KARIN FERRAZ

MÉTRICA HERMITEANA EM GRAVITAÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA
ABRIL/87

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

ATA DA DEFESA DA TESE DE MESTRADO DA SRTª KARIN FERRAZ

Em sessão pública de defesa de tese iniciada às 14:00 horas, nesta data, após seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A .

Curitiba, 02 de abril de 1987.

Banca Examinadora:

Prof. Édson Stédile
Presidente - UFPR

Prof. Ruben Aldrovandi
IFT - SP

Prof. Gerson Francisco
IFT - SP

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Edson Stédile pela orientação e assistência.

Ao Professor Haroldo M. Cavalcanti (in memorian) pela sua preocupação e auxílio.

Aos Professores Cristiano J.Graf, Liu Kai, Bin Kan Cheng, Germano B.Afonso e Gilberto Kramer pelo apoio e incentivo.

Aos colegas e amigos Sergio, Sandra, Gilberto, Epaminondas, Cláudio, Virgínia, Tarcila, Paula Vercelli, Paula Castanheira, Vera e Isabel pelo estímulo.

Ao Edgardo Xavier, que mesmo longe sempre soube me incentivar.

Com um grande carinho a Isaura de Sá Merlin, por ter me ensinado a dar os primeiros passos que me trouxeram até aqui.

A Universidade Federal do Paraná pelos recursos técnicos.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Propomos aqui um modelo gravitacional, com uma métrica Hermiteana. O modelo é construído sobre um fibrado de referenciais lineares, onde a variedade base é o espaço-tempo de Minkowski e o grupo de simetria é o grupo de Poincaré, $SO(3,1) \oplus T_4$. As Equações de Einstein-Cartan são derivadas aqui de uma Lagrangeana única. A métrica proposta nos mostra a existência de um caroço, que elimina a singularidade na origem. Esta aproximação fornece os mesmos resultados para os testes experimentais da Relatividade Geral.

ABSTRACT

A gravitational model , with an Hermitian metric, is here proposed. The model is built up on a fibre-bundle of linear frames, where the base-manifold is Minkowski space-time and the group of symmetry is the group of Poincaré, $SO(3,1)\otimes T_4$. Einstein-Cartan equations are here derived from an unique Lagrangian. The metric proposed points out the existence of a core, which eliminates the singularity at the origin. This approach gives the same results for the experimental tests of General Relativity.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A idéia de introduzir uma métrica não simétrica em Teoria da Relatividade Geral ocorreu a Albert Einstein[1] em 1945. Como uma generalização natural do caso simétrico, Einstein supôs, a princípio, que esta métrica não simétrica deveria ser Hermiteana. Em 1946, juntamente com E.G.Strauss[2], e devido a uma sugestão de W.Pauli, ele abandonou esta exigência de Hermiticidade.

Baseado então na existência de uma métrica não simétrica, Papapetrou[3], em 1948, procurou para as equações de campo, uma solução estática e esfericamente simétrica.

Nosso trabalho fundamenta-se no de J.W.Moffat[4] que, em 1979, retomou a idéia de métrica Hermiteana em gravitação. Porém, procuramos dar uma formulação geométrica mais completa.

No Capítulo I descrevemos os aspectos geométricos da teoria, com o uso de espaços fibrados e Teoria de Grupos. A variedade-base usada é o espaço de Minkowski e o Grupo de Poincaré $SO(3,1) \otimes T_4$ é tomado como grupo de simetria. Usando a Equação de Yang-Mills obtivemos uma equação similar à Equação de Yang da Relatividade Geral(RG) e também uma equação que relaciona - a variação da torção com as funções de campo.

No Capítulo II, com o uso de uma densidade de Lagrangeana similar à da Relatividade Geral, obtivemos uma equação de campo, semelhante à Equação de Einstein da RG e também a equação de Cartan para a torção. Fizemos então uma mudança de conexão, conservando o transporte paralelo, com a finalidade de eliminar a torção e obtivemos a Equação de Einstein da Relatividade Geral.

No Capítulo III, fazendo uso do princípio variacional, estudamos as leis de conservação da teoria.

Finalmente, no Capítulo IV, analisamos a solução das Equações de Campo, anteriormente proposta por Papapetrou. Como Moffat, fizemos uma mudança na constante do termo não simétrico com a finalidade de tornar a métrica Hermiteana, e então analisamos os três testes da Relatividade Geral, i.e., o "Red Shift", o desvio do perihélio do Planeta Mercúrio e o desvio da trajetória de um raio luminoso, no campo gravitacional do Sol.

C A P Í T U L O I

ASPECTOS GEOMÉTRICOS

I.1 TENSOR MÉTRICO ASSIMÉTRICO

A formulação geométrica, aqui utilizada, é desenvolvida em um espaço fibrado , dos referenciais lineares. Este fibrado tem como variedade-base o espaço-tempo de Minkowski M, e por Grupo G o grupo de Poincaré, $SO(3,1)\otimes T_4$. Aqui $SO(3,1)$ é o grupo de Lorentz e T_4 é o grupo das translações. O grupo G será então considerado como grupo de simetria. Inicialmente teceremos algumas considerações sobre o tensor métrico[5], definido no espaço-tempo M.

O tensor métrico **g** pode ser representado em uma base holônoma $\{dx^\alpha\}$ definida em M, mediante

$$g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu . \tag{I.1.1}$$

Se considerarmos que suas componentes $g_{\mu\nu}$ são complexas e não simétricas poderemos escrever

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]} , \tag{I.1.2}$$

onde

$$g_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) = S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \tag{I.1.3}$$

é a parte simétrica e

$$g_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) = i a_{\mu\nu} = - i a_{\nu\mu} , \tag{I.1.4}$$

é a parte anti-simétrica de $g_{\mu\nu}$

Assim resulta que

$$g_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} + i a_{\mu\nu} , \tag{I.1.5}$$

onde $s_{\mu\nu}$ e $a_{\mu\nu}$ são reais. Portanto, teremos

$$g = (s_{\mu\nu} + i a_{\mu\nu})\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} , \tag{I.1.6}$$

na base coordenada de (I.1.1)

As componentes complexas do tensor **g** satisfazem aqui a uma condição de simetria (simetria Hermiteana) que constitui a generalização natural do caso simétrico da RG:

$$g_{\mu\nu} = g^{*}_{\nu\mu} , \tag{I.1.7}$$

onde **g*** é o conjugado Hermiteano de **g**. Sob tal condição a matriz que representa o tensor **g** tem traço real.

No espaço-tempo 4 - dimensional, $(\mu,\nu = 1,2,3,4)$, a matriz representativa de **g** é

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} + i a_{12} & s_{13} + i a_{13} & s_{14} + i a_{14} \\ s_{12} - i a_{12} & s_{22} & s_{23} + i a_{23} & s_{24} + i a_{24} \\ s_{13} - i a_{13} & s_{23} - i a_{23} & s_{33} & s_{34} + i a_{34} \\ s_{14} - i a_{14} & s_{24} - i a_{24} & s_{34} - i a_{34} & s_{44} \end{bmatrix} .$$

As componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$ são definidas a partir de $g_{\mu\nu}$ pela relação

$$g^{\sigma\nu} g_{\lambda\nu} = g^{\mu\sigma} g_{\mu\lambda} = \delta^{\sigma}{}_{\lambda} , \tag{I.1.8}$$

onde a ordem dos índices na operação de contração deve ser mantida.

Em um caso geral o determinante det $(g_{\mu\nu}) \neq 1$ e a signatura de **g** é arbitrária. Admitiremos aqui que tal signatura assume os valores

$$S = \pm 2 \qquad \text{(I.1.9)}$$

para haver coerência com a Teoria da Relatividade.

<u>Observação</u>: Quando tratamos com bases não holônomas, $\{e_\mu\}$, o tensor métrico é escrito em função de tetradas $h^\alpha{}_\mu$, sendo que a lei de mudança de base é

$$e_\mu = h^\alpha{}_\mu \, \partial_\alpha \, , \qquad \text{(I.1.10)}$$

onde os h^α_μ satisfazem à condição

$$h^\alpha{}_\mu \, h^\mu{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta \, . \qquad \text{(I.1.11)}$$

Para tais bases

$$[e_\mu, e_\nu] = c^\lambda{}_{\mu\nu} \, e_\lambda \, ,$$

onde $c^\lambda{}_{\mu\nu}$ são os coeficientes de não holonomia da própria base.

Se tomarmos a base ortonormal $\{\omega^\mu\}$ de $\{dx^\alpha\}$ teremos

$$\omega^\mu = h^\mu{}_\alpha \, dx^\alpha , \qquad \text{(I.1.12)}$$

e assim

$$g = g(e_\mu, e_\nu) = g(h^\alpha{}_\mu \partial_\alpha \, , \, h^\beta{}_\mu \partial_\beta),$$

$$g = \eta_{\mu\nu} \, (h^\mu{}_\alpha \, dx^\alpha) \otimes (h^\nu{}_\beta \, dx^\beta) \, , \qquad \text{(I.1.13)}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes de **g** em uma base ortonormal. Como os elementos da base são agora $(h^\mu{}_\alpha \, dx^\alpha)$ e $(h^\nu{}_\beta \, dx^\beta)$, o tensor métrico se escreve na base ortonormal como

$$g = \eta_{\mu\nu}\, h^{\mu}_{\ \alpha}\, h^{\nu}_{\ \beta}\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \, . \tag{I.1.14}$$

Assim suas componentes, em uma base não holônoma, são dadas por

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\, h^{\mu}_{\ \alpha}\, h^{\nu}_{\ \beta} \, . \tag{I.1.15}$$

I.2 FORMA-CONEXÃO

Uma forma-conexão Γ é aqui, uma 1- forma,a valores na álgebra do grupo de Lorentz $SO(3,1)$, cujos geradores são $\mathcal{J}_a^{\ b}$.

Esta forma, quando escrita na base holônoma $\{dx^{\alpha}\}$ de M fica:[6]

$$\Gamma = \mathcal{J}_a^{\ b}\, \Gamma^{a}_{\ b,\mu}\, dx^{\mu}. \tag{I.2.1}$$

Neste caso os índices latinos, a,b,c... são usados como índices de álgebra e os índices gregos μ, ν, ρ, σ etc. são índices de espaço-tempo.

Em qualquer base a derivada covariante do tensor métrico **g**, em relação à forma-conexão Γ , é nula, isto é:

$$D_{\Gamma}\, g = 0 \, . \tag{I.2.2}$$

No caso da base não holônoma $\{\omega^{\mu}\}$ de (I.1.12) temos

$$D_{\Gamma}\, g = d g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\ \alpha\lambda}\, g_{\sigma\beta}\, \omega^{\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\beta}\, g_{\alpha\sigma}\, \omega^{\lambda} = 0 \, . \tag{I.2.3}$$

Porém

$$d g_{\alpha\beta} = e_{\lambda}\, g_{\alpha\beta}\, \omega^{\lambda},$$

logo

$$e_{\lambda}\, g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\ \alpha\lambda}\, g_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\ \lambda\beta}\, g_{\alpha\sigma} = 0,$$

ou ainda

$$e_\lambda g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda\beta} = 0.$$

Fazendo as permutações entre os índices λ, α, β obtemos:

$$e_\lambda g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda\beta} = 0 , \tag{I.2.4}$$

$$e_\alpha g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\lambda\alpha} - \Gamma_{\lambda\beta\alpha} = 0 , \tag{I.2.5}$$

$$e_\beta g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\lambda\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\lambda} = 0 , \tag{I.2.6}$$

Mediante a soma algébrica, das expressões acima [(I.2.4)+(I.2.5) − (I.2.6)], temos que

$$e_\lambda g_{\alpha\beta} + e_\alpha g_{\lambda\beta} - e_\beta g_{\alpha\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda\beta} + \Gamma_{\lambda\alpha\beta} - \Gamma_{\lambda\beta\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda\alpha} = 0. \tag{I.2.7}$$

Em uma base não holônoma o tensor de torção tem as componentes[7]

$$T^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + c^\alpha{}_{\gamma\beta} . \tag{I.2.8}$$

No caso de torção nula resulta

$$c^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma},$$

ou ainda

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} , \tag{I.2.9}$$

i.e. os coeficientes de não holonomia da base são dados pela não simetria dos $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$. Para a expressão (I.2.7) teremos então

$$e_\lambda g_{\alpha\beta} + e_\alpha g_{\lambda\beta} - e_\beta g_{\alpha\lambda} + c_{\alpha\beta\lambda} + c_{\lambda\alpha\beta} + c_{\beta\lambda\alpha} - 2\,\Gamma_{\beta\alpha\lambda} \tag{I.2.10}$$

e podemos concluir que as componentes da conexão métrica Γ , em uma base não holônoma, são dadas por:

$$\Gamma_{\beta\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(e_\lambda g_{\alpha\beta} + e_\alpha g_{\lambda\beta} - e_\beta g_{\alpha\lambda} + c_{\alpha\beta\lambda} + c_{\lambda\alpha\beta} + c_{\beta\lambda\alpha}\right). \tag{I.2.11}$$

Os coeficientes de não holonomia satisfazem às condições:

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = - C^{\alpha}{}_{\gamma\beta} , \tag{I.2.12}$$

$$g_{\alpha\beta}\, C^{\beta}{}_{\sigma\lambda} = C_{\alpha\sigma\lambda} . \tag{I.2.13}$$

Em uma base holônoma os coeficientes $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ são nulos e os elementos da base são ∂_{α} , resultando que

$$\Gamma_{\beta\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda} g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} g_{\lambda\beta} - \partial_{\beta} g_{\alpha\lambda}\right) . \tag{I.2.14}$$

E ainda, como

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\, \Gamma_{\mu\beta\gamma} , \tag{I.2.15}$$

teremos finalmente

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\partial_{\beta} g_{\gamma\mu} + \partial_{\gamma} g_{\beta\mu} - \partial_{\mu} g_{\beta\gamma}\right) . \tag{I.2.16}$$

Voltando agora às componentes $\Gamma^{a}{}_{b\mu}$ com índices de álgebra de grupo, vemos que estas são assimétricas em relação aos índices b e μ

As componentes de qualquer forma, a valores na álgebra de um grupo G, podem ser escritas totalmente com índices de espaço-tempo. Isto é feito mediante um isomorfismo local, através de tetradas $h^{\alpha}{}_{a}$, onde

$$h^{a}{}_{\alpha} = \frac{dy^{a}}{dx^{\alpha}} , \tag{I.2.17}$$

o que expressa uma transformação de coordenadas. A rigor é feita uma realização da álgebra do grupo, no espaço tangente ao espaço-tempo.

O espaço-tempo, aqui considerado, é não Riemanniano, mas mesmo assim podemos fazer a seguinte trivialização.

$$h^{a}{}_{\alpha} = \delta^{a}{}_{\alpha} , \tag{I.2.18}$$

mediante uma escolha adequada de base. Isto permite escrever as componentes da forma-conexão Γ com índices apenas de espaço-tempo

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = h^{\alpha}{}_{a}\, h^{b}{}_{\beta}\, \Gamma^{a}{}_{b\gamma}\,, \tag{I.2.19}$$

ou, usando a trivialização (I.2.18), resulta

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{a}\, \delta^{b}_{\beta}\, \Gamma^{a}{}_{b\gamma}\,.$$

Em face de (I.2.16) temos

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\partial_{\gamma} g_{\beta\mu} + \partial_{\beta} g_{\gamma\mu} - \partial_{\mu} g_{\gamma\beta}\right),$$

mas, calculando $\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ para o conjugado Hermiteano $g^{*}_{\beta\mu}$ concluimos que

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}{}^{*}\,. \tag{I.2.20}$$

Fica assim estabelecido que as componentes de Γ também possuem simetria Hermiteana para os dois últimos índices.

I.3. FORMA - CURVATURA[8,9]

A forma-curvatura F é uma 2- forma, que aqui será escrita a valores na álgebra do grupo de Lorentz. Os geradores desta álgebra satisfazem às seguintes regras de comutação:

$$[J_a{}^b, J_c{}^d] = \frac{1}{2}\left(\eta^d_a J_c{}^b - \eta_{ac} J^{bd} + \eta^b{}_c J_a{}^d - \eta^{bd} J_{ac}\right). \tag{I.3.1}$$

Esta forma é definida como sendo

$$F = D_{\Gamma}\Gamma = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma\,, \tag{I.3.2}$$

porém como F é uma 2-forma temos:

$$F = \frac{1}{2} J_a{}^b F^a{}_{b\mu\nu}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \tag{I.3.3}$$

Ainda, por (I.2.1)

$$\Gamma = J_a{}^b\, \Gamma^a{}_{b\mu}\, dx^{\mu},$$

de modo que

$$d\Gamma = J_a{}^b\, \partial_\nu \Gamma^a{}_{b\mu}\, dx^\nu \wedge dx^\mu ,$$

e anti-simetrizando

$$d\Gamma = \frac{1}{2} J_a{}^b \left(\partial_\nu \Gamma^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \Gamma^a{}_{b\nu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu . \qquad (I.3.4)$$

Ainda

$$\Gamma\wedge\Gamma = J_a{}^b J_c{}^d\, \Gamma^a{}_{b\mu} \Gamma^c{}_{d\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

e, fazendo a anti-simetrização

$$\Gamma\wedge\Gamma = \frac{1}{2}\left(J_a{}^b J_c{}^d - J_c{}^d J_a{}^b\right) \Gamma^a{}_{b\mu} \Gamma^c{}_{d\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

$$\Gamma\wedge\Gamma = \frac{1}{2}\left[J_a{}^b , J_c{}^d\right] \Gamma^a{}_{b\mu} \Gamma^c{}_{d\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

$$\Gamma\wedge\Gamma = \frac{1}{4}\Big(J_a{}^b \Gamma^d{}_{b\mu} \Gamma_d{}^a{}_\nu - J_a{}^b \Gamma^d{}_{b\mu} \Gamma^a{}_{d\nu} + J_a{}^b \Gamma^a{}_{d\mu} \Gamma^d{}_{b\nu} ,$$
$$+\, J_a{}^b \Gamma^a{}_{d\mu} \Gamma^d{}_{b\nu}\Big)\, dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

$$\Gamma\wedge\Gamma = \frac{1}{2} J_a{}^b \left(\Gamma^a{}_{c\mu} \Gamma^c{}_{b\nu} - \Gamma^a{}_{c\nu} \Gamma^c{}_{d\mu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu . \qquad (I.3.5)$$

Substituindo os resutlados obtidos nas Equações (I.3.4) e (I.3.5) na Equação (I.3.2) temos que

$$F = \frac{1}{2} J_a{}^b \left(\partial_\nu \Gamma^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \Gamma^a{}_{b\nu} + \Gamma^a{}_{c\mu} \Gamma^c{}_{b\nu} - \Gamma^a{}_{c\nu} \Gamma^c{}_{b\mu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu . \qquad (I.3.6)$$

Comparando a Equação (I.3.3) com a (I.3.6), obtemos a seguinte expressão:

$$F^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \Gamma^a{}_{b\nu} + \Gamma^a{}_{c\mu} \Gamma^c{}_{b\nu} - \Gamma^a{}_{c\nu} \Gamma^c{}_{b\mu} , \qquad (I.3.7)$$

o que expressa as componentes da forma F, em uma base holônoma.

I.4 - IDENTIDADES DE BIANCHI

Dada uma forma-conexão Γ , a valores na álgebra de um grupo G, sua forma - curvatura F tem derivada covariante nula[9]

$$dF + [\Gamma, F] = 0, \qquad \text{(I.4.1)}$$

o que expressa as identidades de Bianchi.

Empregando a equação (I.3.3) temos:

$$dF = \frac{1}{2} \mathcal{J}_a{}^b \, \partial_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} \, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

e anti-simetrizando

$$dF = \frac{1}{6} \mathcal{J}_a{}^b \left(\partial_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \partial_\mu F^a{}_{b\nu\lambda} + \partial_\nu F^a{}_{b\lambda\mu} \right) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu . \qquad \text{(I.4.2)}$$

Calculando agora o comutador

$$[\Gamma, F] = \frac{1}{2} \left[\mathcal{J}_a{}^b , \mathcal{J}_c{}^d \right] \Gamma^a{}_{b\lambda} F^c{}_{d\mu\nu} \, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

mas, devido às regras de comutação (I.3.1) dos geradores $\mathcal{J}_a{}^b$ obtemos

$$[\Gamma, F] = \frac{1}{4} \left(\eta_a{}^d \mathcal{J}^b{}_c - \eta_{ac} \mathcal{J}^{bd} + \eta^b{}_c \mathcal{J}_a{}^d - \eta^{bd} \mathcal{J}_{ac} \right) \Gamma^a{}_{b\lambda} F^c{}_{d\mu\nu} \, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

$$[\Gamma, F] = \frac{1}{4} \left(\mathcal{J}^b{}_a \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} - \mathcal{J}^b{}_a \Gamma^c{}_{b\lambda} F_c{}^a{}_{\mu\nu} + \mathcal{J}_a{}^b \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} \right.$$

$$\left. - \mathcal{J}_a{}^b \Gamma^a{}_{c\lambda} F_b{}^c{}_{\mu\nu} \right) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

$$[\Gamma, F] = \frac{1}{4} \mathcal{J}_a{}^b \left(\Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} + \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} \right) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

$$[\Gamma, F] = \frac{1}{2} \mathcal{J}_a{}^b \left(\Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} \right) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu .$$

Anti-simetrizando resulta

$$[\Gamma, F] = \frac{1}{6} \mathcal{J}_a{}^b \left(\Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} + \right.$$

$$+ \Gamma^a{}_{c\nu} F^c{}_{b\lambda\mu} - \Gamma^c{}_{b\nu} F^a{}_{c\lambda\mu} +$$

$$\left. + \Gamma^a{}_{c\mu} F^c{}_{b\nu\lambda} - \Gamma^c{}_{b\mu} F^a{}_{c\nu\lambda} \right) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu . \qquad \text{(I.4.3)}$$

Substituindo as expressões(I.4.2) e (I.4.3) em (I.4.1) ficamos com

$$\frac{1}{6}\mathcal{J}_a^{\ b}\left(\partial_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} + \right.$$

$$+ \partial_\nu F^a{}_{b\lambda\mu} + \Gamma^a{}_{c\nu} F^c{}_{b\lambda\mu} - \Gamma^c{}_{b\nu} F^a{}_{c\lambda\mu} +$$

$$\left. + \partial_\mu F^a{}_{b\nu\lambda} + \Gamma^a{}_{c\mu} F^c{}_{b\nu\lambda} - \Gamma^c{}_{b\mu} F^a{}_{c\nu\lambda}\right) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0, \quad (I.4.4)$$

ou, em componentes

$$\partial_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} +$$

$$+ \partial_\nu F^a{}_{b\lambda\mu} + \Gamma^a{}_{c\nu} F^c{}_{b\lambda\mu} - \Gamma^c{}_{b\nu} F^a{}_{c\lambda\mu} +$$

$$+ \partial_\mu F^a{}_{b\nu\lambda} + \Gamma^a{}_{c\mu} F^c{}_{b\nu\lambda} - \Gamma^c{}_{b\mu} F^a{}_{c\nu\lambda} = 0 . \quad (I.4.5)$$

Considerando um operador $\forall$ tal que:

$$\forall_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu}, \quad (I.4.6)$$

observamos uma expressão para a derivada covariante de $F^a{}_{b\mu\nu}$, em relação aos índices de álgebra do grupo G[9].

Assim a Equação (I.4.5) fica

$$\forall_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \forall_\nu F^a{}_{b\lambda\mu} + \forall_\mu F^a{}_{b\nu\lambda} = 0 . \quad (I.4.7)$$

Porém, o operador de derivada covariante total ∇ é

$$\nabla_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu} -$$

$$- \Gamma^c{}_{\mu\lambda} F^a{}_{bc\nu} - \Gamma^c{}_{\nu\lambda} F^a{}_{b\mu c} . \quad (I.4.8)$$

No entanto, em (I.4.8) os termos

$$\Gamma^c{}_{\mu\lambda} F^a{}_{bc\nu}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$$

e

$$\Gamma^c{}_{\nu\lambda} F^a{}_{b\mu c}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$$

são nulos, pois não existem simetrias definidas para os produtos acima. Em Γ temos índices de mesma natureza $(\mu\lambda)$ ou $(\nu\lambda)$, e no caso geral, que estamos considerando, a forma-conexão é assimétrica, portanto podemos concluir que:

$$\forall_\lambda = \nabla_\lambda . \quad 9)$$

Assim a Equação (I.4.7) fica

$$\nabla_\lambda F^a{}_{b\mu\nu} + \nabla_\nu F^a{}_{b\lambda\mu} + \nabla_\mu F^a{}_{b\nu\lambda} = 0 \, , \qquad \text{(I.4.10)}$$

o que estabelece as identidades de Bianchi para as componentes da forma-curvatura **F**.

I.5 - TENSOR DE CURVATURA CONTRAÍDO

A expressão para as componentes do Tensor de Curvatura, segundo a Equação (I.3.7) é

$$F^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \Gamma^a{}_{b\nu} + \Gamma^a{}_{c\mu} \Gamma^c{}_{b\nu} - \Gamma^a{}_{c\nu} \Gamma^c{}_{b\mu} \, .$$

Para obtermos a expressão para as componentes do Tensor de Curvatura Contraído, teremos antes que escrever as componentes da Forma-Curvatura totalmente com índices de espaço-tempo (índices gregos), mediante um isomorfismo feito através das tetradas $h^\alpha{}_a$. Usando a trivialização definida em (I.2.18) ficamos com

$$\delta^\alpha_a \, \delta^b_\beta \, F^a{}_{b\mu\nu} = \delta^\alpha_a \, \delta^b_\beta \left(\partial_\nu \Gamma^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \Gamma^a{}_{b\nu} + \Gamma^a{}_{c\mu} \Gamma^c{}_{b\nu} - \Gamma^a{}_{c\nu} \Gamma^c{}_{b\mu}\right),$$

ou

$$F^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha{}_{c\mu} \Gamma^c{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{c\nu} \Gamma^c{}_{\beta\mu} \, . \qquad \text{(I.5.1)}$$

Como os índices de álgebra do grupo de Lorentz $SO(3,1)$ e os índices de espaço-tempo possuem a mesma variação, o índice mudo c será trocado por σ , i.e.

$$F^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \, . \qquad \text{(I.5.2)}$$

Fazendo agora a contração $\alpha = \nu$ obtemos

$$F_{\beta\mu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \, , \qquad \text{(I.5.3)}$$

o que nos dá as componentes do tensor de curvatura contraído. No caso de métrica simétrica estas se reduzem às componentes do tensor de Ricci.

I.6 - EQUAÇÃO DE YANG-MILLS

No caso sem fontes, as equações de Yang-Mills vêm das identidades de Bianchi, porém escritas para o dual de F[13]:

$$d{*}F + [\Gamma, {*}F] = 0 . \qquad (I.6.1)$$

Aplicando o operador ${*}^{-1}$ em (I.6.1) encontramos.

$${*}^{-1} d{*}F + {*}^{-1}[\Gamma, {*}F] = 0,$$

ou

$$\delta F + {*}^{-1}[\Gamma, {*}F] = 0 , \qquad (I.6.2)$$

pois, para uma 2-forma, considerando a signatura da métrica como $s = \pm 2$, temos que

$$\delta F = {*}^{-1} d{*}F , \qquad (I.6.3)$$

Porém

$${*}F = \frac{\sqrt{-g}}{4} \, f_a{}^b \, F^a{}_{b\mu\nu} \, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\sigma \wedge dx^\rho \qquad (I.6.4)$$

e

$$d{*}F = \frac{1}{4} \, f_a{}^b \, \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \, F^a{}_{b\mu\nu}\right) \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho , \qquad (I.6.5)$$

logo, como $d{*}F$ é uma 3-forma e como convencionamos $s = \pm 2$, resulta que (vide Apêndice A)

$${*}^{-1} d{*}F = \frac{\sqrt{-g}}{4} \, f_a{}^b \, \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \, F^a{}_b{}^{\mu\nu}\right) \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \, \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\xi} \, dx_\xi ,$$

$$\delta F = \frac{\sqrt{-g}}{4} \, f_a{}^b \, \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \, F^a{}_b{}^{\mu\nu}\right) \left[-2\left(\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\xi - \delta_\mu^\xi \delta_\nu^\lambda\right)\right] dx_\xi ,$$

e finalmente

$$\delta F = \frac{\sqrt{-g}}{2} \, f_a{}^b \left[\partial_\nu \left(\sqrt{-g} \, F^a{}_b{}^{\xi\nu}\right) - \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \, F^a{}_b{}^{\mu\xi}\right)\right] dx_\xi . \qquad (I.6.6)$$

Para calcular o comutador $[\Gamma, {*}F]$ devemos empregar

$$\Gamma = \mathcal{J}_a{}^b \, \Gamma^a{}_{b\lambda} \, dx^\lambda$$

e

$$*F = \frac{\sqrt{-g}}{4} \mathcal{J}_c{}^d \, F^c{}_{d\mu\nu} \, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\sigma \wedge dx^\rho$$

Neste caso

$$[\Gamma, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{4} [\mathcal{J}_a{}^b, \mathcal{J}_c{}^d] \, \Gamma^a{}_{b\lambda} \, F^c{}_{d\mu\nu} \, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho$$

mas, fazendo uso da expressão (I.3.1), ficamos com

$$[\Gamma, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{8} (\eta_a{}^d \mathcal{J}^b{}_c - \eta_{ac} \mathcal{J}^{bd} + \eta^b{}_c \mathcal{J}_a{}^d$$
$$- \eta^{bd} \mathcal{J}_{ac}) \, \Gamma^a{}_{b\lambda} F^c{}_{d\mu\nu} \, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

$$[\Gamma, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{8} (\mathcal{J}^b{}_a \Gamma^d{}_{b\lambda} F^a{}_{d\mu\nu} - \mathcal{J}^b{}_a \Gamma^c{}_{b\lambda} F_{c\cdot}{}^a{}_{\mu\nu}$$
$$+ \mathcal{J}_a{}^b \Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} - \mathcal{J}_a{}^b \Gamma^a{}_{d\lambda} F_{b\cdot}{}^d{}_{\mu\nu}) \, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

$$[\Gamma, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{4} \mathcal{J}_a{}^b (\Gamma^a{}_{c\lambda} F^c{}_{b\mu\nu} -$$
$$- \Gamma^c{}_{b\lambda} F^a{}_{c\mu\nu}) \, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho . \qquad \text{(I.6.7)}$$

Porém, vide Apêndice A,

$$*^{-1} [\Gamma, *F] = * [\Gamma, *F]$$

então

$$*^{-1} [\Gamma, *F] = \sqrt{-g} \, \frac{\sqrt{-g}}{4} \mathcal{J}_a{}^b (\Gamma^a{}_{c\lambda} F^{c\cdot}_{\ b}{}^{\mu\nu} -$$
$$- \Gamma^c{}_{b\lambda} F^{a\cdot}_{\ c}{}^{\mu\nu}) \, \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \, \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\xi} \, dx_\xi ,$$

$$*^{-1} [\Gamma, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{4} \mathcal{J}_a{}^b \sqrt{-g} \, (\Gamma^a{}_{c\lambda} F^{c\cdot}_{\ b}{}^{\mu\nu} -$$
$$- \Gamma^c{}_{b\lambda} F^{a\cdot}_{\ c}{}^{\mu\nu}) [-2 (\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\xi - \delta_\mu^\xi \delta_\nu^\lambda)] \, dx_\xi ,$$

$$*^{-1} [\Gamma, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{2} \mathcal{J}_a{}^b (\Gamma^a{}_{c\nu} \sqrt{-g} \, F^{c\cdot}_{\ b}{}^{\xi\nu} - \Gamma^c{}_{b\nu} \sqrt{-g} \, F^{a\cdot}_{\ c}{}^{\xi\nu}$$
$$- \Gamma^a{}_{c\mu} \sqrt{-g} \, F^{c\cdot}_{\ b}{}^{\mu\xi} + \Gamma^c{}_{b\mu} \sqrt{-g} \, F^{a\cdot}_{\ c}{}^{\mu\xi}) \, dx_\xi \qquad \text{(I.6.8)}$$

Substituindo (I.6.6) e (I.6.8) em (I.6.2) obtemos:

$$\frac{\sqrt{-g}}{2} \mathcal{J}_a{}^b \{ [\partial_\nu (\sqrt{-g} \, F^{a\cdot}_{\ b}{}^{\xi\nu}) + \Gamma^a{}_{c\nu} (\sqrt{-g} \, F^{c\cdot}_{\ b}{}^{\xi\nu} - \Gamma^c{}_{b\nu} (\sqrt{-g} \, F^{a\cdot}_{\ c}{}^{\xi\nu})]$$
$$- [\partial_\mu (\sqrt{-g} \, F^{a\cdot}_{\ b}{}^{\mu\xi}) + \Gamma^a{}_{c\mu} (\sqrt{-g} \, F^{c\cdot}_{\ b}{}^{\mu\xi}) - \Gamma^c{}_{b\mu} (\sqrt{-g} \, F^{a\cdot}_{\ c}{}^{\mu\xi}) \} dx_\xi = 0 .$$

Fazendo $\sqrt{-g}\, F^{a}{}_{b\mu\nu} = \mathcal{F}^{a}{}_{b\mu\nu}$, o que representa uma densidade tensorial, temos que

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}\, f_a{}^{b}\Big\{(\partial_\nu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\xi\nu} + \Gamma^{a}{}_{c\nu}\mathcal{F}^{c\cdot}{}_{b}{}^{\xi\nu} - \Gamma^{c}{}_{b\nu}\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\xi\nu}) -$$
$$-(\partial_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} + \Gamma^{a}{}_{c\mu}\mathcal{F}^{c\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} - \Gamma^{c}{}_{b\mu}\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\mu\xi})\Big\} = 0 \,.$$

Trocando ν por μ encontramos:

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}\, f_a{}^{b}\Big\{(\partial_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} + \Gamma^{a}{}_{c\mu}\mathcal{F}^{c\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} - \Gamma^{c}{}_{b\mu}\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\mu\xi}) +$$
$$+ (\partial_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} + \Gamma^{a}{}_{c\mu}\mathcal{F}^{c\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} - \Gamma^{c}{}_{b\mu}\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\mu\xi})\Big\} dx_\xi = 0,$$

ou

$$0 = \sqrt{-g}\, f_a{}^{b}(\partial_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} + \Gamma^{a}{}_{c\mu}\mathcal{F}^{c\cdot}{}_{b}{}^{\mu\xi} - \Gamma^{c}{}_{b\mu}\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\mu\xi})dx_\xi, \tag{I.6.9}$$

ou ainda, como já foi visto na seção I.4,

$$\sqrt{-g}\, f_a{}^{b}\, \nabla_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\mu}{}_{\cdot\xi}\, dx^\xi = 0 \,,$$

logo

$$\nabla_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b\cdot}{}^{\mu}{}_{\cdot\xi} = 0 \,. \tag{I.6.10}$$

Mas, pela (I.4.9) temos

$$\bar{\nabla}_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_{b}{}^{\mu}{}_{\cdot\xi} = 0 \,, \tag{I.6.11}$$

ou ainda

$$\nabla^{\mu} \mathcal{F}^{a}{}_{b\mu\xi} = 0 \,. \tag{I.6.12}$$

Passando os índices a e b para índices de espaço-tempo, mediante tetradas, em uma base onde $h^{a}{}_{\alpha} = \delta^{a}_{\alpha}$, resulta para a (I.6.12)

$$\delta^{\alpha}_{a}\, \delta_{\beta}^{b}\, \mathcal{F}^{a}{}_{b\mu\xi;}{}^{\mu} = 0 \,,$$

ou

$$\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = 0 \,. \tag{I.6.13}$$

Se Γ for uma conexão de Levi-Civita, a forma $\mathcal{F}$ se reduzirá ao tensor de Riemann R. Utilizando a convenção

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\, R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}, \tag{I.6.14}$$

teremos para a (I.6.13)

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = 0 \,. \tag{I.6.15}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas[10] encontramos

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi,}{}^{\mu} = g^{\gamma\alpha} g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\gamma\beta\mu\xi;\nu} = 0,$$

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = g^{\gamma\alpha} g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\xi\gamma\beta;\nu} = 0,$$

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = g^{\gamma\alpha} \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\gamma\beta;\nu} = 0 . \qquad \text{(I.6.16)}$$

Mas, pelas identidades de Bianchi (I.4.10), temos

$$\mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\gamma\beta;\nu} + \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\nu\gamma;\beta} + \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\beta\nu;\gamma} = 0 ,$$

que resulta

$$\mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\gamma\beta;\nu} = -\mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\nu\gamma;\beta} - \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\beta\nu,\gamma}.$$

Assim a (I.6.16) torna-se

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = g^{\gamma\alpha}(-\mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\nu\gamma;\beta} - \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\beta\nu;\gamma}) = 0 ,$$

ou

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = g^{\gamma\alpha}(\mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\gamma\nu;\beta} - \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\beta\nu,\gamma}) = 0,$$

isto é

$$\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\xi;}{}^{\mu} = g^{\gamma\alpha}(\mathcal{R}_{\xi\gamma;\beta} - \mathcal{R}^{\nu}{}_{\xi\beta;\gamma}) = 0, \qquad \text{(I.6.17)}$$

e podemos concluir que

$$\mathcal{R}_{\xi\gamma;\beta} - \mathcal{R}_{\xi\beta;\gamma} = 0 . \qquad \text{(I.6.18)}$$

Estas são as equações gravitacionais de Yang[11]. Aqui elas aparecem como decorrência do caso particular de supormos uma conexão Riemanniana.

Uma solução particular para as Equações de Yang é

$$\mathcal{R}_{\xi\gamma} = 0, \qquad \text{(I.6.19)}$$

ou ainda

$$\sqrt{-g}\; R_{\xi\gamma} = 0 ,$$

isto é

$$R_{\xi\gamma} = 0 , \qquad \text{(I.6.20)}$$

que são as Equações Gravitacionais de Einstein, no caso sem fontes. A (I.6.13) permite obter, de maneira análoga, as equações $F_{\alpha\beta;\gamma} - F_{\alpha\gamma;\beta} = 0$, (I.6.21)

que generalizam as equações de Yang, pois as componentes $F_{\alpha\beta}$ não são simétricas.

I.7. FORMA - TORÇÃO

A torção da conexão Γ é definida como sendo a derivada covariante da forma "solder"[12], em relação à própria conexão Γ :

$$T = D_\Gamma S. \tag{I.7.1}$$

A forma torção é uma 2- forma, aqui considerada a valores de álgebra do grupo das translações T_4 . A forma-solder é uma 1- forma, que pode ser expressa na base $\{dx^\mu\}$, a valores na mesma álgebra do grupo T_4 , mediante

$$S = I_a S^a{}_\mu \, dx^\mu . \tag{I.7.2}$$

Consideraremos aqui o grupo de Poincaré $SO(3,1) \otimes T_4$, onde o grupo de Lorentz é usado para a forma conexão Γ e o grupo das Translações para a forma "solder" S. Os geradores da álgebra do grupo de Poincaré satisfazem às regras de comutação

$$[f_a{}^b, f_c{}^d] = \frac{1}{2}(\eta_a{}^d f^b{}_c - \eta_{ac} f^{bd} + \eta^b{}_c f_a{}^d - \eta^{bd} f_{ac}), \tag{I.7.3}$$

$$[I_a, I_b] = 0 \; ; (a, b = 1, 2, 3, 4), \tag{I.7.4}$$

$$[f_a{}^b, I_c] = \frac{1}{2}(\eta^b{}_c I_a - \eta_{ac} I^b). \tag{I.7.5}$$

Como T é uma 2-forma, a valores na álgebra do Grupo T_4 , podemos escrevê-la como

$$T = \frac{1}{2} I_a T^a{}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu , \tag{I.7.6}$$

mas, pela definição (I.7.1), temos

$$T = dS + \Gamma\wedge S + S\wedge\Gamma + S\wedge S. \qquad (I.7.7)$$

Usando a representação dada em (I.7.2) podemos escrever

$$dS = I_a\, \partial_\nu\, S^a{}_\mu\; dx^\nu\wedge dx^\mu,$$

e anti-simetrizando encontramos

$$dS = \frac{1}{2} I_a \left(\partial_\mu S^a{}_\nu - \partial_\nu S^a{}_\mu\right) dx^\mu\wedge dx^\nu. \qquad (I.7.8)$$

Ainda, em face de (I.2.1),

$$\Gamma\wedge S = \left(J_a{}^b\, \Gamma^a{}_{b\mu}\, dx^\mu\right)\wedge\left(I_c\, S^c{}_\nu\, dx^\nu\right),$$

ou

$$\Gamma\wedge S = J_a{}^b\, I_c\, \Gamma^a{}_{b\mu}\, S^c{}_\nu\; dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

e anti-simetrizando a expressão acima temos

$$\Gamma\wedge S = \frac{1}{2}\left(J_a{}^b I_c - I_c J_a{}^b\right)\Gamma^a{}_{b\mu}\, S^c{}_\nu\; dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$\Gamma\wedge S = \frac{1}{2}\left[J_a{}^b, I_c\right]\Gamma^a{}_{b\mu}\, S^c{}_\nu\; dx^\mu\wedge dx^\nu.$$

Porém, em face de (I.7.5),

$$\Gamma\wedge S = \frac{1}{4}\left(\eta^b{}_c\, I_a - \eta_{ac}\, I^b\right)\Gamma^a{}_{b\mu}\, S^c{}_\nu\; dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$\Gamma\wedge S = \frac{1}{4}\left(I_a\, \Gamma^a{}_{c\mu}\, S^c{}_\nu - I_a\, \Gamma_c{}^a{}_\mu\, S^c{}_\nu\right) dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$\Gamma\wedge S = \frac{1}{2}\, I_a\, \Gamma^a{}_{c\mu}\, S^c{}_\nu\; dx^\mu\wedge dx^\nu. \qquad (I.7.9)$$

Ainda

$$S\wedge\Gamma = \left(I_c\, S^c{}_\mu\, dx^\mu\right)\wedge\left(J_a{}^b\, \Gamma^a{}_{b\nu}\, dx^\nu\right),$$

$$S\wedge\Gamma = I_c\, J_a{}^b\, \Gamma^a{}_{b\nu}\, S^c{}_\mu\; dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

e anti-simetrizando

$$S\wedge\Gamma = \frac{1}{2}\left(I_c J_a{}^b - J_a{}^b I_c\right)\Gamma^a{}_{b\nu}\, S^c{}_\mu\; dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$S\wedge\Gamma = \frac{1}{4}\left(\eta_{ac}\, I^b - \eta^b{}_c\, I_a\right)\Gamma^a{}_{b\nu}\, S^c{}_\mu\; dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$S\wedge\Gamma = \frac{1}{4}\left(I_a\, \Gamma_c{}^a{}_\nu\, S^c{}_\mu - I_a\, \Gamma^a{}_{c\nu}\, S^c{}_\mu\right) dx^\mu\wedge dx^\nu,$$

$$S\wedge\Gamma = -\frac{1}{2}\, I_a\, \Gamma^a{}_{c\nu}\, S^c{}_\mu\; dx^\mu\wedge dx^\nu. \qquad (I.7.10)$$

Quanto ao termo $S\wedge S$ temos que

$$S\wedge S = \left(I_a\, S^a{}_\mu\, dx^\mu\right)\wedge\left(I_b\, S^b{}_\nu\, dx^\nu\right),$$

ou

$$S \wedge S = I_a I_b S^a{}_\mu S^b{}_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

o qual, mediante a anti-simetrização

$$S \wedge S = \frac{1}{2} [I_a , I_b] S^a{}_\mu S^b{}_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

resulta, em face de (I.7.4),

$$S \wedge S = 0 . \qquad (I.7.11)$$

Levando as relações obtidas (I.7.8), (I.7.9), (I.7.10) e (I.7.11) em (I.7.7) ficamos com

$$T = \frac{1}{2} I_a (\partial_\mu S^a{}_\nu - \partial_\nu S^a{}_\mu + \Gamma^a{}_{c\mu} S^c{}_\nu - \Gamma^a{}_{c\nu} S^c{}_\mu) \, dx^\mu \wedge dx^\nu . \qquad (I.7.12)$$

Então, comparando (I.7.12) com (I.7.6), em componentes, teremos

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu S^a{}_\nu - \partial_\nu S^a{}_\mu + \Gamma^a{}_{c\mu} S^c{}_\nu - \Gamma^a{}_{c\nu} S^c{}_\mu . \qquad (I.7.13)$$

Se escolhermos uma base onde as componentes de S são

$$S^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu , \qquad (I.7.14)$$

teremos

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta^a{}_\nu - \partial_\nu \delta^a{}_\mu + \Gamma^a{}_{c\mu} \delta^c{}_\nu - \Gamma^a{}_{c\nu} \delta^c{}_\mu ,$$

ou,

$$T^a{}_{\mu\nu} = \Gamma^a{}_{\nu\mu} - \Gamma^a{}_{\mu\nu} , \qquad (I.7.15)$$

o que é válido para bases holônomas.

Transformando os índices da álgebra de grupo para índices de espaço-tempo, por meio de tetradas, temos

$$h^\alpha{}_a T^a{}_{\mu\nu} = h^\alpha{}_a \Gamma^a{}_{\nu\mu} - h^\alpha{}_a \Gamma^a{}_{\mu\nu} ,$$

ou

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} , \qquad (I.7.16)$$

que são as componentes da torção no espaço-tempo, em bases holônomas.

I. 8 EQUAÇÃO DE YANG - MILLS PARA O GRUPO DE POINCARÉ[13]

Seja V uma conexão linear, definida no fibrado P, dada pela soma de duas conexões lineares:

$$V = \Gamma + S \, . \tag{I.8.1}$$

Aqui V é a valores na álgebra do grupo de Poincaré $SO(3,1) \otimes T_4$, sendo que a forma-conexão Γ é a valores na álgebra do grupo de Lorentz $SO(3,1)$ e a forma "solder" S é a valores na álgebra do grupo das Translações.

A curvatura C, da conexão V, é dada por

$$C = D_V V = dV + V \wedge V \, , \tag{I.8.2}$$

$$C = (d\Gamma + dS) + (\Gamma + S) \wedge (\Gamma + S) \, ,$$

$$C = d\Gamma + dS + \Gamma \wedge \Gamma + \Gamma \wedge S + S \wedge \Gamma + S \wedge S \, ,$$

$$C = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) + (dS + \Gamma \wedge S + S \wedge \Gamma + S \wedge S) \, , \tag{I.8.3}$$

o que resulta, em face das Equações (I.3.2) e (I.7.7),

$$C = F + T \, , \tag{I.8.4}$$

expressando a "curvatura total". Em teorias de Gauge Γ e S são potenciais, F e T são campos e C é um campo total.

As Equações de Yang-Mills para C ficam

$$\delta C + *^{-1} [V, *C] = 0 \, , \tag{I.8.5}$$

ou seja

$$\delta(F+T) + *^{-1}[\Gamma + S\,,\ *(F+T)] = 0\,,$$

$$\delta F + \delta T + *^{-1}[\Gamma + S\,,\ *F + *T] = 0\,,$$

$$\delta F + \delta T + *^{-1}[\Gamma, *F] + *^{-1}[\Gamma, *T] + *^{-1}[S, *F] + *^{-1}[S, *T]. \qquad (I.8.6)$$

Desdobrando esta expressão, segundo a álgebra de cada grupo, ficamos com duas equações:

$$\delta F + *^{-1}[\Gamma, *F] = 0\,, \qquad (I.8.7)$$

para o setor Lorentz e

$$\delta T + *^{-1}[\Gamma, *T] + *^{-1}[S, *F] + *^{-1}[S, *T] = 0\,, \qquad (I.8.8)$$

para o setor das Translações

A Equação (I.8.7) foi escrita em componentes na seção (I.6) do presente capítulo.

Para escrever a (I.8.8) em componentes devemos lembrar que

$$\Gamma = f_a{}^b\, \Gamma^a{}_{b\mu}\, dx^\mu\,,$$

$$F = \frac{1}{2} f_a{}^b\, F^a{}_{b\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu\,,$$

$$S = I_a\, S^a{}_\mu\, dx^\mu\,,$$

e

$$T = \frac{1}{2} I_a\, T^a{}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Como T é uma 2- forma

$$\delta T = *^{-1} d * T = * d * T\,,$$

e assim

$$* T = \frac{\sqrt{-g}}{4} I_a\, T^a{}_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\sigma \wedge dx^\rho\,,$$

$$d * T = \frac{1}{4} I_a\, \partial_\lambda(\sqrt{-g}\, T^a{}_{\mu\nu})\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho\,,$$

$$* d * T = \delta T = \frac{\sqrt{-g}}{4} I_a\, \partial_\lambda(\sqrt{-g}\, T^a{}_{\mu\nu})\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\varrho}\, dx_\varrho\,,$$

$$\delta T = \frac{\sqrt{-g}}{4} I_a\, \partial_\lambda(\sqrt{-g}\, T^a{}_{\mu\nu}) [-2\, (\delta_\mu^\lambda\, \delta_\nu^\varrho - \delta_\nu^\lambda\, \delta_\mu^\varrho)]\, dx_\varrho\,,$$

$$\delta T = \frac{\sqrt{-g}}{2} I_a [\partial_\mu (\sqrt{-g}\, T^{a\varrho\mu}) + (\sqrt{-g}\, T^{a\varrho\mu})]\, dx_\varrho ,$$

$$\delta T = \sqrt{-g}\, I_a\, \partial_\mu (\sqrt{-g}\, T^{a\varrho\mu})\, dx_\varrho \qquad \text{(I.8.9)}$$

Ainda

$$[\Gamma, *T] = [f_a{}^b \Gamma^a{}_{b\lambda}\, dx^\lambda ,\ \frac{\sqrt{-g}}{4} I_c T^c{}_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\sigma \wedge dx^\rho],$$

$$[\Gamma, *T] = \frac{\sqrt{-g}}{4} [f_a{}^b , I_c]\, \Gamma^a{}_{b\lambda} T^c{}_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho .$$

Pela Equação (I.7.5) temos

$$[\Gamma, *T] = \frac{\sqrt{-g}}{8} (\eta^b{}_c I_a - \eta_{ac} I^b)\, \Gamma^a{}_{b\lambda} T^c{}_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

$$[\Gamma, *T] = \frac{\sqrt{-g}}{4} I_a \Gamma^a{}_{c\lambda} T^c{}_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

mas, conforme o Apêndice A,

$$*^{-1}[\Gamma, *T] = *\,[\Gamma, *T]$$

então

$$*^{-1}[\Gamma, *T] = \frac{\sqrt{-g}}{4} \sqrt{-g}\, I_a \Gamma^a{}_{c\lambda} T^{a\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\, \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\varrho}\, dx_\varrho ,$$

$$*^{-1}[\Gamma, *T] = \frac{\sqrt{-g}}{2} I_a \sqrt{-g}\, (\Gamma^a{}_{c\nu} T^{c\varrho\nu} - \Gamma^a{}_{c\mu} T^{c\mu\varrho})\, dx_\varrho ,$$

$$*^{-1}[\Gamma, *T] = \sqrt{-g}\, I_a \Gamma^a{}_{c\mu} (\sqrt{-g}\, T^{c\varrho\mu})\, dx_\varrho . \qquad \text{(I.8.10)}$$

Cálculo do termo $*^{-1}[S, *F]$:

$$*F = \frac{\sqrt{-g}}{4} f_a{}^b F^a{}_{b\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

$$[S, *F] = [I_c S^c{}_\lambda\, dx^\lambda ,\ \frac{\sqrt{-g}}{4} f_a{}^b F^a{}_{b\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\sigma \wedge dx^\rho],$$

$$[S, *F] = \frac{\sqrt{-g}}{8} (\eta_{ac} I^b - \eta^b{}_c I_a)\, S^c{}_\lambda F^a{}_{b\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

$$[S, *F] = -\frac{\sqrt{-g}}{8} I_a S^c{}_\lambda F^a{}_{c\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}\, dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho ,$$

porém, o comutador $[S, *F]$ é uma 3- forma, logo (ver Apêndice A)

$$*^{-1}[S, *F] = *\,[S, *F],$$

e assim

$$*^{-1}[S, *F] = -\frac{\sqrt{-g}}{4} I_a \sqrt{-g}\, S^c{}_\lambda F^a{}_c{}^{\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\, \varepsilon^{\lambda\sigma\rho\varrho}\, dx_\varrho ,$$

$$*^{-1}[S, *F] = \sqrt{-g}\, I_a S^c{}_\mu (\sqrt{-g}\, F^a{}_c{}^{\mu\varrho})\, dx_\varrho . \qquad \text{(I.8.11)}$$

Cálculo do termo $*^{-1}[S, *T]$:

$$[S, *T] = [I_a S^a{}_\lambda dx^\lambda, \frac{\sqrt{-g}}{4} I_b T^b{}_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} dx^\sigma \wedge dx^\rho],$$

$$[S, *T] = \frac{\sqrt{-g}}{4} [I_a, I_b] S^a{}_\lambda T^b{}_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} dx^\lambda \wedge dx^\sigma \wedge dx^\rho,$$

mas, por (I.7.4), temos que

$$[S, *T] = 0,$$

e portanto

$$*^{-1}[S, *T] = 0. \qquad (I.8.12)$$

Levando os resultados obtidos (I.8.9), (I.8.10), (I.8.11) e (I.8.12) para a (I.8.8) encontramos

$$\sqrt{-g}\, I_a [\partial_\mu (\sqrt{-g}\, T^{a\rho\mu}) + \Gamma^a{}_{c\mu} (\sqrt{-g}\, T^{a\rho\mu}) + S^c{}_\mu (\sqrt{-g}\, F^a{}_c{}^{\mu\rho})] dx_\rho = 0, \qquad (I.8.13)$$

ou, em componentes,

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\, T^{a\rho\mu}) + \Gamma^a{}_{c\mu} (\sqrt{-g}\, T^{c\rho\mu}) + S^c{}_\mu (\sqrt{-g}\, F^a{}_c{}^{\mu\rho}) = 0. \qquad (I.8.14)$$

Estabelecendo as convenções

$$\sqrt{-g}\, T^{a\mu\rho} = \mathcal{J}^{a\mu\rho}, \qquad (I.8.15)$$

e

$$\sqrt{-g}\, F^{a\cdot}{}_c{}^{\mu\rho} = \mathcal{F}^{a\cdot}{}_c{}^{\mu\rho}, \qquad (I.8.16)$$

ficamos com

$$\partial_\mu \mathcal{J}^{a\rho\mu} + \Gamma^a{}_{c\mu} \mathcal{J}^{a\rho\mu} + S^c{}_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_c{}^{\mu\rho} = 0, \qquad (I.8.17)$$

ou

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu \mathcal{J}^{a\rho\mu} = S^c{}_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_c{}^{\rho\mu}.$$

Como já observamos na Equação (I.4.9)

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu = \nabla_\mu,$$

resulta, portanto,

$$\nabla_\mu \mathcal{J}^{a\rho\mu} = S^c{}_\mu \mathcal{F}^{a\cdot}{}_c{}^{\rho\mu}. \qquad (I.8.18)$$

Quando a torção $\mathcal{J}^{a\rho\mu}$ é conservada, i.e.

$$\nabla_\mu \mathcal{J}^{a\rho\mu} = 0, \qquad (I.8.19)$$

temos que

$$S^{c}{}_{\mu}\,\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\varrho\mu}=0\,. \tag{I.8.20}$$

Considerando agora uma base onde

$$S^{c}{}_{\mu}=\delta^{c}{}_{\mu}\,, \tag{I.8.21}$$

ficamos com

$$\delta_{\mu}{}^{c}\,\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{c}{}^{\varrho\mu}=0\,, \tag{I.8.22}$$

ou

$$\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{\mu}{}^{\varrho\mu}=0\,. \tag{I.8.23}$$

Fazendo uso de tetradas, para passar o índice de álgebra <u>a</u> para índice de espaço-tempo, obtemos

$$h^{\alpha}{}_{a}\,\mathcal{F}^{a\cdot}{}_{\mu}{}^{\varrho\mu}=0\,,$$

ou

$$\sqrt{-g}\;F^{\alpha\cdot}{}_{\mu}{}^{\varrho\mu}=0\,,$$

$$F^{\alpha\cdot}{}_{\mu}{}^{\varrho\mu}=0\,,$$

$$F^{\mu\alpha\varrho}{}_{\mu}=0\,, \tag{I.8.26}$$

o que resulta

$$F^{\alpha\varrho}=0\,.$$

Quando a conexão Γ é uma conexão de Levi-Civita, F se reduz ao tensor de Riemann, e assim

$$R^{\alpha\varrho}=0\,,$$

o que estabelece a "Equação Gravitacional de Einstein", no caso sem fontes.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

II.1 CASO GERAL

A forma-curvatura F, da conexão Γ , já considerada no capítulo anterior, é uma 2- forma a valores na álgebra do grupo G de simetria e é expressa por

$$F = \frac{1}{2} \mathcal{J}_a{}^b \, F^a{}_{b\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu, \qquad \text{(II.1.1)}$$

em uma base holônoma $\{dx^\mu\}$, do espaço-tempo.
Em (II.1.1) $\mathcal{J}_a{}^b$ são os geradores da álgebra de G. As componentes $F^a{}_{b\mu\nu}$ podem ser escritas totalmente com índices de espaço-tempo, desde que consideremos um isomorfismo realizado pelas tetradas $h^a{}_\alpha(x)$:

$$F^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = h^\alpha{}_a \, h^b{}_\beta \, F^a{}_{b\mu\nu}, \qquad \text{(II.1.2)}$$

o que equivale a projetar F no espaço-tempo. O procedimento acima é ainda válido quando consideramos bases não holônomas $\{\omega^\mu\}$.

A partir de (II.1.2) podemos obter as componentes $F_{\mu\nu}(\Gamma)$, do "tensor de curvatura contraído",

$$F_{\beta\mu} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu,\gamma} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\gamma,\mu} + \Gamma^\gamma{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\gamma{}_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}, \qquad \text{(II.1.3)}$$

sendo a contração feita para o primeiro e quarto índices de

$F^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, i.e., $\alpha = \nu$

Construíremos uma Langrangeana de maneira similar à da Relatividade Geral, porém, lembrando que agora a métrica do espaço-tempo não é simétrica e $F^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ não são componentes do tensor de Riemann, pois Γ não é uma conexão de Levi-Civita. Assim $F_{\mu\nu}$ não são componentes do tensor de Ricci.

O formalismo aqui descrito englobará a torção, como veremos adiante.

Tomaremos como densidade de Lagrangeana a forma

$$\mathcal{L} = \tilde{g}^{\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}(\Gamma) + k\,E_{\mu\nu}\right], \qquad \text{(II.1.4)}$$

onde k é a constante de Einstein da RG e $E_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor energia-momentum, Hermiteanas, a sua parte real seria o tensor energia-momentum usual em RG e a parte imaginária deverá ter uma posterior interpretação. Em (II.1.4) $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \qquad \text{(II.1.5)}$$

sendo g o determinante da matriz representativa do tensor métrico.

Com (II.1.4) podemos construir a ação

$$A = \int \tilde{g}^{\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}(\Gamma) + k\,E_{\mu\nu}\right] d^4x, \qquad \text{(II.1.6)}$$

cuja condição extremal $\delta A = 0$ resulta em

$$\int \delta\mathcal{L}\, d^4x = \int \left[F_{\mu\nu}(\Gamma) + k\,E_{\mu\nu}\right]\delta\tilde{g}^{\mu\nu} d^4x + \int \tilde{g}^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu}(\Gamma)\, d^4x + k\int \tilde{g}^{\mu\nu}\,\delta E_{\mu\nu}\, d^4x = 0 \qquad \text{(II.1.7)}$$

Porém,[14]

$$\delta\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\left(1 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}, \qquad \text{(II.1.8)}$$

e

$$\delta F_{\mu\nu}(\Gamma) = \left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\right)_{;\alpha} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}\right)_{;\nu} + \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\right)\delta\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}. \qquad \text{(II.1.9)}$$

Com estes resultados a (II.1.7) fica

$$\int \left[F_{\mu\nu}(\Gamma) + k\,E_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\left(1 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^4x +$$

$$+ \int \tilde{g}^{\mu\nu}\left[\left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\right)_{;\alpha} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}\right)_{;\nu} + \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\right)\delta\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\right] d^4x +$$

$$+ k \int \tilde{g}^{\mu\nu} \, \delta E_{\mu\nu} \, d^4x = 0 , \tag{II.1.10}$$

onde cada integral deve se anular separadamente.

A primeira integral de (II.1.10) é

$$\sqrt{-g} \int \left(F_{\mu\nu}(\Gamma) + k E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F - \frac{k}{2} \delta_{\nu}{}^{\nu} E_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \, d^4x = 0 , \tag{II.1.11}$$

porém, como $\delta g^{\mu\nu}$ é uma variação arbitrária e $g \neq 0$, obtemos

$$F_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(\Gamma) = k \, E_{\mu\nu} . \tag{II.1.12}$$

Trata-se de uma equação similar à de Einstein da Relatividade Geral, onde $F = g^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é o "escalar de curvatura". Vale lembrar que $F_{\mu\nu}(\Gamma)$ e $E_{\mu\nu}$ não são simétricos. Quando Γ é uma conexão de Levi-Civita e $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ a(II.1.12) recai nas equações de Einstein da R.G. com $F_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ (tensor de Ricci).

Para analisar a segunda integral de (II.1.10) consideremos o seguinte:

Dados dois tensores A e B, de componentes $A^{\cdots}{}_{\cdots}$ e $B^{\cdots}{}_{\cdots}$, então[14]

$$\int (A^{\cdots}{}_{\cdots})(B^{\cdots}{}_{\cdots})_{;\alpha} \, d^4x = \int \left[-(A^{\cdots}{}_{\cdots})_{;\alpha} + 2 \Gamma_{\alpha} A^{\cdots}{}_{\cdots} \right] B^{\cdots}{}_{\cdots} \, d^4x , \tag{II.1.13}$$

onde

$$\Gamma_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\mu}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} \right) . \tag{II.1.14}$$

Com isto a segunda integral de (II.1.10) fica

$$\int \left[\tilde{g}^{\mu\nu} (\delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})_{;\alpha} - \tilde{g}^{\mu\nu} (\delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha})_{;\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} (\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}) \delta \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} \right] d^4x = 0 ,$$

$$\int \left\{ \left[-\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + 2 \Gamma_{\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu} \right] \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \left[-\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\nu} + 2 \Gamma_{\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} \right] \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \right.$$

$$\left. + \tilde{g}^{\mu\nu} (\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}) \delta \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} \right\} d^4x = 0 ,$$

ou então

$$\int \left\{ \tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\nu} \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - \tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + 2 \Gamma_{\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - 2 \Gamma_{\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \right.$$

$$+ 2\tilde{g}^{\mu\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{[\nu\beta]}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Big\}\,d^4x = 0 . \qquad \text{(II.1.15)}$$

Separando convenientemente este resultado encontramos

$$\int\left[\delta^{\nu}_{\alpha}\,\tilde{g}^{\mu\beta}{}_{;\beta} - \tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\alpha}\right]\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,d^4x + \int\Big\{\tilde{g}^{\mu\beta}\left[\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\right] +$$

$$+ \delta^{\nu}_{\alpha}\,\tilde{g}^{\mu\beta}\left[\Gamma^{\sigma}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\sigma}\right] - \tilde{g}^{\mu\nu}\left[\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\right]\Big\}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,d^4x = 0, \qquad \text{(II.1.16)}$$

e considerando agora a segunda integral de (II.2.16) temos

$$-\delta^{\nu}_{\alpha}\,\tilde{g}^{\mu\beta}\left[\Gamma^{\sigma}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma\beta}\right] + \tilde{g}^{\mu\beta}\left[\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\right] + \tilde{g}^{\mu\nu}\left[\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}\right] = 0. \qquad \text{(II.1.17)}$$

De acordo com (I.7.16) observamos que

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu},$$

são as componentes da torção[7], escritas numa base holônoma.

Assim obtemos de (II.2.17) uma relação algébrica para as componentes da torção

$$\tilde{g}^{\mu\beta}\,T^{\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\tilde{g}^{\mu\beta}\,T^{\sigma}_{\sigma\beta} + \tilde{g}^{\mu\nu}\,T^{\lambda}_{\lambda\alpha} = 0,$$

ou

$$T^{\nu\alpha\mu} + g^{\mu\nu}\,T_{\lambda}^{\cdot\lambda\alpha} - \delta^{\alpha\nu}\,T_{\sigma}^{\cdot\sigma\mu} = 0, \qquad \text{(II.1.18)}$$

conhecidas como equações de Cartan[15].

Estas não são equações dinâmicas para a torção, portanto não especificam a propagação da torção como um campo.

Considerando a primeira integral de (II.1.16) temos que

$$\int\left[\left(\tilde{g}^{\mu\beta}{}_{,\beta} + \tilde{g}^{\lambda\beta}\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} + \tilde{g}^{\mu\lambda}\Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}\right)\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \left(\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \tilde{g}^{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} + \tilde{g}^{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\right)\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right]d^4x = 0,$$

ou

$$\int\Big\{\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\beta}\right)_{,\beta} + \sqrt{-g}\left(g^{\lambda\beta}\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} + g^{\mu\lambda}\Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}\right)\Big\}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\,d^4x -$$

$$- \int\left[\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)_{,\alpha} + \sqrt{-g}\left(g^{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} + g^{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\right)\right]\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,d^4x = 0,$$

ou ainda

$$\int\left[-\frac{1}{\sqrt{-g}}\,g_{,\beta}\,g^{\mu\beta} + \sqrt{-g}\,g^{\mu\beta}{}_{;\beta}\right]\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\,d^4x - \int\left[-\frac{1}{\sqrt{-g}}\,g_{,\alpha}\,g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}{}_{;\alpha}\right]\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,d^4x = 0,$$

mas, separando devidamente as integrais temos que

$$\sqrt{-g}\left\{\int g^{\mu\beta}{}_{;\beta}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\,d^4x - \int g^{\mu\nu}{}_{;\alpha}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,d^4x\right\} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\int g^{\mu\beta}\, g_{,\beta}\, \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\, d^4x - \int g^{\mu\nu}\, g_{,\alpha}\, \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, d^4x\right\} = 0 .$$

Das duas primeiras integrais, devido à variação arbitrária de $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}$ e $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, concluímos que

$$g^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = 0 , \qquad \text{(II.1.19)}$$

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 . \qquad \text{(II.1.20)}$$

Devido aos termos $g_{,\beta}$ e $g_{,\alpha}$ que são termos de divergência ordinária, as duas últimas integrais, quando integradas sobre todo espaço-tempo, se anulam.

II.2 MUDANÇA DE CONEXÃO[16]

Consideramos agora uma mudança de conexão, de tal forma que fique preservado o transporte paralelo.

Sejam $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ e $W^{\alpha}_{\beta\gamma}$ as componentes de duas conexões diferentes Γ e W. Queremos saber quando é possível que direções paralelas ao longo de qualquer curva no espaço-tempo são as mesmas para as duas conexões. Com esta finalidade fazemos uso das equações do paralelismo da seguinte forma:

$$\lambda^{\sigma}\left(\frac{d\lambda^{\alpha}}{dt} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\lambda^{\beta}\,\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right) - \lambda^{\alpha}\left(\frac{d\lambda^{\sigma}}{dt} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\,\lambda^{\beta}\,\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right) = 0 , \qquad \text{(II.2.1)}$$

e

$$\lambda^{\sigma}\left(\frac{d\lambda^{\alpha}}{dt} + W^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\lambda^{\beta}\,\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right) - \lambda^{\alpha}\left(\frac{d\lambda^{\sigma}}{dt} - W^{\sigma}_{\beta\gamma}\,\lambda^{\beta}\,\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right) = 0 . \qquad \text{(II.2.2)}$$

Subtraíndo (II.2.1) de (II.2.2) temos

$$\left(W^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)\lambda^{\sigma}\lambda^{\beta}\frac{dx^{\gamma}}{dt} - \left(W^{\sigma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\right)\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}\frac{dx^{\gamma}}{dt} = 0 ,$$

$$\left[\delta^{\sigma}_{\mu}\left(W^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right) - \delta^{\alpha}_{\mu}\left(W^{\sigma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\right)\right]\lambda^{\mu}\lambda^{\beta}\frac{dx^{\gamma}}{dt} = 0 . \qquad \text{(II.2.3)}$$

Definindo

$$a^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = W^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} , \qquad \text{(II.2.4)}$$

encontramos

$$(\delta^{\sigma}_{\mu} a^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\mu} a^{\sigma}{}_{\beta\gamma})\lambda^{\mu}\lambda^{\beta} \frac{dx^{\gamma}}{dt} = 0 . \qquad \text{(II.2.5)}$$

Como estas equações devem ser válidas para qualquer curva então

$$\delta^{\sigma}_{\mu} a^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \delta^{\sigma}_{\beta} a^{\alpha}{}_{\mu\gamma} - \delta^{\alpha}_{\mu} a^{\sigma}{}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta} a^{\sigma}{}_{\mu\gamma} = 0 . \qquad \text{(II.2.6)}$$

Fazendo uma contração para os índices σ e μ ficamos com

$$\delta^{\sigma}_{\sigma} a^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \delta^{\sigma}_{\beta} a^{\alpha}{}_{\sigma\gamma} - \delta^{\alpha}_{\sigma} a^{\sigma}{}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta} a^{\sigma}{}_{\sigma\gamma} = 0 ,$$

e daí obtemos

$$4 a^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta} a^{\sigma}{}_{\sigma\gamma} = 0 . \qquad \text{(II.2.7)}$$

Definindo o seguinte vetor

$$8 \psi_{\gamma} = a^{\sigma}{}_{\sigma\gamma} , \qquad \text{(II.2.8)}$$

encontramos

$$a^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 2 \delta^{\alpha}_{\beta} \psi_{\gamma} . \qquad \text{(II.2.9)}$$

Pela Equação (II.2.4) temos finalmente

$$W^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + 2 \delta^{\alpha}_{\beta} \psi_{\gamma} , \qquad \text{(II.2.10)}$$

onde ψ_{γ} é um vetor arbitrário. Se a condição acima é satisfeita, então ela define a mudança de conexão mais geral que preserva o paralelismo.

Desejamos encontrar uma conexão que preserve o transporte paralelo segundo a conexão Γ , mas de tal maneira que a torção de Γ seja nula. Para isto devemos impor que

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\alpha]} = 0 , \qquad \text{(II.2.11)}$$

ou

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} (\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu}) = 0 .$$

Em face de (II.2.10) encontramos

$$\frac{1}{2} (W^{\alpha}{}_{\mu\alpha} - 2 \delta^{\alpha}_{\mu} \psi_{\alpha} - W^{\alpha}{}_{\alpha\mu} + 2 \delta^{\alpha}_{\alpha} \psi_{\mu}) = 0 ,$$

e daí

$$\Psi_\mu = -\frac{1}{3} W_\mu, \tag{II.2.12}$$

onde fizemos

$$W_\mu = \frac{1}{2}\left(W^\alpha{}_{\mu\alpha} - W^\alpha{}_{\alpha\mu}\right). \tag{II.2.13}$$

Assim a conexão procurada terá as componentes

$$W^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\beta W_\gamma . \tag{II.2.14}$$

A densidade de Lagrangeana (II.1.4), escrita em função da nova conexão W, será

$$\mathcal{L} = \tilde{g}^{\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}(W) + k\, E_{\mu\nu}\right]. \tag{II.2.15}$$

Neste caso $F_{\mu\nu}(W)$ é dada por

$$F_{\mu\nu}(W) = W^\beta{}_{\mu\nu,\beta} - W^\beta{}_{\mu\beta,\nu} + W^\beta{}_{\alpha\beta} W^\alpha{}_{\mu\nu} - W^\beta{}_{\alpha\nu} W^\alpha{}_{\mu\beta} \,,$$

$$F_{\mu\nu}(W) = \partial_\beta\left(\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\delta^\beta_\mu W_\nu\right) - \partial_\nu\left(\Gamma^\beta{}_{\mu\beta} - \frac{2}{3}\delta^\beta_\mu W_\beta\right) +$$
$$+\left(\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\delta^\beta_\alpha W_\beta\right)\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\mu W_\nu\right) -$$
$$-\left(\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} - \frac{2}{3}\delta^\beta_\alpha W_\nu\right)\left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\mu W_\beta\right),$$

$$F_{\mu\nu}(W) = \Gamma^\beta{}_{\mu\beta,\beta} - \Gamma^\beta{}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \frac{2}{3}\delta^\beta_\mu W_{\beta,\nu} -$$
$$-\frac{2}{3}\delta^\beta_\mu W_{\nu,\beta} - \frac{2}{3}\Gamma^\beta{}_{\mu\beta} W_\nu - \frac{2}{3}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} W_\beta + \frac{2}{3}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} W_\beta +$$
$$+\frac{2}{3}\Gamma^\beta{}_{\mu\beta} W_\nu + \frac{4}{9} W_\mu W_\nu - \frac{4}{9} W_\nu W_\mu .$$

Finalmente,

$$F_{\mu\nu}(W) = F_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\left(W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}\right). \tag{II.2.16}$$

Como as componentes $F_{\mu\nu}(\Gamma)$ são Hermiteanas, e W_μ é um campo vetorial puramente imaginário, então $F_{\mu\nu}(W)$ são componentes de um tensor de curvatura contraído e Hermiteano.

A integral de ação é

$$A = \int \mathcal{L}\, d^4x\,, \tag{II.2.17}$$

sendo $\mathcal{L}$ dada em (II.2.15).

A condição extremal

$$\delta A = \int \delta \mathcal{L}\, d^4x = 0\,, \tag{II.2.18}$$

deve levar às equações de campo do modelo.

Porém,

$$\delta \mathcal{L} = \delta \tilde{g}^{\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}(W) + k E_{\mu\nu}\right] + \tilde{g}^{\mu\nu}\left[\delta F_{\mu\nu}(W) + k\delta E_{\mu\nu}\right], \tag{II.2.19}$$

e

$$\delta F_{\mu\nu}(W) = \delta F_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\delta(W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}),$$

onde $\delta\tilde{g}^{\mu\nu}$ é dado por (II.1.8), $\delta F_{\mu\nu}(\Gamma)$ por (II.1.9) e

$$\delta(W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}) = (\delta W_{\mu})_{,\nu} - (\delta W_{\nu})_{,\mu}\,. \tag{II.2.20}$$

Com (II.2.18) e (II.2.19) temos então

$$\int \delta\tilde{g}^{\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}(W) + k E_{\mu\nu}\right] d^4x + \int \tilde{g}^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}(W)\, d^4x + k\int \tilde{g}^{\mu\nu}\delta E_{\mu\nu} = 0. \tag{II.2.21}$$

Usando (II.1.8) na primeira integral de (II.2.21) encontramos

$$\sqrt{-g}\int \left(F_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(W) + k E_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\ \nu} E_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0,$$

mas, como $\sqrt{-g} \neq 0$ e $\delta g^{\mu\nu}$ é uma variação arbitrária, podemos concluir que

$$F_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(W) = k E_{\mu\nu}\,. \tag{II.2.22}$$

Considerando agora a segunda integral de (II.2.21) e lembrando a condição imposta em (II.2.11) obtemos

$$\int \tilde{g}^{\mu\nu}\left[-(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma})_{;\nu} + (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})_{;\sigma} + (\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu})\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\right] d^4x +$$

$$+ \frac{2}{3}\int \tilde{g}^{\mu\nu}\left[(\delta W_{\mu})_{,\nu} - (\delta W_{\nu})_{,\mu}\right] d^4x = 0\,. \tag{II.2.23}$$

Usando a expressão (II.1.13.), ficamos com

$$\int\left[-\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\sigma}\,\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}+\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\,\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}+(\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu})\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}\right]d^4x+$$

$$+\frac{2}{3}\int\left(g^{\mu\nu}{}_{,\nu}\,\delta W_{\nu}-g^{\mu\nu}{}_{,\mu}\,\delta W_{\nu}\right)d^4x=0\,.$$

De modo análogo ao que fizemos na obtenção das Equações (II.1.19) e (II.1.20), podemos concluir que

$$g^{\mu\nu}{}_{;\sigma}=0\,, \qquad \text{(II.2.24)}$$

e

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0\,. \qquad \text{(II.2.25)}$$

As Equações (II.2.22), (II.2.24) e (II.2.25) são as equações de campo procuradas.

Ainda observamos que

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu}=0\,, \qquad \text{(II.2.26)}$$

mostrando que realmente a torção da nova conexão W é nula. Através da terceira integral de (II.2.21)

$$\int g^{\mu\nu}\,\delta E_{\mu\nu}\,d^4x=0\,,$$

concluímos que o sistema é conservativo, uma vez que a única possibilidade para que esta integral seja nula é se ter $\delta E_{\mu\nu}=0$.

<u>Observação</u>: Consideramos agora um caso no qual $E_{\mu\nu}=0$. Com isto a (II.2.22) se resume a

$$F_{\mu\nu}(W)=0\,, \qquad \text{(II.2.27)}$$

e portanto, pela Equação (II.2.16), temos que

$$F_{\mu\nu}(\Gamma)=-\frac{2}{3}\left(W_{\mu,\nu}-W_{\nu,\mu}\right). \qquad \text{(II.2.28)}$$

Separando $F_{\mu\nu}(\Gamma)$ em suas partes simétrica e anti-simétrica ficamos com

$$F_{(\mu\nu)}(\Gamma)=0\,, \qquad \text{(II.2.29)}$$

e

$$F_{[\mu\nu]}(\Gamma) = -\frac{2}{3}(w_{\mu,\nu} - w_{\nu,\mu}). \qquad (II.2.30)$$

Derivando a (II.2.30) resulta

$$F_{[\mu\nu],\sigma}(\Gamma) = \frac{2}{3}(w_{\nu,\mu\sigma} - w_{\mu,\nu\sigma}), \qquad (II.2.31)$$

e escrevendo as permutações cíclicas nos índices e somando, encontramos

$$F_{[\mu\nu],\sigma}(\Gamma) + F_{[\sigma\mu],\nu}(\Gamma) + F_{[\nu\sigma],\mu}(\Gamma) = 0 , \qquad (II.2.32)$$

o que equivale às Identidades de Bianchi da seção I.4.

CAPÍTULO III

LEIS DE CONSERVAÇÃO

III.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS[17]

Existem várias soluções exatas das equações de campo,com significado físico conhecido. Ao considerarmos problemas físicos mais complicados somos forçados a métodos de aproximação e procedimentos numéricos. Isto não é, certamente, uma nova face da Mecânica Relativística, pois mesmo em Mecânica Clássica, nem todos os problemas podem ser resolvidos na forma analítica fechada.

Um exemplo em Mecânica Celeste é o problema de Kleper, que representa um papel análogo ao problema de Schwarzschild ou Papapetrou, na Astronomia Relativística.

Mas, na Mecânica Clássica, temos junto a poucos problemas padrões resolvidos, uma infinidade de princípios gerais que muitas vezes levam a conclusões de grande importância, sem que haja necessidade de soluções explícitas das equações diferenciais envolvidas. É nosso objetivo aqui, fornecer parte dos resultados gerais, aplicáveis à Teoria da Relatividade Geral.

Desejamos, primeiro, discutir a questão das Leis de Conservação, em conexão com as equações de campo.

Sabemos do Capítulo II, Equação (II.1.12), que o tensor energia-momentum é proporcional ao tensor de Einstein G as-simétrico:

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F . \tag{III.1.1}$$

No caso que consideramos, onde $F_{\mu\nu}$ não é simétrico, temos

$$F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F = k E_{\mu\nu} , \tag{III.1.2}$$

o que é análogo às equações de Einstein, onde

$$G_{\mu\nu} = k E_{\mu\nu} . \tag{III.1.3}$$

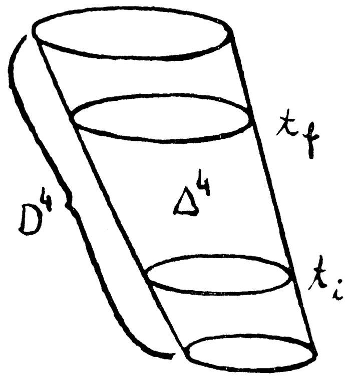
Na teoria de Einstein temos que

$$E_{\mu\nu;\nu} = 0 , \tag{III.1.4}$$

o que expressa uma lei de conservação para o tensor energia - momentum.

Lembremos que a divergência nula de um tensor leva a uma lei de conservação. Em um espaço plano podemos, por definição, usar um sistema coordenado no qual os coeficientes de conexão sempre sejam nulos, e neste caso a diferenciação covariante se reduz à diferenciação ordinária.

Suponhamos agora que o tensor $E^{\mu\nu}$ é não nulo, apenas em uma região finita do espaço-tempo, em qualquer instante. Então, a secção do espaço-tempo onde o tensor é não nulo pode ser fechada em um "quadri-tubo" D^4:



Considerando a parte Δ^4 de D^4, que é cortada pelas hipersuperfícies $t = t_i$ e $t = t_f$, o contôrno Δ^4 consiste de dois espaços tri-dimensionais no instante inicial t_i e no instante final t_f, de uma parte de "poço" de D^4 sobre o qual o tensor é nulo. Então, pelo Teorema de Gauss,

$$\int_{\Delta^4} E^{\mu\nu}{}_{,\nu}\, d^4x = \int_{t_f} E^{\mu 0}\, d^3x - \int_{t_i} E^{\mu 0}\, d^3x = 0. \qquad \text{(III.1.5)}$$

Assim a quantidade vetorial

$$P^{\mu} = \int E^{\mu 0}\, d^3x, \qquad \text{(III.1.6)}$$

não muda no tempo, se a integrarmos sobre uma região tipo espaço, que pode variar no tempo, mas é escolhida de tal forma que o tensor $E^{\mu\nu}$ seja nulo sobre seu contôrno.

Podemos considerar P^{μ} como uma quantidade conservada e dar-lhe uma interpretação física. Por exemplo, se $E^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor energia-momentum, as quantidades P^{μ} podem ser interpretadas como as componentes do quadri-vetor energia-momentum da Teoria da Relatividade Especial, e $E^{\mu 0}$ pode ser interpretado como a densidade deste vetor no espaço.

Tal consideração direta não é possível em um espaço não Riemanniano, com os coeficientes de conexão não nulos. Somos, então, forçados a buscar uma quantidade conservada alternativa. Isto porque, para um espaço curvo, energia e campo interagem, e então somente algumas combinações de $E^{\mu\nu}$ e da energia do campo gravitacional são conservadas.

Para investigar (III.1.4), primeiro colocá-la-emos na forma explícita. Temos, por definição de diferenciação covariante,

$$E_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = E_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} + E_{\mu}{}^{\nu}\,\Gamma^{\beta}{}_{\nu\beta} - E_{\alpha}{}^{\beta}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\,, \qquad \text{(III.1.7)}$$

e

$$\Gamma^{\beta}{}_{\nu\beta} = (\log\sqrt{-g}\,)_{,\nu} = \frac{(\sqrt{-g}\,)_{,\nu}}{\sqrt{-g}}\,, \qquad \text{(III.1.8)}$$

e ainda

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,E_{\alpha}{}^{\beta} = g^{\alpha\tau}\,\Gamma_{\tau\mu\beta}\,E_{\alpha}{}^{\beta} = \Gamma_{\tau\mu\beta}\,E^{\tau\beta} = -\frac{1}{2}\,g_{\tau\beta,\mu}\sqrt{-g}\,E^{\tau\beta}. \qquad \text{(III.1.9)}$$

Assim, podemos colocar (III.1.7) na forma mais simples

$$E_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} + \frac{(\sqrt{-g}\,)_{,\nu}}{\sqrt{-g}}\,E_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\tau\beta,\mu}\sqrt{-g}\,E^{\tau\beta}\,, \qquad \text{(III.1.10)}$$

isto é

$$(\sqrt{-g}\;E_{\mu}^{\nu})_{,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\tau\beta,\mu}\sqrt{-g}\;E^{\tau\beta} = 0\,. \qquad \text{(III.1.11)}$$

Devido às Equações de Campo (III.1.3) o último termo de (III.1.11) pode ser expresso em termos do tensor de curvatura,

$$(\sqrt{-g}\;E_{\mu}^{\nu})_{,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\tau\beta,\mu}\,\frac{\sqrt{-g}}{k}\,G^{\tau\beta} = 0\,, \qquad \text{(III.1.12)}$$

O problema agora é claro, se escrevermos o último termo de (III.1.12), como a divergência ordinária de uma quantidade $\sqrt{-g}\,\ell_\mu^{\ \nu}$. Assim teremos uma identidade que levará a uma lei de conservação, via uma aplicação simples do Teorema de Gauss.

Observamos que podemos reduzir a questão de leis de conservação em Física, a um problema de Geometria Diferencial. Já a quantidade $\sqrt{-g}\,\ell_\mu^{\ \nu}$, que procuramos, depende somente da métrica considerada.

O tensor G é construído de um modo não linear, muito específico, pelo campo tensorial **g**. Para exibir claramente esta dependência, faremos variar as componentes $g_{\mu\nu}$ arbitrariamente e estudaremos o efeito desta mudança sobre o tensor de curvatura contraído. Portanto, usaremos métodos típicos do cálculo variacional.

III. 2 ANÁLISE VARIACIONAL

Iniciamos nossa discussão com a densidade escalar $\mathcal{F}$, definida a partir da curvatura escalar F, mediante

$$\mathcal{F} = \sqrt{-g}\, F = \sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho} F_{\sigma\rho},$$

$$\mathcal{F} = \sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\left(\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho}\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\sigma\rho}\right). \qquad \text{(III.2.1)}$$

Se D^4 é uma região arbitrária do espaço-tempo, podemos formar o invariante

$$J = \int_{D^4} \mathcal{F}\, d^4x . \qquad \text{(III.2.2)}$$

É possível mostrar que a densidade tensorial $\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu}$ pode ser obtida como uma derivada, sob uma variação do tensor métrico em D^4, que se anula na fronteira, isto é, $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta g_{\mu\nu,\lambda}$ se anulam sobre o contôrno de D^4.

Observamos que se mudarmos de um sistema x^α para um sistema $\bar{x}^\alpha$, as componentes do tensor métrico se transformam como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta} , \qquad \text{(III.2.3)}$$

A mesma lei é válida para a variação das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, portanto $\delta g_{\mu\nu}$ também se transforma como as componentes de um tensor. O mesmo vale para todos os tensores construídos a partir de **g**.

No caso dos coeficientes de conexão, a variação $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ deve transformar-se como um tensor, pois o termo não homogêneo, que aparece quando se mudam as coordenadas, i.e.

$$\bar{\Gamma}^J_{ms} = \frac{\partial \bar{x}^J}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^s} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^J}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^s} ,$$

depende unicamente da mudança do sistema, mas não da métrica usada. Portanto teremos

$$\delta\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\gamma} \delta\Gamma^k_{\lambda\sigma} . \qquad \text{(III.2.4)}$$

Calcularemos a variação de $F_{\mu\nu}$ em um dado ponto, pela introdução de um sistema geodésico local. Em tal sistema todos os coeficientes de conexão anulam-se no ponto considerado, por definição, mas não suas variações, desde que, durante a variação da métrica, o sistema coordenado não permaneça localmente geodésico. Para este tipo de sistema coordenado, a diferenciação covariante e a ordinária são as mesmas, e encontramos para a variação da forma-conexão o seguinte[14].

$$\delta F_{\mu\nu} = -(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{;\nu} + (\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} + (\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu})\,\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\,. \qquad \text{(III.2.5)}$$

Os termos da identidade acima são tensores. Esta expressão, embora tenha sido estabelecida com a utilização de um sistema de coordenadas conveniente, é uma expressão geralmente válida para $\delta F_{\mu\nu}$.

A variação de $\sqrt{-g}$, que também ocorre na definição de J em (III.2.2), é obtida a seguir.

O determinante **g** pode ser expandido em seus elementos da ν-ésima coluna e seus cofatores como

$$g = \sum_{\mu} g_{\mu\nu}\,\Delta^{\mu\nu}, \qquad \text{(III.2.6)}$$

onde $\Delta^{\mu\nu}$ é o cofator de $g_{\mu\nu}$ e ν é qualquer coluna com índice pré-fixado. Então temos

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu}, \qquad \text{(III.2.7)}$$

e assim

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\,. \qquad \text{(III.2.8)}$$

Por outro lado, podemos usar a definição de matriz inversa de $g_{\mu\nu}$ para encontrar

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g}\,\Delta^{\mu\nu}, \qquad \text{(III.2.9)}$$

e portanto a (III.2.8) torna-se

$$\delta g = g\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\,. \qquad \text{(III.2.10)}$$

Este resultado pode também ser formulado em termos de $\delta g^{\mu\nu}$, notando-se que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ é o traço do tensor invariante de Kronecker, $\delta_{\nu}{}^{\nu} = 4$.

Desta maneira temos

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = 0. \qquad \text{(III.2.11)}$$

Observamos que $\delta g_{\mu\nu}$ é um tensor, e então $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ é um escalar. Mas também notamos que o operador variacional δ e a operação de levantamento e abaixamento de índices não comutam. Assim a forma contravariante de $\delta g_{\mu\nu}$ não é $\delta g^{\mu\nu}$, como é evidente por (III.2.11). Vemos, entretanto, que

$$g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

e a (III.2.10) torna-se

$$\delta g = - g\, g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}. \qquad \text{(III.2.12)}$$

Assim, finalmente temos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}. \qquad \text{(III.2.13)}$$

A variação total de J de (III.2.2) pode agora ser escrita como

$$\delta J = \int_{D^4} \delta\,(\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} F_{\mu\nu})\, d^4x\,,$$

$$\delta J = \int_{D^4} (\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-g}) + F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\;\delta g^{\mu\nu})\, d^4x\,. \qquad \text{(III.2.14)}$$

Usando as formas explícitas de $\delta F_{\mu\nu}$ e $\delta\sqrt{-g}$ de (III.2.5) e (III.2.13) obtemos

$$\delta J = \int_{D^4}\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\left[(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha;\nu})\right] d^4x + \int_{D^4}\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu})\,\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\, d^4x\, +$$

$$+ \int_{D^4}(F_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}F)\sqrt{-g}\;\delta g^{\mu\nu}\, d^4x,$$

$$\delta J = \int_{D^4}\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\left[(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{;\nu}\right] d^4x + \int_{D^4}\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu})\, d^4x\, + \qquad \text{(III.2.15)}$$

$$+ \int_{D^4}\sqrt{-g}\; G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\, d^4x.$$

Desde que a derivada covariante do tensor métrico se anula, podemos escrever o integrando da primeira integral de (III.2.15) na forma

$$\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{;\nu}\right]\sqrt{-g} = (w^{\alpha}_{\ ;\alpha} - v^{\nu}_{\ ;\nu})\sqrt{-g}\ , \qquad \text{(III.2.16)}$$

onde w^{α} e v^{ν} são vetores contravariantes. Usamos agora a seguinte fórmula geral[17]

$$\xi^{i}_{\ ;i} = \operatorname{div}\vec{\xi} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,(\xi^{i}\sqrt{-g})_{,i}\ , \qquad \text{(III.2.17)}$$

o que nos capacita a expressar a divergência covariante de um vetor contravariante na forma

$$\sqrt{-g}\ w^{\alpha}_{\ ;\alpha} = (\sqrt{-g}\ w^{\alpha})_{,\alpha}. \qquad \text{(III.2.18)}$$

Nesta , o lado direito é um termo de divergência ordinária. Assim, todo o integrando da primeira integral em (III.2.15) é uma divergência ordinária, e por integração parcial, podemos expressar a integral como uma integral de superfície sobre o contôrno de D^4. Desde que $\delta g^{\mu\nu}$ e $\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ se anulam sobre este contôrno, a primeira integral deve então ser nula.

O integrando da segunda integral de (III.2.15) é nulo , pois os coeficientes de conexão se anulam no ponto considerado, embora suas variações não se anulem. Assim, a expressão (III.2.15), para a variação de J , se reduz à fórmula fundamental simples

$$\delta J = \int_{D^4} \sqrt{-g}\ G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\, d^4x . \qquad \text{(III.2.19)}$$

Fica então mostrado que a densidade tensorial $\sqrt{-g}\ G_{\mu\nu}$ é um derivativo variacional do invariante J , sobre a densidade escalar $\sqrt{-g}\,F$. Mas a (III.2.19) é válida somente para variações do tensor métrico e suas primeiras derivadas, que se anulam sobre o contôrno D^4. Para variações mais gerais devemos adicionar integrais de superfície no segundo membro.

Como o integrando $\mathcal{J}$ de J é uma função complexa não linear de $g_{\mu\nu}$, e de suas derivadas, usando o formalismo padrão do cálculo das variações (a usual aproximação de Euler - Lagrange) podemos expressar a derivada variacional $G_{\mu\nu}$ em termos de derivadas parciais de $\mathcal{J}$. Observamos, entretanto, que também as derivadas segundas das funções de $g_{\mu\nu}$ entrarão em $\mathcal{J}$, o que tornará os termos de Euler-Lagrange mais complicados. É agora de grande conveniência explicitar $\mathcal{J}$ em um termo $\mathcal{L}'$, que depende somente dos $g_{\mu\nu}$ e de suas primeiras derivadas, e ainda um termo B, que é uma combinação linear de derivadas. Veremos que a contribuição do segundo termo, do integrando $\mathcal{J}$, será redutível a uma integral sobre o contôrno de integração do domínio D^4. Assim as variações de J e da integral sobre o termo mais simples $\mathcal{L}'$ serão idênticas.

Determinaremos $\mathcal{L}'$ agora. Primeiro reescrevemos a definição (III.2.1) da densidade $\mathcal{J}$ mediante

$$\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\left[\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha,\rho}\right] = (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho})_{,\alpha} - (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha})_{,\rho} + \\ + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho})_{,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho})_{,\alpha} . \qquad \text{(III.2.20)}$$

Se substituirmos esta relação em (III.2.1), concluiremos a decomposição de $\sqrt{-g}\,F$, em um termo de divergência, contendo as primeiras derivadas de $g_{\mu\nu}$. Entretanto, podemos recombinar termos de modo a encontrar uma expressão elegante para $\mathcal{L}'$.

Partindo do fato que a derivada covariante de $g^{\sigma\rho}$ é nula, chegamos a

$$g^{\sigma\rho}{}_{;\alpha} = g^{\sigma\alpha}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\, g^{\beta\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\alpha}\, g^{\sigma\beta} = 0\,. \qquad \text{(III.2.21)}$$

Esta identidade nos capacita trocar todos os termos $g^{\sigma\rho}{}_{,\alpha}$ por elementos $g^{\mu\nu}$ e coeficientes de conexão. Similarmente, podemos usar a Equação (III.1.8), para expressar as derivadas de $\sqrt{-g}$ em termos dos $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$. Assim, os dois últimos termos em (III.2.20) tornam-se

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}\,(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho})_{,\rho} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho}\,(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho})_{,\alpha} =$$

$$= \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}\left[-\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\beta}\, g^{\beta\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\rho\beta}\, g^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\rho\beta}\, g^{\sigma\rho}\right]\sqrt{-g} \; -$$

$$- \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho}\left[-\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\, g^{\beta\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\, g^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\, g^{\sigma\rho}\right]\sqrt{-g}\,. \qquad \text{(III.2.22)}$$

Esta expressão torna-se, depois de algum rearranjo,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha}(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho})_{,\rho} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho}\,(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho})_{,\alpha} = 2\mathcal{L}', \qquad \text{(III.2.23)}$$

onde

$$\mathcal{L}' = g^{\sigma\rho}\left[\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho}\,\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho}\,\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\right]\sqrt{-g}\,. \qquad \text{(III.2.24)}$$

Substituindo a expressão (III.2.23) em (III.2.20) e inserindo (III.2.20) na definição (III.2.1) da densidade escalar $\mathcal{F}$ i.e

$$\mathcal{F} = F\sqrt{-g}\,,$$

obtemos a seguinte identidade

$$\mathcal{F} = \sqrt{-g}\, F = (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho})_{,\alpha} - (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha})_{,\rho} + \mathcal{L}'\,. \qquad \text{(III.2.25)}$$

A decomposição desejada de $\mathcal{F}$, em um termo de divergência ordinária e uma expressão envolvendo somente os $g_{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas, é assim alcançada.

Usando o Teorema de Gauss, para integrais de divergências ordinárias, teremos agora

$$J = \int_{D^4} \mathcal{J}\, d^4x = \int_{D^4} \mathcal{L}'\, d^4x + (\text{termos de superfície}) . \qquad \text{(III.2.26)}$$

Façamos

$$A' = \int_{D^4} \mathcal{L}'\, d^4x . \qquad \text{(III.2.27)}$$

Como $\mathcal{L}'$ não é uma densidade escalar, e depende da escolha do sistema de coordenadas, a integral A' dependerá do sistema de referência. Entretanto, dado um sistema de coordenadas específico, e neste um tensor métrico com componentes $g_{\mu\nu}$, podemos assegurar que os valores de J e A' terão a mesma variação se variarmos as componentes $g_{\mu\nu}$ na região D^4, de um modo arbitrário, mas tal que $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta g_{\mu\nu,\sigma}$, se anulem sobre o contôrno de D^4. Assim J e A' têm as mesmas derivadas funcionais em relação às componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Avaliando agora $\delta A'$, desde que o integrando $\mathcal{L}'$ seja uma função somente dos $g_{\mu\nu}$ e de suas primeiras derivadas, temos pelo método usual de Euler-Lagrange

$$\delta A' = \delta \int_{D^4} \mathcal{L}'(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}{}_{,\lambda})\, d^4x ,$$

$$\delta A' = \int_{D^4} \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} \right] d^4x ,$$

$$\delta A' = \int_{D^4} \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x +$$

$$+ (\text{termos de superfície}). \qquad \text{(III.2.28)}$$

Para variações que se anulam sobre o contôrno de D^4, o termo de superfície será naturalmente nulo. Assim, equacionando δJ em (III.2.19) e $\delta A'$ em (III.2.28) obtemos

$$\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right). \tag{III.2.29}$$

Esta expressão é o resultado final de nossa análise variacional.

Prossigamos então em nossa busca de uma expressão para $\sqrt{-g}\, \ell_\mu^{\ \nu}$. Trocando índices em (III.2.29) e multiplicando-a por $g^{\tau\beta}{}_{,\mu}$ temos

$$g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \left(\sqrt{-g}\, G_{\tau\beta} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}} \right) g^{\tau\beta}{}_{,\mu} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}} g^{\tau\beta}{}_{,\lambda\mu}. \tag{III.2.30}$$

Observamos que $\mathcal{L}'$ é somente função de $g^{\tau\beta}$ e $g^{\tau\beta}{}_{,\mu}$, logo

$$\mathcal{L}'{}_{,\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}} g^{\tau\beta}{}_{,\lambda\mu}, \tag{III.2.31}$$

e a (III.2.28) torna-se

$$g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \left(\sqrt{-g}\, G_{\tau\beta} \right) = \mathcal{L}'{}_{,\mu} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \right) =$$

$$= \partial_\lambda \left(\mathcal{L}' g_\mu^{\ \lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \right). \tag{III.2.32}$$

Como $g^{\tau\beta} g_{\tau\lambda}$ é o invariante δ^β_λ vemos que

$$(g^{\tau\beta} g_{\tau\lambda})_{,\mu} = g^{\tau\beta}{}_{,\mu}\, g_{\tau\lambda} + g^{\tau\beta} g_{\tau\lambda ,\mu} = 0. \tag{III.2.33}$$

Assim

$$\begin{aligned} g^{\tau\beta}{}_{,\mu}\, G_{\tau\beta} &= g^{\tau\beta}{}_{,\mu}\, g_{\tau\lambda}\, g_{\beta\sigma}\, G^{\lambda\sigma} = \\ &= - g^{\tau\beta}\, g_{\tau\lambda ,\mu}\, g_{\beta\sigma}\, G^{\lambda\sigma} = \\ &= - g_{\tau\beta ,\mu}\, G^{\tau\beta}. \end{aligned} \tag{III.2.34}$$

Portanto podemos reverter a posição dos índices do lado esquerdo de (III.2.32) se trocarmos o sinal, i.e.

$$\sqrt{-g}\; g_{\tau\beta ,\mu}\, G^{\tau\beta} = - \partial_\lambda \left(\mathcal{L}' g_\mu^\lambda - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\lambda}}\, g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \right). \tag{III.2.35}$$

Se agora definirmos $\sqrt{-g}\; \ell_\mu^\nu$ como

$$\sqrt{-g}\; \ell_\mu^\nu = \frac{1}{2k} \left(\mathcal{L}' g_\mu^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\nu}}\, g^{\tau\beta}{}_{,\mu} \right), \tag{III.2.36}$$

e usarmos a (III.2.35), poderemos escrever a (III.1.12) como

$$(\sqrt{-g}\; E_\mu^\nu)_{,\nu} + (\sqrt{-g}\; \ell_\mu^\nu)_{,\nu} = \left[\sqrt{-g}\, (E_\mu^\nu + \ell_\mu^\nu) \right]_{,\nu} = 0. \tag{III.2.37}$$

Assim, a quantidade

$$\sqrt{-g}\, (E_\mu^\nu + \ell_\mu^\nu) = \sqrt{-g}\; E_\mu^\nu + \frac{1}{2k}\, \mathcal{L}' g_\mu^\nu - \frac{1}{2k} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\nu}}\, g^{\tau\beta}{}_{,\mu}, \tag{III.2.38}$$

tem uma divergência ordinária e representa a densidade de alguma quantidade conservada. A expressão $\sqrt{-g}\; \ell_\mu^\nu$ é usualmente citada como o pseudo-tensor do campo gravitacional.

A divergência nula de $\sqrt{-g}\; (E_\mu^\nu + \ell_\mu^\nu)$ origina uma quantidade integral conservada, precisamente do mesmo modo que a divergência nula de E_μ^ν, no espaço-plano, origina o quadri-vetor energia-momentum P_μ.

Assumimos, inicialmente, que o tensor energia-momentum é não nulo, somente em uma parte finita do espaço-tempo, e tende à forma Lorentziana

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quando nos aproximamos,do infinito. É evidente que a quantidade ℓ_μ^ν tenderá a zero se nos aproximarmos do infinito.

Integremos a equação (III.2.37) sobre todo espaço-tempo, entre as hipersuperfícies $x^0 = t_i$ e $x^0 = t_f$:

$$\int_{t_f} \sqrt{-g}\,(E_\mu^{\ 0} + \ell_\mu^{\ 0})\,d^3x - \int_{t_i} \sqrt{-g}\,(E_\mu^{\ 0} + \ell_\mu^{\ 0})\,d^3x = 0, \qquad \text{(III.2.39)}$$

em analogia com (III.1.6). A quantidade

$$P_\mu = \int_t \sqrt{-g}\,(E_\mu^{\ 0} + \ell_\mu^{\ 0})\,d^3x, \qquad \text{(III.2.40)}$$

é então conservada, e pode ser interpretada como a generalização Relativista Geral do quadri-vetor energia-momentum da Relatividade Especial.

Porém, devemos notar que a quantidade $\sqrt{-g}\,(E_\mu^{\ \nu} + \ell_\mu^{\ \nu})$ não é um tensor e P_μ não é um quadri-vetor covariante, em geral. Isto acontece porque $\mathcal{L}'$ não é uma densidade escalar.

III. 3 DERIVAÇÃO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Considerando o caso sem fontes, a Lagrangeana $\mathcal{L}'$, obtida na Secção III.2, é dada por

$$\mathcal{L}' = \sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\,(\Gamma^\alpha_{\beta\rho}\Gamma^\beta_{\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\sigma\rho}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}). \qquad \text{(III.3.1)}$$

[19]

Esta quantidade permanece invariante sob transformações do tipo

$$x^{\mu} \to \bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\, \xi^{\mu}(x)\,, \tag{III.3.2}$$

e portanto, a variação $\delta \mathcal{L}'$ torna-se

$$\delta \mathcal{L}' = \bar{\mathcal{L}}'(x) - \mathcal{L}'(x)\,,$$

$$\delta \mathcal{L}' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, \delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho}\,. \tag{III.3.3}$$

Mas, pela transformação de coordenadas (III.3.2), encontramos

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\, g^{\alpha\beta} = \left(\delta^{\mu}_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\delta^{\nu}_{\beta} + \varepsilon \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right) g^{\alpha\beta}\,,$$

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \left[\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\alpha}\, \varepsilon \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \delta^{\nu}_{\beta}\, \varepsilon \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + O(\varepsilon^2)\right] g^{\alpha\beta}\,,$$

$$\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varepsilon\left(\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta}\right), \tag{III.3.4}$$

e assim

$$\delta g^{\mu\nu} = \varepsilon\left(\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta}\right). \tag{III.3.5}$$

Calculando a variação $\delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$ temos, por definição, que

$$\bar{g}^{\mu\nu}{}_{,\rho} = \frac{\partial \bar{g}^{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^{\rho}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\rho}}\,. \tag{III.3.6}$$

Porém

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\rho}} = \delta^{\alpha}_{\rho} - \varepsilon \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\rho}} + O(\varepsilon^2)\,, \tag{III.3.7}$$

logo, obtemos

$$\frac{\partial \bar{g}^{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^{\rho}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \varepsilon\left[\partial_{\rho}\left(\xi^{\mu}{}_{,\tau}\, g^{\tau\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta}\right) - g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\, \xi^{\alpha}{}_{,\rho}\right]. \tag{III.3.8}$$

Finalmente, para $\delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$ resulta

$$\delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho} = \varepsilon\left[(\xi^{\mu}{}_{,\tau}\, g^{\tau\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta})_{,\rho} - g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\, \xi^{\alpha}{}_{,\rho}\right],$$

ou ainda

$$\delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho} = \varepsilon\left[\xi^{\mu}{}_{,\tau}\, g^{\tau\nu}{}_{,\rho} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta}{}_{,\rho} - \xi^{\alpha}{}_{,\rho}\, g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \right.$$

$$\left. + \xi^{\mu}{}_{,\tau\rho}\, g^{\tau\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta\rho}\, g^{\mu\beta}\right]. \qquad \text{(III.3.9)}$$

A variação de $\sqrt{-g}$ já foi obtida na secção anterior, Equação (III.2.13)

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}$$

Agora, fazendo uso da variação $\delta g^{\mu\nu}$ da Equação (III.3.5), teremos

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g_{\mu\nu}\, \varepsilon\,(\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta}),$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\varepsilon\sqrt{-g}}{2}\,(\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, \delta_{\mu}^{\alpha} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, \delta_{\nu}^{\beta}),$$

e finalmente

$$\delta(\sqrt{-g}) = \varepsilon\sqrt{-g}\; \xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \qquad \text{(III.3.10)}$$

As variações que foram calculadas para $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$ e $\sqrt{-g}$ são gerais, para qualquer transformação de coordenadas do tipo considerado na Expressão (III.3.2). Desejamos usar estas relações para calcular $\delta\mathcal{L}'$.

Especificaremos os ξ^{α} como funções lineares das coordenadas x^{μ}. Então a Equação(III.3.2) é uma transformação linear de coordenadas, de tal forma que sob tal transformação, os coeficientes de conexão transformar-se-ão como tensores. Assim a expressão de $\mathcal{L}'$ é uma densidade escalar, sob a classe restrita de transformações lineares.

Como $\mathcal{L}'$ é uma densidade escalar, sob tais transformações, esta tem uma variação muito simples, devida inteiramente à variação do fator $\sqrt{-g}$, uma vez que

$$\delta \mathcal{L}' = \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}}\, \delta \sqrt{-g}\,, \tag{III.3.11}$$

pois $\frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}}$ é um invariante escalar. Então ficamos com

$$\delta \mathcal{L}' = \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}} \left(\varepsilon \sqrt{-g}\; \xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \right),$$

$$\delta \mathcal{L}' = \varepsilon\, \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}\, \mathcal{L}'. \tag{III.3.12}$$

Por outro lado, também podemos calcular $\delta\mathcal{L}'$ por uma transformação linear, substituindo as variações $\delta g^{\mu\nu}$ e $\delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho}$ na expressão geral (III.3.3). Como estamos considerando ξ^{α} como funções lineares, estas têm segundas derivadas nulas, e então:

$$\delta \mathcal{L}' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, \delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho}\,,$$

$$\delta \mathcal{L}' = \varepsilon \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\, \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, g^{\alpha\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\, \xi^{\nu}{}_{,\alpha}\, g^{\mu\beta} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, \xi^{\mu}{}_{,\tau}\, g^{\tau\nu}{}_{,\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, g^{\mu\beta}{}_{,\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, \xi^{\alpha}{}_{,\rho}\, g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \Big),$$

ou finalmente, fazendo um rearranjo nos índices

$$\delta \mathcal{L}' = \varepsilon \Big[\xi^{\mu}{}_{,\alpha} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\, g^{\alpha\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}}\, g^{\nu\alpha} \Big) +$$

$$+ \xi^{\mu}{}_{,\tau} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\tau\nu}{}_{,\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\tau}{}_{,\rho} \Big) -$$

$$- \xi^{\alpha}{}_{,\rho}\, \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \Big]. \tag{III.3.13}$$

Comparando as duas variações obtidas encontramos

$$\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}\mathcal{L}' = \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}}g^{\nu\alpha}\right) + \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\alpha\nu}{}_{,\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}g^{\nu\alpha}{}_{,\rho}\right) - \xi^{\alpha}{}_{,\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\right),$$

ou ainda

$$\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\left[\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\alpha\nu}{}_{,\rho} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}}g^{\nu\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}g^{\nu\alpha}{}_{,\rho}\right] -$$

$$- \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\left[\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}}g^{\beta\nu}{}_{,\mu}\right] = \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha}\,\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\,.$$

Finalmente

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\alpha\nu}{}_{,\rho} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}}g^{\nu\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}g^{\nu\alpha}{}_{,\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}}g^{\beta\nu}{}_{,\mu} = g_{\mu}^{\alpha}\mathcal{L}'. \qquad \text{(III.3.14)}$$

Notamos que esta identidade foi obtida usando métodos variacionais e uma transformação linear de coordenadas, mas é completamente geral e independente de qualquer transformação usada.

É claro que, por substituição, as variações de $g^{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}$ em (III.3.5) e (III.3.9), para a variação de $\mathcal{L}'$ em (III.3.3), podemos calcular $\delta\mathcal{L}'$ para um ξ^{α} arbitrário e realmente tendo calculado $\delta\mathcal{L}'$ sem preocupação para obter a identidade (III.3.14). Agora veremos que (III.3.14) simplifica grandemente a forma de $\delta\mathcal{L}'$ e é bem importante o valor de suas derivadas. As substituições em (III.3.3), dos resultados obtidos, nos leva a

$$\partial\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho},$$

$$\delta\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\,\varepsilon\left(\xi^{\mu}{}_{,\alpha}g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}g^{\mu\beta}\right) +$$

$$+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\,\varepsilon\left(g^{\tau\nu}{}_{,\rho}\,\xi^{\mu}{}_{,\tau}+g^{\mu\beta}{}_{,\rho}\,\xi^{\nu}{}_{,\beta}-g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\,\xi^{\alpha}{}_{,\rho}+\right.$$

$$\left.+\,\xi^{\mu}{}_{,\tau\rho}\,g^{\tau\nu}+\xi^{\nu}{}_{\beta\rho}\,g^{\mu\beta}\right),$$

ou, rearranjando convenientemente os termos,

$$\delta\mathcal{L}'=\varepsilon\left\{\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}g^{\alpha\nu}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\alpha\nu}{}_{,\rho}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}}g^{\nu\alpha}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}g^{\nu\alpha}{}_{,\rho}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}}g^{\beta\nu}{}_{,\mu}\right]+\xi^{\mu}{}_{,\tau\rho}\left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\tau\nu}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}g^{\nu\tau}\right]\right\}.$$

A substituição de (III.3.14) fornece o resultado mais simples

$$\delta\mathcal{L}'=\varepsilon\,\mathcal{L}'\,\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}+\varepsilon\,\xi^{\mu}{}_{,\tau\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}g^{\tau\nu}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}g^{\nu\tau}\right), \qquad \text{(III.3.15)}$$

que é completamente geral e vale para qualquer variação de coordenadas (III.3.2).

Seja uma variação arbitrária do tensor métrico, que se anule sobre o contôrno D^4, e consideremos

$$J=\int_{D^4}\mathfrak{F}\,d^4x. \qquad \text{(III.3.16)}$$

Aqui

$$\mathfrak{F}=\sqrt{-g}\,F=\sqrt{-g}\,g^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho},$$

$$\mathfrak{F}=\sqrt{-g}\,g^{\sigma\rho}\left(\Gamma^{\beta}_{\sigma\rho,\beta}-\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}\right),$$

e como

$$A'=\int_{D^4}\mathcal{L}'\,d^4x,$$

então, pelos resultados da secção anterior, concluímos que

$$J=\int_{D^4}\mathfrak{F}\,d^4x=\int_{D^4}\mathcal{L}'\,d^4x+(\text{termos de superfície}).$$

Se escolhermos os ξ^{α} em (III.3.2) nulos e também nulas as suas primeira e segunda derivadas sobre o contôrno D^4, é claro que por (III.3.2) $\delta g^{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu}{}_{,\rho} = 0$ sobre este contôrno, tal que $\delta A' = \delta J$. Entretanto sabemos que J é um invariante escalar e assim deve ter uma variação nula sob qualquer variação de coordenadas. Então, para esta variação de coordenadas em especial, deveremos ter

$$\delta J = \delta A' = \delta \int \mathcal{L}' \, d^4x = 0 . \tag{III.3.17}$$

Isto pode ser considerado se observarmos o fato que $\sqrt{-g}\, d^4x$ é um invariante escalar que tem variação nula, sob uma mudança de coordenadas. Então, desde que a ordem das antigas e novas variáveis é a mesma, teremos

$$\delta A' = \delta \int \left(\frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}} \right) \sqrt{-g}\, d^4x = 0 .$$

A variação $\frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}}$ é fácilmente obtida, pela variação de $\mathcal{L}'$ em (III.3.15) e pela variação de $\sqrt{-g}$ em (III.3.10):

$$\sqrt{-g}\; \delta\left(\frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}}\right) = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \delta\mathcal{L}' + \mathcal{L}' \delta\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\right) \right\} =$$

$$= \delta\mathcal{L}' - \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}}\, \delta\sqrt{-g} \quad ,$$

$$= \delta\mathcal{L}' - \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}} \left(\varepsilon \sqrt{-g}\; \xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \right),$$

logo

$$\sqrt{-g}\; \delta\left(\frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g}}\right) = \varepsilon\; \xi^{\mu}{}_{,\alpha\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha} \right). \tag{III.3.18}$$

Assim a variação de A' implica em

$$\delta A' = \varepsilon \int_{D^4} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu}\, \xi^{\mu}{}_{,\alpha\rho}\, d^4x \; +$$

$$+\ \varepsilon \int_{D^4} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha}\, \xi^{\mu}{}_{,\alpha\rho}\, d^4x = 0\ . \qquad \text{(III.3.19)}$$

Integrando por partes esta última expressão, e levando em consideração o fato que ξ^{μ} e $\xi^{\mu}{}_{,\alpha}$ se anulam sobre o contôrno de D^4, obtemos

$$\delta A' = -\varepsilon \left\{ \int_{D^4} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu} \right)_{,\rho} \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, d^4x + \int_{D^4} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha} \right)_{,\rho} \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, d^4x \right\} = 0,$$

$$\delta A' = \varepsilon \left\{ \int_{D^4} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu} \right)_{,\alpha\rho} \xi^{\mu}\, d^4x + \int_{D^4} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha} \right)_{,\alpha\rho} \xi^{\mu}\, d^4x = 0, \right.$$

ou, finalmente,

$$\delta A' = \varepsilon \int_{D^4} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu} \right)_{,\alpha\rho} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha} \right)_{,\alpha\rho} \right] \xi^{\mu} d^4x = 0. \qquad \text{(III.3.20)}$$

Desde que ξ^{μ} é arbitrário dentro de D^4, então obtemos a lei de divergência

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}} \right)_{,\alpha\rho} = 0\ . \qquad \text{(III.3.21)}$$

É aparente que a expressão

$$\sqrt{-g}\ C_{\mu}^{\alpha} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha} \right)_{,\rho}\ , \qquad \text{(III.3.22)}$$

está associada a alguma quantidade física conservada.

Trabalhando explicitamente sobre C_{μ}^{α}, vejamos que tipo de quantidade física ela representa:

$$\sqrt{-g}\ C_{\mu}^{\alpha} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}} \right)_{,\rho} g^{\alpha\nu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}} \right)_{,\rho} g^{\nu\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\, g^{\alpha\nu}{}_{,\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\, g^{\nu\alpha}{}_{,\rho}\ . \qquad \text{(III.3.23)}$$

Pela resolução da Identidade (III.3.14) temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}} g^{\alpha\nu}{}_{,\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}} g^{\nu\alpha}{}_{,\rho} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\alpha\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}} g^{\nu\alpha} - \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha} ,$$

e substiuindo o resultado em (III.3.23) encontramos

$$\sqrt{-g}\; C_{\mu}^{\alpha} = \partial_{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\right) + \partial_{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\right) g^{\nu\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\alpha\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}} g^{\nu\alpha} - \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha} ,$$

ou ainda, rearranjando os termos

$$\sqrt{-g}\; C_{\mu}^{\alpha} = \left[\partial_{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\rho}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}}\right] g^{\alpha\nu} + \left[\partial_{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}{}_{,\rho}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\nu\mu}}\right] g^{\nu\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} - \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha} . \qquad \text{(III.3.24)}$$

Finalmente, pela Equação (III.2.29), temos

$$\sqrt{-g}\; G_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\right) ,$$

e assim ficamos com

$$\sqrt{-g}\; C_{\mu}^{\alpha} = -\sqrt{-g}\; G_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} - \sqrt{-g}\; G_{\nu\mu} g^{\nu\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} - \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha} . \qquad \text{(III.3.25)}$$

Fazendo uso das Equações de Campo $G_{\mu\nu} = k E_{\mu\nu}$ temos

$$\sqrt{-g}\; C_{\mu}^{\alpha} = -k\sqrt{-g}\; E_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} - k\sqrt{-g}\; E_{\nu\mu} g^{\nu\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} - \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha} ,$$

ou ainda

$$\sqrt{-g}\; C_{\mu}^{\alpha} = -k\sqrt{-g}\left(E_{\mu}{}^{\cdot\alpha} + E^{\alpha}{}_{\cdot\mu}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\beta\nu}{}_{,\alpha}} g^{\beta\nu}{}_{,\mu} - \mathcal{L}' g_{\mu}^{\alpha} . \qquad \text{(III.3.26)}$$

Porém, pela Equação (III.2.38) sabemos que

$$\sqrt{-g}\left(E_{\mu}{}^{\nu} + \ell_{\mu}{}^{\nu}\right) = \sqrt{-g}\; E_{\mu}{}^{\nu} + \frac{1}{2k}\mathcal{L}' g_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2k}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g^{\tau\beta}{}_{,\nu}} g^{\tau\beta}{}_{,\mu} ,$$

e portanto

$$C_{\mu}^{\alpha} = -k\left(E_{\mu}^{\cdot\alpha} + \ell_{\mu}^{\cdot\alpha} + E^{\alpha}_{\cdot\mu} + \ell^{\alpha}_{\cdot\mu}\right),$$

$$C_{\mu\alpha} = -k\left(E_{\mu\alpha} + E_{\alpha\mu}\right) - k\left(\ell_{\mu\alpha} + \ell_{\alpha\mu}\right). \qquad \text{(III.3.27)}$$

A quantidade $\sqrt{-g}\,\ell_{\mu}^{\nu}$ é chamada de pseudo-tensor do campo gravitacional. A divergência nula de $\sqrt{-g}\,(E_{\mu}^{\nu} + \ell_{\mu}^{\nu})$ dá uma quantidade conservada, precisamente do mesmo modo que a divergência nula de E_{μ}^{ν}, no espaço-plano, origina o quadri-vetor energia momentum.

CAPÍTULO IV

CONSTRUÇÃO DA MÉTRICA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

IV.I A MÉTRICA PARA O CASO ESTÁTICO COM SIMETRIA ESFÉRICA

Vamos considerar aqui a solução proposta por Papapetrou[3], a qual se fundamenta no seguinte:

"Existe um referencial tal que depois de uma rotação arbitrária em torno de um centro de simetria, as novas componentes $g'_{\mu\nu}$ serão as mesmas funções das novas coordenadas x'_α que os $g_{\mu\nu}$ o eram dos x_α. No caso de uma componente tensorial $g_{\mu\nu}$, contendo uma parte simétrica e uma anti-simétrica,

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]} , \tag{IV.1.1}$$

cada uma destas partes é transformada separadamente. Conseqüentemente encontraremos a forma geral de um $g_{\mu\nu}$ esfericamente simétrico, se combinarmos as formas esfericamente simétricas de $g_{(\mu\nu)}$ e $g_{[\mu\nu]}$.

Os $g_{(\mu\nu)}$, esfericamente siméticos, constituem a solução de Schwazschild da Teoria da Relatividade Geral. A sua forma geral, em coordenadas esféricas é a seguinte:

$$g_{(\mu\nu)} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \text{(IV.1.2)}$$

onde α, β e γ são funções arbitrárias de r.

Para encontrar os $g_{[\mu\nu]}$ esfericamente simétricos usamos coordenadas "cartesianas" e consideramos os valores das componentes $g_{\mu\nu}$ no ponto $(0, 0, z=r)$ do eixo z. Depois da rotação temos que

$$x' = -y \;, \quad y' = x \;, \quad z' = z \;, \quad t' = t \;,$$

e as novas componentes serão

$$\left.\begin{aligned} g'_{[12]} &= g_{[12]}\,; \\ g'_{[23]} &= -g_{[31]}\,; \\ g'_{[31]} &= -g_{[24]}\,; \\ g'_{[24]} &= g_{[14]}\,; \\ g'_{[14]} &= -g_{[24]}\,; \\ g'_{[34]} &= g_{[34]}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.1.3)}$$

Por outro lado, encontramos, pela condição de simetria esférica que

$$g'_{[\alpha\beta]} = g_{[\alpha\beta]} \;, \qquad \text{(IV.1.4)}$$

(desde que para os pontos sobre o eixo z tenhamos $x'_\alpha = x_\alpha$).

Combinando os resultados (IV.1.3) e (IV.1.4) obtemos

$$g_{[23]} = g_{[31]} = g_{[14]} = g_{[24]} = 0 \;,$$

e as únicas componentes não nulas são $g_{[12]}$ e $g_{[34]}$. Usando agora uma nova rotação, que conduza o ponto $(0,0,r)$ para (x,y,z), tal que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ,$$

encontramos que os $g_{[\mu\nu]}$, gerais e esfericamente simé- tricos, têm em coordenadas cartesianas, a seguinte forma:

$$g_{[\mu\nu]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{r}v & -\frac{y}{r}v & \frac{x}{r}w \\ -\frac{z}{r}v & 0 & \frac{x}{r}v & \frac{y}{r}w \\ \frac{y}{r}v & -\frac{x}{r}v & 0 & \frac{z}{r}w \\ -\frac{x}{r}w & -\frac{y}{r}w & -\frac{z}{r}w & 0 \end{bmatrix} . \qquad \text{(IV.1.5)}$$

Para a solução das equações de campo, trabalharemos em coordenadas polares, consequentemente necessitamos da forma de $g_{[\mu\nu]}$ em coordenadas polares cartesianas:

$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi ,\; y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi ,\; z = r\cos\theta , \qquad \text{(IV.1.6)}$$

e encontramos como a forma do campo tensorial (IV.1.5) que

$$g_{[\mu\nu]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & r^2 v\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & -r^2 v\,\text{sen}\,\theta & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad \text{(IV.1.7)}$$

e então os $g_{[\mu\nu]}$ gerais, esfericamente simétricos, são

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -\beta & r^2\vartheta\, \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & -r^2\vartheta\, \mathrm{sen}\,\theta & -\beta\, \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} . \qquad \text{(IV.1.8`)}$$

As equações de campo a serem resolvidas serão

$$F_{(\mu\nu)} = 0, \qquad \text{(IV.1.9)}$$

$$F_{[[\mu\nu],\sigma]} = 0, \qquad \text{(IV.1.10)}$$

$$g^{[\mu\nu]}{}_{,\nu} = 0, \qquad \text{(IV.1.11)}$$

onde, por (I.5.3), temos que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \qquad \text{(IV.1.12)}$$

e os $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ devem ser calculados pelas equações

$$g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\gamma\nu} = 0 . \qquad \text{(IV.1.13)}$$

Tentaremos resolver as equações de campo, não para o caso geral (IV.1.8), mas sim itnroduzindo as seguintes simplificações:

$$\vartheta = 0, \qquad \text{(IV.1.14)}$$

e

$$\beta = r^2 . \qquad \text{(IV.1.15)}$$

Assim $g_{\mu\nu}$ toma a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} . \tag{IV.1.16}$$

Primeiro consideramos o conjunto das (IV.1.11). Por (IV.1.16) encontramos que

$$\sqrt{-g} = r^2 \operatorname{sen}\theta \sqrt{\alpha\gamma - w^2} , \tag{IV.1.17}$$

e a única componente não nula de $g^{[\mu\nu]}$ é

$$g^{[14]} = -g^{[41]} = -\frac{w r^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\alpha\gamma - w^2}} . \tag{IV.1.18}$$

Portanto, as equações $g^{[\mu\nu]}{}_{,\nu} = 0$ são identicamente satisfeitas para μ = 1, 2, 3, porém para μ = 4 chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w r^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\alpha\gamma - w^2}} \right) = 0 ,$$

equação que pode ser imediatamente integrada, fornecendo

$$\frac{w^2 r^4}{\alpha\gamma - w^2} = p^4 , \tag{IV.1.19}$$

onde o p é uma constante de integração, com a dimensão de comprimento.

Resolvendo (IV.1.19) em relação a w temos

$$w^2 r^4 = p^4 \alpha\gamma - p^4 w^2 ,$$

$$w^2 (r^4 + p^4) = p^4 \alpha\gamma ,$$

ou

$$w^2 = \frac{p^4 \alpha\gamma}{r^4 + p^4} . \tag{IV.1.20}$$

Definindo agora

$$A = \frac{p^4}{p^4 + r^4} , \tag{IV.1.21}$$

encontramos

$$\omega^2 = A\,\alpha\,\gamma. \tag{IV.1.22}$$

Para os outros dois conjuntos de equações de campo devemos primeiro calcular os valores $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, resolvendo o sistema de 64 equações algébricas (IV.1.13), lineares, para os $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. A solução é factível: o sistema total separa-se em vários sistemas parciais; 3 deles, cada um, consistindo de 12 equações e um outro com 6 eqyações homogêneas, e conseqüentemente, as 42 componentes $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ que aparecem nestas equações são nulas. Assim existem 3 sistemas não homogêneos de 6 equações, um de 3 e um de 1 equação.

Resolvendo estes sistemas encontramos que outras três componentes $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ se anulam e as não nulas são as dezenove seguintes. Aqui o hífem significa deriviação em relação a r:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{\alpha'}{2\alpha}\,; \\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{\alpha}\,; \\
\Gamma^1_{33} &= -\frac{r}{\alpha}\operatorname{sen}^2\theta \\
\Gamma^1_{44} &= \frac{\gamma'}{2\alpha} + \frac{4\omega^2}{r\alpha^2}\,; \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,; \\
\Gamma^2_{33} &= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,;
\end{aligned}\right\} \tag{IV.1.23a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} ;\\
&\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = tg\,\theta ;\\
&\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{\gamma'}{2\gamma} + \frac{2\omega^2}{r\alpha\gamma} ;\\
&\Gamma^2_{42} = -\Gamma^2_{24} = \frac{\omega}{r\alpha} ;\\
&\Gamma^3_{43} = -\Gamma^3_{34} = \frac{\omega}{r\alpha} ;\\
&\Gamma^1_{14} = -\Gamma^1_{41} = \frac{2\omega}{r\alpha} .
\end{aligned}\right\} \qquad (IV.1.23b)$$

<u>Observação</u>: Como podemos notar, teremos algumas componentes da torção não nulas. Sabendo por (I.2.8) que

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + C^\alpha_{\nu\mu} ,$$

onde os $C^\alpha_{\nu\mu}$ são os coeficientes de não holonomia, estas componentes serão:

$$T^2_{24} = \Gamma^2_{42} - \Gamma^2_{24} + C^2_{42} = \frac{2\omega}{r\alpha} + C^2_{42} ,$$

$$T^2_{42} = \Gamma^2_{24} - \Gamma^2_{42} + C^2_{24} = -\frac{2\omega}{r\alpha} + C^2_{24} ,$$

$$T^3_{34} = \Gamma^3_{43} - \Gamma^3_{34} + C^3_{43} = \frac{2\omega}{r\alpha} + C^3_{43} ,$$

$$T^3_{43} = \Gamma^3_{34} - \Gamma^3_{43} + C^3_{34} = -\frac{2\omega}{r\alpha} + C^3_{34} ,$$

$$T^1_{14} = \Gamma^1_{41} - \Gamma^1_{14} + C^1_{41} = -\frac{4\omega}{r\alpha} + C^1_{41} ,$$

$$T^1_{41} = \Gamma^1_{14} - \Gamma^1_{41} + C^1_{14} = \frac{4\omega}{r\alpha} + C^1_{14} .$$

É interessante comparar este resultado com o caso do campo de uma massa puntual, em Relatividade Geral (i.e $w = 0$). Existem agora, adicionalmente, três pares de Γ's anti-simétricos e alguns termos contendo w, nas expressões Γ^1_{44} e $\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41}$.

Usando os resultados (IV.1.23) podemos, por meio de (IV.1.22), conhecer os valores de $F_{\mu\nu}$. Encontramos que as componentes não nulas são as seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
F_{11} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' + \frac{\gamma'}{4\gamma}\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) - \frac{\alpha'}{r\alpha} + 2\left(\frac{w^2}{r\alpha\gamma}\right)' + \\
&\qquad + \frac{2w^2}{r\alpha\gamma}\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{2\alpha} + \frac{2w^2}{r\alpha\gamma}\right), \\
F_{22} &= \frac{1}{\sin^2\theta} F_{33} = \frac{r}{2\alpha}\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + \frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{2w^2}{\alpha^2\gamma}, \\
F_{44} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\alpha}\right)' + \left(\frac{\gamma'}{4\alpha}\right)\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{4}{r}\right) - \frac{4}{r}\left(\frac{w^2}{r\alpha^2}\right)' + \\
&\qquad + \frac{w^2}{r\alpha^2}\left(\frac{3\gamma'}{\gamma} - \frac{2\alpha'}{\alpha} - \frac{14}{r} + \frac{8w^2}{r\alpha\gamma}\right), \\
F_{14} &= -F_{41} = -2\left(\frac{w}{r\alpha}\right)' - \frac{4w}{r^2\alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV.1.24)}$$

Assim, a única componente anti-simétrica de $F_{\mu\nu}$, não nula, é F_{14}

$$F_{[14]} = F_{14},$$

que é uma função somente de r, e conseqüentemente as equações (IV.1.10) são identicamente satisfeitas. O conjunto das equações (IV.1.9) fornece as três equações seguintes:

$$F_{11} = 0 \quad ; \quad F_{22} = 0 \quad ; \quad F_{44} = 0 . \tag{IV.1.25}$$

A situação é completamente similar àquelas do problema correspondente em Relatividade Geral. Temos três equações diferenciais, de segunda ordem, para as duas funções desconhecidas α e γ, pois w é dada em termos de α e γ por (IV.1.22).

Para resolver este sistema de equações é suficiente seguir o mesmo caminho que em Relatividade Geral. Primeiro calculamos a quantidade

$$P = -\frac{F_{11}}{\alpha} - \frac{2F_{22}}{r^2} + \frac{F_{44}}{\gamma} , \tag{IV.1.26}$$

que corresponde ao escalar F, na Relatividade Geral. Então formamos as seguintes combinações lineares da Equação (IV.1.26):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} F_{11} - \frac{1}{2} P &= 0 , \\ -\frac{1}{r^2} F_{22} - \frac{1}{2} P &= 0 , \\ \frac{1}{\gamma} F_{44} - \frac{1}{2} P &= 0 , \end{aligned}\right\} \tag{IV.1.27}$$

o que corresponde às equações $F_1{}^1 = F_2{}^2 = F_4{}^4 = 0$, na Relatividade Geral. Fazendo agora

$$\alpha = e^{\mu(r)} \quad e \quad \gamma = e^{\nu(r)} , \tag{IV.1.28}$$

encontramos que as últimas equações têm a seguinte forma:

$$
\left.
\begin{aligned}
& e^{-\mu}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{4}{r}A - \frac{2}{r^2}A - \frac{\mu'+\nu'}{2r}A\right) - \frac{1}{r^2} = 0; \\
& e^{-\mu}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\mu'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'-\mu'}{2r} + 3\,\frac{(\nu'-\mu')}{2r}A + \frac{2}{r}A^2 - \frac{8r^2}{p^4}A^2 = 0; \\
& e^{-\mu}\left(-\frac{\mu'}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r}A^2 + \frac{\mu'+\nu'}{2r}A\right) - \frac{1}{r^2} = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(IV.1.29)}
$$

Notamos que estas equações se reduzem ao problema correspondente em Relatividade Geral, se colooarmos $A = 0$ (i.e $p = 0$, quando de acôrdo com (IV.1.22) $\omega = 0$).

Subtraíndo a primeira e a última equação de (IV.1.27)encontramos

$$\frac{\mu'+\nu'}{r} + \frac{4}{r^2}A - \frac{4}{r^2}A^2 - \frac{\mu'+\nu'}{r}A = \left(\frac{\mu'+\nu'}{r} + \frac{4}{r^2}\right)(1-A) = 0$$

como, em face de (IV.1.22), temos

$$1 - A = \frac{r^4}{p^4+r^4} > 0\,,$$

então

$$\frac{\mu'+\nu'}{r} + \frac{4}{r^2}A = 0. \qquad \text{(IV.1.30)}$$

Usando este resultadc encontramos para a última de (IV.1.29)

$$e^{-\mu}\left(-\frac{\mu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Vemos que os termos que contêm A agora desapareceram, e os termos em $\alpha = e^{\mu(r)}$ satisfazem exatamente às mesmas equações da Relatividade Geral. Consequentemente α será dado por

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2m}{r}\,, \qquad \text{(IV.1.31)}$$

onde m é uma constante de integação. Por outro lado, a equação (IV.1.30) pode, de acordo com (IV.1.22), ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dr}\left(\mu+\nu+\ln\frac{r^4}{p^4+r^4}\right)=0.$$

Então

$$\mu+\nu+\ln\frac{r^4}{p^4+r^4}=\text{constante},$$

e com (IV.1.26) encontramos

$$\alpha\gamma\frac{r^4}{p^4+r^4}=\xi^2, \tag{IV.1.32}$$

onde ξ^2 é uma outra constante de integração. Podemos verificar que α e γ, definidos em (IV.1.31) e (IV.1.32), satisfazem às condições exigidas.

Para w, dada em (IV.1.22) encontramos

$$w=\pm\,\xi\,\frac{p^2}{r^2}. \tag{IV.1.33}$$

Para $r\to\infty$ temos $w\to 0$ e $g_{\mu\nu}\to g_{(\mu\nu)}$. É razoável considerar $g_{(\mu\nu)}$ como tensor métrico e exigir que em $r=\infty$ os $g_{\mu\nu}$ tendam ao tensor métrico de Schwarzschild. Então vemos que podemos colocar $\xi^2=1$ e assim ficamos com

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\left(1+\frac{p^4}{r^4}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right);\\ w&=\pm\,\frac{p^2}{r^2}.\end{aligned}\right\} \tag{IV.1.34}$$

Finalmente a matriz dos $g_{\mu\nu}$ torna-se:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & \frac{p^2}{r^2} \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ -\frac{p^2}{r^2} & 0 & 0 & \left(1+\frac{p^4}{r^4}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right) \end{bmatrix} ,$$

(IV.1.35)

e a quantidade $\sqrt{-g}$ fica

$$\sqrt{-g} = r^2 \operatorname{sen}\theta .$$

Os mesmos resultados seriam conseguidos pela suposição alternativa de que a métrica é determinada por $g^{(\mu\nu)}$ (e não por $g_{(\mu\nu)}$).

IV. 2 ANÁLISE DA SIGNATURA DA MÉTRICA

Como desejamos uma solução não simétrica, mas Hermiteana, faremos $p^2 = i\ell^2$, então ficamos com

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & \frac{i\ell^2}{r^2} \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 sen^2\theta & 0 \\ -\frac{i\ell^2}{r^2} & 0 & 0 & \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right) \end{bmatrix} .$$

(IV.2.1)

O elemento de linha será então dado por

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)dt^2. \quad \text{(IV.2.2)}$$

Analisando as possibilidades para a signatura **S** da métrica encontramos:

i) $r < \ell$

a) $2m < \ell$, $(2m < r)$

$g_{11} < 0$, $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} < 0$;

portanto

$$S = -4; \quad \text{(IV.2.3)}$$

b) $2m < \ell$ $(2m > r)$

$g_{11} > 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} > 0$

logo $S = 0$; (IV.2.4)

c) $2m = \ell$

$g_{11} > 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} > 0$

então $S = 0$; (IV.2.5)

d) $2m > \ell$

$g_{11} > 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} > 0$,

portanto $S = 0$; (IV.2.6)

ii) $r = \ell$

a) $2m < \ell$

$g_{11} < 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} = 0$;

então $S = -2$; (IV.2.7)

b) $2m = \ell$

$g_{11} = 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} = 0$

logo $S = 0$; (IV.2.8)

c) $2m > \ell$

$g_{11} > 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} = 0$

portanto $S = 0$; (IV.2.9)

iii) $r > \ell$

a) $2m < \ell$

$g_{11} < 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} > 0$,

e teremos $S = -2$ (IV.2.10)

b) $2m = \ell$

$g_{11} < 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} > 0$,

encontramos então $S = -2$ (IV.2.11)

c) $2m > \ell$ $2m < r$

$g_{11} < 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} > 0$,

logo, também neste caso, temos $S = -2$; (IV.2.12)

d) $2m > \ell$ $2m > r$

$g_{11} > 0$; $g_{22} < 0$; $g_{33} < 0$; $g_{44} < 0$, e portanto, também teremos, $S = -2$. (IV.2.13)

Podemos observar que a métrica se comporta satisfatoriamente como o exigido no Capítulo I, i.e., terá signatura + 2 ou - 2 se $r \geqslant \ell$.

Em outras situações ela terá outras signaturas e deveremos então considerar outro modelo geométrico.

IV. 3 A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DO PARÂMETRO ℓ E ALGUMAS APLICAÇÕES.

IV.3.1 Caso do "Red Shift"[17]

Podemos predizer um interessante efeito do campo gravitacional: a dilatação do tempo e o consequente "red shift" das linhas espectrais, emitidas por átomos localizados sobre corpos maciços. Este efeito foi testado experimentalmente, logo temos uma justificativa experimental para basear nossos conceitos teóricos.

Consideremos, por exemplo, uma onda luminosa emitida pelo Sol e recebida na Terra. Usando g_{44} da Equação (IV.2.2), os intervalos de tempo-próprio estão relacionados aos intervalos da coordenada tempo por

$$d\tau_{\odot} = \left(1 - \frac{2M_{\odot}}{R_{\odot}}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\ell_{\odot}^4}{R_{\odot}^4}\right) dt \, , \qquad \text{(IV.3.1)}$$

onde $M_\odot$ é a massa do Sol no sistema geometrizado e $R_\odot$ seu raio.

Similarmente, sobre a Terra, intervalos de tempo-próprio estão relacionados a intervalos da coordenada tempo mediante

$$d\tau_\oplus = \left(1 - \frac{2M_\oplus}{R_\oplus}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4}\right), \tag{IV.3.2}$$

onde $M_\oplus$ é a massa da Terra, no sistema geometrizado, $R_\oplus$ é o raio da Terra e $\ell_\oplus$ é o parâmetro referente à Terra, assim como $\ell_\odot$ é aquele referente ao Sol.

Supondo agora que $\underline{n}$ ondas, de freqüência ν_0, sejam emitidas num intervalo de tempo próprio por um átomo sobre o Sol, teremos

$$n = \nu_0 \, \Delta\tau_\odot . \tag{IV.3.3}$$

Sobre a Terra certamente receberemos n ondas, mas a freqüência e o tempo de duração do trem de ondas ficam alterados. Usando uma relação freqüência/duração de tempo, análoga à (IV.3.3) para o Sol, temos

$$n = \nu \, \Delta\tau_\oplus . \tag{IV.3.4}$$

Porém, como $\underline{n}$ é uma constante,

$$\nu_0 \, \Delta\tau_\odot = \nu \, \Delta\tau_\oplus , \tag{IV.3.5}$$

e assim

$$\nu = \nu_0 \frac{\Delta\tau_\odot}{\Delta\tau_\oplus} . \tag{IV.3.6}$$

Em face de (IV.3.1) a duração do intervalo temporal do trem de ondas, correspondendo a $\Delta\tau_\odot$ é

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau_\odot}{\left(1 - \frac{2M_\odot}{R_\odot}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\ell_\odot^4}{R_\odot^4}\right)^{1/2}} . \tag{IV.3.7}$$

Suponhamos que a duração do intervalo temporal Δt seja a mesma sobre a Terra e sobre o Sol. A Equação (IV.3.2) torna-se então

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau_{\oplus}}{\left(1-\frac{2M_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)^{1/2}} . \qquad \text{(IV.3.8)}$$

Em virtude disto e de (IV.3.7) teremos

$$\frac{\Delta\tau_{\odot}}{\Delta\tau_{\oplus}} = \frac{\left(1-\frac{2M_{\odot}}{R_{\odot}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\odot}^{4}}{R_{\odot}^{4}}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2M_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\oplus}^{4}}{R_{\oplus}^{4}}\right)^{1/2}} . \qquad \text{(IV.3.9)}$$

A substituição deste resultado em (IV.3.6) leva a

$$\nu = \nu_{0}\,\frac{\left(1-\frac{2M_{\odot}}{R_{\odot}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\odot}^{4}}{R_{\odot}^{4}}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2M_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\oplus}^{4}}{R_{\oplus}^{4}}\right)^{1/2}} , \qquad \text{(IV.3.10)}$$

ou ainda

$$\frac{\nu-\nu_{0}}{\nu} = \frac{\left(1-\frac{2M_{\odot}}{R_{\odot}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\odot}^{4}}{R_{\odot}^{4}}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2M_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\oplus}^{4}}{R_{\oplus}^{4}}\right)^{1/2}} - 1$$

ou seja

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\left(1-\frac{2M_{\odot}}{R_{\odot}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\odot}^{4}}{R_{\odot}^{4}}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2M_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_{\oplus}^{4}}{R_{\oplus}^{4}}\right)^{1/2}} - 1 . \qquad \text{(IV.3.11)}$$

Para o caso de uma fonte terrestre teremos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\left(1-\frac{2M_\oplus}{R_\oplus}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{2M_\oplus}{R}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\ell_\oplus^4}{R^4}\right)^{1/2}} - 1 \qquad \text{(IV.3.12)}$$

onde $R_\oplus$ é o raio da Terra e $R = R_\oplus + h$, e h é altitude do receptor.

Desenvolvendo em série, vide Apêndice B, temos para a (IV.3.12)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4}\left(-\frac{2h}{R_\oplus} + \frac{5h^2}{R_\oplus}\right) + \frac{M_\oplus}{R_\oplus}\left(-\frac{h}{R_\oplus} + \frac{h^2}{R_\oplus^2}\right) +$$

$$+ \frac{M_\oplus^2}{R_\oplus^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{R_\oplus} - \frac{h^2}{R_\oplus^2}\right) + \cdots \qquad \text{(IV.3.13)}$$

Sabendo que

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}^{(18)} = -(2{,}45 \pm 0{,}019) \times 10^{-15},$$

$$R_\oplus^{(10)} = 6{,}37103 \times 10^8 \, cm,$$

$$M_\oplus^{(10)} = 0{,}4438 \, cm,$$

$$h^{(18)} = 2{,}26 \times 10^3 \, cm,$$

podemos proceder à determinação de $\ell_\oplus$ mediante

$$\ell_\oplus \leq \frac{R_\oplus\left[\frac{\Delta\nu}{\nu} + \frac{M_\oplus}{R_\oplus}\left(\frac{h}{R_\oplus} - \frac{h^2}{R_\oplus^2}\right) + \frac{M_\oplus^2}{R_\oplus^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{R_\oplus} + \frac{h^2}{R_\oplus^2}\right)\right]^{1/4}}{\left(\frac{5h^2}{R_\oplus^2} - \frac{2h}{R_\oplus}\right)^{1/4}}, \qquad \text{(IV.3.14)}$$

o que resulta

$$\ell_\oplus \leq 615995{,}5158 \, cm \simeq 6{,}160 \, km.$$

Para o Sol teremos por (IV.3.11)

$$\ell_\odot = R_\odot \left[1 - \frac{\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}+1\right)^2 \left(1 - \frac{2M_\oplus}{R_\oplus}\right)\left(1 - \frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4}\right)}{1 - \frac{2M_\odot}{R_\odot}} \right]^{1/4} , \qquad \text{(IV.3.15)}$$

sendo $M_\odot = 1{,}47666 \times 10^5\ cm$ (10),

$R_\odot = 6.9605 \times 10^{10} cm$ (10),

$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -2 \times 10^{-6}$ (10),

$M_\oplus = 0{,}4438\ cm$ (10),

$R_\oplus = 6{,}37103 \times 10^8\ cm$ (10),

$\ell_\oplus = 615\,995{,}5151\ cm$,

de onde concluimos

$$\ell_\odot \simeq 1543\,811\,527\ cm \simeq 15.438\ km.$$

Observamos assim que o parâmetro ℓ é o raio de uma esfera concêntrica, à Terra ou ao Sol o que evita, neste formalismo a singularidade em $r = 0$

IV.3.2 O PROBLEMA RELATIVÍSTICO DE KEPLER E O DESVIO DO PERIHÉLIO DE MERCÚRIO

Usaremos o resultado de Papapetrou, (IV.2.2) para estudar o movimento de uma partícula-teste, em um campo gravitacional, o que corresponde ao movimento planetário no campo gravitacional ao Sol. Este problema é análogo ao problema clássico de Kepler, do movimento planetário com um campo de força proporcional ao inverso do quadrado da distância.

Como um marco na investigação do problema relativístico, lembremos alguns dos muitos fatos do problema clássico. A primeira lei de Kepler estabelece que um planeta descreve uma órbita elíptica fechada, onde o Sol está em um dos pontos focais. Entretanto (mais realisticamente), a presença de pequenas influências, como outros planetas movendo-se no campo do Sol, causa uma perturbação no movimento de um dado planeta e a órbita resultante não é precisamente elíptica. Já podemos determinar a órbita real como uma elipse, que precessa no plano do movimento; isto é , o perihélio (ponto de maior aproximação do Sol) desvia-se e nem sempre ocorre na mesma posição angular.

O fato que as órbitas clássicas idealizadas são elipses fechadas é um resultado peculiar à lei Newtoniana, do inverso do quadrado; de fato, o próprio Newton verificou que, se a força gravitacional fosse proporcional a $1|r^{2+\delta}$ em vez de $1|r^2$, então uma órbita planetária não seria fechada, e o desvio do perihélio, da ordem de δ deveria ocorrer. Já, este resultado foi tomado para indicar que, as órbitas planetárias são aproximadamente fechadas.

Perguntamos agora que diferenças seriam esperadas entre as predições da Mecânica Celeste Clássica e a Mecânica Celeste Relativista. Desde que a primeira lei de Kepler é verificada experimentalmente com grande precisão, devemos esperar que, a Teoria Relativística apenas adicione poucas correções às órbitas aproximadamente elípticas, e contribua para o estudo do movimento do perihélio. Como ângulos são medidos com maior precisão em Astronomia do que distâncias, é natural concentrar nossa atenção sobre o deslocamente do perihélio.

Devido à grande velocidade de Mercúrio e da excentricidadade de sua órbita, a posição de seu perihélio pode ser determinada com boa precisão pela observação. A diferença entre o desvio do perihélio predito classicamente, devido à perturbação por outros planetas, e o desvio observado é da ordem de 43 segundos de arco por século.

A primeira tentativa para explicar esta discrepância constituiu na hipótese da existência de um novo planeta, Vulcano, dentro da órbita de Mercúrio, e muitos trabalhos teóricos foram feitos para predizer a posição de Vulcano, usando a perturbação conhecida da órbita de Mercúrio. Entretanto, observações cuidadosas falharam na descoberta do planeta hipotético, e essa hipótese foi finalmente abandonada em 1915, quando Einstein usou a Teoria da Relatividade Geral para explicar o efeito observado. Agora investigaremos o problema Relativístico Geral de Kepler e, como uma aplicação, estudaremos o movimento do perihélio planetário.

O movimento de um corpo em um campo gravitacional é uma linha geodésica quadri-dimensional.
Então, para encontrar a órbita de um planeta, necessitamos das equações de Euler-Lagrange, inseridas no problema variacional

$$\delta \int ds = 0 , \qquad \text{(IV.3.16)}$$

onde ds é o elemento de linha

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right) +$$

$$+\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)dt^2. \qquad (IV.3.17)$$

Podemos simplificar os cálculos considerando o problema variacional equivalente[9]

$$\delta\int\left\{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right\}ds = 0 \qquad (IV.3.18)$$

Aqui o ponto indica derivação em relação a s.

As três equações de Euler-Lagrange, para θ, φ e t, associadas a este problema variacional serão

$$\frac{d}{ds}\left(-2r\dot{\theta}\right) = -2r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2, \qquad (IV.3.19)$$

$$\frac{d}{ds}\left(-2r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0, \qquad (IV.3.20)$$

$$\frac{d}{ds}\left[2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)\dot{t}\right] = 0. \qquad (IV.3.21)$$

Aqui não incluímos as equações de Euler-Lagrange para r, pois é mais conveniente dividir a expressão (IV.3.17)por ds^2, para obtermos uma equação quadri-dimensional

$$1 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right). \qquad (IV.3.22)$$

Usando as quatro equações diferenciais anteriores para t, r, θ e φ como funções de s, é possível obter e resolver as equações de uma órbita planetária.

Em Mecânica Clássica a órbita de um corpo em um campo de força central situa-se em um plano. Podemos considerar que isto é válido também na presente teoria. Por uma orientação apropriada dos eixos fazemos $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$, para um dado s inicial. Então, por (IV.3.19) segue que, para todo s,

$$\theta = \frac{\pi}{2} , \tag{IV.3.23}$$

desde que as condições iniciais determinem uma solução única para (IV.3.19).

A substituição de $\theta = \pi/2$ em (IV.3.20) nos permite integrar a (IV.3.20) de imediato:

$$r^2 \dot{\varphi} = h = \text{constante} . \tag{IV.3.24}$$

A Equação (IV.3.21) quando integrada resulta

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 - \frac{\ell^4}{r^4}\right)\dot{t} = C = \text{constante} . \tag{IV.3.25}$$

Substituindo os resultados (IV.3.23), (IV.3.24) e (IV.3.25)em (IV.3.22) obtemos a seguinte equação diferencial para r(s)

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\ell^4}{r^4}\right)^{-1} C^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} . \tag{IV.3.26}$$

Como no problema clássico de Kepler, podemos considerar r como uma função de φ , em vez de s. Denotando a derivação com respeito a φ por um apóstrofo temos

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} , \tag{IV.3.27}$$

e assim, por meio de (IV.3.24) e (IV.3.27), resulta que

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\, r' = \frac{h}{r^2}\, r' . \tag{IV.3.28}$$

A equação diferencial para $r(\varphi)$ é então obtida de (IV.3.26):

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)=C^2-\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)\frac{h^2}{r^4}r'^2-$$

$$-\frac{h^2}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right). \qquad \text{(IV.3.29)}$$

Seja agora

$$r=\frac{1}{u}, \qquad \text{(IV.3.30)}$$

o que implica em

$$r'=-\frac{u'}{u^2}. \qquad \text{(IV.3.31)}$$

Usando estas relações, podemos converter(IV.3.29) para uma equação diferencial para $u(\varphi)$,

$$(1-2mu)(1-\ell^4u^4)=C^2-(1-\ell^4u^4)h^2u'^2-h^2u^2(1-2mu)(1-\ell^4u^4), \qquad \text{(IV.3.32)}$$

resultando que

$$u'^2=-\frac{(1-2mu)}{h^2}+\frac{C^2}{(1-\ell^4u^4)h^2}-(1-2mu)u^2,$$

ou

$$u'^2=\frac{C-1+\ell^4u^4}{h^2(1-\ell^4u^4)}+\frac{2m}{h^2}u-u^2+2mu^3, \qquad \text{(IV.3.33)}$$

a qual é imediatamente integrável, i.e.

$$\varphi=\varphi_0\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\left[\frac{C^2-1+\ell^4u^4}{h^2(1-\ell^4u^4)}+\frac{2m}{h^2}u-u^2+2mu^3\right]^{1/2}}. \qquad \text{(IV.3.34)}$$

Trata-se de uma <u>solução exata</u> para o problema, expressando o ângulo φ como uma integral de $u=1/r$ e inversamente fornecendo u como uma função implícita de φ .

Infelizmente, embora a (IV.3.34) seja uma solução completa para o nosso problema, sua forma não é particularmente clara, pois $u(\varphi)$ é dado de forma implícita, e a forma clássica apropriada da trajetória (uma elípse) não é de todo evidente em (IV.3.34).

Então, desenvolvendo em série o termo $(1 - \ell^4 u^4)^{-1}$ em (IV.3.33), encontramos

$$u'^2 = \frac{C^2 - 1 + \ell^4 u^4}{h^2}\left(1 + \ell^4 u^4 + \dots\right) + \frac{2mu}{h} + u^2 + 2mu^3 . \qquad \text{(IV.3.35)}$$

Levando em consideração somente termos de ordem igual ou inferior a u^4 teremos

$$u'^2 = \frac{C^2 - 1}{h^2} + \frac{\ell^4 u^4}{h^2} + \frac{C^2 \ell^4 u^4}{h^2} - \frac{\ell^4 u^4}{h^2} + \dots$$

$$+ \frac{2mu}{h^2} - u^2 + 2mu^3 ,$$

ou

$$u'^2 = \frac{C^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} - u^2 + 2mu^3 + \frac{C\ell^4 u^4}{h^2} . \qquad \text{(IV.3.36)}$$

Para tornar o problema mais transparente e estabelecer uma conexão fechada com o problema clássico de Kepler (que envolve uma equação diferencial de segunda ordem), converteremos a equação de primeira ordem em uma equação de segunda ordem, por derivação em relação a φ . Obtemos assim

$$2u''u' = \frac{2mu'}{h^2} + 2uu' + 6mu^2u' + \frac{4C\ell^4 u^3 u'}{h^2} . \qquad \text{(IV.3.37)}$$

Uma solução possível é obtida se supuzermos que o fator comum u' seja nulo. Isto nos leva a

$$u = \text{constante} \quad \text{e} \quad r = \text{constante}, \tag{IV.3.38}$$

o que representa o movimento circular.

Outra solução possível e mais interessante, resulta do cancelamento do fator comum u' de (IV.3.37), supondo que este seja diferente de zero, o que resulta

$$2u'' = \frac{2m}{h^2} + 6mu^2 + \frac{4C^2\ell^4u^3}{h^2} - 2u,$$

ou

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 + \frac{2C^2\ell^4u^3}{h^2}. \tag{IV.3.39}$$

Analisemos agora a constante C dada em (IV.3.25).

Como

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{d\varphi}\varphi', \tag{IV.3.40}$$

e ainda, por (IV.3.24) temos

$$\varphi' = \frac{h}{r^2},$$

então concluímos que

$$C \propto (1-2mu)(1-\ell^4u^4)hu^2, \tag{IV.3.41}$$

e

$$C^2 \propto (1-2mu)^2(1-\ell^4u^4)h^2u^4,$$

$$C^2 \propto (1-4mu+4m^2u^2)(1-2\ell^4u^4+\ell^8u^8)h^2u^4,$$

$$C^2 = (u^4 + 4mu^5 + 4m^2u^6 - 2\ell^4u^8 + 8m\ell^4u^9 -$$

$$- 8m^2\ell^4u^{10} + \ell^8u^{12} - 4m\ell^8u^{13} + 4m^2\ell^8u^{14})h^2t'. \tag{IV.3.42}$$

Levando este resultado em (IV.3.39) observamos que seu último termo será

$$2\ell^4(u^7 - 4mu^8 + 4m^2u^9 - 2\ell^4u^{11} + 8m\ell^4u^{12} - 8m^2\ell^4u^{13} + \ell^8u^{15} - 4m\,\ell^8u^{16} + 4m\,\ell^8u^{17})\,t',$$

o que é muito pequeno, pois estamos considerando aproximação até a ordem de r^{-4}, no máximo.

Portanto a equação (IV.3.39) reduz-se à equação (6.87) de A.B.S.[17], que é

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 .$$

Esta última leva ao mesmo resultado previsto pela Teoria da Relatividade Geral: O avanço do perihélio de Mercúrio é da ordem de 42,6" por século.

IV. 3.3 TRAJETÓRIA DE UM RAIO DE LUZ[17]

Nesta seção trataremos de um segundo caso interessante de movimento no campo gravitacional do Sol: a trajetória de um raio de luz. Este é um problema interessante porque, assim como o "red shift", as predições estão sujeitas a testes de observação.

Para tratar deste problema necessitamos fazer duas suposições a respeito da propagação de raios luminosos em um espaço-tempo curvo:

1) assumimos que a trajetória de um raio de luz é uma linha geodésica, em um espaço-tempo quadri-dimensional;

2) em Relatividade Especial o caminho de um raio luminoso(que está sobre o cone de luz) é caracterizado, no espaço-tempo, por seu elemento de linha nulo, $ds^2 = 0$.

Admitiremos que isto também é válido em Relatividade Geral. Assim, em resumo, as trajetórias de raios luminosos são linhas geodésicas nulas.

Quando discutimos geodésicas nulas devemos observar que o parâmetro s, da curva, não pode mais ser usado como parâmetro de derivação, pois agora $ds=0$.

Voltando ao conceito geral de deslocamento paralelo, perguntamos que vetor nulo dx^{α}/dq terá deslocamento paralelo em termos de um parâmetro arbitrário q, de acordo com a lei geral.

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{dx^{\alpha}}{dq}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{dq}\frac{dx^{\gamma}}{dq} = 0. \qquad \text{(IV.3.43)}$$

Pela teoria geral este vetor preservará seu comprimento, i.e, permanecerá um vetor nulo. É fácil ver que as equações diferenciais acima, para geodésicas nulas, são equivalentes ao problema variacional.

$$\delta\int g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dq}\frac{dx^{\beta}}{dq}\,dq = 0. \qquad \text{(IV.3.44)}$$

O parâmetro q pertence à família de parâmetros distintos discutidos na seção 2.3 de A.B.S.[16]. Lembremos que todos os parâmetros desta família estão relacionados linearmente. No caso da métrica considerada encontramos as equações do movimento para φ e t:

$$r^2\dot{\varphi} = \tilde{h} = \text{constante}, \qquad \text{(IV.3.45)}$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{\ell^4}{r^4}\right)\dot{t} = \tilde{C} = \text{constante}.$$

Aqui os pontos denotam derivação com relação a q, e assumimos que $\theta = \pi/2$. Já a equação para ds^2 é agora

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\ell^4}{r^4}\right)^{-1}\tilde{C}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{\tilde{h}^2}{r^2}. \qquad \text{(IV.3.46)}$$

Assim, fazendo a substituição

$$r = \frac{1}{u}, \qquad \text{(IV.3.47)}$$

temos que

$$r' = -\frac{u'}{u^2}, \qquad \text{(IV.3.48)}$$

e obtemos de (IV.3.46)

$$0 = \tilde{C}^2 - (1 - \ell^4 u^4)\tilde{h}^2 u'^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - \ell^4 u^4)(1 - 2mu). \qquad \text{(IV.3.49)}$$

Derivando esta última em relação a φ resulta

$$0 = \tilde{h}^2 u' \left[4\ell^4 u^3 u' - 2u''(1 - \ell^4 u^4) - 2u\,(1 - \ell^4 u^4) + 4mu^2(1 - \ell^4 u^4) + \right.$$

$$\left. + 4u^5 \ell^4 - 8mu^6 \ell^4 + 2mu^2(1 - \ell^4 u^4)\right]. \qquad \text{(IV.3.50)}$$

Como $\tilde{h} \neq 0$ e descartando a solução trivial, u = constante , finalmente chegamos à equação para uma trajetória de um raio luminoso

$$u'' + u = 3mu^2 + \frac{2\ell^4 u^3 u'^2}{(1 - \ell^4 u^4)} + \frac{2u^5 \ell^4}{(1 - \ell^4 u^4)} - \frac{4mu^6 \ell^4}{(1 - \ell^4 u^4)}. \qquad \text{(IV.3.51)}$$

Desenvolvendo em série o termo $(1 - \ell^4 u^4)^{-1}$ teremos

$$(1 - \ell^4 u^4)^{-1} = 1^{-1} + (-1)\,1^{-2}(-\ell^4 u^4) + \dots \simeq 1 + \ell^4 u^4 + \dots$$

até a ordem de r^{-4}.

Substituindo este resultado em (IV.3.51) e eliminando os termos de ordens superiores temos

$$u'' + u = 3mu^2 + (2\ell^4 u^3 u'^2 + 2u^5\ell^4 - 4mu^6\ell^4)(1+\ell^4 u^4 + \dots) ,$$

e finalmente

$$u'' + u = 3mu^2 \qquad \text{(IV.3.52)}$$

Esta é a equação obtida pela Teoria da Relatividade Geral, a qual permite determinar o desvio da trajetória de um raio luminoso, no campo gravitacional do Sol. Tal desvio é da ordem de 1,75".

CONCLUSÃO

O uso de uma métrica não simétrica, nos leva a coeficientes de conexão também assimétricos, e somos então levados a uma teoria gravitacional que necessariamente possue torção.

O problema da singularidade em $r = 0$ parece ter sido contornado, uma vez que existe agora um limite mínimo para r.

Quanto à região interna ao caroço de raio ℓ , nada podemos afirmar, uma vez que devemos nesta região formular outra teoria com novos aspectos geométricos, para então estudar as equações de campo.

A única correção, aos testes fundamentais da Relatividade Geral, que possue relevância, refere-se ao caso do "Red Shift". A ordem de grandeza dos termos de correção nos demais testes é muito pequena.

APÊNDICE A

O operador δ , de coderivação exterior é tal que

$$\delta F = (-1)^{p(n-p)+\frac{n-s}{2}} * d * F ,$$

onde F é uma p -forma

No caso que estamos considerando

p = 3, pois $d*F$ é uma 3- forma,

n = 4, dimensão do espaço ,

e s = ± 2 como foi exigido no início do Capítulo I.

a) para s= +2

$$\delta F = (-1)^{3(4-3)+\frac{4-2}{2}} * d * F = * d * F ;$$

b) para s= -2

$$\delta F = (-1)^{3(4-3)+\frac{4+2}{2}} * d * F = * d * F .$$

APÊNDICE B

Temos que

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\left(1 - \frac{2M_\oplus}{R_\oplus}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M_\oplus}{R}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\ell_\oplus^4}{R}\right)^{1/2}} - 1 \; .$$

Desenvolvendo em série e separando os termos da seguinte forma

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\left[1 - \left(\frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4} + \frac{2M_\oplus}{R_\oplus} - \frac{2M_\oplus \ell_\oplus^4}{R_\oplus^5}\right)\right]^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{\ell_\oplus^4}{R} + \frac{2M_\oplus}{R} - \frac{2M_\oplus \ell_\oplus^4}{R^5}\right)\right]^{1/2}} - 1 \; ,$$

encontramos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left[1 + \left(\frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R_\oplus^5} - \frac{\ell_\oplus^4}{2R_\oplus^4} - \frac{M_\oplus}{R_\oplus}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R_\oplus^5} - \frac{\ell_\oplus^4}{2R_\oplus^4} - \frac{M_\oplus}{R_\oplus}\right)^2 + \cdots\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R^5} - \frac{\ell_\oplus^4}{2R^4} - \frac{M_\oplus}{R}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R^5} - \frac{\ell_\oplus^4}{2R^4} - \frac{M_\oplus}{R}\right) + \cdots\right] - 1$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\ell_\oplus^4}{2R^4} + \frac{M_\oplus}{R} - \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R^5} + \frac{3M_\oplus^2}{2R^2} + \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{2R^5} + \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R_\oplus^5} - \frac{\ell_\oplus^4}{2R_\oplus^4} -$$

$$- \frac{M_\oplus}{R_\oplus} - \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{2R_\oplus^4 R} - \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{2R R_\oplus} - \frac{M_\oplus^2}{R_\oplus R} - \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{2R_\oplus^5} + \cdots$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\ell_\oplus^4}{2R^4 R_\oplus^4}\left(R_\oplus^4 - R^4\right) + \frac{M}{R R_\oplus}\left(R_\oplus - R\right) + \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R^5 R_\oplus^5}\left(\frac{5}{2}R_\oplus^5 + \frac{1}{2}R^5 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}R_\oplus R^4 - \frac{1}{2}R_\oplus^4 R\right) + \frac{M_\oplus^2}{R_\oplus R^2}\left(\frac{3}{2}R_\oplus - R\right) + \cdots$$

Porém, considerando que $R = R_\oplus + h$, ficamos com

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\ell_\oplus^4}{2R_\oplus^4 (R_\oplus + h)^4}\left(R_\oplus^4 - R_\oplus^4 - 4R_\oplus^3 h - 6R_\oplus^2 h^2 - 4R_\oplus h^3 - h^4 \right) +$$

$$+ \frac{M_\oplus}{R_\oplus (R_\oplus + h)} \left(R_\oplus - R_\oplus - h \right) +$$

$$+ \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4}{R_\oplus^5 (R_\oplus + h)^5} \left(\frac{5}{2} R_\oplus^5 + \frac{R_\oplus^5}{2} + \frac{5}{2} R_\oplus^4 h + 5R_\oplus^3 h^2 + 5R_\oplus^2 h^3 + \right.$$

$$+ \frac{5}{2} R_\oplus h^4 + h^5 - \frac{R_\oplus^5}{2} - 2R_\oplus^4 h - 3R_\oplus^3 h^2 - 2R_\oplus^2 h^3 -$$

$$\left. - \frac{R_\oplus h^4}{2} - \frac{R_\oplus^5}{2} - \frac{R_\oplus^4 h}{2} \right] +$$

$$+ \frac{M_\oplus^2}{R_\oplus (R_\oplus + h)^2} \left(\frac{3}{2} R_\oplus - R_\oplus - h \right) + \cdots$$

Assim encontramos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\left(\frac{2\ell_\oplus^4 h}{R_\oplus} + \frac{3\ell_\oplus^4 h^2}{R_\oplus^2} + \frac{2\ell_\oplus^4 h^3}{R_\oplus^3} + \frac{\ell_\oplus^4 h^4}{R_\oplus^4} \right) (R_\oplus + h)^{-4} -$$

$$- \frac{M_\oplus h}{R_\oplus} (R_\oplus + h) - \left(\frac{M_\oplus^2}{2} + \frac{M_\oplus^2 h}{R_\oplus} \right) (R_\oplus + h)^{-2} +$$

$$+ \left(\frac{5M_\oplus \ell_\oplus^4 h}{2R_\oplus} + 3M_\oplus \ell_\oplus^4 + \frac{5M_\oplus \ell_\oplus^4 h^2}{R_\oplus^2} + \frac{5M_\oplus \ell_\oplus^4 h^3}{R_\oplus^3} + \right.$$

$$+ \frac{5M_\oplus \ell_\oplus^4 h^4}{2R_\oplus^4} + \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4 h^5}{R_\oplus^5} - M_\oplus \ell_\oplus^4 - \frac{5M_\oplus \ell_\oplus^4 h}{2R_\oplus} -$$

$$\left. - \frac{3M_\oplus \ell_\oplus^4 h^2}{R_\oplus^2} - \frac{2M_\oplus \ell_\oplus^4 h^3}{R_\oplus^3} - \frac{M_\oplus \ell_\oplus^4 h^4}{2R_\oplus^4} \right) (R_\oplus + h)^{-5}.$$

Voltando ao desenvolvimento em série de potências dos termos em $(R_\oplus + h)$ e eliminando termos de ordens maiores obtemos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{2\,\ell_\oplus^4 h}{R_\oplus^5} + \frac{5\,\ell_\oplus^4 h^2}{R_\oplus^6} - \frac{10\,\ell_\oplus^4 h^3}{R_\oplus^7} - \frac{M_\oplus h}{R_\oplus^2} + \frac{M_\oplus h^2}{R_\oplus^3} -$$

$$- \frac{M_\oplus h^3}{R_\oplus^4} + \frac{M_\oplus h^4}{R_\oplus^5} - \frac{M_\oplus^2}{2R_\oplus^2} + \frac{M_\oplus^2 h}{R_\oplus^3} - \frac{M_\oplus^2 h^2}{R_\oplus^4} -$$

$$- \frac{3\,M_\oplus^2 h^3}{R_\oplus^5} ,$$

finalmente

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\ell_\oplus^4}{R_\oplus^4}\left(\frac{5h^2}{R_\oplus^2} - \frac{2h}{R_\oplus}\right) + \frac{M_\oplus}{R_\oplus}\left(\frac{h^2}{R_\oplus^2} - \frac{h}{R_\oplus}\right) -$$

$$- \frac{M_\oplus^2}{R_\oplus^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{h}{R_\oplus} + \frac{h^2}{R_\oplus^2}\right) + \cdots$$

o que nos dá para $\ell_\oplus$ a equação (IV.3.14).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) EINSTEIN, A., Annals of Mathematics, Vol.46, nº 4, 578.(1945).

(2) EINSTEIN, A. and STRAUS, E.G., Annals of Mathematics, Vol.47, 731, (1946).

(3) PAPAPETROU, A. Proc.R.Ir. Acad. Sect A 52, 69, (1948).

(4) MOFFAT, J.W. Phys.Rev. D 19, 3559, (1979).

(5) GREUB, W.H. "Linear Álgebra" Springer-Verlag OHG, Berlin (1963).

(6) DE WITT, B.S. "Dynamical Theory of Groups and Fields", Blackie e Son Ltd., London (1965).

(7) RYAN, J.M.P. and SHEPLEY, L.C. "Homogeneous Relativistic Cosmologies", Princ.Univ.Press(1975).

(8) WYBOURNE, B.G. "Classical Groups for Physicists". J.Wiley (1974).

(9) WESTENHOLZ, C.von "Differential Forms in Mathematical Physics" N.Holl (1978).

(10) MISNER, C.W.; THORNE, K.S. And WHEELER J.A. "Gravitation", Freeman, San Francisco (1973).

(11) YANG, C.N. Phys. Rev.Lett Vol.33 Nº 7 (1974).

(12) BISHOP, R.L. and CRITTENDEN, R.J. "Geometry of Manifolds" Ac. Press N.Y. (1965).

(13) ALDROVANDI, R. and STEDILE, E. Inst.Journal of Theor.Phys. Vol. 23 nº 4, 301 (1984).

(14) SCHRÖDINGER, E. "Space-Time Structure", Cambridge Univ. Press (1950).

(15) HEHL, F.W. "Four Lectures on Poincaré Gauge Field Theory" in "Spin, Torsion, Rotation and Supergravity" 6th Course of the International School of Cosmology and Gravitation", Erice Italy, May (1979).

(16) EISENHART, L.P. "Non-Riemannian Geometry" American Mathematics Society, N.Y. (1927).

(17) ADLER,R., BAZIN,M. anda SHIFFER,M. "Introduction to General Relativity" Mc Graw-Hill (1965).

(18) POUND,R.V. and REBKA , G.A.Jr. Phys.Rev.Lett. Vol.4, nº 7, 337, (1960).

(19) MØLLER,C. Math. Fys.Medd., 34, 3, (1964).