

EDGAR RICARDO FERREIRA

**FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA:  
SOLUÇÃO DE GRANDES SISTEMAS LINEARES  
EM MICRO-COMPUTADORES DA SÉRIE PC.**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA — MARÇO — 1990

FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA:  
SOLUÇÃO DE GRANDES SISTEMAS  
LINEARES EM MICRO-COMPUTADORES  
DA SÉRIE PC.

DISSERTAÇÃO

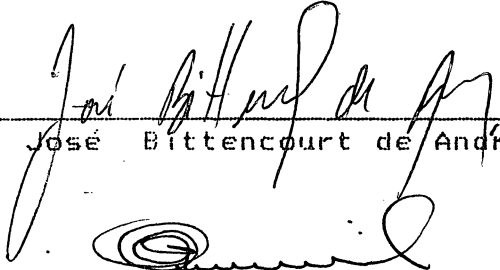
Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências  
Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, como parte  
dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

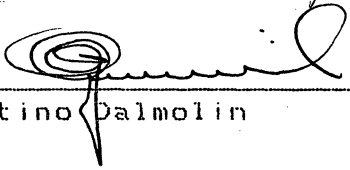
por


EDGAR RICARDO FERREIRA  
Engenheiro Civil

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
1990

BANCA EXAMINADORA:

  
DR. José Bittencourt de Andrade

  
DR. Quintino Dalmolin

  
M.Sc. Mary Angélica de Azevedo Oliva

## DEDICATÓRIA

Ao meu pai, José  
Ferreira Filho, pelo exem-  
plo de vida que me deixou.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE, pela orientação do presente trabalho.

À Cristina, minha esposa, por seu apoio e constante compreensão.

Aos meus filhos, Edna, Débora e Fábio, que em muitos momentos foram sacrificados para que este trabalho fosse concluído.

Ao Prof. Ricardo Mendes Júnior do C.E.S.E.C. - Centro de Estudos de Engenharia Civil (UFPr) - pelos constantes auxílios prestados.

À U.F.J.F. - Universidade Federal de Juiz de Fora - por ter me permitido ausentar para a realização deste trabalho.

À U.F.Pr. - Universidade Federal do Paraná - pela oportunidade de fazer o mestrado.

À C.A.P.E.S pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

## RESUMO

O ajustamento das observações é uma das etapas que compõe um programa de Fototriangulação Analítica. No curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná há um programa computacional de Fototriangulação Analítica de autoria do Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade, orientador deste trabalho. Este programa computacional, atualmente instalado no computador DIGITAL DECsystem - 10 da UFPr foi posteriormente adaptado e instalado em um micro-computador PC-XT Compatível, pelo autor deste trabalho. Procurou-se, em seguida, neste micro-computador, otimizar os cálculos no ajustamento das observações. Esta otimização consistiu em: vetorização dos cálculos matriciais e solução do sistema de equações lineares através da Redução de Crout Modificado. Na sequência, através de simulações, comparou-se os resultados obtidos com os dois programas - programa original e programa otimizado. Os itens de comparações foram: número de parâmetros a processar e tempo de processamento. Embora o programa fonte do programa otimizado tenha um número maior de linhas de declarações que o programa original, mesmo assim este necessitou de menos memórias ao ser compilado, mostrando-se, portanto, potencialmente superior, aumentando sobremaneira o número de parâmetros processados e diminuindo significativamente o tempo de processamento quando comparado ao programa original.

## ABSTRACT

The adjustment of the observations is one of the steps for the Analytical Foto-triangulation computational program. On the M.Sc. course of "Ciências Geodésicas" at Federal University of Parana, there is a program for Analytical Foto-triangulation which was developed by Dr. José Bittencourt de Andrade who is this project supervisor. This computer program is installed on a DECsystem-10 computer. In this theses the existing program has been modified in order to be implemented on an IBM PC-XT compatible computer. Optimization on the numerical calculations has been the main concern in this project. This optimization procedure is based on matrix vectorization for the reduction of unnecessary calculations and on the solution of a system of linear equations in which the Modified Crout Reduction method has been used. Simulations have been performed on both, the new program and the existing one and the results compared. The number of parameters to be processed and the processing time were considered for comparisons. Although the source program of the optimized program has more instructions than the original one, it has shown potentially superior because it requires less memory after compilation. This feature enables the user to increase the number of parameters to be processed. The processing time has always been reduced while compared to the original program.

## SUMÁRIO

	Pág.
DEDICATÓRIA.....	III
AGRADECIMENTOS.....	IV
RESUMO.....	V
ABSTRACT.....	VI
SUMÁRIO.....	VII
LISTA DE FIGURAS.....	XII
LISTA DE QUADROS.....	XV
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA.....	5
2.1. Introdução.....	6
2.2. Erros Sistemáticos.....	9
2.3. Pré-Refinamento e Parametrização.....	10
2.4. Método dos Feixes Perspectivos ( <b>Bundle Method</b> )	10
2.4.1. Introdução.....	10
2.4.2. As Equações de Colinearidade.....	12
2.4.3. Equações de Colinearidade com Parametrização dos Parâmetros de Calibração.....	15
2.4.4. Ajustamento das Observações.....	16
2.4.5. Padrão de N.....	19
3. INJUNÇÕES NA FOTOGRAMETRIA.....	25
3.1. Introdução.....	26

	Pág.
3.2. Categoria das Injunções.....	27
3.2.1. Injunções Absolutas.....	27
3.2.2. Injunções Relativas.....	28
3.2.3. Injunções Funcionais.....	28
3.3. Modelo Matemático da Injunção.....	28
3.4. Injunções Relativas.....	31
3.4.1. Injunção de Posição.....	31
3.4.1.1. Modelo Matemático.....	32
3.4.1.2. Matriz $C$ e $\vec{P}$ .....	32
3.4.1.3. Esquema de Formação de $\vec{N}$ .....	33
3.4.2. Injunção de Distância.....	34
3.4.2.1. Modelo Matemático.....	34
3.4.2.2. Matriz $C$ e Vetor $\vec{W}$ .....	34
3.4.2.3. Esquema de Formação de $\vec{N}$ .....	36
3.4.3. Injunção de Altitude.....	37
3.4.3.1. Introdução.....	37
3.4.3.2. Transformação de Coordenadas.....	38
3.4.3.3. Matriz $C$ e Vetor $\vec{W}$ .....	39
3.4.4. Injunção de Direcção.....	41
3.4.4.1. Modelo Matemático.....	41
3.4.4.2. Matriz $C$ e Vetor $\vec{W}$ .....	42
3.4.4.3. Esquema de Formação de $\vec{N}$ .....	43
3.4.5. Injunção de Posição Relativa.....	44
3.4.5.1. Modelo Matemático.....	44
3.4.5.2. Matriz $C$ e Vetor $\vec{W}$ .....	44
3.4.5.3. Esquema de Formação de $\vec{N}$ .....	45



	Pág.
4.	RESTITUIDORES ANALÍTICOS..... 47
4.1.	Histórico..... 48
4.2.	Conceito..... 48
4.3.	Principais Comparações entre Restituidores Analíticos e Restituidores Analógicos..... 49
4.4.	Configuração Básica..... 50
4.5.	Funcionamento de um Restituidor Analítico..... 51
4.6.	Aspectos do Software de um Restituidor Ana- lítico..... 54
4.6.1.	Programas Operacionais..... 54
4.6.2.	Programas de Aplicação..... 54
4.7.	Capacidade Atual dos Restituidores Analíticos. 55
5.	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES O ALGORITMO DE CROUT MODIFICADO..... 57
5.1.	Introdução..... 58
5.2.	Definições..... 59
5.2.1.	Matriz Simétrica..... 60
5.2.2.	Matriz Definida Positiva..... 60
5.2.3.	Matriz Esparsa..... 60
5.3.	Algoritmos de Solução Padrão..... 60
5.3.1.	Definição..... 61
5.3.1.1.	Algoritmos de Solução Direta..... 62
5.3.1.2.	Algoritmos de Solução Iterativa..... 65
5.4.	Métodos Diretos X Métodos Iterativos..... 66
5.5.	O Método de Crout Modificado..... 68

	Pág.
5.5.1. Introdução.....	68
5.5.2. Definições.....	70
5.5.2.1. Coeficientes Nulos Externos e Internos.....	70
5.5.2.2. Matriz Esparsa com Padrão Banda.....	71
5.5.2.3. Matriz Esparsa com Padrão Vetor Perfil por Colunas.....	73
5.5.3. Expressões do Processo de Decomposição.....	74
5.5.3.1. Matriz Quadrada Qualquer.....	74
5.5.3.2. Matriz Esparsa.....	76
5.5.3.3. Matriz Esparsa Simétrica.....	78
5.5.4. Número de Operações Aritméticas no Processo de Solução.....	81
5.6. Armazenamento da Matriz dos Coeficientes.....	82
5.6.1. Uso da Memória do Computador.....	82
5.6.2. Armazenamento em Memória Secundária.....	84
5.6.3. Algoritmo de Solução - Armazenamento Compac- tado.....	86
5.6.3.1. Introdução.....	86
5.6.3.2. Montagem da Matriz dos Coeficientes.....	86
5.6.3.3. Apontamento dos Coeficientes no Arranjo Uni- dimensional.....	87
5.6.3.4. Redução da Matriz dos Coeficientes.....	90
5.6.3.5. Substituição Avante.....	96
5.6.3.6. Retro-Substituição.....	99
6. PROGRAMA COMPUTACIONAL OFF LINE DE AEROTRIAN- GULAÇÃO ANALÍTICA.....	101

	Pág.	
6.1.	Introdução.....	102
6.2.	Apresentação do Programa Computacional.....	103
6.2.1.	Características.....	103
6.2.2.	Esquema Geral.....	104
6.2.3.	Programa FOTOTRI.FOR.....	104
6.2.3.1.	Fluxograma de Operações.....	106
6.2.4.	Programa INPUT.FOR.....	106
6.2.4.1.	Fluxograma de Operações.....	107
6.2.5.	Programa BLOCK.FOR.....	110
6.2.5.1.	Fluxograma de Operações.....	111
6.2.6.	Programa OUTPUT.FOR.....	113
6.2.6.1.	Fluxograma de Operações.....	113
6.3.	Experimentos.....	115
6.3.1.	Introdução.....	115
6.3.2.	Resultados Comparativos.....	117
7.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	118
7.1.	Conclusões.....	119
7.2.	Recomendações.....	120
	NOTAS DE REFERÊNCIA.....	122
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	124

## LISTA DE FIGURAS

		Pág.
Fig. 1	Divisão da Fototriangulação com Respeito ao Processador.....	6
Fig. 2	Efeito da Refração Fotogramétrica na Imagem do Ponto P.....	9
Fig. 3	Método dos Feixes Perspectivos.....	11
Fig. 4	Condição de Colinearidade.....	12
Fig. 5	Numeração dos Pontos sobre as Fotografias.....	21
Fig. 6	Padrão de Esparsidade Típico dos Elementos não-nulos de N - Caso de Blocos Aéreos Regu- lares.....	22
Fig. 7	Padrão de N - Forma Bandada.....	23
Fig. 8	Padrão de N - Forma Bandada Margeada.....	24
Fig. 9	Exemplo de Injunção Funcional.....	28
Fig. 10	Esquema de Formação de $\overset{a}{N}$ - Injunção de Po- sição.....	33
Fig. 11	Esquema de Formação de $\overset{c}{N}$ - Injunção de Dis- tância.....	36
Fig. 12	Sistema Geodésico Geocêntrico.....	38
Fig. 13	Orientação do Sistema de Coordenadas em Fun- ção de $\alpha$ e $\beta$ .....	41
Fig. 14	Esquema de Formação de $\overset{c}{N}$ - Injunção de Dire- ção.....	43
Fig. 15	Esquema de Formação de $\overset{c}{N}$ - Injunção de Dire- ção Relativa.....	45

Fig. 16	Diagrama de um Restituídor Analítico - Con- figuração Básica.....	50
Fig. 17	Funcionamento de um Restituídor Analítico.....	52
Fig. 18	Esquema do Processo de Eliminação.....	63
Fig. 19	Esquema do Processo de Diagonalização.....	63
Fig. 20	Esquema do Processo de Decomposição.....	65
Fig. 21	Coefficientes Nulos Externos e Internos.....	71
Fig. 22	Matriz Esparsa com Padrão Banda.....	72
Fig. 23	Matriz Esparsa com Padrão Vetor Perfil por Colunas (linha skyline).....	73
Fig. 24	Decomposição $E^T R$ - Modificação do Coe- ficiente $n_{ij}$ .....	75
Fig. 25	Decomposição $E^T R$ - Modificação do Coefi- ciente $n_{ji}$ .....	75
Fig. 26	Matriz Exemplo.....	88
Fig. 27	Modificação dos Coeficientes do Bloco Prin- cipal.....	91
Fig. 28	Matriz dos Coeficientes - Divisão dos Blocos da Matriz.....	93
Fig. 29	Registro dos Blocos no Arquivo.....	94
Fig. 30	Operações de Transferências dos Dados - Redução da Matriz dos Coeficientes.....	95
Fig. 31	Operações de Transferências dos Dados - Substituição Avante.....	98
Fig. 32	Operações de Transferências dos Dados - Retro-Substituição.....	100

Fig. 33 Faixa Simulada - Geometria de Distribuição  
dos Pontos nas Fotos.....116

Fig. 34 Faixa Simulada - Superposição Longitudinal -  
Orientação da Faixa em Relação ao Referencial  
do Terreno.....116

## LISTA DE QUADROS

	Pág.
Quadro 1	Principais Comparações entre Restituidor Analítico e Restituidor Analógico..... 49
Quadro 2	Comparação entre Métodos Diretos e Métodos Iterativos..... 68
Quadro 3	Número de Operações Aritiméticas no Processo de Solução..... 82
Quadro 4	Armazenamento Compactado da Matriz Exemplo (Fig. 26)..... 88
Quadro 5	Posição de $n_{ij}$ da Matriz Exemplo (Fig. 26) Aplicação da expressão (5.6.3.2 - 1)..... 89
Quadro 6	Apontamento dos Coeficientes da Diagonal Principal da Matriz Exemplo (Fig. 26) Aplicação da expressão (5.6.3.3. - 1)..... 89
Quadro 7	Características dos Blocos da Matriz..... 94
Quadro 8	Esquema Geral do Programa Computacional.....105
Quadro 9	Resultados Comparativos.....117

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO



A Fototriangulação Analítica tem sido objeto de estudos e pesquisas em uma grande quantidade de Universidades e instituições particulares que têm envolvimento com a Fotogrametria.

Infelizmente , não se tem no Brasil, um programa computacional nacional, otimizado e comercial de Fototriangulação Analítica. Os bons programas computacionais de Fototriangulação usados pela comunidade fotogramétrica brasileira são importados; isto faz com que se pague caro pela sua utilização. Não obstante este problema, existe ainda o fato de que, como são programas computacionais de múltiplas aplicações, a sua utilização não é simples, havendo sempre a possibilidade de ter que se recorrer aos seus autores para solucionar alguma dúvida que porventura os manuais que os acompanham não solucionem . Isto faz com que sua "manutenção" acarrete despesas adicionais.

Na Fototriangulação Analítica necessita-se do uso de computadores digitais e de capacidade de memória primária relativamente grande, aliado a uma precisão interna de alta confiabilidade.

Hoje em dia, com o advento dos computadores pessoais (PC's), de fácil aquisição devido ao seu baixo custo, de memória primária (ROM + RAM) equiparável a muitos computadores de grande porte utilizados nas Universidades

brasileiras, além de um custo operacional praticamente nulo em relação aos mesmos, há de se pensar na possibilidade de utilizá-los na Fototriangulação Analítica.

O programa computacional de Fototriangulação Analítica de autoria do Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade está codificado em FORTRAN IV e instalado no computador DIGITAL DECsystem-10 da UFPr. Este computador possui as seguintes características atuais de memória:

- a) memória primária: 256 Kwords, correspondente a 1280 Kbytes.
- b) memória secundária: discos e/ou fitas magnéticas, com grande capacidade de armazenamento.

A limitação deste programa, com respeito à execução, é o tempo de processamento relativamente alto, aliado à não otimização do uso das memórias do computador, fazendo com que este processe um número de parâmetros razoavelmente pequeno.

Sabe-se que um programa para ser executado tem que estar na memória primária do computador, assim como os dados que este manipula.

O propósito deste trabalho é utilizar um micro-computador PC-XT Compatível, otimizando o processamento de uma das fases do programa citado anteriormente: o ajustamento das observações. Espera-se,

assim, que este programa otimizado torne-se mais poderoso, tanto a nível de tempo de processamento quanto ao número de parâmetros a determinar.

O micro-computador utilizado possui as seguintes características:

- a) word de 16 bits;
- b) memória primária (ROM + RAM) de 512 Kbytes;
- c) memória secundária winchester (disco rígido) de 30 Mbytes;
- d) co-processador aritmético 8087.

O compilador utilizado foi o Microsoft (MS) FORTRAN-versão 3.31, desenvolvido e comercializado pela Microsoft Corporation.

A otimização consistirá em:

- a) vetorização dos cálculos matriciais (soma, produto, transposição, etc);
- b) solução do sistema de equações lineares através da Redução de Crout Modificado.

Os critérios de comparação serão os seguintes:

- 1º) número de memórias ocupadas por cada programa fonte;
- 2º) número máximo de parâmetros processados por cada programa;
- 3º) tempo de execução de cada programa (em idênticas condições).

## CAPÍTULO 2

### FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA

## 2.1 - INTRODUÇÃO:

Na conceituação moderna /01/, Fototriangulação é o método fotogramétrico de determinação de coordenadas de pontos do espaço objeto e estimativa da qualidade desta determinação, através de:

- a) relação geométrica de fotos adjacentes devidamente tomadas;
- b) esparso controle de campo;
- c) um conjunto de valores aproximados dos parâmetros.

A Fototriangulação pode ser dividida, com respeito ao tipo de processador em /01/ analógica, semi-analítica e analítica.

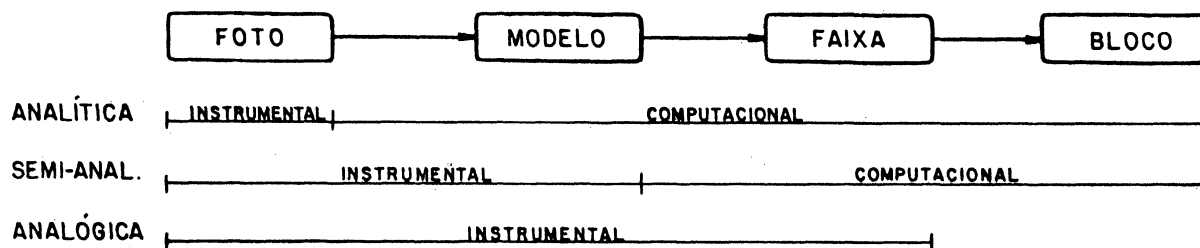


Fig. 1 Divisão da Fototriangulação com Respeito ao Processador

Na Fototriangulação Analítica o tratamento matemático, com o auxílio de computadores digitais, inicia com a introdução das coordenadas bi-dimensionais medidas nas fotos. Assim, viabiliza-se a possibilidade de se formar analiticamente o modelo, a faixa ou o bloco. Essa

possibilidade apresenta vantagens extraordinárias sobre os métodos analógico e semi-analítico, dentre as quais pode-se citar:

- a) é o que proporciona a mais alta precisão;
- b) o instrumento de medida sobre as fotos pode ser simplesmente um monocomparador, que além de mais barato que os instrumentos fototrianguladores analógicos, introduz poucos erros de natureza instrumental, uma vez que são medidas apenas as coordenadas bi-dimensionais de pontos na foto;
- c) devido a pequena participação do operador na fase instrumental, os erros sofrerão propagação sistemática devido apenas aos erros sistemáticos residuais (não coincidência do ponto principal com o centro fiducial, trabalho do filme, distorção de lentes e refração fotogramétrica) e, possivelmente, aos modelos matemáticos utilizados;
- d) conhecendo-se as coordenadas das marcas fiduciais, ou do *reseau*, pode-se corrigir o trabalho do filme;
- e) é possível corrigir as coordenadas das refrações, ou seja, distorções de lentes e refração fotogramétrica. Esta correção pode ser feita preliminarmente (pré-refinamento) ou adicionada ao modelo matemático (parametrização), neste caso, através de um ajustamento simultâneo (**Bundle Method**);
- f) obtenção de uma matriz variância-convariância, que após o ajustamento, permite estimar a precisão do

- trabalho, introduzindo confiabilidade ao método;
- g) as observações podem ser processadas em real time à medida que as mesmas são efetuadas (método empregado nos restituidores analíticos).

Existem considerações na Fototriangulação Analítica, dentre as quais cita-se:

- a) devido à grande massa de observações, estão presentes os inevitáveis erros grosseiros. Os erros grosseiros implicam diretamente na degradação da qualidade dos resultados, além de aumentar consideravelmente o tempo de processamento computacional. Esta consideração tem sido contornada através de diversos métodos de depuração de dados /02/;
- b) o grande número de parâmetros e observações implica na obtenção de matrizes de dimensões elevadas, necessitando-se de computadores digitais de memória principal grande, ou então, de um sofisticado programa computacional para computadores de memória primária reduzida.

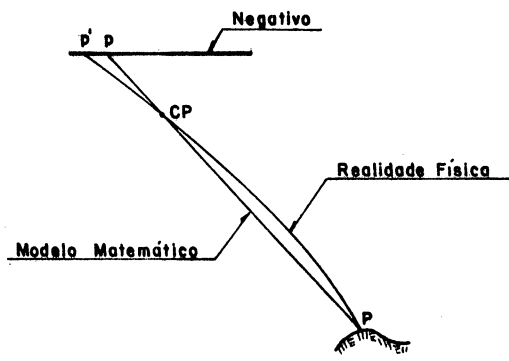
É propósito deste trabalho apresentar um algoritmo, denominado Redução de Crout Modificado, que explora, no processamento computacional, o padrão de matrizes envolvidos no ajustamento das observações.

2.2 - ERROS SISTEMÁTICOS:

Os erros sistemáticos que ocorrem na observação das foto-coordenadas são /03/:

- a) não coincidência do ponto principal com o centro fiducial;
- b) refração fotogramétrica;
- c) distorções de lentes (distorção radial simétrica e distorção descentrada);
- d) trabalho do filme;
- e) curvatura da Terra.

Estes fenômenos, na prática, deslocam a imagem do ponto P de sua posição correta na fotografia. A Fig. 2, abaixo, caracteriza o efeito da refração fotogramétrica na imagem do ponto P.



- P - ponto do espaço objeto
- p - imagem de P, sem o efeito dos erros sistemáticos
- p' - imagem de P, que realmente é registrada no negativo
- CP - centro perspectivo

Fig. 2 Efeito da Refração Fotogramétrica na Imagem do ponto P



## 2.3 - PRÉ-REFINAMENTO E PARAMETRIZAÇÃO:

Na adequação REALIDADE FÍSICA X MODELO MATEMÁTICO duas possibilidades podem ocorrer, quais sejam:

1a) adaptar a realidade física ao modelo matemático, o que denomina-se pré-refinamento;

2a) adaptar o modelo matemático à realidade física, o que denomina-se parametrização.

Os erros sistemáticos presentemente considerados na fase de pré-refinamento são os erros descritos na página 9.

Corrigidos estes erros obtém-se as imagens refinadas dos pontos do espaço imagem.

Na parametrização, aumenta-se o modelo matemático, introduzindo parâmetros que modelam os erros sistemáticos. Neste caso, devido à correlação física existente entre distorções de lentes e refração fotogramétrica (ambas são refrações), não é possível parametrizar cada uma separadamente.

A parametrização será aplicada quando for feito um ajustamento simultâneo, denominado **Bundle Method**.

## 2.4 - MÉTODO DOS FEIXES PERSPECTIVOS (Bundle Method):

### 2.4.1 - Introdução:

O Método dos Feixes Perspectivo é a expansão para a formação de modelos, no caso de várias fotos. Assim, cada ponto do espaço objeto é definido por 2(dois) ou mais raios (daí o nome feixes), introduzindo maior confiabilidade ao modelo matemático.

A Fig. 3 a seguir caracteriza esta situação.

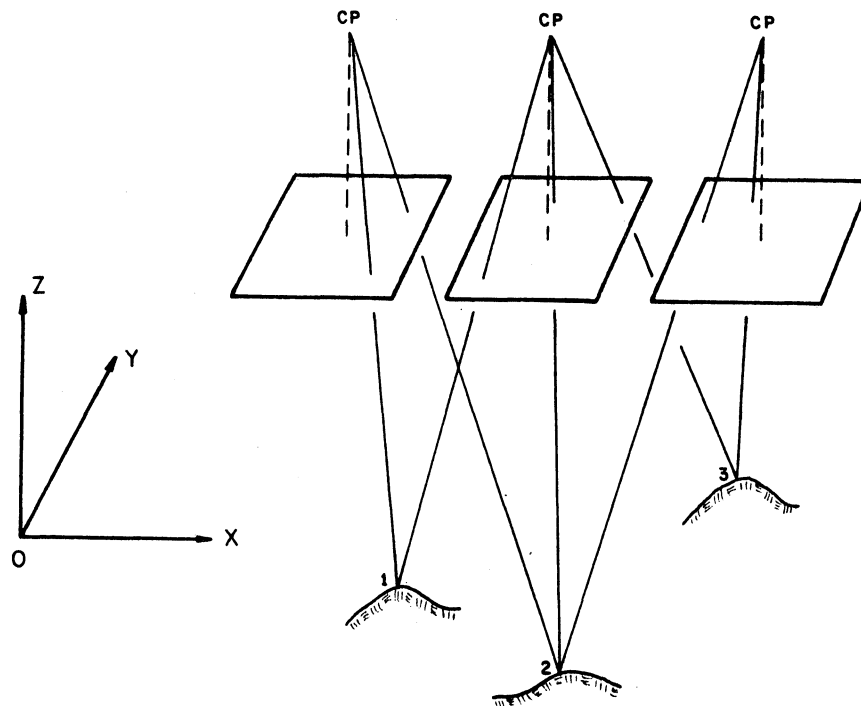


Fig. 3 Método dos Feixes Perspectivos

No mínimo 2 raios para definir cada ponto do espaço objeto

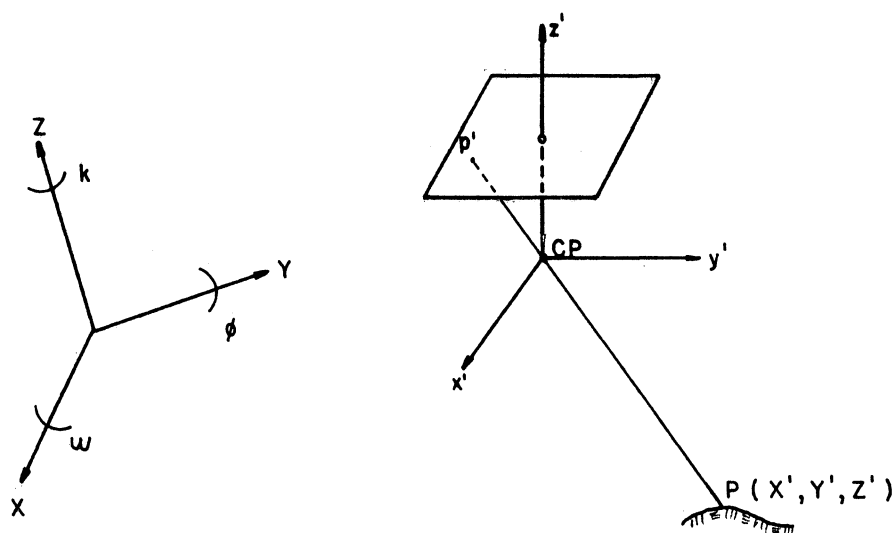
Este Método possui vantagens, sob o ponto de vista da máxima precisão:

- a) ajustamento simultâneo de todas as fotos e de todos os pontos de controle;
- b) possibilidade de parametrização dos erros sistemáticos;
- c) possibilidade de parametrização dos parâmetros de calibração de câmaras fotogramétricas;

- d) possibilidade de introduzir métodos estatísticos para avaliação dos resultados;
- e) possibilidade de introduzir métodos de depuração de dados.

#### 2.4.2 - As Equações de Colinearidade:

As equações de colinearidade são deduzidas com base de que os pontos  $P$  (ponto objeto),  $CP$  (centro perspectivo) e  $p'$  (ponto imagem) pertencem a uma reta.



$P(X', Y', Z')$  - ponto do espaço objeto referido ao sistema  $X' Y' Z'$

$p'(x', y', z')$  - imagem de  $P$

$XYZ$  - sistema de coordenadas do espaço objeto (transladado, não paralelo e com diferente escala  $c$ /respeito ao sistema  $X' Y' Z'$ )

Fig. 4 Condição de Colinearidade

Espaço objeto e espaço imagem estão relacionados através das equações de colinearidade /03/

$$x' = c \frac{m_{11} (X - X_0) + m_{12} (Y - Y_0) + m_{13} (Z - Z_0)}{m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)} = c \frac{m}{q} \quad (2.4.2 - 1)$$

$$y' = c \frac{m_{21} (X - X_0) + m_{22} (Y - Y_0) + m_{23} (Z - Z_0)}{m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)} = c \frac{n}{q}$$

com:

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0 \quad (2.4.2 - 2)$$

onde:

$x', y'$  são as coordenadas fotogramétricas de pontos do espaço imagem;

$x, y$  são as coordenadas fiduciais de pontos do espaço imagem;

$x_0, y_0$  são as coordenadas fiduciais do ponto principal (PP);

$X_0, Y_0, Z_0$  são as coordenadas do centro perspectivo (CP) no sistema do espaço objeto;

$X, Y, Z$  são as coordenadas de pontos do espaço objeto no sistema do espaço objeto;

$c$  é a distância focal calibrada;

$m_{ij}$  são os elementos da matriz de rotação - funções trigonométricas de  $K, \theta, W$  - obtidos pelo produto  $R_k R_\theta R_w$  ou qualquer outra combinação;

$K, \theta, W$  são os ângulos eulerianos, obtidos pelas

rotações do sistema de coordenadas do espaço objeto.

Na prática, utiliza-se mais frequentemente o sistema de coordenadas do espaço objeto como sendo local, ao invés do geodésico, por 2(dois) aspectos fundamentais:

- 1º) facilidade de obtenção das coordenadas (valores aproximados);
- 2º) no sistema local, as dimensões das coordenadas geralmente são bem menores que no sistema geodésico, o que facilita em parte o processamento computacional.

Na utilização das equações (2.4.2 - 1) subtemde-se o uso de coordenadas do espaço imagem refinadas, ou seja, coordenadas já pré-corrigidas dos erros sistemáticos (pré-refinamento).

Há uma série de possibilidades de aplicação das equações (2.4.2 - 1), as quais cita-se:

- a) ressecção espacial;
- b) orientação relativa;
- c) determinação da posição do centro perspectivo de um instrumento restituidor;
- d) projecção analítica;
- e) retificação de imagens;
- f) fototriangulação em blocos.

Para maiores informações sobre as aplicações acima

veja /04/.

### 2.4.3 - Equações de Colinearidade Com Parametrização dos Parâmetros de Calibração:

Através da Fototriangulação Analítica é possível recuperar os seguintes parâmetros de calibração:

- a) distância focal calibrada (c);      ---  
  | parâmetros  
  | da orientação  
  |  
b) coord. do ponto principal ( $x_0, y_0$ ); | interna  
  ---|
- c) coeficientes para correção da distorção radial simétrica ( $K_1, K_2, K_3$ );
- d) coeficientes para correção da distorção descentrada ( $P_1, P_2$ ).

As equações apresentadas abaixo agrupam às equações de colinearidade (2.4.2 - 1) os parâmetros de calibração e a solução é dada simultaneamente em uma triangulação analítica em bloco /03/.

$$x - x_0 - (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)(x - x_0) - P_1 [r^2 + 2(x - x_0)^2] + 2P_2 (x - x_0)(y - y_0) - c \frac{m}{q} = 0$$

(2.4.3 - 1)

$$y - y_0 - (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)(y - y_0) - 2P_1 (x - x_0)(y - y_0) - P_2 [r^2 + 2(y - y_0)^2] - c \frac{n}{q} = 0$$

onde:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2;$$

$K_1, K_2, K_3$  são os coeficientes da distorção radial

simétrica ;

$P_1, P_2$  são os coeficientes da distorção descentrada.

Os demais elementos estão descritos em (2.4.2).

#### 2.4.4 - Ajustamento das Observações :

O modelo matemático apresentado a seguir atende simultaneamente às equações (2.4.2 - 1) e (2.4.3 - 1). As diferenças existentes estão basicamente no aspecto numérico e padrão das matrizes A e N envolvidas no ajustamento.

As equações (2.4.2 - 1) e (2.4.3 - 1) estão associadas ao modelo matemático de observações, apresentado abaixo, denominado Modelo Combinado, pois as equações são funções tanto de observações como de parâmetros. O Modelo Combinado é bastante conhecido da comunidade fotogramétrica, razão pela qual sua abordagem será bastante objetiva.

As equações (2.4.2 - 1) e (2.4.3 - 1) podem ser apresentadas sobre a forma de equações de observações, respectivamente:

$$F_x = x - x_0 - c.m/q = 0 \quad (2.4.4 - 1)$$

$$F_y = y - y_0 - c.n/q = 0$$

$$F_x = x - x_0 - \sqrt{x} - \sqrt{x_1} - c.m/q = 0 \quad (2.4.4 - 2)$$

$$F_y = y - y_0 - \sqrt{y} - \sqrt{y_1} - c.n/q = 0$$

A essas equações está associado o modelo matemático de ajustamento das observações, a seguir:

$$F(L_a, X_a) = 0 \quad (2.4.4 - 3)$$

onde:

$L_a$  são os valores ajustados das observações:

- coord. fotogramétricas;

$X_a$  são os parâmetros ajustados, quais sejam:

Triangulação com calibração	Triangulação	- coord. tri-dimensionais de pontos do espaço objeto (X, Y, Z); - elementos da orientação exterior de cada foto (w, $\theta$ , k, $X_0$ , $Y_0$ , $Z_0$ ); - parâmetros de calibração ajustados (c, $x_0$ , $y_0$ , $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ , $P_1$ , $P_2$ ).
--------------------------------	--------------	--

e:

$$L_a = L_b + V \quad (2.4.4 - 4)$$

$$X_a = X_0 + X \quad (2.4.4 - 5)$$



onde:

- Lb são os valores observados (x,y);
- V são os resíduos das observações;
- Xo são os valores aproximados dos parâmetros;
- X são as correcções aos parâmetros (objetivo do ajustamento).

(2.4.4 - 3): Adotando-se a notação matricial e linearizando

$$BV + AX + W = 0 \tag{2.4.4 - 6}$$

onde:

$$\tag{2.4.4. - 7}$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial \begin{matrix} \text{(parâmetros da calibração, orientação exterior, pontos do terreno)} \\ \text{Triangulação} \\ \text{Triangulação com calibração} \end{matrix}}$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial \text{(observações)}} \tag{2.4.4 - 8}$$

$$W = \begin{bmatrix} x_{obs} - x_{calculado} \\ y_{obs} - y_{calculado} \end{bmatrix}$$

,W = vetor dos erros de fechamento

$$\tag{2.4.4 - 9}$$

Caso haja apenas triangulação a matriz B é unitária. Caso haja triangulação com calibração simultânea a matriz B pode também ser considerada unitária, pois não afeta significativamente o resultado /05/.

Assim, a equação (2.4.4 - 6) fica, considerando a matriz B unitária:

$$V + AX + W = 0 \quad (2.4.4 - 10)$$

A solução de (2.4.4 - 10) para X é:

$$X = -N^{-1} U \quad (2.4.4 - 11)$$

onde:

$$\begin{aligned} N &= A^T P A \\ U &= A^T P W \\ P &= \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1} \end{aligned} \quad (2.4.4 - 12)$$

e:

P é a matriz dos pesos das observações;  
 $\sigma_0^2$  é a variância da unidade de peso, a priori;  
 $\Sigma_{Lb}^{-1}$  é a inversa da matriz variância-covariância das observações.

#### 2.4.5 - Padrão de N:

Como já mencionado, um dos problemas na

Fototriangulação Analítica refere-se à quantidade de observações, gerando grandes sistemas de equações lineares. É comum a existência de blocos com milhares de incógnitas, necessitando, à nível de produção, programas computacionais otimizadas que manipulem adequadamente estas incógnitas. Esta manipulação refere-se a: armazenamento e acesso aos dados, operações matriciais.

No CAP. 5 será apresentado um algoritmo que atenderá às considerações expostas anteriormente.

Para se explorar convenientemente a solução do sistema de equações lineares, que é uma das etapas - a mais demorada - a ser vencida no ajustamento das observações, torna-se necessário e imprescindível conhecer como a matriz  $N$  - matriz dos coeficientes das equações normais - se apresenta, o que é denominado padrão de  $N$ .

Este padrão, para um mesmo bloco de fotografias aéreas, varia substancialmente em função da forma como se enumera os pontos sobre as fotografias, e também, da percentagem de cobertura lateral (side lap).

De um modo geral, utiliza-se mais comumente dois tipos distintos de numeração dos pontos sobre as fotografias, quais sejam:

- a) numeração através da faixa (cross strip);
- b) numeração transversal à faixa (down strip).

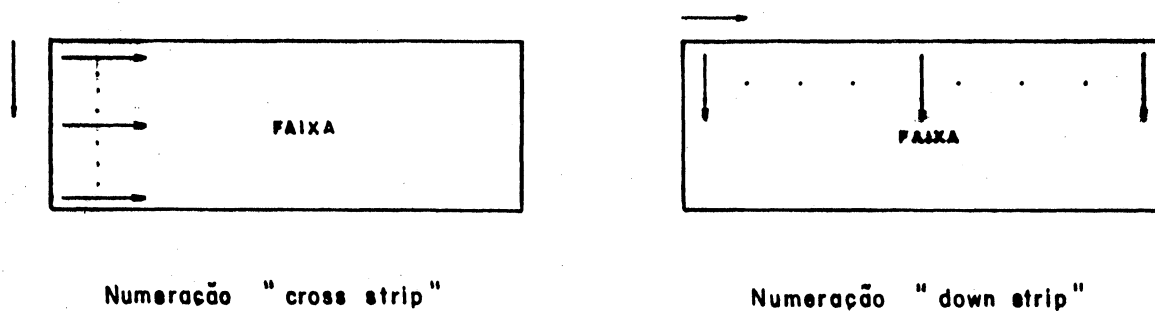


Fig. 5 Numeração dos Pontos sobre as Fotografias

A numeração **cross strip** é a mais indicada /06/, pois esta geralmente produz, na matriz  $N$ , um padrão de esparsidade com uma banda mais estreita que no caso da numeração **down strip**.

Quanto à percentagem de cobertura lateral - no caso de blocos - os valores mais comuns são 20% e 60%. A cobertura lateral de 60% dá uma geometria mais rígida, obtendo-se, assim, resultados melhores, tanto em planimetria quanto, principalmente, em altimetria. Por outro lado, 20% de cobertura lateral torna, evidentemente, o trabalho executado mais barato, ou seja, tem-se para uma cobertura fotogramétrica de uma mesma área, um número de faixas e aerofotos muito menor.

Considerando-se apenas o caso de triangulação espacial, a matriz  $N$  tem o padrão de esparsidade típico de

seus elementos não-nulos conforme apresentado na Fig. 6 abaixo, para o caso de blocos aéreos regulares.

Denomina-se blocos aéreos regulares os blocos que têm:

- a) mesmo recobrimento longitudinal entre fotografias das faixas;
- b) mesmo recobrimento transversal entre faixas de bloco;
- c) mesmo nº de fotos por faixa;
- d) pontos de passagem e enlace em posições pré-definidas e iguais em todas as fotos.

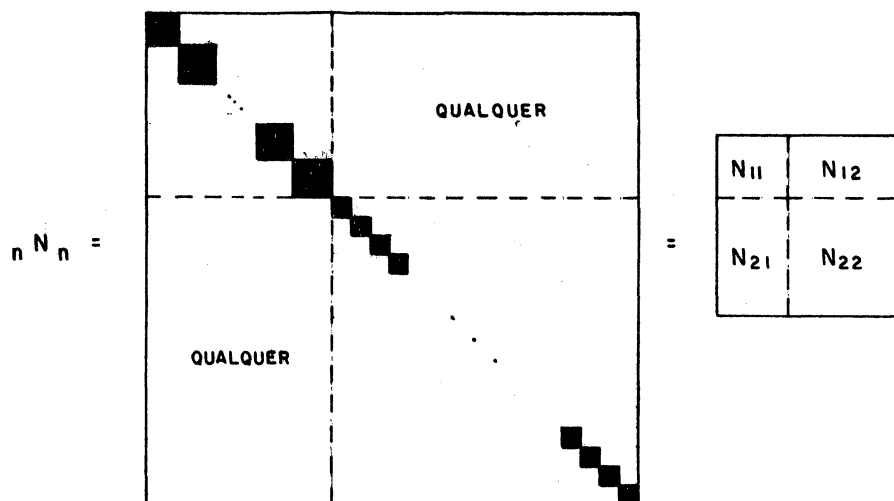


Fig. 6 Padrão de Esparsidade Típico dos Elementos não-nulos de  $N$   
Caso de Blocos Aéreos Regulares

A sub-matriz  $N_{11}$  é bloco diagonal e possui tantos sub-blocos  $6 \times 6$  quanto são o número de fotografias do bloco.

A sub-matriz  $N_{22}$  também é bloco diagonal e possui tantos sub-blocos  $3 \times 3$  quanto forem os pontos observados nas fotografias.

A sub-matriz  $N_{12}$  apresenta possibilidades diversas. De um modo geral seu padrão característico é o diagonal bandado, cuja largura da banda é função tanto da numeração dos pontos nas fotografias quanto da percentagem de cobertura lateral. Esta sub-matriz só não será diagonal bandada se houver correlação entre os parâmetros observados, gerando a matriz dos pesos ( $P$ ) não diagonal.

A sub-matriz  $N_{21}$  é transposta em relação a  $N_{12}$ .

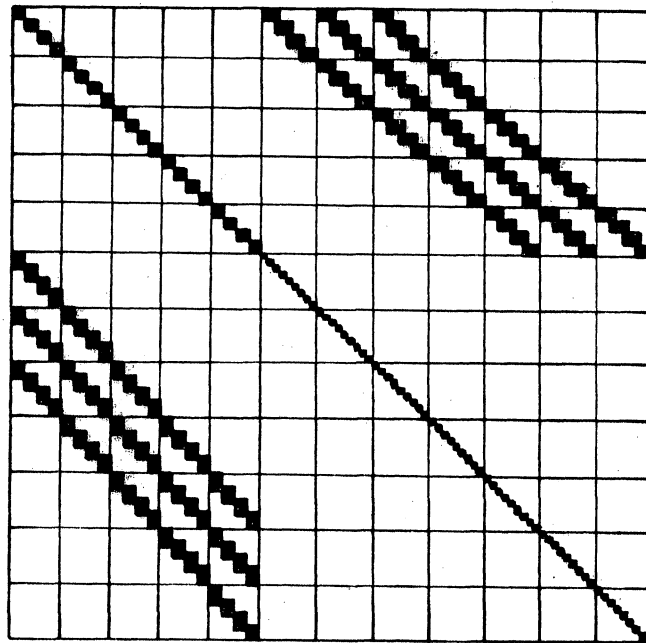


Fig. 7 Padrão de  $N$  - Forma Bandada

A Fig. 7 acima mostra-nos um padrão de esparsidade de  $N$ , onde observa-se a diagonal bandada de  $N_{12}$  e  $N_{21}$ .

Outro padrão dos elementos não-nulos de  $N$  possível de ocorrer é denominado Padrão Bandado Margeado. Este padrão é originado devido a várias causas, as quais citamos /06/ :

- 1) relações funcionais entre parâmetros. Estes parâmetros são denominados bloco-variante;
- 2) matriz dos pesos cheia para observações sobre pontos de controle dados.

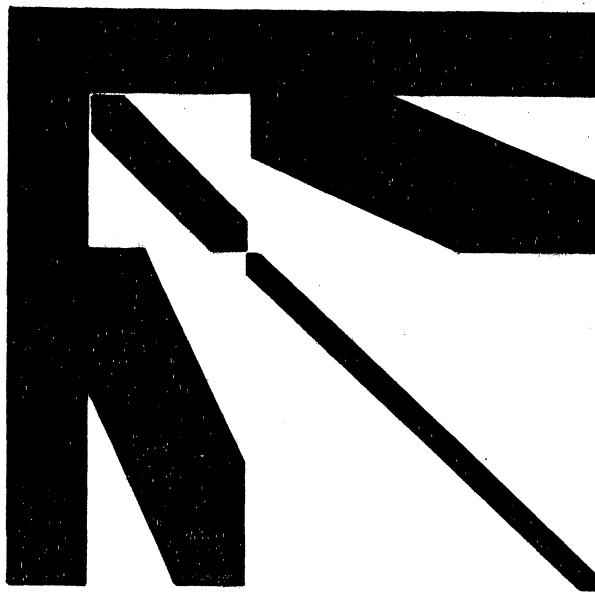


Fig. 8 Padrão de  $N$  - Forma Bandada Margeada

## CAPÍTULO 3

### INJUNÇÕES EM FOTOGRAMETRIA



### 3.1 - INTRODUÇÃO:

Para que as coordenadas de pontos do espaço objeto, geradas na fototriangulação, sejam referidas a um sistema de coordenadas pré-definido (local, geodésico, UTM, etc), é necessário que se tenha como dados um número mínimo de pontos de controle de campo.

O não fornecimento desses pontos de controle deixa indefinido o sistema de coordenadas do espaço objeto, dando origem a problemas de deficiência de **rank** da matriz dos coeficientes das equações normais (N).

A matriz N tem deficiência de **rank** igual a 7 (sete).

Existem várias maneiras de se fixar o sistema do espaço objeto, por exemplo:

```

      |
      |
      | 1 ponto plani-altimétrico
1 - |
      | 2 pontos planimétricos
      |
      |
  
```

```

      |
      |
      | 1 distância
      |
      | 1 ponto plani-altimétrico
2 - |
      | 1 ponto planimétrico
      |
      | 1 ponto altimétrico
      |
      |
  
```

Devido, principalmente a problemas de identificação de pontos na fotografia, o ideal é que se tenha um número de pontos de controle de campo superior ao mínimo necessário, além do que se pode, com estes pontos em excesso, ajustar melhor, pelo Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.), o sistema de coordenadas do espaço objeto.

Na aerotriangulação, estas observações (pontos de controle de campo) são introduzidas pelas INJUNÇÕES.

### 3.2 - CATEGORIA DAS INJUNÇÕES:

As injunções são classificadas em duas categorias:

- |                         |  |            |
|-------------------------|--|------------|
|                         |  |            |
|                         |  | absolutas  |
| a) injunções de peso    |  |            |
|                         |  | relativas  |
|                         |  |            |
|                         |  |            |
|                         |  |            |
|                         |  |            |
| b) injunções funcionais |  | implícitas |
| ou geométricas          |  |            |
|                         |  | explícitas |
|                         |  |            |

#### 3.2.1 - Injunções absolutas:

É quando transforma-se uma variável livre ( $P=0$ ) numa constante ( $P = \infty, \sigma^2 = 0$ ). Neste caso a variável não se altera no ajustamento.

### 3.2.2 - Injunções relativas:

é quando se utiliza  $\text{peso}$  para se restringir o uso de uma variável.

Esta injunção é mais usada que a injunção absoluta por ser mais flexível. Verifica-se, neste caso, que é muito fácil se obter uma injunção absoluta a partir de uma injunção relativa.

### 3.2.3 - Injunções funcionais:

Aqui, a variável vai atender a uma determinada função, além do modelo matemático.

As injunções funcionais não são muito fortes para definir um sistema de coordenadas do espaço objeto, mas podem ser utilizadas como complementação.

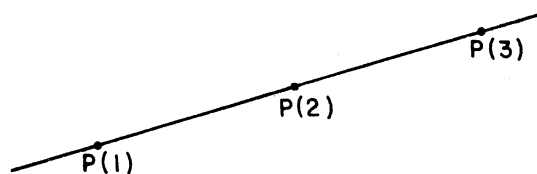


Fig. 9 Exemplo de Injunção Funcional

(Pontos alinhados - pertencem à equação da linha reta)

### 3.3 - MODELO MATEMÁTICO DA INJUNÇÃO:

O modelo matemático da página seguinte é semelhante

ao modelo combinado, porém refere-se às injunções:

$$G = (Lx, Xa) = 0 \quad (3.3 - 1)$$

onde:

$Lx$  são os valores de campo conhecidos

$Xa$  são os parâmetros ajustados

A equação (3.3 - 1) na forma linearizada e sob notação matricial fica:

$$\overset{c}{V} + CX + \overset{c}{W} = 0 \quad (3.3 - 2)$$

onde o super-índice "c" refere-se às injunções, e:

$$C = \frac{\partial G}{\partial (\text{todos os parâmetros})} \quad (3.3 - 3)$$

Quanto ao vetor  $W$ , aqui ele é nulo na 1ª iteração; nas iterações seguintes os parâmetros calculados são diferentes de zero, portanto também o vetor  $W$  será diferente de zero.

Em (3.3 - 3) a função de variação ( $\phi$ ) assume a forma:

$$\phi = V^T P V + \overset{c}{V}^T \overset{c}{P} \overset{c}{V} - 2K^T (V + AX + W) - 2\overset{c}{K}^T (\overset{c}{V} + CX + \overset{c}{W}) \quad (3.3 - 4)$$

Minimizando  $\phi$ , resulta os sistemas de equações:

$$PV - K = 0$$

$$\overset{c}{P}\overset{c}{V} - \overset{c}{K} = 0$$

$$V + AX + W = 0 \quad (3.3 - 5)$$

$$A^T K + C^T \overset{c}{K} = 0$$

$$\overset{c}{V} + CX + \overset{c}{W} = 0$$

Onde a solução para X é:

$$X = - (A^T P A + C^T \overset{c}{P} C)^{-1} (A^T P W + C^T \overset{c}{P} \overset{c}{W}) \quad (3.3 - 6)$$

Fazendo-se:

$$N = A^T P A$$

$$\overset{c}{N} = C^T \overset{c}{P} C$$

$$U = A^T P W \quad (3.3 - 7)$$

$$\overset{c}{U} = C^T \overset{c}{P} \overset{c}{W}$$

Obtemos:

$$X = -(N + \overset{c}{N})^{-1} (U + \overset{c}{U}) \quad (3.3 - 8)$$

onde:

$N$  é a matriz dos coeficientes das equações normais, devido ao modelo combinado puro

$\overset{c}{N}$  é a matriz dos coeficientes das equações normais, devido às injunções

$U$  é o vetor dos termos independentes, devido ao modelo combinado puro

$\vec{U}$  é o vetor dos termos independentes, devido às injunções

A partir das equações (3.3 - 8) pode-se aplicar as injunções uma a uma ou simultaneamente.

### 3.4 - INJUNÇÕES RELATIVAS:

Como trata-se da injunção mais utilizada atualmente em fototriangulação cabe, agora, tecer mais informações sobre a mesma.

Os procedimentos a seguir apresentados são baseados em /07/.

As Injunções Relativas mais usadas são:

- 10) Injunção de posição
- 20) Injunção de distância
- 30) Injunção de altitude
- 40) Injunção direcional
- 50) Injunção de posição relativa

#### 3.4.1 - Injunção de Posição:

Dentre as injunções relativas esta é a de uso mais frequente. Aqui, quer-se introduzir a posição - planimétrica e/ou altimétrica - de um ou mais pontos do espaço objeto.

## 3.4.1.1 - Modelo Matemático:

Aplicando a injunção de posição às 3 coordenadas de um ponto do espaço objeto, o modelo matemático fica:

$$\begin{aligned} X_G^c - X_G^o &= 0 \\ Y_G^c - Y_G^o &= 0 \\ Z_G^c - Z_G^o &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.1.1 - 1)$$

onde:

$X_G^c, Y_G^c, Z_G^c$  são as coordenadas do(s) ponto(s) no sistema referencial do espaço objeto

$X_G^o, Y_G^o, Z_G^o$  são as coordenadas ajustadas do(s) respectivo(s) ponto(s) no sistema referencial do espaço objeto

## 3.4.1.2 - Matriz C e P:

A matriz C, equação (3.3 - 3), será formada com os parâmetros ordenados tal e qual na matriz A. Assim, a matriz C tem a forma:

$${}^3 C_U = \begin{array}{cccccccc|ccc|} & & & & & & & & X_{G_i} & Y_{G_i} & Z_{G_i} & & & \\ \hline & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \end{array} \quad (3.4.1.2 - 1)$$

PARÂMETROS:	ALGUNS:	INJUN-	RESTANTE:
OR. EXTER.	PARÂM.	CÕES	DOS PAR.

ou simplesmente:

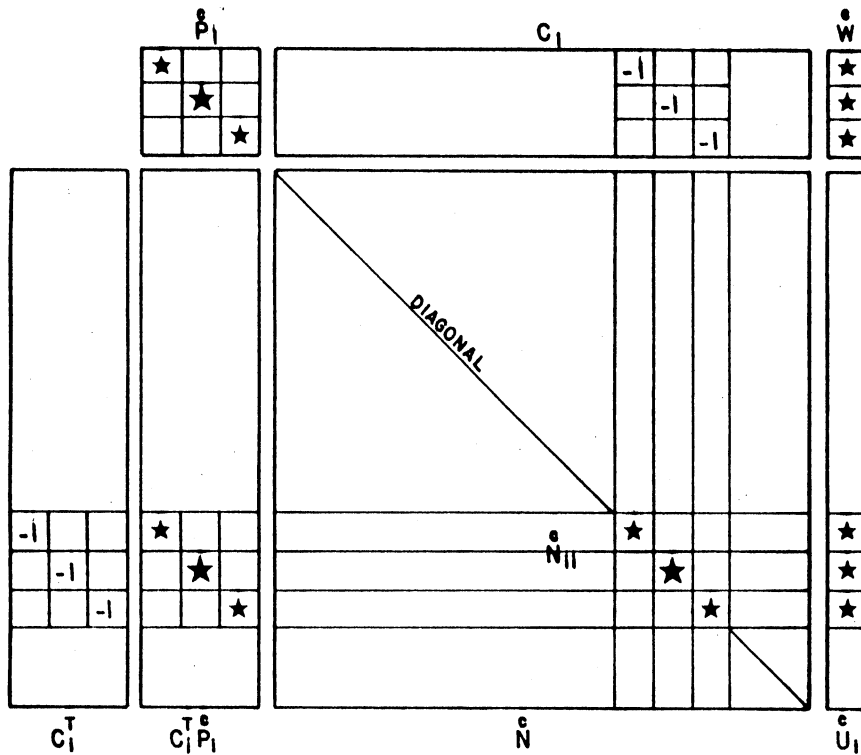
$${}^3 C_U = [0 \quad -I \quad 0] \quad (3.4.1.2 - 2)$$

A matriz P é diagonal (caso de observações não-correlacionadas).

$${}^c P_3 = \begin{bmatrix} | & & | \\ | & * & | \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \end{bmatrix} \quad (3.4.1.2 - 3)$$

3.4.1.3 - Esquema de Formação de  ${}^c N$  :

O esquema apresentado abaixo mostra a formação de  ${}^c N$ . Lembrando que  ${}^c N$  tem a mesma dimensão de  ${}^c N$ .



★ - contribuição do injeção

$${}^c N_{11} = C_1^T P_1 C_1$$

$${}^c U_1 = C_1 P_1 W_1$$

Fig. 10 Esquema de Formação de  ${}^c N$ .

- Injeção de Posição-



Pelo esquema da página anterior, conclui-se que para injunção de posição:

- a) tem-se a formação de apenas um sub-bloco em  $N_{22}$  (sub-matriz de  $N$ );
- b) basta somar o peso das injunções na diagonal de  $N_{22}$ , na posição correspondente às injunções.

Caso se queira introduzir injunções aos parâmetros de orientação exterior  $(X_0, Y_0, Z_0, K, \emptyset, W)$  e interior  $(c, x_0, y_0)$ , a sistemática é análoga.

### 3.4.2 - Injunção de Distância:

#### 3.4.2.1 - Modelo Matemático:

$$G = r_{ij} - [(X_{G_i} - X_{G_j})^2 + (Y_{G_i} - Y_{G_j})^2 + (Z_{G_i} - Z_{G_j})^2]^{1/2} = 0 \quad (3.4.2.1 - 1)$$

onde:

$r_{ij}$  é a distância conhecida entre os pontos "i" e "j", do espaço objeto

$X_{G_i}, Y_{G_i}, Z_{G_i}$  são as coordenadas do ponto "i"

$X_{G_j}, Y_{G_j}, Z_{G_j}$  são as coordenadas do ponto "j"

#### 3.4.2.2 - Matriz $C$ e Vetor $\vec{W}$ :

Quer-se obter as derivadas de  $G$  em relação a  $X_{G_i}, Y_{G_i}, Z_{G_i}, X_{G_j}, Y_{G_j}, Z_{G_j}$ .

Assim:

$$\frac{\partial G}{\partial X_{G_i}} = \frac{X_{G_i} - X_{G_j}}{r_{ij}^0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial Y_{G_i}} = \frac{Y_{G_i} - Y_{G_j}}{r_{ij}^0} \quad (3.4.2.2 - 1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial Z_{G_i}} = \frac{Z_{G_i} - Z_{G_j}}{r_{ij}^0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial X_{G_j}} = - \frac{\partial G}{\partial X_{G_i}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial Y_{G_j}} = - \frac{\partial G}{\partial Y_{G_i}} \quad (3.4.2.2 - 1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial Z_{G_j}} = - \frac{\partial G}{\partial Z_{G_i}}$$

onde:

$r_{ij}^0$  é obtido através das coordenadas aproximadas dos pontos "i" e "j", e:

$$r_{ij}^0 = [(X_{G_i}^0 - X_{G_j}^0)^2 + (Y_{G_i}^0 - Y_{G_j}^0)^2 + (Z_{G_i}^0 - Z_{G_j}^0)^2]^{1/2} \quad (3.4.2.2 - 2)$$

A matriz C fica, considerando uma única distância:

$${}^3 C_u = [0 \dots 0 \ C_i \ 0 \dots 0 \ C_j \ 0 \dots 0] \quad (3.4.2.2 - 3)$$

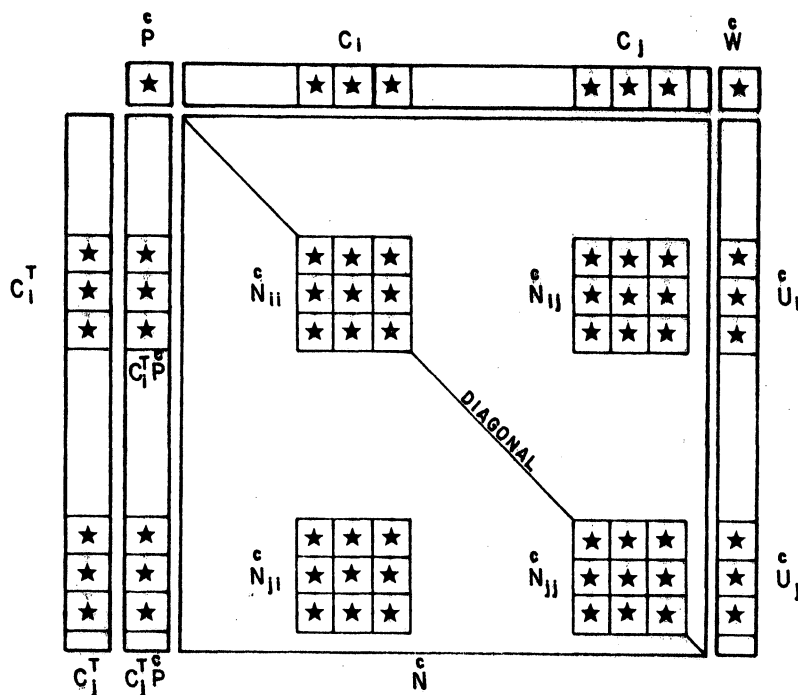
O vetor erro de fechamento devido às injunções é:

$${}^c W = r_{ij} - r_{ij}^o \quad (3.4.2.2 - 4)$$

Na 1ª iteração  ${}^c W \neq 0$  pois não são conhecidas as coordenadas de "i" e "j".

### 3.4.2.3 - Esquema de Formação de ${}^c N$ :

O esquema apresentado a seguir mostra a formação de  ${}^c N$ .



★ - contribuição da injeção

$${}^c N_{ii} = C_i^T P^c C_i \quad {}^c N_{ji} = {}^c N_{ij}^T = -{}^c N_{ii}^T$$

$${}^c N_{jj} = C_j^T P^c C_j \quad {}^c U_i = C_i^T P^c W^c$$

$${}^c N_{ij} = -C_i^T P^c C_j = -{}^c N_{ji} \quad {}^c U_j = -{}^c U_i$$

Fig. 11 Esquema de Formação de  ${}^c N$  - Injeção de Distância

Pelo esquema da página anterior, conclui-se que para injunção de distância:

- a) tem-se a formação de quatro sub-blocos em  $N_{22}$ ;
- b) a injunção de distância "quebra" o padrão bloco diagonal de  $N$ .

### 3.4.3 - Injunção de Altitude:

#### 3.4.3.1 - Introdução:

Esta injunção é aplicada quando se conhece a altitude geométrica de algum(ns) ponto(s) dada, por exemplo, pela Geodésia ou por satélite artificial.

O sistema geodésico geocêntrico é definido assim:

- origem: no centro do elipsóide de referência.
- eixo Z: coincide com o semi-eixo menor do elipsóide de referência, orientado no sentido do pólo norte.
- eixo X: coincide com o semi-eixo maior do elipsóide de referência, orientado no sentido do meridiano origem.
- eixo Y: ortogonal ao plano XZ e orientado de forma que o sistema seja dextrógiro.

Assim um ponto J definido neste sistema tem coordenadas:

- a) geodésicas:  $J(\phi, \lambda, h)$
- b) cartesianas:  $J(X, Y, Z)$

onde:

$\phi$  = latitude geodésica

$\lambda$  = longitude geodésica

$h$  = altitude geométrica (altura do ponto em relação à superfície do elipsóide)

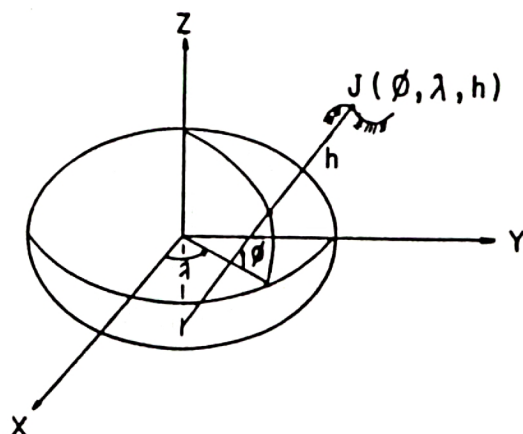


Fig. 12 Sistema Geodésico Geocêntrico

$$J(\phi, \lambda, h) = J(X, Y, Z)$$

### 3.4.3.2 - Transformação de Coordenadas:

A transformação de coordenadas do sistema geodésico para o cartesiano é segundo /08/:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ [N (1 - e^2) + h] \sin \phi \end{bmatrix}, \text{ dados } a \text{ e } \alpha$$

(3.4.3.2 - 2)

sendo:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} \quad (3.4.3.2 - 2)$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (3.4.3.2 - 3)$$

onde:

$N$  é a grande normal

$e$  é a excentricidade

$\alpha$  é o achatamento

A transformação inversa de (3.4.3.2 - 1) é:

$$\begin{aligned} \lambda &= (X, Y, Z) \\ \phi &= (X, Y, Z) \\ h &= (X, Y, Z) \end{aligned} \quad (3.4.3.2 - 4)$$

### 3.4.3.3 - Matriz $C$ e Vetor $\vec{W}$ :

O que na realidade se quer são as derivadas parciais de  $h$  em relação a  $X, Y, Z$  [ $\partial h / \partial (X, Y, Z)$ ], que são os elementos não-nulos da matriz  $C$ , cujos resultados são /07/:

$$\frac{\partial h}{\partial X} = \cos \phi \cos \lambda$$

$$\frac{\partial h}{\partial Y} = \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \quad (3.4.3.3 - 1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial Z} = \text{sen } \phi$$

A matriz C fica:

$$C = [0 \dots 0 \quad \partial h / \partial X \quad \partial h / \partial Y \quad \partial h / \partial Z \quad 0 \dots 0] \quad (3.4.3.3 - 2)$$

Aqui o vetor  $\vec{w}$  fica:

$$\vec{w} = hc - h_0$$

onde:

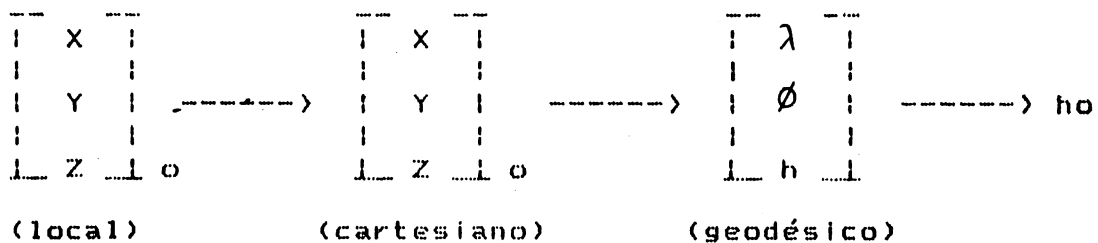
$hc$  é a altitude geométrica conhecida

$h_0$  é calculado a partir de  $X_0, Y_0, Z_0$  (deveria ser  $h_a$ , mas não se tem  $X_0, Y_0, Z_0$ )

O valor  $h_0$  é calculado no sistema local e transformado para o sistema geodésico após o cálculo de  $\phi_0$  e  $\lambda_0$ , que são obtidos através dos valores aproximados de  $X, Y, Z$ .

Resumindo, para calcular  $h_0$  :

- 1) determina-se os valores aproximados de  $X, Y, Z$  do ponto J (tirado de uma carta, por exemplo), obtendo-se  $J(X_0, Y_0, Z_0)$ ;
- 2) faz-se as seguintes transformações, obtendo-se  $h_0$ .



(3.4.3.3 - 4)

#### 3.4.4 - Injunção de Direção:

Esta Injunção é usada quando o controle só fornece distâncias e, portanto, o sistema de coordenadas não fica orientado.

##### 3.4.4.1 - Modelo Matemático:

Sejam 2 pontos, "i" e "j", que definem uma reta orientada, conforme os ângulos " $\alpha$ " e " $\beta$ " da Fig. 13 abaixo:

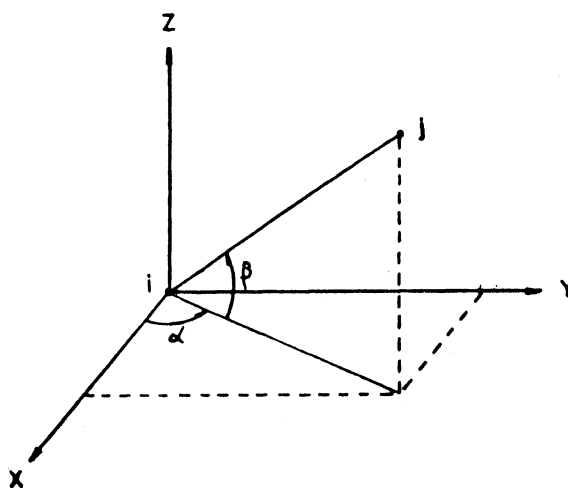


Fig. 13 Orientação do Sistema de Coordenadas em Função de  $\alpha$  e  $\beta$



Da Fig. 13, obtém-se:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} ( Y / X ) \quad (3.4.4.1 - 1)$$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{Z}{(\Delta X^2 + \Delta Y^2)}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_i - X_j \\ \Delta Y &= Y_i - Y_j \\ \Delta Z &= Z_i - Z_j \end{aligned} \quad (3.4.4.1 - 2)$$

3.4.4.2 - Matriz C e Vetor  $\vec{W}$  :

A matriz C fica:

$${}^2 C_u = [0 \dots 0 \ C_i \ 0 \dots 0 \ C_j \ 0 \dots 0] \quad (3.4.4.2 - 1)$$

com /07/:

$$C_i = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2 \alpha \ \text{tg}^2 \alpha}{X} & - \frac{\cos^2 \alpha}{X} & 0 \\ \frac{\Delta X \cos^2 \beta \ \text{tg}^2 \beta}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} & \frac{\partial \beta}{\partial \Delta X} \ \text{tg} & - \frac{\cos \beta}{(\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (3.4.4.2 - 2)$$

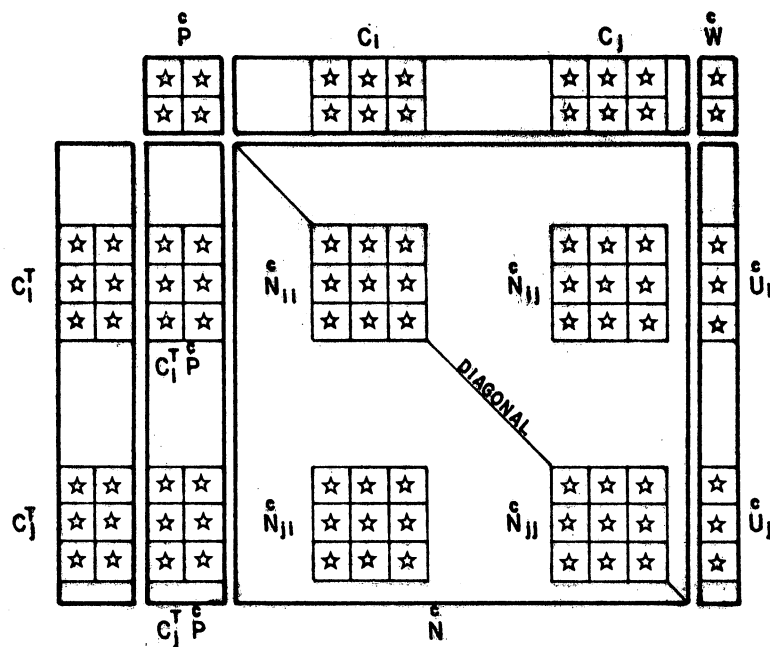
$$C_j = - C_i \quad (3.4.4.2 - 3)$$

O vetor  $\overset{c}{W}$  fica:

$$\overset{c}{W} = \begin{bmatrix} \alpha - \text{tg}^{-1} (\Delta Y / \Delta X) \\ \beta - \text{tg}^{-1} \frac{\Delta Z}{(\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (3.4.4.2 - 4)$$

3.4.4.3 - Esquema de Formação de  $\overset{c}{N}$  :

O esquema apresentado a seguir mostra a formação de  $\overset{c}{N}$ .



☆ - contribuição da injunção

$$\overset{c}{N}_{11} = \overset{c}{N}_{22} = \overset{c}{C}_1^T \overset{c}{P} \overset{c}{C}_1 \quad \overset{c}{U}_1 = \overset{c}{C}_1^T \overset{c}{P} \overset{c}{W}$$

$$\overset{c}{N}_{12} = \overset{c}{N}_{21} = -\overset{c}{C}_j^T \overset{c}{P} \overset{c}{C}_1 = -\overset{c}{N}_{11} \quad \overset{c}{U}_j = -\overset{c}{U}_1$$

Fig 14 Esquema de Formação de  $\overset{c}{N}$

-Injunção de Direção-

Pelo esquema da página anterior, conclui-se que na injunção de direção:

- a) para cada direção tem-se a formação de quatro sub-blocos em  $N_{22}$  ;
- b) a injunção de direção "quebra" o padrão bloco-diagonal de  $N_{22}$  .

### 3.4.5 - Injunção de Posição Relativa

Este tipo de injunção é muito útil quando se tem dois pontos situados próximos um do outro.

#### 3.4.5.1 - Modelo Matemático:

$$\begin{aligned} \Delta X - (X_i - X_j) &= 0 \\ \Delta Y - (Y_i - Y_j) &= 0 \\ \Delta Z - (Z_i - Z_j) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.5.1 - 1)$$

#### 3.4.5.2 - Matriz C e vetor $\vec{W}$ :

A matriz C fica:

$${}^c_3 C_u = [0 \dots 0 \quad C_i \quad 0 \dots 0 \quad C_j \quad 0 \dots 0] \quad (3.4.5.2 - 1)$$

com:

$$C_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = - {}_3 I_3; \quad C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}_3 I_3 \quad (3.4.5.2 - 2)$$

assim:

$${}^3 C_u = [0 \dots 0 \quad -I \quad 0 \dots 0 \quad I \quad 0 \dots 0] \quad (3.4.5.2 - 3)$$

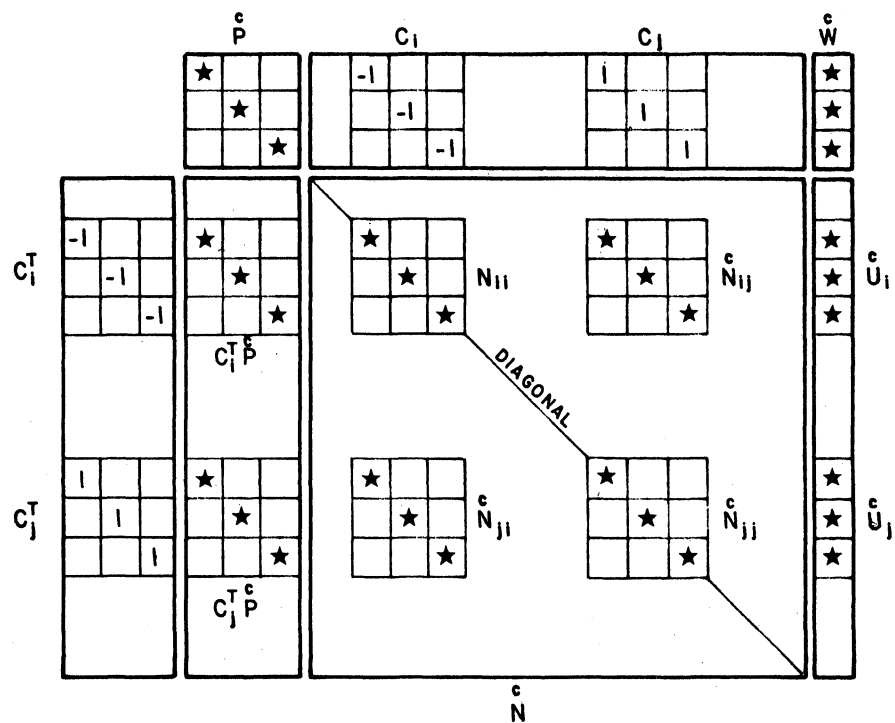
O vetor  ${}^c W$  fica:

$${}^c W = \begin{Bmatrix} \Delta X = (X_{i_0} - X_{j_0}) \\ \Delta Y = (Y_{i_0} - Y_{j_0}) \\ \Delta Z = (Z_{i_0} - Z_{j_0}) \end{Bmatrix} \quad (3.4.5.2 - 4)$$

### 3.4.5.3 - Esquema de Formação de ${}^c N$ :

O esquema apresentado abaixo mostra a formação de

${}^c N$  :



★ - contribuição da injeção

$$\begin{aligned} {}^c N_{ii} &= {}^c N_{jj} = {}^c P & {}^c U_i &= -{}^c W \\ {}^c N_{ij} &= {}^c N_{ji} = -{}^c P & {}^c U_j &= {}^c W \end{aligned}$$

Fig 15 Esquema de Formação de  ${}^c N$  - Injeção de Direção Relativa

Pelo esquema da página anterior, conclui-se que para injunção de posição relativa:

- a) tem-se a formação de quatro sub-blocos em  $N_{22}$ , para cada par de pontos;
- b) esta injunção "quebra" o padrão bloco-diagonal de  $N_{22}$ .

## CAPÍTULO 4

### RESTITUIDORES ANALÍTICOS

#### 4.1 - HISTÓRICO:

O restituidor analítico foi inventado por U.V. Helava e apresentado à comunidade científica na Conferência Fotogramétrica Internacional sobre Aerotriangulação, em Otawa, em 1957.

Inicialmente, com pouco interesse, devido principalmente ao estágio de desenvolvimento computacional da época. Posteriormente, a partir de 1976, uma série de fabricantes (Zeiss, OMI, Bendix, Galileo, Instronic, Matra, Keuffel & Esser) apresentaram no Congresso Internacional de Fotogrametria, em Helsinki, suas próprias versões, alguns em fase já operacional e outros apenas em protótipos. Hoje em dia, é grande o número de fabricantes que produzem restituidores analíticos.

#### 4.2 - CONCEITO:

Segundo U.V. Helava /09/: "Restituidor Analítico é um estéreo-restituidor com projeção analítica."

A projeção analítica consiste na transformação de coordenadas do espaço objeto ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) em coordenadas da imagem ( $x_i, y_i$ ) e vice-versa.

A transformação referida acima consiste no cálculo de um conjunto de coordenadas a partir de outro, baseado em uma relação matemática, que são as equações de colinearidade.

O estéreo-restituidor é um instrumento que permite a restituição on-line.

#### 4.3 - PRINCIPAIS COMPARAÇÕES ENTRE RESTITUIDOR ANALÍTICO E RESTITUIDOR ANALÓGICO:

QUADRO COMPARATIVO		
ÍTEM:	RESTITUIDOR ANALÍTICO	RESTITUIDOR ANALÓGICO
1	componentes óticos e mecânicos são uma parte muito pequena do sistema	componentes óticos e mecânicos em grande quantidade
2	modelo do terreno é formado matematicamente e não é visualizado	visualização do modelo analógico ao terreno
3	utiliza-se 2 fotos por vez	pode ser usado várias fotografias simultaneamente (sistema de multi-projetores)
4	características físicas compactas	características físicas exageradas
5	não são introduzidos erros significativos de natureza física na projeção, que é efetuada analiticamente	ocorre erros que se propagam e influem na precisão
6	necessita de computador digital	não necessita de computador digital
7	trabalha <b>off-line</b> e <b>on-line</b>	pode trabalhar <b>off-line</b>
8	grande liberdade de correções: alcance de rotações e translações e distância focal ilimitados	ocorre inflexibilidade para as correções: alcance de rotações e translações e distância focal limitados
9	medição só pode ser efetuada ponto a ponto	medição e processamento contínuos
10	possui alto grau de precisão externa (acuracidade)	precisão externa pequena

Quadro 1 Principais Comparações entre Restituitor Analítico e Restituitor Analógico



Uma série de outros itens poderiam ainda ser comparados mas, tratando-se de restituidores analíticos, o seu potencial e versatilidade é tão amplo que, na prática, ele terá sempre parte deste potencial inexplorado.

#### 4.4 - CONFIGURAÇÃO BÁSICA:

Um restituidor analítico pode ser dividido em 4 componentes principais /10/:

- 1 - um estereovisor
- 2 - um computador
- 3 - uma interface
- 4 - uma mesa automática, de desenho (opcional)

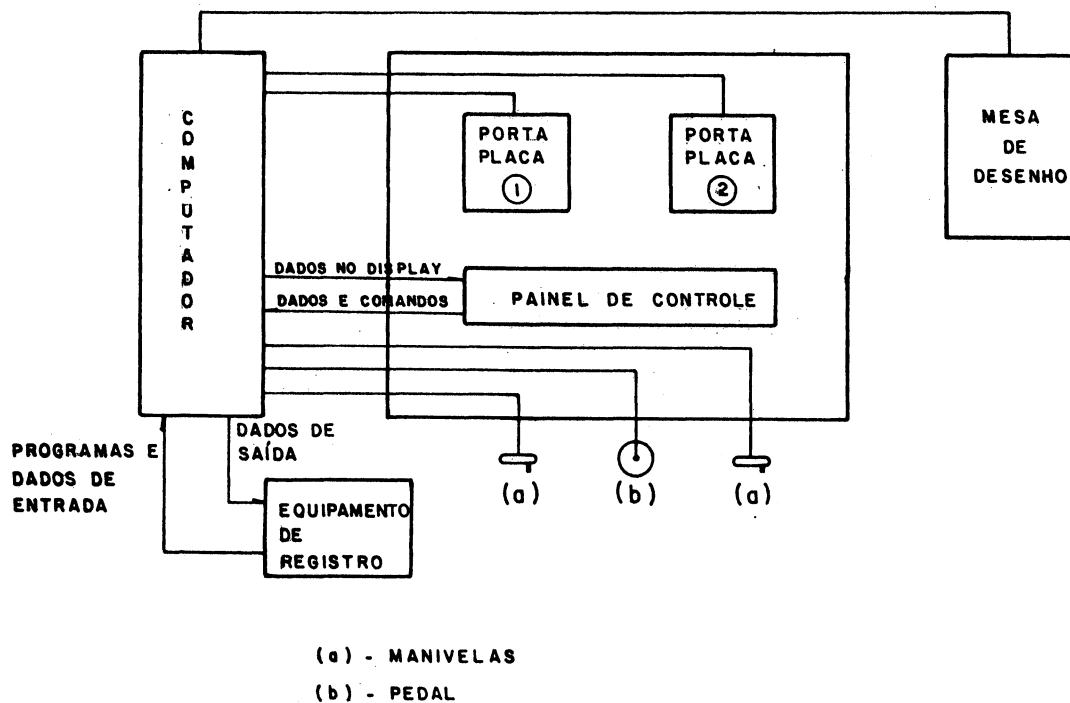


Fig. 16 Diagrama de um Restituidor Analítico

Configuração Básica

O estereovisor é constituído basicamente de:

- um sistema ótico binocular;
- dois porta-placas;
- um sistema de controle para o movimento dos porta-placas;
- um sistema de iluminação.

O computador armazena, distribui e processa os dados no sistema **on-line**, enquanto controla outros instrumentos, como a mesa de desenho.

A interface é a unidade que transforma as informações analógicas, oriunda dos movimentos das manivelas e pedal, em informações digitais compatíveis com o computador e, também, transforma as informações digitais proveniente do computador em impulsos que acionarão servo-motores, movimentando os porta-placas.

#### 4.5 - FUNCIONAMENTO DE UM RESTITUIDOR ANALÍTICO:

A descrição a seguir explica o funcionamento de um Restituídor Analítico.

Quando se movimenta as manivelas e/ou o pedal ou o joystick são gerados impulsos nos codificadores de rotação (**rotary encoders**). Estes impulsos são transmitidos ao computador, que os soma, fornecendo as coordenadas  $(X_i, Y_i, Z_i)$  do ponto.

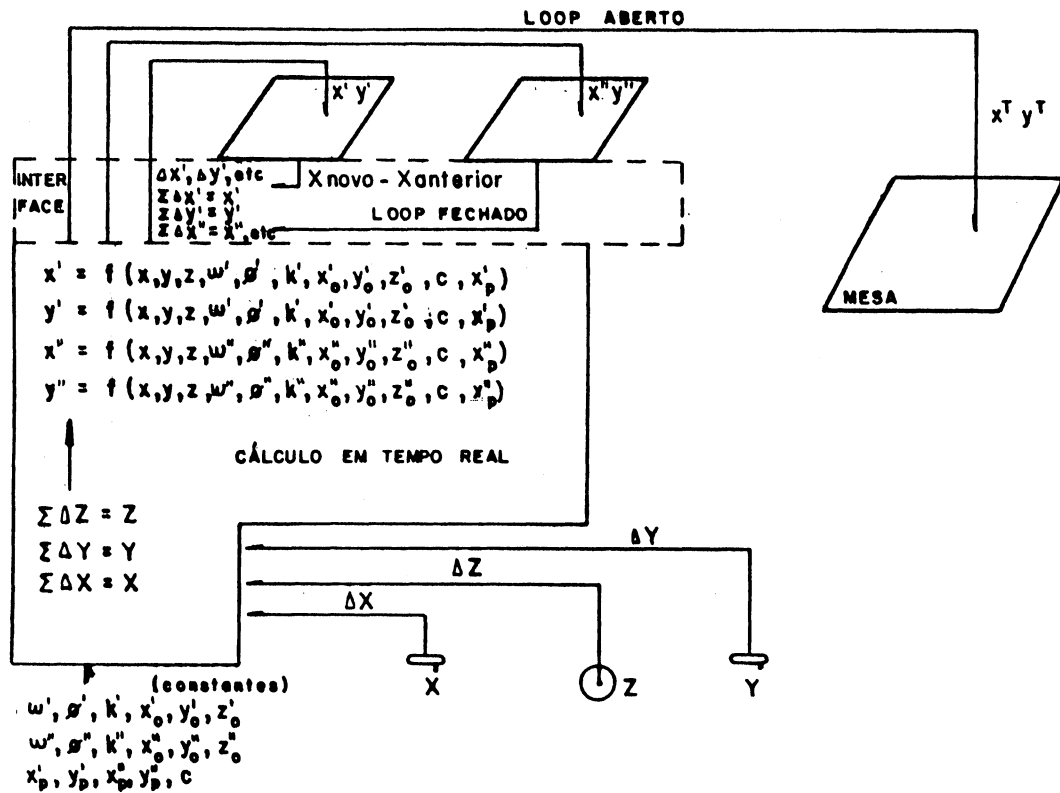


Fig. 17 Funcionamento de um Restituídor Analítico

O computador então, calcula, através das equações de colinearidade (2.4.2 - 1) e (2.4.2 - 2), pág. 13, as coordenadas das imagens da placa da esquerda ( $x'_i, y'_i$ ), da placa da direita ( $x''_i, y''_i$ ).

As constantes utilizadas no modelo de colinearidade, e que são os elementos de orientação interior e exterior do modelo ( $c, x_0, y_0, w, \vartheta, k, x_0, y_0, z_0$ ), podem ser fornecidas ao computador como dados de entrada ou obtidos por algum processo de orientação, processo este que faz parte do software básico de um Restituídor Analítico.

As coordenadas calculadas das imagens das placas são transformadas em impulso, que por sua vez, são transmitidas aos servo-motores que são solidários aos porta-placas movimentando-os de modo a ocupar a posição calculada. Esta operação deve ser feita em **real-time**, isto é, a duração do ciclo manivela-codificação-computação-resposta deve ser inferior a 1/25 segundos, de tal modo que o operador não perceba algum atraso no movimento dos porta-placas em relação ao movimento das manivelas. A operação em **real-time** cria uma sensação de ligação física entre as manivelas e os porta-placas.

Para a utilização dos motores **step** (para pequenos deslocamentos) são calculadas, no computador, as diferenças  $\Delta x'$ ,  $\Delta y'$ ,  $\Delta x''$ ,  $\Delta y''$  entre as coordenadas  $x'$ ,  $y'$  e  $x''$ ,  $y''$  atuais e anteriores.

Se o movimento não é verificado, isto é, se não há uma comparação entre as coordenadas introduzidas e as calculadas, tem-se um sistema de loop aberto, que é econômico mas não garante precisão.

O melhor procedimento é a utilização de um sistema de loop fechado, associado a servo-motores. Os movimentos dos porta-placas são registrados por **encoders** (lineares ou rotativos) e retransmitidos ao computador, que os compara aos movimentos calculados, repetindo o processo até que não haja discrepância entre a posição calculada e a assumida

pelo porta-placa. A vantagem do sistema com loop fechado reside na precisão externa, limitada somente à precisão do sistema de encoders.

#### 4.6 - ASPECTOS DO SOFTWARE DE UM RESTITUIDOR ANALÍTICO:

Um Restituídor Analítico é essencialmente um sistema de processamento de dados. Os programas que manipulam tais dados (**software**) têm uma importância fundamental no sistema, pois são, em última análise, os que fazem o instrumento funcionar.

Os programas fornecidos com o Restituídor Analítico são partes essenciais de todo o sistema, estando divididos em programas operacionais e programas de aplicação.

##### 4.6.1 Programas Operacionais:

São programas feitos em linguagem **Assembler** e que caracterizam-se pela sua utilização frequente e alta velocidade de processamento. Estes programas são responsáveis pela projeção analítica e numerosas funções de comunicação e controle.

##### 4.6.2 Programas de Aplicação:

São programas que não necessitam de tempo crítico na sua utilização, além de serem acionados esporadicamente. São

programas codificados em FORTRAN e podem ser modificados pelo usuário, caso este assim o desejar.

São exemplos de alguns programas de aplicação:

- a) programas de orientação (interior, relativa e absoluta);
- b) correções de erros sistemáticos;
- c) modelo digital do terreno (DTM);
- d) aerotriangulação.

#### 4.7 - CAPACIDADE ATUAL DOS RESTITUIDORES ANALÍTICOS:

Descrimina-se abaixo, de uma forma resumida, a capacidade atual dos Restituidores Analíticos:

- 1 - pode-se obter uma precisão externa de até mais ou menos 0,003 mm, na escala da foto;
- 2 - pode-se obter uma grande ampliação da foto para o mapa;
- 3 - permite a restituição de fotos oblíquas;
- 4 - pode-se introduzir programas de operação específicos para outros sensores que não a câmara fotogramétrica, como por exemplo, imagens de radar e scanners;
- 5 - o processo de orientação interior, relativa e absoluta pode ser parcialmente automatizado, programando-se previamente a visita aos pontos comumente utilizados;
- 6 - a mesa de desenho, automática, guiada pelo

computador, é utilizada para o desenho de pontos, quadriculados, linhas, etc;

- 7 - o Restituídor Analítico é o instrumento mais indicado para efetuar a aquisição de dados digitais a partir de um modelo fotogramétrico tridimensional.

## CAPÍTULO 5

SOLUÇÃO DO SISTEMA DE

EQUAÇÕES LINEARES

O ALGORITMO DE CROUT

MODIFICADO



## 5.1 - INTRODUÇÃO:

A solução de um sistema de equações lineares é um problema relativamente simples quando a matriz dos coeficientes é de baixa ordem.

Se a matriz dos coeficientes é de ordem elevada - por exemplo, até milhares de equações -, o que geralmente ocorre nos problemas de ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.) com aplicações em Geodésia e Fotogrametria, pode-se esperar dois tipos de situação na solução deste sistema, quais sejam:

- a) tempo de processamento computacional grande;
- b) problemas relativos à capacidade da memória do computador.

Com o advento da Fotogrametria Semi-Analítica e Analítica, é fato indiscutível que o processamento computacional é um fator de peso neste campo de aplicação. Só se terá bons programas nacionais de Fototriangulação se estes forem otimizados, e um dos passos desta otimização refere-se à solução do sistema de equações lineares (sistema de equações normais).

Sem sombra de dúvidas, em se tratando de ajustamento pelo M.M.Q., a maior parte do tempo de processamento computacional é consumido na solução de "grandes sistemas" de equações lineares, portanto, a necessidade de algoritmos eficientes é de muito tempo reconhecida.

Entende-se por "grandes sistemas" aqueles cuja quantidade de coeficientes é grande em relação à memória principal disponível. É, portanto, um conceito dependente do computador utilizado.

Existe um número elevado de algoritmos de solução diretos e algoritmos de solução iterativos para a solução de sistemas de equações lineares e pode-se afirmar que o sucesso de algoritmos aplicados particularmente à sistemas esparsos depende da eficiência da implementação computacional, ou seja, do programa de computador que executa o algoritmo. A implementação desses algoritmos envolve métodos de armazenamento complicados e o grau de sofisticação varia substancialmente para cada algoritmo.

## 5.2 - DEFINIÇÕES:

Seja o sistema de equações normais, obtido pelo M.M.Q., cuja representação matricial é  $NX = L$ .

onde:

- N matriz dos coeficientes das equações normais, simétrica, definida positiva e de ordem  $n \times n$ ;
- X vetor solução, de ordem  $n \times 1$ ;

L vetor dos termos independentes, de ordem  $n \times 1$ .

### 5.2.1 - Matriz Simétrica:

Diz-se que  $N$  é simétrica se  $n_{ij} = n_{ji}$ , para todo  $1 \leq i, j \leq n$

### 5.2.2 - Matriz Definida Positiva:

Uma matriz  $N$  é definida positiva se  $X^T N X > 0$ , para qualquer vetor  $X$  não-nulo.

Nestas matrizes os elementos diagonais são positivos e todos os auto-valores são reais.

### 5.2.3 - Matriz Esparsa:

É uma matriz que possui elementos nulos distribuídos geralmente em posições conhecidas e em grandes quantidades, de modo que seus elementos não-nulos podem ser armazenados

em alguma estrutura de dados especial.

A matriz da Fig. 7, pág. 23, caracteriza uma matriz simétrica, definida positiva e esparsa. Observa-se que os coeficientes nulos ultrapassam 50% do total de coeficientes da matriz.

## 5.3 - ALGORITMOS DE SOLUÇÃO PADRÃO:

### 5.3.1 - Definição:

Algoritmos de solução padrão são algoritmos de solução geral, ou seja, não tiram proveito das características particulares do sistema de equações, tais como:

- a) simetria do sistema;
- b) esparsidade do sistema;
- c) sistema definido positivo.

Determinados algoritmos de solução padrão chegam, às vezes, até mesmo a considerar algumas destas particularidades, mas não todas ao mesmo tempo, tornando-os pouco eficientes, principalmente quando aplicados a grandes sistemas.

Esta eficiência refere-se ao número exagerado e quase sempre desnecessário de operações aritméticas (adição, subtração, produto e divisão) e à não otimização do uso da memória do computador. Exemplificando, em se tratando de sistemas esparsos, não se justifica fazer operações aritméticas sobre os coeficientes nulos assim como armazená-los integralmente na memória do computador.

Pode-se, portanto, aumentar a eficiência dos algoritmos de solução padrão, reduzindo-se o número de operações aritméticas executadas e através de uma melhor utilização da memória do computador, levando-se em conta as características particulares do sistema de equações

(simétrico, definido positivo e esparso).

Pode-se dividir esses algoritmos em dois grandes grupos, quais sejam:

- a) algoritmos de solução direta;
- b) algoritmos de solução iterativa.

#### 5.3.1.1 - Algoritmos de Solução Direta:

São aqueles que, a menos de erros de arredondamento, dão a solução do sistema de equações, depois de um número finito de operações aritméticas.

Pode-se citar os seguintes algoritmos de solução direta comumente mais conhecidos da comunidade fotogramétrica:

- . Método de Eliminação de Gauss;
- . Método de Gauss-Jordan;
- . Método da Inversa;
- . Método de Cholesky;
- . Método de Banachiewicz;
- . etc.

Na sua maioria, os algoritmos de solução direta baseiam-se em processos de eliminação, diagonalização ou decomposição.

O processo de eliminação consiste basicamente em

transformar o sistema original (sistema quadrado) num sistema equivalente triangular superior - processo este denominado eliminação avante - e posteriormente resolvê-lo por retro-substituição.

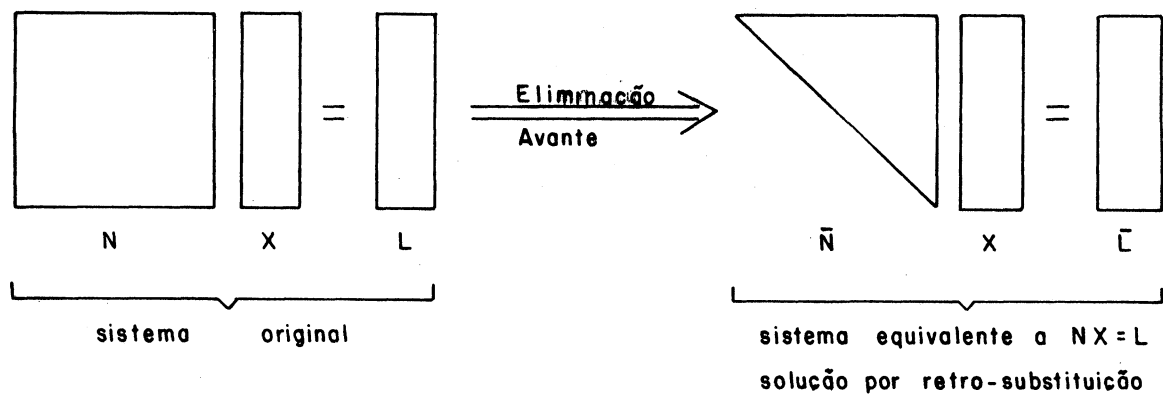


Fig. 18 Esquema do Processo de Eliminação

O processo de diagonalização consiste basicamente em transformar o sistema original (sistema quadrado) num sistema equivalente diagonalizado e posteriormente resolvê-lo diretamente.

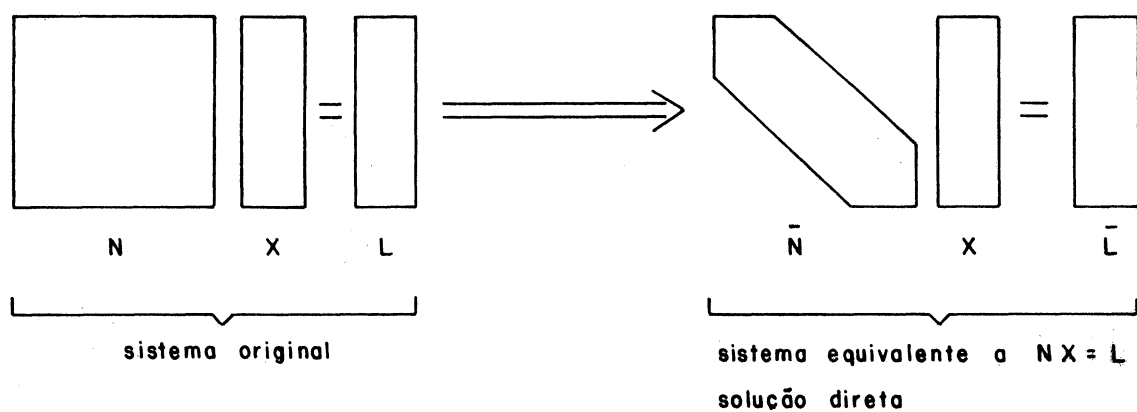


Fig. 19 Esquema do Processo de Diagonalização

O processo de decomposição consiste basicamente em decompor a matriz original (matriz quadrada) num produto de duas matrizes, triangular inferior e triangular superior, e posteriormente resolver dois sistemas triangulares.

Matricialmente fica:

$$\begin{matrix} N & X & = & L \\ n & n & & n \end{matrix} \quad (5.3.1.1 - 1)$$

Passo 1: decomposição

$$N = E^T R \quad (5.3.1.1 - 2)$$

onde:

$E, R$  matrizes triangulares superiores

$E^T$  matriz transposta de  $E$

Assim, o sistema (5.3.1.1. - 1) fica:

$$E^T R X = L \quad (5.3.1.1 - 3)$$

com:  $R X = V \quad (5.3.1.1 - 4)$

Passo 2: solução sistema triangular - substituição avante

$$E^T V = L, \text{ calcula-se } V \quad (5.3.1.1 - 5)$$

Passo 3: solução sistema triangular - retro-substituição

$$R X = V, \text{ calcula-se } X \text{ (solução)} \quad (5.3.1.1 - 6)$$

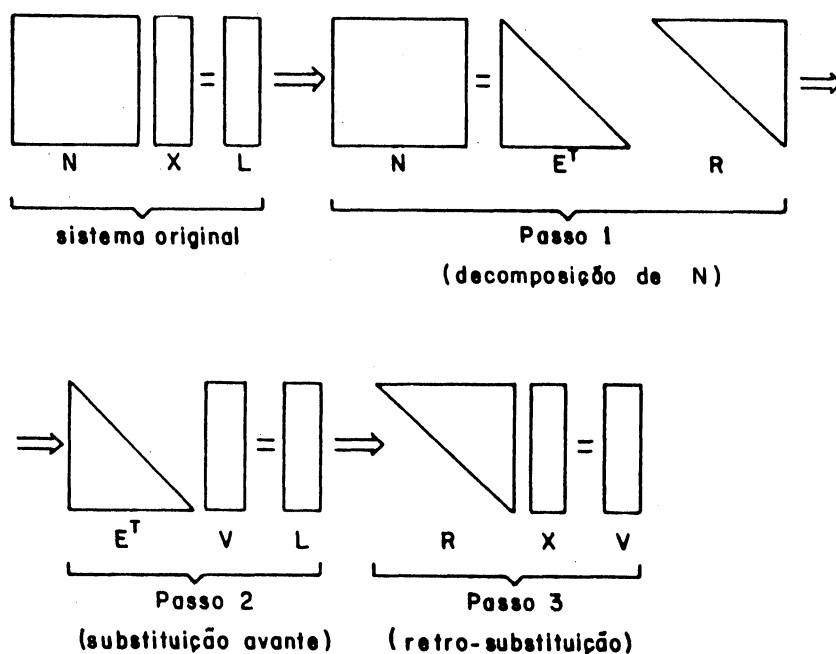


Fig. 20 Esquema do Processo de Decomposição

As vantagens do processo de decomposição são sua melhor adequação aos algoritmos específicos para matrizes simétricas e esparsas e a não necessidade de se operar na matriz  $N$  para resolver o sistema (5.3.1.1 - 1) para um novo valor de  $L$ , bastando resolver apenas os sistemas (5.3.1.1 - 5) e (5.3.1.1 - 6).

#### 5.3.1.2 - Algoritmos de Solução Iterativa:

Algoritmos de solução iterativa envolvem a seleção de um valor inicial para a incógnita  $x$  - digamos:  $x^{(0)}$  - e a determinação de uma sequência de resultados,  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ ,



tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = x$ .

Teoricamente, quando se usa um algoritmos de solução iterativa, tem-se um número infinito de operações aritméticas para se obter a solução de  $x$ , mas, na prática, limita-se o número de iterações fixando um valor aceitável para  $x$ , pela comparação de  $x^{(i)}$  com  $x^{(i-1)}$ .

Pode-se citar os seguintes algoritmos de solução iterativa comumente mais conhecidos da comunidade fotogramétrica:

- . Método de Jacobi;
- . Método de Gauss-Seidel;
- . Método de Relaxação;
- . Método de Sobre-Relaxação;
- . Método de Sobre-Relaxação Sucessivas em Bloco;
- . Método dos Gradientes Conjugados;
- . etc.

#### 5.4 - MÉTODOS DIRETOS X MÉTODOS ITERATIVOS:

A nível de programação computacional este questionamento sempre ocorrerá. Não se trata, evidentemente, de se escolher um tipo de solução e dentro deste um algoritmo que mais se simpatizar com ele, e sim, tomar uma série de decisões racionais que envolva antes de qualquer coisa a classe de problema a solucionar, e também, as características do computador utilizado. Trata-se, portanto, de uma decisão difícil e exigirá

do programador um conhecimento prévio dos algoritmos utilizáveis, assim como do computador disponível. Desta forma, é propósito deste trabalho dar uma pequena orientação neste sentido. Para maiores detalhes veja /11/.

Os seguintes fatores devem ser considerados quando se compara os dois métodos para solucionar sistemas de equações (raciocínio análogo vale para inversão de matrizes):

- 1) confiabilidade dos resultados - estabilidade com respeito aos erros de arredondamento;
- 2) tempo requerido - processamento;
- 3) aplicabilidade - tipo de problema em si;
- 4) exigência de memória do computador;
- 5) análise sobre sistemas mal-condicionados;
- 6) facilidade de programação.

O quadro da página seguinte apresenta características gerais entre os métodos diretos e iterativos. Na sua essência ele é verdadeiro, mas suas afirmações não são totalmente corretas para todos os algoritmos conhecidos.

Um estudo criterioso dos fatores apontados anteriormente devem ser bem analisados. Quando se pretende fazer um estudo estatístico do problema proposto, através da obtenção da matriz variância-covariância dos parâmetros, utiliza-se com certeza, o método da inversa (método direto).

QUADRO COMPARATIVO		
MÉTODOS DIRETOS X MÉTODOS ITERATIVOS		
DENOMINAÇÃO	MÉTODOS DIRETOS	MÉTODOS ITERATIVOS
Programação	menor facilidade	maior facilidade
Nº mem. neces.	maior	menor
Tempo proces.	menor	maior - até convergência
Nº oper. arit.	menor	maior - até convergência
Matriz coefic.	gera modificações	não gera modificações
Erros arredon.	maior efeito	menor efeito
Nº iterações	1	várias - até converg.
Singularidade do sistema	assinalam	um sistema singular pode não convergir; não dá informação do que ocorre na realidade
Valor inicial da incógnita	não depende	convergência ocorrerá mais rápida em função de bons valores

Quadro 2 - Comparação entre Métodos Diretos e  
Métodos Iterativos

## 5.5 - O MÉTODO DE CROUT MODIFICADO

### 5.5.1 - Introdução:

Considerando-se:

- 1 - a análise das características mencionadas no item (5.4);
- 2 - que se dispõe de um micro-computador de apenas 512 kbytes de memória primária e memória winchester (disco rígido) de 30 Mbytes, aliado a uma velocidade de processamento relativamente baixa;

- 3- que na Fototriangulação Analítica a matriz dos coeficientes frequentemente não "cabe" na memória primária do computador - esta consideração é muito mais acentuada quando se trata de micro-computadores;
- 4 - que se deve escolher um algoritmo de solução eficiente e, na medida do possível, pouco complexo quando comparado à sua eficiência;
- 5 - que se deve escolher um método de armazenamento para os coeficientes, que explore a memória secundária, que no caso em pauta tem uma capacidade bem maior que a memória principal.

Optou-se, neste trabalho, pelo uso do Algoritmo de Crout (Método de Crout, Redução de Crout) modificado para explorar o método de armazenamento dos coeficientes, em memória secundária - por isso o nome de Método de Crout Modificado. Este método de armazenamento é denominado Padrão Vetor Perfil por Colunas ( skyline , profile ); com este método é possível armazenar os coeficientes na forma compactada, não se armazenando a maior parte dos coeficientes nulos.

O Método de Crout é um algoritmo baseado no processo de decomposição e bastante utilizado para resolver grandes sistemas estruturais em Engenharia Civil.

A idéia, portanto, é adaptar este algoritmo para

resolver os sistemas lineares oriundos do ajustamento, pelo M.M.Q., na Fototriangulação Analítica.

A adaptação torna-se possível, pois os sistemas lineares obtidos em cálculo estrutural, análise estática, têm características similares às dos sistemas lineares oriundas do ajustamento, pelo M.M.Q.. Estas características são: esparsidade do sistema, simetria do sistema, sistema definido positivo.

O Método de Crout Modificado tem as seguintes potencialidades:

- 1 - leva em conta a simetria do sistema de equações;
- 2 - utiliza a linha skyline para matrizes esparsas;
- 3 - utiliza acesso unidimensional na memória;
- 4 - armazena apenas os coeficientes necessários.

As considerações a seguir são baseados em /12/.

### 5.5.2 - Definições:

#### 5.5.2.1 - Coeficientes Nulos Externos e Internos:

Coeficientes nulos internos são coeficientes nulos que possuem coeficientes não-nulos acima, na mesma coluna na parte triangular superior, ou à esquerda, na mesma linha na parte triangular inferior. Os coeficientes nulos externos são coeficientes nulos que não satisfazem a definição acima.

Por exemplo, na Fig. 21 abaixo, temos:

- coeficientes nulos internos:  $n_{24}$ ,  $n_{42}$ ,  $n_{45}$ ,  $n_{46}$   
 $n_{54}$ ,  $n_{64}$
- coeficientes nulos externos: o restante

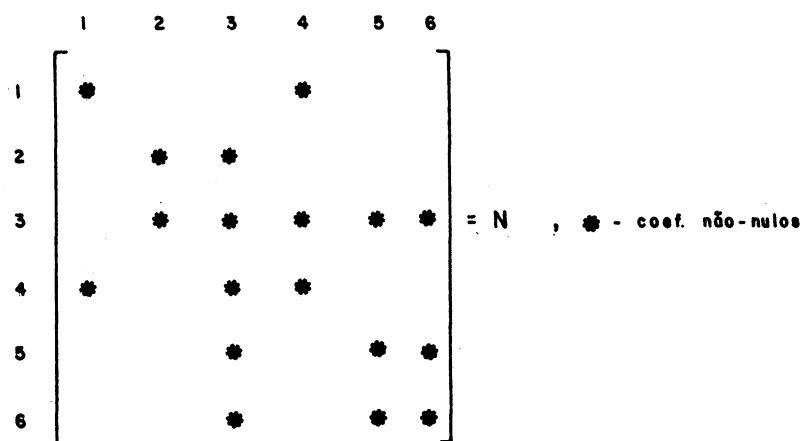


Fig. 21 Coeficientes Nulos Externos e Internos

A caracterização desses coeficientes nulos é extremamente importante. No processo de decomposição os coeficientes nulos internos, frequentemente, serão modificados em não-nulos, durante o processo, o que não ocorre com os coeficientes nulos externos, que permanecerão sempre nulos.

O Método de Crout Modificado explora apenas os coeficientes nulos externos, ou seja, não efetua operações aritméticas sobre estes coeficientes.

#### 5.5.2.2 - Matriz Esparsa com Padrão Banda:

A distribuição dos coeficientes não-nulos na matriz

esparsa é denominado padrão. No Padrão Banda os coeficientes não-nulos estão situados em uma faixa diagonal, cujo centro é a diagonal principal. Na matriz da página anterior (Fig. 21) o Padrão Banda fica (veja Fig. 22)»

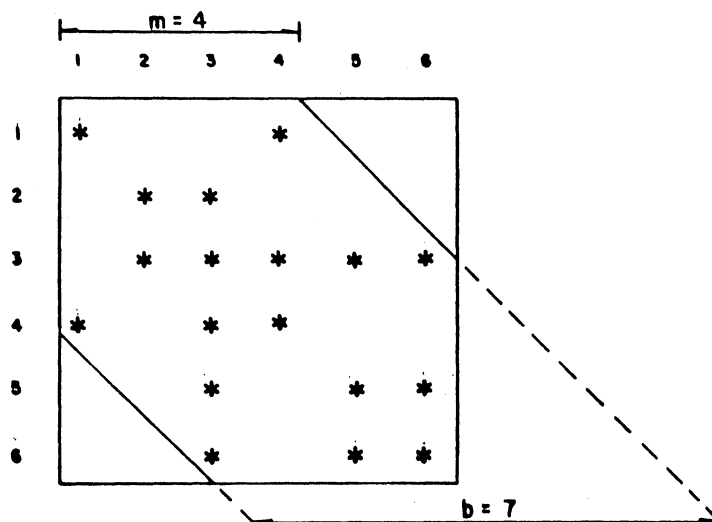


Fig. 22 Matriz Esparsa com Padrão Banda

onde #

m semibanda (metade superior da banda + diagonal principal);

b largura da banda ( $b = 2m - 1$ ).

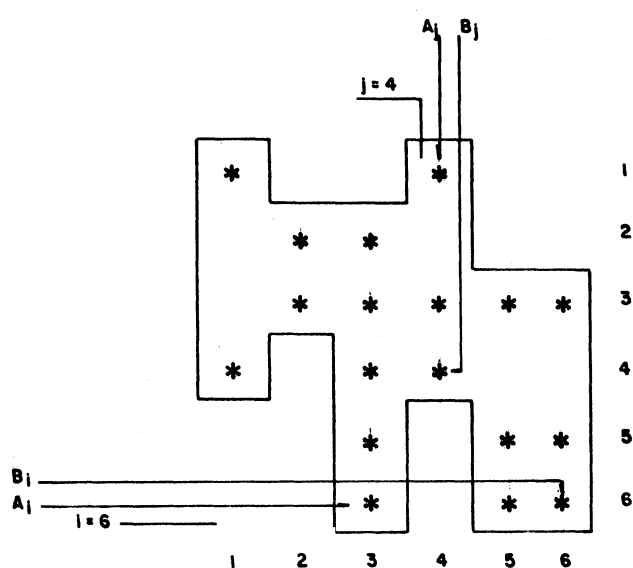
A banda adotada para a Fig. 22 é igual a 7, que corresponde à mínima largura que deixa somente coeficientes nulos fora da banda.

Pode-se observar que este padrão, embora simples, faz com que dentro da banda ocorra simultaneamente coeficientes nulos internos e externos; isto pode ser evitado utilizando-se o padrão a seguir.

### 5.5.2.3 - Matriz Esparsa com Padrão Vetor Perfil por Colunas:

É um padrão mais flexível que o Padrão Banda por desconsiderar os coeficientes nulos externos. É obtido por colunas, sendo que cada coluna inicia na 1ª linha com coeficiente não nulo e termina na última linha com coeficiente não-nulo.

A Fig. 23 mostra claramente a potencialidade deste padrão (refere-se à matriz da Fig. 21).



$A_j$  - indica a 1ª linha com coeficiente não-nulo da coluna  $j$

$B_j$  - indica a última linha com coeficiente não-nulo da coluna  $j$

$A_i$  - indica a 1ª coluna com coeficiente não-nulo da linha  $i$

$B_i$  - indica a última coluna com coeficiente não-nulo da linha  $i$

Fig. 23 Matriz Esparsa com Padrão Vetor Perfil Por

Colunas (linha "skyline")



Este padrão adequa-se melhor ao método de decomposição, desde que se opere as expressões - veja item 5.5.3.3 - percorrendo as matrizes por colunas. É o padrão utilizado na Redução de Crout Modificado.

O número de coeficientes a armazenar na Fig. 21 é 36, na Fig. 22 é 30 e na Fig. 23 é 23.

### 5.5.3 - Expressões do Processo de Decomposição:

#### 5.5.3.1 - Matriz Quadrada Qualquer:

Para solução da equação (5.3.2.1 - 1), pág. 64, adotando-se a diagonal de E unitária ( $e_{ii} = 1$ ), temos as expressões:

a) Decomposição de N ( $N = E^T R$ )

$$r_{ij} = n_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{kj} e_{ki} ; \quad j = i, i+1, \dots, n \quad (5.5.3.1 - 1)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left( n_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} e_{kj} \right) ; \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad (5.5.3.1 - 2)$$

onde:

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Para a 1ª linha ( $i = 1$ ), os somatórios das expressões (5.5.3.1 - 1) e (5.5.3.1 - 2) não são realizados.

Nas Fig. 24 e Fig. 25 abaixo indicam-se os esquemas de aplicação das expressões (5.5.3.1 - 1) e (5.5.3.1 - 2), onde mostra-se os coeficientes envolvidos no cálculo de  $r_{ij}$  e  $e_{ij}$ , para um valor de  $k$ ; as setas indicam a variação do índice  $k$  no somatório.

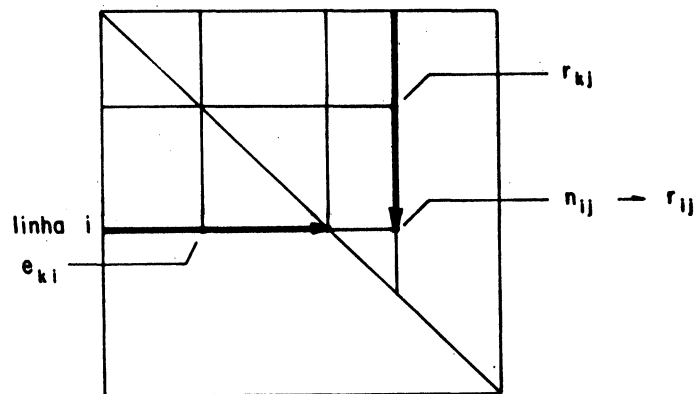


Fig. 24 Decomposição  $E^T R$  - Modificação do Coeficiente  $n_{ij}$

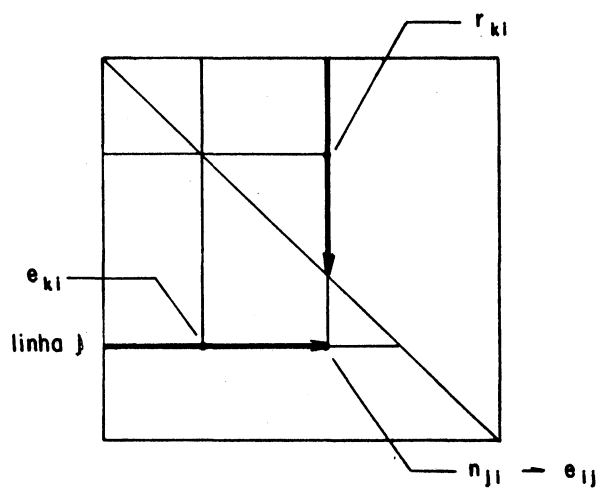


Fig. 25 Decomposição  $E^T R$  - Modificação do Coeficiente  $n_{ji}$

b) Substituição Avante ( $E^T V = L$ )

$$v_i = l_i \quad (5.5.3.1 - 3)$$

$$v_i = l_i - \sum_{k=1}^{i-1} v_k e_{ki} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (5.5.3.1 - 4)$$

c) Retro-Substituição ( $RX = V$ )

$$x_n = v_n / r_{nn} \quad (5.5.3.1 - 5)$$

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}} (v_i - \sum_{k=i+1}^n r_{ik} x_k) \quad ; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (5.5.3.1 - 6)$$

#### 5.5.3.2 - Matriz Esparsa:

Se a matriz dos coeficientes é esparsa podemos observar que, ao utilizarmos as expressões anteriores, uma série de operações aritméticas são desnecessárias, por resultarem em zeros.

Como o padrão de distribuição dos coeficientes não-nulos da matriz dos coeficientes em Fototriangulação Analítica é conhecido, há de se considerar e tirar proveito desta situação.

O Padrão Vetor Perfil por Colunas é de uso recomendado. Para sua aplicação a sequência de operações nas expressões (5.5.3.1 - 1) a (5.5.3.1 - 6) deve ser modificada, percorrendo-se as colunas da matriz dos coeficientes.

As operações aritméticas, para cada coluna  $j$ , iniciam nas linhas indicadas pelo perfil  $(A_j)$ .

As expressões abaixo apresentadas são em substituições às (5.5.3.1 - 1) a (5.5.3.1 - 6).

a) Decomposição de  $N$  ( $N = E^T R$ )

$$r_{ij} = n_{ij} - \sum_{k=k_0}^{i-1} r_{kj} e_{ki} \quad ; \quad i = A_j + 1, A_j + 2, \dots, j$$

(5.5.3.2 - 1)

$$e_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left( n_{ji} - \sum_{k=k_0}^{i-1} r_{ki} e_{kj} \right) \quad ; \quad i = A_j + 1, A_j + 2, \dots, j - 1$$

(5.5.3.2 - 2)

para  $j = 2, 3, \dots, n$

onde:

$k_0 =$  maior valor entre  $A_i$  e  $A_j$

Observa-se que os elementos das matrizes  $E$  e  $R$  são calculados apenas a partir do segundo não nulo de cada coluna, pois o primeiro não-nulo permanecerá inalterado.

b) Substituição Avante ( $E^T V = L$ )

$$v_i = l_i \quad (5.5.3.2 - 3)$$

$$v_i = l_i - \sum_{k=k_0}^{i-1} v_k e_{ki} \quad ; \quad i = A_1 + 1, A_1 + 2, \dots, n$$

(5.5.3.2 - 4)

onde:

$k_0 =$  maior valor entre  $A_1$  e  $A_i$

$A_1 = i \in$  linha não nula do vetor  $L$

c) Retro-Substituição ( $RX = V$ )

$$x_j = v_j / r_{jj} \quad (5.5.3.2 - 5)$$

$$v_i = v_i - r_{ij} x_j ; \quad i = A_j, A_j + 1, \dots, J - 1 \quad (5.5.3.2 - 6)$$

para  $j = n, n - 1, \dots, 1$

Quando  $A_j = j$  as expressões (5.5.3.2 - 1), (5.5.3.2 - 2) e (5.5.3.2 - 6) não são realizadas.

Quando  $A_i = i$  os somatórios das expressões (5.5.3.2 - 1), (5.5.3.2 - 2) e (5.5.3.2 - 4) não são realizados.

Houve uma alteração na sequência das operações, percorrendo-se aqui, as matrizes E e R por colunas (índice j).

Os somatórios nestas expressões somente iniciam quando os 2 fatores do produto são coeficientes diferentes de zero.

Quanto ao armazenamento, somente os coeficientes não-nulos e nulos internos são necessários, não se armazenando os coeficientes nulos externos.

### 5.5.3.3 - Matriz Esparsa Simétrica:

No método de decomposição, quando a matriz N é simétrica, esta pode ser decomposta em uma tripla

decomposição. Assim:

$$N = E^T D E \quad (5.5.3.3 - 1)$$

onde:

D matriz diagonal - contém a diagonal da matriz R

E matriz triangular superior de diagonal unitária

$$(e_{ii} = 1)$$

Pode-se, portanto, modificar as expressões (5.5.3.2 - 1) e (5.5.3.2 - 2), fazendo:

$$d_{jj} = r_{jj} \quad (5.5.3.3 - 2)$$

$$e_{ij} = d_{ii}^{-1} r_{ij} \quad (5.5.3.3 - 3)$$

As expressões da tripla decomposição ficam, modificando as expressões (5.5.3.2 - 1) e (5.5.3.2 - 2):

$$d_{jj} = n_{jj} - \sum_{k=A_j}^{j-1} e_{kj} d_{kk} e_{kj} \quad (5.5.3.3 - 4)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left( n_{ij} - \sum_{k=k_0}^{j-1} e_{ki} d_{kk} e_{kj} \right) ; i = A_j + 1, \dots, j - 1 \quad (5.5.3.3 - 5)$$

para  $j = 2, 3, \dots, n$

onde:

$k_0$  = maior valor entre  $A_i$  e  $A_j$

Percorre-se, assim, a matriz E por colunas e sua obtenção é feita utilizando apenas os coeficientes da parte triangular superior da matriz N.

Devido a duplo produto no somatório das expressões (5.5.3.3 - 4) e (5.5.3.3 - 5) não se recomenda o seu uso direto. Modifica-se, pois, estas expressões, realizando a divisão por  $d_{ii}$  na (5.5.3.3 - 5) apenas durante o cálculo de  $d_{jj}$ , na expressão (5.5.3.3 - 4). Obtém-se, desta forma, as expressões do Método de Crout Modificado.

a) Decomposição de N ( $N = E^T D E$ )

$$n_{ij}^{(i-1)} = n_{ij} - \sum_{k=k_0}^{i-1} e_{ki} n_{kj}^{(k-1)} ; \quad i = A_j + 1, A_j + 2, \dots, j - 1$$

(5.5.3.3 - 6)

onde  $k_0 =$  maior valor entre  $A_i$  e  $A_j$ ; para  $j = 2, 3, \dots, n$

$$d_{jj} = n_{jj} - \sum_{k=A_j}^{j-1} n_{kj}^{(k-1)} e_{kj}$$

(5.5.3.3 - 7)

$$\text{onde } e_{kj} = n_{kj}^{(k-1)} / d_{kk} ; \text{ para } j = 2, 3, \dots, n$$

(5.5.3.3 - 8)

quando:

- $A_j = j$  a expressão (5.5.3.3 - 6) não é realizada
- $A_i = i$  o somatório da expressão (5.5.3.3 - 6) não é realizado
- $A_j = j$  o somatório da expressão (5.5.3.3 - 7) não é realizado

b) Substituição Avante ( $E^T V = L$ )

$$v_1 = 1, \quad (5.5.3.3 - 9)$$

$$v_j = 1_j - \sum_{k=k_0}^{j-1} v_k e_{kj} \quad ; \quad j = A1 + 1, \dots, n \quad (5.5.3.3 - 10)$$

onde  $k_0 =$  maior valor entre  $A1$  e  $Aj$

quando  $A = A$  o somatório da expressão (5.5.3.3 - 10) não é realizado.

c) Retro-Substituição (DEX = V)

$$x_j = v_j / d_{jj} \quad ; \quad j = A1, A1 + 1, \dots, n \quad (5.5.3.3 - 11)$$

$$x_i = x_i - e_{ij} x_j \quad ; \quad i = Aj, Aj + 1, \dots, j - 1 \quad (5.5.3.3 - 12)$$

para  $j = n, n-1, \dots, 1$

quando  $A = A$  a expressão (5.5.3.3 - 12) não é realizado.

No caso de tripla decomposição, fazendo-se  $e_{ii} = 1$  a matriz E será a mesma do caso esparsa e D (matriz diagonal) conterá a diagonal de R (caso esparsa).

Os elementos da diagonal de D são calculados a partir do segundo, pois o primeiro permanecerá inalterado.

#### 5.5.4 - Número de Operações Aritméticas no Processo de Solução:

O número de operações aritméticas é parâmetro de comparação para verificar a eficiência de algoritmos. A contagem dessas operações normalmente é feita apenas em termo de produtos, pois divisões pouco ocorrem e somas e subtrações são realizadas muito mais rapidamente pelo computador.



O quadro a seguir mostra as expressões que calculam o número de operações aritméticas (produtos) realizadas no Processo de Solução apresentados no item 5.5.3, além de outros não mencionados.

MATRIZ	PASSOS			
	DECOMPOSIÇÃO (1)	SUBSTITUIÇÃO AVANTE (2)	RETRO-SUBSTITUIÇÃO (3)	TOTAL
Matriz Quadrada Qualquer	$n^3/3 - n^2/2 + n/6$	$n^2/2 - n/2$	$n^2/2 - n/2$	$n^3/3 + n^2/2 - 5n/6$
Matriz Quadrada Simétrica	$n^3/6 - n/6$	$n^2/2 - n/2$	$n^2/2 - n/2$	$n^3/6 + n^2 - 7n/6$
Matriz Banda, com $k = m/n$	$(m-1)^2(n-m) +$ $n^3/3 - n^2/2 + n/6$	$nm - m^2/2 - n + m/2$	$nm - m^2/2 - n + m/2$	$nm^2 - 2m^3/3 + m^2/2 + m/6 - n$ ou $n^3(k^2 - 2k^3/3) + n^2k^2/2 +$ $+n(k/6 - 1)$
Matriz Simétrica Banda (Re- dução de Crout) $k = m/n$	$n(m-1)(n-m)/2 +$ $n^3/6 - m/6$	$nm - m^2/2 - n + m/2$	$nm - m^2/2 - n + m/2$	$nm^2/2 + 3nm/2 - m^3/3 - m^2/2 +$ $+5m/6 - 2n$ ou $n^3(k^2/2 - k^3/3) + n^2(3k/2 - k^2/2) +$ $+n(5k/6 - 2)$
Matriz Simétrica com Vetor Perfil por Colunas (Redução de Crout Modifica- do	$n(n+1) - 3A_1/2 - A_1^2/2 -$ $-A_1/2 - \sum_{i=2}^n \max(A_i, A_1)$ $-\sum_{j=1}^n [A_j(A_j+1)/2 +$ $+\sum_{i=A_j+1}^{j+2} \max(A_i, A_j)]$	onde $A_1$ é a primeira linha não nula do vetor independente	$n(n+1)/2 - \sum_{j=1}^n A_j$	$((1)+(2)+(3))$

Quadro 3 - Nº de Operações Aritméticas no

Processo de Solução

## 5.6 - ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES:

### 5.6.1 - Uso da Memória do Computador:

As unidades de armazenamento - memória - de um computador, dividem-se em:

- . memória principal (interna ou primária);
- . memórias secundárias (auxiliares).

Estas unidades têm dois propósitos, quais sejam:

- 1º) conter os programas que controlam as operações do computador - sistema operacional, programa compilador, etc;
- 2º) armazenar os dados (entrada, resultados parciais, saída) que serão manipuladas pelo mesmo.

A memória principal possibilita uma capacidade de registro e recuperação - **retrieval** - de dados extremamente rápidos, da ordem de alguns nano-segundos. Uma instrução, assim como os dados, para serem executados, tem que estar armazenados na memória principal.

As memórias secundárias (discos e/ou fitas magnéticas) são unidades que permitem uma capacidade para aquisição e recuperação de dados a uma velocidade não tão elevada quanto a memória principal, da ordem de alguns mili-segundos, e são utilizados para guardar grandes volumes de informações.

Na solução de grandes sistemas a matriz dos coeficientes das equações normais não pode ser armazenada totalmente na memória principal do computador. Torna-se,

assim, imprescindível o uso da memória secundária para o armazenamento destes coeficientes, a menos que o programa compilador disponha de um mecanismo de memória virtual.

Entende-se por memória virtual a técnica de manipulação na memória principal, permitindo-se que dados e instruções de acesso menos frequentes sejam removidos para localização mais remota, para armazenamento, enquanto outros dados e instruções tomam seus lugares. Amplia a utilização da memória, tornando-a comparável a grandes processadores que não possuem esta capacidade.

Considerando-se a matriz dos coeficientes simétrica, com padrão de esparsidade conhecido e de acordo com o Algoritmo de Crout Modificado combinado com o Padrão Vetor Perfil por Colunas, é suficiente armazenar apenas os coeficientes da parte triangular superior e apenas aqueles que são não-nulos e os nulos que se tornam não-nulos durante o processo de solução, ou seja, os coeficientes nulos internos.

#### 5.6.2 - Armazenamento em Memória Secundária:

A diferença no tempo de processamento, para a solução de grandes sistemas de equações, será, em parte, devido à transferência de dados entre as memórias (principal e secundária).

Usou-se o esquema de sub-divisão em blocos por

colunas (veja Fig. 28, pág. 93) para gerenciar os dados em memória. O tamanho do bloco é fixado em função da memória principal disponível, portanto, o número de colunas existente em cada bloco é variável e o tamanho do problema analisado é limitado a que pelo menos dois blocos estejam na memória principal ao mesmo tempo.

Os blocos são armazenados através do esquema de armazenamento compactado por colunas, arranjo uni-dimensional (veja Fig. 26, pág. 88 e Quadro 4, pág. 88).

A eficiência na transferência de dados depende de dois aspectos a serem analisados:

- 1º) a forma como se projeta o algoritmo de solução;
- 2º) a forma de acesso aos arquivos em memória secundária.

Para o esquema de sub-divisão em blocos, o 1º item diz respeito a como se opera com os blocos nas operações sobre a matriz dos coeficientes e na solução das equações. Assim, a memória principal disponível para a matriz é separada em duas partes iguais; os blocos da matriz estão em arquivo na memória secundária. Nas operações sobre a matriz sempre dois blocos estão na memória simultaneamente, um designado bloco principal e o outro bloco subordinado. Com dois blocos na memória as operações aritméticas são realizadas. O restante da memória é usado para o vetor independente. Desta forma, as operações são feitas

sucessivamente em todos os blocos.

Para o esquema de sub-divisão em blocos, o 2º item analisa a forma de acesso aos arquivos em memória secundária (direto ou sequencial). A escolha depende da sequência de operações de leitura e gravação sobre os dados, definida pelo algoritmo de solução. Adotou-se, aqui, acesso direto, exceto para os arquivos que realmente sejam acessados sequencialmente (veja Fig. 30, Fig. 31 e Fig. 32).

### 5.6.3 - Algoritmo de Solução

#### Armazenamento Compactado:

#### 5.6.3.1 - Introdução:

A memória principal disponível é usada para conter 2 blocos da matriz dos coeficientes, durante a redução, e um bloco da matriz com os vários blocos do vetor independente necessários em cada passo, durante as substituições (substituição avante e retro-substituição).

Cada registro do arquivo contém um bloco da matriz com os coeficientes armazenados na forma compactado por colunas e, na parte final do registro, os endereços dos coeficientes da diagonal de cada coluna (veja Fig. 28, pág. 93 e Fig. 29, pág. 94).

#### 5.6.3.2 - Montagem da Matriz dos Coeficientes:

A montagem é feita através do cálculo e do armazenamento na memória de cada coeficiente, não-nulo e nulo interno, da matriz.

Para o esquema de armazenamento compactado por colunas, um arranjo uni-dimensional é utilizado. As colunas são armazenadas em sequência, a partir da primeira e apenas os coeficientes não-nulos e nulos internos, de acordo com o esquema de Linha de Perfil por Colunas. A matriz dos coeficientes pode ser montada através da expressão abaixo obtendo-se a posição de  $n_{ij}$ ,  $i \leq j$

$$\text{posição de } n_{ij} = i - j + \sum_{k=1}^j R_k \quad (5.6.3.2 - 1)$$

onde#

$R_k$  é o número de coeficientes da coluna  $k$ , entre o primeiro não-nulo e o da diagonal principal (inclusive ambos).

Os valores  $R_k$  são iguais a  $k - A_k + 1$ , onde  $A_k = A_j$

O Quadro 5, da pág. 89, mostra um exemplo de aplicação da expressão (5.6.3.2 - 1) na matriz exemplo (Fig. 26).

### 5.6.3.3 - Apontamento dos Coeficientes no Arranjo Unidimensional#

O apontamento dos coeficientes é facilitado por um

conjunto de endereços que indicam a posição da diagonal principal de cada coluna. Estes valores são obtidos a partir dos  $R_k$ , por:

$$M_j = \sum_{k=1}^j R_k = \sum_{k=1}^j (k - A_k + 1) \quad (5.6.3.3 - 1)$$

O Quadro 6 mostra um exemplo de aplicação da expressão (5.6.3.3 - 1) na matriz exemplo (Fig. 26).

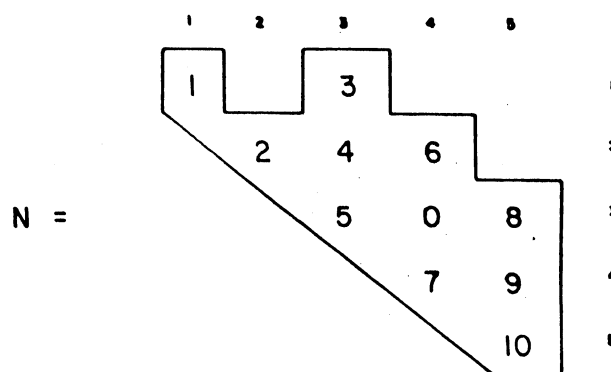


Fig. 26 Matriz Exemplo

Armazenamento Compactado da Matriz (Correspondência dos Coeficientes da Matriz no Vetor)											
Coe-	$n_{11}$	$n_{22}$	$n_{13}$	$n_{23}$	$n_{33}$	$n_{24}$	$n_{34}$	$n_{44}$	$n_{35}$	$n_{45}$	$n_{55}$
fici-											
entes	1	2	3	4	5	6	0	7	8	9	10
Posi-	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a
ções											

Quadro 4 - Armazenamento Compactado da Matriz Exemplo (Fig. 26)

Posição de $n_{ij}$ ( $n_{ij} = i - j + \sum_{k=1}^j R_k$ )			
COEF	$i - j$	$\sum_{k=1}^{R_k}$	Posição no Vetor
$n_{11}$	0	1	1
$n_{22}$	0	2	2
$n_{13}$	-2	5	3
$n_{23}$	-1	5	4
$n_{33}$	0	5	5
#	#	#	#
$n_{35}$	-2	11	9
$n_{45}$	-1	11	10
$n_{55}$	0	11	11

Quadro 5 - Posição de  $n_{ij}$  da Matriz Exemplo (Fig. 26)

Aplicação da Expressão (5.6.3.2. - 1)

Apontamento dos Coef. da D.P. ( $M_j = \sum R_k$ )			
Coef.	k	$R_k$	Posição no Vetor ( $\sum R_k$ )
$n_{11}$	1	1	1
$n_{22}$	2	1	2
$n_{33}$	3	3	5
$n_{44}$	4	3	8
$n_{55}$	5	3	11

Quadro 6 - Apontamento dos Coef. da Diagonal

Principal da Matriz Exemplo (Fig. 26)

Aplicação da Expressão (5.6.3.3. - 1)



#### 5.6.3.4 - Redução da Matriz dos Coeficientes:

Durante a redução da matriz, para a obtenção da matriz decomposta, tem-se, ao mesmo tempo na memória principal, dois blocos da matriz, quais sejam: o bloco principal e um bloco subordinado.

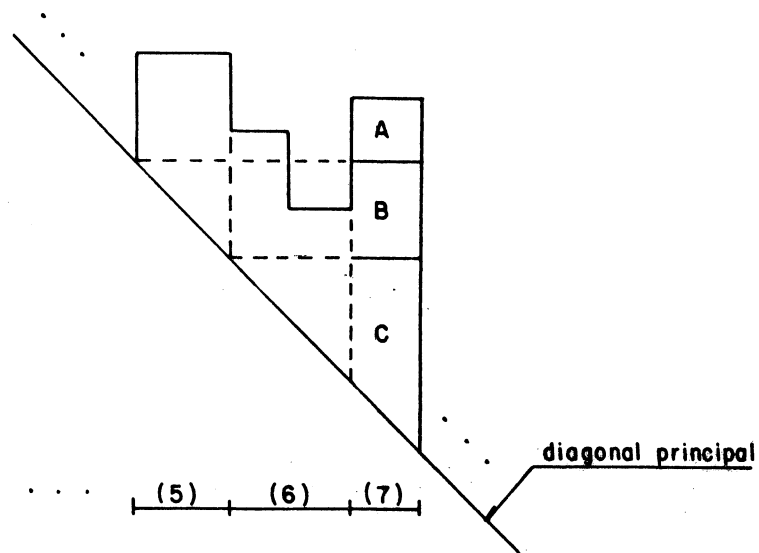
O bloco principal uma vez transferido para a memória principal, a começar pelo 1º bloco, somente retorna para arquivo após estar com todos os coeficientes modificados.

Com o bloco principal na memória principal, transfere-se para a 2ª parte da memória principal, sucessivamente, e um de cada vez, todos os blocos anteriores que causam modificações no bloco principal. Estes blocos são os blocos subordinados e podem ser determinados pela maior coluna que compõe o bloco principal, chamada de máxima altura efetiva. A máxima altura efetiva é obtida através dos endereços dos coeficientes da diagonal principal das colunas, através da expressão (5.6.3.3 - 1).

Na modificação dos coeficientes do bloco principal diversas regiões distintas são formadas no bloco. Os coeficientes de cada região são modificados:

- a) pelos coeficientes do bloco subordinado, diferente para cada região;
- b) pelos coeficientes das regiões acima;
- c) pelos coeficientes de sua própria região.

A Fig. 27 abaixo exemplifica o parágrafo anterior, onde se caracteriza o bloco (7) como sendo o principal.



**bloco principal: (7)**

**regiões: A - modificada devido ao bloco subordinado (5)**

**B - modificada devido ao bloco subordinado (6)**

**C - modificada devido as regiões A, B e C**

Fig. 27 Modificação dos Coeficientes do Bloco Principal

Assim, na modificação dos coeficientes do bloco principal, tem-se duas fases distintas de aplicação das expressões (5.5.3.3 - 6), (5.5.3.3 - 7) e (5.5.3.3 - 8):

1ª FASE: são modificadas as regiões que necessitam dos blocos subordinados; utiliza-se, para isto, a expressão (5.5.3.3 - 6);

2ª FASE: são modificadas as regiões que necessitam apenas do bloco principal; utiliza-se, para isto, as expressões (5.5.3.3 - 6), (5.5.3.3- 7) e (5.5.3.3 - 8).

Após a modificação de todos os coeficientes do bloco principal este é gravado num arquivo de acesso aleatório e os coeficientes da diagonal principal são gravados em um outro arquivo, auxiliar, também de acesso aleatório. Este arquivo auxiliar é criado pois a expressão (5.5.3.3 - 8) deve ser aplicada junto com a (5.5.3.3 - 7), reduzindo, assim, o número de transferência de dados, para a modificação dos coeficientes da diagonal principal.

Exemplificando, para a redução da matriz dos coeficientes, a seguinte situação é criada:

- 1) a matriz dos coeficientes é a da Fig. 28;
- 2) a memória principal disponível permite armazenar 60 coeficientes.

A memória principal disponível será dividida em 2 partes iguais, pois terá que conter, ao mesmo tempo, o bloco principal e um bloco subordinado a ele.

A matriz da Fig. 28 foi dividida em blocos e armazenada na forma compactada. Cada bloco dará origem a um registro no arquivo em memória secundária, de comprimento constante, equivalente à metade da memória disponível,

portanto, seu comprimento é 30..

Cada registro no arquivo conterà um bloco da matriz e, na parte final deste, os endereços da diagonal principal de cada coluna que compõe o bloco. A Fig. 29 ilustra esta situação..

O Quadro 7 mostra a indicação dos blocos subordinados a cada bloco principal, além de outras características.

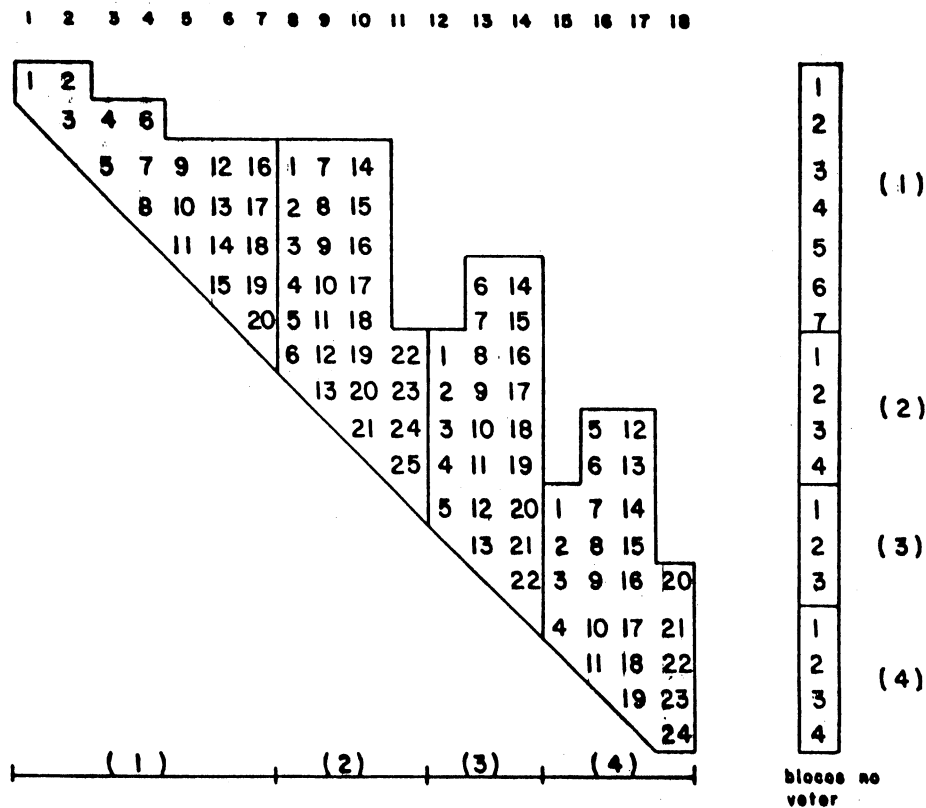


Fig. 28 Matriz dos Coeficientes

Divisão dos Blocos da Matriz

	1	2	3	...	...	28	29	30																										
(a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20					1	3	5	8	11	15	20			
(b)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					6	13	21	25	
(c)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22									15	13	22	
(d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24							4	11	19	24

(a) - registro 1 ( $N_1$ )

(b) - registro 2 ( $N_2$ )

(c) - registro 3 ( $N_3$ )

(d) - registro 4 ( $N_4$ )

Fig. 29 Registro dos Blocos no Arquivo

Bloco	Nº de Prin- cipal	Nº de Coefi- cientes no bloco	Nº de Endere- ços da Diag. Princ.	Comprim. do Registro	Nº de Colu- nas	Blocos Subor- dinados	Total de Colunas
1	1	20	7	30	7	-	7
2	1	25	4	30	4	1	11
3	1	22	3	30	3	1,2	14
4	1	24	4	30	4	2,3	11

Quadro 7 - Características dos Blocos da Matriz

O processo de transferência de dados com a divisão por blocos indicado na Fig. 28 está apresentado na Fig. 30. Cada operação de transferência dos dados é indicada por 3 dígitos: o 1º refere-se ao bloco principal e os outros dois ao número de sequência da operação.

Por exemplo, os passos abaixo são realizados para a redução do bloco N3:

PASSO 1: 301 - transfere N3 para a memória principal;

PASSO 2: 302 - transfere N1 reduzido ( $N_{1r}$ ) para a memória principal e realiza as

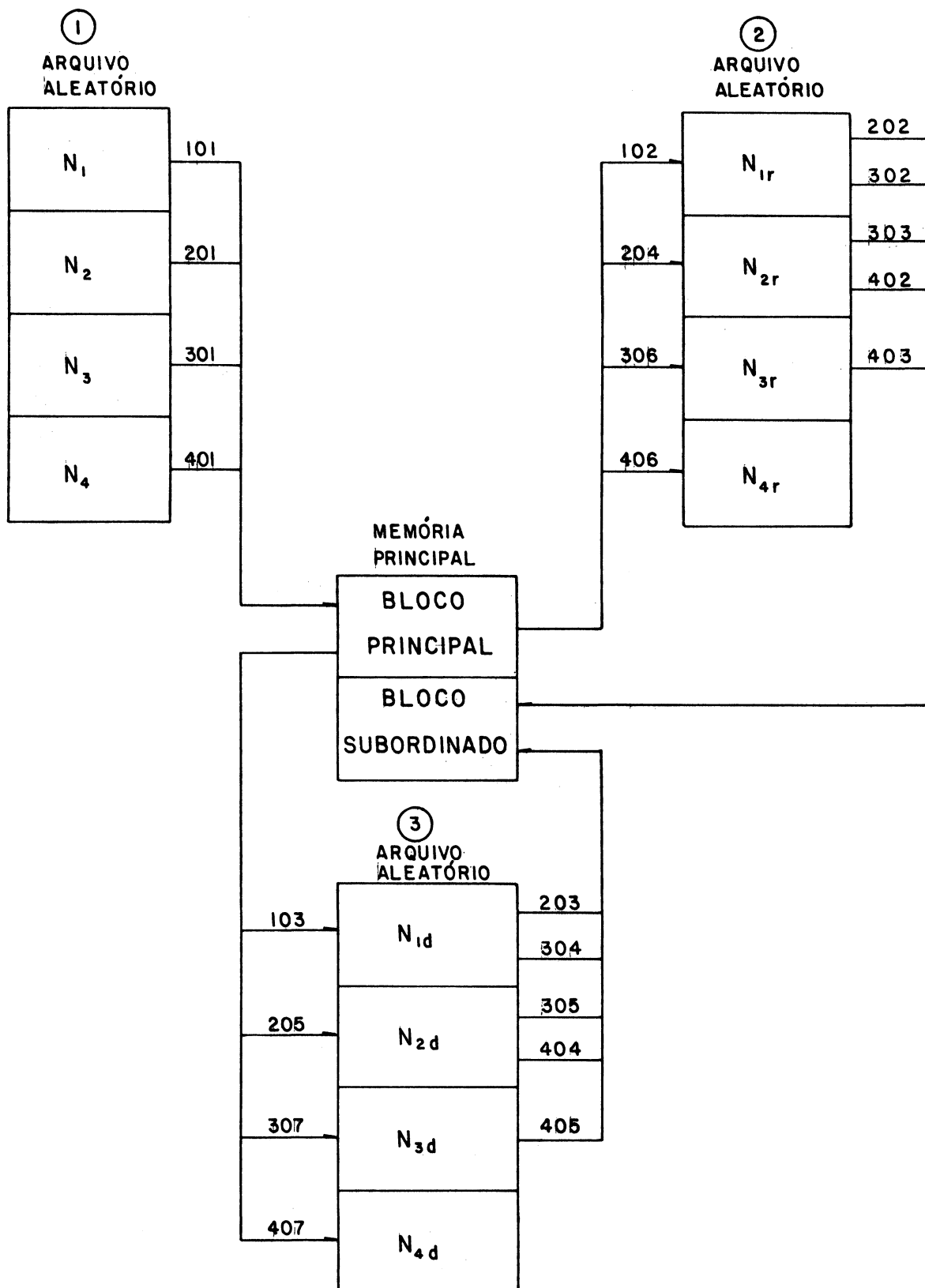


Fig 30 Operações de Transferência dos Dados  
 Redução da Matriz dos Coeficientes

operações necessárias;

PASSO 3: 303 - transfere  $N_2$  reduzido ( $N_{2r}$ ) para a memória principal e realiza as operações necessárias;

PASSO 4: 304 - transfere os coeficientes da diagonal de  $N_{1r}$  ( $N_{1d}$ ) para a memória principal e realiza as operações necessárias;

PASSO 5: 305 - transfere os coeficientes da diagonal de  $N_{2r}$  ( $N_{2d}$ ) para a memória principal e realiza as operações necessárias. O bloco  $N_3$  está reduzido;

PASSO 6: 306 - transfere  $N_3$  reduzido ( $N_{3r}$ ) para o arquivo (2);

PASSO 7: 307 - transfere os coeficientes da diagonal de  $N_{3r}$  ( $N_{3d}$ ) para o arquivo (3).

#### 5.6.3.5 - Substituição Avante:

Para o vetor independente, uma divisão em blocos equivalente à matriz dos coeficientes é adotado (veja Fig. 28 - Pág. 93).

Durante a substituição avante deve estar na memória principal o bloco principal do vetor e todos os seus subordinados, bem como o bloco da matriz dos coeficientes reduzida ( $N_r$ ), correspondente ao bloco principal do vetor. Nesta etapa utiliza-se as expressões (5.5.3.3 - 9) e 5.5.3.3 - 10).

O bloco da matriz reduzida (N<sub>r</sub>) ocupará metade da memória principal - parte (A) - e o restante será para os blocos do vetor independente - parte (B) - que serão introduzidos sequencialmente em posição subsequente ao bloco do vetor anterior. Se não houver espaço na memória - parte (B) - para transferir um novo bloco do vetor independente, o(s) bloco(s) do início é (são) eliminado(s) para que o novo bloco possa ser colocado na memória principal.

Por exemplo, os passos abaixo são realizados para a redução do bloco L3 (veja Fig. 31):

PASSO 1: (301) - transfere L3 - arquivo (2) - para a parte (B) da memória principal, em posição subsequente a L2;

PASSO 2: (302) - transfere N3 reduzido (N3<sub>r</sub>) - arquivo (1) - para a parte (A) da memória principal. A redução é feita utilizando (N3<sub>r</sub>) e os blocos do vetor já existente na memória e apenas os necessários (subordinados). O bloco L3 está \_reduzido;

PASSO 3: (303) - transfere L3 reduzido (L3<sub>r</sub>) para o arquivo (3).



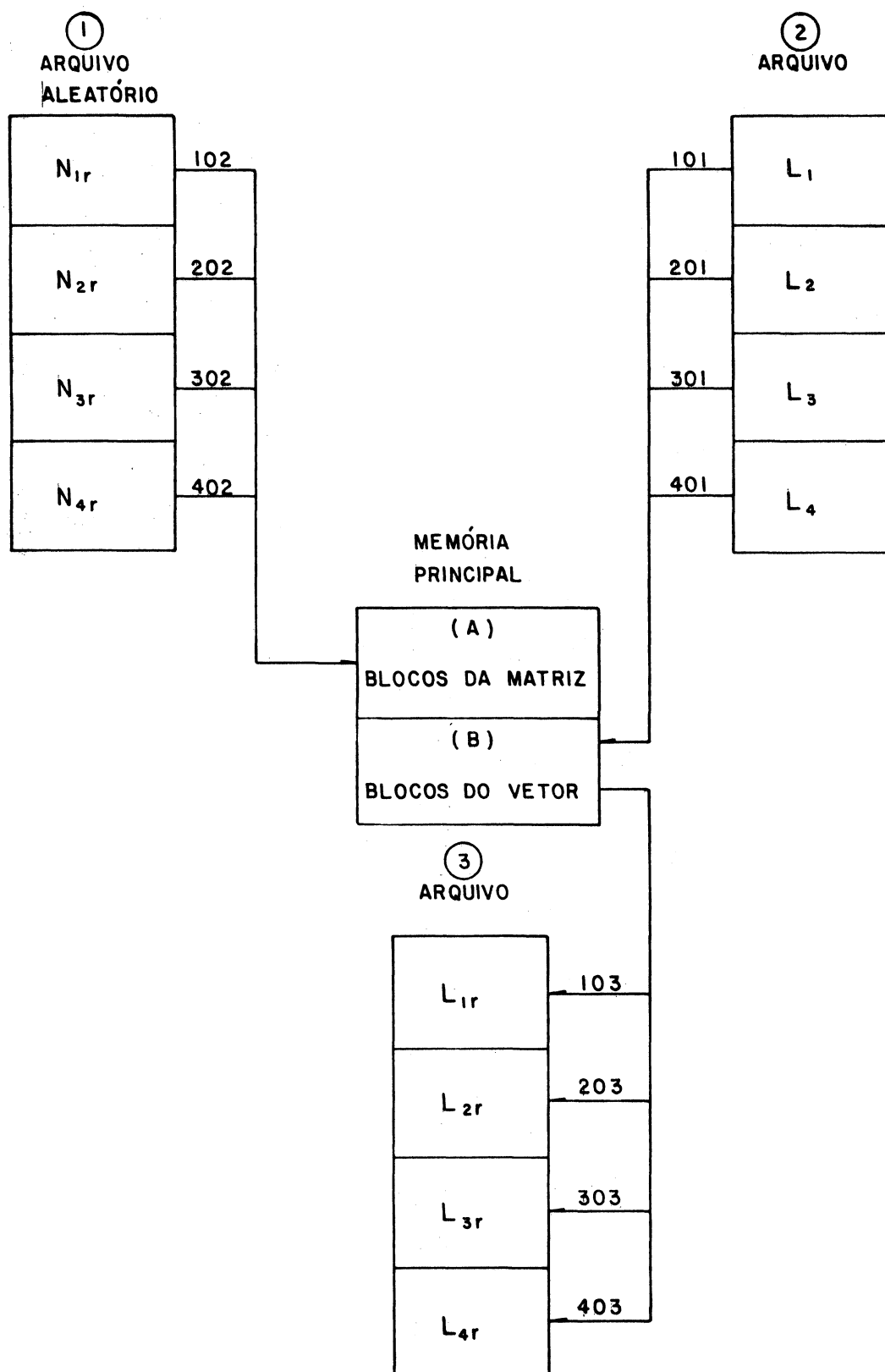


Fig. 31 Operações de Transferência dos Dados

Substituição Avante:

#### 5.6.3.6 - Retro-Substituição:

Após a substituição avante todos os coeficientes do vetor independente devem ser divididos pelos coeficientes da diagonal da mesma linha, conforme expressão (5.5.3.3 - 11). Isto é feito trazendo sucessivamente, e um por vez, os blocos do arquivo Nid (etapa de redução) e os blocos do arquivo Lir (etapa de substituição avante). A divisão é efetuada e os blocos do vetor são transferidos de volta ao arquivo Lir, a exceção do último que pode permanecer na memória, para iniciar a retro-substituição.

Durante a retro-substituição devem estar na memória principal o bloco principal do vetor e todos os seus blocos subordinados, além do bloco correspondente da matriz reduzida (Nir).

O esquema de ocupação da memória principal é similar ao da substituição avante, porém em ordem inversa. Nesta etapa utiliza-se a expressão (5.5.3.3 - 12).

A Fig. 32, da página seguinte, mostra-nos as operações de transferência dos dados para o sistema da Fig. 28 durante o processo de retro-substituição. O último bloco do vetor é assumido já estar na memória principal (L4r). As operações de transferência iniciam no bloco 4 e terminam no bloco 1 (ordem inversa).

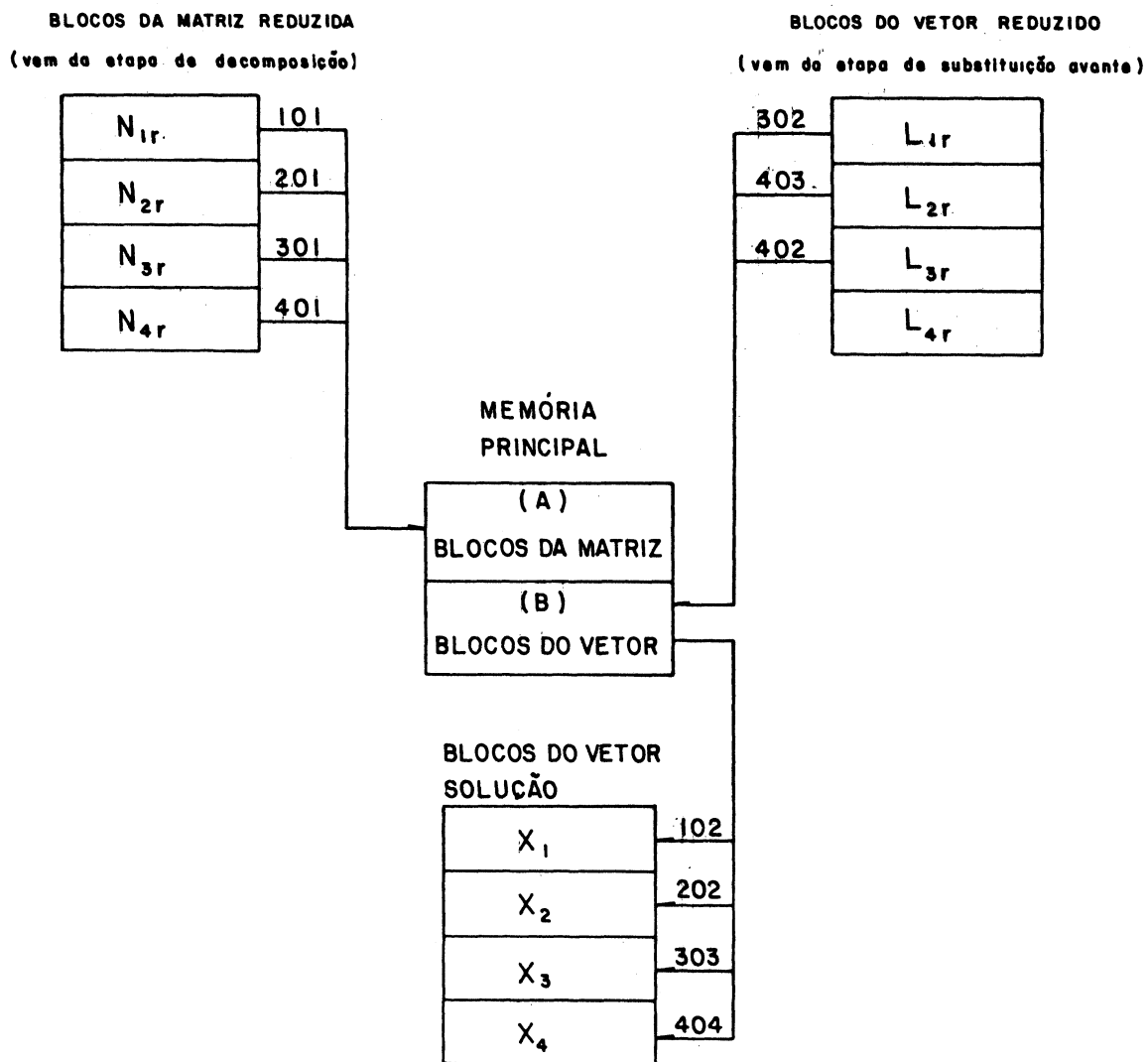


Fig. 32 Operação de Transferência de Dados

Retro Substituição

CAPÍTULO 6

PROGRAMA COMPUTACIONAL

OFF LINE DE

AEROTRIANGULACIÓN ANALÍTICA

## 6.1 - INTRODUÇÃO

Um programa computacional, **software**, de aerotriangulação é sem sombra de dúvidas, um trabalho bastante complexo. Esta complexidade está ligada não somente à extensão do programa em si, que terá várias centenas de linhas de declaração, como também à sua versatilidade e potencialidade.

Em se tratando do modo de processamento, este programa computacional pode ser dividido em /01/:

- processamento **off line**;
- processamento **on line**.

No processamento **off line** a etapa de coleta de dados, ou seja, as observações dos pontos fotogramétricos, é realizada independentemente do processamento. O inconveniente deste procedimento é que se faz o processamento simultâneo de todas as observações, dificultando sobremaneira a análise de detecção e localização dos inevitáveis erros grosseiros. A presença dos erros grosseiros aponta uma indesejável distribuição de erros sobre a aerotriangulação, deteriorando os resultados e a confiabilidade do método, além de aumentar consideravelmente o tempo e o custo do processamento computacional. Mesmo assim, o processamento **off line** ainda é o mais usado, devido, principalmente, ao grande número de aparelhos restituidores analógicos existentes e às dificuldades de obtenção de um restituidor analítico possuidor de **software** desenvolvido para as aerotriangulações **on line**.

Para maiores detalhes sobre detecção de erros grosseiros nas aerotriangulações veja /02/:

No processamento **on line**, utilizado nos restituidores analíticos, os dados são processados à medida que são observados (**real time**); isto permite que os dados sejam depurados e o processamento refeito, se necessário, sem grandes prejuízos de tempo e custo. Neste procedimento minimizam-se as dificuldades encontradas no processamento **off line** para detecção e localização de erros grosseiros, devido, principalmente, ao número de observações ser reduzido em cada fase do trabalho.

## 6.2 - APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

### 6.2.1 - Características:

O presente programa computacional utiliza o processamento **off line** e faz aerotriangulação analítica. As foto-coordenadas são numeradas, sequencialmente, de 1 a n.

O programa é constituído por quatro programas fontes, pois o compilador usado (FORTRAN 77 - Microsoft) permite programas fontes até 64 kbytes, impossibilitando, assim, um único programa fonte. Desta forma, temos:

- programa FOTOTRI.FOR;
- programa INPUT.FOR;
- programa BLOCK.FOR;
- programa OUTPUT.FOR.

As suas potencialidades a serem destacadas são as seguintes:

- 1) tipos de injunções possíveis: de posição, de distância e de orientação exterior;
- 2) ajustamento dos parâmetros pelo M.M.Q.;
- 3) cálculo matricial é vetorizado;
- 4) calcula fator de refração fotogramétrico;
- 5) calcula  $\chi^2$  (qui-quadrado);
- 6) calcula um número qualquer de parâmetros.

#### 6.2.2 - Esquema Geral:

O Quadro 8, apresentado na página seguinte, caracteriza o esquema geral do programa computacional *off line* de aerotriangulação, cuja listagem se encontra em poder do autor deste trabalho.

#### 6.2.3 - Programa FOTOTRI.FOR

O programa FOTOTRI.FOR é o programa principal; basicamente gerencia os outros programas.

Sua função é:

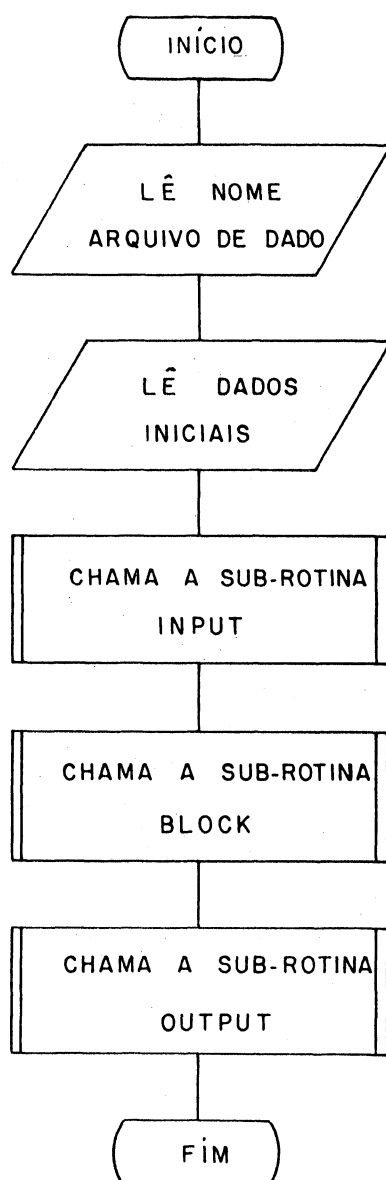
- 1) acessar o arquivo onde se encontra os dados (arquivo sequencial);
- 2) obter informações iniciais da faixa ou bloco, através do arquivo do item anterior;
- 3) acessar os outros programas ( INPUT,BLOCK,OUTPUT).

ESQUEMA GERAL	
I	INº de fotos
I	INº de pontos do terreno (a triangular + controle)
I	INº máximo de pontos numa única foto (a triangular + controle)
I	INº de pontos de controle, suas coordenadas e respectivas variâncias
IE	INº de estações com O.E. conhecidas, suas coordenadas e respectivas variâncias
IT	INº de distâncias conhecidas, seus valores e respectivas variâncias
IR	Observações de foto-coordenadas e suas variâncias
IA	Critério de convergência para coordenadas
I	Número máximo de iterações no ajustamento
I	Fator de variância a-priori
I	Distância focal calibrada e coordenadas do ponto principal
I	Formação da matriz $N$ e vetor $U$ , progressivamente, a partir das linhas da matriz $A$
IN	Introdução das injunções
IU	Cálculo das correções aos parâmetros
IL	Cálculo dos parâmetros ajustados
IE	Cálculo do fator de refração fotogramétrico
IO	Cálculo de $\chi^2$
IR	
IE	
IS	INº de iterações até a convergência
IU	Fator de variância a-posteriori e $\chi^2$
IL	INº de grau de liberdade
IT	Parâmetros ajustados e resíduos
IA	Fator de refração fotogramétrico e variância
ID	
IO	

Quadro 8 - Esquema Geral do Programa Computacional



## 6.2.3.1. Fluxograma de Operações#



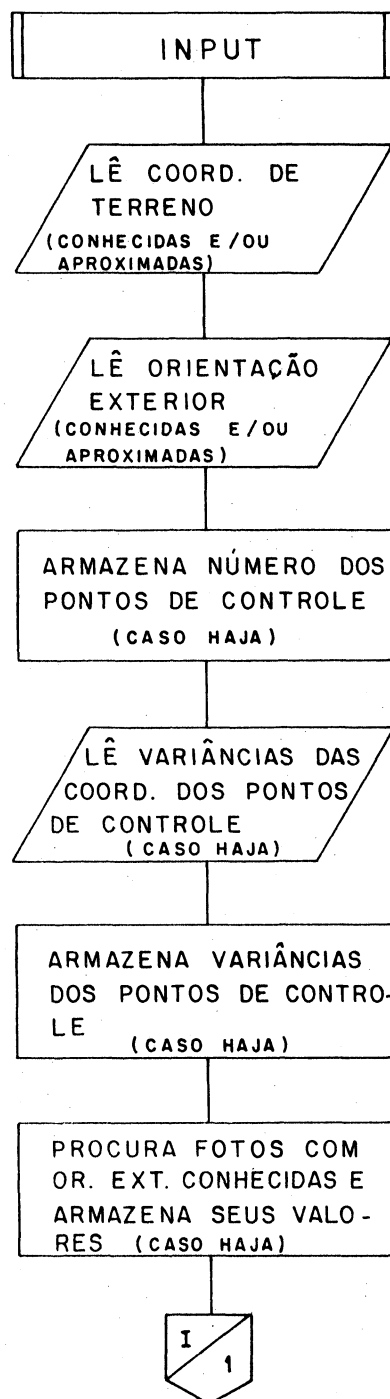
## 6.2.4 - Programa INPUT.FOR#

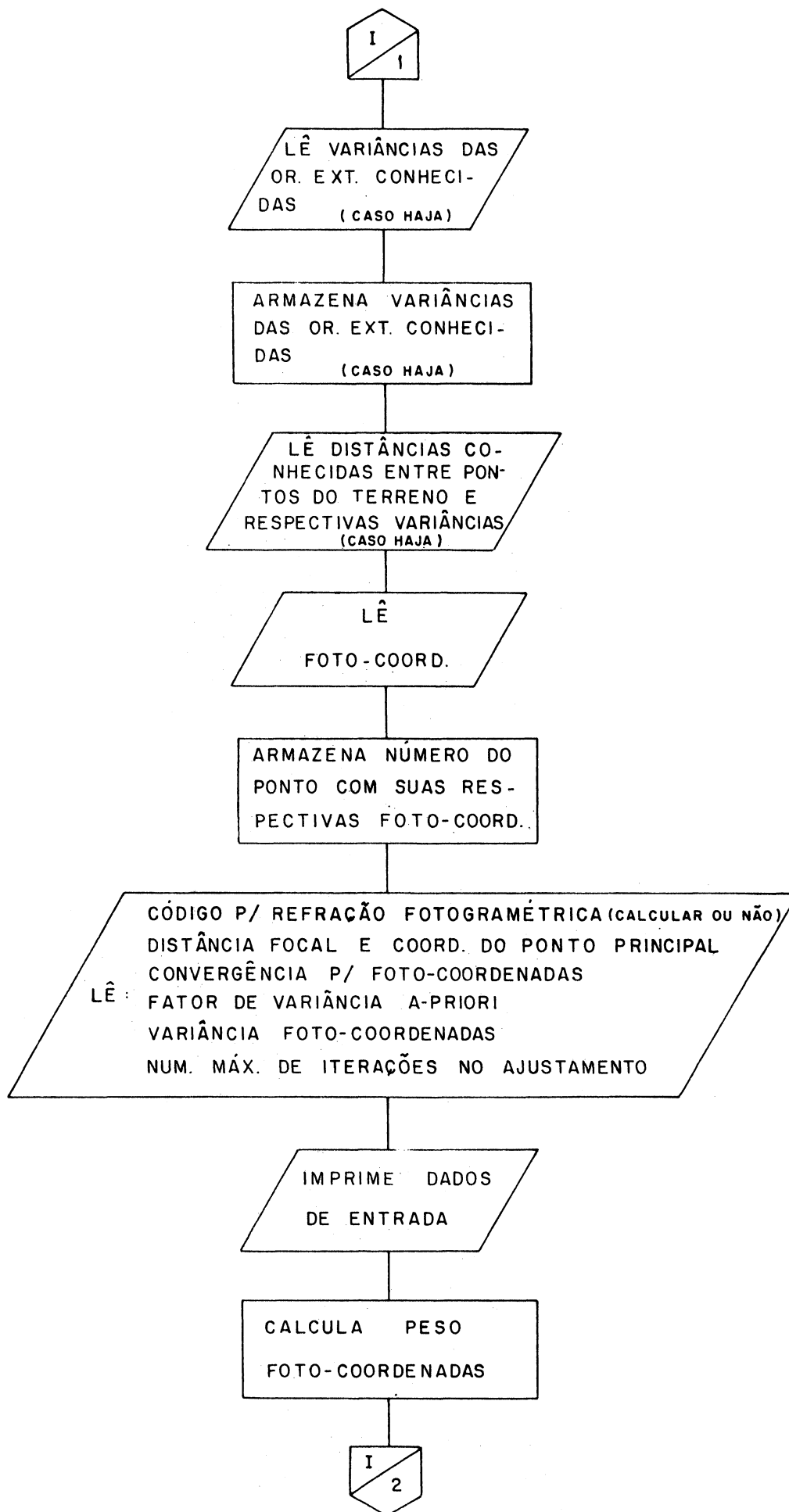
O programa INPUT.FOR faz#

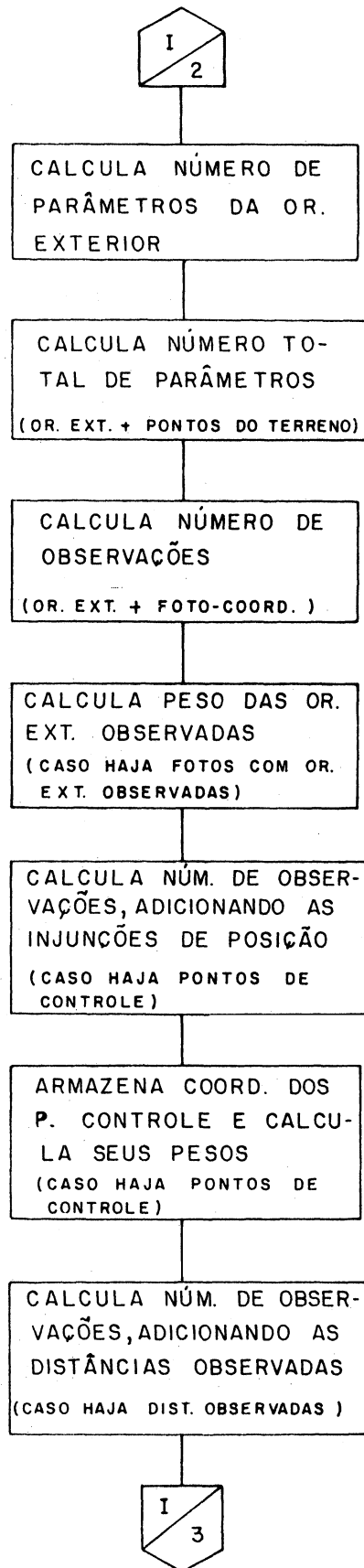
- 1) leitura dos dados restantes do arquivo definido no programa FOTOTRI;
- 2) imprime os dados de entrada;
- 3) calcula peso das foto-coordenadas, de O.E., de pontos de controle, de junções de distância;

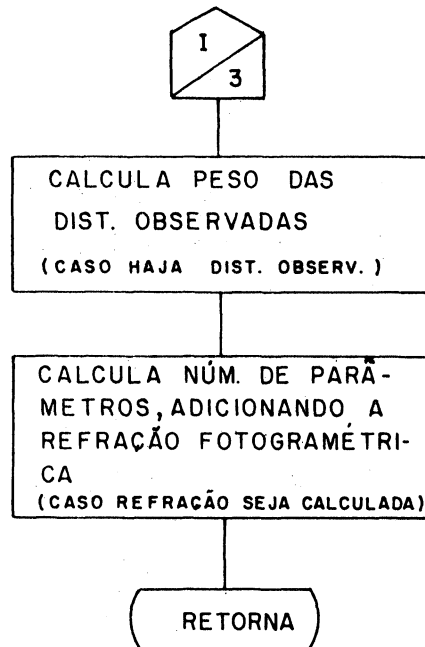
- 4) calcula número de parâmetros;
- 5) calcula número de observações.

#### 6.2.4.1. Fluxograma de Operações#









#### 6.2.5 - Programa BLOCK-FOR:

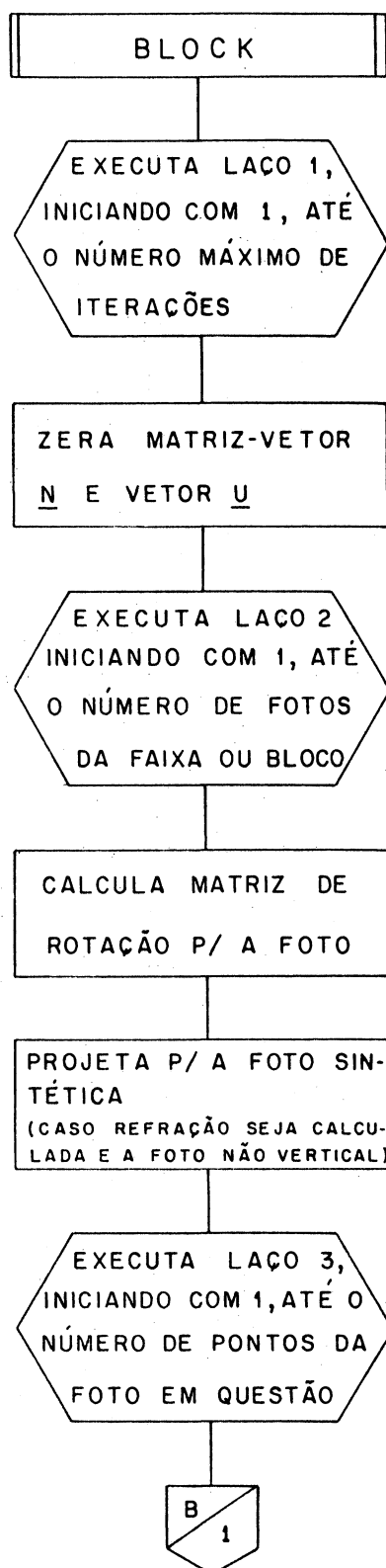
o programa BLOCK-FOR faz o ajustamento das observações, através do Modelo Combinado, obtendo, portanto, o vetor das correções aos parâmetros (vetor  $X$ ). Torna-se importante ressaltar que a matriz  $N$  - matriz dos coeficientes das equações normais - é obtida progressivamente através das linhas da matriz  $A$  ( $\partial F / \partial$  parâmetros), sem contudo esta última ser calculada. De maneira semelhante o vetor  $U$  é calculado.

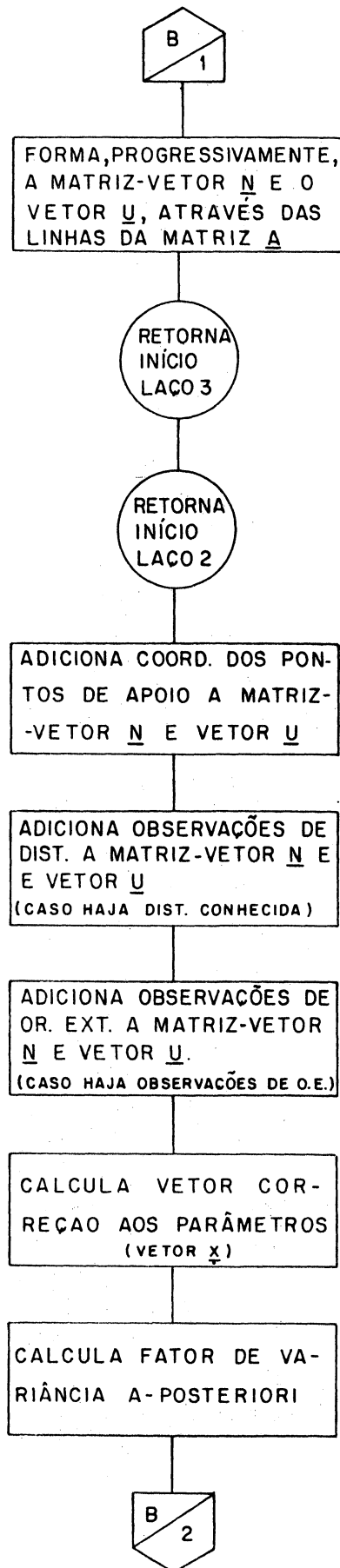
A matriz  $N$  é obtida na forma vetorizada, denominada de matriz-vetor, e apenas a parte triangular superior, diminuindo significativamente a quantidade de memórias para o seu armazenamento.

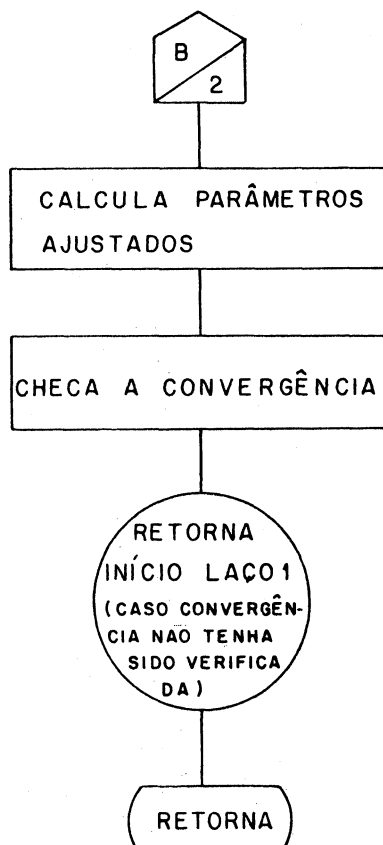
A solução do sistema linear resultante é feito através do Algoritmo de Crout Modificado, possibilitando

que se resolva sistemas com um número qualquer de equações.

#### 6.2.5.1. Fluxograma de Operações:







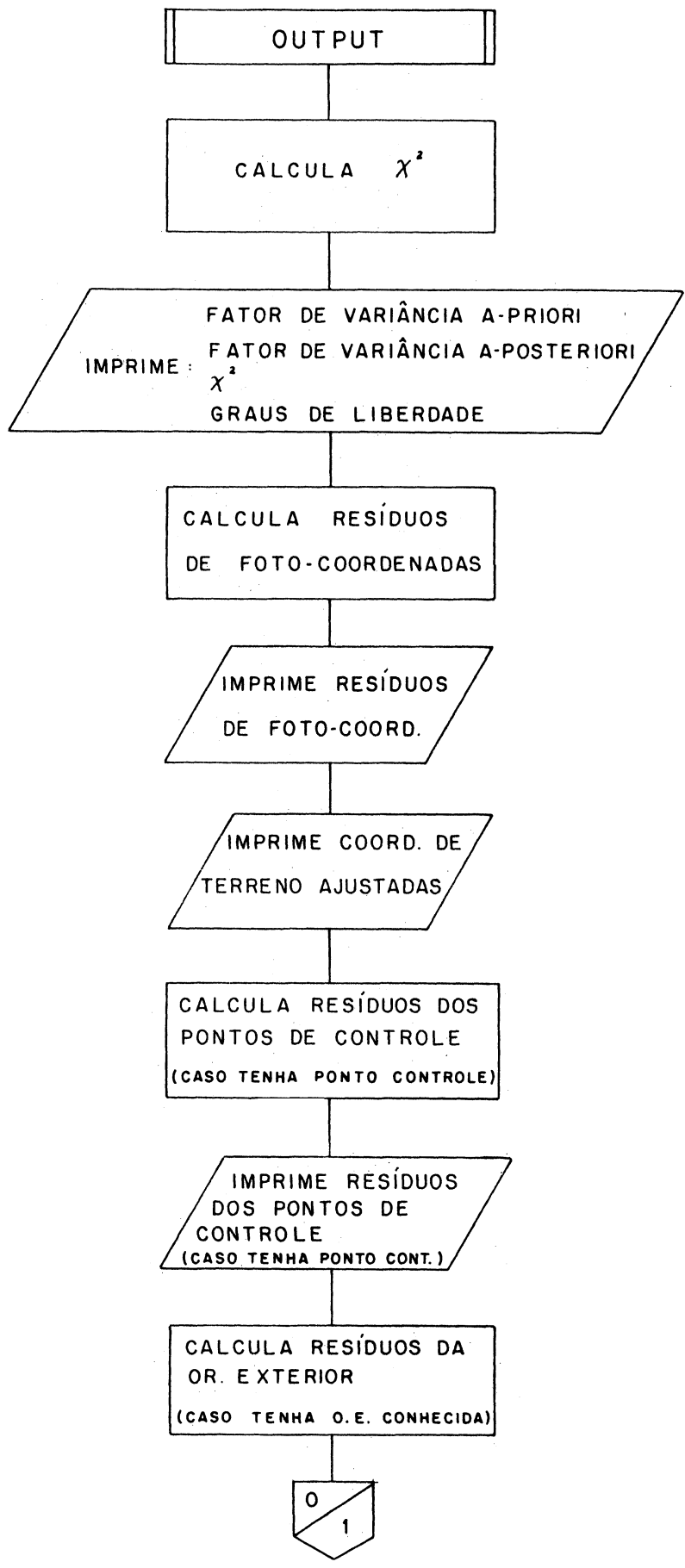
#### 6.2.6 - Programa OUTPUT.FOR

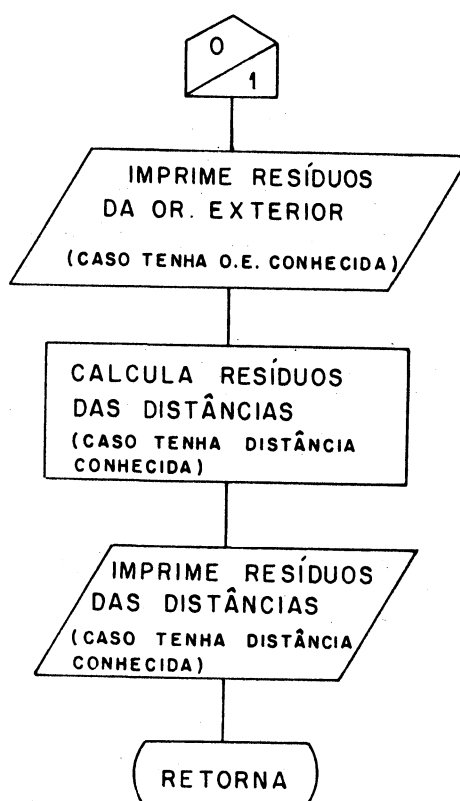
O programa OUTPUT.FOR calcula e imprime #

- 1)  $\chi^2$  (qui-quadrado);
- 2) graus de liberdade;
- 3) resíduos de foto-coordenadas;
- 4) resíduos dos parâmetros injuncionados;
- 5) os parâmetros ajustados (apenas imprime).

##### 6.2.6.1. Fluxograma de Operações#





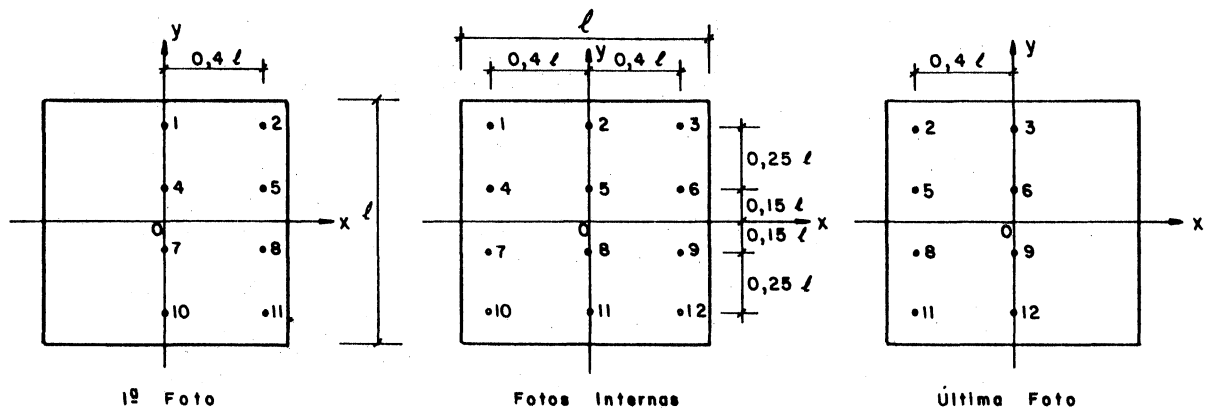


### 6.3 - EXPERIMENTOS

#### 6.3.1 - Introdução:

Com o objetivo de mostrar a capacidade do programa otimizado em comparação com o programa original criou-se um programa simulador de faixas. Os resultados deste programa simulador de faixas são compatíveis com os arquivos de dados usados pelo programa otimizado e programa original.

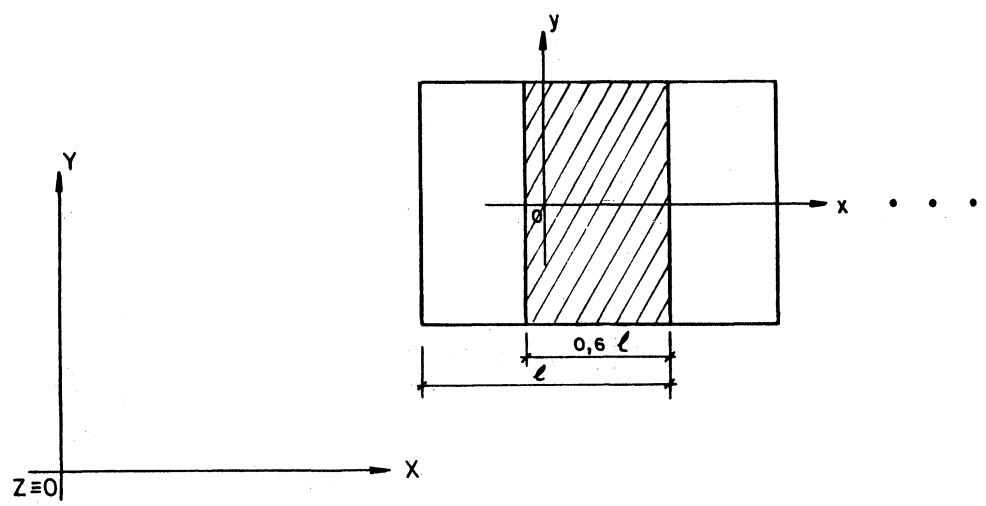
As características geométricas do programa simulador de faixas estão representados nas figuras a seguir.



$xoy$  - sistema fotográfico  
 numeração "cross-strip"

Fig 33 - Faixa Simulada

Geometria de Distribuição dos Pontos nas Fotos



$xoy$  - sistema fotográfico } sistemas paralelos ( $k=\phi=\omega= zero$ )  
 $XYZ$  - sistema referencial do terreno }

Fig 34 - Faixa Simulada - Superposição Longitudinal

Orientação da Faixa em Relação Referencial do Terreno

Cabe salientar que não se fez experimentos com dados reais pois não se coloca em discussão a análise dos resultados do programa. Rigorosamente os dois programas obtiveram os mesmos resultados.

### 6.3.2 - Resultados Comparativos:

Os parâmetros de comparação entre os dois programas foram:

- 1) memória ocupada por cada programa compilado; as variações ocorreram porque para cada caso os arrays foram re-dimensionados (veja Quadro 9);
- 2) tempo de processamento de cada programa.

O Quadro 9 abaixo apresenta os resultados obtidos

	NO DE FAIXA	NO DE FOTOS	NO DE PARÂMETROS	NO DE COEF. DA MATRIZ N	NO DE COEF. NÃO-NULOS DA MATRIZ N	TEMPO DE PROCESSAMENTO (1 ITERAÇÃO)	MEM. OCUP. PROG. FONTE (Kbytes)	MEM. OCUP. PROG. COMP. (Kbytes)
Progr. Original						29s	33,4	104,2
Progr. Otimizado	1	2	36	1.296	524 40%	6s	39,6	91,7
Progr. Original						4min 21s	33,4	178,4
Progr. Otimizado	2	5	90	8.100	1.694 21%	1min 14s	39,6	108,2
Progr. Original						34min 09s	33,4	483,1
Progr. Otimizado	3	12	216	46.656	5.332 12%	6min 52s	39,6	187,9
Progr. Original						--	33,4	NÃO COUBE
Progr. Otimizado	4	20	360	129.600	11.320 9%	28min 44s	39,6	445,6
Progr. Original						--	33,4	NÃO COUBE
Progr. Otimizado	5	60	1.080	1.166.400	70.440 6%	1h 37min 27s	39,6	445,6

Quadro 9 - Resultados Comparativos

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

## 7.1 - CONCLUSÕES:

O algoritmo de Crout Modificado, apresentado neste trabalho para resolver o sistema de equações normais oriunda do ajustamento das observações, mostrou-se bastante eficiente. Resolveu-se, assim, um problema crucial no desenvolvimento da Fototriangulação Analítica nacional, ou seja, não mais limitar-se o tamanho de blocos e conseqüentemente o número de parâmetros, devido à quantidade de memórias do computador..

O objetivo de se usar um micro-computador ao invés de um computador de porte grande também foi eficazmente contornado, pois se não houver preocupações quanto ao tempo de processamento, o micro-computador realizará esta tarefa sem problemas.

As faixas de nº 1, 2 e 3 (veja Quadro 9, pág. 117) mostra uma extraordinária diminuição no tempo de processamento do programa otimizado em relação o programa original. Evidentemente, isto deveu-se à implementação do algoritmo de Crout Modificado, que não realiza operações aritméticas desnecessárias. Nota-se, também, que o programa otimizado necessitou de muito menos memórias que o programa original, isto porque os arrays do programa otimizado foram vetorizados..

As faixas de nº 4 e 5 tiveram um tempo de processamento exageradamente maior que as faixas anteriores. Isto deveu-se às transferências de dados entre as memórias principal e secundária.

## 7.2 - RECOMENDAÇÕES:

É bem verdade que ainda falta algumas etapas para que o programa apresentado neste trabalho se torne comercial, mas dentro dos objetivos propostos a etapa de solução de grandes sistemas lineares oriundos do ajustamento das observações está resolvida.

Recomenda-se, portanto, que sejam realizadas pesquisas para implementação no programa acima citado as etapas que compõe um programa computacional, comercial, de Fototriangulação Analítica, quais sejam:

- 1) melhorar a entrada de dados;
- 2) detecção de erros grosseiros;
- 3) correção dos erros sistemáticos;
- 4) determinação das coordenadas aproximadas dos parâmetros;
- 5) transformações de sistemas de coordenadas;
- 6) estimativa da qualidade dos parâmetros através da matriz variância-covariância.

NOTAS DE REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS



## NOTAS DE REFERÊNCIAS

- /01/ LUGNANI, J.B. Introdução. In: \_\_\_\_\_ . Introdução à Fototriangulação. Edição Provisória. Curitiba. p.1-8.
- /02/ MITISHITA, E.A. Deteccão de Erros Grosseiros nas Aerotriangulações. Curitiba, 1986. 245 p. Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- /03/ MENDONÇA, F.J.B. Monitoração de Estruturas de Concreto com Fotogrametria à Curta Distância. Curitiba, 1984. 103 p. Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- /04/ LUGNANI, J. B. Fototriangulação Analítica. In : \_\_\_\_\_ . Introdução à Fototriangulação. Edição Provisória. Curitiba. p.73-94.
- /05/ ANDRADE, J. B. Comunicação Pessoal. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1984.
- /06/ .MERCHANT, J.B. Analytical Photogrammetry. Theory and practice, part II . Ohio, the Ohio State University, 1980.
- /07/ ANDRADE, J.B. Photogrammetric Refraction. Apêndice A. Ohio, 1977. 117 p. Tese, Doutorado, the Ohio

State University.

- /08/ GEMAEL, C. Referências Cartesianas Utilizados em Geodésia. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981.
- /09/ HELAVA, U.V. Analytical Plotter Basics, In: Analytical Plotter Symposium and Workshop of American Society of Photogrammetry, 1, Reston, VA. 1980.
- /10/ FRIEDMAN, S.J. Automation of Photogrammetric Process, In: American Society of Photogrammetric, Manual of Photogrammetry. 4 edição.
- /11/ WESTLAKE, J.R. Comments and Comparisons. In: ..... A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations. New York, John Wiley & Sons, 1968. p. 103-106.
- /12/ MENDES JR, R. Resposta Dinâmica Permanente com Solução em Memória Secundária na Linguagem LEBRE. Capítulo 3. Porto Alegre, 1985.153p. Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) ANDRADE, J. B. Photogrammetric Refraction. Ohio, 1977. 117p. Tese, Doutorado, the Ohio State University.
- (2) ANDRADE, Comunicação Pessoal. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1984.
- (3) CEREDA, R. L. D. & MALDONADO, J. C. Introdução ao FORTRAN 77 para Microcomputadores. São Paulo, McGraw-Hill, 1987. 211p.
- (4) EL-HAKIM, S. F. "Potentials and Limitations of Photogrammetry for Precision Surveying". Technical Report, Canadá, N963, May 1979.
- (5) FADDEEV, D. K. & FADDEEV, V. N. Computational Methods of Linear Algebra. San Francisco, W.H/ Freedman and Company, 1973. 621p.
- (6) FERREIRA, E. R. O Método de Cholesky Aplicado à Solução de Sistemas Esparsos. Curitiba, 1987, Seminário do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 37p.
- (7) FRIDMAN, S. J. Automation of Photogrammetric Process In: American Society of Photogrammetric, Manual of Photogrammetry. 4ª edição.

- (8) GEMAEL, C. Referenciais Cartesianas Utilizados em Geodésia. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981.
- (9) GHOSH, S.K. Phototriangulation. Lexington, Lexington Books, 1975. 214p.
- (10) HELAVA, U. V. Analytical Plotter Basics, In: Analytical Plotter Symposium and Workshop of American Society of Photogrammetry, 1, Reston, VA. 1980.
- (11) HEHL, M. E. Linguagem de Programação Estruturada: FORTRAN ZZ. São Paulo, McGraw-Hill, 1986. 511p.
- (12) LUGNANI, J.B. Introdução à Fototriangulação. Edição provisória. Curitiba. 134p.
- (13) MENDES JR, R. Resposta Permanente com Solução em Memória Secundária na Linguagem LEBRE. Capítulo 3. Porto Alegre, 1985. 153p. Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- (14) MENDONÇA, F. J. B. Monitoração de Estruturas de

- Concreto com Fotogrametria à Curta Distância.  
Curitiba, 1984 . 103p. dissertação, Mestrado,  
Universidade Federal do Paraná.
- (15) MERCHANT, D.C. Analytical Photogrammetry. Theory and Practice, part I. Ohio State University, 1979.
- (16) MERCHANT, D.C. Analytical Photogrammetry. Theory and Practice, part II. Ohio State University, 1980.
- (17) MITISHITA, E. A. Detecção de Erros Grosseiros nas Aerotriangulações. Curitiba, 1986. 245p.  
Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- (18) OLIVAS, M. A. de A. Calibração de Câmaras Fotogramétricas. Aplicações dos Métodos: Câmaras Convergentes e Campos Mistos. Curitiba, 1980.  
147p. Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- (19) ROSIER, F. A. Aerotriangulação Semi-Analítica: Ajustamento Simultâneo com Injunções Posicionais.  
Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso Pós Graduação e Ciências Geodésicas, 1983.
- (20) THOMPSON, E. H. An Introduction to the Algebra of Matrices With Some Applications. Toronto, the University of Toronto Press, 1969. 229p.

- (21) WESTLAKE, J.R. A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations. New York, Jhon Wiler & Sons, 1968. 171p.
- (22) WOLF, P. R. Elements of Photogrammetry. New York, McGraw-Hill Books Company, 1974. 162p.
- (23) WOOLNOUGH, D. F. "A Fictious Data Generator for Analytical Aerial Triangulation." Technical Report, Canada, n<sup>o</sup> 26. August 1973.