

CLÁUDIA ANDRÉA ANGELI

EFEITOS DA REEMISSÃO DA RADIAÇÃO SOLAR
SOBRE ÓRBITAS DE ASTERÓIDES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA

1991

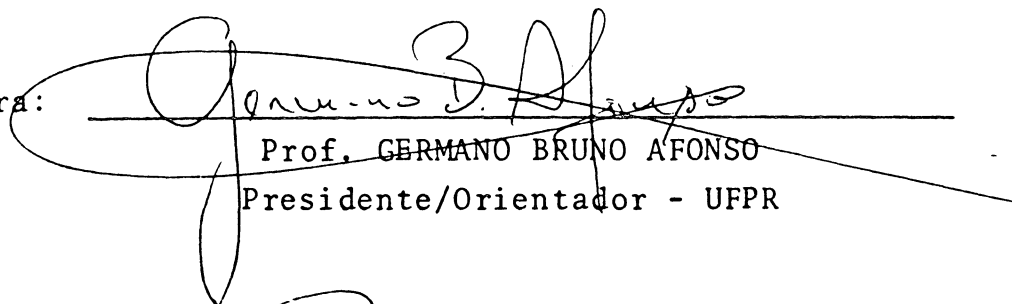
ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DA SRTa. CLÁUDIA ANDRÉA ANGELI

TÍTULO DA TESE: "Efeitos da Reemissão da Radiação Solar sobre Órbitas de Asteróides"

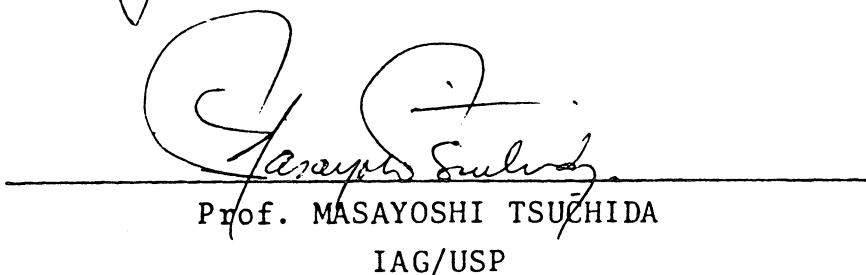
Em sessão pública de defesa de tese, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 27 de agosto de 1991.

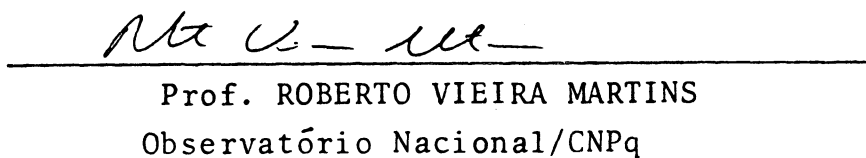
Banca Examinadora:



Prof. GERMANO BRUNO AFONSO
Presidente/Orientador - UFPR



Prof. MASAYOSHI TSUCHIDA
IAG/USP



Prof. ROBERTO VIEIRA MARTINS
Observatório Nacional/CNPq

Aos meus pais, por
todo o amor e
incentivo

Agradeco

Ao professor Germano Bruno Afonso, pela orientaco, amizade e todas as horas a mim dedicadas.

Ao professor Sergio L. M. Berleze, pela ajuda preciosa nos problemas de computaco e pelas constantes palavras de estimulo.

Aos meus amigos e companheiros de Mestrado, pela agradavel convivencia durante o periodo de trabalho.

A secretaria Jose, por sua incansavel dedicaco.

A UFPR pelos recursos tecnicos.

A Capes pelo apoio financeiro.

A todas as pessoas que tiveram papel fundamental na minha vida, e portanto contribuiram para o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Desenvolvemos um modelo para a perturbação orbital devida à força de reemissão da radiação solar, similar ao efeito Yarkovsky, onde o eixo de rotação do corpo orbitante é perpendicular ao plano de sua órbita em torno da fonte. Aplicamos este modelo a órbitas de asteróides e calculamos as equações de Gauss do movimento numericamente. Encontramos, assim, o tempo necessário para um dado asteróide atingir a órbita da Terra, partindo do cinturão de asteróides, sob o efeito desta força. Analisamos a evolução orbital dos elementos osculadores também para o caso em que a força de reemissão é anti-dissipativa.

ABSTRACT

We point out an approach for the orbital perturbation due to the reemission of the solar radiation, similar to Yarkovsky effect, in which the rotation axis of the orbiting body is perpendicular to the plane of its orbit around the source. We apply this model to asteroid orbits and calculate Gauss equations numerically. In this way, we derived the time to an asteroid to reach Earth's orbit, coming from the asteroid belt. Orbital evolution of osculating elements is analyzed also for the case where the force due to the reemission is anti-dissipative.

SUMÁRIO

Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
Introdução	1
Capítulo 1 – O Efeito Poynting–Robertson	9
Capítulo 2 – O Efeito Yarkovsky	23
Capítulo 3 – Modelo de Reemissão da Radiação Eletromagnética	33
Capítulo 4 – Perturbações em Órbitas de Asteróides	37
Conclusão	49
Referências Bibliográficas	51

Introdução

O avanço na precisão das observações evidencia, cada vez mais, que não podemos nos limitar aos sistemas conservativos e à Lei da Gravitação Universal para resolver todos os problemas da Astronomia Dinâmica. Assim, a desaceleração secular da Lua e o avanço do perihélio de Mercúrio constituem exemplos clássicos de que os sistemas dissipativos e a Relatividade Geral, respectivamente, devem ser considerados nessa área.

Diversas forças não-gravitacionais são consideradas na determinação da órbita de pequenos corpos do sistema solar (meteoros, asteróides, cometas, etc), tais como aquelas devidas às radiações eletromagnéticas.

O estudo destas forças começou a se desenvolver no início deste século. Ele trata das forças exercidas sobre pequenos corpos do sistema solar causadas pela reflexão, absorção e reemissão da radiação solar por suas superfícies. Estas forças são responsáveis, por exemplo, por perturbações nas órbitas de satélites artificiais, pela queda de meteoritos sobre a superfície da Terra e pela ejeção de gases por cometas.

Análises dos espectros de refletância de alguns meteoritos feitas em laboratório mostram muita semelhança com os espectros de refletância de alguns asteróides, fortalecendo as evidências de que o cinturão de asteróides é uma importante, se não a maior, fonte de meteoritos. O espectro de refletância é um espectro por meio do qual análises químicas remotas podem ser feitas, baseadas na refletância (razão entre a potência radiante total, em watts, refletida por um corpo, e a potência incidente sobre ele) de uma superfície planetária ou de satélite a diversos comprimentos de onda, particularmente para aqueles do infravermelho.

As partículas extraterrestres recuperadas na superfície da Terra têm sido

objeto de intenso estudo mineralógico, e com o desenvolvimento da Física Atômica neste século, tornaram-se possíveis análises muito sofisticadas deste material, das quais se pode deduzir, entre outras coisas, a sua idade. A origem precisa destas partículas interplanetárias ainda não é clara. Certamente materiais interplanetários com tamanhos menores do que 1cm vêm de cometas, como mostra a correlação entre chuvas de meteoros e órbitas cometárias. A poeira pode ser também gerada em colisões entre meteoróides maiores. Partículas grandes — mas cujas órbitas são afetadas por forças de radiação — provavelmente originam-se de núcleos cometários extintos ou representam os asteróides de tamanhos menores. O que se sabe é que a maioria da poeira vem da matéria cometária, enquanto que a maioria das partículas rochosas grandes vem de asteróides. De qualquer forma, para que se possa fazer uma seleção entre as origens propostas para qualquer amostra de poeira interplanetária, deve-se entender a dinâmica de tais partículas e a evolução de suas órbitas.

Existem dificuldades em explicar como fragmentos com massa maior do que 1kg, gerados por colisões de asteróides, podem atingir a órbita da Terra. Em geral, o movimento de partículas pequenas no espaço é dominado pela presença gravitacional preponderante do Sol. Entretanto, a evolução de longo período de tais corpos é comumente produzida por forças não-gravitacionais (forças de radiação ou colisões), porque estas mudam a energia mecânica total do corpo e o seu momentum angular. A explicação destas forças de radiação foi um problema que atraiu a atenção de diversos eminentes cientistas ao longo deste século, entre eles Poynting, Larmor e Plummer. Este assunto foi incluído brevemente no clássico artigo de Einstein (1905) sobre relatividade especial.

Mas os corpos no espaço interplanetário não são somente atraídos para o Sol pela gravidade, eles são também repelidos para longe dele pela pressão de radiação devida à transferência de momentum pelos fótons solares. As órbitas de tais partículas são também modificadas pelo efeito Poynting-Robertson, dependente da velocidade, cuja natureza tem sido objeto de considerável controvérsia desde o início do século, recebendo

seu tratamento fundamentalmente correto, embora incompleto, por Robertson(1937).

A força sobre uma partícula perfeitamente absorvente devida à radiação solar, pode ser vista como composta de duas partes:

- a) um termo de “pressão de radiação”, devido à interceptação inicial pela partícula do momentum do feixe incidente, e
- b) um termo de “arrasto”, devido à taxa efetiva de perda de massa da partícula em movimento à medida que ela reirradia a energia incidente.

O momentum removido por segundo do feixe incidente, como visto pela partícula, representa a força de “pressão de radiação”, pois, pela segunda lei de Newton, uma taxa de variação de momentum linear de um corpo equivale a uma força agindo sobre ele.

O fluxo de energia absorvido é continuamente reirradiado pela partícula. Uma vez que a reirradiação é aproximadamente isotrópica (partículas pequenas são efetivamente isotérmicas), não há força resultante sobre a partícula em seu próprio referencial. Entretanto, a reirradiação é equivalente a uma taxa de perda de massa da partícula em movimento e, medida no referencial solar, dá origem a um fluxo de momentum saindo da partícula.

Uma vez que a partícula está perdendo momentum enquanto sua massa é sempre conservada, ela é desacelerada e sofre um arrasto dinâmico. A perda de momentum por unidade de tempo representa, de acordo com o teorema momentum-impulso, uma força sobre a partícula de mesma intensidade, que é algumas vezes chamada efeito Poynting-Robertson.

O efeito Poynting-Robertson, uma correção relativística à pressão de ra-

dição direta, pode causar o decaimento orbital de todos os fragmentos de asteróides com diâmetro menor do que 10cm, e sua passagem através da órbita da Terra. Mas estes fragmentos seriam muito pequenos para sobreviver à entrada na atmosfera, e conseqüentemente não seriam recuperados no solo. Por outro lado, a maioria dos fragmentos suficientemente grandes para resistir à entrada e atingir a superfície da Terra seriam muito grandes (razão muito grande entre a área da secção transversal e a massa) para que este mecanismo os afetasse significativamente durante o tempo de existência do sistema solar (4.6 bilhões de anos, aproximadamente). Deste modo, embora o efeito Poynting-Robertson influencie a distribuição de partículas de poeira do sistema solar e muitos dos objetos vistos como meteoros, ele provavelmente não explica qualquer meteorito recuperado na superfície da Terra, que possa ter sua origem no cinturão de asteróides. Uma vez que as forças de "pressão de radiação" aceleram corpos de mesma densidade em proporção direta às áreas de suas secções transversais e em proporção inversa a seus volumes, o arrasto Poynting-Robertson agirá "seletivamente" (ou seja, sua intensidade será inversamente proporcional ao raio da partícula) sobre as órbitas dos pequenos fragmentos, fazendo-as evoluir mais rapidamente.

O efeito Poynting-Robertson não é suficientemente intenso para funcionar como um mecanismo que explique os meteoritos recuperados sobre a superfície da Terra. Entretanto, um fenômeno até hoje pouco conhecido, chamado efeito Yarkovsky, parece ser capaz de explicar a maioria dos dados dinâmicos sobre meteoritos. Como a pressão de radiação solar direta e o efeito Poynting-Robertson, o efeito Yarkovsky também é uma força seletiva do tipo "pressão de radiação". Esta força pode ser algumas ordens de grandeza maior do que o efeito Poynting-Robertson.

Por volta de 1900, Yarkovsky propôs que a reirradiação térmica anisotrópica de um corpo em rotação, orbitando o Sol, podia ter um efeito de longo período significativo sobre aquela órbita. Ele sugeriu que, devido à inércia térmica do corpo, seu hemisfério que está "anoitecendo", estará sempre mais aquecido na média do que o

hemisfério que está “amanhecendo”. Assim, mais energia térmica será emitida do hemisfério que está anoitecendo/escurecendo, e desta forma também mais fluxo de momentum eletromagnético. Isto resultará em uma força em uma direção diferente daquela da radiação incidente. É a produção desta força transversal resultante que chamamos efeito **Yarkovsky**.

Diferente das forças de pressão de radiação solar direta e atração gravitacional, que são forças puramente radiais e não realizam trabalho na média sobre o corpo em uma órbita completa, a força Yarkovsky pode ter uma componente transversal, sempre no mesmo sentido, paralela ao vetor velocidade orbital, e assim produzir trabalho resultante diferente de zero sobre um período de revolução, causando mudanças seculares significativas no semi-eixo maior da órbita.

Outro efeito de radiação, identificado em 1975, acontece porque a radiação emitida da metade do Sol que está se afastando da partícula será desviada para o vermelho, enquanto fótons idênticos da metade que está se aproximando terão seus momenta aumentados devido a serem desviados para o azul. Esta transferência assimétrica de momentum produz uma força transversal adicional sobre uma partícula interplanetária, chamada efeito **Doppler-Diferencial**. Esta força é sempre menor do que o arrasto Poynting-Robertson, e é importante somente se a partícula está próxima da superfície solar (*Guess, 1962*), onde os dois efeitos se adicionam.

Com o advento dos satélites artificiais, notou-se a grande necessidade de se conhecer melhor as forças não-gravitacionais, para uma determinação mais precisa de suas órbitas. Assim, diversos modelos, tais como o do potencial terrestre, da pressão de radiação solar direta, das marés terrestres e oceânicas, do arrasto com a atmosfera neutra, da pressão da radiação terrestre, foram aperfeiçoados e introduzidos no cálculo de órbitas, tornando a teoria mais compatível com a precisão das observações.

No início da década de 1980, o panorama modificou-se novamente: através de medições centimétricas feitas por estações de telemetria laser espalhadas pelo mundo, verificou-se que a órbita do satélite LAGEOS estava sujeita a certas perturbações seculares e periódicas inexplicáveis até então.

Tendo em vista o elevadíssimo nível de conhecimento a respeito das perturbações gravitacionais, procurou-se nas perturbações de origem não-gravitacional as explicações para tais anomalias. *Afonso et al. (1985)*, apresentaram um modelo de troca de momentum entre um satélite eletricamente carregado e o plasma, assumindo uma distribuição de potencial tipo Debye (adaptado para uma esfera), uma distribuição uniforme para os íons e uma distribuição de Boltzmann para os elétrons.

Assim como existem estações sazonais na Terra, existem também sobre um satélite que a esteja orbitando. São duas as assimetrias principais que regulam a distribuição de temperatura de um satélite em rotação: primeiro, a quantidade de radiação recebida por um elemento de superfície do satélite por unidade de tempo, varia proporcionalmente ao cosseno do ângulo zenital do Sol; este ângulo é controlado pela orientação do eixo de rotação do satélite e pela direção da radiação incidente. Em analogia com a Terra, podemos nos referir a este efeito como um efeito "diurno". A assimetria térmica diurna será pequena se o período de rotação do satélite for menor do que o tempo característico de resposta térmica.

Grosseiramente pode-se falar, para um satélite, de um hemisfério quente, ou "verão", e de um hemisfério frio, ou "inverno", do satélite, de acordo com a latitude do Sol. A intensidade deste efeito dependerá do ângulo entre o eixo de rotação do satélite e a normal ao plano da eclíptica.

Quando o satélite cruza a sombra da Terra, sua iluminação (e aquecimento) pelo Sol é quase instantaneamente cortada. Se a inércia térmica do satélite não

for muito grande, a assimetria de temperatura sobre sua superfície diminuirá e poderá eventualmente ir a zero, como também a força de recuo correspondente. Sob tais circunstâncias, a componente da força perturbadora na direção do movimento não é mais nula, quando tomada sua média sobre uma revolução, causando desse modo mudanças de longo período no semi-eixo maior da órbita. A perturbação é máxima quando o eixo de rotação do satélite situa-se no plano orbital.

Naturalmente, o comportamento térmico depende das propriedades térmicas do material de que é feito o satélite. Uma esfera perfeitamente condutora não exibirá assimetria na distribuição de temperatura, porque qualquer aumento local na temperatura provocaria um fluxo de calor que equalizaria a temperatura em todos os pontos. Por outro lado, um isolante manteria um gradiente de temperatura por longo tempo.

A assimetria de temperatura diurna é importante também na dinâmica de cometas, onde a força de recuo correspondente é causada mais pela perda de materiais voláteis do que de fótons térmicos.

É interessante ressaltar que os modelos de forças não-gravitacionais desenvolvidos para os pequenos corpos do sistema solar aplicam-se, com as devidas adaptações, para satélites artificiais, sendo a recíproca também verdadeira. Portanto, depois de obtermos modelos compatíveis com as observações precisas feitas em satélites artificiais, podemos aplicar os resultados no estudo das órbitas de pequenos corpos do sistema solar e da evolução dinâmica de sistemas planetários.

Neste trabalho, consideramos a pressão de radiação solar direta e o efeito Poynting-Robertson para uma partícula perfeitamente absorvente, que se move em relação ao Sol com velocidade \vec{v} , e para uma partícula que espalha e absorve a radiação solar. Em seguida obtivemos o efeito Poynting-Robertson utilizando considerações da relatividade especial, e apresentamos o efeito Yarkovsky como proposto por Peterson (1976). Apresen-

tamos um modelo para a força de reemissão da energia radiante recebida do Sol, por um corpo em rotação, que consiste na solução da equação diferencial semi-linear da condução de calor dependente do tempo, proposto em 1989 por Afonso e Foryta. Desenvolvemos este modelo, e o aplicamos a órbitas de asteróides. Resolvemos as equações de Gauss do movimento numericamente e encontramos o tempo necessário para um dado asteróide atingir a órbita da Terra. Concluímos que este nosso modelo pode explicar como corpos de massas iguais às dos meteoritos podem atingir a órbita da Terra, oriundos do cinturão de asteróides. Analisamos a evolução orbital dos elementos osculadores também para o caso em que a força de reemissão é anti-dissipativa.

Capítulo 1. O Efeito Poynting–Robertson

No início deste século, J. H. Poynting considerou os efeitos da absorção e subsequente reemissão da radiação solar por pequenas partículas no sistema solar. Este trabalho foi mais tarde modificado por H. P. Robertson, que usou um tratamento relativístico para estabelecer as equações de movimento de tais partículas, para termos de primeira ordem na razão entre a velocidade da partícula e a velocidade da luz.

Quando se usa um sistema de referência estacionário com relação à partícula, os processos de absorção e reemissão não produzem força resultante sobre ela, em uma órbita completa. Entretanto, quando se usa um sistema de referência solar, encontra-se uma força de resistência sobre a partícula, proporcional à sua velocidade. Esta força provoca um decréscimo secular lento no semi-eixo maior e na excentricidade da órbita da partícula, o que poderá causar seu espiralamento em direção ao Sol.

A quantidade total de energia que é interceptada por segundo de um feixe de radiação que possui densidade de fluxo $S(W/m^2)$, por uma partícula estacionária, perfeitamente absorvente, de secção geométrica transversal A é SA .

Se a partícula se move em relação ao Sol com velocidade \vec{v} , devemos substituir S por (*Burns et al., 1979*)

$$S' = S \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \quad (1.1)$$

onde $\dot{r} = \vec{v} \cdot \hat{R}$ é a velocidade radial da partícula, \hat{R} é um vetor unitário na direção do feixe de radiação, e c é o módulo da velocidade da luz. O termo entre parênteses é devido ao efeito Doppler, que altera o fluxo de energia incidente, deslocando os comprimentos de onda recebidos.

O momentum removido por segundo do feixe incidente, como visto pela partícula, será então

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{S'A}{c}\right)\hat{R} = S\left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right)\frac{A}{c}\hat{R} \quad (1.2)$$

que dá a expressão para a “pressão de radiação solar direta”.

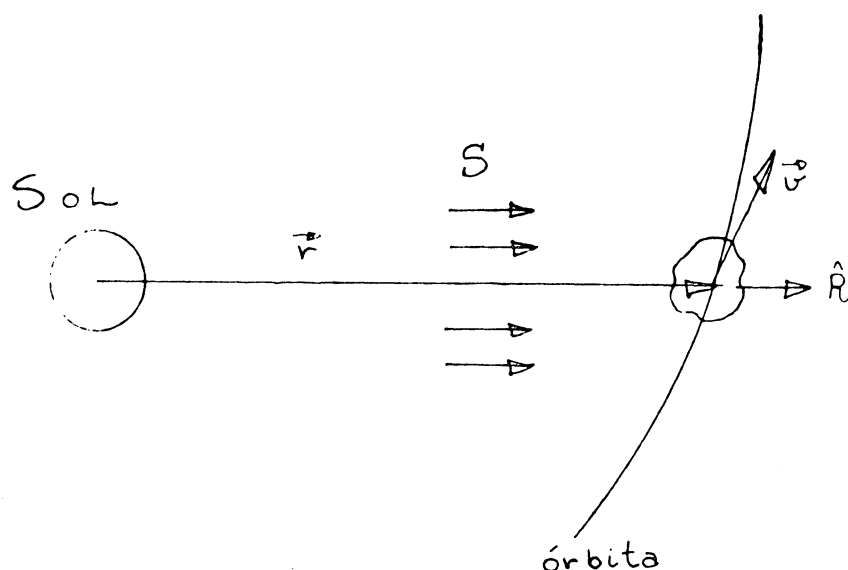


Figura 1.1: Pressão de Radiação Solar Direta. Diagrama mostrando uma partícula orbitante sujeita à radiação solar de densidade de fluxo S .

O fluxo de energia absorvido $S'A$ é continuamente reirradiado pela partícula. A reirradiação é equivalente a uma taxa de perda de massa

$$\frac{dm}{dt} = \frac{S'A}{c^2} \quad (1.3)$$

da partícula em movimento que, quando medida no referencial do Sol, dá origem a um fluxo de momentum que sai da partícula

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\left(\frac{S'A}{c^2}\right)\vec{v} \quad (1.4)$$

A força resultante sobre a partícula é então a soma das forças devidas ao impulso exercido pelo feixe incidente e à perda de momentum pela partícula em movimento, ou, para uma partícula de massa m

$$m\dot{\vec{v}} = \left(\frac{S'A}{c}\right)\hat{R} - \left(\frac{S'A}{c^2}\right)\vec{v} \simeq \frac{SA}{c} \left[\left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right)\hat{R} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (1.5)$$

até termos da ordem de v/c . Esta expressão é equivalente ao resultado obtido por Robertson (1937), onde o termo $S'A/c^2$ representa o efeito Poynting–Robertson.

Para avaliar as forças de radiação sentidas por uma partícula que espalha e absorve a radiação solar, *Burns et al. (1979)* consideraram um modelo simples que envolve colisão de partículas e troca de massa; estes dois processos causam transferência de momentum. O modelo contém dois aspectos considerados importantes no caso de absorção perfeita: uma pressão na direção do feixe incidente, e um arrasto, devido à perda de massa, na direção da velocidade da partícula.

A força resultante sobre a partícula pode ser escrita como:

$$m\dot{\vec{v}} \simeq \frac{SA}{c} Q_{pr} \left[\left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right)\hat{R} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (1.6)$$

até termos da ordem de v/c . Esta equação é idêntica ao resultado obtido por Robertson, eq. (1.5), exceto por ser mais geral pela inclusão do fator Q_{pr} , *coeficiente de pressão de radiação*. Neste coeficiente estão embutidos os coeficientes de absorção e de espalhamento da partícula.

Para partículas heliocêntricas, com $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, onde $\hat{r} = \hat{R}$ é um vetor unitário na direção do raio orbital, e $\hat{\theta}$ é normal a \hat{r} no plano da órbita, podemos escrever a força de radiação como

$$m\dot{\vec{v}} \simeq \left(\frac{SA}{c}\right) Q_{pr} \left[\left(1 - \frac{2\dot{r}}{c}\right)\hat{r} - \left(\frac{r\dot{\theta}}{c}\right)\hat{\theta} \right] \quad (1.7)$$

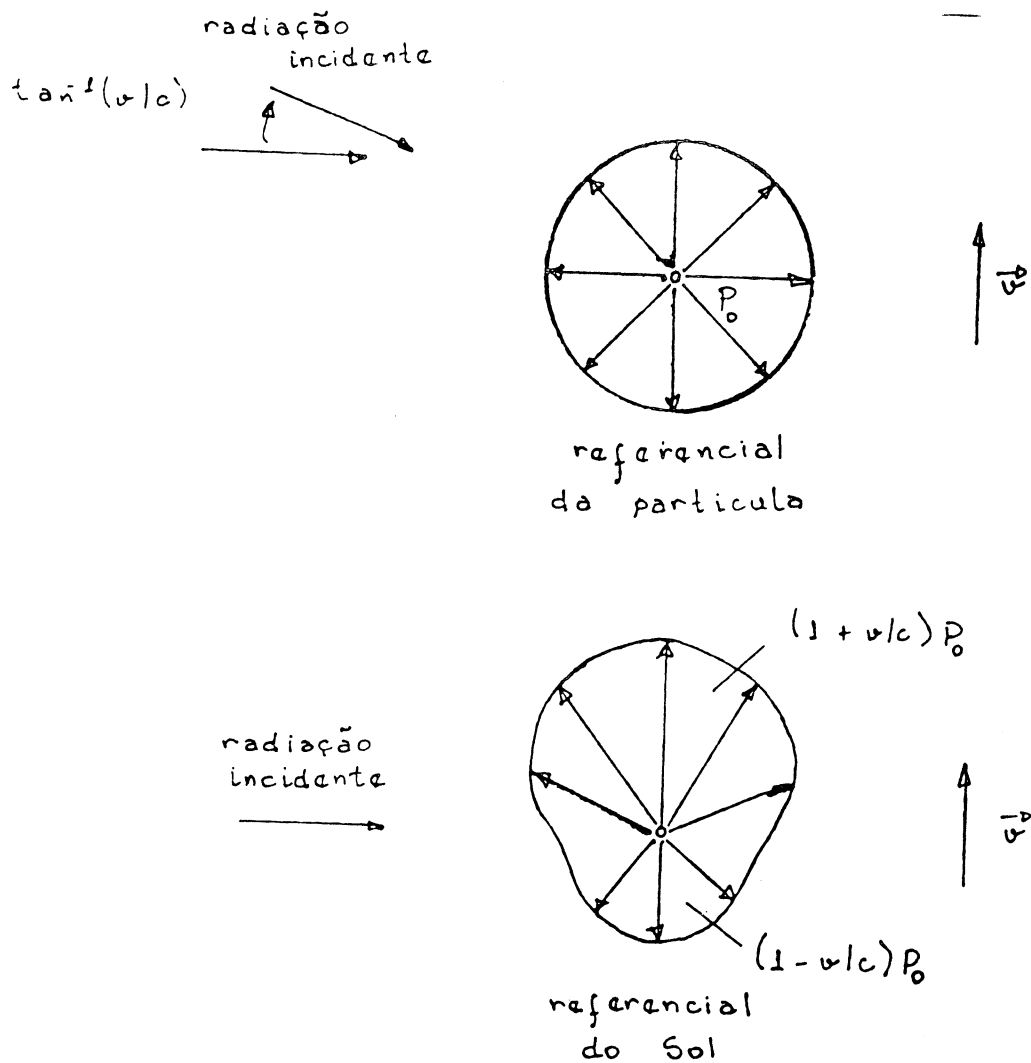


Figura 1.2: Efeito Poynting-Robertson. Diagrama mostrando que a reemissão de momentum se dá preferencialmente na direção frontal, visto do referencial solar, porque as frequências e os momenta dos quanta reemitidos (ou espalhados) nesta direção são aumentados em relação àqueles da direção oposta. O comprimento dos vetores mostra o momentum nos dois sistemas de referência.

Em geral chamamos a parte dependente de θ na equação (1.7) de “efeito Poynting-Robertson”, e o termo radial de “pressão de radiação”.

Podemos obter o efeito Poynting-Robertson, a partir da relatividade especial, da seguinte maneira: a força devida à pressão de radiação solar direta pode ser

escrita como

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, t) dA d\nu \hat{R} \\ &+ \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, t) 2 \cos \theta dA d\nu \cos \theta \hat{R} \\ &+ \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, t) dA \left[1 + \frac{2}{3} \cos \theta \right] d\nu \hat{R} \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde α_a , α_e e α_d são os coeficientes de absorção, espalhamento especular e espalhamento difuso da partícula, respectivamente (ver fig. 1.3).

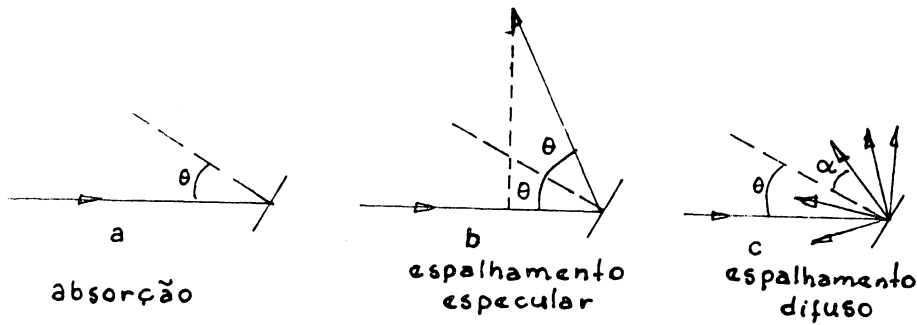


Figura 1.3: Diagramas mostrando a: absorção, b: espalhamento especular e c: espalhamento difuso sobre um elemento de superfície.

Mas a intensidade da radiação, $I(\nu, t)$, pode ser representada por

$$I(\nu, t) = \begin{cases} I_0 \cos \theta, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (1.9)$$

sendo

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\hat{n} \cdot \hat{R} = \cos \theta$$

$n \rightarrow$ normal à superfície

Substituindo estas expressões em (1.8), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_i = & \frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I_o \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi d\nu \hat{R} \\ & + \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I_o 2 \cos^3 \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi d\nu \hat{R} \\ & + \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I_o \cos \theta \left[1 + \frac{2}{3} \cos \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi d\nu \hat{R} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Porém

$$Q_o = \int_0^{\infty} I(\nu, t) d\nu$$

e assim, após a substituição e a integração em θ e ϕ , a equação para a força torna-se

$$\vec{F}_i = \frac{\alpha_a}{c} \pi R^2 Q_o \hat{R} + \frac{\alpha_e}{c} \pi R^2 Q_o \hat{R} + \frac{\alpha_d}{c} \pi R^2 Q_o \left(1 + \frac{4}{9} \right) \hat{R} \quad (1.11)$$

$$\vec{F}_i = \frac{\pi R^2}{c} Q_o \left[\alpha_a + \alpha_e + \alpha_d + \frac{4}{9} \alpha_d \right] \hat{R}$$

Os coeficientes α_a , α_e e α_d obedecem à seguinte relação

$$\alpha_a + \alpha_e + \alpha_d = 1$$

e desta forma:

$$\vec{F}_i = \frac{\pi R^2}{c} Q_o \left[1 + \frac{4}{9} \alpha_d \right] \hat{R} \quad (1.12)$$

Esta equação fornece a expressão para a pressão de radiação solar direta, que pode assumir os valores

i) para $\alpha_d = 0$

$$\vec{F}_i = \frac{\pi R^2}{c} Q_o \hat{R} \quad (1.13)$$

ii) para $\alpha_d = 1$

$$\vec{F}_i = \frac{13 \pi R^2}{9 c} Q_o \hat{R} \quad (1.14)$$

A obtenção padrão do efeito Poynting-Robertson, feita por Robertson em 1937, resulta da hipótese de que a radiação envolvida origina-se de uma fonte puntual. Uma pequena partícula orbitando a fonte absorve e reemite essa radiação, e por isso experimenta uma força de arrasto. Desta maneira a partícula perde momentum angular e espirala em direção à fonte.

Em 1962, A. W. Guess fez um estudo examinando como a hipótese de uma fonte esférica finita altera a obtenção padrão. Seu estudo estabelece o conceito intuitivo de que o tamanho finito é importante primariamente quando a partícula situa-se perto da fonte. Em seu trabalho, Guess admitiu que o raio da fonte esférica pode ser comparável à distância entre a fonte e a partícula orbitante. O tamanho e a massa da partícula são considerados desprezíveis em relação ao tamanho e à massa da fonte, mas não tão pequenos que a pressão de radiação supere a atração gravitacional. Sua análise assume que a partícula é uma pequena esfera, ainda grande comparada com o comprimento de onda da radiação. A partícula absorve toda a radiação incidente e a reemite isotropicamente.

Sejam dois sistemas de coordenadas: um sistema (x, y, z, t) , no qual a fonte de radiação está instantaneamente em repouso, e um sistema (x', y', z', t') , no qual a partícula orbitante está instantaneamente em repouso. A partícula move-se com velocidade $\vec{v} = (u, v, w)$ no sistema sem linha, tal que, pela transformação de Lorentz, temos:

$$\vec{r}' = \frac{\vec{r}(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} + [1 - (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}][(\vec{v} \cdot \vec{r})/v^2]\vec{v} - \vec{v}t}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.15)$$

$$t' = \frac{t - (\vec{v} \cdot \vec{r})/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.16)$$

onde $\vec{r} = (x, y, z)$, e c é o módulo da velocidade da luz. Os cossenos diretores $\vec{l} = (l, m, n)$, transformam-se de acordo com

$$\vec{l}' = \frac{\vec{l}(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} + [1 - (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}][(\vec{l} \cdot \vec{v})/v^2]\vec{v} - \vec{v}/c}{1 - (\vec{l} \cdot \vec{v})/c} \quad (1.17)$$

A frequência da radiação, ν , transforma-se de acordo com:

$$d\nu' = d\nu \frac{\gamma}{\beta} \quad (1.18)$$

a intensidade da radiação, I , segundo

$$I' = I \frac{\gamma^3}{\beta^3} \quad (1.19)$$

e um elemento de ângulo sólido, $d\Omega$, como

$$d\Omega' = d\Omega \frac{\beta^2}{\gamma^2} \quad (1.20)$$

onde

$$\beta = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = [1 - (\vec{l} \cdot \vec{v}/c)]$$

Admite-se que a fonte esférica aqui considerada irradia como um corpo negro, ou seja, com brilho constante sobre toda sua superfície. No sistema de referência sem linha, um observador na partícula vê a esfera irradiante (de raio D e distância R ao centro) como um disco circular de brilho uniforme (de raio d à distância L). Orienta-se os eixos x, y, z tal que este disco é paralelo ao plano $x - z$, e o vetor \mathbf{v} situa-se no plano $x - y$, isto é, $\omega = 0$ e $v^2 = u^2 + v^2$ (ver fig.1.4).

Se a energia emitida (por unidade de frequência, por unidade de tempo, e por unidade de área da fonte) é Q_0 , introduzindo as coordenadas polares ρ e ϕ sobre o disco, teremos para um elemento de área $\rho d\phi d\rho$ da partícula

$$I d\Omega = \frac{Q_0}{\pi} \frac{L \rho d\phi d\rho}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq d$$

A intensidade da radiação, I , situa-se na direção dada pelos cossenos diretores

$$l = -\frac{\rho \cos \phi}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad m = \frac{L}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad n = -\frac{\rho \sin \phi}{(L^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

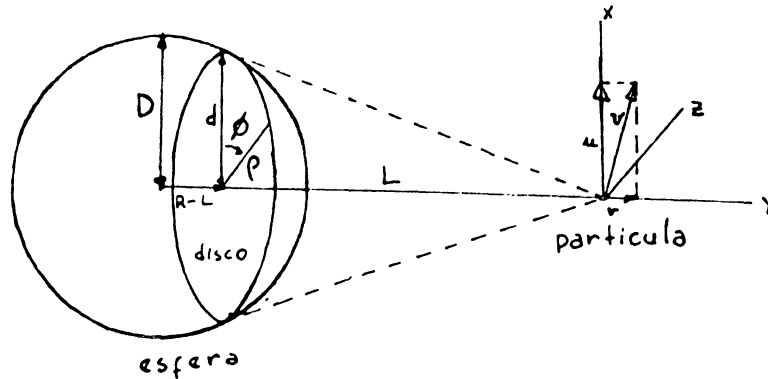


Figura 1.4: Diagrama mostrando a geometria da fonte esférica e da partícula orbitante, no sistema de referência sem linha.

Assim, partindo da equação (1.8), podemos obter o efeito Poynting-Robertson escrevendo para a força a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i dA &= \frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I' d\nu' d\Omega' dA \hat{l}^o \\ &+ \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I' d\nu' d\Omega' dA [2\hat{l}(\hat{l} \cdot \hat{l})]^o \\ &+ \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I' d\nu' d\Omega' dA [\hat{l} + \frac{2}{3}\hat{l}]^o \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde

$$\hat{l} \cdot \hat{l} = \cos \theta$$

$$\hat{l} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{l}^o = \hat{l} + \hat{l} \left(\frac{\hat{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c}$$

Nestas equações, o expoente o indica o referencial sem linha, e o versor \$\hat{l}\$ representa a direção da normal no referencial com linha.

Assim, a equação para a força assume a forma

$$\begin{aligned}\vec{F}_i dA &= \frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I' d\nu' d\Omega' dA \hat{i}'^0 \\ &+ \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I' d\nu' d\Omega' dA 2 \cos^2 \theta \hat{i}'^0 \\ &+ \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I' d\nu' d\Omega' dA \left[1 + \frac{2}{3} \cos \theta\right] \hat{i}'^0\end{aligned}\quad (1.22)$$

Substituindo as equações (1.18), (1.19) e (1.20) em (1.22), obtemos

$$\begin{aligned}\vec{F}_i dA &= \frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA \left(1 - 2 \frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) \left[\hat{i}' + \hat{i}' \left(\frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) - \frac{\vec{v}'}{c}\right] \\ &+ \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA 2 \cos^2 \theta \left(1 - 2 \frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) \left[\hat{i}' + \hat{i}' \left(\frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) - \frac{\vec{v}'}{c}\right] \\ &+ \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA \left(1 - 2 \frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) \left[\hat{i}' + \hat{i}' \left(\frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) - \frac{\vec{v}'}{c}\right] \left[1 + \frac{2}{3} \cos \theta\right]\end{aligned}\quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_i dA &= \frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA \left[\hat{i}' - \hat{i}' \left(\frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) - \frac{\vec{v}'}{c}\right] \\ &+ \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA 2 \cos^2 \theta \left[\hat{i}' - \hat{i}' \left(\frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) - \frac{\vec{v}'}{c}\right] \\ &+ \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA \left[\hat{i}' - \hat{i}' \left(\frac{\hat{i}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) - \frac{\vec{v}'}{c}\right] \left[1 + \frac{2}{3} \cos \theta\right]\end{aligned}\quad (1.24)$$

para termos até a ordem de v/c .

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_i dA &= \left\{ \left[\frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA \right] \right. \\ &+ \left[\frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA 2 \cos^2 \theta \right] \\ &+ \left. \left[\frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I d\nu d\Omega dA \left(1 + \frac{2}{3} \cos \theta\right) \right] \right\} \times\end{aligned}$$

$$\times \left[\hat{r} - \hat{r} \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (1.25)$$

Integrando em $d\Omega$ e considerando que

$$I(\nu, t) = \begin{cases} I_0 \cos \theta, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (1.26)$$

e integrando também sobre todas as frequências, de modo que

$$Q_0 = \int_0^\infty I(\nu, t) d\nu, \quad (1.27)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_i dA = & \left[\frac{\alpha_a}{c} Q_0 \cos \theta dA + \frac{\alpha_e}{c} Q_0 2 \cos^3 \theta dA + \frac{\alpha_d}{c} Q_0 dA \left(1 + \frac{2}{3} \cos \theta \right) \cos \theta \right] \times \\ & \times \left[\hat{r} - \hat{r} \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Como $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, integrando sobre toda a superfície, resulta

$$\begin{aligned} \vec{F}_i = & \left[\frac{\alpha_a}{c} \pi R^2 Q_0 + \frac{\alpha_e}{c} \pi R^2 Q_0 + \frac{\alpha_d}{c} \pi R^2 Q_0 + \frac{\alpha_d}{c} \frac{4}{9} \pi R^2 Q_0 \right] \times \\ & \times \left[\hat{r} - \hat{r} \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\vec{F}_i = \frac{Q_0}{c} \pi R^2 \left[\alpha_a + \alpha_e + \alpha_d + \frac{4}{9} \alpha_d \right] \left[\hat{r} - \hat{r} \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (1.30)$$

Lembrando que $\alpha_a + \alpha_e + \alpha_d = 1$, vem

$$\vec{F}_i = \frac{Q_0}{c} \pi R^2 \left[1 + \frac{4}{9} \alpha_d \right] \left[\hat{r} - \hat{r} \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (1.31)$$

onde o termo que contém $[1 + (4/9)\alpha_d]$ representa a pressão de radiação solar direta; o termo em $(\vec{l} \cdot \vec{v}/c)$ representa o efeito Doppler, e o termo em (\vec{v}^2/c) representa o efeito Poynting-Robertson.

Tendo em vista que o efeito Poynting-Robertson é uma força dissipativa, não podemos usar as equações de Lagrange da Mecânica Celeste para determinar as variações dos elementos orbitais. Utilizamos, portanto, as equações de Gauss, que são :

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\gamma_S + e(\gamma_R \sin f + \gamma_S \cos f) \right] \quad (1.32)$$

$$\dot{e} = \frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na} \left[\gamma_R \sin f + \gamma_S (\cos f + \cos E) \right] \quad (1.33)$$

$$\dot{i} = \frac{dI}{dt} = \frac{r\gamma_W}{H} \cos(f + \omega) \quad (1.34)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\gamma_W \sin(f + \omega)}{H \sin I} \quad (1.35)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{nae} \left[-\gamma_R \cos f + \gamma_S \left(\sin f + \frac{\sin E}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{\gamma_W \sin(f + \omega)}{H \sin I} \cos I \right] \quad (1.36)$$

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{nae} \left[\left(\frac{-2e}{1+e \cos f} + \cos f \right) \gamma_R - \left(1 + \frac{1}{1+e \cos f} \right) \sin f \gamma_S \right] \quad (1.37)$$

onde:

a → semi-eixo maior;

e → excentricidade;

I → inclinação ;

Ω → longitude do nodo ascendente;

ω → argumento do pericentro;

M → anomalia média;

n → movimento médio;

f → anomalia verdadeira;

E → anomalia excêntrica;

e $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \gamma_R \hat{R} + \gamma_S \hat{S} + \gamma_W \hat{W}$ → aceleração perturbadora;

onde o versor \hat{R} situa-se na direção da radiação incidente, o versor \hat{S} é perpendicular a \hat{R} no plano da órbita, e o versor \hat{W} é perpendicular a \hat{R} e a \hat{S} , formando o triedro ortogonal que se movimenta com a partícula.

As perturbações seculares para uma elipse osculadora de semi-eixo maior a e excentricidade e foram calculadas por Robertson e confirmadas por *Wyatt et al.*, (1950).

Elas são dadas por:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\alpha(2 + 3e^2)}{a(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.38)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{5\alpha e}{2a^2(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.39)$$

sendo, nestas expressões

$$\alpha = \frac{3E_{\odot}}{16\pi c^2 s \rho}$$

onde, aqui, s é o raio da partícula, ρ a sua densidade, e E_{\odot} a energia total emitida pelo Sol por segundo.

Um cálculo direto mostra que, para pequenas excentricidades,

$$a \simeq a_0 [1 - (2\alpha t/a_0^2)] \quad (1.40)$$

$$e \simeq e_0 [1 - \frac{5}{2}(\alpha t/a_0^2)] \quad (1.41)$$

onde vemos que a e e decrescem linearmente com o tempo. Partindo de $a_0 = 3.36$ U.A. e $e_0 = 0.14$, as variações destas quantidades após 2×10^4 anos são, respectivamente, $\Delta a = -0.24$ e $\Delta e = -0.014$. Resolvemos numericamente as equações (1.38) e (1.39) e obtivemos, para estas mesmas condições iniciais, após 2×10^4 anos, $\Delta a = -0.260$ e $\Delta e = -0.010$.

O tamanho finito da fonte de radiação causa um aumento no efeito Poynting-Robertson que é apreciável quando a partícula orbitante está próxima da esfera irradiante. Os resultados de Guess (1962) para uma fonte esférica finita mostraram que, quando a partícula está longe da fonte de radiação, o arrasto radial sobre ela é quase o dobro, em eficiência, do arrasto transversal. Este resultado é válido para uma fonte puntual, e concorda com as conclusões de Robertson(1937).

Capítulo 2. O Efeito Yarkovsky

A força Yarkovsky resulta do fato de que, devido à inércia térmica, a porção de um corpo em rotação que vai do anoitecer até à meia-noite, emite mais radiação do que a porção que vai da meia-noite até o amanhecer, enquanto o lado do amanhecer ao meio-dia absorve mais radiação do que o lado da tarde. Idealizando a distribuição de temperatura real, podemos considerar que o hemisfério que está anoitecendo está a uma temperatura $T + \Delta T/2$, ao passo que o hemisfério que está amanhecendo está a uma temperatura $T - \Delta T/2$ (ver fig. 2.1).

Seja um elemento de superfície dA à temperatura T , irradiando isotropicamente com intensidade I ; isto é, a superfície irradia como uma superfície de Lambert.

O fluxo de energia para fora é dado por (*Burns et al., 1979*)

$$\int I \cos \nu d\chi = \pi I = \sigma T^4 \quad (2.1)$$

onde ν é o ângulo em relação à normal à superfície, χ é um ângulo sólido, e σ é a constante de Stefan-Boltzmann (aqui, assumimos a emissividade da superfície $\epsilon(\lambda) \simeq 1$). Então a força de reação da radiação sobre o elemento, normal à sua superfície, será

$$dF = \int (I \cos \nu)(\cos \nu dA) \frac{d\chi}{c} = \frac{2}{3} \sigma T^4 \frac{dA}{c} \quad (2.2)$$

Para uma partícula esférica de raio s , sendo a temperatura de sua superfície admitida com $\Delta T/T \ll 1$, a força de reação transversal no plano da órbita — isto é, a força Yarkovsky — resultante da emissão do excesso de radiação sobre o lado que está anoitecendo será

$$F_Y = \frac{8}{3} \pi s^2 \left(\frac{\sigma T^4}{c} \right) \left(\frac{\Delta T}{T} \right) \cos \zeta \quad (2.3)$$

podem diferir para objetos pedregosos e ferrosos.

Em 1976, Peterson propôs um mecanismo para explicar a origem de meteoritos através do efeito Yarkovsky, que origina-se da reirradiação assimétrica da radiação solar por um corpo iluminado em rotação. Para avaliar a importância do efeito Yarkovsky operando na região do cinturão de asteróides, Peterson calculou inicialmente a distribuição de temperatura sobre um cilindro em rotação recebendo iluminação solar, e assim obteve uma expressão analítica para a força de reirradiação como função da intensidade de iluminação, propriedades físicas do cilindro e taxa de rotação.

Os resultados para a força reirradiativa sobre o cilindro foram então generalizados para um cone e depois aplicados a uma esfera. Deste modo, Peterson obteve explicitamente, em duas dimensões, os efeitos da força de reirradiação sobre os parâmetros orbitais da esfera.

A distribuição de temperatura dentro do cilindro é determinada pela seguinte equação de fluxo de calor uni-dimensional:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(r, t) \quad \kappa = \frac{K}{\rho C_p} \quad (2.4)$$

Onde: $R \rightarrow$ raio do corpo;

$T \rightarrow$ temperatura;

$\kappa \rightarrow$ difusidade térmica;

$K \rightarrow$ condutividade térmica;

$C_p \rightarrow$ calor específico à pressão constante;

$\rho \rightarrow$ densidade;

$t \rightarrow$ tempo;

$r \rightarrow$ profundidade do cilindro medida a partir de sua superfície interna;

A condição de contorno na superfície do cilindro tem a forma:

$$K \frac{\partial T}{\partial r}(r, t)|_{r=0} = \varepsilon \sigma T^4(0, t) - \alpha I(t) \quad (2.5)$$

Aqui, α é a absorvidade da superfície, ε a emissividade da superfície, σ a constante de Stefan-Boltzmann, e $I(t)$ o fluxo solar que um elemento do cilindro experimenta em função do tempo. Admite-se que $I(t)$ tem a forma de uma senóide semi-retificada de amplitude I_0 , cuja série de Fourier é dada por

$$I(t) = I_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1} \right) \quad (2.6)$$

Uma simplificação do problema geral foi feita assumindo que a distribuição de temperatura dentro do cilindro já atingiu seu valor de estado estacionário, independentemente das condições iniciais. Isto significa que o cilindro como um todo não está nem se aquecendo nem se resfriando, e também que cada elemento irradia exatamente tanto calor quanto absorve durante cada ciclo. Isto quer dizer que, embora o perfil de temperatura de cada elemento do cilindro mude com o tempo, ele é exatamente o mesmo para qualquer elemento quando este atinge um dado valor fixo do ângulo de rotação ψ . Em outras palavras, enquanto o cilindro rotaciona em relação ao Sol, a distribuição de temperatura dentro dele permanece a mesma.

A solução mais geral para a equação (2.4), que satisfaz à hipótese de estado estacionário, pode ser escrita na forma aproximada

$$T(r, t) = T_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cos n\omega t \right) \quad (2.7)$$

Nos cálculos subseqüentes, Peterson considerou uma esfera com seu eixo de rotação perpendicular ao plano orbital. A única perturbação considerada sobre o sistema de 2 corpos é a força reirradiativa, e Peterson admitiu também que $F = F_x = F_y$, ou seja, o ângulo de reemissão da radiação solar é igual a 45° .

Após muitos cálculos, Peterson obteve para a força a seguinte expressão:

$$F(r) = 0.808 \frac{\alpha I_o \pi R^2}{c P r^{\frac{1}{2}}} \quad (2.8)$$

onde R é o raio do corpo, r é a distância orbital ao Sol, expressa em unidades astronômicas, e I_o e P são parâmetros constantes resolvidos a 1U.A..

Aqui, a aceleração perturbadora pode ser facilmente obtida dividindo ambos os lados da equação (2.8) pela massa da esfera, $m = 4\pi\rho R^3/3$. Assim, temos

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{Q}{r^{\frac{1}{2}}} \quad (2.9)$$

onde $Q = 0.606\alpha I_o/cP\rho R$ é a aceleração reirradiativa sobre a esfera a 1U.A..

Em seguida, empregando o método da variação dos elementos orbitais, Peterson obteve

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = 2 \left[\frac{a^3}{\mu(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[e \sin f \gamma_R + (1 + e \cos f) \gamma_S \right] \quad (2.10a)$$

$$\dot{e} = \frac{de}{dt} = \left[\frac{a(1-e^2)}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sin f \gamma_R + \frac{e + 2 \cos f + e \cos^2 f}{1 + e \cos f} \gamma_S \right] \quad (2.10b)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \left[\frac{a(1-e^2)}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\cos f \gamma_R + \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \sin f \gamma_S \right] \quad (2.10c)$$

onde a é o semi-eixo maior da órbita, e a excentricidade, f a anomalia verdadeira, ω o argumento do pericentro e μ a constante de gravitação do Sol.

Lembrando que $\gamma_R = \gamma_S = Q/r^2$, onde $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos f)$, vem

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2Q}{\mu^{\frac{1}{2}}(1 - e^2)^4 a^2} \left[e \sin f (1 + e \cos f)^{\frac{7}{2}} + (1 + e \cos f)^{\frac{9}{2}} \right]$$

Considerando somente valores "pequenos" para a excentricidade ($e^2 \ll 1$)

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2Q}{\mu^{\frac{1}{2}} a^2} \left[e \sin f + \frac{9}{2} e \cos f + \frac{7}{2} e^2 \sin f \cos f + 1 \right]$$

e fazendo a média sobre uma revolução, resulta

$$\langle da/dt \rangle = \pm 2Q/\mu^{\frac{1}{2}} a^2 \quad (2.11a)$$

Analogamente para e e ω , a partir de (2.10b) e (2.10c)

$$\langle de/dt \rangle = \pm 2Qe/\mu^{\frac{1}{2}} a^3 \quad (2.11b)$$

$$\langle d\omega/dt \rangle = -3Q/4\mu^{\frac{1}{2}} a^3 \quad (2.11c)$$

onde a notação $\langle \rangle$ significa média no tempo sobre uma órbita completa. Aqui, (2.11a) e (2.11b) dependem somente da componente y da aceleração perturbadora, enquanto (2.11c) depende somente da componente x . Assim, as maiores mudanças envolvendo o tamanho e a forma da órbita são determinadas apenas pela força Yarkovsky, cujo sinal depende sobretudo do sentido relativo entre a velocidade de rotação da esfera e a velocidade angular orbital. Em particular, se as duas velocidades têm o mesmo sentido, então o sinal positivo em (2.11a) e (2.11b) é correto; de outro modo, o sinal negativo deve ser usado. O sinal negativo em (2.11c) significa que o pericentro da órbita será retrógrado. As equações (2.11)

podem ser vistas como um conjunto de equações diferenciais acopladas, cujas soluções são facilmente encontradas após integração:

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{6Q}{\mu^{\frac{1}{2}} a_0^3} t \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12a)$$

$$e(t) = e_0 \left(1 - \frac{6Q}{\mu^{\frac{1}{2}} a_0^3} t \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12b)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{8} \ln \left(1 - \frac{6Q}{\mu^{\frac{1}{2}} a_0^3} t \right) \quad (2.12c)$$

onde a_0 , e_0 e ω_0 são os valores iniciais dos elementos orbitais em $t = 0$. Uma vez que o interesse está em fragmentos de asteróides que eventualmente cruzam a órbita da Terra, o sinal negativo foi escolhido em (2.11a) e (2.11b). Esta escolha corresponde ao fragmento tendo uma rotação retrógrada em relação ao seu movimento orbital. Dividindo-se (2.12a) por (2.12b), notamos que $a(t)$ e $e(t)$ mantêm uma razão constante com o tempo.

Assim, utilizando valores específicos para as propriedades térmicas, Peterson modelou um meteorito pedregoso típico com pouco metal, e obteve para o módulo da aceleração Yarkovsky o valor

$$Q = 1.32 \times 10^{-10} m/s^2$$

Com isto, ele concluiu que um objeto esférico de 50cm de raio, sob a ação do efeito Yarkovsky, levaria aproximadamente 30 milhões de anos para atingir a órbita da Terra, partindo do cinturão de asteróides, a 3U.A..

Podemos fazer uma analogia entre o efeito Yarkovsky e a ejeção de gases volatilizados por cometas. Tal ejeção pode alterar a órbita, e portanto o período, de um cometa em rotação. Se o núcleo do cometa não está rotacionando, o gelo da superfície

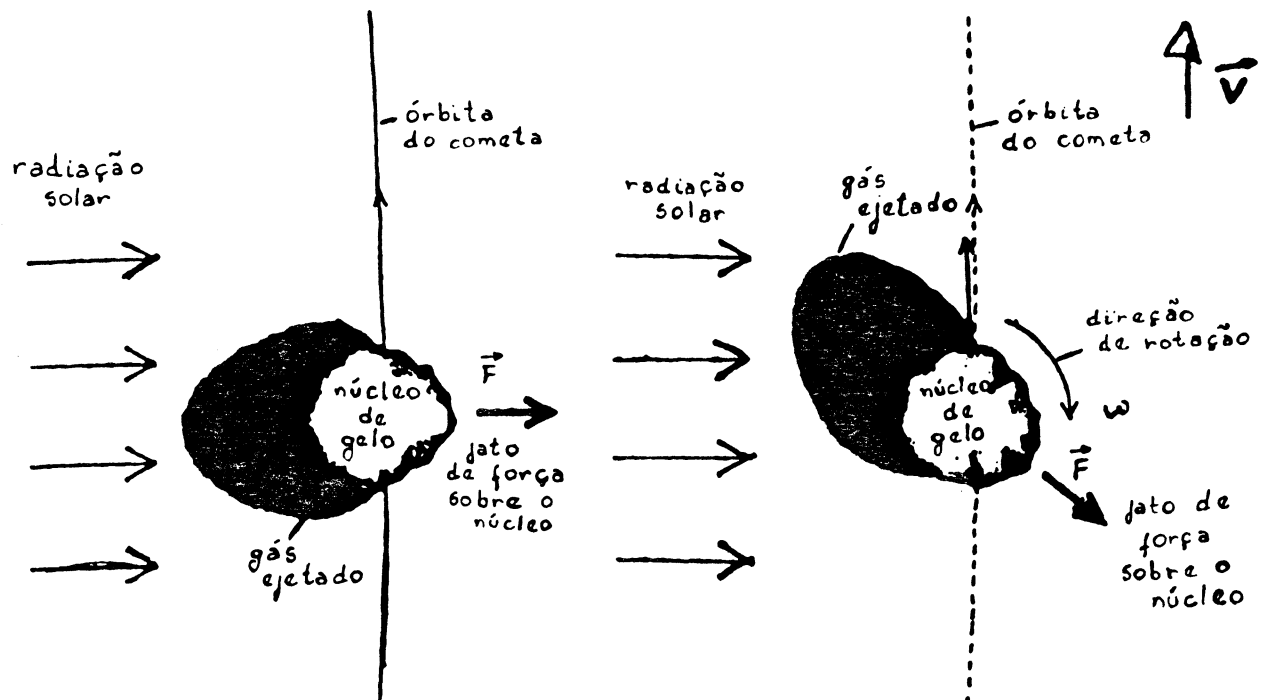


Figura 2.2: Ejeção de gases por cometas. Diagramas mostrando, à esquerda, um cometa estacionário e, à direita, um cometa em rotação, ambos sujeitos à radiação solar.

aquecida pelo Sol pode gerar um jato de força pequeno, mas constante, que impulsionará o cometa radialmente para fora do Sol (ver fig. 2.2).

O impulso para fora diminui constantemente uma pequena quantidade da aceleração devida à gravidade do Sol, por isso o período orbital não mudará de uma revolução para a próxima. Em princípio deve ser possível dizer se o jato de força radial existe: um cometa sujeito a ele deve ocupar uma órbita levemente maior do que a órbita de um cometa no qual a força está ausente. Se o núcleo do cometa rotaciona em uma direção oposta à direção de seu movimento ao redor do Sol, a ejeção de gases volatilizados atingirá um pico na “tarde” do “dia” do cometa. O jato de força resultante diminuirá levemente a energia cinética do cometa, contraíndo constantemente sua órbita. Como resultado o período do cometa será encurtado levemente a cada passagem perihélica.

Um cometa que tem rotação em uma direção oposta àquela da direita da

figura 2.2, experimentará uma expansão de sua órbita, e portanto um aumento de seu período. O encurtamento observado no período do cometa Encke foi devido basicamente à sua rotação em uma direção oposta à direção na qual ele se move ao redor do Sol.

A seguir apresentamos a figura que representa a evolução orbital do semi-eixo maior da órbita da partícula, com o tempo, de acordo com o modelo proposto por Peterson.

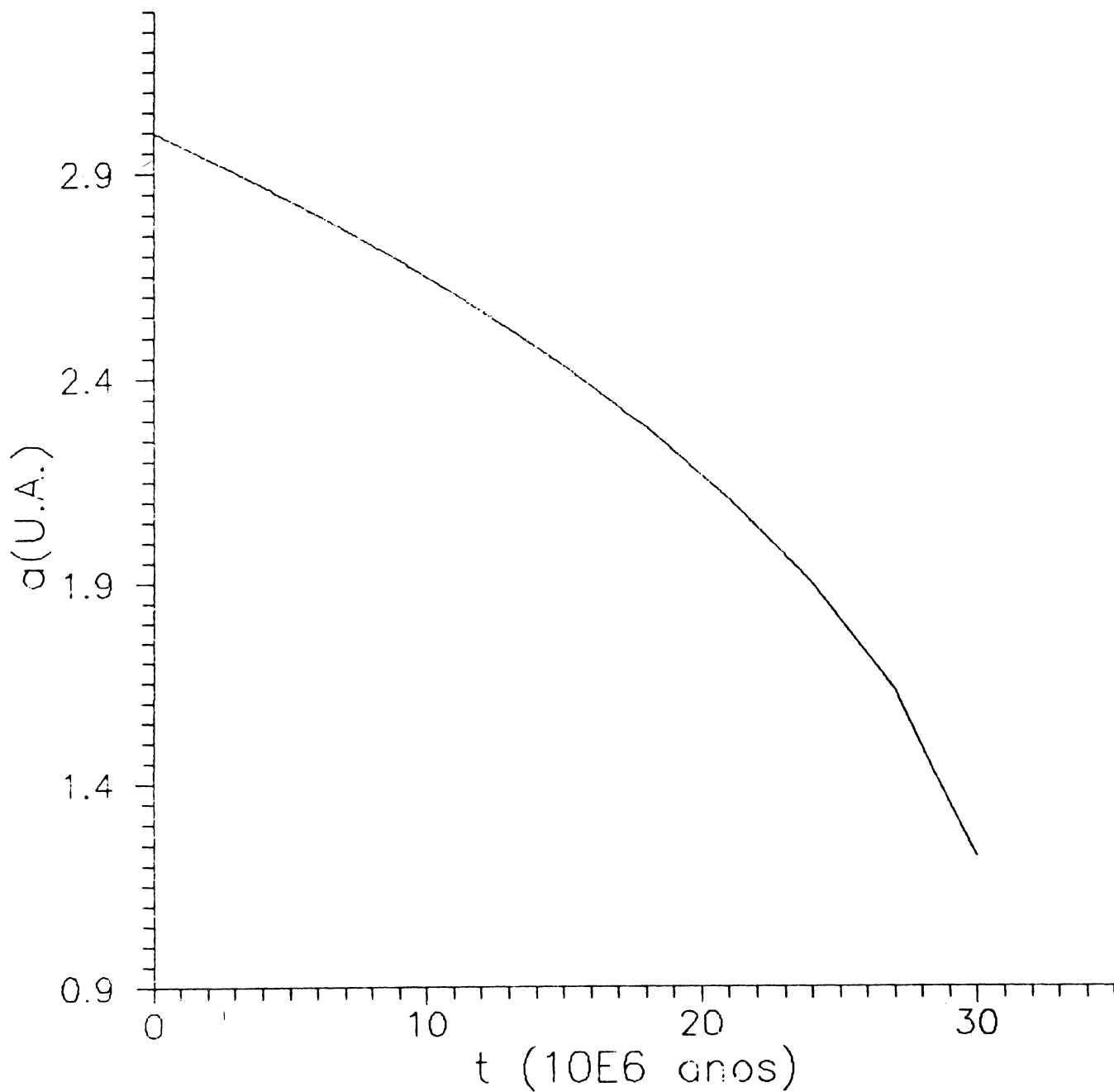


Figura 2.3: Evolucao orbital do semi-eixo maior segundo o modelo de Peterson

Capítulo 3. Modelo de Reemissão da Radiação Eletromagnética

O modelo de reemissão da radiação eletromagnética proposto por Afonso e Foryta (1989) parte da seguinte equação de difusão da energia térmica

$$\nabla^2 u - \frac{\rho C_p}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

que, em coordenadas esféricas, torna-se

$$\frac{\rho C_p}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad 0 \leq r \leq R$$

com a seguinte condição de contorno

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial r} = \alpha_a I - \epsilon \sigma u^4 \quad r = R \quad (3.2)$$

onde $u = u_o + \Delta u$

e

$u \longrightarrow$ temperatura média do corpo orbitante;

$I \longrightarrow$ distribuição superficial de taxa de energia;

$\rho \longrightarrow$ densidade do corpo;

$C_p \longrightarrow$ calor específico à pressão constante;

$\kappa \longrightarrow$ condutividade térmica do corpo;

$\alpha_a \longrightarrow$ absorvidade da superfície;

$\epsilon \rightarrow$ emissividade da superfície;

$\sigma \rightarrow$ constante de Stefan-Boltzmann;

$R \rightarrow$ raio do corpo;

A condição $\Delta u \ll u_0$ foi imposta a fim de se linearizar este conjunto de equações. Assim, foi obtida a seguinte equação de distribuição para a temperatura do corpo:

$$u(r, \theta, \phi, t, \beta) = u_0(\beta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] \times \\ \times P_{nm}(\cos \theta) \exp(im\phi) \exp(i\nu t) \quad (3.3)$$

onde β é um conjunto arbitrário de parâmetros físico-geométricos, $j_{n\nu}$ é uma função esférica de Bessel, P_{nm} é um polinômio de Legendre,

$$A_{000}(\beta) = 0$$

e

$$A_{nm\nu}(\beta) = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I(r, \theta, \phi, t, \beta) P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] \left[\kappa \frac{d}{dr} L_n j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] + 4\epsilon \sigma u_0^3 \right]} - \\ - \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon \sigma u_0^4(\beta) P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] \left[\kappa \frac{d}{dr} L_n j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] + 4\epsilon \sigma u_0^3 \right]} \quad (3.4)$$

Mas a força sobre um corpo negro não-perfeito devida à reemissão da radiação térmica é dada por

$$\frac{d\vec{p}}{dt}(\beta, t) = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\hat{r}) u^4 R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.5)$$

onde $\vec{\ell} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$

Esta força deve ter uma representação real, portanto

$$\vec{F}(\beta, t) = \Re \frac{d\vec{p}}{dt}(\beta, t)$$

Com a equação de distribuição de temperatura (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F}(\beta, t) = & -\frac{32 \epsilon \sigma}{9} \frac{\pi R^2 u_o^3(\beta) \Re \sum_{\nu=0}^{+\infty} j_{1\nu} \left[-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right]^{\frac{1}{2}} r \times \\ & \times \left\{ A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k} \right\} \exp(i\nu t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde os valores de $A_{11\nu}$ e $A_{10\nu}$ são dados pela equação (3.4). A função intensidade de energia radiante, incidente sobre a posição superficial (θ, ϕ) do corpo esférico, para uma fonte puntual de energia radiante à distância fisicamente infinita, pode ser escrita como

$$I(\theta, \phi) = \begin{cases} I_o(\hat{\ell}' \cdot \hat{\ell}), & \text{se } (\hat{\ell}' \cdot \hat{\ell}) \geq 0; \\ 0, & \text{se } (\hat{\ell}' \cdot \hat{\ell}) < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\hat{\ell}' = \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k}$

$$\hat{\ell}' \cdot \hat{\ell} = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

e I_o é a intensidade de energia radiante sobre o ponto (θ', ϕ') na superfície do corpo. As coordenadas θ' e ϕ' representam a posição aparente da fonte, e são funções do tempo para descrever o movimento orbital aparente da fonte no sistema de referência do corpo.

Consideramos agora a função intensidade de energia radiante incidente, equação (3.7), para um corpo esférico que orbita uma fonte puntual de energia radiante, como sendo representada por

$$I = \begin{cases} I_o \sin \theta \cos(\phi - \omega t - \phi_o), & \text{se } \omega t - \phi_o - \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \omega t - \phi_o + \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (3.8)$$

Nesta equação (3.8), considerou-se $\phi' = \omega t + \phi_o$ e $\theta' = \pi/2$.

Substituindo esta expressão na equação (3.4), e particularizando para $n=m=1$, resulta

$$\begin{aligned}
 A_{11\nu}(\beta) = & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_{\omega t - \phi_o - \frac{\pi}{2}}^{\omega t - \phi_o + \frac{\pi}{2}} \alpha_a I_o(\beta) \sin \theta \cos(\phi - \omega t - \phi_o) P_{11}(\cos \theta) \times \right. \\
 & \left. \times \exp(-i\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt \right] \left[\frac{16\pi^2}{3} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[\kappa \frac{d}{dr} \ln j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] + 4\epsilon\sigma u_o^3(\beta) \right]^{-1} \right. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

sendo $A_{10\nu}(\beta) = 0$

para todo e qualquer valor de ν .

Então, podemos escrever $\vec{F}(\beta, t)$ como

$$\vec{F}_i(\beta, t) = -\frac{8\epsilon\sigma}{9c} \pi R^2 u_o^3(\beta) \frac{(i + ij) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(\beta)}{\kappa \frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) + 4\epsilon\sigma u_o^3(\beta)} \quad (3.10)$$

onde

$$K^2 = \frac{-i\nu\rho C_p}{\kappa}$$

$j_1(Kr) \rightarrow$ função esférica de Bessel;

Capítulo 4. Perturbações em Órbitas de Asteróides

Desenvolvemos aqui o modelo anterior (Afonso e Foryta, 1989), para o caso em que o eixo de rotação do corpo esférico orbitante é perpendicular ao plano de sua órbita em torno do corpo fonte.

Partimos da equação que representa a força de reemissão, eq.(3.10):

$$\vec{F}_t = -\frac{8}{9} \frac{\epsilon \sigma}{c} \pi R^2 u_o^3(r) \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r)}{\kappa \frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) + 4\epsilon \sigma u_o^3}$$

onde

ϵ \longrightarrow emissividade do corpo orbitante;

σ \longrightarrow constante de Stefan-Boltzmann;

c \longrightarrow módulo da velocidade da luz;

R \longrightarrow raio do corpo esférico orbitante;

u_o \longrightarrow temperatura média do corpo orbitante;

ω \longrightarrow velocidade angular do corpo orbitante;

t \longrightarrow tempo;

α_a \longrightarrow absorvidade da superfície do corpo orbitante;

$I_o(r)$ \longrightarrow fluxo solar;

κ \longrightarrow condutividade térmica do corpo orbitante;

ρ → densidade do corpo orbitante;

C_p → calor específico à pressão constante;

$$K^2 = \frac{-i\nu\rho C_p}{\kappa}$$

$j_1(Kr)$ → função esférica de Bessel;

$$\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) = X + iY$$

Esta derivada foi resolvida analiticamente, e após a separação do resultado em partes real e imaginária, calculamos o seu valor numericamente.

$$\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) = \frac{1}{j_1(Kr)} \frac{d}{dr} j_1(Kr) \quad (4.1)$$

$$j_1(Kr) = \frac{\sin(Kr)}{(Kr)^2} - \frac{\cos(Kr)}{(Kr)} \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dr} j_1(Kr) = -\frac{2K \sin(Kr)}{(Kr)^3} + \frac{2K \cos(Kr)}{(Kr)^2} + \frac{K \sin(Kr)}{(Kr)} \quad (4.3)$$

Portanto:

$$\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) = \frac{-\frac{2K \sin(Kr)}{(Kr)^3} + \frac{2K \cos(Kr)}{(Kr)^2} + \frac{K \sin(Kr)}{(Kr)}}{\frac{\sin(Kr)}{(Kr)^2} - \frac{\cos(Kr)}{(Kr)}} \quad (4.4)$$

Da teoria de variáveis complexas temos

$$\sin(Kr) = \frac{e^{i(Kr)} - e^{-i(Kr)}}{2i} \quad \cos(Kr) = \frac{e^{i(Kr)} + e^{-i(Kr)}}{2}$$

e assim

$$\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) = \frac{-2K \sin(Kr) + 2K(Kr) \cos(Kr) + K(Kr)^2 \sin(Kr)}{(Kr) \sin(Kr) - (Kr)^2 \cos(Kr)} \quad (4.5)$$

Desenvolvendo o denominador da expressão anterior, obtemos

$$D = (Kr) \sin(Kr) - (Kr)^2 \cos(Kr) = (Kr) \left[\frac{e^{i(Kr)}}{2i} - \frac{e^{-i(Kr)}}{2i} \right] - (Kr)^2 \left[\frac{e^{i(Kr)}}{2} + \frac{e^{-i(Kr)}}{2} \right]$$

$$D = e^{i(Kr)} \frac{K}{2} \left[-ir - Kr^2 \right] + e^{-i(Kr)} \frac{K}{2} \left[ir - Kr^2 \right] \quad (4.6)$$

e desenvolvendo o numerador

$$N = -2K \sin(Kr) + 2K(Kr) \cos(Kr) + K(Kr)^2 \sin(Kr)$$

$$= -2K \left[\frac{e^{i(Kr)}}{2i} - \frac{e^{-i(Kr)}}{2i} \right] + 2K(Kr) \left[\frac{e^{i(Kr)}}{2} + \frac{e^{-i(Kr)}}{2} \right] + K(Kr)^2 \left[\frac{e^{i(Kr)}}{2i} - \frac{e^{-i(Kr)}}{2i} \right]$$

$$N = e^{i(Kr)} K \left[i + Kr - \frac{i(Kr)^2}{2} \right] + e^{-i(Kr)} K \left[-i + Kr + \frac{i(Kr)^2}{2} \right] \quad (4.7)$$

Desta forma, $\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr)$ será

$$\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) = 2 \left\{ \frac{e^{i(Kr)} [i + Kr - i(Kr)^2/2] + e^{-i(Kr)} [-i + Kr + i(Kr)^2/2]}{e^{i(Kr)} [-ir - Kr^2] + e^{-i(Kr)} [ir - Kr^2]} \right\}$$

$$\frac{d}{dr} \ln j_1(Kr) = 2 \left\{ \frac{Ae^{i(Kr)} + Be^{-i(Kr)}}{Ce^{i(Kr)} + De^{-i(Kr)}} \right\} \quad (4.8)$$

onde

$$A = i + Kr - \frac{i(Kr)^2}{2} \quad B = -i + Kr + \frac{i(Kr)^2}{2} \quad (4.9)$$

$$C = -ir - Kr^2 \quad D = ir - Kr^2 \quad (4.10)$$

Aqui, explicitaremos em I_o e u_o^3 somente suas dependências com r . Desenvolvendo a equação (3.10), obtemos

$$\vec{F}_t = -\frac{8\epsilon\sigma}{9} \frac{\pi R^2 u_o^3(r)}{c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r)}{\kappa(X + iY) + 4\epsilon\sigma u_o^3(r)} \quad (4.11)$$

$$\vec{F}_t = -\frac{8\epsilon\sigma}{9} \frac{\pi R^2 u_o^3(r)}{c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r)}{(4\epsilon\sigma u_o^3(r) + \kappa X) \left[1 + \frac{\kappa i Y}{4\epsilon\sigma u_o^3(r) + \kappa X} \right]} \quad (4.12)$$

$$\vec{F}_t = -\frac{8\epsilon\sigma}{9} \frac{\pi R^2 u_o^3(r)}{c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r)}{(4\epsilon\sigma u_o^3(r) + \kappa X) \left[1 + \frac{i\kappa Y}{4\sigma u_o^3(r) + \kappa X} \right]} \quad (4.13)$$

Podemos representar o ângulo de atraso δ por

$$\xi = \tan \delta = \frac{\frac{\kappa Y}{\epsilon}}{4\sigma u_o^3(r) + \frac{\kappa X}{\epsilon}} = -i \left(\frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{e^{i\delta} + e^{-i\delta}} \right) \quad (4.14)$$

e

$$(1 + i\xi) = \frac{2e^{i\delta}}{e^{i\delta} + e^{-i\delta}} \quad (4.15)$$

Assim a equação para a força toma a forma

$$\vec{F}_t = -\frac{8\epsilon\sigma}{9} \frac{\pi R^2 u_o^3(r)}{c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r)}{\left[4\epsilon\sigma u_o^3(r) + \kappa X \right] \frac{2e^{i\delta}}{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}} \quad (4.16)$$

mas $\frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2} = \cos \delta$

e então

$$\vec{F}_t = -\frac{8\epsilon\sigma}{9} \frac{\pi R^2 u_o^3(r)}{c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r) \cos \delta e^{-i\delta}}{4\epsilon\sigma u_o^3(r) + \kappa X} \quad (4.17)$$

E ainda, como $\cos \delta = \frac{1}{\sec \delta} = \frac{1}{(1+\tan^2 \delta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}$

a expressão para a força fica

$$\vec{F}_t = -\frac{8 \epsilon \sigma}{9 c} \pi R^2 u_o^3(r) \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o) \alpha_a I_o(r) e^{-i\delta}}{\left[4\epsilon\sigma u_o^3(r) + \kappa X\right] (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.18)$$

Colocando $4\epsilon\sigma u_o^3(r)$ em evidência, podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= -\frac{8 \epsilon \sigma}{9 c} \pi R^2 u_o^3(r) \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o - i\delta) \alpha_a I_o(r)}{4\epsilon\sigma u_o^3(r) \left(1 + \frac{\kappa X}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \vec{F}_t &= -\frac{2 \pi R^2}{9 c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_o - i\delta) \alpha_a I_o(r)}{\left(1 + \frac{\kappa X}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

e fazendo $\phi_o = 0$, obtemos

$$\vec{F}_t = -\frac{2 \pi R^2}{9 c} \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t - i\delta) \alpha_a I_o(r)}{\left(1 + \frac{\kappa X}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.20)$$

mas

$$\exp(-i\omega t - i\delta)(\hat{i} + i\hat{j}) = \cos(\omega t + \delta)\hat{i} + \sin(\omega t + \delta)\hat{j}$$

portanto

$$\vec{F}_t = -\frac{2 \pi R^2}{9 c} \frac{[\cos(\omega t + \delta)\hat{i} + \sin(\omega t + \delta)\hat{j}] \alpha_a I_o(r)}{\left(1 + \frac{\kappa X}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.21)$$

O módulo da aceleração será dado por

$$\gamma = \frac{F_t}{m} = \frac{1}{6\rho R c} \frac{\alpha_a I_o(r)}{\left(1 + \frac{\kappa X}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.22)$$

onde $m = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$

cuja forma, proporcional a $1/R$, nos mostra que esta aceleração é de fato seletiva, isto é, a intensidade de seu efeito sobre a órbita de uma partícula será inversamente proporcional ao raio desta partícula.

Assim, as componentes da aceleração serão dadas por

$$\gamma_R = \frac{\alpha_a I_o(r)}{6\rho Rc} \frac{\cos \delta}{\left(1 + \frac{\kappa}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)} X\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.23)$$

$$\gamma_S = \frac{\alpha_a I_o(r)}{6\rho Rc} \frac{\sin \delta}{\left(1 + \frac{\kappa}{4\epsilon\sigma u_o^3(r)} X\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.24)$$

onde $I_o(r)$ e $u_o^3(r)$ variam com a distância à fonte de acordo com as seguintes relações:

$$I_o(r) = I_o \left(\frac{r_o}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

$$u_o^3(r) = u_o^3 \left(\frac{r_o}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.26)$$

onde $r_o = 1 \text{U.A.}$.

Agora, aplicamos o modelo para órbitas de asteróides, usando os seguintes valores (para um meteorito pedregoso com pouco metal "típico") (Peterson, 1976):

$\kappa = 1.34 \text{W/mK}$	(condutividade térmica do corpo);
$\alpha_a = \epsilon = 0.9$	(α_a = absorvidade ; ϵ = emissividade);
$I_o = 1400 \text{W/m}^2$	(fluxo solar a 1U.A.);
$\rho = 2500 \text{kg/m}^3$	(densidade média do corpo orbitante);
$R = 0.5 \text{m}$	(raio do corpo);
$c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$	(módulo da velocidade da luz);
$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$	(constante de Stefan- Boltzmann);
$u_o = 298 \text{K}$	(temperatura média do corpo orbitante);

$$C_p = 10^3 J/\kappa gK \quad (\text{calor específico à pressão constante});$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$X = 15.08750 \quad (\text{parte real de } \frac{d}{dr} \ln j_1(Kr));$$

$$Y = 16.83801 \quad (\text{parte imaginária de } \frac{d}{dr} \ln j_1(Kr));$$

$$\delta = 41.3^\circ \quad (\text{ângulo de atraso});$$

Para a aceleração Yarkovsky obtivemos os seguintes valores:

$$\gamma_R = 0.700 \times 10^{-10} m/s^2$$

$$\gamma_S = 0.606 \times 10^{-10} m/s^2$$

$$\gamma_W = 0$$

Devemos salientar que, embora essa aceleração tenha módulo um pouco maior na direção da radiação incidente, o efeito desta componente sobre a órbita do asteróide é desprezível, pois sua direção é a mesma da força gravitacional e da pressão de radiação solar direta. Assim, para análise da variação no semi-eixo maior, a componente mais relevante da aceleração é a componente na direção perpendicular à radiação incidente.

Após obtermos a expressão desta aceleração, resolvemos as equações de Gauss do movimento numericamente, e encontramos o tempo necessário para que um asteróide com estas características cruze a órbita da Terra, partindo do cinturão de asteróides, a 3U.A.. A seguir apresentamos a figura que representa o resultado deste estudo para a evolução orbital do semi-eixo maior.

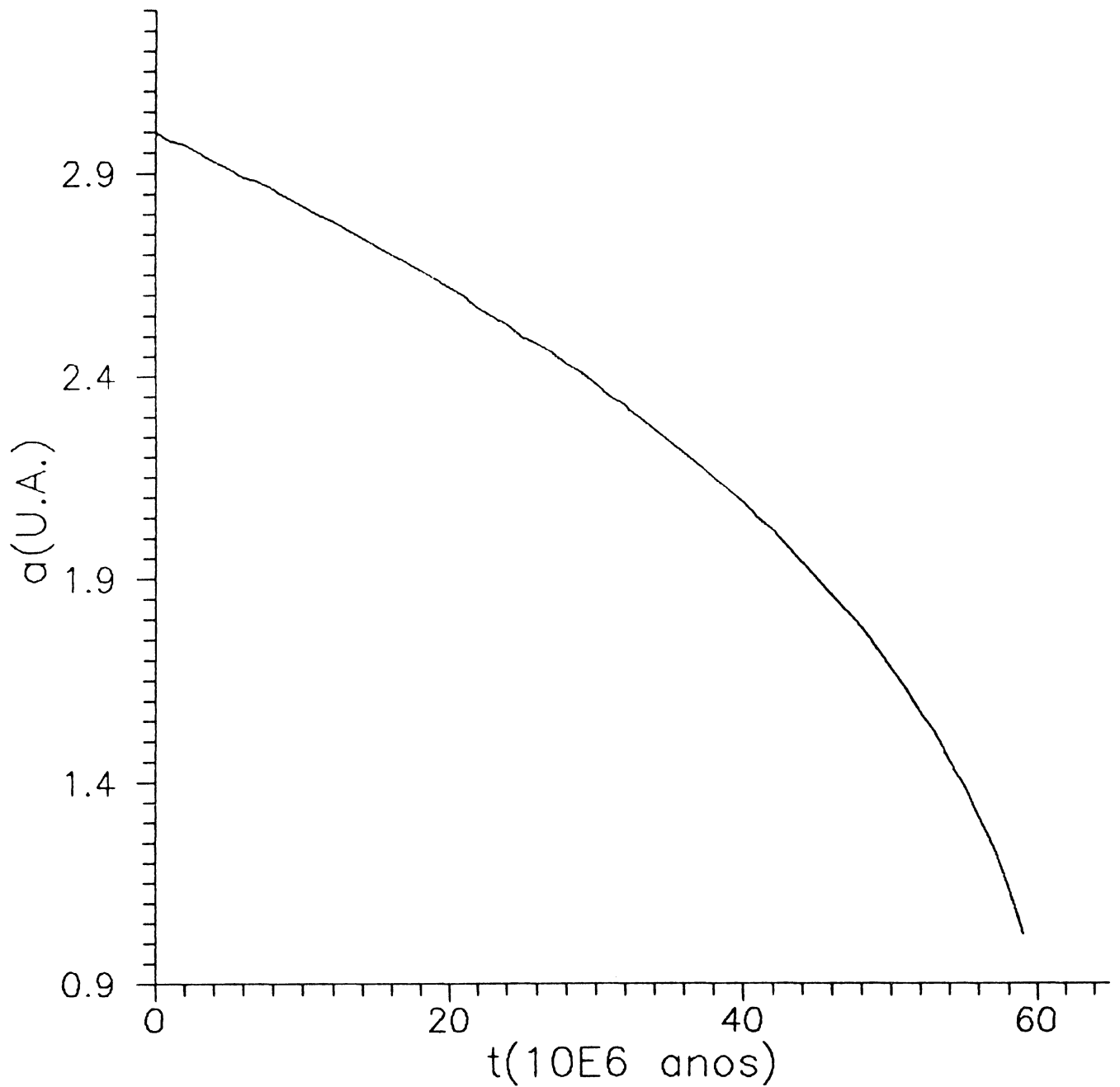


Figura 4.1: Evolucao orbital do semi-eixo maior

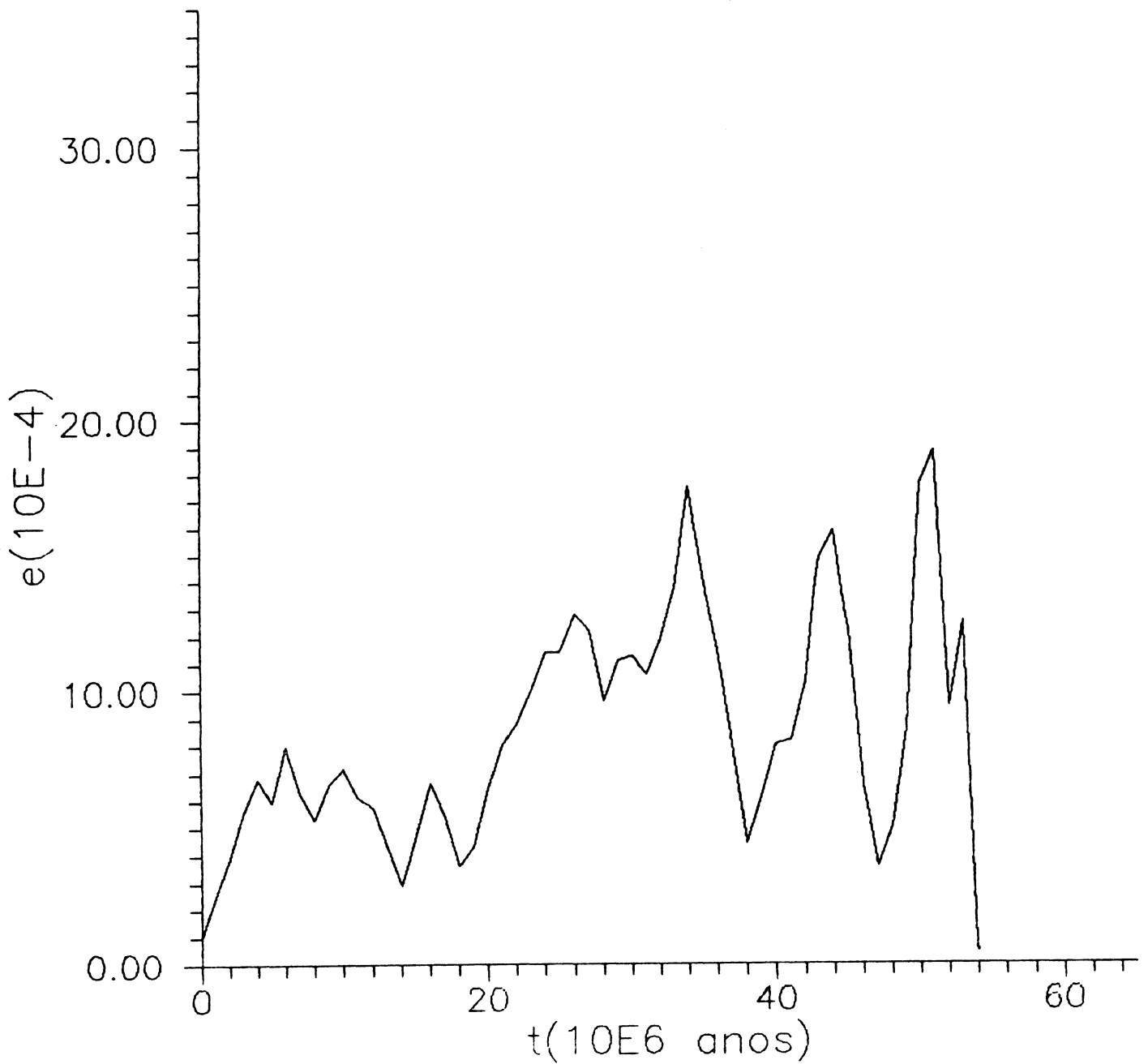


Figura 4.2: Evolucao orbital da excentricidade

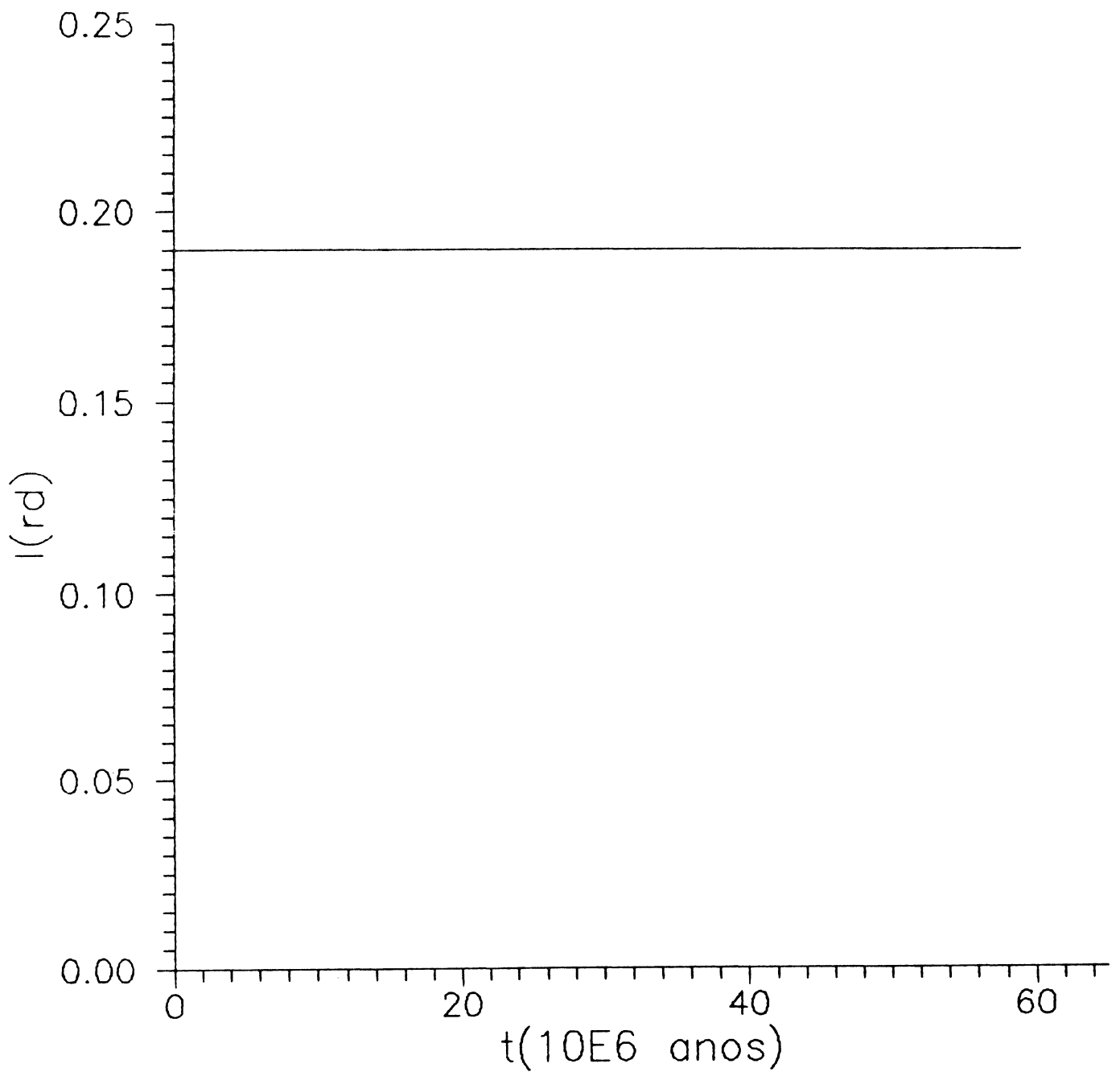


Figura 4.3: Evolucao orbital da inclinacao

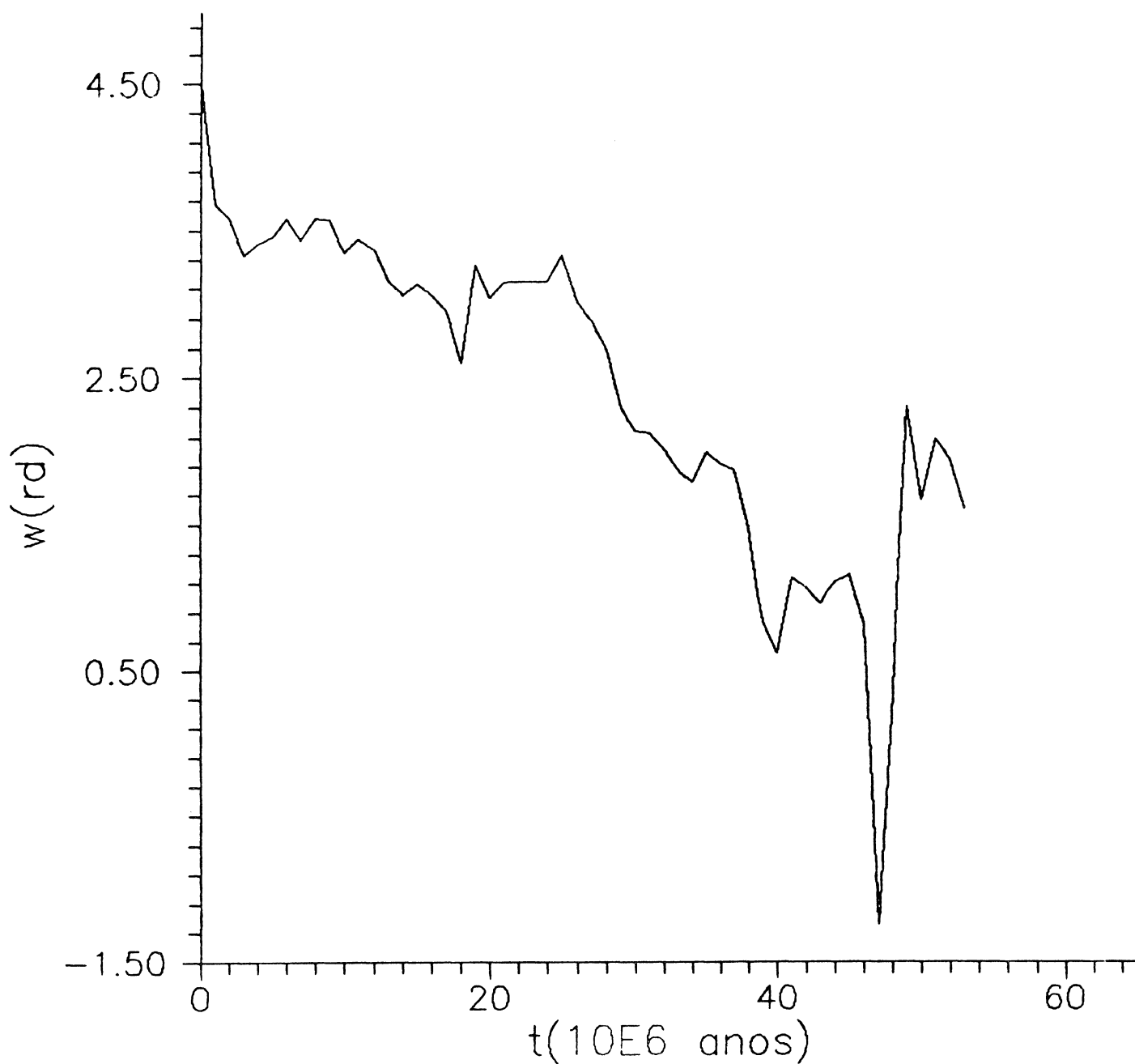


Figura 4.4: Evolucao orbital do argumento do pericentro

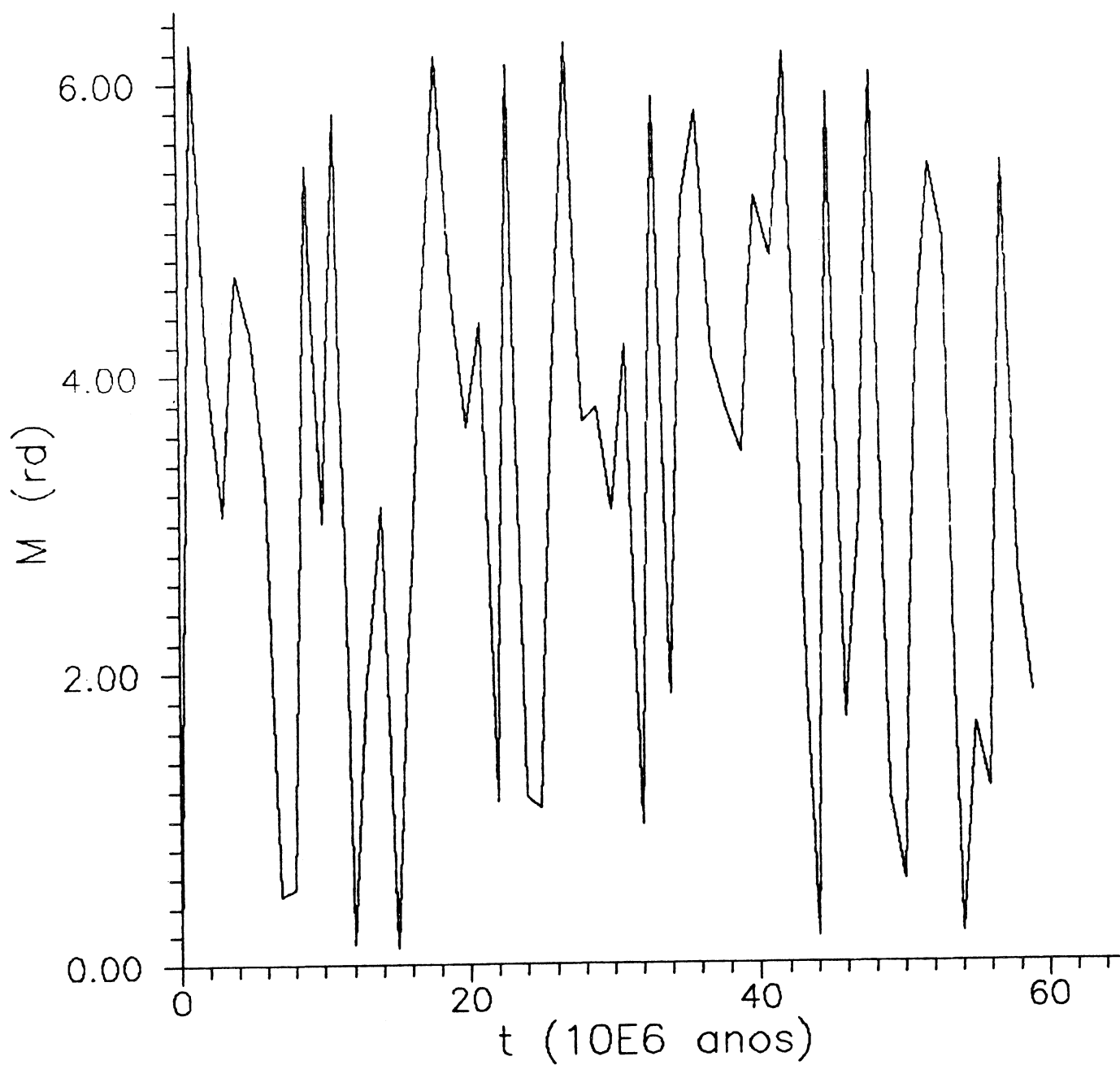


Figura 4.5: Evolucao orbital da anomalia media

Conclusão

Segundo o modelo aqui apresentado, o tempo necessário para que um asteróide atinja a superfície da Terra, partindo do cinturão de asteróides, é o dobro do previsto no modelo simplificado de Peterson. Além disso, salientamos que a força de reemissão pode ser anti-dissipativa, dependendo do sentido de rotação do corpo em relação à sua velocidade orbital.

Em seu trabalho de 1976, Peterson tentou explicar, entre outros, o período de exposição a raios cósmicos medido para o meteorito Norton County. Através de seu modelo, ele conseguiu explicar 30 milhões dos 100 milhões de anos esperados. Peterson argumentou que o resultado por ele obtido, que admite o eixo de rotação perpendicular ao plano da órbita e um período de rotação de 5h, concilia-se facilmente com o período de exposição a raios cósmicos medido para o meteorito em questão. Peterson sugeriu que, se este corpo tivesse seu eixo de rotação inclinado de 60° em relação à normal ao seu plano orbital, e seu período de rotação diminuído de 5 para 2 horas, um cálculo teórico revisado do efeito Yarkovsky produziria resultados que concordariam quase exatamente com os 100 milhões de anos.

Pelo nosso modelo, conseguimos explicar 60 milhões de anos. Se considerarmos o eixo de rotação do asteróide inclinado 45° em relação ao pólo orbital, conseguiremos explicar os 100 milhões de anos, mesmo sem alterar o seu período de rotação. Devemos ressaltar que este tempo de aproximadamente 60 milhões de anos obtido através de nosso modelo, considera como única perturbação o efeito Yarkovsky, e que um asteróide em sua evolução orbital a partir do cinturão está sujeito a outros tipos de perturbações adicionais.

A perturbação em questão é mais relevante no semi-eixo maior da órbita, portanto muitos dos asteróides pertencentes ao cinturão poderiam escapar dele, aproximando-se ou afastando-se do Sol.

O próximo trabalho, já em andamento no Curso de Pós-Graduação em Física da UFPR, considera o caso Júpiter-asteróide-Sol (problema de três corpos), com a inclusão desse tipo de perturbação não-gravitacional.

Referências Bibliográficas

- 1 - Afonso, G. B., Barlier, F., Carpino, M., Farinella, P., Mignard, F., Milani, A. and Nobili, A. M. - Orbital effects of LAGEOS seasons and eclipses - *Annales Geophysicae*, 1989.
- 2 - Afonso, G. B., Barlier, F., Berger, G., Mignard, F. and Walch, J. J. - *Journal of Geophysical Research* **90**, 9381- -9398, 1985.
- 3 - Afonso, G. B. and Foryta, D. W. - *in* *Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects* - R. Vieira Martins, D. Lazzaro and W. Sessin (eds.) 73-83, 1989.
- 4 - Burns, J. A., Lamy, P. L. and Soter, S. - Radiation forces on small particles in the solar system - *Icarus* **40**, 1-48, 1979.
- 5 - Einstein, A. - On the eletrodynamics of moving bodies - *in* *The principle of relativity* 35-36. Dover, New York, 1905.
- 6 - Guess, Arnold W. - Poynting-Robertson effect for a spherical source of radiation - *The Astrophysical Journal* **135**, no3, 855-866, May 1962.
- 7 - Peterson, C. - A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect - *Icarus* **29**, 91-111, 1976.
- 8 - Robertson, H. P. - Dynamical effects of radiation in the solar system - *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 423-438, 1937.
- 9 - Rubincam, D. P. - LAGEOS orbit decay due to infrared radiation from earth - *Journal of Geophysical Research* **92**,no.B2, 1287-1294, February 1987.

- 10 - Wyatt, S. P. Jr. and Whipple, F. L. - The Poynting-Robertson effect on meteor orbits - *The Astrophysical Journal* **111**, no1, 134-141, January 1950.