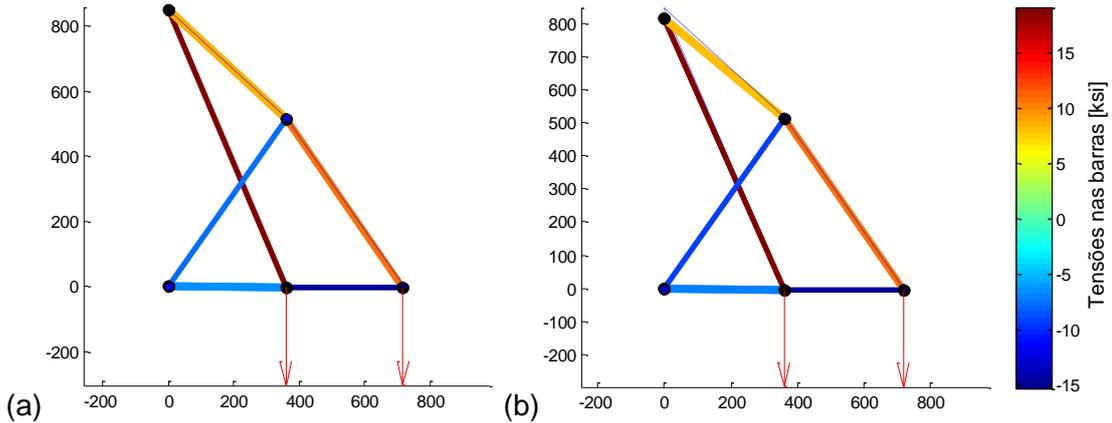


Figura 39 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica, do segundo caso, da treliça de 10 barras e (b) com um ajuste das coordenadas móveis.

No primeiro caso, houve uma redução de 221 libras no peso total da estrutura através da eliminação dos elementos pouco solicitados. Já no segundo caso, a redução foi de 40,3 libras. Os resultados são semelhantes aos fornecidos pelos autores citados, pois as áreas dos elementos e as coordenadas dos nós móveis possuem valores próximos ou iguais aos disponíveis por esses autores. Entretanto, o peso total da estrutura obtido no presente estudo é um pouco maior do que algumas metodologias.

5.5 TRELIÇA PLANA DE 15 BARRAS

Esta seção trata do processo de otimização de uma estrutura treliçada composta por 15 barras (Figura 40), onde são consideradas somente restrições quanto à falha material de tração e compressão de ± 25 ksi. Uma força vertical negativa de -100 kips é imposta ao nó 8 da estrutura. O módulo de elasticidade (módulo de Young) é 10000 ksi e a densidade do material é 0,1 lbs/pol³.

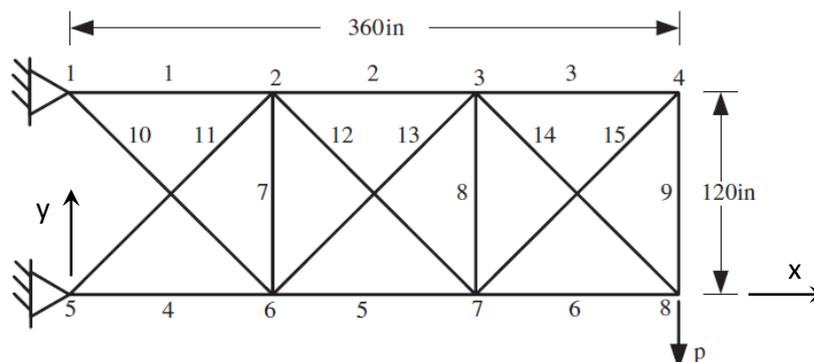


Figura 40 – Treliça plana de 15 barras.

5.5.1 Otimizações dimensional e de forma

Neste processo de otimização, as coordenadas x e y dos nós 2, 3, 6 e 7 podem variar e os nós 6 e 7 devem possuir a mesma coordenada em x dos nós 2 e 3, respectivamente. Os nós 4 e 8 podem se movimentar somente na direção y . Assim, o problema inclui 15 variáveis para a otimização dimensional (área da seção transversal de cada elemento) e 8 variáveis quanto a modificação da forma ($x_2 = x_6, x_3 = x_7, y_2, y_3, y_4, y_6, y_7$ e y_8).

A lista 4 fornece os valores que as áreas dos elementos podem assumir. Restrições laterais são impostas às coordenadas nodais: $100 \text{ pol} \leq x_2 \leq 140 \text{ pol}$, $220 \text{ pol} < x_3 < 260 \text{ pol}$, $100 \text{ pol} \leq y_2 \leq 140 \text{ pol}$, $100 \text{ pol} \leq y_3 \leq 140 \text{ pol}$, $50 \text{ pol} \leq y_4 \leq 90 \text{ pol}$, $-20 \text{ pol} \leq y_6 \leq 20 \text{ pol}$, $-20 \text{ pol} \leq y_7 \leq 20 \text{ pol}$ e $20 \text{ pol} \leq y_8 \leq 60 \text{ pol}$. A Tabela 10 apresenta os resultados desta estrutura e as Figuras 41a e 41b mostram as configurações finais obtidas via AG e via PNL a partir do resultado obtido pelo AG. A Figura 42 apresenta a curva de convergência para a solução deste problema.

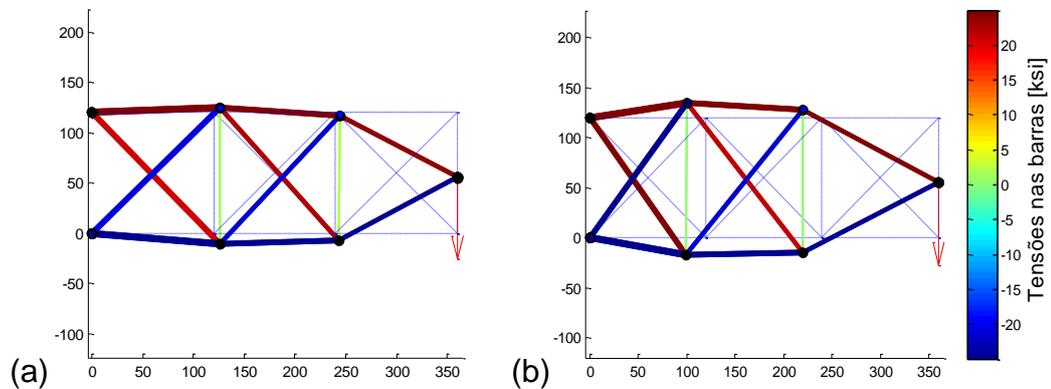


Figura 41 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 15 barras utilizando somente AG e (b) utilizando PNL.

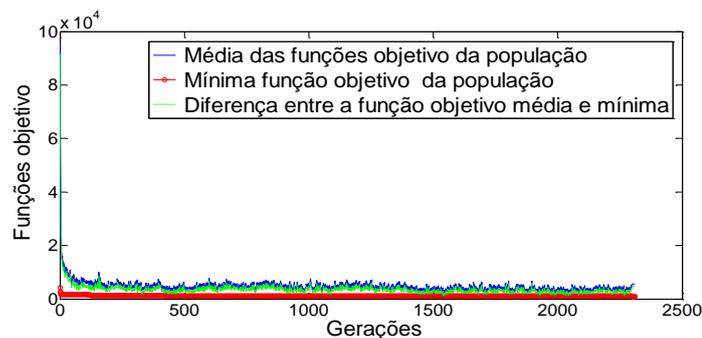


Figura 42 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 15 barras.

Tabela 10 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 15 barras.

Variáveis de projeto	[11]	[12]	[13]	[14]	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
A ₁ (pol ²)	1,081	1,081	0,954	0,954	0,954	0,954
A ₂ (pol ²)	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539
A ₃ (pol ²)	0,287	0,287	0,220	0,270	0,174	0,174
A ₄ (pol ²)	0,954	0,954	0,954	0,954	0,954	0,954
A ₅ (pol ²)	0,954	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539
A ₆ (pol ²)	0,220	0,141	0,220	0,174	0,270	0,270
A ₇ (pol ²)	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111
A ₈ (pol ²)	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111
A ₉ (pol ²)	0,287	0,539	0,287	0,287	0,174	0,174
A ₁₀ (pol ²)	0,220	0,440	0,440	0,347	0,440	0,440
A ₁₁ (pol ²)	0,440	0,539	0,440	0,347	0,440	0,440
A ₁₂ (pol ²)	0,440	0,270	0,220	0,220	0,270	0,270
A ₁₃ (pol ²)	0,111	0,220	0,220	0,220	0,270	0,270
A ₁₄ (pol ²)	0,220	0,141	0,270	0,174	0,270	0,270
A ₁₅ (pol ²)	0,347	0,287	0,220	0,270	0,174	0,174
X ₂ (pol)	133,612	101,577	114,967	137,222	125,726	100,000
X ₃ (pol)	234,752	227,911	247,040	259,909	263,843	220,000
Y ₂ (pol)	100,449	134,799	125,919	123,501	125,411	135,067
Y ₃ (pol)	104,738	128,221	111,067	110,002	117,726	129,353
Y ₄ (pol)	73,762	54,863	58,298	59,936	57,372	57,331
Y ₆ (pol)	10,067	-16,448	-17,564	-5,177	-10,588	-17,019
Y ₇ (pol)	-1,339	-13,301	-5,821	4,219	-6,510	-13,045
Y ₈ (pol)	50,402	54,857	31,465	57,883	57,647	57,331
Número de análises	8000	8000	8000	4500	52877	52884
Máxima tensão (ksi)	25,02	24,99	ND	24,99	25,00	25,00
Peso total (lb)	79,82	76,68	75,55	72,51	76,66	74,60

[11] Tang *et al.* (2005), [12] Rahami *et al.* (2008), [13] Miguel *et al.* (2013) e [14] Gholizadeh (2013).

Observa-se na Tabela 10 que a solução final obtida apresenta um resultado satisfatório, onde as áreas das barras possuem valores próximos ou iguais aos disponíveis por outros autores. Quanto ao peso total da estrutura, somente o trabalho de Gholizadeh (2013) apresenta um valor menor que o encontrado neste estudo e quanto às restrições impostas ao problema, frisa-se que nenhuma foi agredida.

5.5.2 Otimizações dimensional, de forma e topológica

A partir do processo de otimização anterior, é possível verificar que os nós 4 e 8 estão bastante próximos, ou seja, possuem praticamente a mesma coordenada (Figura 41). Assim, o processo de colapso de nós se mostra uma boa alternativa para solução deste problema, que resulta na eliminação do nó a ser colapsado e dos elementos que estão conectados a este. Onde o nó 8 permanece na estrutura, pois o mesmo possui uma condição de contorno de Neumann e o nó 4 desaparece, bem como os elementos 9, 14 e 15, que não possuem mais função estrutural. Com o processo de otimização topológica tem-se os resultados apresentados na Tabela 11. A topologia ótima final é representada pela Figura 43a. Um ajuste final das coordenadas é realizado após o processo de otimização topológica, via PNL, como mostra a Figura 43b.

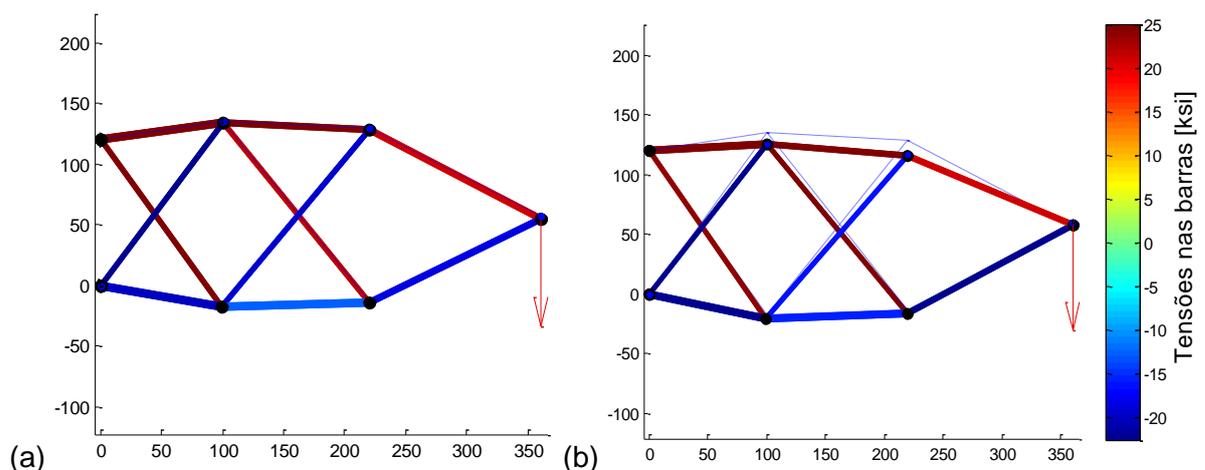


Figura 43 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 15 barras e (b) com um ajuste das coordenadas móveis via PNL.

Tabela 11 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 15 barras.

Variáveis de projeto	Tang <i>et al.</i> (2005)	Rahami <i>et al.</i> (2008)	Miguel <i>et al.</i> (2013)	Presente trabalho	Presente trabalho (PNL)
A ₁ (pol ²)	1,081	0,954	0,954	0,954	0,954
A ₂ (pol ²)	0,539	0,954	0,539	0,539	0,539
A ₃ (pol ²)	0,000	0,000	0,141	0,000	0,000
A ₄ (pol ²)	1,081	1,081	0,954	1,081	1,081
A ₅ (pol ²)	0,954	0,539	0,539	0,954	0,954
A ₆ (pol ²)	0,440	0,539	0,287	0,539	0,539
A ₇ (pol ²)	0,000	0,000	0,141	0,000	0,000
A ₈ (pol ²)	0,141	0,000	0,000	0,000	0,000
A ₉ (pol ²)	0,000	0,000	3,813	0,000	0,000
A ₁₀ (pol ²)	0,270	0,440	0,440	0,440	0,440
A ₁₁ (pol ²)	0,270	0,220	0,440	0,440	0,440
A ₁₂ (pol ²)	0,539	0,111	0,220	0,270	0,270
A ₁₃ (pol ²)	0,141	0,347	0,220	0,270	0,270
A ₁₄ (pol ²)	0,440	0,539	0,347	0,539	0,539
A ₁₅ (pol ²)	0,000	0,000	0,141	0,000	0,000
X ₂ (pol)	111,850	107,387	112,027	100,000	100,000
X ₃ (pol)	242,450	244,453	247,076	220,000	220,000
Y ₂ (pol)	104,020	125,420	137,514	135,067	126,056
Y ₃ (pol)	109,220	117,285	116,776	129,353	117,336
Y ₄ (pol)	-	-	50,162	-	-
Y ₆ (pol)	-10,820	-1,625	-10,905	-17,019	-20,000
Y ₇ (pol)	-11,13	18,083	-3,179	-13,045	-15,666
Y ₈ (pol)	48,84	50,204	48,825	57,331	60,000
Número de Análises	8000	8000	8000	52884	52890
Máxima tensão (ksi)	ND	24,99	ND	22,12	22,64
Peso total (lb)	77,84	75,10	74,33	80,59	79,84

Com a eliminação dos elementos 3, 7, 8, 9 e 15, a restrição de tensão passou a ser agredida nos elementos 4, 5, 6 e 14. Para eliminar este problema, estes elementos tiveram suas áreas aumentadas. Com isto o peso total da estrutura aumentou. Entretanto, realizando um ajuste das coordenadas móveis, via PNL, é possível reduzir um pouco a massa da estrutura. Após estes ajustes, nenhuma restrição foi agredida.

5.6 TRELIÇA PLANA DE 18 BARRAS

Esta seção trata do processo de otimização estrutural de uma treliça de 18 barras, cujas dimensões são representada na Figura 44. O módulo de elasticidade é de 10000 ksi e a densidade do material é 0,1 lbs/pol³. Somente um caso de carregamento é considerado nesta estrutura, sendo aplicados aos nós 6, 7, 8, 9 e 10 com uma força de $P = -20$ kips. Os nós 2, 3, 4 e 5 podem ser movimentados nas direções de x e y durante o processo de otimização de forma. Todos os elementos da estrutura estão dispostos em grupos como mostra a Tabela 12.

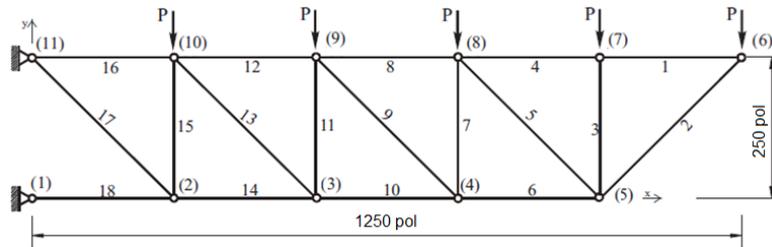


Figura 44 – Treliça plana de 18 barras.

5.6.1 Otimização dimensional

Uma primeira abordagem é feita considerando somente otimização dimensional com variáveis contínua. Os limites de área para a otimização contínua é de 0,1 pol² a 50 pol² (SONMEZ, 2011). Este caso considera falha material, onde as tensões limite de tração e compressão são de ± 20 ksi e a falha por instabilidade local de cada barra é obtida utilizando a tensão crítica de flambagem dada por

$$\sigma_F^{(e)} = \frac{CEA^{(e)}}{L^{(e)2}}, \quad (5.6)$$

onde C é um coeficiente que depende da forma da seção transversal do elemento e conforme os autores citados na Tabela 12, utiliza-se o valor de 4.

É importante ressaltar que os resultados obtidos por Imai e Schimit (1981) e por Lee e Geem (2005) violam alguma restrição. A Figura 45a mostra a estrutura final obtida utilizando somente AG. Por outro lado, a Figura 45b mostra esta estrutura utilizando PNL, mas tendo como ponto inicial a solução por AG.

Tabela 12 – Resultados para o caso de 18 barras considerando otimização dimensional.

Variáveis	Áreas (pol ²)				
	Imai e Schmit (1981)	Lee e Geem (2004)	Sonmez (2011)	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
$A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$	9,980	9,980	10,000	10,002	10,000
$A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$	21,650	21,630	21,651	21,660	21,651
$A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$	12,500	12,490	12,500	12,538	12,50
$A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$	7,072	7,057	7,071	7,075	7,071
Número de análises	ND	2000	200000	1440	1462
Máxima restrição violada	0,259e-3	7,508e-3	ND	0,00	0,00
Peso total (lb)	6430,00	6421,88	6430,53	6436,47	6430,53

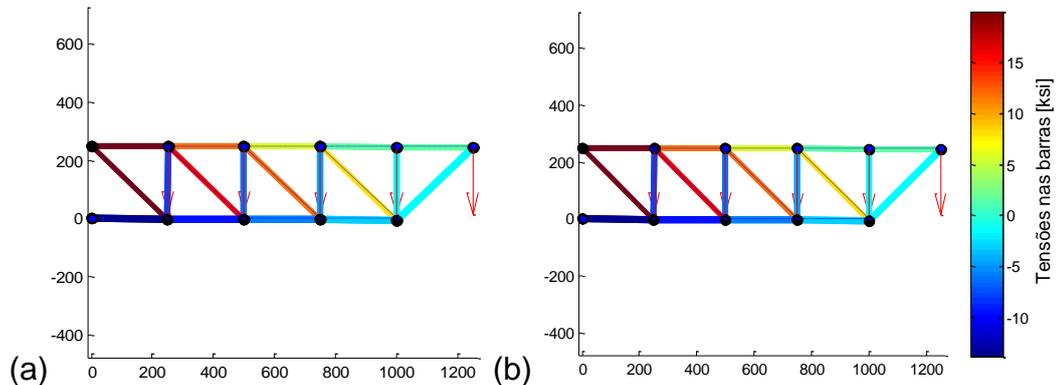


Figura 45 – (a) Estrutura final para a otimização dimensional da treliça de 18 barras via AG e (b) via PNL a partir da solução obtida pelo AG.

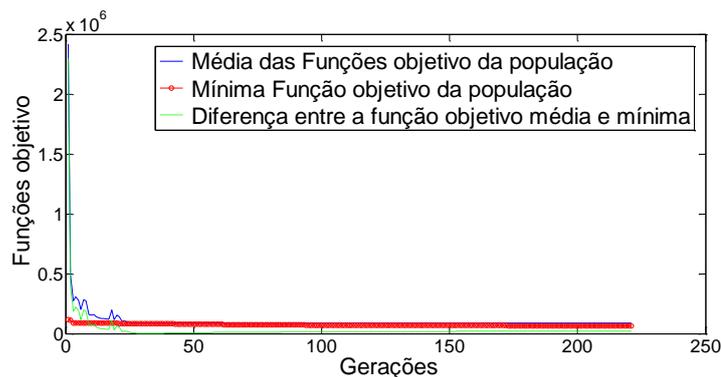


Figura 46 – Curva de convergência do algoritmo de otimização dimensional da treliça de 18 barras.

A Tabela 12 apresenta a solução ótima para o caso de 18 barras, onde o resultado obtido neste trabalho é satisfatório, necessitando de menos iterações para alcançá-lo e sem agredir as restrições.

5.6.2 Otimizações dimensional e de forma

A segunda abordagem considera as otimizações dimensional e de forma. Portanto, há 12 variáveis de projeto, sendo 4 variáveis de área e 8 de movimentação dos nós. Os limites inferior e superior de área para o processo de otimização com variáveis contínuas são de 2 pol² a 20 pol², respectivamente (RAJEEV e KRISHNAMOORTHY, 1997). Na restrição quanto à falha material, as tensões limites de tração e compressão são de ± 20 ksi. Quanto à falha por flambagem, a carga crítica de flambagem é obtida considerando que cada barra possui uma seção tubular com uma razão entre o diâmetro nominal e a espessura de 10 (FELIX e VANDERPLAATS, 1987). A Tabela 13 apresenta os resultados para este caso analisado, as Figuras 47 e 48, mostram as estruturas finais utilizando somente AG e utilizando PNL a partir da solução do AG, respectivamente e a Figura 49 apresenta a curva de convergência do algoritmo.

Tabela 13 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente.

Variáveis de projeto	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]	[12]	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
A1 (pol ²)	11,24	11,34	12,50	12,59	12,65	12,04	12,55	10,60	10,60
A2 (pol ²)	15,58	19,28	16,25	17,91	7,22	17,85	18,03	16,25	16,25
A3 (pol ²)	7,93	10,97	8,00	5,50	6,17	7,97	5,11	5,45	5,45
A4 (pol ²)	6,49	5,30	4,00	3,54	3,55	4,73	3,57	6,47	6,47
X2 (pol)	181,00	221,70	184,40	200,90	195,30	192,52	102,53	229,30	255,82
Y2 (pol)	-3,20	17,10	23,40	32,00	30,60	17,32	32,65	4,30	16,98
X3 (pol)	381,70	482,90	385,40	41,00	402,10	414,96	188,07	516,90	475,00
Y3 (pol)	57,10	33,00	72,50	97,00	90,50	77,56	150,62	91,90	99,12
X4 (pol)	608,20	747,40	610,60	640,30	630,30	664,96	416,62	768,50	725,00
Y4 (pol)	105,40	102,90	118,20	147,80	136,30	122,44	204,28	143,50	150,00
X5 (pol)	891,10	994,60	891,90	909,80	903,10	944,88	912,97	1005,10	975,00
Y5 (pol)	143,60	162,30	145,30	184,50	174,30	150,00	646,45	180,10	200,00
Número de análises	ND	ND	ND	1800	50000	146500	8000	95880	95900
Máxima restrição violada	ND	0,00	0,00						
Peso total (lb)	4668	5713	4616	4532	4516	4804	4511	4501	4410

[15] Imai (1981), [16] Felix e Vanderplaats (1987), [17] Rajeev e Krishnamoorthy (1997), [18] Soh e Yang (1996), [19] Lee e Geem (2004) e [20] Zheng *et al.* (2006).

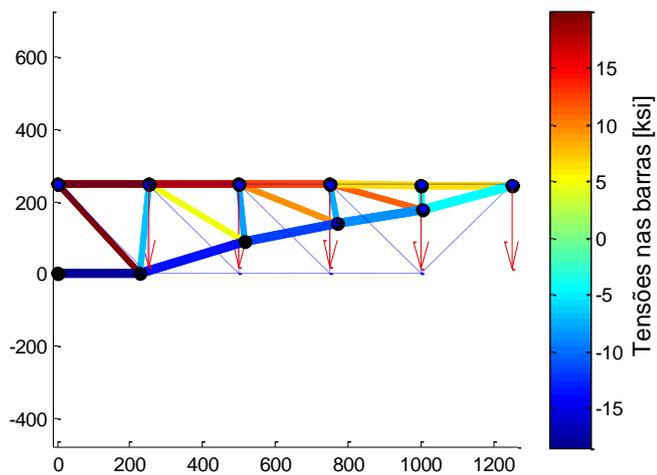


Figura 47 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente, somente via AG.

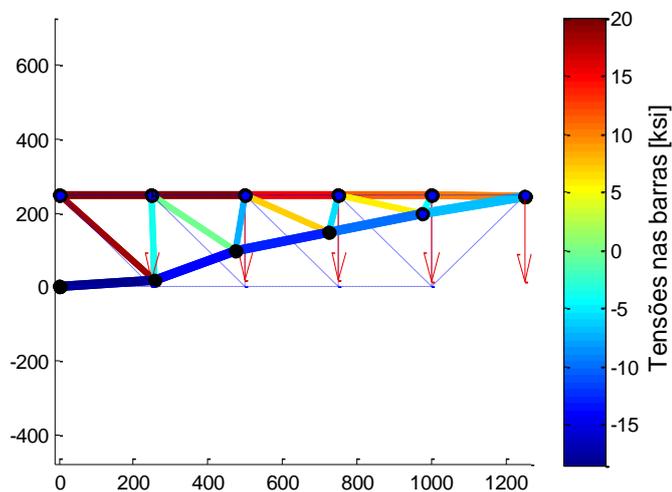


Figura 48 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente, via PNL a partir da solução de AG.

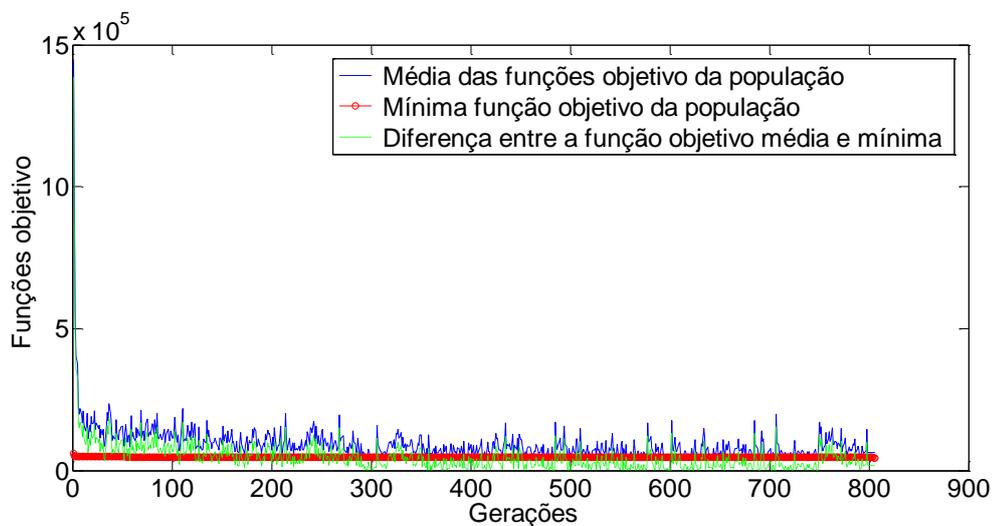


Figura 49 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando continuamente.

Nesta segunda abordagem, é possível observar que o resultado obtido pela metodologia em tela, é melhor que os demais fornecidos na literatura pois alcançou um peso menor. Vale ressaltar que, na configuração final, nenhuma restrição foi agredida, o que não é verificado nos resultados fornecidos pelos autores citados, pois os mesmos não disponibilizaram estes valores.

Uma terceira abordagem é avaliada e considera que as áreas dos elementos possam variar conforme as listas 1 e 2. Os resultados fornecidos por esta análise podem ser observados na Tabela 14. As estruturas ótimas finais são apresentadas nas Figuras 50 e 51, utilizando a lista 1, considerando otimização via AG e via PNL após o processo via AG e nas Figuras 53 e 54, utilizando a lista 2, considerando otimização via AG e via PNL após o resultado obtido pelo AG, respectivamente. As Figuras 52 e 55 mostram as curvas de convergência do algoritmo utilizando as listas 1 e 2.

Tabela 14 – Resultados das otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme as listas 1 e 2.

Variáveis de projeto	(AG) Lista 1	(AG + PNL) Lista 1	(AG) Lista 2	(AG + PNL) Lista 2
A ₁ (pol ²)	10,85	10,85	11,50	11,50
A ₂ (pol ²)	17,17	17,17	16,90	16,90
A ₃ (pol ²)	5,952	5,952	5,74	5,74
A ₄ (pol ²)	6,572	6,572	4,59	4,59
X ₂ (pol)	235,40	268,87	262,50	262,75
Y ₂ (pol)	10,40	28,28	37,50	38,16
X ₃ (pol)	522,30	475,00	524,80	475,00
Y ₃ (pol)	97,30	100,00	99,80	100,00
X ₄ (pol)	772,40	725,00	774,70	725,00
Y ₄ (pol)	147,40	150,00	149,70	150,00
X ₅ (pol)	1012,10	975,00	1022,80	975,00
Y ₅ (pol)	187,10	200,00	197,80	200,00
Número de análises	71160	71178	94200	94220
Máxima restrição violada	0,00	0,00	0,00	0,00
Peso total (lb)	4683	4588	4455	4392

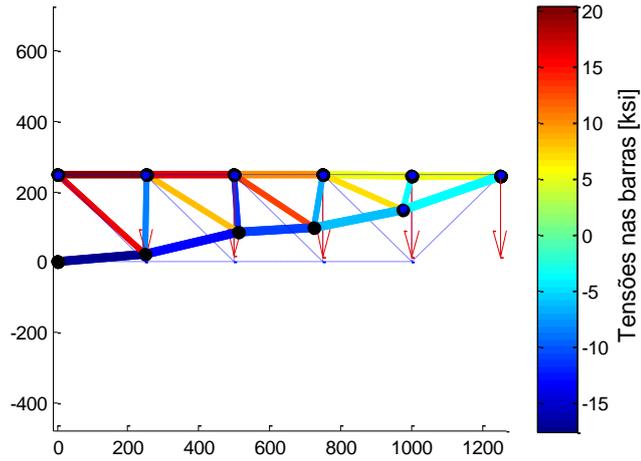


Figura 50 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 1, considerando somente AG.

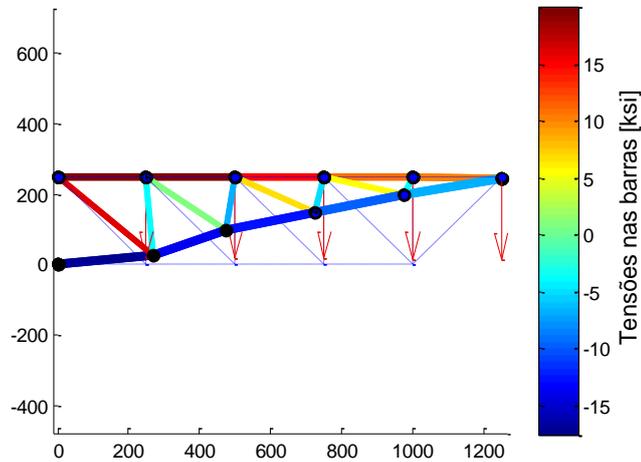


Figura 51 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 1, considerando PNL a partir da solução obtida pelo AG.

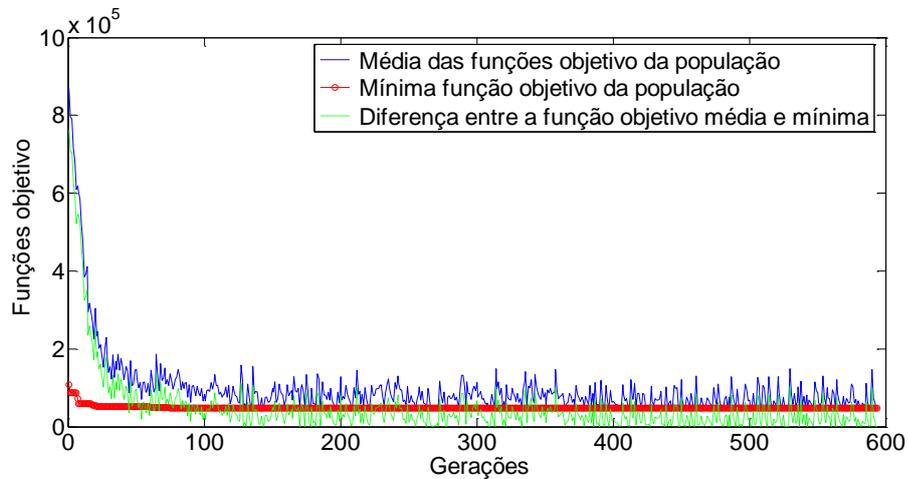


Figura 52 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 1.

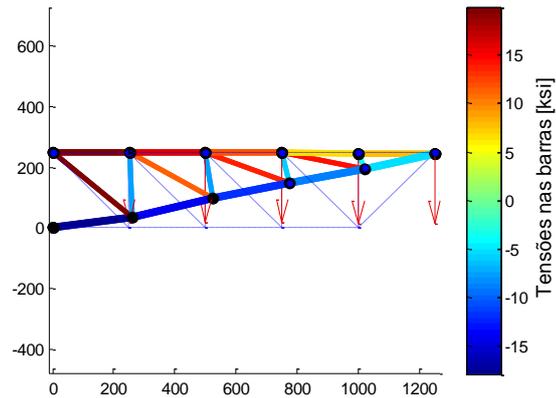


Figura 53 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 2, considerando somente AG.

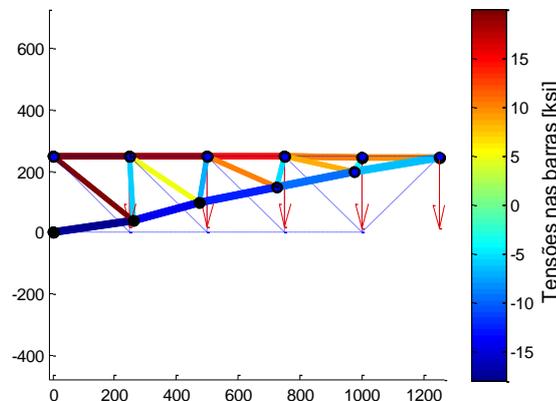


Figura 54 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 2, considerando PNL a partir da solução obtida pelo AG.

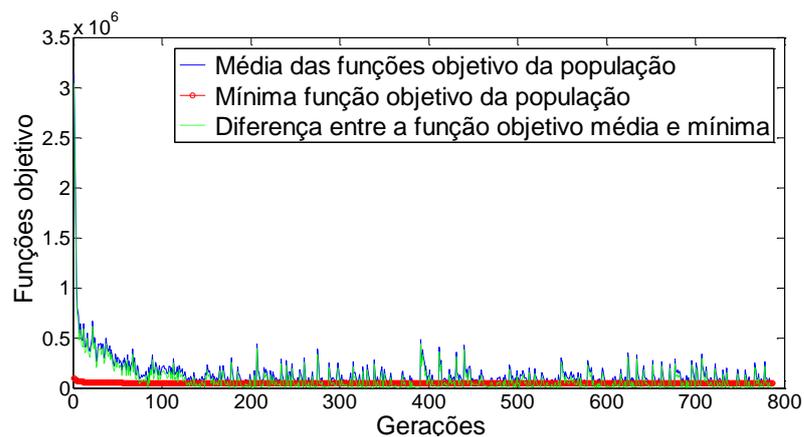


Figura 55 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 18 barras, com as áreas variando conforme a lista 2.

Esta última abordagem apresenta resultados em que foram utilizadas as listas 1 e 2 para compor o conjunto de barras da estrutura, com o objetivo obter uma estrutura utilizando variáveis discretas, simulando uma aplicação que emprega seções comerciais.

5.7 TRELIÇA ESPACIAL DE 25 BARRAS

A estrutura treliçada tridimensional de 25 barras (Figura 56) é também uma estrutura bastante comum na bibliografia que trata do estudo de técnicas de problemas de otimização estrutural. São consideradas como restrições o deslocamento limite de todos os nós de 0,35 pol e a falha material de ± 40 ksi. Um único caso de carregamento é considerado (Tabela 15). Os elementos disponíveis nesta estrutura foram reunidos em 8 grupos, como mostra a Tabela 16. A densidade do material é de 0,1 lb/pol³ e o módulo de elasticidade de 10000 ksi. As áreas dos elementos podem variar de acordo com a lista 3.

Tabela 15 – Carregamento para a estrutura de 25 barras.

Nós	1	2	3	6
eixo x	1,0 kip	0,0	0,5 kip	0,6 kip
eixo y	-10 kip	-10 kip	0,0	0,0
eixo z	-10 kip	-10 kip	0,0	0,0

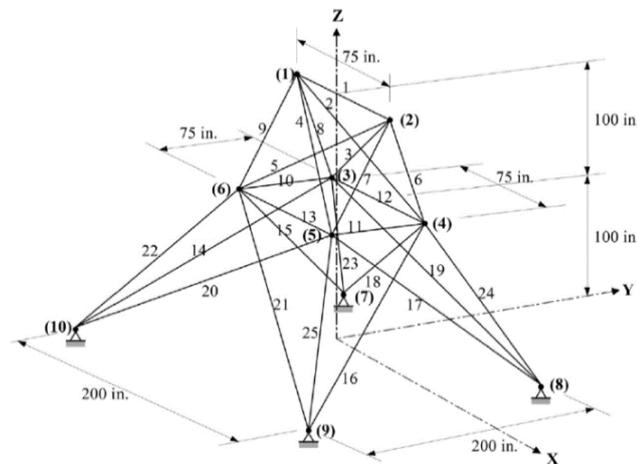


Figura 56 – Treliça espacial de 25 barras.

5.7.1 Otimização dimensional

Diversos autores têm abordado o problema de otimização dimensional da treliça espacial composta por 25 barras. A Tabela 16 apresenta a configuração ótima para esta estrutura, a Figura 57 mostra a estrutura final obtida pelo processo de otimização dimensional e a Figura 58 apresenta a curva de convergência do algoritmo.

Tabela 16 – Resultados para o problema de otimização dimensional da treliça de 25 barras.

Referências		[19]	[2]	[6]	[4]	[5]	Presente trabalho
Variáveis de projeto	Grupos de Membros	Áreas (pol ²)					
A1	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
A2	2 – 5	0,3	0,3	0,3	1,9	0,1	0,6
A3	6 – 9	3,4	3,4	3,4	2,6	3,4	3,4
A4	10 e 11	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
A5	12 e 13	2,1	2,1	2,0	0,1	0,1	2,1
A6	14 - 17	1,0	1,0	1,0	0,8	0,8	0,9
A7	18 - 21	0,5	0,5	0,5	2,1	2,5	0,4
A8	22 - 25	3,4	3,4	3,4	2,6	2,5	3,4
$u_{máx}$ (pol)		0,351	ND	0,351	0,342	0,337	0,329
Número Análises		13523	25000	17500	4	45	192000
Peso (lb)		484,9	484,9	483,4	562,9	526,8	486,0

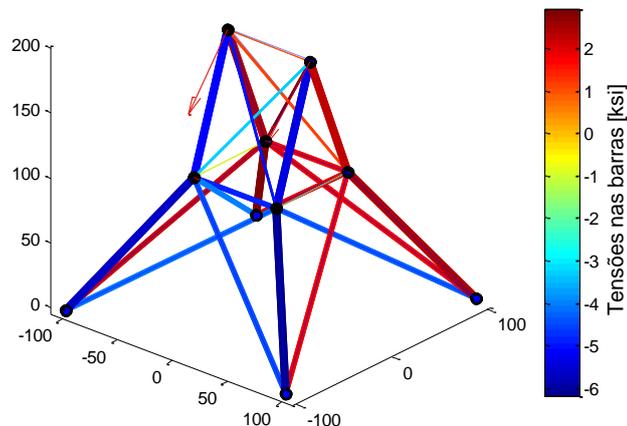


Figura 57 – Estrutura final para a otimização dimensional da treliça de 25 barras.

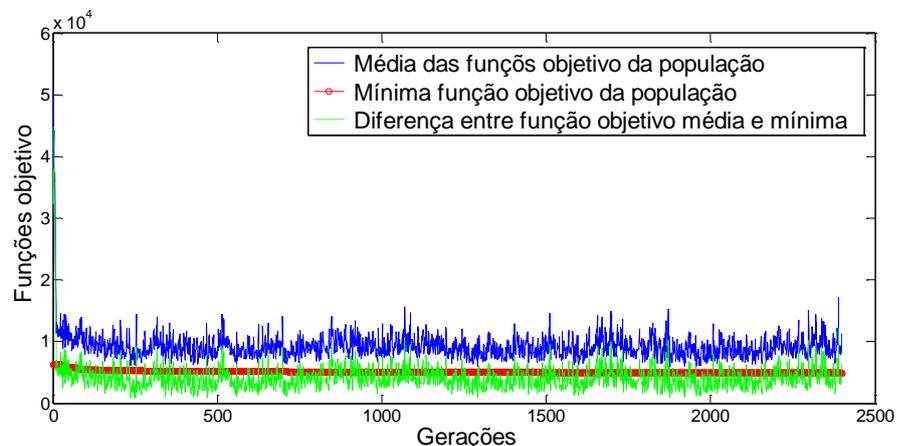


Figura 58 – Curva de convergência do algoritmo para o problema de otimização dimensional da treliça de 25 barras.

O resultado obtido nesta análise mostra que a metodologia em tela atingiu um peso total da estrutura ligeiramente superior em relação aos outros trabalhos. Entretanto, nenhuma restrição foi agredida, o que não se observa nos resultados apresentados por estas metodologias que apresentaram um peso menor.

5.7.2 Otimização topológica

Na Tabela 16 é possível verificar que a área dos elementos dos grupos 1 e 4, alcançaram o menor valor disponível na lista 3. Assim, aplicando o processo de otimização topológica, estes elementos podem ser eliminados da estrutura, sem que a mesma agreda as restrições. A Tabela 17 apresenta os resultados para este problema e a Figura 59 mostra a configuração final desta estrutura.

Tabela 17 – Resultados para o problema de otimização topológica da treliça de 25 barras.

Seções ótimas (pol ²)								$u_{máx}$ (pol)	Peso total (lb)
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8		
0,0	0,6	3,4	0,0	2,1	0,9	0,4	3,4	0,334	483,77

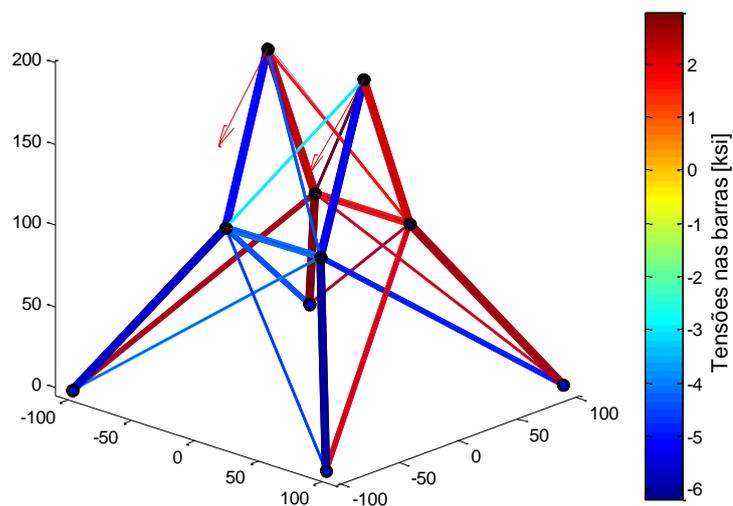


Figura 59 – Topologia ótima da treliça de 25 barras.

Este resultado apresenta a topologia ótima para o problema de 25 barras, promovendo uma solução em que o peso total da estrutura é 2,23 libras mais leve que o encontrado no processo de otimização dimensional. Nenhuma restrição foi agredida nesta análise.

5.7.3 Otimizações dimensional e de forma

Neste processo de otimização, na mesma estrutura representada na Figura 56 são consideradas as otimizações dimensional e de forma. Para manter a simetria da estrutura, as coordenadas dos nós móveis são reunidas em 5 grupos. Cada uma das coordenadas x , y e z dos nós 3 ao 6 e as coordenadas x e y dos nós 7 ao 10, fazem parte de um grupo, respectivamente. Os três primeiros grupos podem se movimentar com a mesma intensidade nos planos xy e yz e os outros dois grupos no plano xy . As restrições laterais quanto à modificação das coordenadas dos nós móveis são: $20 \text{ pol} \leq x_4 \leq 60 \text{ pol}$, $40 \leq x_8 \leq 80 \text{ pol}$, $40 \text{ pol} \leq y_4 \leq 80 \text{ pol}$, $100 \text{ pol} \leq y_8 \leq 140 \text{ pol}$ e $90 \text{ pol} \leq z_4 \leq 130 \text{ pol}$. A Tabela 18 apresenta os resultados obtidos para as variáveis de projeto de área e as coordenadas finais para os nós móveis 4 e 8, considerando que a modificação da posição desses nós é simétrica para cada eixo de coordenadas.

Tabela 18 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras

Variáveis de projeto	Wu e Chow (1995)	Tang <i>et al.</i> (2005)	Miguel <i>et al.</i> (2013)	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG e PNL)
A1 (pol ²)	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
A2 (pol ²)	0,2	0,1	0,1	0,2	0,2
A3 (pol ²)	1,1	1,1	0,9	0,9	0,9
A4 (pol ²)	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
A5 (pol ²)	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1
A6 (pol ²)	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1
A7 (pol ²)	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2
A8 (pol ²)	0,9	0,7	1,0	0,9	0,9
X4 (pol)	41.07	35,47	37.32	30,09	29,75
Y4 (pol)	53.47	60,37	55.74	62,56	52,69
Z4 (pol)	124.6	129,07	126.62	114,98	130,00
X8 (pol)	50.8	45,06	50.14	45,04	40,97
Y8 (pol)	131.48	137,04	136.40	138,44	134.63
Número de Análises	ND	6000	60000	32487	32501
$u_{m\acute{a}x}$ (pol)	0,347	0,350	0,350	0,349	0,350
Máxima tensão (ksi)	15,59	18,23	18,83	15,50	15,23
Peso total (lb)	136,2	124,94	118,83	124,30	122,68

As Figuras 60 e 61 mostram as estruturas finais utilizando AG e PNL após o resultado obtido pelo AG, respectivamente. Além disso, a Figura 62 apresenta a curva de convergência do algoritmo.

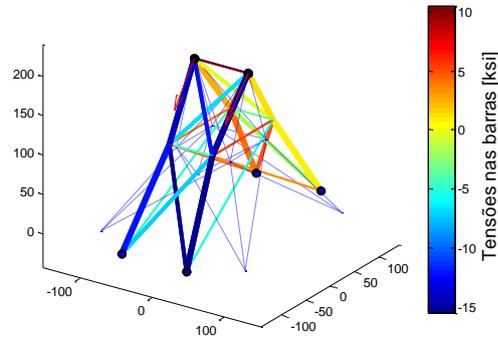


Figura 60 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras, somente via AG.

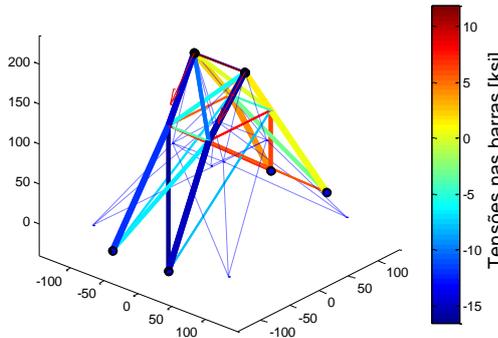


Figura 61 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras, via PNL a partir da solução obtida pelo AG.

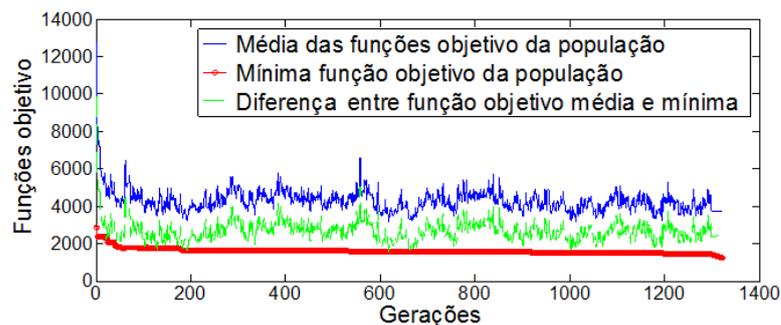


Figura 62 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da treliça de 25 barras.

Observa-se pela Tabela 18, que o presente trabalho apresenta resultados semelhantes aos encontrados na literatura, quando comparados os valores finais das variáveis de projeto. Somente o resultado posto por Miguel *et al.* (2013) alcançou um peso menor que a metodologia em tela. Ademais, nenhuma restrição tanto à falha material quanto aos deslocamentos nodais foram agredidas.

5.7.4 Otimizações dimensional, de forma e topológica

Observa-se na Tabela 18, que as áreas dos elementos dos grupos 1, 4, 5 e 6 alcançaram o menor valor disponível na lista 3. De acordo com a metodologia proposta para o processo de otimização topológica, todos os elementos contidos nestes grupos poderiam ser eliminados da estrutura. Contudo, com a eliminação de todos estes elementos, alguns mecanismos são gerados. Portanto o algoritmo permite a modificação do tamanho de cada grupo, ou seja, o grupo pode ser mantido porém, com um número menor de elementos, a fim de manter a estabilidade da estrutura. Com o processo de otimização topológica (Figura 63a), a restrição quanto ao deslocamento nodal passou a ser agredida. Para evitar este problema, as coordenadas da estrutura foram reajustadas via PNL e, assim, a mesma deixou de agredir às restrições, resultando na solução apresentada na Tabela 19 e na configuração mostrada na Figura 63b.

Tabela 19 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 25 barras.

Variáveis de projeto	Tang <i>et al.</i> (2005)	Miguel <i>et al.</i> (2013)	Presente trabalho	Presente trabalho (PNL)
A ₁ (pol ²)	0,0	0,0	0,0	0,0
A ₂ (pol ²)	0,1	0,1	0,2	0,2
A ₃ (pol ²)	0,9	1,1	0,9	0,9
A ₄ (pol ²)	0,0	0,0	0,0	0,0
A ₅ (pol ²)	0,0	0,0	0,0	0,0
A ₆ (pol ²)	0,1	0,1	0,1	0,1
A ₇ (pol ²)	0,1	0,1	0,2	0,2
A ₈ (pol ²)	1,0	0,9	0,9	0,9
X ₄ (pol)	39,91	38,50	30,09	36,23
Y ₄ (pol)	61,99	64,35	62,56	54,17
Z ₄ (pol)	118,23	112,87	114,98	130,00
X ₈ (pol)	53,13	49,13	45,04	48,09
Y ₈ (pol)	138,49	134,94	138,44	138,32
Número de Análises	6000	60000	32489	32499
$u_{máx}$ (pol)	0,350	0,350	1,09	0,350
Máxima tensão (ksi)	17,35	19,79	17,83	9,74
Peso total (lb)	114,74	116,58	118,63	120,41

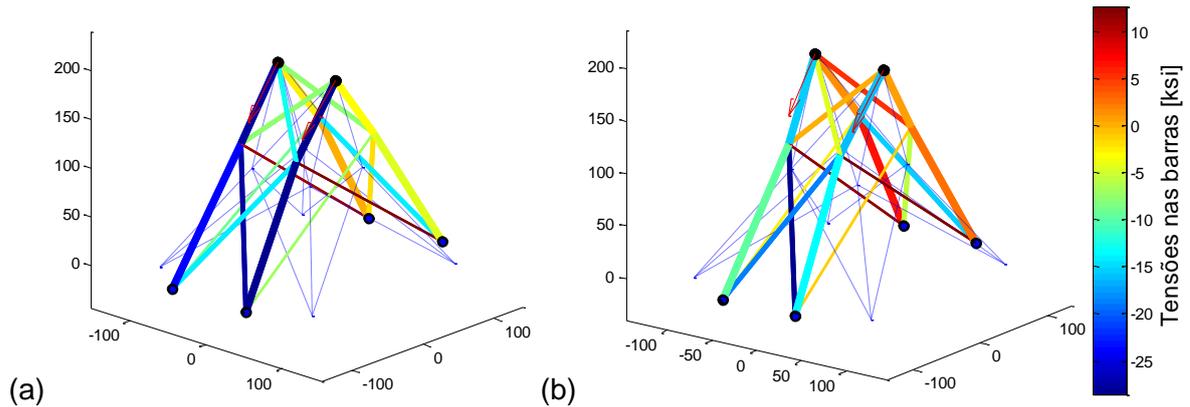


Figura 63 – (a) Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da treliça de 25 barras e (b) com um ajuste das coordenadas móveis via PNL.

5.8 TORRE DE 47 BARRAS

A estrutura de 47 barras (Figura 64) é uma estrutura plana comumente denominada por torre, sujeita a 3 casos de carregamentos (Tabela 20). A densidade do material é 0,3 lbs/pol³ e o módulo de elasticidade é 30000 ksi. As restrições impostas ao problema são quanto a tensão do elemento que não deve exceder a 20 ksi em tração e a 25 ksi em compressão e a falha por flambagem (Equação 5.6), onde o coeficiente C equivale a 3,96 (GHOLIZADEH, 2013). Os elementos adotados são elementos do tipo barra e as seções que o algoritmo pode assumir estão disponíveis na lista 5.

Tabela 20 – Múltiplos casos de carregamentos para a torre de 47 barras.

Caso	Nós	Fx (kips)	Fy (kips)
1	17 e 22	6,0	-14,0
2	17	6,0	-14,0
3	22	6,0	-14,0

5.8.1 Otimizações dimensional e de forma

A estrutura é simétrica em relação ao eixo y , sendo que os 47 elementos são agrupados em 27 variáveis de projeto independentes. Considerando a otimização de forma, os nós 15, 16, 17 e 22 são fixos somente em relação ao eixo x e os nós 1 e 2 possuem restrição de deslocamento na direção vertical (y), porém, podem se

movimentar na direção x. Portanto, este problema consiste no total de 44 variáveis de projeto: $A_1 = A_3, A_2 = A_4, A_5 = A_6, A_7, A_8 = A_9, A_{10}, A_{12} = A_{11}, A_{14} = A_{13}, A_{15} = A_{16}, A_{18} = A_{17}, A_{20} = A_{19}, A_{22} = A_{21}, A_{24} = A_{23}, A_{26} = A_{25}, A_{27}, A_{28}, A_{30} = A_{29}, A_{31} = A_{32}, A_{33}, A_{35} = A_{34}, A_{36} = A_{37}, A_{40} = A_{39}, A_{41} = A_{42}, A_{43}, A_{45} = A_{44}, A_{46} = A_{47}, x_2 = -x_1, x_4 = -x_3, y_4 = y_3, x_6 = -x_5, y_6 = y_5, x_8 = -x_7, y_8 = y_7, x_{10} = -x_9, y_{10} = y_9, x_{12} = -x_{11}, y_{12} = y_{11}, x_{14} = -x_{13}, y_{14} = y_{13}, x_{20} = -x_{19}, y_{20} = y_{19}, x_{21} = -x_{18}, y_{21} = y_{18}$. Na Tabela 21, são apresentados os resultados finais para esta estrutura, as Figuras 65 e 66 mostram as estruturas finais utilizando somente AG e utilizando PNL a partir do ponto fornecido pelo AG, respectivamente e a Figura 67 apresenta a curva de convergência do algoritmo.

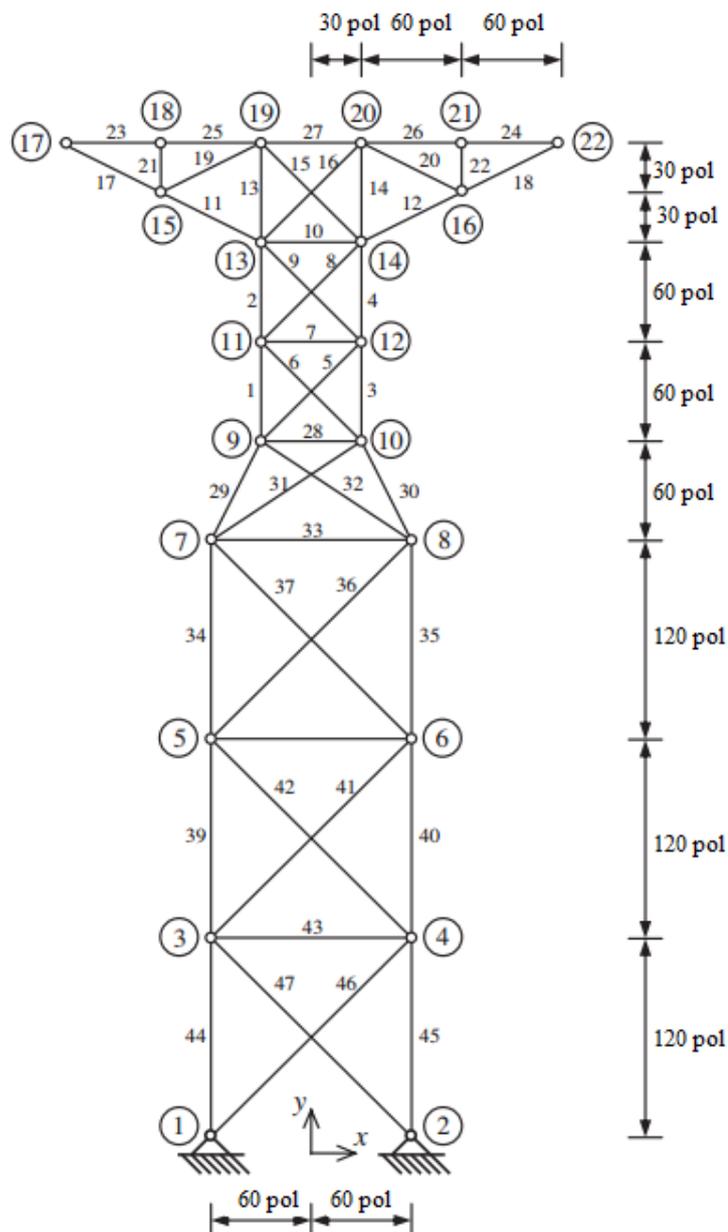


Figura 64 – Torre treliçada de 47 barras.

Tabela 21 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras

Variáveis de projeto	[21]	[22]	[23]	[14]	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
A3 (pol ²)	2,61	2,50	2,50	2,50	3,40	3,40
A4 (pol ²)	2,56	2,20	2,50	2,50	2,70	2,70
A5 (pol ²)	0,69	0,70	0,80	0,80	0,60	0,60
A7 (pol ²)	0,47	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
A8 (pol ²)	0,80	1,30	0,70	0,70	1,30	1,30
A10 (pol ²)	1,13	1,30	1,30	1,40	1,10	1,10
A12 (pol ²)	1,71	1,80	1,80	1,70	1,80	1,80
A14 (pol ²)	0,77	0,50	0,70	0,80	0,80	0,80
A15 (pol ²)	10,9	0,80	0,90	0,90	1,00	1,00
A18 (pol ²)	1,34	1,20	1,20	1,30	1,70	1,70
A20 (pol ²)	0,36	0,40	0,40	0,30	0,20	0,20
A22 (pol ²)	0,97	1,20	1,30	0,90	0,40	0,40
A24 (pol ²)	1,00	0,90	0,90	1,00	1,30	1,30
A26 (pol ²)	1,03	1,00	0,90	1,10	1,20	1,20
A27 (pol ²)	0,88	3,60	0,70	5,00	1,10	1,10
A28 (pol ²)	0,55	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
A30 (pol ²)	2,59	2,40	2,50	2,50	3,30	3,30
A31 (pol ²)	0,84	1,10	1,00	1,00	1,20	1,20
A33 (pol ²)	0,25	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
A35 (pol ²)	2,86	2,70	2,90	2,80	3,40	3,40
A36 (pol ²)	0,92	0,80	0,80	0,90	1,00	1,00
A38 (pol ²)	0,67	0,10	0,10	0,10	0,20	0,20
A40 (pol ²)	3,06	2,80	3,00	3,00	3,80	3,80
A41 (pol ²)	1,04	1,30	1,20	1,00	1,00	1,00
A43 (pol ²)	0,10	0,20	0,10	0,10	0,10	0,10
A45 (pol ²)	3,13	3,00	3,20	3,20	4,20	4,20
A46 (pol ²)	1,12	1,20	1,10	1,20	1,30	1,30
X2 (pol ²)	107,76	114,00	104,00	101,34	69,76	76,03
X4 (pol ²)	89,15	97,00	87,00	85,91	61,64	59,82
Y4 (pol)	137,98	125,00	128,00	135,96	133,43	162,06
X6 (pol)	66,75	76,00	70,00	74,80	58,71	59,09
Y6 (pol)	254,47	261,00	259,00	237,74	221,52	250,72
X8 (pol)	57,38	69,00	62,00	64,31	45,90	56,52
Y8 (pol)	342,16	316,00	326,00	321,34	336,77	327,57
X10 (pol)	49,85	56,00	53,00	53,33	33,85	51,10
Y10 (pol)	417,17	414,00	412,00	414,30	447,83	402,73
X12 (pol)	44,66	50,00	47,00	46,03	33,11	45,07
Y12 (pol)	475,35	463,00	486,00	489,92	483,31	464,81
X14 (pol)	41,09	54,00	45,00	41,83	48,56	44,93
Y14 (pol)	513,15	524,00	504,00	522,42	545,25	529,21
X20 (pol)	17,90	1,00	2,00	1,00	19,78	32,17
Y20 (pol)	597,92	587,0	584,00	598,39	613,62	600,09
X21 (pol)	93,54	99,00	89,00	97,87	82,47	94,72
Y21 (pol)	623,94	631,00	637,00	624,05	614,06	602,85
Máxima restrição violada	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Número de Análises	-	100000	-	25000	5807560	5807680
Peso total (lb)	1900,00	1925,79	1871,70	1864,10	2063,4	2055,1

[21] Salajegheh e Vanderplaats (1993), [22] Hansancebi e Erbatur (2001) e [23] Hansancebi e Erbatur (2002).

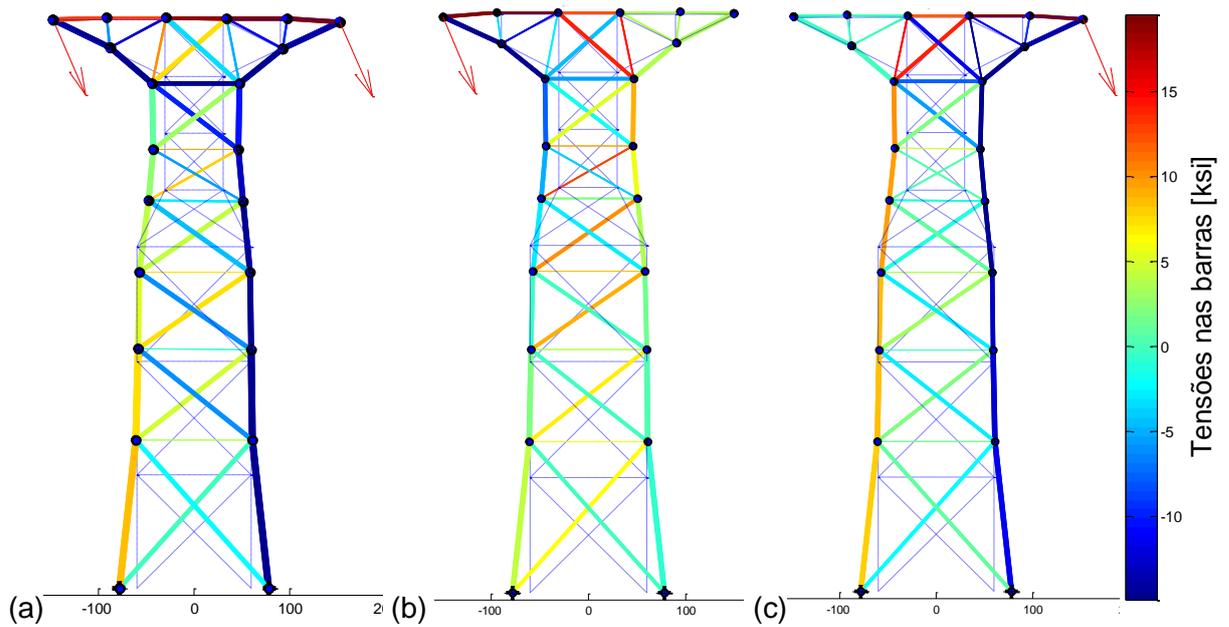


Figura 65 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras, somente via AG, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.

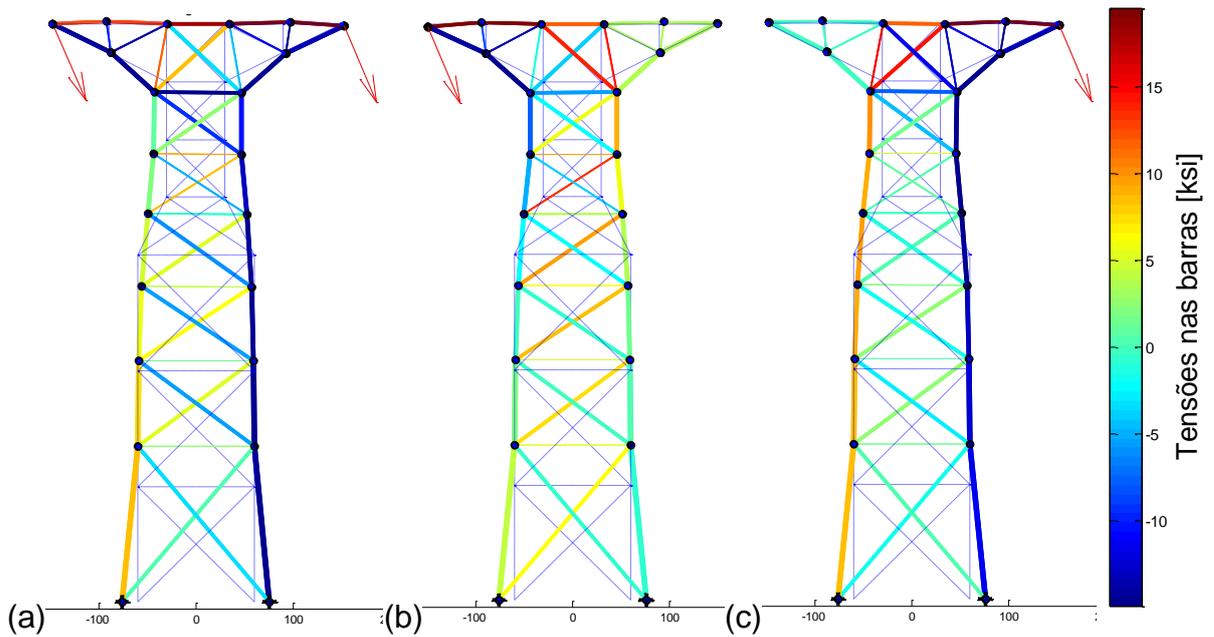


Figura 66 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras, via PNL a partir da solução obtida pelo AG, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.

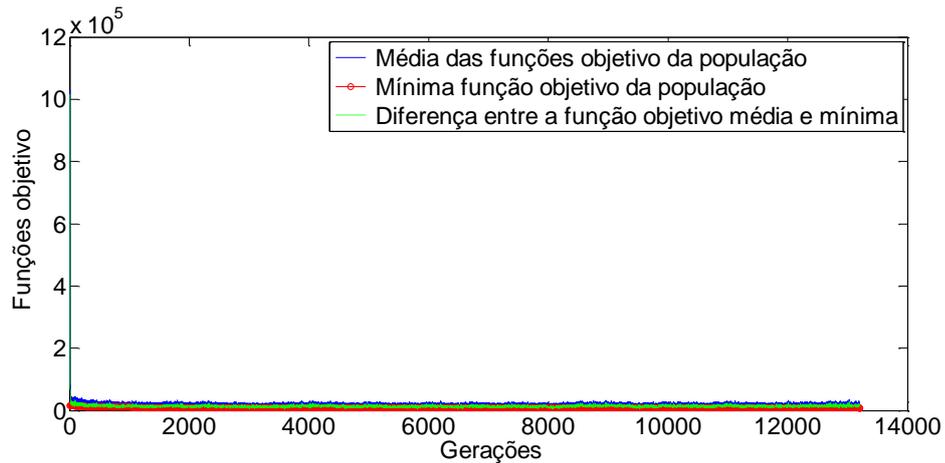


Figura 67 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma da torre de 47 barras.

Neste problema analisado, a metodologia em tela apresentou um resultado de peso total da estrutura maior que os fornecidos em outros trabalhos disponíveis na literatura. O número de análises foi 5807560. Pode-se concluir que para casos em que são considerados mais de um caso de carregamento, otimizações dimensional e de forma e um elevado número de variáveis de projeto, o AG necessita de muitas iterações para alcançar bons resultados.

5.8.2 Otimizações dimensional, de forma e topológica

Conforme apresentado na Tabela 21, os elementos 7, 28, 33 e 43 podem ser eliminados da estrutura (Figura 68). Com a eliminação destes, alguns elementos passam a agredir a restrição quanto à falha material. Para evitar este problema, a área destes elementos é aumentada. No final do processo de otimização topológica, as coordenadas móveis são reajustadas à esta topologia (Figura 69) via PNL. A Tabela 22 apresenta os resultados para este problema e a Figura 70 mostra a curva de convergência do algoritmo.

Tabela 22 – Resultados para as otimizações dimensional, de forma e topológica da torre de 47 barras

Variáveis de projeto							
A ₃ (pol ²)	3,40	A ₂₂ (pol ²)	0,40	A ₄₀ (pol ²)	3,80	Y ₈ (pol)	337,68
A ₄ (pol ²)	2,70	A ₂₄ (pol ²)	1,30	A ₄₁ (pol ²)	1,00	X ₁₀ (pol)	35,16
A ₅ (pol ²)	0,60	A ₂₆ (pol ²)	1,20	A ₄₃ (pol ²)	0,00	Y ₁₀ (pol)	438,82
A ₇ (pol ²)	0,00	A ₂₇ (pol ²)	1,10	A ₄₅ (pol ²)	4,20	X ₁₂ (pol)	33,68
A ₈ (pol ²)	1,30	A ₂₈ (pol ²)	0,00	A ₄₆ (pol ²)	1,30	Y ₁₂ (pol)	483,20
A ₁₀ (pol ²)	1,10	A ₃₀ (pol ²)	3,30	X ₂ (pol)	68,07	X ₁₄ (pol)	48,33
A ₁₂ (pol ²)	1,80	A ₃₁ (pol ²)	1,20	X ₄ (pol)	60,43	Y ₁₄ (pol)	539,64
A ₁₄ (pol ²)	0,80	A ₃₃ (pol ²)	0,00	Y ₄ (pol)	134,99	X ₂₀ (pol)	19,63
A ₁₅ (pol ²)	1,00	A ₃₅ (pol ²)	3,40	X ₆ (pol)	57,22	Y ₂₀ (pol)	608,73
A ₁₈ (pol ²)	1,70	A ₃₆ (pol ²)	1,00	Y ₆ (pol)	224,11	X ₂₁ (pol)	84,79
A ₂₀ (pol ²)	0,20	A ₃₈ (pol ²)	0,20	X ₈ (pol)	46,99	Y ₂₁ (pol)	612,28
Máxima restrição violada: 0,00							
Número de Análises: 5807690							
Peso total (lb): 2042,8							

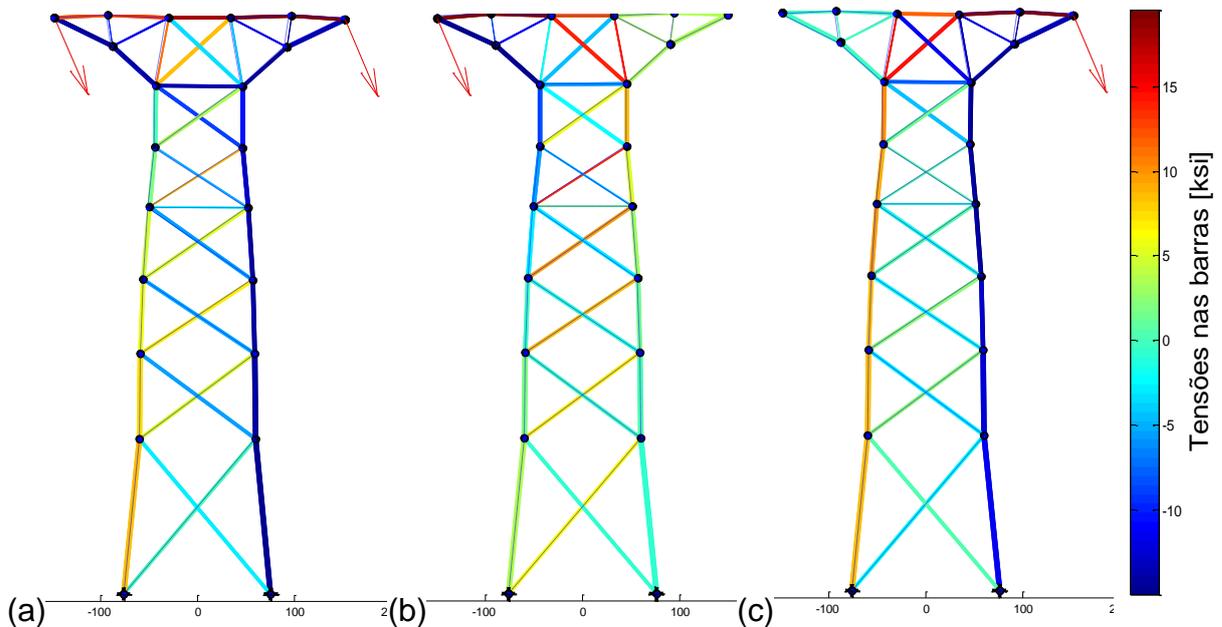


Figura 68 – Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da torre de 47 barras, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.

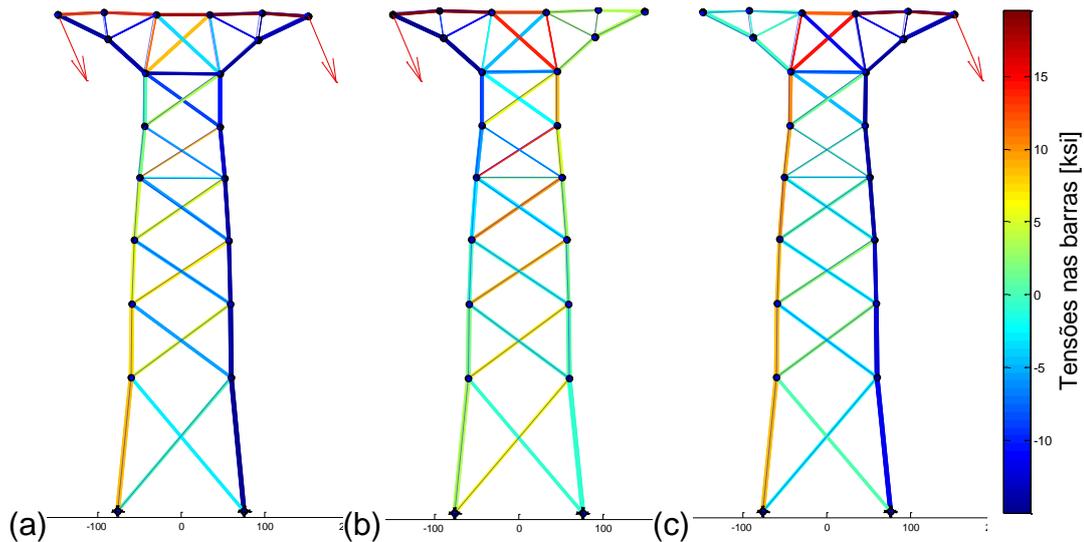


Figura 69 – Estrutura final para as otimizações dimensional, de forma e topológica da torre de 47 barras, com um ajuste das coordenadas móveis via PNL, (a) para o primeiro, (b) o segundo e (c) o terceiro caso de carregamento.

A topologia desta estrutura de 47 barras apresenta um resultado de peso total da estrutura 12,3 libras inferior ao obtido no processo de otimização dimensional e de forma, provando que nesta estrutura pode haver uma melhoria na solução final, quando aplicado o processo de otimização topológica.

5.9 DOMO DE 120 BARRAS

Uma estrutura tridimensional na forma de um domo e composta de 120 barras (Figura 70) é investigada por alguns autores com o objetivo de analisar a eficiência de algoritmos de otimização estrutural. Lee e Geem (2004) utilizaram o método *Harmony Search Algorithm* e Togan e Daloglu (2008) utilizaram Algoritmos Genéticos para resolver este problema. Esta estrutura possui 49 nós e 120 elementos, que são reunidos em 7 grupos, visando, principalmente, manter simetrias.

5.9.1 Otimização dimensional

As seções adotadas são tubulares e estão disponíveis na lista 6 conforme a norma AISC-ASD (Tabela 1). A estrutura está sujeita a um caso de carregamento vertical (na direção do eixo z) em todos os nós que não estão engastados. No nó 1,

há uma força de -13,49 kips, do nó 2 ao nó 13 uma força de -6,744 kips e nos demais nós uma força de -2,248 kips. O módulo de elasticidade é de 30450 ksi e a densidade do material é de 0,288 lbs/pol³.

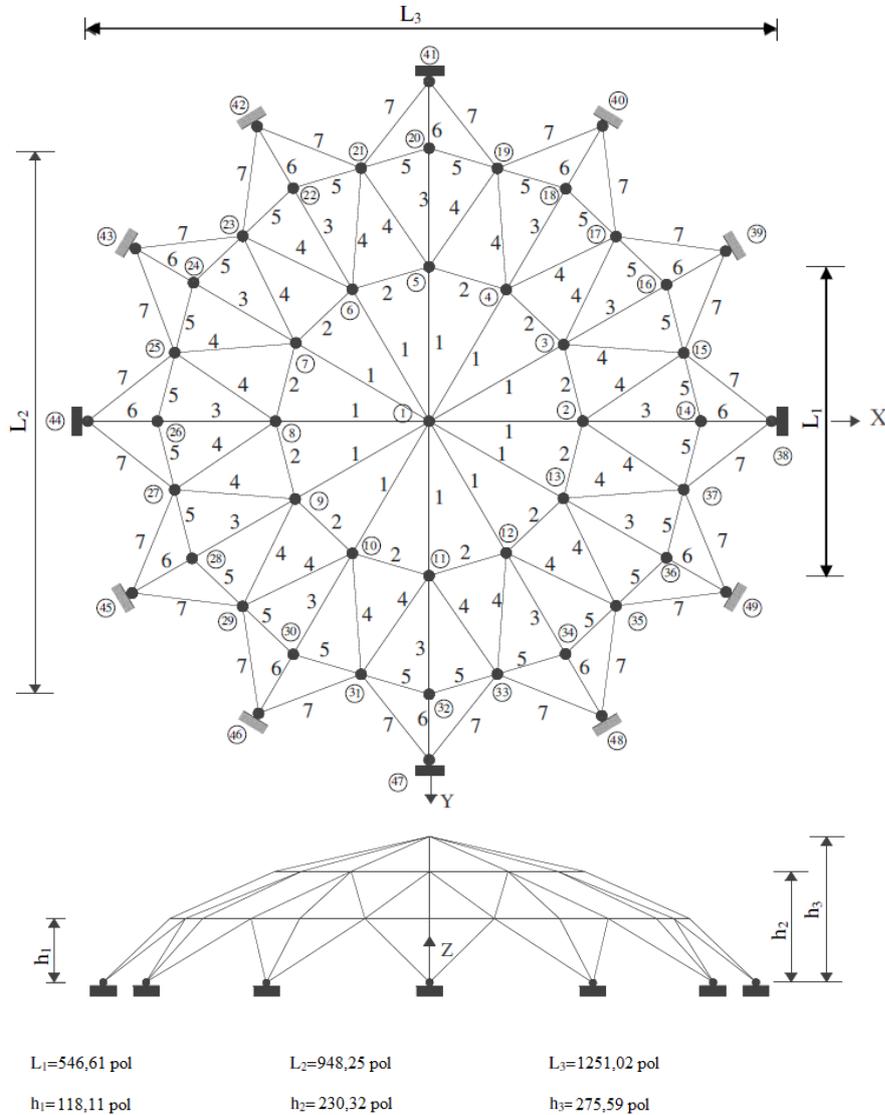


Figura 70 – Domo de 120 barras.

Este problema incorpora os três tipos de restrições trabalhadas no presente estudo. As restrições são definidas em relação à tensão admissível de tração e de compressão com valores limites de ± 58 ksi, à flambagem local das barras (Equação 4.7) e o deslocamento limite de todos os nós de $\pm 0,1969$ pol nas direções de x e y. Lee e Geem (2004) utilizaram variáveis de área contínuas partindo de um valor mínimo de 0,775 pol². Os resultados estão listados na Tabela 23. A estrutura final é

representada na Figura 71 e a Figura 72 mostra a curva de convergência do algoritmo.

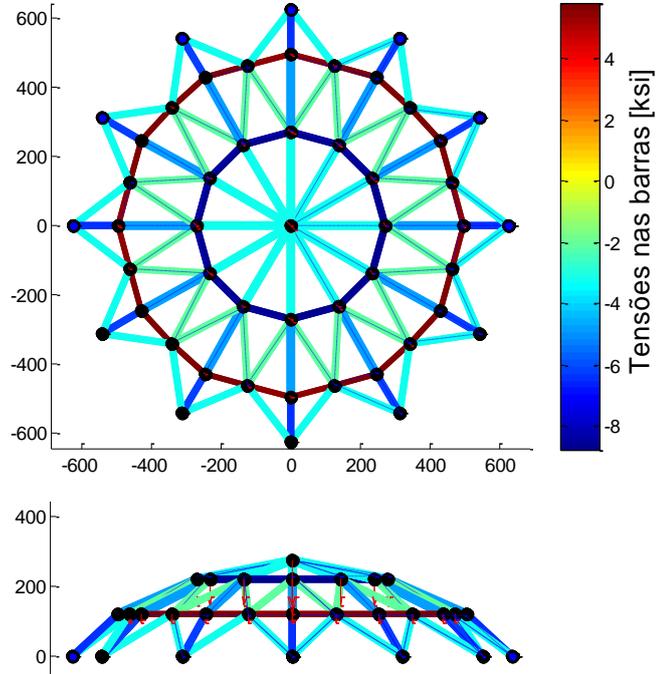


Figura 71 – Estrutura final para a otimização dimensional do domo de 120 barras.

Tabela 23 – Resultados para a otimização dimensional do domo de 120 barras.

Referências	Seções ótimas (pol ²)							Peso total (lb)
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
Lee e Geem (2004)	3,295	2,396	3,874	2,571	1,150	3,331	2,784	19707
Togan e Daloglu (2008)	0,799	2,68	4,30	2,23	0,799	3,17	2,68	17970
Presente trabalho	2,23	1,70	2,23	1,70	0,494	1,70	1,70	12079

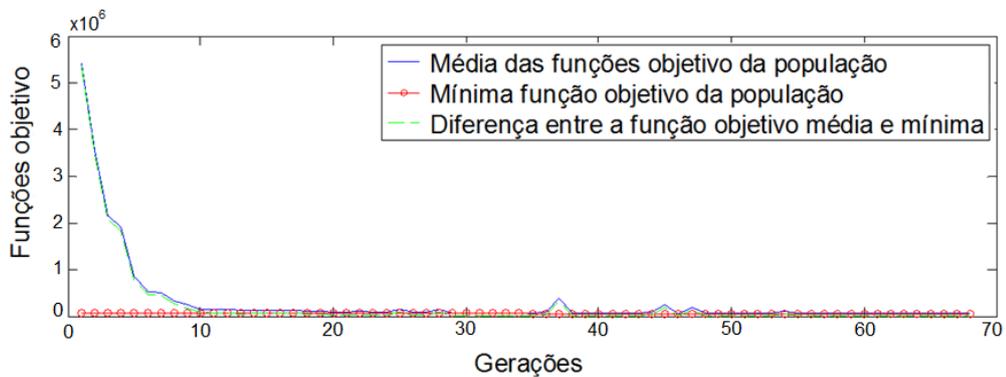


Figura 72 – Curva de convergência do algoritmo para a otimização dimensional do domo de 120 barras.

Na Tabela 23 é possível observar que o resultado obtido nesta metodologia é melhor que os fornecidos pelos demais trabalhos disponíveis na literatura. A tensão máxima da estrutura é de 8,77 ksi e o deslocamento máximo da estrutura foi de 0,1807 pol. Nenhuma restrição foi agredida. 4410 iterações foram necessárias para resolver este problema e resultar nesta configuração final.

5.9.2 Otimizações dimensional e de forma

Considerado a otimizações dimensional e de forma desta estrutura de 120 barras, a mesma pode variar as coordenadas h_1 , h_2 e h_3 na direção z (Soh e Yang, 1996), como mostra a Figura 68. As mesmas propriedades do material, os carregamentos e as restrições, conforme o problema de otimização dimensional são mantidas. A Tabela 24 apresenta os resultados para este problema, a Figura 73 mostra a configuração final utilizando somente o AG e a Figura 74 utilizando PNL a partir do ponto fornecido pelo AG. E finalmente a Figura 75 mostra a curva de convergência do algoritmo.

Tabela 24 – Resultados para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras.

Variáveis de projeto	Soh e Yang (1994)	Soh e Yang (1996)	Presente trabalho (AG)	Presente trabalho (AG + PNL)
A1	1,86	2,09	2,23	2,23
A2	1,32	1,43	1,70	1,70
A3	2,34	2,41	2,23	2,23
A4	1,56	1,53	1,70	1,70
A5	0,77	0,77	0,50	0,494
A6	1,97	1,97	1,70	1,70
A7	1,33	1,39	1,70	1,70
h1	128,88	130,75	118,13	118,11
h2	243,23	255,59	247,29	239,77
h3	275,00	316,93	292,01	272,43
Máxima restrição violada	ND	ND	0,00	0,00
Número de Análises	ND	ND	98901	98967
Peso total (lb)	11298,59	11834,07	10819,57	10651,46

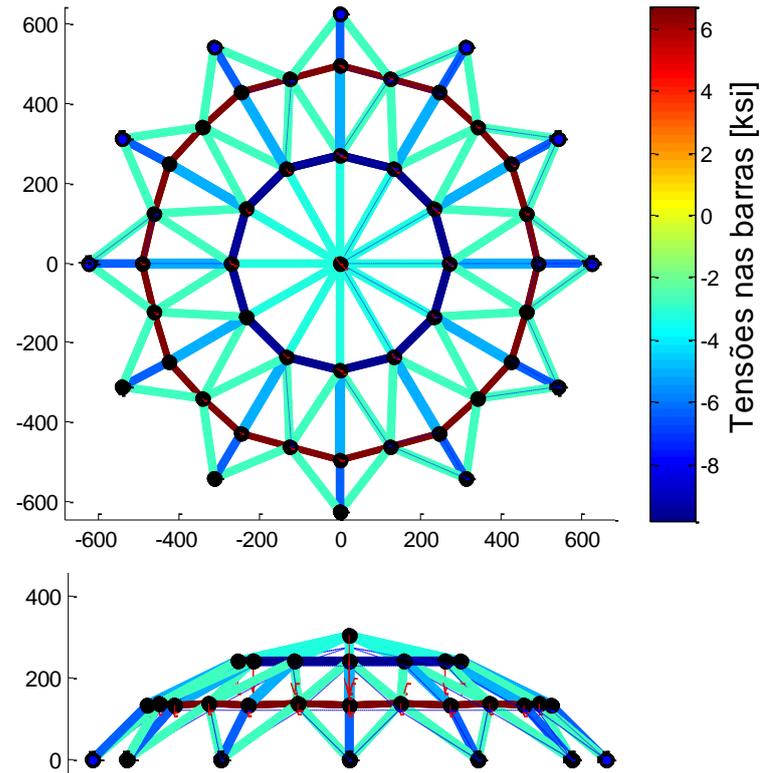


Figura 73 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras, somente via AG.

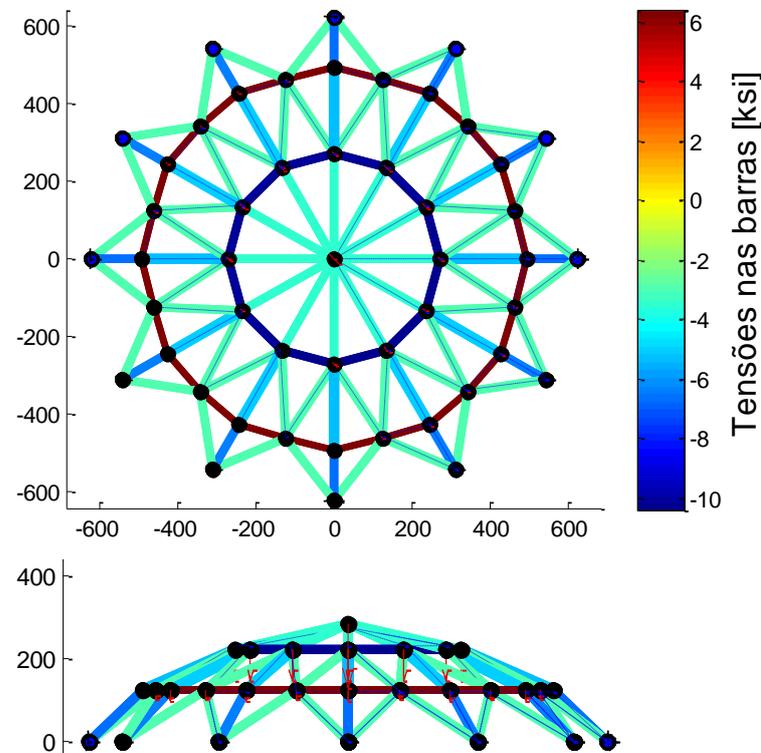


Figura 74 – Estrutura final para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras, via PNL a partir da solução obtida pelo AG.

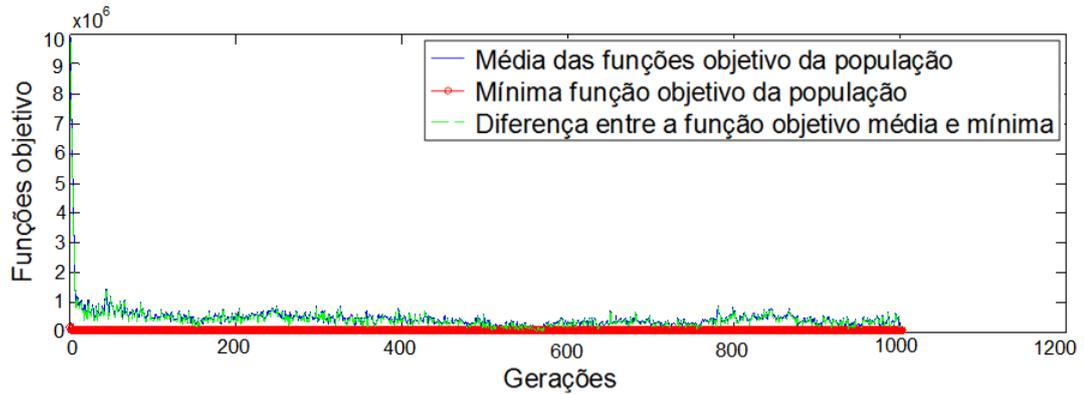


Figura 75 – Curva de convergência do algoritmo para as otimizações dimensional e de forma do domo de 120 barras.

A Tabela 24 mostra que o peso total da estrutura obtido neste trabalho é menor que os resultados fornecidos na literatura. A tensão máxima da estrutura é de 10,382 ksi e o máximo valor da componente de deslocamento da estrutura foi de 0,1854 pol. A diferença entre a estrutura final obtida via AG (Figura 73) e a obtida via PNL, a partir do melhor indivíduo (ponto) fornecido pelo AG, é praticamente imperceptível, pois a alteração das variáveis de coordenadas móveis é pequena de um processo para o outro.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho tem como meta desenvolver, implementar computacionalmente e testar uma metodologia de otimização dimensional, de forma e topológica de estruturas treliçadas, buscando o mínimo peso, considerando como funções restrição a falha material, falha por flambagem local e deslocamentos nodais. Múltiplos casos de carregamento podem ser considerados no problema.

A formulação apresentada é implementada computacionalmente em uma estrutura no *software* Matlab[®]. As soluções ótimas são obtidas por meio da aplicação de uma técnica híbrida de otimização, utilizando Algoritmos Genéticos para localizar de forma aproximada o ponto de ótimo global e, posteriormente, é empregada uma técnica de Programação Não Linear, a fim de obter uma solução com maior precisão.

Quanto ao Algoritmo Genético empregado, o mesmo pode operar com variáveis discretas, contínuas ou ambas simultaneamente e para validá-lo é utilizada uma função de teste que possui muitos mínimos locais. O AG alcançou o ponto de mínimo global tanto para o problema sem restrições, quanto com restrições desta função teste. As técnicas adaptativas de penalização das funções de restrição, de cruzamento e de mutação se mostram apropriadas, tornando estes processos mais eficientes.

Os resultados obtidos mostram que a metodologia empregada neste trabalho pode ser indicada na solução de problemas de projeto ótimo de treliças. Para isto, seis casos clássicos encontrados na literatura são testados e comparados:

- O primeiro caso avaliado é referente a estrutura composta por 10 barras, sendo um dos casos mais avaliados na literatura. Neste problema, é possível observar que a proposta deste trabalho promove resultados bastante satisfatórios e, em algumas análises, até melhores que os fornecidos nos trabalhos citados.
- A segunda estrutura trata de uma treliça plana de 15 barras. Os resultados obtidos mostram a aplicabilidade do processo de otimização topológica, mais especificamente, o processo de colapso de nós. A solução final obtida apresenta resultados semelhantes aos fornecidos por outros trabalhos, ou seja, as variáveis de área e coordenadas móveis possuem valores próximos ou iguais aos fornecidos nos trabalhos citados.

- O terceiro problema trata de uma estrutura composta por 18 barras, bastante utilizada quando consideradas as otimizações dimensional e de forma. Para esta análise os resultados obtidos no presente estudo são melhores que os disponíveis em outros trabalhos. Além da comparação com a literatura, é proposto neste trabalho a utilização de variáveis discretas para a área dos elementos, a fim de obter uma estrutura que possa utilizar seções comerciais.
- O quarto caso, bastante evidenciado na literatura, trata de uma estrutura espacial composta por 25 barras. Os resultados para o processo de otimização dimensional se mostram melhores que os disponíveis em outros trabalhos, pois não agredem as restrições. Quando considerada as otimizações dimensional, de forma e topológica, os resultados apresentados se mostram satisfatórios e próximos dos disponíveis por outros autores.
- A quinta estrutura trata de uma treliça plana na forma de uma torre elétrica composta por 47 barras. Esta estrutura possui múltiplos casos de carregamento e um número relativamente grande de variáveis de projeto, necessitando de um número grande de análises. A solução obtida para esta estrutura é satisfatória, com resultados de área e coordenadas móveis próximos aos encontrados em outros trabalhos. Uma outra proposta abordada nesta estrutura se dá através da otimização topológica após os processos de otimizações dimensional e de forma. O resultado desta proposta mostra que, para esta estrutura, a otimização topológica diminui ainda mais o peso total da mesma.
- Finalmente, a última estrutura avaliada trata de uma treliça espacial na forma de um domo de 120 barras. Esta considera as três restrições abordadas no presente trabalho. Os resultados obtidos se mostram melhores que aqueles fornecidos na literatura, tanto para a otimização dimensional, somente, quanto para a otimização dimensional e de forma.

Deve ser frisado que em todos os casos avaliados, as estruturas finais apresentam resultados em que nenhuma restrição é agredida, o que não é evidenciado em algumas soluções encontradas na literatura.

A metodologia aqui desenvolvida se mostra bastante promissora, tendo em vista que os resultados obtidos alcançaram valores muito semelhantes quando comparados com a literatura e em alguns casos se mostraram melhores. A utilização do algoritmo híbrido com programação não linear se mostra uma alternativa viável, visto que esta é empregada apenas para um ajuste das variáveis, em especial às

coordenadas movíveis, e requer um número pequeno de iterações. O agrupamento de barras é um ótimo recurso que diminui o número de variáveis de projeto, reduz o custo computacional e garante possíveis simetrias da estrutura, o que facilitaria no processo de construção (montagem).

Para os trabalhos futuros, sugere-se:

- I. Análise de vigas e pórticos considerando outros tipos de cargas como flexão, torção e flambagem global;
- II. Realizar testes adicionais com as funções adaptativas nos Algoritmos Genéticos;
- III. Incorporar análise de sensibilidade no processo de mutação, buscando um aumento de sua eficácia (não alterando a variável de forma randômica, como realizado trabalho);
- IV. Incorporar análise de sensibilidade no processo de otimização via programação não linear;
- V. Considerar a não linearidade geométrica, ou seja, grandes deslocamentos da estrutura;
- VI. Realizar testes com outras técnicas heurísticas, como *Particle Swarm Optimization*, *Simulated Annealing* etc.;
- VII. Considerar efeitos dinâmicos, frequentemente encontrados neste tipo de estrutura e
- VIII. Considerar outros tipos de seções transversais.

REFERÊNCIAS

- ACHTZIGER, W. Topology optimization of discrete structures: In introduction in view of computational and non smooth aspects. In ROZVANY, G. I. N. editor, **Topology Optimization in Structural Mechanics**, CISM Courses and Lectures, N^o 374, Springer-Verlag, Vienna, Austria, p. 57-100, 1997.
- ACHTZIGER, W. On simultaneous optimization of truss geometry and topology. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, p. 285–305, 2007.
- ACHTZIGER, W.; STOLPE, M. Truss topology optimization with discrete design variables – guaranteed global optimality and benchmark examples. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 34, p. 1–20, 2007.
- ADELI, H. Augmented Lagrangian genetic algorithm for structural optimization. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 7, n. 1, p. 104-118, 1994.
- AHRARI, A.; ATAI, A. A. Fully Stressed Design Evolution Strategy for Shape and Size Optimization of Truss Structures. **Computers & Structures**, v. 123, p. 58-67, 2013.
- ANTHONY, D. K.; ELLIOT, S. J.; KEANE, A. K. Robustness of optimal design solutions to reduce vibration transmission in a light weight 2-D structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 229, n. 3, p. 505-528, 2000.
- ARORA, J. S. **Methods for discrete variable structural optimization, in recent advances in optimal structural design**. In: S. A. Burns ASCE, p. 1-40, 2002.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 2. ed. Elsevier, San Diego, 2004.
- ARORA, J. S. **Optimization of Structural and Mechanical Systems**. World Scientific, Singapore, 2007.
- BÄCK, T.; SCHWEFEL, H. P. **An Overview of Evolutionary Algorithms for Parameter Optimization**. Relatório Interno, Department of Computer Science - University of Dortmund, Dortmund, Alemanha, 1992.
- BECKERS, M.; FLEURY, C. A primal-dual approach in truss topology optimization. **Computers & Structures**, v. 64, p. 77-88, 1997.
- BEKIROGLU, S.; DEDE, T.; AYVAZ, Y. Implementation of different encoding types on structural optimization based on adaptive genetic algorithm. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, p. 826-835, 2009.
- BENOIT D.; RAJAN F. C. A lower-bound formulation for the geometry and topology optimization of truss structures under multiple loading. **Structural and Multidisciplinary optimization**, v. 48, p. 49-58, 2013.

BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape, and Material.** Springer-Verlag, 1995.

BENDSØE, M. P.; BEN-TAL, A.; HAFTKA, R. T. New displacement based methods for optimal truss topology design. **AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC SDM Conference**, Baltimore, MD, 1991.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications.** Springer, Berlin, Alemanha; Heidelberg, 2003.

BERKE, L.; KHOT, N. S. **Structural Optimization using Optimality Criteria, In Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical System.** p. 235-269. Springer, Berlin, 1987.

BIEDERMANN, J. D. e GRIERSON, D. E. A generic model for building design. **Engineering with Computers**, v. 11, p. 173-84, 1995.

CAMP, C. V. Design of space trusses using Big Bang–Big Crunch optimization. **Journal of Structural Engineering ASCE**, v. 133, p. 999-1008, 2007.

CAMP, C. V.; BICHON, B. J. Design of space trusses using ant colony optimization. **Journal of Structural Engineering**, v. 130, n. 5, p. 741-51, 2004.

CAMP, C. V.; FARSHCHIN, M. Design of space trusses using modified Teaching–Learning Based Optimization. **Engineering Structures**, v. 63, p. 87-97, 2014.

CAMP, C.; PEZESHK, S.; CAO, G. Optimized design of two-dimensional structures using a genetic algorithm. **Journal of Structural Engineering**, v. 124, p. 551-559, 1998.

CELLA, A.; LOGCHER, R. D. Automated optimum design from discrete component. **Journal Structural Division ASCE**, v. 97, p. 175-189, 1971.

CHEN, S. Y.; RAJAN, S. D. A robust genetic algorithm for structural optimization. **Structural Engineering and Mechanics Journal**, v. 10, n. 4, p. 313-36, 2000.

CHENG, D.; GUO, X. ε -relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, v. 13, p. 258-266, 1997.

CHENG, G.; JIANG, Z. Study on topology optimization with stress constraints. **Engineering Optimization**, v. 20, p. 129-148, 1992.

COELLO, A. C. C. **Self-adaptive Penalties for GA-based Optimization.** Laboratório. Nacional de Informática, Avanzada, Xalapa, Mexico, 1999.

COOK, R. D.; MALKUS, R. D.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Application of Finit Element Analysis.** John Wiley & Sons, 2002.

DASGUPTA, D.; MICHALEWICZ, Z. **Evolutionary Algorithms in Engineering Applications.** Springer-Verlag, Berlin, 1997.

DE JONG, K. A. **An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems.** Tese (Doutorado), Department of Computer and Communication Sciences, University of Michigan, Ann Arbor, 1975.

DE JONG, K. A. **Genetic Algorithms: A 30 Year Perspective. Perspectives on Adaptation in Natural and Artificial Systems**, L. Booker, S. Forrest, M. Mitchell, and R. Riolo, Eds.: Oxford University Press, 2005.

DEB, K.; GULATI, S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. **Finite Element in Analysis and Design**, v. 37, p. 447-465, 2001.

DEDE, T.; AYVAZ, Y.; BEKIROGLU, S. Optimization of truss structures using value encoding in a genetic algorithm, In: **Seventh International Conference on the Application of Artificial Intelligence to Civil and Structural Engineering**, p. 38, 2003.

DEDE, T.; BEKIROGLU, S.; AYVAZ, Y. Weight minimization of trusses with genetic algorithm. **Applied Soft Computing**, v. 11, p. 2565–2575, 2011.

DOBBS, M. W.; FELTON, L.P. Optimization of truss geometry. **Journal of Structural. Division, ASCE 95 ST10**, p. 2105-2118, 1969.

DOMINGUEZ, A.; STIHARU, I.; SEDAGHATI, R. Practical design optimization of truss structures using the genetic algorithms, **Research in Engineering Design**, v. 17, p. 73-84, 2006.

DORN, W. S.; GOMORY, R. E.; GREENBERG, H. J. Automatic design of optimal structures. **Journal de Mécanique**, v. 3, p. 25-52, 1964.

EKLUND, N. H. W.; EMBRECHTS, M. J.; GOETSCHALCKX, M. Efficient chromosome encoding and problem-specific mutation methods for the flexible bay facility layout problem, **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part C: Applications and Reviews** v. 36, p. 495-502, 2006.

ELPERIN, T. Monte-carlo structural optimization in discrete variable with annealing algorithm. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 26, p. 815-821, 1988.

ERBATUR, F.; HASANÇEBİ, O.; TUTUNCU, I.; KILIÇ, H. Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms. **Computers & Structures** v. 75, p. 209-224, 2000.

ESHELMAN, L.; CARUANA, R.; SCHAFFER, D. **Biases in the crossover landscape, in: Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms**, Morgan Kaufman, Los Altos, CA, 1989.

FELIX, J. & VANDERPLAATS, G. N. Configuration optimization of trusses subject to strength, displacement and frequency constraints. **Journal of Mechanical Design**, v. 109, n. 2, p. 233-241, 1987.

FLAGER, F.; SOREMEKUN, G.; ADYA, A.; SHEA, K.; HAYMAKER, J.; FISCHER, M. Fully Constrained Design: A general and scalable method for discrete member sizing optimization of steel truss structures. **Computers & Structures**, v. 140, p. 55-65, 2014.

FLETCHER, R. **Practical Methods of optimization**. Nova York: Wiley, 1987.

FOLEY, C. M. e SCHINLER, D. Automated design of steel frames using advanced analysis and object-oriented evolutionary computation. **Journal of Structural Engineering**, v. 129, p. 648-660, 2003.

GALANTE, M. Genetic algorithms as an approach to optimize real-world trusses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 361-382, 1996.

GHOLIZADEH, S. Layout optimization of truss structures by hybridizing cellular automata and particle swarm optimization. **Computers & Structures**, v. 125, p. 86-99, 2013.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Addison Wesley Longman, Inc., Reading, MA, EUA, 1989.

GOLDBERG, D. E.; SAMTANI, M. P. **Engineering optimization via genetic algorithm**. International Proceedings of ninth conference on electronic computation. ASCE, New York, p. 471-482, 1986.

GRIERSON, D. E.; CAMERON G. E. **SODA - Structural Optimization Design and Analysis**. Waterloo Engineering Software, 1987.

GRIERSON, D. E.; PAK W. H. Optimal sizing, geometrical and topological design using a genetic algorithm. **Structural Optimization**, v. 6, p. 151-159, 1993.

GRUAU, F.; WHITLEY, D. D. Adding learning to the cellular development of neural network: Evolution and baldwin effect, **Evolutionary Computation**, v. 1, p. 213-233, 1993.

GUO, X.; CHENG, G. D. An extrapolation approach for the solution of singular optima. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, p. 255-262, 2000.

GUO, X.; CHENG, G. D.; YAMAZAKI, K. A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, p. 364-372, 2001.

GUO, X.; CHENG, G. D.; YAMAZAKI, K. A note on stress-constrained truss topology optimization. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 27, p. 136-137, 2004.

GUO, X.; CHENG, G. D.; OLHOFF, N. Optimum design of truss topology under buckling constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, p. 169-180, 2005.

HAFTKA, R. T. e GRANDHI, R. V. Structural shape optimization – a survey. **Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering**, v. 57, p. 91-106, 1986.

HAJELA, P.; LEE, E. Genetic Algorithms in truss topological optimization. **International Journal of Solids Structures**, v. 32, n. 22, p. 3341-3357, 1995.

HANSEN, S. R.; VANDERPLAATS, N. Approximation method for configuration optimization for trusses. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal**, v. 8, p. 161-168, 1989.

HASANCEBI, O.; ERBATUR, F. Layout optimization of trusses using improved GA methodologies. **Acta Mechanica**, v. 146, p. 87-107, 2001.

HASANCEBI, O.; ERBATUR, F. On efficient use of simulated annealing in complex structural optimization problems. **Acta Mechanica**, v. 157, p. 27-50, 2002.

HART, W. E. **Adaptive global optimization with local search**. Tese (Doutorado). San Diego: University of California, 1994.

HEMP, W. S. **Optimum Structures**. Clarendon Press, Oxford, 1973.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1975.

HUANG, X; XIE, M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications**. John Wiley & Sons, 2010.

HUTTON, D. V. **Fundamentals of Finite Element Analysis**. McGraw-Hill, 2003.

IMAI, K., & SCHMIT, L. A. Configuration optimization of trusses. **Journal Structure Division ASCE**, v. 107, p. 745-756, 1981.

JENKINS, W. M. A decimal-coded evolutionary algorithm for constrained optimization. **Computers and Structures**, v. 80, p. 471-480, 2002.

JOHN, K. V.; RAMAKRISHNAN, C. V. Minimum weight design of trusses using improved move limit method of sequential linear programming. **International Journal for Computational Civil Structures**, v. 27, p. 583-591, 1987.

KAVEH, A.; TALATAHARI, S. Size optimization of space trusses using Big Bang–Big Crunch algorithm. **Computers & Structures**, v. 87, p. 1129-1140, 2009.

KHOT, N. S., BERKE, L., & VENKAYYA, V. B. Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal**, v. 17, p. 182-90, 1979.

KIDO, T.; TAKAGI, K.; NAKANISHI, M. Analysis and comparisons of genetic algorithm, simulated annealing, tabu search, and evolutionary combination algorithm. **Informatics**, v. 18, p. 399-410, 1994.

KIRSCH, U. Optimal topologies of structures. **Applied Mechanics Review**, v. 42, p. 223-239, 1989.

KIRSCH, U. On singular topologies in optimum structural design. **Structural Optimization**, v. 2, p. 133-142, 1990.

KIRSCH, U.; TOPPING, B. H. V. Minimum wight design of structural topologies. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, p. 1770-1785, 1992.

KRAVANJA, S.; KRAVANJA, Z.; BEDENIK, B. S. The MINLP optimization approach to structural optimization, part i: general view on simultaneous topology and parameter optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, p. 263-292, 1998.

KRISHNAMOORTHY, C.S.; VENKATESH, P. P.; SUDARSHAN, R. Object-oriented framework for genetic algorithms with application to space truss optimization. **Journal of Computing in Civil Engineering ASCE**, v. 16, p. 66-75, 2002.

LEE, K. S.; GEEM, Z. W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm. **Computers & Structures**, v. 82, p. 781-98, 2004.

LI, L.; HUANG Z.; LIU F. A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables. **Computers & Structures**, v. 87, p. 435-43, 2009.

LIEBMAN, J. S.; KACHATHURIAN, N.; CHANARATNA, V. Discrete structural optimization. **Journal Structural Division ASCE**, v. 107, n. 11, p. 2177-2197, 1981.

LIVESLEY, R. K. **Matrix Methods of Structural Analysis**. Pergamon Press, 1975.

LOBO, F. G.; GOLDBERG, D. E. Decision making in a hybrid genetic algorithm. **IEEE International Conference on evolutionary Computation**. Piscataway, USA, p. 122-125, 1997.

MCCORMAC, J. C., NELSON, J. K. **Structural Analysis: A Classical and Matrix Approach**, 3ed. John Wiley & Sons, 1996.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**, 2ed. John Wiley & Sons, 1999.

MICHALEWICZ, Z. Genetic Algorithms, Numerical Optimization, and Constraints. In Larry J. Eshelman, editor, **Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms**, p. 151-158, California, 1995.

MICHALEWICZ, Z.; DASGUPTA, D. R.; RICHE, L.; SCHOENAUER, M. Evolutionary algorithms for constrained engineering problems. **Computers & Industrial Engineering Journal**, v. 30, p. 851-870, 1996.

MICHALEWICZ, Z.; SCHOENAUER, M. Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. **Evolutionary Computation**, v. 4, p. 1-32, 1996.

MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **Philosophical Magazine**, v. 8, p. 589-597, 1904.

MIGUEL, L. F. F.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. **Advances Engineering Softwares**, v. 56, p. 23-37, 2013.

MITCHELL, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. Massachusetts Institute of Technology, EUA, 1996.

NANAKORN P.; MEESOMKLIN K. An adaptive penalty function in genetic algorithms for structural design optimization. **Computers & Structures**, v. 79, p. 2527-39, 2001.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. Springer-Verlag, New York, 1999.

OHSAKI, M. Genetic Algorithm for topology optimization of truss. **Computers & Structures**, v. 57, n. 2, p. 219-225, 1995.

OHSAKI, M.; KATOH, N. Topology optimization of trusses with stress and local constraints on nodal stability and member intersection. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 29, p. 190-197, 2005.

OHSAKI, M.; NAKAMURA, T. Minimum constraint perturbation method for topology optimization of system. **Engineering Optimization**, v. 26, p. 171-186, 1996.

PARDALOS, M. P.; ROSEN, J. B. **Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications**. Springer, Berlin Heidelberg, New York, 1987.

PEDERSEN, P. **Optimal Designs – Structures and Materials – Problems and Tools**. Department of Mechanical Engineering, Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 2003.

PEDERSEN, P. Optimal joint positions for space trusses. **Journal of Structural Engineering, ASCE 99(ST10)**, p. 2459-2488, 1987.

PEREIRA, J. T. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha Material**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

PREUX, P.; TALBI, E. G. **Towards hybrid evolutionary algorithms**. International Transactions in Operational Research, v. 6, p. 557-570, 1999.

PROVATIDIS, C. G. e VENETSANOS, D. T. Cost minimization of 2D continuum structures under stress constraints by increasing commonality in their skeletal equivalents. **Forschung im Ingenieurwesen A**, v. 70, p. 159-69, 2006.

RAHAMI, H.; KAVEH, A.; ASLANI, M.; ASL, N. A hybrid modified genetic-nelder mead simplex algorithm for large-scale truss optimization. **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, v. 1, p. 29-46, 2011.

RAHAMI, H.; KAVEH, A.; GHOLIPOUR, Y. Sizing, geometry and topology optimization of trusses via force method and genetic algorithm. **Engineering Structures**, v. 30, p. 2360-2369, 2008.

RAJAN, S. D. Sizing, shape, and topology design optimization of trusses using genetic algorithms. **Journal of Structural Engineering ASCE**, v. 121, n. 10, p. 1480-1487, 1995.

RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. **Journal of Structural Engineering ASCE**, v. 118, p. 1233-1250, 1992.

RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Genetic Algorithms-based methodologies for design of trusses. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, p. 350-358, 1997.

RICHARDSON, J. T.; PALMER, M. R.; LIEPINS, G.; HILLIARD, M. Some guidelines for genetic algorithms with penalty functions. In J. David Schaffer, editor, **Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms**, p. 191-197, George Mason University, 1989.

ROZVANY, G. I. N. **Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods**. Springer – Verlag, Wien – New York, 1992.

ROZVANY, G. I. N.; OLHOFF, N. **Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization**, Goslar, Alemanha, 1995.

ROZVANY, G. I. N. Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. **Structural Optimization**, v. 11, p. 213-217, 1996.

ROZVANY, G. I. N. **Aims, scope, basic concepts and methods of topology optimization**. In ROZVANY, G.I.N., editor, **Topology optimization in structural mechanics**, Wien, Springer-Verlag, 1997.

SAHAD, M. G.; TOROPOV, V. V.; ASHOUR, A. F. A hybrid genetic algorithm for structural optimization problems. **Asian Journal of Civil Engineering**, v. 5, n. 3-4, 121-143, 2004.

SAKAMOTO, J.; ODA J. A technique of optimal layout design for truss structures using genetic algorithm. In: **Proceedings of the 34th AIAA/ASCE/ASME/AHS Structural Dynamics and Material Conference and AIAA/ASME Adaptive Structures Forum**, La Jolla, USA, p. 2402-2408, 1993.

SALAJEGHEH E.; VANDERPLAATS, G. N. Optimum design of trusses with discrete sizing and shape variables. **Structural Optimization**, v. 6, p. 79-85, 1993.

SARKER, R., MASOUD, M., YAO, X. **Evolutionary Optimization**, Kluwer Academic Publishers – USA, 2003.

SCHMIT, L. A. Jr. Structural synthesis – Its genesis and development. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal**, v. 19, n. 10, p. 1249-1263, 1981.

SHEA, K.; CAGAN, J.; FENVES, S. J. A shape annealing approach to optimal truss design with dynamic grouping of members. **ASME Journal Mechanical Design**, v. 119, p. 388-394, 1997.

SHRESTHA, S. M.; GHABOUSSI, J. Evolution of optimum structural shapes using genetic algorithm. **Journal of Structural Engineering**, v. 124, n. 11, p. 1331-1338, 1998.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in MATLAB. In: **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21. Springer-Verlag, 2001.

ŠILIH, S.; KRAVANJA, S.; PREMROV, M. Shape and discrete sizing optimization of timber trusses by considering of joint flexibility. **Advances in Engineering Software**, v. 41, p. 286-294, 2010.

SILVA, E. K. **Evolução Diferencial para Problemas de Otimização Restrita**. Dissertação de Mestrado. Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 2009.

SIVANANDAM, S. N.; DEEPA, S. N. **Introduction to Genetic Algorithm**. Springer, New York, 2008.

SOH, C. K., and YANG, J. P. **A Genetic Algorithm Approach for Shape Optimization of Trusses**. Structural Optimization, ed. ASCE, New York, 1994.

SOH, C. K.; YANG, J. P. Fuzzy controlled genetic algorithm search for shape optimization. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v. 10, n. 2, p. 143-150, 1996.

SONMEZ, M. Discrete optimum design of truss structures using artificial bee colony algorithm. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, p. 85-97, 2011.

SPEARS, W. M. e DE JONG, K. A. **An analysis of multi-point crossover, in: Proceedings of the Foundations of Genetic Algorithms Workshop**, Indiana, 1990.

SRINIVAS, M. e PATNAIK, L. M. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v. 24, p. 656-667, 1994.

STAINKO, R. **Advanced Multilevel Techniques to Topology Optimization**. Dissertação (Mestrado) – Johannes Kepler Universität, Linz, 2006a.

STOLPE, M. **On Models and Methods for Global Optimization of Structural Topology**. Thesis (Doctoral) – Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2003.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. A note on stress-constrained truss topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 25, p. 62-64, 2003.

SUDARSHAN, R. **Genetic Algorithms and Application to the Optimization of Space Trusses**. A Project Report, Madras, India, Indian Institute of Technology, 2000.

SVANBERG, K. Optimization of geometry in truss design. **Computer Methods Applied Mechanical Engineering**, v. 28, p. 63-80, 1981.

SVED, G., GINOS, Z. Structural optimization under multiple loading. **International Journal of Engineering Science**, v. 10, p. 803-805, 1968.

SYSWERDA, G. **Uniform crossover in genetic algorithms, in: Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms**, Morgan Kaufman, Los Altos, CA, 1989.

TANG, W; TONG, L.; GU, Y. Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, p. 1737-1762, 2005.

TEMPLEMAN, A. B.; YATES, D. F. A segmented method for discrete optimum design of structures. **Engineering Optimization**, v. 6, p. 145-155, 1983.

THIERENS, D.; GOLDBERG, D.; GUIMARAES, P. Domino convergence, drift, and the temporal-salience structure of problems, **IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceedings**, USA, p. 535-540, 1998.

TOAKLEY, A. R. Optimum design using available section. **Journal Structures Division, ASCE**, v. 94, p. 1219-1241, 1968.

TOGAN, V e DALOGLU, A. T. Optimization of 3d trusses with adaptive approach in genetic algorithms. **Engineering Structures**, v. 28, p. 1019-1027, 2006.

TOGAN, V e DALOGLU, A. T. An improved genetic algorithm with initial population strategy and self-adaptive member grouping. **Computers & Structures**, v. 86, p. 1204-1218, 2008.

TOPPING, B. H. V. Shape optimization of skeletal structures: a review. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, p. 1933-1951, 1983.

TORII, A. J. **The Role of Self Weight and Loading Conditions in Truss Optimization**. Dissertação (Mestrado) – Politecnico di Milano, 2008.

TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; LUERSEN, M. A. A local-restart coupled strategy for simultaneous sizing and geometry truss optimization. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 8, p. 335-349, 2011.

VANDERPLAATS, G. N.; MOSES, F. Automated design of trusses for optimum geometry. **Journal Structural Division, ASCE 98 ST3**, p. 671-690, 1972.

VASCONCELOS, J. A. e SALDANHA R. R. Genetic Algorithm Coupled with a Deterministic Method for Optimization in Electromagnetic. **IEEE Transactions on Magnetism**, v. 33, 1997

WALLS, R. e ELVIN, A. An algorithm for grouping members in a structure. **Engineering Structures**, v. 32, p. 1760-1768, 2010.

WANG, D.; ZHANG, W. H.; JIANG, J. S. Combined shape and sizing optimization of truss structures. **Computational Mechanics**, v. 29, p. 307-312, 2002.

WU, S. J.; CHOW, P. T. Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms. **Computers & Structures**, v. 56, n. 4, p. 695-702, 1995.

XU, T.; ZUO, W.; XU, T.; SONG, G.; LI, R. An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization. **Acta Mechanica Sinica**, v. 26, p. 225-234, 2010.

YEH, I. Hybrid genetic algorithms for optimization of truss structures. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 14, p. 199-206, 1999.

YOSHIMOTO, F.; HARADA, T.; YOSHIMOTO, Y. Data fitting with a spline using a real-coded genetic algorithm. **Computer-Aided Design**, v. 35, p. 751-760, 2003.

ZHENG, Q. Z.; QUERIN, O. M.; BARTON, D. C. Geometry and sizing optimization of discrete structure using the genetic programming method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 31, p. 452-461, 2006.

ZHOU, M. Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. **Structural Optimization**, v. 11, p. 134-136, 1996.

ZHOU, M.; XIA, R. An efficient method of truss design for optimum geometry. **Computers & Structures**, v. 35, p. 115-119, 1990.

ZUK, W. **Concepts of Structure**. Reinhold Publishing Corporation, 1963.

APÊNDICE A – Método *Fully Stressed Design*

O método *Fully Stressed Design* é uma técnica simples e eficiente para otimizar estruturas do tipo treliça. Esta consiste no redimensionamento dos elementos (barras da estrutura) após cada análise de tensões, de modo que a razão entre a tensão no elemento e a tensão limite admitida se aproxima de uma unidade.

Neste caso específico, tomando uma estrutura treliçada onde todas as áreas A são conhecidas, obtém-se o sistema de equações pelo MEF na forma

$$Ku = f. \quad (\text{A.1})$$

A partir deste ponto, obtém-se todos os deslocamentos e tensões elementares (σ_e).

Se a tensão do elemento for de tração, o novo valor de área do elemento ${}_m A_e^+$ é dado por

$${}_m A_e^+ = \frac{\sigma^{(e)} A^{(e)}}{\sigma_t}. \quad (\text{A.2})$$

Caso a tensão seja menor que zero a nova área deve considerar tanto a falha por compressão, quanto a falha por flambagem. Através dessas duas tensões, calcula-se a nova área e avalia qual dessas é maior, a fim de atender a tensão que possui maior influência no elemento. Portanto, o cálculo da nova área considerando a tensão de compressão e a tensão crítica de flambagem podem ser dadas, respectivamente, por

$${}_m A_e^+ = \frac{\sigma^{(e)} A^{(e)}}{\sigma_c}, \quad (\text{A.3})$$

$${}_f A_e^+ = \sqrt{\frac{\sigma^{(e)} A^{(e)} L^{(e)2}}{CE}}, \quad (\text{A.4})$$

todos estes parâmetros podem ser encontrados na seção 4.1. Assim, a área nova A_e^+ é dada por

$$A_e^+ = \max(|{}_m A_e^+|, |{}_f A_e^+|). \quad (\text{A.5})$$

Para evitar que a modificação da área seja muito grande entre as iterações, o que pode resultar em uma baixa taxa de convergência, é feita uma relaxação na mesma utilizando um fator α . Portanto a área nova do elemento, com a relaxação pode ser escrita como

$$A_e^+ = \alpha A_e^+ + (1 - \alpha) A_e \quad (\text{A.6})$$

onde $0 < \alpha \leq 1$.

APÊNDICE B – Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade é um técnica que busca determinar o efeito de uma pequena perturbação numa determinada variável sobre uma função resposta. Há dois grupos principais de métodos de análise de sensibilidade: métodos numéricos, os quais são todos aproximados, e os métodos analíticos, que são exatos. Quanto ao método analítico, este pode ser dividido em dois grupos: Método Analítico Direto e Método Analítico Adjunto (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009). Este último, apresentado a seguir, é utilizado neste trabalho quando, no processo de otimização topológica e após a eliminação dos elementos, a estrutura passa a agredir alguma restrição de deslocamento nodal.

Método Analítico Adjunto

Tomando a equação de estado do problema

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}) \mathbf{u}(\mathbf{A}) = \mathbf{f}, \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{A} é o vetor de variáveis de projeto, representando as áreas de todos os elementos. Tomando a forma genérica de uma função resposta do problema

$$\Psi(\mathbf{u}(\mathbf{A}), \mathbf{A}), \quad (\text{B.2})$$

e perturbando a configuração inicial em uma direção $\delta A^{(e)}$ qualquer, tem-se

$$\lim_{\delta A^{(e)} \rightarrow 0} \left[\frac{\Psi(\mathbf{u}(\mathbf{A}), \mathbf{A}) + \delta \Psi - \Psi(\mathbf{u}(\mathbf{A}), \mathbf{A})}{\delta A^{(e)}} \right] = \frac{d\Psi}{dA^{(e)}}. \quad (\text{B.3})$$

Em geral, esta função resposta é dependente de variáveis que dependem de alguma forma das variáveis de projeto. Logo sua sensibilidade pode ser posta como

$$\frac{d\Psi}{dA^{(e)}} = \frac{\partial \Psi}{\partial A^{(e)}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{A})} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{A})}{\partial A^{(e)}}. \quad (\text{B.4})$$

O objetivo aqui é obter a sensibilidade da função restrição relacionada ao deslocamento limite u_p imposto à componente do deslocamento nodal $u^{(gl)}$. Neste caso, esta pode ser escrita como

$$\Psi = g^{(gl+3Nels)} = |u^{(gl)}| - u_p \leq 0. \quad (B.5)$$

Portanto, a incógnita deste problema é

$$\frac{d\Psi}{dA^{(e)}} = \frac{du^{gl}}{dA^{(e)}}. \quad (B.6)$$

Tomando a equação de estado e diferenciando em relação a $A^{(e)}$ tem-se

$$\frac{d}{dA^{(e)}} [\mathbf{K}(\mathbf{A}) \mathbf{u}(\mathbf{A})] = \frac{d}{dA^{(e)}} \mathbf{f}(\mathbf{A}). \quad (B.7)$$

Como neste trabalho não são consideradas as forças de corpo, pode-se dizer que o vetor de forças não depende da área A . Logo, a derivada é dada por

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}) \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{A})}{dA^{(e)}} = -\frac{d\mathbf{K}(\mathbf{A})}{dA^{(e)}} \mathbf{u}(\mathbf{A}). \quad (B.8)$$

Isolando o termo $\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{A})}{dA^{(e)}}$, tem se

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{A})}{dA^{(e)}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{A}) \left[\frac{-d\mathbf{K}(\mathbf{A})}{dA_e} \mathbf{u}(\mathbf{A}) \right]. \quad (B.9)$$

Portanto

$$\frac{du^{gl}}{dA^{(e)}} = \frac{\partial u^{gl}}{\partial A^{(e)}} + \frac{du^{gl}}{d\mathbf{u}(\mathbf{A})} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{A}) \left[\frac{-d\mathbf{K}(\mathbf{A})}{dA^{(e)}} \mathbf{u}(\mathbf{A}) \right]. \quad (B.10)$$

Os deslocamentos nodais não possuem uma dependência explícita da área de qualquer elemento, logo o primeiro termo do lado direito da equação B.10 desaparece.

No Método Adjunto, para este problema é definido o vetor de deslocamentos adjuntos relacionado ao grau de liberdade restrito e pode ser definido como

$$\lambda^{(gl)T} = \frac{du^{gl}}{d\mathbf{u}(\mathbf{A})} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{A}). \quad (\text{B.11})$$

Portanto, a função resposta pode ser reescrita como

$$\frac{du^{gl}}{dA^{(e)}} = \lambda^{(gl)T} \left[\frac{-d\mathbf{K}(\mathbf{A})}{dA^{(e)}} \mathbf{u}(\mathbf{A}) \right]. \quad (\text{B.12})$$

Observa-se que, para cada grau de liberdade restrito, o valor $\lambda^{(gl)T}$ é obtido uma única vez. Assim, a sensibilidade $\frac{du^{gl}}{dA^{(e)}}$ é facilmente obtida simplesmente pelo produto matricial (B.12).