

ANTONIO SANTANA FERRAZ

ALTITUDES E GEOPOTENCIAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1982

ALTITUDES E GEOPOTENCIAL

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná

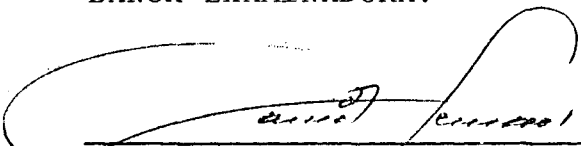
por

ANTONIO SANTANA FERRAZ, Engenheiro-Agrônomo


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1 9 8 2

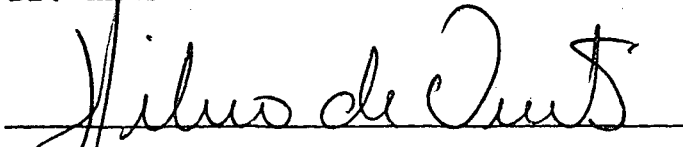
BANCA EXAMINADORA:



Dr. CAMIL GEMAEL - ORIENTADOR



Dr. HANS-PETER BAHR



M.Sc. SÍLVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS

SINOPSE

Neste trabalho, procuramos introduzir a utilização do geopotencial na obtenção de altitudes científicas de uma rede de nivelamento geométrico de precisão, situada na região metropolitana de Curitiba, onde as altitudes das Referências de Nível (RNs) foram obtidas pelo ajustamento dos desníveis brutos e pela correção do não-paralelismo das superfícies equipotenciais.

Calculamos os números geopotenciais daquelas RNs e, a partir deles, as altitudes de Helmert, Vignal e Baranov, bem como a altitude dinâmica.

Apresentamos ainda a altitude normal, segundo M.S. Molodensky e a altitude ortométrica "free-air", sugerida por Petr Vaníček.

SYNOPSIS

The geopotential numbers were used to determine differences in elevation of successive points on the Earth's surface in Curitiba City.

Originally, the height of the Bench Marks (B.M.) were obtained by adjusting the levelled heights and the correction of the convergence of equipotential surfaces.

The geopotential numbers of B.M. were found from the levelled height and the observed gravity values near benchmarks, and from them the Helmert's, Vignal's, Baranov's and the Dynamic Height were obtained.

It's also presented in this work the Normal Height and Orthometric Height Free-air suggested by M. S. Molodensky and Petr Vaniček respectively.

AGRADECIMENTOS

- ao Prof. Camil Gemael, pelo excelente trabalho de orientação;
- ao Prof. Álvaro Doubek, pelo auxílio na obtenção dos dados altimétricos e gravimétricos;
- ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Viçosa, pelo apoio dispensado;
- ao Eng.^o Cartógrafo Antonio José Berutti Vieira pelo auxílio no desenvolvimento e execução dos programas de computação utilizados no ajustamento da rede;
- a todos os colegas e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

A meus pais, Antonio e Izabel.

S U M Á R I O

	Página
Simbologia utilizada	ix
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO	
1.1 - Coordenadas geodésicas	01
1.2 - Coordenadas astronômicas	02
1.3 - Obtenção das coordenadas geodésicas	03
CAPÍTULO II	
POTENCIAL DA GRAVIDADE E NÚMERO GEOPOTENCIAL	
2.1 - Potencial da gravidade terrestre	06
2.2 - Superfícies equipotenciais e vertical	08
2.3 - Número geopotencial	11
2.4 - O campo da gravidade normal	14
2.4.1 - Gravidade acima do elipsóide	17
2.5 - Influência do valor de g no antigo "datum" Potsdam no cálculo dos números geopotenciais	19
2.6 - Erros no cálculo dos números geopotenciais	21
CAPÍTULO III	
NATUREZA E DISTRIBUIÇÃO DAS INFORMAÇÕES GRAVIMÉTRICAS PARA O CÁLCULO DOS NÚMEROS GEOPOTENCIAIS	
3.1 - Necessidade das informações gravimétricas	22
3.2 - Frequência das medições gravimétricas	25
CAPÍTULO IV	
CÁLCULO E AJUSTAMENTO DOS NÚMEROS GEOPOTENCIAIS DE UMA REDE DE NIVELAMENTO DE PRECISÃO	
4.1 - Cálculo das diferenças brutas de geopotencial	29
4.2 - Ajustamento das diferenças de número geopotencial ..	34
4.3 - Cálculo dos números geopotenciais dos pontos da rede	41

CAPÍTULO V

ALTITUDES

5.1 - As altitudes obtidas do nivelamento	45
5.2 - Altitude ortométrica	48
5.3 - Altitudes científicas	49
5.3.1 - Altitude de Helmert	50
5.3.2 - Altitude de Vignal	52
5.3.3 - Altitude de Baranov	53
5.3.4 - Altitude dinâmica	54
5.3.5 - Altitude ortométrica "free-air"	55
5.4 - Influência do erro em \bar{g}_m no cálculo da altitude ortométrica	55
5.5 - Altitude normal	57
5.6 - Conclusões e recomendações	59

NOTAS DE REFERÊNCIA	63
---------------------------	----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
----------------------------------	----

APÊNDICE:

- Tabela para o cálculo da correção ortométrica ...	67
- Cálculo dos parâmetros da gravidade normal	70
- Planta I - Rede de nivelamento	71
- Programa para o ajustamento das diferenças brutas de número geopotencial (FORTRAN)	72
- Programa para o cálculo das altitudes científicas (BASIC)	74
- Matriz variância co-variância dos valores observados ajustados (trechos)	77

SIMBOLOGIA UTILIZADA

a	semi-eixo maior do elipsóide de referência
b	semi-eixo menor do elipsóide de referência
dm	massa elementar
dh'	correção ortométrica
$d\phi$	diferença de latitude entre dois pontos
$d\lambda$	deslocamento infinitesimal ao longo de um geope
dz	incremento infinitesimal ao longo da vertical
g_i	valor da gravidade no ponto genérico i (observada)
g_m	gravidade média entre dois pontos na superfície da Terra
\bar{g}_m	valor da gravidade média real, ao longo da vertical, entre um ponto da superfície terrestre e o geóide
g_Q^{-H}	gravidade no interior da crosta terrestre calculada pelo Método de Helmert
g_Q^{-V}	idem - Vignal
g_Q^{-B}	idem - Baranov
g_Q^{-F}	idem - Vanícek
h	altitude geométrica
h_m	altitude média
h'_i	altitude aproximada do ponto genérico i
i	declividade
K	constante gravitacional
m	razão entre a força centrífuga no equador e gravidade teórica também no equador
p	distância da massa elementar dm ao eixo de rotação da Terra
C_i	número geopotencial do ponto genérico i
H	altitude ortométrica
H_n^M	altitude normal de Molodensky
H_V	altitude de Vignal
H_B	altitude de Baranov
H_d	altitude dinâmica

continuação

H_H	altitude de Helmert
L_{km}	comprimento de uma linha de nivelamento em quilômetros
M	massa da Terra
N	ondulação do geóide
Q	potencial da força centrífuga
T	potencial perturbador
U	potencial da Terra normal (esferopotencial)
V	potencial de atração da Terra real
W	potencial da Terra real (geopotencial)
W_i	geopotencial no ponto i
W_o	geopotencial no geóide
Z	esferopotencial de atração
α	achatamento do elipsóide de referência
β, β'	coeficientes da fórmula para o cálculo da gravidade normal
γ	gravidade normal
$\bar{\gamma}_i$	valor particular da gravidade num ponto genérico i entre o geóide e a superfície física da Terra
γ_e	gravidade normal no equador
γ_h	gravidade normal no ponto localizado a uma elevação h acima do elipsóide de referência
ΔC	diferença de número geopotencial
$\delta \Delta C$	erro de interpolação máximo admissível no cálculo dos números geopotenciais
ζ	anomalia da altitude
ΔL	intervalo tolerável entre estações gravimétricas
ΔW	diferença de geopotencial
Δz	diferença de nível entre dois pontos
ϕ	latitude geodésica
λ	longitude geodésica
τ	trabalho
ω	velocidade angular da Terra

continuação

$\frac{\partial g}{\partial z}$ gradiente vertical da gravidade

$\frac{\partial g}{\partial L}$ gradiente horizontal da gravidade

I - INTRODUÇÃO

1.1 - Coordenadas geodésicas

As grandezas lineares e angulares obtidas em Geodésia são tomadas na superfície da Terra. Para um subsequente processamento, elas são projetadas sobre um elipsóide de referência.

Para definir, sem ambigüidade, a posição de um ponto P na superfície terrestre, referenciado a um elipsóide de devemos lançar mão de três coordenadas:

ϕ - latitude geodésica

λ - longitude geodésica

h - altitude geométrica

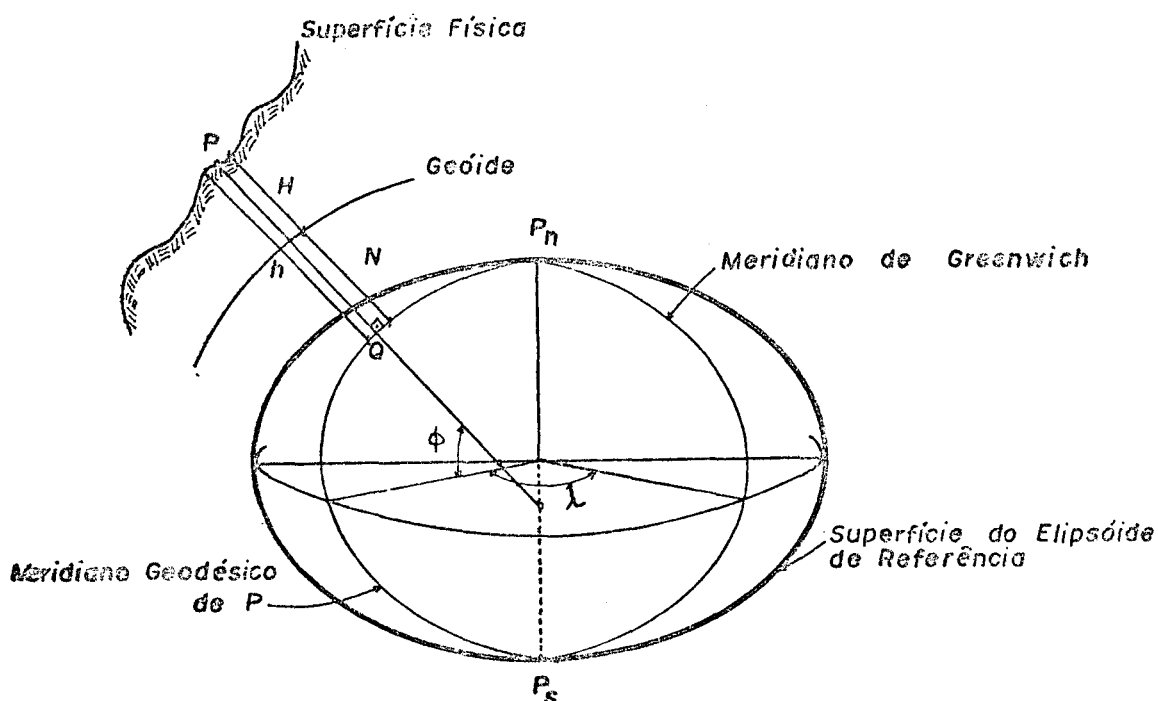


Fig. 1.1 - Coordenadas Geodésicas

A latitude geodésica é o ângulo que a normal ao elipsóide, conduzida a partir do ponto, forma com sua

projeção equatorial (Fig. 1.1).

A longitude geodésica é o ângulo que mede o diedro formado pelos meridianos geodésicos de Greenwich (origem) e do ponto P.

A altitude geométrica representa a distância do ponto P à sua projeção Q no elipsóide, contada sobre a normal ao elipsóide (projeção de Helmert).

Por outro lado, aquele mesmo ponto do terreno pode ser transportado ao elipsóide por uma dupla projeção: a primeira de P ao geóide (P_0) e posteriormente ao esferóide (Q_0) - projeção de Pizzetti - como se vê na Fig. 1.2.

Assim, obtemos duas novas grandezas, ou seja, a altitude ortométrica (H) que corresponde à distância PP_0 contada ao longo da vertical e a ondulação do geóide (N), que é a distância P_0Q_0 contada ao longo da normal.

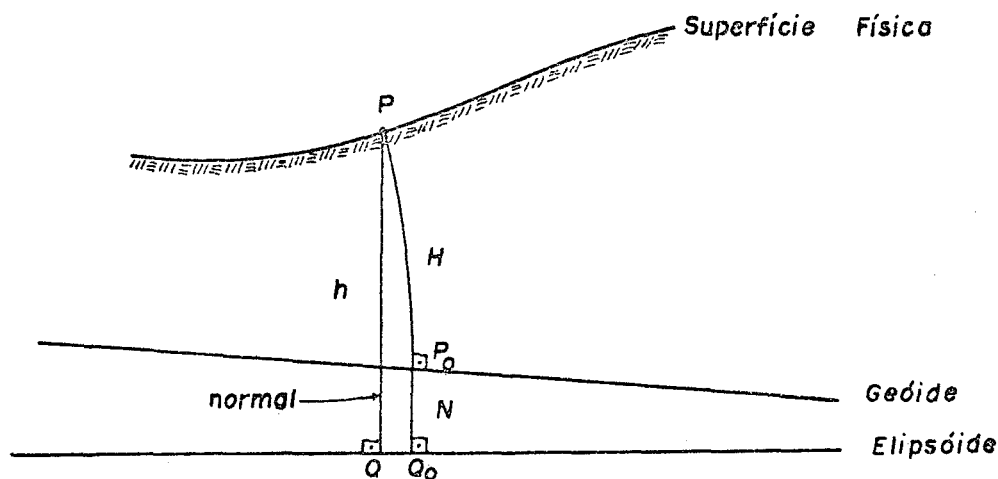


Fig. 1.2 - As projeções de Helmert e Pizzetti

1.2 - Coordenadas astronômicas

Latitude astronômica de um ponto é o ângulo que a vertical deste ponto forma com sua projeção equatorial.

A longitude astronômica é definida pelo diedro formado entre o meridiano astronômico médio de Greenwich (origem) e o meridiano astronômico do observador.

Como a latitude e longitude astronômicas são referidas ao geóide e as observações são efetuadas na superfície física da Terra, o ponto só fica perfeitamente definido com a introdução de uma terceira coordenada - a altitude ortométrica - que representa a distância daquele ponto, na superfície física, ao geóide.

1.3. - Obtenção das coordenadas geodésicas

A latitude e a longitude geodésicas são obtidas, a partir do cálculo de uma rede de triângulos medida na superfície física da Terra e projetada sobre o elipsóide de referência (triangulação ou trilateração). No caso da triangulação, os lados dos triângulos são obtidos indiretamente pela medida de todos os ângulos dos triângulos que compõem a rede, havendo apenas necessidade de medir um lado inicial - base - que fornecerá escala à triangulação. Atualmente, grandes distâncias podem ser medidas com precisão, tão facilmente como ângulos, por meio de distanciômetros eletrônicos, surgindo assim a trilateração, onde, a partir dos lados, se obtém os ângulos da rede de triângulos (*).

Num ponto inicial da rede, denominado "datum", determina-se com rigor as coordenadas astronômicas (latitude e longitude) bem como o azimute astronômico de uma direção passante por aquele ponto inicial. Imposta a condição de que, no "datum", o elipsóide de referência seja paralelo ao geóide (que é a super-

(*) Pode-se também obter as coordenadas geodésicas (latitude e longitude) através da poligonização que envolve medidas simultâneas de ângulos e distâncias.

fície de referência das coordenadas astronômicas), igualam-se as coordenadas astronômicas às geodésicas (latitude e longitude).

Assim, de posse de duas coordenadas iniciais (geodésicas), ângulos, distâncias e de um azimute, se obtêm, através do cálculo, sobre um determinado modelo de referência, as coordenadas geodésicas de todos os vértices componentes da rede.

A terceira coordenada geodésica, ou seja, a altitude geométrica (h) é obtida por uma operação independente das anteriores. Ela pode ser obtida satisfatoriamente pela soma $H + N$ (Fig. 1.2), uma vez que, na prática, a diferença entre as projeções de Helmert e Pizzetti é pequena (esta operação conduzirá a um erro da ordem da fração do milímetro) (01).

A ondulação do geóide (N) pode ser obtida por diferentes maneiras, seja pela fórmula de STOKES, em função das anomalias da gravidade, seja pelo processo astro-geodésico ou ainda em função dos coeficientes de harmônicos esféricos (Geodésia Celeste).

Com relação à altitude ortométrica (H), podemos afirmar que ela, rigorosamente, não pode ser obtida (veja 3.2) (02). Assim, para se chegar à altitude geométrica h utilizamos um valor que se aproxima da altitude ortométrica.

Para se chegar à altitude de um ponto qualquer da superfície da Terra temos dois caminhos:

- a) Nivelamento
- b) Nivelamento combinado com gravimetria.

No primeiro caso, partindo de um ponto de altitude conhecida, efetuando o nivelamento, seguindo uma rota, até outro ponto do qual queremos obter a altitude, obtém-se uma diferença de nível que, somada à altitude do ponto inicial, nos dará a altitude do ponto desejado. Porém, se outra rota é escolhida para conectar aqueles mesmos dois pontos, a diferença de nível será diferente da anterior, mesmo considerando a não-existência de qualquer erro nas operações de nive

lamento (3.1). Assim, cada rota escolhida conduzirá a um valor para a altitude do outro ponto. Estas divergências são explicadas pelo não-paralelismo das superfícies equipotenciais que passam pelos respectivos pontos. Para que haja unicidade de resultados, deve-se aplicar a correção devida ao não-paralelismo das superfícies equipotenciais, conhecida como correção ortométrica.

No segundo caso, se as operações de nivelamento são acompanhadas de determinações gravimétricas, podemos obter "diferenças de nível" unívocas para qualquer rota seguida na conexão dos dois pontos. As altitudes obtidas por este caminho são denominadas de altitudes científicas.

As altitudes obtidas através do nivelamento simples são as mais difundidas, ao passo que as altitudes científicas têm sido utilizadas em alguns países da Europa.

Neste trabalho procuraremos determinar as diferentes altitudes científicas em pontos que possuem suas altitudes determinadas pelo método clássico, o que nos possibilitará efetuar comparações.

C A P I T U L O I I

POTENCIAL DA GRAVIDADE E NÚMERO GEOPOTENCIAL

2.1 - Potencial da gravidade terrestre

Para se calcular o potencial gravitacional num ponto P qualquer da superfície terrestre, devemos conhecer as forças que atuam neste ponto. Sabemos que todo corpo vincu lado à Terra acha-se sujeito à força da gravidade, a qual possui duas componentes: uma devida à atração das massas terrestres e a outra à ação da força centrífuga, gerada pelo movimento de rotação. Assim, o potencial em qualquer ponto P, chamado potencial da gravidade (W), é obtido pela soma do potencial de atração (V) e do potencial da força centrífuga (Q) ou,

$$W = V + Q$$

a - Potencial de atração (gravitacional ou newtoniano)

De acordo com a Lei de Newton da gravitação universal, duas partículas (ponto material ou massa puntiforme) de massas m_1 e m_2 , separadas por uma distância d , atraem-se simultaneamente com uma força de módulo

$$F = K \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

onde K é a constante gravitacional, cujo valor no Sistema Internacional (SI) é: (03)

$$K = 6\,672 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$$

adotado na XVII Assembléia Geral da UGGI (1979).

Apesar de as partículas m_1 e m_2 se atraírem, de maneira completamente simétrica, considera-se uma como par-

tícula atrativa (massa m) e outra como partícula atraída (massa unitária). Assim, a fórmula anterior toma o seguinte aspecto:

$$F = K \frac{m}{d^2}$$

que expressa a força exercida pela massa m sobre a unidade de massa localizada à distância d .

Introduzimos agora a função escalar: (04)

$$V_P = K \frac{m}{d}$$

V_P representa o potencial gravitacional (newtoniano ou de atração) produzido pela massa m sobre um ponto P distanciado d daquela massa.

Como a função V_P é escalar, se temos um sistema de diferentes partículas m_1, m_2, \dots, m_n , podemos obter o potencial de atração do sistema somando as contribuições individuais de cada partícula, ou

$$V = \frac{K m_1}{d_1} + \frac{K m_2}{d_2} + \dots + \frac{K m_n}{d_n} = K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{d_i}$$

Se assumirmos uma distribuição contínua destas partículas numa região de massa M , volume \underline{v} e com uma densidade σ , o somatório anterior torna-se uma integral

$$V = K \int_v \frac{\sigma dv}{d} = K \int_M \frac{dm}{d} \quad (2.1.1)$$

b - Potencial centrífugo

O potencial devido à força centrífuga num ponto P é dado por: (05)

$$Q = -\frac{1}{2} \omega^2 p^2 \quad (2.1.2)$$

onde ω é a velocidade angular da Terra, cujo valor no S.I. (06) é de $7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ rad.s}^{-1}$ (*); p é a distância do ponto P ao eixo de rotação terrestre.

Assim, o potencial da gravidade terrestre, denominado geopotencial, é obtido pela seguinte expressão:

$$W = V + Q = K \int \frac{dm}{d} + \frac{1}{2} \omega^2 p^2 \quad (2.1.3)$$

2.2 - Superfícies equipotenciais e vertical

Se unirmos todos os pontos onde temos $W=\text{constante}$, obteremos uma superfície equipotencial. As superfícies equipotenciais são denominadas "geopes", quando referidas ao campo da gravidade real. No campo da gravidade normal, que é de grande importância para a Geodésia, as superfícies equipotenciais são denominadas "esferopes" (**).

A superfície média dos oceanos, não perturbada, assemelha-se a uma superfície equipotencial. Este particular "geope" foi proposto por C.F. Gauss como a "figura matemática da Terra", posteriormente denominada "geóide", sendo considerada uma superfície fundamental no campo da Geodésia Física. (07).

(*) Valor adotado na XVII Assembléia Geral da União Geodésica e Geofísica Internacional (UGGI), realizada em Camberra, em dezembro de 1979.

(**) A gravidade normal é gerada por um elipsóide de revolução que possui a mesma massa da Terra, bem como a mesma velocidade angular, ao qual denomina-se "Terra normal". (2.4). O potencial da gravidade normal é chamado de esferopotencial.

Na hipótese de uma Terra perfeitamente esférica, não rotante e com distribuição de massas perfeitamente homogênea, teríamos os "geopes" como esferas concêntricas (Fig. 2.2.1):

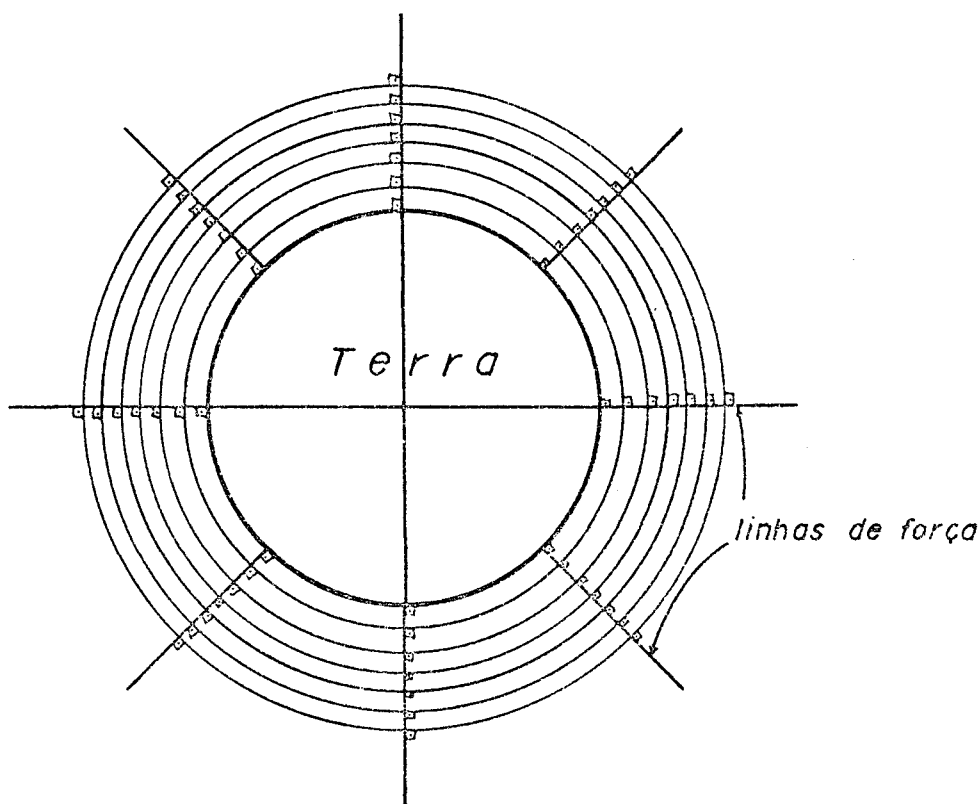


Fig. 2.2.1 - Aspecto dos geopes num caso hipotético

Contudo, em virtude de a Terra apresentar um movimento de rotação e ter a forma semelhante a de um elipsóide de revolução, e ainda considerando a não-homogênea distribuição de massas em seu interior, os "geopes" são superfícies suavemente irregulares (Figura 2.2.2):

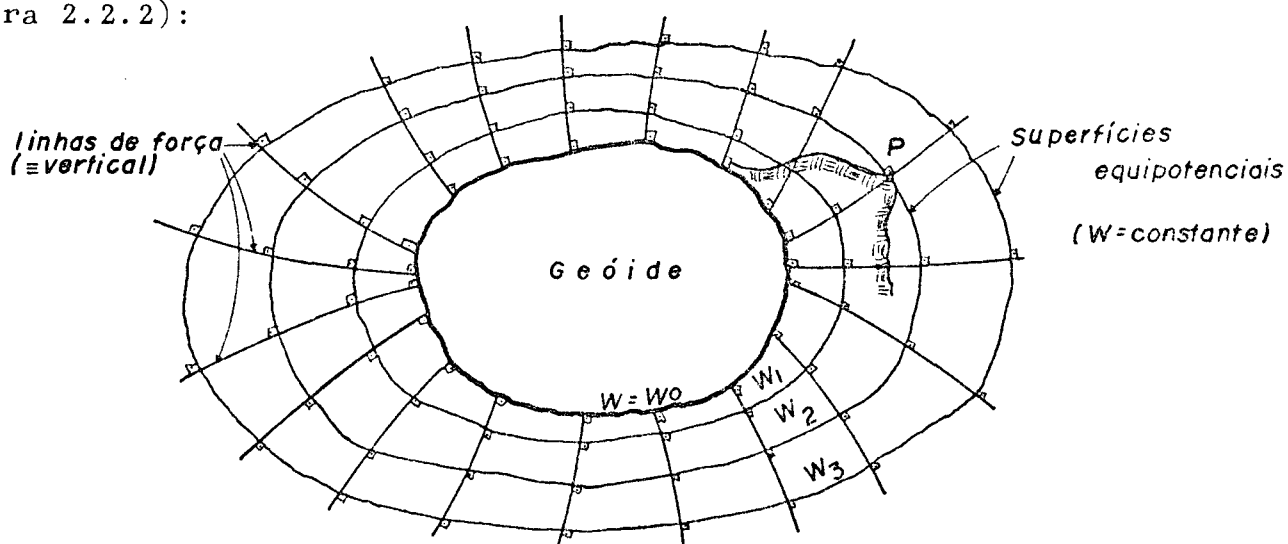


Fig. 2.2.2 - Geopes da Terra real

Consideremos dois geopes infinitamente próximos (Fig. 2.2.3):

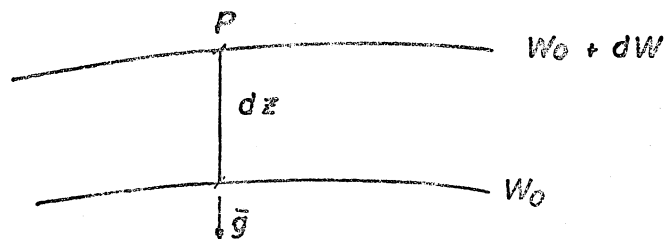


Fig. 2.2.3 - Dois geopes infinitamente próximos

A diferença de potencial dW representa o trabalho elementar ($d\tau$) da gravidade, para transportar uma partícula de massa unitária de uma superfície à outra, ou seja:

$$dW = d\tau = \vec{g} \cdot \vec{dz} \quad (2.2.1)$$

Se admitirmos um deslocamento $d\ell$ sobre um mesmo geope, pela própria definição de superfície equipotencial teremos $dW = 0$. Então:

$$dW = \vec{g} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Se o produto escalar de dois vetores é nulo, sendo eles não nulos, isto significa que os mesmos são perpendiculares entre si. Assim, o vetor gravidade num ponto é perpendicular à superfície equipotencial nesse ponto.

As linhas que interceptam todas as superfícies equipotenciais, normalmente, são chamadas de linhas de força, ou mais genericamente de verticais. É fácil entender que o vetor gravidade em um ponto qualquer da superfície terrestre é tangente à linha de força nesse ponto.

Sabemos que a altitude ortométrica de um ponto é medida, a partir do geóide até o ponto, ao longo da vertical. Assim, na Figura 2.2.3, se W_0 é o geóide, a altitude de P será dz .

Se tomarmos um deslocamento infinitesimal dz ao longo da vertical, contado positivamente do interior, ou seja, na direção oposta àquela do vetor gravidade, a fórmula 2.2.1 fica:

$$dW = - g dz \quad (2.2.2)$$

Na Figura 2.2.3, o trabalho para se passar de W_0 a $W_0 + dW$ deve ser constante para qualquer caminho escolhido. Então, entre estas duas superfícies equipotenciais teremos:

$$dW = - g dz = \text{constante} \quad (2.2.3)$$

Como g varia com a latitude (crescendo do equador para os pólos, principalmente devido à ação da força centrífuga), para satisfazer a equação 2.2.3 dz deve variar, daí concluímos que a distância entre as superfícies equipotenciais sofre variação, ou seja, elas não são paralelas. Da mesma equação, deduz-se facilmente que elas convergem para os pólos. (RAPP, R. H. p. 08).

À vista destes fatos, podemos ainda concluir que as linhas de força, para serem perpendiculares em todos os seus pontos às superfícies equipotenciais, deixarão de ser retas.

2.3 - Número geopotencial

Consideremos agora dois pontos P e Q sôbre a superfície da Terra, como se vê na Figura 2.3.1.

Por integração da equação 2.2.2, podemos obter a diferença de geopotencial entre eles:

$$\Delta W_{QP} = W_P - W_Q = \int_P^Q g dz \quad (2.3.1)$$

que representa o trabalho da gravidade para transportar uma partícula de massa unitária de um ponto a outro, seguindo qualquer direção.

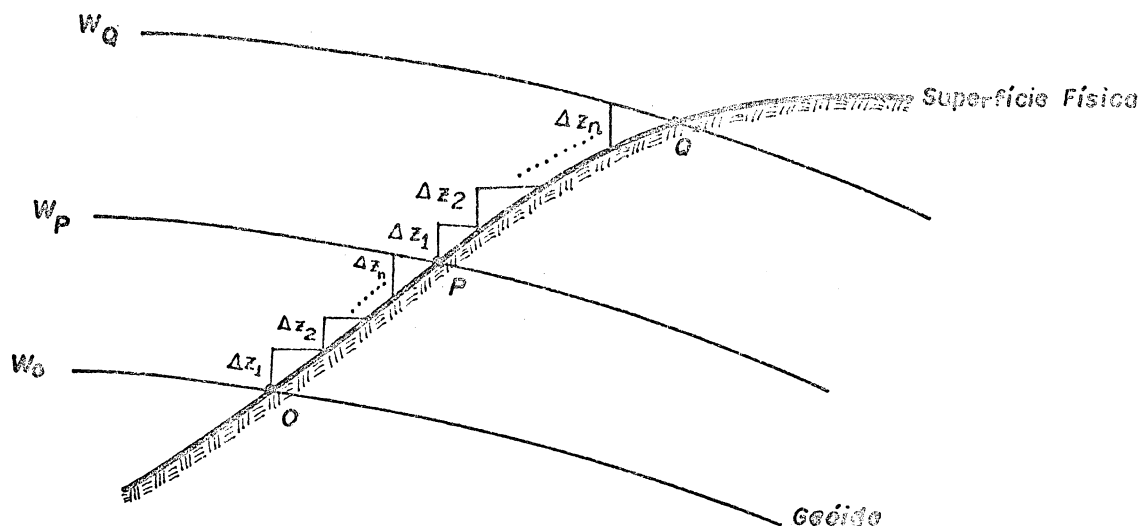


Fig. 2.3.1 - Diferença de geopotencial entre dois pontos

Se efetuarmos um nivelamento de precisão ligando P a Q, acompanhado de gravimetria, podemos obter a equação 2.3.1 por integração numérica (08):

$$W_{QP} = \sum_{i=1}^n g_{mi} \Delta z_i \quad (2.3.2)$$

onde,

$$g_{mi} = \frac{g_{i-1} + g_i}{2}$$

n = número de intervalos de P ($i=0$) até Q ($i=n$).

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

{ média dos valores de gravidade de nos extremos de cada lance.

{ desníveis brutos fornecidos pelas operações de nivelamento de precisão.

Os segundos membros das equações 2.3.1 e 2.3.2 não se equivalem. Porém, se considerarmos que as diferenças de altitude Δz são obtidas de nivelamento de precisão, e que os valores de g devem ser determinados em cada estação da mira, o erro da equação 2.3.2 pode ser negligenciado, mesmo para uma longa rede de nivelamento (09).

Analogamente, podemos calcular a diferença de potencial entre o geóide e os pontos P e Q. Neste caso, quando a diferença de potencial é relacionada ao geóide, ela é denominada de NÚMERO GEOPOTENCIAL, usualmente representado por C. Assim:

$$C_P = W_o - W_P = \int_o^P g dz \quad (2.3.3)$$

$$C_Q = W_o - W_Q = \int_o^Q g dz \quad (2.3.4)$$

Como o valor do potencial no geóide (W_o) é desconhecido, atribui-se-lhe o mesmo valor do esferopotencial à superfície do modelo (10).

a) para o elipsóide de Hayford (1924):

$$\begin{aligned} W_o &= 6\,263\,977 \text{ KGal.m} \\ &= 6\,263\,977 \times 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

b) para o elipsóide de referência 1967:

$$\begin{aligned} W_o &= 6\,263\,703 \text{ KGal.m} \\ &= 6\,263\,703 \times 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

c) para o elipsóide de referência 1980:

$$\begin{aligned} W_o &= 6\,263\,686 \text{ KGal.m} \\ &= 6\,263\,686 \times 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

A diferença em número geopotencial entre dois pontos \underline{A} e \underline{B} da superfície física da Terra é igual à diferença de geopotencial (ΔW) entre eles, podendo ser obtida por equações semelhantes às 2.3.1 e 2.3.2, ou seja:

$$\Delta C = \int_A^B g dz \quad (2.3.5)$$

ou por integração numérica:

$$\Delta C = \sum g_{mi} \Delta z_i \quad (2.3.6)$$

Os números geopotenciais foram reconhecidos em 1955, na reunião da Associação Geodésica Internacional, realizada em Florença (11) e são expressos em u.g.p. (unidade geopotencial).

A razão da adoção desta unidade é que o número geopotencial de um ponto em u.g.p. aproxima-se bastante da altitude, em metros, do referido ponto, sendo na realidade cerca de 2% menor.

$$\begin{aligned} 1 \text{ u.g.p.} &= 1 \text{ KGal.m} & (1 \text{ KGal} &= 10 \text{ m.s}^{-2}) \\ &= 10^3 \text{ Gal.m} & (1 \text{ Gal} &= 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}) \\ &= 10^6 \text{ mGal.m} & (1 \text{ mGal} &= 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}) \end{aligned}$$

2.4 - O campo da gravidade normal

Embora a forma da Terra não seja a de um elipsóide de revolução, ela é assim assumida para o estudo do campo da gravidade normal, que é de fundamental importância para a Geodésia. Assume-se ainda que o referido elipsóide possui a mesma massa da Terra, bem como a mesma velocidade angular.

O potencial gerado por este modelo teórico é denominado potencial normal (U) e o campo de força criado é o campo da gravidade normal.

A êste esferóide é ainda imposta a condição de que sua superfície limitante seja equipotencial, formando assim um modelo denominado "Terra normal".

O ponto básico aqui é que o teorema de STOKES assegura que, conhecendo-se a forma da superfície equipotencial limitante de um sistema de massas atrativas, dotado de movimento de rotação e, conhecendo-se ainda o valor da gravidade num ponto qualquer desta superfície, podemos determinar o campo externo, independente de qualquer hipótese sobre a distribuição de massas no interior.

O potencial gerado pela Terra normal (U), chamado de esferopotencial, é composto do potencial da força centrífuga (Q) mais o esferopotencial de atração (Z), ou

$$U = Z + Q \tag{2.4.1}$$

Conhecido o esferopotencial (U), podemos expressar a gravidade normal em função dele:

$$\gamma = \text{grad } U$$

da mesma forma que, para o geopotencial (Terra real)

$$\bar{g} = \text{grad } W$$

A diferença entre o geopotencial (W) e o esferopotencial (U) é denominada de potencial perturbador (T), ou

$$T = W - U \quad (2.4.2)$$

Podemos calcular a gravidade normal para um ponto qualquer da superfície da Terra normal, com precisão de segunda ordem, com fórmulas do tipo:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \text{sen}^2 \phi + \beta' \text{sen}^2 2\phi) \quad (2.4.3)$$

sendo γ e γ_e a gravidade normal no paralelo ϕ e no equador, respectivamente; β e β' são coeficientes que dependem das dimensões do elipsóide de referência e da velocidade de rotação (12).

Com uma precisão de 2.^a ordem (isto significa que consideramos $\alpha^3 \approx 3,8 \times 10^{-8} \approx 0$) podemos calcular β , β' e γ_e com as fórmulas seguintes (13):

$$\beta = \frac{5}{2} m - \alpha - \frac{17}{14} m \alpha \quad (2.4.4)$$

$$\beta' = \frac{1}{8} \alpha^2 - \frac{5}{8} m \alpha \quad (2.4.5)$$

$$\gamma_e = \frac{KM}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} m + \alpha - \frac{3}{7} m \alpha + \alpha^2 \right) \quad (2.4.6)$$

onde

- α - achatamento do elipsóide de referência;
- KM - constante (produto da massa do elipsóide pela constante gravitacional);
- a - semi-eixo equatorial do elipsóide;

$$m = \frac{a \omega^2}{\gamma_e} \quad (1.^a \text{ ordem}) \quad (2.4.7)$$

$$m = \frac{a \omega^2}{\gamma_e} - \frac{3}{2} m^2 \quad (2.^a \text{ ordem, por iteração}) \quad (2.4.8)$$

OBS.: em primeira aproximação: $\gamma_e = \frac{KM}{a^2} \Rightarrow m = \frac{a^3 \omega^2}{KM}$

Para os principais elipsóides temos as seguintes constantes (em unidades do Sistema Internacional):

1) Elipsóide de Hayford (1924)

$$a = 6\,378\,388 \text{ metros}$$

$$b = 6\,356\,912 \quad "$$

$$\alpha = 1/297$$

$$\omega = 7\,292\,1151 \times 10^{-12} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\gamma_e = 978\,049 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

$$KM = 3\,986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$m = 0,003\,449\,86$$

2) Elipsóide de referência 1967:

$$a = 6\,378\,160 \text{ metros}$$

$$b = 6\,356\,774,516 \quad "$$

$$\alpha = 1/298,247$$

$$\omega = 7\,292\,1151 \times 10^{-12} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\gamma_e = 978\,031,846 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

$$KM = 3\,986\,030 \times 10^8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$m = 0,003\,449\,801$$

3) Elipsóide de referência 1980:

$$a = 6\,378\,137 \text{ metros}$$

$$b = 6\,356\,752,298 \quad "$$

$$\alpha = 1/298,257$$

$$\omega = 7\,292\,1150 \times 10^{-12} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\gamma_e = 978\,033 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

$$KM = 3\,986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$m = 0,003\,449\,894 \quad (\text{fórmula iterativa- 2.4.8})$$

Em 1924, na Assembléia da União Geodésica e Geofísica Internacional (UGGI), em Madrid, adotou-se o elipsóide de Hayford (1909) como elipsóide internacional. A partir dos parâmetros deste elipsóide e do valor de γ_e calculado por HEISKANEN (1928), através de anomalias isostáticas da gravidade, CASSINI (1930) calculou os coeficientes β e β' , obtendo-se a seguinte fórmula para o cálculo da gravidade normal:

$$\gamma_{30} = 978,049 (1 + 0,005\ 2884 \text{ sen}^2\phi - 0,000\ 0059 \text{ sen}^2\ 2\phi) \text{ Gal} \quad (2.4.9)$$

a qual foi adotada como fórmula internacional da gravidade, pela Assembléia Geral da UGGI, em Stokolmo, em 1930.

Em 1967, a UGGI recomendou o sistema geodésico de referência 1967 (14), e dos parâmetros deste sistema surgiu a fórmula internacional da gravidade 1967:

$$\gamma_{67} = 978,0318 (1 + 0,005\ 3024 \text{ sen}^2\phi - 0,000\ 0059 \text{ sen}^2\ 2\phi) \text{ Gal} \quad (2.4.10)$$

Com a adoção do Sistema Geodésico de Referência 1980, deverá ser recomendada nova fórmula internacional da gravidade, baseada nos parâmetros deste sistema. De posse destes parâmetros, calculamos a fórmula para a gravidade normal γ_{80} :

$$\gamma_{80} = 978,033 (1 + 0,005\ 30243 \text{ sen}^2\phi - 0,000\ 0059 \text{ sen}^2\ 2\phi) \text{ Gal} \quad (2.4.11)$$

utilizando a (2.4.7) para o cálculo de \underline{m} e a (2.4.4) e (2.4.5) para o cálculo de β e β' , respectivamente (Apêndice).

2.4.1 - Gravidade acima do elipsóide

Para uma elevação h acima do elipsóide, a gravidade normal pode ser obtida pela expressão: (15)

$$\gamma_h = \gamma \left[1 - \frac{2}{a} (1 + \alpha - 2 \alpha \text{ sen}^2\phi + m) h + \frac{3h^2}{a^2} \right] \quad (2.4.12)$$

onde γ_h representa a gravidade normal para um ponto de latitude ϕ , com uma elevação h acima do elipsóide; γ é a gravidade normal para a mesma latitude, à superfície do elipsóide, podendo ser obtida por fórmulas do tipo da equação (2.4.3) ou equivalentes.

2.5 - Influências do valor de g no antigo "datum" Potsdam no cálculo dos números geopotenciais

Atualmente todas as determinações gravimétricas devem ser referenciadas à rede IGSN-71 (The International Gravity Standardization Net - 1971), segundo recomendação constante da resolução de n.º 11 da UGGI em sua XV Assembléia Geral (Moscou, agosto de 1971). Esta rede conta com 1854 estações espalhadas pelo mundo, das quais cerca de 50 estão situadas em território brasileiro. (16)

Até a adoção deste sistema, Potsdam ($\phi = 55^{\circ} 22,86' N$, $\lambda = 13^{\circ} 04,6' E$) foi o "datum" gravimétrico internacional. O valor de 981 274,3 mGal, oriundo de medições com pêndulo reversível conduzidas por Kühnen e Furtwängler, sob a orientação de Helmert, foi aceito pela Associação Internacional de Geodésia, na Conferência de Londres, em 1909. (17)

Posteriormente, com equipamentos mais modernos, valores absolutos de gravidade foram obtidos em diversos locais. Pela transferência destes valores ao ponto Potsdam, verificou-se que o valor de g no "datum" estava maior (cerca de 14 mGal).

As implicações decorrentes desta discrepância no cálculo dos números geopotenciais em pontos ainda relativos a Potsdam, dependendo da altitude do ponto, poderão ser consideráveis; senão vejamos:

Suponhamos que o valor adotado para Potsdam tenha sofrido uma correção Δg_p . Isto acarretará uma correção Δg_i num ponto qualquer, relativo a Potsdam de: (18)

$$\Delta g_i = \Delta g_p \frac{g_i}{g_p} \quad (2.5.1)$$

onde

Δg_i = correção no valor de g no ponto genérico i ;

g_p = valor corrigido de g em Potsdam;

g_i = valor de g no ponto i ;

Δg_p = correção efetuada no "datum".

Supondo-se que a correção em Potsdam fosse de -14 mGal e sabendo-se que a gravidade na superfície da Terra varia de cerca de $978\ 049$ mGal (equador) a $983\ 221$ mGal (pólos), obteríamos, utilizando a equação (2.5.1), a correção ao valor de g de $-13,95$ mGal para um ponto no equador e de $-14,03$ mGal para um ponto no pólo, ou seja, a correção num ponto qualquer seria diferente da correção em Potsdam de no máximo $0,05$ mGal. Todavia, o número geopotencial de um ponto qualquer sofreria uma variação dada por: (19)

$$\Delta C_i = \Delta g_i \cdot h_i' \quad (2.5.2)$$

onde

ΔC_i = variação no valor do número geopotencial;

Δg_i = variação no valor de g ;

h_i' = altitude aproximada do ponto.

Supondo-se $h_i' = 1000$ metros e considerando que g_i varia de $-13,95$ a $-14,03$ mGal, a mudança no valor do número geopotencial seria:

a) para um ponto no equador: $-0,01403$ KGal.m = $-0,01403$ u.g.p.

b) para um ponto nos pólos: $-0,01395$ KGal.m = $-0,01395$ u.g.p.

o que é relativamente grande para os erros admissíveis no nivelamento de precisão.

2.6 - Erros no cálculo dos números geopotenciais

BAESCHLIN (20) analisa os erros que podem aparecer no cálculo dos números geopotenciais. Tais erros podem provir de diferentes fontes, como da medida relativa do valor de g e do nivelamento, entre outras.

Porém, segundo o referido autor, o erro médio no cálculo de um número geopotencial é igual ao erro total do nivelamento multiplicado pelo fator $\gamma_{45^{\circ}}$, uma vez que a influência de todos os erros pode ser atenuada, graças à disposição das estações gravimétricas. Numericamente teremos:

$$E_{\Delta C} = \gamma_{45^{\circ}} \cdot m_{km} \cdot \sqrt{L_{km}} \quad (2.6.1)$$

onde

$E_{\Delta C}$ = erro cometido na diferença de número geopotencial entre dois pontos extremos de uma seção de nivelamento;

m_{km} = erro médio, em metros/quilômetro, do nivelamento;

L_{km} = comprimento, em quilômetros, da seção onde se está calculando a diferença de números geopotenciais:

$\gamma_{45^{\circ}}$ = gravidade normal para a latitude de 45° , sobre o modelo de referência adotado, em KGal.

C A P Í T U L O I I I

NATUREZA E DISTRIBUIÇÃO DAS INFORMAÇÕES GRAVIMÉTRICAS PARA O CÁLCULO DOS NÚMEROS GEOPOTENCIAIS3.1 - Necessidade das informações gravimétricas

Como vimos, o número geopotencial de um ponto expresso em u.g.p. corresponde aproximadamente à altitude do ponto em metros. Desta forma, a diferença de nível entre dois pontos será também próxima da diferença de número geopotencial entre estes dois pontos.

Assim, se fizermos um nivelamento de A até B (Figura 3.1), acompanhado de determinações gravimétricas, podemos determinar a diferença de número geopotencial ΔC entre A e B pela expressão:

$$\Delta C_{BA} = \sum_{i=1}^n \Delta z_i g_{mi} \quad (3.1.1)$$

onde

Δz_i - representa as diferenças de nível parciais entre as estações que compõem a linha de nivelamento;

g_{mi} - é a gravidade média superficial entre dois pontos consecutivos da linha, ou seja:

$$g_{mi} = \frac{g_i + g_{i+1}}{2}$$

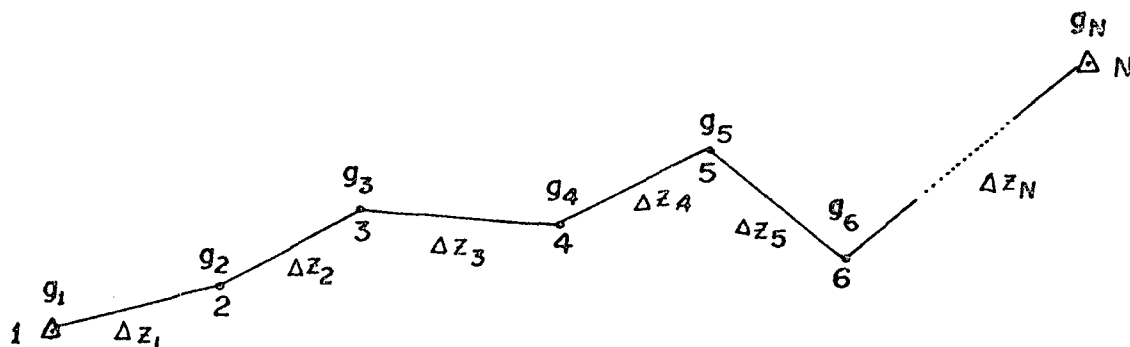
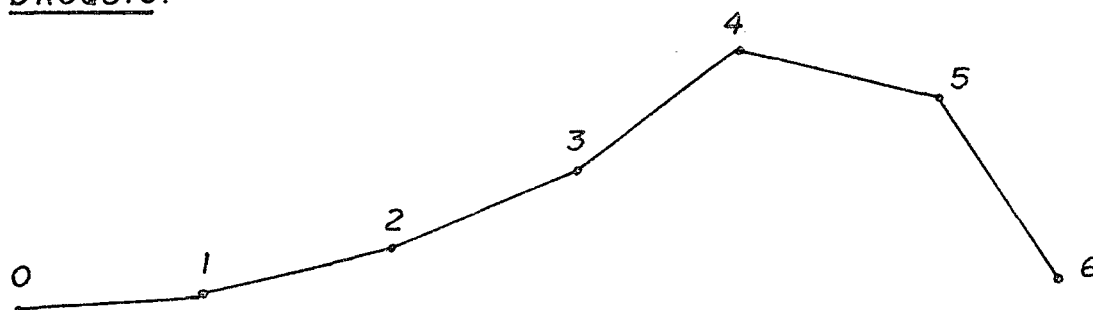


Fig. 3.1 - Nivelamento com determinações gravimétricas em todas as estações da mira.

A expressão (3.1.1) e a Figura (3.1) sugerem que sejam feitas determinações gravimétricas em todos os pontos intermediários de A e B, o que na prática consumiria muito tempo, ocasionando ainda um avanço lento das operações, bem como um consequente aumento do custo dos trabalhos. Por esta razão, é importante mostrar que não há necessidade de observações gravimétricas em todos aqueles pontos intermediários, havendo meios de se determinar a frequência com que essas observações devam ser efetuadas, ao longo da linha de nivelamento, sem prejudicar a precisão das determinações dos números geopotenciais.

Consideremos uma operação de nivelamento acompanhada de determinações gravimétricas no trecho representado no croquis que se segue:

CROQUIS:



Os resultados obtidos do campo foram os seguintes:

Estação	Gravidade observada (KGal)	Dif. de nível parciais (m)
0	0,980576465	-
1	571595	1,53975
2	569875	3,05883
3	565410	8,94117
4	560445	15,87780
5	557960	- 4,99860
6	0,980556520	-10,58115

A partir destes dados (*), passemos ao cálculo da diferença de número geopotencial entre os pontos 0 e 6 da seguinte forma:

a - considerando as informações gravimétricas tomadas em todos os pontos:

$$\Delta C_{60} = \sum_{i=1}^n g_{mi} \Delta z_i \quad e \quad g_{mi} = \frac{g_i + g_{i+1}}{2}$$

Então:

$$\Delta C_{60}^a = \left(\frac{g_0 + g_1}{2} \right) \Delta z_1 + \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) \Delta z_2 + \dots + \left(\frac{g_5 + g_6}{2} \right) \Delta z_6$$

Introduzindo os valores do quadro anterior nesta expressão teremos:

$$\Delta C_{60}^a = -13,568 \ 995 \ 619 \text{ KGal.m}$$

b - consideremos agora as informações gravimétricas tomadas apenas nos pontos 0, 2, 4 e 6:

$$\Delta C_{60}^b = \left(\frac{g_0 + g_2}{2} \right) \Delta z_{02} + \left(\frac{g_2 + g_4}{2} \right) \Delta z_{24} + \left(\frac{g_4 + g_6}{2} \right) \Delta z_{46} =$$

$$\Delta C_{60}^b = -13,569 \ 005 \ 447 \text{ KGal.m}$$

c - consideremos, a seguir, informações tomadas apenas em 0, 3 e 6:

$$\Delta C_{60}^c = \left(\frac{g_0 + g_3}{2} \right) \Delta z_{03} + \left(\frac{g_3 + g_6}{2} \right) \Delta z_{36} =$$

$$\Delta C_{60}^c = -13,568 \ 941 \ 553 \text{ KGal.m}$$

(*) Problema apresentado por KRAKIWSKY (21).

d) finalmente, consideremos as informações gravimétricas tomadas apenas nos pontos 0 e 6 (inicial e final):

$$\Delta C_{60}^d = \left(\frac{g_0 + g_6}{2} \right) \Delta z_{06} = -13,568\ 883\ 003\ \text{KGal.m}$$

Comparando os três últimos casos com o primeiro, que é considerado mais rigoroso, teremos:

$$\Delta C_{60}^a - \Delta C_{60}^b = 0,000\ 009\ 828\ \text{KGal.m} \approx 0,010\ \text{KGal.mm}$$

$$\Delta C_{60}^a - \Delta C_{60}^c = -0,000\ 054\ 066\ \text{KGal.m} \approx -0,054\ \text{KGal.mm}$$

$$\Delta C_{60}^a - \Delta C_{60}^d = -0,000\ 112\ 616\ \text{KGal.m} \approx -0,113\ \text{KGal.mm}$$

Estas diferenças podem ser consideradas como erros de interpolação na integração numérica (22). Mostramos apenas que não há necessidade de informações gravimétricas em todos os pontos, porém, as observações devem ser bem distribuídas, de modo a não ocasionar erros que poderiam exceder a um critério limite estabelecido em todos os trabalhos de precisão, como, por exemplo, o critério de 0,1 KGal.mm (erro admissível) utilizado no cálculo dos números geopotenciais numa parte da Alemanha Ocidental, quando do ajustamento da Rede Européia Unificada de Niveiamento.

Assim, resta-nos agora encontrar qual a separação tolerável (ΔL) entre as estações gravimétricas.

3.2 - Frequência das medições gravimétricas

Vimos que a diferença de número geopotencial entre dois pontos A e B pode ser obtida por integração numérica, pela expressão:

$$\Delta C_{BA} = \left(\frac{g_A + g_B}{2} \right) \Delta z_{AB}$$

onde g_A e g_B são os valores da gravidade observados em A e B, respectivamente; Δz_{AB} é o desnível bruto existente entre os dois pontos.

Este cálculo será perfeitamente legítimo, se considerarmos que a variação de g em função de z seja linear. Desta forma, quando ocorrer uma variação não linear da gravidade com a altitude aparecerá um erro no cálculo da diferença de número geopotencial entre os dois pontos considerados, denominado erro de interpolação de gravidade.

LEVALLOIS (23) fez um estudo rigoroso deste erro e apresenta um método para o cálculo do intervalo entre observações gravimétricas, conhecido como método do gradiente de Levallois.

Segundo o método, o intervalo tolerável (ΔL) entre estações gravimétricas para diferentes topografias pode ser obtido por estipulação de:

- a) erro máximo de interpolação de gravidade admissível no cálculo dos números geopotenciais ($\delta\Delta C$);
- b) gradiente horizontal $\frac{\partial g}{\partial L}$ e vertical $\frac{\partial g}{\partial z}$ da gravidade.

Estipulando que o valor de $\delta\Delta C$ deva ser menor que um décimo do erro no cálculo do número geopotencial (equação 2.6.1) e estimando a variação dos gradientes horizontal e vertical da gravidade para diferentes tipos de terreno, LEVALLOIS elaborou a tabela que apresentamos, a seguir, a partir das fórmulas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta z^2}{12} \left[\frac{\partial g}{\partial L} \right]_A^B + \frac{\Delta z \Delta L}{12} \left[\frac{\partial g}{\partial L} \right]_A^B < \delta\Delta C \quad (3.2.1) \\ z = i \Delta L \quad (3.2.2) \end{array} \right.$$

onde i é a declividade do terreno em %.

NOTA: no cálculo dos intervalos toleráveis entre estações gravimétricas (Tabela seguinte), LEVALLOIS considerou $\delta\Delta C = 20,0 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ($=0,2 \text{ KGal/mm}$). KRAKIWSKY, E.J. p. 46.

As estimativas, para diferentes tipos de topografia, foram as seguintes:

Topografia	Declividade (%)	Grad. Vertical ($\text{cm.s}^{-2}/\text{cm}$)	Grad. Horizontal ($\text{cm.s}^{-2}/\text{cm}$)
plana	1 a 3	$0,3 \times 10^{-6}$	$2,5 \times 10^{-8}$
ondulada	4 a 7	$0,6 \times 10^{-6}$	$1,0 \times 10^{-7}$
acidentada	8 a 10	$1,0 \times 10^{-6}$	$0,25 \times 10^{-6}$

Os resultados obtidos constam da tabela abaixo:

Distribuição das estações gravimétricas para diferentes tipos de Topografia

Topografia	Declividade (%)	Intervalo tolerável entre estações gravimétricas (ΔL) (Km)
Plana	1	9,2
	2	6,4
	3	4,9
Ondulada	4	2,0
	5	1,9
	6	1,7
	7	1,5
Acidentada	8	0,95
	9	0,90
	10	0,85

Os intervalos ΔL apresentados na Tabela acima podem ser usados apenas como uma regra geral, para a determinação da frequência das observações gravimétricas em diferentes perfis,

pois não devemos esquecer de que o valor dos gradientes, básicos para a determinação daqueles intervalos, pode ser anormal mesmo num terreno plano. Assim, se desejamos informações para uma área particular, é interessante que se consultem as cartas de anomalias da gravidade. De posse dos valores dos gradientes locais e da inclinação, pode-se obter o espaçamento tolerável entre as estações gravimétricas pela resolução das expressões (3.2.1) e (3.2.2).

Quando do reconhecimento dos números geopotenciais, no Simpósio de Florença (Maio de 1955), foi dado, a título de indicação geral, uma aproximação dos intervalos suscetíveis de serem adotados entre as determinações gravimétricas, para o cálculo dos números geopotenciais (24):

- em regiões planas: 2 a 3 km;
- em regiões onduladas: 1 a 2 km;
- em regiões montanhosas: 0,3 a 1,5 km.

C A P Í T U L O I V

CÁLCULO E AJUSTAMENTO DOS NÚMEROS GEOPOTENCIAIS DE UMA REDE DE NIVELAMENTO DE PRECISÃO4.1 - Cálculo das diferenças brutas de geopotencial

Neste capítulo, calculamos as diferenças de números geopotenciais entre as RNs do IPPUC-DGTC* e do IBG**, situadas na região de Curitiba (veja planta I, no Apêndice).

Para se calcular a diferença de números geopotenciais (ΔC) entre dois pontos quaisquer, P_1 e P_2 , na superfície da Terra, utilizamos a equação (2.3.6):

$$\Delta C = \int_{P_1}^{P_2} g_{mi} z_i \quad (2.3.6)$$

Vimos também que não há necessidade de informações gravimétricas em todas as estações intermediárias entre as RNs, porém, dependendo da topografia e das distâncias entre as RNs, as informações intermediárias tornam-se necessárias.

Neste trabalho, utilizamos apenas os valores de gravidade, determinados nas próprias RNs, o que, conforme foi mostrado no capítulo anterior não acarretará erros significativos, uma vez que a distância entre as RNs em estudo não ultrapassou 2,5 km e a topografia onde se situa a rede é relativamente plana (Tabela II).

Por iniciativa do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, foi feito um grande número de determinações gravimétricas, tanto na região metropolitana de Curitiba, quando no interior do Estado do Paraná. Todas as RNs constantes da planta I (Apêndice) foram gravimetradas e os valores obtidos estão na Tabela I. Estes valores são de observações nas próprias RNs. Quando a estação de gravidade não coincide com a RN, o valor de g deve ser-lhe reduzido.

Além das informações gravimétricas, para o uso da equação (2.3.6), necessitamos ainda dos desníveis brutos entre as estações de gravidade. Estes desníveis foram obtidos diretamente das

* IPPUC-DGTC - Instituto de Pesquisa e Planejamento Urbano de Curitiba - Departamento de Geografia, Terras e Cartografia do Estado do Paraná.

**IBG - Instituto Brasileiro de Geografia (atual IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

T A B E L A I

Gravidade observada (em mGal) e latitude geodésica das RNs constantes da planta I (Apêndice):

RN	g	Latitude	RN	g	Latitude
01	978 761,10	25 ^o 22' 01,98"	28	978 773,78	25 ^o 28' 31,3"
02	764,78	22 50,1	29	774,53	29 35,9
03	767,88	23 32,0	30	773,00	30 27,7
04	770,15	24 26,7	31	778,84	31 27,4
05	775,76	25 47,6	32	775,54	32 12,1
06	771,06	26 43,7	33	773,28	32 52,8
07	774,27	27 34,6	34	766,38	21 24,7
08	779,66	28 38,5	35	771,30	22 07,3
09	782,55	29 34,6	36	779,35	23 23,5
10	--- -----	--- -- ----	37	775,63	24 16,9
11	978 774,34	25 ^o 31' 56,7"	38	774,59	25 41,7
12	780,00	22 22,3	39	774,06	26 46,3
13	783,53	23 09,8	40	780,69	28 42,4
14	769,68	23 40,8	41	785,18	29 11,7
15	768,13	24 19,6	42	782,16	29 53,8
16	783,62	25 20,2	43	782,78	31 18,3
17	783,40	26 01,3	44	784,62	32 34,6
18	773,99	27 50,2	45	782,18	33 39,1
19	775,02	28 37,2	46	776,73	21 23,2
20	770,54	29 52,2	47	776,45	23 18,9
21	771,44	30 14,4	48	775,46	24 08,5
22	773,05	31 39,8	49	785,30	25 47,0
23	773,42	32 37,8	50	784,61	26 33,3
24	768,911	22 16,3	51	785,22	27 29,0
25	781,876	23 11,7	52	785,82	28 40,4
26	775,576	22 17,9	53	789,98	29 00,00
27	978 779,83	25 ^o 28' 14,4"	54	978 791,76	25 ^o 30' 45,6"

T A B E L A I

CONTINUAÇÃO....

RN	g	Latitude	RN	g	Latitude
55	978 794,09	25 ^o 31' 46,3"	62	978 788,85	25 ^o 26' 07,2"
56	793,94	32 11,1	63	--- --- ---	-- -- -- -
57	780,39	22 25,7	64	978 791,26	25 ^o 29' 02,0"
58	778,42	23 07,2	65	796,46	30 22,6
59	782,96	23 13,6	66	791,43	31 17,0
60	784,40	24 37,9	67	--- --- ---	-- -- -- -
61	978 783,00	25 ^o 26' 00,0"	68	978 791,20	25 ^o 33' 05,9"
RNs do CNG (atual IBG)					
20V	978 785,96	25 ^o 30' 44,6"	20Z	978 770,61	25 ^o 28' 22,0"
20W	790,61	32 01,6	21C	781,07	27 39,0
20X	770,99	30 07,4	21G	978 794,02	25 ^o 32' 08,3"
25B	978 782,27	25 ^o 27' 05,5"			

T A B E L A I I

Desníveis brutos (Δz) e distâncias, em metros, entre as RNs da planta I (Apêndice):

N O D O	Δz	Distância	N O D O	Δz	Distância
01 - 02	-16,0914	1.019,40	23 - 33	6,0982	1.882,60
02 - 03	-11,4821	581,27	12 - 24	59,7523	243,15
03 - 04	-13,5068	1.242,28	24 - 25	-63,4586	1.104,90
04 - 05	-22,1379	1.428,62	25 - 26	24,0480	1.219,70
05 - 06	26,7135	1.002,20	24 - 34	2,2014	2.011,60
06 - 07	-15,9279	1.164,27	34 - 35	-23,2933	725,42
07 - 08	-59,5987	1.213,30	35 - 36	-48,3784	2.226,63
08 - 09	15,9830	1.137,30	36 - 37	15,8329	1.431,41
09 -20V	-20,9842	1.022,40	37 - 26	14,2219	1.337,05
20V- 11	28,4271	1.038,20	37 - 38	2,8674	1.508,95
20V-20X	44,5156	1.238,35	38 - 39	0,3052	863,25
11 - 23	14,5968	1.531,67	39 -21C	-44,5426	1.602,40
01 - 12	-79,2559	1.922,60	21C-27	21,0908	2.270,38
12 - 13	-14,9567	1.078,55	27 - 28	16,0176	1.421,48
13 - 14	64,1925	768,35	28 - 20Z	11,7160	797,20
14 - 15	4,4580	631,90	20Z- 19	-18,4670	810,85
15 - 16	-76,1228	721,07	28 - 29	- 2,7985	1.280,28
16 - 17	- 0,1482	1.195,50	29 - 30	0,6423	1.002,89
17 -25B	6,3214	975,92	30 - 31	- 9,5897	1.109,58
25B- 18	18,3357	1.155,17	31 - 32	10,0395	1.301,62
18 - 19	- 6,8985	1.354,30	32 - 33	11,1356	1.493,66
19 - 20	14,3658	1.633,20	33 - 45	-25,2382	1.738,34
20 - 21	- 5,8877	805,00	45 - 44	- 4,8295	1.761,40
20 -20X	- 2,8331	503,60	44 - 56	-31,2747	1.193,27
21 - 22	0,9711	1.447,05	44 - 43	- 1,2689	1.399,75

T A B E L A II

CONTINUAÇÃO

N O D O	Δz	Distância	N O D O	Δz	Distância
22 - 23	0,6205	935,00	43 - 42	- 1,8938	1.416,67
42 - 41	-17,3902	696,66	54 - 53	3,1136	1.374,80
41 - 40	12,9512	1,421,15	53 - 52	16,1765	1.917,50
41 -21C	4,0848	1,523,94	35 - 46	-46,2169	1.961,97
21C- 51	2,4902	1.371,55	46 - 47	11,4518	1.646,47
51 - 52	3,4282	1.197,38	47 - 48	6,9946	835,00
52 - 64	-13,9629	1.023,22	48 - 49	-46,8795	1.715,54
64 - 65	2,7892	1.928,37	49 - 50	6,3947	884,65
65 - 66	21,6009	1.201,84	50 - 51	- 3,1056	952,87
66 -20W	6,5809	1.051,52	50 - 62	- 6,9739	1.367,30
20W-68	- 3,6099	1.753,85	62 - 61	25,1201	806,70
68 -21G	1,7112	1.352,20	61 - 60	-12,7712	1.485,55
21G-56	-35,8332	1.148,37	60 - 59	- 4,2558	1.310,80
28 - 40	-28,2468	837,06	59 - 58	17,5995	946,28
21G- 55	-31,8601	719,85	58 - 57	-11,1969	840,62
55 - 54	- 2,5332	1.552,70	57 - 46	14,5142	1.022,82

caderne'tas de campo oriundas de levantamentos executados nos anos de 1970 e 1971, pelo Departamento de Geografia, Terras e Colonização do Estado do Paraná (DGTC). Os resultados obtidos também estão na Tabela II.

De posse dos desníveis brutos entre todas as estações de gravidade, calculamos a diferença de geopotencial entre todos os pontos da rede, utilizando a equação (2.3.6). Por exemplo: para se calcular a diferença de geopotencial entre os pontos 01 e 02 da rede fazemos:

$$\begin{aligned} \Delta z &= - 16,0914 \text{ metros} && \dots\dots\dots (\text{Tabela II}) \\ g_{01} &= 978\ 761,10 \text{ mGal} && \dots\dots\dots (\text{Tabela I}) \\ g_{02} &= 978\ 764,78 \text{ mGal} \\ g_{m(1,2)} &= \frac{978\ 761,10 + 978\ 764,78}{2} \text{ mGal} \\ &= 978\ 762,94 \text{ mGal} \end{aligned}$$

$$\Delta C = 978\ 762,94 \text{ mGal} \times (-16,0914 \text{ m}) = -15\ 749\ 666,028 \text{ mGal.m}$$

$$\Delta C = - 15,749\ 666\ 028 \text{ KGal.m}$$

$$\Delta C = - 15,749\ 666\ 028 \text{ u.g.p.}$$

Assim se fez para todos os pontos da área em estudo e os resultados obtidos compõem a Tabela III.

4.2 - Ajustamento da diferença de números geopotenciais

O ajustamento de uma rede de números geopotenciais é baseado no fato de que, num ponto, o valor do número geopotencial é único. Assim, a soma das diferenças de número geopotencial num circuito fechado deve ser nula. Desta forma, o método de ajustamento adequado ao problema em questão é o método das equações de condição (ou método dos correlatos).

TABELA III

Diferença bruta de geopotencial entre as RNs da planta I (em u.g.p.)

N O D O	ΔC bruta	l_{ib}	N O D O	ΔC bruta	l_{ib}	N O D O	ΔC bruta	l_{ib}
01 - 02	-15,749 666	l_1	24 - 25	-62,111 716	l_{29}	51 - 52	3,355 472	l_{57}
02 - 03	-11,238 293	l_2	25 - 26	23,537 671	l_{30}	52 - 64	-13,666 727	l_{58}
03 - 04	-13,220 037	l_3	24 - 34	2,154 659	l_{31}	64 - 65	2,730 052	l_{59}
04 - 05	-21,667 978	l_4	34 - 35	-22,798 756	l_{32}	65 - 66	21,142 830	l_{60}
05 - 06	26,146 463	l_5	35 - 36	-47,351 584	l_{33}	66 -20W	6,441 326	l_{61}
06 - 07	-15,589 793	l_6	36 - 37	15,496 886	l_{34}	20W- 68	- 3,533 337	l_{62}
07 - 08	-58,333 835	l_7	37 - 26	13,920 049	l_{35}	68 -21G	1,674 910	l_{63}
08 - 09	15,643 858	l_8	37 - 38	2,806 826	l_{36}	21G- 56	-35,072 048	l_{64}
09 -20V	-20,539 005	l_9	38 - 39	0,298 752	l_{37}	28 - 40	-27,647 325	l_{65}
20V- 11	27,823 881	l_{10}	39 -21C	-43,597 298	l_{38}	21G- 55	-31,184 476	l_{66}
20V-20X	43,570 911	l_{11}	21C- 27	20,643 263	l_{39}	55 - 54	- 2,479 478	l_{67}
11 - 23	14,286 967	l_{12}	27 - 28	15,677 655	l_{40}	54 - 53	3,047 563	l_{68}
01 - 12	-77,573 341	l_{13}	28 -20Z	11,467 295	l_{41}	53 - 52	15,833 362	l_{69}
12 - 13	-14,639 345	l_{14}	20Z- 19	-18,074 998	l_{42}	35 - 46	-45,235 901	l_{70}
13 - 14	62,830 117	l_{15}	28 - 29	- 2,739 099	l_{43}	46 - 47	11,208 754	l_{71}
14 - 15	4,363 352	l_{16}	29 - 30	0,628 666	l_{44}	47 - 48	6,846 146	l_{72}
15 - 16	-74,507 160	l_{17}	30 - 31	- 9,386 167	l_{45}	48 - 49	-45,884 735	l_{73}
16 - 17	- 0,145 056	l_{18}	31 - 32	9,826 434	l_{46}	49 - 50	6,259 036	l_{74}
17 -25B	6,187 278	l_{19}	32 - 33	10,899 240	l_{47}	50 - 51	- 3,039 714	l_{75}
25B- 18	17,946 582	l_{20}	33 - 45	-24,702 588	l_{48}	50 - 62	- 6,825 961	l_{76}
18 - 19	- 6,752 076	l_{21}	45 - 44	- 4,727 034	l_{49}	62 - 61	24,587 200	l_{77}
19 - 20	14,060 854	l_{22}	44 - 56	-30,611 341	l_{50}	61 - 60	-12,500 242	l_{78}
20 - 21	- 5,762 710	l_{23}	44 - 43	- 1,241 979	l_{51}	60 - 59	- 4,165 508	l_{79}
20 -20X	- 2,772 955	l_{24}	43 -42	- 1,853 618	l_{52}	59 - 58	17,226 051	l_{80}
21 - 22	0,950 486	l_{25}	42 - 41	-17,021 244	l_{53}	58 - 57	-10,959 295	l_{81}
22 - 23	0,607 329	l_{26}	41 - 40	12,676 414	l_{54}	57 - 46	14,206 188	l_{82}
23 - 33	5,968 756	l_{27}	41 -21C	3,998 133	l_{55}			
12 - 24	58,484 001	l_{28}	21C -51	2,437 366	l_{56}			

Neste método, o modelo matemático é uma função dos valores observados ajustados:

$$F(L_a) = 0$$

que representa r equações de condição, ligando u incógnitas. Os valores ajustados (L_a) são obtidos pela introdução das correções (V) aos valores observados (L_b), ou:

$$L_a = L_b + V$$

A função dos valores observados - $F(L_b)$ - nos fornecerá os erros de fechamento (W):

$$F(L_b) = W$$

Neste trabalho queremos obter o número geopotencial de 72 RNs por meio de 82 diferenças de geopotencial, que encerram erros cometidos nas operações de nivelamento e gravimetria. Desta forma, temos 10 (=82 - 72) observações superabundantes que darão origem a 10 equações de condição.

4.2.1 - Formação das equações de condição

Das várias alternativas existentes para a formação das equações de condição, escolhemos as seguintes (veja planta I no Apêndice e Tabela III):

Modêlo: $F(L_a) = 0$

1º circuito: $l_{1a} + l_{2a} + l_{3a} + l_{4a} + l_{5a} + l_{6a} + l_{7a} + l_{8a} + l_{9a} +$
 $+ l_{11a} - l_{24a} - l_{22a} - l_{21a} - l_{20a} - l_{19a} - l_{18a} - l_{17a} +$
 $- l_{16a} - l_{15a} - l_{14a} - l_{13a} = 0$

2º circuito: $l_{28a} + l_{29a} + l_{30a} - l_{35a} + l_{36a} + l_{37a} + l_{38a} + l_{39a} +$
 $+ l_{40a} + l_{41a} + l_{42a} - l_{21a} - l_{20a} - l_{19a} - l_{18a} - l_{17a} +$
 $- l_{16a} - l_{15a} - l_{14a} = 0$

$$\underline{3^{\circ} \text{ circuito:}} \quad l_{29a} + l_{30a} - l_{35a} - l_{34a} - l_{33a} - l_{32a} - l_{31a} = 0$$

$$\underline{4^{\circ} \text{ circuito:}} \quad l_{23a} + l_{25a} + l_{26a} + l_{27a} - l_{47a} - l_{46a} - l_{45a} - l_{44a} + \\ -l_{43a} + l_{41a} + l_{42a} + l_{22a} = 0$$

$$\underline{5^{\circ} \text{ circuito:}} \quad l_{11a} - l_{24a} + l_{23a} + l_{25a} + l_{26a} - l_{12a} - l_{10a} = 0$$

$$\underline{6^{\circ} \text{ circuito:}} \quad l_{70a} + l_{71a} + l_{72a} + l_{73a} + l_{74a} + l_{75a} - l_{56a} - l_{38a} + \\ -l_{37a} - l_{36a} - l_{34a} - l_{33a} = 0$$

$$\underline{7^{\circ} \text{ circuito:}} \quad l_{71a} + l_{72a} + l_{73a} + l_{74a} + l_{76a} + l_{77a} + l_{78a} + l_{79a} + \\ +l_{80a} + l_{81a} + l_{82a} =$$

$$\underline{8^{\circ} \text{ circuito:}} \quad -l_{53a} - l_{52a} - l_{51a} - l_{49a} - l_{48a} - l_{47a} - l_{46a} - l_{45a} + \\ -l_{44a} - l_{43a} + l_{65a} - l_{54a} = 0$$

$$\underline{9^{\circ} \text{ circuito:}} \quad -l_{55a} - l_{53a} - l_{52a} - l_{51a} + l_{50a} - l_{64a} + l_{66a} + l_{67a} + \\ +l_{68a} + l_{69a} - l_{57a} - l_{56a} = 0$$

$$\underline{10^{\circ} \text{ circuito:}} \quad l_{58a} + l_{59a} + l_{60a} + l_{61a} + l_{62a} + l_{63a} + l_{66a} + l_{67a} + \\ +l_{68a} + l_{69a} = 0$$

Sabendo-se que $L_a = L_b + V$ formaremos agora as equações de condição transformadas:

$$\underline{1^{\circ} \text{ circuito:}} \quad (l_{1b} + v_1) + (l_{2b} + v_2) + (l_{3b} + v_3) + (l_{4b} + v_4) + \dots + \\ (l_{9b} + v_9) + (l_{11b} + v_{11}) - (l_{24b} + v_{24}) - (l_{22b} + v_{22}) - \\ - (l_{21b} + v_{21}) - (l_{20b} + v_{20}) - (l_{19b} + v_{19}) - (l_{18b} + v_{18}) - \dots - \\ - (l_{13b} + v_{13}) = 0$$

Isolando os termos v_i , ficaremos:

$$\begin{aligned}
& v_1 + v_2 + v_3 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{11} + \\
& -v_{24} -v_{22} -v_{21} -v_{20} -v_{19} -v_{18} -v_{17} -v_{16} -v_{15} -v_{14} -v_{13} + \\
& + (l_{1b} + l_{2b} + l_{3b} + l_{4b} + l_{5b} + l_{6b} + l_{7b} + l_{8b} + l_{9b} + l_{10b} + l_{11b} + \\
& -l_{24b} -l_{22b} -l_{21b} -l_{20b} -l_{19b} -l_{18b} -l_{17b} -l_{16b} -l_{15b} -l_{14b} -l_{13b}) = 0
\end{aligned}$$

Pela introdução dos valores observados (L_b - Tabela III) nos termos entre parênteses na equação acima, obtemos um valor que chamaremos de \underline{w}_1 (erro de fechamento para o 1º circuito)

$$\underline{w}_1 = 0,024\ 375 \text{ u.g.p.} \quad \text{Então:}$$

$$\begin{aligned}
& v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} + \\
& -v_{24} -v_{22} -v_{21} -v_{20} -v_{19} -v_{18} -v_{17} -v_{16} -v_{15} -v_{14} -v_{13} + \\
& + 0,024\ 375 = 0
\end{aligned}$$

que é a equação de condição.

De modo análogo, obtemos as 9 equações restantes que são:

2º circuito:

$$\begin{aligned}
& v_{28} + v_{29} + v_{30} - v_{35} + v_{36} + v_{37} + v_{38} + v_{39} + v_{40} + v_{41} + v_{42} + \\
& -v_{21} -v_{20} -v_{19} -v_{18} -v_{17} -v_{16} -v_{15} -v_{14} - 0,072\ 266 = 0
\end{aligned}$$

3º circuito:

$$v_{29} + v_{30} - v_{35} - v_{34} - v_{33} - v_{32} - v_{31} + 0,004\ 701 = 0$$

4º circuito:

$$\begin{aligned}
& v_{23} + v_{25} + v_{26} + v_{27} - v_{47} - v_{46} - v_{45} - v_{44} - v_{43} + v_{42} + v_{41} + \\
& + v_{22} - 0,012\ 062 = 0
\end{aligned}$$

5º circuito:

$$v_{11} - v_{24} + v_{23} + v_{25} + v_{26} - v_{12} - v_{10} + 0,028\ 123 = 0$$

$$\begin{aligned}
\underline{6^{\circ} \text{ circuito:}} & \quad v_{70} + v_{71} + v_{72} + v_{73} + v_{74} + v_{75} - v_{56} - v_{38} + \\
& \quad -v_{37} - v_{36} - v_{34} - v_{33} \qquad \qquad \qquad + 0,062 \ 954 = 0 \\
\underline{7^{\circ} \text{ circuito:}} & \quad v_{71} + v_{72} + v_{73} + v_{74} + v_{76} + v_{77} + v_{78} + v_{79} + \\
& \quad +v_{80} + v_{81} + v_{82} \qquad \qquad \qquad - 0,002 \ 366 = 0 \\
\underline{8^{\circ} \text{ circuito:}} & \quad -v_{53} - v_{52} - v_{51} - v_{49} - v_{48} - v_{47} - v_{46} - v_{45} + \\
& \quad -v_{44} - v_{43} + v_{65} - v_{54} \qquad \qquad \qquad - 0,006 \ 350 = 0 \\
\underline{9^{\circ} \text{ circuito:}} & \quad -v_{55} - v_{53} - v_{52} - v_{51} + v_{50} - v_{64} + v_{66} + v_{67} + \\
& \quad +v_{68} + v_{69} - v_{57} - v_{56} \qquad \qquad \qquad + 0,003 \ 548 = 0 \\
\underline{10^{\circ} \text{ circuito:}} & \quad v_{58} + v_{59} + v_{60} + v_{61} + v_{62} + v_{63} + v_{66} + v_{67} + \\
& \quad +v_{68} + v_{69} \qquad \qquad \qquad + 0,006 \ 025 = 0
\end{aligned}$$

Para se chegar aos valores ajustados, necessitamos das seguintes matrizes:

- L_b - vetor dos valores observados (82 x 1) - é formado pelas diferenças brutas de número geopotencial, constantes da Tabela III;
- B - matriz de dimensões (10 x 82) - formada, em nosso caso, pelos coeficientes das incógnitas nas equações de condição;
- W - vetor dos erros de fechamento (10 x 1) - $W = F(L_b)$ - são os termos independentes nas equações de condição;
- P - matriz dos pesos (82 x 82). Em nosso caso é uma matriz diagonal, porque as observações foram consideradas não correlacionadas. Tomamos os pesos das observações como o inverso do erro máximo admissível nas operações de nivelamento de precisão (para 1.^a ordem, a Diretoria do Serviço Geográfico - DSG - adota a tolerância de $4\text{mm}\sqrt{L_{\text{km}}}$). No ajustamento da Rede Européia de Nivela-

mento (U.E.L.N. - Unified European Levelling Network) onde estavam envolvidos resultados de nivelamento conduzidos em diversos países, tomaram-se os pesos de acordo com a seguinte fórmula: (25)

$$\frac{1}{p} = \frac{L \underline{m}^2}{200}$$

onde \underline{L} é o comprimento da linha; \underline{m} o erro médio do nivelamento; \underline{p} é o peso e o valor 200 é uma constante arbitrária, escolhida de modo a tornar os valores $1/p$ pequenos. O valor de \underline{m} é geralmente dado em mm/km, por exemplo, para a rede da Noruega utilizou-se para \underline{m} o valor de $\pm 2,03 \text{ mm} \sqrt{L_{\text{km}}}$.

De posse dessas matrizes, calculamos o vetor dos valores observados ajustados (L_a) bem como a matriz variância-covariância dos mesmos, como ensina o método dos correlatos:

$$L_{82}^a = L_{82}^b + V_{82} \quad (\text{valores ajustados})$$

$$V_{82} = P_{82}^{-1} B_{82}^T K_{10} \quad (\text{correções})$$

$$K_{10} = -M_{10}^{-1} W_{10} \quad (\text{correlativos})$$

$$\text{sendo } M_{10} = B_{82} P_{82}^{-1} B_{10}^T$$

variância da unidade de peso:

$$\sigma_o^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad (r = \text{número de equações de condição})$$

Matriz variância-covariância dos valores ajustados:

$$MV-C_{La} = \sigma_o^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

Os valores ajustados das 82 diferenças de número geopotencial com os respectivos desvios, oriundos da matriz variância-covariância, estão na Tabela IV.

4.3 - Cálculo dos números geopotenciais dos pontos da rede

De posse das diferenças de número geopotencial ajustadas entre os pontos da rede, podemos calcular os números geopotenciais daqueles pontos, iniciando de um ponto fundamental. Como não temos nenhum ponto na área do qual temos conhecimento do número geopotencial, escolhemos a RN 21-G do Instituto Brasileiro de Geografia, a mesma tomada como base para determinações das altitudes dos demais pontos componentes da rede, através do ajustamento dos desníveis brutos, seguido da correção do não-paralelismo das superfícies equipotenciais.

Para obtermos um valor para o número geopotencial da RN 21-G, tomamos como base o fato de os números geopotenciais serem cerca de 2% menores que a altitude bruta obtida pelo nivelamento. Se compararmos as Tabelas II e III, veremos ainda que a diferença entre números geopotenciais e desníveis brutos gira em torno de 2,12%. Desta forma, utilizamos este valor para o cálculo do número geopotencial da RN 21-G. Sendo sua altitude (fornecida pelo IBG) de 906,7233 metros o seu número geopotencial terá um valor de 887,5008 u.g.p., ou seja, 2,12% menor (em valor numérico). (*)

Os valores obtidos, a partir deste ponto fundamental, podem naturalmente serem convertidos para qualquer sistema, pela simples adição de uma constante. Os resultados obtidos para os números geopotenciais da rede em estudo, amarrados ao ponto fundamental 21-G encontram-se na Tabela V.

(*) Os números geopotenciais da UELN foram relacionados a um ponto fundamental em Helsinque, Finlândia. (26)

T A B E L A IV

Diferenças ajustadas de geopotencial e respectivos desvios padrão entre as RNs da planta I (em u.g.p.)

l_{ia}	N O D O	ΔC ajustada	$\sigma \times 10^{-2}$	l_{ia}	N O D O	ΔC ajustada	$\sigma \times 10^{-2}$
l_1	01 - 02	-15,751 135	2,1587	l_{26}	22 - 23	0,605 121	1,9875
l_2	02 - 03	-11,239 256	1,8921	l_{27}	23 - 33	5,972 045	2,3812
l_3	03 - 04	-13,222 094	2,2605	l_{28}	12 - 24	58,491 338	1,5264
l_4	04 - 05	-21,670 344	2,3367	l_{29}	24 - 25	-62,108 710	2,0905
l_5	05 - 06	26,144 803	2,1517	l_{30}	25 - 26	23,540 971	2,1331
l_6	06 - 07	-15,591 721	2,2271	l_{31}	24 - 34	2,155 283	2,3388
l_7	07 - 08	-58,335 844	2,2494	l_{32}	34 - 35	-22,798 531	1,9105
l_8	08 - 09	15,641 974	2,2159	l_{33}	35 - 36	-47,343 227	2,3601
l_9	09 - 20V	-20,540 698	2,1610	l_{34}	36 - 37	15,502 258	2,1794
l_{10}	20V - 11	27,828 146	2,0372	l_{35}	37 - 26	13,916 442	2,1726
l_{11}	20V - 20X	43,563 773	2,0881	l_{36}	37 - 38	2,816 560	2,2760
l_{12}	11 - 23	14,293 259	2,1932	l_{37}	38 - 39	0,304 321	2,0199
l_{13}	01 - 12	-77,570 157	2,5000	l_{38}	39 - 21C	-43,586 961	2,3065
l_{14}	12 - 13	-14,640 803	2,1703	l_{39}	21C - 27	20,650 092	2,5573
l_{15}	13 - 14	62,829 078	2,0050	l_{40}	27 - 28	15,681 932	2,3065
l_{16}	14 - 15	4,362 498	1,9157	l_{41}	28 - 20Z	11,471 086	1,9519
l_{17}	15 - 16	-74,508 135	1,9774	l_{42}	20Z - 19	-18,071 142	1,9570
l_{18}	16 - 17	- 0,146 672	2,2204	l_{43}	28 - 29	- 2,739 739	2,2000
l_{19}	17 - 25B	6,185 959	2,1190	l_{44}	29 - 30	0,628 165	2,0841
l_{20}	25B - 18	17,945 020	2,2045	l_{45}	30 - 31	- 9,386 722	2,1331
l_{21}	18 - 19	- 6,753 907	2,2847	l_{46}	31 - 32	9,825 783	2,2068
l_{22}	19 - 20	14,066 412	2,2760	l_{47}	32 - 33	10,898 493	2,2738
l_{23}	20 - 21	- 5,764 611	1,9287	l_{48}	33 - 45	-24,724 417	2,3707
l_{24}	20 - 20X	- 2,770 052	1,7436	l_{49}	45 - 44	- 4,724 838	2,3770
l_{25}	21 - 22	0,947 069	2,1610	l_{50}	44 - 56	-30,610 626	2,1954

TABELA IV

continuação ...

l_{ia}	N O D O	ΔC ajustada	$\sigma \times 10^{-2}$	l_{ia}	N O D O	ΔC ajustada	$\sigma \times 10^{-2}$
l_{51}	44 - 43	- 1,241 085	2,1977	l_{67}	55 - 54	- 2,479 595	2,2825
l_{52}	43 - 42	- 1,852 701	2,2091	l_{68}	54 - 53	3,047 459	2,2271
l_{53}	42 - 41	-17,020 793	1,9053	l_{69}	53 - 52	15,833 218	2,3833
l_{54}	41 - 40	12,689 485	2,2694	l_{70}	35 - 46	-45,242 656	2,4352
l_{55}	41 -21C	3,997 220	2,3152	l_{71}	46 - 47	11,205 628	2,3043
l_{56}	21C- 51	2.441 266	2,1471	l_{72}	47 - 48	6,844 561	1,9975
l_{57}	51 - 52	3,354 754	2,1977	l_{73}	48 - 49	-45,887 992	2,3238
l_{58}	52 - 64	-13,667 417	2,1142	l_{74}	49 - 50	6,257 356	2,0224
l_{59}	64 - 65	2,728 751	2,4249	l_{75}	50 - 51	- 3,042 995	2,0833
l_{60}	65 - 66	21,142 019	2,1909	l_{76}	50 - 62	- 6,823 849	2,2561
l_{61}	66 -20W	6,440 617	2,1260	l_{77}	62 - 61	24,588 446	2,0075
l_{62}	20W- 68	- 3,534 520	2,3770	l_{78}	61 - 60	-12,497 948	2,2956
l_{63}	68 -21G	1,673 998	2,2472	l_{79}	60 - 59	- 4,163 484	2,2338
l_{64}	21G- 56	-35,072 736	2,1771	l_{80}	59 - 58	17,227 512	2,0809
l_{65}	28 - 40	-27,648 369	2,0199	l_{81}	58 - 57	-10,957 997	2,0248
l_{66}	21G- 55	-31,184 530	1,9365	l_{82}	57 - 46	14,207 767	2,1166

Variância "a priori" : 1,0 (KGal.m)²

Variância "a posteriori": 0,848 (KGal.m)²

T A B E L A V

Número geopotencial das RNs da planta I (em u.g.p)

RNs	C	RNs	C	RNs	C
01	978,9588	26	921,3122	51	869,3626
02	963,2076	27	887,5798	52	872,7173
03	951,9684	28	903,2619	53	856,8841
04	938,7463	29	900,5222	54	853,8366
05	917,0759	30	901,1504	55	856,3162
06	943,2207	31	891,7636	56	852,4280
07	927,6290	32	901,5894	57	879,7863
08	869,2932	33	912,4879	58	890,7443
09	884,9352	34	962,0352	59	873,5168
10	-----	35	939,2367	60	877,6802
11	892,2226	36	891,3935	61	890,1782
12	901,3886	37	907,3958	62	865,5898
13	886,7478	38	910,2123	63	-----
14	949,5769	39	910,5166	64	859,0499
15	953,9394	40	875,6136	65	861,7787
16	879,4313	41	862,9241	66	882,9207
17	879,2846	42	879,9449	67	-----
18	903,4156	43	881,7976	68	885,8268
19	896,6619	44	883,0387	20V	864,3945
20	910,7283	45	887,7635	20W	889,3613
21	904,9637	46	893,9940	20X	907,4582
22	905,9107	47	805,1997	20Z	914,7330
23	906,5159	48	912,0442	21C	866,9213
24	959,8799	49	866,1562	21G	887,5008
25	897,7712	50	872,4136	21B	885,4706

NOTA: as RNs de nº 10, 63 e 67 não fazem parte dos circuitos estudados.

C A P Í T U L O V

ALTITUDES5.1 - As altitudes obtidas do nivelamento

Como foi dito no primeiro capítulo, o desnível entre dois pontos, obtido pelo nivelamento geométrico, vai depender do percurso seguido na condução das operações para conectar os dois pontos. Assim, cada percurso arbitrário dará um valor para a altitude do ponto final da linha, o que não poderá ser admitido em trabalhos geodésicos de precisão.

Na Figura 3.1.1 vemos que esta discrepância ocorre devido ao não-parallelismo das superfícies equipotenciais.

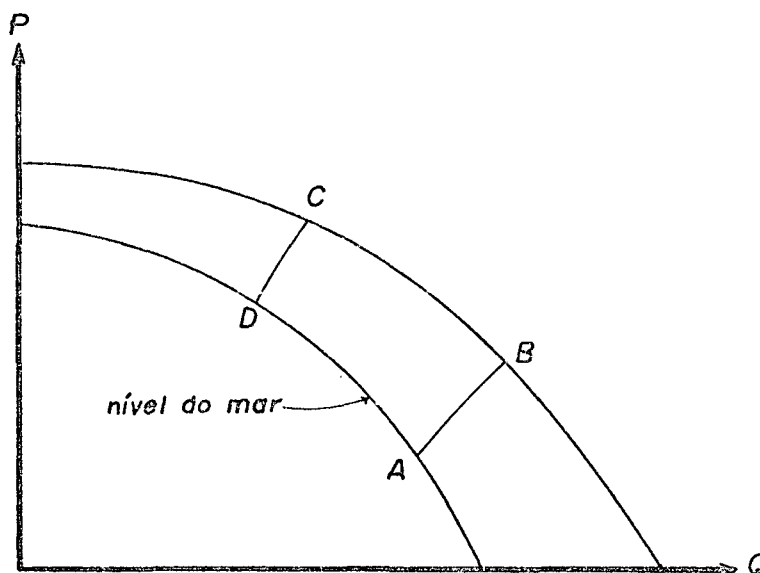


Fig. 5.1.1. - Erro no nivelamento geométrico devido ao não parallelismo das superfícies equipotenciais

Se efetuarmos uma operação de nivelamento de A para B e posteriormente de B para C, ao longo da superfície equipotencial, a altitude obtida para C será igual àquela obtida para o ponto B, considerando que a linha de colimação do instrumento mantém-se paralela à superfície equipotencial que liga B a C. (27)

Por outro lado, se partirmos de D para C, uma outra altitude será obtida para o ponto C, uma vez que este caminho é diferente do anterior.

Sendo necessária a unicidade de resultados, alguma correção deve ser introduzida nos valores obtidos. Esta correção é aquela devida ao não-paralelismo das superfícies equipotenciais, mais conhecida como correção ortométrica.

Existem várias fórmulas que nos fornecem o valor da correção ortométrica (dh'). RAPP (28) apresenta a seguinte expressão:

$$dh' = (A h_m + B h_m^2 + C h_m^3) d\phi' \quad (5.3.1)$$

onde A, B e C são coeficientes que variam com a latitude, podendo ser pré-calculados. No trabalho acima referido encontramos uma tabela com estes coeficientes calculados para as latitudes variando de 0° a 90° , com intervalos de $10'$. No Apêndice apresentamos parte desta tabela para as latitudes do Brasil (Tabela A - Correção Ortométrica); h_m é a altitude média da linha de nivelamento e $d\phi'$ a amplitude da mesma, em minutos de arco. Obtém-se dh' na mesma unidade de h_m .

Outra fórmula que nos permite obter diretamente esta correção é: (29)

$$dh' = 1542 \times 10^{-9} h_m d\phi' \text{ sen } (2\phi) \quad (5.1.2)$$

onde h_m e $d\phi'$ tem o mesmo significado anterior; ϕ é a latitude média da região onde se desenvolve a linha de nivelamento. Também obtemos aqui dh' na mesma unidade de h_m .

De posse da correção devida ao não-paralelismo das superfícies equipotenciais, podemos calcular a altitude de um ponto genérico i, integrante de uma rede de nivelamento de precisão, por:

$$H_i = H_{i-1} + \Delta z \pm dh' \quad (5.1.3)$$

onde

Δz = diferença de nível entre os pontos $\underline{i-1}$ e \underline{i} ;

dh' = correção ortométrica (negativa quando a linha se desenvolve para os pólos);

H_{i-1} e H_i = altitudes dos pontos $\underline{i-1}$ e \underline{i} , respectivamente.

Uma fórmula para o cálculo da altitude média \underline{h}_m , utilizada nas expressões (5.1.2) e (5.1.3), utilizando a distância entre as estações intermediárias de um nivelamento geométrico como peso, é apresentada em RAPP (30):

$$h_m = \frac{h_o s_o + h_n s_{n-1} + \sum_{i=1}^n h_i (s_{i-1} + s_i)}{2 \sum_{i=0}^{n-1} s_i} \quad (5.1.4)$$

onde

- h_o e h_n são as altitudes da primeira e última estações, respectivamente, com pontos intermediários $h_1 \dots h_{n-1}$;
- s_o é a distância do primeiro ponto ao segundo e s_{n-1} a distância do penúltimo ao último ponto, com distâncias intermediárias $s_1 \dots s_{n-1}$.

Uma altitude obtida do nivelamento depois de ter sido afetada de "correção ortométrica" não é transformada em "altitude ortométrica", como sugere a denominação. A altitude ortométrica é uma altitude científica, conforme veremos no parágrafo seguinte, ao passo que a "correção ortométrica" é uma correção estritamente teórica, porém, na ausência de valores de gravidade é ela aplicada em todos os nivelamentos de precisão. (31)

Apesar de o termo já ser consagrado, talvez seja conveniente utilizar a denominação "correção devida ao não-pararelismo das superfícies equipotenciais" em vez de "correção ortométrica".

5.2 - Altitude ortométrica

Consideremos uma operação de nivelamento partindo de um ponto O no geóide até um ponto P qualquer da superfície física da Terra, acompanhado de gravimetria (fig. 5.2.1):

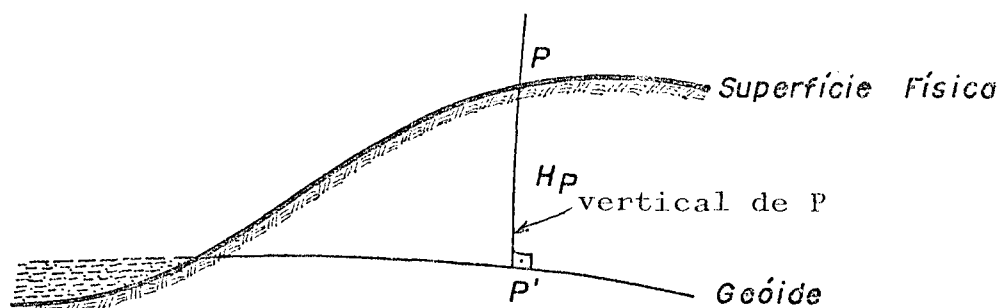


Fig. 5.2.1.- Altitude Ortométrica

A altitude ortométrica do ponto P é a distância do geóide ao ponto P , contada ao longo da vertical.

Se dispomos de informações gravimétricas, podemos obter a expressão que nos fornece a altitude ortométrica de P utilizando o teorema do valor médio para integrais que diz: " se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então haverá um número z no intervalo aberto (a, b) tal que:

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (5.2.1)$$

Este teorema é utilizado para determinar o valor da gravidade média ao longo da vertical de P , entre o geóide e a superfície física (\bar{g}_m). (32)

As seguintes quantidades do nosso problema são e quivalentes às quantidades relacionadas na expressão (5.2.1):

$$\begin{aligned} \bar{g}_m &= f(z) \\ g &= f(x) \\ 0 &= a \quad (\text{geóide}) \\ H_P &= b \quad (\text{altitude ortométrica do ponto } P) \end{aligned}$$

Fazendo as substituições teremos:

$$\bar{g}_m = \frac{1}{H_P} \int_0^{H_P} g \, dz \quad \text{ou} \quad H_P = \frac{\int_0^{H_P} g \, dz}{\bar{g}_m} \quad (5.2.2)$$

Se analisarmos o numerador da expressão (5.2.2) veremos que ele representa o número geopotencial do ponto P (veja equações 2.3.4 e 2.3.5). Então:

$$H_P = \frac{C_P}{\bar{g}_m} \quad (5.2.3)$$

Assim, para obtermos a altitude ortométrica de P devemos conhecer o valor médio da gravidade entre o geóide e a superfície física da Terra, ao longo da vertical de P. Em vista disto, podemos notar o caráter puramente teórico da altitude ortométrica, pois não podemos introduzir na crosta terrestre para efetuar observações de gravidade entre o geóide e o geope do ponto P. Também, o não conhecimento da densidade das massas acima do geóide, com suficiente precisão, dificulta a obtenção da altitude ortométrica.

5.3 - Altitudes científicas

Na impossibilidade de obter o valor médio da gravidade entre o geóide e o geope de um ponto do qual se quer obter a altitude ortométrica, alguns geodestas têm procurado, através de reduções gravimétricas, desenvolver uma função que seria uma aproximação matemática da quantidade \bar{g}_m , numa tentativa de se conseguir um valor para a altitude de um ponto da superfície da Terra, bem próximo da altitude ortométrica. Estas altitudes, juntamente com a altitude ortométrica, são denominadas de altitudes científicas, para as quais podemos introduzir a seguinte expressão geral:

$$H_o = \frac{C_P}{\gamma_Q} \quad (5.3.1)$$

onde γ_Q é um valor particular da gravidade no ponto Q, situado entre o geóide e o geope do ponto P. Se conseguíssemos obter um valor de $\gamma_Q = \bar{g}_m$, H_o seria a altitude ortométrica rigorosa.

5.3.1 - Altitude de Helmert

Em 1890, F. R. Helmert publicou sua fórmula para obtenção de um valor aproximado da gravidade entre o geóide e o ponto na superfície da Terra, do qual se quer obter a altitude.

Para melhor entender o método de Helmert, consideremos a figura (5.3.1):

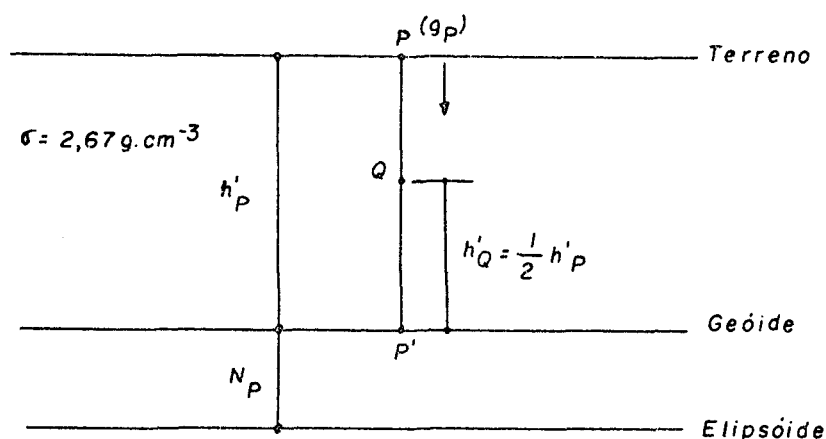


Fig. 5.3.1 - Altitude de Helmert

O valor da gravidade entre o geóide e o terreno, segundo Helmert, é obtido da seguinte forma:

- mede-se o valor de g na superfície da Terra (g_P);
- reduz o mesmo ao ponto médio entre o geóide e o terreno (ponto Q) por meio de uma correção "free-air";
- efetua-se uma dupla correção de Bouguer (somente para a componente vertical de atração das massas topográficas) para o platô de espessura $(h'_P - h'_Q)$.

- a) Correção "free-air": reduz a gravidade medida na superfície da Terra para um ponto abaixo (correção positiva) ou acima (correção negativa) da mesma.

$$C_F = 0,3086 h$$

onde C_F é a correção "free-air"; 0,3086 é o gradiente da gravidade normal (em mGal/m) e h é a distância vertical do ponto de observação de gravidade ao ponto de redução.

- b) Correção de Bouguer (C_B):

$$C_B = - A - B + C$$

sendo:

A - componente vertical de atração das massas topográficas;

B - diferença entre as componentes verticais de atração produzida pela "calota" e pelo "platô" de Bouguer. É tabelada em função da altitude; (33)

C - correção do terreno.

A componente vertical da atração (A) é obtida por:

$$A = 2\pi K \sigma h$$

sendo: $K = 6672 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ (constante gravitacional de Newton);

σ = densidade das massas topográficas acima do geóide, assumida na maioria dos casos como sendo $2,67 \text{ g/cm}^3$.

h = distância vertical do ponto de observação da gravidade, ao ponto de redução.

Com estes valores obtemos:

$$A = 0,1119 h \quad (\text{com } h \text{ em metros e } A \text{ em mGal})$$

Agora, podemos calcular o valor da gravidade no ponto médio (Q) entre o geóide e a superfície da Terra, pelo método de Helmert (Fig. 5.3.1):

$$\bar{g}_Q^H = \bar{g}_P + C_F - A$$

$$\bar{g}_Q^{-H} = g_P + 0,3086 \frac{h'_P}{2} - 0,1119 h'_P$$

$$\bar{g}_Q^{-H} = g_P + 0,0424 h'_P \quad (5.3.2)$$

Obtém-se a altitude de Helmert pela substituição de γ_Q na (5.3.1) por \bar{g}_Q^{-H} obtido pela (5.3.2).

5.3.2 - Altitude de Vignal

Em 1954, J. Vignal apresentou uma fórmula que também fornece um valor aproximado da gravidade média, ao longo da vertical, entre um ponto na superfície física da Terra e o geóide.

O método de Vignal é explicado na Figura 5.3.2:

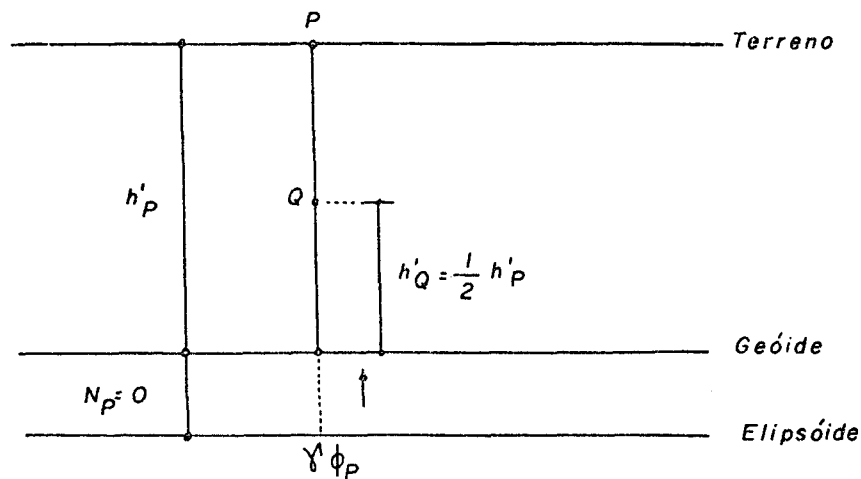


Fig.5.3.2 - Altitude de Vignal

Obtém-se o valor de \bar{g}_Q^{-V} em dois passos:

- (1) calcula-se a gravidade normal (no elipsóide) para a latitude do ponto P (γ_{ϕ_P});
- (2) reduz-se este valor ao ponto médio Q, por uma correção ao ar livre ("free-air") negativa.

Então:

$$\bar{g}_Q^{-V} = \gamma_{\phi_P} - 0,3086 \frac{h'_P}{2} \quad (5.3.3)$$

Note-se que, ao efetuar a redução, J. Vignal considera como nula a ondulação do geóide (N_P).

Na expressão (5.3.3) com h'_P em metros e $\gamma\phi_P$ em mGal, obtém-se \bar{g}_Q^V também em mGal.

As altitudes de Vignal são obtidas pela introdução de \bar{g}_Q^V na expressão (5.3.1) em substituição a $\bar{\gamma}_Q$.

5.3.3. - Altitude de Baranov

Obtém-se a altitude de Baranov pela introdução na expressão (5.3.1), em substituição a $\bar{\gamma}_Q$, da média entre o valor medido no ponto P na superfície da Terra e o correspondente valor da gravidade normal para a latitude do ponto no elipsóide (Fig. 5.3.3):

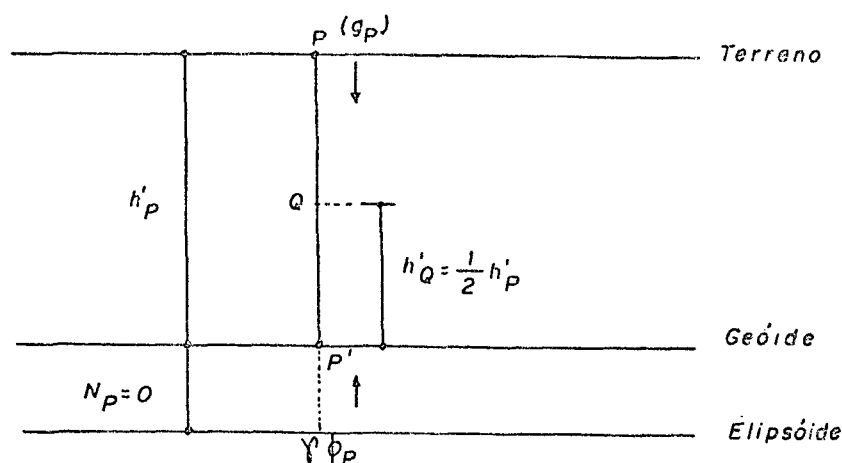


Fig. 5.3.3. - Altitude de Baranov

$$\bar{g}_Q^B = \frac{g_P + \gamma\phi_P}{2} \quad (5.3.4)$$

Notar também que aqui a ondulação do geóide (N_P) é assumida como sendo nula.

Uma modificação do método de Baranov é apresentada em KRAKIWSKY (34), onde se obtém \bar{g}_Q^B da seguinte forma:

- (a) o valor de gravidade observado em P é reduzido para o ponto médio da vertical (Q) por meio de uma correção "free-air" positiva;
- (b) a gravidade normal calculada é reduzida para o mesmo ponto por uma correção "free-air" negativa;

(c) obtém-se \bar{g}_Q^B pela média dos resultados de (a) e (b).

Numericamente:

$$\bar{g}_Q^B = \frac{g_P + 0,3086 \frac{h'_P}{2}}{2} + \frac{\gamma_{\phi P} - 0,3086 \frac{h'_P}{2}}{2} \quad (5.3.5)$$

Observe-se que simplificando a (5.3.5) obtém-se a (5.3.4).

5.3.4 - Altitude dinâmica

A altitude dinâmica de um ponto P qualquer é de finida como sendo a distância existente entre o geóide e o geope de P, porém não é contada ao longo da vertical de P, mas sim ao longo da vertical de um ponto situado no mesmo geope numa latitude de ϕ arbitrária, usualmente 45° .

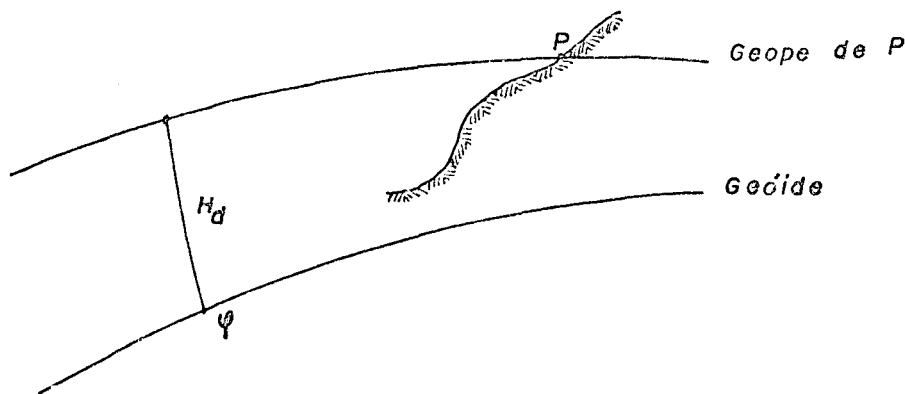


Fig. 5.3.5- Altitude Dinâmica

Sendo a diferença de geopotencial entre o geope de P e o geóide igual ao número geopotencial (C_p) e assumindo ser o valor da gravidade entre o geope de P e o geóide igual à gravidade normal à latitude ϕ , calculamos a altitude dinâmica por: (35)

$$H_d = \frac{C_p \text{ (KGal x m)}}{\gamma_{\phi} \text{ (Kgal)}} \quad (5.3.6)$$

onde γ_{ϕ} é a gravidade normal para a latitude ϕ , na superfície do elipsóide de referência.

Note-se que pontos de u'a mesma superfície equipotencial apresentam a mesma altitude dinâmica.

5.3.5 - Altitude ortométrica "free-air"

Para se obter esta altitude para um dado ponto P, basta dividir o número geopotencial de P pelo valor particular da gravidade calculado da seguinte maneira (Fig. 5.3.4):

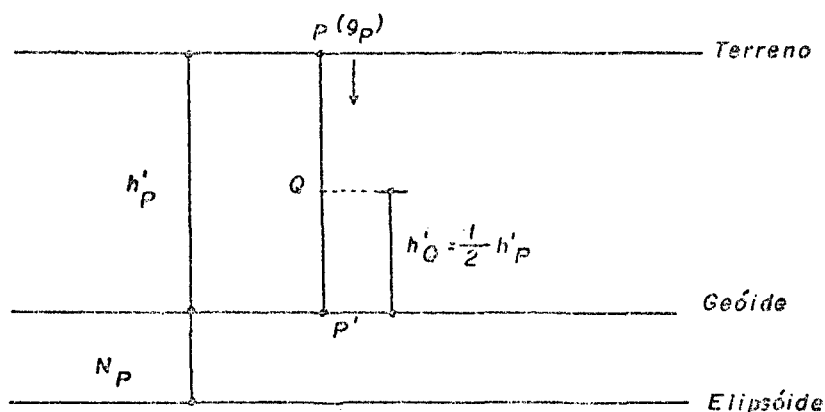


Fig. 5.3.4 - Altitude ortométrica "free-air"

- (a) observa-se o valor da gravidade no ponto P (g_P);
- (b) conhecendo-se a altitude aproximada de P, acima do geóide, efetua-se a redução do valor de g observado ao ponto médio Q, por meio de uma correção "free-air" positiva. (36)

Numericamente:

$$\bar{g}_Q^F = g_P + 0,3086 \frac{h'_P}{2} \quad (5.3.7)$$

5.4 - Influência do erro em \bar{g}_m no cálculo da altitude ortométrica

Vimos que, para conhecer rigorosamente a altitude ortométrica, teríamos de conhecer o valor da gravidade média, ao longo da vertical, entre o ponto na superfície da Terra e o geóide.

Como não podemos conhecer este valor, a altitude ortométrica rigorosa não pode ser determinada. Desta forma, vimos alguns tipos de altitudes científicas que, como pode-se perceber, ten

tam chegar a um ponto comum, isto é: encontrar um valor de g que seria próximo do valor real exigido para determinação da altitude ortométrica.

Agora vamos analisar o efeito de um provável erro na busca deste valor.

Suponhamos que o desnível bruto entre um ponto P e o geóide foi de 900 metros, determinado por nivelamento de precisão, acompanhado de determinações gravimétricas. Suponhamos ainda que, das várias informações gravimétricas obtidas juntamente com as operações de nivelamento, chegou-se ao valor de 980.062 mGal para a gravidade média entre o ponto inicial das observações (no caso o geóide) e o ponto final.

Então:

$$C_P = 980.062 \text{ mGal} \times 900 \text{ m}$$

$$C_P = 880.255.800 \text{ mGal.m}$$

Na hipótese do valor real da gravidade média, ao longo da vertical, entre o geóide e o ponto P (\bar{g}_m), o qual não está ao nosso alcance, ser de 980.150 mGal, podemos obter a altitude ortométrica pela expressão (5.2.3):

$$H_P = \frac{880.255.800 \text{ mGal.m}}{980.150 \text{ mGal}} = \underline{898,083 \text{ m}}$$

Este valor hipotético \bar{g}_m não pode ser determinado, mas, se considerarmos que obtivemos através de reduções gravimétricas um valor que difere daquele de ± 50 mGal, verifica-se facilmente que isto acarretará erro da ordem de 4,6 cm para um desnível bruto de 900 metros ($\approx 1/20.000$).

Por outro lado, se analisarmos as fórmulas deduzidas para o cálculo do valor particular da gravidade, a ser introduzido na expressão geral das altitudes científicas (5.3.1), veremos que em algumas delas não se considera a densidade das massas topográficas acima do geóide, outras assumem esta mesma densidade como sendo constante ($2,67\text{g/cm}^3$), mesmo sabendo-se que isto não ocorre. A adoção desta hipótese simplificativa vai acarretar também erros no valor da altitude científica do ponto, os quais têm uma magnitude bas-

tante pequena, como é mostrado em HEISKANEN & MORITZ (37), onde se afirma que um erro de $0,6 \text{ g/cm}^3$ no valor da densidade (o que corresponde praticamente à variação máxima da densidade das rochas) falsificará uma altitude de 1000 metros, por somente 25 mm.

5.5 - Altitude normal

Para efetuarmos a redução de gravidade, como vimos, há a necessidade do conhecimento da densidade das massas topográficas acima do geóide, geralmente assumida como $2,67 \text{ g/cm}^3$. Por outro lado, na redução ao ar livre ("free-air"), da gravidade observada na superfície da Terra ao geóide, toma-se o gradiente vertical da gravidade normal, apesar de estarmos reduzindo gravidade observada. É evidente que estas aproximações falsificarão os resultados.

A altitude normal foi introduzida por M.S. Molodensky (38), objetivando eliminar os inconvenientes das aproximações, ou seja, obtém-se a altitude normal sem necessidade de informações sobre a estrutura da crosta terrestre. Utiliza-se a gravidade normal à superfície do elipsóide e, como não existem massas acima deste modelo, a redução ao ar livre é perfeitamente adequada.

Na nova teoria de Molodensky, podemos calcular a altitude geométrica (terceira coordenada geodésica) pela expressão:

$$h_P = H_{nP}^M + \zeta_P^M \quad (5.4.1)$$

onde H_{nP}^M é a altitude normal de Molodensky e ζ_P^M é a anomalia de altitude (Fig. 5.4.1).

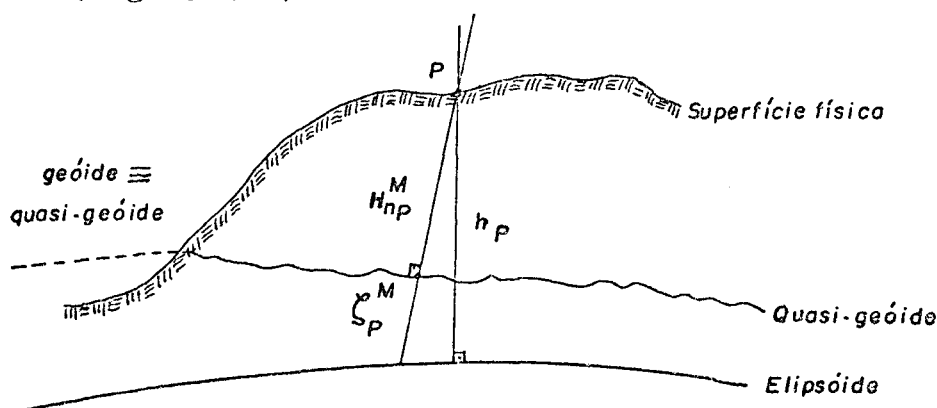


Fig. 5.4.1 - Altitude normal de Molodensky

Para melhor visualização da anomalia de altitude (ζ), consideremos uma superfície intermediária ao elipsóide e à superfície física, onde o potencial normal (U) em Q é igual ao geopotencial (W) no correspondente ponto P , isto é, $W_P = U_Q$, sendo P e Q situados na mesma normal ao elipsóide (Fig. 5.4.2). Esta superfície foi denominada "teluróide" por Hirvonen (39).

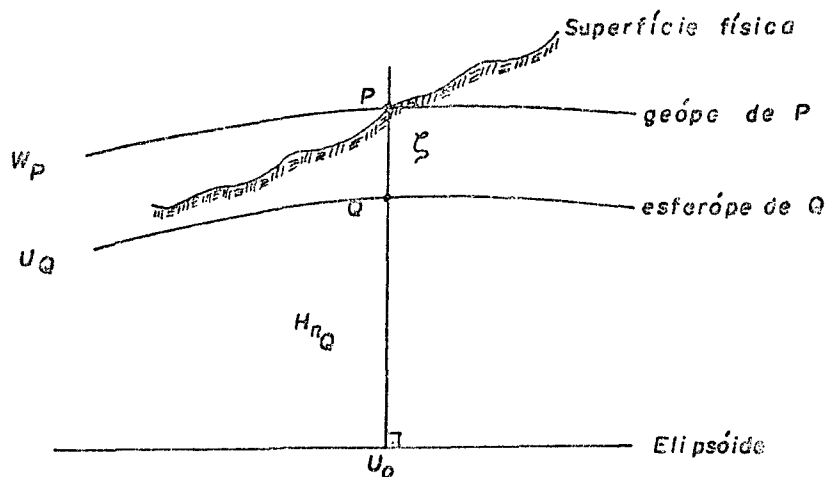


Fig. 5.4.2 - Anomalia de altitude

A anomalia de altitude é considerada como sendo a distância entre a superfície equipotencial $W=W_P=\text{constante}$ e o esferaóide de Q , onde $U_Q = W_P$.

Se plotarmos a anomalia de altitude acima do elipsóide obteremos uma superfície que foi denominada de "quasi-geóide" (Fig. 5.4.1) por M.S. Molodensky.

Para calcularmos a altitude normal de Molodensky, basta introduzirmos na expressão geral das altitudes científicas o valor da gravidade normal para o ponto médio entre a superfície física e o quasi-geóide, que é aproximadamente:

$$\bar{\gamma}^M = \gamma\phi_P - 0,3086 \frac{h'_P}{2} \quad (5.4.2)$$

Observe que não necessitamos do conhecimento de densidade das massas terrestres, nem do gradiente da gravidade real, pois estamos efetuando redução acima do elipsóide, onde não existem aquelas massas.

Se compararmos a altitude obtida pelo método de Vignal (5.3.3) com a de Molodensky (5.4.2) vemos que elas são numericamente equivalentes, mas do ponto de vista teórico são diferentes, pois não representam grandezas medidas em mesmos limites.

5.6 - Conclusões e recomendações

Efetuamos uma comparação entre os diferentes valores de altitudes obtidos para os pontos da rede estudada, que apresentamos na Tabela VI, onde tomamos a altitude de Helmert como referencial, por ser a que julgamos mais se aproximar da altitude ortométrica, das apresentadas na Tabela V.

A diferença entre as altitudes calculadas pelos métodos de Helmert e Vanícek (altitude ortométrica "free-air") é apenas com relação ao termo A da correção de Bouguer (componente vertical da gravidade devido à atração das massas topográficas), levada em conta no método de Helmert. Desta forma, esperávamos que nos pontos de maior altitude (maior efeito das massas topográficas) ocorreria maior diferença entre estas duas altitudes. Caso contrário (nos pontos de menor elevação), a diferença esperada entre as mesmas seria menor.

De acordo com o esperado, conforme se vê na Tabela VI, no ponto culminante da rede (Rn 01) ocorreu a maior diferença entre as altitudes de Helmert e "Free-air" de 11,43 cm que corresponde ao efeito das massas topográficas na componente vertical da gravidade. Da mesma forma, no ponto mais baixo (RN 56) ocorreu a menor diferença entre as duas altitudes, que foi de 8,67 cm.

Com relação à altitude obtida pela introdução da correção do não-paralelismo das superfícies equipotenciais, observamos que esta correção diminui bastante as diferenças entre as altitudes brutas e a de Helmert, aqui tomada como referência. A maior divergência entre a altitude bruta e a de

TABELA V - ALTITUDE DOS PONTOS DA REDE (em metros)

RNs	HELMERT [H1]	FREE-AIK [H2]	BARANDV [H3]	VIGNAL [H4]	C. OKT. [H5]	DINAMICA [H6]	BRUTA [H7]
1	1000.1587	1000.0443	1000.0901	1000.1358	1000.1580	998.3070	1000.1336
2	984.0633	983.9526	983.9965	984.0405	984.0658	982.2445	984.0442
3	972.5782	972.4701	972.5128	972.5556	972.5830	970.7832	972.5601
4	959.0682	958.9630	959.0038	959.0445	959.0751	957.2997	959.0533
5	936.9242	936.8238	936.8623	936.9007	936.9370	935.2010	936.9154
6	963.6383	963.5322	963.5729	963.6137	963.6497	961.8626	963.6289
7	947.7067	947.6040	947.6428	947.6816	947.7212	945.9627	947.7010
8	888.1057	888.0155	888.0454	888.0752	888.1225	886.4740	888.1023
9	904.0820	903.9885	904.0225	904.0565	904.1045	902.4251	904.0853
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	911.5353	911.4403	911.4701	911.4998	911.5452	909.8505	911.5327
12	920.8940	920.7971	920.8364	920.8757	920.8980	919.2037	920.8777
13	905.9337	905.8399	905.8777	905.9154	905.9293	904.2735	905.9210
14	970.1332	970.0257	970.0687	970.1118	970.1226	968.3444	970.1135
15	974.5915	974.4830	974.5258	974.5686	974.5806	972.7931	974.5715
16	898.4591	898.3609	898.4021	898.4374	898.4585	896.8124	898.4487
17	898.3095	898.2172	898.2520	898.2868	898.3100	896.6628	898.3005
18	922.9705	922.8731	922.9070	922.9408	922.9666	921.2708	922.9576
19	916.0699	915.9740	916.0066	916.0393	916.0679	914.3836	916.0573
20	930.4444	930.3455	930.3779	930.4104	930.4335	928.7280	930.4231
21	924.5544	924.4567	924.4883	924.5200	924.5481	922.8495	924.5354
22	925.5204	925.4224	925.4542	925.4860	925.5204	923.8152	925.5065
23	926.1383	926.0402	926.0718	926.1033	926.1425	924.4323	926.1276
24	980.6596	980.5497	980.5953	980.6409	980.6425	978.8510	980.7091
25	917.1967	917.1006	917.1396	917.1787	917.1876	915.5148	917.2505
26	941.2522	941.1509	941.1920	941.2332	941.2350	939.5211	941.2935
27	906.7871	906.6931	906.7266	906.7600	906.7983	905.1220	906.7925
28	922.8136	922.7163	922.7497	922.7830	922.8165	921.1140	922.8083
29	920.0140	919.9173	919.9499	919.9825	920.0170	918.3202	920.0098
30	920.6573	920.5604	920.5919	920.6235	920.6589	918.9608	920.6521
31	911.0622	910.9673	910.9993	911.0314	911.0679	909.3885	911.0624
32	921.1033	921.0064	921.0382	921.0701	921.1069	919.4085	921.1019
33	932.2394	932.1401	932.1725	932.2050	932.2425	930.5224	932.2375
34	982.8640	982.7536	982.7989	982.8442	982.8509	981.0489	982.9105
35	959.5680	959.4628	959.5055	959.5482	959.5575	957.7998	959.6172
36	911.1944	911.0995	911.1362	911.1729	911.1793	909.5209	911.2388
37	927.0351	926.9369	926.9742	927.0116	927.0123	925.3296	927.0717
38	929.9134	929.8146	929.8512	929.8878	929.8794	928.2018	929.9391
39	930.2248	930.1259	930.1617	930.1976	930.1846	928.5121	930.2443
40	894.5617	894.4702	894.5016	894.5330	894.5750	892.9193	894.5615
41	881.5940	881.5052	881.5361	881.5670	881.6238	879.9790	881.6169
42	898.9852	898.8928	898.9250	898.9573	899.0142	897.3362	899.0071
43	900.8773	900.7845	900.8166	900.8488	900.9070	899.2255	900.9009
44	902.1435	902.0505	902.0830	902.1155	902.1751	900.4911	902.1698
45	906.9726	906.8786	906.9102	906.9419	907.0036	905.3093	906.9993
46	913.3427	913.2474	913.2843	913.3213	913.3410	911.6630	913.4003
47	924.7908	924.6930	924.7309	924.7688	924.7922	923.0901	924.8521
48	931.7841	931.6848	931.7231	931.7613	931.7881	930.0699	931.8467
49	884.8958	884.8063	884.8397	884.8730	884.9081	883.2750	884.9672
50	891.2890	891.1981	891.2319	891.2657	891.3045	889.6560	891.3619
51	888.1715	888.0813	888.1144	888.1474	888.1984	886.5447	888.1919
52	891.5981	891.5072	891.5405	891.5738	891.6268	889.9657	891.6201
53	875.4193	875.3317	875.3638	875.3959	875.4480	873.8196	875.4436
54	872.3044	872.2174	872.2488	872.2803	872.3363	870.7119	872.3300
55	874.8354	874.7479	874.7803	874.8128	874.8716	873.2405	874.8632
56	870.8634	870.7767	870.8082	870.8396	870.9100	869.2754	870.8951
57	898.8243	898.7324	898.7678	898.8032	898.8273	897.1744	898.8837
58	910.0213	909.9266	909.9628	909.9990	910.0239	908.3490	910.0806
59	892.4175	892.3264	892.3615	892.3965	892.4248	890.7810	892.4811
60	896.6695	896.5776	896.6133	896.6490	896.6800	895.0267	896.7369
61	909.4387	909.3441	909.3808	909.4174	909.4501	907.7717	909.5081
62	884.3140	884.2246	884.2593	884.2940	884.3297	882.6974	884.3880
63	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
64	877.6307	877.5426	877.5757	877.6088	877.6639	876.0282	877.6572
65	880.4137	880.3251	880.3603	880.3955	880.4517	878.8109	880.4464
66	902.0167	901.9237	901.9600	901.9963	902.0536	900.3708	902.0473
67	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
68	904.9857	904.8921	904.9279	904.9637	905.0223	903.3343	905.0183
69	883.0955	883.0063	883.0370	883.0678	883.0823	881.4784	883.1056
70	908.5971	908.5027	908.5395	908.5762	908.6390	906.9387	908.6282
71	927.6140	927.5157	927.5477	927.5798	927.5967	925.9031	927.6212
72	934.5356	934.4358	934.4699	934.5040	934.5350	932.8118	934.5243
73	885.6812	885.5916	885.6222	885.6528	885.6725	884.0552	885.7017
74	906.6933	906.5993	906.6372	906.6751	906.7233	905.0414	906.7295
75	904.6301	904.5366	904.5714	904.6062	904.5954	902.9711	904.6219

TABELA VI - DIFERENÇAS DAS ALTITUDES EM RELAÇÃO A ALT. DE HELMERT
(em metros)

RNs	H1-H2	H1-H3	H1-H4	H1-H5	H1-H6	H1-H7
1	.1143	.0686	.0228	1.8517	.0007	.0251
2	.1107	.0668	.0229	1.8189	-.0025	.0191
3	.1081	.0654	.0226	1.7950	-.0048	.0181
4	.1051	.0644	.0237	1.7684	-.0069	.0149
5	.1003	.0619	.0235	1.7231	-.0128	.0088
6	.1061	.0654	.0247	1.7758	-.0114	.0094
7	.1027	.0639	.0251	1.7440	-.0145	.0057
8	.0902	.0603	.0304	1.6317	-.0168	.0034
9	.0934	.0595	.0255	1.6568	-.0225	-.0033
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	.0950	.0652	.0355	1.6788	-.0079	.0026
12	.0969	.0576	.0183	1.6903	-.0040	.0163
13	.0938	.0561	.0183	1.6602	.0039	.0127
14	.1076	.0645	.0214	1.7888	.0106	.0197
15	.1086	.0657	.0229	1.7984	.0109	.0200
16	.0923	.0570	.0217	1.6467	.0006	.0104
17	.0922	.0575	.0227	1.6466	-.0005	.0090
18	.0974	.0635	.0296	1.6977	.0039	.0129
19	.0959	.0632	.0306	1.6863	.0020	.0126
20	.0990	.0665	.0340	1.7164	.0109	.0213
21	.0977	.0661	.0344	1.7050	.0063	.0190
22	.0979	.0661	.0343	1.7052	-.0000	.0139
23	.0980	.0665	.0350	1.7059	-.0042	.0107
24	.1099	.0643	.0187	1.8086	.0171	-.0495
25	.0962	.0571	.0180	1.6819	.0071	-.0538
26	.1013	.0601	.0190	1.7311	.0172	-.0463
27	.0940	.0605	.0271	1.6651	-.0112	-.0054
28	.0973	.0640	.0306	1.6996	-.0029	.0053
29	.0968	.0641	.0315	1.6939	-.0030	.0042
30	.0969	.0653	.0338	1.6965	-.0016	.0052
31	.0949	.0629	.0308	1.6737	-.0057	-.0002
32	.0970	.0651	.0332	1.6949	-.0036	.0014
33	.0993	.0669	.0345	1.7171	-.0031	.0019
34	.1104	.0651	.0198	1.8151	.0131	-.0465
35	.1053	.0625	.0198	1.7682	.0105	-.0492
36	.0949	.0582	.0216	1.6735	.0151	-.0444
37	.0982	.0609	.0235	1.7055	.0228	-.0366
38	.0989	.0622	.0256	1.7116	.0340	-.0257
39	.0989	.0631	.0272	1.7127	.0402	-.0195
40	.0915	.0600	.0286	1.6424	-.0133	.0002
41	.0888	.0579	.0270	1.6150	-.0298	-.0229
42	.0924	.0601	.0279	1.6490	-.0290	-.0219
43	.0928	.0607	.0285	1.6518	-.0297	-.0236
44	.0930	.0605	.0280	1.6524	-.0316	-.0263
45	.0940	.0624	.0307	1.6633	-.0310	-.0267
46	.0954	.0584	.0215	1.6798	.0017	-.0576
47	.0978	.0599	.0220	1.7007	-.0014	-.0613
48	.0993	.0610	.0227	1.7142	-.0040	-.0626
49	.0895	.0561	.0228	1.6208	-.0123	-.0714
50	.0908	.0570	.0232	1.6329	-.0155	-.0729
51	.0902	.0572	.0241	1.6268	-.0269	-.0204
52	.0909	.0576	.0243	1.6324	-.0287	-.0220
53	.0876	.0555	.0234	1.5977	-.0287	-.0243
54	.0870	.0555	.0241	1.5925	-.0319	-.0256
55	.0875	.0551	.0227	1.5949	-.0362	-.0278
56	.0867	.0553	.0238	1.5880	-.0466	-.0317
57	.0924	.0569	.0215	1.6503	-.0025	-.0589
58	.0947	.0585	.0223	1.6723	-.0026	-.0593
59	.0910	.0560	.0210	1.6364	-.0073	-.0636
60	.0919	.0562	.0205	1.6428	-.0105	-.0674
61	.0945	.0579	.0213	1.6670	-.0114	-.0694
62	.0894	.0547	.0200	1.6166	-.0157	-.0740
63	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
64	.0880	.0550	.0219	1.6025	-.0332	-.0265
65	.0886	.0534	.0182	1.6028	-.0380	-.0327
66	.0930	.0567	.0204	1.6459	-.0369	-.0306
67	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
68	.0936	.0579	.0221	1.6514	-.0366	-.0326
69	.0891	.0584	.0277	1.6170	.0132	-.0101
70	.0944	.0576	.0209	1.6584	-.0419	-.0311
71	.0984	.0663	.0343	1.7109	.0171	-.0072
72	.0998	.0657	.0316	1.7238	.0006	.0113
73	.0897	.0591	.0284	1.6261	.0087	-.0205
74	.0940	.0561	.0182	1.6518	-.0300	-.0362
75	.0935	.0587	.0239	1.6590	.0347	.0082

Helmert foi de - 7,4 cm (RN 62). Com a introdução da correção do não-paralelismo das superfícies equipotenciais, esta divergência passou para - 1,57cm. Isto mostra que, quando somente diferenças de nível são utilizadas para o estabelecimento de redes verticais, mesmo com a introdução da correção do não-paralelismo das superfícies equipotenciais, a precisão é comprometida.

Em vista disto, seria recomendável que todas as operações de nivelamento executadas no Brasil fossem acompanhadas de gravimetria, o que contribuiria não só para o cálculo dos números geopotenciais das RNs, como também para expandir a rede gravimétrica nacional, pois os valores de g medidos na superfície da Terra são importantes não só para a Geodésia, como também para outras ciências.

Provavelmente, a dificuldade do uso de potencial em redes de nivelamento origina do fato de que nós não temos uma apreciação natural desta quantidade, como temos de altitude. Por outro lado, considerando-se o fato de que a gravidade na superfície da Terra, em unidades usuais, é aproximadamente 1.000 Gals ou 1 KGal, os valores de geopotencial serão numericamente semelhantes aos de altitude (cerca de 2% menores, conforme pode-se notar pela Tabela V). Por isto é que se introduziu a unidade u.g.p. (unidade geopotencial) para os números geopotenciais.

A utilização do número geopotencial em redes de nivelamento trará uma contribuição fundamental ao estudo do campo gravitacional da Terra, pois é uma quantidade que pode ser medida no campo com a mesma precisão das outras operações geodésicas. Seu valor num ponto qualquer, relacionado a uma origem, é único e independente do caminho utilizado para a condução das operações de campo, para relacionar a origem com o ponto desejado.

Seria também prático que, ao se publicar uma lista de RNs nela aparecesse o valor da altitude bruta e o número geopotencial das mesmas, além da coordenada geodésica ϕ (Latitude), o que daria oportunidade ao usuário de obter diferentes tipos de altitude (Helmert, Vignal, etc.), segundo suas necessidades.

NOTAS DE REFERÊNCIA

- (01) HEISKANEN, W. A. & MORITZ, H. Physical Geodesy. San Francisco & London. H. Freeman and Company, 1966. p. 180.
- (02) KRAKIWSKY, E. J. Heights - A Thesis. Ohio, The Ohio State University, 1965. p. 73-73
- (03) MORITZ, H. Report of Spécial Study Group N° 5.39 of I.A.G. Fundamental Geodetic Constants. Canberra, XVII General Assembly of IUGG, 1980. p. 14.
- (04) HEISKANEN, W. A. & MORITZ, H. p. 02.
- (05) GEMAEL, C. Forma e Dimensões da Terra. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1963. p.31.
- (06) MORITZ, H. p.14
- (07) HEISKANEN, W. A. & MORITZ, H. p. 49
- (08) BAESCHLIN, C. F. Rapport Spécial sur le Nivellement et la pesanteur. Bulletin Géodésique (57): 248, 1960.
- (09) Ibid., p. 248.
- (10) MORITZ, H. p. 14.
- (11) I.A.G. Symposium of Florence. Bulletin Géodésique (45): 55, 1957.
- (12) GEMAEL, C. Geodésia Física. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. p. 3.12.
- (13) Ibid., p. 3.11.
- (14) Ibid., p. 3.14.
- (15) HEISKANEN, W. A. & MORITZ, H. p. 49.
- (16) THE INTERNATIONAL GRAVITY STANDARDIZATION NET 1971 (IGSN-71). I.A.G. Publication Speciale n° 4. 1971.
- (17) MORELLI, C. Gravimetria. Udino, Del Bianco Editore, 1968, p. 50.
- (18) BAESCHLIN, C. F. p. 252.
- (19) KRAKIWSKY, E. J. p. 33.

NOTAS DE REFERÊNCIA (continuação)...

- (20) BAESCHLIN, C. F. p. 278.
- (21) KRAKIWSKY, E. J. p. 21.
- (22) Ibid., p. 25.
- (23) LEVALLOIS, J. J. Sur la frequence des mesures de pesanteur dans le nivellements. Bulletin Géodésique (74). 317, 1964.
- (24) I.A.G. p. 59.
- (25) KAARIAIREN, E. Adjustment of the Norther Bloc in UELN and Accuracy of Geopotential Differences in It, Bulletin Géodésique, (57): 302, 1960.
- (26) Ibid., p. 302.
- (27) RAPP, R. H. The Orthometric Height. Ohio, The Ohio State University, 1961, p. 10.
- (28) Ibid., p. 16.
- (29) GEMAEL, C. Geodésia Física ... p. 8.3.
- (30) RAPP, R. H. p. 29
- (31) Ibid., p. 29
- (32) KRAKIWSKY, E. J. p. 73-74.
- (33) GEMAEL, C. Geodésia Física ... p. 7.7
- (34) KRAKISWKY, E. J. p. 98.
- (35) MILOS, P. et alli. The Theory of the Earths Gravity Field. London, E. S. Publishing Company, 1973. p. 294.
- (36) VANICEK, P. Heights Based on Gravity. In: Second International Symposium on problems related to the redefinition of North Americam Vertical Geodetic Network, Ottawa, 1980. p. 560.
- (37) HEISKANEN; W. A. & MORITZ, H. p. 169.
- (38) Ibid., p. 291.
- (39) Ibid., p. 292.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 - BAESCHLIN, C. F. Rapport Spécial sur le Nivellement et la pesanteur. Bulletin Géodésique (57): 246-310, 1960.
- 02 - GEMAEL, C. Forma e Dimensões da Terra. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1963. 157 p.
- 03 - _____ . Geodésia Física. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. 173 p.
- 04 - HEISKANEN, W. A. & MORITZ, H. Physical Geodesy. San Francisco & London, H. Freeman and Company, 1966, 364 p.
- 05 - I.A.G. Symposium of Florence. Bulletin Géodésique (45), 54-62, 1957.
- 06 - KAARIAIREN, E. Adjustment of the Northern Bloc in UELN and Accuracy of Geopotential Differences in It. Bulletin Géodésique (57). 299-305, 1960.
- 07 - KRAKIWSKY, E. J. Heights - A Thesis. Ohio, The Ohio State University, 1965. 157 p.
- 08 - LEVALLOIS, J. J. Sur la fréquence des mesures de pesanteur dans le Nivellements. Bulletin Géodésique (74): 317-325. 1964.
- 09 - MILOS, P. et alli. The Theory of the Earths Gravity Field. London, E. S. Publishing Company, 1973. 538p.
- 10 - MORELLI, C. Gravimetria. Udine, Del Bianco Editore, 1968, 575 p.
- 11 - MORITZ, H. Report of Spécial Study Group N° 5.39 of I.A.G. Fundamental Geodetic constants. Canberra, XVII General Assembly of IUGG, 1980. 34 p.
- 12 - RAPP, R. H. The Orthometric Height, Ohio, The Ohio State University, 1961. 117 p.
- 13 - THE INTERNATIONAL GRAVITY STANDARDIZATION NET 1971 (IGSN-71). I.A.G. Publication Spécial n° 4, 1971. 194p.
- 14 - VANICEK, P. Heights Based on Gravity. In: Second International Symposium on problems related to the redefinition of North American Vertical Geodetic Network, Ottawa, 1980. p. 560.

A P Ê N D I C E

TABELA A - CORREÇÃO ORTOMÉTRICA

$dh' = (Ah_m + Bh_m^2 + Ch_m^3) d\phi'$; h_m e dh' em cm; $d\phi'$ em minutos									
Lat.	A x 10 ⁹	Bx10 ¹⁶	Cx10 ²⁴		Lat.	Ax10 ⁹	Bx10 ¹⁶	Cx10 ²⁴	
80	00	0.00	0.00	0.00	87	00	370.51	13.30	4.17
	10	8.91	0.32	0.10		10	379.15	13.61	4.27
	20	17.82	0.64	0.20		20	387.78	13.92	4.36
	30	26.73	0.96	0.30		30	396.40	14.23	4.46
	40	35.64	1.28	0.40		40	405.00	14.54	4.56
	50	44.54	1.60	0.50		50	413.58	14.85	4.65
01	00	53.45	1.92	0.60	08	00	422.16	15.16	4.75
	10	62.35	2.24	0.70		10	430.72	15.46	4.85
	20	71.25	2.56	0.80		20	439.26	15.77	4.94
	30	80.15	2.88	0.90		30	447.79	16.08	5.04
	40	89.05	3.20	1.00		40	456.31	16.38	5.13
	50	97.94	3.52	1.10		50	464.81	16.69	5.23
02	00	106.83	3.84	1.20	09	00	473.29	16.99	5.32
	10	115.72	4.16	1.30		10	481.76	17.30	5.42
	20	124.60	4.47	1.40		20	490.21	17.60	5.52
	30	133.48	4.79	1.50		30	498.64	17.90	5.61
	40	142.35	5.11	1.60		40	507.06	18.20	5.70
	50	151.22	5.43	1.70		50	515.46	18.51	5.80
03	00	160.08	5.75	1.80	10	00	523.85	18.81	5.89
	10	168.94	6.07	1.90		10	532.21	19.11	5.99
	20	177.79	6.38	2.00		20	540.56	19.41	6.08
	30	186.64	6.70	2.10		30	548.89	19.71	6.18
	40	195.48	7.02	2.20		40	557.20	20.00	6.27
	50	204.31	7.34	2.30		50	565.50	20.30	6.36
04	00	213.14	7.65	2.40	11	00	573.77	20.60	6.46
	10	221.96	7.97	2.50		10	582.03	20.89	6.55
	20	230.77	8.29	2.60		20	590.26	21.19	6.64
	30	239.58	8.60	2.70		30	598.48	21.49	6.73
	40	248.37	8.92	2.79		40	606.67	21.78	6.83
	50	257.16	9.23	2.89		50	614.85	22.07	6.92
05	00	265.94	9.55	2.99	12	00	623.00	22.36	7.01
	10	274.71	9.86	3.09		10	631.13	22.66	7.10
	20	283.47	10.18	3.19		20	639.24	22.95	7.19
	30	292.23	10.49	3.29		30	647.33	23.24	7.28
	40	300.97	10.81	3.39		40	655.40	23.53	7.37
	50	309.70	11.12	3.48		50	663.45	23.82	7.46
06	00	318.42	11.43	3.58	13	00	671.47	24.10	7.55
	10	327.13	11.75	3.68		10	679.47	24.39	7.64
	20	335.83	12.06	3.78		20	687.45	24.68	7.73
	30	344.52	12.37	3.88		30	695.41	24.96	7.82
	40	353.20	12.68	3.97		40	703.34	25.25	7.91
	50	361.86	12.99	4.07		50	711.25	25.53	8.00

TABELA A - continuação ...

dh'=(Ah _m + Bh _m ² + Ch _m ³) dφ'; h _m e dh' em cm; dφ' em minutos									
Latitude		AX109	EX1016	CX1024	Latitude		AX109	EX1016	CX1024
14	00	719.13	25.81	8.09	21	00	1025.23	36.78	11.54
	10	726.99	26.10	8.18		10	1031.85	37.12	11.61
	20	734.83	26.38	8.27		20	1038.43	37.25	11.68
	30	742.64	26.66	8.36		30	1044.97	37.49	11.76
	40	750.42	26.94	8.44		40	1051.48	37.32	11.83
	50	758.18	27.21	8.53		50	1057.96	37.95	11.90
15	00	765.92	27.49	8.62	22	00	1064.39	38.18	11.98
	10	773.63	27.77	8.70		10	1070.80	38.41	12.05
	20	781.31	28.04	8.79		20	1077.16	38.64	12.12
	30	788.97	28.32	8.88		30	1083.49	38.87	12.19
	40	796.60	28.59	8.96		40	1089.79	39.09	12.26
	50	804.20	28.86	9.05		50	1096.04	39.32	12.33
16	00	811.78	29.14	9.13	23	00	1102.26	39.54	12.40
	10	819.33	29.41	9.22		10	1108.45	39.76	12.47
	20	826.85	29.68	9.30		20	1114.59	39.98	12.54
	30	834.34	29.94	9.39		30	1120.70	40.20	12.61
	40	841.81	30.21	9.47		40	1126.77	40.42	12.68
	50	849.24	30.48	9.56		50	1132.80	40.63	12.75
17	00	856.65	30.74	9.64	24	00	1138.79	40.85	12.81
	10	864.03	31.01	9.72		10	1144.75	41.06	12.88
	20	871.38	31.27	9.80		20	1150.67	41.27	12.95
	30	878.70	31.53	9.89		30	1156.54	41.48	13.01
	40	886.00	31.80	9.97		40	1162.38	41.69	13.08
	50	893.26	32.06	10.05		50	1168.18	41.90	13.15
18	00	900.49	32.31	10.13	25	00	1173.94	42.10	13.21
	10	907.69	32.57	10.21		10	1179.66	42.31	13.28
	20	914.86	32.83	10.29		20	1185.34	42.51	13.34
	30	922.00	33.09	10.37		30	1190.99	42.71	13.40
	40	929.11	33.34	10.45		40	1196.59	42.91	13.47
	50	936.19	33.59	10.53		50	1202.15	43.11	13.53
19	00	943.23	33.85	10.61	26	00	1207.67	43.31	13.59
	10	950.25	34.10	10.69		10	1213.15	43.50	13.65
	20	957.23	34.35	10.77		20	1218.58	43.70	13.71
	30	964.18	34.60	10.85		30	1223.98	43.89	13.77
	40	971.09	34.84	10.93		40	1229.34	44.08	13.83
	50	977.98	35.09	11.00		50	1234.65	44.27	13.89
20	00	984.83	35.34	11.08	27	00	1239.92	44.46	13.95
	10	991.65	35.58	11.16		10	1245.15	44.65	14.01
	20	998.43	35.82	11.23		20	1250.34	44.83	14.07
	30	1005.18	36.06	11.31		30	1255.49	45.02	14.13
	40	1011.90	36.31	11.39		40	1260.59	45.20	14.19
	50	1018.59	36.54	11.46		50	1265.66	45.38	14.24

TABELA A - continuação ...

$dh' = (Ah_m + Bh_m^2 + Ch_m^3) d\phi'$; h_m e dh' em cm; $d\phi'$ em minutos									
Latitude		AX109	BX1016	CX1024	Latitude		AX109	BX1016	CX1024
28	00	1270.67	45.56	14.30	35	00	1440.85	51.62	16.22
	10	1275.65	45.74	14.36		10	1443.89	51.73	16.25
	20	1280.58	45.91	14.41		20	1446.89	51.84	16.29
	30	1285.47	46.09	14.47		30	1449.83	51.94	16.32
	40	1290.32	46.26	14.52		40	1452.72	52.04	16.35
	50	1295.12	46.43	14.58		50	1455.57	52.14	16.38
29	00	1299.88	46.60	14.63	36	00	1458.37	52.24	16.42
	10	1304.60	46.77	14.68		10	1461.11	52.34	16.45
	20	1309.27	46.94	14.73		20	1463.81	52.44	16.48
	30	1313.90	47.10	14.79		30	1466.46	52.53	16.51
	40	1318.48	47.26	14.84		40	1469.06	52.62	16.54
	50	1323.02	47.43	14.89		50	1471.61	52.71	16.57
30	00	1327.51	47.59	14.94	37	00	1474.11	52.80	16.59
	10	1331.96	47.75	14.99		10	1476.55	52.89	16.62
	20	1336.36	47.90	15.04		20	1478.95	52.97	16.65
	30	1340.72	48.06	15.09		30	1481.30	53.05	16.67
	40	1345.04	48.21	15.14		40	1483.60	53.14	16.70
	50	1349.30	48.36	15.19		50	1485.85	53.22	16.73
31	00	1353.53	48.51	15.23	38	00	1488.05	53.29	16.75
	10	1357.70	48.66	15.28		10	1490.20	53.37	16.78
	20	1361.84	48.81	15.33		20	1492.30	53.44	16.80
	30	1365.92	48.96	15.37		30	1494.35	53.52	16.82
	40	1369.96	49.10	15.42		40	1496.34	53.59	16.84
	50	1373.95	49.24	15.46		50	1498.29	53.65	16.87
32	00	1377.90	49.38	15.51	39	00	1500.19	53.72	16.89
	10	1381.80	49.52	15.55		10	1502.03	53.79	16.91
	20	1385.65	49.66	15.60		20	1503.83	53.85	16.93
	30	1389.46	49.79	15.64		30	1505.57	53.91	16.95
	40	1393.22	49.93	15.68		40	1507.26	53.97	16.97
	50	1396.93	50.06	15.72		50	1508.91	54.03	16.99
33	00	1400.59	50.19	15.76	40	00	1510.49	54.08	17.00
	10	1404.21	50.32	15.80		10	1512.04	54.14	17.02
	20	1407.78	50.45	15.85		20	1513.52	54.19	17.04
	30	1411.31	50.57	15.88		30	1514.96	54.24	17.05
	40	1414.78	50.69	15.92		40	1516.35	54.29	17.07
	50	1418.21	50.82	15.96		50	1517.68	54.34	17.09
34	00	1421.59	50.94	16.00	41	00	1518.97	54.38	17.10
	10	1424.92	51.06	16.04		10	1520.20	54.42	17.11
	20	1428.20	51.17	16.08		20	1521.38	54.47	17.13
	30	1431.44	51.29	16.11		30	1522.51	54.50	17.14
	40	1434.63	51.40	16.15		40	1523.59	54.54	17.15
	50	1437.76	51.51	16.18		50	1524.61	54.58	17.16

CÁLCULO DOS PARÂMETROS DA GRAVIDADE NORMAL

(1930 - 1967 - 1980)

1) Parâmetros dos elipsóides:

	HAYFORD 1924	REFERÊNCIA 1967	REFERÊNCIA 1980
a	6 378 388,000 m	6 378 160,000 m	6 378 137,000 m
b	6 356 911,946 m	6 356 774,516 m	6 356 752,298 m
α	1/297	1/298,247	1/298,257
ω	$7\ 292\ 1151 \times 10^{-12}$ rad/s	$7\ 292\ 1151 \times 10^{-12}$ rad/s	$7\ 292\ 1151 \times 10^{-12}$ rad/s
KM	$3\ 986\ 005 \times 10^8$ m ³ /s ²	$3\ 986\ 030 \times 10^8$ m ³ /s ²	$3\ 986\ 005 \times 10^8$ m ³ /s ²
γ_e	$978\ 049 \times 10^{-5}$ m/s ²	$978\ 031,846 \times 10^{-5}$ m/s ²	$978\ 033 \times 10^{-5}$ m/s ²

2) Valores calculados de m ($\times 10^{-3}$):

Fórmulas	HAYFORD 1924	REFERÊNCIA 1967	REFERÊNCIA 1980	Nº
$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}$	3,467 826 4173	3,467 763 2786	3,467 746 5868	1
$m = \frac{a^2 \omega^2 b}{KM}$	3,450 114 2614	3,449 801 3896	3,449 785 9939	2
$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{3}{2} m^2$	3,449 972 9473	3,449 910 4554	3,449 893 9346	3

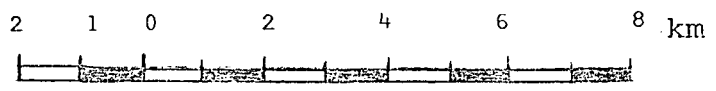
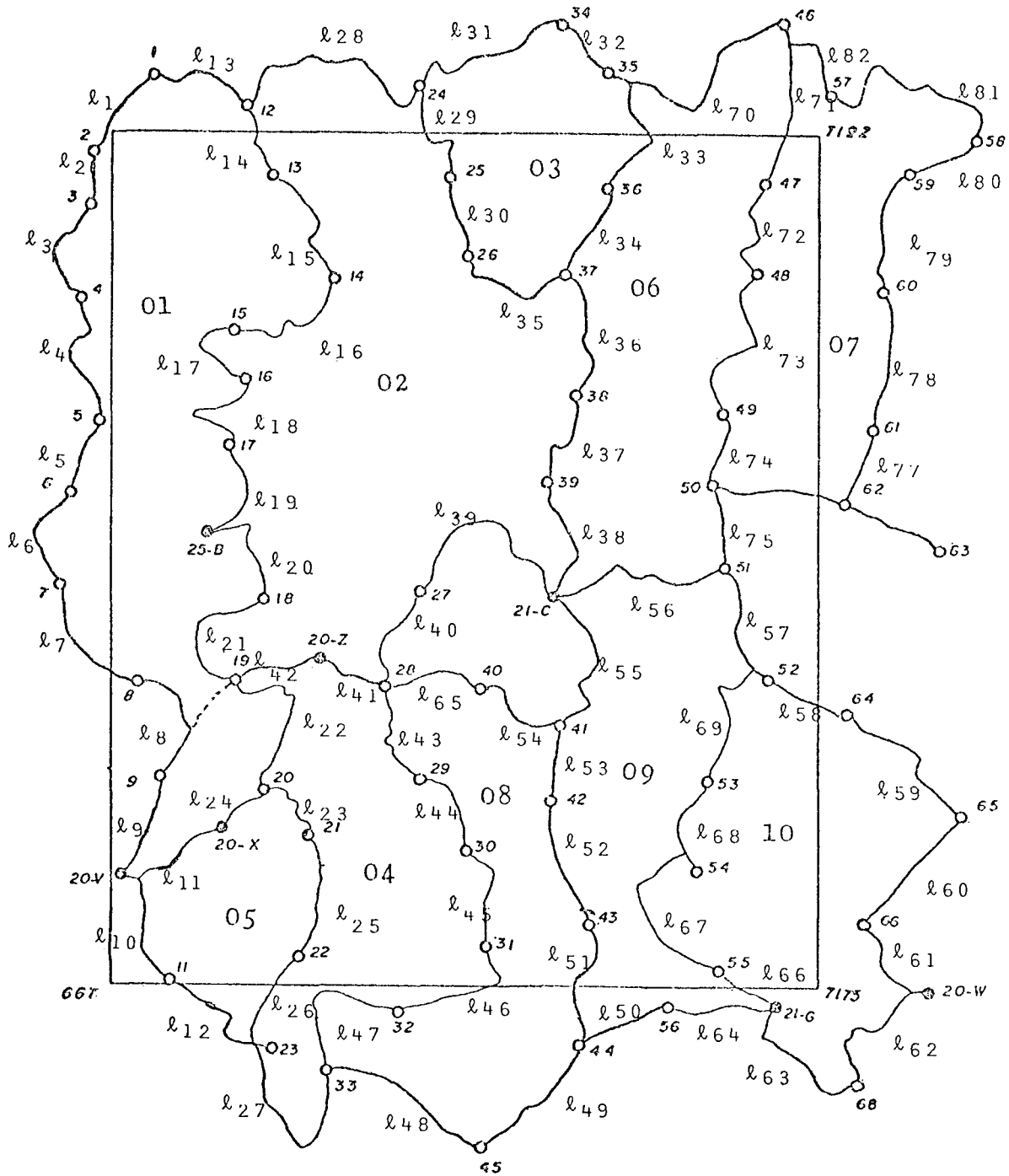
3) Valores calculados de β : $\beta = \frac{5}{2} m - \alpha - \frac{17}{14} m \alpha$

m utilizado	HAYFORD 1909	REFERÊNCIA 1967	REFERÊNCIA 1980
1	0,005 288 3845	0,005 302 3639	0,005 302 4351
2	0,005 244 1766	0,005 257 5324	0,005 257 6068
3	0,005 243 8237	0,005 257 8047	0,005 257 8761

4) Valores calculados de β' : $\beta' = \frac{1}{8} \alpha^2 - \frac{5}{8} m \alpha$

m utilizado	HAYFORD 1924	REFERÊNCIA 1967	REFERÊNCIA 1980
1	$-5,880\ 5256 \times 10^{-6}$	$-5,861\ 7964 \times 10^{-6}$	$-5,861\ 5220 \times 10^{-6}$
2	$-5,843\ 2526 \times 10^{-6}$	$-5,824\ 0659 \times 10^{-6}$	$-5,823\ 8885 \times 10^{-6}$
3	$-5,824\ 7888 \times 10^{-6}$	$-5,824\ 2945 \times 10^{-6}$	$-5,823\ 2771 \times 10^{-6}$

PROJETO DE APOIO ALTIMÉTRICO FUNDAMENTAL
 IPPUC - DGTC - CURITIBA - PR



- Linhas fundamentais ———
- Linhas secundárias ———
- RN CNG atual IBG ⊙
- RN IPPUC - DGTC ○

E s c a l a

MAIN. FERRAZ.FOR FORTRAN V.5A(621) /KI 19-JAN-82
14:31 PAGE 1

```

00001      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00002      DIMENSION VLB(82,1),Q(82),B(10,82),EME(10,10),TA(10),
00003      1          W(10,1),EMEW(10,1),VK(10,1)
00004      DIMENSION V(82,1),VLA(82,1)
00005      DIMENSION P(82,1),VTPV(1,1),BTMB(82,82),RFA(82,82)
00006      DIMENSION RFB(82,82),FI(82,82),BT(82,10),
00007      1          R1(82,10), R2(82,10)
00008      !-----
00009      READ (2,21) NL,NC
00010      DO 1 I=1,NC
00011      READ (2,22) VLB(I,1),Q(I)
00012      Q(I)=Q(I)/1000.
00013      Q(I)=4.*DSQRT(Q(I))
00014      Q(I)=Q(I)/1000.
00015      1      Q(I)=Q(I)*0.145
00016      DO 2 I=1,NL
00017      2      READ (2,*) (B(I,J),J=1,NC)
00018      READ (2,24) (W(I,1),I=1,NL)
00019      !=====
00020      DO 3 I=1,NC
00021      3      F(I,1)=1./Q(I)
00022      !.....
00023      CALL SBQBT(B,Q,EME,NL,NC)
00024      CALL VERSOL(EME,TA,NL)
00025      CALL AB(EME,W,EMEW,NL,NL,1)
00026      CALL EPM(EMEW,VK,NL,1,-1.)
00027      !-----[ DET. VETOR DOS CORRELATOS VK(NL,1). ]
00028      CALL SQBTK(B,Q,VK,V,NL,NC)
00029      !-----[ DET. VETOR DOS RESIDUOS V(NC,1). ]
00030      CALL SOMAT(VLB,V,VLA,NC,1)
00031      !-----[ DET. OBS. AJUSTADOS VLA(NC,1). ]
00032      CALL SATPA(V,P,VTPV,NC,1)
00033      SIGMA=VTPV(1,1)/(NL*0.145)
00034      !-----[ CALCULOU VARIANCIA A POSTERIORI SIGMA. ]
00035      !=====
00036      21      FORMAT(2G)
00037      22      FORMAT(2G)
00038      24      FORMAT(5G)
00039      WRITE(3,301)
00040      DO 4 I=1,NC
00041      4      WRITE(3,302) VLB(I,1),V(I,1),VLA(I,1)
00042      WRITE(3,303) SIGMA
00043      301     FORMAT(//15X,'AJUSTAMENTO PELO METODO DOS CORRELATOS'
00044      1//5X,'VALORES OBSERVADOS',5X,'RESIDUOS CALCULADOS'
00045      1,5X,'VALORES OBSERVADOS AJUSTADOS')
00046      302     FORMAT(/8X,F10.6,15X,F10.7,18X,F10.6)
00047      303     FORMAT(//20X,' A VARIANCIA A POSTERIORI= ',F5.3)
00048      !-----
00049      DO 400 I=1,82
00050      DO 400 J=1,82
00051      FI(I,J)=0
00052      400     FI(I,I)=Q(I)
00053      DO 405 I=1,10
00054      DO 405 J=1,82
00055      405     BT(J,I)=B(I,J)
00056      CALL AB(FI,BT,R1,82,82,10)

```

MAIN. FERRAZ.FOR FORTRAN U.5A(621) /KI 19-JAN-82 14:31

```
00057      CALL AB(R1,EME,R2,82,10,10)
00058      CALL AB(R2,B,BTMB,82,10,82)
00059      CALL AB(BTMB,PI,RFA,82,82,82)
00060      DO 410 I=1,82
00061      DO 410 J=1,82
00062      RFB(I,J)=PI(I,J)-RFA(I,J)
00063 410     RFB(I,J)=SIGMA*RFB(I,J)
00064      WRITE(3,415)
00065 415     FORMAT(///,30X,' MV-C DOS VALORES AJUSTADOS ',//)
00066      DO 413 I=1,10
00067 413     WRITE(3,420) (RFB(I,J),J=1,10)
00068      DO 416 I=11,20
00069 416     WRITE(3,420) (RFB(I,J),J=11,20)
00070      DO 418 I=21,30
00071 418     WRITE(3,420) (RFB(I,J),J=21,30)
00072 420     FORMAT(1X,10(2X,D10.3))
00073      WRITE(3,440)
00074 440     FORMAT(//,3X,' DIAGONAL DA MV-C ',//)
00075      WRITE(3,420) (RFB(I,I),I=1,82)
00076      CALL EXIT
00077      END
```

```

100 REM Programa para o calculo de altitudes cientificas
110 OPTION BASE 1
120 DEG
130 REM G = vetor dos valores observados de gravidade
140 REM C, M e S = vetor das ltitudes dos RNs (grau, min. e seg.)
150 REM C = vetor dos numeros geopotenciais
160 REM L = vetor das altitudes brutas (observadas)
170 REM O = altitude com correcao ortometrica
180 REM H = altitude de Helmert
190 REM F = altitude ortometrica Free-air
200 REM B = altitude de Baranov
210 REM V = altitude de Vignal
220 REM D = altitude dinamica
230 REM X = diferenca entre as altitudes de Helmert e Free-air
240 REM Y = idem Helmert e Baranov
250 REM Z = idem Helmert e Vignal
260 REM N = idem Helmert e dinamica
270 REM P = idem Helmert e alt. com correcao ortometrica
280 REM R= idem Helmert e altitudes brutas
290 DIM C(75,1),G(75,1),M(75,1),S(75,1),L(75,1),K(75,1),O(75,1)
300 DIM H(75,1),F(75,1),B(75,1),V(75,1),D(75,1),R(75,1),X(75,1)
310 DIM Y(75,1),Z(75,1),N(75,1),P(75,1)
320 REM ***** entrada dos numeros geopotenciais *****
330 FOR I=1 TO 75
340 READ C(I,1)
350 DATA 978.9588,963.2076,951.9684,938.7463,917.0759,943.2207,927.6290
360 DATA 869.2932,884.9352,000.0000,892.2226,901.3886,886.7478,949.5769
370 DATA 953.9394,879.4313,879.2846,903.4156,896.6619,910.7283,904.9637
380 DATA 905.9107,906.5159,959.8799,897.7712,921.3122,887.5798,903.2619
390 DATA 900.5222,901.1504,891.7636,901.5894,912.4879,962.0352,939.2367
400 DATA 891.8935,907.3958,910.2123,910.5166,875.6136,962.9241,879.9449
410 DATA 881.7976,883.0387,887.7635,893.9940,905.1997,912.0442,866.1562
420 DATA 872.4136,869.3626,872.7173,856.8841,853.8366,856.3162,852.4280
430 DATA 879.7863,890.7443,873.5168,877.6802,890.1782,865.5898,000.0000
440 DATA 859.0499,861.7787,882.9207,000.0000,885.8268,864.3945,889.3613
450 DATA 907.9582,914.7330,866.9213,887.5008,885.4706
460 NEXT I
470 REM ***** latitude em graus *****
480 FOR I=1 TO 75
490 G(I,1)=25
500 NEXT I
510 G(10,1)=G(63,1)=G(67,1)=0
520 REM ***** latitude em minutos *****
530 FOR I=1 TO 75
540 READ M(I,1)
550 DATA 22,22,23,24,25,26,27,28,29,00,31,22,23,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32
560 DATA 22,23,22,28,28,29,30,31,32,32,21,22,23,24,25,26,28,29,29,31,32,33,21
570 DATA 23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,22,23,23,24,26,26,00,29,30,31,00,33,30
580 DATA 32,30,28,27,32,27
590 NEXT I
600 REM ***** latitude em segundos *****
610 FOR I=1 TO 75
620 READ S(I,1)
630 DATA 1.98,50.1,32.0,26.7,47.6,43.7,34.6,38.5,34.6,00.00,56.7,22.3,9.8,40.8
640 DATA 19.6,20.2,1.3,50.2,37.2,52.2,14.4,39.8,37.8,16.3,11.7,17.9,14.4,31.3
650 DATA 35.9,27.7,27.4,12.1,52.8,24.7,7.3,23.5,16.9,41.7,46.3,42.4,11.7,53.8
660 DATA 18.3,34.6,39.1,23.2,18.9,8.5,47.0,33.3,29.0,40.4,00.0,45.6,46.3,11.1
670 DATA 25.7,7.2,13.6,37.9,00.00,7.2,00.00,2.0,22.6,17.0,00.00,5.9,44.6,1.6
680 DATA 7.4,22.0,39.0,8.3,5.1
690 NEXT I
700 REM ***** altitudes brutas (observadas) *****
710 FOR I=1 TO 75
720 READ L(I,1)
730 DATA 1000.1336,984.0442,972.5601,959.0533,936.9154,963.6289,947.7010
740 DATA 388.1023,904.0853,000.0000,911.5327,920.8777,905.9210,970.1135
750 DATA 974.5715,898.4487,898.3005,922.9576,916.8573,930.4231,924.5354
760 DATA 925.5065,926.1276,780.7091,917.2505,941.2985,906.7925,922.8083
770 DATA 920.0098,920.6521,911.0624,921.1019,932.2375,982.9105,959.6172
780 DATA 911.2388,927.0717,929.7391,930.2443,894.5615,881.6169,899.0071
790 DATA 900.9009,902.1698,906.9993,913.4003,924.8521,931.8467,884.9672
800 DATA 871.3619,888.1919,891.6201,875.4436,872.3300,874.8632,870.8951
810 DATA 898.8937,910.0806,892.4811,896.7369,909.5081,884.3880,000.0000
820 DATA 877.6572,880.4464,902.0473,000.0000,905.0183,883.1056,908.6282
830 DATA 927.6212,934.5243,885.7017,906.7295,904.6219
840 NEXT I

```

```

850 REM ***** valores de gravidade observada *****
860 FOR I=1 TO 75
870 READ K(I,1)
880 DATA 761.10,764.78,767.88,770.15,775.76,771.06,774.27,779.66,783.55
890 DATA 000.00,774.34,780.00,783.53,769.68,768.13,783.62,783.40,773.99
900 DATA 775.02,770.54,771.44,773.05,773.42,768.91,781.88,775.58,779.83
910 DATA 773.78,774.53,773.00,778.84,775.54,773.28,766.38,771.30,779.35
920 DATA 775.63,774.59,774.06,780.69,785.18,782.16,782.78,784.62,782.18
930 DATA 776.73,776.45,775.46,785.30,784.61,785.22,785.82,789.98,791.76
940 DATA 794.09,793.94,780.39,778.42,782.96,784.40,783.00,788.85,000.00
950 DATA 791.26,796.46,791.43,000.00,791.20,785.96,790.61,770.99,770.61
960 DATA 781.07,794.02,782.27
970 K(I,1)=K(I,1)+978000
980 NEXT I
990 REM ***** altitude com correcao ortometrica. *****
1000 FOR I=1 TO 75
1010 READ C(I,1)
1020 DATA 1000.1580,984.0658,972.5830,959.0751,936.9370,963.6497,947.7212
1030 DATA 888.1225,904.1045,000.0000,911.5452,920.8980,905.9298,970.1226
1040 DATA 974.5806,898.4585,898.3100,922.9666,916.0678,930.4335,924.5481
1050 DATA 925.5204,926.1425,980.6425,917.1876,941.2350,906.7983,922.8165
1060 DATA 920.0170,920.6589,911.0679,921.1069,932.2425,982.8509,959.5575
1070 DATA 911.1793,927.0123,929.8794,930.1846,894.5750,881.6238,899.0142
1080 DATA 900.9070,902.1751,907.0036,913.3410,924.7922,931.7881,884.9081
1090 DATA 891.3045,888.1984,891.6268,875.4480,872.3363,874.8716,870.9100
1100 DATA 898.8273,910.0239,892.4248,896.6800,909.4501,884.3297,000.0000
1110 DATA 877.6639,880.4517,902.0536,000.0000,905.0223,883.0823,908.6390
1120 DATA 927.5969,934.5350,885.6725,906.7233,904.5954
1130 NEXT I
1140 REM ***** calculo das altitudes cientificas *****
1150 REM ***** ALTITUDE DE HELMERT *****
1160 FOR I=1 TO 75
1170 X=(K(I,1)+.0424*K(I,1))*0.000001
1180 H(I,1)=C(I,1)/X
1190 NEXT I
1200 REM ***** ALTITUDE ORTOMETRICA FREE-AIR *****
1210 FOR I=1 TO 75
1220 X=(K(I,1)+.3086*(L(I,1)/2))*0.000001
1230 F(I,1)=C(I,1)/X
1240 NEXT I
1250 REM ***** ALTITUDE DE BARANOV E VIGNAL *****
1260 FOR I=1 TO 75
1270 X1=G(I,1)+M(I,1)/60+S(I,1)/3600
1280 X2=978.0318*(1+.0053024*SIN(X1)^2-.0000059*SIN(2*X1)^2)
1290 X3=(1000*X2-.3086*(L(I,1)/2))*0.000001 ! Vignal
1300 X=(X2+K(I,1)/1000)/2*.001 ! Baranov
1310 V(I,1)=C(I,1)/X3
1320 B(I,1)=C(I,1)/X
1330 NEXT I
1340 REM ***** ALTITUDE DINAMICA *****
1350 FOR I=1 TO 75
1360 X=.980618988
1370 D(I,1)=C(I,1)/X
1380 NEXT I
1390 MAT X=H-F
1400 MAT Y=H-B
1410 MAT Z=H-V
1420 MAT N=H-D
1430 MAT P=H-O
1440 MAT R=H-L
1450 REM ***** SAIDA DOS RESULTADOS *****
1460 PRINTER IS 7,1
1470 IMAGE DD,3X,DD,3X,DD,3X,DD,DDD,4X,DDDDDD,DDD,6X,DDD,DDDD/
1480 IMAGE DD,1X,DDDD,DDDD,1X,DDDD,DDDD,1X,DDDD,DDDD,1X,DDDD,DDDD,2X,DDDD,DDDD,
2X,DDDD,DDDD,1X,DDDD,DDDD/
1490 IMAGE DD,2X,DDDD,DDDD,2X,DDDD,DDDD,2X,DDDD,DDDD,2X,DDDD,DDDD,2X,DDDD,DDDD,
2X,DDDD,DDDD,2X,DDDD,DDDD/
1500 PRINT " TABELA V - ALTITUDE DOS PONTOS DA REDE (em metros
)"
1510 PRINT
1520 PRINT "-----"
1530 PRINT " HELMERT FREE-AIR BARANOV VIGNAL C. ORT. DINAMICA
BRUTA"
1540 PRINT "RNs [H1] [H2] [H3] [H4] [H5] [H6]
[H7]"
1550 PRINT "-----"

```

```

1560 FOR I=1 TO 75
1570 PRINT USING 1480;I,H(I,1),F(I,1),B(I,1),V(I,1),O(I,1),D(I,1),L(I,1)
1580 NEXT I
1590 PRINT "-----"
1600 PRINT
1610 PRINT
1620 PRINT
1630 PRINT " ***** D A D O S   D E   O B S E R V A C A O   *****"
1640 PRINT
1650 PRINT "-----"
1660 PRINT "      L A T I T U D E S      g OBSERVADA      N. GEOPOTENCIAL"
1670 PRINT "RNs      g          m          seg          (mGal)          (KGal x m)"
1680 PRINT "-----"
1690 FOR I=1 TO 75
1700 PRINT USING 1470;I,G(I,1),M(I,1),S(I,1),K(I,1),C(I,1)
1710 NEXT I
1720 PRINT "-----"
1730 PRINT
1740 PRINT
1750 PRINT "          TABLA VI - DIFERENCAS DAS ALTITUDES EM RELACAO A ALT. DE H
ELMERI"
1760 PRINT "
          (em metros)"
1770 PRINT
1780 PRINT "-----"
1790 PRINT " RNs      H1-H2      H1-H3      H1-H4      H1-H6      H1-H5      H1-H
/"
1800 PRINT "-----"
1810 FOR I=1 TO 75
1820 PRINT USING 1490;I,X(I,1),Y(I,1),Z(I,1),N(I,1),P(I,1),R(I,1)
1830 NEXT I
1840 PRINT "-----"
1850 END

```

Matriz variância co-variância dos valores observados ajustados

(trechos)

Colunas 1.^a a 6.^a das linhas 1.^a a 10.^a:

0.466D-03	-0.229D-04	-0.335D-04	-0.359D-04	-0.301D-04	-0.324D-04
-0.229D-04	0.358D-03	-0.253D-04	-0.271D-04	-0.227D-04	-0.245D-04
-0.335D-04	-0.253D-04	0.511D-03	-0.397D-04	-0.332D-04	-0.358D-04
-0.359D-04	-0.271D-04	-0.397D-04	0.546D-03	-0.356D-04	-0.384D-04
-0.301D-04	-0.227D-04	-0.332D-04	-0.356D-04	0.463D-03	-0.322D-04
-0.324D-04	-0.245D-04	-0.358D-04	-0.384D-04	-0.322D-04	0.496D-03
-0.331D-04	-0.250D-04	-0.366D-04	-0.392D-04	-0.328D-04	-0.354D-04
-0.321D-04	-0.242D-04	-0.354D-04	-0.380D-04	-0.318D-04	-0.343D-04
-0.304D-04	-0.230D-04	-0.336D-04	-0.360D-04	-0.301D-04	-0.325D-04
-0.121D-04	-0.911D-05	-0.133D-04	-0.143D-04	-0.120D-04	-0.129D-04

Colunas 11.^a a 16.^a das linhas 11.^a a 20.^a:

0.436D-03	0.988D-04	0.278D-04	0.131D-04	0.111D-04	0.101D-04
0.988D-04	0.481D-03	0.201D-04	0.399D-05	0.336D-05	0.305D-05
0.278D-04	0.201D-04	0.625D-03	-0.208D-04	-0.176D-04	-0.160D-04
0.131D-04	0.399D-05	-0.208D-04	0.471D-03	-0.342D-04	-0.310D-04
0.111D-04	0.336D-05	-0.176D-04	-0.342D-04	0.402D-03	-0.262D-04
0.101D-04	0.305D-05	-0.160D-04	-0.310D-04	-0.262D-04	0.367D-03
0.108D-04	0.326D-05	-0.170D-04	-0.331D-04	-0.279D-04	-0.253D-04
0.138D-04	0.420D-05	-0.219D-04	-0.426D-04	-0.360D-04	-0.326D-04
0.125D-04	0.379D-05	-0.198D-04	-0.385D-04	-0.325D-04	-0.295D-04
0.136D-04	0.412D-05	-0.216D-04	-0.419D-04	-0.354D-04	-0.321D-04

Colunas 21.^a a 26.^a das linhas 21.^a a 30.^a:

0.522D-03	-0.236D-04	-0.468D-05	-0.940D-05	-0.627D-05	-0.504D-05
-0.236D-04	0.518D-03	-0.370D-04	-0.321D-04	-0.497D-04	-0.399D-04
-0.468D-05	-0.370D-04	0.372D-03	0.346D-04	-0.935D-04	-0.752D-04
-0.940D-05	-0.321D-04	0.346D-04	0.304D-03	0.464D-04	0.373D-04
-0.627D-05	-0.497D-04	-0.935D-04	0.464D-04	0.467D-03	-0.101D-03
-0.504D-05	-0.399D-04	-0.752D-04	0.373D-04	-0.101D-03	0.395D-03
-0.220D-05	-0.834D-04	-0.372D-04	-0.169D-04	-0.499D-04	-0.401D-04
0.132D-04	-0.270D-05	0.106D-05	-0.233D-05	0.141D-05	0.114D-05
0.133D-04	-0.297D-05	0.946D-06	-0.240D-05	0.127D-05	0.102D-05
0.140D-04	-0.312D-05	0.994D-06	-0.252D-05	0.133D-05	0.107D-05