ALEXANDRE MAGNO SILVA SANTOS

ELEMENTOS PARA UMA FUNDAMENTAÇÃO QUASE-CONJUNTISTA DA MECÂNICA ESTATÍSTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Adonai S. Sant'Anna

CURITIBA
2000

À memória de meu tio Claudio.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Adonai S. Sant'Anna, pela orientação.
- Ao Prof. Dr. Décio Krause, pelas críticas e sugestões.
- Ao Prof. Dr. Aurélio Sartorelli, pelas críticas e sugestões.
- Ao Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer pelas críticas e sugestões.
- Ao Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa, pelas críticas e sugestões.
- Ao Prof. Dr. Francisco A. A. Doria, pelas críticas e sugestões.
- À Prof.a M.Sc. Analice Gebauer Volkov (in memorian), pelo incentivo ao término desta tese.
- À CAPES, pelo apoio financeiro, ainda que não suficiente.
- A todos os participantes dos seminários de lógica e fundamentos realizados no Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, por sugestões e críticas relativas aos assuntos abordados nesta tese.

Resumo

Este trabalho é uma tese em fundamentos da física. Aqui se dá atenção a certos aspectos da mecânica quântica, usando-se uma matemática não-clássica. Usa-se aqui teoria de quase-conjuntos.

A teoria dos quase-conjuntos (ou simplesmente q-conjuntos) generaliza a teoria usual de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, permitindo a existência de conjuntos de elementos sem individualidade. Como contribuição deste trabalho, apresenta-se aqui uma formulação para q-conjuntos que permite uma combinatória q-conjuntista suficientemente rica para tratarmos de certas questões relativas às estatísticas usuais em física.

Deduzem-se, neste contexto, as estatísticas usualmente empregadas em mecânica estatística. Como resultado, tanto as estatísticas quânticas quanto a de Maxwell-Boltzmann são obtidas sem a necessidade de se admitir que as partículas de um dado gás tenham individualidade.

Abstract

This is a Masters thesis dissertation on the foundations of Physics. Some statistical aspects of Quantum Mechanics are treated by using non-classical mathematics, namely, Quasi-set Theory.

Quasi-set theory (q-set theory, for short) generalizes the usual Zermelo-Fraenkel set theory by enconpassing sets of entities without identity. As a contribuition of this work, q-set theory is given here an approach whose combinatorics can deal with certain aspects concerning the usual statistics in physics.

Some of the statistics are then derived in this framework. As a result, the quantum statistics, as well as Maxwell-Boltzmann statistics, are retrieved without the assumption that the elements which make up the system under consideration (say, a given gas) are endowed with identity.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A Mecânica Quântica, na maneira em que se encontra atualmente, tem uma série de problemas no que diz respeito aos aspectos de fundamentação. Como exemplo de que muito ainda está para se desenvolver, pode-se citar o recente trabalho de T. Hübsch (ver [10]), onde ele mostra que a mecânica quântica, fundamentada na matemática clássica, tem uma série de paradoxos. Por exemplo, dizemos que a mecânica quântica satisfaz o postulado da superposição linear devido ao fato de o conjunto de soluções da equação de Schrödinger ser um subspaço de um dado espaço de Hilbert. Por outro lado, dizemos que a Mecânica Quântica (MQ, por brevidade) é introspectiva se pudermos considerar que o observador, no processo de medição, também pode ser descrito pelas leis da MQ. Hübsch percebeu que a hipótese da introspecção contradiz o princípio de superposição linear. Temos, com isso, um paradoxo. Hübsch cita ainda outros paradoxos na literatura.

Pode-se também citar o problema da singularidade do campo do elétron. Tal problema tem sido contornado de algumas formas, como por exemplo, admitindo uma estrutura para o elétron, o que elimina a divergência. Outra maneira de lidar como o problema seria a teoria de cordas, que considera o campo entre duas partículas como entes unidimensionais (cordas), ligando-as. Entretanto nenhuma destas soluções é satisfatória. Uma breve, mas interessante, descrição dos problemas envolvidos pode ser encontrada em [25]).

Outro dos problemas de fundamentação da mecânica quântica é o problema da indistingüibilidade entre partículas elementares [5, 7, 11, 13, 14, 15, 24, 26, 27, 28, 46]. Tal questão foi colocada por Yu. I. Manin, em 1974, quando apresentou para a comunidade científica o problema de que a física quântica moderna nos tem mostrado novos conceitos com características muito diferentes daquilo que se vê em física clássica [22]. Ele sugere que se desenvolva uma linguagem totalmente nova para se falar sobre estes novos conceitos. Reforça a idéia dizendo

> ...Até porque conjuntos formados por fótons numa caixa de vidro ou de

> elétrons num pedaço de metal são muito diferentes de um conjunto de grãos de areia. [Nossa tradução]

Este fato também foi lembrado por Schrödinger, que enfatizou que

> Não podemos marcar um elétron, não podemos pintá-lo de vermelho.[42]. [Nossa tradução]

1.2 Propostas

Tendo em vista a proposta de Manin, vale lembrar que em 1900, por ocasião do Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, D. Hilbert apresentou uma lista de 23 problemas os quais ele considerava que deveriam ser o legado da matemática do século XIX para os matemáticos do século seguinte [9]. O sexto problema de tal lista dizia respeito à axiomatização de teorias físicas:

> Investigações sobre os fundamentos da geometria sugerem o problema: tratar da mesma maneira, por meio de axiomas, as ciências físicas nas quais a matemática tem um importante papel: primeiramente a teoria de probabilidades e a mecânica. [Nossa tradução]

P. Suppes defende o *slogan* de que axiomatizar uma teoria é definir um predicado conjuntista [45]. Não se pretende detalhar aqui o programa de Suppes. No entanto, pode-se resumir a idéia principal ao afirmarmos que tal proposta consiste em fundamentar a teoria a ser axiomatizada na teoria de conjuntos. Vale observar que pode-se, a princípio, utilizar qualquer teoria de conjuntos, a saber, a teoria ingênua, ou teorias axiomáticas como ZF (Zermelo-Fraenkel), NBG (von Neuman, Bernays, Gödel), NF (New Foundations, de Quine) etc. As vantagens de se axiomatizar teorias físicas via predicados conjuntistas são muitas: (i) responder de maneira precisa a questões de caráter filosófico sobre reducionismo de uma teoria em outra; isso é conseguido graças ao conceito de função, uma vez que fundamentamos toda a teoria física na teoria de conjuntos [45]; (ii) temos um melhor controle sobre o que de fato estamos falando na teoria [45]; (iii) podemos estabecer teoremas meta-matemáticos para a física [3]; (iv) podemos melhor compreender o papel desempenhado pelos conceitos fundamentais em física tais como tempo, espaço, massa, força, spin e outros [29, 41]; (v) podemos buscar estruturas matematicamente cada vez mais simples que permitam descrever uma variedade cada vez maior de fenômenos físicos.

Neste trabalho a proposta de Suppes é, de certo modo, generalizada. Apresenta-se uma linguagem para lidar com certos problemas da teoria quântica fundamentada naquilo que se pode chamar de predicado quase-conjuntista. Maiores esclarecimentos seguem nas seções abaixo.

Aqui são tratados como 'indistingüíveis' os objetos que compartilham todas as suas propriedades (em um nível intuitivo), enquanto que objetos idênticos' ($x = y$)

são na verdade o mesmo objeto, apenas chamado por nomes diferentes (x e y). As teorias que tratam de coleções de objetos indistingüíveis, por exemplo, partículas elementares, têm pelo menos duas origens independentes, mas correlacionadas. Em 1983 M. L. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia propuseram a teoria de Qua-Conjuntos (*quasets*) [6]. De acordo com os autores desta proposta, as teorias usuais de conjuntos não são adequadas para tratar de fenômenos físicos que envolvem partículas elementares, pois neste caso a natureza parece não seguir as regras de conjuntos. A idéia foi, em essência, que coleções de objetos como partículas elementares não obedecem aos axiomas de teorias clássicas de conjuntos como a de Zermelo-Fraenkel devido ao problema da não individualidade de partículas elementares. Além disso, eles sugerem que questões de indistingüibilidade em teoria quântica necessitam semântica intensional, para a qual a teoria de qua-conjuntos pode fornecer a base meta-matemática (ver [4]).

A idéia básica de um qua-conjunto é a de uma coleção de objetos que têm um cardinal bem definido, mas de tal maneira que não há nenhum modo de dizer (com certeza) quais são os elementos que pertencem ao qua-conjunto. Isto é conseguido ao se distingüirem os predicados primitivos $\in$ e $\notin$ (este último não é a negação do primeiro), que dizem 'certamente pertence a' e 'certamente não pertence a', respectivamente. Os postulados afirmam que $z \notin y$ implica $\neg z \in y$, mas não o contrário. Logo, pode acontecer de ser falso que z certamente não pertença a y, mas isto não implica que z (certamente) pertença a y. Os elementos z sobre os quais pode ser dito que 'é falso que eles certamente não pertençam a' podem ser possíveis membros de y. O cardinal de um qua-conjunto é fixo, ent ao há uma indeterminação 'epistêmica' com respeito aos elementos de um qua-conjunto.

Partindo de um desenvolvimento independente, mas por uma motivação semelhante, N. C. A. da Costa comentou em seu livro [2] a possibilidade de se apresentarem sistemas lógicos nos quais o Princípio da Identidade pudesse ser violado. Baseado nas idéias de Schrödinger de que o conceito de identidade perde o sentido em relação a partículas elementares (ver [42],pp. 17-18), da Costa sugeriu que se criasse uma lógica que permitisse lidar com tal problema. Ele percebeu que uma semântica completa poderia ser encontrada para esta 'Lógica de Schrödinger', mas esta não poderia estar fundada nas teorias de conjuntos usuais, por não serem adequadas para expressar a realidade física de objetos indistingüíveis. Da Costa sugeriu então que se criasse uma certa teoria de quase-conjuntos, da qual a teoria de conjuntos usual fosse um caso particular, e cuja semântica fosse mais adequada para tratar as questões acima mencionadas. A esta se deu o nome de teoria de quase-conjuntos.

A idéia por detrás da criação desta teoria, feita em [14], é permitir a presença de *Urelemente* de duas naturezas, e restringir a apenas uma delas o conceito de identidade. À outra, apenas o conceito de indistingüibilidade fará sentido.

Existe ainda a proposta das Variáveis Ocultas e Predicados Ocultos. Nela, a indistingüibilidade não existiria de fato, apenas não somos capazes de acessar experimentalmente o que diferencia uma partícula da outra. Em outras palavras, nesta proposta a variável que as distingue nos é oculta [30, 31, 35, 37].

Pode-se dar ainda um tratamento topológico para o problema. Harvey Brown o trata no contexto da teoria de de Broglie-Bohm, porém não será discutido aqui pois ele trata de mecânica quântica num contexto semi-clássico e este trabalho trata de mecânica quântica no contexto usual. Detalhes podem ser vistos em [1]. Outros trabalhos sobre a não individualidade e suas conseqüências podem ser vistos em [32, 38, 39]

1.3 Quase-Conjuntos

Dentre as possibilidades de se lidar com a indistingüibilidade, uma delas, como dito anteriormente, é a de se admitir a existência de variáveis ocultas, o que se faz via matemática usual. Ou seja, nesta linha trata-se a indistingüibilidade como de origem epistêmica e admite-se nossa incapacidade de discernir partículas elementares, o que tem como vantagem o tratamento matemático usual.

A outra das alternativas seria admitir uma origem ontológica para o problema da não individualidade de partículas elementares, ou seja, as partículas são de fato indiscerníveis em um nível ontológico. Neste caso então, é plausível um tratamento matemático não *standard.*

Neste ponto vale lembrar que Lowe [20] sugeriu que partículas quânticas são genuinamente (em sentido ontológico) objetos *vagos.* Ele considera uma situação na qual um elétron livre é capturado por um átomo e forma um íon negativo, emitindo depois um elétron rotulado de (b) e nota que:

> De acordo com os princípios quânticos usuais não há conseqüência, de fato, se a é ou não idêntico a b. Deve-se enfatizar que o que está sendo proposto não é simplesmente que não temos maneira alguma de dizer se a e b são ou não idênticos, o que implicaria um indeterminismo de ordem epistêmica - é mais que isto. É um fato conhecido que o tipo de indeterminação pressuposto pela interpretação clássica da teoria quântica é mais que simplesmente epistêmico - é ontológico. [Nossa tradução]

A escolha entre uma ou outra abordagem é meramente uma questão de se optar por quais caminhos seguir para se descrever a natureza. Nesta tese seguir-se-á a linha que considera os objetos quânticos como realmente indiscerníveis (em um nível ontológico).

Tanto em física clássica quanto em quântica, se x e y são partículas que dividem os mesmos atributos, ou seja,

$$x = y \Leftrightarrow (\forall P)(P(x) \Leftrightarrow P(y)), \tag{1.1}$$

sendo P um predicado, dizemos que x e y são indistingüíveis. Em física clássica indistingüibilidade implica em identidade. Mas em física quântica isso não ocorre necessariamente, ou seja, pode-se ter *duas* partículas que dividem todos os seus atributos no escopo daquilo que a física entende por atributos[1]. A equação (1) é muitas vezes identificada como o Princípio de Leibniz entre indiscerníveis. No entanto, tal princípio só pode ser rigorosamente formulado em uma teoria de ordem superior. Mas a teoria de Zermelo-Fraenkel é uma teoria de primeira ordem. Isso significa que não se formula o Princípio de Leibniz em Zermelo-Fraenkel. Para que se possa falar de uma relação de indistingübilidade que não se reduza à igualdade em teorias de primeira ordem, utiliza-se a Teoria de Quase-Conjuntos, a qual consegue estender a teoria de Zermelo-Fraenkel, apesar da relação de indistingüibilidade ($\equiv$) ser mais fraca que a igualdade.

Nossa proposta de linguagem para o problema da não individualidade de partículas elementares é uma fundamentação via teoria de quase-conjuntos, os quais chamar-se-ão q-conjuntos, daqui em diante. Detalhes nos capítulos seguintes.

1.4 Dos Capítulos

No capítulo 2 apresenta-se a teoria de Zermelo-Fraenkel (ZF) na forma de um pré-requisito, com o intuito de facilitar a compreensão da teoria de quase-conjuntos, que se apresenta no capítulo seguinte. No quarto capítulo dá-se uma apresentação de um predicado quase-conjuntista (estendendo-se o programa de Suppes [45]) para coleções de indiscerníveis, baseado em trabalho de Krause *et. al.* [18]. No capítulo 5 é apresentada a principal contribuição deste trabalho. Estende-se a teoria de q-conjuntos, de modo a tornar desnecessário um predicado quase-conjuntista para coleções de indiscerníveis e que também permite uma análise combinatória muito mais rica do que aquela que pode ser feita nos moldes da teoria apresentada no capítulo 3. Ainda no quinto capítulo são discutidas algumas aplicações de tal formalismo no problema dos átomos de Hélio e Hidrogênio. A entropia também é estudada sob este enfoque. No capítulo 6 mostramos que a teoria de quase-conjuntos proposta no capítulo 5 é consistente. Finalmente, tiram-se as conclusões do trabalho no capítulo 7, e algumas questões em aberto são apresentadas no capítulo 8.

---

[1] E ainda assim são *duas* partículas.

Capítulo 2

Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel

A Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel é pré-requisito dos capítulos subseqüentes, pois a Teoria de Quase-conjuntos (que será apresentada no capítulo seguinte) é uma extensão da teoria de Zermelo-Fraenkel. Razão pela qual esta última será aqui apresentada. Segue-se a ela a apresentação da Teoria de Zermelo-Fraenkel com Urelemente (ZFU), que introduz o conceito de átomo, ou seja, é um passo intermediário entre Zermelo-Fraenkel e os Quase-conjuntos. O presente capítulo baseia-se essencialmente em [19] e [43].

2.1 ZF

Os símbolos primitivos da teoria de Zermelo-Fraenkel (ou ZF) são: (i) conectivos lógicos usuais $\neg$ para negação, $\Rightarrow$ para condicional, $\wedge$ para conjunção, $\vee$ para disjunção e $\Leftrightarrow$ para bicondicional; (ii) quantificadores usuais $\forall$ para o quantificador universal e $\exists$ para o quantificador existencial; (iii) variáveis individuais $x_1, x_2, \cdots, x_n$, as quais podem ser denotadas por $x, y, z, \cdots$; (iv) símbolos auxiliares como parênteses $(,)$ e vírgula ,; e (v) duas letras predicativas binárias $=$ e $\in$. O símbolo $\exists!$ lê-se 'existe um único'.

Os axiomas lógicos de ZF são os do cálculo proposicional de primeira ordem com as regras de inferência usuais *Modus Ponens* e Generalização [23]. Nesse contexto, ZF é uma teoria de primeira ordem *com igualdade*.

ZF1 Axioma da Extensionalidade

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$

Este axioma diz que se todos os elementos de x são elementos de y, e vice-versa, então se trata do mesmo conjunto. A recíproca de ZF1 $(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$ é um teorema que pode ser demonstrado a partir do axioma da substitutividade da igualdade.

ZF2 Axioma do conjunto vazio

$(\exists x)(\forall y)(\neg(y \in x))$

Aqui se garante a existência do conjunto vazio, ou seja, aquele ao qual nenhum elemento pertence. Denotamos x por $\emptyset$.

ZF3 Axioma do Par

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)(t \in z \Rightarrow t = x \vee t = y)$

Este axioma permite a existência de pares, ou seja, conjuntos z denotados como $\{x, y\}$.

Segue disto, que:

1. $\{x\} =_{Def} \{x, x\}$
2. Podemos definir pares ordenados *à la Kuratowiski* :

$$(a, b) =_{Def} \{a, \{a, b\}\}$$

Observe-se que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Pares passam a diferir em relação 'a ordem apenas pela definição acima, pois $\{a, \{a, b\}\} \neq \{b, \{a, b\}\}$, em geral.

Pode-se provar que a união de dois ou mais conjuntos é única via Axioma da Extensionalidade.

3. Pode-se definir o produto entre dois espaços, $A \times B$:

$$x \times y = \{t \in \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y)/t = (a, b) \wedge a \in x \wedge b \in y\}$$

Observação 2.1.1 *O conjunto das partes ($P(x)$), e portanto o conjunto de partes das partes ($PP(x)$) é definido no axioma ZF4.*

4. Permite-se definir relações matemáticas
5. Torna-se possível a definição de função:

$$f : x \to y =_{Def} \{t \in \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y)/\forall a \exists ! b/t = (a, b) \wedge a \in x \wedge b \in y\}$$

Sem dificuldades pode-se definir função sobrejetora, injetora, bijetora, composição de funções, função inversa etc..Detalhes em [43]

Definição 2.1.1 $x \subseteq y$ *sss* $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$

ZF4 Axioma do Conjunto Potência

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$

Em outras palavras, é o conjunto dos subconjuntos de x. Também é chamado *partes de* x, e denotado por $\mathcal{P}(x)$.

ZF5 Esquema da Separação:

$(\forall z)(\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge F(x))$,

onde $F(x)$ é uma fórmula de ZF na qual y não figure livre.

Neste esquema se determina que os elementos que satisfazem uma certa propriedade $F(x)$ estejam num conjunto "maior" que y, aqui denotado por z e também chamado *conjunto universo*. Isto evita, por exemplo, o paradoxo de Russell [1]

Observação 2.1.2 *Denotamos* y *por* $\{x \in z; F(x)\}$.

ZF6 Axioma da Substituição

$\forall x \exists ! y \alpha(x, y) \Rightarrow \forall z \exists w \forall t(t \in w \Leftrightarrow \exists s(s \in z \wedge \alpha(s, t))$,

onde z, w, t, s são variáveis distintas entre si e distintas de todas as demais variáveis livres de α, sendo que w não ocorre em α

Este axioma permite expressar o conceito de função no contexto da teoria de conjuntos de ZF. Ele diz que a ocorrência do x-funcional $\alpha(x, y)$ [2] significa que as imagens y pertencem a um conjunto (imagem w).

ZF7 Axioma da União

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists t(z \in t \wedge t \in x))$

Este axioma define a união entre conjuntos. O conjunto união é então a coleção formada pelos elementos de tais conjuntos.

Pode-se provar que a união entre dois ou mais conjuntos é única via Axioma da Extensionalidade.

Observação 2.1.3 *Denotamos* y *como* $\bigcup_{t \in x} t$. *Se* x *tem apenas dois conjuntos* t_1 *e* t_2, *denotamos a união por* $t_1 \cup t_2$.

Assim, pode-se definir a *intersecção*:

Definição 2.1.2 $z \in x \cap y =_{Def} z \in x \cup y \wedge z \in x \wedge z \in y$.

Em outras palavras, se um elemento pertence à intersecção entre dois conjuntos, ele deve pertencer não só à união entre eles, mas também a cada um deles.

[1] O paradoxo de Russell seria, na ausência de ZF5: Considere-se o conjunto A formado por todos os conjuntos X, tais que X não pertence a X. Pela própria definição A pertence a A somente se A não pertence a A. O paradoxo é então evidente: A pertence a A e A não pertence a A.

[2] α é uma letra predicativa arbitrária.

ZF8 Axioma do Conjunto Infinito

$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$

Por este axioma se podem construir os *conjuntos indutivos*, ou seja, conjuntos que satisfazem ZF8. Como ilustração da importância deste axioma, considera-se o conjunto ω, onde ω = interseção de todos os conjuntos indutivos:

$$\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \cdots\},$$

permitindo assim a construção dos números naturais [3] bem como sua correspondente aritmética: sendo o *operador sucessor* definido como $S(x) = x \cup \{x\}$, tem-se

$$S(\emptyset) =_{Def} \emptyset \cup \{\emptyset\};$$

portanto

$$S(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\},$$

e a soma entre dois números m e o natural 1 (denotada aqui por $+(m, 1)$) fica então definida como o sucessor de m ($+(m, 1) = S(m)$), o que permite definir a soma entre dois números m e n:

$$S + (m, n) = +(m, S(n)),$$

permitindo assim a construção dos inteiros, dos racionais, reais, surreais etc..

Definição 2.1.3 $z \in x \cap y =_{Def} z \in x \cup y \wedge z \in x \wedge z \in y.$

Por aqui se define a intersecção. Se um elemento pertence à intersecção entre dois conjuntos, ele deve pertencer não só à união entre eles, mas também a cada um deles.

ZF9 Axioma da Escolha

$\forall x(\forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \Rightarrow y \cap z = \emptyset)) \Rightarrow \exists t \forall k(k \in x \Rightarrow \exists w(t \cap k = \{w\})))$,

onde x, y, z, w, k, t são variáveis independentes.

Muitas teorias fazem uso deste axioma, em várias formas equivalentes a esta aqui apresentada, permitindo resultados importantes em tais teorias, por exemplo, o teorema de Tychonof, na topologia. Ver [12].

---

[3] Os números naturais são, na verdade, a maneira como se denotam os elementos de ω: $\emptyset$ para 0, $\{\emptyset\}$ para 1, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ para 2 e assim sucessivamente.

2.2 ZFU

Os símbolos da teoria de Zermelo-Fraenkel com *Urelemente* (ou ZFU) são: (i) os mesmos conectivos lógicos e quantificadores de ZF; (ii) variáveis individuais $x_1, x_2, \cdots, x_n$, as quais podem ser denotadas por $x, y, z, \cdots$; (iii) os mesmos símbolos auxiliares de ZF; e (iv) duas letras predicativas binárias $=$ e $\in$ e uma letra predicativa unária S, tal que $S(x)$ diz intuitivamente que x é um conjunto, ao passo que $\neg S(x)$ corresponde a dizer que x é um *Urelemente* ou *átomo*. A noção intuitiva de Urelemente seria de indivíduo. A palavra, de origem germânica *Ur* (individual) *elemente* (elemento), traduzida como *átomo* expressa induvidualidade.

Os axiomas lógicos de ZFU são os do cálculo proposicional de primeira ordem com as regras de inferência usuais. Nesse contexto, ZFU é uma teoria de primeira ordem *com igualdade*.

A teoria de Zermelo-Fraenkel com Urelemente, por permitir a existência de átomos, constitui uma generalização de ZF. Ainda que a teoria de Quase-Conjuntos (capítulo seguinte) seja a mais elaborada entre elas, ZFU representa uma passo importante para a compreensão dos quase-conjuntos.

ZFU1 Axioma da Extensionalidade

$$\forall_S x \forall_S y \forall z ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y).$$

A diferença deste para ZF1 é que agora y e x são conjuntos (indicados pelo subscrito "s"), enquanto z não o é (ou seja, z é um Urelemente). Os demais axiomas são também semelhantes a ZF, exceto que separam átomos de coleções.

ZFU2 Axioma do conjunto vazio

$$(\exists_S x)(\forall y)(y \notin x).$$

No axioma acima a sentença $(\neg(y \in x))$ está sendo abreviada por $y \notin x$.

ZFU3 Axioma do Par

$$(\forall x)(\forall y)(\exists_S z)(\forall t)(t \in z \Leftrightarrow t = x \vee t = y).$$

ZFU4 Axioma do Conjunto Potência

$$(\forall_S x)(\exists_S y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow S(z) \wedge z \subseteq x).$$

ZFU5 Esquema da Separação:

$$(\forall_S x)(\exists_S y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge F(z)),$$

sendo $F(z)$ uma fórmula bem formada na qual z ocorre livre e x, y e z são variáveis distintas tais que y não ocorre livre em $F(z)$.

ZFU6 Axioma da Substituição

$$\forall x \exists ! y \alpha(x,y) \Rightarrow (\forall_S z \exists_S w \forall t(t \in w \Leftrightarrow \exists s(s \in z \wedge \alpha(s,t))),$$

onde $\alpha(x,y)$ é uma fórmula na qual x e y são variáveis livres.

ZFU7 Axioma da União

$$\forall_S x(\forall y(y \in x \Rightarrow S(y)) \Rightarrow \exists_S z \forall t(t \in z \Leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge t \in v)).$$

Observação 2.2.1 *Denotamos y como $\bigcup_{t \in x} t$. Se x tem apenas dois conjuntos t_1 e t_2, denotamos a união por $t_1 \cup t_2$. A interseção $\cap$ entre dois conjuntos também é definida de maneira análoga ao que foi feito em ZF.*

ZFU8 Axioma do Conjunto Infinito

$$\exists_S x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

ZFU9 Axioma da Escolha

$$\forall_S x((\forall y(y \in x \Rightarrow S(y)) \wedge (\forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x \Rightarrow y \cap z = \emptyset))$$

$$\Rightarrow \exists_S w \forall u(u \in x \Rightarrow \exists v(w \cap u = \{v\}))))$$

ZFU10 Existência de Átomos

$$\exists x \neg S(x).$$

Este axioma não tem corespondente em ZF, por permitir justamente o que difere ZF de ZFU, ou seja, a existência dos átomos (elementos aos quais nenhum outro elemento pertence).

ZFU11 Átomos são Vazios

$$\forall x(\neg S(x) \Rightarrow \forall y(y \notin x)).$$

Aqui se trata da natureza dos átomos, definindo que, o que não é coleção, é um elemento individual, ou seja, átomos são aqueles que não contêm elementos.

ZFU12 Regularidade

$$\forall_S x(x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow S(y)) \Rightarrow \exists z(z \in x \wedge z \cap x = \emptyset)).$$

Isto significa que um conjunto x pode conter um outro conjunto y, e talvez até este y possa conter outros conjuntos, e assim sucessivamente, mas existe um elemento ao qual nenhum outro elemento ou coleção pertence. Isto evita cadeias infinitas de pertinência.

Aqui se encerra ZFU. De posse do conceito de Urelemente, parte-se agora para a compreensão da teoria de Quase-Conjuntos.

Capítulo 3

Teoria de Quase-Conjuntos

3.1 Linguagem

Apresentamos aqui a teoria de quase-conjuntos, com o intuito de fortalecer nosso argumento de que buscamos uma descrição rigorosa para as questões relativas à identidade de partículas elementares. A teoria de quase-conjuntos aqui descrita é essencialmente baseada, a menos de umas poucas modificações, em [16], a qual é uma variação de [14].

A linguagem da teoria de quase-conjuntos $\mathcal{Q}$ é a de um cálculo de predicados de primeira ordem *sem identidade*. A idéia intuitiva é permitir a existência de *Urelemente* de dois tipos, chamados de m-átomos e M-átomos. Os M-átomos agem como os átomos usuais de ZFU (teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel com *Urelemente*), enquanto m-átomos são objetos sobre os quais o conceito de identidade não pode ser aplicado, conforme detalhamos abaixo.

Os símbolos específicos da teoria de quase-conjuntos $\mathcal{Q}$ são três predicados unários m, M e Z, dois predicados binários $\equiv$ e $\in$ e um símbolo funcional unário qc. Termos e fórmulas bem formadas (wff's) são definidos da maneira usual bem como o conceito de variáveis livres etc. Usamos x, y, z, u, v, w e t para denotar variáveis individuais. Intuitivamente $m(x)$ diz que 'x é um micro-objeto' (m-átomo), $M(x)$ diz que 'x é um macro-objeto' (M-átomo) e $Z(x)$ afirma que 'x é um conjunto'. O termo $qc(x)$ corresponde ao 'quase-cardinal do quase-conjunto x'. Os conjuntos são cópias exatas dos conjuntos de ZFU. Expressão como $x \equiv y$ intuitivamente corresponde a dizer que x é indistingüível ou indiscernível de y.

Definição 3.1.1 *1.* $Q(x) =_{Def} \neg(m(x) \vee M(x))$ *(x é um* **quase-conjunto***).*

2. $P(x) =_{Def} Q(x) \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow m(y))$ *(x é um* quase-conjunto 'puro', *i.e., um quase-conjunto cujos elementos são apenas m-átomos).*

3. $D(x) =_{Def} M(x) \vee Z(x)$ *(x é um* objeto clássico (Dinge*), ou seja, um* Urelemente *clássico de um ZFU-conjunto ou um ZFU conjunto).*

4. $E(x) =_{Def} Q(x) \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow Q(y))$.

5. **[Igualdade Extensional]**

$$x =_E y =_{Def} \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \vee (M(x) \wedge M(y) \wedge x \equiv y).$$

6. **[Sub-quase-conjunto]**

$$x \subseteq y =_{Def} \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

Se $x \neq_E y$, i.e., $\neg(x =_E y)$, dizemos que x e y são *extensionalmente distintos*. Como o usual, $x \subset y$, significa $x \subseteq y \wedge x \neq_E y$. É imediato que $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \Rightarrow x =_E y$, se x e y são conjuntos.

3.2 Os Axiomas

Os primeiros quatro axiomas de $\mathcal{Q}$ são *Os Axiomas de Indistingüibilidade*:

(Q1) $\forall x(x \equiv x)$.

(Q2) $\forall x \forall y(x \equiv y \Rightarrow y \equiv x)$.

(Q3) $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z)$.

(Q4) $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \Rightarrow (x \equiv y \Rightarrow (A(x,x) \Rightarrow A(x,y))))$, com a restrição sintática usual, ou seja, y é livre para x em $A(x,x)$.

Em [16] o axioma *Q4* é escrito como $\forall x \forall y(\neg m(x) \wedge \neg m(y) \rightarrow (x \equiv y \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y))))$, o qual aqui se apresenta de maneira modificada. Na versão original micro-objetos não podem, em princípio, ser substituídos em uma dada fórmula bem formada A, ao passo que *coleções* com micro-objetos podem. Isso é evidentemente nada intuitivo, apesar de matematicamente legítimo. Como há uma preocupação nesta tese de se apresentar uma linguagem para se tratar dos problemas da não-individualidade em certas teorias físicas, parece interessante a versão aqui apresentada para *Q4*, por se tratar de algo mais intuitivo, a despeito de ser menos geral que a proposta em [16].

Pode ser provado que a igualdade extensional tem todas as propriedades da igualdade clássica, apesar de não poder ser aplicada a átomos e nem a quase-conjuntos puros.

Outros axiomas de $\mathcal{Q}$ são os que se seguem:

(Q5) Nenhum *Urelemente* é ao mesmo tempo um m-átomo e um M-átomo:

$$\forall x(\neg(m(x) \wedge M(x)))$$

(Q6) Se x tem um elemento, então x é um quase-conjunto. Isso significa que átomos são vazios.

$$\forall x \forall y (x \in y \Rightarrow Q(y)).$$

(Q7) Todo conjunto é um quase-conjunto:

$$\forall x (Z(x) \Rightarrow Q(x)).$$

(Q8) Nenhum conjunto contém m-átomos como elementos:

$$\forall_Q x (\exists_m y (y \in x) \Rightarrow \neg Z(x)).$$

Observação: os índices nos quantificadores servem para denotar quantificadores relativizados.

(Q9) Quase-conjuntos cujos elementos são 'objetos clássicos' são conjuntos e reciprocamente:

$$\forall_Q x (\forall y (y \in x \Rightarrow D(y)) \Leftrightarrow Z(x)).$$

Teorema 3.2.1 *Se x é um M-átomo (um conjunto) e $x \equiv y$, então y também é um M-átomo (conjunto).* Dem.: *Direto de* Q4.

Se x é um m-átomo, o caso análogo do teorema dado acima não pode ser provado, uma vez que neste caso não podemos aplicar *Q4*, pois a substitutividade aplica-se se x é *Dinge*, e $(D(x) \Rightarrow \neg m(x))$. Logo devemos postular que:

(Q10)

$$\forall x (m(x) \wedge x \equiv y \Rightarrow m(y)).$$

Vai-se ver que um quase-conjunto é um conjunto se, e somente se, seu fecho transitivo (tal conceito pode ser definido da maneira usual) não contém m-átomos.

(Q11) [*O conjunto vazio*] Existe um quase-conjunto (denotado por $\emptyset$) o qual é um conjunto e não tem elementos:

$$\exists_Z x \forall y (\neg (y \in x)).$$

Definição 3.2.1 [Quase-conjuntos similares] *Para quaisquer quase-conjuntos x e y,*

$$Sim(x, y) =_{Def} \forall z \forall t (z \in x \wedge t \in y \Rightarrow z \equiv t).$$

Intuitivamente, quase-conjuntos similares têm como elementos objetos 'do mesmo tipo'. 'Objetos do mesmo tipo' podem ser obtidos passando o quociente pela relação de indistingüibilidade. Tal procedimento define classes de equivalência de objetos indistingüíveis e, se os objetos forem clássicos, tais classes passam a ser conjuntos unitários, uma vez que a relação de indistingüibilidade coincide com a igualdade neste caso particular. Uma conseqüência, a princípio indesejável, desta definição é que o conjunto vazio é similar a todo quase-conjunto. Para restringir a definição a quase-conjuntos não vazios basta limitar o axioma fraco de extensionalidade (ver adiante) para quase-conjuntos não-vazios (devido aos conceitos envolvidos na formulação do axioma). De qualquer forma, tal conseqüência é inócua para o desenvolvimento matemático da teoria de quase-conjuntos.

Um exemplo do que poderia ser tratado como quase-conjuntos similares seriam átomos de um mesmo elemento. Neste caso eles têm o mesmo número de prótons, nêutrons e elétrons, onde as classes de similaridade seriam representadas por cada uma dessas partículas. Agora suponha-se que um deles tenha sido ionizado, voltando depois ao estado neutro de carga. A intenção de se ter ionizado um dos átomos é mostrar que, mesmo que o elétron recebido tenha sido trocado por outro que já pertencia ao átomo, não há maneira de se dizer qual dos átomos foi ionizado, por seus elétrons serem indistingüíveis e estarem em igual número em cada um dos átomos. Em outras palavras, os dois átomos continuam sendo q-similares, pela natureza indistingüível de seus elementos, uma vez que se tem a mesma q-cardinalidade para cada uma de suas classes de elementos.

(Q12) Conjuntos indistingüíveis são extensionalmente idênticos:

$$\forall_Z x \forall_Z y (x \equiv y \Rightarrow x =_E y).$$

Q12 impõe que as propriedades extensionais usuais para os conjuntos de ZFU valem para $\mathcal{Q}$.

(Q13) [*'Par-fraco'*] Para quaisquer x e y, existe um quase-conjunto cujos elementos são os objetos indistingüíveis de x ou y:

$$\forall x \forall y \exists_Q z \forall t (t \in z \Leftrightarrow t \equiv x \vee t \equiv y).$$

O par fraco de x e y é denotado por $[x, y]$. No caso em que x e y são ambos objetos clássicos, podemos utilizar a notação *standard* $\{x, y\}$, uma vez que neste caso os únicos objetos indistingüíveis (ou melhor, iguais, nesse caso clássico) de x e y são, respectivamente, x e y. Se $x \equiv y$, denotamos o par fraco por $[x]$, também chamado de *unitário fraco* de x, o qual é o quase-conjunto dos elementos indistingüíveis de x. O unitário fraco é um quase-conjunto com quase-cardinalidade que eventualmente pode ser superior a 1. Essa é uma forma de ilustrarmos coleções de indistingüíveis sobre as quais não se aplica a identidade clássica.

(Q14) [*Esquema de Separação*] Considerando as restrições sintáticas usuais sobre a fórmula $A(t)$, temos que:

$$\forall_Q x \exists_Q y \forall t (t \in y \Leftrightarrow (t \in x \wedge A(t)))$$

Este quase-conjunto y é denotado por $[t \in x : A(t)]$. O axioma de separação permite definir sub-quase-conjuntos de um quase-conjunto x tomando apenas aqueles elementos de x que satisfazem uma determinada propriedade expressa (na linguagem de $\mathcal{Q}$) por uma fórmula $A(t)$. Tal idéia se adequa à interpretação que almejamos em termos de partículas elementares usualmente descritas pela teoria quântica, uma vez que em física é possível 'selecionar', entre determinadas partículas de uma certa coleção, um certo número de partículas que satisfazem a determinadas condições particulares.

(Q15) [*União*] $\forall_Q x (E(x) \Rightarrow \exists_Q y (\forall z (z \in y) \Leftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in x)))$.

Seguindo a notação usual, este quase-conjunto y é denotado por

$$\bigcup_{t \in x} t$$

e ainda escrevemos $t_1 \cup t_2$ no mesmo sentido das teorias usuais de conjuntos, ou seja, podemos escrever a união $t_1 \cup t_2$ na forma do Esquema da Separação, como se segue: Se t_1 e t_2 são sub-quase-conjuntos de w, logo, $t_1 \cup t_2 = [z \in w : z \in t_1 \vee z \in t_2]$.

(Q16) [*Quase-conjunto Potência*] $\forall_Q x \exists_Q y \forall t (t \in y \Leftrightarrow t \subseteq x)$.

O quase-conjunto potência de x é denotado por $\mathcal{P}(x)$. Dentre outros conceitos, podemos introduzir o que se segue em $\mathcal{Q}$:

Definição 3.2.2 *1.* $\overline{x} =_{Def} [y \in x : m(y)]$.

2. $\langle x, y \rangle =_{Def} [[x], [x, y]]$ *(o par ordenado generalizado).*

3. Para quaisquer quase-conjuntos x e y, $x \times y =_{Def} [\langle z, u \rangle \in \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y) : z \in x \wedge u \in y]$.

4. A interseção $t_1 \cap t_2$ de dois sub-quase-conjuntos de um quase-conjunto w pode ser definida como $t_1 \cap t_2 = [z \in w : z \in t_1 \wedge z \in t_2]$.

(Q17) [*Infinidade*] $\exists_Q x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \wedge Q(y) \Rightarrow y \cup [y] \in x))$.

Portanto, podemos definir o conjunto dos números naturais da forma usual.

(Q18) [*Regularidade*] Quase-conjuntos são bem fundados, i.e., para todo quase-conjunto x, não há cadeias infinitas $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x$:

$$\forall_Q x(E(x) \wedge x \neq \emptyset \Rightarrow \exists_Q y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

O conceito de *relação* e, em particular, o de *relação de equivalência* é como o usual: w é uma relação entre dois quase-conjuntos x e y se w satisfaz o seguinte predicado R:

$$R(w) =_{Def} Q(w) \wedge \forall z(z \in w \Rightarrow \exists u \exists v(u \in x \wedge v \in y \wedge z =_E \langle u, v\rangle)).$$

Os axiomas para quase-cardinalidade são os que se seguem.

(Q19) Todo quase-conjunto tem um único quase-cardinal (ou quase-cardinalidade) o qual é um cardinal (como definido na 'cópia' de ZFU) e, se o quase-conjunto é em particular um conjunto, seu quase-cardinal coincide com seu cardinal no sentido usual da expressão:

$$\forall_Q x \exists! y(Cd(y) \wedge y =_E qc(x) \wedge (Z(x) \Rightarrow y =_E card(x))).$$

(Q20) Todo objeto que não é quase-conjunto, ou seja, todo *Urelemente* tem quase-cardinalidade zero:

$$\forall x(\neg Q(x) \Rightarrow qc(x) =_E 0).$$

(Q21) Todo quase-conjunto não-vazio tem uma quase-cardinalidade não nula:

$$\forall_Q x(x \neq_E \emptyset \Rightarrow qc(x) \neq_E 0).$$

(Q22) $\forall_Q x(qc(x) =_E \alpha \Rightarrow \forall \beta(\beta \leq_E \alpha \Rightarrow \exists_Q y(y \subseteq x \wedge qc(y) =_E \beta)).$

(Q23) O quase-cardinal de um sub-quase-conjunto de x não é maior que o quase-cardinal de x:

$$\forall_Q x \forall_Q y(y \subseteq x \Rightarrow qc(y) \leq_E qc(x)).$$

(Q24) $\forall_Q x \forall_Q y(Fin(x) \wedge x \subset y \Rightarrow qc(x) < qc(y))$, onde $Fin(x)$ significa que x é um conjunto finito.

(Q25) $\forall_Q x \forall_Q y(\forall w \neg(w \in x \wedge w \in y) \Rightarrow qc(x \cup y) =_E qc(x) + qc(y))$.

(Q26) $\forall_Q x(qc(\mathcal{P}(x)) =_E 2^{qc(x)})$.

Este último axioma exige explicação, a qual damos através de um exemplo. Suponhamos que estamos considerando os elétrons do nível $2p$ de um átomo de sódio (Na). É sabido que neste nível há seis elétrons indiscerníveis. No entanto, a despeito de nossa incapacidade de rotulá-los, ainda assim pensamos neles como *seis* elétrons. Dessa forma, podemos *sugerir* que (em termos conjuntistas) há seis sub-coleções da coleção dada que são 'singletons', quinze sub-coleções com dois elementos, e assim por diante. Assumir tal fato é equivalente a afirmar que os elétrons podem ser considerados como entidades 'distintas', a despeito de não serem indivíduos em certo sentido. A teoria de quase-conjuntos permite um sentido preciso para a idéia de quantidades de objetos indiscerníveis entre si. Apesar de podermos atribuir cardinalidades a tais coleções, ainda assim não podemos contar os objetos a elas pertencentes, ou seja, não podemos ordenar objetos indistingüíveis, como ocorre com partículas elementares. Uma generalização desse axioma é feita no capítulo 5 de modo a permitir que mesmo no contexto quase-conjuntista, ainda podemos falar em seis sub-coleções da coleção dada que são 'singletons', quinze sub-coleções com dois elementos, e assim por diante.

A seguir apresentamos a noção de extensionalidade fraca.

Relembramos, antes de mais nada, que os quase-conjuntos x e y são similares, ($Sim(x, y)$) se seus elementos são indistingüíveis. Assim sendo:

Definição 3.2.3 *Os quase-conjuntos x e y são* Q-similares *se forem similares e tiverem a mesma quase-cardinalidade.*

(Q27) [*Extensionalidade Fraca*]

$$\forall_Q x \forall_Q y (\forall z (z \in x/_{\equiv} \Rightarrow \exists t (t \in y/_{\equiv} \wedge QSim(z,t) \wedge \forall t (t \in y/_{\equiv} \Rightarrow$$

$$\exists z (z \in x/_{\equiv} \wedge QSim(t,z)) \Rightarrow x \equiv y))$$

Tendo isso em consideração podemos melhor detalhar o axioma *Q12*. De fato, se x e y são ambos conjuntos e $x \equiv y$, então de acordo com *Q8* x e y são ambos vazios ou similares com o mesmo quase-cardinal. Mas isso não implica que $x =_E y$. Portanto, uma vez que parece intuitivo que $x \equiv y \Rightarrow x =_E y$ se x e y forem ambos conjuntos, *Q12* surge para estabelecer tal fato.

Com relação ao conceito de função, observamos que funções, como usualmente concebidas, não podem distingüir entre seus argumentos e valores assumidos se houver m-átomos envolvidos. Por isso na teoria de quase-conjuntos introduz-se os conceitos de quase-função, quase-injeção, quase-sobrejeção e quase-bijeção. Omitimos os detalhes por não serem relevantes no contexto da apresentação deste trabalho (ver [16]).

Em geral não há critério para checar se dois quase-conjuntos têm a mesma quase-cardinalidade ou não, uma vez que não há 'processo de contagem' se ambos tiverem

m-átomos como elementos [1] Isso significa, por exemplo, que se x tem cinco elementos (sua quase-cardinalidade é 5), não podemos definir uma bijeção de $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ em x, uma vez que não seríamos capazes de definir sem ambigüidade as imagens de $f(0) \ldots f(4)$.

Se $A(x, y)$ é uma fórmula na qual x e y são variáveis livres, dizemos que $A(x, y)$ define uma $(q - funcional)$ sobre o quase-conjunto t se $\forall w(w \in t \Rightarrow \exists s A(w, s) \wedge \forall w \forall w'(w \in t \wedge w' \in t \Rightarrow \forall s \forall s'(A(w, s) \wedge A(w', s') \wedge w \equiv w' \Rightarrow s \equiv s'))$ (abreviamos isso por $\forall x \exists! y A(x, y)$). Assim sendo:

(Q28) [*Substituição*]

$$\forall x \exists! y A(x, y) \Rightarrow \forall_Q u \exists_Q v (\forall z (z \in v \Rightarrow \exists w (w \in u \wedge A(w, z))))$$

Intuitivamente, o Esquema de Substituição diz que as imagens de quase-conjuntos (com a aplicação de quase-funcionais) são quase-conjuntos. É fácil perceber que se não há m-átomos envolvidos, i.e., se os quase-conjuntos são conjuntos, então o axioma acima é idêntico ao correspondente de ZFU.

Definição 3.2.4 *Um* **unitário forte** *de x é um quase-conjunto x' que satisfaz o seguinte predicado St:*

$$St(x') \Leftrightarrow x' \subseteq [x] \wedge qc(x') =_E 1$$

Ou seja, x' é um sub-quase-conjunto de $[x]$ que tem apenas 'um elemento' indistingüível de x.

Teorema 3.2.2 *Para todo x, existe um unitário forte de x.*

Dem.: Note-se que a existência do unitário fraco de x (denotado por $[x]$) é garantida pelo axioma Q13. Agora, o axioma Q20 diz que todo q-conjunto tem um q-cardinal e, se este q-conjunto não for vazio, seu q-cardinal é diferente de zero, por Q21, e este é o caso de $[x]$, uma vez que x pertence a $[x]$ pelo fato de $\equiv$ ser reflexiva. Portanto, $qc([x]) \geq_E 1$. Então, por Q22, existe um subq-conjunto de $[x]$ que tem q-cardinal 1. Pelo axioma da separação, obtem-se x'.

O conceito de unitário forte permite afirmar sobre a q-cardinalidade da coleção considerada. Num contexto q-conjuntista, considerando um átomo de hélio por exemplo, o único elétron da órbita forma um unitário forte, ao passo que num átomo de carbono, os cinco elétrons da última camada formam um unitário fraco, cuja q-cardinalidade seria igual a cinco.

[1] Existe, na verdade, uma maneira de se saber a q-cardinalidade de um conjunto de partículas: através da carga total, por exemplo. Conhecendo-se o valor da carga elementar pode-se saber qual mútiplo desta carga está presente. Entretanto não se pode contar de fato tais elementos, associando a cada um deles um rótulo.

Capítulo 4

Predicado Quase-Conjuntista Para Coleções de Partículas Indistingüíveis

4.1 Predicado Quase-Conjuntista

Este capítulo é essencialmente baseado em [18]. Define-se um predicado q-conjuntista para partículas quânticas indiscerníveis. Para que se deduzam as estatísticas quânticas, precisamos que sejam feitos precisos os conceitos de micro-objetos estando em um certo 'estado'. Isto deve ser feito de maneira a corresponder o melhor possível com 'a intuição física'. Com este propósito, a axiomática aqui apresentada assume como conceito primitivo um conjunto S, dotado de relação de ordem total, que pode ser intuitivamente interpretado como um conjunto de estados quânticos. A partir deste ponto, já se podem apresentar os axiomas para um sistema quântico de partículas, na forma de um predicado quase-conjuntista. Ou seja, estamos generalizando o programa de Suppes [45] segundo o qual axiomatizar uma teoria é definir um predicado conjuntista.

Definição 4.1.1 $\mathcal{Q}_p = \langle P, \mathcal{P}, f, S, R \rangle$ *é um* sistema de partículas quânticas *se, e somente se, os seguintes axiomas forem satisfeitos (aqui os quantificadores foram omitidos):*

QP1 *P é um q-conjunto finito.*

QP2 $x \in P \Rightarrow m(x)$.

P é então uma coleção de microobjetos. Um bom exemplo para a aplicação do sistema $\langle P, \mathcal{P}, f, S, R \rangle$ seria a eletrosfera de um átomo. P seria então o q-conjunto de todos os elétrons deste átomo, ou seja, a coleção dos microobjetos indistingüíveis.

QP3 $x \in P \wedge y \in P \Rightarrow x \equiv y$.

QP4 $p \in \mathcal{P} \Rightarrow p \subseteq P$.

P corresponde às partes do q-conjunto P. O q-conjunto p representa, no exemplo do átomo, a coleção dos elétrons associados a um dado estado de energia.

QP5 $\forall x(f(x) \Leftrightarrow (m(x) \wedge \forall y(y \equiv x \rightarrow f(y))))$. [1]

$f(x)$ significaria a função "ser um férmion", ou seja, não ser um bóson (definido a seguir).

Definição 4.1.2 $b(x) =_{Def} m(x) \wedge \neg f(x)$.

Se x obedece o predicado b, dizemos que x é um 'bóson'. Portanto, a definição (4.1.2) afirma que qualquer micro-objeto que não seja um férmion ($f(x)$) é um bóson. É fácil perceber que poderíamos modificar convenientemente as definições para permitir também que se considerem micro-objetos de outros tipos, como para-partículas [8].

QP6 *S é um conjunto dotado de uma relação de ordem total $\leq$.*

S representaria o conjunto dos estados de energia, no átomo.

QP7 *R é uma quase-relação com domínio $\mathcal{P}$ e contra-domínio S, ou seja, $R = [\langle p, s\rangle; p \in \mathcal{P}, s \in S]$ é um sub-quase-conjunto de $\mathcal{P} \times S$.*

R relacionaria os elétrons a seus subníveis, e os subníveis aos níveis de energia. Em outras palavras, só corresponderiam à realidade do átomo as distribuições pré-estabelecidas por R.

QP8 $\bigcup_{p \in \mathcal{P}} = P$.

QP9 $\langle p, s\rangle \in R \wedge qc(q) > qc(p) \Rightarrow \langle q, s\rangle \notin R$.

QP10 $\langle p, s\rangle \in R \wedge \langle q, t\rangle \in R \wedge s \neq t \Rightarrow p \cap q = \emptyset$.

QP11 $((x \in P \Rightarrow f(x)) \wedge p \in \mathcal{P} \wedge x \in p) \Rightarrow qc(p) \leq_E 1$.

O axioma *QP1* diz que temos um número finito de partículas. O axioma *QP2* diz que os elementos de P são micro-objetos. *QP3*, por sua vez, afirma que se dois micro-objetos pertencem a P, então eles são indistingüíveis. *QP4* afirma que os elementos de $\mathcal{P}$ são sub-quase-conjuntos de P. *QP5*, que todo férmion é micro-objeto e que qualquer objeto indistingüível de um férmion, é também um férmion. *QP6* afirma que podemos ordenar totalmente os estados quânticos. *QP7* diz que R

[1] A implicação principal, originalmente concebida num só sentido foi alterada, sem conseqüência para o predicado, com o objetivo de se demonstrar um dos teoremas neste capítulo.

é uma quase-relação cujos primeiros elementos são sub-quase-conjuntos de P e cujos segundos elementos são estados quânticos.

Interessante ressaltar aqui que o conceito de quase-funções (ver [16]) não seria o mais indicado, por isso o uso de quase-relações. Uma quase-função levaria objetos indistingüíveis (elétrons) a certos estados de energia. Por serem estes objetos indiscerníveis, teriam todos a mesma imagem, impossibilitando se saber quais, e portanto, quantos estariam associados a cada nível.

Pode-se dizer mais sobre a interpretação de R. Se $\langle p, s\rangle$ pertence a R e $qc(p) =_E n$, pode-se dizer que 'o estado quântico s tem um número de ocupação extensionalmente igual a n', ou seja , 'existem n partículas quânticas no estado s'. O axioma *QP8* garante que toda partícula quântica está associada a algum estado quântico. *QP9* diz que se $\langle p, s\rangle$ pertence a R então p corresponde à coleção de *todas* as partículas associadas a um dado estado s. *QP10* indica que não há partícula associada a dois estados simultaneamente. Finalmente, *QP11* reflete o Princípio de Pauli.

Têm-se os seguintes resultados:

Teorema 4.1.1 *Todo objeto indistingüível de um bóson é também um bóson*

Dem.: Por QP5, dizer que x não é um bóson significa que, ou x não é micro, ou então é falso dizer que y é indistingüível de x implica y ser bóson. Entretanto a premissa inicial foi que x fosse um microelemento, então necessariamente tem-se que a implicação é falsa. Em outras palavras, tem-se que, se x não é férmion (portanto, x é bóson), então todo y que seja bóson é indistingüível de x.

Teorema 4.1.2 *Todo micro-objeto é, ou um bóson, ou um férmion.*

Dem.: Pela Def. 4.1.2 dizer que x não é um bóson significa dizer que, ou x não é micro, ou x não é um férmion. Portanto, como se trata de um microobjeto, dizer que este não é um bóson significa dizer que ele é um férmion. QED.

Teorema 4.1.3 *Todos os objetos que pertencem a P são, ou bósons, ou férmions. Não pode haver 'mistura' entre bósons e férmions em P.*

Dem.: Por QP2, se x pertence a P, x é micro. Pelo Teorema 4.1.2, todo microobjeto é, ou um bóson, ou um férmion. QED.

4.2 Estatísticas Quânticas

Nesta seção mostra-se como se obterem as distribuições quânticas a partir da axiomática apresentada.

Aqui, admite-se ainda que S é um conjunto finito. Esta hipótese é necessária pois o interesse aqui está somente em coleções de micro-objetos associados a níveis de energia num intervalo limitado de energias. Estes níveis correspondem, no caso, a diferentes estados quânticos.

Um tratamento q-conjuntista para a estatística de partículas em níveis de energia seria da seguinte forma: $R =_E [\langle p, s\rangle; p \in \mathcal{P}, s \in S]$ é a quase-relação do sistema acima considerado, define-se então $R\ |_i = [\langle p, s\rangle; p \in \mathcal{P}, s \in S_i]$, onde S_i é um elemento da família $\{S_i\}_{i \in H}$ e $H = [1, 2, 3, ..., n]$. Chama-se cada S_i de *bin*. Cada elemento s de cada um dos S_i é chamado um estado de energia.

Aqui, como usual em tratamentos estatísticos, a análise começela contagem das maneiras em que um evento pode ocorrer. No caso, o evento considerado é a distribuição de partículas nos estados quânticos. Portanto, sendo ν a $qc(P)$, procura-se: de quantas I_i maneiras podem-se distribuir ν férmions (partículas sujeitas ao axioma *QP10*) nos k estados quânticos s, em cada um dos S_i ($qc(S_i) = k$).

Existem várias maneiras diferentes de partículas ocuparem estados, resultando num certo valor de energia E, do sistema. A cada uma destas maneiras de se alcançar um valor de E, chama-se micro estado.

Procura-se aqui o microestado mais provável, dado um certo valor de energia.

Aqui, todos os microestados têm igual probalidade de ocorrer. Assim, a freqüência em que ocorre um conjunto de valores de números de ocupação será maior quanto maior for I. O fato que reflete fenomenologicamente este raciocínio é o Princípio do Aumento da Entropia.

Das considerações anteriores tem-se então que a distribuição procurada leva I a seu valor máximo.

Uma função crescente com o número de ocupação terá seu máximo nos valores n_i em que I é máximo. Será escolhida a função $F = \ln I$.

Observe-se ainda que são impostas algumas condições ao problema:

$$\sum_i n_i = N$$

$$\sum_i n_i \epsilon_i = E$$

Tais condições são chamadas vínculos. Num problema de extremos (no caso, de máximo) onde não há vínculos, usa-se o Métodos de Lagrange para se maximizar uma função. Embora a situação procurada seja a do máximo do valor do número de estados I, não é exatamente o valor desta que se busca, mas sim os números de ocupação para o máximo de I. Desta forma será maximizada a função $F = \ln I$, por ser mais conveniente aqui.

Pelo método de Lagrange, com multiplicadores α e β:

$$\nabla F = \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2,$$

ou

$$\nabla F - \alpha \nabla g_1 - \beta \nabla g_2 = 0,$$

onde

$$g_1 = \sum_i \nu_i - N = 0$$

$$g_2 = \sum_i \nu_i \epsilon_i - E = 0$$

No caso unidimensional (em relação a ν_i)

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \nu_{\mathrm{i}}} - \alpha \frac{\partial \mathrm{g}_1}{\partial \nu_{\mathrm{i}}} - \beta \frac{\partial \mathrm{g}_2}{\partial \nu_{\mathrm{i}}} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \nu_{\mathrm{i}}} = \sum_i (\alpha - \beta \epsilon_i) \tag{4.1}$$

No caso de férmions:

$$F = \ln\{\prod [\frac{\mathrm{k}!}{(\mathrm{k}_{\mathrm{i}} - \nu_{\mathrm{i}})!\nu!}]\} =$$

$$\sum_i [\ln k_i! - \ln(k_i - \nu_i)! - \ln \nu_i!]$$

e de acordo com a fórmula de Stirling

$$\ln K! \approx K(\ln K - 1),$$

(para $K \gg 1$), tem-se

$$F = \sum_i \{(k_i \ln k_i - k_i) - [(k_i - \nu_i)\ln(k_i - \nu_i) - (k_i - \nu_i)] - (\nu_i \ln \nu_i - \nu_i)\}$$

cuja derivada em relação a ν_i é

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \nu_{\mathrm{i}}} = \sum_i [\ln(1 - \frac{\mathrm{k}_{\mathrm{i}}}{\nu_{\mathrm{i}}})],$$

E substituindo em (4.1.2):

$$\sum_i \ln(1 - \mathrm{k}_{\mathrm{i}}\nu_{\mathrm{i}}) = \sum_i (\alpha + \beta \epsilon_i)$$

tem-se

$$\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{i}}}{\nu_{\mathrm{i}}} = e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + 1.$$

A última equação, escrita de outra forma fica:

$$\frac{\nu_{\mathrm{i}}}{\mathrm{k_i}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha+\beta\epsilon_{\mathrm{i}}}+1},$$

que é a fração do número de partículas no nível i, pelo número de ocupação neste nível, ou seja, é a *função distribuição* f. Aqui o cálculo foi feito para férmions, então, tem-se:

$$f_{\textit{férmions}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha+\beta\epsilon_{\mathrm{n}}}+1}.$$

Um cálculo semelhante leva à seguinte função para os bósons:

$$f_{\textit{bósons}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha+\beta\epsilon_{\mathrm{n}}}-1}.$$

Assim, se chega às *mesmas* funções-distribuição usuais (aquelas obtidas usando-se matemática clássica). Os demais resultados se seguem também da mesma maneira que se fazia classicamente (antes de se usar os q-conjuntos).

Capítulo 5

Extensão da Linguagem $\mathcal{Q}$

Neste capítulo apresentam-se as principais contribuições deste trabalho: (i) uma maneira mais simples (sem predicado quase-conjuntista) de se obter as estatísticas quânticas no contexto da teoria de quase-conjuntos; (ii) uma generalização da teoria apresentada no capítulo 3 que permite uma análise combinatória suficientemente rica para nossos propósitos; e (iii) uma prova de que a estatística de Maxwell-Boltzmann (MB) pode ser obtida mesmo em uma coleção de partículas indiscerníveis. Uma breve discussão sobre os átomos de Hidrogênio e Hélio, bem como a questão da entropia, também é apresentada. Mas, antes de tudo, precisamos relembrar alguns teoremas de análise combinatória no contexto de ZF, bem como a maneira usual de se deduzir a estatística de Maxwell-Boltzmann.

5.1 Alguns Teoremas em ZF

Apresentam-se aqui dois teoremas da teoria usual de conjuntos (ZF). Estes irão auxiliar na compreensão da próxima seção. Denotar-se-á por $\#x$ o cardinal do conjunto x.

Teorema 5.1.1 *Seja x um conjunto finito não vazio. Seja ainda $X_2 =_{Def} \{(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in \mathcal{P}(x), y_1 \cup y_2 = x \wedge \#y_1 + \#y_2 = \#x\}$. Então $\#X_2 = \#\mathcal{P}(x) = 2^{\#x}$.*

Dem.: Observa-se que $\#y_1 + \#y_2 = \#x$ é equivalente a afirmar que y_1 e y_2 são disjuntos ($y_1 \cap y_2 = \emptyset$). Se y_1 e $y_2 \in P(x)$, os elementos destes devem ser escolhidos entre os de x. Assim podem-se enumerar as possibilidades contando-se quantas combinações destes elementos podem ser feitas com n_1 elementos (conseqüentemente, restando n_2 para a outra, pois $n_1 + n_2 = n$). Aqui n_1 é o número de elementos de y_1 e n_2, de y_2.

Considere-se um conjunto x tal que $\#x = n$. Quando y_1 contiver um elemento ($n_1 = 1$), têm-se $\binom{n}{1}$ possibilidades, o que já conta os elementos que restam para y_2, pois são complementares.

Agora, contam-se os casos em que y_1 contém 2 elementos ($n_1 = 2$), e assim sucessivamente. Portanto, para cada valor de n_1, de 0 a n, tem-se uma possibilidade, logo o total de subconjuntos (y_1, y_2) de x que se podem formar são:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n = 2^{\#x}. \ \square$$

Teorema 5.1.2 *Seja x um conjunto finito tal que $\#x = \mathcal{N}$. Seja ainda $X_n = \{(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ tal que para todo $i, y_i \in \mathcal{P}(x), \sum_i \#y_i = \#x$, e $\cup_{i=1,\cdots,n}\, y_i = x\}$ Então $\#X_n = \#\mathcal{P}(x) = n^{\mathcal{N}}$.*

Dem.: A demonstração deste segue a mesma linha de raciocínio anterior porém, uma vez que agora os elementos de X_n são n-uplas ordenadas, há de se considerar a ordem dos elementos, o que sugere uma permutação. Para a contagem dos n_i's, podem ser permutados todos os N elementos, desde que se descontem as repetições em cada y_i (pois aqui se tratam de coleções, onde a ordem não importa). Para cada $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ associa-se um único $\{(m_1, m_2, \cdots, m_n)\}$, sendo que $m_i = \#y_i$. Para um certo conjunto de valores do conjunto de m_i's (e.g. $m_1 = 3, m_2 = 1, m_3 = 5, \cdots, m_n = 0$), tem-se:

$$I_{n\text{'s } \mathit{fixos}} = \frac{\mathcal{N}!}{\mathrm{m_1!m_2!\cdots m_n!}}$$

Os elementos dos y_i's serão chamados aqui de partículas e o número de destas em cada y_i, de número de ocupação.

A única restrição sobre os números de ocupação é que sua soma não exceda o número total de partículas:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \mathcal{N}. \tag{5.1}$$

Assim, as possibilidades são, ao todo

$$\sum_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n=1}^{n} \frac{\mathcal{N}!}{\mathrm{m_{i_1}!m_{i_2}!m_{i_3}!\cdots m_{i_n}!}}$$

De acordo com o Polinômio de Leibniz, tem-se

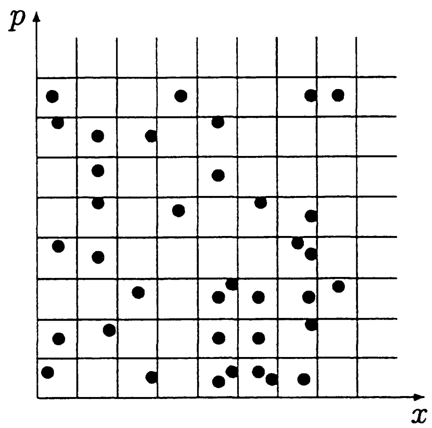
$$I = \sum_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n} \frac{\mathcal{N}!}{\mathrm{m_{i_1}!m_{i_2}!m_{i_3}!\cdots m_{i_n}!}} = n^{\mathcal{N}}.\Box \tag{5.2}$$

Definição 5.1.1 *Denota-se por* $[x]_n$ *o quase-conjunto que satisfaz as seguintes propriedades:* $[x]_n \subseteq [x]$ *e* $qc([x]_n) =_E n$.

5.2 Descrição Usual

A figura abaixo é um *espaço de fase* (clássico), ou seja, um gráfico das posições x das partículas por seus *momenta* p.

O número de partículas n_{jl} que se encontra em cada caixa define um microestado. Os índices k (posição) e l (momentum) permitem uma ordenação das caixas (estados) no gráfico abaixo.



O macroestado é uma n-upla formada por cada um daqueles n_{jl} que definem um microestado.

Observe-se que na estatística de Maxwell-Boltzmann se consideram (classicamente) as partículas como discerníveis, ou seja, podem-se colocar rótulos nestas (como, por exemplo, enumerando-as). Desta maneira se teria arranjos diferentes ao se trocarem as posições das partículas. Assim, um mesmo conjunto de números de ocupação contém diferentes arranjos de partículas. Portanto a n-upla que caracteriza um macroestado pode ter sido originada por diferentes disposições das partículas nas caixas (estados).

Procura-se aqui todas as possibilidades para os números de ocupação dos microestados, dada a ocorrência de um certo macroestado. Pelo motivo explicado acima existem diversos possíveis microestados para um único macroestado. Far-se-á então a análise probabilística do problema, através do cálculo das chances de sua ocorrência dentre todos os eventos possíveis. Isto necessita que se contem as maneiras em que o evento pode ocorrer - será usada combinatória usual para fazê-lo.

Observe-se que os n_{jl} acima podem assumir quaisquer valores naturais. Apenas quando se consideram diferentes estatísticas se restrigem seus valores. No exemplo em questão não há restrição de valores para n_{jl}. Além disso, nesta estatística se consideram as partículas como discerníveis, ou seja, pode-se perceber a troca de um elemento por outro. O número de possibilidades então corresponde ao número de permutações das $\mathcal{N}$ partículas, onde descontam-se as permutações que se fazem numa mesma caixa, por não caracterizar estado diferente.

O número de microestados que levam ao dado macroestado é, então:

$$I = \frac{\mathcal{N}!}{\Pi_{jl} n_{jl}!} \tag{5.3}$$

Calcula-se então o máximo de I, ou seja, a mais provável distribuição. Para tanto, têm-se as condições:

$$\sum_{i}^{N} n_i = N, \tag{5.4}$$

sendo que o índice i denota jl; e

$$\sum_{i}^{N} n_i e_i = \mathcal{E}, \tag{5.5}$$

sendo $\mathcal{E}$ a energia total do sistema.

A função distribução é:

$$f_{MB} = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_i} - 1} \tag{5.6}$$

onde i representa o nível de energia que se está considerando e α e β são os multiplicadores de Lagrange. α é uma constante de normalização tal que

$$\int_0^E \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon} - 1} d\epsilon = N, \tag{5.7}$$

e

$$\beta = \frac{1}{kT}, \tag{5.8}$$

sendo k a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta do sistema de partículas.

Isto seria, em resumo, o tratamento usual do problema.

5.3 Os Principais Resultados deste Trabalho

Nesta seção apresentar-se-á uma generalização do axioma *Q26* da teoria de quase-conjuntos, bem como suas conseqüências. Mostra-se aqui que para o tratamento quase-conjuntista da distribuição de partículas em estados não é necessário o conceito de quase-relação, ao contrário do que foi feito no capítulo anterior [18].

Relembrando *Q26*:

$$\forall_Q x(qc(\mathcal{P}(x)) =_E 2^{qc(x)}),$$

sugerimos a seguinte generalização:

Q26' Seja x um quase-conjunto finito tal que $qc(x) = N$. Se definirmos z_n como o q-conjunto cujos elementos são n-uplas ordenadas $\langle y_1, \cdots, y_n \rangle$ onde, para todo

$i = 1, \cdots, n$ tem-se $y_i \in \mathcal{P}(x)$, $\cup_i y_i = x$, e $\sum_i qc(y_i) = qc(x)$, então tem-se o seguinte:

$$qc(z_n) = n^N. \tag{5.9}$$

Nossa proposta consiste em se definir uma teoria de quase-conjuntos Q' pela troca do axioma Q26 *pelo axioma* Q26' *em Q.*

Para exemplificar, considere-se o ZF conjunto x onde

$$x = \{1, 2, 3\}.$$

O conjunto das partes de x é:

$$\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Queremos preservar um resultado análogo mesmo para coleções de indiscerníveis.

Apresenta-se aqui uma conseqüência da teoria. Seja um quase-conjunto x com, por exemplo, 3 elementos indiscerníveis. Denota-se tal q-conjunto por (ver definição (5.1.1)).

$$[x]_3.$$

Uma notação mais ilustrativa representaria tal q-conjunto por

$$[\bullet, \bullet, \bullet].$$

O q-conjunto das partes de x é então

$$\mathcal{P}(x) =_E [\emptyset, [x]_1, [x]_2, [x]_3, \cdots], \tag{5.10}$$

onde na observação do parágrafo anterior foi explicado o porquê de apenas um subq-conjunto com um elemento, um com dois etc., e as reticências $(\cdots)$ são explicadas a seguir:

O axioma *Q26* afirma que em um q-conjunto de, digamos, três elementos tem-se, $qc(\mathcal{P})(x) = 2^q c(x) = 2^3 =_E 8$. Os únicos elementos de $\mathcal{P}(x)$ que poderiam compor a coleção são subq-conjuntos de x. Os primeiros a serem exibidos na equação (5.10) foram aqueles subq-conjuntos de diferentes q-cardinalidades (extensionalmente diferentes), mas este é um número que não preenche a quantidade de subq-conjuntos imposta por *Q26'*. Nada impede que se incluam subq-conjuntos indistingüíveis entre si em $\mathcal{P}(x)$. Neste ponto surge então a conseqüência, ou seja, as diferentes possibilidades permitidas aqui, que representadas em notação intuitiva, são:

$$\mathcal{P}(x) =_E [\emptyset, [\bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], [\bullet], [\bullet], [\bullet], [\bullet]]$$

$$\mathcal{P}(x) =_E [\emptyset, [\bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet]]$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{P}(x) =_E [\emptyset, [\bullet], [\bullet], [\bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], x]$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{P}(x) =_E [\emptyset, [\bullet], [\bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet], [\bullet, \bullet, \bullet]].$$

Pode-se perceber então que a estatística de MB pode ser obtida como apenas uma das várias permitidas pela teoria. Há ainda outra, e talvez a mais importante, das vantagens desta forma de se obter MB: Não é necessário que se admitam que os elementos (as partículas componentes de um gás, por exemplo) sejam discerníveis.

No caso em que $n = 2$, o axioma *Q26'* se reduz a uma sentença equivalente a *Q26*.

O papel principal de *Q26'* é permitir uma análise combinatória quase-conjuntista suficientemente forte para deduzir as estatísticas usuais. Do ponto de vista matemático é importante frisar que a substituição de *Q26* por *Q26'* não acarreta qualquer inconsistência na teoria. Tal fato é provado no capítulo 6. A questão é que *Q26* não permite uma análise combinatória quase-conjuntista para mais que dois estados.

Além disso, *Q26'* é a versão q-conjuntista do teorema (5.1.2). Ou seja, estamos simplesmente generalizando a teoria originalmente proposta em [16].

De acordo com o polinômio de Leibniz, podemos reescrever a equação (5.9) como:

$$qc(z_n) = n^N = \sum \frac{N!}{\Pi_{i=1,\cdots n} n_i!}, \tag{5.11}$$

sendo que a soma é sobre todas as possíveis combinações de inteiros não negativos n_i tais que $\sum_{i=1,\cdots,n} n_i = N$.

Se interpretarmos n como o número de estados físicos, N como o número total de partículas e n_i como o número de partículas associadas a cada estado i, então fica fácil de perceber que cada parcela do somatório na equação (5.11) é uma possível distribuição MB de N partículas entre n estados. A mais provável entre todas as parcelas de (5.11) é a distribuição de Maxwell-Boltzmann. Desse modo, podemos acrescentar a equação (5.11), com sua respectiva interpretação física, como um postulado extra na descrição quase-conjuntista de MB. Se *Q26* não fosse substuído por *Q26'*, não haveria maneira de se dizer qualquer coisa a respeito da distribuição de partículas em um número arbitrário n de estados ou caixas. Estaríamos limitados ao caso de dois estados.

É fácil perceber que para todo i tem-se $n_i = qc(y_i)$. O axioma *Q26'* é apenas uma maneira de se dizer que o número de maneiras de se distribuir N objetos (distingüíveis ou não) entre n caixas é n^N. A condição de que $\bigcup_i y_i = x$ e $\sum_i qc(y_i) = qc(x)$ é tão somente uma maneira de se garantir que não há 'ocorrência repetida' do 'mesmo' objeto em duas caixas. É evidente que a expressão 'ocorrência repetida', neste contexto, é apenas uma *façon de parler*, com propósito didático, uma vez que não há qualquer sentido em se falar do 'mesmo' objeto, uma vez que não há identidade em $\mathcal{Q}'$.

O leitor poderia perguntar: o que são as tais caixas? Cada y_i corresponde a uma dada caixa ou estado físico. Podem haver, certamente, duas caixas indistingüíveis y_i e y_j. Nesse caso, os rótulos i e j não podem individualizar cada caixa. São apenas nomes diferentes, ou rótulos, atribuídos a dois objetos indistingüíveis (q-conjuntos, no caso), ainda que não seja possível dizer exatamente qual é i e qual é j.

• • •	$\emptyset$
••	•
•	••
$\emptyset$	• • •

Figura 5.1: As 'primeiras' quatro possíveis distribuições de três objetos (indistingüíveis ou não) entre duas caixas. Cada linha representa uma possível distribuição e cada ponto representa um objeto ou partícula.

Considere, como exemplo, uma coleção de três partículas indistingüíveis a serem distribuídas entre dois possíveis estados. Segundo livros-texto sobre mecânica estatística há apenas quatro possibilidades de distribuição. Por outro lado, de acordo com $\mathcal{Q}'$ há oito possibilidades. Se impusermos que o número de ocupação n_i de cada caixa é constante, o número de possibilidades pode ser interpretado como uma parcela da soma na equação (5.11).

O que dizer sobre as demais quatro possibilidades previstas pelo axioma *Q26'*? As oito possibilidades previstas em *Q26'* podem ser descritas pela equação (5.11) como

$$2^3 = \frac{3!}{3!0!} + \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{0!3!}.$$

Portanto, temos uma possibilidade com três partículas no primeiro estado e nenhuma no segundo, mais três possibilidades *indistingüíveis* com duas partículas no primeiro estado e uma no segundo estado, mais três possibilidades *indistingüíveis* com uma partícula no primeiro estado e duas no segundo, mais uma única possibilidade com nenhuma partícula no primeiro estado e três no outro. O cálculo da distribuição mais provável é feito para grandes números de partículas, seguindo a maneira usual de se proceder em mecânica estatística.

Seguindo o exemplo dado, *Q26'* afirma que pode-se distribuir 3 objetos (indistingüíveis ou não) entre 2 caixas de 2^3 maneiras (indistingüíveis ou não). Este axioma não afirma, entretanto, *como* se pode fazer esta distribuição. Se não se apelarmos para equação (5.11), ter-se-á o seguinte: de acordo com a Figura (5.3), existem, pelo menos, por conta do axioma *Q16*, *quatro* possíveis distribuições. No entanto, *Q26'*

•••	$\emptyset$
••	•
•	••
$\emptyset$	•••
•	••
•	••
•	••
•	••

Figura 5.2: Uma possível seqüência de oito distribuições de três objetos em duas caixas, de acordo com o axioma *Q26'*.

•••	$\emptyset$
••	•
••	•
••	•
•	••
•	••
•	••
$\emptyset$	•••

Figura 5.3: A única possível distribuição de três objetos em duas caixas, se conjugarmos o axioma *Q26'* com a equação (5.11).

afirma que há oito possíveis maneiras de se distribuir as partículas. Uma delas está ilustrada na figura (5.3), ou seja, as quatro distribuições na figura (5.3) *mais* quatro distribuições representadas por q-conjuntos indistingüíveis da terceira distribuição da figura (5.3). Há evidentemente outras possibilidades. Portanto, o axioma *Q26'* não é suficiente para se deduzir MB, apesar de necessário. *Q26' e* a equação (5.11), com sua interpretação no contexto de *Q26'*, corresponde a uma maneira de dizer que a única possibilidade é aquela ilustrada na figura (5.3), ou seja, MB.

5.4 Estatísticas Quânticas

Relembra-se aqui a diferença entre a estatística de MB e as quânticas: em Bose-Einstein (BE) contam-se apenas as possibilidades distingüíveis, entre todos as preditas por *Q26'*. Fermi-Dirac (FD) é obtida da mesma maneira, mas com a condição adicional do Princípio de Pauli.

A partir de MB, podem-se obter BE e FD. Isto é aqui exemplificado como se segue: Suponha-se uma coleção com duas partículas indistingüíveis. Tal coleção seria representada, de acordo com a notação do axioma Q26', por Z_2. Sua q-cardinalidade é então obtida por este axioma e pela equação 5.11 e para o caso $n = 2$, tem-se $\#Z_2 = 4$. Em MB teríamos então a coleção (aqui representada por $Z_{2(MB)}$):

$$Z_{2(MB)} =_E [\langle \bullet\bullet, \emptyset\rangle \langle \bullet, \bullet\rangle \langle \bullet, \bullet\rangle \langle \emptyset, \bullet\bullet\rangle]$$

Passando o quociente pela relação de indistingüibilidade sobre esta coleção, têm-se eliminadas as 'repetições' [1], e a coleção BE se obtem da seguinte maneira:

$$Z_{2(MB)}/_\equiv$$

$$=_E [\langle \bullet\bullet, \emptyset\rangle \langle \bullet, \bullet\rangle \langle \bullet, \bullet\rangle \langle \emptyset, \bullet\bullet\rangle]/_\equiv,$$

$$\equiv [\langle \bullet\bullet, \emptyset\rangle, \langle \bullet, \bullet\rangle, \langle \emptyset, \bullet\bullet\rangle].$$

[1] O que caracteriza BE é justamente o fato de não se verificarem repetições nas ocorrências.

A estatística de FD pode ser obtida ao se aplicar o princípio de Pauli [2]sobre a distribuição de BE, obtendo-se então

$$Z_{2(FD)} =_E [\langle \bullet, \bullet \rangle],$$

onde aqui se fez um esquema representando partículas como pontos.

No caso geral as estatísticas podem ser obtidas da mesma forma: para uma coleção qualquer Z_n, a q-cardinalidade da coleção MB correspondente tem, pelo axioma Q26' e pela equação 5.11, n^N elementos, onde n seria interpretado num sistema físico como o número de estados e N, como o número de partículas deste sistema.

A correspondente coleção representando BE é obtida ao se passar o quociente pela relação de indistingüibilidade sobre a coleção anterior, também como no exemplo.

A coleção representado FD decorre da aplicação do Princípio de Pauli sobre BE. Note-se aqui que para a obtenção de paraestatísticas basta substituir a restrição do Princípio de Pauli (uma partícula em cada nível) por n partículas em cada nível.

5.5 Átomo de Hélio

O átomo de hélio é provelmente a mais simples situação onde o problema da individualidade tem um importante significado físico. Se fosse ignorada a não individualidade de prótons e elétrons, a função-de-onda do átomo de hélio seria simplesmente o produto de duas funções-de-onda de átomos de hidrogênio com $Z = 1$ mudando para $Z = 2$. No entanto, a função-de-onda para o caso no qual um dos elétrons está no estado fundamental (100) e o outro está excitado (nlm) é:

$$\phi(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{100}(\mathbf{x_1})\psi_{nlm}(\mathbf{x_2}) \pm \psi_{100}(\mathbf{x_2})\psi_{nlm}(\mathbf{x_1})], \tag{5.12}$$

onde o sinal $+$ $(-)$ representa o estado de spin tripleto (singleto) e $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ denotam vetores-posição dos dois elétrons.

Para o estado fundamental, no entanto, a função-de-onda espacial deve ser necessariamente simétrica. Neste caso não há qualquer implicação física da não individu-

[2]Na sua versão q-conjuntista: $qc(y_i) \leq 1$ para cada i em *Q26'*.

alidade dos elétrons. O caso mais interessante é certamente o do estado excitado. A equação (5.12) reflete nossa ignorância sobre qual elétron está na posição $\mathbf{x_1}$ e qual está na posição $\mathbf{x_2}$. Não obstante, na mesma equação há termos como $\psi_{100}(\mathbf{x_1})$, os quais correspondem a propriedades físicas específicas de elétrons tratados individualmente. Em outras palavras, os elétrons estão sendo *rotulados* por suas coordenadas espaciais.

Nossa interpretação q-conjuntista para a equação (5.12) é a seguinte. Seja P um quase-conjunto puro tal que $qc(P) = 2$. Interpreta-se os elementos de P como eléctrons do átomo de hélio. Se G é um predicado unário tal que $G(x)$ intuitivamente diz que 'x está no estado fundamental' (a definição de G depende de critérios físicos), então, por uso do esquema da separação de $\mathcal{Q}$ (o qual é o mesmo de $\mathcal{Q}'$,[3] obtém-se o sub-quase-conjunto $p_1 \subseteq P$ definido como

$$p_1 =_E [x \in P : G(x)].$$

Se definirmos $p_2 =_E P - p_1$, então $qc(p_1) = qc(p_2) = 1$. Portanto, os elementos de P, a despeito de sua não individualidade, são 'separados' pelos seus 'respectivos estados'. Mais formalmente, chamando g_1 de estado fundamental e g_2 de estado excitado, pode-se definir

$$R =_E [[p_1, g_1], [p_2, g_2]], \tag{5.13}$$

ou, usando o axioma *Q26'*,

$$\langle \bullet, \bullet \rangle,$$

sendo que a primeira coordenada representa o estado fundamental e a segunda corresponde ao estado excitado.

Desse modo, pode-se em princípio, reescrever a equação (5.12) como

$$\phi(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = (\psi_{100,p_1} \psi_{nlm,p_2}). \tag{5.14}$$

[3]O esquema da separação é o axioma *Q14*.

A constante de normalização na equação acima é 1. Como p_1 e p_2 são quase-conjuntos unitários, a interpretação inevitável é que um elétron está no nível fundamental enquanto o outro está no estado excitado.

5.6 Entropia

A entropia de um dado sistema de partículas é definida por

$$S = k \ln(\Omega),$$

sendo k a constante de Boltzmann e Ω o número de estados acessíveis ao sistema:

$$\Omega = \frac{\mathcal{N}!}{\Pi_i n_i!},$$

A entropia, no contexto dos q-conjuntos é então:

$$S = k \ln(\Omega) = k \ln[\frac{\mathcal{N}!}{\Pi_i n_i!}]$$

$$S = k[\ln \mathcal{N}! - \ln(\Pi_i n_i!)],$$

onde a interpretação quase-conjuntista de n_i e $\mathcal{N}$ é a mesma dada para a equação (5.11).

Capítulo 6

Consistência da Teoria $\mathcal{Q}'$

Teorema 6.0.1 *$\mathcal{Q}'$ é consistente sss ZFC é consistente.*

Prova: Faz-se aqui apenas uma breve esquematização da prova. A tradução da linguagem de ZFU para a linguagem de $\mathcal{Q}$ (bem como para Q') mostra que se $\mathcal{Q}$ (e $\mathcal{Q}'$) é consistente, então também o será ZFU (e portanto, ZFC). Em [16] a recíproca é provada. Uma super-estrutura Q sobre um dado conjunto ZF é definida, e a prova de que Q é um modelo para a teoria de q-conjuntos é apresentada. Uma vez que as únicas modificações em $\mathcal{Q}'$ foram a troca de *Q26* por *Q26'* e uma restrição no axioma *Q4*,[1] concentra-se a atenção aqui em *Q26'*. A prova de *Q26* no contexto do modelo Q de $\mathcal{Q}$ foi feita por meio da tradução de *Q26* para a linguagem de ZFU. Uma vez que a tradução simplesmente afirma uma propriedade básica de cardinais em ZFU - teorema (5.1.1) - sua prova não representa problema algum. No caso do axioma *Q26'* pode-se usar o mesmo argumento, pois sua tradução para a linguagem ZFC (como foi feita em [16]) simplesmente afirma uma propriedade básica de cardinais em ZFC - teorema (5.1.2).

[1]Em [16] o axioma *Q4* é escrito como $\forall x \forall y(\neg m(x) \wedge \neg m(y) \rightarrow (x \equiv y \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y))))$, o qual foi modificado para a versão apresentada no capítulo 3. Como tal versão é simplesmente um caso particular daquela apresentada em [16], não há qualquer problema para se demonstrar esse axioma no modelo em questão.

Capítulo 7

Conclusões

Conclui-se então que:

1. A teoria de quase-conjuntos, sendo mais abrangente que ZFU, permite a existência de objetos sem individualidade. Assim sendo, pode-se deduzir as estatísticas quânticas de forma matematicamente precisa e consistente.

2. Apresenta-se aqui uma generalização da teoria de quase-conjuntos, como originalmente concebida em [16], a qual permite uma análise combinatória quase-conjuntista que permite fundamentar as estatísticas usualmente empregadas em mecânica estatística.

3. A estatística de Maxwell-Boltzmann pode ser obtida mesmo em uma coleção de indiscerníveis. Isso revela que, ao contrário do que é sugerido em livros-texto de mecânica estatística, a estatística clássica de MB não está necessariamente comprometida com o conceito de individualidade.

4. Maxwell-Boltzmann pode ser interpretada como uma generalização de Bose-Einstein e Fermi-Dirac.

5. $\mathcal{Q}'$ é consistente se, e somente se, ZFC é consistente.

6. Este é um trabalho de fundamentos. Praticamente não existe tratamento axiomático correto de teorias físicas na literatura. O grande triunfo imediato do método axiomático é seu poder de síntese e compreensão. Graças a essas características, conseguimos descrever de maneira precisa e relativamente simples o

conceito de indistingüibilidade em mecânica quântica, de modo a demonstrar, por exemplo, o item 3 acima. Esse trabalho deve ser visto como um exemplo ilustrativo da aplicação e do alcance pedagógico que o método axiomático pode representar para teorias físicas. Não há, em livros de física-matemática, qualquer capítulo dedicado a teoria de conjuntos, lógica ou fundamentos. O assunto ainda é novo e deve se tornar conhecido entre estudantes e estudiosos de física à medida em que novas contribuições nessa área forem surgindo na literatura. Temos a pretensão de que no futuro não se identifique de maneira muito clara a distinção entre física e fundamentos da física. Mas antes disso, é necessário que os físicos se familiarizem com a ferramenta matemática que o método axiomático representa.

Capítulo 8

Questões em Aberto

São questões a serem desenvolvidas em trabalhos futuros, as seguintes:

1. Alguns autores têm sugerido que existe uma relação entre indistingüibilidade e não-localidade em mecânica quântica [17, 21, 40]. Seria interessante descrever tal relação no escopo da teoria de q-conjuntos. Essa é uma questão evidentemente complicada, tendo em vista os recentes estudos envolvendo não-localidade.

2. Não existe uma linguagem própria para a teoria quântica [22, 33, 34]. Uma fundamentação q-conjuntista para a análise funcional pode fornecer elementos para uma tal linguagem. Isso exige uma versão q-conjuntista para espaços vetoriais, espaços topológicos, espaços métricos, espaços de Hilbert e espaços de Fock.

3. Dar uma fundamentação q-conjuntista para uma generalização de σ-álgebras e teoria de probabilidades de Kolmogorov [44].

4. Dar uma versão quase-conjuntista para o Teorema de Spin-Estatística. Essa é uma questão extremamente relevante tendo em vista que demonstramos que partículas usualmente tratadas como objetos clássicos também podem ser desprovidas de individualidade, o que sugere um ponto de contacto com a Física Quântica.

Bibliografia

[1] Brown, H. R., E. Sjoeqvist, G. Bacciagaluppi, 'Remarks on identical particles in de Broglie-Bohm theory' *Phys. Lett. A* **251** 229-235 (1999).

[2] da Costa, N. C. A., *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica*, (São Paulo, Hucitec, 1980).

[3] Da Costa, N. C. A. e F. Doria, "Undecidability and imcompleteness in classical machanics", *International Journal of Theoretical Physics* 30, 1041-1073 (1991).

[4] Dalla Chiara, M. L., e G. Toraldo di Francia, 'Formal analysis of physical theories', em G. Toraldo di Francia *Problems in the Foundations of Physics*, p. 144 (North-Holland, Amsterdam, 1979).

[5] Dalla Chiara, M. L., e G. Toraldo di Francia, 'Individuals, kinds and names in Physics' em G. corsi et al., *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, Physics*, p. 261 (Kluwer, Academic, Dordrecht, 1993); reimpressão em *Versus* **40**, 29 (1985).

[6] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. e Krause, D., 'Quasiset theories for microobjects: a comparison', a aparecer em Castelani (editor), *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics.* Princeton University Press.

[7] French, S., e D. Krause, 'Quantum objects are vague objects' *Sorites* **6**, 21 (1991) .

[8] Haag, R., *Local Quantum Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).

[9] Hilbert, D., 'Mathematical problems', em *Mathematical Developments Arising from the Hilbert Problems*, editado por F. E. Browder, Proc. Symp. Pure Math., AMS **28** 1-34 (1976).

[10] Hübsch, T., 'Quantum mechanics is either nonlinear or non-introspective', *Modern Physics Letters A* **13** 2503-2512 (1998).

[11] Huggett, N. 'Atomic Metaphysics', *Journal of Phylosophy* **96**, 5-24 (1999).

[12] Jänich, Klaus. *'Topology'*, editora Springer-Verlag, NY. 1995.

[13] Krause, D., 'Multisets, quasi-sets and Weyl's aggregates', *J. of Non-Classical Logic* **8** 9-39 (1991).

[14] Krause, D., 'On a quasi-set theory' *Notre Dame Journal of Formal Logic* **33** 402 (1992).

[15] Krause, D. e S. French, 'A formal framework for quantum non-individuality' *Synthese* **102** 195-214 (1995).

[16] Krause, D., 'Axioms for collections of indistinguishable objects', *Logique et Analyse* **153-154**, 69-93 (1996).

[17] Krause, D. e A. S. Sant'Anna, 'Indistingüibilidade e não-localidade em EPR', em *Caderno de Resumos do Simpósio David Bohm,* 25-25 (Instituto de Estudos Avançados, Universidade de São Paulo, 1998).

[18] Krause, D., A. S. Sant'Anna e A. G. Volkov, 'Quasi-set theory for bosons and fermions: quantum distributions', *Found. Phys. Lett.*, **12** 51-66 (1999).

[19] Krause, D., *Introdução à Teoria Axiomática de Conjuntos*, livro ainda não publicado.

[20] Lowe, E. J., 'Vague identity and quantum indeterminacy' *Analysis* **54**, 110 (1994).

[21] Mandel, L., 'Coherence and indistinguishability', *Optics Letters* **16** 1882-1884 (1991).

[22] Manin, Yu. I., 'Problems of present day mathematics: I (Foundations)' em Browder, F. E. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **28** (American Mathematical Society, Providence, 1976), p. 36.

[23] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic* (Chapman & Hall, London, 1997).

[24] De Muynck, W. M. 'Distinguishable and indistinguishable particle descriptions of systems of identical particles', *International Journal of Theoretical Physics* **14** 327-346 (1975).

[25] Penrose, R. 'Mathematical physics on the 20^{th} and 21^{st} century', em V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax e B. Mazur (editores) *Mathematics: Frontiers and Perspectives* 219-234 (AMS, 2000).

[26] Post, H., 'Individuality and Physics', *The Listener* **70**, 534-537 (1963). Reimpresso em *Vedanta for East and West* **32**, 14-22 (1973).

[27] Readhead, M., e P. Teller, 'Particle, particle labels and quanta: the tool of unacknowledged metaphysics' *Found. Phys.* **21** 43 (1991).

[28] Readhead, M., e P. Teller, 'Particle labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics' *Brit. J. Phil. Sci.* **43**, 201 (1992).

[29] Sant'Anna, A. S., 'An axiomatic framework for classical particle mechanics without force', *Philosophia Naturalis* **33** 307-203 (1996).

[30] Sant'Anna, A. S., 'Some remarks about indistinguishability and elementary particles', *Logique et Analyse* **157** 45-66 (1997).

[31] Sant'Anna, A.S., e D. Krause, 'Indistinguishable particles and hidden variables' *Found. Phys. Lett.* **10** 409-426 (1997).

[32] Sant'Anna, A. S. e D. C. Freitas, 'Distribução de fótons virtuais em uma descrição corpuscular para o efeito Casimir', em *Caderno de resumos e do simpósio David Bohm,* 17-17 (Instituto de Estudos Avançados, Universidade de São Paulo, 1998).

[33] Sant'Anna, A. S., 'Lógica e Física', em *III Simpósio LAtino Americano e Caribenho de Educação em Ciências,* 267-270 (ICASE-UFPR, Curitiba, 1999).

[34] Sant'Anna, A. S., 'Física quântica e física clássica', *O conhecimento Científico*, de N. C. A. da Costa, 2a. edição, p. 270-272 (Discurso Editorial, São Paulo, 1999).

[35] Sant'Anna, A.S., J. de Souza e D. C. de Freitas, 'Indistinguishable particles and hidden variables: Part II', a aparecer em *Found. Phys. Lett.*

[36] Sant'Anna, A. S. e A. M. S. Santos, 'Quasi-set Theoretical Foundations of Statistical Mechanics: a research program', *Foundations of Physics* **30** 101-120 (2000).

[37] Sant'Anna, A. S. 'Elementary particles, hidden variables and hidden predicates', a aparecer em *Synthese.*

[38] Sant'Anna, A. S. e D. C. Freitas, 'The Statistical behaviour of the quantum vacuum virtual photons in the Casimir effect', *International Journal of Applied Mathematics* **2** 283-290 (2000).

[39] Sant'Anna, A. S. e D. C. de Freitas, 'Distribuição de Fótons virtuais no estado de vácuo quântico', em Osvaldo Pessoa Jr. (org.) *Fundamentos da Física 1: Sim pósio David Bohm* 73-77 (Livraria da Física, São Paulo, 2000).

[40] Sant'Anna, A. S. e D. Krause, 'Indistingüibilidade e não-localidade no experimento de Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm', a aparecer no *Volume de Anais do Simpósio David Bohm.*

[41] Sant'Anna, A. S., 'An axiomatic framework for classical particle mechanics without space-time', *Philosophia Naturalis* **36** 307-319 (1999).

[42] Schrödinger,E., *Science and Humanism*, (Cambridge Un. Press, Cambridge, 1952).

[43] Suppes, P., *Axiomatic Set Theory* (Dover, New York, 1957).

[44] Suppes, P., *Introduction to Logic* (van Nostrand, Princeton, 1957).

[45] Suppes, P., *Set-Theoretical Structures in Science*, (mimeo. Stanford University, 1967).

[46] van Fraassen, B., 'Statistical behaviour of indistinguishable particles: problems and interpretation' em P. Mittelstaedt e E. W. Stachow, *Recent Developments in Quantum Logics* (Bibliographisches Institut, Manheim, 1985), p. 161.