

Klaus Kramer

Dinâmica de padrões em autômatos celulares
com inércia

Curitiba
2014

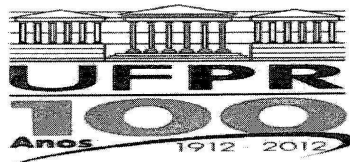
Klaus Kramer

Dinâmica de padrões em autômatos celulares
com inércia

Tese apresentada ao Departamento
de Física da Universidade Federal
do Paraná, como requisito para ob-
tenção do título de Doutor em Fí-
sica

Orientador: Prof. Dr. Marcos
Gomes Eleutério da Luz

Curitiba
2014



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Tese de Doutorado do aluno KLAUS KRAMER, consideram aprovada a redação final da tese, cujo título é: *"Dinâmica de padrões em autômatos celulares com inércia"*.

Curitiba, 30 de maio de 2014.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz
(UFPR)


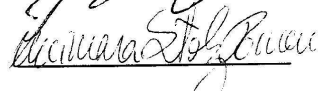



Profa. Dra. Lucimara Stolz Roman
(UFPR)

Prof. Dr. Marlus Koehler
(UFPR)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos
(USP)

Prof. Dr. Wagner Figueiredo
(UFSC)

Assinatura

Dedicatória:

Essa tese deve ser dedicada a muitas pessoas, principalmente àquelas que estiveram ao meu lado, como minha esposa Rubia, que suportou todos os problemas que enfrentei, sempre ao meu lado. Também dedico a meus pais e irmãos, que apesar de me acharem louco, sempre me apoiaram.

Agradecimentos

Dentre tudo e todos, devo agradecer a Deus, que impôs dificuldades para que eu enfrentasse, decisões para que eu tomasse, de forma que eu amadurecesse e me tornasse quem eu sou hoje.

Tenho também que agradecer a Deus por colocar uma pessoa muito especial em minha vida, minha esposa, Rubia Miller, que sempre me apoiou e esteve ao meu lado, principalmente nos momentos mais difíceis da minha vida. (“Love you for lifes”)

Devo um agradecimento especial, também, à minha família, meus pais Neuza e Otto e irmãos Hans, Pedro Emilio e Marilia, que apesar de me chamarem de louco, nunca me deixaram na mão quando precisei deles. Essa sim é uma família perfeita, que apesar dos problemas, não trocaria por nada nesse mundo ou em outro.

Meu orientador, Marcos Gomes merece muito mais que minha gratidão, merece um prêmio por ser o melhor orientador que eu já vi, pois sempre me apoiou, me incentivou a seguir, correr atrás do que eu queria, que gastou horas em discussões e esclarecimentos, que não me deixou na mão quando mais precisei, que sempre me defendeu, e acima de tudo, que me inspirava a continuar. Agradeço ao Professor Lawrence Schulman, pelas discussões e na ajuda no modelo probabilístico e em sua aplicação principal, ecótonos.

Meus sogros, Ralph (in Memorium) e Rita que, sempre que era possível, conversávamos sobre as mais loucas e diferentes coisas, desde a história do universo (Ralph) até psicologia do comportamento humano (Rita).

Agradeço muito por ter voltado para o movimento escoteiro, no meu querido Grupo Escoteiro ECO 189/PR, onde o olhar dos meus escoteiros faz meu dia e me alegrava para o resto da semana. Que, apesar de horas gastas com eles, um cansaço imenso, minha alma saía renovada.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço a todas as pessoas que sempre me alegraram nas horas de tristeza, que me animaram nas horas difíceis, que sempre estavam ao meu lado para o que der e vier.

UM SINCERO OBRIGADO...

Resumo

A cada dia que passa, aparecem mais e mais descobertas científicas. Sempre, nos surpreendendo com os mais variados fenômenos da natureza. E, buscamos entender o dinamismo de alguns efeitos naturais, criando diversos modelos matemáticos que tentam explicar, de forma satisfatória esses efeitos. Uma teoria, que é amplamente utilizada, é a teoria dos autômatos celulares. Vemos modelos de autômatos celulares em diversas áreas de conhecimento. Pois são modelos simples, de fácil implementação computacional e que geram resultados complexos e interessantes, podendo descrever, por exemplo, complexidade e emergência de padrões espaço temporais. Essencialmente, os autômatos celulares são compostos por células, distribuídas em uma rede regular. Cada célula assume um valor numérico que determina seu estado. O tempo é discreto e a evolução de cada célula obedece a uma simples regra de atualização, que determina a mudança temporal dos estados de cada célula. Existem muitas regras de atualização diferentes. Nesse trabalho utilizamos uma regra simples, onde o estado da célula no tempo “ t ”, depende da soma dos estados de seus vizinhos num tempo anterior, ou seja, em “ $t-1$ ”. Consideramos 3 estados, sendo 2 ativos (+1, -1), que competem dinamicamente entre si, e um passivo (zero), que não influencia na mudança de estado. Definimos também um “estado interno”, que chamamos de inércia. Essa inércia confere a cada célula uma resistência natural e determinística à mudança de seu estado. Estudamos um caso bidimensional, quadrado, de tamanho N . Incluímos também uma probabilidade de uma célula qualquer, mudar, espontaneamente, para o estado zero, se houver em sua vizinhança uma célula zero. Dessa maneira o estado zero passa a ter força sobre a competição dinâmica contra os outros estados. Analisamos diferentes aspectos dinâmicos do sistema, entre eles, como densidade dos estados iniciais evolui no tempo e como os mesmos se aglomeram numa situação estacionária, ou seja, como ocorre a formação de clusters (aglomerados de células de mesmo estado) nessa situação. Para estudar a distribuição espacial utilizamos o algoritmo de Hoshen-Kopelman, fazendo a contagem e calculando o tamanho dos clusters do sistema. Diferentes tamanhos de sistemas foram estudados, buscando entender seu efeito sobre a dinâmica evolutiva. Além disso, verificamos a convergência e a não convergência de certos sistemas em uma configuração estacionária. Estudamos também padrões na distribuição espacial dos estados e padrões nos valores de inércia de cada célula. Mostrando que, a dinâmica evolutiva pode sofrer mudanças drásticas, além de que, padrões simétricos, ou parcialmente simétricos, evoluem de forma parecida. Para finalizar o trabalho, usamos nosso modelo para estudar o aparecimento e a evolução de ecótonos, que são áreas de transição entre dois biomas diferentes. Em nosso modelo, essas áreas surgem naturalmente, portanto, buscamos otimizar os parâmetros que trouxessem sua maximização.

Abstract

Each day, we see more and more scientific discoveries. Always surprising us with the most varied phenomena of nature. And we seek to understand the dynamism of some natural effects, creating several mathematical models that attempt to explain satisfactorily these effects. One theory, which is widely used, is the cellular automata. We see models of cellular automata in different fields of knowledge. Because they are simple, easy to computational implementation and generate complex and interesting results, that can describe, for example, emergence of complexity and temporal space patterns. Essentially, cellular automata are composed of cells arranged in a regular lattice. Each cell receive a numeric value that determines their state. The time evolution is discrete and the evolution of cells obeys a simple update rule, which dictates the temporal change of the states of each cell. There are many different update rules. In our work, we use a simple rule, where the state of the cells at time t depends on the sum of the states of its neighbors in a earlier time, that is, $t - 1$. We consider three states, with two are considered active (+1, -1), which dynamically compete, and a passive state (zero), which does not influence the change of state. We also define a “internal state”, called inertia. This inertia gives each cell a natural and deterministic resistance to change its state. We studied a two-dimensional case of size N . We have also included in this model, a probability of any cell, changing spontaneously to the zero state, if, there is, in its neighborhood, zero state cell. Thus this state shall have power over the dynamic competition against other states. We analyze different dynamic aspects of the system, among them, how the initial density of states evolve in time and how the clustering of the same states occurs. To study the spatial distribution, we use the Hoshen-Koplemann Algorithm, by counting and calculating the size of the system clusters (clusters of cells in the same state). Different system sizes were studied, seeking to understand its effect on evolutionary dynamics. Furthermore, we verify the convergence and non-convergence of certain systems into a stationary configuration. Also, we study both patterns, in spatial distribution of states, and in the values of inertia of each cell, showing that the evolutionary dynamics can undergo drastic changes, and that symmetrical patterns, or partially symmetrical, evolve similarly. To finish this work, we use our model to study the appearing and evolution ecotones, which are areas of transition between two different biomes. In our model, these areas emerge naturally, therefore, we seek to optimize the parameters to bring the maximization of ecotones.

Sumário

1	Introdução	9
2	Aspectos básicos do modelo	18
2.1	Definições Básicas de Autômatos celulares e do nosso modelo	18
2.2	Parâmetros utilizados para caracterizar o modelo	21
2.3	Simulação com tamanho de matriz igual a 50	23
2.3.1	Gerando o conjunto (ensemble) de estados iniciais	24
2.4	Avaliação dos Parâmetros finais	26
2.5	Análise das estruturas espaciais	31
3	Comparação entre diferentes tamanhos de sistemas	37
3.1	Influência do tamanho do sistema	37
4	Matrizes que não convergem	46
4.1	Informações iniciais	46
4.2	Dados estatísticos das matrizes não convergentes	47
4.3	Estudo da não convergência através da distribuição espacial	51
4.4	Conclusões sobre as matrizes não convergentes	53
5	Padrões na inércia	55
5.1	Inércia diferente para estados diferentes	55
5.2	Inércia variando em função da densidade	68
5.3	Inércia variando no tempo	76
5.4	Conclusões sobre os diferentes padrões na inércia	81
6	Padrões na distribuição espacial dos estados	82
6.1	Padrões espaciais simétricos	82
7	Modelo Probabilístico e Estudo de Ecótonos	90
7.1	Definições de ecótonos	90
7.2	Inércia igual para todos os estados	92

7.3	Conclusões sobre a emergência de ecótonos a partir de nosso modelo de AC com inércia	110
8	Conclusão e Considerações Finais	113
8.1	Conclusões	113
8.2	Considerações finais e trabalhos futuros	114
A	Algoritmo de Hoshen-Kopelman	116

Lista de Figuras

1.1	Evolução de um Jogo da vida que apresenta um “planador”.	13
2.1	Matriz para explicar a regra de atualização. Cada cor representa um estado, branco representa o estado 0, cinza o estado -1 e preto o estado $+1$	21
2.2	Primeira geração da evolução da matriz da figura 2.1, para o modelo determinístico, valores de inércia igual para todos os elementos e <i>a) $I = 0$, b) $I = 1$, c) $I = 2$, d) $I = 3$.</i>	22
2.3	Densidade do estado $+1$ e tamanho médio de cluster para 100000 matrizes geradas a partir do método quase aleatório.	25
2.4	Densidade inicial média do estado $+1$ versus densidade inicial do estado $+1$ para diferentes valores de inércia.	27
2.5	Quantidade média de clusters do estado $+1$ final versus densidade inicial do estado $+1$	28
2.6	Tamanho médio de clusters do estado $+1$ final versus densidade inicial do estado $+1$	29
2.7	Tempo de convergência médio versus densidade inicial do estado $+1$	30
2.8	Distribuição espacial dos estados $+1$, -1 e zero que será utilizado para nossas análises futuras.	31
2.9	Quatro primeiras gerações para inércia nula.	32
2.10	Quatro primeiras gerações para inércia igual a um.	32
2.11	Quatro primeiras gerações para inércia igual a dois.	32
2.12	Quatro primeiras gerações para inércia igual a três.	33
2.13	Quatro primeiras gerações para inércia igual a quatro.	33
2.14	Quatro primeiras gerações para inércia igual a cinco.	33
2.15	Configurações estacionárias para cada valor de inércia, de zero a cinco, respectivamente.	34
3.1	Densidade final média do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.	39
3.2	Densidade final média do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.	39
3.3	Densidade final média do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.	39
3.4	Densidade final média do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.	39
3.5	Densidade final média do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.	40
3.6	Tamanho final médio dos clusters do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.	40
3.7	Tamanho final médio dos clusters do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.	40
3.8	Tamanho final médio dos clusters do estado $+1$ versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.	41

3.9	Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.	41
3.10	Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.	42
3.11	Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.	42
3.12	Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.	42
3.13	Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.	43
3.14	Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.	43
3.15	Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.	44
3.16	Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.	44
3.17	Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.	44
3.18	Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.	45
3.19	Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.	45
3.20	Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.	45
4.1	Quantidade de matrizes versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).	48
4.2	Densidade final média do estado +1 $\bar{\rho}_{+final}$ versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).	49
4.3	Quantidade final de clusters do estado +1 versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).	49
4.4	Tamanho final médio de clusters do estado +1 versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).	50
4.5	Tempo de convergência médio versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).	50
4.6	A duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1.	51
4.7	A duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1.	52
4.8	A duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1 e inércia igual a 1.	54
4.9	A duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1 e inércia igual a 1.	54
5.1	Distribuição espacial inicial dos estados +1 (preto), -1 (cinza) e 0 (branco).	56
5.2	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$ para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	58
5.3	Tamanho médio dos clusters versus geração com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	59
5.4	Quantidade de clusters versus geração com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	60
5.5	Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$	61

5.6	Primeiras 8 gerações para o modelo probabilístico (com $p_1 = 10\%$) com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$	62
5.7	Configurações estacionárias para os modelos determinístico e probabilístico (com $p_1 = 5\%$, 10% e 15%) com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$	62
5.8	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	63
5.9	Tamanho médio dos clusters versus geração com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	64
5.10	Quantidade de clusters versus geração com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	66
5.11	Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$	67
5.12	Primeiras 8 gerações para o modelo probabilístico (com $p_1 = 10\%$) com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$	68
5.13	Configurações estacionárias para os modelos determinístico e probabilístico (com $p_1 = 5\%$, 10% e 15%) com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$	68
5.14	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com inércia inversamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	69
5.15	Tamanho médio dos clusters versus geração com inércia inversamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	70
5.16	Quantidade de clusters versus geração com inércia inversamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	71
5.17	Primeiras 4 gerações para o modelo determinístico com inércia inversamente proporcional à densidade do estado.	72
5.18	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com inércia diretamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	73
5.19	Tamanho médio dos clusters versus geração com inércia diretamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	74
5.20	Quantidade de clusters versus geração com inércia diretamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	75
5.21	Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com inércia diretamente proporcional à densidade do estado.	76
5.22	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com inércia oscilando no tempo, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	77
5.23	Tamanho médio dos clusters versus geração com inércia oscilando no tempo, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	79

5.24	Quantidade de clusters versus geração com inércia oscilando no tempo, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	80
5.25	4 gerações que mostram a importância da formação de ecótonos em sistema com inércia oscilante. Modelo probabilístico com $p_1 = 10\%$	81
6.1	Evolução do padrão de círculo para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.	84
6.2	Evolução do padrão de quadrado para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.	84
6.3	Evolução do padrão de losango para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.	84
6.4	Evolução do padrão de cruz para inércias iguais a zero, um e dois, respectivamente.	84
6.5	Evolução dos padrões circulares espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a zero.	85
6.6	Evolução dos padrões circulares espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a um.	85
6.7	Evolução dos padrões circulares espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a dois.	86
6.8	Evolução dos padrões diferentes espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a zero.	87
6.9	Evolução dos padrões diferentes espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a um.	87
6.10	Evolução dos padrões diferentes espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a dois.	88
6.11	Evolução do padrão triangular para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.	88
6.12	Evolução do padrão no formato de meia-lua alinhada na vertical para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.	89
6.13	Evolução do padrão de meia-lua alinhada na diagonal para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.	89
7.1	Distribuição espacial inicial dos estados +1 (preto), -1 (cinza) e 0 (branco).	92
7.2	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus Geração com inércia igual a zero para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	93
7.3	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus tempo com inércia igual a um para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	94
7.4	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus tempo com inércia igual a dois para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	95
7.5	Densidade dos estados +1, -1 e zero versus tempo com inércia igual a três para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	96
7.6	Primeiras 4 gerações com inércia um, para o modelo determinístico.	97
7.7	Primeiras 4 gerações com inércia um, para o modelo probabilístico com $p_1 = 10\%$	98
7.8	Gerações 1, 5, 10 e 15 com inércia 3 para o modelo determinístico.	99
7.9	Gerações 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35 com inércia 3 para o modelo probabilístico com $p_1 = 10\%$	99
7.10	Configurações estacionárias para o modelo determinístico para inércias iguais a 0, 1, 2 e 3, respectivamente.	100

7.11	Tamanho médio de cluster versus geração para inércia zero para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	102
7.12	Quantidade de clusters versus geração para inércia zero para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	103
7.13	Tamanho médio de cluster versus geração para inércia um para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	104
7.14	Quantidade de clusters versus geração para inércia um para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	105
7.15	Tamanho médio de cluster versus geração para inércia dois para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	106
7.16	Quantidade de clusters versus geração para inércia dois para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	107
7.17	Tamanho médio de cluster versus geração para inércia três para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	109
7.18	Quantidade de clusters versus geração para inércia três para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$	110
7.19	Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a um.	111
7.20	Ultimas 4 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a um.	111
7.21	Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a dois.	112
7.22	Ultimas 4 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a dois.	112
A.1	Exemplo para explicar os algoritmos de Hoshen-Koppelman. Distribuição espacial dos estados +1 (preto) e 0 (branco).	117

Lista de Tabelas

2.1	Tabela das quantidades de elementos em cada estado na vizinhança de uma célula . . .	36
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

O conceito geral

Padrões espaço-temporais são ubíquos na natureza [1, 2], especialmente em processos biológicos [3, 4, 5, 6]. Tais estruturas comumente originam-se de forças ou interações (frequentemente não-lineares) que agem localmente num sistema que seja espacialmente estendido, por exemplo, processos óticos em cristais com respostas não-lineares (como KDP, LiNbO_3 , quartzo), ou dinâmica de agrupamento em colônias de bactérias. Para estas situações, suponha que possamos dividir em regiões (em inglês, “cross-grade”) o espaço de configuração pertinente do sistema, de tal forma a caracterizá-lo em termos de células (ou elementos). Assim, a cada célula $n = 1, \dots, N$ podemos associar uma “variável de estado” σ_n , cujo valor numérico indica, digamos, relevantes quantidades ou informações, como, por exemplo: densidade de partículas, energia, cor de pigmento, tipo de ação (ativo/inativo, vivo/morto, infectado/não-infectado), etc. Com a evolução dinâmica do sistema [7], o conjunto $\{\sigma_n\}$ pode desenvolver intrincados arranjos ou mosaicos (dada esta estrutura de “ladrilhos” do espaço de configuração). Então, o estudo da variação temporal destes padrões e sua eventual estabilização em um estado estacionário nos dão muita informação sobre a complexidade intrínseca do fenômeno em questão. É importante frisar que, com tal complexidade global, pode ocorrer, mesmo que, ao nível dos elementos (células) individuais, as respostas locais sejam bastante simples [8].

Obviamente que a discretização proposta acima (que também pode ser feita no tempo, e assim termos o sistema medido em múltiplos inteiros de um tempo característico τ) introduz simplificações na descrição do problema. Mas, mesmo assim, ela consegue nos dar muita informação relevante e identificar aspectos fundamentais da dinâmica original, justificando sua utilização [9, 10]. Apenas para citar alguns exemplos, mencionamos que o procedimento mostra-se extremamente útil na análise de sistemas tão diversos como: dinâmica de população de espécies, disputas político-econômicas, relações em colônias de insetos, transição de fase em materiais, dinâmica de corpos interestelares, entre outros (ver maiores detalhes ao longo deste trabalho).

A situação geral até aqui descrita se encaixa muito bem na ideia de modelagens teóricas usando-se o que é chamado de Autômatos Celulares (ACs) [11, 12]. Na verdade, um forte indício da generalidade da abordagem é o fato de que um AC podem simular uma máquina de Turing universal [13, 14, 15], a qual é uma máquina que pode ler, escrever e excluir símbolos binários de uma fita infinita. A máquina de Turing foi criada como uma máquina imaginária, mas que teve grande importância na estruturação da computação moderna. Deixando de lado polêmicas se realmente ACs poderiam descrever qualquer fenômeno real na natureza [9], o importante é que ACs são muito úteis para simular distintos sistemas complexos [10]. Em particular, a tarefa extremamente árdua de “mimetizar” vida e/ou organismos vivos (individualmente ou coletivamente) foi a motivação inicial que levou John Von Neumann (com o auxílio de Stanislaw Ulam) a propor ACs nos anos de 1940 [16] (uma abordagem que de certa maneira renasceu na década de 1970, em parte devido ao interesse geral despertado pelo famoso ‘Jogo da Vida’ proposto por John H. Conway [17]). Mais recentemente, os ACs foram incorporados aos métodos padrões de modelagem computacional [12], constituindo-se em importantes e poderosas ferramentas no estudo de processos biológicos [18] e ecológicos (ver, por exemplo, as Refs. [19, 20, 21]), como o caso curioso e famoso de comportamento de formigas [22].

Retomando a formação de padrões espaço-temporais, cuja diversidade é inumerável, indo dos desenhos em conchas do mar a formação de conglomerados gigantes de galáxias, provavelmente os ACs são ao mesmo tempo um dos métodos mais simples e um dos mais gerais [7, 21] em conseguir simulá-los e reproduzi-los em seus aspectos mais amplos [23]. Tome, como ilustração, tráfego de automóveis em rodovias ou cidades. Podemos ter diferentes comportamentos, como escoamento laminar, congestionamento, aglomeração e rarefação alternadas, etc [24, 25]. Além disso, um bom planejamento (por exemplo, sincronia de semáforos) é uma tarefa bastante complicada do ponto de vista de engenharia. Hoje em dia, modelos baseados em ACs são explicitamente usados para determinar os melhores intervalos de tempo para abertura e fechamento de semáforos em certos horários críticos. Outras aplicações práticas de modelos de ACs são em controle de incêndios florestais [26, 27, 28], simulando como seria a propagação dos mesmos em uma certa região, e portanto definindo as melhores maneiras de apagá-los. Temos ainda modelos de epidemias do tipo SIR (suscetível, infectado, removido) [29, 30, 31], que tenta determinar como a epidemia se propaga e quais os maiores grupos de risco, ajudando assim a definir uma estratégia inteligente de vacinação. Finalmente mencionamos que padrões associados a dinâmicas caóticas [32, 33] e oriundos de estruturas fractais [9] podem também ser obtidos por ACs.

Aspectos históricos

Como já citamos, a ideia de um AC surgiu na década de 1940, com John Von Neumann e Stanislaw Ulam [16]. O interesse de Von Neumann, motivado pela ideia de descrever os aspectos fundamentais de vida, era tentar criar um mecanismo simples que fosse capaz de gerar auto-replicação, com o sistema tendo condições de se auto-copiar a partir de várias de suas partes separadas (como no processo de mitose-citocinese em divisão celular). A solução encontrada foi bem simples, distribuiu-se todo o sistema em um universo discreto (um quadrado bidimensional) composto por elementos ou células (daí o termo “Celular”), cada parte evoluindo independentemente (então “Autômato”), mas seguindo regras determinadas, as quais eram aplicadas a todos os elementos. Além disso, as regras eram funções da vizinhança de cada elemento. A vizinhança usada é hoje conhecida como do tipo Neumann, onde uma célula, em 2D, só interage com seus quatros vizinhos adjacentes: acima, abaixo, à direita e à esquerda. Considerando que as células podiam assumir um total de 29 diferentes estados individuais, suas interações poderiam levar à replicação, tanto a nível global, quanto local. Este foi o primeiro exemplo de modelo capaz de se clonar e cujas réplicas podiam ter níveis de complexidade menor ou, ainda mais interessante, iguais ao conjunto inicial. Curiosamente, o primeiro nome dado ao modelo foi “Espaço Celular”.

Motivados pelos surpreendentes resultados de Von Neumann, certos estudos apontaram, no final dos anos de 1950, que os ACs poderiam ser usados como modelos adaptáveis à computação paralela, além de terem uso universal, isto é, uma metodologia de modelagem aplicável às mais diferentes situações. Porém, somente na década de 1960 foi publicado um maior volume de trabalhos confirmando tais expectativas [34]. Atualmente, isto vem sendo amplamente reconhecido [35, 36]. É interessante mencionar, talvez mais como uma curiosidade histórica, o livro, em alemão “Rechnender Raum” (em inglês “Calculating Space”), que significa ‘O Espaço que é Computação’, publicado em 1969 por Konrad Zuse [37]. Nele, Zuse propõe, de forma controversa, que as leis físicas são discretas por natureza e que o universo inteiro é apenas um gigantesco AC.

Em termos históricos, um AC que realmente ajudou em muito o desenvolvimento da área foi o famoso “Jogo da Vida”, criado por John Conway, nos anos de 1970 [38, 17]. Ele simula estados de vida e morte (novamente com motivação biológica), descritos por estados nomeados como 0 e 1. Ainda nesta introdução, o “jogo da vida” será usado como exemplo explícito da dinâmica de um AC.

Um novo impulso na teoria de ACs ocorre na década de 1980, com os trabalhos de Stephen Wolfram. Ele propõe um conjunto, bastante básico, de ACs, porém bastante gerais, criando também um procedimento de classificação dos mesmos [39]. Wolfram também, em vários trabalhos, procurou demonstrar a vasta gama de aplicações possíveis para os ACs, discutindo distintos problemas em áreas tais como Biologia, Física e Computação

[11]. Com relação ao sistema de classificação, Wolfram foca, para sistemas 1D e interação de primeiros vizinhos, as regras específicas de atualização dos estados em um conjunto de células elementares. Tais células representam as configurações de vizinhanças que mudam o estado de uma célula. Ele verifica então, que no total existem 256 diferentes regras. No livro “A New Kind of Science” [9], de 2002, ele apresenta alguns modelos físicos baseados nesses ACs elementares, mas que podem gerar comportamentos extremamente complexos. Assim, começa a promover ideias similares às de Zuse, acreditando que a complexidade na natureza pode sempre ser explicada por algum tipo de AC.

Finalmente mencionamos mais uma ideia controversa, descrita no livro “The Lifebox, The Seashell and The Soul” [23], onde seu autor, Rudy Rucker tenta expandir as teorias de Wolfram, afirmando que a natureza pode ser modelada através de algoritmos simples (com ACs sendo uma classe particular), mas que conseguem gerar resultados complexos. Segundo suas ideias (Automatismo Universal), tudo o que existe no universo (formato de folhas, montanhas, continentes, o clima, chuvas, ventos, migração de animais, movimento de estrelas, processos da mente, etc.) são geridos por algoritmos básicos, entretanto, capazes de criar a enorme diversidade que vemos na física, biologia, sociedade e mesmo na cultura. Em particular, apresenta diversos algoritmos, modelados por ACs, frisando que não há um algoritmo único e universal, sendo que cada sistema do universo segue suas próprias regras algorítmicas.

A ideia básica da construção de um Autômato Celular

Após o panorama conceitual e histórico dado acima, é interessante apresentarmos aqui uma visão bem resumida de como se constrói um típico modelo de AC (sendo que todos os detalhes técnicos serão discutidos no Capítulo 2).

Os ACs são sistemas dinâmicos, compostos por elementos básicos (as células) distribuídos em uma grade espacial discreta, geralmente finita, mas nem sempre, formando uma rede (que pode ser em $1, 2, \dots, d$ dimensões espaciais). A cada célula k associa-se certas variáveis de estado S_k , e em intervalos finitos de tempo (assim, o tempo é discreto), existe uma regra pré-determinada que atualiza os valores destas variáveis. Tal atualização depende da vizinhança da célula k , ou seja, os valores dos estados dos elementos nesta vizinhança irão determinar a evolução futura de S_k , que em princípio pode estar entre $-\infty \leq S_k \leq +\infty$. A regra de evolução dinâmica (ou seja, a atualização) é sempre feita para todas as células do sistema, promovendo a transição $\{S_k(t)\} \rightarrow \{S_k(t+1)\}$. Os sucessivos conjuntos $\{S_k(t)\}$, para $t = 1, 2, \dots$ constituem-se nos padrões espaço-temporais do sistema considerado.

Usando o “Jogo da Vida”, de Conway, como exemplo concreto da descrição anterior, uma formulação simples para o mesmo é a seguinte (considerando uma rede quadrada de tamanho infinito, com vizinhança de Moore, sendo esta composta pelos 8 elementos

adjacentes à célula):

- Se uma célula preta (estado 1, viva) tem 2 ou 3 vizinhos pretos, ela continua preta.
- Se tem menos que 2 ou mais que 3 vizinhos pretos, ela se torna branca (estado 0, morta).
- Se uma célula branca tem 3 vizinhos pretos, se torna preta.

Estas regras simples foram inspiradas em interações entre bactérias em uma colônia, onde dependendo da vizinhança local, ocorre uma morte rápida de algumas células devido à competição por alimentos, ou um rápido crescimento, devido à reprodução. Mesmo sendo um sistema extremamente simples, ele apresenta uma variedade enorme de comportamentos, indo de uma aparente desordem aleatória a uma ordem total. Um dos resultados mais interessantes é o surgimento frequente de estruturas chamadas de “planadores” (figura 1.1), que são arranjos de células que se movem através do AC e que não são destruídos pelas regras de atualização. Além desses planadores, outros padrões aparecem advindos da dinâmica do sistema. Foi demonstrado que esses planadores, e outras figuras invariantes, podem emular uma máquina universal de Turing [40].

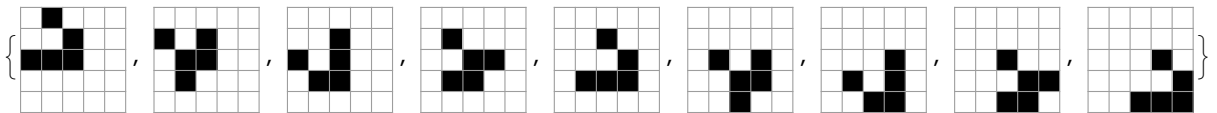


Figura 1.1: Evolução de um Jogo da vida que apresenta um “planador”.

A flexibilidade dos ACs se encontra justamente na maneira como as regras locais de atualização, bem como a delimitação da vizinhança, são definidas e quais tipos de estados e seus intervalos de valores são considerados em cada célula. Obviamente que, em sistemas finitos, o tipo de condição de contorno também se torna relevante, especialmente para redes pequenas. Em particular, referente à vizinhança, uma de primeira ordem, “imediata”, significa que, em 1D, fazem parte da vizinhança as células da esquerda e da direita, em 2D, as quatro equivalentes aos pontos cardeais (norte, sul, leste, oeste), e assim por diante em dimensões maiores. Entretanto, vizinhanças de primeira ordem mais abrangentes são possíveis, e de fato, são mais comuns. Por exemplo, em 2D, temos a vizinhança de Moore, que considera todos os 8 vizinhos adjacentes ao elemento central. Além disso, vizinhanças de segunda ordem ou superior também são usadas (por exemplo, com o intuito de descrever interações de longo alcance).

Por último, notamos que, em todos os exemplos citados anteriormente, as regras descritas são determinísticas. Porém, algumas formulações introduzem componentes estocásticos na construção do modelo. Como exemplo, mencionamos alguns ACs que descrevem

o tráfego de veículos em ruas de uma cidade [41] ou a transformação de áreas rurais em áreas urbanas [42], que utilizam algumas regras probabilísticas. Em geral, estocasticidade em ACs vem de um termo aleatório incluído na atualização dos estados de cada célula. Por exemplo, podemos sortear, com certa probabilidade p , se a regra determinística será ou não aplicada a cada célula.

A proposta específica da presente tese e sua organização

Apesar das discussões anteriores mostrarem que os ACs tem uma grande flexibilidade em tratar os mais diferentes tipos de problemas, três possibilidades até hoje foram muito pouco exploradas na literatura pertinente.

(a) Em primeiro lugar, na grande maioria dos modelos, os estados de uma célula k mudam frequentemente ao longo de toda a evolução considerada e os possíveis valores para S_k são na média igualmente prováveis. Logo, mesmo que as interações entre as células sejam funções dos valores de seus estados $\{S_k\}$, não podemos esperar que após várias iterações, uma dada célula k' tenha uma ação dinâmica (integrada) muito distinta de uma outra célula k'' . Em outras palavras, os estados em si não têm características muito distintas um dos outros para intervalos de tempos longos. Assim, um padrão final de distribuição de S na rede é mais função das condições iniciais e da dinâmica (ou seja, da configuração espacial em $t = 0$) do que de distinções inerentes aos estados. Portanto, se por alguma razão queremos dar papéis dinâmicos diferentes para alguns valores específicos de S , as regras de atualização de toda a rede precisam incorporar de forma apropriada interações locais que sejam explicitamente funções de S e que eventualmente haja assimetria nas transições, isto é, $p(S'_k \rightarrow S''_k) \neq p(S''_k \rightarrow S'_k)$ (ver detalhes no próximo capítulo).

(b) Apesar da rede (ou seja, o padrão espacial de um AC) em si poder representar um aspecto estatístico do sistema, o conceito de “ensemble” em Mecânica Estatística tipicamente não é usado em tais modelos. Portanto, em ACs comumente infere-se a influência de algumas condições iniciais para o padrão final do sistema. Mas perguntas tais como se uma certa distribuição de condições iniciais vai determinar uma certa propriedade média dos padrões finais (isto é, aqueles dos ACs evoluídos um número fixo de passos τ), não são usualmente tratadas neste contexto.

(c) Em geral, as regras de atualização são aplicadas da mesma forma em todas as células da rede. Logo, as células não apresentam propriedades distintas uma das outras. Entretanto, podemos pensar em fenômenos onde diferentes células deveriam ter características próprias. Por exemplo, cada elemento k possuindo uma propriedade interna

que faz com que diferentes células respondam de forma diferente às forças exercidas por suas vizinhas (por exemplo, em um AC representando uma comunidade de formigas [22], teríamos células representando as operárias, soldados, etc). Também é interessante lembrar que os ACs foram criados como sistemas determinísticos e, apenas mais tarde, efeitos estocásticos foram incorporados. Como já mencionado, a introdução de aleatoriedade em geral, tem como efeito criar interações efetivas que podem ser distintas de célula para célula. Logo, é pertinente saber até que ponto a introdução de estados internos, nos moldes acima, poderia ser uma alternativa apropriada à caracterização de processos probabilísticos em um AC.

Desta forma, a proposta geral da presente tese é desenvolver um modelo mínimo (ou seja, o mais simples possível), mas que incorpore as considerações (a), (b), e (c) acima descritas. De posse de tal modelo, este trabalho divide-se então em duas partes. Uma primeira mais técnica e exploratória, que visa estudar em detalhes os aspectos fundamentais da dinâmica resultante deste AC. E uma segunda, que implementa uma ideia sugerida em minha dissertação de mestrado [43], aplicando nosso AC ao estudo de um problema muito importante em Biologia: a formação e evolução de ecótonos. Ecótonos são regiões de fronteiras entre ecossistemas distintos, por exemplo, um dos maiores ecótonos do planeta está no Brasil, constituído pela divisa entre as regiões de Cerrado e floresta Amazônica. Por constituírem a divisa entre duas diferentes vegetações (ou duas grandes comunidades de diferentes espécies), apresentam tensões ecológicas em grande escala [44]. Exatamente nesta borda, as espécies que são mais fortes dentro de cada uma das duas regiões distintas, tem seu poder competitivo diminuído. Isto possibilita que espécies não comuns a nenhuma das duas regiões possam se estabelecer exatamente sobre o ecótono, dando origem a uma grande biodiversidade. De fato, estudos mostram que, em geral, ecótonos suportam mais vida que suas áreas adjacentes [45, 46]. Mostramos na presente tese como padrões espaciais típicos de ecótonos podem ser gerados e descritos pelo nosso modelo proposto de AC.

Finalmente, a seguir descreveremos de forma sucinta como (a)-(c) podem ser introduzidos em um formulação para um AC (os detalhes técnicos serão descritos no próximo capítulo).

Para (a), iniciamos mencionando que os possíveis valores que uma variável de estado S pode assumir é totalmente arbitrário, dependente do modelo a ser analisado [47, 48, 49]. Porém, o mais usual na literatura é utilizar apenas dois valores, por exemplo, ± 1 ou 0 e 1, simulando um sistema binário, tal como vida-morte, branco-preto, corrente e não-corrente, etc. Aqui iremos propor três valores: $(-1, 0, +1)$. Além disso, iremos explicitamente impor que a dinâmica local para o estado 0 é distinta daquela para ± 1 , criando assim a assimetria desejada. É interessante observar que no artigo de Kapliyi, Prokaznikov e Rud [50], utilizou-se um AC estocástico com três estados para simular processos de absorção. Sendo que nesse modelo, os três estados têm a mesma força na competição dinâmica,

criando uma relação simétrica entre os estados do sistema. Em nosso modelo, os 3 estados possíveis terão sua distinção dada pelas regras de atualização.

Com relação à (b), iremos definir algumas quantidades Q 's, que medem propriedades globais de um certo padrão espacial em nosso AC. Verificaremos também como os valores médios destes Q 's (considerando “ensembles” de estados iniciais) variam em função de distintos parâmetros do modelo. Apesar desta ser uma abordagem simples, e até mesmo óbvia, é curioso seu não emprego na literatura. Iremos mostrar que certos comportamentos gerais podem ser determinados a partir de tal tipo de análise.

Para (c) iremos usar a proposta feita em minha dissertação de mestrado [43], que é supor que cada elemento do AC possuiu um “estado interno”, que chamaremos de inércia. Tal inércia representa uma resistência intrínseca de cada célula em mudar seu estado presente devido à pressão dinâmica exercida pela vizinhança. A distinção entre a inércia e termos probabilísticos é que a inércia é fixa para cada célula k . Logo, em cada etapa de evolução temporal, a resposta de k às interações mediadas por esta propriedade é fixa, tendo assim, um caráter determinístico. Devemos mencionar que uma ideia similar, mas tecnicamente implementada de uma forma distinta, foi usada na construção de modelos de ascensão social [51]. Em tal trabalho, é definida uma “pressão dinâmica” (logo entrando nas equações de atualização do AC) que tenta coibir mudanças de estado, por exemplo, dificultando pobres de ficarem ricos. Sua construção matemática é bem mais complicada que aquela que fazemos aqui. Finalmente é interessante citar alguns problemas específicos (já tratados via ACs com termos estocásticos), onde um termo de inércia às mudanças poderia ser naturalmente incorporado, eventualmente até mesmo substituindo o termo probabilístico: disseminação de novos produtos no mercado [52], receptividade de pequenas comunidades ao comércio eletrônico [53], difusão de inovações na sociedade [54], disputas eleitorais [55, 56, 57, 58], processo de formação de opinião [59], criação de inter-relações sociais (geração de sociedades artificiais) [60], disseminação de cultura [61], e propagação de doenças e dinâmica de populações [62, 63].

A organização do texto que se segue é a seguinte: No capítulo 2 introduzimos nosso modelo de AC, bem como discutimos a metodologia geral usada para fazer sua caracterização dinâmica. Além disso, também apresentamos algumas análises preliminares (semelhantes às já feitas durante meu mestrado, porém, sendo mais completa e analisando quantidades estatísticas diferentes) Para verificar a influência do tamanho das redes usadas na descrição do AC proposto, no capítulo 3 é realizado um estudo comparativo para diferentes tamanhos de sistema. No capítulo 4 abordamos o problema de condições iniciais que não levam a um padrão final estacionário. Mostramos que, na verdade, nestes casos, os padrões convergem para situações oscilantes. Descrevemos então, as características locais (isto é, no nível de células individuais) que levam a tal comportamento. Nos capítulos 5 e 6 analisamos as situações quando as inércias das células possuem tanto um padrão espacial quanto um padrão temporal (ou seja, a inércia pode variar no tempo). Conside-

rando alguns exemplos, ilustramos a grande diversidade de padrões que emergem devido à existência de um padrão espaço-temporal na inércia do sistema. No capítulo 7 temos uma aplicação explícita para nosso modelo. Tratamos o modelo de ecótonos via nosso AC. Além disso, consideramos duas situações distintas, onde incluímos ou não um termo probabilístico no modelo. Mostramos que o fenômeno de formação de ecótonos, ao menos qualitativamente, é obtido através das duas abordagens. Também comparamos as similaridades e diferenças advindas das duas formulações. No capítulo 8 apresentamos nossas conclusões e considerações finais, assim como a perspectiva para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Aspectos básicos do modelo

Neste capítulo apresentaremos os aspectos básicos do modelo, mostrando as quantidades que serão utilizadas para as análises dos resultados. Além disso mostraremos a dinâmica do nosso modelo para um sistema de tamanho $N = 50$, sendo N o tamanho da rede quadrada, apenas para ilustrar algumas das características de evolução do sistema. Análises mais detalhadas e completas estão nos próximos capítulos.

2.1 Definições Básicas de Autômatos celulares e do nosso modelo

Como já vimos, os autômatos celulares são modelos matemáticos simples, compostos por várias células idênticas, caracterizadas por diferentes estados e distribuídas em uma rede n -dimensional. Todas as células interagem com sua vizinhança, por meio de uma regra de atualização. O tempo é discreto e sempre que a regra de atualização é aplicada sobre toda a rede, uma nova geração (de células) é produzida.

Em nosso trabalho, utilizamos um autômato celular bidimensional, sendo sua rede quadrada, de tamanho variável N . Representamos esse autômato celular como uma matriz quadrada composta por N^2 elementos. Os possíveis estados para cada célula são: 0 (zero ou nulo), -1 (negativo), +1 (positivo). A vizinhança escolhida é de Moore, de raio 1, que são os oito vizinhos adjacentes a cada célula (vizinhos diretamente acima, abaixo, aos lados e nas diagonais). Consideraremos as bordas como fechadas, definidas da seguinte maneira: nas bordas e nos cantos, os elementos interagem apenas com seus vizinhos adjacentes, ou seja, os elementos da borda têm 5 vizinhos adjacentes e os elementos do canto tem apenas 3, enquanto os elementos mais centrais tem 8 vizinhos. Escolhemos esse tipo de condições de borda, pois vários problemas de interesse, a exemplo de padrões de fragmentação em ecossistemas [64] e o fenômeno de ecótono em biologia [65] exigem tal tipo de condição de contorno. Na verdade, vários sistemas, nos quais temos interesse, têm como aspecto importante, efeitos de borda (ou seja, tipo parede). Desta forma, não iremos

discutir um caso comumente estudado, que é o de condições de contorno periódicas. Um exemplo da importância dos efeitos de borda está na definição do tipo de espécies que vivem na fronteira entre o cerrado e floresta tropical [66]. As bordas, nesse caso, causam a fragmentação do cerrado, fazendo com que esse ecossistema seja prejudicado.

Numa regra de atualização de um AC, o estado de uma célula no tempo $t + 1$ depende dos estados das células vizinhas no tempo t . Porém, o estado num tempo posterior pode depender também de outros fatores (sistema não markoviano). Pensando nisso, adicionamos ao nosso problema mais um parâmetro, um “estado interno”, denominado inércia, que nada mais é do que uma “resistência” que cada célula possui em mudar seu estado atual. Nesse modelo, a inércia em cada célula pode assumir valores entre 0 e 8. Quando a inércia de uma célula é igual a zero, dizemos que sua resistência à mudança é nula, ou seja, a célula vai mudar de estado de acordo com uma regra dinâmica. Porém, se o valor de sua inércia for maior que zero, o estado da célula só mudará se uma condição extra for satisfeita. Além disso, incluiremos também um termo probabilístico. Este nos dá a probabilidade de uma célula qualquer, que tem pelo menos uma célula no estado zero em sua vizinhança, mudar para o estado zero.

Faremos, portanto, a separação de nosso modelo em 3 partes, a regra dinâmica, a condição inercial e o termo probabilístico, descritas a seguir. A regra dinâmica é a parte principal do modelo, pois é a partir dela que saberemos para quais estados um elemento poderá mudar, e este mudará apenas se a condição inercial for satisfeita. O termo probabilístico acrescenta uma probabilidade de cada elemento mudar espontaneamente de estado. Ele é aplicado depois da regra dinâmica e da condição inercial. Separamos assim, nosso modelo em dois submodelos, um modelo determinístico, tendo apenas a regra dinâmica e a condição inercial, e um modelo probabilístico, que inclui o termo probabilístico.

A regra de atualização que será aplicada a cada célula do sistema está descrita abaixo.

- Regra dinâmica:

“O estado S no tempo $t+1$ da célula (i, j) é determinado pela soma $V(i, j)$ dos estados de sua vizinhança. Se $V(i, j)$ for maior que zero, a célula irá mudar para o estado $+1$, se for igual a zero o estado não é alterado e se for menor que zero, o estado muda para -1 .”

- Condição inercial:

“A ação do “estado interno”, a inércia, ocorre da seguinte maneira: Seja $I(i, j)$ o valor da inércia da célula (i, j) . Se $I(i, j) \geq |V(i, j)|$ o estado

em $t + 1$ permanece o mesmo que em t . Se $I(i, j) < |V(i, j)|$ o estado em $t + 1$ muda de acordo com a regra dinâmica.”

- Termo Probabilístico

“Todos os elementos no estado $+1$ ou -1 tem uma probabilidade (p_1) de mudar para o estado zero se em sua vizinhança houver no mínimo um elemento no estado zero.”

Note que se a inércia for zero para todas as células, a regra dinâmica é a única que precisa ser aplicada, pois, independente do valor da soma, a célula irá mudar de estado, a não ser que a $V(i, j) = 0$ (se $V(i, j) = 0$, a célula não mudará de estado). Também é possível notar que se a probabilidade p_1 for zero, teremos apenas a regra dinâmica e a condição inercial sendo aplicada, ou seja, temos o modelo determinístico apenas. Podemos escrever as regras na forma compacta:

Regra dinâmica e condição inercial:

$$S(t + 1, i, j) = \begin{cases} +1 & \text{se } V(t, i, j) > 0 \text{ e } V(t, i, j) > I(i, j) \\ -1 & \text{se } V(t, i, j) < 0 \text{ e } -V(t, i, j) > I(i, j) \\ S(t, i, j) & \text{se } V(t, i, j) = 0 \text{ ou } |V(t, i, j)| \leq I(i, j) \end{cases} \quad (2.1)$$

Termo probabilístico:

“Se $P(t, i, j) = 0$ e $Rand < p_1$, $S(t + 1, i, j) = 0$, caso contrário, $S(t + 1, i, j) = S(t, i, j)$ ”

Aqui $S(t, i, j)$ é o estado do elemento (i, j) no tempo t , $I(i, j)$ é o valor da inércia do elemento (i, j) e $V(t, i, j)$ é a soma dos estados da vizinhança de (i, j) no tempo t , $P(t, i, j)$ é o produto dos estados da vizinhança e $Rand$ é um número real, entre zero e um, gerado aleatoriamente. Se $P(t, i, j) = 0$, significa que existe uma célula zero na vizinhança, portanto, se o termo probabilístico estiver sendo utilizado, haverá uma probabilidade desta célula mudar de estado espontaneamente.

Segundo a equação 2.1, a pressão dinâmica que um elemento sofre para mudar de estado é igual à soma dos estados de seus vizinhos. Então podemos dizer que deve vencer o estado que estiver em maior número na vizinhança do elemento, desconsiderando o estado 0. Por exemplo, na figura 2.1, a célula central (célula na 3ª linha e 3ª coluna), que está no estado -1, tem 2 vizinhos no estado -1, 4 no estado +1 e 2 no estado 0. A soma dos estados dos vizinhos $V(t = 0, i = 3, j = 3) = +2$, portanto, o elemento central $(3, 3)$ irá mudar para o estado +1 se sua inércia for menor que 2, $I(3, 3) < 2$. Caso a inércia seja igual a 2 ou maior, o elemento mantém seu estado. Para o modelo probabilístico, a regra dinâmica não muda. Porém, essa célula central terá uma probabilidade p_1 não nula de mudar espontaneamente para o estado zero, pois há duas células zero em sua vizinhança.

Computacionalmente, basta fazer o produto dos estados de sua vizinhança e verificarmos que $P(t = 0, i = 3, j = 3) = 0$.

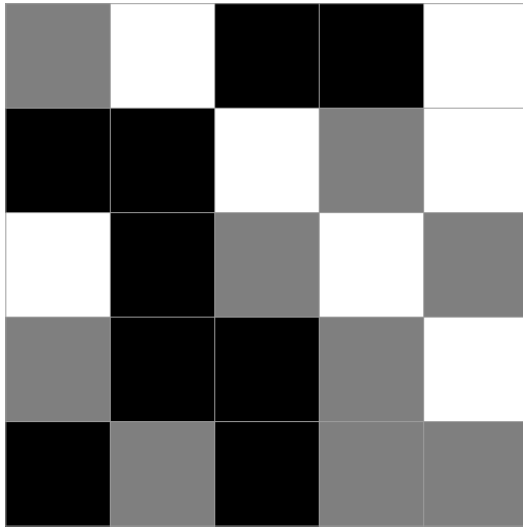


Figura 2.1: Matriz para explicar a regra de atualização. Cada cor representa um estado, branco representa o estado 0, cinza o estado -1 e preto o estado +1.

Neste exemplo, a célula central (terceira linha e terceira coluna) está no estado -1, e sua vizinhança é composta por 4 elementos no estado +1, 2 no estado -1 e 2 no estado 0. De acordo com a regra dinâmica, o elemento central irá mudar para o estado +1 se, e somente se, o valor de sua inércia for menor que 2, pois a soma dos estados da vizinhança é igual a 2. Caso o valor da inércia do elemento seja maior ou igual a 2, ele manterá seu estado. Agora, se $p_1 > 0$, esse elemento terá uma probabilidade de mudar espontaneamente para o estado zero, pois em sua vizinhança há duas células zero.

Na figura 2.2 encontramos a matriz dada na figura 2.1 após uma iteração, ou seja, temos a primeira geração da matriz da figura 2.1 para inércias iguais a $I=0,1,2$ e 3 , respectivamente. É interessante notar que a célula central, $(3,3)$, muda para o estado +1 apenas quando a inércia é menor que dois.

2.2 Parâmetros utilizados para caracterizar o modelo

No estudo da evolução dinâmica do sistema utilizaremos alguns parâmetros que consideramos relevantes. Esses parâmetros são: a densidade de cada estado (ρ_+ , ρ_- e ρ_0), o tamanho médio e a quantidade de “clusters” e por último o tempo de convergência (τ). Consideramos esses parâmetros relevantes pois, a partir deles podemos fazer análises quantitativas e estatísticas da evolução de nosso sistema. Por exemplo, o estudo da densidade do sistema indicará se a quantidade de células em um determinado estado aumenta ou não no tempo. Além de mostrar se há um estado predominante no sistema durante a evolução, podendo indicar se este mantém ou não essa predominância.

A densidade é a soma de todos os elementos em um mesmo estado, divididos pelo número total de elementos. Por exemplo, temos uma matriz de ordem 100, então sua população total é igual a $p = N^2 = 10000$ elementos. Se desses, 3400 estiverem no estado 0, 3000 no estado -1 e 3600 no estado +1, dizemos então que a densidade do estado 0 é igual a $\rho_0 = 0,34$, do estado -1 é igual a $\rho_- = 0,30$ e do estado +1 é igual a $\rho_+ = 0,36$. O

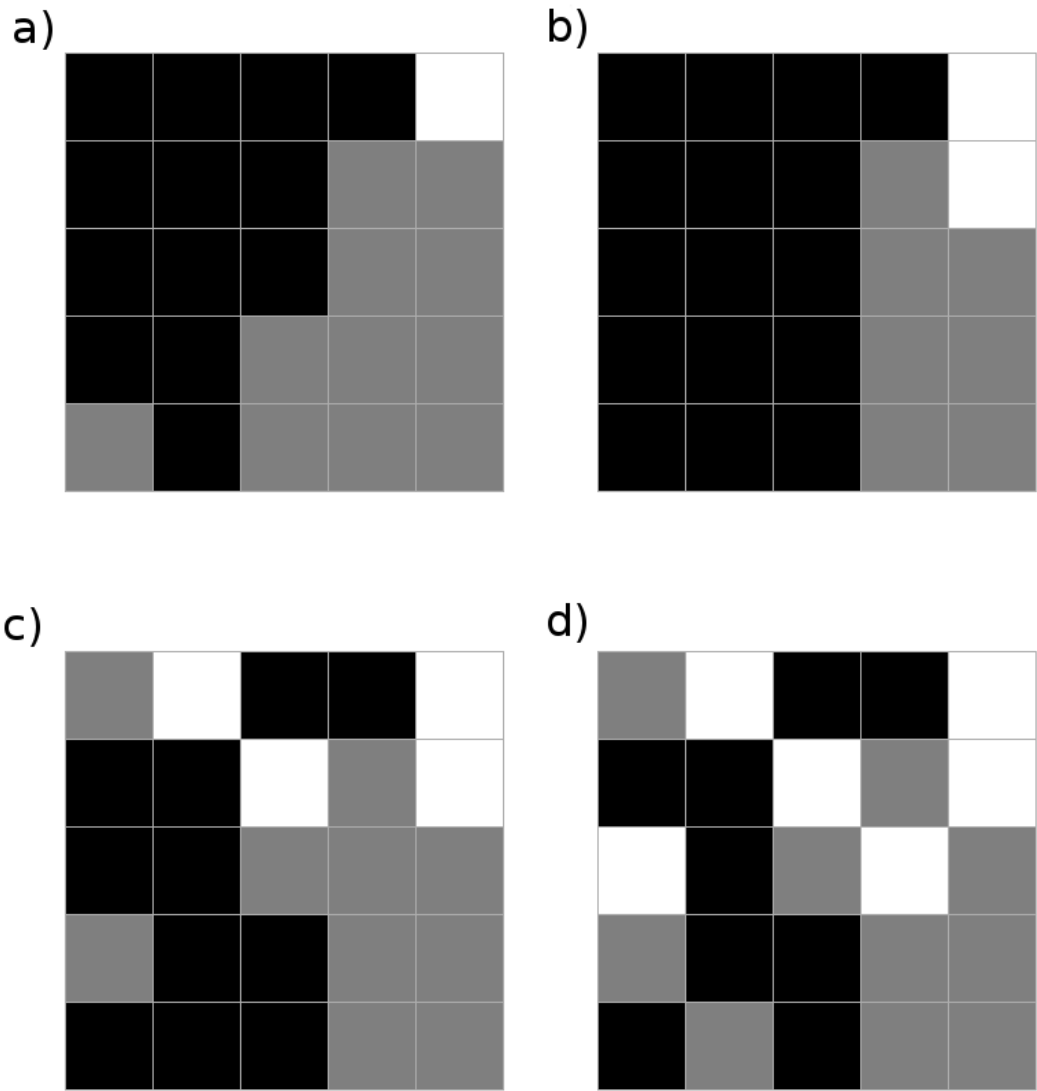


Figura 2.2: Primeira geração da evolução da matriz da figura 2.1, para o modelo determinístico, valores de inércia igual para todos os elementos e *a) I = 0, b) I = 1, c) I = 2, d) I = 3.*

estudo da evolução das populações como função do tempo pode indicar como a dinâmica do modelo afeta a densidade de elementos em cada estado.

Para analisar os “clusters” do sistema, primeiro precisamos definir o que é um “cluster”. Um cluster é um aglomerado de células no mesmo estado. Eles podem ser formados por duas ou mais células no mesmo estado, contanto que sejam adjacentes umas às outras. Para ser considerado um cluster, as células de mesmo estado, devem ter, em sua vizinhança (considerando agora primeiros vizinhos, acima, abaixo, à direita e à esquerda), pelo menos uma célula no mesmo estado, fazendo com estas formem um agregado de células. Para uma melhor análise, fazemos tanto a contagem, quanto o medimos o tamanho médio dos clusters no sistema. Para isso, implementamos o Algoritmo de Hoshen-Kopelman [67], descrito no Apêndice A. Esse algoritmo foi criado para fazer a classificação e identificação de clusters em um sistema. A ideia básica dele é buscar os clusters, diferenciá-los e

classificá-los. O Algoritmo de Hoshen-Kopelman é utilizado em nosso modelo para, além de classificar e identificar, contar e medir o tamanho dos clusters. A contagem e verificação do tamanho dos clusters é feita da seguinte forma:

- Primeiramente os clusters são identificados;
- Então, o algoritmo faz a contagem do número de clusters;
- Depois, acontece a contagem de quantos elementos cada cluster contém;
- E por fim, é feita a média do número de elementos sobre os clusters.

A partir da análise do tamanho médio e da quantidade de clusters podemos estudar, qualitativamente, a evolução da distribuição espacial dos estados de um sistema.

Finalmente, temos o tempo de convergência (τ), que mede o tempo necessário (número de iterações do autômato celular) para que a configuração de estados no tempo t seja igual à configuração no tempo $t + 1$. Essa configuração é chamada de configuração estacionária, pois a partir desse tempo $t = \tau$, nenhum elemento do autômato celular muda de estado. Entretanto, essa definição de configuração estacionária somente é utilizada no modelo determinístico. No modelo probabilístico há uma probabilidade não nula de células mudarem espontaneamente para o estado zero, tornando a definição de “configuração estacionária” não apropriada ao modelo. Com isso, é necessário outro critério para encontrar essa “configuração estacionária”. O critério utilizado, para o modelo probabilístico, é verificar se a variação da densidade nas últimas 10 gerações é pequena o suficiente para que a evolução possa parar. A cada 2 gerações, medimos a variação da densidade tanto do estado +1, quanto do estado -1. Depois de 10 gerações, temos 10 variações de densidade. Então, é feita a média dessas 10 últimas variações de densidade. Caso ela seja menor que 0,001%, truncamos a evolução do sistema, considerando a última geração, como a “configuração estacionária”. Dessa forma, se a densidade variar muito pouco nas últimas 10 iterações, podemos parar com a evolução do sistema e considerar a última iteração com a “configuração estacionária”.

2.3 Simulação com tamanho de matriz igual a 50

Nesta seção iremos estudar a dinâmica de um sistema de tamanho $N=50$, considerando que a inércia é a mesma para todos os elementos e considerando apenas o modelo determinístico. A ideia aqui é apenas ilustrar alguns aspectos essenciais associados ao presente modelo, além de revisar alguns resultados já obtidos em [43]. Uma exploração mais detalhada dos diferentes comportamentos aqui apresentados será feita nos capítulos que se seguem.

2.3.1 Gerando o conjunto (ensemble) de estados iniciais

Notamos que, em nosso modelo, há vários parâmetros a serem definidos, como, por exemplo, a densidade inicial de cada estado. Além disso, os estados podem se agrupar de diferentes formas (criando variados tamanhos e quantidades de clusters), mesmo tendo densidades fixas. Assim, precisamos gerar um ensemble que fixe, de alguma maneira, essas quantidades. De forma que os estados iniciais tenham variação apenas para alguns desses parâmetros, tornando possível uma análise estatística, dessas quantidades, válida. Com isso, adotamos uma metodologia de fixar alguns parâmetros, tais como ρ_0 , e exigimos que o estado +1 tenha maior densidade entre os estados. Dito isto, torna-se necessário, em nosso processo de geração dos estados iniciais (que serão evoluídos por nossas regras dinâmicas), usar alguns "truques" para o ensemble resultante tenha as características desejadas.

Então, na criação desse ensemble inicial, geramos, primeiramente, matrizes de forma aleatória, com cada estado tendo mesma probabilidade de ocupação das células. Fixamos a densidade do estado zero ($\rho_0 = \rho_{0 \text{ fixo}}$). E, sempre tomamos o estado +1 como majoritário, ou seja, o de maior densidade. Note que, como os estados +1 e -1 são análogos, os dois são estados ativos, com mesmo peso na competição dinâmica, logo tanto faz assumir um ou outro em maior número inicialmente.

O algoritmo de geração das matrizes é o seguinte:

- Para definir o estado de cada célula, escolhemos aleatoriamente um número racional x no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Se $0 \leq x < \frac{1}{3}$, $S(t=0, i, j) = -1$, se $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$, $S(t=0, i, j) = 0$ e se $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$, $S(t=0, i, j) = +1$. Nesse processo aleatório temos probabilidade igual para a célula ficar inicialmente no estado +1, -1 ou zero.
- Para fixar a densidade do estado zero, mudamos o estado de elementos +1 ou -1, escolhidos aleatoriamente, para o estado zero, caso $\rho_0 < \rho_{0 \text{ fixo}}$. Ou mudamos o estado de uma célula zero, escolhida aleatoriamente, para +1, caso $\rho_0 > \rho_{0 \text{ fixo}}$.
- Para tornar o estado +1 majoritário, caso isto ainda não seja verdade, multiplicamos a matriz por -1.

Tendo o método de geração dos dados iniciais pronto, precisamos gerar então essas matrizes iniciais, porém, acabamos ainda com várias quantidades para fazer o espaço de parâmetros. Temos as densidades dos estados +1 e -1, assim como também a quantidade e o tamanho médio dos clusters desses estados. Como a densidade do estado zero é fixa e o estado +1 estará sempre em maior quantidade, ρ_+ e ρ_- estão correlacionados. Para montarmos o espaço de parâmetros, precisamos de um bom parâmetro. Utilizaremos a densidade do estado +1 (ρ_+), pois esta é de fácil controle na geração do ensemble inicial. E também, os parâmetros que medem a quantidade e o tamanho médio dos clusters não tem uma correlação forte com a densidade inicial. Além disso, para um mesmo valor de

ρ_+ , podemos ter várias matrizes com diferentes valores de quantidade e tamanho médio de clusters. Por exemplo, se gerarmos 10000 matrizes de dimensão $N = 50$, pelo método já descrito, temos que o tamanho médio dos clusters +1 está entre 2.4 e 2.8 elementos, e a quantidade de clusters varia de 300 a 340 clusters. Vemos então que o parâmetro que tem maior variação é a quantidade de clusters do estado +1. Sendo assim, utilizamos em nosso espaço de parâmetros a densidade do estado +1 e sua quantidade de clusters, pois estes podem formar um espaço de parâmetros mais amplo.

Gerando 100000 matrizes iniciais, vemos que a distribuição, no espaço de parâmetros escolhido, não é uniforme (figura 2.3). Com isso, escolhemos apenas um intervalo específico de densidade e quantidade de clusters do estado +1. Fornecendo assim, uma distribuição uniforme dos dados iniciais sobre os parâmetros iniciais.

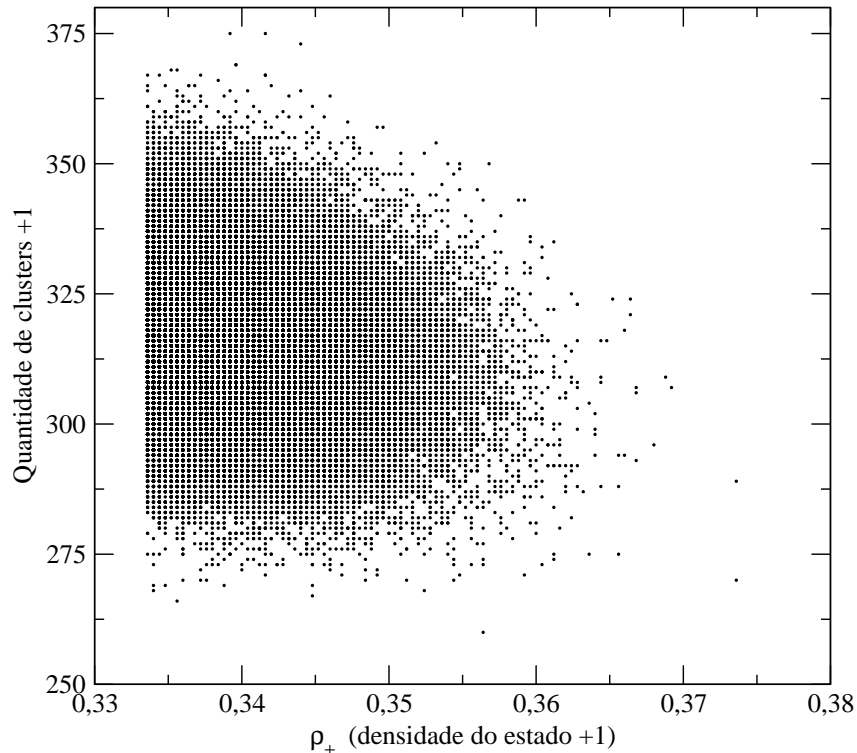


Figura 2.3: Densidade do estado +1 e tamanho médio de cluster para 100000 matrizes geradas a partir do método quase aleatório.

O fato de escolher apenas um intervalo para o espaço de parâmetros gera um problema quando analisamos sistemas de tamanhos diferentes, pois esse intervalo, principalmente sobre ρ_+ , vai se tornando cada vez menor. Isso porque, à medida que aumentamos o tamanho do sistema, fica cada vez mais difícil e demorado gerarmos matrizes com uma densidade +1 relativamente alta, e que se distribuam sobre um intervalo grande de quantidade de clusters. Por exemplo, quando $N = 50$, conseguimos gerar matrizes com $\rho_+ = 0,36$, que se distribuam uniformemente entre 300 e 340 clusters +1, enquanto para $N = 200$, a

densidade máxima que conseguimos gerar é $\rho_+ = 0,345$, de forma que eles se distribuam uniformemente sobre o intervalo de quantidade de clusters de 4800 e 5400. O intervalo de quantidade de clusters foi feito dessa forma pois estes são equivalentes tanto para $N = 50$ e $N = 200$. Pois, se dividirmos esse intervalo de variação da quantidade de clusters pelo número total de elementos (N^2), teremos aproximadamente o mesmo valor. Ou seja, para $N = 50$, $\Delta Q = \frac{340-300}{50^2} = 0,016$ e para $N = 200$, $\Delta Q = \frac{5400-4800}{200^2} = 0,015$. Como, neste capítulo, não faremos o comparativo entre diferentes tamanhos de sistema, reveremos esse aspecto sobre o método de geração para o próximo capítulo.

No caso desta simulação, foi utilizado um AC de dimensão igual a 50 ($N = 50$). Analisamos os seguintes parâmetros: densidade do estado +1 (ρ_+), tamanho médio de clusters (s_+) e quantidade de clusters (q_+). Utilizamos o método já descrito anteriormente para geração de dados iniciais, criando um conjunto de matrizes com densidade variando entre $\rho_+ = 0,3336$ e $\rho_+ = 0,3536$ e quantidade de clusters +1 variando entre 305 e 335. Esses foram os valores que resultaram numa melhor distribuição dos dados iniciais sobre o espaço de parâmetros. Para criar o espaço de parâmetros utilizando a densidade e a quantidade de clusters, dividimos esse intervalo de densidade em 50 partes. Dessa forma, a variação $\Delta\rho_+ = 0,02$ tem um intervalo de $\delta\rho_+ = 0,02 \frac{50}{\underline{=}} 0,0004$. Sendo assim, a diferença entre a densidade de duas matrizes diferentes deve ser igual ou superior à $\delta\rho_+ = 0,0004$. Como o outro parâmetro é a quantidade de clusters, e gerando as matrizes pelo método quase-aleatório, a distribuição dessas matrizes sobre a quantidade de clusters é homogênea, geramos 1000 matrizes para cada intervalo $\delta\rho_+$ de densidade, com a condição de que a quantidade de clusters +1 fique dentro do intervalo determinado. Com isso, a ideia era gerar 50000 matrizes, entretanto, não isso não foi possível, apenas 48029 matrizes foram geradas, pois, à medida que preenchíamos o espaço de parâmetros, mais difícil ficava terminar de preenchê-lo. Essas quase 2000 matrizes que faltaram, resultam em um erro de apenas 4%, portanto, podendo ser utilizado para obter resultados estatísticos válidos.

2.4 Avaliação dos Parâmetros finais

Iremos, então, analisar a evolução dos parâmetros finais, ou seja, o valor de cada parâmetro para a configuração estacionária. Os parâmetros analisados são: densidade, quantidade e tamanho de clusters do estado +1 e tempo para convergência numa matriz estacionária. Vamos apresentar os gráficos dos parâmetros finais médios versus a densidade inicial. Essas médias foram feitas sobre todas as matrizes que tinham mesma densidade inicial. Tendo assim, a média de um parâmetro final em função da densidade inicial. Para evoluir, utilizamos o mesmo valor de inércia para todas as células, o qual variou de zero a oito. Inércias altas, $I = 5, 6, 7, 8$, o sistema muda pouco durante a evolução. Por sinal, quando $I = 8$, nenhuma célula do sistema muda de estado, portanto, é usado como teste do algoritmo do programa.

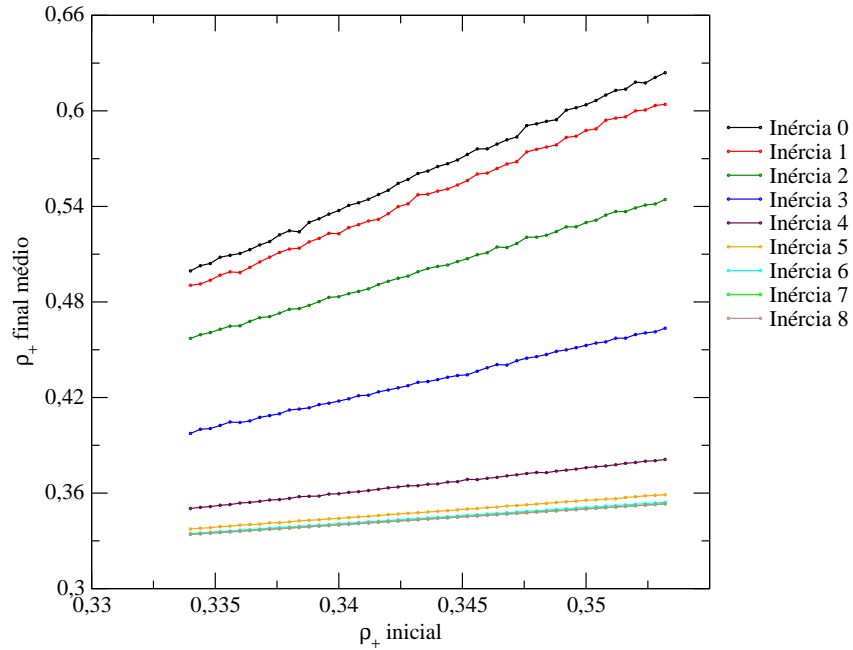


Figura 2.4: Densidade inicial média do estado +1 versus densidade inicial do estado +1 para diferentes valores de inércia.

Na figura 2.4 temos a densidade final média do estado +1 versus a densidade inicial do estado +1. Vemos que as curvas para todos os valores de inércia podem ser consideradas lineares, pois a flutuação é pequena. Notamos que, à medida que aumentamos a inércia, ρ_+ final médio diminui, pois, aumentando a inércia, o número de células que muda de estado se torna cada vez menor. Vemos também que essas curvas têm inclinações positivas, o que nos leva a concluir que quanto maior a densidade inicial, maior será a densidade final. Porém, notamos que essa inclinação diminui com a inércia, isto é, quanto maior a inércia, menor a influência da densidade inicial sobre a dinâmica do sistema, uma vez que cada elemento tenderá a mudar menos de estado, fazendo com que a densidade final seja parecida com a inicial. Para valores de inércia mais baixos, $I = 0, 1, 2$, o sistema se comporta de maneira bem parecida, porém, a densidade média final é menor para inércias maiores. Quando a inércia é igual a $I = 3$ e 4 , essa densidade já diminui bastante. Para inércias maiores, $I = 5, 6, 7$ e 8 , as curvas são quase coincidentes, ou seja, as células do sistema mudam muito pouco durante a evolução, de forma que seus parâmetros finais são muito parecidos com os iniciais. Na verdade, a curva para $I = 5$ está levemente acima das outras curvas ($I = 6, 7$ e 8), que neste caso são coincidentes.

Mostramos na figura 2.5 a quantidade média final de clusters versus a densidade inicial. Nesta figura podemos ver que, para $I = 0, 1, 2$, as curvas são parecidas. Mas os valores das quantidades de clusters diferem, aumentando com a inércia. Pois, inicialmente existem muitos clusters, que, com a evolução dinâmica, se agregam uns aos outros, aumentando em tamanho e diminuindo em quantidade. Vemos que temos uma inclinação negativa

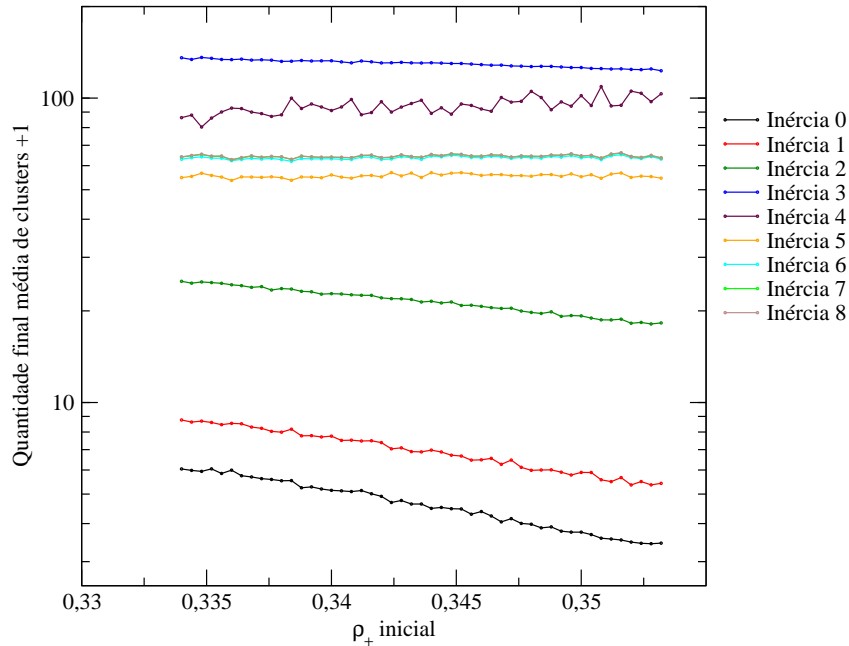


Figura 2.5: Quantidade média de clusters do estado +1 final versus densidade inicial do estado +1.

nessas curvas, o que sugere que quando aumentamos a densidade, diminuímos o número de clusters na configuração estacionária, ou seja, aumentamos seus tamanhos, o que pode ser verificado na figura 2.6. Para $I = 0, 1$ temos poucos clusters, número abaixo de 10, já quando $I = 2$, temos entre 20 e 30 clusters na média. Concluimos, com isso, que, aumentando a inércia (considerando inércia baixa), diminuímos a capacidade dos clusters se aglomerarem, por isso sua quantidade final aumenta. Além disso, a distância entre as curvas para $I = 0, 1$ e $I = 1, 2$ é maior para o segundo caso, sugerindo algum efeito, que diminui em maior grau essa aglomeração dos clusters. Já, para $I = 3$ temos uma quantidade muito superior de clusters, entre 120 e 140 clusters, com uma curva ainda linear com inclinação negativa. Essa quantidade de clusters é maior que a quantidade inicial (para comparar com a quantidade inicial de clusters, observamos o gráfico para $I=8$, pois, nessa inércia, a configuração estacionária é igual à configuração inicial). Esse fato ocorre, pois, os estados +1 e -1 aumentam em densidade, porém não conseguem se juntar com os outros clusters, criando um número maior de clusters do que inicialmente tinham. Para $I = 4$, temos bastante flutuação na quantidade média final de clusters, e além disso, a quantidade de clusters final média também é superior à quantidade inicial. Esse é um fenômeno que acontece nos sistemas com tamanho entre $N = 40, 60$, e será mostrado no próximo capítulo. Para $I=5,6,7,8$ temos curvas muito semelhantes, praticamente constantes, ou seja, na média, a quantidade de clusters independe da densidade para inércias altas, pois a quantidade de clusters na configuração estacionária passa a ficar muito mais parecida com a quantidade inicial de clusters. É interessante notar que a inclinação das

curvas, à medida que aumentamos a inércia, diminui, indicando que a quantidade final de clusters se torna menos sensível à densidade inicial quando aumentamos a inércia.

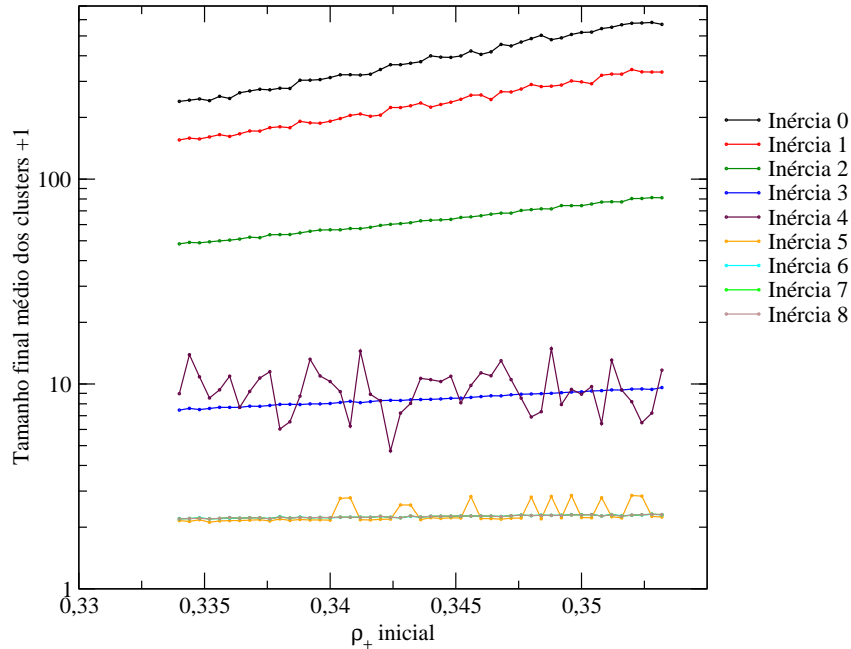


Figura 2.6: Tamanho médio de clusters do estado +1 final versus densidade inicial do estado +1.

Na figura 2.6 podemos ver o tamanho médio de clusters do estado +1 no estado estacionário versus a densidade inicial. A partir desta podemos notar que as curvas com $I=0,1,2,3$ são semelhantes (exponenciais, com inclinação positiva, considerando o gráfico em escala logarítmica), que implica que quanto maior a densidade, maior o tamanho final médio dos clusters. À medida que a inércia aumenta, tanto a inclinação quanto o tamanho médio dos clusters diminui, indicando que o aumento da inércia diminui a influência que a densidade tem sobre o tamanho final dos clusters. Aqui também temos um comportamento diferente para a curva de inércia 4. Esse comportamento será visto novamente no próximo capítulo. Para $I=5,6,7$ e 8, as curvas são muito parecidas, confirmando a destruição da dinâmica de evolução do sistema que é encontrada para valores baixos de inércia.

Finalizando essa seção, apresentamos a figura 2.7 que mostra o gráfico do tempo de convergência (τ) médio versus a densidade inicial. Nela vemos que as curvas para $I=0,2$ estão abaixo das curvas para $I=1,3$, respectivamente, o que indica que há algo na dinâmica do sistema que faz com que $\tau_{I1} > \tau_{I0}$ e $\tau_{I3} > \tau_{I2}$. Esse resultado será discutido na próxima seção. Outro detalhe que podemos observar é que o tempo de convergência médio é praticamente constante para todos os valores de ρ_+ , indicando que o tempo de convergência não depende da densidade inicial, dependendo apenas da inércia.

Podemos tirar alguns conclusões principais a partir dos resultados até agora mostra-

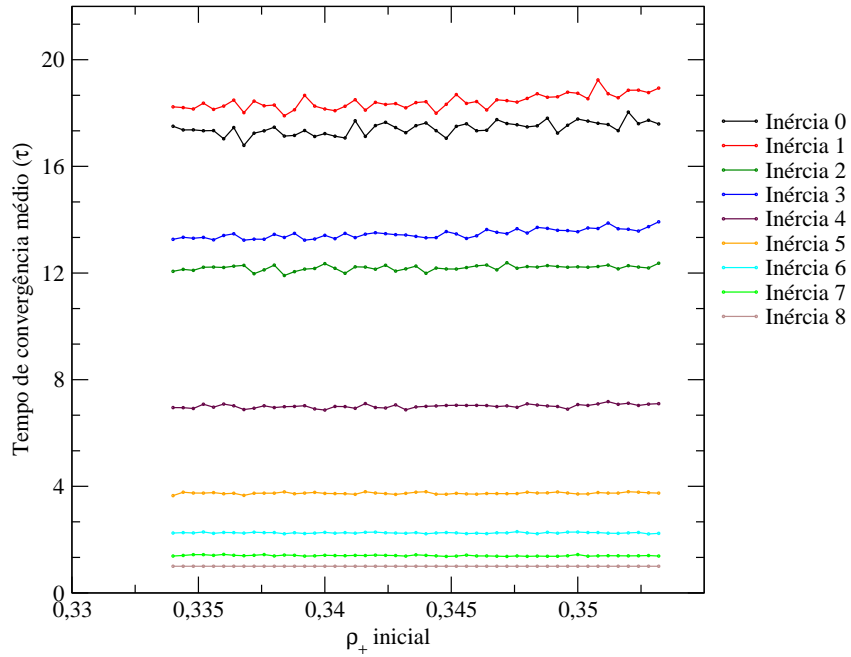


Figura 2.7: Tempo de convergência médio versus densidade inicial do estado +1.

dos. Dentre elas, temos comportamentos diferentes e não esperados quando analisamos tanto a quantidade, quanto o tamanho médio dos clusters, o que nos leva a refletir sobre esses parâmetros. Vemos que valores de inércia diferentes, trazem uma dinâmica diferente, por exemplo, inércia baixa ($I=0,1$ e 2) os clusters tendem a se juntar, formando clusters maiores, enquanto para $I=3$, temos mais clusters no estado estacionário do que inicialmente. Também percebemos que, para $I=4$, a dinâmica difere bastante da dinâmica para outras inércias, o que é algo não esperado. Outro ponto que deve ser melhor estudado é o fenômeno do tempo de convergência ser maior para $I=1,3$ que para $I=0,2$, o que será feito na próxima seção.

2.5 Análise das estruturas espaciais

Para termos uma melhor ideia qualitativa de alguns resultados obtidos na seção anterior, iremos analisar, de forma explícita, os padrões espaciais de estados em um AC de 50 x 50. Essa matriz está mostrada na figura 2.8. Ela foi gerada a partir do método de geração de matrizes quase-aleatório, com $\rho_+ = 34,28\%$, $\rho_- = 32,4\%$ e $\rho_0 = 33,32\%$.

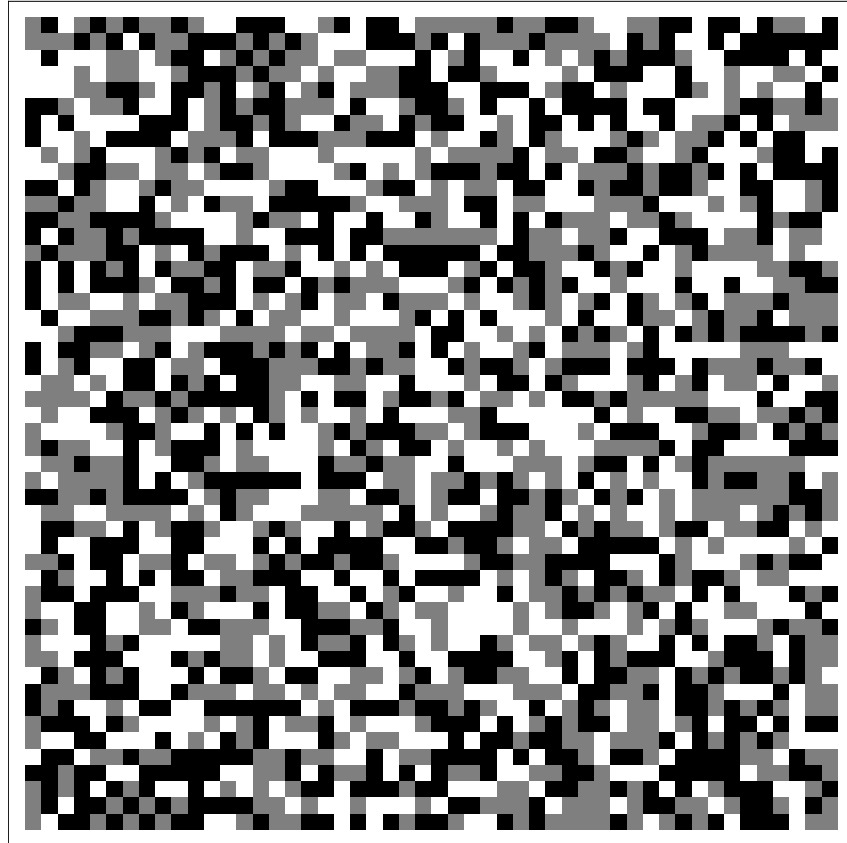


Figura 2.8: Distribuição espacial dos estados +1, -1 e zero que será utilizado para nossas análises futuras.

Tendo em vista que a figura 2.8 representa a distribuição espacial dos estados no sistema, sendo que a cor preta representa o estado +1, a cor cinza, o estado -1 e o estado zero, a cor branca, podemos analisar como essa matriz evolui no tempo. Nas figuras 2.9 a 2.14 encontramos as 4 primeiras gerações para inércias variando de zero a cinco. Observamos primeiramente que a quantidade de células zero que sobrevivem durante a evolução temporal aumenta com a inércia. Também vemos que as regiões onde temos grandes clusters dos estados +1 e -1 tendem a ser as mesmas, porém com tamanhos menores quando aumentamos a inércia.

Observando essas gerações também conseguimos entender porque o tempo de convergência é maior para $I=1$ do que é para inércia nula, assim como é maior para $I=3$ do que para $I=2$. Neste caso, o tempo de convergência $\tau_{inercia}$ para cada valor de inércia é

$\tau_0 = 18$, $\tau_1 = 25$, $\tau_2 = 11$, $\tau_3 = 10$, $\tau_4 = 5$ e $\tau_5 = 3$. Quando temos inércia nula, poucos elementos zero sobrevivem até a configuração estacionária (figura 2.9), entretanto, quando a $I=1$, alguns elementos zero sobrevivem, ficando nas fronteiras formadas entre os clusters do estado $+1$ e -1 (figura 2.10). Isso causa um tempo de convergência maior, pois os zeros tendem a sobreviver durante mais tempo, dificultando que clusters $+1$ ou -1 se fundam.

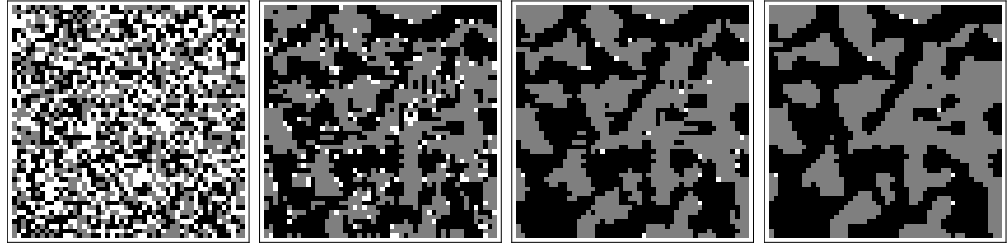


Figura 2.9: Quatro primeiras gerações para inércia nula.

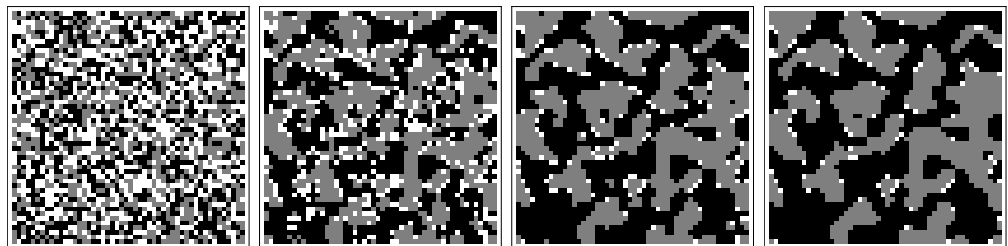


Figura 2.10: Quatro primeiras gerações para inércia igual a um.

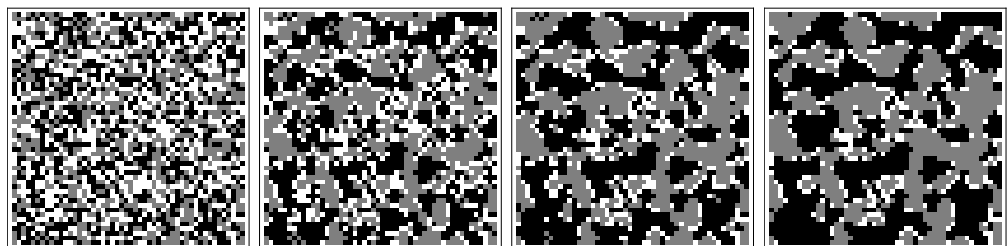


Figura 2.11: Quatro primeiras gerações para inércia igual a dois.

Quando a inércia fica igual a dois (figura 2.11), vemos que o tempo de convergência decai, e isso acontece porque mais células zero sobrevivem até a configuração estacionária. Essa sobrevivência também aparece nas fronteiras dos clusters $+1$ e -1 , porém agora, quase toda a fronteira é tomada por elementos zero, deixando-as mais uniformes, diminuindo o tempo de convergência. Os zeros nas fronteiras não mudam de estado durante a evolução, tornando as fronteiras estáveis mais rapidamente. Se a inércia for igual a 3 (figura 2.12), a sobrevivência de elementos zero é bem maior, não acontecendo apenas nas fronteiras

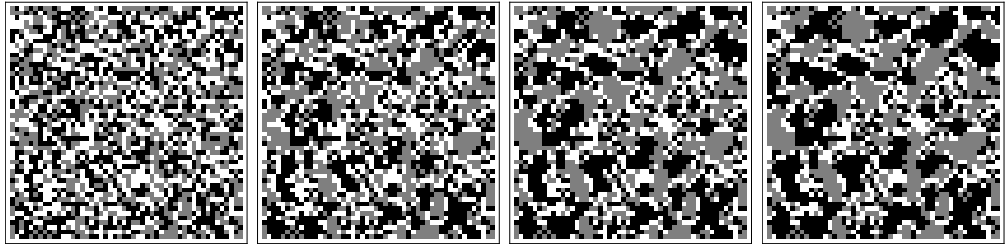


Figura 2.12: Quatro primeiras gerações para inércia igual a três.

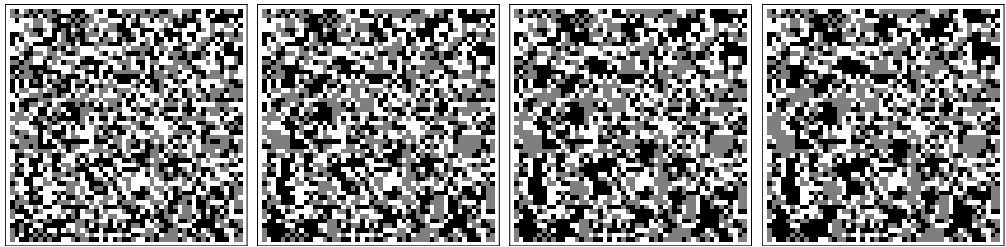


Figura 2.13: Quatro primeiras gerações para inércia igual a quatro.

entre clusters $+1$ e -1 . Aumentando, dessa forma, o tempo de convergência, pois os elementos zero não deixam os estados $+1$ e -1 se expandirem no sistema. Um ponto interessante é que muitos desses zeros não conseguem sobreviver até o sistema atingir um estado estacionário. Para inércia igual a 4 e 5 (figuras 2.13 e 2.14), vemos que pouco muda em relação à distribuição inicial de estados. Vemos que alguns clusters crescem, mas os estados $+1$ e -1 não conseguem se expandir muito, tendo sua predominância sobre o sistema comprometida.

Na figura 2.15 vemos as configurações estacionárias para cada valor de inércia. A partir desta figura é possível verificar novamente os resultados já obtidos, por exemplo, a sobrevivência dos estados zero nas fronteiras formadas entre os clusters $+1$ e -1 e a diminuição no tamanho dos clusters quando aumentamos a inércia. Também notamos que a quantidade de clusters $+1$ aumenta com a inércia. Vemos, além disso, que, para inércia 3, as fronteiras onde o estado zero sobrevive já não são bem definidas e, para

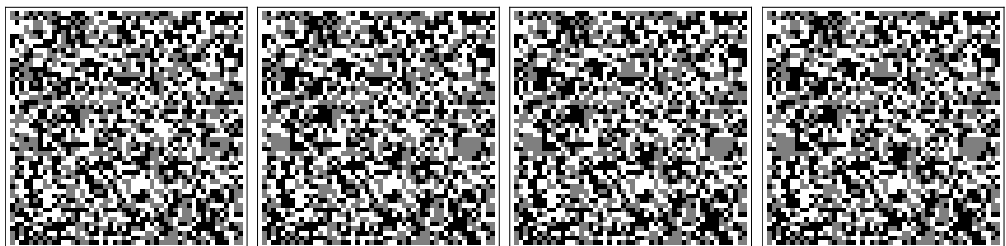


Figura 2.14: Quatro primeiras gerações para inércia igual a cinco.

$I = 4, 5$, temos apenas alguns clusters $+1$ e -1 que cresceram, ou seja, aumentaram em tamanho.

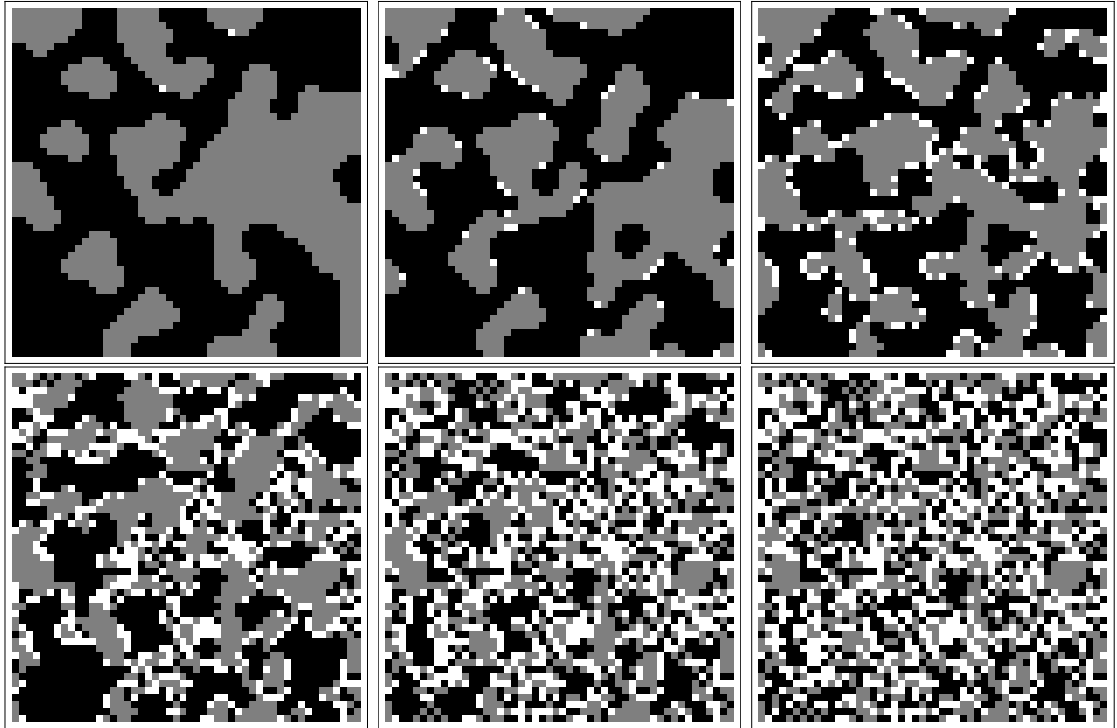


Figura 2.15: Configurações estacionárias para cada valor de inércia, de zero a cinco, respectivamente.

Alguns dos resultados aqui obtidos podem ser melhor entendidos quando analisamos as possíveis vizinhanças de cada célula. Na Tabela 2.1 encontramos todas as configurações de vizinhança possíveis para uma célula do nosso sistema, exceto células da borda e dos cantos. Ou seja, temos todas as configurações possíveis para os números de elementos em cada um dos estados que podem existir na vizinhança de uma célula. Nessa tabela vemos qual é o valor do módulo da soma dos estados da vizinhança e em qual condição de inércia essa célula não irá mudar de estado. Em outras palavras, mostramos quais são os valores de inércia que farão a célula não mudar de estado. A partir desta tabela podemos fazer algumas análises, como por exemplo, qual é a porcentagem das possíveis vizinhanças que causam a estacionaridade do estado em uma célula qualquer, para diferentes valores de inércia. Quando a inércia é igual a zero, temos apenas 5, das 45 possíveis vizinhanças (11%), que não permitem a célula mudar de estado. Para $I = 1$, já temos aproximadamente 29% das possíveis vizinhanças que não mudam o estado de uma célula. Enquanto, para $I = 2, 3$, cerca de 47% e 60%, respectivamente, não permitem a mudança de estado da célula. Vemos aqui, que, quando a inércia passa de 2 para 3, temos mais da metade das possíveis vizinhanças não deixando as células mudarem de estado.

A partir das configurações de vizinhança podemos definir as fronteiras entre os clusters formados pelos estados das células. Assim, podemos entender porque, para alguns valores

de inércia, as células zero sobrevivem apenas nas fronteiras formadas entre clusters de células dos estados +1 e -1. Para compreender esse comportamento temos que primeiro determinar quais são as possíveis vizinhanças que poderiam formar uma fronteira bem definida. Uma vizinhança que possa definir uma fronteira deve ter mais ou menos o mesmo número de elementos nos estados que definem a fronteira (no nosso caso, os estados +1 e -1), por exemplo, quatro células +1 e quatro -1, ou três +1, três -1 e duas zero. A fronteira deve ter também uma maior número de estados +1 e -1, pois se houver bastantes células zero, essa não formará mais uma fronteira bem definida. E, para que uma célula zero sobreviva, ela não deve mudar de estado. Levando em conta essa definição de fronteira, vemos que apenas algumas configurações de vizinhanças se encaixam nesse perfil. Para exemplificá-las, consideramos a combinação do número de vizinhos representado da seguinte forma: (número de elementos no estado +1, número de elementos no estado -1, número de elementos no estado 0). Temos então que as possíveis vizinhanças que definem uma fronteira são: (3,3,2), (4,4,0), (3,4,1), (4,3,1), (2,4,2), (3,5,0), (4,2,2), (5,3,0). Destas configurações, temos apenas cerca de 4,4% delas não mudam o estado da célula para $I \geq 0$, cerca de 8,9% para $I \geq 1$ e cerca de 17,8% para $I \geq 2$. Ou seja, para inércia zero, aproximadamente 5% de todas as configurações de vizinhanças tornam possível a sobrevivência de uma célula zero na fronteira, já para inércia 1, temos cerca de 9% de todas as configurações, e por último temos cerca de 18% das configurações fazendo com que células zero sobrevivam na fronteira para inércia igual a 2. Com isso podemos dizer que para inércia zero, a probabilidade de células zeros sobreviverem na fronteira é muito pequena. Para inércia 1 e 2, há uma chance maior de células zero sobreviverem na fronteira. Note que as análises anteriores não se aplicam para o caso de $I = 3$, uma vez que não existe a formação bem definida de clusters +1 e -1 nas fronteiras.

Tabela 2.1: Tabela das quantidades de elementos em cada estado na vizinhança de uma célula

Nº de elementos no estado +1	Nº de elementos no estado -1	Nº de elementos no estado zero	Módulo da soma dos estados da vizinhança	O estado da célula não muda se a Inércia for:
0	0	8	0	$I \geq 0$
1	1	6	0	$I \geq 0$
2	2	4	0	$I \geq 0$
3	3	2	0	$I \geq 0$
4	4	0	0	$I \geq 0$
0	1	7	1	$I \geq 1$
1	0	7	1	$I \geq 1$
1	2	5	1	$I \geq 1$
2	1	5	1	$I \geq 1$
2	3	3	1	$I \geq 1$
3	2	3	1	$I \geq 1$
3	4	1	1	$I \geq 1$
4	3	1	1	$I \geq 1$
0	2	6	2	$I \geq 2$
1	3	4	2	$I \geq 2$
2	0	6	2	$I \geq 2$
2	4	2	2	$I \geq 2$
3	1	4	2	$I \geq 2$
3	5	0	2	$I \geq 2$
4	2	2	2	$I \geq 2$
5	3	0	2	$I \geq 2$
0	3	5	3	$I \geq 3$
1	4	3	3	$I \geq 3$
2	5	1	3	$I \geq 3$
3	0	5	3	$I \geq 3$
4	1	3	3	$I \geq 3$
5	2	1	3	$I \geq 3$
0	4	4	4	$I \geq 4$
1	5	2	4	$I \geq 4$
2	6	0	4	$I \geq 4$
4	0	4	4	$I \geq 4$
5	1	2	4	$I \geq 4$
6	2	0	4	$I \geq 4$
0	5	3	5	$I \geq 5$
1	6	1	5	$I \geq 5$
5	0	3	5	$I \geq 5$
6	1	1	5	$I \geq 5$
0	6	2	6	$I \geq 6$
1	7	0	6	$I \geq 6$
6	0	2	6	$I \geq 6$
7	1	0	6	$I \geq 6$
0	7	1	7	$I \geq 7$
7	0	1	7	$I \geq 7$
0	8	0	8	$I \geq 8$
8	0	0	8	$I \geq 8$

Capítulo 3

Comparação entre diferentes tamanhos de sistemas

Neste capítulo vamos estudar qual é a influência do tamanho da matriz sobre a dinâmica do sistema. Utilizaremos cinco tamanhos diferentes, $N=20,40,60,100$ e 200 . Mostraremos alguns resultados já encontrados anteriormente e faremos a comparação entre os vários tamanhos do sistema, explicando as diferenças que podem ser notadas na dinâmica evolutiva.

3.1 Influência do tamanho do sistema

Apresentamos aqui uma comparação entre diferentes tamanhos do sistema ($N=20,40,60,100$ e 200). Utilizando o método de geração de dados iniciais quase-aleatório, apresentado no capítulo anterior, com $\rho_0 = \frac{1}{3}$, não foi possível gerar a mesma quantidade de matrizes para cada tamanho do sistema. Como já foi explicado, isso ocorre porque gerar um conjunto de dados iniciais que preencha completamente o reticulado do espaço de fases é algo demorado.

Além disso, também não foi possível criar matrizes de tamanhos diferentes que tivessem o mesmo intervalo e com distribuição homogênea para o espaço de fase, ou seja, não conseguimos gerar matrizes com ρ_+ sempre dentro do mesmo intervalo. Quanto maior o tamanho do sistema, menor era o intervalo de densidade que era possível gerar matrizes. À medida que aumentamos o tamanho da matriz, aumentamos a quantidade de elementos nela, fazendo com que haja um intervalo menor entre cada possível valor de densidade. Explicando em outras palavras, se considerarmos um sistema com $N = 20$, há 400 elementos no total. Como a densidade do estado zero é fixa, $\rho_0 = \frac{1}{3}$, sabemos que a densidade mínima do estado +1 é maior que $\rho_+ > \frac{1}{3}$. Então, para $N = 20$, a densidade mínima é $\rho_+ = \frac{134}{400} = 0,335$. O próximo valor possível de densidade é igual a $\rho_+ = \frac{135}{400} = 0,3375$, nos dando um intervalo de 0,0025 entre os possíveis valores de densidade. Agora se anali-

sarmos a densidade mínima para $N = 100$, teremos $\rho_+ = \frac{3334}{10^4} = 0,3334$, e o próximo valor possível para densidade é de $\rho_+ = \frac{3335}{10^4} = 0,3335$, ou seja, o intervalo entre dois valores possíveis de densidade diminui para 0,0001. Dessa forma, há uma quantidade maior de densidades possíveis, portanto, aumentando o tamanho do espaço de parâmetros. Como se torna bastante difícil preencher todo esse intervalo, devemos diminuir o esse espaço de parâmetros. Sendo assim, nos gráficos que serão mostrados a seguir, quanto maior o tamanho da matriz, menor será o intervalo de densidade inicial que a curva ocupará.

Geramos então pouco menos de 25000 matrizes para $N=20$, pois, para o intervalo $\frac{1}{3} < \rho_+ < 0,3975$, temos apenas 25 possíveis valores para densidade. Portanto, tentamos gerar cerca de 1000 matrizes diferentes para cada valor de ρ_+ . Geramos apenas cerca de 24000, obtendo um erro de 4% do valor esperado ($\frac{25000-24000}{25000}$). Para calcular esses possíveis 25 valores de densidade, basta achar a população de cada estado ($p_+ = \rho_+ * N^2$), então, se $\rho_+ = 0,335$, $p_+ = 134$, e para $\rho_+ = 0,3975$, $p_+ = 159$, tendo portanto, 25 possíveis populações para o estado +1 dentro desse intervalo. Para $N=40$, geramos cerca de 38000 matrizes iniciais, pois, no intervalo $\frac{1}{3} < \rho_+ < 0,358$, temos apenas 39 possíveis valores para ρ_+ . A ideia era gerar 1000 matrizes para cada valor, porém, como é bastante demorado gerar matrizes que preencham todo o espaço de fase, temos aproximadamente 38000 matrizes, obtendo um erro de 2,5%. Para $N=60$, temos 70 possíveis valores de densidade, dentro do intervalo $\frac{1}{3} < \rho_+ < 0,353$, portanto, para termos 1000 matrizes diferentes para cada valor de densidade, deveríamos gerar 70000 matrizes iniciais, contudo, conseguimos gerar apenas aproximadamente 66500, tendo um erro de 5%. Para $N=100$ e 200 temos 100 e 185 possíveis densidades para densidade variando de $\frac{1}{3} < \rho_+ < 0,3434$, para $N=100$ e $\frac{1}{3} < \rho_+ < 0,337975$, para $N=200$. Para não termos que gerar 1000 matrizes para cada valor de densidade, processo que seria muito demorado, geramos cerca de 600 matrizes diferentes para cada densidade ($N=100$) e 450 matrizes para $N = 200$, ou seja, 60000 e 83250 matrizes no total, respectivamente. Gerando um total de cerca 57000 matrizes iniciais para $N=100$ (5% de erro) e 79000 matrizes para $N=200$ (5,1% de erro). Assim, temos uma distribuição uniforme das matrizes iniciais sobre o espaço de parâmetros para todos os tamanhos de sistema.

Todos os gráficos aqui mostrados são feitos para inércia de 0 a 4, pois para inércia maior que isso, o sistema muda tão pouco em relação à configuração inicial, que os resultados não são relevantes. Nas figuras 3.1 a 3.5 encontramos a densidade final média em função da densidade inicial, para valores de inércia variando de 0 a 4 e diferentes tamanhos do sistema. Observando essas figuras, notamos que, em todas elas, as curvas dos diferentes tamanhos estão praticamente sobrepostas. Podemos dizer então que a densidade do estado +1 na configuração estacionária não muda em função do tamanho do sistema. Comparando as diferentes figuras para inércias diferentes, as conclusões obtidas no capítulo anterior também podem ser vistas aqui. Por exemplo, à medida que a inércia aumenta, a densidade final do estado +1 diminui, assim como a inclinação das curvas,

indicando que a influência da densidade inicial sobre a final vai diminuindo com a inércia. Em outras palavras, à medida que a inércia cresce, ela destrói a influência da densidade inicial sobre os parâmetros finais.

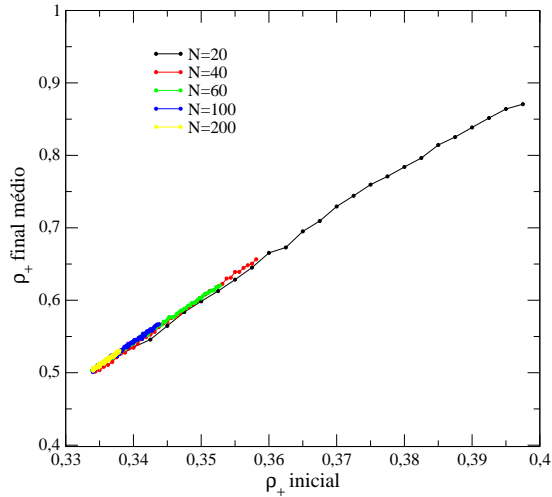


Figura 3.1: Densidade final média do estado +1 versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.

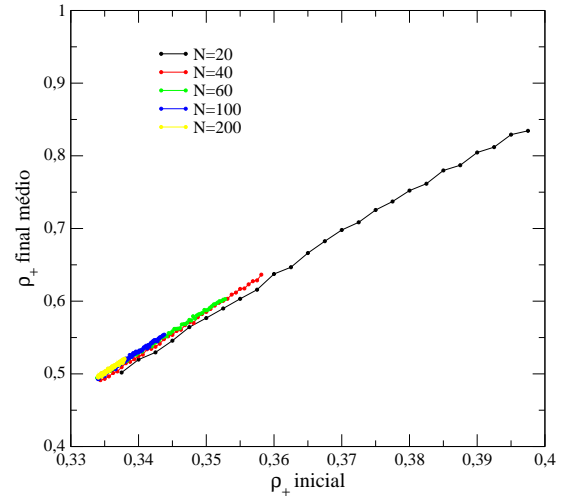


Figura 3.2: Densidade final média do estado +1 versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.

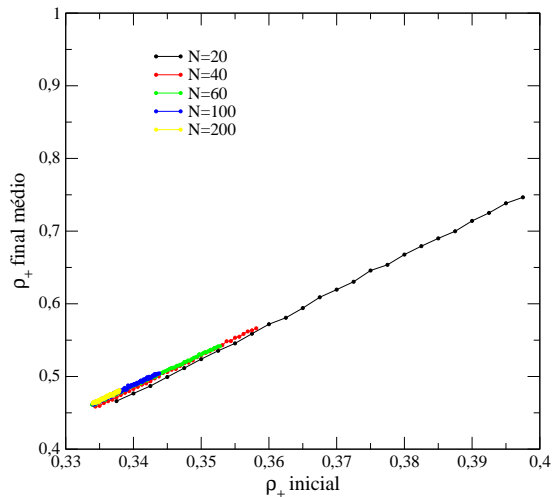


Figura 3.3: Densidade final média do estado +1 versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.

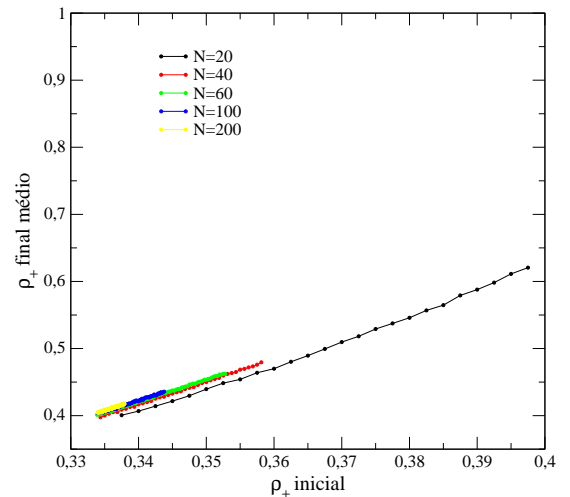


Figura 3.4: Densidade final média do estado +1 versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.

Nas figuras 3.6 à 3.10 encontramos os gráficos dos tamanhos finais médios dos clusters do estado +1 para diferentes tamanhos do sistema. Podemos notar, principalmente para inércia nula e igual a um, que o aumento do tamanho do sistema faz com que existam clusters maiores na configuração estacionária. O que é esperado, pois, um sistema de tamanho maior, durante a evolução dinâmica, tende a agregar mais células a seus clusters,

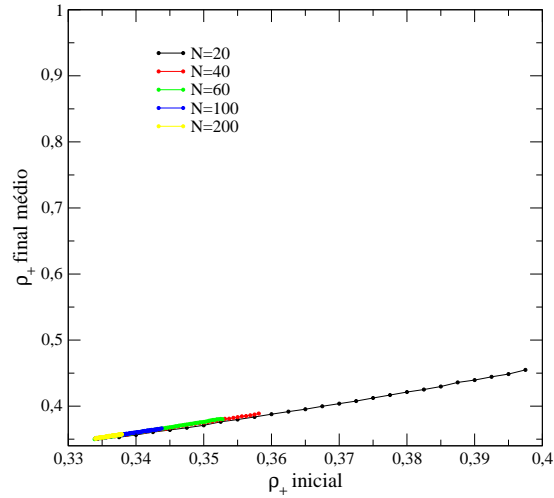


Figura 3.5: Densidade final média do estado +1 versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.

aumentando assim o tamanho médio final destes. Além disso, o tamanho dos clusters fica mais sensível à densidade inicial, ou seja, aumentando a densidade inicial, maior será o tamanho final médio dos clusters. Mas esses resultados já eram esperados, pois aumentando o tamanho de um sistema, aumentamos o número de células existentes nele, portanto, após a evolução temporal, os clusters formados serão maiores, pois terão mais espaço para se expandir.

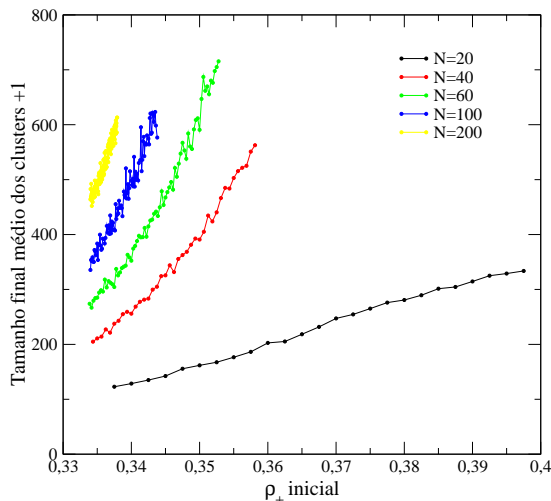


Figura 3.6: Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.

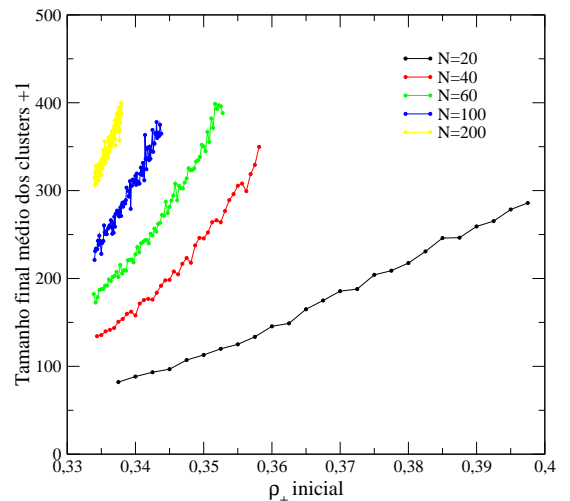


Figura 3.7: Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.

Para inércia igual a 2 e 3 (figuras 3.8 e 3.9), também vemos o mesmo fenômeno anterior (quanto maior o sistema, maior o tamanho médio dos clusters), porém menos acentuado.

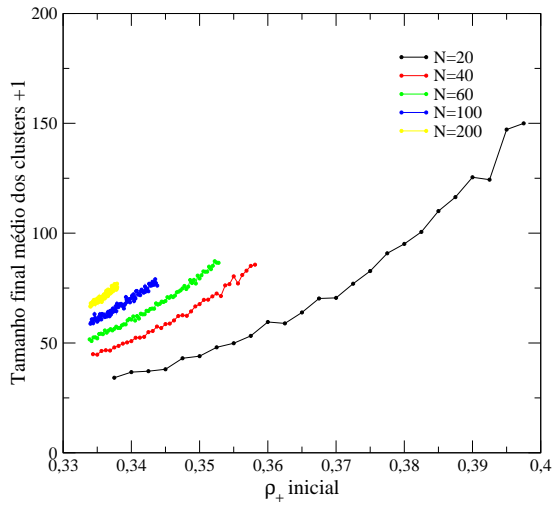


Figura 3.8: Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.

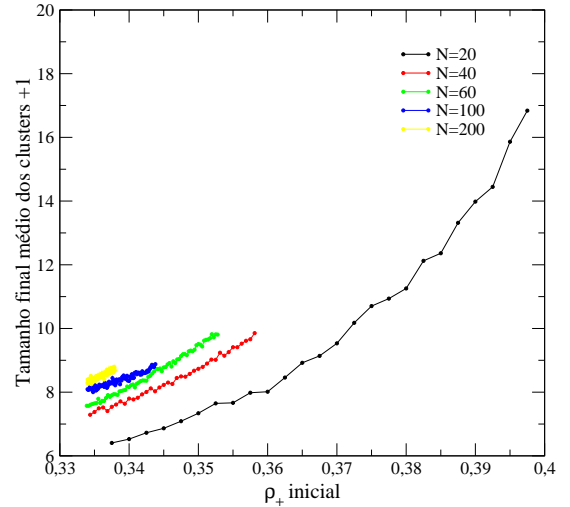


Figura 3.9: Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.

Já para inércia igual a 4 (figura 3.10), temos um comportamento bem diferente para os tamanhos $N=40$ e $N=60$. Lembrando que, no capítulo anterior (onde usamos $N=50$), também encontramos que os tamanhos de clusters apresentavam um comportamento anômalo para $I=4$. Apesar de não termos explorado em nosso trabalho este fenômeno, acreditamos que a explicação seja a seguinte. Como $I=4$ significa que mais da metade da vizinhança (que tem 8 elementos) tenha que ser de um mesmo estado para haver mudança da célula, então, tais mudanças são menos frequentes no interior do autômato. Já nas bordas, cuja vizinhança é menor, as mudanças raramente irão ocorrer e a borda acaba se tornando fixa. Assim, se o tamanho do AC não é muito grande, entre 40 e 60, as bordas (que estão praticamente "congeladas") têm um peso muito grande na dinâmica. E como as mesmas são, inicialmente quase-aleatórias, isto gera um comportamento aparentemente anômalo para o tamanho médio e quantidade final de clusters (as oscilações vistas para $N = 40$ por exemplo). À medida que N aumenta, a borda começa ser menos importante para a "parte interior" do sistema, logo o efeito tende a desaparecer.

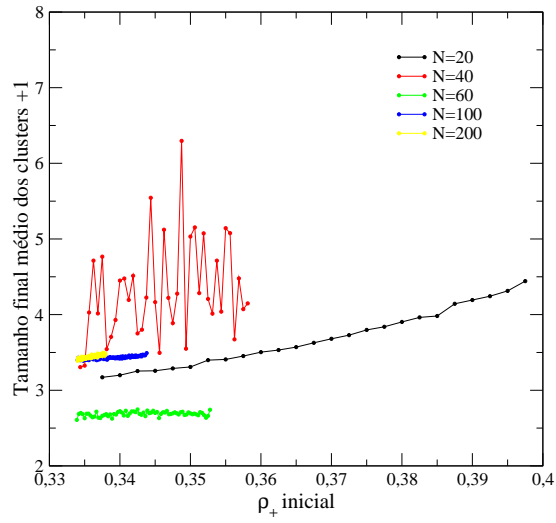


Figura 3.10: Tamanho final médio dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.

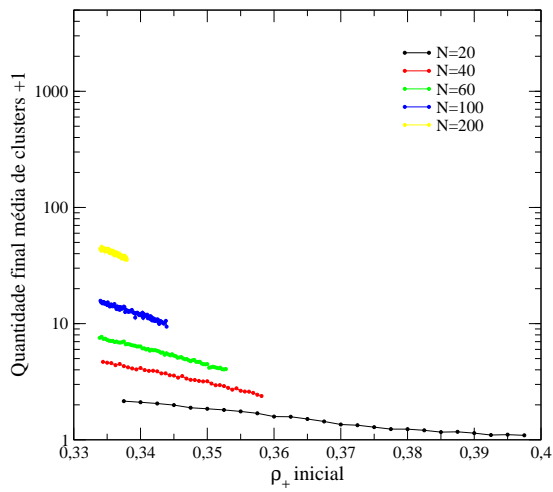


Figura 3.11: Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.

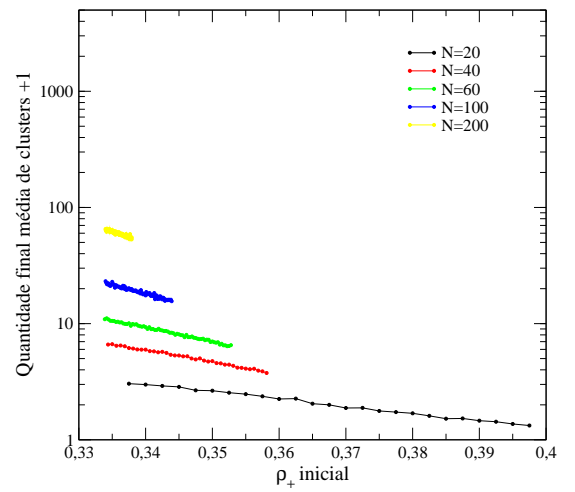


Figura 3.12: Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.

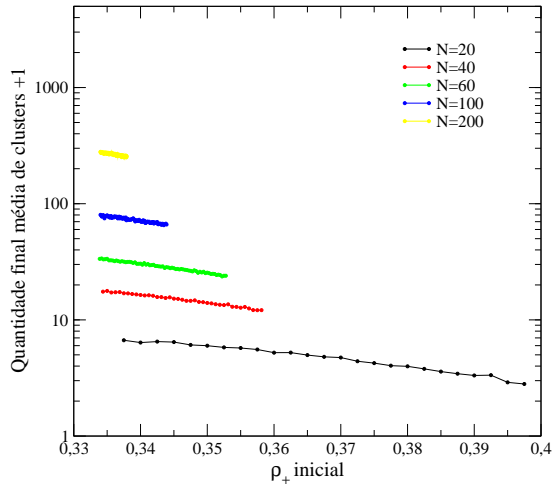


Figura 3.13: Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.

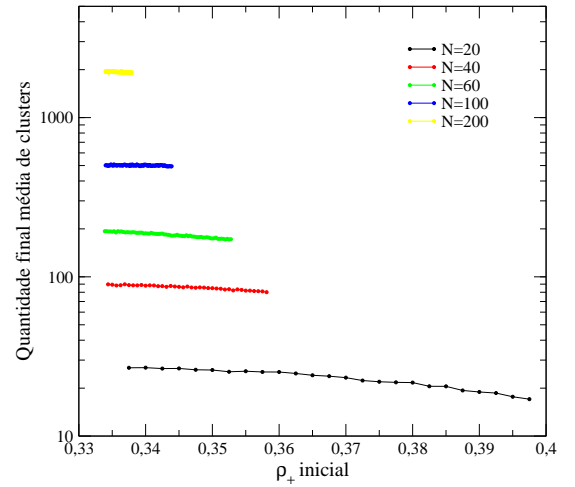


Figura 3.14: Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.

Nas figuras 3.11 a 3.15 podemos ver a quantidade final média de clusters dos estado +1 em função da densidade inicial para valores de inércia variando de zero a quatro, e diferentes tamanhos do sistema. A partir dessas figuras notamos que quando a inércia aumenta, a quantidade de clusters também aumenta, pois sabemos que o tamanho médio dos clusters diminui, assim a quantidade deles tem que aumentar, para compensar essa grande diminuição no tamanho médio. Se olharmos para os diferentes tamanhos do sistema, vemos que, para inércias iguais a 0, 1, 2 e 3, a quantidade de clusters aumenta com o tamanho dos clusters, pois, como já dito anteriormente, aumentando o tamanho do sistema, aumentamos o número de elementos existentes nele, deixando mais espaço para os clusters se expandirem e se dispersarem no sistema. Novamente temos um comportamento anômalo para inércia igual a quatro (figura 3.15) e tamanho do sistema entre 40 e 60. Para $N=60$, o sistema tem menos clusters que para $N=40$, o que não deveria acontecer. Ao invés de ser praticamente constante para diferentes valores da densidade inicial, ele decresce quando a densidade inicial é aumentada.

Nas figuras 3.16 a 3.20 encontramos o tempo de convergência para inércia variando de 0 a 4 para diferentes tamanhos do sistema. Para todos os valores de inércia vemos que o tempo de convergência médio aumenta à medida que aumentamos o tamanho dos sistema. Já esperávamos que algo assim acontecesse, pois um sistema de tamanho maior tem mais células para mudar ou não de estado, acarretando num maior tempo de convergência. É interessante observar que o tempo de convergência é maior para inércia 1 do que zero, assim como é maior para inércia 3 do que para inércia 2. Devemos notar que este comportamento é diferente para $N=20$. Mas neste caso, o sistema é muito pequeno, para seguir o padrão geral dos outros casos.

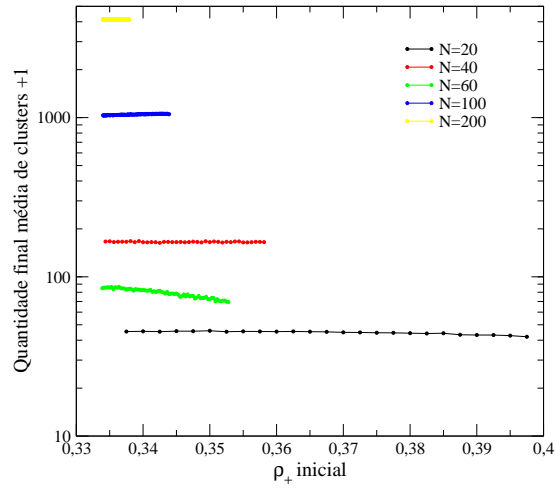


Figura 3.15: Quantidade final média dos clusters do estado +1 versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.

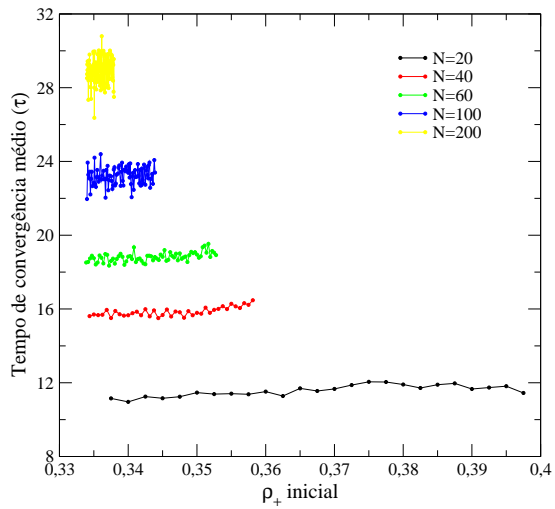


Figura 3.16: Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia zero e diferentes tamanhos do sistema.

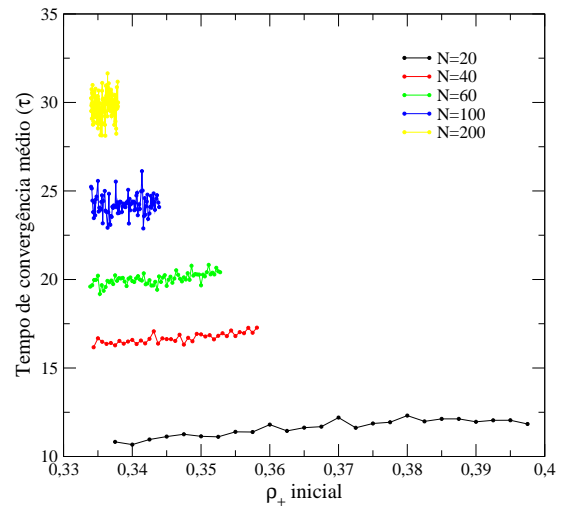


Figura 3.17: Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia um e diferentes tamanhos do sistema.

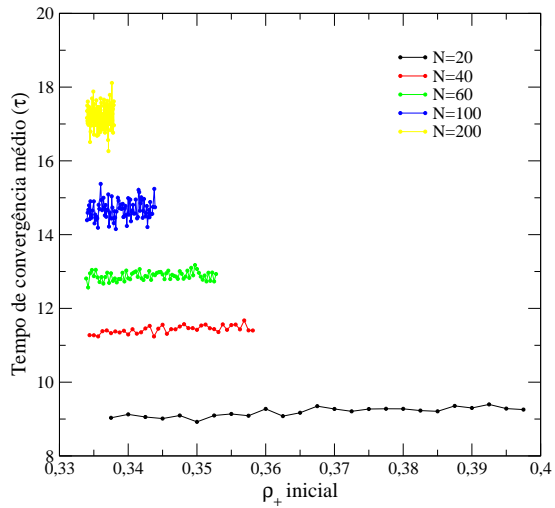


Figura 3.18: Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia dois e diferentes tamanhos do sistema.

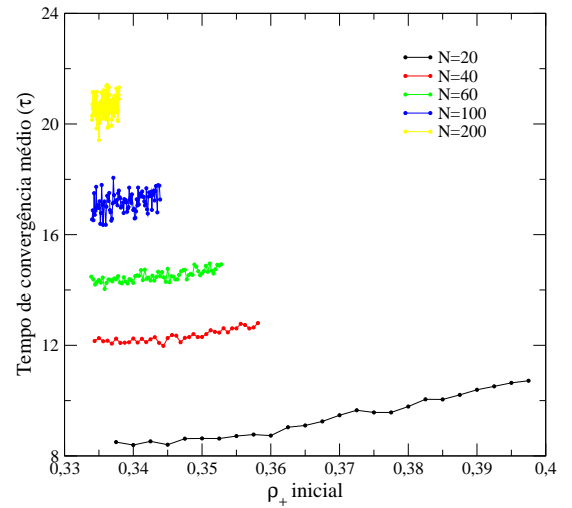


Figura 3.19: Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia três e diferentes tamanhos do sistema.

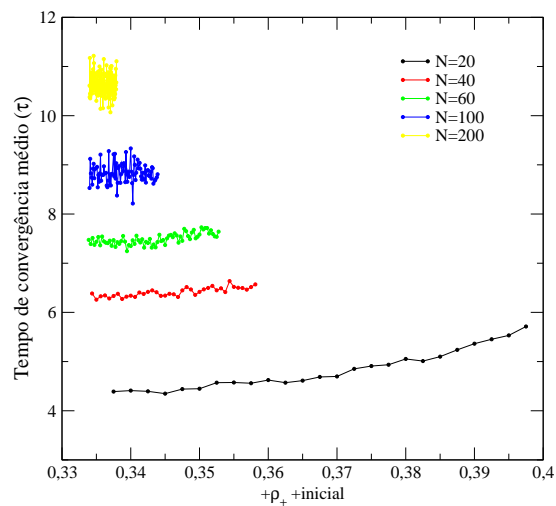


Figura 3.20: Tempo de convergência versus densidade inicial para inércia quatro e diferentes tamanhos do sistema.

Capítulo 4

Matrizes que não convergem

Neste capítulo estudaremos o motivo de certas matrizes não conseguirem atingir uma configuração estacionária, ou seja, não haver um tempo τ , tal que, após este tempo, a regra de atualização não muda mais a configuração do sistema. Mostraremos que isto acontece devido à formação de configurações locais particulares (envolvendo poucas células), que acabam apresentando oscilações no tempo. É importante frisar que, nas análises feitas nos capítulos anteriores, as matrizes que não convergiam eram desconsideradas. Dessa forma, analisaremos apenas as matrizes não convergentes.

4.1 Informações iniciais

Neste capítulo analisaremos as matrizes ditas não convergentes. Entretanto, temos que definir o que é essa não convergência. Uma matriz que não converge, é aquela que não atinge uma configuração estacionária, ou seja, não há uma distribuição espacial que seja exatamente igual à distribuição espacial da geração anterior. Dessa forma, o critério de parada, ou de convergência não é satisfeito. Para realizar uma análise dessas matrizes, necessitamos mudar o critério de convergência. Ao invés de compararmos a distribuição espacial da última geração com a penúltima, comparamos a última geração com a penúltima, antepenúltima e assim por diante. Dizemos então que uma geração, que é exatamente igual à anterior, é convergente com período zero. Contudo, se ela for diferente da anterior, mas igual à segunda geração anterior, ela tem período 1, se for igual à terceira geração anterior, ela tem período 2, e assim por diante. Com esse critério de convergência, podemos analisar esse comportamento periódico da convergência das matrizes. Além disso, para testar se a matriz tem realmente convergência periódica, deixamos a matriz evoluir durante mais algum tempo, verificando a igualdade da distribuição espacial dos estados da gerações atuais com as anteriores. Consideramos uma das matrizes oscilantes como a configuração estacionária. Na verdade, verificamos que, independente de qual matriz seja escolhida como a configuração estacionária, não há diferença significativa entre os parâmetros (densidade, quantidade e tamanho médio dos clusters)

4.2 Dados estatísticos das matrizes não convergentes

Primeiramente analisaremos alguns padrões estatísticos das matrizes não convergentes. Para simplificar os cálculos, utilizamos matrizes de tamanho $N = 50$. Esse tamanho de sistema apresenta uma dinâmica bastante rica e com um custo computacional baixo. Também escolhemos esse tamanho para tentar verificar se encontramos o comportamento anômalo já mostrado, quando a inércia é igual a quatro. Escolhemos inicialmente matrizes que não convergiram para inércia zero. Notamos que as matrizes que não convergem com inércia zero, acabam convergindo para inércias maiores. Também conseguimos ver matrizes que não convergem para inércia igual a 1. Entretanto, em todos os casos analisados, para inércia maiores iguais a 2, as matrizes sempre convergiam. Acreditamos que isto é um resultado geral, porém não conseguimos uma prova analítica para tal. Depois de selecionadas as matrizes com convergência periódica, analisamos os períodos de oscilação. Então separamos as matrizes com período igual a 1, e comparamos as médias dos parâmetros finais com os iniciais. Não houve ocorrência de matrizes com períodos maiores que um. Finalmente mencionamos que, embora hajam matrizes com inércia igual a 1 que não convergem (tendo período 1), sua ocorrência é tão baixa, o que fica extremamente difícil fazer qualquer análise estatística. Portanto não analisamos tal situação no presente capítulo.

Para gerarmos o ensemble de dados iniciais de matrizes com convergência periódica, criamos cerca de 100.000 matrizes distintas. Destas, separamos apenas as que convergiam com período 1 para inércia zero (aproximadamente 12000). Então, podemos obter o número de matrizes com mesma densidade inicial (figura 4.1). A partir desta figura vemos que a quantidade de matrizes, para cada intervalo de densidade inicial, flutua entre 220 e 280 matrizes. Apesar de termos uma oscilação bem grande na quantidade de matrizes para cada densidade, não foi possível gerar mais matrizes, de forma a uniformizar essa distribuição. Além disso, veremos mais a frente que essas flutuações não interferem significativamente na análise dos parâmetros finais.

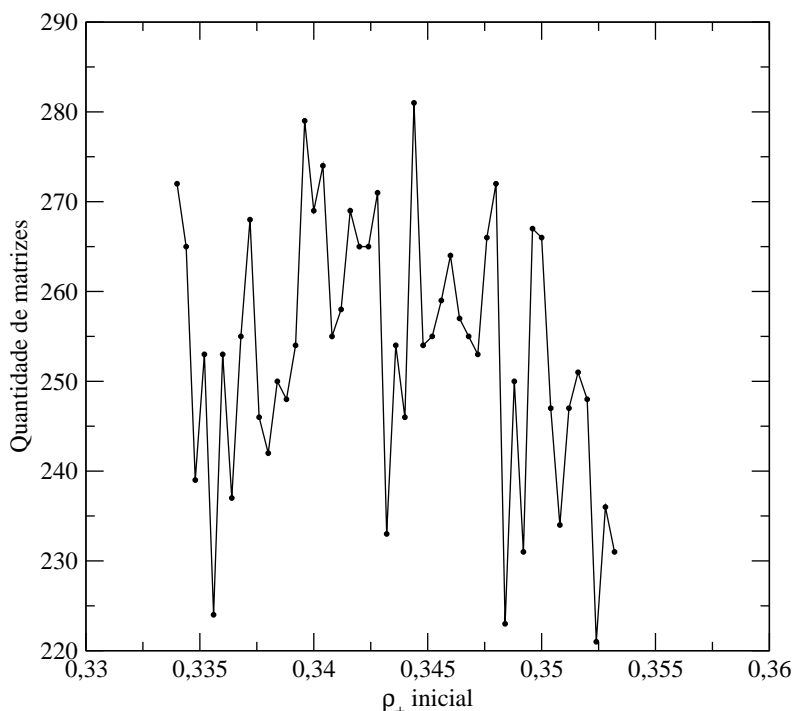


Figura 4.1: Quantidade de matrizes versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).

No cálculo das médias finais, somamos o parâmetro analisado de todas as matrizes estacionárias com densidades iniciais iguais e, então, dividimos essa soma pela quantidade de matrizes nesse intervalo. Dessa maneira podemos conhecer, de modo geral e estatístico, o comportamento do sistema. O primeiro parâmetro que analisamos foi a densidade final do estado +1.

Nas figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 encontramos a média da densidade final do estado +1, a média da quantidade final de clusters do estado +1, a média do tamanho final dos clusters e o tempo de convergência em função da densidade inicial do estado +1. A partir dessas figuras, podemos ver que, o comportamento geral de cada parâmetro é muito parecido com os das matrizes que convergiram (convergência de período zero). Basta comparar essas figuras com as figuras equivalentes no capítulo 2. A maior diferença aparece na curva do tempo de convergência médio para inércia igual a zero. Ela difere pois, quando a inércia é igual a zero, o sistema não converge com período zero, e sim com período 1, ou seja, ela leva no mínimo 2 iterações a mais para parar. Assim, o tempo de convergência médio é levemente maior para as matrizes não convergentes do que para as convergentes (capítulo 2). Além disso, vemos o mesmo comportamento anômalo encontrado quando a inércia é igual a 4, em relação ao tamanho e a quantidade de clusters +1 do sistema.

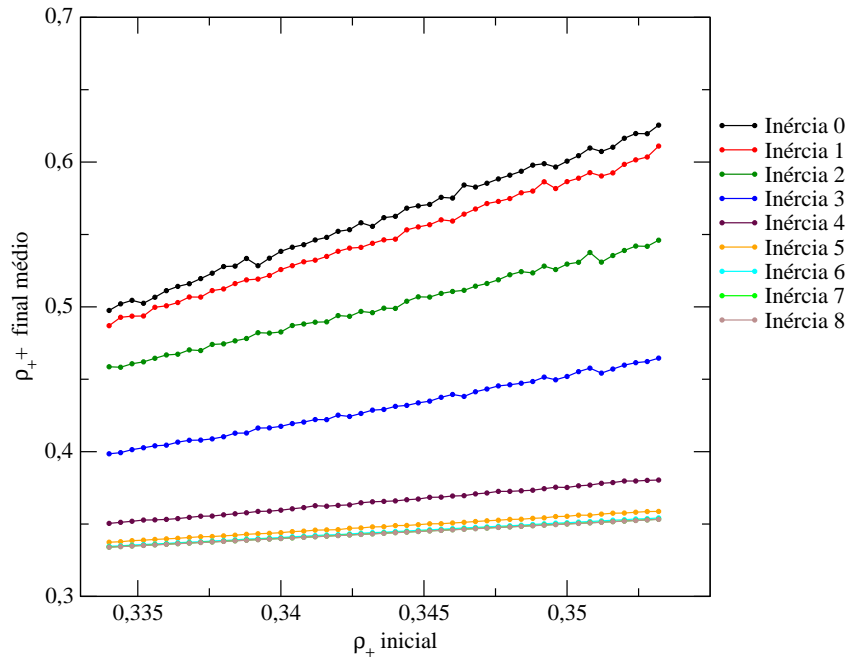


Figura 4.2: Densidade final média do estado +1 $\bar{\rho}_{+,+}^{final}$ versus densidade inicial do estado +1 ($\rho_{+,+}$).

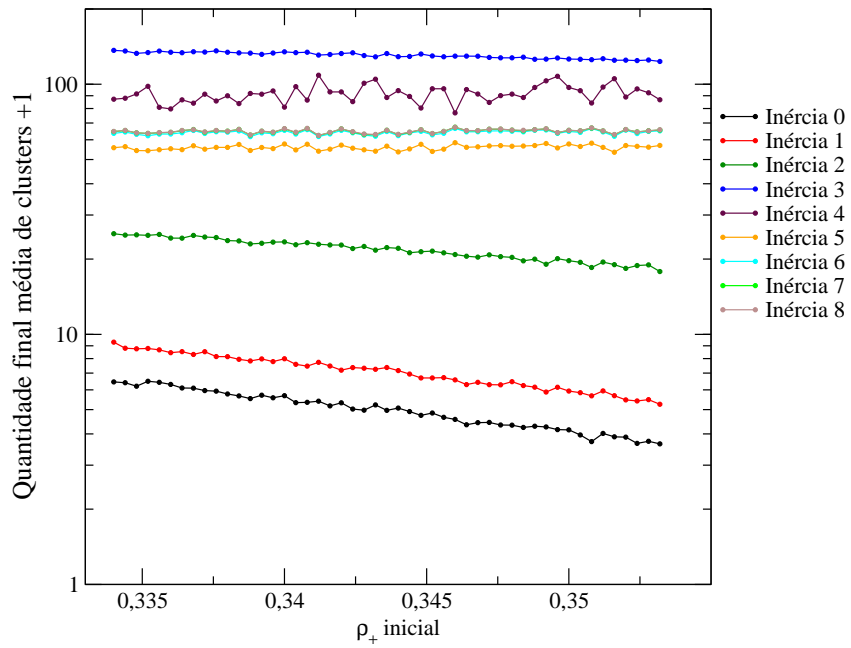


Figura 4.3: Quantidade final de clusters do estado +1 versus densidade inicial do estado +1 ($\rho_{+,+}$).

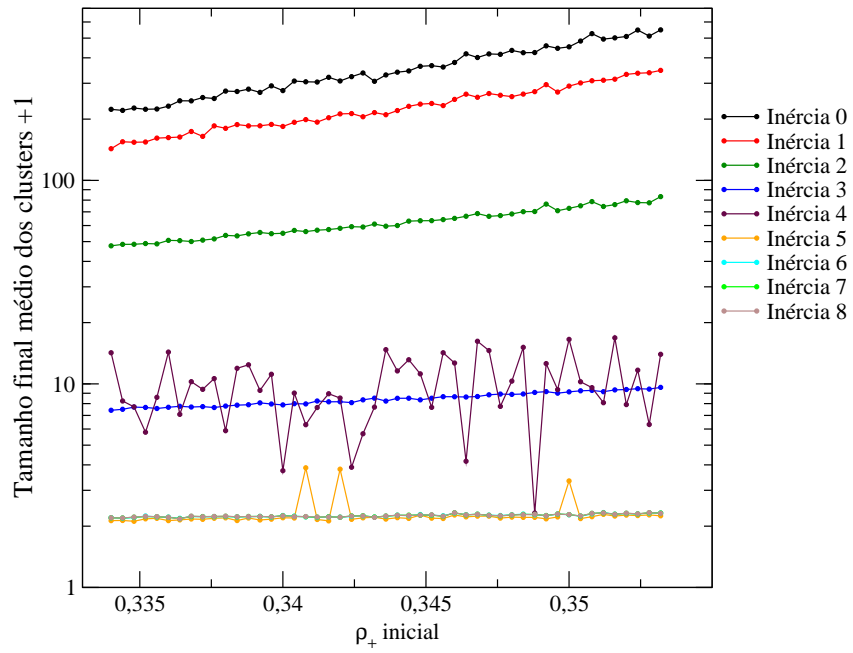


Figura 4.4: Tamanho final médio de clusters do estado +1 versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).

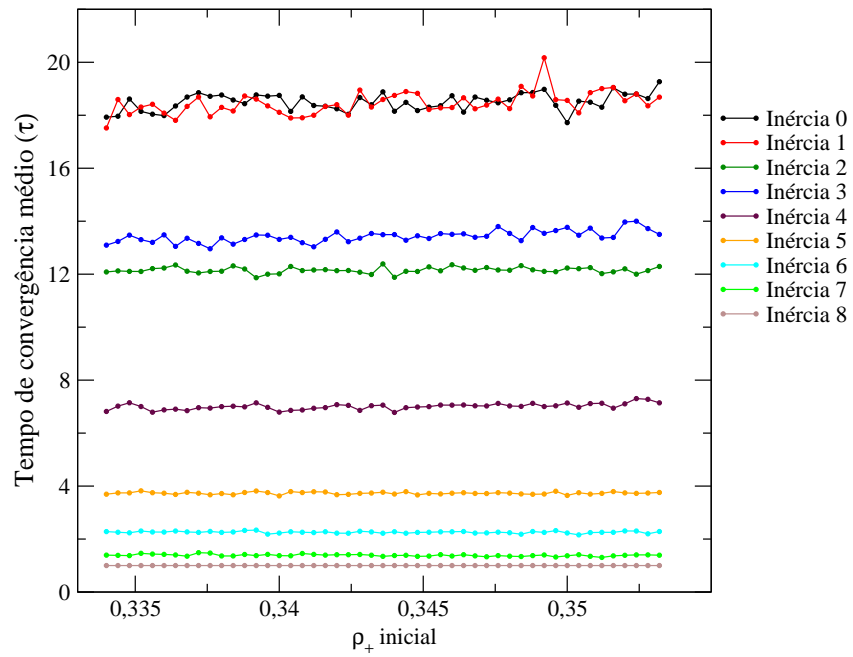


Figura 4.5: Tempo de convergência médio versus densidade inicial do estado +1 (ρ_+).

Se analisarmos o comportamento estatístico, vemos que o sistema com convergência periódica evolui da mesma maneira que o com convergência de período zero. Desta forma, podemos concluir que a distinção entre matrizes que convergem e as que não convergem não está relacionada às propriedades médias dos estados finais (oscilantes). Então, para entender essa não convergência, devemos investigar diretamente padrões espaciais locais no estado oscilante, o que será feito na próxima seção.

4.3 Estudo da não convergência através da distribuição espacial

Aqui analisamos a evolução da distribuição espacial dos estados de uma matriz não convergentes. Bem como buscamos entender o mecanismo pela qual essas matrizes não consigam atingir uma convergência de período zero. Para fazer isso, geramos matrizes com tamanho $N=30$, o que facilita a visualização das variações de padrões espaciais. Mas independente do tamanho, os resultados aqui mostrados podem ser reproduzidos para outros tamanhos de sistema, pois, como visto no capítulo anterior, a dinâmica do sistema não muda muito em relação ao tamanho, quando a inércia é zero.

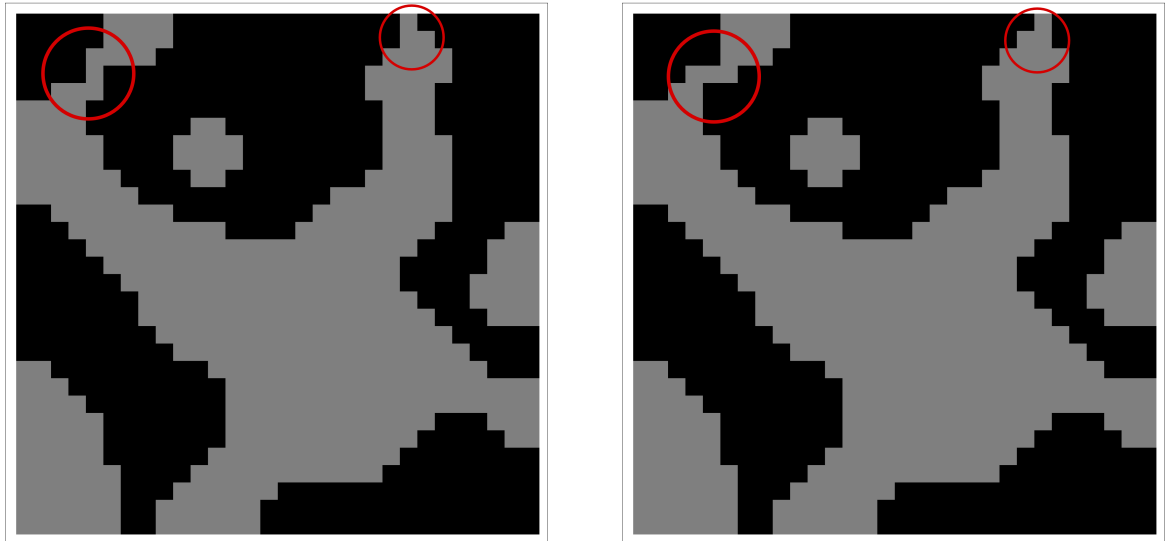


Figura 4.6: As duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1.

Na figura 4.6 temos as duas configurações estacionárias de um sistema que converge para dois estados estacionários que oscilam entre si (convergência de período 1). Essa convergência acontece apenas para inércia igual a 0. Para outros valores de inércia, a convergência é de período zero. Nessa figura notamos que temos duas estruturas locais, circuladas em vermelho, que ficam alternando entre si (comparar a estrutura na esquerda da figura 4.6a com a estrutura na esquerda da figura 4.6b e o mesmo para as estruturas na direita das duas figuras). Este exemplo particular é interessante pois o padrão oscilante visto a direita nas duas configurações estacionárias é bastante comum em diferentes AC que oscilam. Porém, em poucos exemplos observamos as estruturas da esquerda. Essa estrutura à esquerda é bastante interessante, pois vemos quatro células alternando periodicamente de estado. Além disso, ela pode aparecer em qualquer posição no interior do sistema, diferentemente da estrutura à direita. Inicialmente há 3 células -1 na horizontal, depois então, orientam-se na vertical. Para isso, as células da extremidade mudam para o estado +1 e as células acima e abaixo mudam para -1. Já na estrutura à direita, temos apenas duas células alternando de estado. Esta, sempre localizada nas bordas do sistema, terá a alternância dos estados +1 e -1 de apenas 2 células. Podemos perceber que essa estrutura oscilante é devido às condições de borda de nosso sistema. Caso as condições de borda fossem periódicas, essa estrutura não apareceria.

Na figura 4.7 encontramos outra configuração estacionária de período 1. A partir dela podemos ver a formação de outro padrão oscilante (círculo vermelho). É fácil notar que existe uma célula zero no centro desse padrão. Vemos que as células que ficam alternando de estado são as células -1 à direita e esquerda da célula zero e as células +1 acima e abaixo da célula zero. É interessante observar que esse padrão acontece apenas com a presença da célula zero no centro.

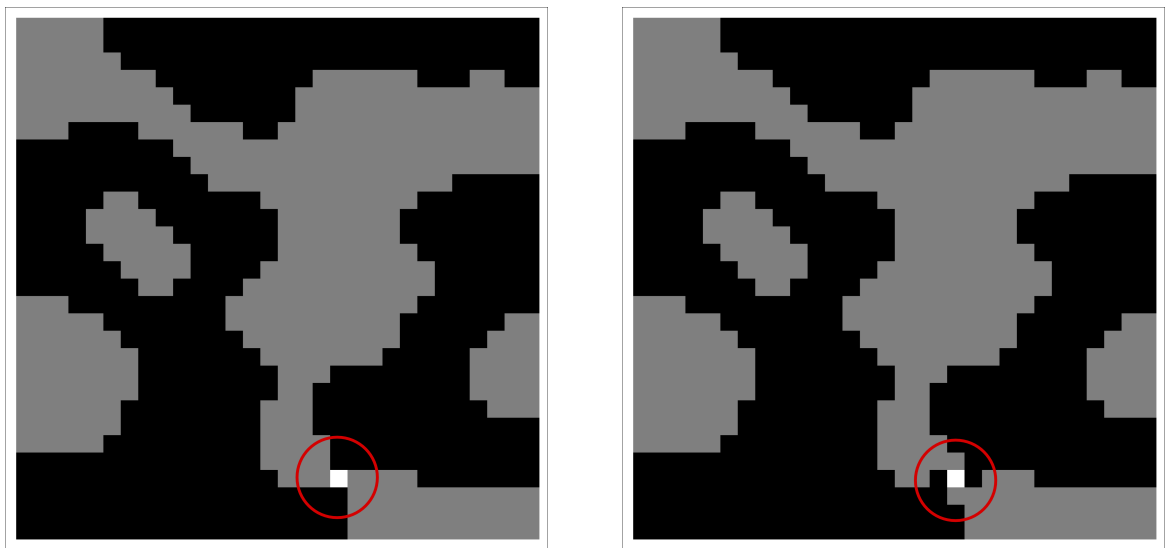


Figura 4.7: As duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1.

Qual o motivo desses padrões oscilantes aparecerem? Para entender isso, primeiramente analisamos o padrão mais simples, aquele que se localiza nas bordas (figura 4.6 - padrão da direita). Como as células que alternam os estados estão nas bordas, elas terão apenas 5 vizinhos. Se observarmos a vizinhança de qualquer uma dessas células, por exemplo, a célula no estado +1, vemos que a vizinhança tem 3 células -1 e duas +1. Com isso, a soma dos estados da vizinhança será -1, ou seja, a célula, que estado no estado +1, mudará para o estado -1. Quando as células alternam seus estados, o valor da soma da vizinhança também se altera, fazendo com que esse padrão se repita indefinidamente. O padrão da figura 4.7 tem a mesma explicação. Como já dito, esse padrão somente aparece se uma célula zero estiver na vizinhança, isso porque as células que estão alternando de estado (primeiros vizinhos da célula zero), terão sempre, na vizinhança, uma célula zero, três +1 e quatro -1, ou uma célula zero, quatro +1 e três -1. Quando a célula em questão estiver no estado +1, a soma da vizinhança será -1, e se a célula for -1, a soma da vizinhança será +1. Ocorrendo assim a alternância de estados vista. Nesses dois casos apresentados, na vizinhança da célula que alterna o estado, a quantidade de células em um estado (+1 ou -1) supera em uma unidade a quantidade de células em outro estado (-1 ou +1). Isso indica que esse padrão não pode aparecer quando a inércia for maior ou igual a 1, pois a soma da vizinhança será sempre igual à +1 ou -1. Agora, se observarmos o padrão à esquerda da figura 4.6, podemos ver que as células que estão alternando de estado tem uma vizinhança onde um estado (+1 ou -1) supera em 2 unidades o outro estado. Portanto, esse padrão aparece também quando a inércia é igual a 1, como pode ser observado na figura 4.8. Esta mostra o mesmo padrão encontrado na figura 4.6 (estrutura da esquerda), porém agora evoluído com inércia igual a 1 e tamanho do sistema igual a $N=50$. Na figura 4.9 temos o mesmo padrão, porém com os estados oscilantes invertidos.

4.4 Conclusões sobre as matrizes não convergentes

A partir dos resultados mostrados aqui, podemos dizer que as matrizes que não convergiram com período zero, se comportam da mesma maneira estatística das que convergiram com período zero. Porém, o que difere sistemas com convergências de períodos diferentes é o aparecimento de certos padrões oscilantes no tempo. Vimos também que o aparecimento de estados estacionários periódicos pode acontecer quando a inércia é igual a zero e um, porém, para inércias maiores isso não ocorre. Isso mostra, que outros valores de inércia não apresentarão convergência periódica como a que ocorre para $I=0$ e 1. Também notamos que não houve casos de convergência com período maior que 1.

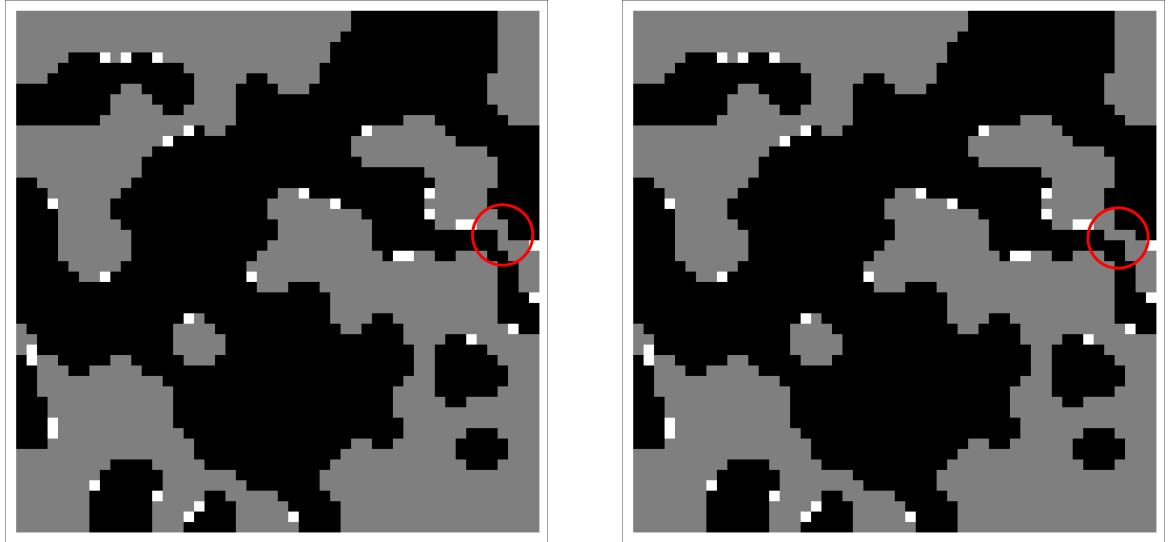


Figura 4.8: A duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1 e inércia igual a 1.

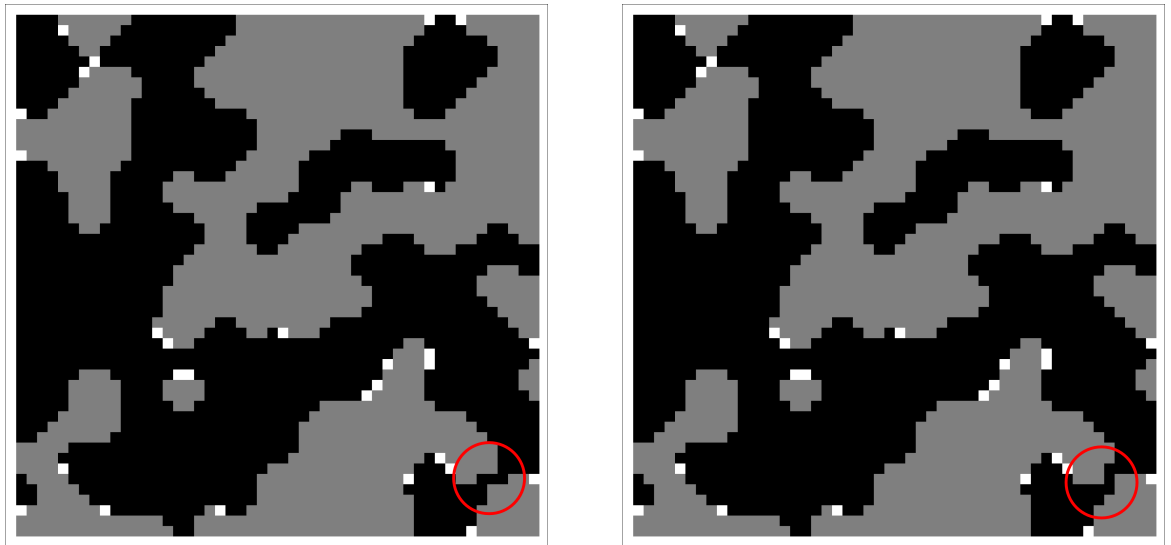


Figura 4.9: A duas configurações estacionárias de uma matriz que tem convergência com período 1 e inércia igual a 1.

Capítulo 5

Padrões na inércia

Neste capítulo estudaremos a evolução temporal de um sistema no qual a inércia pode variar de diferentes formas. Por exemplo, pode variar em função do tempo, da localização espacial da célula, do valor do estado, da densidade global de estados, etc. Obviamente que assumir uma inércia que varie no espaço e/ou no tempo gera uma dinâmica muito mais rica para o modelos e ,possivelmente, seja mais interessante do ponto de vista de aplicações. Salientamos que, apesar de neste trabalho não tentarmos modelar nenhum fenômeno específico onde a inércia possa variar, podemos citar alguns exemplos onde tal possibilidade seria importante. Temos os trabalhos de Weimar [68], que estuda sistemas com reações difusivas, usando ACs. Os análogos aos coeficientes de difusão dependem da região espacial em que o processo se dá. Nossa inércia, variando com a posição, poderia ser uma alternativa para tal tipo de modelagem. Também mencionamos o trabalho [69] onde se estuda a resistência a inovação, por parte de consumidores. Nesse estudo, a opinião de um indivíduo pode variar em função do poder de persuasão de outros agentes (para que um novo produto seja usado em substituição ao antigo). A resistência que um consumidor apresenta pode variar no tempo, pressionado por sua vizinhança, até tender a zero, e assim optar pela troca. Neste caso, uma descrição em termos do nosso AC deveria assumir uma inércia variando no tempo.

5.1 Inércia diferente para estados diferentes

Até o momento analisamos diversos resultados para um sistema com inércia igual para todas as células do sistema e constante no tempo. Porém, podemos modificar essa inércia e observar a mudança ocorrida na dinâmica do sistema. Inicialmente, analisamos a dinâmica evolutiva de um sistema em que a inércia não varia no tempo, entretanto, é diferente para cada estado. Mostraremos os dois casos em que obtivemos os resultados mais interessantes. No primeiro, mantivemos a inércia do estado zero igual a 2, pois a sobrevivência de células no estado zero em fronteiras entre os estados +1 e -1 é máxima. Para aumentar ou diminuir uma diferença entre as densidades dos estados +1 e -1 que possa surgir durante

a evolução dinâmica do sistema, tornamos a inércia maior para um estado e menor para o outro. Entretanto, se a inércia é muito alta, o sistema, na configuração estacionária, muda pouco em relação à configuração inicial. Mantemos então, a inércia igual à no máximo 2. Faremos a análise apenas de uma matriz, mostrada na figura 5.1. Como abordaremos o assunto através de apenas uma matriz, veremos o efeito que a mudança na inércia causa sobre a dinâmica espacial em nosso sistema. Além disso, faremos a comparação entre os modelos determinístico e probabilístico, a qual não havia sido feita até o momento. Essa matriz inicial tem tamanho $N=100$ e densidades iniciais $\rho_+ = 0,17$, $\rho_- = 0,16$ e $\rho_0 = 0,67$. Tornar a densidade inicial do estado zero deixa a dinâmica evolutiva mais rica, pois os estados $+1$ e -1 poderão se expandir espacialmente mais livremente, sem tanta competição territorial com outro estado não neutro. Podemos também fazer uma analogia para essa densidade inicial do estado zero maior com um fato que ocorre na natureza. Por exemplo, quando ocorre um desmatamento, um novo tipo de floresta poderá aparecer, sendo que, a floresta antiga (antes do desmatamento) terá apenas alguns focos de sua existência nessa nova área. Na verdade, mencionamos que uma área desmatada é susceptível ao aparecimento de várias outras espécies não autóctones. Portanto, uma região desmatada é equivalente às regiões com células no estado zero.

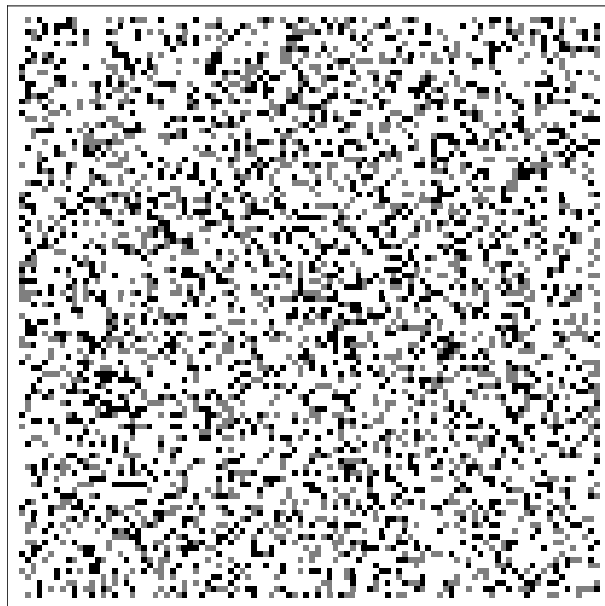


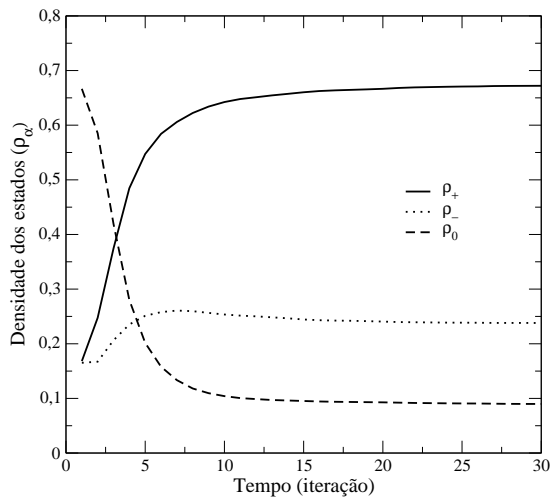
Figura 5.1: Distribuição espacial inicial dos estados $+1$ (preto), -1 (cinza) e 0 (branco).

Antes de iniciar a fase de análises de resultados, vamos relembrar as regras do modelo probabilístico. Nesse modelo, todas as regras determinísticas (regra dinâmica e condição inercial) são aplicadas, da mesma maneira que são aplicadas no modelo determinístico, porém, adicionamos um termo probabilístico. Esse termo prevê uma probabilidade não nula de qualquer célula, que contenha, em sua vizinhança, uma célula no estado zero, mude espontaneamente para o estado zero. Esse termo acaba mudando bastante a dinâmica

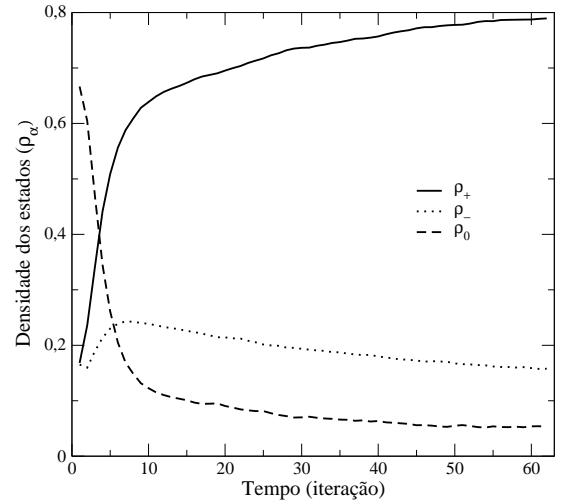
evolutiva do sistema. Sendo assim, podemos então fazer a comparação entre os dois modelos, determinístico e probabilístico.

Para primeira análise, as inércias dos estados são mantidas da seguinte forma: $I_0 = 2$ (inércia do estado zero), $I_+ = 1$ (inércia do estado +1), $I_- = 0$ (inércia do estado -1). Com esses valores, tendemos a tornar o estado +1 com maior densidade na configuração estacionária, ou seja, esse estado tende a dominar um espaço territorial maior ao longo do tempo, comparando com a inércia igual para todos os elementos. Podemos corroborar essa tendência a partir da figura 5.2, a qual mostra os gráficos das densidades dos estados +1, -1 e zero para os modelos determinístico e probabilístico com probabilidade $p_1 = 5\%$, 10% e 15% . Vemos, nessa figura, que aparece uma diferença bem grande entre as densidades dos estados +1 e -1, principalmente quando as densidades se estabilizam.

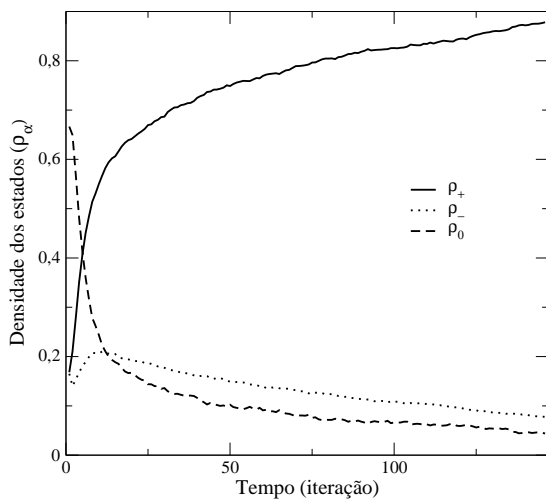
Também podemos notar que a densidade do estado zero não se anula com o tempo, pois sua inércia é igual a 2, fazendo com que vários elementos desse estado sobrevivam durante bastante tempo. É interessante ver que os dois modelos apresentam resultados parecidos. Porém, para o modelo probabilístico, à medida que aumentamos a probabilidade de células mudarem para o estado zero, notamos que a densidade do estado -1 e zero diminuem e a do estado +1 aumenta numa taxa maior. Isso acontece porque quando aumentamos p_1 , várias células tendem a mudar para o estado zero, porém, como a densidade do estado +1 é muito grande, esses zeros tendem a serem absorvidos pelo estado +1. Além disso, essa probabilidade torna o estado zero em um novo competidor na dinâmica do sistema. Como o estado +1 tem mais força na competição dinâmica (inércia maior), o estado -1 perderá mais elementos do que consegue conquistar no sistema, enquanto o estado zero tende a não perder muitos elementos, pois sua inércia é a maior entre todos os estados.



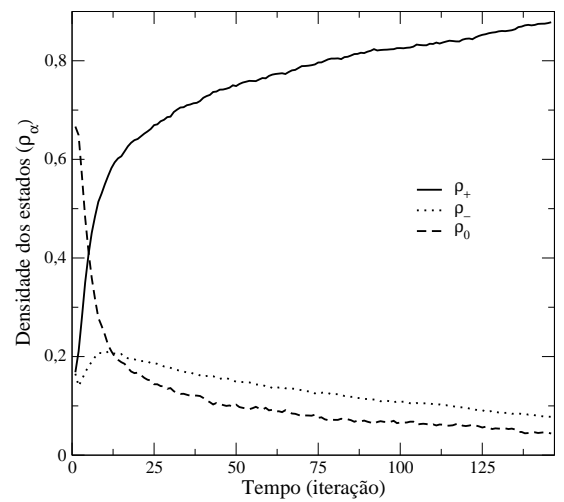
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)

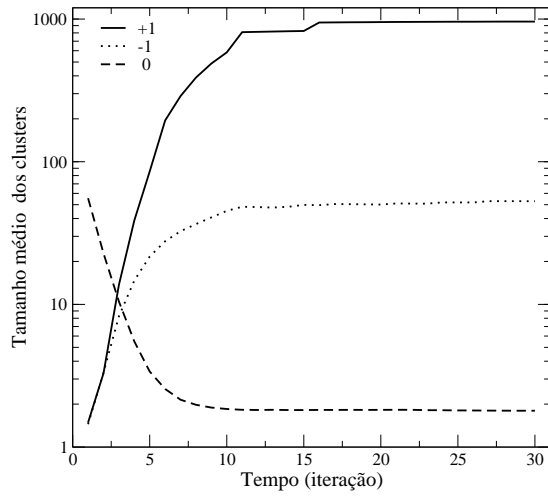


(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

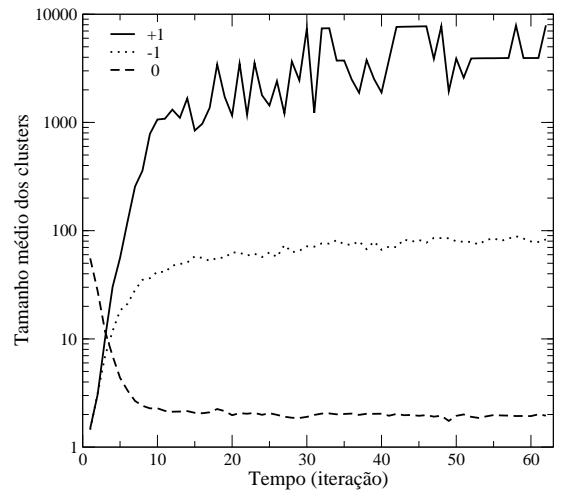


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

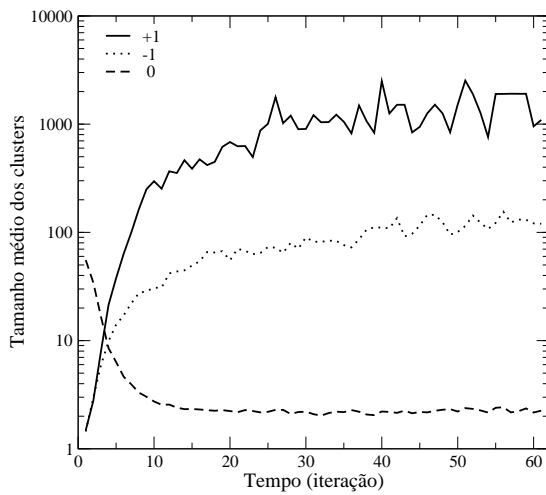
Figura 5.2: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$ para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.



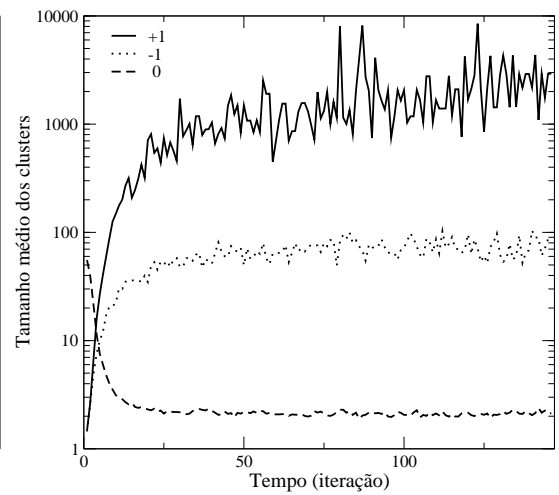
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.3: Tamanho médio dos clusters versus geração com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

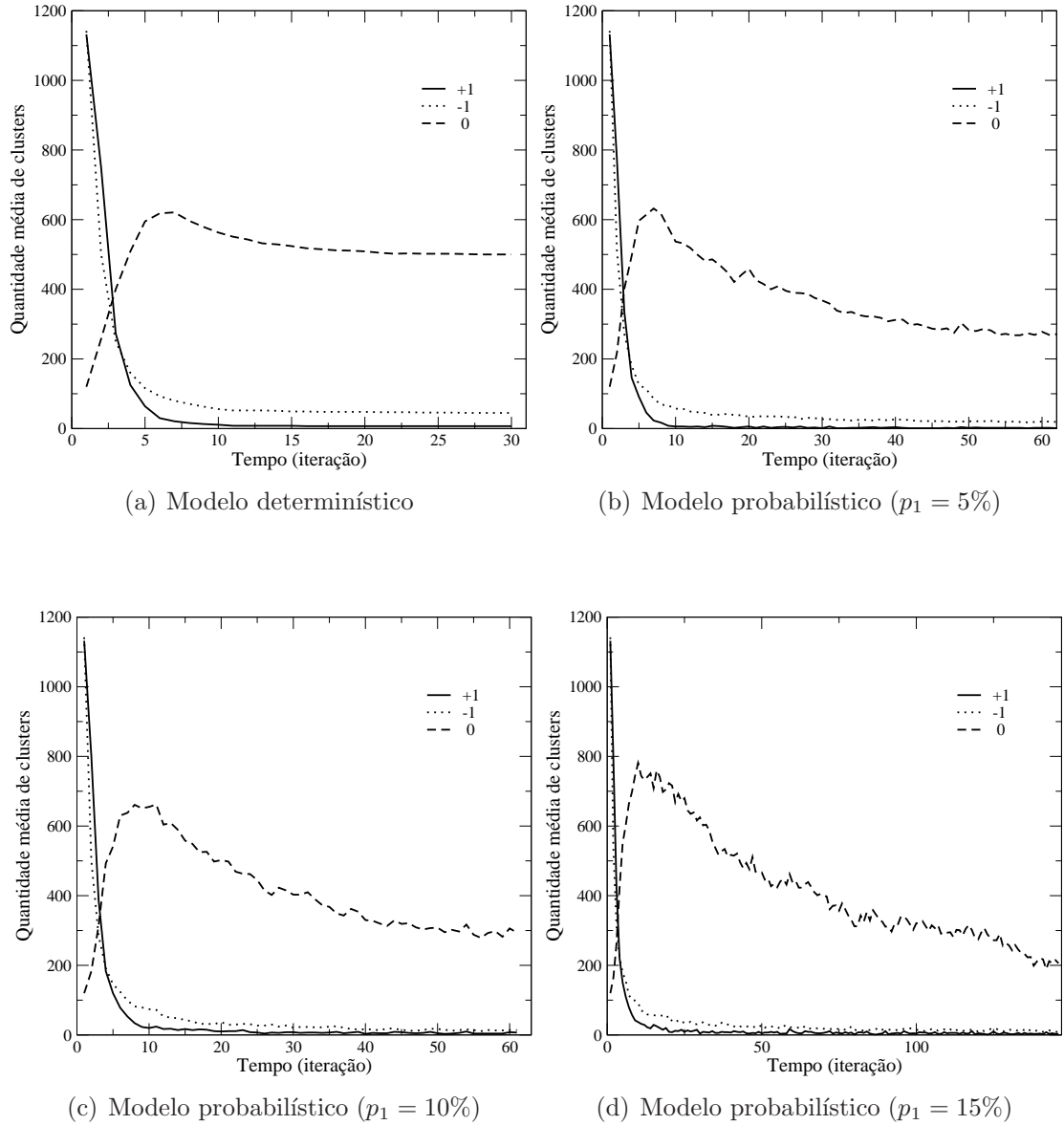


Figura 5.4: Quantidade de clusters versus geração com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Outro fator interessante que podemos analisar é a formação de clusters. Podemos ver, na figura 5.3, como o tamanho médio dos clusters evolui no tempo. Nela notamos que o tamanho médio dos clusters +1 aumenta na mesma proporção que a densidade, o que já era esperado, pois, ao se aumenta a densidade ρ_+ , o tamanho dos clusters deve aumentar também. Na figura 5.4 vemos a quantidade de clusters pelo tempo. A partir desta figura percebemos que a quantidade de clusters +1 diminui, e olhando juntamente com o aumento na densidade desse estado, concluímos que são formados um número menor clusters, porém, de tamanhos maiores. Os clusters do estado -1 seguem o mesmo comportamento, mas são menores e menos numerosos que os do estado +1. Já os clusters do estado zero se comportam de maneira diferente, eles diminuem rapidamente de tamanho,

aumentando em quantidade. Entretanto, eles inicialmente aumentam até um máximo e então diminuem lentamente em quantidade, formando um pico. Isso acontece porque os clusters diminuem em tamanho numa taxa maior que a taxa de crescimento da densidade desse estado. Assim, o número de clusters aumenta, chegando a um ponto em que o tamanho dos clusters se estabiliza e a densidade continua diminuindo, diminuindo assim a quantidade de clusters. Quando comparamos o modelo determinístico com o probabilístico vemos que o comportamento é o mesmo, porém, o modelo probabilístico tem mais flutuações, uma vez que há uma probabilidade das células mudarem para o estado zero espontaneamente. Além disso, vemos que há uma diferença na quantidade e no tamanho dos clusters quando variamos p_1 , mas isso será explicado adiante.

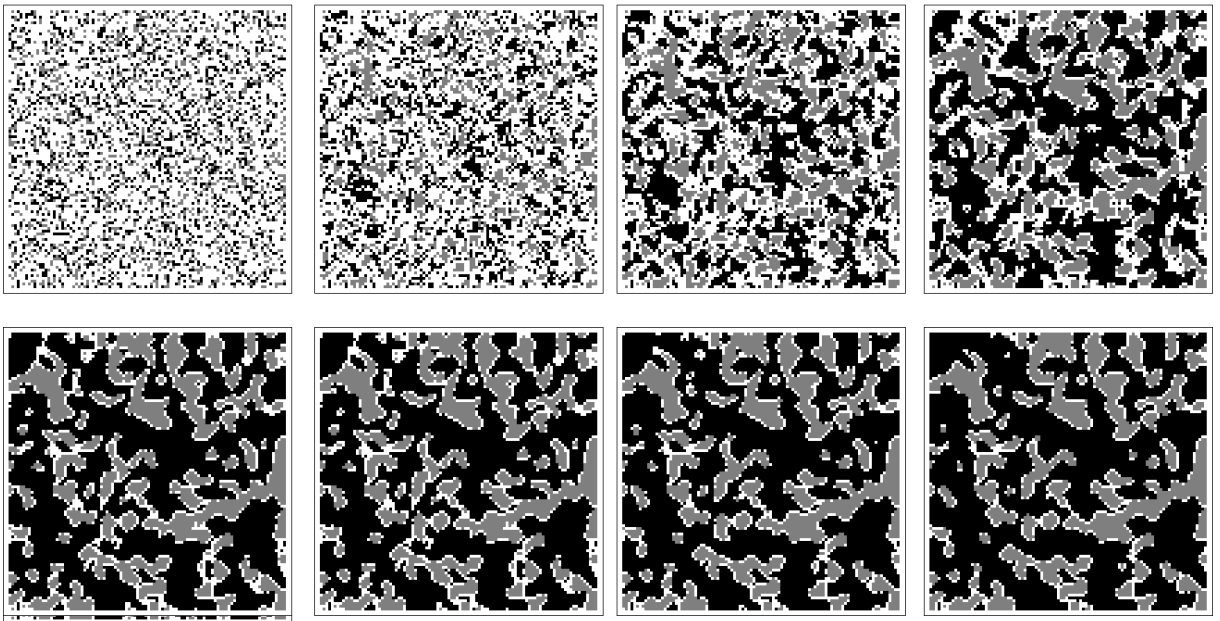


Figura 5.5: Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$.

As figuras 5.5 e 5.6 mostram as 8 primeiras gerações do sistema com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$, tanto para o modelo determinístico, quanto para o probabilístico. A partir delas podemos ver espacialmente todos os resultados discutidos anteriormente. Vemos que o estado +1 se expande mais rapidamente que o estado -1. Notamos também que temos muitos clusters dos estados +1 e -1 inicialmente, porém eles vão se fundindo formando poucos clusters, mas com tamanhos maiores. Também podemos ver que o estado zero está inicialmente distribuído por todo o sistema, onde as células estão quase que totalmente conectadas umas as outras, mas rapidamente esses clusters são quebrados, formando diversos outros menores. Inicialmente vemos que essa quebra de clusters acontece rapidamente, porém, a partir da 3ª e 4ª gerações, as células do estado zero começam a ser consumidas pelos outros estados, diminuindo assim seu número. Esse fato explica o pico que aparece na quantidade de clusters. Também vemos que o estado zero sobrevive apenas nas fronteiras entre os estados +1 e -1. Além de tudo isso, quando comparamos as

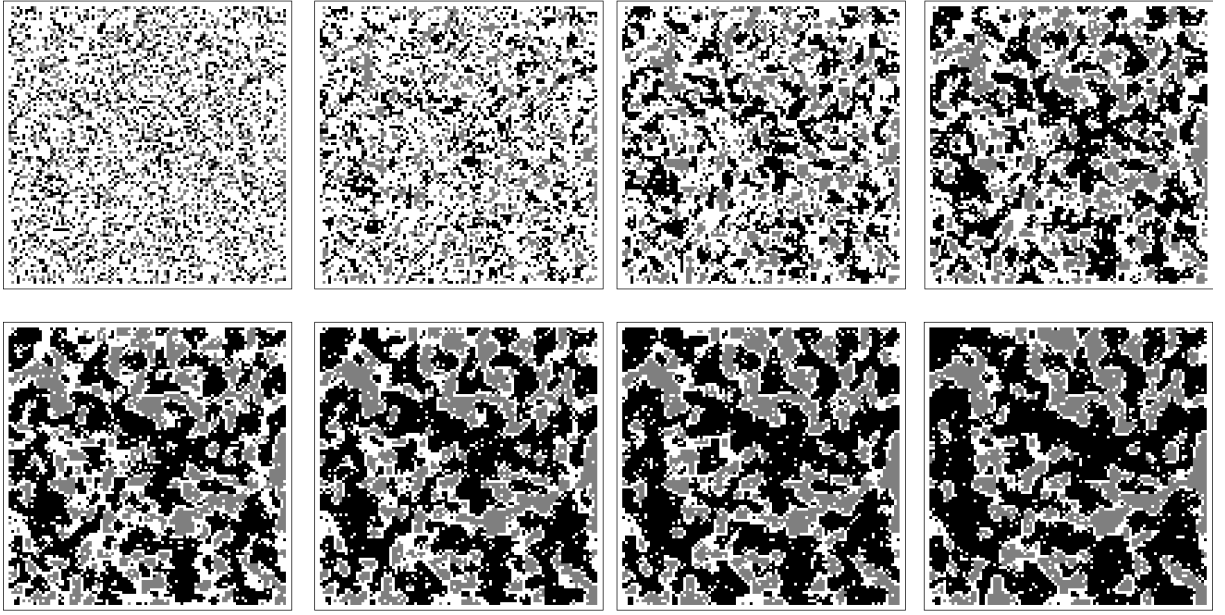


Figura 5.6: Primeiras 8 gerações para o modelo probabilístico (com $p_1 = 10\%$) com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$.

figuras dos modelos determinístico e probabilístico, vemos que eles se comportam inicialmente de forma parecida, entretanto, mais células do estado zero sobrevivem no modelo probabilístico. Essas células zero que sobrevivem se localizam tanto nas fronteiras entre clusters de diferentes estados, quanto dentro dos próprios clusters. Isso ocorre porque elas conseguem penetrar no cluster, porém, como a inércia dos estados $+1$ e -1 (que formam os clusters) é baixa, essas células zero que tentam penetrar nos cluster não conseguem sobreviver por muito tempo nessas situações.

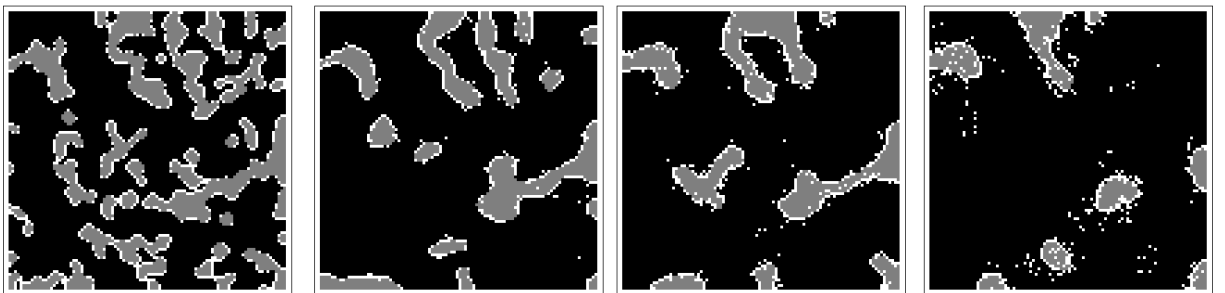
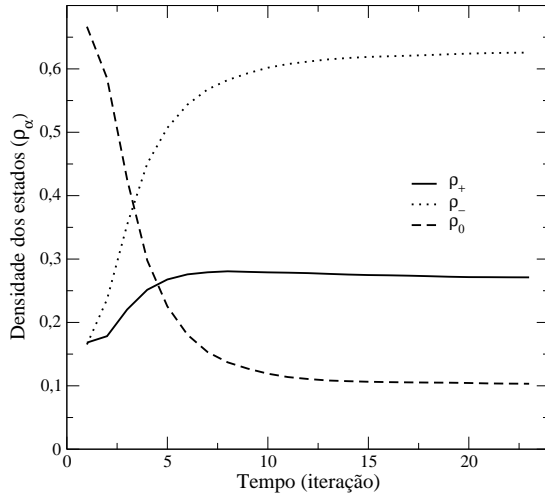


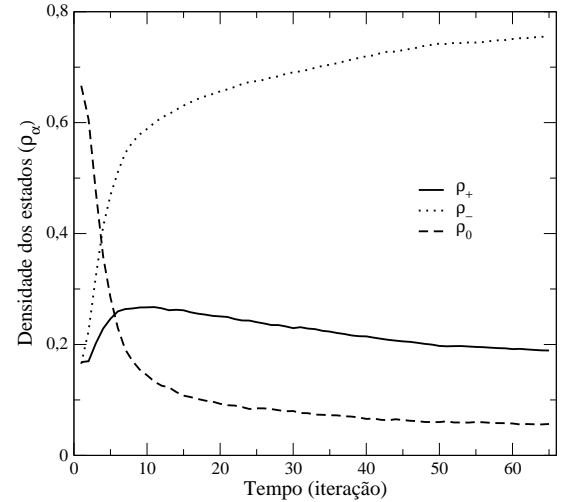
Figura 5.7: Configurações estacionárias para os modelos determinístico e probabilístico (com $p_1 = 5\%$, 10% e 15%) com $I_+ = 1$, $I_- = 0$ e $I_0 = 2$.

Na figura 5.7 vemos as configurações estacionárias dos dois modelos utilizados. Notamos que eles têm configurações estacionárias distintas, o que se é de esperar, pois como a inércia do estado zero é igual a dois, maximizamos a sobrevivência de zeros nas fronteiras entre os estados. Com isso, no modelo probabilístico, as células próximas às fronteiras podem espontaneamente virar uma célula zero, fazendo com que alguns clusters desapareçam. Nesse caso são principalmente os clusters do estado -1 que desaparecem, pois este

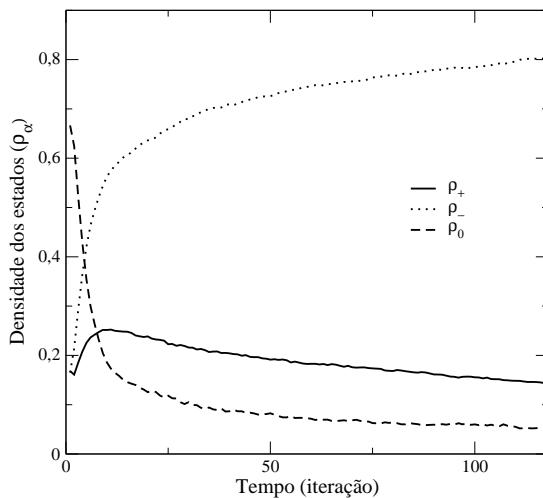
é o estado que tem menor inércia, ou seja, tem a menor força na competição dinâmica e acaba perdendo “território” para o estado +1.



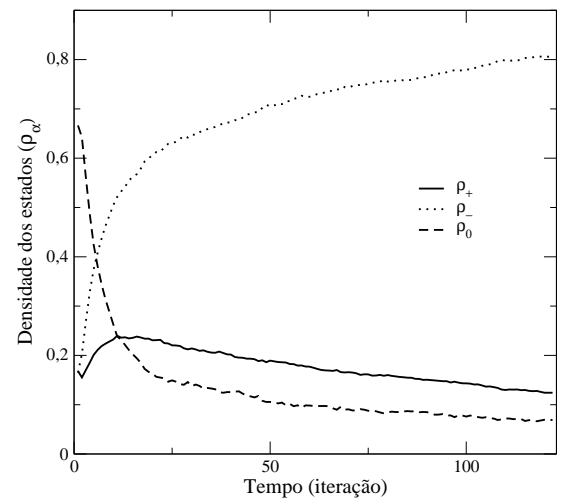
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

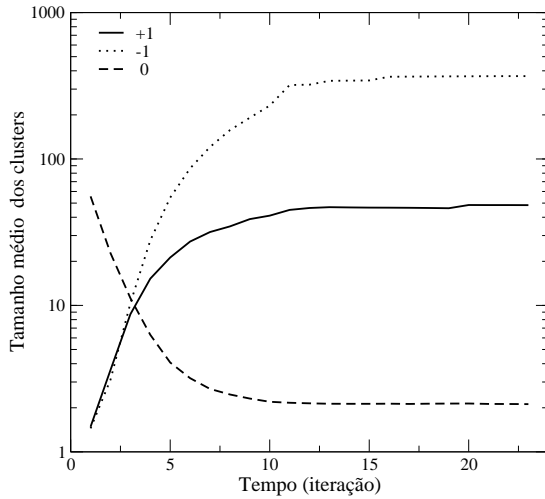


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

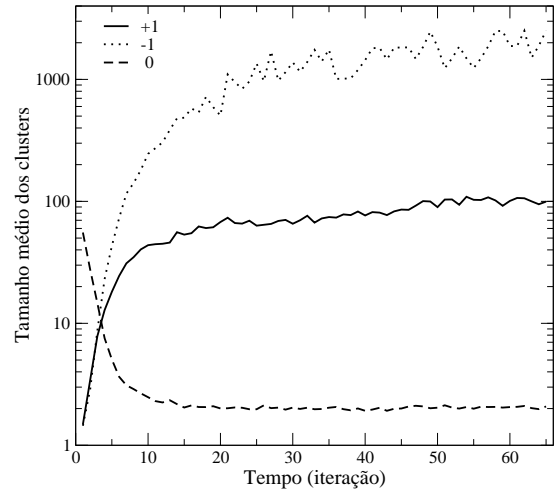
Figura 5.8: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Como já utilizamos a inércia para aumentar a predominância do estado +1, tentaremos então aumentar a predominância do estado -1, fazendo com que este possua a maior inércia. A inércia fica da seguinte forma: $I_0 = 2$ (inércia do estado zero), $I_+ = 0$ (inércia do estado +1), $I_- = 1$ (inércia do estado -1). Na figura 5.8 podemos ver como a densidade de elementos em cada estado varia no tempo. A partir dela podemos ver que o estado -1 predomina no sistema praticamente desde o início da evolução, pois os dois estados

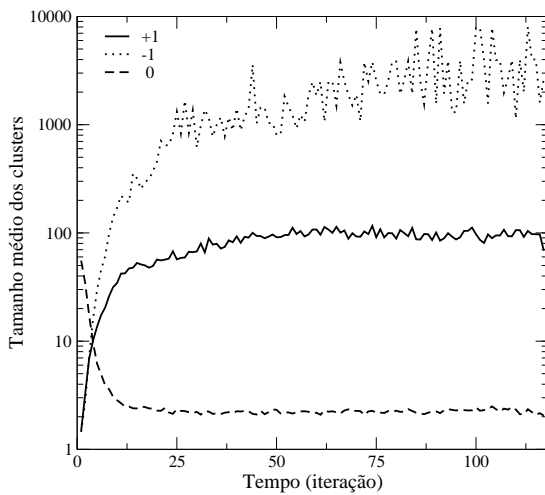
tem densidades muito parecidas. Além disso, a forma da predominância do estado -1 é praticamente idêntica à predominância do estado +1 no caso anterior. Portanto podemos ver que ao alternar o valor da inércia, deixando-a maior para um certo estado (+1 ou -1), fazemos com que esse estado predomine. Devemos lembrar que os resultados aqui mostrados são válidos para as densidades escolhidas. Entretanto, outras configurações iniciais apresentam resultados muito semelhantes.



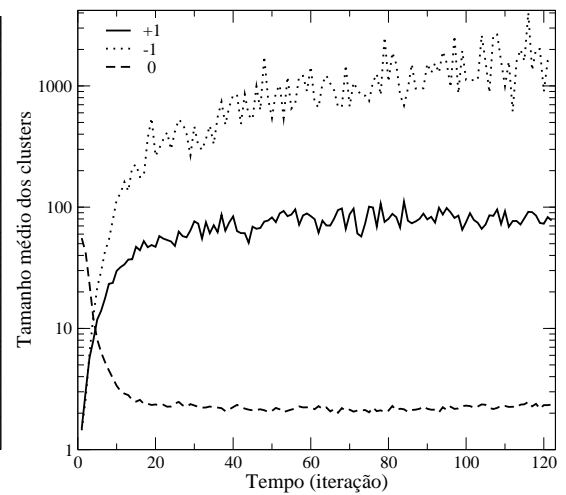
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

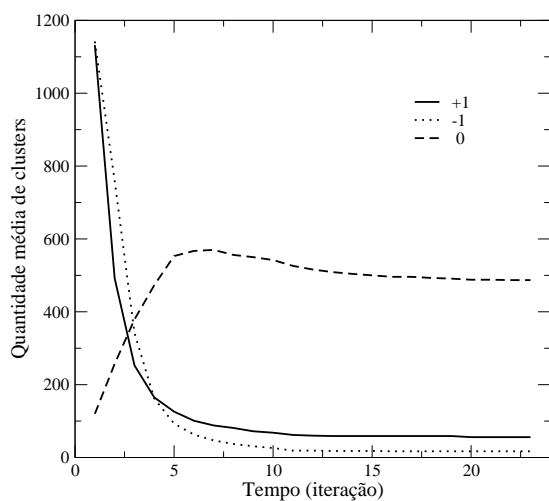


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

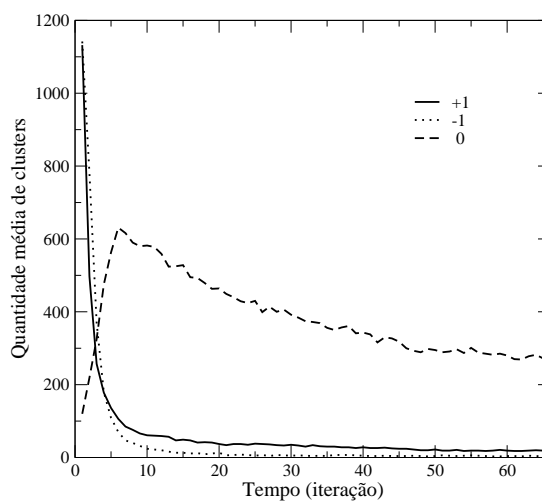
Figura 5.9: Tamanho médio dos clusters versus geração com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Já nas figuras 5.9 e 5.10 encontramos o tamanho médio dos clusters e a quantidade de clusters de cada estado existentes no sistema, em função do tempo, respectivamente.

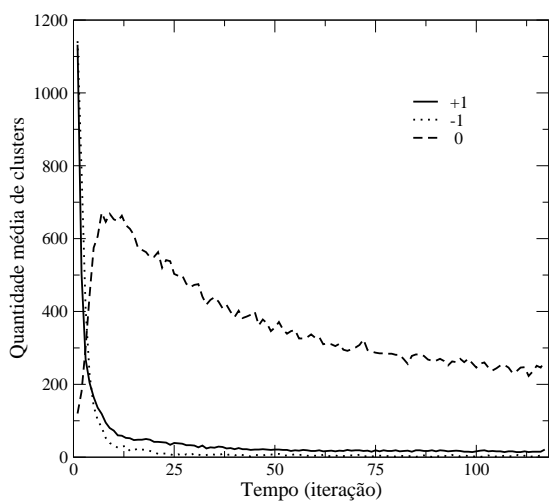
Podemos ver que o tamanho médio dos clusters -1 aumenta com o tempo, enquanto a quantidade destes diminui, sendo que temos menos clusters -1 , porém maiores, quando comparados com os clusters $+1$. Isso acontece pois a inércia do estado -1 é maior. É interessante ver que nos instantes iniciais, a quantidade de clusters de células no estado zero aumenta rapidamente, atingindo um máximo e então começa a decair. O mesmo fenômeno já aconteceu no exemplo anterior e o motivo para que ele ocorra é o mesmo. Inicialmente os clusters diminuem em tamanho numa taxa menor que o aumento de sua densidade. Entretanto, em um momento, o tamanho dos clusters do estado zero se estabiliza, mas sua densidade continua a diminuir, diminuindo assim, a quantidade de clusters. Comparando os modelos determinístico e probabilístico, vemos que, qualitativamente, o comportamento das curvas é bem parecido, tendo a predominância do estado -1 . Contudo, no modelo probabilístico, o estado $+1$ continua a diminuir em densidade, pois, as células zero que se encontram nas fronteiras entre os clusters $+1$ e -1 conseguem penetrar nos clusters $+1$ com maior eficiência, destruindo esses clusters.



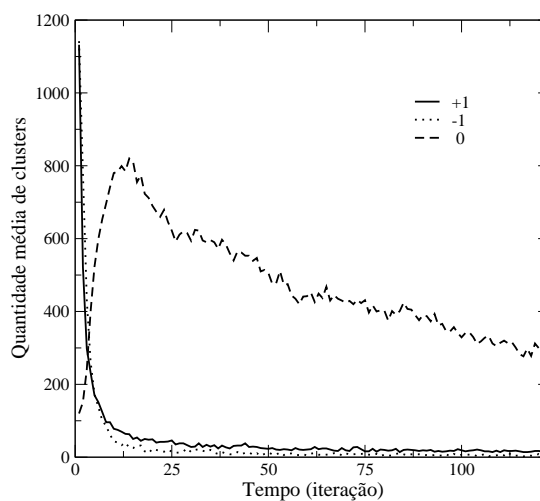
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.10: Quantidade de clusters versus geração com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

As figuras 5.11 e 5.12 mostram as 8 primeiras gerações do sistema com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$, para os modelos determinístico e probabilístico, respectivamente. A partir delas podemos notar a predominância do estado -1. Vemos que o estado -1 se expande com maior eficiência que o estado +1, pois a inércia do estado +1 é menor que do estado -1. Também vemos aqui a fusão dos pequenos clusters -1 para formar clusters maiores. Os resultados aqui observados são os mesmos comparado ao padrão de inércia anterior, porém estes estão invertidos para os estados +1 e -1. É interessante notar que realmente o estado zero tem maior predominância nas fronteiras formadas pelos outros estados.

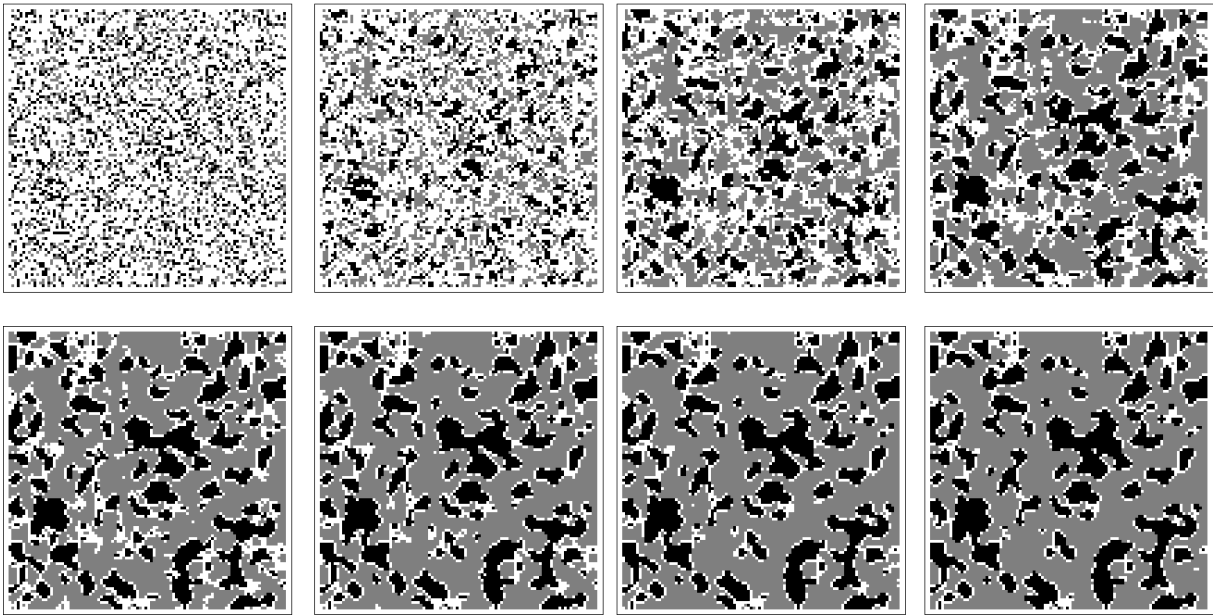


Figura 5.11: Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$.

Na figura 5.13 vemos as configurações estacionárias para os modelos determinístico e probabilístico. Vemos que o estado -1 domina praticamente todo o sistema, enquanto o estado +1 forma alguns clusters e o estado zero praticamente sobrevive somente nas fronteiras entre os outros estados. Se compararmos essa figura com a 5.7, que mostra as configurações estacionárias do exemplo anterior, vemos que, qualitativamente, as configurações estacionárias são bem parecidas, porém, com a predominância dos estados +1 e -1 invertida.

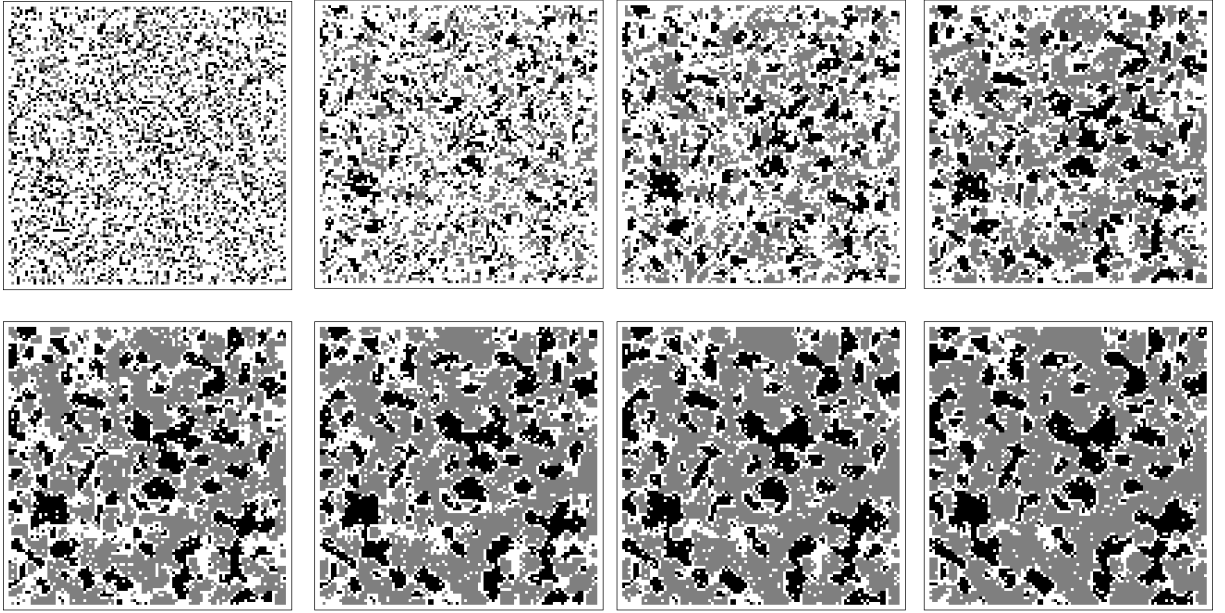


Figura 5.12: Primeiras 8 gerações para o modelo probabilístico (com $p_1 = 10\%$) com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$.

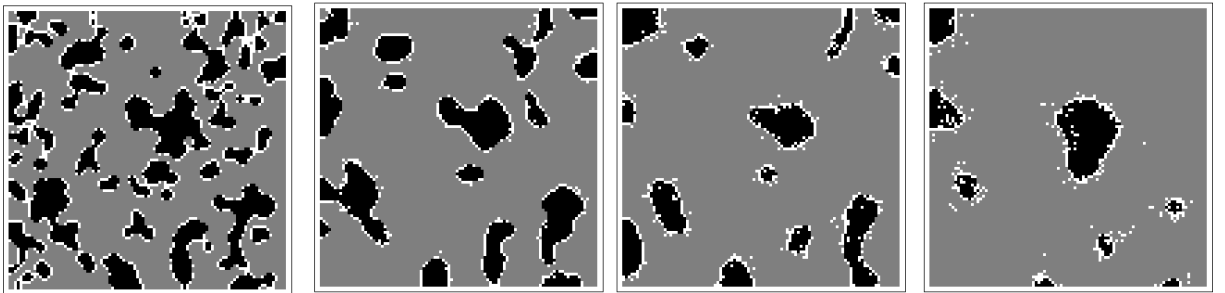
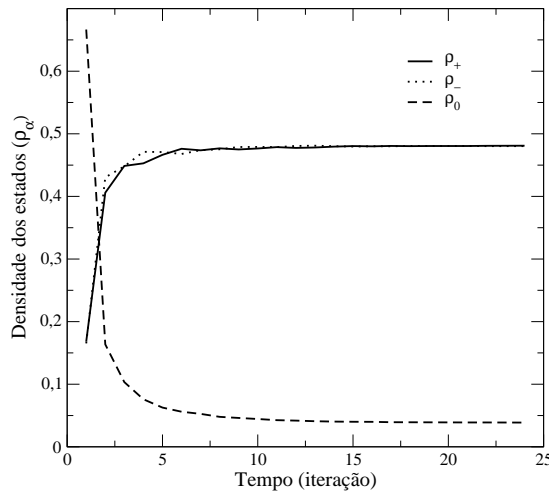


Figura 5.13: Configurações estacionárias para os modelos determinístico e probabilístico (com $p_1 = 5\%$, 10% e 15%) com $I_+ = 0$, $I_- = 1$ e $I_0 = 2$.

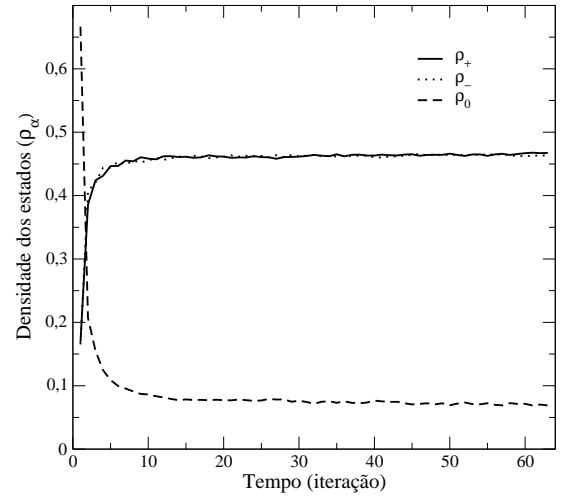
5.2 Inércia variando em função da densidade

Considerando os dois últimos exemplos da seção anterior, ficou claro (como seria esperado) que variando a inércia de forma apropriada, podemos favorecer uma certa população final. Tendo este resultado em mente, podemos considerar uma situação um pouco mais complexa e determinar se a variação da inércia no tempo pode inverter uma certa tendência: um estado predominante começar a diminuir. Para analisar esta possibilidade vamos supor então que a inércia dependente da densidade dos estados. O primeiro padrão foi criado de forma que a inércia seja menor para o estado que tenha maior densidade, ou seja, quanto maior a densidade, menor será a inércia desse estado. A inércia fica, então, distribuída assim: $I=2$ para o estado com menor densidade, $I=0$ para o estado com maior densidade e $I=1$ para o estado com densidade intermediária entre estes. Inicialmente temos então que a inércia dos estados são: $I_- = 2, I_+ = 1, I_0 = 0$. Durante a evolução, a densidade dos estados $+1$ e -1 irá aumentar, fazendo com que a inércia do estado zero

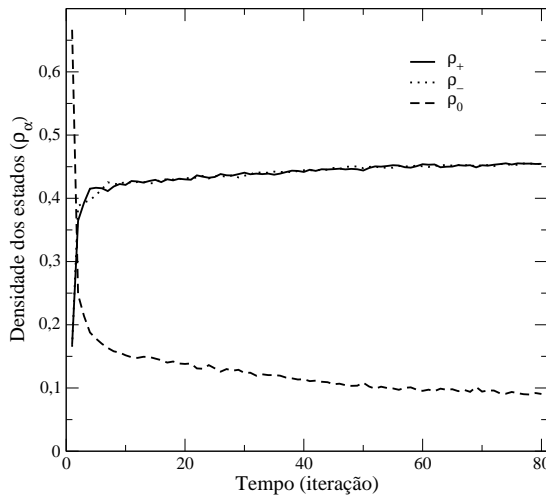
aumente e a dos estados +1 e -1 diminua.



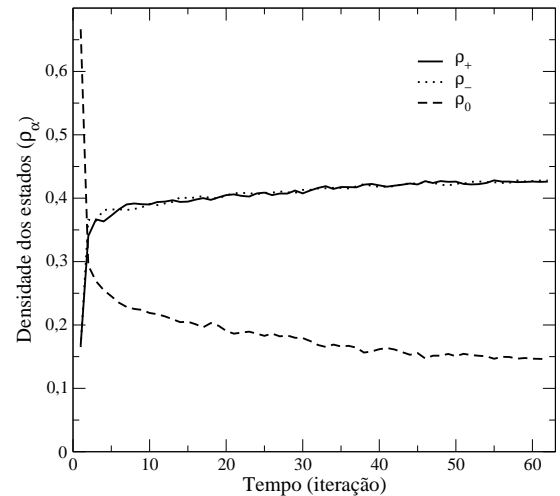
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.14: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com inércia inversamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Na figura 5.14 encontramos as densidades dos estados +1, -1 e zero versus o tempo, com a inércia maior para o estado de menor densidade. Esse padrão de inércia apresenta um comportamento relativamente parecido com inércia igual para todos os elementos (capítulo 2). A maior diferença encontrada é que os estados +1 e -1 ficam alternando a predominância sobre o sistema. Isso acontece porque eles têm densidades iniciais muito próximas e acabam se expandindo de forma parecida. Além disso, como a inércia é menor para o estado com maior densidade, esses estados tendem a perder na competição

dinâmica, diminuindo sua densidade. Mas quando sua densidade deixa de ser a maior, este tem uma inércia maior, ganhando força na competição dinâmica, aumentando então sua densidade. É esse fato que faz com que as densidades dos estados +1 e -1 fiquem alternando depois de um certo tempo. Comparando os modelo determinístico e probabilístico, vemos que eles têm comportamentos semelhantes, ocorrendo maiores diferenças na densidade do estado zero, que não diminui tão rapidamente quando aumentamos p_1 . Outro fato interessante é que o estado zero inicialmente tem maior densidade, portanto inércia igual a zero. Com isso sua densidade cai rapidamente, fazendo com que sua inércia fique igual a dois, maximizando a sobrevivência de estados zero nas fronteiras.

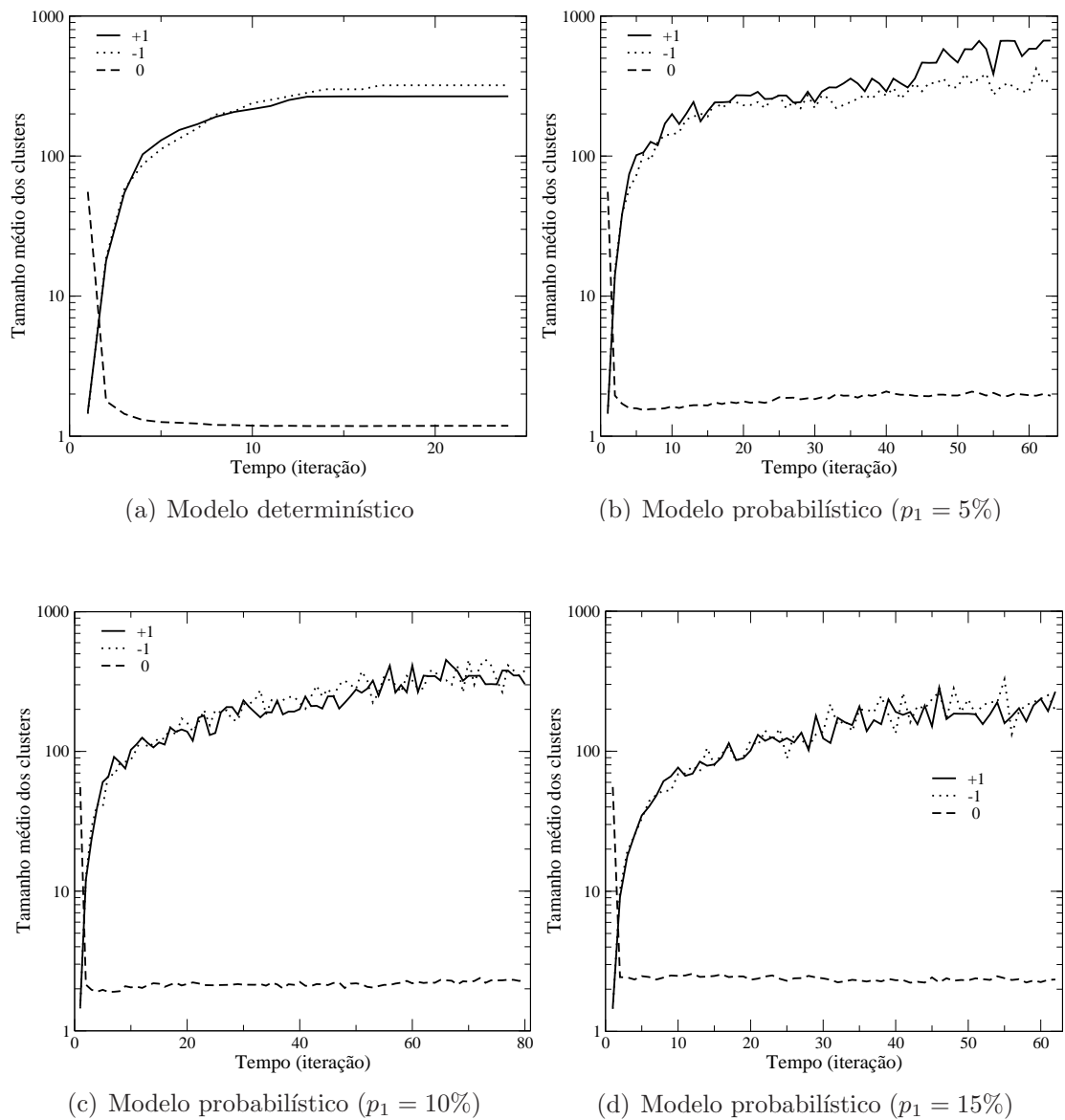
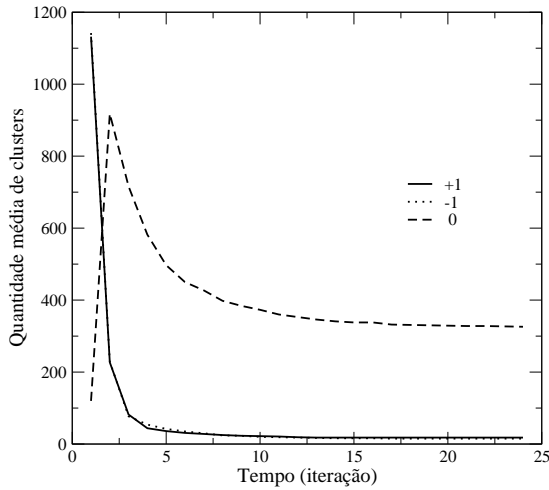
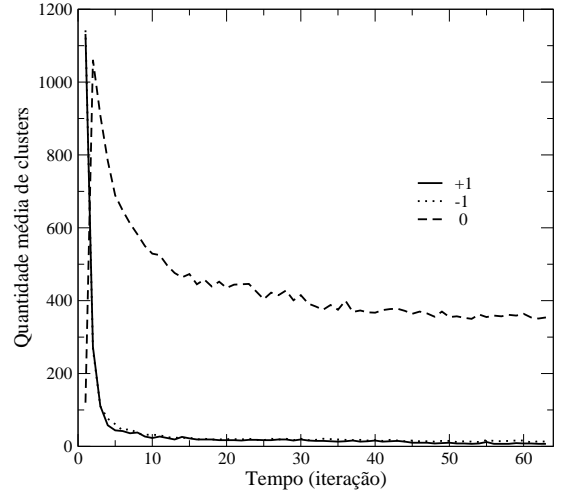


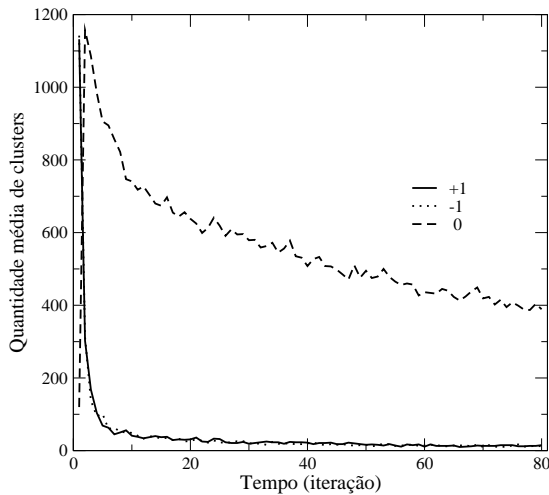
Figura 5.15: Tamanho médio dos clusters versus geração com inércia inversamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.



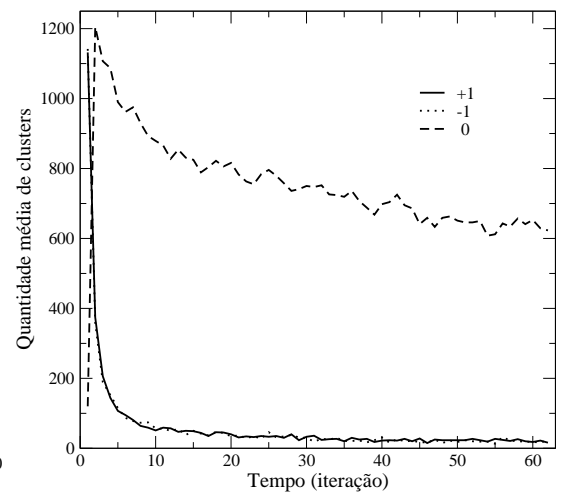
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.16: Quantidade de clusters versus geração com inércia inversamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Nas figuras 5.15 e 5.16 encontramos o tamanho médio de cluster e a quantidade deles em função do tempo, respectivamente. O comportamento desses parâmetros também é semelhante à inércia baixa e igual para todos os estados. A principal diferença entre eles são as curvas, que são mais suaves para inércia variável no tempo. Por exemplo, o tamanho médio dos clusters cresce inicialmente de forma abrupta, porém, após isso, ele varia muito pouco, para todos os estados. Outra diferença é o pico na quantidade de clusters do estado zero, que se desloca para a esquerda, ou seja, esse pico aparece antes, comparando com o caso de inércia baixa e igual para todos os estados. No mais, vemos que tanto a quantidade, quanto o tamanho dos clusters +1 e -1 ficam se oscilando entre si. Isso acontece porque a inércia é maior para o estado com menor densidade, fazendo

com que o estado predominante seja mais “fraco” perante o outro estado.

Na figura 5.17 vemos as 4 primeiras gerações do sistema para esse padrão de inércia no modelo determinístico. A partir dela podemos ver que a densidade do estado zero diminui drasticamente da primeira para a segunda geração. A partir da terceira geração, o sistema não muda muito, oscilando apenas as densidades dos estados +1 e -1, que ora é maior para um estado, ora para outro. Também podemos ver que inicialmente temos poucos clusters zero, e de grande tamanho (quase todos os elementos zero estão interligados entre si), contudo, já na primeira iteração, esses clusters são destruídos e divididos em muitos clusters pequenos. Durante a evolução temporal, esses clusters pequenos vão sendo consumidos pelos estados +1 e -1, que sempre estão disputando território. Para finalizar, vemos que os elementos zero sobrevivem apenas nas fronteiras entre os outros estados, isso porque sua inércia final é igual a 2, valor que maximiza a sobrevivência desse estado nas fronteiras.

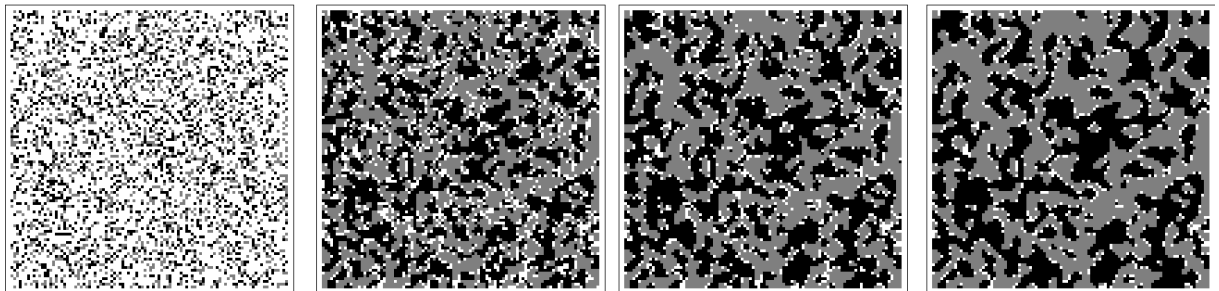
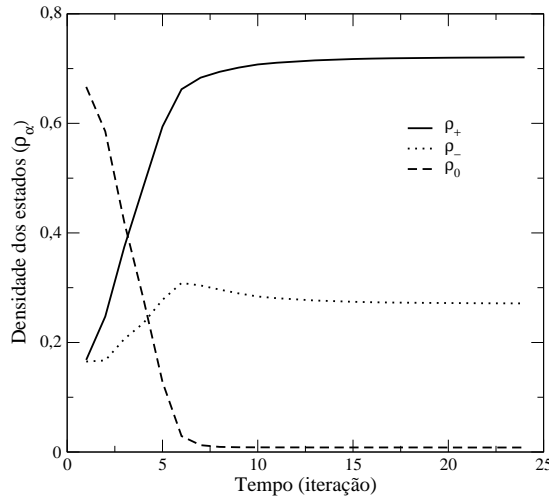


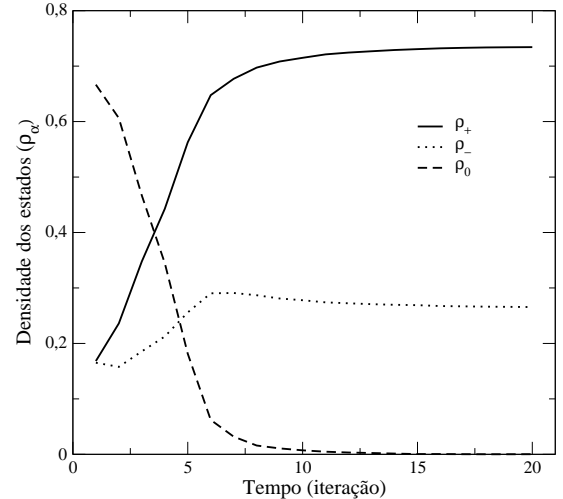
Figura 5.17: Primeiras 4 gerações para o modelo determinístico com inércia inversamente proporcional à densidade do estado.

Um segundo padrão temporal na inércia que iremos considerar aqui é o caso onde a inércia é maior para o estado de maior densidade. Obviamente que a dinâmica resultante é simples de se prever. O sistema evoluirá para uma situação onde há uma grande predominância do estado inicialmente mais populoso. Apesar disto, este caso não deixa de ser interessante, pois fica a pergunta do quanto pode restar das populações minoritárias. Seguiremos a mesma distribuição inicial de valores de inércia do padrão anterior, mas agora, invertida, ou seja, o estado com maior densidade terá $I = 2$, com menor densidade terá $I = 0$ e com densidade intermediária terá $I = 1$. Portanto inicialmente teremos $I_0 = 2, I_+ = 1, I_- = 0$. Com um padrão de inércia dessa forma esperamos que quase não houvesse elementos zero na configuração estacionária.

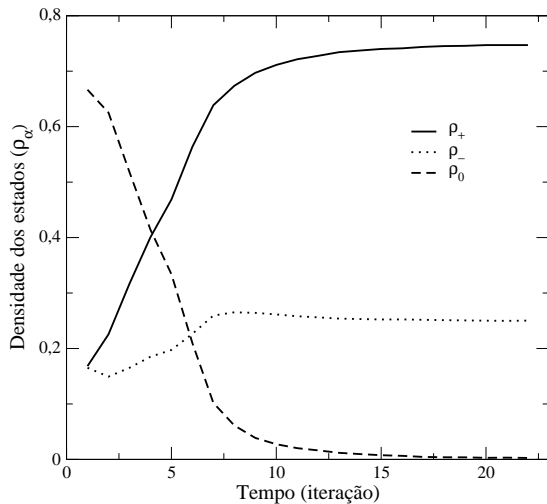
Na figura 5.18 podemos ver a densidade dos estados em função do tempo. Concluimos que a densidade do estado zero diminui mais lentamente, pois sua inércia inicialmente é igual a 2 e uma maior inércia representa uma maior resistência à mudança. A densidade do estado +1 cresce com o tempo até atingir um valor e se estabilizar neste. Inicialmente a inércia do estado +1 é igual a 1 e quando ela fica maior que a densidade do estado zero, sua inércia fica igual a 2, portanto, a densidade do estado +1 tende a aumentar até atingir um valor estacionário. Já para o estado -1, vemos que, inicialmente, sua densidade



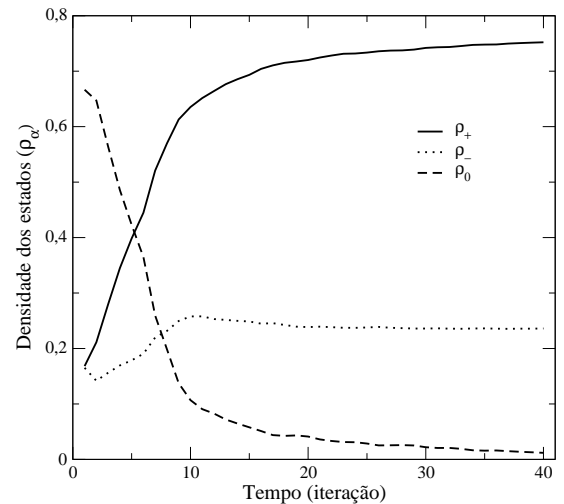
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.18: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com inércia diretamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

permanece constante, para então começar a aumentar. Entretanto, a densidade aumenta somente até um certo ponto e então diminui, atingindo um valor estacionário. Esse fato ocorre porque, inicialmente, o estado -1 tem inércia zero, portanto ele tem menos força na competição dinâmica, expandindo-se com menor velocidade em relação ao estado +1. Na quarta iteração, a densidade do estado -1 se torna maior que a do estado zero, portanto, suas inércias trocam de valor. Isso faz com que o estado -1 consiga se expandir mais rapidamente sobre o estado zero. Porém, na quinta iteração, a densidade do estado zero é muito pequena, deixando o estado -1 sem ter para onde expandir. Além disso, sua inércia é menor que a do estado +1, portanto, o estado -1 perderá território para o estado +1. Também podemos notar pouca diferença entre os modelos determinístico e probabilístico.

Apenas que, ao invés de inicialmente o estado -1 permanecer com densidade constante, esta diminui um pouco. Vemos também que a densidade do estado -1 não aumenta tanto para depois diminuir se aumentarmos p_1 , pois o estado zero acaba disputando alguns territórios no sistema com o estado -1.

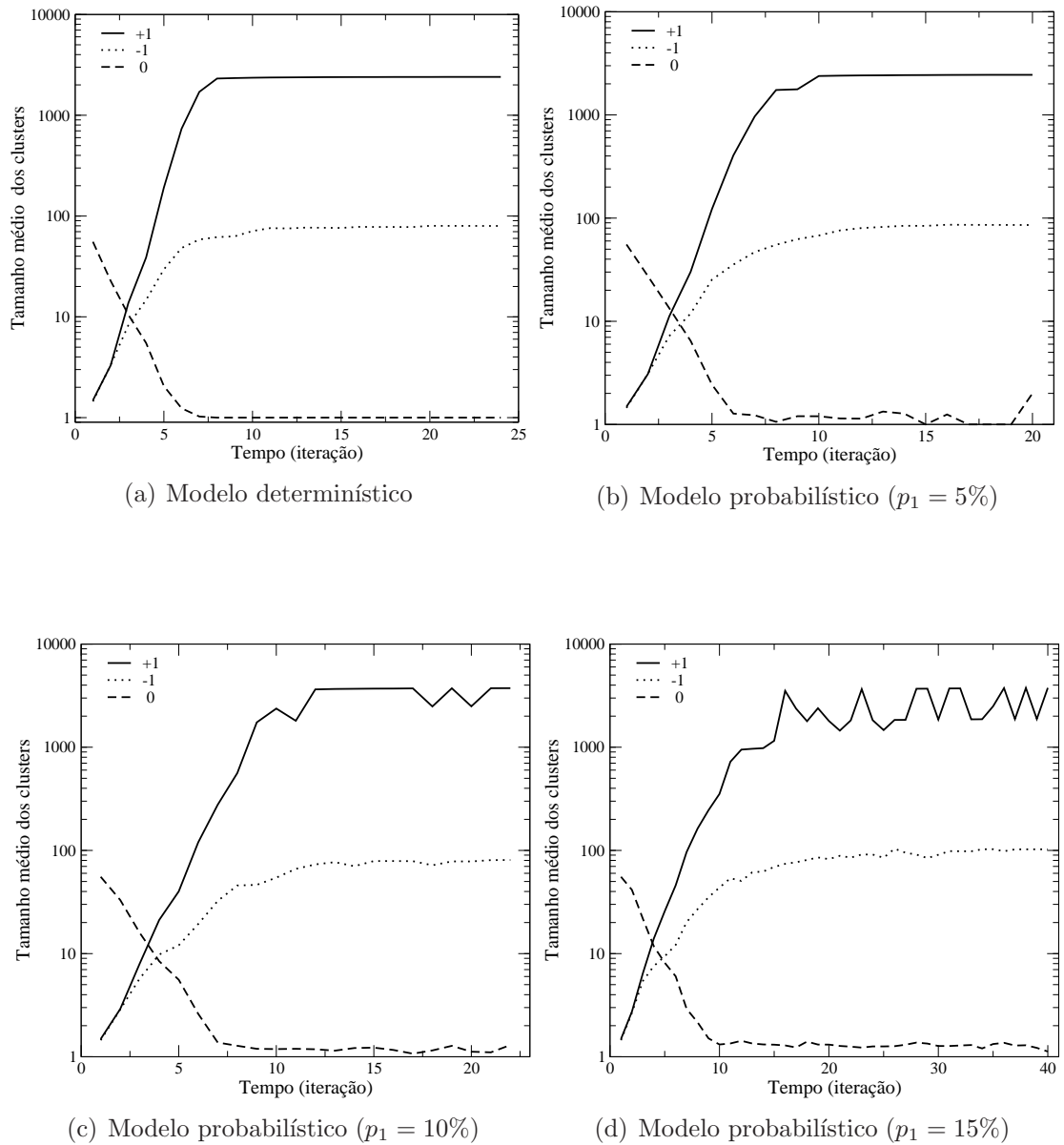


Figura 5.19: Tamanho médio dos clusters versus geração com inércia diretamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Nas figuras 5.19 e 5.20 vemos o tamanho médio e a quantidade de clusters em função do tempo, respectivamente. Podemos perceber que, após o sistema se estabilizar, os clusters do estado +1 são maiores que os clusters do estado -1, o que já esperávamos, uma vez que uma inércia maior torna esse estado mais “forte” na competição dinâmica. Também percebemos que há mais clusters do estado -1 do que do estado +1. Como os clusters +1

são maiores, eles estão mais conectados entre si, formando um menor número de clusters e separando os clusters -1. Aquele pico na quantidade de clusters do estado zero também aparece aqui, só que de forma mais acentuada. Enquanto a quantidade de clusters cresce, a densidade desse estado diminui. Entretanto, quando a densidade diminui, a inércia desse estado acaba diminuindo, acarretando no rápido decréscimo na quantidade de clusters desse estado.

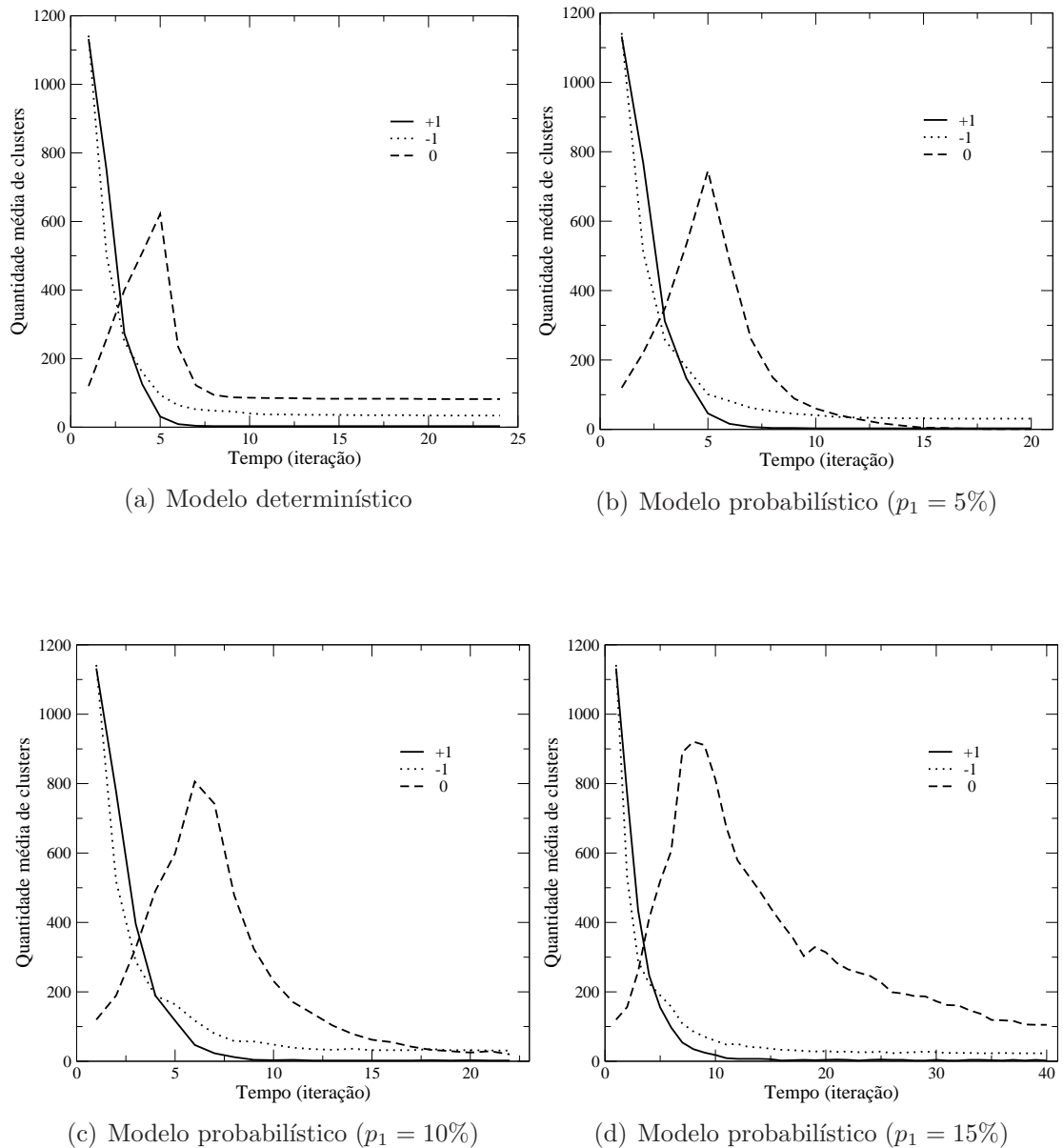


Figura 5.20: Quantidade de clusters versus geração com inércia diretamente proporcional à densidade do estado, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Na figura 5.21 podemos ver as 8 primeiras gerações para esse padrão de inércia no modelo determinístico. Notamos que nas duas primeiras iterações, o estado zero é predominante, portanto com $I_0 = 2$. Porém é na terceira iteração que o estado +1 se torna

predominante, mudando a inércia do estado zero para $I_0 = 1$ e com isso, o estado zero diminui ainda mais sua densidade. Na quarta iteração, a densidade do estado zero é menor que a do estado -1, com isso, a inércia do estado zero vai para $I_0 = 0$ e o estado -1 fica com $I_- = 1$, conseguindo então mudar algumas células para seu estado sem perder tanto território para o estado +1. Contudo, a partir da quinta iteração, as células zeros já estão em pequeno número, fazendo com que o estado -1 não consiga expandir sobre o território dos zeros e conseqüentemente tendo que competir por território apenas com o estado +1, o qual tem inércia maior. Portanto, nessa competição por território, o estado -1 acaba perdendo. É interessante ver que, mesmo a inércia do estado zero sendo mínima depois de um certo tempo, mais células zero sobrevivem quando comparado com o sistema com inércia igual a zero para todos os estados. Acontece que as primeiras iterações são cruciais para definir fronteiras e nessas gerações, a inércia do estado zero era igual a dois.

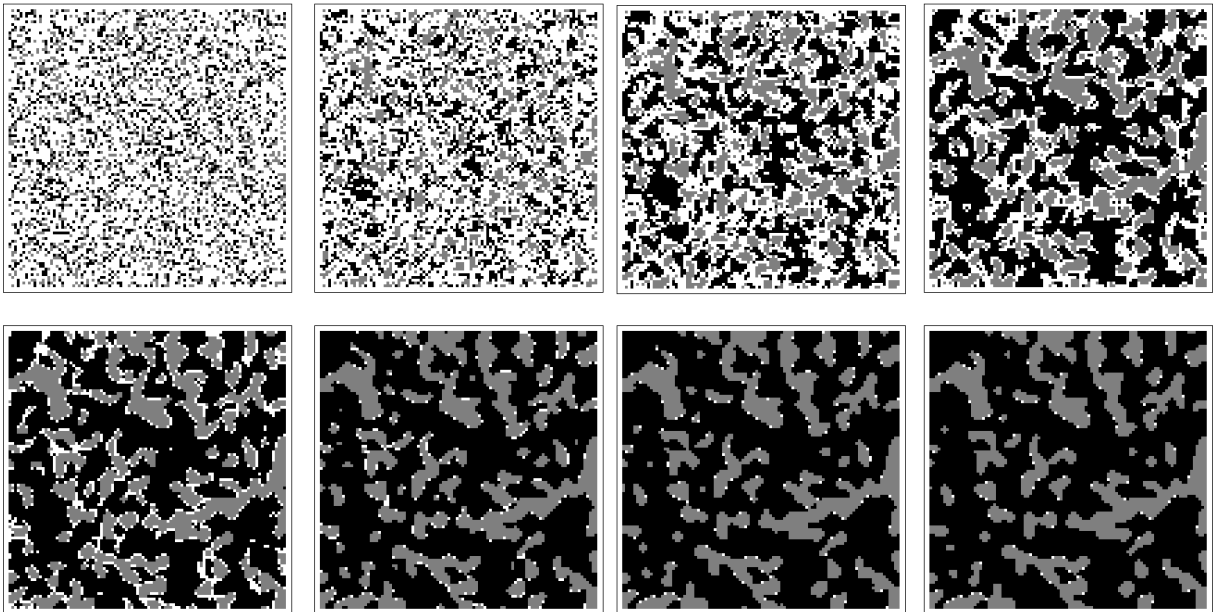
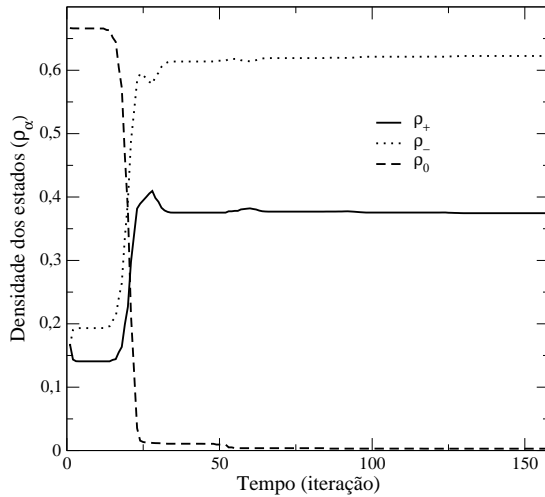


Figura 5.21: Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com inércia diretamente proporcional à densidade do estado.

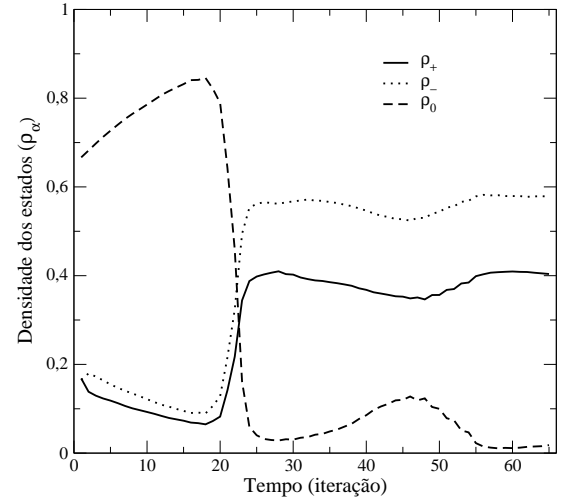
5.3 Inércia variando no tempo

Até o momento fizemos simulações com inércia igual para todos os estados, diferente para cada estado e variando em função da densidade de cada estado. O que acontecerá se a inércia for função do tempo? Para testar essa hipótese, vamos variar a inércia numa forma senoidal. Isso se justifica porque na natureza, as resistências às mudanças de vários elementos depende de vários fatores, e alguns deles são sazonais, como, por exemplo, o crescimento da vegetação em função da estação do ano. A inércia, então, irá mudar a cada 2 gerações, aumentando ou diminuindo em uma unidade. A inércia inicialmente aumenta até atingir um valor igual a 8. A partir da inércia 8, ela começa a diminuir até

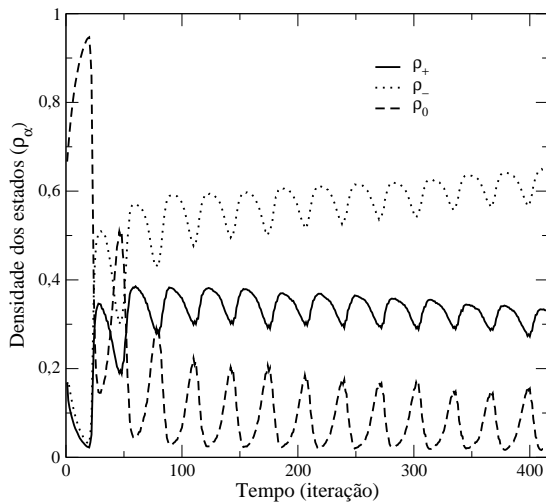
atingir o valor de zero, onde então aumenta novamente, sempre seguindo esse ciclo. Para obter resultados mais interessantes, mantivemos as inércias de cada estado com valores diferentes, equivalente a uma diferença de fase na inércia de cada estado. Primeiramente analisamos o caso em que as inércias iniciais fossem da seguinte maneira: $I_+ = 1$, $I_- = 3$ e $I_0 = 5$. Dessa forma maximizamos a sobrevivência do estado zero, pois inicialmente sua inércia é maior.



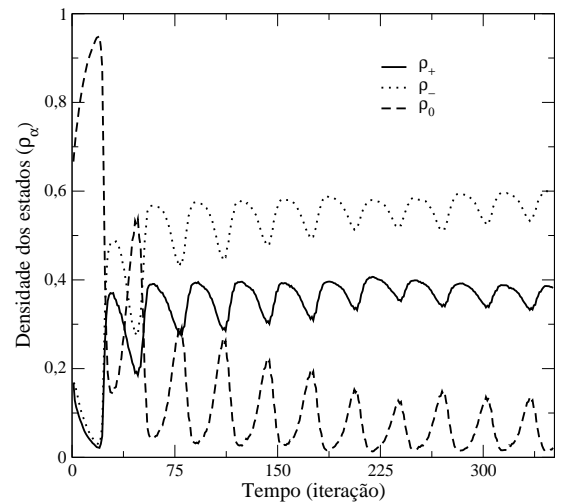
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



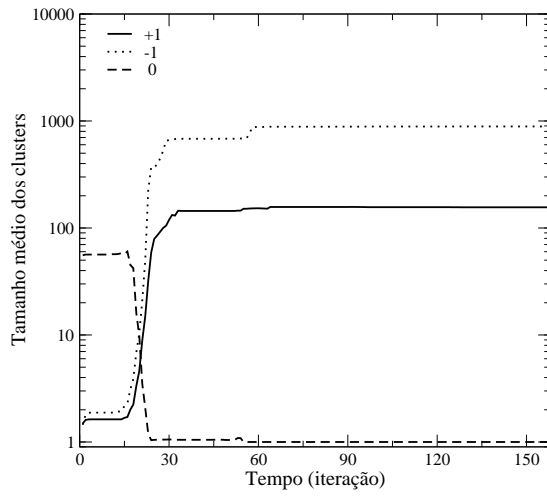
(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.22: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus geração com inércia oscilando no tempo, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

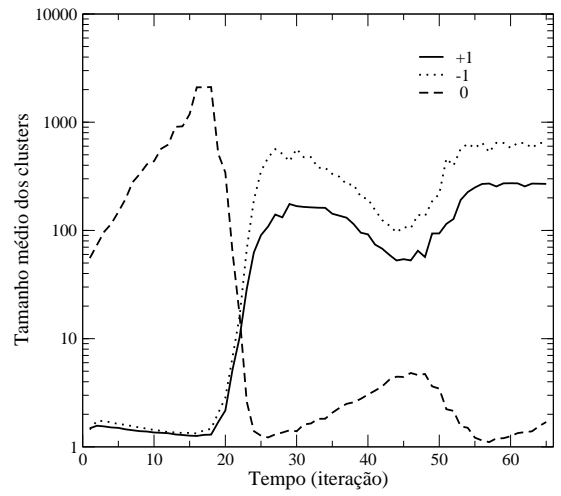
Na figura 5.22 encontramos a densidade de cada estado em função do tempo para esse padrão oscilante de inércia. A partir dessas figuras podemos ver as grandes diferenças que surgem entre os modelos determinístico e probabilístico. Inicialmente vamos analisar os

modelos separados. Para o modelo determinístico, não encontramos oscilações periódicas nas densidades, elas apenas aumentam ou diminuem até atingir um estado estacionário. Como a inércia do estado zero é inicialmente igual a 5 e irá aumentar até 8 para então diminuir, então, as primeiras 16 gerações terão inércias altas para o estado zero, portanto não haverá muitas mudanças em sua densidade. Nessas primeiras gerações veremos mudanças apenas para os estados +1 e -1, que disputarão território entre si. Como o estado -1 tem maior inércia inicialmente, este aumentará sua densidade. Porém, no decorrer do tempo, a inércia do estado +1 também aumenta, ocasionando uma densidade constante durante período onde a inércia para de todos os estados é alta. A partir da 17^a iteração, a inércia do estado zero já é igual a 2, e irá diminuindo até zero. Com isso, os estados +1 e -1 conseguem se expandir rapidamente sobre o estado zero, fazendo com que sua densidade diminua. Quando atingimos a 24^a iteração, a inércia do estado zero novamente se torna alta, tornando esse estado com densidade constante, ou seja, os poucos elementos zero que sobreviveram não mudam de estado durante algum tempo. Logo após isso, os estados +1 e -1 voltam a competir apenas entre si por território, porém a inércia do estado -1 é menor que a do estado +1, fazendo com que o estado +1 consiga ganhar território sobre o estado -1. Isso faz com que hajam mais clusters do estado +1 do que do -1 (podemos ver isso na figura 5.24a). Porém, com o passar do tempo, o estado -1 aumenta sua inércia, ficando com uma inércia maior que a do +1, voltando novamente a ganhar território sobre +1. Depois disso, não há uma grande variação nas densidades dos estados. Apenas entre as 60^a e 70^a iterações, nas quais há uma pequena variação nas densidades dos estados +1 e -1, mas que ocorre pelos mesmos motivos descritos anteriormente.

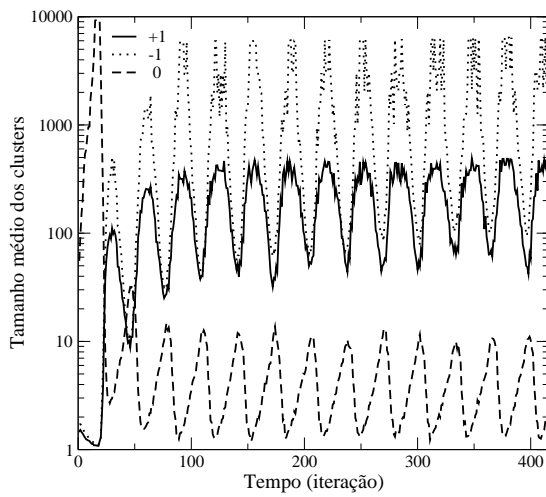
Agora se olharmos para o modelo probabilístico, vemos que há uma maior oscilação nas densidades. Elas são explicadas da mesma forma que no modelo determinístico, porém com a diferença de que, quando a inércia é mais alta para o estado zero do que para os outros estados, este tende a se expandir sobre o sistema. Devido à probabilidade p_1 , células vizinhas aos zeros, podem mudar para o estado zero, aumentando ainda mais sua densidade. Dessa forma, o aumento do número de células zero realimenta o sistema, deixando regiões que poderão ser dominadas pelos estados +1 e -1, o que leva às oscilações na densidade. Na verdade podemos reparar que os picos das oscilações da densidade do estado zero correspondem aos menores valores de ρ_+ e ρ_- e vice-versa.



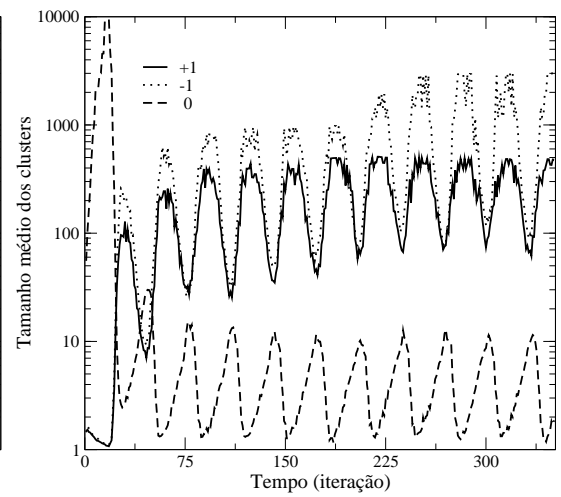
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 5.23: Tamanho médio dos clusters versus geração com inércia oscilando no tempo, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

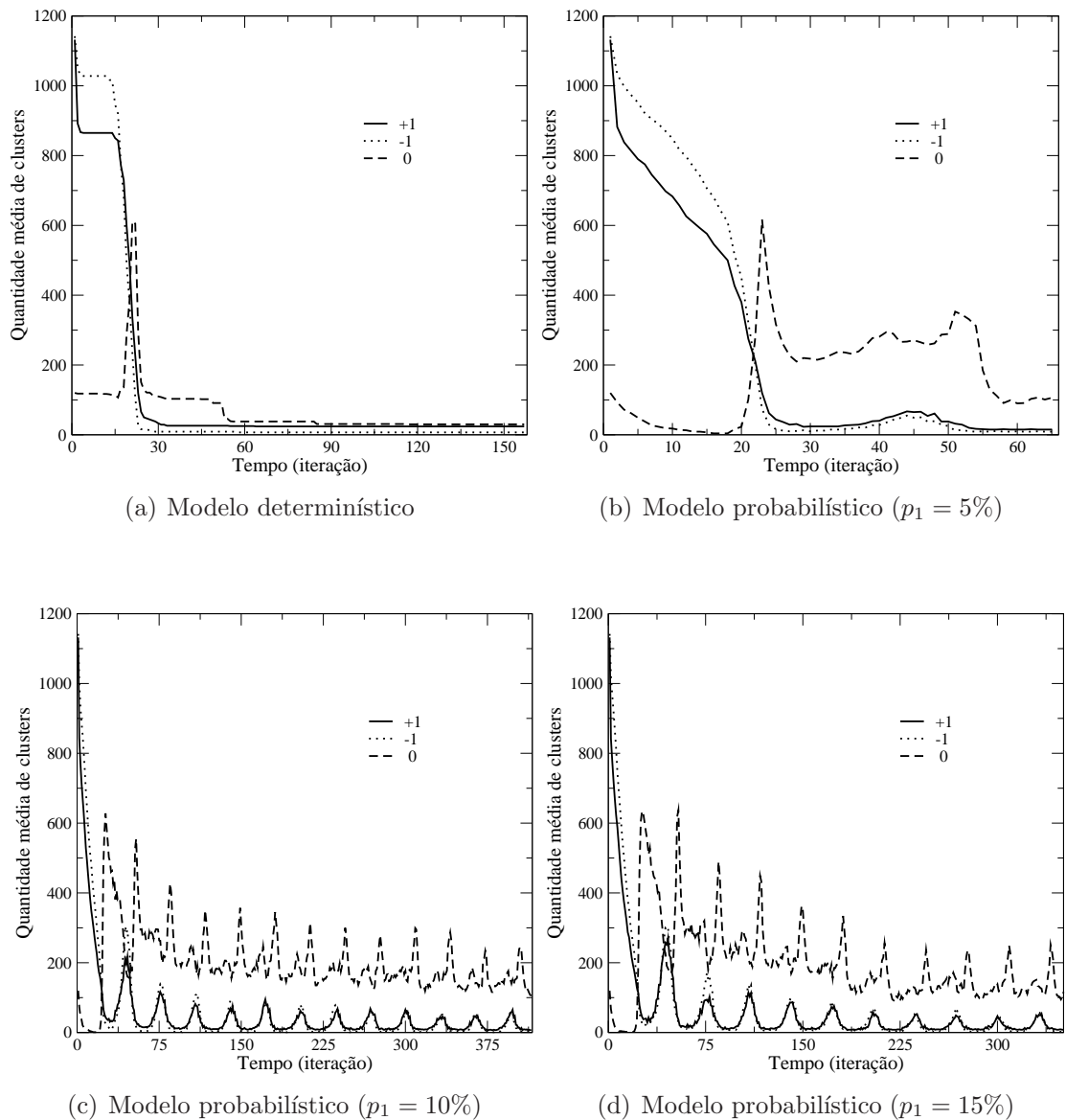


Figura 5.24: Quantidade de clusters versus geração com inércia oscilando no tempo, para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Nas figuras 5.23 e 5.24 encontramos o tamanho médio e a quantidade de clusters para cada estado, respectivamente. Inicialmente vemos que o tamanho médio dos clusters +1 diminuem e dos clusters -1 aumentam. Notamos também que a quantidade de clusters +1 decresce, pois o estado -1 se expande sobre o +1. Um ponto bastante importante que analisamos em todos os sistemas é a sobrevivência de células zero nas fronteiras entre os estados +1 e -1. Tal fenômeno, para esse padrão de inércia, é bastante evidenciado, já que, no modelo probabilístico, a formação dessas fronteiras com o estado zero é essencial para que a densidade do estado zero aumente, realimentando o sistema, de forma a manter as oscilações. Na figura 5.25 encontramos um ciclo de 4 gerações (intervalo de 9 iterações entre cada geração) que se repetem (não exatamente da mesma forma, mas de maneira

similar), formando as oscilações encontradas nos gráficos do modelo probabilístico. Esse ciclo mostra que as células zero tendem a sobreviver nas fronteiras e isso faz com que, quando sua inércia é alta, consigam se expandir a partir das fronteira. Contudo, quando a inércia torna a diminuir, essas células tornam a desaparecer, sobrevivendo novamente nas fronteiras. Esse fenômeno ocorre para todos os valores de p_1 .

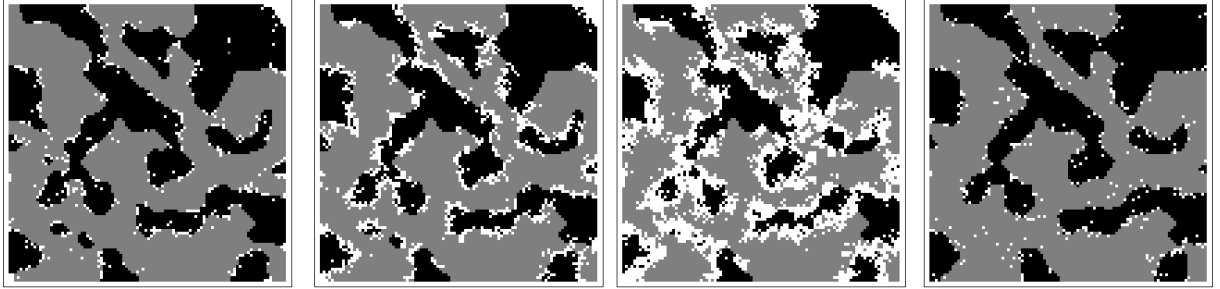


Figura 5.25: 4 gerações que mostram a importância da formação de ecótonos em sistema com inércia oscilante. Modelo probabilístico com $p_1 = 10\%$.

5.4 Conclusões sobre os diferentes padrões na inércia

Encontramos diversos resultados interessantes quando a inércia é diferente para cada estado. Os mais importantes serão listados aqui. Primeiramente vimos que uma inércia igual a 2, mesmo estando restrita ao estado zero, maximiza a sobrevivência de células zero nas fronteiras entre clusters +1 e -1. Vimos também que uma inércia inicial alta para o estado zero também torna a sobrevivência de células zero nas fronteiras entre os clusters maior quando comparada com uma inércia baixa, indicando que as iterações iniciais são essenciais para que células zero possam sobreviver à evolução do sistema. Outro fato percebido foi que, em um modelo com inércia variável de forma periódica, a formação de fronteiras com o estado zero presente é essencial para que a população de zeros consiga, em alguns intervalos de tempo, crescer e se expandir no sistema.

Capítulo 6

Padrões na distribuição espacial dos estados

Neste capítulo estudaremos a evolução de alguns padrões na distribuição espacial dos estados, buscando entender como acontece o crescimento de certas estruturas durante a evolução do sistema. Estudaremos padrões simétricos (círculos, quadrados, losangos, etc.) e padrões assimétricos e explicaremos as principais diferenças na forma que esses padrões evoluem no tempo. Para isso, utilizaremos apenas o modelo determinístico, pois estamos interessados na forma que esses padrões evoluem no tempo. O estudo da evolução temporal de padrões espaciais é muito importante, já que na natureza várias espécies se juntam em grupos, ocupam determinadas áreas. Isso, com o passar do tempo, faz com que elas cresçam e se expandam seguindo certos padrões espaciais. Esse processo não vale apenas na biologia, no estudo da evolução temporal de padrões espaciais de espécies, da fauna e flora [70, 71], mas também pode ser visto na geoeconomia [72], com o estudo do fluxo e canais de fluxo de carvão na China, analisando o impacto econômico dessas rotas de carvão sobre a sociedade. Também há exemplos na geografia [73], com um estudo de sistema geográficos autômatos e na evolução temporal dos padrões espaciais gerados por esses sistemas. Podemos ainda ver trabalhos na física [74, 75], com estudos da evolução temporal e na formação de padrões espaciais em materiais ferromagnéticos.

6.1 Padrões espaciais simétricos

Nesta seção trataremos de padrões regulares na distribuição espacial dos estados iniciais de nosso modelo. Ou seja, supondo um certo padrão específico, estudaremos como tal configuração evoluirá no tempo, dando origem a uma nova forma geométrica quando atingir a estacionaridade. Mencionamos que é muito comum, em diferentes processos, o sistema apresentar inicialmente uma configuração típica (regular ou não) e então padrões futuros são obtidos sempre a partir deste molde original (assim, o que é mudado não é a

condição inicial mas a regra de atualização). Como exemplo, citamos estudos usando ACs para determinar o crescimento de cidades indianas e coreanas [76, 77], partindo-se de uma situação inicial fixa, mas variando-se as “forças urbanas” determinantes para a expansão de habitações, comércio, indústria, etc. Também mencionamos modelos muito interessantes de surgimento de fragmentação em habitats de pastagem (portanto, um terreno inicialmente sempre uniforme) na Austrália [78] e análises de biodiversidade partindo-se sempre do mesmo padrão inicial [79, 80].

Para simplificar esse estudo, utilizamos apenas dois estados distribuídos no sistema, sendo um deles o estado +1 e o outro o zero. Analisamos inicialmente como algumas formas geométricas simétricas (um círculo, um quadrado, um losango e uma cruz), formados pelo estado +1 e cercados pelo estado zero, evoluem no tempo. Podemos ver essa evolução nas figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, onde encontramos a evolução desses padrões para inércias iguais a zero, um e dois, respectivamente. É interessante ver que a evolução temporal desses padrões são similares, ou seja, a forma para que cada padrão evolui é praticamente a mesma, independente do padrão, como será mostrado adiante.

Vamos observar primeiramente a evolução dos padrões acima citados para inércia igual a zero. Podemos ver que os padrões crescem apenas na direção horizontal e vertical, mantendo a mesma forma nas diagonais. Para exemplificar, observamos o primeiro conjunto de padrões circulares, figura 6.1 a). Nela notamos que os cantos são formados por 3 células +1, formando uma espécie de “escada”. Na evolução temporal, essa “escada” não altera seu tamanho, mantendo sempre 3 células +1. O mesmo acontece no padrão de losango, que tem mais células +1 formando a “escada” e que não alteram sua forma durante a evolução.

Agora, na evolução temporal para inércia igual a um, todos os padrões evoluem para a forma de um losango, pois estes têm uma expansão rápida nas direções horizontal e vertical. Já para inércia igual a dois, os padrões evoluem para uma forma de círculo. Para ser mais exato, quando atingem tamanho suficiente, a forma que apresentam é de um octógono (figura 6.4 c). Então, concluímos que esses padrões simétricos apresentam uma evolução temporal parecida, pois todos os padrões testados se expandem até atingir uma forma específica para o valor de inércia que estão submetidos. Obviamente, alguns padrões demoram mais tempo que outros para atingir esse formato. Entretanto, o padrão de evolução é praticamente o mesmo, independente da forma inicial. Um exemplo é o padrão de cruz, que leva mais tempo para atingir uma forma parecida com a forma dos outros padrões. Outros padrões simétricos, não mostrados aqui, seguem a mesma dinâmica, sugerindo que, padrões na distribuição espacial dos estados que são simétricos, devem evoluir seguindo um formato comum entre eles.

Distribuímos então, alguns padrões dentro do sistema, tentando prever como essa distribuição de estados evoluirá no tempo. Para análise inicial, distribuímos aleatoriamente 3 círculos no estado +1 e 3 círculos no estado -1. Cada círculo tem um raio igual a 5

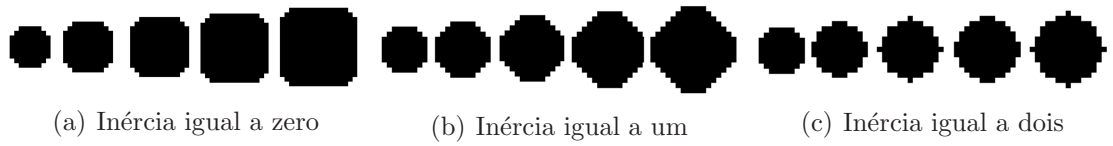


Figura 6.1: Evolução do padrão de círculo para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.

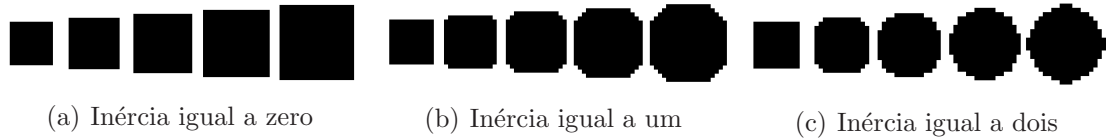


Figura 6.2: Evolução do padrão de quadrado para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.

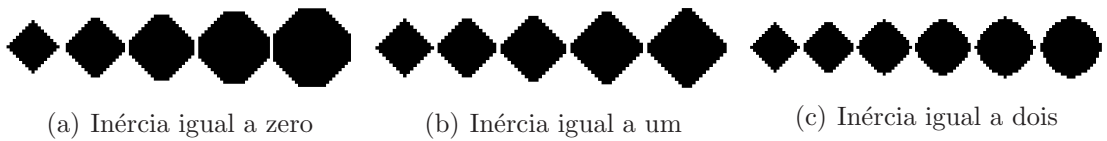


Figura 6.3: Evolução do padrão de losango para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.

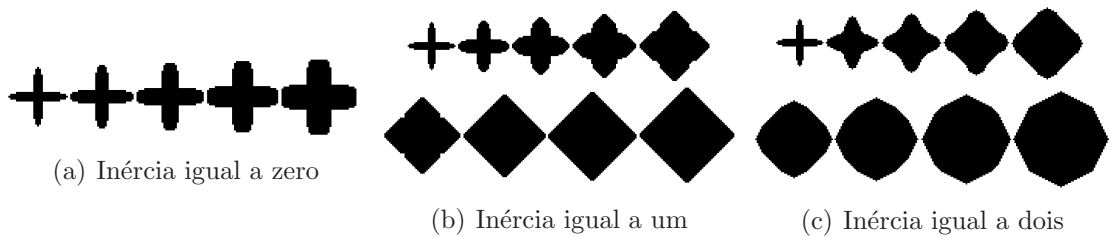


Figura 6.4: Evolução do padrão de cruz para inércias iguais a zero, um e dois, respectivamente.

células. Como temos poucas células dos estados $+1$ e -1 , esperamos observar a evolução desse sistema e também se essa evolução segue os padrões para os valores de inércia já mostrados anteriormente. Nas figuras 6.5, 6.6 e 6.7, vemos a evolução dessa distribuição aleatória de 3 círculos de cada estado. Esses círculos espalhados no AC se expandem inicialmente no formato comum a todos aos padrões mostrados anteriormente. Porém, quando eles encontram um cluster de outro estado, eles se deformam, formando fronteiras estáveis entre os estados. Podemos também prever, de forma qualitativa, quais regiões do espaço cada estado ocupará. Observando a distribuição inicial dos estados, sabemos qual estado, independente da inércia, será predominante em certas regiões. Em nosso caso, os cantos direito superior e inferior serão dominados pelo estado $+1$, e em uma região mais central, deslocada para a direita, terá uma região de domínio do estado -1 . Analisando a evolução temporal dos padrões, para as figuras mostradas vemos que essa previsão de ocupação de certas regiões é verdadeira.

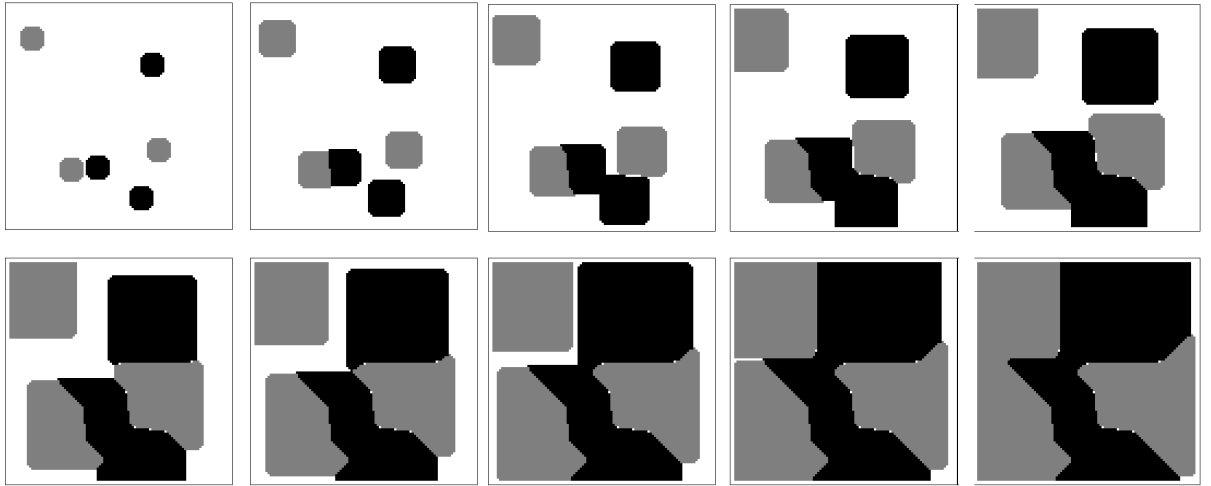


Figura 6.5: Evolução dos padrões circulares espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a zero.

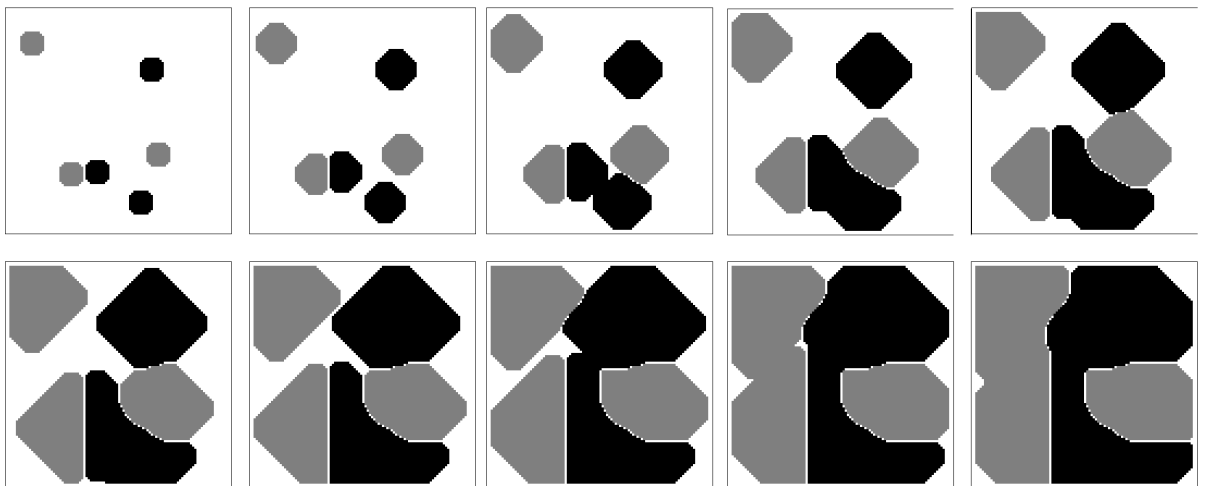


Figura 6.6: Evolução dos padrões circulares espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a um.

Observando as figuras 6.5, 6.6 e 6.7, notamos também que temos uma formação de fronteiras entre os clusters $+1$ e -1 bem definidas, com células zero sobreviventes nessas regiões. Na figura 6.5, vemos que, quando é formada a fronteira entre os estados $+1$ e -1 , para inércia nula, ela tenderá a ser linear. Porém essa fronteira se orientará preferencialmente nas diagonais, principalmente quando os clusters não estiverem alinhados horizontalmente ou verticalmente. Para fronteiras alinhadas na horizontal ou vertical, temos que, no instante em que a fronteira se forma, há uma célula de outro estado na vizinhança que compõe a fronteira. Entretanto, se as células formadoras da fronteira estiverem desalinhadas, uma fronteira diagonal se forma. Outro tipo de fronteira que encontramos são as não lineares, que aparecem quando uma célula zero consegue sobreviver, criando deformações na fronteira.

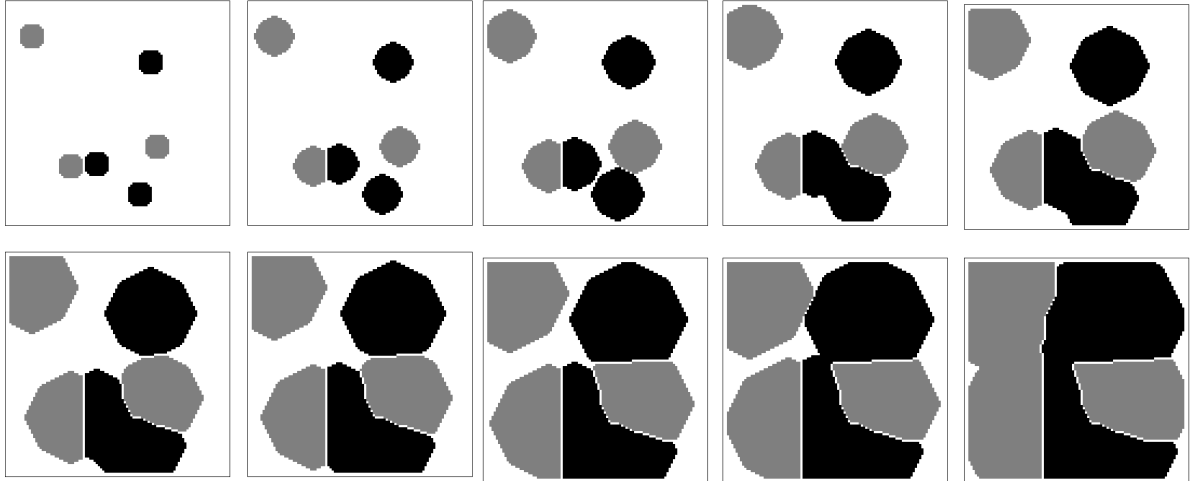


Figura 6.7: Evolução dos padrões circulares espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a dois.

Para inércia igual a um e dois (figuras 6.6 e 6.7, respectivamente), vemos que a presença de células zero é bem maior nas fronteiras, ou melhor, em quase toda a extensão da fronteira há zeros. Outro ponto que podemos observar é que as fronteiras ou estão alinhadas na horizontal ou vertical, ou são não-lineares, formando fronteiras suaves e curvas, pois, a presença de células zero curvam as fronteiras.

Nas figuras 6.8, 6.9 e 6.10 encontramos alguns dos padrões mostrados anteriormente misturados em um sistema. Colocamos em posições aleatórias dois quadrados, dois círculos e dois losangos de cada estado (+1 e -1) em nosso sistema. Fizemos esse sistema evoluir no tempo e nessas figuras mostramos as primeiras 8 gerações para inércia zero, um e dois. A partir dessas figuras podemos verificar novamente o que já foi discutido anteriormente. Por exemplo, vemos que os diferentes padrões simétricos evoluem de forma parecida. Também constatamos que as fronteiras, para inércia nula, são lineares horizontais, verticais ou diagonais e que fronteira não lineares possuem zeros em sua formação. Já, para inércia igual a 1 ou 2, as fronteiras são quase que inteiramente compostas por células zero, blindando, de certa forma, esses clusters. Finalmente, de maneira qualitativa, podemos prever quais as regiões do sistema cada estado tenderá a ocupar.

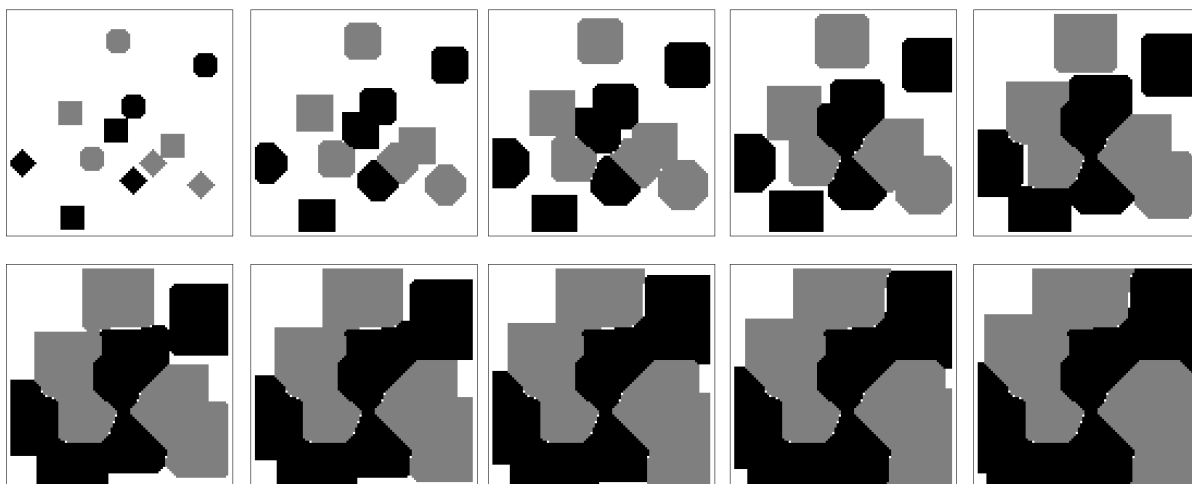


Figura 6.8: Evolução dos padrões diferentes espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a zero.

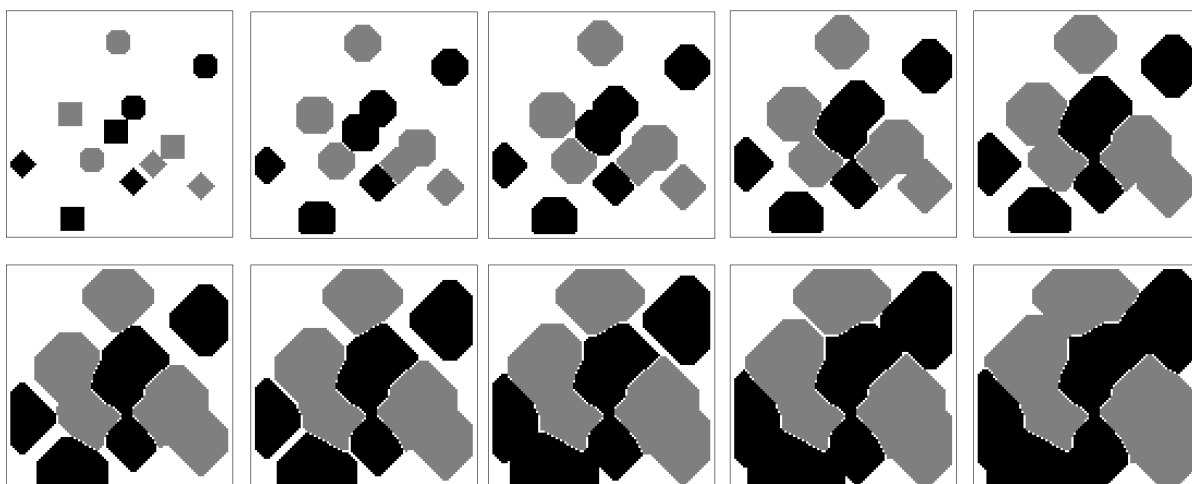


Figura 6.9: Evolução dos padrões diferentes espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a um.

Na figura 6.11 vemos um padrão assimétrico. Esse padrão é um triângulo equilátero, simétrico em relação ao eixo vertical, mas não em relação ao eixo horizontal. É interessante ver que a parte simétrica se expande sempre da mesma forma. Entretanto, a parte assimétrica, não consegue evoluir de uma forma ordenada como no caso simétrico, deformando-se à medida que o sistema evolui. Por exemplo, para inércia nula, todos os padrões tendem a manter a forma geométrica nas diagonais e evoluir igualmente na horizontal e vertical. Por isso, aquele formato de “escada” nos dois cantos superiores do triângulo permanece constante durante a evolução desse padrão. Para inércia igual a 1, vemos que a expansão desse padrão é um pouco diferente. Porém, ela lembra a expansão dos outros padrões para esse mesmo valor de inércia, que evoluem com um formato de um losango. Desta maneira, nosso triângulo tende a manter um pouco de sua forma original (triangular), fazendo com que esse losango fique deformado. O mesmo acontece

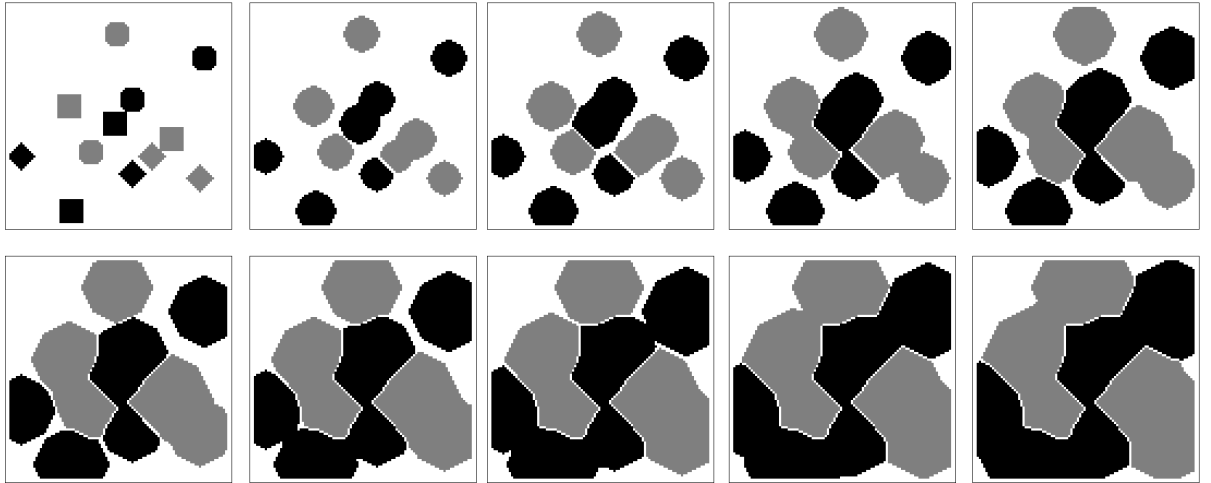


Figura 6.10: Evolução dos padrões diferentes espalhados aleatoriamente pelo sistema, para inércia igual a dois.

para inércia igual a 2, pois, a forma que esse padrão deveria evoluir, se compararmos com os outros padrões, está um pouco deformada, devido à natureza assimétrica do triângulo.

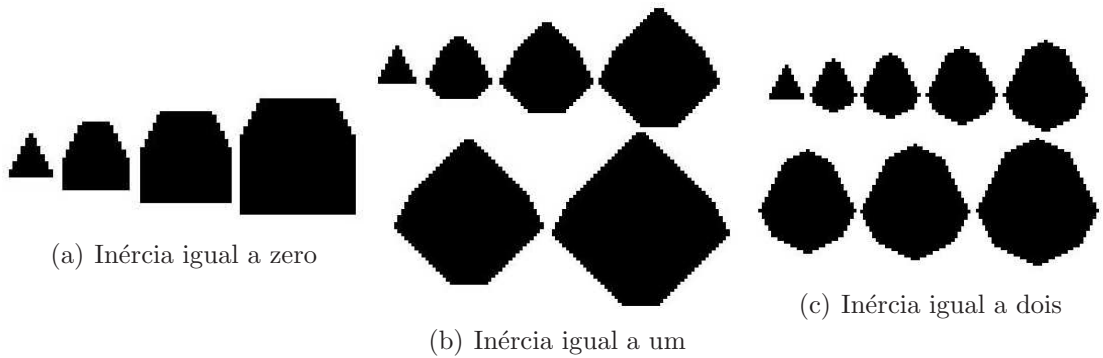


Figura 6.11: Evolução do padrão triangular para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.

Nas figuras 6.12 e 6.13 vemos padrões em forma de lua, sendo a primeira simétrica em relação ao eixo horizontal e a segunda, simétrica sobre um eixo com inclinação de 45° em relação à vertical. Podemos notar que as partes simétricas com os eixos vertical e horizontal se expandem de forma similar aos outros padrões. A parte assimétrica tenta seguir o mesmo padrão, mas acaba ficando deformada. Sendo assim, podemos dizer que padrões assimétricos seguem uma o mesmo formato básico dos padrões simétricos, porém deformados nas regiões de suas assimetrias.

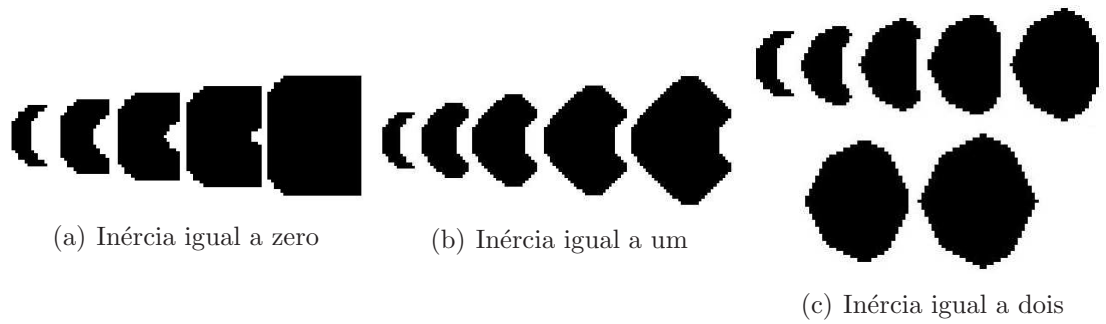


Figura 6.12: Evolução do padrão no formato de meia-lua alinhada na vertical para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.

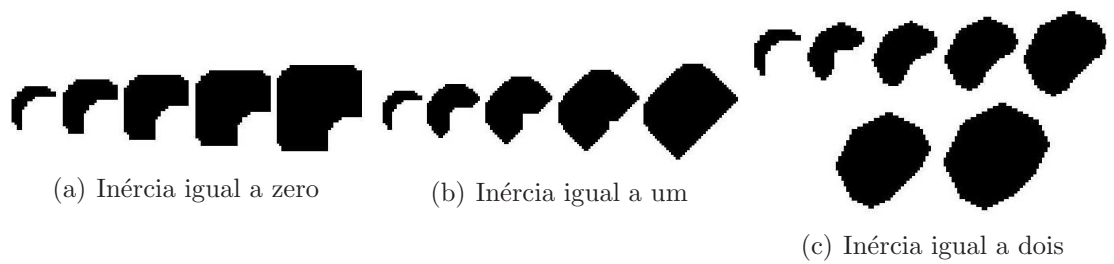


Figura 6.13: Evolução do padrão de meia-lua alinhada na diagonal para inércias iguais a (a) zero, (b) um e (c) dois.

Capítulo 7

Modelo Probabilístico e Estudo de Ecótonos

Neste capítulo iremos estudar de forma mais detalhada o fenômeno de ecótonos, ou seja, formação de regiões fronteiriças, onde uma espécie menos hábil consegue sobreviver devido ao enfraquecimento de outras espécies que estejam competindo entre si. Aqui não pretendemos modelar nenhuma situação específica (por exemplo, um bioma particular, tal como divisa entre campo e bosque), a ideia é simplesmente mostrar de forma geral que a emergência de ecótonos pode ser explicada, ao menos de forma qualitativa, através de nossa ideia de uma inércia para o AC. Também é interessante, neste contexto, observar as similaridades e diferenças de incluirmos ou não um termo estocástico nas regras de atualização. Por fim, ao invés de criarmos um conjunto de estados iniciais, e realizarmos estudos estatísticos, iremos analisar matrizes individuais e suas evoluções temporais. Fazemos esta escolha metodológica distinta dos capítulos anteriores porque nosso interesse maior é determinar como uma configuração específica pode evoluir de forma a apresentar, numa situação estacionária, estados sobreviventes em regiões limítrofes.

7.1 Definições de ecótonos

Parte deste capítulo está focado em sistemas de disputa de território, realizada por 3 agentes, onde dois deles têm a mesma força na competição dinâmica e outro não tem força nenhuma. Esses agentes são nossos estados +1, -1 e zero, respectivamente. A disputa territorial acaba acarretando alguns resultados interessantes e dentre eles, a formação de ecótonos, ou seja, sobrevivência de um dos agentes na fronteira criada entre os outros agentes.

Ecótonos, ou fronteiras ecológicas, são definidas, de acordo com Clements [44], como uma zona de tensão entre duas vegetações diferentes ou comunidades de diferentes espécies em grande escala. Fortin [81] e Risser [82] também definem que ecótonos são regiões lon-

gas, mas estreitas, com alta taxa de mudança. Há diversos modelos que procuram simular a formação de ecótonos e classificá-las. Um destes modelos é a aproximação hierárquica, criada por Gosz [83], que utiliza variáveis ambientais para unir diferentes espécies em grandes biomas. Tendo vários biomas diferentes identificados, as fronteiras (ecótonos) podem ser encontradas com maior facilidade. Cadenasso e outros autores [84] mostraram que a conceitualização de fronteiras ecológicas são componentes fundamentais para a formação de paisagens ecológicas. Essas áreas, chamadas de ecótonos, tem grande importância na ecologia, pois, em diversos estudos, foi visto que várias dessas áreas suportam mais vida que as áreas adjacentes. Há exemplos desses fenômenos nos ecótonos formados pela fragmentação de florestas no Canadá [45], ou mesmo no estudo do tipo de vegetação existente nos ecótonos em um parque florestal em Wisconsin, Estados Unidos da América [46]. Esses dois trabalhos mostraram que, nas regiões de fronteira, havia uma biodiversidade maior que nos biomas que o formavam. Mas isso também não é necessariamente uma regra, temos alguns casos em que, dependendo das condições ecológicas de cada região, o ecótono não suporta tanta biodiversidade quando os biomas adjacentes. Isso foi mostrado por Harper [85]. Mencionamos diversos estudos realizados em vários continentes que analisam as muitas facetas que podemos encontrar nos ecótonos. Um trabalho interessante, feito por Hou e Walz [86], analisa os ecótonos da Saxônia, na Alemanha. As fronteiras ecológicas eram formadas por uma floresta alta e uma área de vegetação baixa, tipo vegetação gramínea. Os ecótonos eram áreas de transição entre estas vegetações. Os ecótonos foram introduzidos no modelo computacional utilizado para diminuir os efeitos de borda e fronteiras entre os biomas, que emergiam da dinâmica computacional do modelo. Temos também estudos feitos nos ecótonos brasileiros [87], formados entre a Floresta Amazônica e o Cerrado, mais especificamente, nas áreas que ficam inundadas durante certos períodos do ano. Esse trabalho analisou o efeito da sazonalidade de inundações nessas áreas sobre a biodiversidade do ecótono. Verificou-se, que, o fato de a heterogeneidade criada pelas inundações sazonais é um dos fatores mais importantes na manutenção ecológica dessa região. Outro estudo, como o de Wumaer e Abuduwaili [88] mostram como ecótonos influenciam na desertificação no Oásis de Minfeng, na China. Os ecótonos funcionam como uma espécie de barreira contra a desertificação.

Dessa maneira podemos ver a importância que a formação de ecótonos tem em sistemas ecológicos. Porém, não há muitos trabalhos que estudam a evolução temporal dos ecótonos. Mencionamos os trabalhos de Noble [89] e Loehle [90] que fazem um estudo da evolução temporal de ecótonos, analisando principalmente o efeito produzido pelas mudanças climáticas sobre eles.

Nosso modelo apresenta um aparecimento natural dessas regiões que chamamos de ecótonos, além de simular diferentes maneiras para sua formação. Temos também que a inércia é equivalente a uma resistência à mudança. Podemos então relacionar essa inércia à maneira que os ecótonos se formam. Portanto, nosso modelo consegue aliar a formação

natural de ecótonos com a resistência natural à mudança que cada região adjacente possui.

7.2 Inércia igual para todos os estados

Os resultados inicialmente mostrados utilizam uma mesma matriz inicial, gerada de modo quase-aleatório, já descrita em capítulos anteriores. A condição inicial é: $\rho_0 = 0,67$, $\rho_+ = 0,17$ e $\rho_- = 0,16$. O tamanho do sistema é 100×100 . A figura 7.1 a seguir mostra a distribuição espacial dos estados. A cor preta representa o estado +1, a cor cinza o estado -1 e a cor branca, o estado zero.

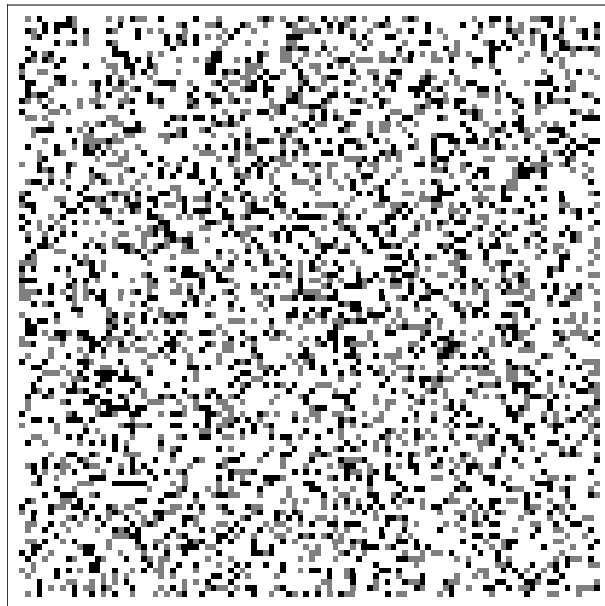
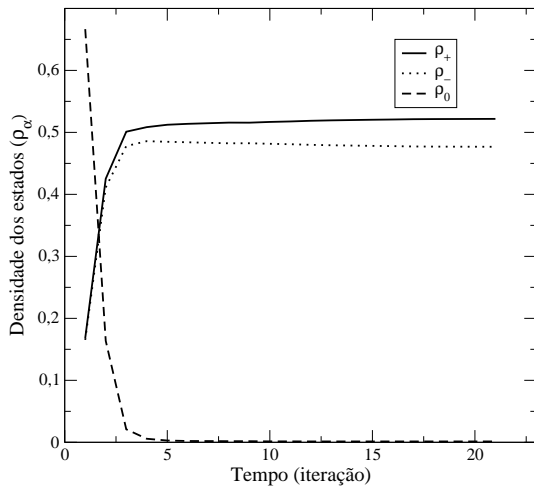
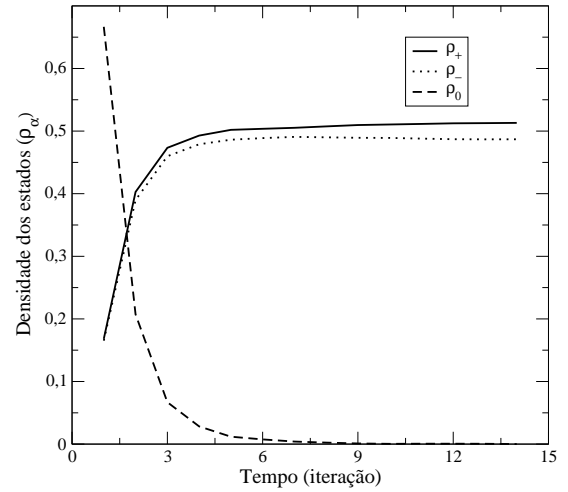


Figura 7.1: Distribuição espacial inicial dos estados +1 (preto), -1 (cinza) e 0 (branco).

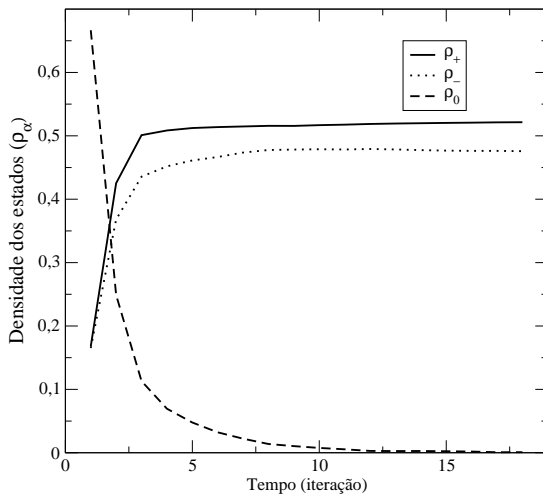
Utilizamos uma inércia igual para todos os estados. Sendo que ela variou de zero a três, pois, para inércias maiores, não evidenciamos a formação de ecótonos. As figuras 7.2 a 7.5 mostram os gráficos da densidade dos estados +1, -1 e zero versus iteração para os valores de inércia de zero a três. Em cada figura encontramos quatro gráficos, sendo o primeiro usando o modelo determinístico e os outros três utilizando o modelo probabilístico com $p_1 = 5\%$, 10% e 15% , respectivamente.



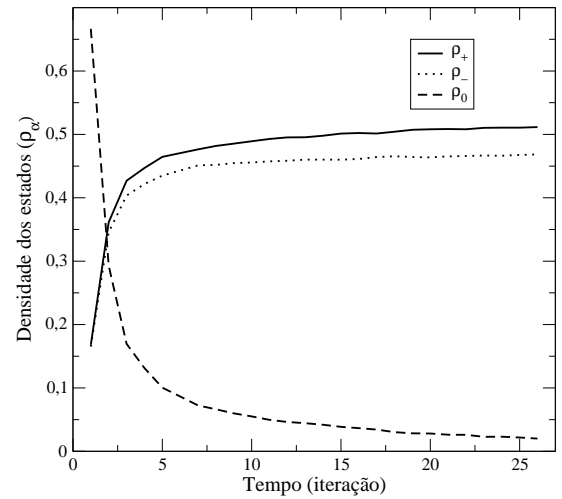
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)

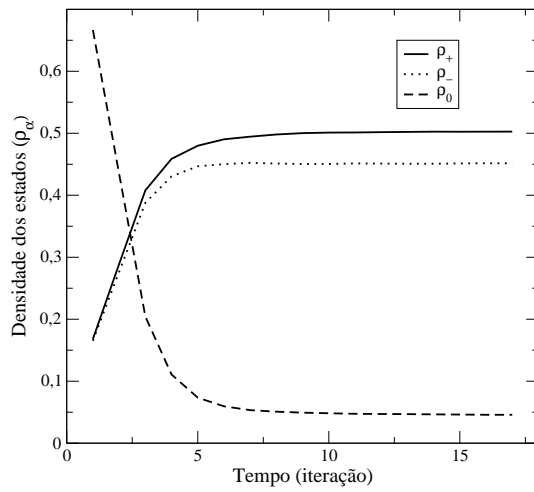


(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

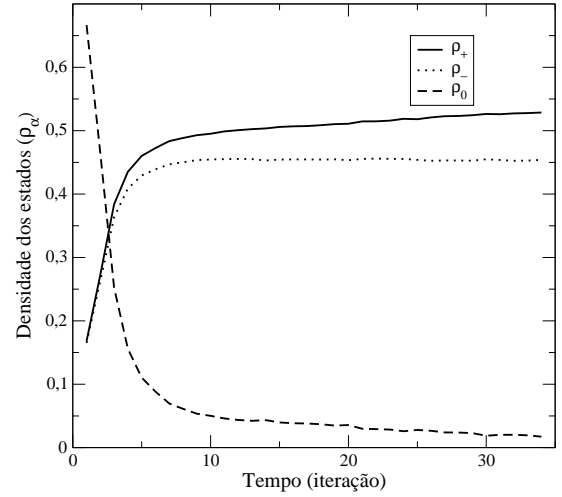


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

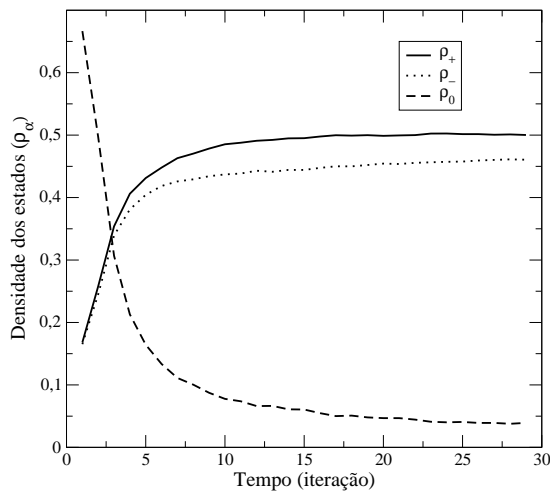
Figura 7.2: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus Geração com inércia igual a zero para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.



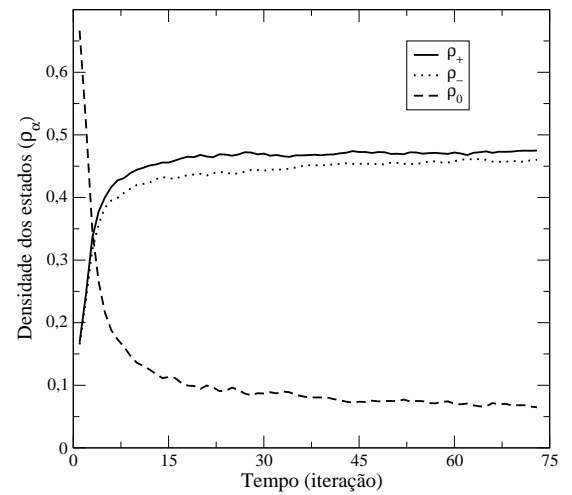
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)

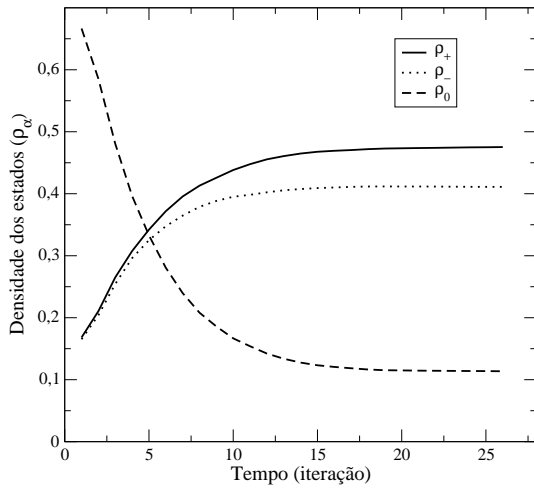


(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

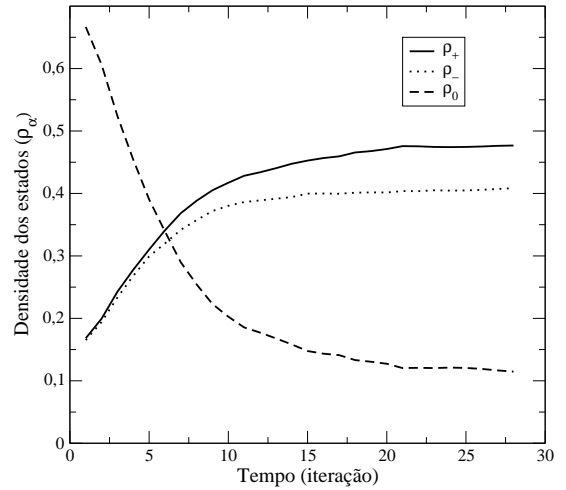


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

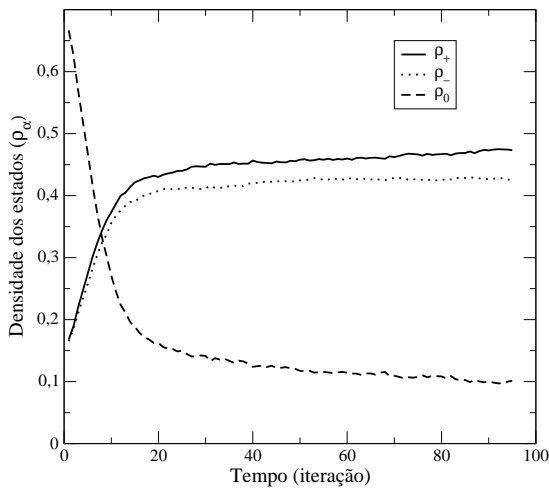
Figura 7.3: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus tempo com inércia igual a um para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.



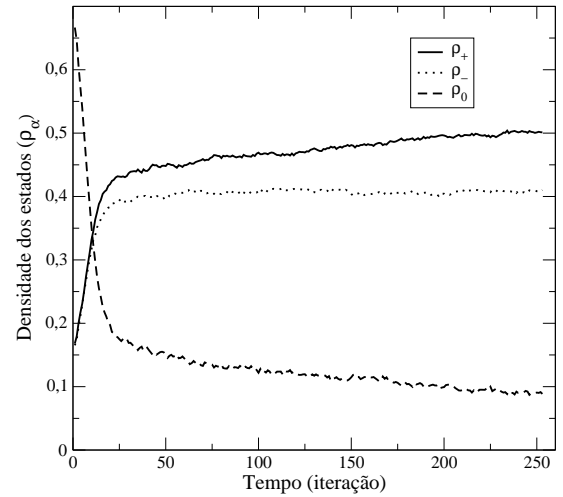
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)

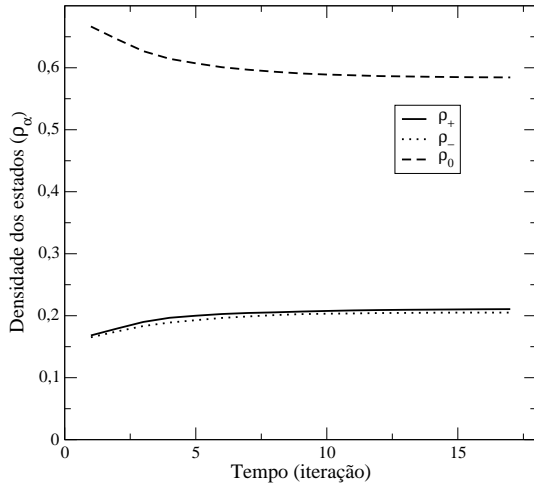


(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

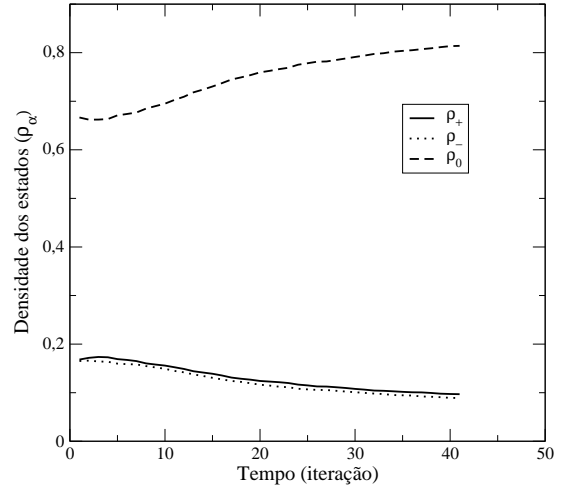


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

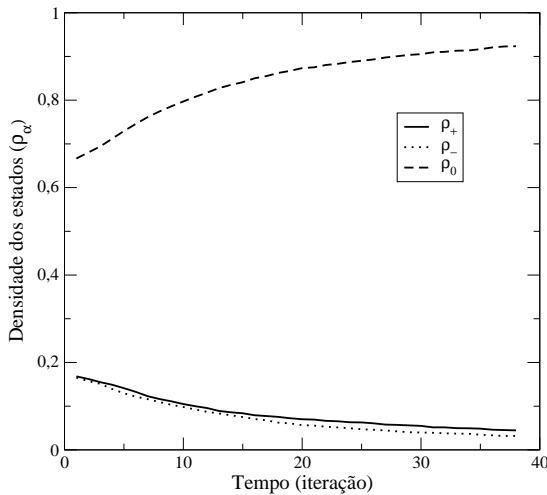
Figura 7.4: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus tempo com inércia igual a dois para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.



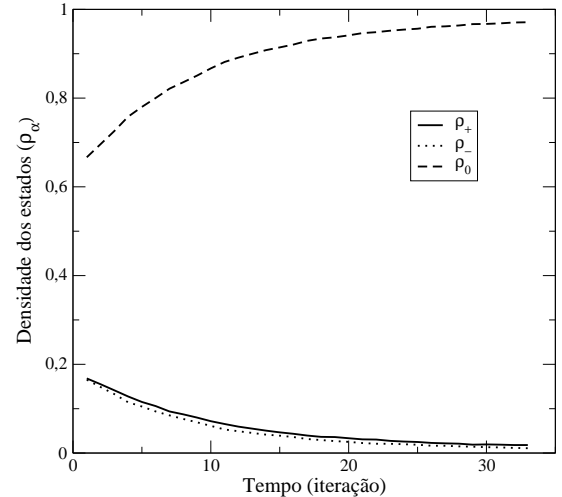
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 7.5: Densidade dos estados +1, -1 e zero versus tempo com inércia igual a três para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Para inércias iguais a zero, um e dois, vemos um rápido crescimento na densidade do estado +1 e -1 e um rápido decréscimo na densidade do estado zero, porém esse crescimento vai se tornando mais suave à medida que a inércia aumenta. Após essa abrupta variação, as densidades mudam muito pouco até atingir a configuração estacionária, ou seja, elas crescem rapidamente e atingem um valor limite. Isso ocorre porque é nas primeiras iterações que ocorrem as principais mudanças de estados das células do sistema. Podemos ver esse comportamento nas figuras 7.6 e 7.7, que mostram as quatro primeiras gerações do modelo determinístico e do probabilístico com $p_1 = 10\%$. Para inércia igual a 3, também vemos esse crescimento da densidade dos estados +1 e -1 e a queda da densidade do estado zero, entretanto essa variação é muito pequena e suave. Ocorre uma

transição entre duas fases, quando olhamos os modelos para $I=2$ e $I=3$. Vemos que para $I=2$, os estados $+1$ e -1 , tem maior densidade na configuração estacionária. Enquanto que para $I=3$, quem tem maior densidade é o estado zero, ou seja, os estados $+1$ e -1 , que tem maior força na competição dinâmica deixam de ser predominantes quando a inércia é maior que dois. Se compararmos as curvas quando aumentamos a inércia, essa grande variação nas densidades vai diminuindo e se tornando mais suave. Isso ocorre porque o aumento da inércia faz com que menos células mudem de estado (resultado já apresentado no artigo [91]).

Podemos observar um resultado bastante interessante quando comparamos o modelo determinístico com o probabilístico. Para inércia baixa (igual a 0,1 e 2) e probabilidade p_1 baixa ($p_1 = 5\%$ e 10%), o comportamento do sistema para os dois modelos é muito parecido. A explicação para esse fato é simples: a única diferença entre os modelos é uma probabilidade de células nos estados $+1$ ou -1 mudarem espontaneamente para o estado zero, se houver uma célula no estado zero na vizinhança. Como essa probabilidade é baixa e a inércia é igual para todos, o modelo probabilístico deve se comportar de forma parecida com o determinístico. Agora, se observarmos os gráficos com probabilidade $p_1 = 15\%$, vemos que o comportamento do sistema é levemente diferente, pois a diferença entre as densidades do estado $+1$ e -1 aumenta com o tempo, o que não ocorre para as outras probabilidades. Além disso, o sistema leva mais tempo para atingir uma configuração estacionária, ocorrendo também muito mais flutuações nas densidades ao longo do tempo.

Outro fato relevante é que para $I = 3$, o sistema se comporta de maneira distinta em cada um dos modelos. Podemos ver que a densidade dos estados $+1$ e -1 tende a aumentar e a do estado zero a diminuir no modelo determinístico. Enquanto, para o modelo probabilístico, a densidade do estado zero tende a aumentar e a dos estados $+1$ e -1 a diminuir. Novamente isso ocorre devido à única diferença dos modelos (a probabilidade de criação de zeros). Como as células tendem a mudar menos de estado, a densidade do estado zero é alta e os estados $+1$ e -1 não conseguem dominar o sistema, com o passar do tempo, o estado zero tende a aumentar. Podemos ver isso nas figuras 7.8 e 7.9, que mostram diversas gerações do sistema usando os modelos determinístico e probabilístico.

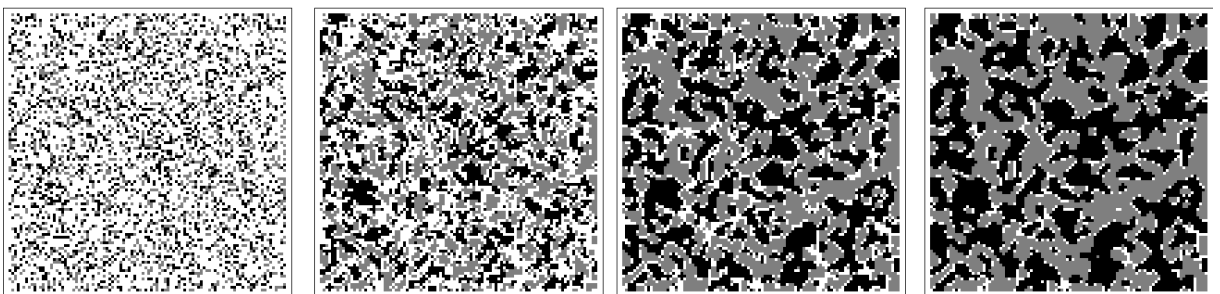


Figura 7.6: Primeiras 4 gerações com inércia um, para o modelo determinístico.

Nas figuras 7.6 e 7.7 encontramos as quatro primeiras gerações com inércia igual a um,

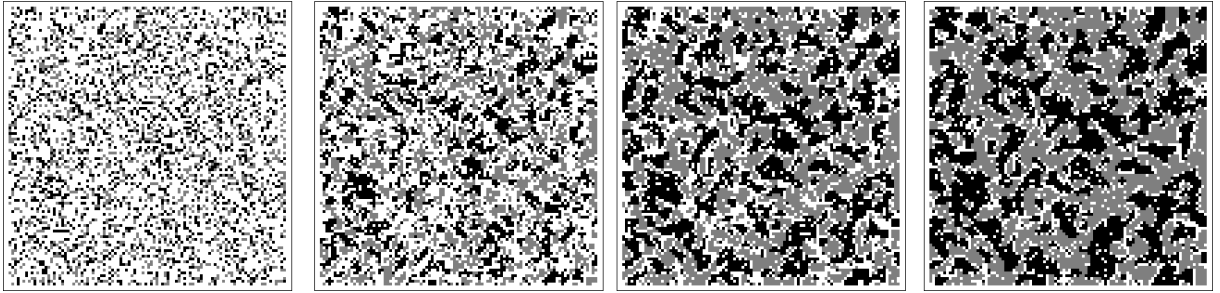


Figura 7.7: Primeiras 4 gerações com inércia um, para o modelo probabilístico com $p_1 = 10\%$.

tanto para o modelo determinístico, quanto para o modelo probabilístico com probabilidade $p_1 = 10\%$, respectivamente. A partir delas podemos notar que as densidades dos estados $+1$ e -1 aumentam rapidamente, enquanto a densidade do estado zero diminui da mesma forma. Observamos também que a distribuição espacial dos estados (formação de clusters) é parecida, sendo a quantidade de células no estado zero maior para o modelo probabilístico, pois esse modelo tem uma probabilidade de mudar o estado de qualquer célula para o estado zero. Um ponto muito interessante concerne à posição de sobrevivência das células no estado zero. Elas apenas permanecem nas fronteiras existentes entre os clusters de elementos dos estados $+1$ e -1 . Isso aparece tanto no modelo determinístico quanto no probabilístico. Porém, no modelo probabilístico, células zero aparecem também no meio de clusters de outros estados, isso porque há uma probabilidade de qualquer célula virar um zero caso exista um zero em sua vizinhança. Portanto, conjuntos de células zero, em certas condições, podem se infiltrar nos clusters. A sobrevivência do estado zero nas fronteiras ocorre porque esse estado não tem força na competição dinâmica e isso faz com que ele sobreviva apenas em determinadas situações, formando os ecótonos. Especificamente, com inércia igual a um, as células no estado zero não mudam de estado, caso o módulo da soma dos estados da vizinhança for menor que 1. Ou seja, qualquer situação onde o número de vizinhos em um estado não superar em uma unidade o número de vizinhos em outro estado, a célula zero sobreviverá. Para entender melhor essa sobrevivência dos estados durante a competição dinâmica, podemos observar novamente a tabela 2.1, mostrada no capítulo 2. A partir dela, podemos entender esse comportamento de sobrevivência de zero na fronteira entre os estados $+1$ e -1 . Entretanto vamos analisar alguns aspectos antes de voltar a olhar essa tabela.

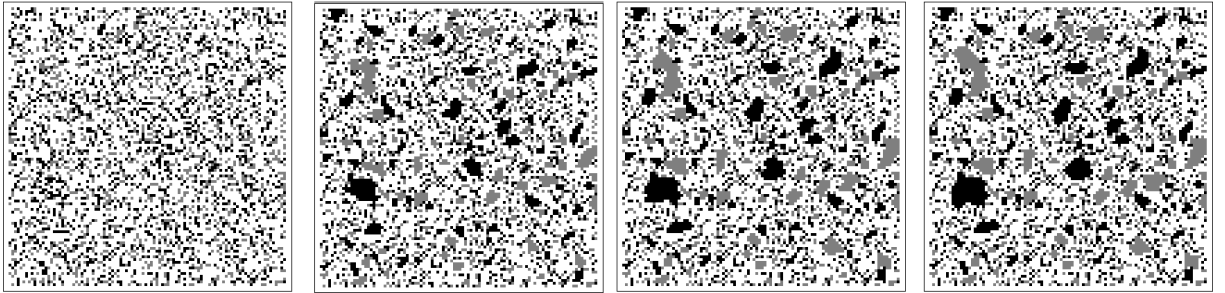


Figura 7.8: Gerações 1, 5, 10 e 15 com inércia 3 para o modelo determinístico.

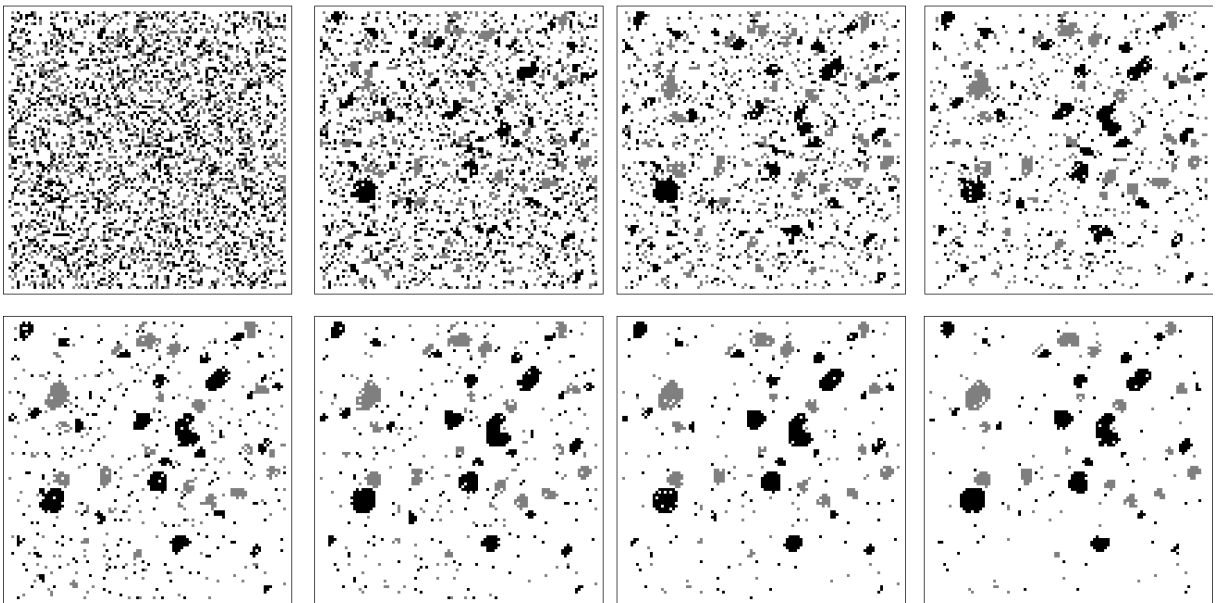


Figura 7.9: Gerações 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35 com inércia 3 para o modelo probabilístico com $p_1 = 10\%$.

Nas figuras 7.8 e 7.9 podemos ver uma série de gerações para os modelos determinístico e probabilístico considerando inércia igual a 3, respectivamente. A partir delas podemos ver que é para inércia alta que aparecem as diferenças mais significativas entre os dois modelos. Como já foi explicado, quando a inércia é mais alta, menos elementos mudam de estado, portanto sobrevivem mais elementos zero na configuração estacionária. Observando essas duas figuras, podemos ver que temos um aumento na quantidade de células zero, sobrando apenas algumas ilhas de estado +1 ou -1 (pequenos clusters desses estados envoltos por zeros) para o modelo probabilístico. No decorrer da evolução temporal, a tendência dessas ilhas é diminuir seus tamanhos. Enquanto isso, se olharmos para a figura 7.8 (modelo determinístico), não ocorre esse aumento no número de células zero. Boa parte dessas células permanecem sem mudar de estado durante toda a evolução do sistema. Como a densidade inicial do estado zero é grande, então na vizinhança da maioria das células +1 e -1 existirá pelo menos uma célula zero, fazendo com que essas células possam mudar para o estado zero, devido à probabilidade p_1 .

É interessante ver que há duas fases para o modelo probabilístico, uma onde a densi-

dade do estado zero diminui com o tempo e outra onde ela aumenta. Ocorre a mudança de fase quando a inércia passa de 2 para 3. Observando a tabela 2.1, podemos fazer algumas análises. As duas fases ocorrem quando $I=2$. Nessa condição cerca de 46% das possíveis vizinhanças fazem com que a célula não mude de estado. Já para $I=3$, temos que 60% das possíveis vizinhanças fazem com que essa célula não mude de estado (para fazer esses cálculos, basta contar quantas configurações de vizinhança não mudam o estado de uma célula e então dividir pelo número total de configurações de vizinhança existentes). Ou seja, quando a inércia é igual a 3, há mais configurações de vizinhança que não mudam o estado das células do que as que mudam. Isso, juntamente com a probabilidade não nula de criação de células zero, faz com que a densidade populacional de zeros aumente. Enquanto isso, para inércia igual a 2, temos mais configurações de vizinhança que mudam o estado das células do que as que não mudam, fazendo com que o aumento da densidade populacional dos estados +1 e -1 seja maior que o crescimento da população de zeros.

A sobrevivência de células zero apenas nas fronteiras entre os clusters. +1 e -1, quando $I=0,1$ e 2 já foi explicada no capítulo 2, entretanto, vamos lembrar aqui novamente. Ela acontece porque à medida que aumentamos a inércia, a probabilidade de formação de fronteiras onde uma célula zero sobreviva, aumenta bastante, indo de 5%, para $I=0$, a aproximadamente 18% para $I=2$. Quando a inércia é igual a 3 ou maior, não temos mais a formação de fronteiras bem definidas entre os clusters. +1 e -1. O que temos são clusters. +1 e -1 isolados em certas regiões, envoltos por muitas células zero.

Podemos observar o que foi explicado anteriormente na figura 7.10. Nesta figura vemos as configurações estacionárias para o modelo determinístico para inércias iguais a 0, 1, 2 e 3, respectivamente. Nela podemos ver que a configuração estacionária para inércia zero contém apenas um elemento zero na fronteira entre os estados. Já, para inércia 1 e 2, temos mais elementos zero nas fronteiras, sendo que esses elementos zeros apenas sobrevivem nas fronteiras dos estados. Para inércia 3 já quase não vemos clusters dos estados +1 e -1 e esses clusters não formam mais fronteiras.

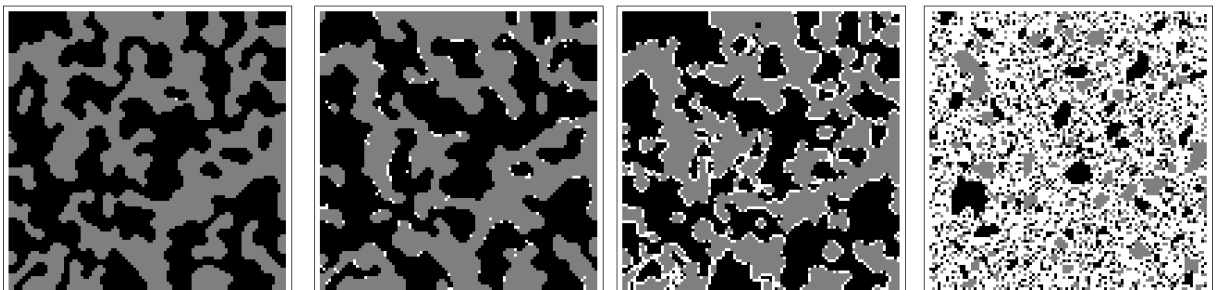
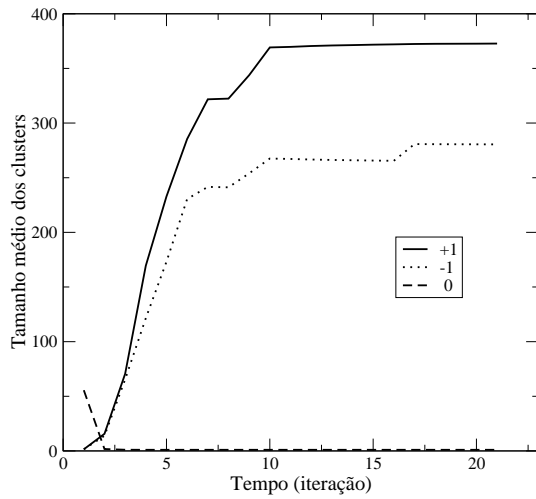


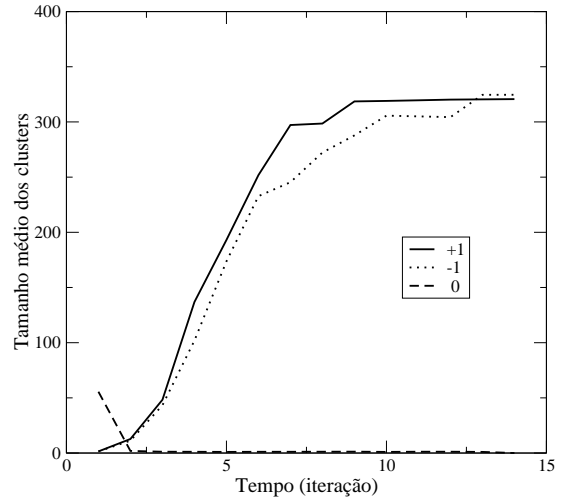
Figura 7.10: Configurações estacionárias para o modelo determinístico para inércias iguais a 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

As figuras 7.11 e 7.12 apresentam os gráficos do tamanho médio e da quantidade de clusters para cada geração do sistema e para inércia igual a zero tanto para o modelo determinístico quanto para o probabilístico. A partir destas podemos ver como ocorre

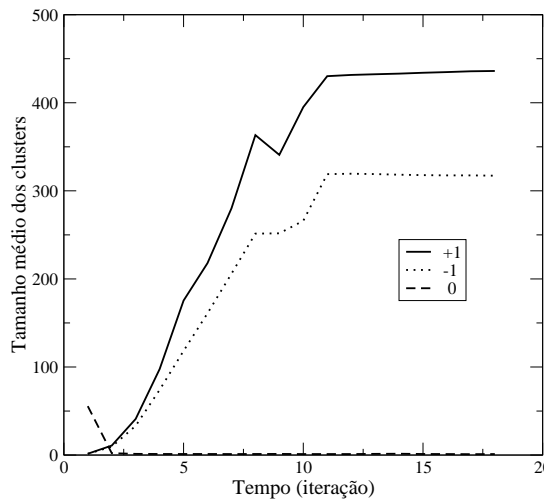
a formação de clusters no sistema. Tanto para o modelo determinístico, quanto para o probabilístico, o comportamento da formação de clusters é parecido, ocorrendo algumas diferenças no modelo probabilístico com $p_1 = 15\%$. Para o modelo determinístico, vemos que o tamanho médio dos clusters de elementos zero diminui e se estabiliza em um valor igual a 1 (uma única célula), ou seja, inicialmente temos 120 clusters com tamanho médio de 55 células e, na configuração estacionária, temos 14 clusters de tamanho médio igual a 1. Para o modelo probabilístico, os dados são parecidos, porém há uma variação tanto no tamanho, quanto na quantidade de clusters, pois há uma probabilidade não nula de células mudarem para o estado zero. Portanto clusters do estado zero podem aumentar ou diminuir com o tempo. Isso acontece porque a densidade do estado zero diminui muito, fazendo com que a quantidade e o tamanho dos clusters diminua quando olhamos a distribuição inicial e final (configuração estacionária) destes. Um fenômeno interessantes que acontece é o pico da quantidade de clusters do estado zero. Ou seja, nas primeiras iterações, a quantidade de clusters cresce rapidamente e então decai para valores bem baixos. Isso ocorre porque inicialmente temos uma densidade do estado zero alta (67%) e cerca de 120 clusters. Contudo, já na primeira geração, essa densidade decai para cerca de 21%, separando os grandes clusters em muitos clusters pequenos. À medida que o tempo passa, esses clusters de zeros vão sumindo, pois sua densidade continua decaindo com o tempo. Podemos verificar isso na figura 7.6 que, apesar de mostrar as 4 primeiras gerações para o modelo determinístico com inércia 1, representa muito bem esse pico na quantidade de clusters. Inicialmente vemos muitas células zero em todo o sistema. Porém, já na primeira iteração, as células +1 e -1 tomam conta de boa parte do sistema, quebrando os clusters do estado zero em muitos clusters menores. Na evolução temporal, esses clusters se tornam menores ainda e então, quando atingem um tamanho muito pequeno, começam a diminuir em quantidade. Já se olharmos para os clusters dos estados +1 e -1, vemos um aumento no tamanho médio dos clusters, isso porque a densidade desses estados também aumenta rapidamente. Após um número de iterações, o tamanho médio dos clusters se estabiliza, pois a densidade desses estados também se estabiliza. Olhando para a quantidade de clusters, vemos que ela diminui, o que é esperado, pois temos um aumento na densidade e no tamanho médio dos clusters. A diferença entre os dois modelos utilizados, se analisarmos a formação de clusters, está no surgimento de uma flutuação no tamanho médio dos clusters quando aumentamos a probabilidade p_1 . Então, se aumentarmos essa probabilidade, haverá mais células mudando para o estado zero, ocorrendo flutuações pequenas nos tamanhos dos clusters. Além disso, vemos que a quantidade de clusters, à medida que aumentamos a probabilidade, não sofre uma variação tão abrupta com o tempo e vai se tornando mais suave para p_1 maior.



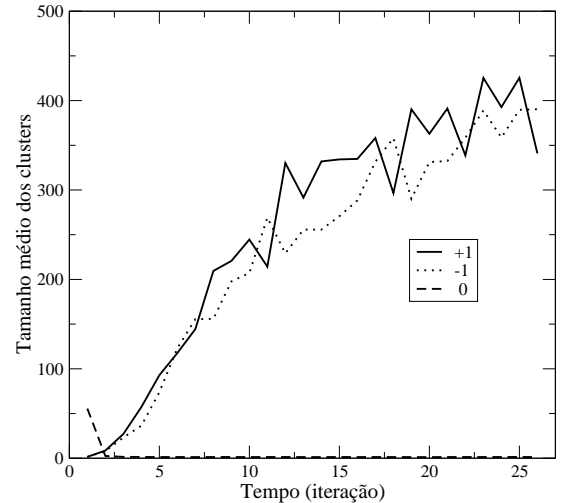
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 7.11: Tamanho médio de cluster versus geração para inércia zero para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

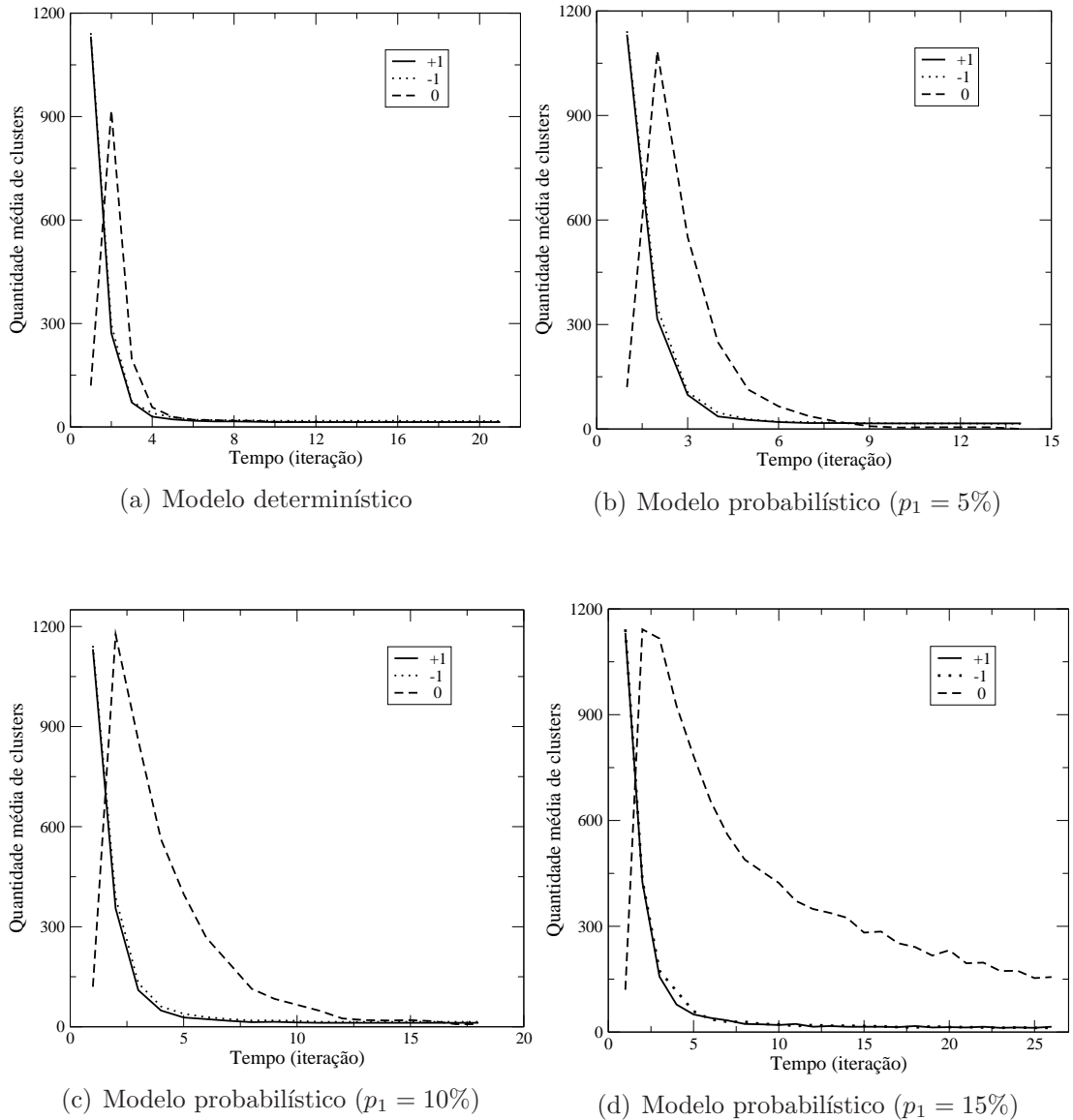
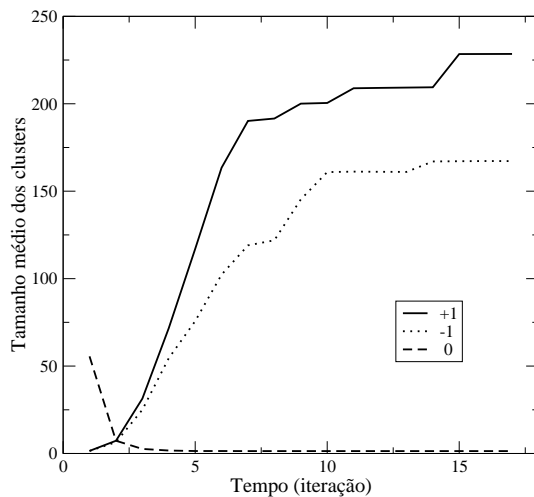


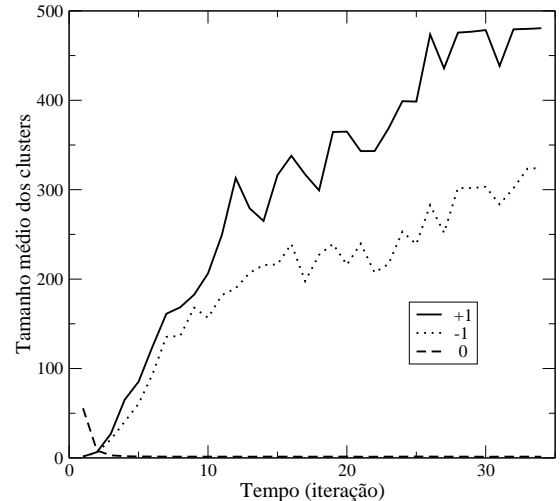
Figura 7.12: Quantidade de clusters versus geração para inércia zero para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Nas figuras 7.13 e 7.14 encontramos os gráficos do tamanho médio e da quantidade de clusters por iteração para inércia igual a 1, tanto para o modelo probabilístico, quanto para o determinístico, respectivamente. Nesses gráficos podemos ver que o tamanho médio e a quantidade de clusters tem um comportamento parecido ao da inércia igual à zero. Porém, temos clusters menores, para o modelo determinístico, e o sistema leva mais tempo para atingir uma estabilidade no tamanho dos clusters no modelo probabilístico. Já a quantidade de clusters do estado zero não é mais tão pequena na configuração estacionária quanto para inércia zero. Ou seja, para $I=1$, temos mais clusters zero no sistema comparado com o caso $I=0$. Existem 14 clusters para $I=0$, já para $I=1$, há 336 clusters. Isso acontece porque a densidade de zeros na configuração estacionária, apesar de ser baixa, é maior que a do sistema para inércia zero. Esses elementos zero que conseguem sobreviver, sobrevivem nas fronteiras formadas entre os outros estados e formam clusters

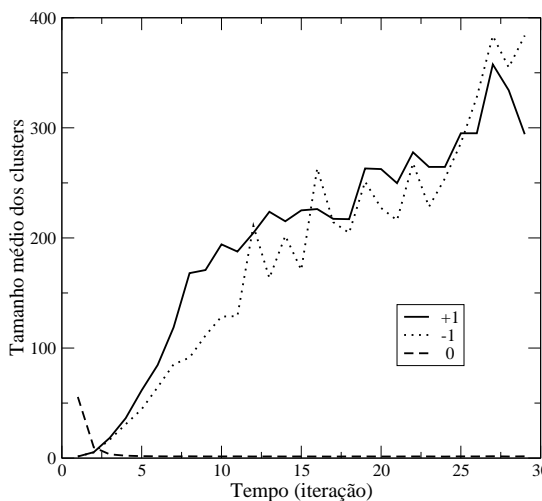
de tamanho médio ao redor de 1,3 elementos. Ou seja, temos cerca de 460 elementos zero (0,5%), distribuídos em 336 clusters com tamanho médio de 1,3 elementos (todos esses dados são para o modelo determinístico, o modelo probabilístico apresenta resultados semelhantes).



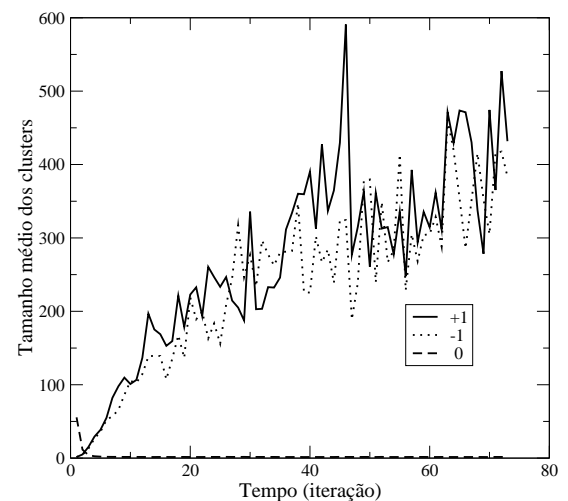
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

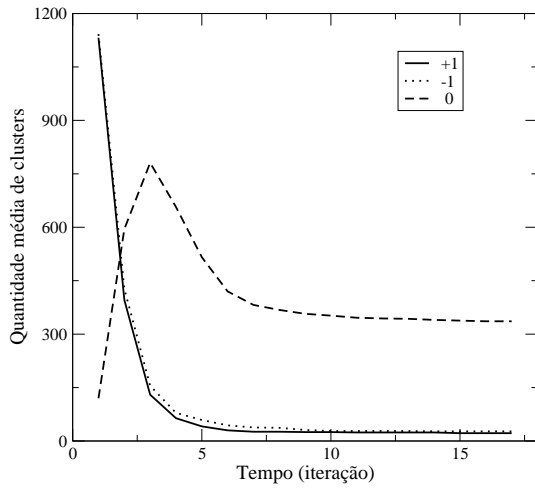


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

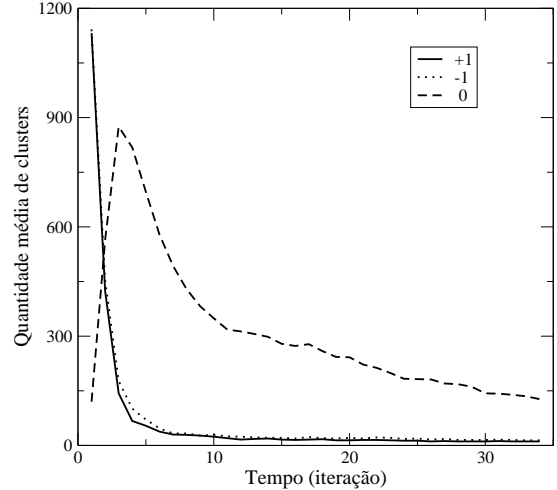
Figura 7.13: Tamanho médio de cluster versus geração para inércia um para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Para inércia igual a 1 também encontramos um pico, em torno de 5 gerações, na quantidade de clusters do estado zero. Contudo, esse pico agora é mais largo e deslocado para a direita quando comparado ao pico da inércia zero, uma vez que aumentando a inércia, a dinâmica de troca de estados se torna mais lenta. A altura desse pico também

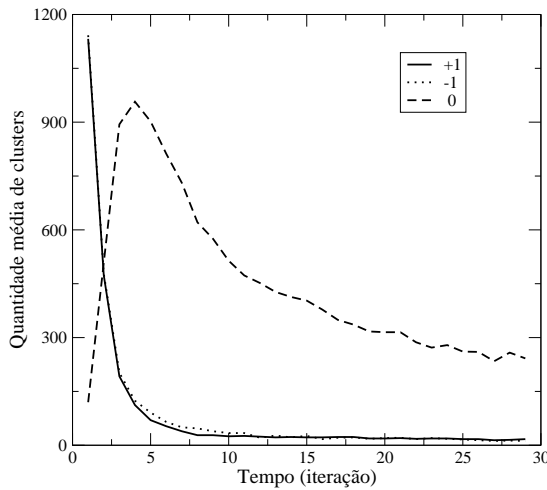
diminui quando comparamos ao pico para inércia zero, porque, como os zeros tendem a sobreviver durante mais tempo, os grandes clusters não são destruídos e desmontados em diversos pequenos outros clusters tão rapidamente.



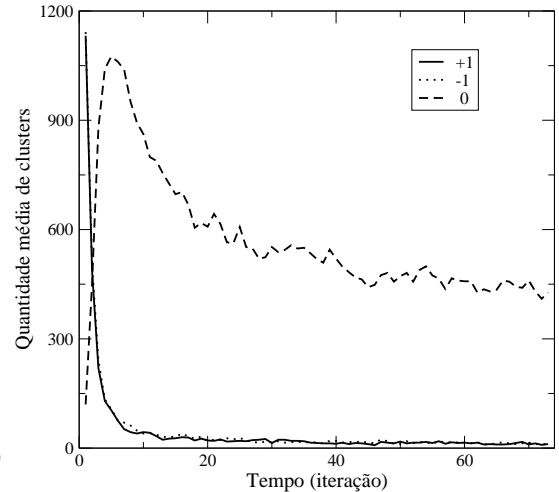
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)

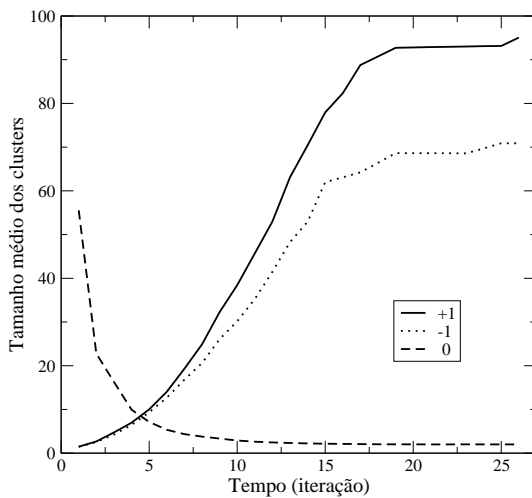


(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

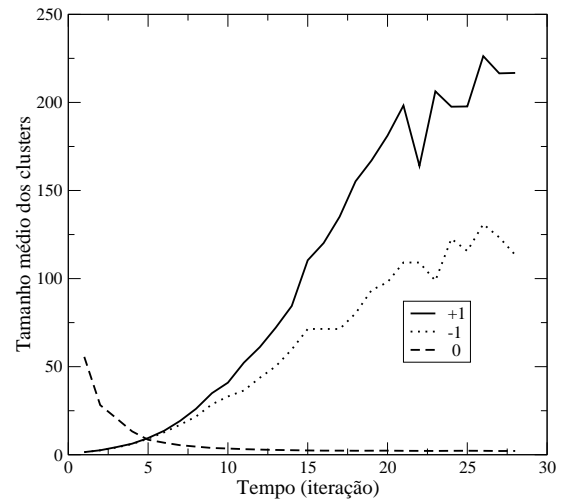
Figura 7.14: Quantidade de clusters versus geração para inércia um para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

Encontramos nas figuras 7.15 e 7.16 os gráficos do tamanho médio e da quantidade de clusters para inércia igual a dois, tanto para o modelo determinístico, quanto para o probabilístico. A partir dessas figuras podemos notar que o comportamento dessas curvas é parecido com as curvas para inércias menores, porém o tamanho médio dos clusters ao longo do tempo é menor. Notamos também um pequeno pico no número de clusters quando olhamos o modelo probabilístico. Quanto ao tamanho médio dos

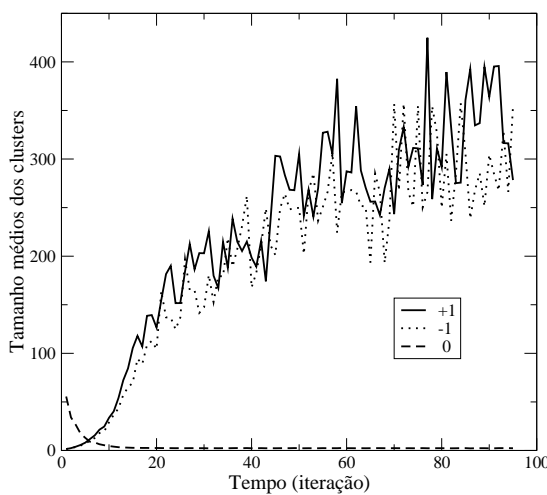
clusters, sabemos que a densidade dos estados e a quantidade de clusters já não diminui tão rapidamente quanto para inércias menores. Portanto, o tamanho médio dos clusters será menor também. Já, quanto ao pico que aparece na quantidade de clusters não ser tão evidente quanto para inércias menores, ocorre devido à formação de fronteiras entre os estados +1 e -1. É nessas fronteiras que as células zero sobrevivem, como podemos ver na figura 7.10. Com isso, essas fronteiras blindam clusters dos estados +1 e -1, tornando mais difícil a fusão de clusters. De certa forma, essas fronteiras (ecótonos) formam uma barreira de proteção para os clusters que ela cerca.



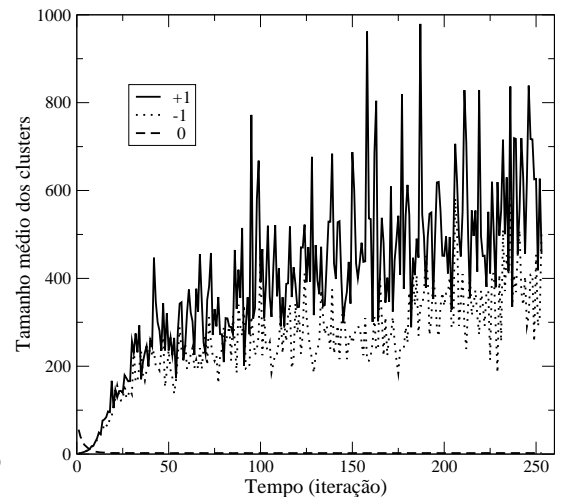
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 7.15: Tamanho médio de cluster versus geração para inércia dois para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

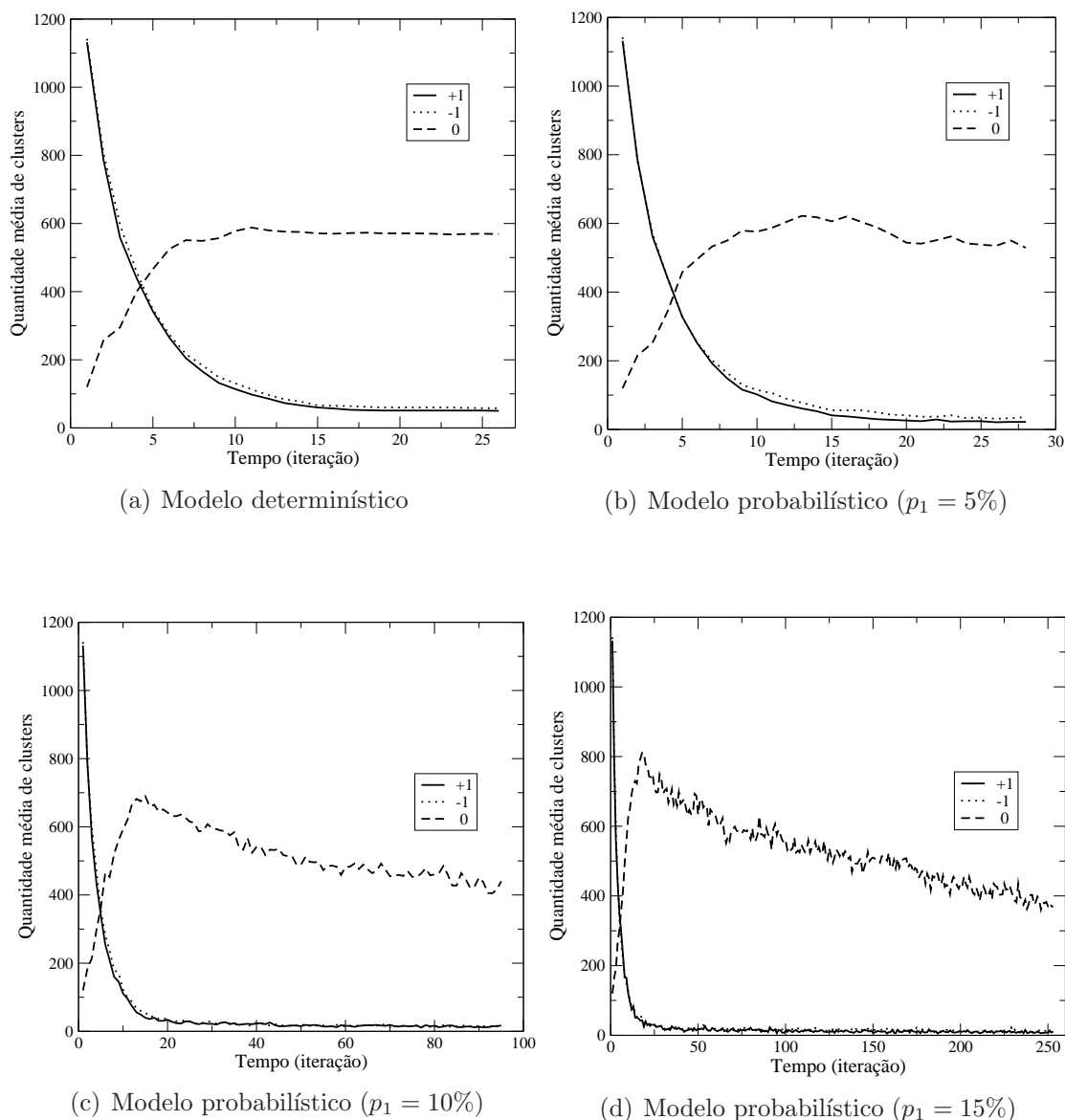
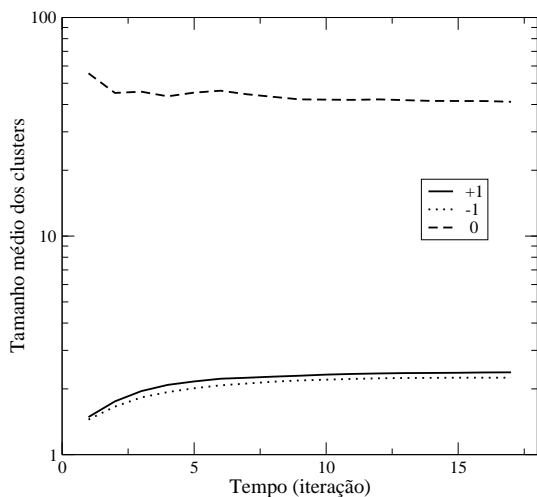


Figura 7.16: Quantidade de clusters versus geração para inércia dois para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

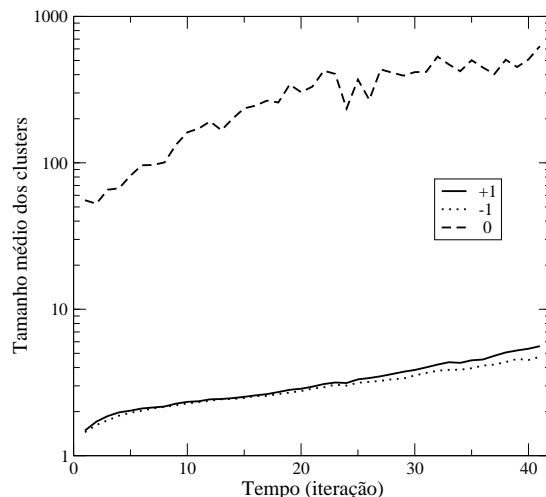
Quando olhamos as figuras 7.17 e 7.18, que mostram os gráficos do tamanho médio e da quantidade de clusters para inércia três, tanto para o modelo determinístico, quanto para o probabilístico, respectivamente. Podemos ver que a formação de clusters ocorre de maneira bem diferente da já vista para inércias menores. Além disso, comparando os modelos determinístico e probabilístico, vemos que os dois modelos tem comportamentos distintos. O modelo determinístico apresenta um decréscimo no tamanho médio dos clusters zero e um pequeno aumento em sua quantidade. Já os clusters dos estados +1 e -1 aumentam de tamanho e diminuem em número. Isso acontece porque, no decorrer do tempo, algumas células zero acabam se transformando em +1 ou -1 (devido à dinâmica de troca), fazendo com que alguns clusters desses estados se fundam, formando menos clusters, porém maiores. Para o modelo determinístico esse resultado já era esperado.

Entretanto, quando colocamos uma probabilidade não-nula de qualquer célula +1 ou -1 mudar para o estado zero espontaneamente, vemos que, para $I = 3$, o tamanho médio dos clusters aumenta bastante. Se o tamanho dos clusters aumenta mais que a taxa de crescimento de sua população, a quantidade de clusters deve diminuir, que é exatamente o que acontece. Esse fato evidencia que os clusters do estado zero que existem vão se fundindo e formando clusters cada vez maiores. Como a densidade dos estados +1 e -1 diminuem com o tempo, imagináramos que seus clusters deveriam diminuir também, porém não diminuem, aumentam. Temos que apenas alguns clusters conseguem sobreviver. E para sobreviverem durante o maior tempo possível deverão ter o maior tamanho possível. Podemos verificar tudo que foi explicado nas figuras 7.8 e 7.9, onde observamos que, à medida que o tempo passa, clusters pequenos dos estados +1 e -1, tendem a sumir, e clusters maiores, tendem a manter ou aumentar de tamanho. Também é possível perceber a distinção entre os dois modelos, pois, no modelo determinístico, os clusters dos estados +1 e -1 aumentam de tamanho e se fundem enquanto os elementos do estado zero vão diminuindo em quantidade, em tamanho. Já para o modelo probabilístico, apenas os clusters +1 e -1 que adquirem um tamanho grande, antes que o estado zero aumente em densidade, sobrevivem.

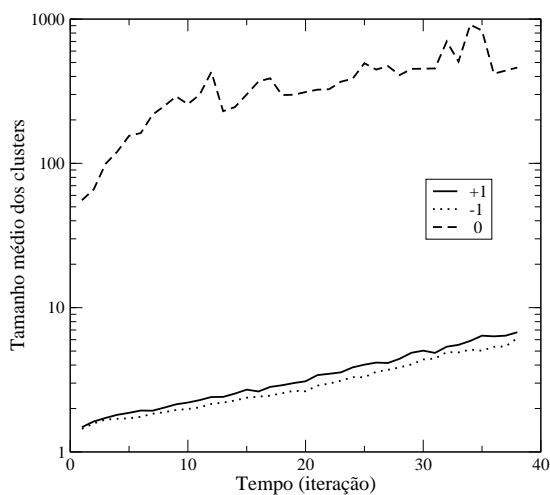
As figuras 7.19 e 7.20 podem exemplificar a sobrevivência do estado zero nas fronteiras entre os clusters dos estados +1 e -1. Essas figuras mostram as diversas gerações para o modelo determinístico com $I=1$ e 2. A partir delas podemos ver que nas primeiras iterações, as densidades dos estados +1 e -1 crescem rapidamente. O tamanho dos clusters vai aumentando com o tempo até atingir uma estabilidade em um valor próximo a 230 elementos por cluster para $I=1$ e 100 para $I=2$. Também podemos ver que o pico que aparece antes das primeiras 5 iterações para o número de clusters do estado zero (para $I = 1$), aparece devido ao crescimento populacional dos outros estados, que, ao se expandirem, quebram os clusters do estado zero, dividindo-os em outros clusters menores. Quando não há mais tantos clusters com tamanhos suficientes para serem quebrados, eles começam a desaparecer. Uma vez que os estados +1 e -1 tem maior força na competição dinâmica e acabam transformando os estados zero remanescentes em +1 ou -1. No final, apenas alguns elementos zero sobrevivam na fronteira entre os estados +1 e -1.



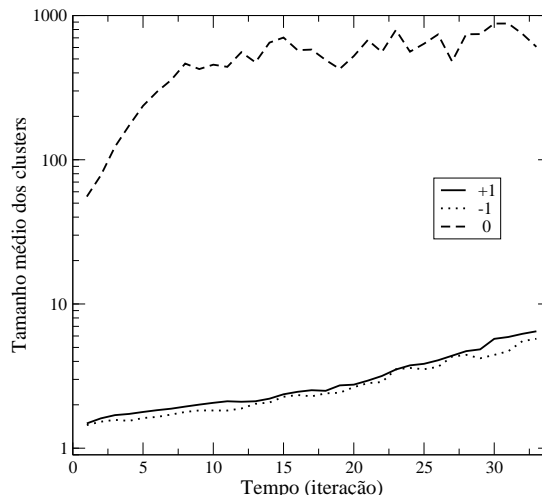
(a) Modelo determinístico



(b) Modelo probabilístico ($p_1 = 5\%$)



(c) Modelo probabilístico ($p_1 = 10\%$)



(d) Modelo probabilístico ($p_1 = 15\%$)

Figura 7.17: Tamanho médio de cluster versus geração para inércia três para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

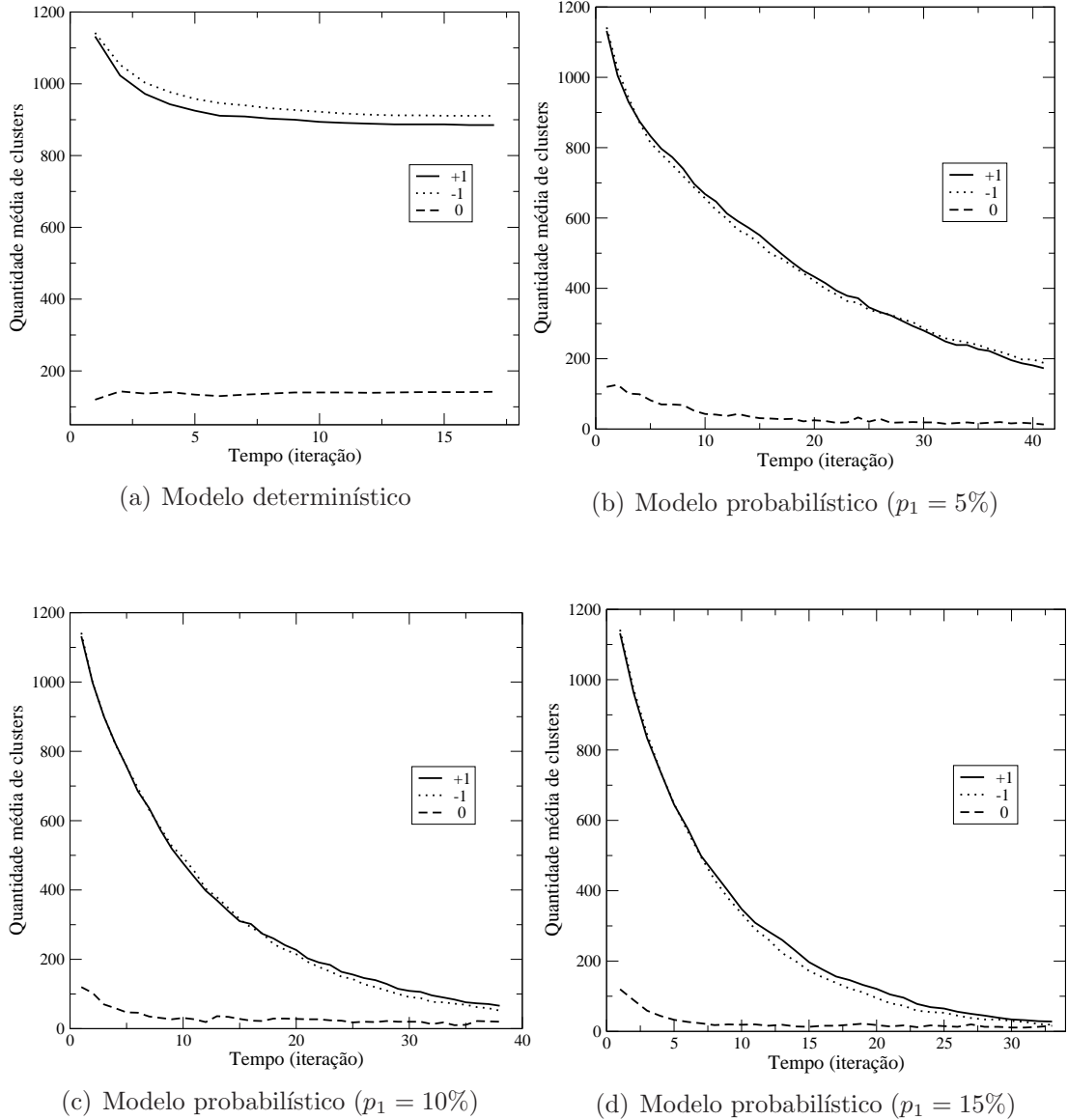


Figura 7.18: Quantidade de clusters versus geração para inércia três para os modelos (a) determinístico, (b) probabilístico com $p_1 = 5\%$, (c) probabilístico com $p_1 = 10\%$, (d) probabilístico com $p_1 = 15\%$.

7.3 Conclusões sobre a emergência de ecótonos a partir de nosso modelo de AC com inércia

Algumas conclusões gerais podem ser obtidas a partir desta análise simples, onde consideramos nosso modelo com a inércia fixa e igual para todas as células na rede. Em primeiro lugar, fica claro que a simples presença de uma inércia (sem impor nenhum padrão espaço-temporal para a mesma) já é suficiente para gerar a formação de contornos, onde o estado mais fraco, 0, consegue sobreviver. Por definição, isto é a essência de um ecótono. Além disso, encontramos dois comportamentos distintos entre os modelos determinístico e probabilístico quando $I=3$. No modelo probabilístico, para p_1 relativamente

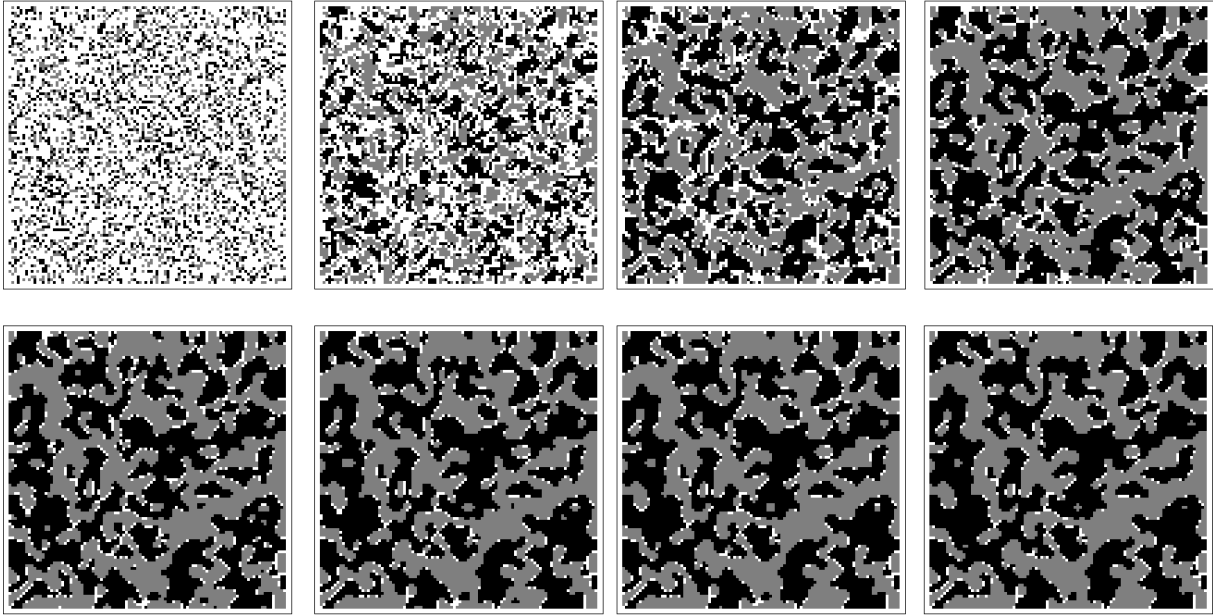


Figura 7.19: Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a um.

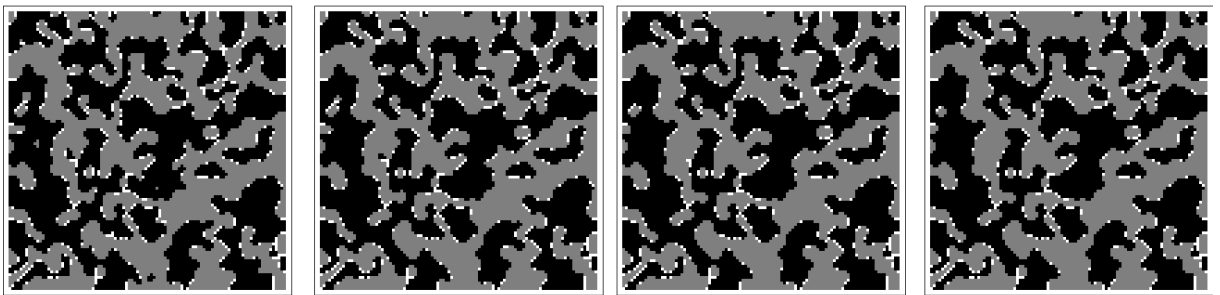


Figura 7.20: Últimas 4 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a um.

alto, as células zero vão tomando conta de todo o sistema. Isto em geral não é observado em ecótonos reais. A razão é que simplesmente os valores de p_1 não devem ser tão altos em sistemas ecológicos. Entretanto, este fenômeno é interessante em si só (como um sistema dinâmico) e portanto acabamos por investigá-lo. Já no modelo determinístico, isto não acontece, as células zero apenas sobrevivem no sistema, mas não se expandindo sobre ele. Com isso, concluímos que a única condição para que haja expansão do estado zero sobre o sistema é a existência de uma probabilidade não nula de qualquer célula mudar espontaneamente para o estado zero caso haja em sua vizinhança uma célula zero. Esse termo acarreta numa vantagem competitiva para o estado zero, uma vez que este poderá predominar sobre o sistema.

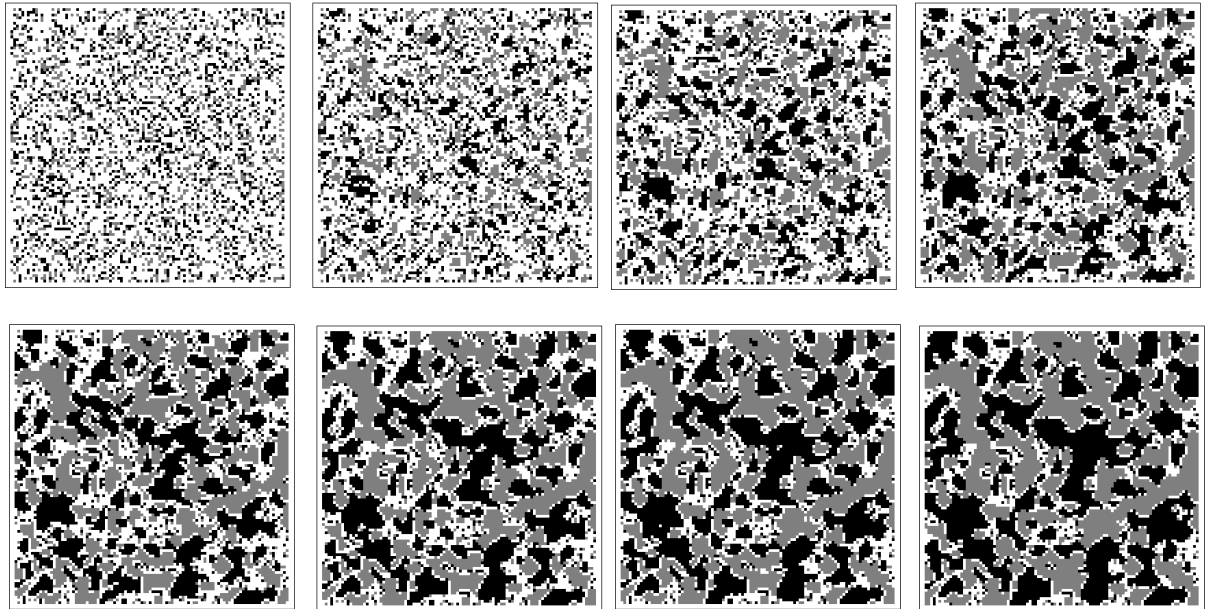


Figura 7.21: Primeiras 8 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a dois.

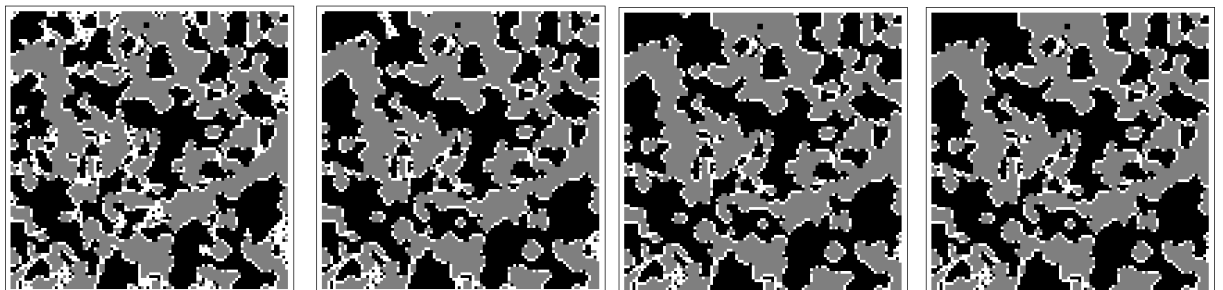


Figura 7.22: Últimas 4 gerações para o modelo determinístico com inércia igual a dois.

Capítulo 8

Conclusão e Considerações Finais

8.1 Conclusões

Nesse trabalho estudamos diversos aspectos de um autômato celular específico. Criamos dois modelos, um determinístico e um probabilístico. Vimos que os modelos determinístico e probabilístico de nosso AC mostram uma diversidade enorme de resultados e que há muito que pode ser feito com eles. Estudamos a evolução espaço-temporal de vários sistema tanto qualitativamente quanto quantitativamente. Isso é importante porque podemos conhecer qual é a influência de diferentes distribuições espaciais de estados sobre a dinâmica evolutiva dos sistemas estudados. Podemos exemplificar a influência de distribuições espaço-temporais dos estados e da inércia com trabalhos sobre formação de ecótonos, formação de clusters de certas populações, entre outros. Estudamos e entendemos como pode ocorrer essa formação de ecótonos usando nosso modelo. Além disso, o estudo da distribuição espacial também pode ser importante nos modelos de disputas eleitorais. Uma vez que alguns fenômenos surgem apenas da distribuição espacial dos estados. Por exemplo, a criação de clusters de certos estados no sistema pode ser pensado como a distribuição dos votos nos bairros, ou mesmo cidades. Portanto, é importante entender a dinâmica espaço-temporal de evolução dos estados em um sistema.

Quando analisamos a evolução de nosso sistema, tentamos prever quais seriam os valores de seus parâmetros finais em função de parâmetros iniciais. Estudamos como a densidade, o tamanho e a quantidade de clusters no estado estacionário variam em função da densidade inicial. Sempre que aumentamos a densidade inicial de um estado, a densidade final deste aumenta também. O tamanho médio dos clusters é praticamente constante, enquanto a quantidade destes aumenta com o tamanho do sistema. Também sabemos que para densidade mais baixa temos mais clusters, só que menores quando comparados com densidade mais alta.

Um fenômeno bem interessante e digamos anômalo, é o fato de que, para inércia igual a 4 e tamanho do sistema entre 40 e 60, a quantidade e o tamanho médio dos clusters não

segue o padrão visto para outros tamanhos. Isso indica uma relação entre os efeitos das bordas tipo parede utilizadas no modelo e a dinâmica de evolução dos estados no interior do sistema. Entretanto, com nossas análises não foi possível determinar uma relação exata entre os efeitos de borda e o comportamento anômalo apresentado.

Também modificamos o modelo determinístico, criando um probabilístico, incluindo uma probabilidade não-nula de uma célula qualquer mudar para o estado zero se houver em sua vizinhança uma célula no estado zero. Esses dois modelos apresentam resultados ao mesmo tempo similares, porém distintos. Quando a inércia é baixa, o comportamento dos dois modelos é parecido, porém quando a inércia é maior, $I \geq 3$, os modelos tem comportamentos bem distintos. Além disso, quando a inércia varia no tempo, os dois modelos apresentam características bem distintas.

Ainda estudamos o motivo pelo qual matrizes, usando o modelo determinístico, não atingirem uma configuração estacionária. Foi possível determinar quando isso ocorre e o porquê dessa ocorrência. Na verdade, mostramos que, nesse caso, a não convergência acontece devido à definição do critério de parada. Quando alteramos esse critério, vimos que essas matrizes tinham uma convergência periódica. Sendo que essa periodicidade acontecia devido às estruturas espaciais oscilantes que surgiam no sistema.

E, para finalizar, estudamos a dinâmica de formação dos ecótonos. Vimos que os ecótonos surgem naturalmente em nosso modelo, e que, dependendo da inércia, e também é possível maximizar seu efeito. Além disso, vimos que essas fronteiras podem se comportar como barreiras, protegendo os clusters que envolvem. Também percebemos que as formações dessas fronteiras ocorrem já nas primeiras iterações do sistema, sendo assim, o início da evolução é muito importante para a formação desses ecótonos. Outro fator interessante aconteceu no modelo probabilístico, onde notamos que, se a inércia variar no tempo (sazonalmente), essas regiões de ecótonos podem variar em tamanho.

8.2 Considerações finais e trabalhos futuros

Apesar desses modelos serem muito simples e de fácil implementação computacional, eles apresentam resultados surpreendentes. Há diversas áreas de estudo que podemos utilizá-los. Portanto, dentre as perspectivas futuras, podemos listar:

- Estudo da formação e evolução de ecótonos na natureza, modelando regiões onde isso acontece (ecótono formado pelo cerrado e floresta amazônica) por meio de nosso modelo.
- Aplicação desse modelo em disputas eleitorais e utilizar os dados de eleições para validá-lo.
- Estudo da dispersão de opiniões em sociedades utilizando ao invés de uma probabilidade de persuasão, a inércia, que seria uma resistência natural de uma pessoa se

convencer sobre certa opinião.

- Estudo de disputas territoriais por agentes diferentes, que podem ser mercadorias ou espécies que competem entre si.
- Criação uma situação onde temos clusters de um certo estado, com inércia alta, dentro de um cluster grande de outro estado, exemplificando, em grandes clusters de certa opinião (estado), podemos fazer surgir alguns elementos de opinião contrária, mas com resistência à mudança muito alta.
- Diminuir ou aumentar a inércia quando os clusters alcançam certos tamanhos, fazendo com que apenas pequenos clusters sobrevivam.

Dessa forma, pretendemos dar sequência a esse trabalho, estudando o modelo, simulando alguns sistemas reais, realizando adaptações ao modelo caso necessárias, utilizando a inércia como um análogo determinista à probabilidade de troca em sistemas que utilizem esse método. Um sistema real que pretendemos simular com nosso modelo, utilizando os resultados sobre a formação e evolução de ecótonos, é encontrado em nosso território nacional, mais precisamente a fronteira entre o Cerrado e a Floresta Tropical Amazônica. Nessa região, pretendemos estudar a influência do desmatamento sobre a biodiversidade que lá existe.

Apêndice A

Algoritmo de Hoshen-Kopelman

O algoritmo Hoshen-Kopelman [67] agrupa e identifica clusters de um estado. Ele utiliza duas matrizes de armazenamento provisório para realizar esse procedimento. Uma matriz chamada de “M”, que classifica cada cluster, ou seja, os rotula com um número. E uma matriz chamada de “numb”, que nos dá o tamanho de cada cluster.

A matriz “M” tem tamanho $N \times N$, onde N é o tamanho do sistema. Pois a quantidade máxima de clusters não pode ultrapassar o número de células do sistema. Essa matriz é equivalente à matriz de estados do sistema, porém, ela trás, a cada célula é atribuído um valor, que corresponde ao número do cluster que essa célula pertence. A matriz “numb”, que dará o tamanho de cada cluster, para simplificar os cálculos será uma matriz coluna, com dimensão $1 \times N^2$, pois, poderemos ter no máximo N^2 clusters. Já, “numb”, identificará o tamanho de cada cluster da seguinte forma: cada posição k dessa matriz coluna é referente ao cluster de número k . Se nessa posição k , o valor atribuído for 5, significa que o cluster de número k é constituído por 5 células.

A identificação e classificação de clusters acontece quando fazemos uma varredura sobre toda a matriz, verificando a vizinhança de cada elemento. Se uma célula tiver em sua vizinhança (primeiros vizinhos) uma célula no mesmo estado, estes formarão um cluster. Toda a análise dos clusters de um estado é feita considerando as células em outros estados como vazias, ou seja, sem nenhum valor atribuído para seu estado.

A varredura inicia pela na 1ª célula, da 1ª linha e coluna. Se essa célula estiver no estado α , o elemento “M(1,1)” recebe um identificador 1 e matriz “numb(1)” recebe o número 1, indicando que o cluster nomeado como 1, tem tamanho 1. Se o estado for diferente de α , “M” recebe um identificador zero, que significa vazia, e “numb” não recebe nada, pois nenhum cluster foi identificado ainda.

A próxima célula da varredura é da 1ª linha, 2ª coluna. Se ela estiver no estado α , deve-se verificar sua vizinhança. Na primeira linha, verificamos apenas os vizinhos à esquerda. Se esse vizinho estiver no mesmo estado α , “M(1,2)” recebe o mesmo identificador da célula vizinha. Como o cluster 1 tem dois elementos, então, “numb(1)” receberá “numb(1,2)=2”. Se a célula vizinha não estiver no mesmo estado, “M(1,2)=2”, pois teremos um cluster

diferente, e “ $\text{numb}(2)=1$ ”, pois o cluster 2 tem 1 elemento. A varredura continua até o final da linha.

A partir da segunda linha, a vizinhança a ser analisada é composta pelos vizinhos acima e à esquerda. Aqui continuamos rotulando cada cluster e contando quantos elementos há em cada cluster. Para melhor entendimento desse algoritmo, continuaremos a explicação através de um exemplo.

Na figura A.1, temos algumas linhas de células em dois estados. Sendo o estado +1 como uma célula preta e o estado zero como células brancas. Nessa figura, podemos ver 4 divisões, a), b), c) e d). Em a), temos apenas a distribuição dos estados em 4 linhas do sistema. Em b), temos os rótulos dos clusters do estado +1 para a primeira linha. Em c), rotulamos a segunda linha e a terceira linha está rotulada em d). Estamos identificando apenas os clusters do estado preto (+1).

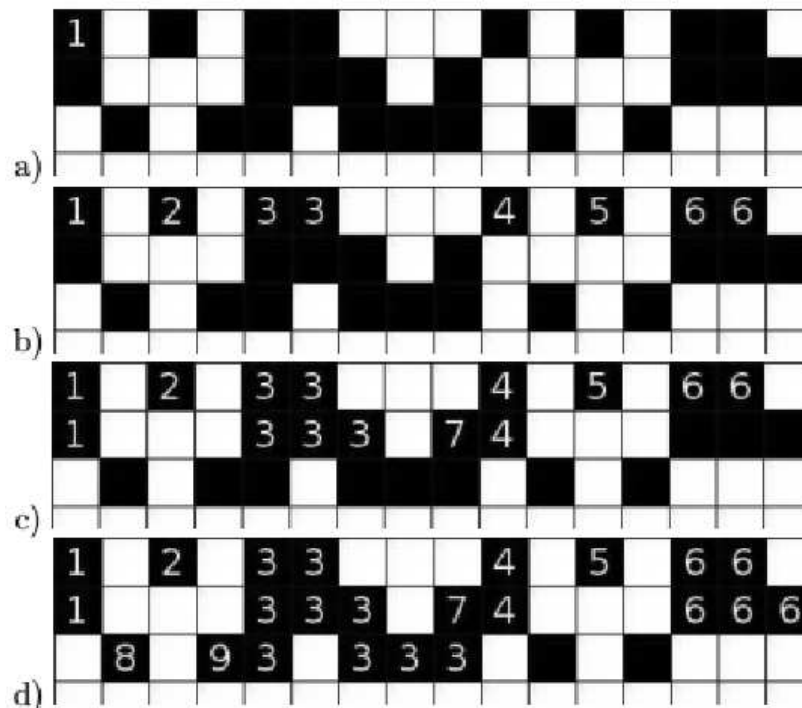


Figura A.1: Exemplo para explicar os algoritmos de Hoshen-Koppelman. Distribuição espacial dos estados +1 (preto) e 0 (branco).

Para iniciar esse exemplo, começamos a varredura pelo elemento (1,1), que está no estado +1, portanto $M(1,1) = 1$ e $\text{numb}(1) = 1$. O elemento (1,2) está no estado zero, portanto $M(1,2) = 0$ e numb não se altera. O elemento (1,3) está no estado +1 e seu vizinho à esquerda não está no mesmo estado que ele, portanto, um novo cluster deve ser formado. Então $M(1,3) = 2$ e $\text{numb}(2) = 1$. Como o elemento (1,4) está no estado zero, $M(1,4) = 0$. Seguindo a varredura, temos o elemento (1,5), que está no estado +1. Seu vizinho à esquerda não está no mesmo estado que ele, então $M(1,5) = 3$ e $\text{numb}(3) = 1$. Já o elemento (1,6), de estado +1, tem um vizinho à esquerda no mesmo estado que ele,

portanto, $M(1,6)$ receberá o mesmo rótulo de $M(1,5)$, então $M(1,6) = M(1,5) = 3$ e $numb(3) = 2$, pois, agora, o cluster número 3, tem 2 elementos. Continuamos rotulando as células com o número de seu cluster até o final da linha. Podemos ver isso na figura A.1.b).

Na segunda linha, o primeiro elemento, $(2,1)$ está no estado +1. Sua vizinhança, uma célula acima, está no mesmo estado, portanto, $M(2,1) = M(1,1) = 1$ e $numb(1) = 2$. Seguindo nessa linha, o próximo elemento +1 será o $(2,5)$. Analisando sua vizinhança, a célula acima está no mesmo estado que ela, e a célula à esquerda não. Então, $M(2,5) = M(1,5) = 3$ e $numb(3) = 3$, pois o cluster 3 já tinha 2 elementos. A célula $(2,6)$ está no estado +1 e tem seus dois vizinhos, acima e à esquerda, no mesmo estado, portanto, $M(2,6) = M(2,5) = M(1,6) = 3$ e $numb(3) = 4$. Para o elemento $(2,7)$, temos o mesmo raciocínio, então, $M(2,7) = M(2,6) = 3$ e $numb(3) = 5$. Continuando a varredura, temos, no estado +1, o elemento $(2,9)$, cujos vizinhos acima e à esquerda não estão no mesmo estado que ele, portanto, um novo cluster deve ser criado. Com isso, $M(2,9) = 7$, pois já temos 6 clusters formados. E $numb(7) = 1$. Nesse ponto da explicação que chegamos à parte mais importante do algoritmo, quando temos uma célula, neste caso $(2,10)$, que, seus vizinhos, acima e à esquerda, têm rótulos de cluster diferentes. Aqui, o vizinho acima tem $M(1,10) = 4$ e o vizinho à esquerda tem $M(2,9) = 7$. Se isso acontece, $M(i,j)$ recebe o rótulo de menor valor, ou seja, $M(2,10) = 4$. Além disso, a matriz $numb$, na posição referente ao cluster com maior rótulo recebe o valor oposto (negativo) do rótulo de menor valor, isto é, $numb(7) = -4$, indicando que o cluster de número 7 se une ao cluster de número 4. $numb(4)$ recebe agora o valor que já estava atribuído a ele, adicionado de 2 unidades, porque, agora esse cluster conta com mais duas células ($numb(4) = 3$). Portanto, toda vez que os vizinhos, acima e à esquerda, tiverem rótulos de cluster diferentes, o maior rótulo terá, em sua contagem de clusters, um valor negativo, cujo sinal de menos indica que essa célula faz parte de outro cluster, e seu valor, indica a qual cluster essa célula faz parte. Sendo assim, podemos nomear os outros elementos da figura. Teremos mais dois casos que acontecem de forma similar a esse descrito. Um deles é para a célula $(3,4)$, que, em sua vizinhança não tem nenhuma célula no mesmo estado, tendo então, $M(3,4) = 9$. A célula à direita, $(3,5)$ terá então, vizinhos com rótulos diferentes ($M(2,5) = 3$ e $M(3,4) = 9$). Portanto, $M(3,5) = 3$ (recebe o menor rótulo), $numb(9) = -3$ e $numb(3) = 5 + 2 = 7$ (5 elementos já existentes no cluster). Próxima célula que terá que seguir essa parte do algoritmo é a $(3,9)$, pois, os vizinhos têm rótulos diferentes. Sendo eles, acima, $M(2,9) = 7$ e à esquerda, $M(3,8) = 3$, portanto, $M(3,9) = 3$. Agora vamos analisar $numb(7)$, que é igual a $numb(7) = -4$, que é negativo, com isso, não podemos fazer, ainda, $numb(7) = -3$. Esse valor, -4, indica que o cluster número 7, célula $(2,9)$, faz parte do cluster número 4, então, temos que atribuir a $numb(4)$ o valor de -3. Sendo assim, temos, $numb(4) = -3$, $numb(7) = -3$ e $numb(3) = 13$, pois, anteriormente, $numb(3) = 9$ e $numb(4) = 3$, então, $numb(3)$ será a

soma do seu valor anterior, mais *numb*(4), mais um. Dessa forma, conseguimos identificar, classificar e contar os clusters em nosso sistema.

Abaixo, podemos encontrar o código fonte desse algoritmo implementado na linguagem do programa “Wolfran Mathematica 7”.

```

sizeclus[populacao0_, alfa0_] :=
Block[{populacao = populacao0, alfa = alfa0},

n = Dimensions[populacao][[1]];
numb = Table[0, {i, n*n}];
M = Table[0, {i, n}, {j, n}];
label = 1;
cm = 0; cq = 0; left = 0; up = 0;

For[j = 1, j <= n, j++,
For[i = 1, i <= n, i++,
If[populacao[[i, j]] == alfa,
If[j - 1 >= 1,
If[populacao[[i, j - 1]] == alfa, left = M[[i, j - 1]],
left = 0],
left = 0];
If[i - 1 >= 1,
If[populacao[[i - 1, j]] == alfa, up = M[[i - 1, j]], up = 0],
up = 0];

l = left;
While[numb[[1]] < 0, left = -numb[[1]]; l = left;];
l = up;
While[numb[[1]] < 0, up = -numb[[1]]; l = up;];

Which[
up == 0 && left == 0, M[[i, j]] = label; numb[[label]] += 1;
label += 1; Continue[;];
up == 0 && left > 0, M[[i, j]] = left; numb[[left]] += 1;
Continue[;];
up > 0 && left == 0, M[[i, j]] = up; numb[[up]] += 1;
Continue[;];
up > 0 && left > 0, Which[
left < up, M[[i, j]] = left; numb[[left]] += 1;
numb[[left]] += numb[[up]]; numb[[up]] = -left; Continue[;];
up < left, M[[i, j]] = up; numb[[up]] += 1;
numb[[up]] += numb[[left]]; numb[[left]] = -up; Continue[;];
0 == 0, M[[i, j]] = up; numb[[up]] += 1; Continue[;];
],
M[[i, j]] = 0;
]
]
]
For[i = 1, i <= n, i++,
For[j = 1, j <= n, j++,
s = M[[i, j]];
Which[numb[[s]] < 0, M[[i, j]] = -numb[[s]];]
]
]
For[L = 1, L < n*n, L++,
Which[numb[[L]] > 0, cm += numb[[L]]; cq++;]

```

```
];  
If[cq != 0, cm = cm/cq]  
]
```

Referências Bibliográficas

- [1] MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman, New York-NY, 1983.
- [2] CLADIS, P.E; PALFFY-MUHORAY, P. **Spatio-Temporal Patterns In Nonequilibrium Complex Systems**. Addison-Wesley, Reading-MA, 1995.
- [3] THOMPSON, D'Arcy W. **On Growth and Form: A New Edition**. Cambridge University Press, Cambridge, 1942.
- [4] SOLÉ, R. V.; BASCOMPTE, J. **Self-Organization in Complex Ecosystems**. Princeton Univ. Press, Princeton-NJ, 2006.
- [5] MALCHON, H.;PETROVSKII, S. V.; VENTURIO, E. **Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation**. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton-FL, 2007.
- [6] ANTENEODO, C; LUZ, M. G. E. **Complex dynamics of life at different scales: from genomic to global environmental issues** (special issue), *Philos. Trans. Roy. Soc. A*. v. 368. n.1933. 2010.
- [7] HAKEN, H. **Dynamic Patterns in Complex Systems**. World Scientific, Singapore. 1988.
- [8] BARABASI, A.-L. **Bursts: The Hidden Pattern Behind Everything We Do**. Dutton, New York-NY. 2010.
- [9] WOLFRAM, S. **A new kind of science**. Wolfram Media, Champaign-IL. 2002.
- [10] HOEKSTRA, A.G.; KROC, J.; SLOOT, P.M.A **Simulating Complex Systems by Cellular Automata**. Springer, Berlin. 2010.
- [11] WOLFRAM, S. **Cellular automata and complexity: collected papers**. Westview Press, Julho 2002.
- [12] SCHIFF, Joel L. **Cellular automata: a discrete view of the world (wiley series in discrete mathematics & optimization**. Wiley-Interscience. 2008.
- [13] WOLFRAM, S. Universality and complexity in cellular automata. **Physica 10D**, v.1 n.35. 1984.
- [14] WOLFRAM, S. Twenty problems in the theory of cellular automata. **Physica Scripta T9**, 170-185. 1985.
- [15] LINDGREN, K.; NORDAHL, M.T. Universal computation in simple one-dimensional cellular automata **Complex Systems 4**, 299-318. 1990.
- [16] NEUMANN, John Von. **Theory of self-reproducing automata**. University of Illinois Press Champaign, IL, USA. 1966.
- [17] GARDNER, M. Cellular automata, self-reproduction, garden of eden and game life. **Scientific American**, v. 224, n. 2, p. 112-&. 1971.
- [18] ABEL, David L.; TREVORS, Jack T. Self-organization vs. self-ordering events in life-origin models. **Physics of Life Reviews**, v. 3, n. 4, p. 211-228. 2006.
- [19] ROHDE, K. Cellular automata and ecology, **Oikos 110**, 203-207. 2005.
- [20] ERMENTROUT, G. B.; EDELSTEIN-KESHET, L. Cellular Automata Approaches to Biological Modeling **J. Theor. Biol.** **160**, 97-133. 1993.
- [21] MAINI, P. K.; DEUTSHC, A.; DORMANN, S. **Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation**. Birkhäuser, Boston-MA. 2005.

- [22] VARGAS, D. V.; SIMÕES, E. do Valle; DELBEM, Alexandre C. B. .Uma colônia artificial de formigas modelada por sistema evolutivo. Universidade de São Paulo. 2004. Disponível em: <<http://fog.neopages.org/papers/SBRN2004.pdf>> Acesso em: 10 jan. 2010.
- [23] RUCKER, R. **The lifebox, the seashell, and the soul**. Basic Books, Thunder's Mouth Pr, New York, NY. 2005.
- [24] NAGEL, K. ;SCHRECKENBERG, M. A cellular automaton model for freeway traffic. **Journal de Physique I**, v. 2, p. 2221-2229. 1992.
- [25] HELBING, D.; SCHRECKENBERG, M. Cellular automata simulating experimental properties of traffic flow. **Physical Review E**, v. 59, n. 3. 1999.
- [26] MACKAY, G.; JAN, N. Forest fires and critical phenomena. **Journal de Physics A: Mathematical and General**, v. 17, p. L757-L760. 1984.
- [27] ENCINAS, A. H. et all. Simulation of forest fire fronts using cellular automata. **Advances in engineering software**, v. 38, p. 372-378. 2007.
- [28] KRAFYLIDIS, I.; THANAILAKIS, A. A model for predicting forest fire spreading using cellular automata. **Ecological Modelling**, v. 99, p. 87-97. 1997.
- [29] BECHARA, Bruno Flávio Zanatta; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta . **Autômato Celular no Estudo Microscópico dos Indivíduos HIV-Positivos com Tratamento**. 2006. Trabalho apresentado à 6. Semana da Matemática, Uberlândia, 2006.
- [30] FUENTES, M.A.; KUPERMAN, M.N. Cellular automata and epidemiological models with spatial dependence. **Physica A**, v. 267, p. 471-486. 1999.
- [31] WILLOX, R. et all. Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models. **Physica A**, v. 328, p. 13-22. 2003.
- [32] GRASSBERGER, P. Chaos and diffusion in deterministic cellular automata. **Physica D**, v. 52. 1984.
- [33] KATERELOS, I. D.; KOULOURIS, A. G. Is prediction possible? Chaotic behavior of multiple equilibria regulation model in cellular automata topology. **Complexity**, v. 10, n. 1, p. 23-36. 1984.
- [34] COLE, Stephen N. Real-time computation by n-dimensional iterative arrays of finite-state machines. **IEEE Transactions on Computers**, v. 18, p. 349-365. 1969.
- [35] MITCHELL, M. Computation in cellular automata: a selected review. **Nonstandard Computation**. Weinheim: VHC Verlagsgesellschaft. 1996.
- [36] OLIVEIRA, Gina M. B.; OMAR, Nizam; OLIVEIRA, Pedro P. B. Computação e evolução em autômatos celulares unidimensionais. **Revista Mackenzie de Engenharia e Computação**, v. 1, n. 1, p. 39-55. 2000.
- [37] ZUZE, K. Calculating space. **MIT University Press**, MIT Technical Translation AZT-70-164-GEMIT. 1970.
- [38] GARDNER, M. **The game of life, parts I-III**. Chs. 20-22 in *Wheels, Life, and other Mathematical Amusements*. New York: W. H. Freeman, 1983.
- [39] WOLFRAM, Stephen. Cellular automata as simple self-organizing systems. **Caltech preprint**, CALT-68-938. 1982.
- [40] RENDELL, P. This is a turing machine implemented in Conway's game of life. Disponível em: <<http://www.rendell.uk.co/gol/tm.htm>> Acesso em: 3 fev. 2010.
- [41] CHOWDHURY, D.; WOLF, D. E.; SCHRECKENBERG, M. Particle hopping models for two-lane traffic with two kinds of vehicles: Effects of lane-changing rules. **Physica A**, v. 235, n. 3-4, p. 417-439. 1997.
- [42] WU, F. L. Calibration of stochastic cellular automata: the application to rural-urban land conversions. **International Journal of Geographical Information Science**, v. 16, n. 8, p. 795-818. 2002.
- [43] KRAMER, Klaus - **Autômatos Celulares com Inércia**. Curitiba. 2010. Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná.

- [44] CLEMENTS, F. E. *Research Methods in Ecology*. **Lincoln, Neb., University Pub. Co.**, 1905.
- [45] BURKE, D.M., NOL, E. Edge and fragment size effects on the vegetation of deciduous forests on Ontario, Canada. **Nat. Areas J.** 18, 45-53. 1998.
- [46] WATKINS, R.Z., et. al. Effects of forest roads on understory plants in a managed hardwood landscape. **Conserv. Biol.** 17, 411-419. 2003.
- [47] CZEIZLER, E.; KARI, J. M. A tight linear bound on the neighborhood of inverse cellular automata. **Automata, Languages and Programming, Proceedings, Book Series: Lecture Notes in Computer Science**, v. 3580, p. 410-420. 2005.
- [48] PEPPER, F.; ISOKAWA, T.; Kouda, N.; et al. Self-timed cellular automata and their computational ability. **Future Generation Computer Systems**, v. 18,n. 7, p. 893-904. 2002.
- [49] EPPSTEINA, M. J.; BEVERB, J. D.; MOLOFSKYC, J. .Spatio-temporal community dynamics induced by frequency dependent interactions. **Ecological Modelling**, v. 197, p. 133-147. 2006.
- [50] KAPLIY, S.A; PROKAZNIKOV, A. V.; RUD, N.A. A discrete model of adsorption with three states. **Technical Physics Letters**, v. 30,n. 7, p. 595-597. 2004.
- [51] NOWAK, A.; LEWENSTEIN, M. Modeling social change with cellular automata, In: Hegselmann, Rainer; Mueller, Ulrich; Troitzsch, Klaus G. **Modeling and Simulation in the Social Sciences from the Philosophy of Science Point of View**. Kluwer Academic Publishers, Holanda, 1996, p. 249-285.
- [52] MOLDOVAN, S.; GOLDENBERG, J. Cellular automata modeling of resistance to innovations: effects and solution. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 71, n. 5, p. 425-442. 2004.
- [53] ZUPAN, N. Using cellular automata to simulate electronic commerce receptivity in small organisations. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 75, n. 6, p. 798-818. 2007.
- [54] ZHANG, T.; XUAN, H.; GAO, B. **Modeling diffusion of innovations with cellular automata**. 2005 International Conference on Service Systems and Services Management - Proceedings of ICSSSM'05", v. 2, 2005.
- [55] ARARIPE, L.E.; COSTA FILHO, R.N; HERRMANN, H.J; ANDRADE JR., J.S. Plurality voting: the statistical laws of democracy in Brazil. **International Journal of Modern Physics C**, v. 17,n. 12, p. 1809-1813. 2006.
- [56] ARAUJO, N.A.M.; ANDRADE JR.,J.S.; HERRMANN, H.J. Tactical voting in plurality elections. **PLoS ONE**, v. 5,n. 9, p. e12446. 2010.
- [57] OSBORNE, M.J. Spatial models of political competition under plurality rule: a survey of some explanations of the number of candidtes and the positions they take. **The Canadian Journal of Economics**, v. 28,n. 2, p. 261-301. 1995.
- [58] COUGHLIN, P. Probabilistic voting models. **Enciclopedia of Statistical Sciences**, v. 6, 1984.
- [59] HOLYST, J. A.; KACPERSKI, K.; SCHWEITZER, F. .Phase transitions in social impact models of opinion formation. **Physica A**, p. 199-210. 2000.
- [60] EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R., **Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up**. The MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [61] AXELROD, R., The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization. **Journal of Conflict Resolution**, v. 41, p. 203-226. 1997.
- [62] SCHELLING, T., Models of Segregation. **American Economics Review, Paper and Proceedings**, v. 59,n. 2, p. 488-493. 1969.
- [63] SCHELLING, T., *Micromotives and Macrobehavior*. **New York: Norton**, 1978.
- [64] YOUNG, Truman P. Restoration ecology and conservation biology. **Biological Conservation**, v. 2, n. 1, p. 73-83. 2000.

- [65] FERREIRA, Daniel A. C. **Modelagem do desmatamento mato-grossense**. Manaus: INPA/UFAM, 2006. 109f.: il. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Biologia Tropical e Recursos Naturais do convênio INPA/UFAM - Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia - INPA, Manaus, 2006.
- [66] CASTRO, Daniela M. - **Efeitos de borda em ecossistemas tropicais: síntese bibliográfica e estudo de caso em fragmentos de cerrado, na região nordeste do estado de São Paulo**. São Paulo. 2008. Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências da Universidade de São Paulo.
- [67] HOSHEN, J.; KOPELMAN, R. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. **Phys. Rev. B**, v. 14, p. 3438-3445. 1976.
- [68] WEIMAR, J.R. Cellular Automata for Reaction-Diffusion Systems. **Physical Review E** v.49. 1997
- [69] MOLDOVAN, S. GOLDENBERG, J. Cellular automata modeling of resistance to innovations: Effects and solutions. **Technological Forecasting and Social Change**. v.71 p. 425-442. 2004
- [70] HADLY, E.A., MAURER, B.A. Spatial and temporal patterns of species diversity in montane mammal communities of western North America. **Evolutionary Ecology Research** 3: 477-486. 2001.
- [71] PENG, L., et al., C. Spatial-temporal evolution pattern of agricultural productivity in northwestern sichuan plateau. **Journal of Mountain Science** v.10,3:418-427. 2013.
- [72] ZHAO, Y., PENG, Y. The spatial pattern of coal flow and flowing channel in China. **Economic Geography**, v.27 (2): 196-200. 2007
- [73] TORRENS, P.M., BENENSON, I. Geographic automata systems. **International Journal of Geographical Information Science**, 19(3): 385-412. 2005
- [74] WÖBBEKING, T., et al. Spatial pattern formation in strongly driven ferromagnets. **Journal of Physics D: Applied Physics** 31 2751. 1998.
- [75] MECKE, K., STOYAN, D. **Statistical Physics and Spatial Statistics: The Art of Analyzing and Modeling Spatial Structures and Pattern Formation**. Series: Lecture Notes in Physics, Vol. 554. 2000.
- [76] BRUSH, J.E. Spatial Patterns of Population in Indian Cities, **Geographical Review**. v.58, n.3, 362-391. 1968
- [77] BAE, Y. et al. Spatial Patterns of Population Growth and Social Indicators' Change in Korea: an Exploratory Spatial Data Analysis. **International Journal of Urban Sciences**. v.12, n.2, p.61-72. 2008
- [78] HOBBS, R.J. Synergisms among Habitat Fragmentation, Livestock Grazing, and Biotic Invasions in Southwestern Australia. **Conservation Biology**. 15:1522-1528. 2001
- [79] MORLON, H. et al. Spatial patterns of phylogenetic diversity. **Ecology Letters** 14: 141-149. 2011
- [80] ALADOS, C.L. et al. Change in plant spatial patterns and diversity along the successional gradient of Mediterranean grazing ecosystems. **Ecological Modelling** 180: 523-535. 2004
- [81] FORTIN, M.J., et. al. Issues related to the detection of boundaries. **Landsc. Ecol.** 15, 453-466. 2000.
- [82] RISSER, P.G. Ecotones at local to regional scales from around the world. **Ecol. Appl.** 3, 367-368. 1993.
- [83] GOSZ, J. R. Ecotone Hierarchies. **Ecological Applications** 0, Vol. 3, No. 3., p. 369-376. 1993.
- [84] CADENASSO, M. L.; et al, An Interdisciplinary and Synthetic Approach to Ecological Boundaries. Integrative Biology Faculty and Staff Publications. **BioScience**, 53, 717-722. 2003.
- [85] HARPER, K.A., et. al. Edge influence on forest structure and composition in fragmented landscapes. **Conserv. Biol.** 19, 768-782. 2005.
- [86] HOU, W., WALZ, U. Enhanced analysis of landscape structure: Inclusion of transition zones and small-scale landscape elements. **Ecological Indicators** 31 15-24. 2013.
- [87] PEREIRA, M.R., et. al. Structure of Small Mammal Assemblages Across Flooded and Unflooded Gallery Forests of the Amazonia-Cerrado Ecotone. **BIOTROPICA** 45(4): 489-496. 2013.

- [88] WUMAER, M., ABUDUWAILI, A. Predictive model for the desertification on oasis-desert ecotone - a case study of Minfeng oasis in Xinjiang. **Xinjiang Agricultural Sciences** Vol. 46 No. 6 pp. 1382-1386. 2009.
- [89] NOBLE, I.R. A Model of the Responses of Ecotones to Climate Change. **Ecological applications** V.3 n.3, p 396-403. 1993.
- [90] LOEHLE, C. Forest ecotone response to climate change: sensitivity to temperature response functional forms. **Can. J. For. Res.** 30: 1632-1645. 2000.
- [91] KRAMER, K.; KOEHLER, M.; LUZ, M. G. E da. Cellular automata with inertia: species competition, spatial patterns and survival in ecotones. **Journal of Physics: Conference Series** 246: 012040, 2010