

MARCUS VINICIUS DUARTE DA SILVA  
Eng<sup>o</sup> Cartógrafo

APLICAÇÃO DA MECÂNICA DOS CORPOS DEFORMÁVEIS  
À ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DE OBSERVAÇÕES  
EM REDES GEODÉSICAS HORIZONTAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Curitiba  
Dezembro/1986

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvida na Diretoria de Geodésia e Cartografia (DGC) da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística-IBGE, dentro de uma política que busca uma integração maior entre as necessidades desta Fundação, e os projetos de pesquisa do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas (CPGCG) da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Gostaríamos de expressar nossa gratidão às pessoas que propiciaram a realização deste trabalho. Assim agradecemos:

- ao titular da DGC/IBGE, Mauro Pereira de Mello, e ao seu Superintendente de Geodésia, Angelo José Pavan, pelo apoio conferido a esta pesquisa;
- ao Professor Camiel Gemael do CPGCG/UFPR, pela confiança, incentivo e sugestões na implementação desta pesquisa.

Desejamos também expressar nossos agradecimentos, aos Engenheiros Cartógrafos Rafael March Castañeda Filho, Luiz Paulo Souto Fortes e José Duarte Correia, do Departamento de Cálculos e Análises em Geodésia da DGC, pela atenção dispensada, através de questionamentos e sugestões, que foram valiosas para o autor.

Finalmente queremos destacar: o competente trabalho de datilografia e revisão de Jupira de Oliveira, funcionária do IBGE; e ainda, o trabalho de produção dos desenhos, realizados por Edir Neves de Oliveira, também funcionário do IBGE.

## SINOPSE

Uma metodologia alternativa para análise do grau de consistência das observações integrantes de uma rede geodésica planimétrica é apresentada. O princípio desta nova metodologia faz no estabelecimento de analogia entre redes geodésicas e corpos deformáveis. Assim, a rede é tratada como um corpo sujeito a experimentar deformações, e as observações como possíveis agentes deformadores. Através do estudo da geometria da deformação subtendida pela rede, em função de uma determinada observação geodésica, pretendemos inferir quanto ao nível de consistência desta observação. Para alcançar este propósito, um modelo matemático é desenvolvido tendo em vista a obtenção de um conjunto de parâmetros que retratem o estado da deformação na rede. A apresentação dos resultados é feita através de uma representação gráfica dos referidos parâmetros.

## ABSTRACT

*An alternative methodology for analysing the degree of consistency of observations in a horizontal geodetic network is presented. The basic idea behind this new methodology lies on the establishment of an analogy between geodetic networks and deformable bodies. In this way the network is treated as a body that can be strained, and the observations are regarded as possible deformation agents. By analysing the geometry of the deformation undergone by the network, caused by one of its observations, we intend to infer how consistent this observation is. To reach this purpose a mathematical model is developed having in sight the attainment of a set of parameters that can be able to portray the state of strain in the network. The presentation of results is carried out by means of graphical display of the mentioned parameters.*

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
TÍTULO .....	<i>i</i>
AGRADECIMENTOS .....	<i>ii</i>
SINOPSE .....	<i>iii</i>
ABSTRACT .....	<i>iv</i>
SUMÁRIO .....	<i>v</i>
<b><u>CAPÍTULO 1</u></b>	
INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - A MOTIVAÇÃO BÁSICA .....	1
1.2 - A LINHA DE PESQUISA ADOTADA .....	1
1.3 - A ESTRUTURA DO TRABALHO .....	2
<b><u>CAPÍTULO 2</u></b>	
ESTUDO DA GEOMETRIA DAS DEFORMAÇÕES .....	4
2.1 - CONCEITOS BÁSICOS .....	4
2.1.1 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM CORPO .....	4
2.1.2 - CARACTERÍSTICA DA DEFORMAÇÃO .....	5
2.1.2.1 - DEFORMAÇÃO PROGRESSIVA-FINITA E INFINITESIMAL .....	5
2.1.2.2 - DEFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS E HETEROGÊNEAS .....	5
2.1.3 - ESTRUTURA DO PROCESSO DE DEFORMAÇÃO .....	7
2.1.3.1 - EXTENSÃO SIMPLES .....	8
2.1.3.2 - CISALHAMENTO PURO .....	8
2.1.3.3 - CISALHAMENTO SIMPLES .....	10
2.2 - DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO .....	10
2.2.1 - DESLOCAMENTOS .....	11
2.2.2 - PARÂMETROS DE EXTENSÃO E CONTRAÇÃO .....	13
2.2.3 - PARÂMETROS DE CISALHAMENTO SIMPLES .....	14
2.2.4 - DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO A PARTIR DOS DESLOCAMENTOS .....	18
2.2.5 - O TENSOR DE DEFORMAÇÃO E A SUA DECOMPOSIÇÃO .....	21

### CAPÍTULO 3

PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO EM REDES GEODÉSICAS .....	24
3.1 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA .....	26
3.2 - MODELAGEM DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS .....	26
3.2.1 - PROCESSO DE MODELAGEM .....	26
3.2.2 - MODELO MATEMÁTICO .....	27
3.2.2.1 - INTERPOLAÇÃO .....	27
3.2.2.2 - FUNÇÃO MODELADORA .....	28
3.3 - CÁLCULO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO .....	31
3.3.1 - METODOLOGIA DE CÁLCULO .....	31
3.3.2 - INTERPRETAÇÃO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO .....	34
3.4 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO .....	35

### CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES EM REDES GEODÉSICAS HORIZONTAIS .....	38
4.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O MODELO DE SIMULAÇÃO .....	38
4.2 - AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO .....	40
4.2.1 - DEFORMAÇÃO PURA .....	40
4.2.2 - ROTAÇÃO DIFERENCIAL .....	44
4.3 - PADRÃO DE DEFORMAÇÃO INDUZIDO POR OBSERVAÇÕES E INJUNÇÕES .....	47
4.3.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	47
4.3.2 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR DISTÂNCIAS INCONSISTENTES .....	49
4.3.3 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR AZIMUTES INCONSISTENTES .....	52
4.3.4 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR DIREÇÕES INCONSISTENTES .....	60
4.3.5 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR INJUNÇÕES DE POSIÇÃO INCONSISTENTES .....	65

### CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO .....	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	71

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - A MOTIVAÇÃO BÁSICA

A Diretoria de Geodésia e Cartografia (DGC) da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) está elaborando atualmente as bases do projeto de Reajustamento Global da Rede Geodésica Planimétrica<sup>1</sup> (REPLAN) integrante do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). As linhas gerais deste projeto (em caráter preliminar) podem ser encontradas em [SILVA, 1985]. Dentre as diferentes etapas a serem cumpridas no âmbito do projeto REPLAN, destacamos aquela que deverá se ocupar da análise crítica das observações que compõem a referida rede geodésica. A razão principal para a concepção desta etapa jaz em uma característica básica exibida pelas diferentes redes geodésicas implantadas e mantidas, através dos tempos, em diversos países do mundo, qual seja, a mesclagem de um grande número de observações heterogêneas — observações feitas em épocas diferentes com equipamentos cada vez mais sofisticados e prescrições técnicas distintas. Esta heterogeneidade se deve também a aspectos peculiares (influências sistemáticas por exemplo) de cada medição. Naturalmente, ao se elaborar um projeto de ajustamento de redes geodésicas há que se prever uma fase que venha a cuidar da avaliação do nível de consistência das aludidas observações.

Tendo em vista o processo de análise crítica de observações geodésicas a ser desenvolvido no contexto do projeto REPLAN, orientamos a linha de pesquisa a ser explorada nesta dissertação de mestrado para este fim.

#### 1.2 - A LINHA DE PESQUISA ADOTADA

A estrutura de uma rede geodésica é definida a partir dos vértices monumentados no terreno que são conectados entre si através de observações. Suponhamos que as referidas observações sejam isentas de qualquer tipo de erro, desta forma ao definirmos as coordenadas de cada um dos aludidos vértices em função destas observações, verificamos que tais coordenadas definem a posição de unidades correlacionadas, através das observações, pertencentes

(1) Neste trabalho estaremos usando os termos "redes geodésicas planimétricas", "redes geodésicas horizontais" ou simplesmente "redes geodésicas" como sinônimos na designação do conjunto de vértices (marcos) e observações que materializam as coordenadas bidimensionais do SGB.

a uma única estrutura, qual seja, a rede geodésica (estamos nos abstraindo aqui da existência de movimentos da crosta terrestre). Entretanto, quando entram em cena os erros que incidem sobre as observações de um modo geral, a forma definida para a rede (através das coordenadas) em função destas observações passa a diferir daquela obtida segundo condições ideais (observações isentas de erro), e que retratava a realidade física da rede determinada pelos marcos geodésicos monumentados. Constatamos assim, que a forma da rede geodésica definida a partir das coordenadas dos vértices varia em função dos erros que incidem sobre as observações. Podemos então pensar em analisar as observações geodésicas a partir do estudo das alterações de forma subtendidas pela rede planimétrica em decorrência da inserção ou exclusão na mesma de observações ou injunções.

A influência de qualquer fator que possa vir a induzir a rede geodésica a uma alteração de forma (mudança nas coordenadas) será manifestada em cada ponto (vértice) de sua estrutura através de deformações localizadas. Para avaliar a expressividade das aludidas deformações podemos lançar mão de métodos da geometria diferencial e retratá-las como **D e f o r m a ç õ e s d a R e d e** [Vaníček & Krakiwsky, 1982], [Thapa, 1980].

Estudos desta natureza podem ser encontrados em [Vaníček et alii, 1981] e [Thapa, 1980]. O objetivo deste trabalho é desenvolver com mais pormenores os conceitos básicos relativos à Teoria Matemática da Elasticidade e a estrutura matemática usada no desenvolvimento do modelo matemático a ser empregado nesta metodologia.

### 1.3 - A ESTRUTURA DO TRABALHO

Para alcançar o objetivo enunciado em 1.2, dividimos o corpo do trabalho em três partes a saber: capítulos 2, 3 e 4. A primeira parte encerra a fundamentação teórica necessária, extraída do capítulo que se incumbe de estudar a mecânica de corpos deformáveis na Teoria Matemática da Elasticidade, para avaliar o comportamento da deformação em um corpo qualquer. A segunda parte nos traz um estudo sobre o desenvolvimento do modelo matemático a ser usado na obtenção dos elementos que descrevem o comportamento da deformação em redes geodésicas horizontais. A modelagem matemática que há pouco aludimos, foi baseada em elementos de Análise Numérica dentro do capítulo das interpolações. Na terceira e última parte, apresentamos os resultados auferidos em experiências levadas a termos com um modelo simulado de rede planimétrica

trica. Para encerrar o trabalho, apresentamos no capítulo 5 as principais conclusões desta pesquisa.

## CAPÍTULO 2

### ESTUDO DA GEOMETRIA DAS DEFORMAÇÕES

O presente capítulo tem por objetivo prover elementos que propiciem a descrição da geometria da deformação de um corpo. Tais elementos, como veremos, são designados Parâmetros da Deformação e têm aplicações em diversas áreas de estudo, como por exemplo a engenharia que se vale dos mesmos para previsão do comportamento de máquinas e estruturas durante sua vida útil [Smith & Sidebottan, 1969]. Existem ainda, estudos mais aprofundados na área da teoria da elasticidade [Love, 1944] que servem de base às demais áreas.

Neste trabalho lançaremos mão dos referidos parâmetros para o estudo de deformações em uma estrutura particular que é a rede geodésica horizontal. Em face às diferenças existentes entre esta estrutura e os corpos contínuos estudados na teoria básica das deformações, algumas aproximações serão necessárias ao aplicarmos esta teoria para análise da referida estrutura. Contudo, o desenvolvimento do estudo a ser conduzido neste capítulo será voltado para a análise de corpos contínuos deformáveis e as necessárias aproximações serão evidenciadas nos capítulos subsequentes.

#### 2.1 - CONCEITOS BÁSICOS

##### 2.1.1 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO DE UM CORPO

Um processo de deformação fica caracterizado "sempre que devido a qualquer causa ocorrem mudanças nas posições relativas de partes de um corpo" [Love, 1944]. De uma outra maneira, podemos caracterizar a deformação dizendo que: um efeito resultante da aplicação de forças sobre um corpo é o desenvolvimento no mesmo de forças internas, a intensidade das referidas forças em um ponto qualquer é dada pelo *Estado de Tensão* (STRESS) naquele ponto. Um outro efeito que decorre desta aplicação de forças é o surgimento de um *Estado de Deformação* (STRAIN) no corpo, isto é, sua forma e/ou volume submetem uma alteração [Smith & Sidebottan, 1969].

À luz da metodologia a ser abordada neste trabalho, interessa apenas o estudo do *Estado de Deformação*. O nosso objetivo é obter meios que possibilitem a descrição da geometria desta deformação. Os elementos através dos quais definiremos seu estado são designados PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO e serão definidos na divisão 2.2.

### 2.1.2 - CARACTERÍSTICAS DA DEFORMAÇÃO

Tendo sido introduzido o conceito da deformação em um corpo, passaremos agora a nos preocupar com os atributos desta deformação. Isto significa analisar a magnitude e a forma de comportamento da mesma.

#### 2.1.2.1 - DEFORMAÇÃO PROGRESSIVA - FINITA E INFINITESIMAL

A deformação pode ser entendida como uma mudança na forma (e dimensões) do corpo entre um estágio inicial (não deformado) e um estágio final (deformado). Todavia, o processo de alteração da forma de um corpo passa por diferentes etapas antes de atingir seu estágio final de deformação. Esta evolução do referido processo é denominada DEFORMAÇÃO PROGRESSIVA; ela pode ser descrita tanto em termos de deformação FINITA quanto à luz do conceito de deformações INFINITESIMAIS (ou INCREMENTAIS). A deformação finita relaciona uma configuração instantânea do corpo ao estado não deformado do mesmo; já a deformação infinitesimal, relaciona as mudanças instantâneas da forma do corpo à sua configuração instantânea [Means, 1967]. Na teoria das deformações incrementais as componentes dos parâmetros da deformação são tão pequenas, que seus produtos e quadrados podem ser negligenciados sem que haja deterioração dos resultados. Esta é uma das hipóteses usualmente empregadas na aplicação prática da teoria das deformações [Love, 1944]. Em decorrência deste fato, simplificações consideráveis podem ser realizadas facilitando em muito o desenvolvimento da formulação matemática necessária para seu estudo.

#### 2.1.2.2 - DEFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS E HETEROGÊNEAS

A deformação subtendida por corpos idealmente elásticos é denominada HOMOGÊNEA, ou seja, ela se comporta da mesma maneira em todos os pontos do corpo e por outro lado é reversível [Welsch, 1981]. Nesta classe de deformação os deslocamentos sofridos pelas partículas que compõem o corpo podem ser expressos como funções lineares de coordenadas [Love, 1944]. Assim vale dizer que neste tipo de deformação: linhas retas são transformadas em linhas retas; linhas paralelas permanecem paralelas após a deformação; e que linhas retas de mesma orientação são alongadas ou contraídas na mesma razão, embora sua direção geral possa ser alterada (fig. 2.1-a). Uma vez que corpos perfeitamente elásticos são admissíveis apenas em concepções teóricas, concluímos então que a teoria de análise de deformações homogêneas tem sua validade restrita ao campo teórico. Em termos práticos o tipo de deformação com o qual nos defrontamos é classifi

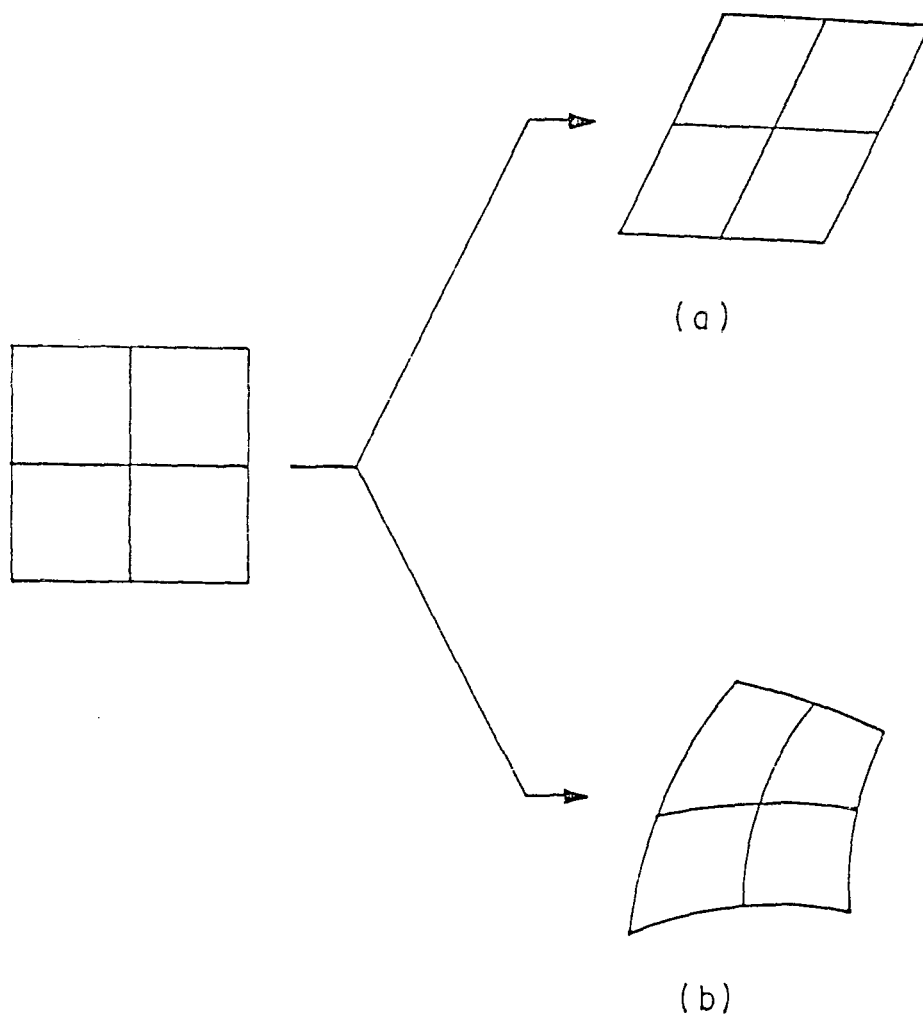


FIG. 2.1 - DEFORMAÇÕES HOMOGÊNEA (a) E HETEROGÊNEA (b).

cado como HETEROGÊNEO. Esta deformação é aquela em que linhas retas são transformadas em linhas curvas; linhas paralelas perdem seu paralelismo (fig. 2.1-b) etc...

Ao contrário das deformações homogêneas, as heterogêneas requerem uma formulação matemática extremamente complexa. Na maior parte das aplicações práticas do estudo de deformações, este tipo de formulação não é utilizado e as razões pelas quais tal postura é adotada, são justificáveis em muitos casos e em outros o único procedimento possível [Welsch, 1981].

Apesar da heterogeneidade das deformações com as quais nos defrontamos na prática, é comum encontrar na literatura a teoria das deformações baseada no conceito de deformações homogêneas, até mesmo no caso de deformações finitas. A fundamentação deste procedimento jaz na seguinte consideração:

- mesmo no caso geral em que a deformação não é homogênea, podemos dizer que em uma vizinhança suficientemente próxima de qualquer ponto, os deslocamentos relativos de pontos desta vizinhança podem ser expressos como funções lineares das coordenadas relativas destes pontos. Em outras palavras, a deformação em torno de qualquer ponto é sensivelmente homogênea [Love, 1944].

O estudo da deformação a ser apresentado neste capítulo será pautado pelos conceitos de deformação infinitesimal (2.1.2.1) e homogênea. A contribuição, em termos de simplificação, trazida pelo conceito de deformação infinitesimal jaz na simplicidade das expressões dos parâmetros de deformação. Por sua vez, o conceito de deformação homogênea nos permite expressar os deslocamentos relativos através de funções lineares. Sendo assim, as relações entre parâmetros de deformação e deslocamentos relativos a serem obtidas (vide 3.2) para descrição do processo de deformação, serão bastante simples e fáceis de manusear.

### 2.1.3 - ESTRUTURA DO PROCESSO DE DEFORMAÇÃO

Ao realizar o estudo de um processo de deformação homogênea, torna-se importante, para fins de compreensão e descrição do mesmo, interpretar o efeito final da deformação como se este fosse subdividido em fases distintas. Desta forma é possível descrever a evolução da deformação, através de etapas que vão aos poucos relatando a história de todo o processo.

### 2.1.3.1 - EXTENSÃO SIMPLES

Inicialmente consideremos uma barra de comprimento  $\ell_0$  e seção transversal quadrada suspensa verticalmente. Admitamos agora que a esta barra é agregada, em sua parte inferior, uma massa  $m$  que gere uma carga que atue da mesma forma em todos os segmentos paralelos à direção do comprimento da referida barra. Como consequência, a barra sofrerá uma extensão longitudinal e uma contração lateral.

O estado de deformação subtendido por esta barra não é muito simples [Love, 1944]. Se forças laterais pudessem ser aplicadas à barra com o sentido de se evitar a contração lateral, o estado de deformação seria em muito simplificado. A deformação poderia então ser descrita como uma EXTENSÃO SIMPLES da barra no sentido longitudinal. Um raciocínio análogo poderia ser desenvolvido no caso em que a carga aplicada gerasse uma contração longitudinal. Neste caso dir-se-ia que a barra sofreu uma CONTRAÇÃO SIMPLES.

Antes de passar ao próximo item, associemos à barra que está sendo objeto de estudo um sistema cartesiano de coordenadas. Neste sistema (fig. 2.2-a), o plano ( $xy$ ) é ortogonal à direção longitudinal da referida barra, e o eixo terciário ( $z$ ) coincidente com o seu eixo de simetria longitudinal orientado de modo a garantir que o sistema seja dextrogiro. Este sistema será de grande utilidade nas exposições subseqüentes.

### 2.1.3.2 - CISALHAMENTO PURO

Suponhamos agora que a mesma barra aludida no item anterior, seja submetida à ação de forças laterais que provoquem a extensão  $e_1$  das linhas paralelas ao eixo  $x$  e extensão  $e_2$  das linhas paralelas ao eixo  $y$  (fig. 2.2-a). Consideremos ainda que forças sejam aplicadas à barra, se necessário forem, para evitar extensões ou contrações no sentido longitudinal. Uma partícula que no estado não deformado ocupasse a posição  $(x, y)$ , após a deformação viria a ocupar a posição  $(x + xe_1, y + ye_2)$  (veja 2.2.2) e a área da seção seria aumentada na razão  $(1 + e_1)(1 + e_2)$ : 1. Todavia, se a relação entre  $e_1$  e  $e_2$  for tal que esta razão seja unitária, nenhuma mudança ocorrerá na área de qualquer seção transversal da barra, porém, a sua forma seria alterada. Dentro desta concepção ou  $e_1$  ou  $e_2$  será negativo, ou seja, haverá contração no correspondente conjunto de linhas. A deformação sofrida pela barra, segundo os padrões acima descritos, é conhecida por CISALHAMENTO PURO. A fig. 2.2-b mostra o quadrado ABCD (seção transversal da barra) de

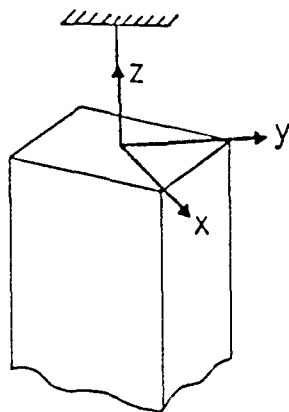


FIG. 2.2-a - SISTEMA CARTESIANO ASSOCIADO À BARRA.

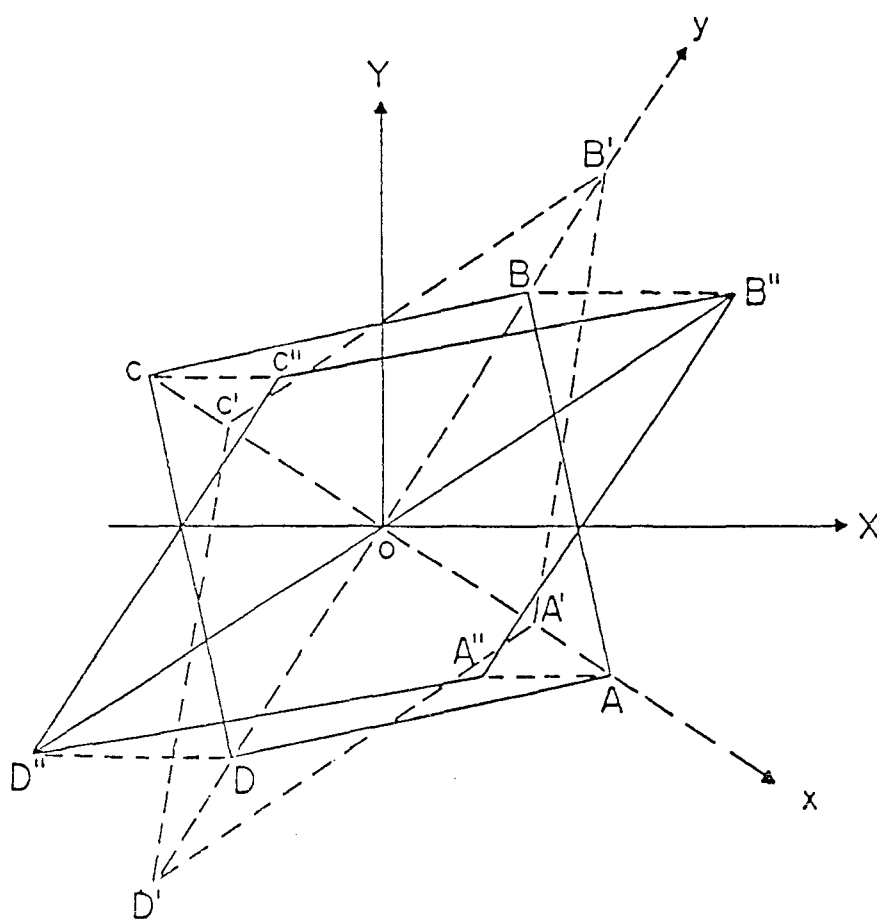


FIG. 2.2-b - DEFORMAÇÃO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL DA BARRA.

formada através de um cisalhamento puro em um losango  $A' B' C' D'$  que mantém a mesma área da referida seção transversal.

### 2.1.3.3 - CISALHAMENTO SIMPLES

Consideremos agora que a seção transversal (ABCD) da barra, após ter sido deformada por cisalhamento puro (losango  $A' B' C' D'$  – fig. 2.2-b), seja rotacionada como um todo em torno do eixo z, segundo um ângulo  $\alpha$  (losango  $A'' B'' C'' D''$ ). A deformação assim caracterizada apresenta a passagem do estado não deformado para o estado deformado dividida em duas partes: a primeira, cisalhamento puro, é responsável pela alteração de forma da seção transversal ABCD que adquire a forma do losango  $A' B' C' D'$  (vide 2.1.3.2); a segunda parte, por seu turno, consiste em uma simples rotação da barra em torno do eixo z, o que faz com que a seção transversal  $A' B' C' D'$  gire para uma posição final ilustrada pelo losango  $A'' B'' C'' D''$ . O ângulo segundo o qual se dá esta rotação é denominado ÂNGULO de CISALHAMENTO, e o processo de deformação que acabamos de subdividir é designado CISALHAMENTO SIMPLES. Na verdade demonstra-se [Love, 1944] que o cisalhamento simples pode ser entendido como um deslocamento de planos materiais paralelos ao plano (X, z), na direção do eixo X, segundo distâncias proporcionais aos espaçamentos entre os aludidos planos materiais e o plano (X, z).

É oportuno observar que todos os tipos de deformação podem ser descritos em termos de extensão simples e cisalhamento simples [Love, 1944]. Desta forma, se uma representação analítica for obtida para estes dois parâmetros da deformação, poderemos a partir dela obter a descrição analítica das parcelas que compõem o efeito final da deformação, ou seja, será possível definir analiticamente o cisalhamento puro e o ângulo de cisalhamento.

Ressalte-se ainda, mais uma vez, que a decomposição da deformação apresentada nesta seção, divide a mesma em uma parte de deformação pura (cisalhamento puro) e outra parte rotacional (ângulo de cisalhamento).

## 2.2 - DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO

O estudo das características da deformação sofrida por um corpo será realizado nesta divisão, com base no conceito de deformações infinitesimais e homogêneas, a partir das conclusões obtidas na divisão precedente. Este estudo tem por objetivo a obtenção de parâmetros que descrevam os estados de deforma

ção apresentados em 2.1.3.

### 2.2.1 - DESLOCAMENTOS

Seja  $k$  um corpo deformável arbitrário e  $k'$  o mesmo corpo após ter sofrido um processo de deformação infinitesimal e homogêneo. Adote mos agora um sistema cartesiano de coordenadas  $[x \ y \ z]$  qualquer para que pos samos medir os deslocamentos sofridos pelas partículas do corpo  $K$ . Antes da deformação, uma partícula  $P$  do referido corpo tem a sua posição definida pelo terno  $P(x, y, z)$ , e com a deformação ela passa a ocupar a posição  $P'(x', y', z')$  (vide fig. 2.3). O vetor deslocamento de  $P$  para  $P'$  tem componentes  $u, v$  e  $w$  segundo os eixos coordenados  $x, y, z$ , respectivamente, do sistema de refe rência adotado.

Para estudar a deformação de um volume elementar no ponto  $P$  (ou seja, estudar a deformação em  $P$ ) é necessário considerar os deslocamen tos de outros pontos (partículas) na vizinhança infinitesimal de  $P$ . Sejam en tão  $Q$  e  $R$  dois outros pontos desta vizinhança conectados a  $P$  por segmentos de reta que formam entre si um ângulo  $\theta$ . Após a deformação estas partículas pas sam a ocupar as posições de  $Q'$  e  $R'$ .

Analisemos agora os deslocamentos sofridos pelas partícu las do corpo  $K$ . Podemos considerar estes deslocamentos como sendo compostos de duas partes. A primeira, igual para todas as partículas, faz com que o corpo sofra uma translação (deslocamentos de corpo rígido) sem causar mu danças nas posições relativas das partículas que o compõem, assim sendo, os segmentos de reta  $P'Q'$  e  $P'R'$ , bem como o ângulo  $\theta'$  entre eles, terão magni tudes idênticas às de seus respectivos valores iniciais. A segunda parte do deslocamento é a responsável pela alteração das posições relativas das partí culas. Em função destes deslocamentos relativos infinitesimais, os segmentos  $P'Q'$  e  $P'R'$  podem ter sido enlongados ou contraídos e o ângulo  $\theta'$  entre eles pode não mais ser igual a  $\theta$ .

A determinação do estado de deformação em um corpo pode ser feita medindo-se as alterações sofridas pelos comprimentos de segmentos de reta deste corpo, bem como avaliando-se as mudanças subtendidas por ângu los entre segmentos de reta que se interceptem no mesmo [Smith & Sidebottom, 1969]. Assim sendo, para estudar a deformação em um ponto do corpo  $K$  (fig. 2.3) um procedimento que pode ser adotado é a escolha de três segmentos infi nitesimais de reta mutuamente perpendiculares, que se interceptem no ponto in vestigado no estado não deformado. No estado deformado, após eliminar a par cela de deslocamento de corpo rígido (translações) do deslocamento real, as mudanças sofridas pelos três segmentos de reta infinitesimais bem como as al

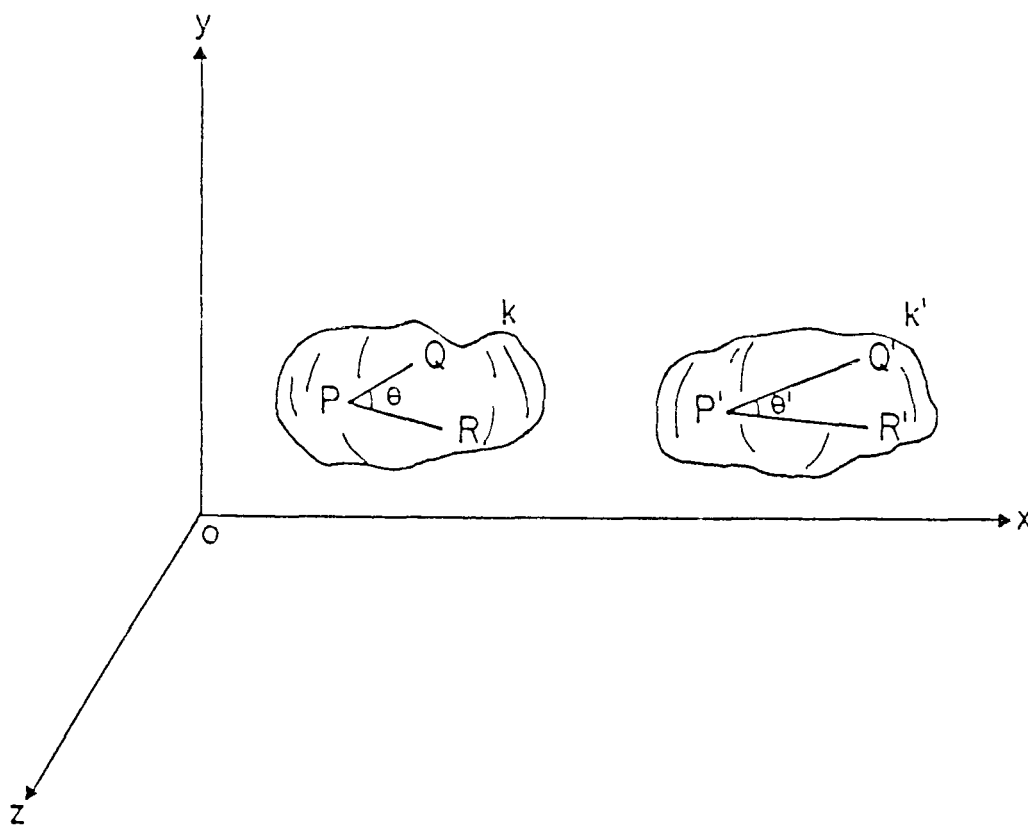


FIG. 2.3 - DEFORMAÇÃO DE UM CORPO GENÉRICO  $k$ .

terações nas magnitudes dos três ângulos retos, podem ser determinadas (vide 2.2.2 e 2.2.3). Estes seis parâmetros são suficientes para definir a geometria da deformação no ponto investigado; assim a mudança no comprimento de qualquer segmento de reta que passe por este ponto pode ser determinada. O mesmo pode ser feito em relação ao ângulo formado por dois segmentos de reta quaisquer que se interceptem no ponto analisado [Smith & Sidebottom, 1969].

Como veremos nas seções subsequentes desta divisão, os tipos de deformação homogênea apresentados em 2.1.3 podem ser descritos a partir dos parâmetros aludidos no parágrafo anterior.

### 2.2.2 - PARÂMETROS DE EXTENSÃO E CONTRAÇÃO

Analisemos o comportamento de um volume elementar do corpo  $k$  (fig. 2.3), quando este sofre uma deformação do tipo apresentado em 2.1.3.1, ou seja, simples extensões e contrações. Para tanto sejam  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , três segmentos de reta infinitesimais e mutuamente perpendiculares. Façamos agora com que os referidos segmentos de reta se interceptem no ponto a investigar, de modo a garantir que  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  sejam paralelos aos respectivos eixos homólogos do sistema de referência adotado, de acordo com que mostra a fig. 2.4. Estes três segmentos definirão o volume elementar cujo comportamento queremos analisar (eles serão as arestas de um cubo elementar).

Na fig. 2.5 representamos o referido volume elementar antes e depois da deformação, já tendo sido eliminada a parcela de deslocamento que não produz deformação (fazendo coincidir os segmentos:  $AE \equiv A'E'$ ;  $EF \equiv E'F'$  e  $EG \equiv E'G'$ ). Podemos observar nesta figura que o segmento  $dx$  sofreu um alongamento  $ds_x$  ao passo que  $dy$  e  $dz$  foram contraídos de quantidades  $ds_y$  e  $ds_z$ , respectivamente.

A deformação, por extensão ou contração, de um segmento infinitesimal de reta qualquer, é definida pela razão entre a variação no seu comprimento e o seu comprimento original. Assim sendo, as deformações relativas sofridas pelos segmentos infinitesimais  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  na fig. 2.5 são:

$$e_x = \frac{ds_x}{dx}, \quad e_y = \frac{ds_y}{dy} \quad \text{e} \quad e_z = \frac{ds_z}{dz} \quad (2.1)$$

Os parâmetros  $e_x$ ,  $e_y$  e  $e_z$  descrevem as variações (deformações) nos comprimentos de segmentos de reta associados a um determinado ponto do corpo, segundo três direções mutuamente perpendiculares. Esta deformação será uma extensão quando o parâmetro for positivo (como é o caso de  $e_x$  na fig.

2.5), e uma contração quando o parâmetro for negativo (caso de  $e_y$  e  $e_z$  na mesma figura).

### 2.2.3 - PARÂMETROS DE CISALHAMENTO SIMPLES

Suponhamos agora que o único tipo de deformação subtendido pelo corpo K tenha sido por cisalhamento simples. Desta forma o volume elementar, objeto de investigação, sofrerá uma deformação cuja caracterização é mostrada na fig. 2.6. Nesta figura comparece o volume elementar antes e depois da deformação, tendo sido eliminadas as translações que não dão lugar a deformação (através do deslocamento do volume deformado até que as faces ABEF e A' B' E' F' coincidissem).

Analisando a fig. 2.6 verificamos que de acordo com o item 2.1.3.3, todas as seções planas do volume elementar paralelas à face ABEF foram deslocadas na direção do eixo x sem que tivessem ocorrido deslocamentos nas direções dos eixos y e z. A ordem de grandeza destes deslocamentos é proporcional à distância que separa as mencionadas seções planas do plano definido pelos eixos x e z do sistema de coordenadas adotado [Love, 1944]. Como resultado destes deslocamentos o ângulo  $\theta = 90^\circ$  entre os segmentos dx e dy é deformado em um ângulo  $\theta' \neq 90^\circ$ .

A deformação por cisalhamento simples, no caso da fig.2.6, é medida pela tangente do ângulo  $\psi$  ( $\psi = \theta - \theta'$ ) que expressa a variação sofrida pelo ângulo reto  $\theta$ , subtendido pelos segmentos dx e dy, no processo de deformação ( $\theta \rightarrow \theta'$ ), ou seja:

$$\gamma_{xy} = \frac{ds_x}{dy} = \operatorname{tg}\psi. \quad (2.2)$$

Considerando que as deformações aqui estudadas são de natureza infinitesimal, podemos escrever:

$$\gamma_{xy} = \operatorname{tg}\psi \doteq \psi. \quad (2.3)$$

Em procedimento análogo ao da obtenção de  $\gamma_{xy}$ , podemos obter os parâmetros que descrevem o cisalhamento simples para (dx, dz) e (dy, dz) ou seja, os parâmetros  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ .

O cisalhamento simples  $\gamma_{xy}$  será positivo quando o ângulo  $\theta' < 90^\circ$  e negativo quando  $\theta' > 90^\circ$  [convenção].

Os parâmetros  $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  descrevem o comportamento dos segmentos infinitesimais de dx, dy e dz à luz de um processo de deformação infinitesimal e homogênea. Os referidos parâmetros são válidos somente para sistemas de coordenadas cartesianos. Estes seis parâmetros são

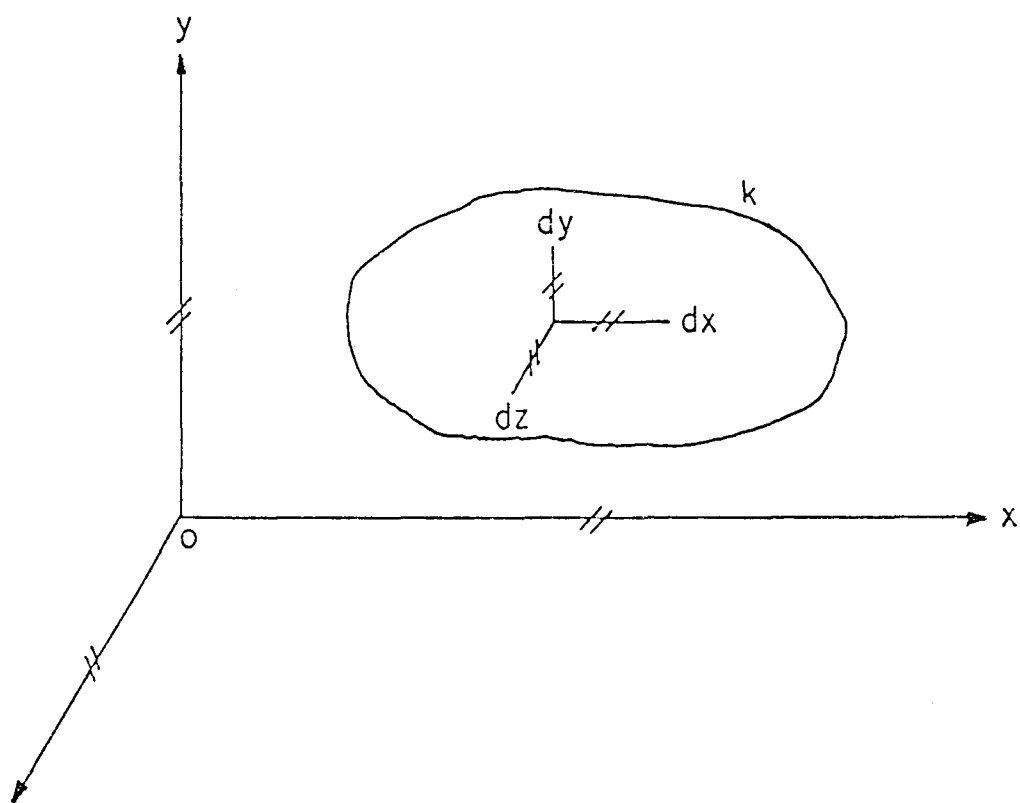


FIG. 2.4 - SEGMENTOS DE RETA INFINITESIMAIS MUTUAMENTE PERPENDICULARES.

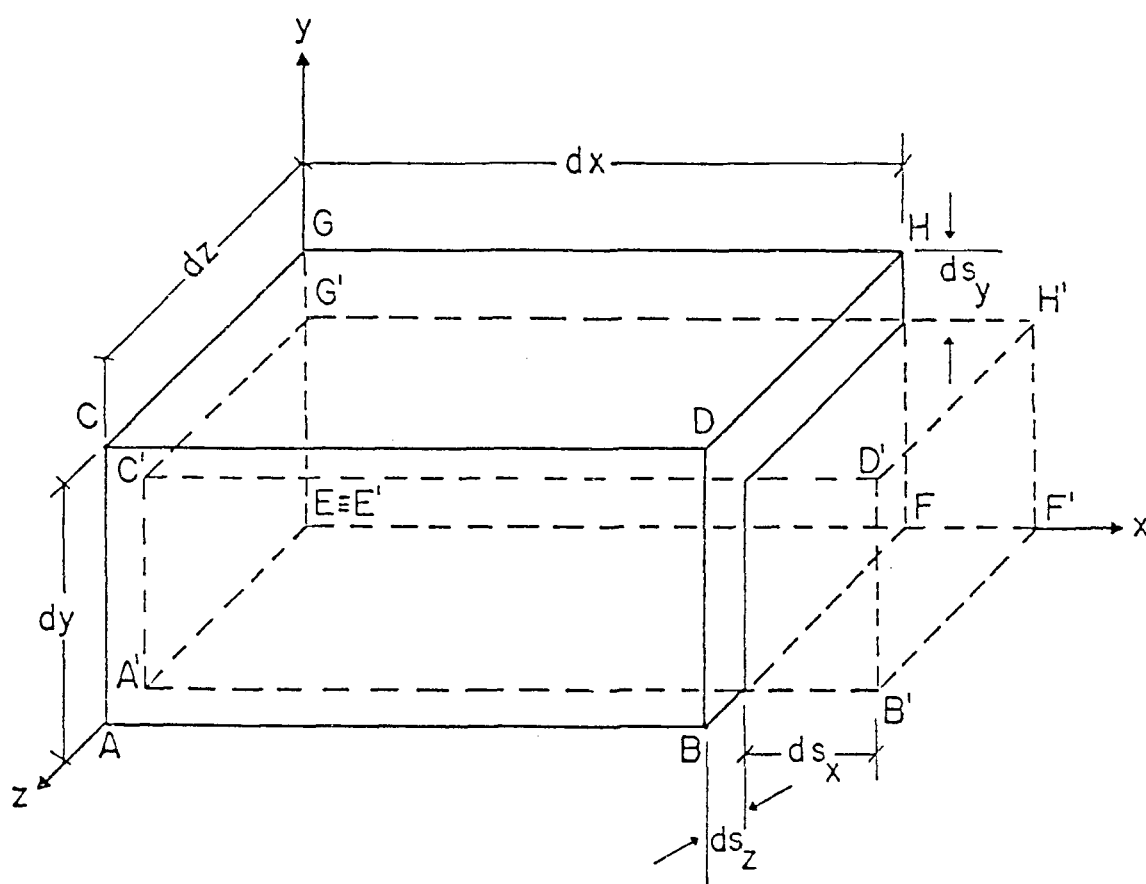


FIG. 2.5 - EXTENSÃO E CONTRAÇÃO DO VOLUME ELEMENTAR.

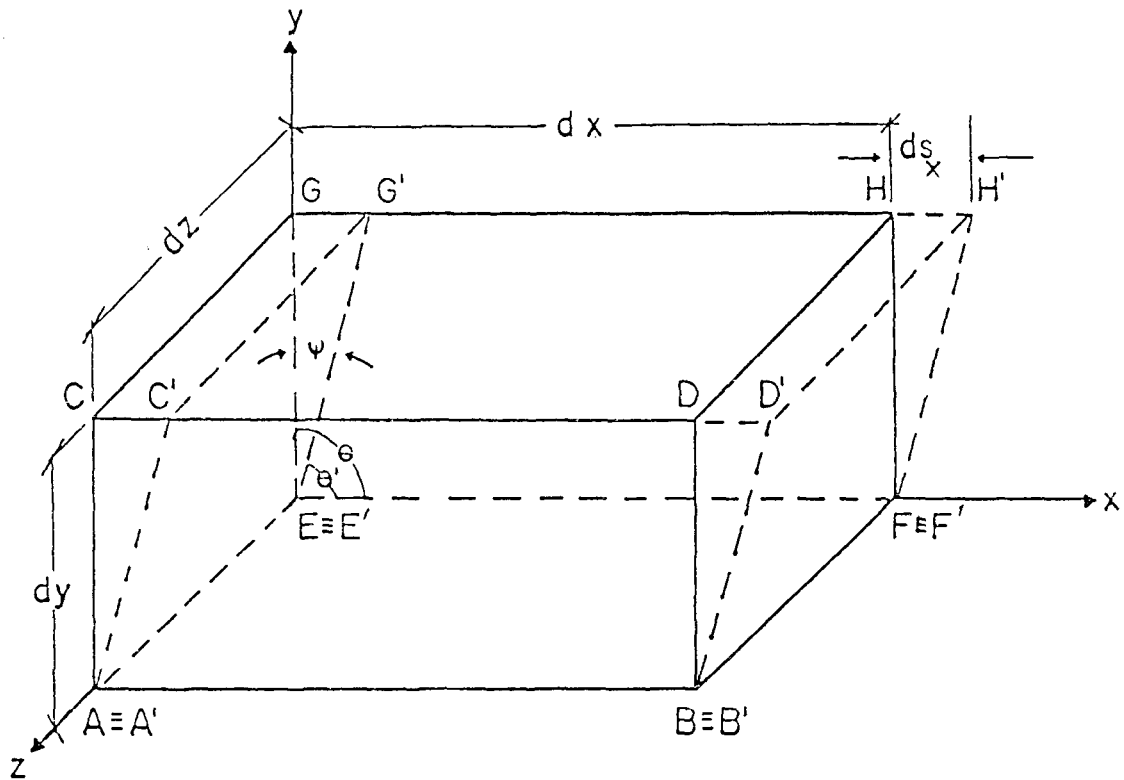


FIG. 2.6 - CISALHAMENTO SIMPLES DO VOLUME ELEMENTAR.

suficientes para descrever o referido processo de deformação [Smith & Sidebottom, 1969] na vizinhança de um ponto qualquer de um corpo que possa vir a ser objeto de análise.

É oportuno ressaltar que a deformação descrita pelos parâmetros acima aludidos, é homogênea apenas na vizinhança próxima do ponto investigado (item 2.1.2.2). Isto significa dizer que um conjunto de parâmetros obtidos para um determinado ponto não descreve, em geral, a deformação nos demais pontos do corpo, pois o processo de deformação como um todo é, na prática, sempre heterogêneo.

#### 2.2.4 - DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DE DEFORMAÇÃO A PARTIR DOS DESLOCAMENTOS

A descrição da geometria da deformação, como vimos nas seções precedentes, é feita através dos parâmetros expressos por (2.1) e (2.2). Tais parâmetros traduzem as alterações sofridas por três segmentos infinitesimais de reta (mutuamente perpendiculares antes da deformação), que se interceptam no ponto investigado. Analisando as mencionadas expressões e as figuras 2.5 e 2.6, podemos dizer que as eventuais modificações subtendidas pelos aludidos segmentos de reta são determinadas a partir dos deslocamentos sofridos pelos seus respectivos extremos. Assim sendo os parâmetros que descrevem a geometria da deformação podem ser definidos a partir de três funções básicas  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$  (estas funções devem ser contínuas e analíticas) que representam os deslocamentos sofridos, respectivamente, pelos extremos dos segmentos  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ .

Para que possamos obter a desejada relação entre parâmetros de deformação e deslocamentos, consideremos a fig. 2.7 onde temos representados, no plano  $(xy)$ , os segmentos infinitesimais  $dx$  e  $dy$  antes e depois de um processo de deformação infinitesimal e homogênea. Em face à diminuta magnitude da deformação, consideraremos os comprimentos reais de  $A'C'$  e  $A'B'$  coincidentes com os de suas respectivas projeções no plano  $(xy)$ . Vejamos agora de que maneira definiremos os deslocamentos dos extremos de  $dx$  e  $dy$ . Consideremos inicialmente os extremos que se interceptam em  $A$ , onde as componentes do deslocamento do ponto de interseção de  $A$  para  $A'$  são  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$  segundo as direções dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente. Nesta figura apenas as componentes  $u$  e  $v$  estão projetadas no plano  $(xy)$ . Sendo  $u$  uma função analítica,  $\partial u / \partial x$  define a derivada parcial desta função na direção do eixo  $x$ . Dadas as características da deformação (infinitesimal e homogênea)

podemos assumir que esta derivada seja constante ao longo de  $dx$ , assim a componente segundo  $ox$  do deslocamento de  $B'$  pode ser expressa por  $u + (\partial u/\partial x)dx$ . Para as demais componentes veja a fig. 2.7.

A partir destes deslocamentos e das definições (2.1) e (2.2), podemos obter as expressões que relacionam os parâmetros da deformações aos deslocamentos. Restringiremos a apresentação destas relações ao caso bidimensional já que a análise a ser realizada neste trabalho será feita no plano.

De acordo com o que foi exposto na seção 2.2.2, os parâmetros de extensão e/ou contração podem ser obtidos dividindo-se a variação do comprimento de um segmento de reta infinitesimal pelo seu comprimento original. Desta forma, em concordância com as (2.1) e considerando a fig.2.2, vem:

$$e_x = \frac{ds_x}{dx} = \frac{(u + (\partial u/\partial x) dx) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (2.4)$$

$$e_y = \frac{ds_y}{dy} = \frac{(v + (\partial v/\partial y) dy) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.5)$$

No caso do cisalhamento simples, vide 2.2.3, a definição deste parâmetro é feita a partir da mensuração da variação sofrida pelo ângulo reto  $\widehat{CAB}$  (fig. 2.7) no processo de deformação. Analisando a fig. 2.7 constata-se que tal variação é expressa pelo ângulo  $\alpha + \beta$ . Assim sendo o parâmetro que expressa a deformação por cisalhamento simples, tendo em vista as expressões (2.3) e (2.4), é dado por:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \therefore \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{(u + (\partial u/\partial y) dy) - u}{dy} + \frac{(v + (\partial v/\partial x) dx) - v}{dx} \therefore$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Os deslocamentos com os quais estamos tratando guardam toda a informação sobre o processo de deformação subtendida pelo corpo em cada um de seus pontos. Já os parâmetros de deformação apresentados em (2.4), (2.5) e (2.7) traduzem apenas o efeito deformante de todo o processo. O deslocamento de corpo rígido não incide sobre estes parâmetros (vide 2.2.1) e tal fato se evidencia mediante a análise de qualquer uma das expressões acima referidas. Na (2.4), por exemplo, considerando que o deslocamento de corpo rígido

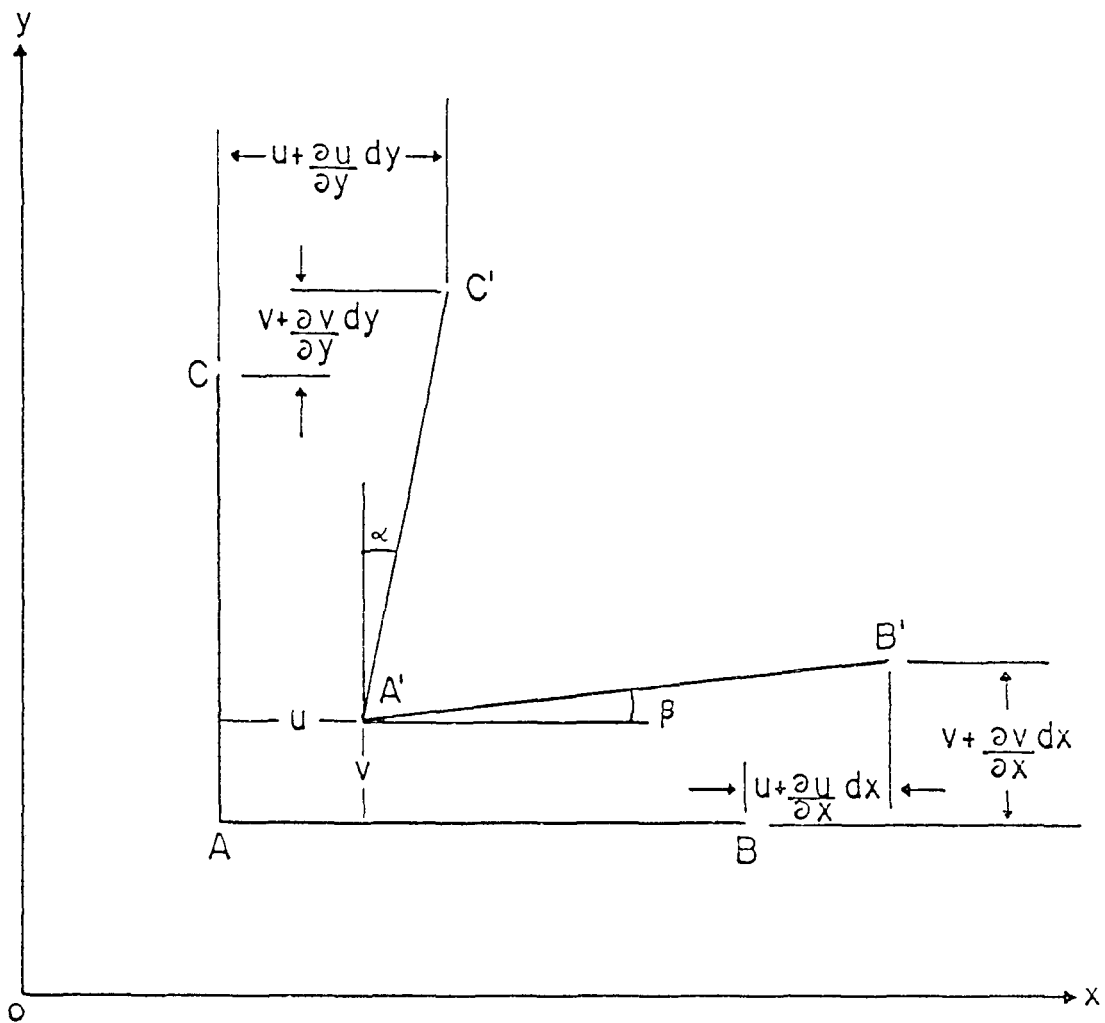


FIG. 2.7 - DEFORMAÇÃO DE SEGMENTOS DE RETA INFINITESIMAIS.

do  $\bar{\epsilon}$  constante para todo o corpo, verifica-se que no processo de derivação seu efeito  $\bar{\epsilon}$  automaticamente elidido. Desta forma o conjunto de parâmetros aqui apresentados retratam tão somente as deformações sofridas por um corpo quando este  $\bar{\epsilon}$  submetido à ação de um sistema de forças.

### 2.2.5 - O TENSOR DE DEFORMAÇÃO E A SUA DECOMPOSIÇÃO

É possível tomar os elementos básicos que comparecem nas expressões dos parâmetros da deformação, ou seja, as derivadas  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial v/\partial x$ ,  $\partial v/\partial y$  e reuni-las em uma organização matricial da forma:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Esta representação matricial é usualmente chamada TENSOR DE DEFORMAÇÃO (de segunda ordem) [Weisch, 1981].

Na seção 2.1.3 foi apresentada a estrutura da decomposição do efeito final da deformação (cisalhamento puro e ângulo de cisalhamento). Nesta mesma seção, em seu último parágrafo, observou-se que estas etapas do processo global da deformação seriam obtidas a partir dos parâmetros que expressam a extensão simples e o cisalhamento simples. O tensor  $\mathbf{e}$  resume os elementos básicos usados na representação analítica destes parâmetros, e será a partir dele que obteremos a desejada segmentação da deformação.

A decomposição analítica da deformação pode ser feita utilizando-se uma propriedade dos tensores de segunda ordem, ou seja, todo tensor de segunda ordem pode ser expresso como a soma de um tensor simétrico e outro anti-simétrico [Vaníček, 1974], desta forma teremos

$$\mathbf{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \emptyset & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \emptyset \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}}, \quad (2.9)$$

ou ainda de uma forma mais concisa,

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad (2.10)$$

com

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}), \quad (2.11)$$

e

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji}). \quad (2.12)$$

Nas expressões anteriormente apresentadas,  $\epsilon$  é o chamado TENSOR DE DEFORMAÇÃO SIMÉTRICA e responde pelo cisalhamento puro (deformação pura). Por sua vez,  $\omega$  é denominado TENSOR DE DEFORMAÇÃO ANTI-SIMÉTRICA e é a representação analítica do ângulo de cisalhamento (rotação de corpo rígido [Welsch, 1981]).

Analisemos agora a decomposição analítica da de formação expressa nos parágrafos precedentes. A fig. 2.8 ilustra a referida decomposição da deformação no caso em que um quadrado Q é deformado em um losango L. Podemos representar o efeito geral da deformação, submetendo, inicialmente, o quadrado Q ao tensor de deformação pura  $\epsilon$ , dando lugar ao losango L'. Posteriormente, considerando então a outra parcela da decomposição, ou seja, o tensor  $\omega$ , onde cada elemento da diagonal secundária é denominado ROTAÇÃO DIFERENCIAL MÉDIA, torna-se possível levar o losango L' para a posição final do quadrado deformado ocupada pelo losango L.

Os tensores  $\epsilon$  e  $\omega$  executam exatamente esta segmentação da deformação, senão vejamos: no caso do tensor  $\epsilon$  se compararmos as componentes do cisalhamento puro que estão expressas na diagonal secundária do tensor verificaremos que  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Isto significa dizer que os lados do quadrado coincidentes com os eixos x e y sofrem um mesmo efeito em decorrência do cisalhamento, o que não dá lugar a uma alteração na orientação geral do quadrado. No que diz respeito ao tensor  $\omega$ , é possível demonstrar que  $|\omega_{ij}|$  (com  $i \neq j$ ) é na verdade uma rotação de corpo rígido. Para tanto consideremos a fig. 2.9. Nesta figura, onde  $\omega_{12}$  representa o referido ângulo de rotação, tem-se

$$Z = 45^\circ - e_{12} - \omega_{12}$$

e

$$Z = 45^\circ - e_{21} + \omega_{12}.$$

Igualando estas duas expressões vem

$$\omega_{12} = \frac{e_{12} - e_{21}}{2}, \text{ q. e. d.} \quad (2.13)$$

A decomposição do tensor de deformação apresentada nesta seção é de grande importância no entendimento e visualização do estado da deformação.

No cap. 3, em sua divisão 3.4, serão apresentados mais elementos a respeito do processo de visualização do efeito da deformação em um corpo.

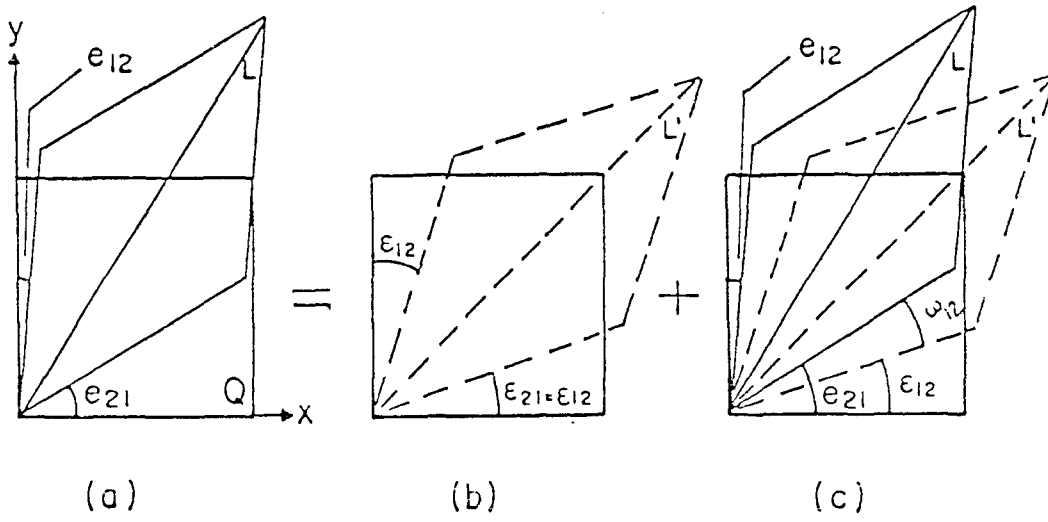


FIG. 2.8 - DECOMPOSIÇÃO DA DEFORMAÇÃO GERAL (a) EM DEFORMAÇÃO SIMÉTRICA (b) E ANTI-SIMÉTRICA (c).

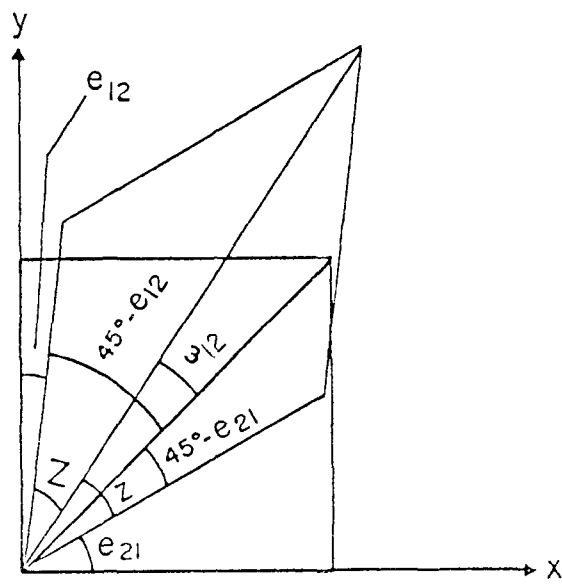


FIG. 2.9 - EFEITO ROTACIONAL DECORRENTE DO PROCESSO DE DEFORMAÇÃO.

### CAPÍTULO 3

#### PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO EM REDES GEODÉSICAS

O que se pretende desenvolver neste trabalho, como já foi mencionado, é um instrumento de análise de deformações em redes geodésicas induzidas pela presença de elementos inconsistentes na referida rede.

O capítulo anterior foi dedicado a introdução de conceitos gerais sobre a descrição do estado de deformação em corpos contínuos deformáveis. Realizaremos agora, com base naquele estudo, uma particularização do mesmo para o caso de redes geodésicas (veja a divisão 1.2). Isto implicará, naturalmente, na adoção de hipóteses simplificativas com o intuito de se viabilizar a particularização acima mencionada.

Dentro deste elenco de hipóteses iniciaremos por admitir que o processo de deformação subtendido pelas redes geodésicas pode ser tratado segundo os preceitos das teorias de deformação homogênea e deformação infinitesimal. No primeiro caso, em concordância com o item 2.1.2.2, devemos proceder a análise da deformação limitando-nos a uma vizinhança suficientemente pequena do ponto investigado. Desta forma consideraremos a VIZINHANÇA de um vértice da rede (fig. 3.1) como sendo definida pela região que encerra todos os vértices a ele conectados por observações (restringimo-nos aqui às técnicas clássicas de observação). Esta hipótese pressupõe ser suficientemente pequena a dimensão de uma VIZINHANÇA assim constituída, quando comparada com a dimensão de toda uma rede geodésica. Em relação a segunda hipótese, que diz respeito à adoção dos conceitos da teoria de deformações infinitesimais no presente estudo, podemos assumir que a pequena ordem de grandeza dos deslocamentos relativos de dois vértices vizinhos quaisquer da rede, em presença da distância que os separa, é o sustentáculo para adoção da aludida hipótese.

A partir da aceitação das hipóteses discriminadas no parágrafo anterior torna-se possível iniciar a adaptação dos conceitos apresentados no capítulo 2 ao caso presente. Contudo outras aproximações serão necessárias e evidenciadas a seu tempo.

Se o nosso objetivo é utilizar os parâmetros que descrevem o estado da deformação em um corpo na análise de redes planimétricas, se nos apresenta então o problema de seu estabelecimento. Portanto, neste capítulo, cuidaremos desta determinação, o que significa buscar um modelo matemático adequado para o cálculo dos referidos parâmetros.

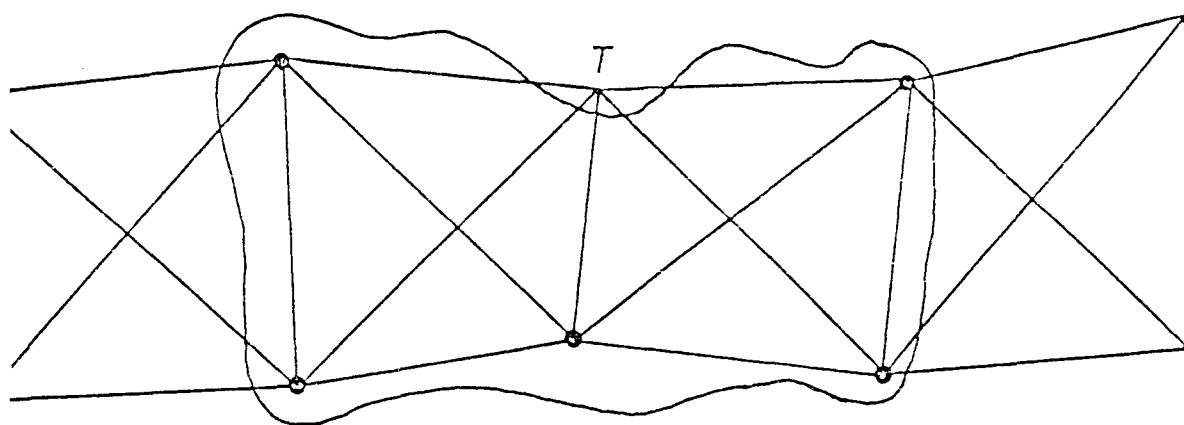


FIG. 3.1 - VIZINHANÇA DE UM VÉRTICE DA REDE.

### 3.1 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Para descrever o estado da deformação em uma rede geodésica poderíamos requerer que para cada um de seus vértices fossem determinadas as componentes do tensor de deformação e (2.8). Todavia, de que maneira tal determinação poderia ser feita? Em primeiro lugar é preciso considerar através de que meios se faz possível obter informações sobre a deformação subtendida pela rede; e em segundo lugar de que maneira serão obtidas a partir destas informações as almejadas componentes do tensor de deformação.

A obtenção de informações sobre a deformação pode ser feita a partir dos deslocamentos sofridos pelos vértices, em decorrência da presença de um elemento inconsistente na rede. Por sua vez os mencionados deslocamentos poderiam advir, dentre outras maneiras, da comparação de dois conjuntos de coordenadas oriundos de ajustamentos distintos, em um dos quais tivesse sido introduzida uma observação incompatível com as demais. Estes deslocamentos carregam na verdade, toda a informação sobre a deformação sofrida pela rede como resultado da introdução de um elemento inconsistente em sua estrutura.

Olhando agora para o problema da determinação das componentes do tensor de deformação, cabe aqui lembrar a relação existente entre estas componentes e os deslocamentos evidenciada na seção 2.2.4. Nesta relação tem-se os parâmetros da deformação expressos como derivadas parciais de primeira ordem da função deslocamento. Assim sendo torna-se necessário modelar a função deslocamento para que seja possível, a partir da mesma, determinar as componentes do tensor de deformação.

### 3.2 - MODELAGEM DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS

#### 3.2.1 - PROCESSO DE MODELAGEM

Inicialmente é preciso ter em mente as restrições impostas pelas hipóteses simplificativas, que deram lugar à adoção de teorias mais elementares no tratamento da deformação em redes geodésicas. Desta forma na elaboração do modelo que ora buscamos, deveremos nos limitar à vizinhança de cada vértice tal qual definida no início deste capítulo. O modelo assim obtido deverá refletir o comportamento de um campo local de deslocamentos, na vizinhança de cada vértice da rede.

A elaboração da modelagem em questão pode ser feita a partir das informações disponíveis sobre a função deslocamento, na vizinhança do vértice a investigar. Estas informações são na verdade os valores da função

deslocamento em cada um dos v̄rtices da referida vizinhança. Sendo assim o modelo matemático a ser aqui utilizado terá por base conceitos da análise numérica, dentro do capítulo das interpolações. O problema da interpolação consiste, em síntese, no estabelecimento de um determinado tipo de funções contínuas, que preencham certas condições em um número discreto, porém finito, de pontos. As condições impostas podem ser a coincidência em valores numéricos da função interpoladora, ou de suas derivadas, com um número finito de dados fornecidos em pontos discretos arbitrariamente distribuídos [Kopal,1961].

O tipo de modelo de interpolação a ser adotado nesta pesquisa será a função polinomial definida a partir do cálculo das diferenças finitas, que em seu sentido amplo trata das variações sofridas por uma função sempre que a variável dependente se altera [Richardson, 1960].

A adoção do tipo de modelagem acima aludida é de grande importância no estudo que vamos realizar, e os aspectos relevantes da utilização da mesma serão apresentados nas seções subsequentes.

### 3.2.2 - MODELO MATEMÁTICO

#### 3.2.2.1 - INTERPOLAÇÃO

Dentre os diferentes modelos de interpolação encontrados no âmbito da análise numérica, lançaremos mão de um polinômio em particular que será a base de sustentação do modelo matemático a ser usado no cálculo dos parâmetros da deformação. Este polinômio, denominado FÓRMULA DE INTERPOLAÇÃO DE NEWTON, advém do cálculo das diferenças finitas aplicado ao caso de interpolação entre pontos não equidistantes (diferenças divididas).

Seja  $f(x)$  uma função com valores definidos para um conjunto de  $n$  pontos  $w = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Para esta função a referida fórmula de Newton pode ser expressa por [Albrecht,1973].

$$P_w = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots, \quad (3.1)$$

onde os coeficientes  $C_i$  ( $i = 0, n$ ) são definidos a partir das diferenças divididas da função  $f(x)$  obtidas com base nos valores conhecidos da função. Tais coeficientes são expressos por:

$$\begin{aligned}
 &= f(x_0) && ; \\
 &= [x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} && ; \\
 &= \frac{[x_2, x_1] - [x_1, x_0]}{x_2 - x_0} && ; \\
 &= \frac{[x_n, \dots, x_1] - [x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0} && .
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

3.2) acima  $C_1$ , por exemplo, é uma diferença dividida de primeira ordem.

Tendo em vista a utilização deste polinômio na modela que está sendo desenvolvida nesta divisão, é importante destacar um dos butos de seus coeficientes que se traduz através do seguinte teorema al, 1961]:

"Uma diferença dividida de  $j$ -ésima ordem com  $j$  argumentos idênticos, é igual a  $j$ -ésima derivada de  $f(x)$  dividida por  $j!$ "

iticamente este teorema pode ser expresso por

$$[x_i, x_i, \dots, x_i] = \frac{f^j(x_i)}{j!}
 \tag{3.3}$$

$f^j(x_i)$  é a derivada de  $j$ -ésima ordem da função  $f(x)$  no ponto  $x_i$ . Desta a quando  $j=1$  decorre que o coeficiente  $C_1$  de (3.2), diferença dividida rimeira ordem da função  $f(x)$ , se iguala ã derivada de primeira ordem des unção. Este teorema, em outras palavras, nos permite aproximar o valor erivada de uma função em um determinado ponto se os pontos interpolado forem suficientemente prōximos. Quanto mais prōximos forem estes pontos ior serã a aproximação, e no limite quando os pontos interpoladores ten em para um mesmo ponto (argumentos idênticos), a diferença dividida se con le com a derivada de mesma ordem da função a menos do fator  $1/j!$  (onde  $j$  número de pontos interpoladores).

#### 3.2.2.2 - FUNÇÃO MODELADORA

Tendo em vista o fato de serem os parâmetros de defor ão apresentados no cap. 2 vãlidos somente para sistemas de referênci car iano, designemos genericamente por  $[X Y]$  um sistema cartesiano associado

ã rede geodésica a ser analisada.

Iniciemos agora o estabelecimento do modelo matemático da função deslocamento, para o caso específico de redes geodésicas, de notando a referida função por

$$\vec{V}(X, Y). \quad (3.4)$$

Esta função vetorial pode ser projetada nos eixos coordenados do sistema de referência adotado. Suas componentes, segundo estes eixos, serão denotadas por

$$V_x(X, Y) \text{ e } V_y(X, Y). \quad (3.5)$$

Para realizar a modelagem em questão faremos uso do polinômio interpolador (3.1). Antes porém, é preciso observar que a função deslocamento é da forma  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ao passo que o polinômio interpolador é da forma  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto implica em uma adaptação do aludido polinômio ao caso bidimensional dando lugar às seguintes expressões para as componentes da função deslocamento:

$$\left. \begin{aligned} V_x(X, Y) &= a_0 + a_1(X - X_0) + a_2(Y - Y_0) + \dots, \\ V_y(X, Y) &= b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(Y - Y_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Nestas expressões tem-se:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= V_x(X_0, Y_0); & b_0 &= V_y(X_0, Y_0); \\ a_1 &= \frac{V_x(X_1, Y_1) - V_x(X_0, Y_0)}{X_1 - X_0}; \\ a_2 &= \frac{V_x(X_1, Y_1) - V_x(X_0, Y_0)}{Y_1 - Y_0}; \\ b_1 &= \frac{V_y(X_1, Y_1) - V_y(X_0, Y_0)}{X_1 - X_0}; \\ b_2 &= \frac{V_y(X_1, Y_1) - V_y(X_0, Y_0)}{Y_1 - Y_0}; \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\text{etc...} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Os coeficientes acima discriminados são definidos para um conjunto  $W = \{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$  de pontos interpoladores.

As equações (3.6) se constituem em uma representação analítica das componentes da função deslocamento. É preciso agora considerar qual a ordem a ser adotada no desenvolvimento polinomial das referidas componentes. Para tanto, nos reportemos ao terceiro parágrafo introdutório deste capítulo, visando, em particular, a hipótese relativa ao conceito de deformação homogênea a ser subtendida pela rede geodésica. Em decorrência desta hipótese, de acordo com o que foi exposto no item 2.1.2.2, os deslocamentos oriundos deste tipo de deformação podem ser expressos por funções lineares de coordenadas relativas na vizinhança do ponto investigado. Em face a esta linearidade da função deslocamento, os coeficientes (diferenças divididas da função) das expressões (3.6) cuja ordem supere a primeira se anulam acarretando para aquelas expressões a seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} V_x(x, y) &= a_0 + a_1 x + a_2 y, \\ V_y(x, y) &= b_0 + b_1 x + b_2 y, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

onde agora

$$\left. \begin{aligned} x &= X - X_0 \\ y &= Y - Y_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

representam as coordenadas relativas dos pontos  $(X, Y)$  pertencentes à vizinhança do vértice a ser analisado  $(X_0, Y_0)$ , que passa a se constituir na origem de um sistema local de coordenadas.

Analisemos agora os coeficientes do modelo (3.9) (que são diferenças divididas da função deslocamento) à luz do teorema apresentado no item 3.2.2.1 considerando mais uma vez que os vértices vizinhos sejam suficientemente próximos ao vértice a investigar. Neste contexto os aludidos coeficientes podem ser encarados como aproximações das derivadas da função deslocamento que integram o tensor de deformação. Sendo assim, é lícito esperar:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &\doteq \frac{\partial V_x}{\partial x} ; & a_2 &\doteq \frac{\partial V_x}{\partial y} ; \\ b_1 &\doteq \frac{\partial V_y}{\partial x} ; & b_2 &\doteq \frac{\partial V_y}{\partial y} . \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Em decorrência das (3.11), observando-se as expressões (3.7) de  $a_0$  e  $b_0$  em face às (3.10), a nova forma das equações (3.9) passa a ser

$$\left. \begin{aligned} V_x(x, y) &= \frac{\partial V_x}{\partial x} x + \frac{\partial V_x}{\partial y} y + V_x(x_0, y_0), \\ V_y(x, y) &= \frac{\partial V_y}{\partial x} x + \frac{\partial V_y}{\partial y} y + V_y(x_0, y_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

As equações (3.12) realizam a modelagem do campo local de deslocamentos em redes geodésicas [Vaníček et alii, 1981]. Observa-se contudo que este modelo é uma função contínua sendo usada na representação de uma função discreta já que a função deslocamento só pode ser definida nos vértices da rede. Esta é mais uma aproximação que realizamos no estabelecimento da modelagem objeto deste item.

### 3.3 - CÁLCULO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO

#### 3.3.1 - METODOLOGIA DE CÁLCULO

No estabelecimento da metodologia de cálculo dos parâmetros da deformação, consideremos inicialmente o fato de ser conhecido o valor da função deslocamento em todos os vértices da rede. A obtenção destes valores, como já foi mencionado, pode ser feita comparando-se as coordenadas oriundas de dois ajustamentos distintos, em um dos quais tenha sido incluída uma observação cuja consistência pretendamos investigar. Desta forma as componentes da função deslocamento para cada vértice da rede podem ser expressas por

$$\left. \begin{aligned} V_x(X, Y) &= X^{(2)} - X^{(1)}, \\ V_y(X, Y) &= Y^{(2)} - Y^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Nas expressões acima  $(X^{(1)}, Y^{(1)})$  e  $(X^{(2)}, Y^{(2)})$  são coordenadas de vértices da rede geodésica procedentes dos referidos ajustamentos.

É ainda oportuno observar que no cálculo das coordenadas relativas dos pontos vizinhos de um vértice qualquer da rede, através de (3.10), poderão ser usadas coordenadas procedentes tanto do primeiro quanto do segundo ajustamento pois a diferença entre elas é muito pequena [Thapa, 1980].

Passemos agora ao processo de cálculo dos parâmetros da deformação. Se considerarmos em princípio as equações (3.8) seriam necessários

apenas dois v̄ertices para obtenção dos almeçados parâmetros, ou seja, bastari a conhecer o valor da função deslocamento no v̄ertice investigado e em um de seus pontos vizinhos. Entretanto, se para um dado v̄ertice considerarmos ou tros pontos de sua vizinhança no cálculo dos referidos parâmetros, obteríamos possivelmente valores diferentes para os mesmos. Esta multiplicidade de soluções se deve principalmente às incertezas oriundas das hipóteses simplificati vas adotadas no estabelecimento do modelo aqui desenvolvido. É preciso ainda considerar quando falamos de incertezas, aquelas de que são eivados os deslocamentos por serem estes função de resultados de ajustamentos (vide (3.13)). A inconsistência com a qual aqui nos defrontamos não é, naturalmente, de nosso interesse e deverá de algum modo ser contornada. Além disto se pretendemos obter parâmetros que descrevam o comportamento de um v̄ertice em relação a sua vizinhança, dentro do processo de deformação, é preciso de alguma forma embutir nestes parâmetros informações relativas a todos os v̄ertices que com põem a referida vizinhança.

Uma solução que encerre as características levantadas no parágrafo anterior pode ser obtida através das equações (3.12). Isto seria feito por meio da aplicação das referidas equações à vizinhança de cada v̄ertice a ser analisado, resultando incôgnitos nestas equações apenas os elementos do tensor de deformação, pois os valores da função deslocamento para os v̄ertices vizinhos ( $V_x(x, y)$  e  $V_y(x, y)$ ) e para o v̄ertice analisado ( $V_x(x_0, y_0)$  e  $V_y(x_0, y_0)$ ) podem ser obtidos de (3.13). As coordenadas relativas dos pontos vizinhos por sua vez viriam de (3.10). Sendo então  $n$  o número de v̄ertices inte grantes da vizinhança do ponto objeto de análise, teremos constituído um sis tema de  $2n$  equações a 4 incôgnitas. A solução deste sistema de equações line ares proverá os valores dos parâmetros da deformação para o v̄ertice analisado. Tais parâmetros virão a retratar o comportamento deste v̄ertice em relação a sua vizinhança dentro do processo de deformação.

No que diz respeito à solução do sistema de equações que modela o cam po local de deslocamentos é preciso observar que um m̄inimo de dois pontos vi zinhos ( $n=2 \rightarrow 2n=4$ ) se faz necessário para que o referido sistema de equação admita solução. Quando o número de pontos vizinhos for maior que dois ( $n > 2 \rightarrow 2n > 4$ ), o sistema de equações passará a ser abundante e sua solução poderá advir de um critério, familiar aos geodesistas, denominado MÉTODO DOS M̄INIMOS QUADRADOS [Gemael, 1984].

Para o conjunto de  $n$  v̄ertices vizinhos ao ponto  $P(x_0, y_0)$ , as equa

ções (3.12) são expressas por:

$$\left. \begin{aligned}
 V_x(x_1, y_1) &= \frac{\partial V_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial V_x}{\partial y} y_1 + V_x(x_0, y_0); \\
 V_y(x_1, y_1) &= \frac{\partial V_y}{\partial x} x_1 + \frac{\partial V_y}{\partial y} y_1 + V_y(x_0, y_0); \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 V_x(x_n, y_n) &= \frac{\partial V_x}{\partial x} x_n + \frac{\partial V_x}{\partial y} y_n + V_x(x_0, y_0); \\
 V_y(x_n, y_n) &= \frac{\partial V_y}{\partial x} x_n + \frac{\partial V_y}{\partial y} y_n + V_y(x_0, y_0).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

É possível reescrever este sistema de equações em forma matricial resultando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_x(x_1, y_1) \\ V_y(x_1, y_1) \\ \vdots \\ V_x(x_n, y_n) \\ V_y(x_n, y_n) \end{bmatrix}}_D \quad = \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_n & y_n \end{bmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \partial V_x / \partial x \\ \partial V_x / \partial y \\ \partial V_y / \partial x \\ \partial V_y / \partial y \end{bmatrix}}_E \quad + \quad \underbrace{\begin{bmatrix} V_x(x_0, y_0) \\ V_y(x_0, y_0) \\ \vdots \\ V_x(x_0, y_0) \\ V_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}}_C, \quad (3.15)$$

$2n \ 1 \qquad \qquad 2n \ 4 \qquad \qquad 4 \ 1 \qquad \qquad 2n \ 1$

ou ainda de uma forma mais concisa

$$D = AE + C. \quad (3.16)$$

A solução deste sistema de equações no caso geral (ou seja, para  $2n \geq 4$ ) pode ser expressa por:

$$E = - (A^T A)^{-1} A^T L \quad (3.17)$$

onde

$$L = C - D. \quad (3.18)$$

Após a solução da equação matricial (3.17) o vetor E encerrará os elementos (3.11) do tensor de deformação para cada vértice investigado da rede geodésica.

Cabe ainda mencionar, para finalizar esta seção, a diferença existente, na concepção da utilização do modelo matemático do campo de deslocamento local (3.12), entre a abordagem proposta no presente trabalho e aquela representada em [Thapa, 1980] e [Vaníček et alii, 1981]. Segundo estes autores, as parcelas referentes às componentes da função deslocamento no vértice investigado ( $V_x(x_0, y_0)$  e  $V_y(x_0, y_0)$ ) são consideradas adicionais do modelo (além dos elementos do tensor de deformação), o que segundo nossa abordagem não se justifica já que tais quantidades são conhecidas (o valor da função deslocamento é determinado em todos os pontos da rede). Considerando o fato de a elaboração do referido modelo não ter sido apresentada nos trabalhos que acima mencionamos não nos foi possível obter pormenores sobre aquela concepção.

### 3.3.2 - INTERPRETAÇÃO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO

A partir do que foi apresentado na seção 2.2.5, ou seja, a decomposição do efeito da deformação em uma parcela de deformação pura e outra rotacional, analisemos agora o significado destas parcelas no estudo de deformações em redes geodésicas.

Os parâmetros que traduzem a deformação pura na vizinhança de um vértice da rede mostram como este vértice se comportou em relação aos vértices componentes de sua vizinhança. Poderíamos ainda dizer, em outras palavras, que estes parâmetros expressam o quanto variou em média (solução por mínimos quadrados) na vizinhança de um vértice, a distância que o separa dos demais, refletindo então uma variação local de escala.

Por sua vez o parâmetro de rotação diferencial evidenciará qual foi a variação média da orientação das direções, em relação ao sistema de referência, em torno do vértice investigado.

Com base no que foi descrito nos dois parágrafos precedentes estaremos aptos a verificar que tipo de influência uma determinada observação ou injunção, exerce sobre a rede em cada um de seus vértices. Assim, uma região da rede que apresente em relação às demais áreas, valores pronunciados para parâmetros de deformação pura, estará demonstrando sensibilidade em relação ao elemento cuja consistência estiver sendo testada. Há que se verificar então o grau de significância da ordem de grandeza dos valores destes parâmetros para realizar inferências quanto ao nível de consistência do referido fator. O mesmo raciocínio pode ser desenvolvido para a rotação diferencial média.

### 3.4 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO

Como já foi mencionado, toda informação sobre a deformação passa a ser conhecida em um vértice qualquer da rede após a determinação do tensor de deformação neste mesmo vértice. Para fins de análise do comportamento geral da deformação em uma rede geodésica, podemos agora pensar em uma forma de representação gráfica da referida informação, observando a decomposição do efeito da deformação apresentada na seção 2.2.5.

Existem diferentes maneiras para realizar esta representação [Schneider, 1982]. No caso presente, no que concerne a deformação simétrica, lançaremos mão de uma forma cônica (fig. 3.2-a) associada ao tensor de deformação simétrica. Esta técnica é similar àquela usada na construção de elipses de erro a partir dos resultados de um ajustamento por mínimos quadrados [Gemael, 1974]. Já no caso da rotação diferencial média realizaremos sua representação através de arcos de circunferências (fig. 3.2-b).

A fig. 3.2-a mostra uma possível cônica de deformação, ou seja, uma elipse: seus eixos, denominados **eixos principais** de deformação, tem a direção dos autovetores do tensor de deformação simétrica; os valores de seus semi-eixos  $\lambda_{MAX}$  e  $\lambda_{MIN}$  respectivamente valores máximo e mínimo de deformação, são os autovalores do referido tensor que no caso de redes geodésicas é dado (de acordo com (2.9)) por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

É possível facilmente verificar, após simples manipulações algébricas que os autovalores do tensor (3.19) são dados por [Gemael, 1974]

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{MAX} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + M \\ \lambda_{MIN} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - M \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

onde 
$$M = \sqrt{\frac{1}{4} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \epsilon_{12}^2} \quad (3.21)$$

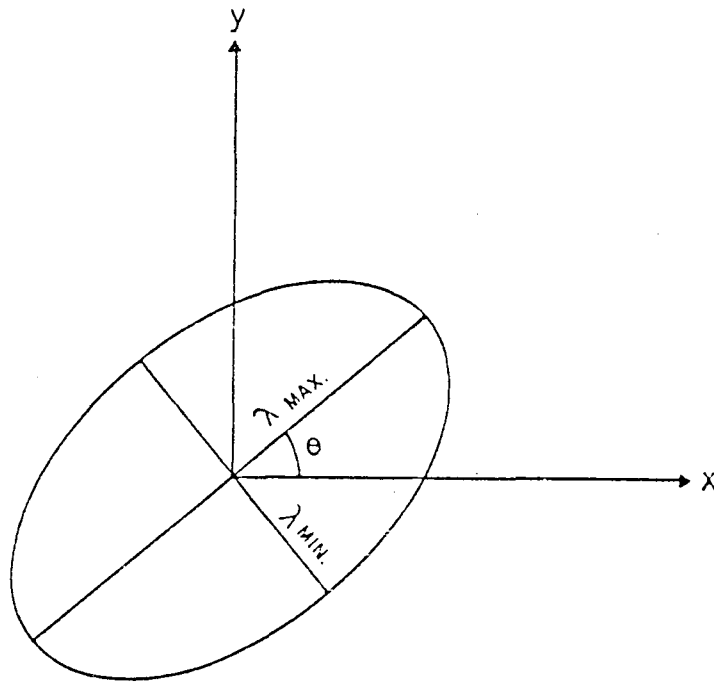


FIG. 3.2-a - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DEFORMAÇÃO PURA.

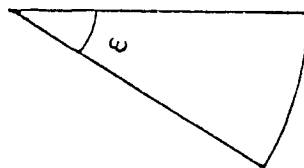


FIG. 3.2-b - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA ROTAÇÃO DIFERENCIAL MÉDIA.

eciso ainda definir a orientação da elipse de deformação. Tal orientação pode ser obtida a partir do ângulo  $\theta$  (fig. 3.2-a) que orienta seu semi-eixo maior. O ângulo  $\theta$  é na verdade a orientação do auto-vetor do tensor (3.19) correspondente ao seu auto-valor máximo. A expressão analítica para este ângulo de orientação é dada por [Thapa, 1980]:

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{\epsilon_{11} - \lambda_{\text{MAX}}}{\epsilon_{12}} . \quad (3.22)$$

Ao contrário das matrizes variância-covariância, o tensor de deformação admite autovalores positivos e negativos. Um valor positivo significa **extensão** (variação de escala positiva) na direção do eixo correspondente; e um valor negativo indica **contração** (variação de escala negativa). Naturalmente a cônica de deformação será uma elipse somente quando os dois autovalores forem positivos. Quando um for positivo e o outro negativo a cônica será uma hipérbole de dois ramos; do um deles for nulo a cônica se transforma em um segmento de reta, e quando  $\epsilon_{11}$  e  $\lambda_{\text{MIN}}$  forem negativos, teremos uma elipse imaginária. A maioria dos autovalores, não faz distinção entre as diferentes elipses e a hipérbole e plotam todos os casos, quando  $\lambda_{\text{MAX}} \cdot \lambda_{\text{MIN}} \neq 0$ , como elipses [Vaníček & Krakiwsky, 1982]. Também comum na prática, ao invés de plotar toda a cônica de deformação, representar somente os eixos principais das elipses. Para evidenciar a diferença entre eixos que representem extensão e contração, eles podem ser representados por segmentos de retas com padrões diferentes (por exemplo, segmentos de reta contínuos para extensões e segmentos pontilhados para contrações).

No caso da rotação diferencial média, que traduz a parte rotacional da deformação, a sua representação através de arcos de circunferência terá traço contínuo no caso de rotações horárias e traços pontilhados para rotações anti-horárias (fig. 3.2-b). A amplitude destes arcos de circunferência no caso presente é dada em concordância com a (2.12) por

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) . \quad (3.23)$$

## CAPÍTULO 4

### ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES EM REDES GEODÉSICAS HORIZONTAIS

Com base nos preceitos de análise de deformações em redes geodésicas, apresentados nos capítulos precedentes, passaremos agora à aplicação dos mesmos ao estudo do comportamento de uma rede geodésica, em resposta a presença de observações e/ou injunções inconsistentes em sua estrutura. A tônica deste capítulo será a avaliação do desempenho dos parâmetros da deformação. Nesse sentido, lançaremos mão de um modelo fictício de rede geodésica que servirá de base para um conjunto de experiências destinadas à análise da sensibilidade dos referidos parâmetros da deformação em situações simuladas.

Para realizar as experiências aludidas no parágrafo anterior, faremos uso de dois programas computacionais: um para ajuste da rede; e o outro para cálculo dos parâmetros da deformação. O primeiro programa, denominado USHER (Users System for Horizontal control Evaluation and Reduction), é o sistema atualmente empregado pelo IBGE nos projetos de ajustamento da rede geodésica planimétrica brasileira. Este programa realiza o ajustamento através do método de Variação de Coordenadas, usando como superfície de referência aquela de um elipsóide de revolução. O segundo programa, denominado DEFORMA, foi desenvolvido para este trabalho com base na metodologia apresentada no capítulo 3.

#### 4.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O MODELO DE SIMULAÇÃO

A estrutura do modelo de simulação é definida por uma cadeia de triangulação desenvolvida ao longo dos paralelos, composta de quadriláteros justapostos com diagonais visadas (em concordância com a conformação da rede geodésica brasileira). O modelo em questão (fig. 4.1) encerra 12 vértices e o quadro básico de observações é o seguinte:

- a) todas as direções observadas (num total de 52 observações) com desvio-padrão 0,4" (arbitrado). As referidas direções foram geradas a partir de valores perfeitos perturbados por variáveis aleatórias de distribuição normal com média zero e desvio-padrão igual a 0,6";
- b) duas bases entre os vértices números 1→2 e 11→12, com desvio-padrão 0,02 m (arbitrado);
- c) dois azimutes entre os vértices números 1→2 e 11→12, com desvio

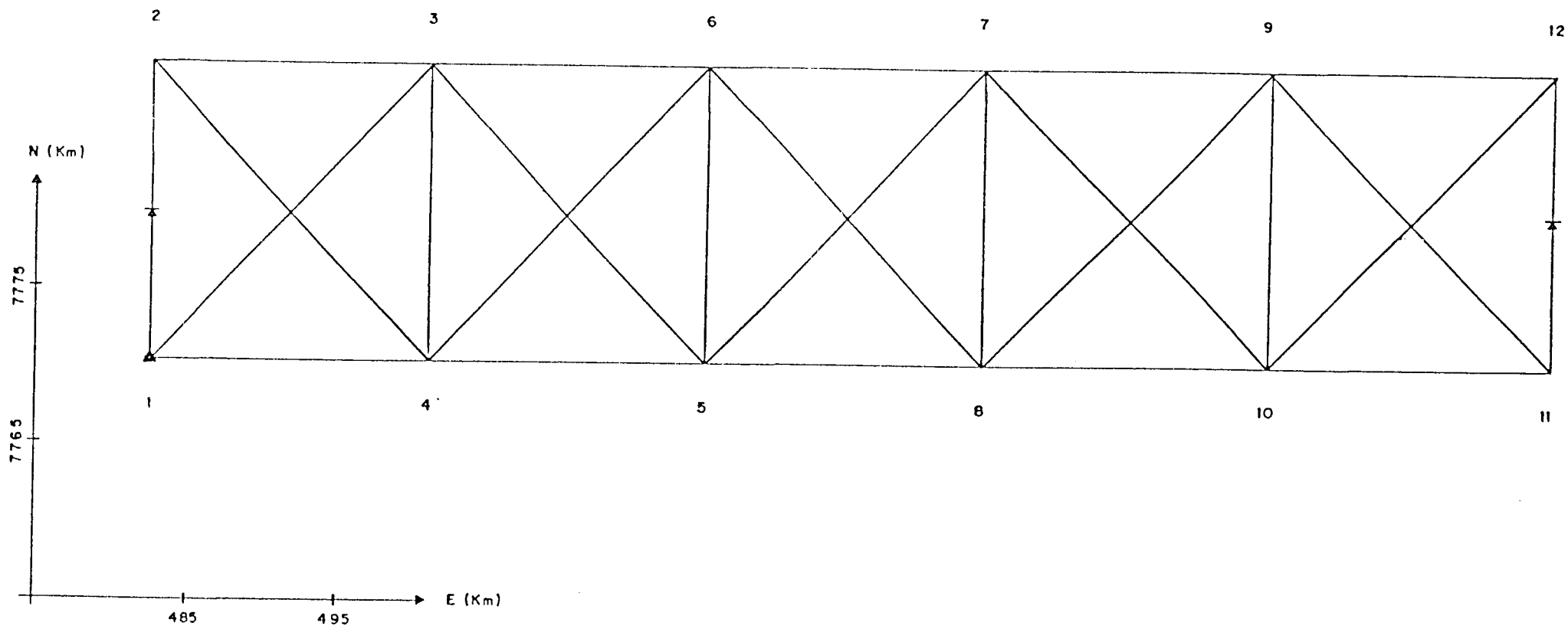


FIG. 4.1 - REDE GEODÉSICA SIMULADA.

-padrão 0,2" (arbitrado).

O sistema de referência cartesiano a ser adotado neste modelo será a quele associado ao sistema de projeção UTM (UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR).

#### 4.2 - AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO

Antes de iniciarmos a aplicação dos parâmetros da deformação na avaliação da consistência de observações em redes geodésicas, realizaremos um estudo preliminar visando a análise do comportamento dos referidos parâmetros, em resposta a deslocamentos predeterminados cujo efeito deformante possa ser conhecido a priori. Desta forma, os parâmetros deverão responder àqueles deslocamentos segundo padrões previamente conhecidos.

Dando princípio a este estudo, admitamos que os vértices n.ºs. 5 e 8 do modelo simulado sofram deslocamentos iguais (-0,90 m) segundo as direções dos eixos E e N (fig. 4.2). Decorre destes deslocamentos que a rede sofre uma deformação generalizada composta de extensões, contrações e rotações diferenciais.

##### 4.2.1 - DEFORMAÇÃO PURA

Analisemos primeiramente o comportamento dos parâmetros da deformação nos pontos onde foram introduzidos os deslocamentos fictícios. Por terem sido deslocados, os vértices n.ºs. 5 e 8 exibem (nesta configuração<sup>2</sup> em particular) as maiores elipses de deformação (fig. 4.3). A deformação se manifesta predominantemente por extensão, e a direção para a qual este efeito é máximo, é aproximadamente a mesma em que ocorreram os deslocamentos. Em decorrência da direção e sentido em que foram aplicados os deslocamentos (fig. 4.2.-a), o vértice 8 (bem como os vértices 9, 10 e 11) foi afetado apenas por extensões ao passo que o vértice 5, além da extensão, sofreu também uma contração conseqüente de sua aproximação do vértice 4. Este mesmo efeito pode ser observado nos vértices 3, 4 e 6 e procedem todos de uma série de composições de forças de reação aos deslocamentos sofridos pelos vértices 5 e 8.

É preciso ter em mente, que estes parâmetros de extensão e contração traduzem na verdade variações médias de escala, positivas e negativas, respectivamente, em cada vértice analisado (cf. 3.3.2). Assim, as contrações nos vértices 3, 4, 5 e 6 indicam que houve uma diminuição de escala

(2) A configuração de uma rede, neste trabalho, é entendida como sendo uma composição do conjunto de observações mais a geometria da rede.

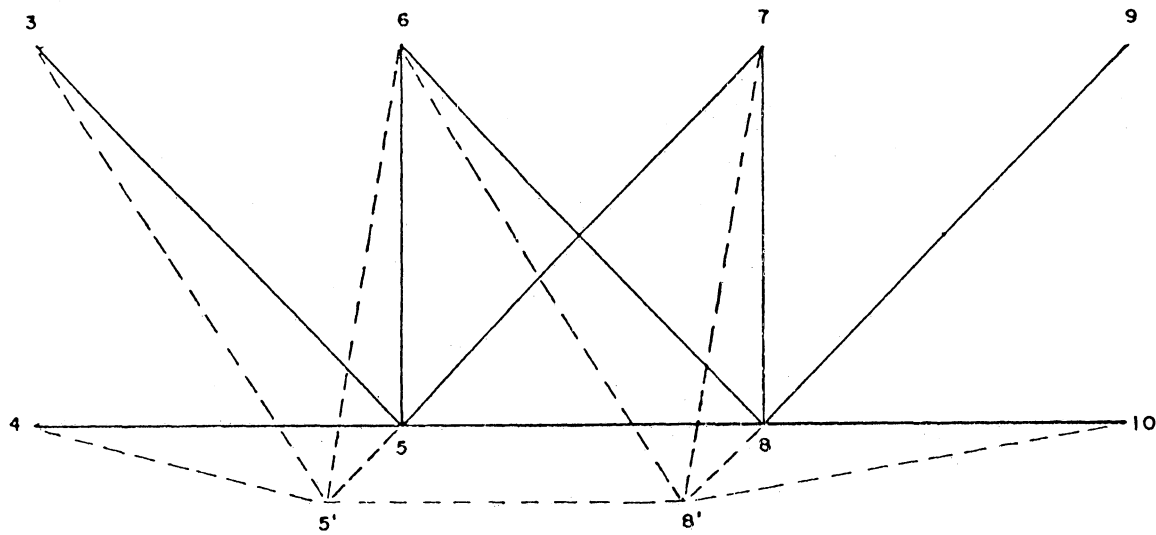


FIG. 4.2-a - DESLOCAMENTO DOS VÉRTICES Nºs. 5 E 8 (-0,90m).

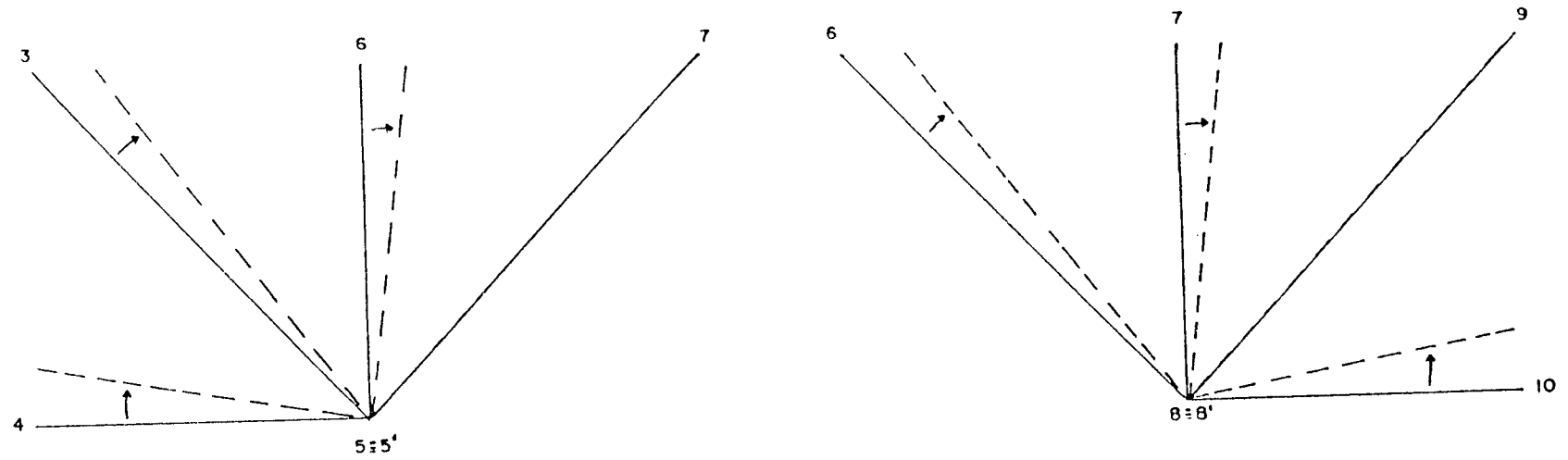
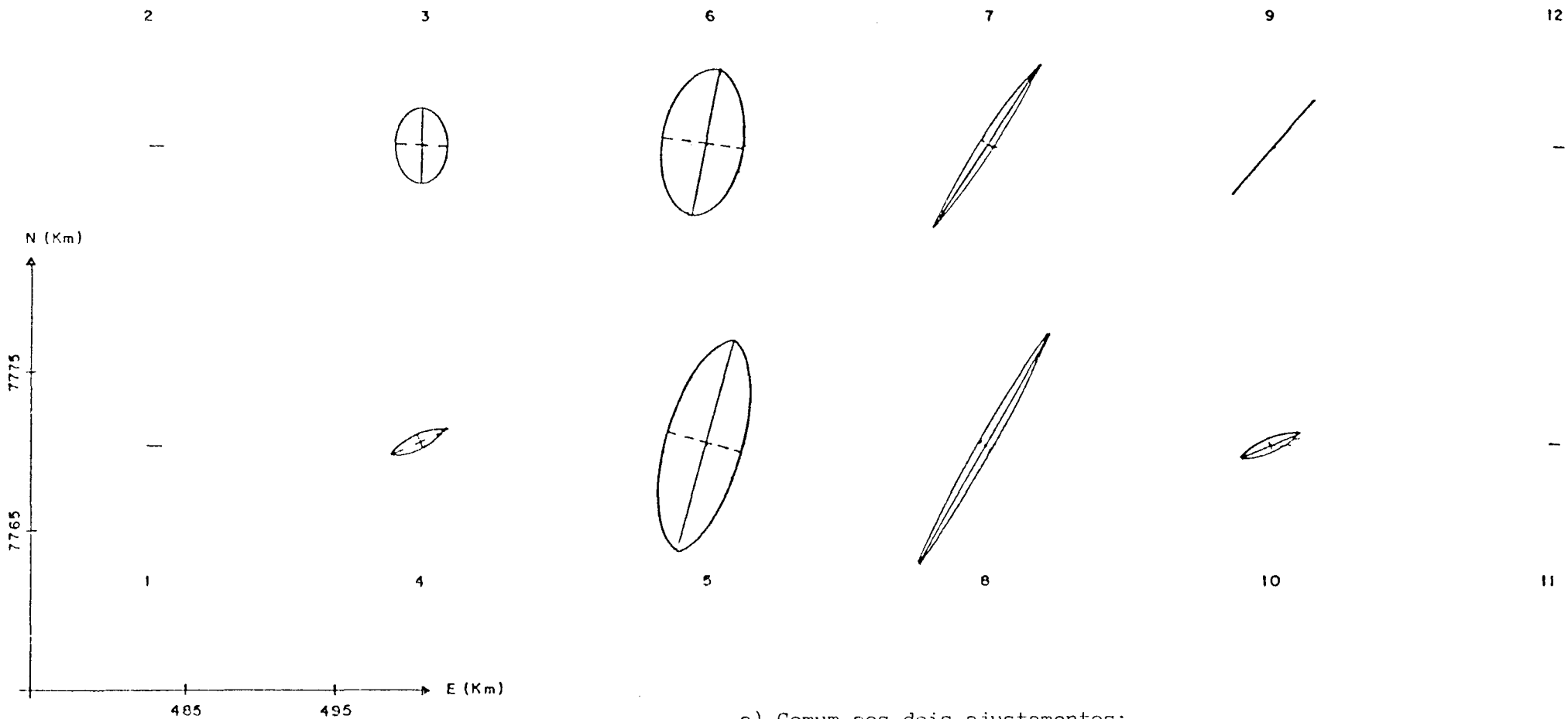


FIG. 4.2-b - ROTAÇÕES HORÁRIAS DAS DIREÇÕES QUE PARTEM DOS VÉRTICES N<sup>os</sup>. 5 E 8.



ESCALA:

Elipses de deformação..... 1  $\mu$ strain = 0,033 cm

Ângulos de rotação ..... 1" = 8,6<sup>o</sup>

a) Comum aos dois ajustamentos:

- origem no vértice nº 1; todas as direções; bases 1 → 2 e 11 → 12;  
azimutes 1 → 2 e 11 → 12.

b) Características do segundo ajustamento:

- as coordenadas E e N dos vértices nºs. 5 e 8 sofreram variações de -0,90

FIG. 4.3 - DEFORMAÇÃO PURA RESULTANTE DE DESLOCAMENTOS NEGATIVOS SUBTENDIDOS PELOS VÉRTICES Nºs. 5 E 8.

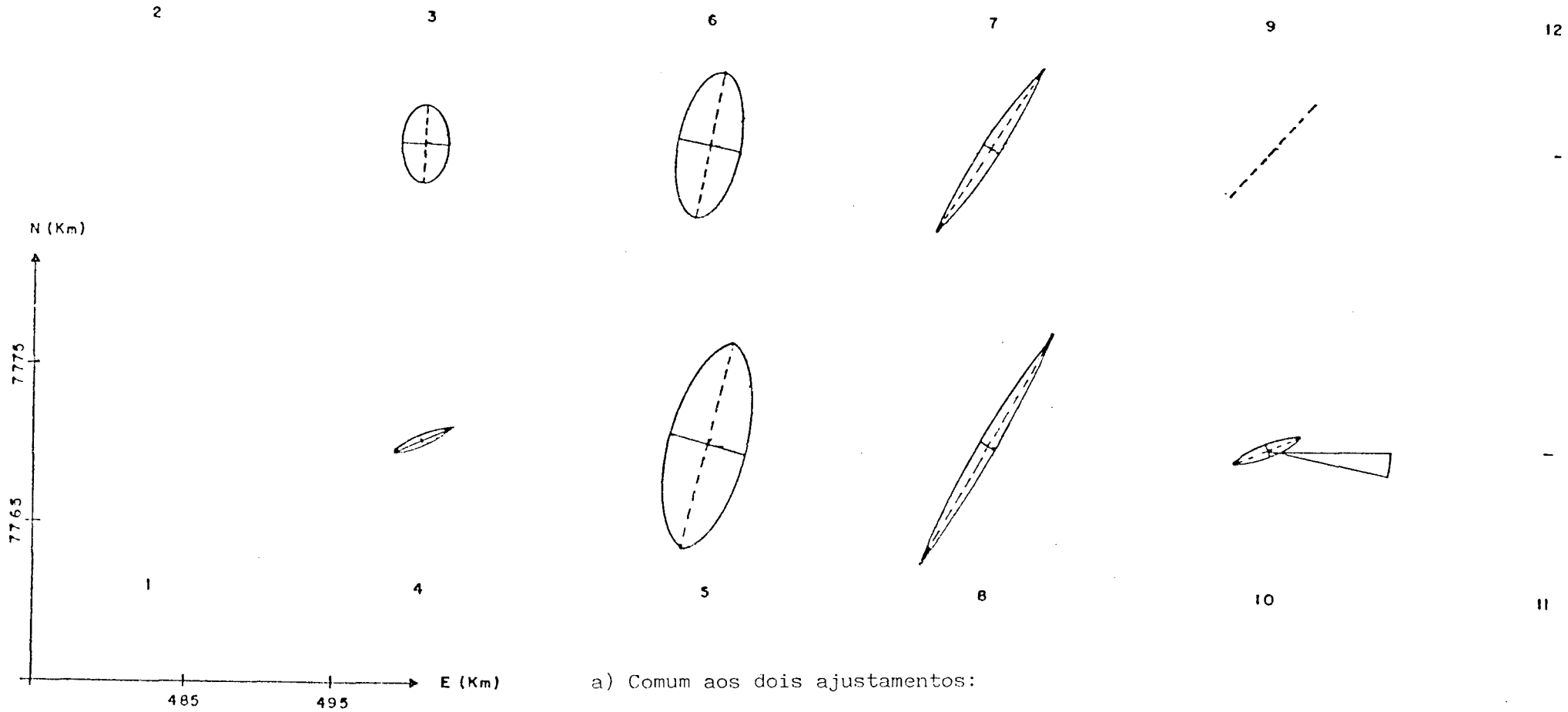
(aproximadamente na direção do eixo E) entre os vértices [3 e 6] e [4 e 6]. Da mesma forma as extensões nos vértices 5 e 6 evidenciam um aumento de escala (aproximadamente na direção do eixo N) da distância que separa os aludidos vértices. Algo semelhante pode ser observado na diagonal que une os vértices 8 e 9.

Na fig. 4.4 são apresentadas elipses de deformação correspondentes a deslocamentos dos vértices 5 e 8 de mesma grandeza e direção do teste precedente, porém, em sentido contrário. O padrão de deformação lá esboçado é semelhante àquele mostrado na fig. 4.3, sendo que neste caso as extensões são substituídas pelas contrações e vice-versa. As conclusões a serem tiradas nesta outra situação são análogas às anteriores, observadas, evidentemente, as devidas diferenças.

#### 4.2.2 - ROTAÇÃO DIFERENCIAL

Como foi mencionado na seção 3.3.2, dentro de um processo de deformação, a rotação diferencial expressa, em cada vértice da rede, a variação média de qualquer direção que dele emane, em relação ao sistema de coordenadas adotado (variação azimutal). Para analisar o desempenho deste parâmetro em resposta aos deslocamentos aplicados nas estações nºs. 5 e 8 (na mesma forma da fig. 4.3), consideremos a fig. 4.5 onde estão retratadas, para cada vértice da rede, as rotações diferenciais decorrentes dos aludidos deslocamentos. Nesta figura podemos observar um quadro predominante de rotações horárias. Tal fato pode ser corroborado através de uma análise das figuras 4.2-a e 4.2-b, onde se verifica uma movimentação preferencial no sentido horário, das direções que partem dos vértices da rede simulada. O vértice 9 por sua vez, apresenta uma rotação diferencial média praticamente nula. Isto se explica pelo fato de a observação de direção que o conecta com o vértice 8 ser quase coincidente com a direção do deslocamento por este sofrido. Já no caso do vértice 10, a rotação é anti-horária por razões facilmente identificáveis na fig. 4.2-a.

No que diz respeito a ordem de grandeza das rotações em cada vértice, verifica-se que esta, tal qual a orientação das elipses de deformação, também depende, naturalmente, da posição relativa entre os vértices da rede. Sendo assim, observa-se na fig. 4.5 que dentre os vértices deslocados, o de número 5 apresenta o maior valor de rotação diferencial média. Isto pode ser facilmente entendido se atentarmos para o fato de que a direção dos des



ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,033 cm

Ângulos de rotação 1" = 8,6°

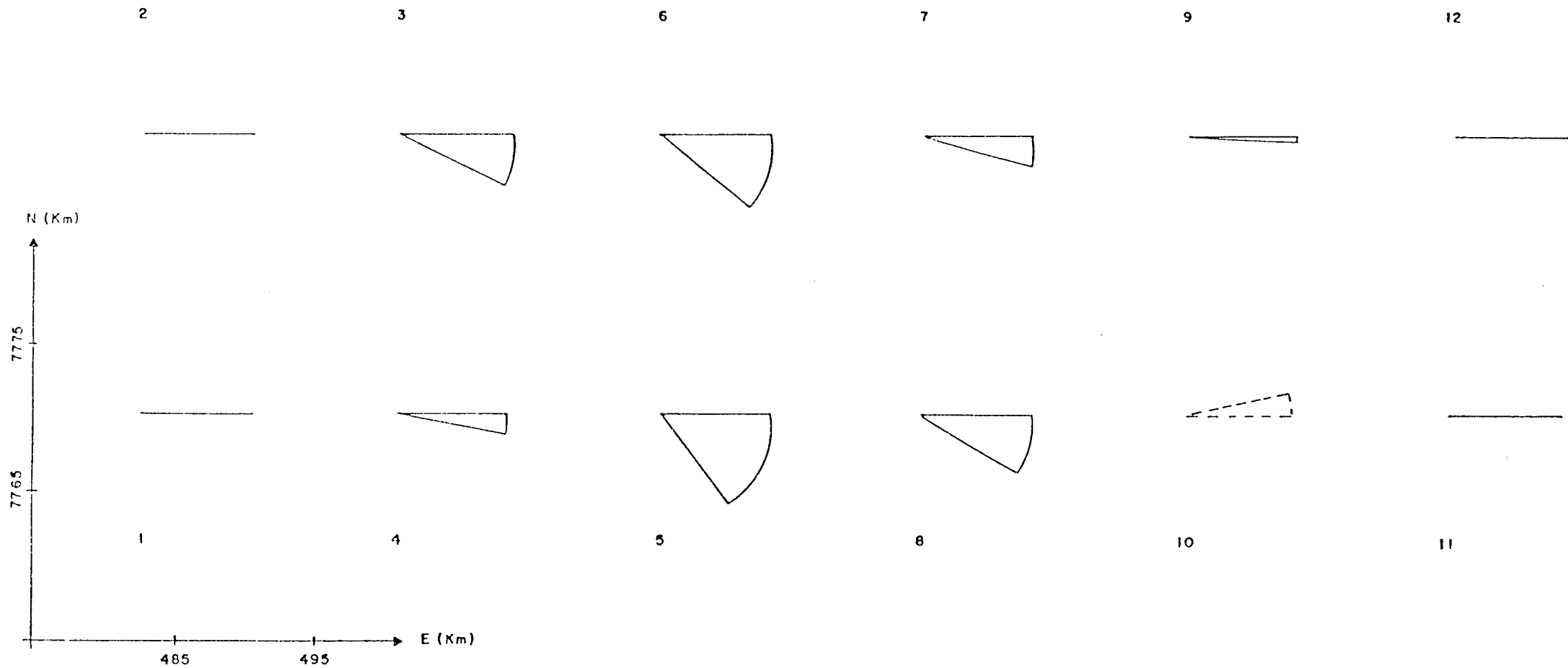
a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- as coordenadas E e N dos vértices n.ºs. 5 e 8 sofreram variações de + 0,90 m.

FIG. 4.4 - DEFORMAÇÃO PURA RESULTANTE DE DESLOCAMENTOS POSITIVOS SUBTENDIDOS PELOS VÉRTICES N.ºs. 5 E 8.



ESCALA:

Elipses de deformação  $1 \mu\text{strain} = 0,033 \text{ cm}$

Ângulos de rotação  $1'' = 8,6^\circ$

a) Comum aos dois ajustamentos:

(vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- as coordenadas E e N dos vértices n<sup>os</sup>. 5 e 8 sofreram variações de  $-0,90\text{m}$ .

FIG. 4.5 - ROTAÇÃO RESULTANTE DE DESLOCAMENTOS NEGATIVOS SUBTENDIDOS PELOS VÉRTICES N<sup>os</sup>. 5 E 8.

locamentos, assegura para este vértice, em relação aos vértices 3, 6 e 7, o mesmo comportamento apresentado pelo vértice 8 em relação aos vértices 6, 7 e 9 respectivamente. Todavia, tal característica não se mantém quando entram em cena os vértices 4 e 10, para os quais os vértices 5 e 8 apresentam comportamentos antagônicos (vide fig. 4.2-b). Interpretações semelhantes podem ser feitas para os demais vértices.

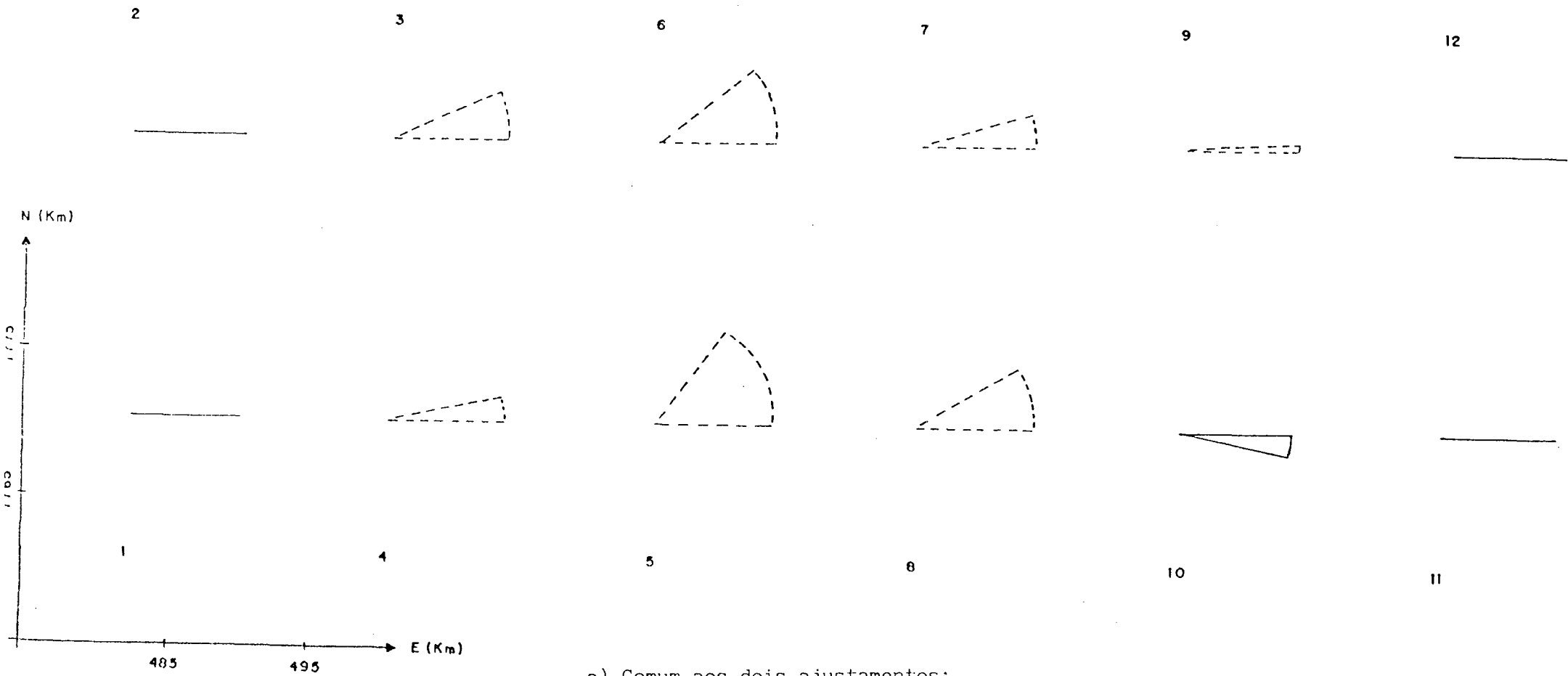
Podemos ainda considerar o efeito rotacional induzido pelo deslocamento dos vértices 5 e 8 iguais aqueles que deram origem à fig. 4.4. Neste caso, o padrão de rotações diferenciais apresentado é uma imagem refletida daquele mostrado na fig. 4.5 (vide fig. 4.6), e as interpretações a serem obtidas aqui são análogas às aquelas abordadas no exemplo supra citado.

Concluindo esta divisão, é possível dizer que o comportamento apresentado pelos parâmetros da deformação segue padrões lógicos refletindo o efeito deformante tal qual ele ocorre. As variações de escala e orientação (respostas características de redes geodésicas, sempre que por algum motivo as coordenadas de seus vértices são alteradas) ficam evidenciadas pelos referidos parâmetros, que propiciam a identificação das zonas da rede mais afetadas. Resta-nos agora realizar testes com observações e injunções no sentido de avaliar a potencialidade dos parâmetros, dentro do contexto de análise de consistência das informações que compõem uma rede geodésica planimétrica.

#### 4.3 - PADRÃO DE DEFORMAÇÃO INDUZIDO POR OBSERVAÇÕES E INJUNÇÕES

##### 4.3.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No processo de análise a ser agora desenvolvido iremos investigar a consistência de uma observação e/ou injunção, com base em padrões de deformação pura e rotação diferencial média (vide 2.2.5) por ela induzidos na rede. Estes padrões são obtidos através de parâmetros que descrevem um estado de deformação caracterizado, no nosso caso particular, a partir da comparação de duas configurações distintas da rede (vide cap. 3). A primeira, definida sem a presença da observação (ou injunção) a ser analisada, e a segunda, por sua vez, encerrando a observação (ou injunção) em questão. Os aludidos parâmetros, como já foi mencionado, propiciam um retrato das alterações de forma entre os dois estágios (configurações) que acabamos de discriminar, e será a partir deles que atestaremos quanto ao grau de consistência de uma determinada observação. Isto não significa dizer, em caso de um ele



a) Comum aos dois ajustamentos:

(vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- as coordenadas E e N dos vértices nºs. 5 e 8 sofreram variações de + 0,90 m.

ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,033 cm

Ângulos de rotação 1" = 8,6°

FIG. 4.6 - ROTAÇÃO RESULTANTE DE DESLOCAMENTOS POSITIVOS SUBTENDIDOS PELOS VÉRTICES Nºs. 5 E 8.

vado padrão de deformação, que a observação cuja consistência estiver sendo analisada esteja, necessariamente, livre de erro. A função destes parâmetros se restringe, tão somente, a identificação de inconsistência em determinadas regiões da rede, cujas causas deverão ser investigadas. A origem da inconsistência pode advir da observação que estiver sendo estudada, ou ainda de uma outra observação qualquer presente no trecho da rede que estiver sendo analisado.

Antes de passar às seções subsequentes, cumpre adotar para os parâmetros da deformação uma nova roupagem conceitual que nos faculte uma clara interpretação dos mesmos. Como vimos na seção 3.3.2, os parâmetros da deformação pura traduzem, em cada vértice da rede, a variação média de escala das distâncias que o separam dos demais vértices que integram sua vizinhança, dentro do processo de deformação. Os números que expressam estes parâmetros são grandezas adimensionais para as quais adotaremos uma unidade específica a ser denominada s t r a i n, e para fins de interpretação dos resultados faremos uso de um de seus submúltiplos, ou seja, o μstrain [Vaníček et alii, 1981]. Observando a natureza dos parâmetros da deformação (vide expressões (2.1) e (2.2)) verificamos que o μstrain expressa as variações relativas de uma grandeza linear em unidades da sexta casa decimal, ou ainda, em partes por milhão (1 μstrain = 1 p.p.m.). No que diz respeito aos ângulos de rotação diferencial média, expressos adimensionalmente (radianos), podemos simplesmente transformá-los para segundos de arco.

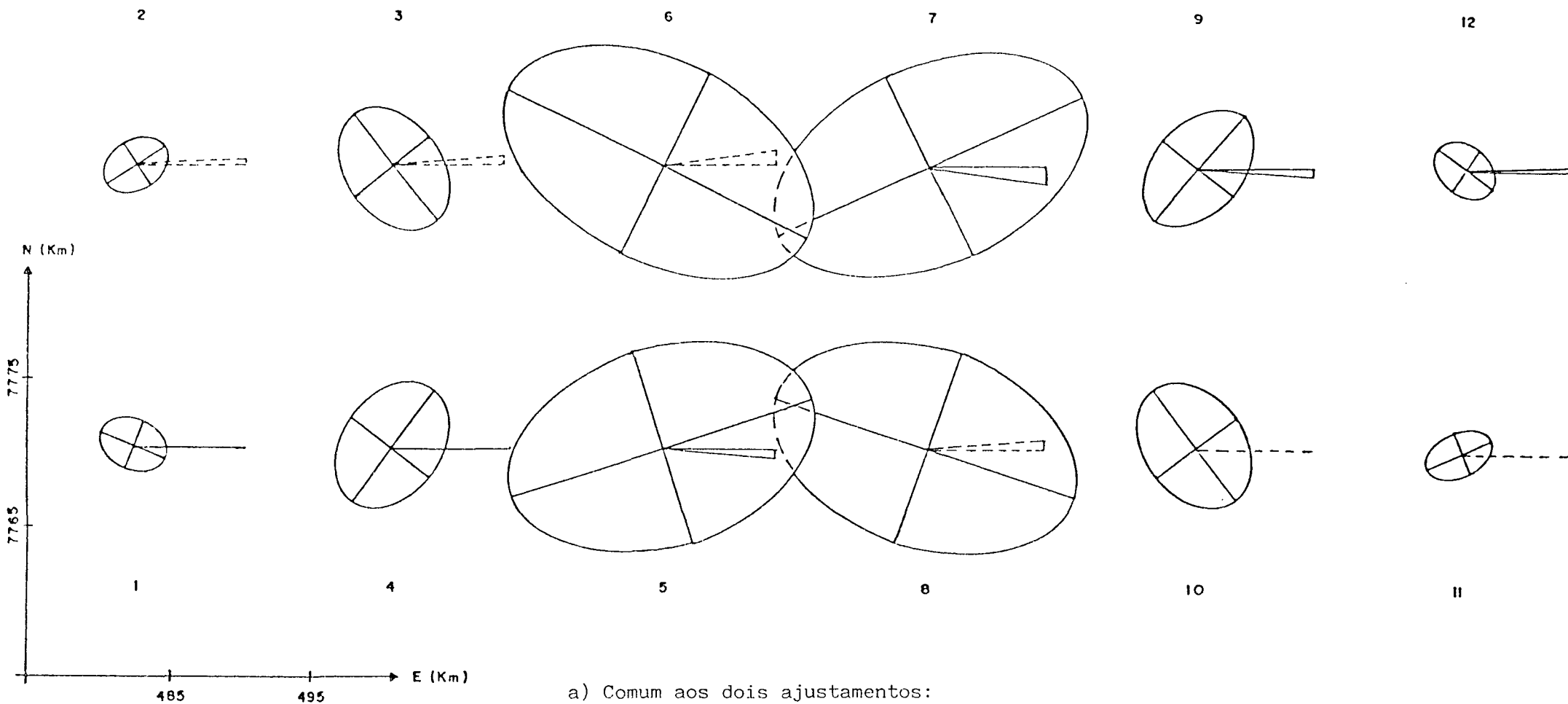
#### 4.3.2 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR DISTÂNCIAS INCONSISTENTES

Tendo por base o modelo de simulação adotado, realizamos uma série de experiências visando avaliar o comportamento dos parâmetros de deformação quando da inserção, no referido modelo, de observações de distâncias consistentes e inconsistentes.

Consideramos inicialmente, a inclusão em nossa rede fictícia de uma base entre as estações nºs. 6 e 7 cujo valor e peso fossem consistentes com as demais bases da configuração inicial (vide nota de rodapé nº 2 na seção 4.2.1). A reação da rede à presença desta nova observação deu lugar a elipses de deformação que variaram entre 0,09 μstrain (extremidades da rede e 0,47 μstrain (extremos da base inserida). A rotação diferencial média por sua vez, atingiu no pior caso (extremos da base) 0,02". Tendo em vista o grau de consistência entre as observações da configuração inicial e

a base 6 + 7, que foi agregada à rede, podemos dizer que os valores assumidos pelos parâmetros da deformação, na avaliação da influência desta base sobre a rede ora analisada, são função, tão somente, das flutuações aleatórias inerentes aos erros de que são evadas as observações de um modo geral. Por outro lado, uma vez que a rede em questão foi elaborada segundo critérios específicos (boa geometria e qualidade das observações) para assegurar um padrão de precisão de 1ª ordem, poderíamos aceitar os parâmetros da deformação obtidos como sendo característicos desta rede em particular.

Em uma segunda experiência, inserimos em nossa rede fictícia a mesma base usada no teste anterior, sendo que desta feita, mantendo o peso que lhe fora atribuído no teste precedente e modificando seu valor em +0,20m ( $\pm 11$  p.p.m. que equivalem a 12 vezes a precisão relativa adotada para esta base). Os resultados alcançados nesta experiência (fig. 4.7) revelaram de imediato, quando comparados ao teste anterior, a inconsistência do novo valor da base 6 + 7 traduzida por um aumento no nível da deformação na rede. A inconsistência que aqui detectamos se caracterizou pela ocorrência, em toda a rede, de extensões – variações positivas de escalas, vide seção 2.2.2 – e rotações diferenciais horárias e anti-horárias. As extensões, decorrentes da inserção de uma base mais longa, alcançaram valores aproximadamente 15 vezes maiores que aqueles obtidos no teste anterior, e a amplitude dos ângulos de rotação diferencial média por sua vez, cresceu cerca de 13 vezes em relação a mesma experiência. Ainda fazendo comparações com o teste precedente, verificamos que também no presente teste, os valores máximos de deformação ocorreram nos extremos da base inserida (7,14  $\mu$ strain para a deformação pura e 0,27" para os ângulos de rotação), e os valores mínimos nas extremidades da rede. Esta característica advém de um padrão de comportamento da deformação na rede, que nos mostra uma diluição do efeito deformante à medida em que nos afastamos da região onde foi introduzida a observação (veja o padrão das elipses de deformação na fig. 4.7). Tal fato ressalta o caráter local da atuação dos parâmetros, pois a região onde eles assumem seu maior valor é exatamente aquela onde foi inserida a observação. Um outro aspecto a destacar nesta experiência é a resposta da rede, em termos de rotação diferencial média, quando o agente deformador é uma observação de distância. Como já foi mencionado, seu valor mais crítico não ultrapassou 0,27" e isto nos mostra, para esta configuração de rede em particular, que distâncias inconsistentes geram apenas pequenas rotações locais na rede.



a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3).

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução da base 6 → 7, 0,20 m mais longa, com desvio-padrão igual a 0,017m.

FIG. 4.7 - INFLUÊNCIA DE UMA DISTÂNCIA MAIS LONGA INDEVIDAMENTE PONDERADA - BASE 6 → 7.

ESCALA:

Elipses de deformação  $1 \mu\text{strain} = 0,4 \text{ cm}$

Ângulos de rotação  $1'' = 30^\circ$

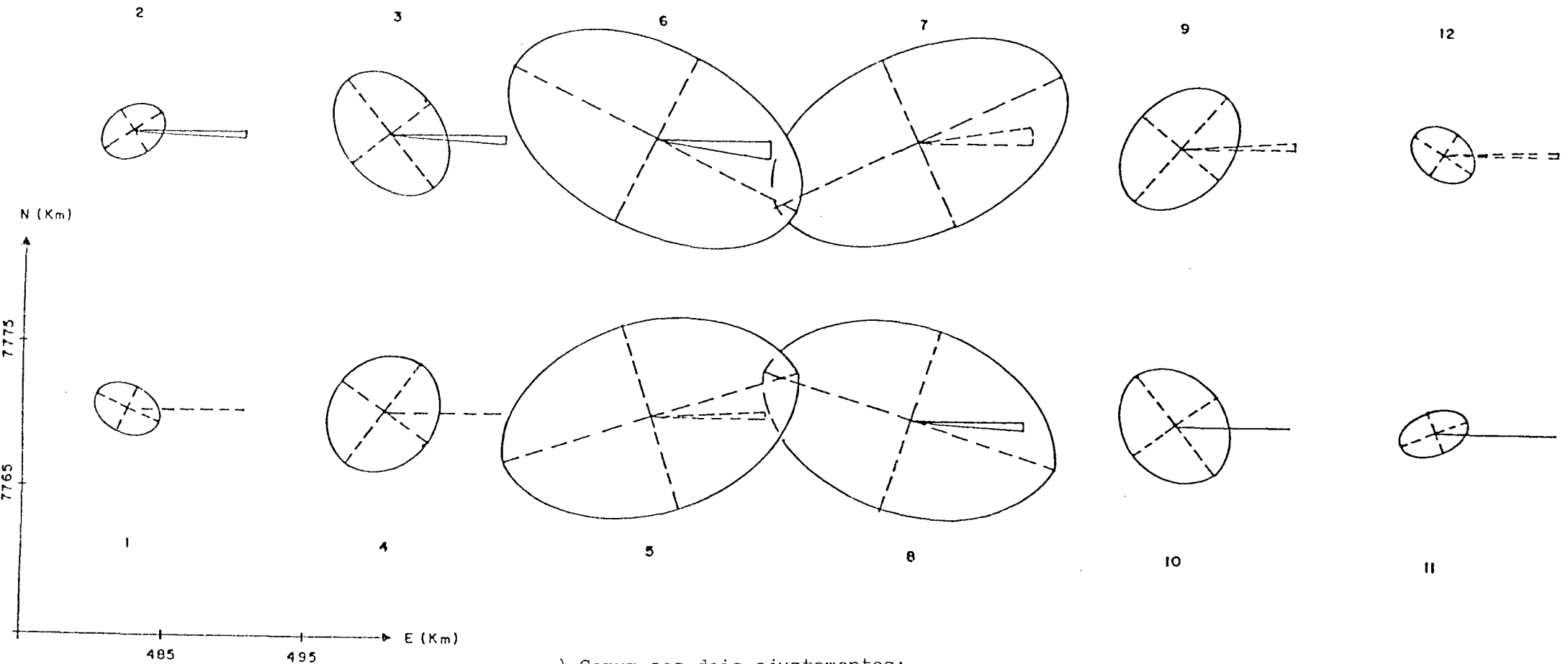
Um quadro semelhante àquele descrito no parágrafo anterior foi obtido quando o fator de deterioração aplicado à base 6→7 foi negativo (-0,20 m). A diferença verificada ficou por conta da substituição das extensões por contrações – variações negativas de escala, vide seção 2.2.2 –; das rotações horárias por rotações anti-horárias e vice-versa (fig. 4.8).

O objetivo do quarto experimento que realizamos foi o de investigar o tipo de influência a ser exercida sobre a nossa rede fictícia pela mesma base 6→7, quando a sua ponderação refletisse a inconsistência por ela apresentada. A fig. 4.9 encerra os resultados obtidos que, se comparados aos primeiro e segundo testes, passam a constituir um nível intermediário de deformação. Neste quadro de deformações verificamos que a adequação da ponderação amenizou o efeito deformante induzido pela aludida base, pois o nível de deformação agora obtido em muito se distancia daquele esboçado na segunda experiência, fig. 4.7, revelando índices de deformação significativamente menores (o valor máximo de deformação pura foi de 1,38  $\mu$ strain). Os parâmetros mostraram-se com isto sensíveis a variações na ponderação de observações inconsistentes (veja resultados apresentados na quarta experiência da seção subsequente).

Na quinta experiência procuramos testar a reação da rede à inserção de uma base cuja direção fosse perpendicular àquela apresentada pela base 6→7. Para tanto introduzimos na rede uma base entre as estações nºs. 7 e 8, cujas características, ou seja, fator de distorção e peso, foram as mesmas atribuídas à base 6→7 na experiência da fig. 4.7. Chegamos neste caso, a resultados (fig. 4.10) que nos mostraram uma elavação no nível de deformação, da ordem de 1 a 3  $\mu$ strain, em relação a experiência da fig. 4.7. Esta diferença pode ser explicada se atentarmos para o fato de que a base inconsistente 6→7, em seu esforço deformante, encontra forte resistência nos azimutes que figuram nos extremos da rede. A base inconsistente 7→8 por outro lado, realiza um esforço deformante segundo uma direção para a qual tal resistência não se verifica. Um outro aspecto evidenciado pelas elipses de deformação está na assimetria de sua distribuição ao longo da rede. Esta característica advém do fato de a base 7→8, diferentemente da base 6→7, não ocupar uma posição central na rede.

#### 4.3.3 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR AZIMUTES INCONSISTENTES

Vejam agora o tipo de comportamento dos parâmetros da deformação em nossa rede fictícia, mediante a inserção na mesma de azimutes con



a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

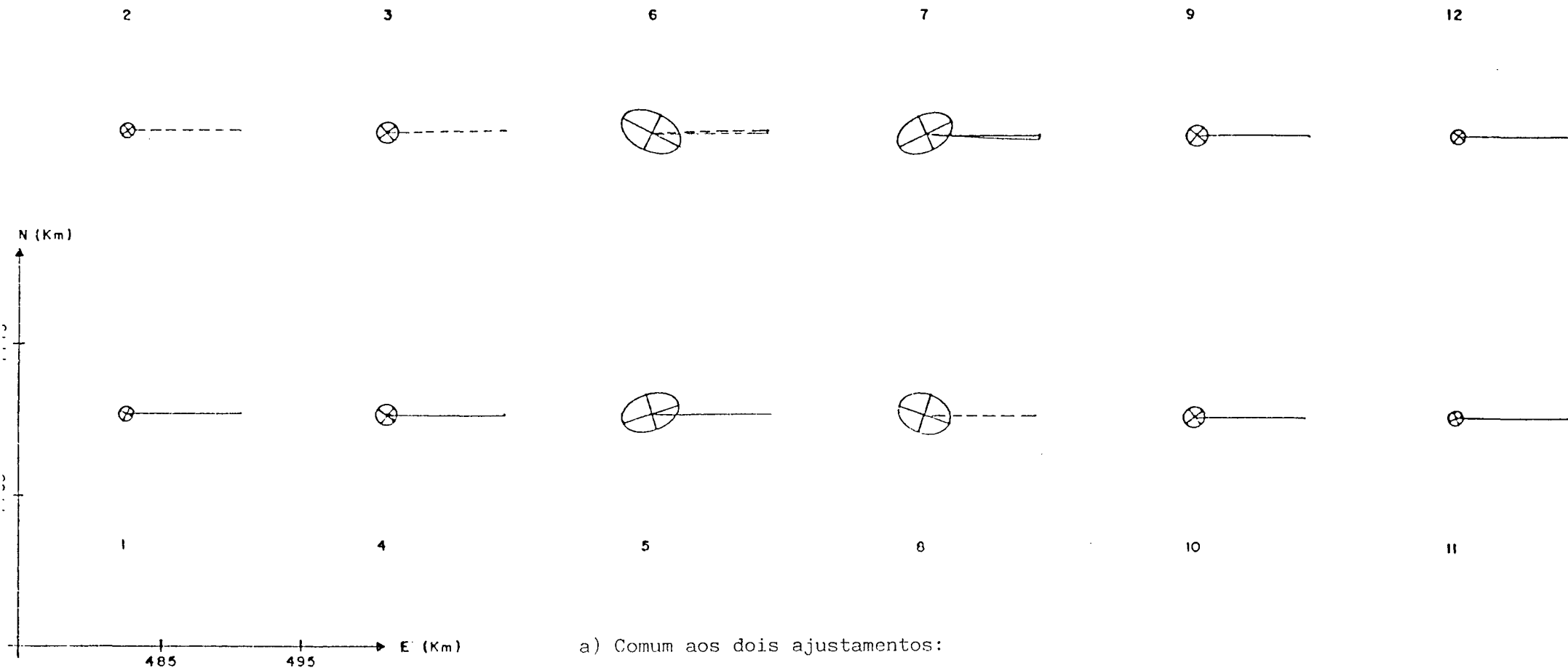
- Introdução da base 6 → 7, 0,20 m mais curta, com desvio-padrão igual a 0,017 m.

ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,4 cm

Ângulos de rotação 1" = 30°

FIG. 4.8 - INFLUÊNCIA DE UMA DISTÂNCIA MAIS CURTA INDEVIDAMENTE PONDERADA - BASE 6 → 7.



ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,4 cm

Ângulos de rotação 1" = 30°

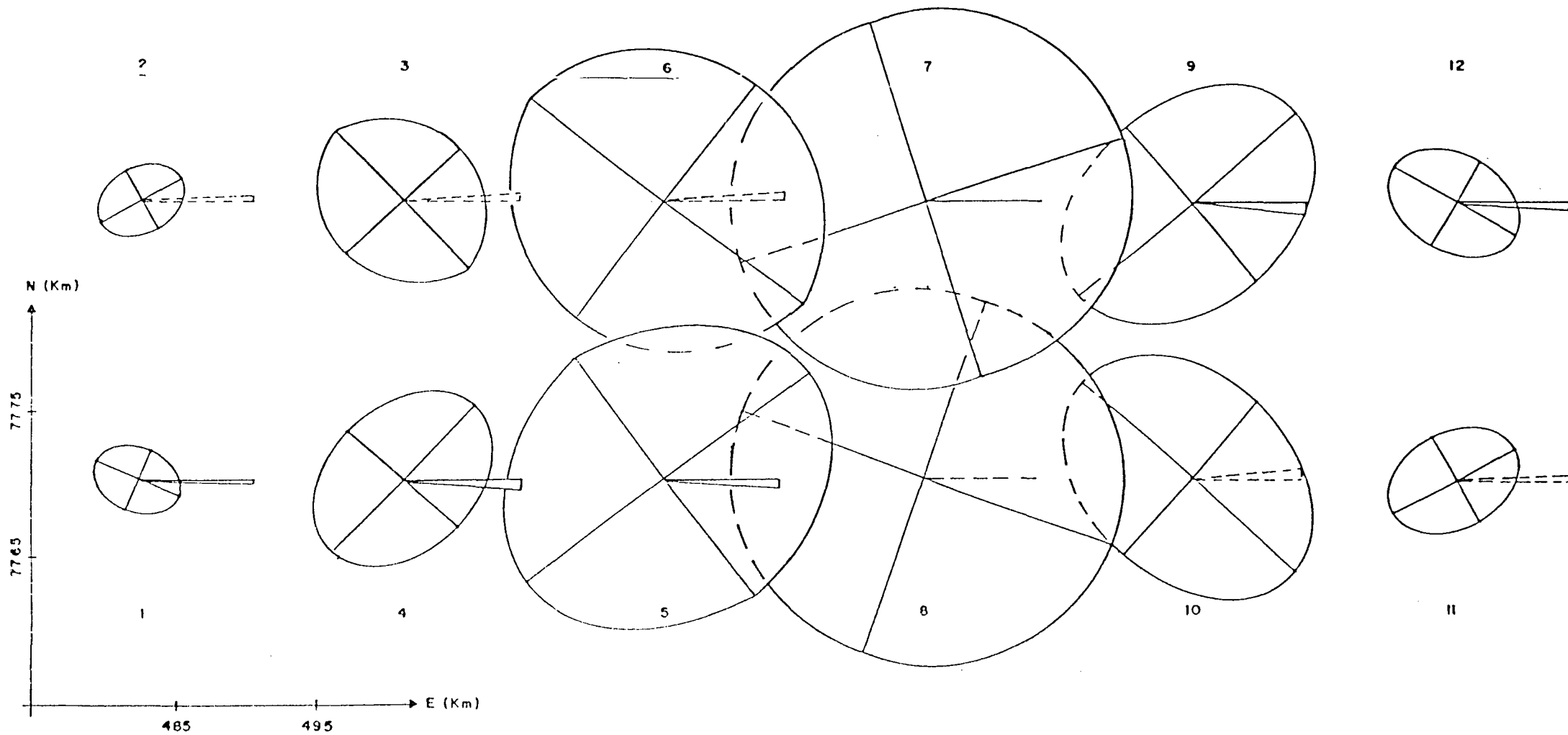
a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- mesma base da fig. 4.7 com desvio-padrão igual a 0,150 m.

FIG. 4.9 - INTRODUÇÃO DE UMA DISTÂNCIA MAIS LONGA DEVIDAMENTE PONDERADA - BASE 6 + 7.



ESCALA:

Elipses de deformação  $1 \mu\text{strain} = 0,4 \text{ cm}$

Ângulo de rotações  $1'' = 30^\circ$

a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

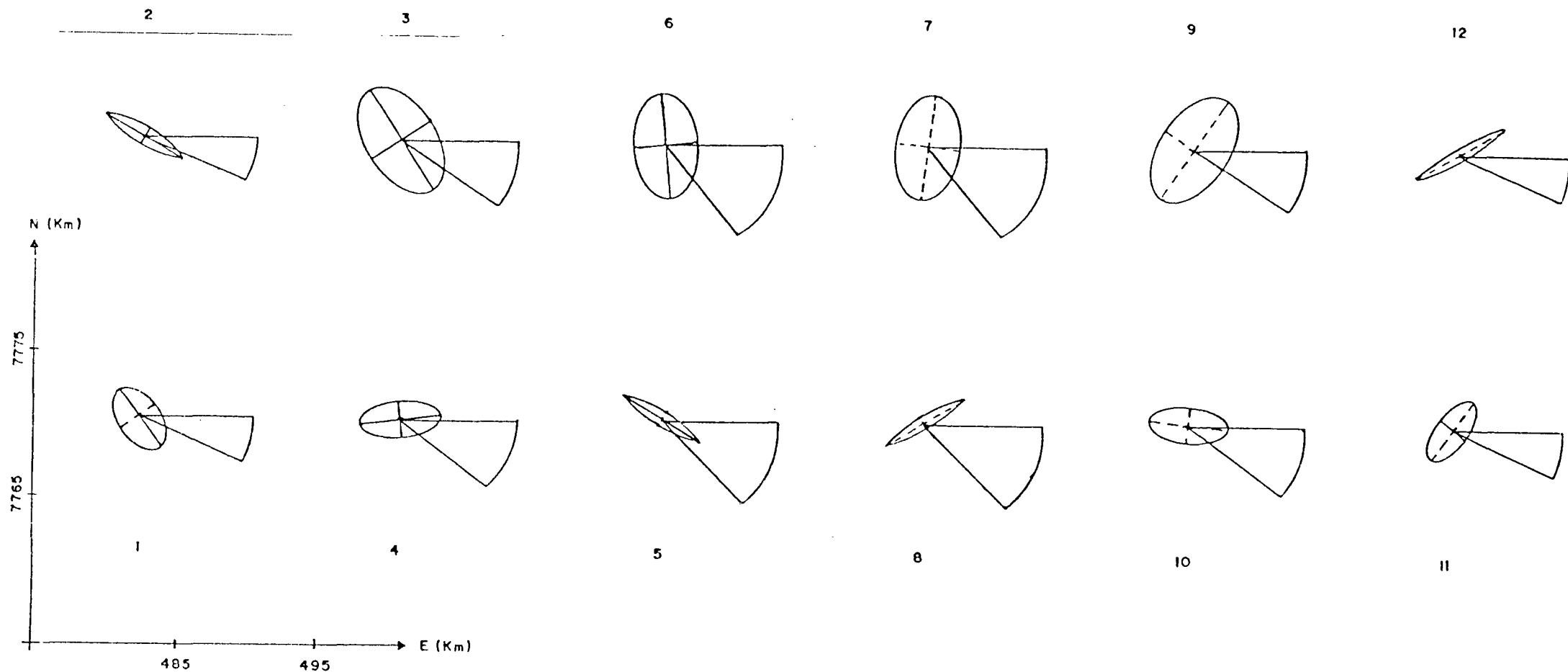
- Introdução da base 7→8 que é perpendicular à base 6→7, e possui as mesmas características da fig. 4.7.

FIG. 4.10 - INFLUÊNCIA DE UMA DISTÂNCIA MAIS LONGA INDEVIDAMENTE PONDERADA - BASE 7→8.

sistentes e inconsistentes.

No primeiro teste que realizamos constatamos a total indiferença (deformação nula) da rede à introdução de um azimute, entre os vértices nºs. 6 e 7, consistente com aqueles da configuração inicial, ao nível dos erros aleatórios. Porém, o mesmo comportamento não se verificou na experiência seguinte, fig. 4.11, onde o valor deste azimute foi modificado em  $+3''$  (15 vezes o desvio-padrão adotado para esta observação) mantendo-se a mesma ponderação usada na experiência precedente. A inconsistência assim caracterizada deu lugar a valores significativos tanto para os ângulos de rotação diferencial quanto para as elipses de deformação. Naturalmente os valores mais críticos foram apresentados pelas rotações diferenciais que são mais afetadas pela presença de inconsistência nos azimutes. Os valores assumidos por este parâmetro variaram entre um mínimo de  $0,78''$  (extremidades da rede) e um máximo de  $1,69''$  (extremos do azimute), revelando rotações horárias (o fator de deterioração do azimute foi positivo). O padrão de comportamento das rotações ao longo da rede apresentou a mesma tendência observada no caso das distâncias inconsistentes, ou seja, a ordem de grandeza da rotação diminui à medida em que nos afastamos da região onde foi inserido o azimute. Isto evidencia mais uma vez o caráter local deste parâmetro, já constatado na seção anterior.

Um fato digno de nota é a forma pela qual a presença na rede de um azimute inconsistente afeta a escala da mesma, ao contrário do que vimos no caso estudado na seção precedente, onde a influência de distâncias inconsistentes sobre a orientação das direções foi pouco significativa. A deformação decorrente da introdução do azimute inconsistente 6+7 no modelo, deu lugar a um conjunto de variações positivas (extensões) e negativas (contrações) de escala. O padrão de distribuição da deformação ao longo da rede, nos mostra que a sua primeira metade (vértices de 1 a 6) foi afetada por extensões, ao passo que na segunda metade (vértices de 7 a 12) verificou-se o aparecimento de contrações. Por outro lado, constata-se através de um exame da fig. 4.11 que as elipses de contração da segunda metade da rede são uma imagem refletida das elipses de extensão que figuram em sua primeira metade. Uma outra característica a ressaltar está no fato de os valores máximos de deformação terem se verificado nas estações nºs. 3 e 9 (respectivamente  $+2,43 \mu\text{strain}$  e  $-2,44 \mu\text{strain}$ ) adjacentes às estações que são os extremos do azimute.



ESCALA:

Elipses de deformação  $1 \mu\text{strain} = 0,4 \text{ cm}$

Ângulos de rotação  $1'' = 30^\circ$

a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução do azimute  $6 \rightarrow 7$ ,  $3''$  maior, com desvio-padrão de  $0,2''$ .

FIG. 4.11 - INFLUÊNCIA DE UM AZIMUTE MAIOR INDEVIDAMENTE PONDERADO - AZIMUTE  $6 \rightarrow 7$ .

A tendência de a deformação se diluir com o afastamento da região onde foi introduzida a observação persiste também nesta experiência, porém, ao contrário do que constatamos no caso das distâncias, o efeito deformante aqui se dilui muito mais vagarosamente.

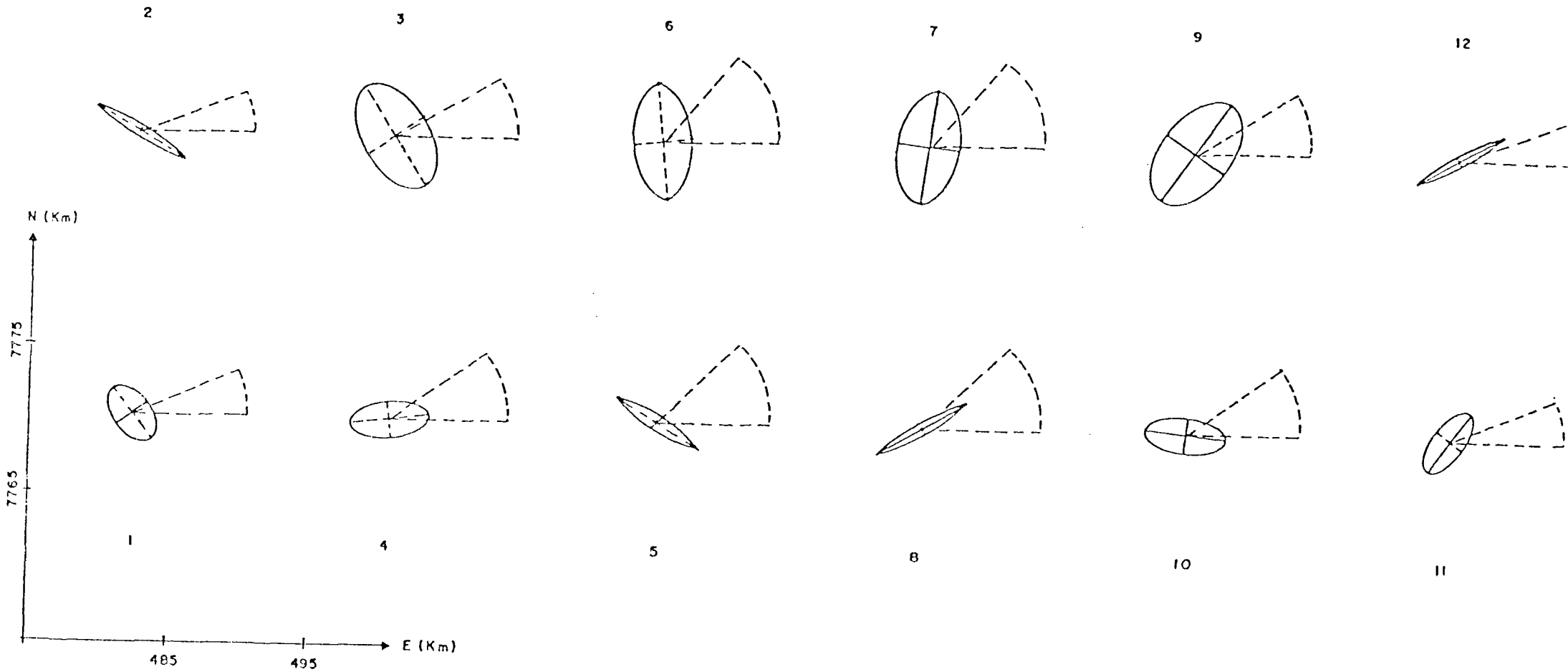
Na experiência seguinte em que aplicamos um fator de deterioração no azimute 6→7 igual a -3", mantidas todas as demais características do teste anterior, obtivemos resultados (fig. 4.12), à semelhança do que ocorreu na terceira experiência da seção anterior (fig. 4.8), iguais aos do teste precedente sendo que aqui as extensões foram substituídas por contrações e vice-versa, e as rotações horárias por sua vez, deram lugar a rotações anti-horárias.

Em um quarto experimento buscamos verificar o que significaria a ponderar o mesmo azimute inconsistente da experiência precedente adequadamente. Tal procedimento deu lugar a quadro de rotações locais e variações de escala insignificantes (ao contrário do que se verificou no teste anterior). Aqui mais uma vez, tal qual se sucedeu na quarta experiência da seção anterior (confrontar fig. 4.7 e fig. 4.9), obtivemos uma reação sensível dos parâmetros em resposta à uma alteração no peso de uma observação inconsistente.

A partir do resultado obtido no teste apresentado no parágrafo anterior, resolvemos estudar se o mesmo comportamento poderia ser identificado quando a observação em questão fosse consistente. Com este fim, comparamos os resultados alcançados quando: inicialmente o azimute 6→7 (consistente) recebeu um desvio-padrão igual a 0,2"; e posteriormente, a este mesmo azimute foi atribuído um desvio-padrão igual a 2,7" (13,5 vezes maior) no ajustamento. Constatamos então que os parâmetros da deformação mantiveram-se praticamente inalterados e com valores, em sua quase totalidade, iguais a zero. Comportamento semelhante foi identificado em experiência de mesma natureza realizada com uma distância consistente.

A constatação que acabamos de fazer, sugere que uma possível forma de utilização destes parâmetros na avaliação do grau de consistência de observações, pode ser desenvolvida a partir da análise da sensibilidade dos mesmos em resposta a variações subtendidas pelos pesos das observações a serem estudadas.

Realizamos ainda uma outra experiência na qual testamos a reação dos parâmetros à presença de um azimute entre vértices que definissem di



ESCALA:

Elipses de deformação  $1 \mu\text{strain} = 0,4 \text{ cm}$

Ângulos de rotação  $1'' = 30^\circ$

a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução do azimute  $6 \rightarrow 7$ ,  $3''$  menor, com desvio-padrão igual a  $0,2''$ .

FIG. 4.12 - INFLUÊNCIA DE UM AZIMUTE MENOR INDEVIDAMENTE PONDERADO - AZIMUTE  $6 \rightarrow 7$ .

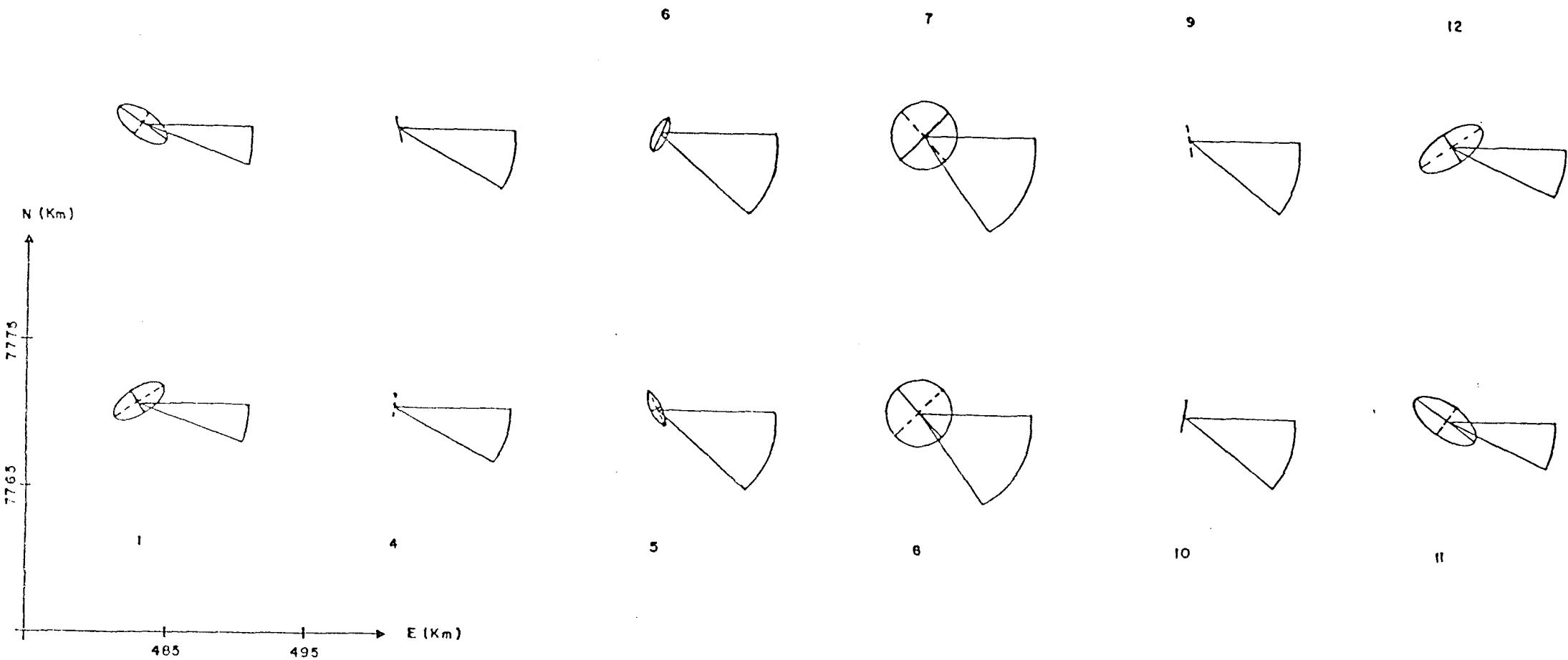
reção perpendicular àquela definida pelos vértices 6 e 7. Assim inserimos entre as estações nºs. 7 e 8 um azimute com valor inconsistente (fator + 3") e desvio-padrão igual a 0,2". As rotações locais geradas por este azimute (fig. 4.13) foram horárias, e na região onde atingem seu maior valor (extremos do azimute 7+8) sua magnitude supera em apenas 0,1" àquela observada no teste da fig. 4.11 (azimute inconsistente 6+7).

No que diz respeito às elipses de deformação, verificamos que nesta experiência elas apresentaram magnitudes inferiores (fig. 4.13) às que obtivemos no teste do azimute inconsistente 6+7. É possível justificar este fato se considerarmos que no caso do azimute inconsistente 7+8, o vértice nº 8 sofre um deslocamento que o aproxima do vértice nº 5. Tudo se passa como se uma distância mais curta tivesse sido introduzida entre os referidos vértices causando um efeito deformante que encontra resistência nos azimutes 1+2 e 11+12, à semelhança do que se verificou no caso da base 6+7 (vide seção 4.3.2 - último parágrafo). Já no caso do azimute 6+7 tal fato não ocorre visto que o vértice nº 7 sofre um deslocamento na direção do vértice nº 8 e o efeito deformante aí induzido não encontra oposição significativa dos azimutes acima aludidos. Ressalte-se ainda o tipo de comportamento da deformação ao longo da rede, verificado neste teste. A magnitude da deformação não se dilui continuamente quando nos afastamos da região onde foi inserido o azimute 7+8. Ela é máxima nos extremos deste azimute, decresce quando dele nos afastamos, e torna a crescer quando nos aproximamos dos azimutes 1+2 e 11+12. Isto sugere que a deformação em escala produzida por um azimute inconsistente seja crítica em vértices que encerrem outros azimutes, desde que eles definam, aproximadamente, o mesmo alinhamento exibido pelos vértices que subtendam o referido azimute.

#### 4.3.4 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR DIREÇÕES INCONSISTENTES

Após estudar a resposta dos parâmetros da deformação à influência sobre a rede das observações usadas no controle clássico de redes geodésicas, ou seja, bases e azimutes passamos então a analisar o comportamento da rede, através destes mesmos parâmetros, em decorrência de inserção em sua estrutura de direções inconsistentes (as direções constituem no tipo básico de observações que compõem a rede geodésica brasileira).

Experimentamos inicialmente inserir no modelo de simulação a direção inconsistente 6+7 (fator igual a + 3") cujo peso reflete a referida inconsistência. A deformação suportada pela rede foi de pequena dimensão



ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,4 cm

Ângulos de rotação 1" = 30°

a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução do azimute 7 → 8 que define um alinhamento perpendicular àquele do azimute 6 → 7, e possui as mesmas características da fig. 4.11.

FIG. 4.13 - INFLUÊNCIA DE UM AZIMUTE MAIOR INDEVIDAMENTE PONDERADO - AZIMUTE 7 → 8.

(comparada com a deformação resultante da inserção de uma base consistente - 4.3.2), composta de extensões (0,07 a 0,98  $\mu$ strain), contrações (-0,06 a -0,41  $\mu$ strain) e rotações horárias e anti-horárias que no pior caso atingiu 0,1".

Na experiência seguinte alteramos o peso da direção inconsistente do teste precedente, tornando-o igual aos das demais direções da rede. Obtivemos desta vez valores mais significativos para os parâmetros da deformação. As elipses de deformação (fig. 4.14) mantiveram o mesmo padrão de distribuição na rede que se verificou no teste anterior (embora em níveis mais elevado), ou seja, extensões (0,29 a 4,92  $\mu$ strain) na primeira metade da rede (até a direção 6+8) e contrações (-0,34 a -2,03  $\mu$ strain) na segunda metade da mesma. As rotações locais por sua vez, embora maiores que aquelas constatadas no teste supra citado, se mostraram ainda pouco significativas, a exceção da rotação experimentada pelas direções que emanam do vértice nº 7 (0,49").

As duas experiências subsequentes tiveram por objetivo estudar a influência de observações de direção cujo alinhamento fosse perpendicular àquele definido pelos vértices nºs. 6 e 7. Desta forma repetimos as duas experiências relatadas nos parágrafos antecedentes, sendo que agora usando a direção entre os vértices nºs. 7 e 8. A primeira delas, direção inconsistente com peso coerente, deu lugar a variações de escala e rotações locais ainda menos significativas que àquelas obtidas no teste inicial relatado no segundo parágrafo desta seção. A segunda experiência (fig. 4.15), embora apresentando um nível de deformação inferior àquelas obtidas no teste da fig. 4.14, revelou valores maiores que os da experiência precedente. O tipo de variação de escala predominante foi por contração (valor máximo -3,62  $\mu$ strain) tendo sido verificadas extensões a direita da direção 7+8 (valor máximo 2,74  $\mu$ strain). As rotações em ambos os casos foram pouco significativas à semelhança do que ocorreu nas experiências iniciais desta seção com a direção 6+7. A única exceção ficou por conta da estação nº 8 onde a rotação diferencial ali verificada foi de magnitude igual a 0,53".

A rede mostrou-se no caso das direções bastante resistente às rotações diferenciais locais induzidas pela presença de direções inconsistentes. Este fato deve estar associado ao grande número de observações de direção existentes na rede. Porém, as variações de escala identificadas, foram bastante significativas quando comparadas àquelas produzidas pela presença



ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,4 cm

Ângulos de rotação 1" = 30°

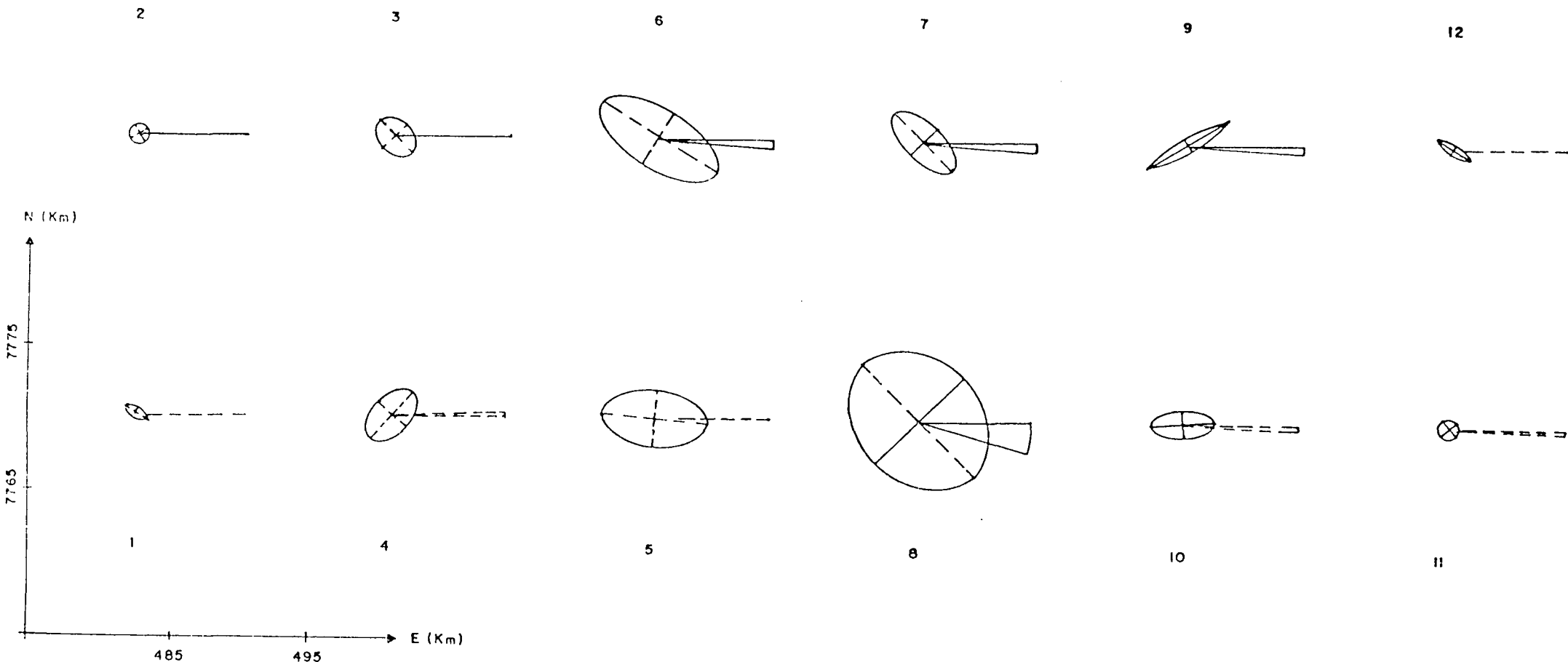
a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução da direção 6 → 7, 3" mais longa, com desvio-padrão igual a 0,6".

FIG. 4.14 -- INFLUÊNCIA DE UMA DIREÇÃO MAIOR INDEVIDAMENTE PONDERADA - DIREÇÃO 6 → 7.



ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 0,4 cm  
 Ângulos de rotação 1" = 30°

a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução da direção 7+8 que é perpendicular à direção 6+7, e possui as mesmas características da fig. 4.14.

FIG. 4.15 - INFLUÊNCIA DE UMA DIREÇÃO MAIOR INDEVIDAMENTE PONDERADA - DIREÇÃO 7+8.

de azimutes inconsistentes na rede. Isto parece evidenciar que as direções inconsistentes afetam mais significativamente a escala da rede do que os azimutes inconsistentes.

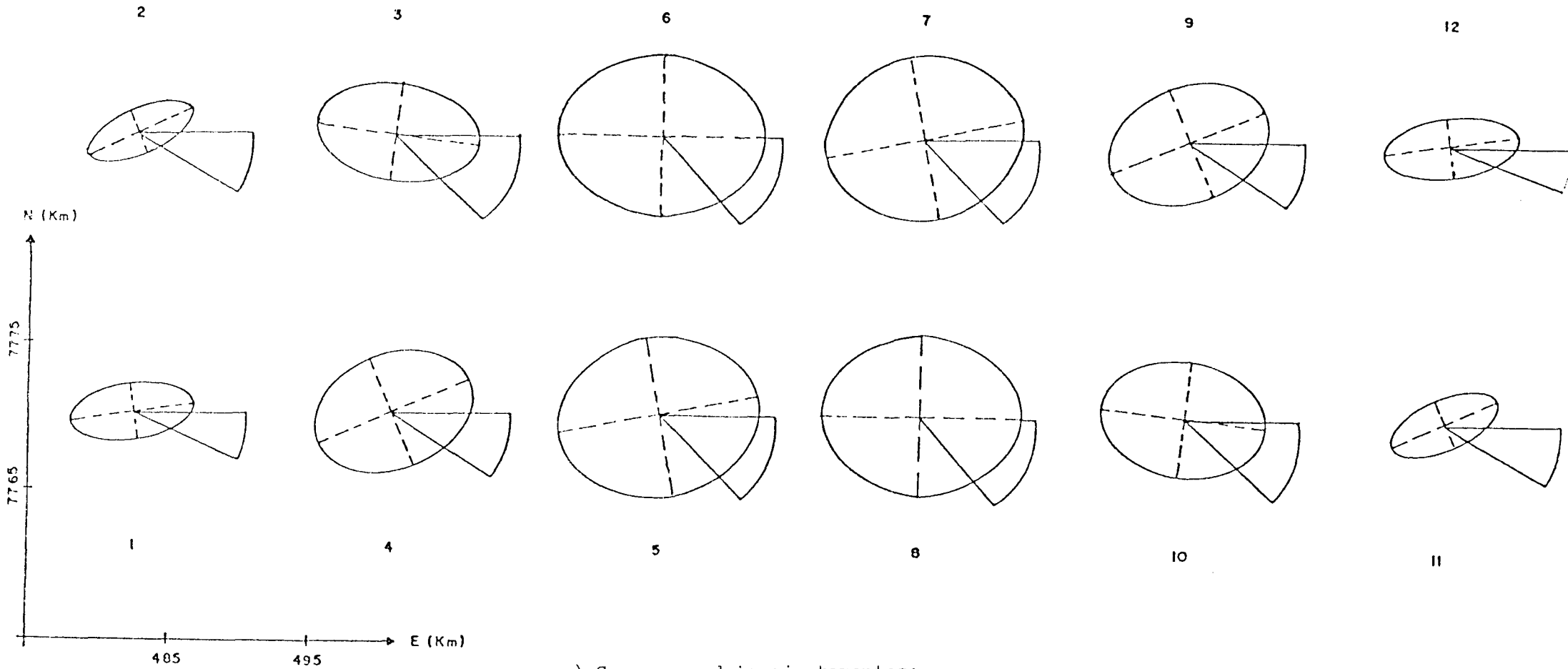
Finalmente vale ressaltar que aqui, mais uma vez, constatamos a sensibilidade dos parâmetros da deformação em relação a alterações nos pesos das observações tal qual exposto na seção 4.3.3.

#### 4.3.5 - DEFORMAÇÃO PRODUZIDA POR INJUNÇÕES DE POSIÇÃO INCONSISTENTES

O objetivo desta seção foi o de estudar o tipo de comportamento a ser esboçado pelos parâmetros da deformação em resposta à introdução de injunções inconsistentes de coordenadas na rede de simulação. Para este fim realizamos dois testes onde as coordenadas do vértice nº 12, cujos valores sofreram uma distorção de 3m, foram incorporadas à rede. No primeiro teste adotamos um peso que fosse coerente com a distorção introduzida nas coordenadas da estação (desvio-padrão igual a 2,7m). Os resultados nos mostram a ocorrência de variações de escala negativas (contrações) que foram mais críticas na região central da rede (-0,18  $\mu$ strain). Todavia, a deformação diminui quando nos afastamos da região central da rede caminhando para as extremidades atingindo a  $-0,05 \mu$ strain. As rotações diferenciais médias apresentaram valores pouco significativos neste caso.

O segundo teste no entanto, onde o desvio-padrão adotado expressava um nível de precisão três vezes superior àquele do teste precedente, obtivemos resultados que revelaram valores mais significativos para os parâmetros da deformação. O padrão de resposta da rede demonstrado pelos referidos parâmetros foi o mesmo identificado no teste anterior, ou seja, um conjunto de contrações por toda a rede que variaram de -1,61  $\mu$ strain em sua região central a -0,35  $\mu$ strain nas extremidades da mesma (fig. 4.16). Verificou-se também nesta experiência, uma simetria do efeito de contração em relação a diagonal 1+12. O surgimento das aludidas contrações decorreu do tipo de fator de distorção aplicado, que deu lugar a aproximação do vértice nº 12 em direção ao vértice de coordenadas fixas da rede que é o vértice nº 1.

As rotações diferenciais médias manifestadas pela rede nesta experiência foram horárias e com o mesmo padrão das elipses de deformação ou seja, simétricas em relação a diagonal 1+12. Apresentaram ainda valores máximos na região central (0,16") e valores mínimos nas extremidades (0,07"). O sentido horário das rotações, bem como a orientação dos semi-eixos maiores das elipses de deformação, decorrem todos do tipo de deslocamento do vértice



ESCALA:

Elipses de deformação 1  $\mu$ strain = 1,12 cm

Ângulos de rotação 1" = 300°

a) Comum aos dois ajustamentos:

- (vide fig. 4.3)

b) Características do segundo ajustamento:

- Introdução das coordenadas do vértice nº 12 atuando com injunção no ajuste com desvio-padrão igual a 0,90 m.

FIG. 4.16 - INFLUÊNCIA DE UMA INJUNÇÃO DE POSIÇÃO INDEVIDAMENTE PONDERADA - VÉRTICE Nº 12.

nº 12 induzido pelo fator de distorção aplicado.

Comparando os resultados dos dois testes descritos nos parágrafos precedentes, constatamos que também no caso de injunções inconsistentes a alteração da ponderação gera variações sensíveis nos parâmetros da de formação, tal qual observado nas seções anteriores.

Faz-se mister frisar que os padrões e níveis de deformações relatados neste capítulo são concernentes ao tipo de configuração de rede em particular (fig. 4.1), que adotamos como base de simulação em nossa pesquisa. Tanto a conformação geométrica quanto o quadro de observações que de finem a estrutura global da rede são fatores básicos que determinam o tipo de reação a ser esboçada pela rede geodésica. Naturalmente, diferentes estruturas de rede darão origem a respostas específicas à presença de elementos inconsistentes em seu seio. O comportamento regular dos padrões de de formação aqui obtido decorreu da homogeneidade apresentada pela rede fictícia que foi utilizada no presente estudo.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÃO

A motivação básica para o estudo que acabamos de concluir foi o assentamento de toda uma fundamentação teórica, que propiciasse a adaptação dos conceitos que regem o estudo da mecânica dos corpos deformáveis à análise do grau de consistência das observações e injunções que integram uma rede geodésica horizontal.

À luz do objetivo supra citado necessário se fez lançar mão de um conjunto de hipóteses simplificativas que nos facultassem lograr êxito na aludida adaptação. Não obstante o fato de em decorrência das simplificações adotadas estarmos incorrendo em algumas aproximações, notadamente aquelas referentes a modelagem do campo de deslocamentos em redes horizontais (capítulo 3), constatamos ser bastante significativo, dentro do universo de experiências desenvolvidas nesta pesquisa, o desempenho dos parâmetros que descrevem o estado de deformação na detecção da presença de observações inconsistentes:

Em decorrência dos resultados auferidos neste trabalho enunciaremos as seguintes conclusões:

- 1 - As distâncias inconsistentes afetam a escala da rede (a orientação da mesma não é afetada). Tal efeito pôde ser detectado através dos parâmetros de extensão e contração. Notamos também, que estes atingem seu maior valor justamente nos vértices que subtendem a distância inconsistente. Observamos ainda que na medida em que nos afastamos desta distância a deformação se dilui (vide seção 4.3.2);
- 2 - Os azimutes inconsistentes por seu turno deram lugar a influências mais complexas pois afetam tanto a orientação quanto a escala da rede (vide seção 4.3.3):
  - 2.1 - No que diz respeito às rotações diferenciais médias, verificamos que estas apresentam seu valor máximo também nos vértices que encerram a observação inconsistente. Aqui, mais uma vez, os parâmetros da deformação mostram que esta decresce quando nos afastamos da referida observação;

- 2.2 - A deformação pura (ou variação de escala) induzida pela presença de um azimute inconsistente na rede também apresentou-se como sendo máxima na região onde foi inserida a observação. Porém os padrões de comportamento obtidos para a deformação foram diferentes conforme fosse a linha de visada do azimute perpendicular ou paralela ao alinhamento de visada dos azimutes que dele se acercassem. Assim foi que:
- a) No primeiro caso a ordem de grandeza da deformação mostrou um abrandamento na medida em que nos afastássemos da zona de influência do azimute;
  - b) No segundo caso, entretando, a deformação mostrou-se crítica, não apenas nos vértices onde figurava o azimute inconsistente, mas também nos vértices que subtendiam outros azimutes.
- 3 - As direções inconsistentes influenciam de forma mais significativa a escala da rede do que sua orientação.
- 4 - Um aspecto importante identificado nas experiências realizadas em nosso estudo foi a reação dos parâmetros da deformação em relação ao peso atribuído às observações. Foram desenvolvidos experimentos que nos revelaram os parâmetros como sendo sensíveis a variações na ponderação de uma observação inconsistente (vide 4.3.3), ao passo que para observações consistentes tal sensibilidade não foi verificada;
- 5 - Como desdobramento natural deste trabalho cabe agora aplicar seus resultados ao estudo de observações geodésicas integrantes de uma rede real. Um contexto bastante apropriado para o referido desdobramento poderá ser encontrado no projeto REPLAN (vide cap. 1) que está sendo elaborado na Superintendência de Geodésia da DGC/IBGE. No âmbito deste projeto, na fase de análise qualitativa das ob

servações, a Divisão de Pesquisas em Geodésia da referida Superintendência realizará estudos para operacionalizar a aplicação prática da metodologia apresentada nesta dissertação de mestrado. Os resultados a serem obtidos nesta nova fase deverão ser divulgados ao tempo de sua conclusão;

6 - O processo de operacionalização da metodologia de análise aludido na conclusão nº 5 deverá se ocupar (dentre outras coisas):

- da elaboração de um sistema mais racional para obtenção dos deslocamentos (ajustamentos sequenciais?) e com isto otimizar o número de ajustamentos por ora necessários;
- do estabelecimento de um critério que determine a forma de aplicação da referida metodologia no contexto do processo de crítica (utilização isolada ou em consonância com outras metodologias?);
- da realização de mais alguns testes que permitam esgotar um pouco mais as características dos parâmetros da deformação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albrecht, P.* - Análise Numérica: Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1973.
- Gemael, C.* - Introdução ao Ajustamento de Observações. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ, 1984.
- Gemael, C.* - Elipse e Elipsóide de Erros. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ, 1974.
- Kopal, Z.* - Numerical Analysis. London, Chapman & Hall, 1961.
- Love, A. E. H.* - A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York, Dover Publications, 1974.
- Means, W. D.* - Stress and Strain Basic Concepts of Continuum Mechanics for Geologists. New York, Springer, 1967.
- Richardson, C. H.* - An Introduction to the Calculus of Finite Differences. New York, D. Van Nostrand Company, 1960.
- Schneider, D.* - Complex Crustal Strain Approximation. Fredericton, Doctoral Thesis submitted to the Graduate School of the University of New Brunswick, 1982.
- Silva, M. V. D.* - O Projeto de Reajustamento da Rede Geodésica Planimétrica Nacional. Artigo apresentado no XII Congresso Brasileiro de Cartografia, Brasília, 1985.
- Smith, J. O. & Sidebotton, O. M.* - Elementary Mechanics of Deformable Bodies. New York, The Macmillan Company, 1969.
- Thapa, K.* - Strain as a Diagnostic Tool to Identify Inconsistent Observations and Constraints in Horizontal Geodetic Network. Fredericton, Technical Report No. 68, Department of Surveying Science, University of New Brunswick, 1980.

*Vaníček, P.* - Tensors. Fredericton, Lecture Notes No. 27, Department of Surveying Science, University of New Brunswick, 1974.

*Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J.* - Geodesy. The Concepts. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1982.

*Vaníček, P., Thapa, K. & Schneider, D.* - The Use of Strain to Identify Incompatible Observations and Constraints in Horizontal Geodetic Networks. *Manuscripta Geodaetica*, Vol. 6 (1981), 257-281.

*Welsch, W.* - Description of Homogeneous Horizontal Strains and some Remarks to their Analysis. *Proceedings of the International Association of Geodesy Symposium on Horizontal Geodetic Network, Munich, Sep., 1981*, 188-205.