

GUATAÇARA DOS SANTOS JUNIOR

**UTILIZAÇÃO DA INTEGRAL ELÍPTICA PARA A SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS
DIRETO E INVERSO DA GEODÉSIA**

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do título de Mestre em Ciências, Curso
de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas,
Departamento de Geomática, Setor de Ciências
da Terra, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Camil Gemael

CURITIBA
2002

S337 Santos Júnior, Guataçara dos, 1971-
Utilização da integral elíptica para a solução dos problemas direto e inverso da Geodésia / Guataçara dos Santos Júnior.—2002.
165f. : il.

Orientador: Camil Gemael
Dissertação(mestrado)- Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências da Terra
Inclui bibliografia

1. Geodésia. 2. Azimute. 3. Latitude. 4. Longitude. 5. Integral elíptica I. Gemael, Camil. II. Universidade Federal do Paraná.
III. Título.

CDD 20.ed. 526.1

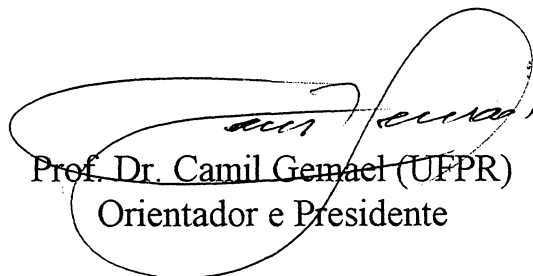
**“UTILIZAÇÃO DA INTEGRAL ELÍPTICA PARA A SOLUÇÃO
DOS PROBLEMAS DIRETO E INVERSO DA GEODÉSIA”**

POR

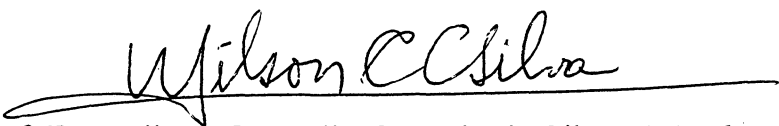
GUATAÇARA DOS SANTOS JUNIOR

Dissertação nº 160 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade
Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Curitiba, 20 de dezembro de 2001.



Prof. Dr. Camil Gemael (UFPR)
Orientador e Presidente



Prof. Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva - Membro (INPE)



Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes – Membro (CNPq)

**Dedica-se este trabalho a
minha mãe, esposa e
filha pelo apoio e
compreensão na minha
ausência.**

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Camil Gemael, Prof. do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, a orientação prestada.

Ao Dr. Carlito Vieira de Moraes pelo apoio e incentivo.

À MSc. Mary Angélica de Azevedo Olivas, Prof.^a e Chefe do Departamento de Geomática da Universidade Federal do Paraná.

Ao Dr. Édson Aparecido Mitshita, Prof. e Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.

Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR: Cláudia Pereira Krueger, Luis Danilo Damasceno Ferreira, Pedro Luís Faggin, Romualdo Wandresen, Sílvio Rogério Correia de Freitas.

À Sr.^a Verali Mônica Kleuser Reguilin, Secretária do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.

Aos Colegas do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas com os quais no período de elaboração da dissertação foram refletidas a aplicabilidade e interdisciplinaridade do tema pesquisado: Alfonso Tierra Criollo, Alteni Fidelis Pimenta, Elaine Cristine Barros de Souza, Jaime Freiburger Junior, Moisés Ferreira Costa, Niel Nascimento Teixeira, Regiane Dalazoana, Reginaldo de Oliveira, Sandro Reginato Soares de Lima.

Aos Profissionais da Biblioteca de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Ao Dr. João Luiz Kovaleski, Prof. do CEFET/PR - PG.

Aos Profissionais do CEFET/PR – PG.

Ao Dr. Kleber Daum Machado, Prof. do Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Ao Dr. Antônio Marcos Batista, Prof. do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa .

À Senhorita Ângela Fidelis Pimenta.

SUMÁRIO

LISTA FIGURAS.....	viii
LISTA DE QUADROS.....	viii
LISTA DE SIGLAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	ix
RESUMO.....	xi
ABSTRACT.....	xii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 DEFINIÇÃO E TIPOS DE INTEGRAL ELÍPTICA.....	2
1.2 DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS.....	4
1.2.1 Primeiro Problema Principal Geodésico.....	4
1.2.2 Segundo Problema Principal Geodésico.....	5
1.3 IMPORTÂNCIA DOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS.....	6
1.4 REVISÃO DE ALGUNS MÉTODOS DE CÁLCULO DOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS.....	9
1.4.1 Fórmulas de Puissant.....	9
1.4.2 Fórmulas de Sodano.....	10
1.4.3 Série de Taylor das Diferenças de Latitude, de Longitude e de Azimute como Funções de Arco.....	11
1.4.4 Outras Fórmulas para o Cálculo dos Problemas Principais Geodésicos.....	13
1.5 RECURSOS UTILIZADOS.....	13
1.6 OBJETIVOS.....	14
1.6.1 Objetivo Geral.....	14
1.6.2 Objetivos Específicos.....	14
1.7 CONTRIBUIÇÃO E ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA.....	14
2 CONCEITOS BÁSICOS.....	16
2.1 SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA.....	16
2.2 COORDENADAS GEODÉSICAS DO PONTO P.....	16
2.3 AZIMUTE.....	17
2.4 EXCENTRICIDADE DA ELIPSE MERIDIANA DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	18
2.5 SEÇÕES NORMAIS PRINCIPAIS.....	19
2.5.1 Raio de Curvatura N da Seção Primeiro Vertical.....	19
2.5.2 Raio de Curvatura M da Seção Meridiana.....	22
2.6 LATITUDE REDUZIDA β	25
2.7 TEOREMA DE CLAIRAUT.....	26
3 PRIMEIRO E SEGUNDO PROBLEMAS GEODÉSICOS PRINCIPAIS EXPRESSOS POR INTEGRAL ELÍPTICA E SEUS MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO.....	27
3.1 DIFERENCIAIS DA LINHA GEODÉSICA.....	27
3.2 A CONSTANTE DE CLAIRAUT REESCRITA COMO CO-SENO DA LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA.....	28
3.3 DEDUÇÃO DAS INTEGRAIS ELÍPTICAS APLICADAS AOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS DIRETO E INVERSO.....	31
3.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	47
3.4.1 Métodos de Integração Numérica Utilizados.....	48
3.4.1.1 Regra dos trapézios.....	48

3.4.1.2 Regra de Simpson.....	49
3 4.1.3 Fórmula gaussiana.....	50
4 PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DO PRIMEIRO PROBLEMA	
PRINCIPAL GEODÉSICO.....	53
4.1 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO.....	54
4.1.1 Cálculo dos Valores Iniciais.....	54
4.1.2 Cálculo Iterativo do Limite Superior v_2 de Integração.....	55
4.1.3 Cálculo da Latitude φ_2	56
4.1.4 Cálculo do Azimute α_2	56
4.1.5 Cálculo da Diferença de Longitude $\Delta\lambda$ e Longitude λ_2	57
4.2 EXEMPLIFICAÇÃO NUMÉRICA.....	58
4.2.1 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pelo Programa Maple.....	58
4.2.1.1 Primeiro exemplo.....	58
4.2.1.2 Segundo exemplo.....	61
4.2.2 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra dos Trapézios.....	63
4.2.2.1 Primeiro exemplo.....	63
4.2.2.2 Segundo exemplo.....	67
4.2.3 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra de Simpson.....	70
4.2.3.1 Primeiro exemplo.....	70
4.2.3.2 Segundo exemplo.....	74
4.2.4 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Fórmula Gaussiana.....	78
4.2.4.1 Primeiro exemplo.....	78
4.2.4.2 Segundo exemplo.....	84
4.2.5 Outros Resultados.....	89
4.2.5.1 Resultado para linha $s = 1$ m.....	89
4.2.5.2 Resultado para linha $s = 200$ m.....	91
4.2.5.3 Resultado para linha $s = 500$ m.....	92
4.2.5.4 Resultado para linha $s = 10000$ m.....	94
4.2.5.5 Resultado para linha $s = 40000$ m.....	95
4.2.5.6 Resultado para linha $s = 80000$ m.....	97
4.2.5.7 Resultado para linha $s = 500000$ m.....	98
4.2.6 Cálculo Recíproco.....	100
5 PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DO SEGUNDO PROBLEMA	
PRINCIPAL GEODÉSICO.....	102
5.1 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO.....	103
5.1.1 Cálculo dos Valores Iniciais.....	103
5.1.2 Cálculo Iterativo da $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, de h e dos Limites de Integração w_1 e w_2	104
5.1.3 Cálculo dos Azimutes.....	106
5.1.4 Distância.....	108
5.2 EXEMPLIFICAÇÃO NUMÉRICA.....	108

5.2.1 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pelo Programa Maple.....	109
5.2.1.1 Primeiro exemplo.....	109
5.2.1.2 Segundo exemplo.....	112
5.2.2 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra dos trapézios.....	116
5.2.2.1 Primeiro exemplo.....	116
5.2.2.2 Segundo exemplo.....	120
5.2.3 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra de Simpson.....	123
5.2.3.1 Primeiro exemplo.....	123
5.2.3.2 Segundo exemplo.....	127
5.2.4 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Fórmula Gaussiana.....	133
5.2.4.1 Primeiro exemplo.....	133
5.2.4.2 Segundo exemplo.....	138
5.2.5 Outros Resultados.....	148
5.2.5.1 Primeiro exemplo.....	148
5.2.5.2 Segundo exemplo.....	149
5.2.5.3 Terceiro exemplo.....	150
5.2.5.4 Quarto exemplo.....	152
5.2.5.5 Quinto exemplo.....	153
5.2.5.6 Sexto exemplo.....	154
5.2.5.7 Sétimo exemplo.....	156
6 ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	158
7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES.....	161
REFERÊNCIAS.....	163
DOCUMENTOS CONSULTADOS.....	165

LISTA DE FIGURAS

FIGURA – 1.1	: PROBLEMA DIRETO DA GEODÉSIA.....	5
FIGURA – 1.2	: PROBLEMA INVERSO DA GEODÉSIA.....	6
FIGURA – 1.3	: MÉTODO DE ERATÓSTENES.....	7
FIGURA – 1.4	: TRIÂNGULO INFINITESIMAL.....	11
FIGURA – 1.5	: TRIÂNGULO INFINITESIMAL.....	11
FIGURA – 1.6	: TRIÂNGULO INFINITESIMAL.....	12
FIGURA – 2.1	: SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA.....	16
FIGURA – 2.2	: REPRESENTAÇÃO DO AZIMUTE GEODÉSICO.....	17
FIGURA – 2.3	: PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	19
FIGURA – 2.4	: LATITUDE GEODÉSICA φ E LATITUDE REDUZIDA β	20
FIGURA – 2.5	: TEOREMA DE CLAIRAUT.....	26
FIGURA – 3.1	: TRIÂNGULO ELIPSÓIDICO INFINITESIMAL.....	27
FIGURA – 3.2	: LATITUDE MÁXIMA DA LINHA GEODÉSICA.....	30
FIGURA – 3.3	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ para $h = -1$	42
FIGURA – 3.4	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ para $h = -0,5$	43
FIGURA – 3.5	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ para $h = 0$	43
FIGURA – 3.6	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ para $h = 0,5$	44
FIGURA – 3.7	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ para $h = 1$	44
FIGURA – 3.8	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ para $h = -1$	45
FIGURA – 3.9	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ para $h = -0,5$	45
FIGURA – 3.10	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ para $h = 0$	46
FIGURA – 3.11	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ para $h = 0,5$	46
FIGURA – 3.12	: COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ para $h = 1$	47
FIGURA – 3.13	: REGRA DOS TRAPÉZIOS COMPOSTA.....	49
FIGURA – 3.14	: REGRA DE SIMPSON.....	50

LISTA DE QUADROS

QUADRO – 3.1	: PONTOS AMOSTRAIS E PESOS AMOSTRAIS PARA A FÓRMULA GAUSSIANA.....	52
--------------	--	----

LISTA DE SIGLAS

GPS	: <i>Global Positioning System</i>
SGR	: <i>Sistema Geodésico de Referência</i>
SAD-69	: <i>South American Datum of 1969</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

- a : Semi-eixo maior do elipsóide de revolução
- b : Semi-eixo menor do elipsóide de revolução
- c : Constante de Clairaut
- cos : Co-seno
- $\frac{d\alpha}{ds}$: Derivada do azimute geodésico em relação à linha geodésica
- $\frac{d\lambda}{ds}$: Derivada da longitude geodésica em relação à linha geodésica
- $\frac{d\varphi}{ds}$: Derivada da latitude geodésica em relação à linha geodésica
- $\frac{dz}{dp}$: Derivada de z em relação a p
- $\frac{d^2z}{dp^2}$: Derivada segunda de z em relação a p
- e : Excentricidade da elipse
- f : Achatamento
- h : 2ª Constante de Clairaut
- k : Curvatura
- m_i : Pontos amostrais utilizados na fórmula gaussiana
- p_i : Pesos utilizados na fórmula gaussiana
- ppm : Partes por milhão
- r : Raio de paralelo
- rad : Radiano
- s : Comprimento da linha geodésica
- sen : Seno
- sgn : Sinal algébrico do argumento, i. e., $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$
- tg : Tangente
- w : Arco utilizado na transformação w
- $D\lambda$: Afastamento residual entre a longitude geodésica teórica e a diferença de longitude geodésica calculada

- E** : Distância focal de uma elipse ou erro de truncamento em integração numérica
M : Raio de curvatura da seção meridiana
N : Raio de curvatura da seção primeira vertical
S : Quociente entre s e a
 S'_i : Soma das distâncias parciais
 α : Azimute geodésico
 α_1 : Azimute geodésico da direção 1-2
 α_2 : Azimute geodésico da direção 2-1
 α'_2 : Azimute geodésico da direção 2-1 subtraído de 180°
 β : Latitude reduzida
 $\beta_{\text{máx}}$: Latitude reduzida máxima
 θ : Ângulo que o raio vetor forma com o eixo das abscissas
 λ : Longitude geodésica
 λ_1 : Longitude geodésica do ponto 1
 λ_2 : Longitude geodésica do ponto 2
 φ : Latitude geodésica
 φ_1 : Latitude geodésica do ponto 1
 φ_2 : Latitude geodésica do ponto 2
 ν : Arco utilizado na transformação ν
 π : Número irracional 3,1415...
 ΔS : Afastamento residual
 $\Delta S'_i$: Distância parcial
 $\Delta\alpha$: Diferença de azimute geodésico
 $\Delta\varphi$: Diferença de latitude geodésica
 $\Delta\lambda$: Diferença de longitude geodésica
 $\Delta\lambda'_i$: Diferença teórica de longitude geodésica
 Σ : Somatório
 $||$: Módulo, i.e., $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$
[,] : Intervalo fechado, i.e, os extremos do intervalo são considerados

RESUMO

Nesta dissertação é apresentado o método que utiliza integrais elípticas para a solução dos problemas principais geodésicos direto e inverso. Neste método as latitudes de pontos sobre a linha geodésica são transformadas nas quantidades v ou então w , as quais são funções da latitude e do azimute. Para a solução do problema direto é feita uma comparação dos resultados de integração com valores teóricos, o que permite o melhoramento iterativo velozmente convergente do limite superior v_2 de integração, com o qual calculam-se as demais quantidades procuradas. Já a solução do problema inverso é obtida pela determinação iterativa da latitude máxima que fixa a linha geodésica. Com o objetivo de pormenorizar didaticamente os procedimentos do método, procurou-se omitir o mínimo possível as demonstrações, a fim de oferecer condições para demonstrar as integrais elípticas aplicadas a estes problemas. Como tais integrais não possuem solução analítica, ou seja, não podem ser expressas por funções elementares, é apresentada uma síntese dos métodos para a sua integração numérica. Os problemas direto e inverso são calculados para linhas de 1 m, 200 m, 500 m, 1 km, 10 km, 40 km, 80 km, 500 km e 1000 km e também as soluções obtidas pelos diferentes métodos de integração numérica utilizados são comparadas. A consistência do método é constatada pela discrepância apresentada entre as soluções direta e inversa bem como pelo cálculo recíproco do problema direto. Conclui-se o trabalho com recomendações a respeito do método mais adequado para cada comprimento de linha utilizado, no que diz respeito à simplicidade do uso e acurácia dos resultados.

Palavras-chave: problema geodésico direto; problema geodésico inverso; integral elíptica; integração numérica.

ABSTRACT

This dissertation aims to present the method that uses elliptical integrals to solve the main direct and indirect geodesic problems. In this method the points latitudes on the geodesic lines are transformed into the v or w quantities, which are functions of the latitude and azimuth. In order to solve the direct problem a comparison between the integration results and the theoretical values is made, which allows the fast convergent iterative improvement of the integration superior limit v_2 , with which other searched quantities are calculated. The indirect problem solution is given by iterative determination of the maximum latitude that fixes the geodesic line. Aiming to detail the method procedures, trying to omit the demonstrations as less as possible in order to offer conditions to demonstrate the elliptical integrals applied to these problems. As such integrals don't have an analytical solution, i. e., they can't be expressed by elementary functions, a synthesis of the methods is presented for its numerical integration. The direct and indirect problems are calculated for 1 m, 200 m, 500 m, 1 km, 10 km, 40 km, 80 km, 500 km e 1000 km lines and but also the solutions given by different methods of numerical integration used are compared. The method consistence is checked by the discrepancy presented between the direct and indirect solutions as well as by the reciprocal calculation of the direct problem. The work is concluded along with recommendations on the most adequate method for each line length used, regarding the utilization simplicity and results accuracy.

Keywords: direct geodesic problem; indirect geodesic problem; elliptical integrals; numerical integration

1 INTRODUÇÃO

A Geodésia é a ciência que tem por finalidade tanto a determinação da superfície física terrestre e do campo da gravidade externo como também a pesquisa da variação da posição dos pontos ao longo do tempo (KLEIN, 1997, p. 9). Do ponto de vista didático, a Geodésia pode ser dividida em três áreas: geométrica, física e celeste. É claro que estas áreas não são estanques, bem ao contrário, se interligam constituindo uma única e bem definida ciência (GEMAEL, 1987, p. 1.1).

Para a solução dos problemas principais geodésicos é necessário adotar-se uma superfície que represente a forma da Terra, uma vez que esta possui uma superfície extremamente complexa, tornando-se assim impossível obter relações matemáticas simples entre os elementos geodésicos, tais como, entre coordenadas de dois pontos e entre a distância entre os mesmos, devido à infinidade de parâmetros envolvidos.

As medidas geodésicas são efetuadas sobre a superfície física da Terra ou superfície topográfica. Portanto, devido às irregularidades na forma da Terra, a superfície a ser adotada deve ser simples afim de que os cálculos possam ser conduzidos sem muita dificuldade. De acordo com COSTA (1976, p. 3), Newton fazendo um estudo científico da forma mais adequada que a Terra deveria ter, levando em consideração o campo gravífico, concluiu que a forma mais adequada seria a de um esferóide definido por uma massa fluida homogênea que gira com velocidade angular uniforme. Desta forma, a Terra é irregular; porém, como consequência de sua tendência ao equilíbrio hidrostático, o campo da atração gravitacional composto com o campo centrífugo resulta no campo da gravidade. Este campo tende a moldar a Terra na forma elipsóidica. Sendo assim, o modelo adotado para representar a forma terrestre é o elipsóide de revolução, apresentando as vantagens de não produzir grandes desvios em relação à forma da Terra e ao mesmo tempo ser definido por dois parâmetros geométricos, semi-eixo maior e achatamento. Enfatiza-se que o elipsóide é a forma matemática da Terra. Assim em Geodésia, as operações geométricas são efetuadas sobre o elipsóide de revolução. Conforme GEMAEL (1999, p. 15), durante o século XIX, a Geodésia praticamente concentrou seus estudos na determinação dos parâmetros do “melhor elipsóide”.

1.1 DEFINIÇÃO E TIPOS DE INTEGRAL ELÍPTICA

De acordo com RIBEIRO FILHO (1994, p. 12), considera-se uma classe importante de integrais as do tipo

$$\int G(x)[P(x)]^{\frac{1}{2}} dx, \quad (1.1)$$

em que $G(x)$ é um polinômio em x e

$$P(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + A'. \quad (1.2)$$

Quando cada um (ou ambos) dos coeficientes A e B tem valores distintos de zero e as raízes de $P(x)$ são todas desiguais, foi provado ser impossível reduzir a integral (1.1) às conhecidas integrais elementares (logarítmicas, funções trigonométricas inversas e funções algébricas). As integrais que expressam o comprimento do arco de uma elipse ou de uma hipérbole são do tipo da (1.1) e este aspecto em si justifica a grande motivação de caráter prático, tanto dos geômetras como dos analistas, que desde o início se envolveram com diferentes problemas, dentre os quais se destacaram aqueles de retificar a elipse e a hipérbole respectivamente. Desde o início todo o esforço em reduzir a integral (1.1) às conhecidas formas elementares de integrais foram em vão. Em síntese, vários matemáticos tentaram reduzir muitas das integrais do tipo da (1.1) para o caso particular que representa o comprimento do arco de uma elipse. Este fato implicou na suposição incorreta que esta integral é a mais simples de todas as integrais da forma da (1.1). Do ponto de vista histórico tudo indica ter sido esta a razão porque as integrais deste tipo receberam a denominação de integrais elípticas. Legendre encerrou basicamente esse ciclo de investigações ao introduzir as três formas normais para as integrais elípticas, as quais ele denominou de funções elípticas. Jacobi entretanto chamou de funções elípticas às funções inversas, permanecendo desde então a denominação de integrais elípticas para aquelas do tipo (1.1). Em 1771, o matemático inglês John Landen introduziu o seu célebre teorema da transformação que leva o seu nome. Este célebre resultado matemático talvez tenha sido também descoberto independentemente por Lagrange e ao lado do teorema de adição de Euler eram os dois grandes resultados da Teoria das Funções Elípticas, até que, em 1786, Legendre viria trazer novos questionamentos para esta teoria. Por

quase quarenta anos esse autor realizou pesquisas neste ramo da matemática. Apesar de não ter conseguido elevar suas descobertas ao nível daquelas de Euler e Lagrange, é creditado a Legendre o fato de ter ele demonstrado que todas as integrais elípticas podem ser reduzidas a três formas canônicas fixas.

Segundo BRONSTEIN et al. (1999, p. 430), as integrais elípticas podem ser expressas por integrais de três tipos:

$$a) \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \quad (1.3)$$

$$b) \int \frac{(1-k^2t^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \quad (1.4)$$

$$c) \int \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (0 < k < 1). \quad (1.5)$$

Fazendo a substituição

$$t = \text{sen } \theta, \quad (1.6)$$

com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, estas integrais ficam expressas na forma de Legendre:

$$a) \text{ integral do tipo 1: } \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \theta}}; \quad (1.7)$$

$$b) \text{ integral do tipo 2: } \int (\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \theta}) d\theta; \quad (1.8)$$

$$c) \text{ integral do tipo 3: } \int \frac{d\theta}{(1+n \text{sen}^2 \theta)\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \theta}}. \quad (1.9)$$

Nestas integrais, n é um número racional positivo ou negativo.

Com os conhecimentos explorados até este momento e com outros não menos importantes que virão no decorrer do desenvolvimento do tema, procura-se expor a solução dos problemas geodésicos direto e inverso de uma maneira que não deixe dúvidas quanto à eficácia do método proposto. Para tanto, nas próximas seções são discutidos conhecimentos necessários e suficientes para obtenção das soluções procuradas. Dá-se prosseguimento com a definição, importância dos problemas geodésicos direto e inverso e com uma síntese dos métodos tradicionais que propiciam solução para tais problemas. Em seguida, procura-se expor conhecimentos relevantes para obtenção das integrais elípticas aplicadas aos

problemas direto e inverso da geodésia. Procurou-se omitir o mínimo possível as demonstrações, objetivando o melhor entendimento na dedução das integrais elípticas aplicadas aos problemas supracitados.

Como já se sabe, as integrais procuradas não possuem uma solução analítica, ou seja, não podem ser expressas por funções elementares, sendo assim a única maneira é partir para uma solução numérica.

Alguns métodos de integração numérica são expostos e comparados para diversos comprimentos de linha geodésica, verificando assim o método mais apropriado para um determinado comprimento. Observa-se na exemplificação numérica do problema direto que os resultados obtidos utilizando a regra dos trapézios, regra de Simpson e fórmula gaussiana é exposta até a casa decimal concordante com a solução obtida quando utilizado o programa Maple para resolver numericamente as integrais elípticas. Já para o problema inverso isto não acontece, pois todas as soluções obtidas pelos métodos de integração numérica acima citados, são expostas com o mesmo número de casas decimais.

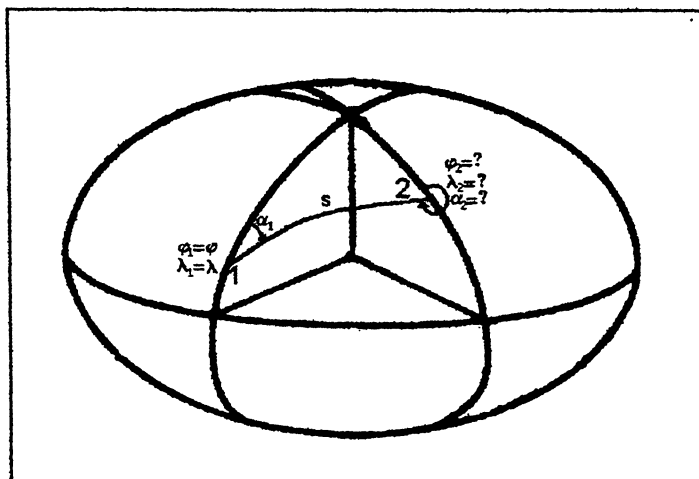
Com uma boa leitura, o leitor tem condições, sem a necessidade de recorrer a outras obras, de obter uma boa compreensão do método proposto, no que diz respeito à demonstração, aplicação e análise dos resultados.

1.2 DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS

1.2.1 Primeiro Problema Principal Geodésico

Dá-se o nome de 1º problema principal geodésico, também denominado problema geodésico direto, às transformações das coordenadas polares geodésicas (comprimento da linha geodésica s e azimute geodésico α) em diferença de latitude geodésica $\Delta\varphi$, diferença de longitude geodésica $\Delta\lambda$ e diferença de azimute geodésico $\Delta\alpha$. No primeiro ponto são conhecidas as quantidades φ_1 , λ_1 , α_1 e s . São requeridas, no ponto 2, as quantidades φ_2 , λ_2 e α_2 . Portanto, conforme ilustra a figura 1.1, o 1º problema geodésico principal requer o cálculo de $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ e $\Delta\alpha$ que somados às quantidades conhecidas do ponto 1, resultarão nas quantidades procuradas no ponto 2 : φ_2 , λ_2 e α_2 .

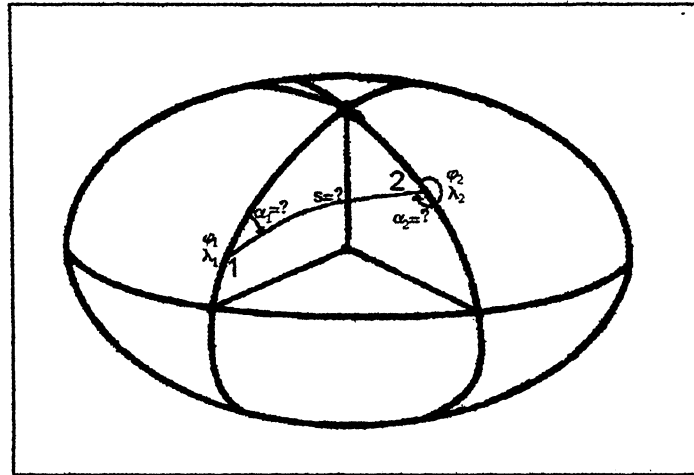
FIGURA 1.1 – PROBLEMA DIRETO DA GEODÉSIA



1.2.2 Segundo Problema Principal Geodésico

Dá-se o nome de 2º problema principal geodésico, também denominado problema geodésico inverso, às transformações da diferença de latitude geodésica $\Delta\varphi$, diferença de longitude geodésica $\Delta\lambda$, e da diferença de azimute geodésico $\Delta\alpha$ nas coordenadas polares geodésicas (comprimento da linha geodésica s e azimute geodésico α). Em um ponto 1 são conhecidas as quantidades φ_1 e λ_1 e no ponto 2 são conhecidas as quantidades geodésicas φ_2 e λ_2 . Portanto, conforme ilustra a figura 1.2, o 2º problema principal geodésico requer o cálculo do comprimento da linha geodésica s , do azimute geodésico α_1 no ponto 1 e do azimute geodésico α_2 no ponto 2 .

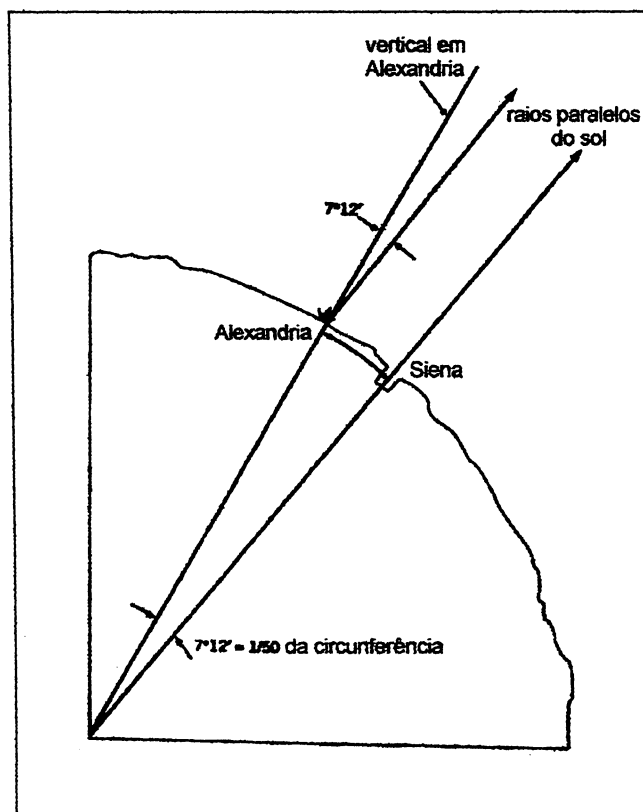
FIGURA 1.2 – PROBLEMA INVERSO DA GEODÉSIA



1.3 IMPORTÂNCIA DOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS

De acordo com SMITH (1997, p. 7), a primeira tentativa em calcular o comprimento de uma circunferência terrestre, considerando a Terra esférica, é creditada a Aristóteles. Mas como ele chegou ao seu resultado é desconhecido. Eratóstenes, considerando a Terra esférica, supondo um ponto em Alexandria e um ponto de Siene sobre um mesmo meridiano, conhecendo a distância entre estas duas cidades, com uma metodologia simples e consistente, conforme ilustra a figura 1.3, também calculou o comprimento de uma circunferência terrestre obtendo um resultado formidável àquela época.

FIGURA 1.3 – MÉTODO DE ERASTÓSTENES



FONTE: SMITH (1997, p. 8)

Assim o cálculo clássico dos problemas principais geodésicos nos círculos nacionais e internacionais de pesquisa sempre foi uma preocupação central. Desde a era antes de Cristo, como por exemplo com Eratóstenes, até nos dias atuais, como por exemplo em SCHMIDT (1999) e TARGA e MENIN (2000), discute-se no meio científico soluções mais apropriadas para os problemas principais geodésicos, principalmente no que diz respeito à acurácia dos resultados. É claro que com o passar dos tempos, com o avanço tecnológico e com auxílio de aplicativos adequados, está sendo possível obter resultados com uma qualidade melhor. Existem vários métodos que possibilitam a solução dos problemas principais geodésicos, não obstante, as respostas carecem de acurácia da ordem do milímetro, necessária quando associada à tecnologia GPS (*Global Positioning System*) que com metodologia apropriada de rastreamento, alcança acurácia do milímetro nas coordenadas geodésicas dos pontos. Daí seguem as questões: a) qual a metodologia de cálculo a ser empregada para avaliar o comprimento da linha

geodésica entre dois pontos em que as coordenadas geodésicas foram determinadas pelo GPS com acurácia do milímetro? b) qual a metodologia de cálculo para avaliar comparativamente as coordenadas de um certo ponto quando forem dadas as coordenadas pelo GPS com acurácia do milímetro? c) qual a metodologia de cálculo para atender uma das finalidades da Geodésia, que é a pesquisa da variação da posição dos pontos ao longo do tempo? Estas perguntas são avaliadas pela solução dos problemas principais geodésicos.

Conforme KLOTZ (1991, p. 32), desde 200 anos, matemáticos e geodestas elaboraram um número grande de soluções para os problemas principais geodésicos direto e inverso. A parte preponderante é definida para as chamadas distâncias curtas; alguns procedimentos estendem-se para distâncias médias e poucas soluções são apropriadas para distâncias quaisquer e acurácias quaisquer. A maioria das soluções indica estratégias de cálculo a fim de aproveitar otimamente os respectivos meios de ajuda de cálculo existentes à disposição e facilitar os cálculos numéricos. Foram instituídos parâmetros numerosos e muitos coeficientes foram calculados e tabelados.

Em geral, de acordo com KLOTZ (1991, p. 32), as propostas de solução são classificadas em 4 grupos. A maior parte delas, classificada como as do 1º grupo, baseia-se nas séries de Legendre:

$$\varphi = \varphi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k \varphi}{ds^k} \right)_{P1} \cdot s^k, \quad (1.10)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k \lambda}{ds^k} \right)_{P1} \cdot s^k, \quad (1.11)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k \alpha}{ds^k} \right)_{P1} \cdot s^k, \quad (1.12)$$

isto é, em desenvolvimento da diferença de latitude, da diferença de longitude e da diferença de azimuth segundo potências crescentes do comprimento de arco s . A partir do desenvolvimento segundo s resulta uma convergência ruim da série junto de distâncias grandes. Além disso os quocientes diferenciais $\frac{d\lambda}{ds}$ e $\frac{d\alpha}{ds}$ na vizinhança dos pólos tornam-se infinitamente grandes, de modo que as séries de

Legendre lá não podem ser empregadas. Para o grupo dos procedimentos baseados em desenvolvimentos de Legendre, enumeram também soluções que integram numericamente as equações diferenciais para $\frac{d\varphi}{ds}$, $\frac{d\lambda}{ds}$ e $\frac{d\alpha}{ds}$, por exemplo, segundo Runge-Kutta. O subíndice P_1 nas (1.10), (1.11) e (1.12) indica que as diferenciais são avaliadas com as coordenadas geográficas elipsóidicas do ponto 1, comprimento da linha geodésica e azimute.

Um segundo grupo para a solução dos problemas principais geodésicos baseia-se no desenvolvimento de integrais elípticas. A integração dá-se diretamente com auxílio de procedimento numérico ou pelo desenvolvimento de séries do integrando e, em seguida, integração termo a termo. Um procedimento semelhante foi indicado já no ano 1826 por Bessel.

Os procedimentos do 3º grupo representam a superfície do elipsóide sobre uma superfície auxiliar; procedem lá ao transporte e efetuam a seguir a representação invertida no elipsóide.

Nas soluções do 4º grupo não é empregada a linha geodésica, mas sim outras linhas de ligação.

1.4 REVISÃO DE ALGUNS MÉTODOS DE CÁLCULO DOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS

1.4.1 Fórmulas de Puissant

Estas fórmulas são chamadas assim em homenagem ao matemático francês a quem é creditada a sua demonstração. Sua demonstração está baseada sobre uma aproximação esférica, ou seja, recorre-se a uma esfera auxiliar tangente ao elipsóide ao longo do paralelo do primeiro vértice. Esfera esta, com raio coincidindo com o raio de curvatura da seção primeiro vertical, também chamado grande normal, deste primeiro vértice. O princípio matemático utilizado para desenvolver os problemas direto e inverso é a série de Taylor.

De acordo com BOMFORD (1971, p. 135), essas fórmulas estão consideradas com precisão de 1 ppm em 80 ou 100 km e de 40 ppm em 250 km na latitude de 60°. Portanto, conforme GEMAEL (1988, p. 8.7), essas fórmulas têm sido

largamente utilizadas no Brasil, sendo adequadas somente para as linhas curtas, i.e., não superiores a 80 km, o que não constituiu inconveniente nas triangulações ordinárias cujos lados dificilmente ultrapassam 40 km.

1.4.2 Fórmulas de Sodano

No trabalho de SODANO (1958), disserta-se sobre o aspecto teórico e prático de um rigoroso e também rápido procedimento não iterativo para a solução inversa para linhas muito longas. Pode-se citar como exemplo de linhas muito longas a trilateração de lados longos, como a ligação da rede Brasileira à Norte-Americana. Contém uma fórmula mais estável para azimutes, uma fórmula alternativa para linhas muito curtas, não requer tabelas especiais e nem manipulação de excesso de dígitos. As fórmulas finais não iterativas são séries convergentes, as quais têm termos completamente equivalentes para a segunda, quarta e sexta potências da excentricidade do elipsóide e, portanto, pode-se romper a série de acordo com o tempo e acurácia requeridos.

De acordo com SODANO (1958, p. 31), a solução pode ser expandida para termos superiores em considerações puramente teóricas, apesar de a acurácia já estar além da décima casa decimal de radianos para azimutes e para arco de distância.

No apêndice D exposto em SODANO (1965, p. 80) é apresentada a solução numérica dos problemas direto e inverso, ambos para linhas curtas e longas. Apresenta também a discrepância entre a solução inversa e a direta para uma linha curta e uma longa. A discrepância na latitude do ponto 2 é 0,00411" para a linha longa e 0,0000005" para a linha curta; na longitude do ponto 2 a discrepância é 0,00883" e 0,00000027" para a linha longa e para a linha curta, respectivamente. Já para o contra-azimute ou azimute 2-1 a discrepância é 0,0086" para a linha longa e 0,00011" para a curta.

Em SODANO (1967, p. 233) é dado um suplemento para a solução inversa para linhas geodésicas longas e são dadas fórmulas alternativas para a solução não iterativa.

1.4.3 Série de Taylor das Diferenças de Latitude, de Longitude e de Azimute como Funções de Arco

FIGURA 1.4 – TRIÂNGULO INFINITESIMAL

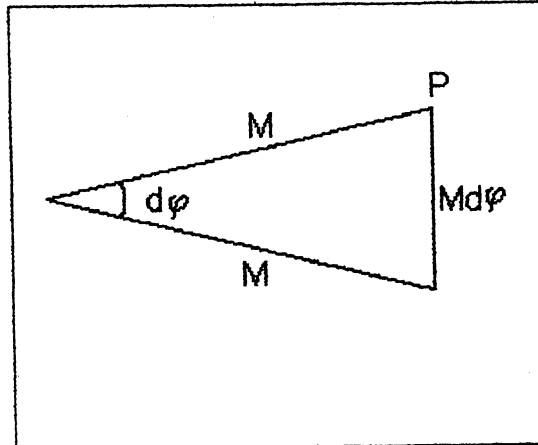


FIGURA 1.5 – TRIÂNGULO INFINITESIMAL

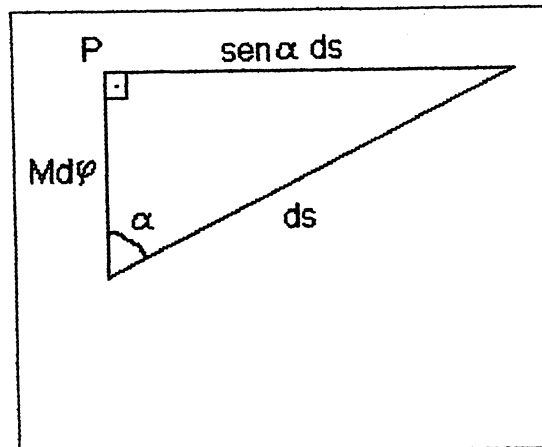
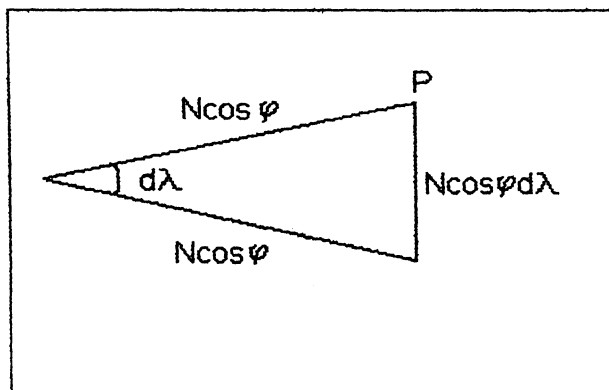


FIGURA 1.6 – TRIÂNGULO INFINITESIMAL



Neste método, parte-se das três fórmulas diferenciais:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{M}, \quad (1.13)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{N \cos \varphi}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \varphi}{N}. \quad (1.15)$$

Na figura 1.5 onde $Md\varphi$ representa o elemento de arco de meridiano, calcula-se o $\cos \alpha$ e obtém-se diretamente a (1.13). Na figura 1.5 e na 1.6 onde $N \cos \varphi$ exprime o raio do paralelo, $\operatorname{sen} \alpha ds$ e $N \cos \varphi d\lambda$ representam o elemento de arco do paralelo. Comparando as figuras 1.5 e 1.6 obtém-se a igualdade:

$$N \cos \varphi d\lambda = \operatorname{sen} \alpha ds, \quad (1.16)$$

da qual resulta a (1.14).

A (1.15) vem do teorema de Clairaut exposto neste trabalho pela (2.67). Figura e demonstração, ver (CICCONETTI, 1938, p. 107).

Para cada uma das três grandezas φ , λ , α , efetua-se um desenvolvimento em série de Taylor segundo potências crescentes de s e formando-se todos os coeficientes das potências s pelo ponto inicial. Reconhece-se que estes desenvolvimentos por potências de s só são apropriados para linhas curtas. Dos resultados expostos por BAESCHLIN (1948, p.128), reconhece-se que não se permite empregar no ponto inicial uma latitude de 47° aos desenvolvimentos com um comprimento de linha além de 32,3 km, caso queira alcançar o rigor numérico

exigido nos resultados: 0,0001” em latitude e em longitude. Em latitudes mais altas fica limitada ainda mais o comprimento da linha. De acordo com BAESCHLIN (1948, p. 128), como os lados dos triângulos de primeira ordem na maioria são menores que 32,3 km, é necessário ser tomados termos no mínimo de quarta ordem. Por conseqüência, o número dos coeficientes a calcular torna-se tão grande que o emprego destas fórmulas, em geral, não são recomendadas. As fórmulas aqui tratadas têm a vantagem de permitirem uma solução direta do problema geodésico direto. A maior desvantagem delas é a convergência fraca. Para o problema geodésico inverso, as fórmulas exigem um cálculo indireto com aproximações sucessivas e acabam não oferecendo vantagens.

1.4.4 Outras Fórmulas para o Cálculo dos Problemas Principais Geodésicos

Tem-se conforme BOMFORD (1971, p. 131), a fórmula de Rudoe, a qual utiliza-se a seção normal do vértice conhecido que contém o segundo vértice. Nesta seção elíptica é calculada a latitude reduzida do segundo vértice e desta obtida a latitude geodésica. Estas fórmulas são consideradas boas com precisão de frações de um milímetro sobre qualquer distância. Segundo BOMFORD (1971), outras fórmulas utilizadas são as de Clark, consideradas boas até 800 km com precisão de 1/25 ppm e as de Robbins que representam um aperfeiçoamento das de Clark, consideradas boas até 1600 km com precisão de 1/100 ppm.

1.5 RECURSOS UTILIZADOS

- a) o acervo literário de Geodésia disponível na biblioteca dos Setores de Ciências da Terra, Tecnologia e Ciências Exatas;
- b) o Serviço de Comutação Bibliográfica (COMUT) que providencia referências bibliográficas de outras bibliotecas brasileiras e na *The British Library Document Supply Centre*;
- c) programa Maple.

1.6 OBJETIVOS

1.6.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma metodologia didática para solução dos problemas direto e inverso da Geodésia por integrais elípticas.

1.6.2 Objetivos Específicos

- a) exprimir didaticamente os problemas direto e inverso da Geodésia na forma de integrais elípticas;
- b) resgatar os procedimentos não explicitados por SCHMIDT (1999) na compreensão do método que utiliza as integrais elípticas para a solução dos problemas direto e inverso;
- c) pormenorizar didaticamente o método mediante a dedução de fórmulas;
- d) expor os métodos de integração numérica: regra dos trapézios, fórmula de Simpson, fórmula gaussiana, aplicando-os às soluções das integrais elípticas;
- e) verificar vantagens e desvantagens do método proposto, por exemplo, quanto à acurácia dos resultados em função do comprimento da linha geodésica.

1.7 CONTRIBUIÇÃO E ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA

Contribuição à comunidade universitária das Engenharias Cartográfica e de Agrimensura, as quais contêm em seus programas acadêmicos e também profissionais, os problemas geodésicos principais direto e inverso. Contribui também diretamente ao Curso de Licenciatura em Matemática pela aplicação prática, pois dado o problema, é construída matematicamente a solução envolvendo diversos conhecimentos da Matemática.

A pesquisa está estruturada em 7 seções.

Na segunda seção são apresentados os conceitos básicos necessários para obtenção das integrais aplicadas aos problemas principais geodésicos.

Na terceira seção é apresentada a dedução das integrais elípticas aplicadas aos problemas principais geodésicos bem como os métodos de integração numérica utilizados para essas integrais.

Na quarta e quinta seções, as integrais elípticas são aplicadas respectivamente aos problemas direto e inverso, expondo a metodologia e exemplificação numérica utilizando o programa Maple, a regra dos trapézios, regra de Simpson e a fórmula gaussiana (quadratura de Gauss) na obtenção da solução numérica das integrais elípticas.

Na sexta seção é feita a análise dos resultados obtidos nas duas seções anteriores, a fim de analisar qual método de integração numérica teve melhor comportamento na solução das integrais elípticas.

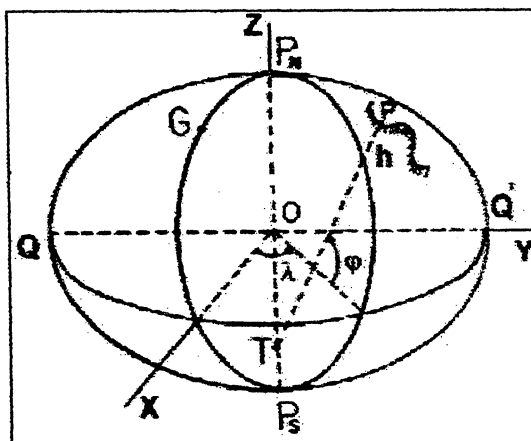
Na sétima e última seção conclui-se o trabalho analisando se os objetivos foram alcançados e fazendo as devidas recomendações.

2 CONCEITOS BÁSICOS

2.1 SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA

O Sistema Geodésico de Referência (SGR), ilustrado pela figura 5.1, é constituído de uma superfície de referência, o elipsóide de revolução, devidamente orientado em relação à Terra e definido por um terno ortogonal dextrogiro, com origem no centro do elipsóide de referência. Adota-se o meridiano médio de Greenwich (média das determinações de longitude de vários observatórios do mundo) como origem (PnGPs). A direção OX é estabelecida pela interseção deste com o plano equatorial (QQ'). A direção OZ pelo eixo menor do elipsóide, com orientação positiva para o pólo norte.

FIGURA 2.1 – SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA



FONTE: MENEZES (1985, p.2)

2.2 COORDENADAS GEODÉSICAS DO PONTO P

Um ponto da superfície terrestre pode ser caracterizado pelas coordenadas geodésicas latitude φ e longitude λ .

A latitude geodésica φ é o ângulo que o plano equatorial forma com a normal ao elipsóide em P. Os valores da latitude situam-se no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

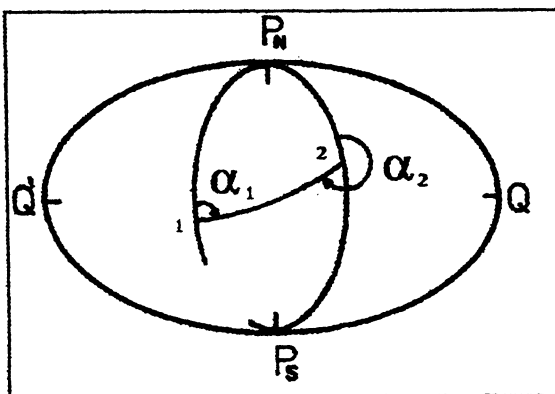
A longitude geodésica λ é o ângulo plano do diedro que tem origem na reta que contém os pólos norte e sul e cujas faces são os semiplanos caracterizados pelo meridiano médio de Greenwich e pelo meridiano do ponto P. Os valores da longitude situam-se no intervalo $0 \leq \lambda \leq \pi$ para leste de Greenwich e $-\pi \leq \lambda \leq 0$ para oeste de Greenwich (TORGE, 1991).

A altitude geométrica h , também conhecida como altitude elipsoidal, é a distância do elipsóide ao ponto P, contada sobre a normal.

2.3 AZIMUTE

Na figura 5.2 representa-se uma direção 1-2 sobre o elipsóide e o seu azimute geodésico α_1 , definido como o ângulo que o meridiano do ponto 1 forma com direção 1-2, contado do norte por leste. O ângulo α_2 é o azimute geodésico da direção 2-1 ou o contra-azimute geodésico da direção 1-2 (MENEZES, 1985, p. 3).

FIGURA 2.2 – REPRESENTAÇÃO DO AZIMUTE GEODÉSICO



FONTE: GEMAEL (1987, p. 1.6)

2.4 EXCENTRICIDADE DA ELIPSE MERIDIANA DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Conforme a figura 2.3 tem-se que

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.1)$$

A primeira excentricidade e da elipse é definida por

$$e = \frac{E}{a}; \quad (2.2)$$

assim pode-se escrever

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ ou seja } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (2.3)$$

Ainda da (2.3) tem-se

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}; \quad (2.4)$$

mas o achatamento f de um elipsóide define-se por

$$f = \frac{a - b}{a}, \quad (2.5)$$

ou seja,

$$f = 1 - \frac{b}{a}, \quad (2.6)$$

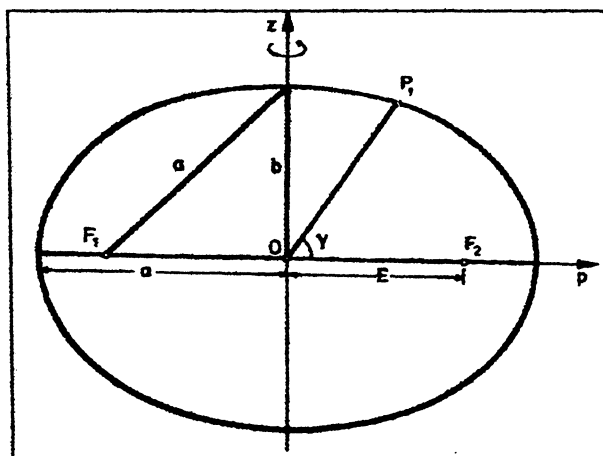
$$\frac{b}{a} = 1 - f, \quad (2.7)$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - 2f + f^2. \quad (2.8)$$

Substituindo o resultado da (2.8) na (2.4), obtém-se

$$e^2 = 2f - f^2 \text{ (ZAKATOV, 1976, p. 25)}. \quad (2.9)$$

FIGURA 2.3 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO



FONTE: HECK (1995, p. 63)

2.5 SEÇÕES NORMAIS PRINCIPAIS

Pode-se traçar infinitos planos que contenham a reta normal à superfície do elipsóide de revolução num ponto A da mesma. Estes planos por conterem a normal à superfície em questão são conhecidos por planos normais.

As resultantes da interseção dos planos normais com a superfície do elipsóide de revolução são chamadas de seções normais. Em cada ponto existem duas seções normais que são mutuamente perpendiculares e cujas curvaturas são máxima e mínima. Estas seções são conhecidas por seções normais principais. De acordo com COSTA (1976, p. 11), demonstra-se que estas seções são a seção meridiana e a seção primeiro vertical.

2.5.1 Raio de Curvatura N da Seção Primeiro Vertical

A equação da elipse meridiana do elipsóide de revolução pode ser dada por:

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.10)$$

$$\frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2}, \quad (2.11)$$

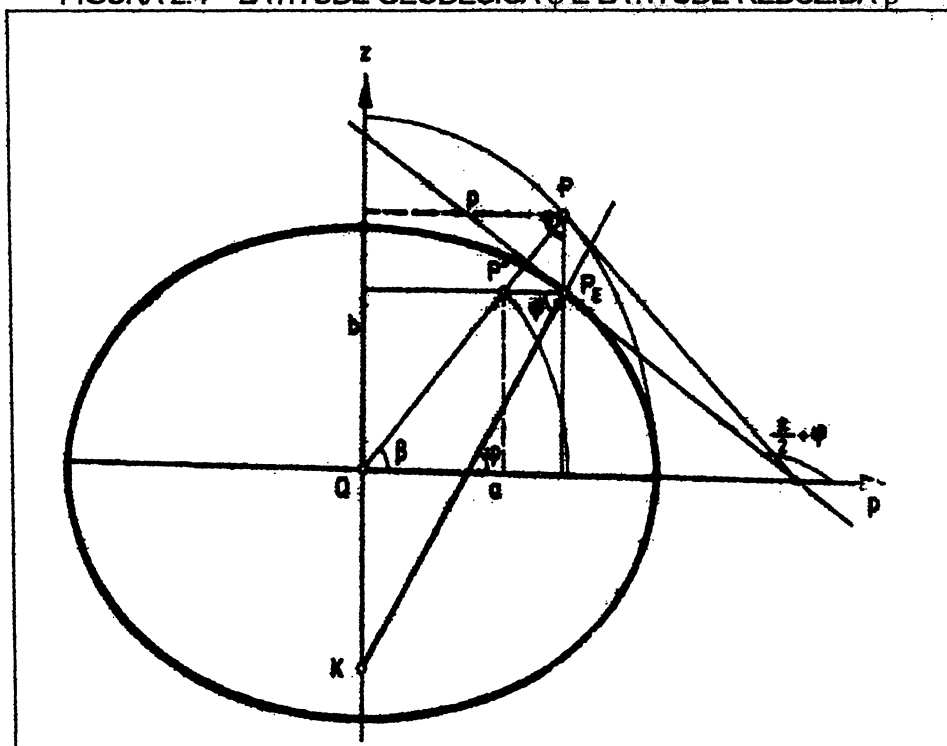
$$z^2 = b^2 - \frac{b^2 p^2}{a^2} \quad (2.12)$$

com

$$p^2 = x^2 + y^2, \quad (2.13)$$

$$x = p \cos \lambda \text{ e } y = p \sin \lambda. \quad (2.14a; 2.14b)$$

FIGURA 2.4 – LATITUDE GEODÉSICA φ E LATITUDE REDUZIDA β



FONTE: HECK (1995, p. 66)

derivando a (2.12) em relação a p , obtém-se

$$2z \frac{dz}{dp} = -\frac{2b^2}{a^2} p, \quad (2.15)$$

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{b^2 p}{a^2 z}, \quad (2.16)$$

mas analisando a figura 2.4, tem-se

$$\frac{dz}{dp} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad (2.17)$$

$$\frac{dz}{dp} = -\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}. \quad (2.18)$$

Das (2.16) e (2.18), tem-se

$$-\frac{b^2 p}{a^2 z} = \frac{-\cos\varphi}{\sin\varphi}. \quad (2.19)$$

Elevando ambos os membros da (2.19) ao quadrado, obtém-se

$$\frac{b^4 p^2}{a^4 z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}. \quad (2.20)$$

A (2.20) pode ser reescrita como

$$b^4 p^2 \sin^2\varphi - a^4 z^2 \cos^2\varphi = 0. \quad (2.21)$$

A expressão de p é obtida substituindo a (2.12) na (2.21):

$$b^4 p^2 \sin^2\varphi - a^4 \left(b^2 - \frac{b^2 p^2}{a^2} \right) \cos^2\varphi = 0, \quad (2.22)$$

efetuando as simplificações, têm-se

$$b^4 p^2 \sin^2\varphi - a^2 (a^2 b^2 - b^2 p^2) \cos^2\varphi = 0, \quad (2.23)$$

$$b^4 p^2 \sin^2\varphi - a^4 b^2 \cos^2\varphi + a^2 b^2 p^2 \cos^2\varphi = 0, \quad (2.24)$$

$$p^2 (b^4 \sin^2\varphi + a^2 b^2 \cos^2\varphi) = a^4 b^2 \cos^2\varphi, \quad (2.25)$$

$$p = \sqrt{\frac{a^4 b^2 \cos^2\varphi}{b^4 \sin^2\varphi + a^2 b^2 \cos^2\varphi}}, \quad (2.26)$$

$$p = \frac{a^2 \cos\varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}}. \quad (2.27)$$

Da (2.3) escreve-se

$$b^2 = a^2(1-e^2). \quad (2.28)$$

Substituindo-se a (2.28) na (2.27), tem-se

$$p = \frac{a^2 \cos\varphi}{\sqrt{a^2(1-e^2)\sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}}, \quad (2.29)$$

$$p = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{(1-e^2)\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}}, \quad (2.30)$$

$$p = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi - e^2 \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}}, \quad (2.31)$$

$$p = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}. \quad (2.32)$$

Da figura 2.4 tem-se que

$$p = N \cos \varphi. \quad (2.33)$$

Substituindo a (2.33) na (2.32), obtém-se

$$N \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.34)$$

Desta última equação resulta a expressão do raio de curvatura N da seção primeiro vertical, chamado também de grande normal e representado na figura (2.4) pelo segmento P_EK,

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.35)$$

2.5.2 Raio de Curvatura M da Seção Meridiana

Da (2.12) escreve-se

$$z = \frac{b}{a} (a^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

Derivando a (2.36) em relação a p, obtém-se

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{b}{a} p (a^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

De acordo com SIMMONS (1988, p. 292), a curvatura k em um ponto da seção meridiana é

$$k = \frac{\frac{d^2z}{dp^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}} \quad (2.38)$$

Da Geometria Diferencial sabe-se que o raio é o inverso da curvatura:

$$M = \frac{1}{|k|}. \quad (2.39)$$

Substituindo a (2.38) na (2.39), esta é reescrita

$$M = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2z}{dp^2}}. \quad (2.40)$$

Derivando a (2.37) em relação à p , têm-se

$$\frac{d^2z}{dp^2} = -\frac{b}{a} \left[(a^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} + p \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (a^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2p) \right], \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2z}{dp^2} = -\frac{b}{a} \left[(a^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} + p^2 \cdot (a^2 - p^2)^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (2.42)$$

$$\frac{d^2z}{dp^2} = -\frac{b}{a} (a^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{bp^2}{a} (a^2 - p^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2z}{dp^2} = -\frac{b}{a} (a^2 - p^2)^{-\frac{3}{2}} [a^2 - p^2 + p^2], \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2z}{dp^2} = -ab(a^2 - p^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.45)$$

Substituindo as (2.37) e (2.45) na (2.40), tem-se

$$M = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{ap}{b\sqrt{a^2 - p^2}}\right)^2\right]^3}}{\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - p^2)^3}}}. \quad (2.46)$$

Simplificando a (2.46):

$$M = \frac{-\sqrt{(a^2 - p^2)^3} \sqrt{\left[1 + \frac{b^2 p^2}{a^2 (a^2 - p^2)}\right]^3}}{ab}, \quad (2.47)$$

$$M = \frac{\sqrt{(a^2 - p^2)^3} \sqrt{\left[\frac{a^2(a^2 - p^2) + b^2 p^2}{a^2(a^2 - p^2)} \right]^3}}{ab}, \quad (2.48)$$

$$M = \frac{\sqrt{(a^2 - p^2)^3} \sqrt{[a^2(a^2 - p^2) + b^2 p^2]^3}}{\sqrt{(a^2)^3} \sqrt{(a^2 - p^2)^3}} \cdot \frac{1}{ab}, \quad (2.49)$$

$$M = \frac{\sqrt{[a^2(a^2 - p^2) + b^2 p^2]^3}}{a^4 b} \quad (2.50)$$

obtém-se

$$M = \frac{\sqrt{[a^4 - a^2 p^2 + b^2 p^2]^3}}{a^4 b}. \quad (2.51)$$

Substituindo as (2.32) e (2.28) na (2.51), tem-se

$$M = \frac{\sqrt{\left[a^4 - a^2 \left(\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) + a^2 (1 - e^2) \left(\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right]^3}}{a^5 \sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.52)$$

Simplificando a (2.52):

$$M = \frac{\sqrt{\left\{ a^4 \left[1 - \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{(1 - e^2) \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right] \right\}^3}}{a^5 \sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.53)$$

$$M = \frac{\sqrt{\left\{ a^4 \left[\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right] \right\}^3}}{a^5 \sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.54)$$

$$M = \frac{\sqrt{a^{12} \left[\frac{1 - e^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^3}}{a^5 \sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.55)$$

$$M = \frac{a^6 \sqrt{\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right)^3}}{a^5 \sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.56)$$

$$M = \frac{a \sqrt{(1 - e^2)^3}}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.57)$$

resulta a expressão do raio de curvatura da seção meridiana:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}. \quad (2.58)$$

2.6 LATITUDE REDUZIDA β

Da figura 2.4 têm-se as relações

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{z}{b}, \quad (2.59)$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{p}{a}. \quad (2.60)$$

Das (2.59) e (2.60) escrevem-se as equações paramétricas da elipse meridiana:

$$\begin{cases} z = b \operatorname{sen} \beta \\ p = a \operatorname{cos} \beta \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\text{Da (2.28) escreve-se } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.62)$$

Dividindo-se membro a membro a (2.61) e utilizando a (2.62), obtém-se

$$\frac{z}{p} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \beta. \quad (2.63)$$

Da (2.19) tem-se

$$z = p \frac{b^2 \operatorname{sen} \varphi}{a^2 \operatorname{cos} \varphi}. \quad (2.64)$$

Empregando-se a (2.62) na (2.64) obtém-se

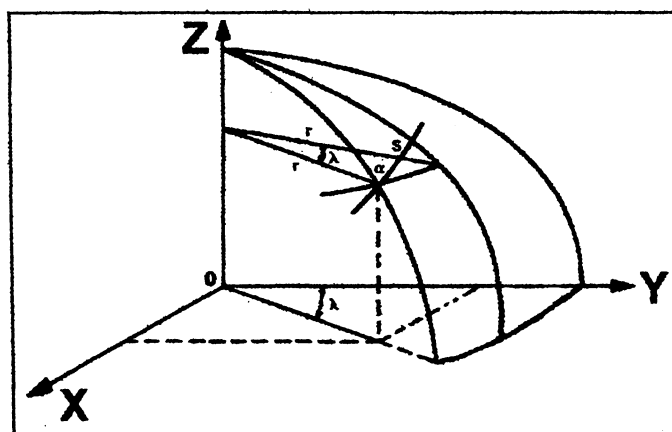
$$z = p(1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.65)$$

Substituindo a (2.65) na (2.63), resulta a relação entre a latitude geodésica φ e a latitude reduzida β :

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.66)$$

2.7 TEOREMA DE CLAIRAUT

FIGURA 2.5 – TEOREMA DE CLAIRAUT



FONTE: GEMAEL (1959, p. 44)

O teorema de Clairaut exposto em GEMAEL (1959, p. 45) diz que: Em qualquer ponto de uma linha geodésica, traçada sobre uma superfície de revolução, o produto do raio do paralelo deste ponto pelo seno do azimute da geodésica é constante,

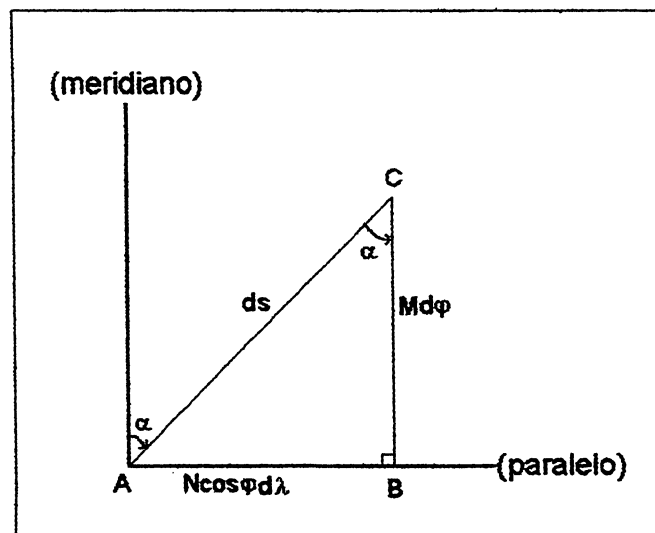
$$r \operatorname{sen} \alpha = c. \quad (2.67)$$

3 PRIMEIRO E SEGUNDO PROBLEMAS GEODÉSICOS PRINCIPAIS EXPRESSOS POR INTEGRAL ELÍPTICA E SEUS MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO

3.1 DIFERENCIAIS DA LINHA GEODÉSICA

Com auxílio das figuras 1.4, 1.5 e 1.6, constrói a figura 3.1 a seguir.

FIGURA 3.1 – TRIÂNGULO ELIPSÓIDICO INFINITESIMAL



Conforme a figura 3.1, tem-se um triângulo elipsóidico infinitesimal ABC, onde α é o azimute geodésico, ds é um arco elementar da linha geodésica, $Md\varphi$ é um arco elementar da elipse meridiana e $N\cos\varphi d\lambda$ é o elemento de arco de um paralelo.

No triângulo ABC a tangente do ângulo α é escrita como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N\cos\varphi d\lambda}{Md\varphi}, \quad (3.1)$$

$$d\lambda = \frac{M\operatorname{tg}\alpha d\varphi}{N\cos\varphi}. \quad (3.2)$$

Substituindo as expressões de N e M , conforme as (2.35) e (2.58), respectivamente, na (3.2), obtém-se

$$d\lambda = \frac{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3)$$

que simplificada torna a primeira expressão diferencial desejada:

$$d\lambda = \frac{(1-e^2) \operatorname{tg} \alpha}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi. \quad (3.4)$$

Ainda no triângulo ABC da figura 3.1, o co-seno do ângulo α , é escrito como

$$\cos \alpha = \frac{Md\varphi}{ds}, \quad (3.5)$$

$$ds = \frac{Md\varphi}{\cos \alpha}. \quad (3.6)$$

Com auxílio da (2.58) escreve-se a segunda expressão diferencial desejada:

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha} d\varphi. \quad (3.7)$$

3.2 A CONSTANTE DE CLAIRAUT REESCRITA COMO CO-SENO DA LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA

Da trigonometria tem-se a relação

$$\sec^2 \beta = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta \quad (3.8)$$

que com auxílio da relação entre a latitude geodésica e a latitude reduzida dada pela (2.66), escreve-se

$$\sec^2 \beta = 1 + (1-e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (3.9)$$

A (3.9) é reescrita

$$\sec \beta = \sqrt{1 + (1-e^2) \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}, \quad (3.10)$$

$$\sec \beta = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}. \quad (3.11)$$

Como

$$\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \quad (3.12)$$

tem-se

$$\sec \beta = \sqrt{\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}, \quad (3.13)$$

$$\sec \beta = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\cos \varphi}. \quad (3.14)$$

Como

$$\cos \beta = \frac{1}{\sec \beta}, \quad (3.15)$$

a (3.14) é reescrita

$$\cos \beta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad (3.16)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \cos \beta. \quad (3.17)$$

Tem-se que o raio r de um paralelo é dado por

$$r = N \cos \varphi. \quad (3.18)$$

Substituindo a (2.35) na (3.18), esta é reescrita

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi. \quad (3.19)$$

Substituindo a (3.17) na (3.19):

$$r = \frac{a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \beta, \quad (3.20)$$

advém a expressão final

$$r = a \cos \beta. \quad (3.21)$$

Substituindo o raio de paralelo obtido pela (3.21) no teorema de Clairaut representado matematicamente pela (2.67), tem-se

$$a \cos \beta \operatorname{sen} \alpha = c. \quad (3.22)$$

Como a (semi-eixo maior do elipsóide adotado) e c são constantes, tem-se

que o quociente $\frac{c}{a}$ também é uma constante, logo a (3.22) fica reescrita como

$$\cos \beta \operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a}. \quad (3.23)$$

Fazendo

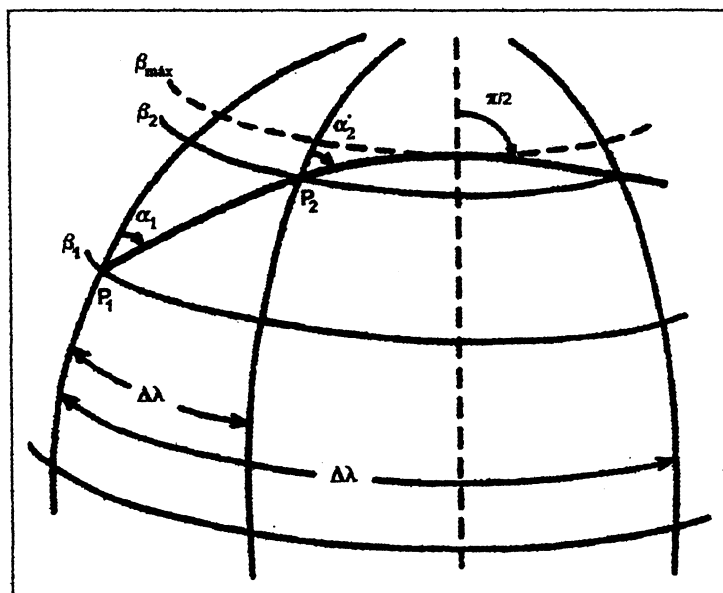
$$\frac{c}{a} = h \quad (3.24)$$

e substituindo na (3.23), obtém-se

$$\cos \beta \operatorname{sen} \alpha = h. \quad (3.25)$$

De acordo com a (3.24) é clara a diferença entre os valores assumidos pelas constantes c e h . Desta forma, h passa a ser chamado de segunda constante de Clairaut, pois se entende ser c a primeira.

FIGURA 3.2 – LATITUDE MÁXIMA DA LINHA GEODÉSICA



FONTE: SCHMIDT (1999, p. 123)

Conforme ilustra a figura 3.2, quando a linha geodésica atingir latitude geodésica máxima ou latitude reduzida máxima, ela será perpendicular ao meridiano do ponto máximo, ou seja, o azimute da linha geodésica no ponto máximo será igual a $\frac{\pi}{2}$. Logo, para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tem-se $\beta = \beta_{\text{máx}}$ e a (3.25) pode ser escrita como

$$h = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \beta_{\text{máx}}, \quad (3.26)$$

$$h = 1 \cdot \cos \beta_{\text{máx}}, \quad (3.27)$$

$$h = \cos \beta_{\text{máx}}. \quad (3.28)$$

Desta forma a constante de Clairaut h , chamada aqui de segunda constante de Clairaut, pode ser obtida pelo co-seno da latitude reduzida máxima.

A equação (3.28) determina o círculo de latitude reduzida máxima ou então mínima no qual a linha geodésica é tangente. Assim, conhecido o valor de h , pode-se determinar a latitude máxima ou então mínima que a linha geodésica atinge.

Como o co-seno de um arco pode assumir valores desde -1 até 1 , tem-se a expressão do intervalo para a (3.28):

$$-1 \leq \cos \beta_{\text{máx}} \leq 1. \quad (3.29)$$

Então, de acordo com a (3.28), h assume os mesmos valores de $\cos \beta_{\text{máx}}$.

Assim tem-se

$$-1 \leq h \leq 1. \quad (3.30)$$

Da (3.8), tem-se

$$\sec^2 \beta_{\text{máx}} = 1 + \text{tg}^2 \beta_{\text{máx}} \quad \text{ou} \quad (3.31)$$

$$\sec \beta_{\text{máx}} = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta_{\text{máx}}}. \quad (3.32)$$

De acordo com a (3.15), pode-se escrever

$$\cos \beta_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta_{\text{máx}}}}. \quad (3.33)$$

Portanto, das (3.25), (3.28) e (3.33), pode-se escrever a identidade

$$h = \text{sen} \alpha \cos \beta = \cos \beta_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta_{\text{máx}}}}. \quad (3.34)$$

3.3 DEDUÇÃO DAS INTEGRAIS ELÍPTICAS APLICADAS AOS PROBLEMAS PRINCIPAIS GEODÉSICOS DIRETO E INVERSO

A dedução das integrais elípticas aplicadas aos problemas principais geodésicos direto e inverso, tem início na subseção 3.2 com a obtenção das equações diferenciais da linha geodésica e prossegue nesta subseção, da qual serão utilizados resultados para auxiliarem nos cálculos seqüentes.

De acordo com SCHMIDT (1999, p. 123), as equações diferenciais (3.4) e (3.7) não podem ser integradas numericamente, uma vez que a longitude, a latitude, o azimute e a distância, ao longo da linha geodésica variam de modo não

proporcional um para com o outro. Sendo assim, procura-se em um primeiro momento escrever essas equações diferenciais em função de uma única variável, no caso a latitude reduzida.

Para expressar a (3.7) em função da latitude reduzida, deve-se obter $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\varphi$ e $d\varphi$ em função da latitude reduzida. Assim procede-se: da (3.25) escreve-se

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\cos\beta}; \quad (3.35)$$

mas tem-se que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (3.36)$$

Substituindo a (3.35) na (3.36) obtém-se

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{h^2}{\cos^2\beta}, \quad (3.37)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\beta - h^2}{\cos^2\beta}, \quad (3.38)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - h^2}}{\cos\beta}. \quad (3.39)$$

Para a obtenção de $\operatorname{sen}\varphi$, utiliza-se da (3.9) da qual tem-se

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sec^2\beta - 1}{1 - e^2}; \quad (3.40)$$

substituindo a (3.40) em

$$\sec^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi \quad (3.41)$$

obtém-se

$$\sec^2\varphi = 1 + \frac{\sec^2\beta - 1}{1 - e^2}, \quad (3.42)$$

$$\sec^2\varphi = \frac{1 - e^2 - 1 + \sec^2\beta}{1 - e^2}, \quad (3.43)$$

$$\sec^2\varphi = \frac{\sec^2\beta - e^2}{1 - e^2}; \quad (3.44)$$

como

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sec\varphi}, \quad (3.45)$$

tem-se

$$\cos^2 \varphi = \frac{1-e^2}{\sec^2 \beta - e^2}; \quad (3.46)$$

tem-se que

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1; \quad (3.47)$$

substituindo-se o resultado da (3.46) na (3.47), obtém-se

$$\sin^2 \varphi = 1 - \frac{1-e^2}{\sec^2 \beta - e^2}, \quad (3.48)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\sec^2 \beta - e^2 - 1 + e^2}{\sec^2 \beta - e^2}, \quad (3.49)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\sec^2 \beta - 1}{\sec^2 \beta - e^2}, \quad (3.50)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1}{\frac{1}{\cos^2 \beta} - e^2}, \quad (3.51)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos^2 \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta}. \quad (3.52)$$

Busca-se agora expressar $d\varphi$ em função de β . Derivando a (2.66) em relação a β , obtém-se

$$\sec^2 \beta = \sqrt{1-e^2} \cdot \sec^2 \varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\beta}, \quad (3.53)$$

$$d\varphi = \frac{\sec^2 \beta}{\sqrt{1-e^2} \cdot \sec^2 \varphi} d\beta. \quad (3.54)$$

Substituindo a (3.44) na (3.54), tem-se

$$d\varphi = \frac{\sec^2 \beta}{\sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\sec^2 \beta - e^2}{1-e^2}} d\beta, \quad (3.55)$$

$$d\varphi = \frac{\sec^2 \beta}{\frac{\sec^2 \beta - e^2}{\sqrt{1-e^2}}} d\beta, \quad (3.56)$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sec^2 \beta}{\sec^2 \beta - e^2} d\beta, \quad (3.57)$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta}}{\frac{1}{\cos^2 \beta} - e^2} d\beta, \quad (3.58)$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \beta} d\beta. \quad (3.59)$$

Busca-se também expressar a diferencial da linha geodésica ds em relação a diferencial da latitude reduzida $d\beta$ substituindo as (3.39), (3.52) e (3.59) na (3.7), tem-se

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left[1-e^2 \left(\frac{1-\cos^2 \beta}{1-e^2 \cos^2 \beta}\right)\right]^3} \cdot \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}{\cos \beta}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \beta} d\beta, \quad (3.60)$$

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(\frac{1-e^2 \cos^2 \beta - e^2 + e^2 \cos^2 \beta}{1-e^2 \cos^2 \beta}\right)^3} \cdot \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}{\cos \beta}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \beta} d\beta, \quad (3.61)$$

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos^2 \beta}\right)^3} \cdot \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}{\cos \beta}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \beta} d\beta, \quad (3.62)$$

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{\frac{(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2 \cos^2 \beta)\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}} \cdot \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}{\cos \beta}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cos^2 \beta} d\beta, \quad (3.63)$$

$$ds = \frac{a(1-e^2)(1-e^2 \cos^2 \beta)\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta} \cos \beta \sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2} \sqrt{\cos^2 \beta - h^2} (1-e^2 \cos^2 \beta)} d\beta, \quad (3.64)$$

$$ds = \frac{a \cos \beta \sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}} d\beta. \quad (3.65)$$

No passo a seguir, objetiva-se reescrever a (3.4), exprimindo a diferencial da longitude geodésica $d\lambda$ em função da latitude reduzida. Para isso, deve-se expressar $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{sen} \varphi$, $\operatorname{cos} \varphi$ e $d\varphi$ em função da latitude reduzida. Mas os resultados de $\operatorname{cos} \varphi$, $\operatorname{sen} \varphi$ e $d\varphi$ estão prontos e são dados respectivamente pelas (3.46), (3.52) e (3.59). Para obter $\operatorname{tg} \alpha$, divide-se a (3.35) pela (3.39), obtendo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}, \quad (3.66)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}. \quad (3.67)$$

Substituindo as (3.46), (3.52), (3.59) e a (3.67) na (3.4), têm-se

$$d\lambda = \frac{(1-e^2) \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}}}{\left[1 - e^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \right) \right] \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\sec^2 \beta - e^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \cos^2 \beta}} d\beta, \quad (3.68)$$

$$d\lambda = \frac{(1-e^2) \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \cos^2 \beta}}{\left(\frac{1 - e^2 \cos^2 \beta - e^2 + e^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \right) \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta} - e^2}}} d\beta, \quad (3.69)$$

$$d\lambda = \frac{(1-e^2) \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \cos^2 \beta}}{\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \right) \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}}{\sqrt{\cos^2 \beta}}} d\beta, \quad (3.70)$$

$$d\lambda = \frac{(1-e^2) \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \cos^2 \beta}}{\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \right) \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}} \cdot \sqrt{1-e^2}} d\beta, \quad (3.71)$$

$$d\lambda = \frac{h(1-e^2)(1-e^2 \cos^2 \beta) \sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta} \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2} (1-e^2) \cos \beta \sqrt{1-e^2} (1-e^2 \cos^2 \beta)} d\beta, \quad (3.72)$$

$$d\lambda = \frac{h \sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}}{\cos \beta \sqrt{\cos^2 \beta - h^2}} d\beta. \quad (3.73)$$

Integrando a (3.65) e a (3.73), obtêm-se respectivamente

$$s = a \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\cos \beta \sqrt{1-e^2 \cos^2 \beta}}{\sqrt{\cos^2 \beta - h^2}} d\beta, \quad (3.74)$$

$$\Delta\lambda = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{h\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}{\cos\beta\sqrt{\cos^2\beta-h^2}} d\beta. \quad (3.75)$$

Pode-se observar que as integrais (3.74) e (3.75) possuem no integrando apenas a latitude reduzida como variável. Apesar disto, essas integrais não são apropriadas para a integração numérica, pois no caso da variável ser igual a latitude reduzida máxima, o integrando mostra uma singularidade, isto é, quando a linha geodésica passa no pólo, tem-se neste ponto $\beta = \beta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$. Como consequência $\cos\beta = 0$ e de acordo com a (3.25) tem-se $h = 0$.

Observa-se nesta condição que o integrando da (3.74) e da (3.75) são descontínuos no pólo. Ainda no caso de a linha geodésica atingir seu ponto máximo, $\beta = \beta_{\text{máx}}$, mas não necessariamente no pólo, e de acordo com a identidade (3.34) ocorre uma divisão por zero no integrando da (3.74) e da (3.75), pois

$$\cos^2\beta = \cos^2\beta_{\text{máx}} = h^2. \quad (3.76)$$

A descontinuidade que a (3.74) apresenta é evitada pela transformação

$$\text{sen}^2\beta = (1-h^2)\text{sen}^2 v, \quad (3.77)$$

chamada aqui de transformação v .

aplicação da transformação v na (3.74) requer o procedimento pormenorizado na seqüência.

Deriva-se a (3.77) em relação a v e obtém-se

$$\frac{d\beta}{dv} \cos\beta = \sqrt{1-h^2} \cdot \cos v, \quad (3.78)$$

ou seja

$$d\beta = \frac{\sqrt{1-h^2} \cdot \cos v}{\cos\beta} dv. \quad (3.79)$$

Tem-se da (3.77) e de

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1, \quad (3.80)$$

$$\cos^2\beta = 1 - \text{sen}^2\beta; \quad (3.81)$$

que

$$\cos^2\beta = 1 - (1-h^2)\text{sen}^2 v. \quad (3.82)$$

Substituindo o resultado de $\cos^2 \beta$ obtido pela (3.82) e o resultado de $d\beta$ obtido pela (3.79) simultaneamente na (3.74), têm-se

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \frac{\cos \beta \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}}{\sqrt{[1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v] - h^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v}{\cos \beta} dv, \quad (3.83)$$

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 v + h^2 \text{sen}^2 v - h^2}} \cdot \sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v \cdot dv, \quad (3.84)$$

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 v - h^2 (1 - \text{sen}^2 v)}} \cdot \sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v \cdot dv; \quad (3.85)$$

como se sabe que

$$\cos^2 v = 1 - \text{sen}^2 v, \quad (3.86)$$

tem-se

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}}{\sqrt{\cos^2 v - h^2 (\cos^2 v)}} \cdot \sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v \cdot dv, \quad (3.87)$$

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}}{\sqrt{(1 - h^2) \cos^2 v}} \cdot \sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v \cdot dv, \quad (3.88)$$

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}}{\sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v} \cdot \sqrt{1 - h^2} \cdot \cos v \cdot dv, \quad (3.89)$$

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]} dv. \quad (3.90)$$

A descontinuidade que a (3.75) apresenta é evitada pela transformação

$$\text{sen } w = \frac{\text{tg} \beta}{\text{tg} \beta_{\text{máx}}} \quad (3.91)$$

chamada aqui de transformação w .

A aplicação da transformação w na (3.75) requer o procedimento pormenorizado na seqüência.

O segundo membro da (3.91) é reescrito na forma

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_{\text{máx}}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\operatorname{sen}\beta_{\text{máx}}}{\cos\beta_{\text{máx}}}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \cdot \frac{\cos\beta_{\text{máx}}}{\operatorname{sen}\beta_{\text{máx}}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta_{\text{máx}}} \cdot \frac{\cos\beta_{\text{máx}}}{\cos\beta}. \quad (3.92)$$

Com auxílio da (3.28) e sabendo-se que

$$\operatorname{sen}^2 \beta_{\text{máx}} + \cos^2 \beta_{\text{máx}} = 1, \quad (3.93)$$

$$\operatorname{sen}\beta_{\text{máx}} = \sqrt{1 - \cos^2 \beta_{\text{máx}}}, \quad (3.94)$$

o último membro das igualdades da (3.92) é reescrito na forma

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta_{\text{máx}}} \cdot \frac{\cos\beta_{\text{máx}}}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{h}{\cos\beta}. \quad (3.95)$$

A (3.77) é reescrita, após isolar $\operatorname{sen}v$ e multiplicar cada membro por $\frac{h}{\cos\beta}$,

na forma

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{h}{\cos\beta} = (\operatorname{sen}v) \frac{h}{\cos\beta}. \quad (3.96)$$

A (3.35) é reescrita, após multiplicar cada membro por $\operatorname{sen}v$, na forma

$$(\operatorname{sen}v) \frac{h}{\cos\beta} = \operatorname{sen}v \cdot \operatorname{sen}\alpha. \quad (3.97)$$

Com as equações (3.91), (3.92), (3.95), (3.96) e (3.97), conclui-se as igualdades

$$\operatorname{sen}w = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_{\text{máx}}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta_{\text{máx}}} \cdot \frac{\cos\beta_{\text{máx}}}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{h}{\cos\beta} = \operatorname{sen}v \cdot \operatorname{sen}\alpha. \quad (3.98)$$

Deriva-se a (3.91) em relação a β e obtém-se

$$\frac{dw}{d\beta} \cdot \cos w = \frac{\sec^2 \beta}{\operatorname{tg}\beta_{\text{máx}}}, \quad (3.99)$$

$$\frac{dw}{d\beta} \cdot \cos w = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_{\text{máx}} \cos^2 \beta}, \quad (3.100)$$

$$\frac{dw}{d\beta} \cdot \cos w = \frac{1}{(\cos^2 \beta) \operatorname{tg}\beta_{\text{máx}}}, \quad (3.101)$$

$$d\beta = \cos w \cos^2 \beta \operatorname{tg} \beta_{\max} dw. \quad (3.102)$$

Da equação (3.98), advém

$$\operatorname{sen} w = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{h}{\cos \beta}; \quad (3.103)$$

elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se

$$\operatorname{sen}^2 w = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{1-h^2} \cdot \frac{h^2}{\cos^2 \beta}, \quad (3.104)$$

$$\frac{(1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}{h^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \beta}, \quad (3.105)$$

$$\frac{(1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}{h^2} = \frac{1-\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}, \quad (3.106)$$

$$\frac{(1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}{h^2} = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1, \quad (3.107)$$

$$\frac{(1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}{h^2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad (3.108)$$

$$\frac{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}{h^2} = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad (3.109)$$

$$\cos^2 \beta = \frac{h^2}{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}. \quad (3.110)$$

Trabalhando com o denominador do segundo membro da (3.110), escreve-se

$$h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w = h^2 + (1-h^2)(1-\cos^2 w), \quad (3.111)$$

$$h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w = h^2 + 1 - h^2 - \cos^2 w + h^2 \cos^2 w, \quad (3.112)$$

$$h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w = 1 - \cos^2 w + h^2 \cos^2 w, \quad (3.113)$$

$$h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w = 1 + (h^2 - 1)\cos^2 w. \quad (3.114)$$

Usa-se um artifício na (3.114) para facilitar as simplificações, fazendo

$$h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w = 1 + (h^2 - 1)\cos^2 w = x^2; \quad (3.115)$$

daí tem-se

$$1 + (h^2 - 1)\cos^2 w = x^2, \quad (3.116)$$

$$\cos^2 w = \frac{x^2 - 1}{h^2 - 1}, \quad (3.117)$$

$$\cos^2 w = \frac{-(1-x^2)}{-(1-h^2)}; \quad (3.118)$$

$$\cos w = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-h^2}}. \quad (3.119)$$

Da (3.98), advém

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_{\max}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{h}{\cos\beta}, \quad (3.120)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta_{\max}} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \operatorname{tg}\beta, \quad (3.121)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\beta_{\max}} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}, \quad (3.122)$$

$$\operatorname{tg}\beta_{\max} = \frac{\sqrt{1-h^2}}{h}. \quad (3.123)$$

Com os resultados obtidos até aqui se pode iniciar a mudança de variável na (3.75), utilizando primeiramente a (3.102) e obtendo

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} \frac{h\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}{\cos\beta\sqrt{\cos^2\beta-h^2}} \cos w \cdot \cos^2\beta \cdot \operatorname{tg}\beta_{\max} \cdot dw. \quad (3.124)$$

Substituindo nesta última equação, $\cos\beta$, $\cos w$ e $\operatorname{tg}\beta_{\max}$ dadas respectivamente pelas (3.110), (3.119) e (3.123), tem-se

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} \frac{h \sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-h^2}} \cdot \frac{h^2}{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w} \cdot \frac{\sqrt{1-h^2}}{h}}{\sqrt{\frac{h^2}{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}} \sqrt{\frac{h^2}{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w} - h^2}} dw. \quad (3.125)$$

Substituindo nesta última equação $h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w$ por x^2 conforme a (3.115), obtém-se

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} \frac{h \sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2)\operatorname{sen}^2 w}} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-h^2}} \cdot \frac{h^2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-h^2}}{h}}{\sqrt{\frac{h^2}{x^2}} \sqrt{\frac{h^2}{x^2} - h^2}} dw, \quad (3.126)$$

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} \frac{\sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2)\text{sen}^2 w}} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{h^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{h^2}{x^2}} \cdot \sqrt{\frac{h^2}{x^2} (1-x^2)}} dw, \quad (3.127)$$

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} \frac{\sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2)\text{sen}^2 w}} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{h^2}{x^2}}{\frac{h^2}{x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}} dw, \quad (3.128)$$

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} \sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2)\text{sen}^2 w}} dw. \quad (3.129)$$

Como foi visto, o integrando da (3.74) e o da (3.75) apresentam descontinuidade em alguns pontos. Isto prejudica o cálculo numérico dessas integrais, pois na aplicação de métodos de integração numérica precisa-se do valor numérico do integrando nos pontos do intervalo desejado para integração.

Com as transformações dadas pelas (3.77) e (3.91) evita-se a descontinuidade, obtendo-se assim, conforme a (3.90), a distância s na forma

$$s = a \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv, \quad (3.130)$$

em que

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1-h^2)\text{sen}^2 v]} \quad (3.131)$$

e, conforme a (3.129), a diferença de longitude $\Delta\lambda$ na forma

$$\Delta\lambda = \int_{w_1}^{w_2} f(w) dw, \quad (3.132)$$

em que

$$f(w) = \sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2)\text{sen}^2 w}}, \quad (3.133)$$

entre dois pontos P_1 e P_2 da linha geodésica na forma integrável numericamente.

O cálculo numérico das integrais elípticas definidas (3.130) e (3.132) com poucos pontos de apoio (as abscissas), de maneira simples e, sobretudo seguro, apresentam ótima precisão conforme ilustram as figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12 para alguns casos particulares de h .

As funções $f(v)$ e $f(w)$ são estritamente contínuas com $\{h \in \mathfrak{R} / -1 \leq h \leq 1\}$, $\{v \in \mathfrak{R}\}$, $\{w \in \mathfrak{R}\}$ e também são quase constantes em todo campo de aplicação, diferindo muito pouco do valor 1. As diferenças dos limites de integração já representam aproximadamente os resultados da integração e por isso a integração numérica fornece, com poucos pontos de apoio, ótimos resultados.

FIGURA 3.3 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ PARA $h = -1$

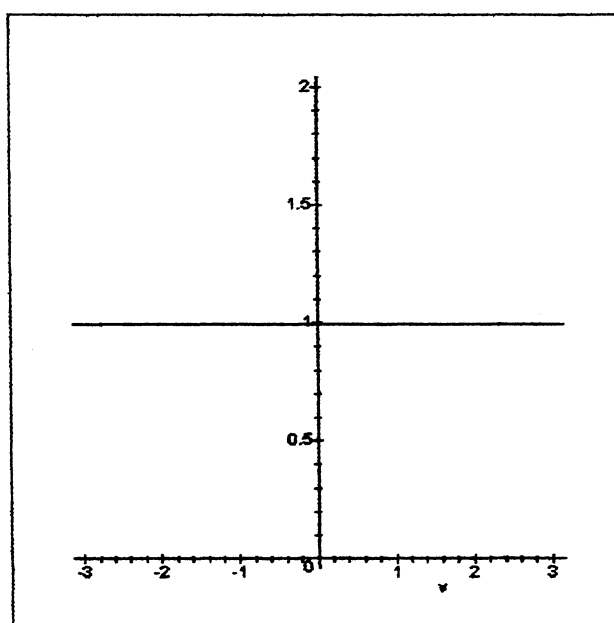


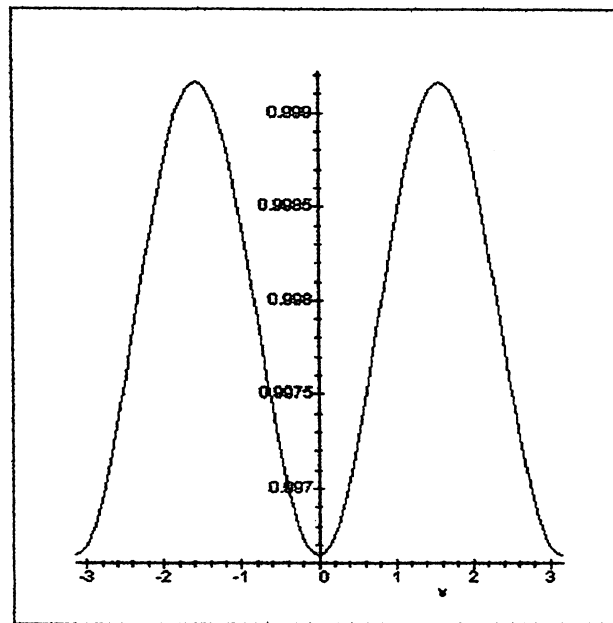
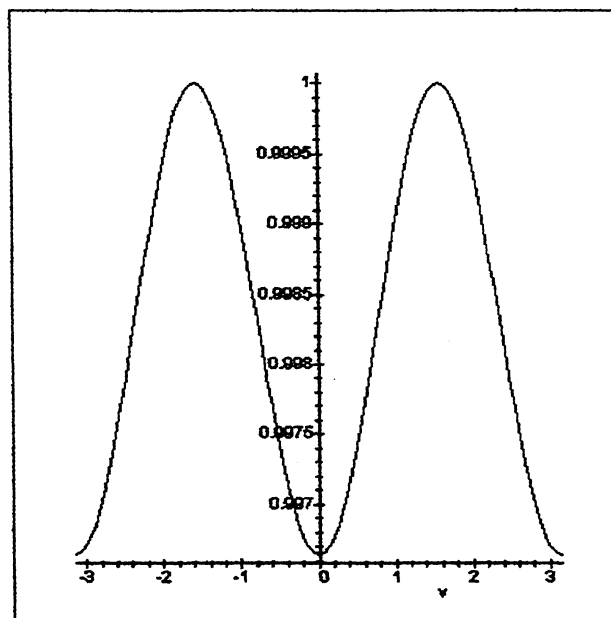
FIGURA 3.4 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ PARA $h = -0,5$ FIGURA 3.5 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ PARA $h = 0$ 

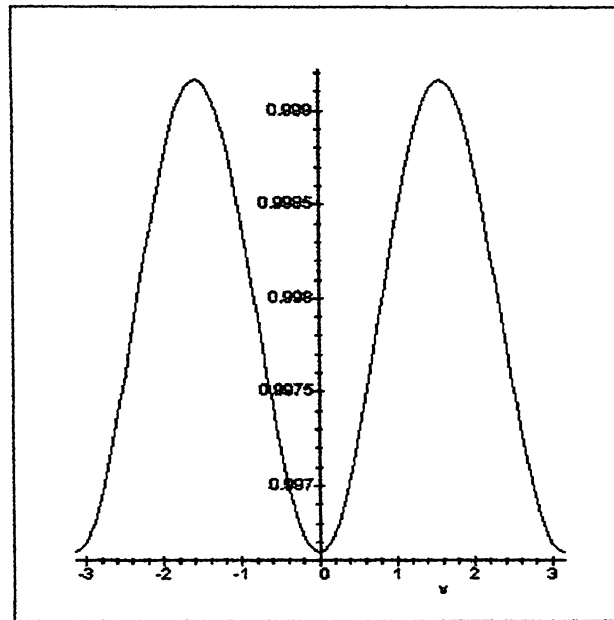
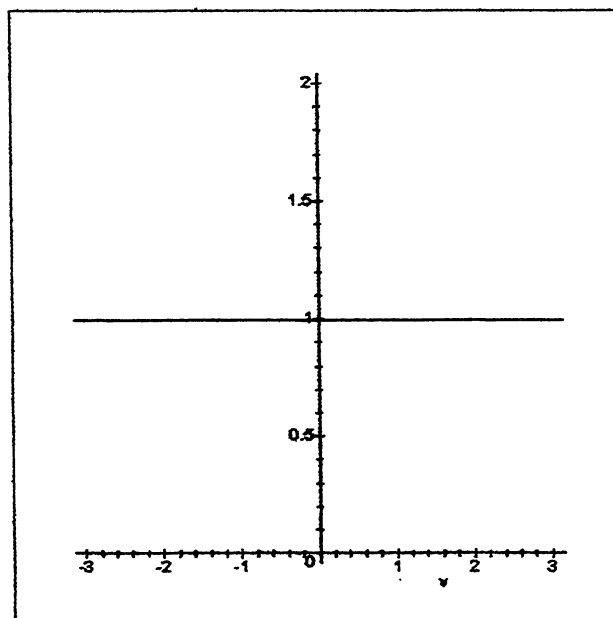
FIGURA 3.6 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ PARA $h = 0,5$ FIGURA 3.7 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(v)$ PARA $h = 1$ 

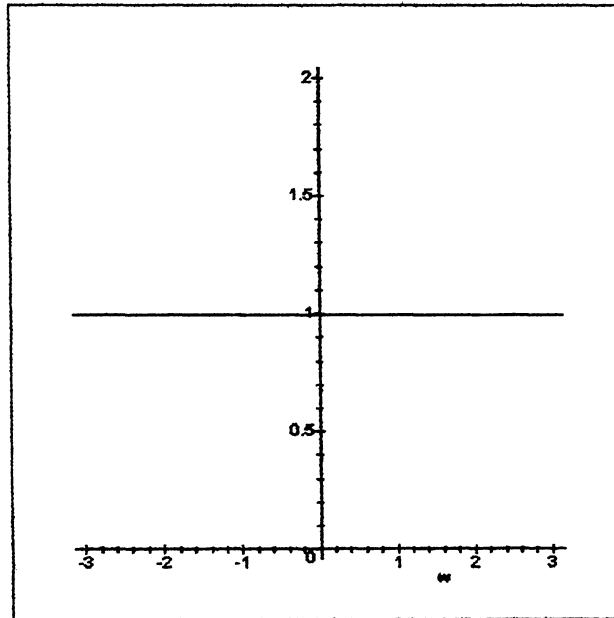
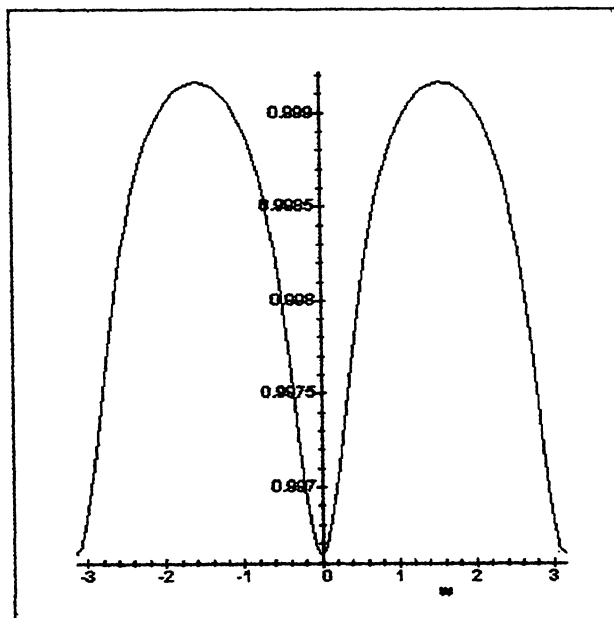
FIGURA 3.8 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ PARA $h = -1$ FIGURA 3.9 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ PARA $h = -0,5$ 

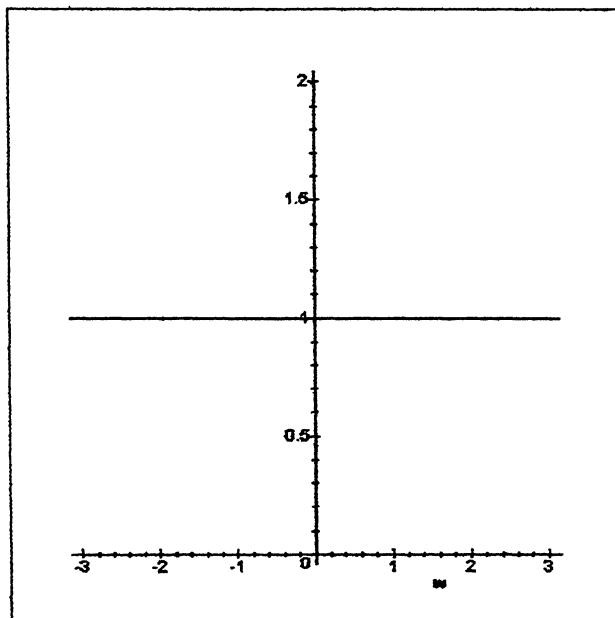
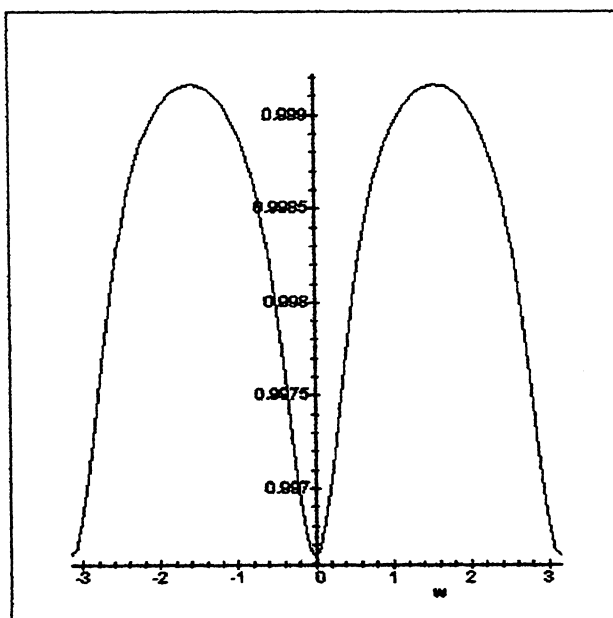
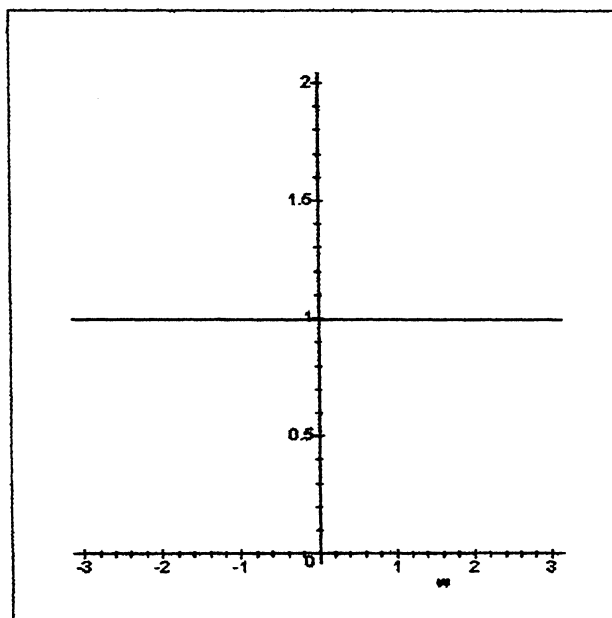
FIGURA 3.10 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ PARA $h = 0$ FIGURA 3.11 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ PARA $h = 0,5$ 

FIGURA 3.12 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO $f(w)$ PARA $h = 1$ 

3.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O problema que surge, é o de integrar uma função em um intervalo dado que não fornece uma solução analítica para o problema, ou seja, não existe a integral definida de modo que não se pode expressá-la por funções elementares. Pode-se imaginar a importância da integração numérica quando se nota a frequência com que as derivadas surgem na formulação de problemas de análise matemática aplicada, pois é natural prever que a solução de tais problemas envolve integração.

Para muitas funções não é possível obter primitivas expressas por funções elementares; e, em decorrência disto, para o cálculo de suas integrais torna-se necessário a utilização de métodos aproximados. Isto é o que acontece, por exemplo, na solução dos problemas direto e inverso da Geodésia apresentada neste trabalho pelas integrais elípticas, que não permitem ser expressas por funções elementares, ou seja, não possuem soluções analíticas.

De acordo com CLÁUDIO e MARINS (1989, p. 260), os métodos para o cálculo de integrais definidas são agrupadas em quatro tipos:

- a) analítico;

- b) mecânico;
- c) gráfico;
- d) numérico ou algorítmico.

O método analítico é restrito a integrais para as quais se pode encontrar uma primitiva (solução analítica). No entanto, o Teorema Fundamental do Cálculo se aplica a todos os casos onde se integra uma diferencial. O mecânico utiliza os planímetros, que permitem determinar a área delimitada por uma curva qualquer. O método gráfico parte do desenho da função sobre o intervalo desejado para integração e aí se calcula a área delimitada pela curva. Estes dois métodos, mecânico e gráfico, embora façam parte da história, só foram importantes antes do advento do computador. No caso deste trabalho, trabalhar-se-á com o método numérico e serão expostos na seqüência os diversos métodos que serão utilizados.

3.4.1 Métodos de Integração Numérica Utilizados

Neste trabalho são utilizados os métodos: regra dos trapézios, regra de Simpson e fórmula gaussiana, os quais na seqüência são expostos.

3.4.1.1 Regra dos trapézios

Esta regra é uma fórmula onde a área sob a curva dada pela função, é dividida em n trapézios, e a soma de suas áreas resulta na integral definida aproximada.

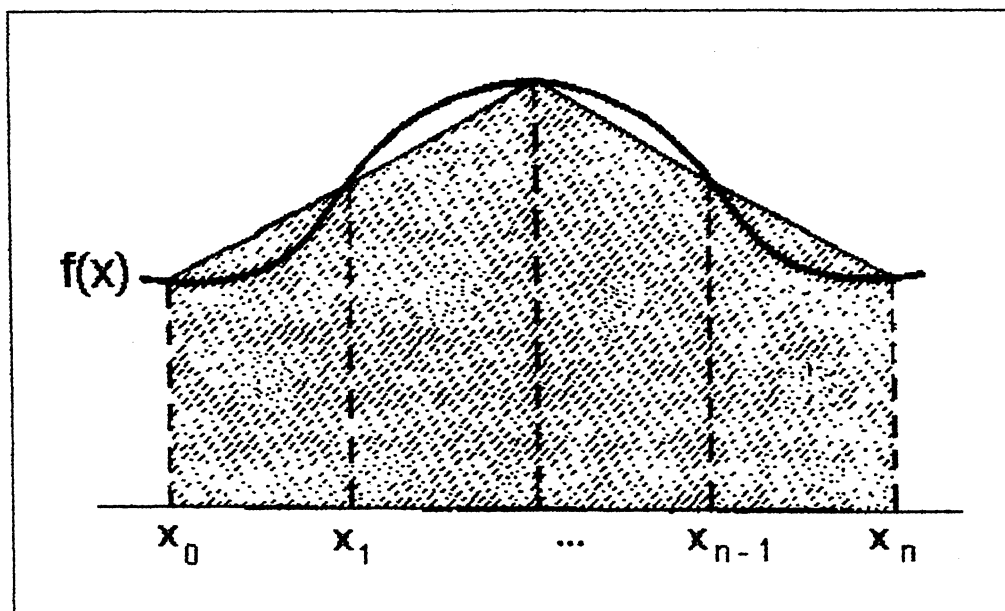
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{1}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (3.134)$$

que usa segmentos de reta ligados, como por exemplo ilustra a figura 3.13, como aproximação para $f(x)$. O seu erro de truncamento E é aproximadamente

$$E \cong \frac{(x_n - x_0)^2 f''(\xi)}{12}, \quad (3.135)$$

em que x_n e x_0 são respectivamente os limites superior e inferior de integração, t é o tamanho dos n subintervalos e ξ é um número qualquer pertencente ao intervalo de integração $[x_0, x_n]$.

FIGURA 3.13 – REGRA DOS TRAPÉZIOS COMPOSTA



FONTE: CLÁUDIO e MARINS (1989, p. 270)

3.4.1.2 Regra de Simpson

Neste caso, ao invés de segmentos de retas, a cada três pontos ajusta-se uma parábola do tipo $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$, em que se aproxima mais da curva dada. A soma das n áreas sob a curva resulta na integral definida aproximada. Esta regra é também uma fórmula composta da forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{t}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (3.136)$$

em que

$$t = \frac{x_n - x_0}{n} \quad (3.137)$$

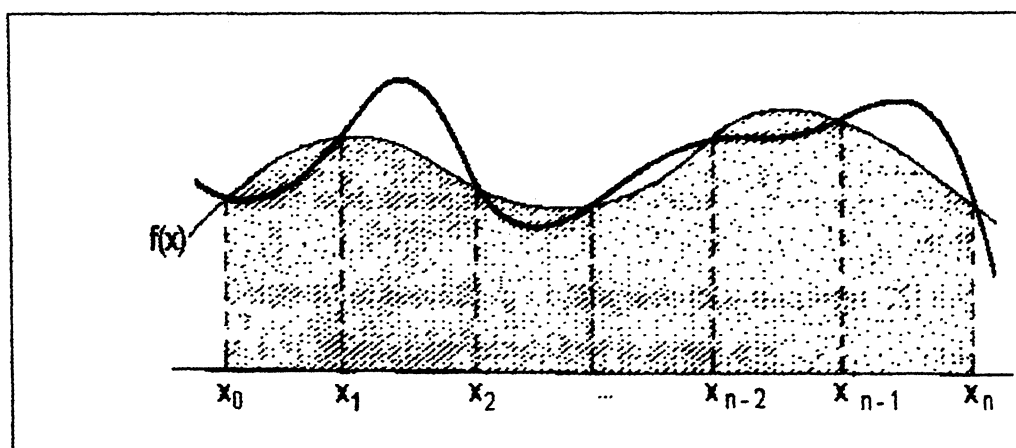
e

$$x_{i+t} = x_i + t, \text{ com } i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.138)$$

que resulta de seções de parábolas como aproximação para $f(x)$, isto é, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau 2 conforme ilustra a figura 3.14. É uma fórmula muito utilizada em integração aproximada e o seu erro de truncamento E é aproximadamente

$$E \approx \frac{(x_n - x_0)^4 f^{(4)}(\xi)}{180}, \text{ com } \xi \in [x_0, x_n]. \quad (3.139)$$

FIGURA 3.14 – REGRA DE SIMPSON



FONTE: CLÁUDIO e MARINS (1989, p. 273)

Observa-se que para a aplicação da regra de Simpson é necessário que uma vez dividido o intervalo $[x_0, x_n]$ em n partes, n deve ser par.

3.4.1.3 Fórmula gaussiana

Faz-se uma mudança de variável na integral definida $\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$, ou seja,

determinam-se os parâmetros associados às fórmulas de integração, introduzindo-se a mudança de variável

$$x = x_0 + \frac{(x_n - x_0)}{2}(m + 1), \quad (3.140)$$

de forma que o intervalo original $[x_0, x_n]$ é transformado no intervalo fechado normalizado $[-1, 1]$, ou seja,

$$x = x_0 \Rightarrow m = -1, \quad (3.141)$$

$$x = x_n \Rightarrow m = 1, \quad (3.142)$$

e

$$dx = \frac{(x_n - x_0)}{2} dm, \quad (3.143)$$

obtém-se

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{-1}^1 F(m) \cdot \frac{(x_n - x_0)}{2} dm = \frac{x_n - x_0}{2} \int_{-1}^1 F(m) dm, \quad (3.144)$$

em que

$$F(m) = f \left[x_0 + \frac{(x_n - x_0)}{2} (m + 1) \right]. \quad (3.145)$$

Assim, de acordo com o desenvolvimento exposto em WOLUPECK (199 -, p. 17), pode-se calcular numericamente uma integral definida pela fórmula gaussiana utilizando-se

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{(x_n - x_0)}{2} [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_n F(m_n)], \quad (3.146)$$

com

$$F(m_i) = f \left[x_0 + \frac{(x_n - x_0)}{2} (m_i + 1) \right] \quad (3.147)$$

e $i = 1, 2, 3, \dots, n$, onde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, são os pesos e $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, são os pontos amostrais.

Os pontos amostrais com seus respectivos pesos são obtidos, por exemplo, conforme desenvolvimento exposto em SCHEID (1991, p. 189). O quadro 3.1 foi adaptado de CLÁUDIO e MARINS (1989, p. 310). São dados os pontos amostrais com seus respectivos pesos para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8.

QUADRO 3.1 – PONTOS AMOSTRAIS E PESOS PARA A FÓRMULA GAUSSIANA

n	m_i	p_i
1	$m_1 = 0$	$p_1 = 2$
2	$m_1 = 0,577350269189629$ $m_2 = -0,577350269189629$	$p_1 = 1,1$ $p_2 = 1,1$
3	$m_1 = 0$ $m_2 = 0,774596669241483$ $m_3 = -0,774596669241483$	$p_1 = 0,888888888888889$ $p_2 = 0,555555555555556$ $p_3 = 0,555555555555556$
4	$m_1 = 0,339981043584856$ $m_2 = -0,339981043584856$ $m_3 = 0,861136311594053$ $m_4 = -0,861136311594053$	$p_1 = 0,652145154862546$ $p_2 = 0,652145154862546$ $p_3 = 0,347854845137454$ $p_4 = 0,347854845137454$
5	$m_1 = 0$ $m_2 = 0,508469310105683$ $m_3 = -0,508469310105683$ $m_4 = 0,906179745938664$ $m_5 = -0,906179745938664$	$p_1 = 0,568888888888889$ $p_2 = 0,478628670499366$ $p_3 = 0,478628670499366$ $p_4 = 0,236926885056189$ $p_5 = 0,236926885056189$
6	$m_1 = 0,238619186083197$ $m_2 = -0,238619186083197$ $m_3 = 0,661209386466265$ $m_4 = -0,661209386466265$ $m_5 = 0,932469514203152$ $m_6 = -0,932469514203152$	$p_1 = 0,467913934572691$ $p_2 = 0,467913934572691$ $p_3 = 0,360761573048139$ $p_4 = 0,360761573048139$ $p_5 = 0,171324492379170$ $p_6 = 0,171324492379170$
7	$m_1 = 0$ $m_2 = 0,405845151377397$ $m_3 = -0,405845151377397$ $m_4 = 0,741531185599394$ $m_5 = -0,741531185599394$ $m_6 = 0,949107912342759$ $m_7 = -0,949107912342759$	$p_1 = 0,417959183673469$ $p_2 = 0,381830050505119$ $p_3 = 0,381830050505119$ $p_4 = 0,279705391489277$ $p_5 = 0,279705391489277$ $p_6 = 0,129484966168870$ $p_7 = 0,129484966168870$
8	$m_1 = 0,183434642495650$ $m_2 = -0,183434642495650$ $m_3 = 0,525532409916329$ $m_4 = -0,525532409916329$ $m_5 = 0,796666477413627$ $m_6 = -0,796666477413627$ $m_7 = 0,960289856497536$ $m_8 = -0,960289856497536$	$p_1 = 0,362683783378362$ $p_2 = 0,362683783378362$ $p_3 = 0,313706645877887$ $p_4 = 0,313706645877887$ $p_5 = 0,222381034453374$ $p_6 = 0,222381034453374$ $p_7 = 0,101228536290376$ $p_8 = 0,101228536290376$

4 PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DO PRIMEIRO PROBLEMA PRINCIPAL GEODÉSICO

Como é perceptível na figura 3.2, a linha geodésica partindo do ponto P_1 , corta o círculo de latitude com latitude β_2 em dois pontos, os quais situam-se simetricamente em relação ao ponto de contato da linha geodésica com o círculo de latitude $\beta_{m\acute{a}x}$, de modo que são possíveis duas soluções, o caso 1 e o caso 2. Os valores em que $v > \frac{\pi}{2}$ ou então $w > \frac{\pi}{2}$ são destinados aos pontos além do ponto de contato da linha geodésica com o círculo de latitude reduzida máxima. Desta forma, é permitido distinguir o caso 1 do caso 2. Havendo necessidade, o cálculo da diferença de longitude $\Delta\lambda$ deve ser efetuado em três seções ao longo da linha geodésica. O cálculo da segunda seção somente é necessário se a linha geodésica passar pelo ponto de latitude reduzida máxima e o cálculo da terceira seção torna-se necessário caso a linha geodésica corte o equador. No caso da segunda seção, a linha geodésica apresenta-se simétrica em relação ao ponto de latitude reduzida máxima, de $w = \text{m\acute{a}x}(|w_1|, |w_2|)$ até $w = \frac{\pi}{2}$. Já para a terceira seção, a linha geodésica apresenta-se simétrica em relação ao equador de $w = 0$ até $w = \text{m\acute{i}n}(|w_1|, |w_2|)$. Conforme SCHMIDT (1999, p. 125), nos percursos em que a linha geodésica apresenta porções de comprimentos iguais em torno da latitude reduzida máxima ou então do equador, apenas sobre a metade do percurso a função $f(w)$ é integrada, garantindo assim alta precisão.

Como já foi visto, basicamente, o problema direto consiste em calcular φ_2 , λ_2 e α_2 , associados a um ponto P_2 sendo conhecidos φ_1 , λ_1 e α_1 , associados ao ponto P_1 , e a distância elipsoidal entre P_1 e P_2 . Então, o fundamento do método proposto neste trabalho para o problema direto está na resolução da integral (3.130). Tem-se nesta integral que, o semi-eixo maior, a excentricidade e a segunda constante de Clairaut são constantes e v é a variável, com o limite inferior de integração v_1 sendo associado ao ponto de partida e o limite superior de integração v_2 sendo associado ao ponto de chegada. Como s , a , e , h e v_1 são conhecidos, tem-se v_2 como incógnita. Logo a idéia geral é determinar iterativamente um valor suficientemente

bom para v_2 , de modo que o comprimento da linha geodésica obtido do cálculo da (3.130), agora com v_2 conhecido, seja suficientemente próximo do comprimento da linha geodésica dado no problema, ou seja, a diferença entre o comprimento da linha geodésica dado com o comprimento da linha geodésica calculado deve ser suficientemente pequena, pois estabelecida a diferença desejada, φ_2 , λ_2 e α_2 são avaliados a partir do último v_2 calculado.

4.1 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

4.1.1 Cálculo dos Valores Iniciais

Calcula-se inicialmente:

- a) a latitude reduzida β_1 dada pela (2.66);
- b) a segunda constante de Clairaut h dada pela (3.25), utilizando-se β_1 e α_1 ;
- c) o limite inferior v_1 de integração utilizando a (3.77) no ponto 1;
- d) a quantidade S pela relação

$$S = s/a, \quad (4.1)$$

sendo s o comprimento da linha geodésica e a o semi-eixo maior do elipsóide;

- e) ΔS , considerando-se inicialmente ΔS igual ao valor obtido na (4.1);
- f) S'_i , inicialmente faz-se $S'_0 = 0$;
- g) sinal da diferença de latitude pela expressão

$$\operatorname{sgn}(\Delta\varphi) = \frac{\cos\alpha_1}{|\cos\alpha_1|}, \quad (\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}, \alpha_1 \neq \frac{3\pi}{2}), \quad (4.2)$$

assumindo o valor -1 ou 1 ; se $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha_1 = \frac{3\pi}{2}$, tem-se uma indeterminação na (4.2); mas nestes casos a linha geodésica parte de seu ponto máximo com x assumindo o valor -1 ou parte de seu ponto mínimo com x assumindo o valor 1 ;

h) sinal da diferença de longitude pela expressão

$$\operatorname{sgn}(\Delta\lambda) = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{|\operatorname{sen}\alpha_1|}, \quad (\alpha_1 \neq 0; \alpha_1 \neq \pi), \quad (4.3)$$

assumindo o valor -1 ou 1 ; se $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 = \pi$, tem-se uma indeterminação na (4.3), mas nestes casos sabe-se pela (3.25) que $h = 0$, ou seja, tem-se o cálculo do arco de meridiano ($\Delta\lambda = 0$).

4.1.2 Cálculo Iterativo do Limite Superior v_2 de Integração

O limite superior v_2 de integração é calculado pelo seguinte procedimento:

a) determina-se v_1' inicial fazendo-se

$$v_1' = v_1 \quad (4.4)$$

b) $v_2 = v_1' + \Delta v$, com $\Delta v = \frac{\operatorname{sgn}(\Delta\varphi) \cdot \Delta S}{\sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \operatorname{sen}^2 v_1']}}$, (4.5)

c) cálculo das distâncias parciais $\Delta S'$ por integração numérica por

$$\Delta S_i = \left| \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \operatorname{sen}^2 v]} dv \right|; \quad (4.6)$$

d) determina-se a soma das distâncias parciais S' e afastamento residual

$$\Delta S \text{ por } S'_{i+1} = S'_i + \Delta S'_i, \quad (4.7)$$

caso o ΔS imediatamente anterior seja positivo; e por

$$S'_{i+1} = S'_i - \Delta S'_i, \quad (4.8)$$

caso o ΔS imediatamente anterior seja negativo; em que

$$\Delta S = S - S'_{i+1}; \quad (4.9)$$

abandona-se o cálculo se $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, isto é, a tolerância admitida para o afastamento residual para se obter precisão na quinta casa decimal do segundo de arco em φ_2, λ_2 e α_2 ;

e) caso não se obtenha $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, calcula-se novo limite v'_1 de integração, fazendo-se

$$v'_1 = v_2; \quad (4.10)$$

e prossegue com a iteração a partir da alínea b.

4.1.3 Cálculo da Latitude φ_2

Conhecendo-se o valor satisfatório de v_2 para os cálculos, calcula-se a latitude reduzida do ponto dois aplicando a (3.77). De posse do valor da latitude reduzida do ponto dois, calcula-se a latitude geodésica deste ponto aplicando a (2.66).

4.1.4 Cálculo do Azimute α_2

O valor do azimute α_2 resulta do cálculo de:

$$a) \alpha'_2 = \left[1 - \text{sgn}(\Delta\varphi)\right] \frac{\pi}{2} + \text{sgn}(\Delta\varphi) \cdot \text{arc sen} \left(\frac{h}{\cos\beta_2} \right); \quad (4.11)$$

$$b) \alpha_2 = \alpha_2' + \pi, (\text{caso 1}); \quad (4.12)$$

$$c) \text{ se } |v_1| < \frac{\pi}{2} < |v_2| \text{ então } \alpha_2 = 2\pi - \alpha_2', (\text{caso 2}). \quad (4.13)$$

4.1.5 Cálculo da Diferença de Longitude $\Delta\lambda$ e Longitude λ_2

Se $0 < |h| < 1$, então tem-se:

a) cálculo dos limites w_1 e w_2 de integração pela aplicação da (3.98), obtendo-se

$$w_1 = \text{arc sen}(\text{sen } v_1 \cdot |\text{sen } \alpha_1|) \quad (4.14)$$

e

$$w_2 = \text{arc sen}(\text{sen } v_2 \cdot |\text{sen } \alpha_2|); \quad (4.15)$$

$$b) \text{ seção de } |w_1| \text{ para } |w_2|, \Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \left| \int_{|w_1|}^{|w_2|} f(w) dw \right|, \quad (4.16)$$

$$\text{com } f(w) = \sqrt{1 - \frac{e^2 \cdot h^2}{h^2 + (1-h^2) \cdot \text{sen}^2 w}}; \quad (4.17)$$

c) adição das seções simétricas a $\beta_{\text{máx}}$, se $|v_2| > \frac{\pi}{2}$ então

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda + 2 \cdot \text{sgn}(\Delta\lambda) \int_{\text{máx}(|w_1|, |w_2|)}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw; \quad (4.18)$$

d) adição das seções simétricas ao equador, se $w_1 \cdot w_2 < 0$, então

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda + 2 \cdot \text{sgn}(\Delta\lambda) \int_0^{\text{mín}(|w_1|, |w_2|)} f(w) dw. \quad (4.19)$$

Se $|h|=1$, então $\Delta\lambda = h \cdot S$, pois tem-se mudança de longitude $\Delta\lambda$ no equador.

De posse do valor de $\Delta\lambda$, pode-se determinar o valor da longitude λ_2 . Logo tem-se

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda. \quad (4.20)$$

4.2 EXEMPLIFICAÇÃO NUMÉRICA

4.2.1 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pelo Programa Maple

4.2.1.1 Primeiro exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 1000 \text{ m}$$

Segundo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad};$

b) $h = 0,6407464367135162148974568;$

c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$

d) $S = 0,0001567850289111593312177807;$

e) $\Delta S = 0,0001567850289111593312177807;$

f) $S'_0 = 0;$

g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$

h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

a) $\dot{v}_1 = -0,5834370303300926106916330$ rad;

b) $\Delta v = 0,0001572177348492420545585013$ rad

e

$v_2 = -0,5832798125952433686370745$ rad;

c) $\Delta S_0 = 0,0001567850064284692321440617$;

d) $S_0 = 0,0001567850064284692321440617$

e

$\Delta S = 0,224826900990737190 \cdot 10^{-10}$.

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, faz-se $\dot{v}_1 = v_2$, obtendo-se:

a) $\dot{v}_1 = 0,5832798125952433686370745$ rad

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

b) $\Delta v = 0,2254474581503021425942233 \cdot 10^{-10}$ rad

e

$v_2 = -0,5832798125726986228220443$ rad;

c) $\Delta S_1 = 0,2248269009907324250841118 \cdot 10^{-10}$;

d) $S_2 = 0,0001567850289111593312173042$

e

$\Delta S = 0,4765 \cdot 10^{-24}$.

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, interrompe-se o cálculo, e as quantidades φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para $v_2 = -0,5832798125726986228220443$ rad.

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se $\beta_2 = -0,4365889070346454534522958$ rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,4378772385310270074727348 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -25^{\circ}05'18,663765615880324122''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2' = 0,7853462831834238177982276 \text{ rad.}$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,926938936773217056260871 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 224^{\circ}59'49,298937706180304238''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$w_2 = -0,4000116303211857063266898 \text{ rad.}$$

Como $|\nu_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1 \cdot w_2 > 0$, utilizando o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente,

basta utilizar a (4.16) para obter

$$\Delta\lambda = 0,0001223392635714180769089883 \text{ rad}$$

e utilizar a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,8743687922672066865605083 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -50^{\circ}05'51,509525503028997100''.$$

4.2.1.2 Segundo exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 1000000 \text{ m}$$

Seguindo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,43670007966089118808577755 \text{ rad};$
- b) $h = 0,6407464367135162148974568;$
- c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- d) $S = 0,1567850289111593312177807;$
- e) $\Delta S = 0,1567850289111593312177807;$
- f) $S'_0 = 0;$
- g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$
- h) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1.$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

- a) $v'_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- b) $\Delta v = 0,1572177348492420545585013 \text{ rad}$
e
 $v_2 = -0,4262192954808505561331317 \text{ rad};$
- c) $\Delta S'_0 = 0,1567637302343890848694782;$

$$d) S'_1 = 0,1567637302343890848694782$$

e

$$\Delta S = 0,0000212986767702463483025.$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, faz-se $v'_1 = v_2$, obtendo-se:

$$a) v'_1 = -0,4262192954808505561331317 \text{ rad};$$

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

$$b) \Delta v = 0,00002136307734656095653762279 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,4261979324035039951765941 \text{ rad};$$

$$c) \Delta S'_1 = 0,00002129867643025569255410142;$$

$$d) S'_2 = 0,1567850289108193405620323$$

e

$$\Delta S = 0,3399906557484.10^{-12}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades

φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para.

$$v_2 = -0,4261979324035039951765941 \text{ rad}.$$

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se $\beta_2 = -0,3229843515660749395245651 \text{ rad}.$

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,3239965771252598913379231 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -18^0 33' 49,091205''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha'_2 = 0,7418927612260256973347928 \text{ rad}.$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,883485414815818935797436 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 222^{\circ} 30' 26,36665''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$w_2 = 0,2831024668937559810867956 \text{ rad}.$$

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1 \cdot w_2 > 0$, utilizando o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente,

basta utilizar a (4.16) para obter

$$\Delta\lambda = 0,1166941138544223871659119 \text{ rad}$$

e utilizar a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,7577970176763557174715054 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -43^{\circ} 25' 06,855025''.$$

4.2.2 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra dos Trapézios

4.2.1.1 Primeiro exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 1000 \text{ m}$$

Segundo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755$ rad;
- b) $h = 0,6407464367135162148974568$;
- c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330$ rad;
- d) $S = 0,0001567850289111593312177807$;
- e) $\Delta S = 0,0001567850289111593312177807$;
- f) $S'_0 = 0$;
- g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1$;
- h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

- a) $v'_1 = -0,5834370303300926106916330$ rad;
- b) $\Delta v = 0,0001572177348492420545585013$ rad
e
 $v_2 = -0,5832798125952433686370745$ rad;
- c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S'_i = \left| \int_{v'_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.21)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.22)$$

pela regra dos trapézios, conforme a (3.134), para $n = 1$ tem-se que

$$\Delta S'_i = \left| \frac{t}{2} [f(v'_1) + f(v_2)] \right| \quad (4.23)$$

onde

$$t = v_2 - v'_1; \quad (4.24)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S'_0 = 0,0001567850064289719677410321;$$

- d) $S'_1 = 0,0001567850064289719677410321$

e

$$\Delta S = 0,224821873634767486 \cdot 10^{-10}.$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, faz-se $v_1' = v_2$, obtendo-se:

a) $v_1' = -0,5832798125952433686370745$ rad

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

b) $\Delta v = 0,2254424169180492761538199 \cdot 10^{-10}$ rad

e

$$v_2 = -0,5832798125726991269452696$$
 rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \int_{v_1'}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.25)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.26)$$

pela regra dos trapézios, conforme a (4.134), para $n = 1$ tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \frac{t}{2} [f(v_1') + f(v_2)] \right| \quad (4.27)$$

onde

$$t = v_2 - v_1'; \quad (4.28)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S_1' = 0,2248218736347625880988805 \cdot 10^{-10};$$

d) $S_2' = 0,0001567850289111593312172909$

e

$$\Delta S = 0,4898 \cdot 10^{-24}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades

φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para

$$v_2 = -0,5832798125726991269452696$$
 rad.

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (4.77) obtendo-se

$$\beta_2 = -0,4365889070346458099397402$$
 rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,4378772385310273647289454 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 18,663765615''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2' = 0,7853462831834239841251699 \text{ rad.}$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,926938936773217222587813 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 49,298937706''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$w_2 = -0,4000116303211860996733307 \text{ rad.}$$

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1 \cdot w_2 > 0$, utilizando o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ para escrever a (4.16) como

$$\Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \left| \frac{t}{2} [f(w_1) + f(w_2)] \right| \quad (4.29)$$

onde

$$t = |w_2| - |w_1|, \quad (4.30)$$

tem-se

$$\Delta\lambda = 0,0001223392635711147062180091 \text{ rad;}$$

utiliza-se a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,8743687922672069899311993 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -50^\circ 05' 51,5095255030''.$$

4.2.2.2 Segundo exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 1000000 \text{ m}$$

Seguindo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad};$
- b) $h = 0,6407464367135162148974568;$
- c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- d) $S = 0,1567850289111593312177807;$
- e) $\Delta S = 0,1567850289111593312177807;$
- f) $S'_0 = 0;$
- g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$
- h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

- a) $v'_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- b) $\Delta v = 0,1572177348492420545585013 \text{ rad}$
e
 $v_2 = -0,4262192954808505561331317 \text{ rad};$
- c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.31)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \sin^2 v]}; \quad (4.32)$$

pela regra dos trapézios, conforme a (3.134), para $n = 1$ tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \frac{t}{2} [f(v_1) + f(v_2)] \right| \quad (4.33)$$

onde

$$t = v_2 - v_1; \quad (4.34)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S_0 = 0,1567644096367612810269785;$$

d) $S_1 = 0,1567644096367612810269785$

e

$$\Delta S = 0,0000206192743980501908022.$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, faz-se $v_1 = v_2$, obtendo-se:

a) $v_1 = -0,4262192954808505561331317$ rad;

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

b) $\Delta v = 0,00002068162067283278708240520$ rad

e

$$v_2 = -0,4261986138601777233460493$$
 rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.35)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \sin^2 v]}; \quad (4.36)$$

pela regra dos trapézios, conforme a (3.134), para $n = 1$ tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \frac{t}{2} [f(v_1) + f(v_2)] \right| \quad (4.37)$$

onde

$$\mathbf{t} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1'; \quad (4.38)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S_1' = 0,00002061927407940596770001828;$$

d) $S_2' = 0,1567850289108406869946785$

e

$$\Delta S = 0,3186442231022 \cdot 10^{-12}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último \mathbf{v}_2 calculado, ou seja, para $\mathbf{v}_2 = -0,4261986138601777233460493$ rad.

Com os resultados de h e de \mathbf{v}_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se $\beta_2 = -0,3229848539297462400086697$ rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,3239970808369663940363312 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -18^\circ 33' 49''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2' = 0,7418929153408765794908543 \text{ rad}.$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,883485568930669817953497 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 222^\circ 30' 26,3''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$\mathbf{w}_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$\mathbf{w}_2 = -0,2831029524504747983565863 \text{ rad}.$$

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1, w_2 > 0$, utilizando o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ para escrever a (4.16) como

$$\Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left| \frac{t}{2} [f(w_1) + f(w_2)] \right| \quad (4.39)$$

onde

$$t = |w_2| - |w_1|, \quad (4.40)$$

tem-se

$$\Delta\lambda = 0,1166939021038419230489959 \text{ rad};$$

utiliza-se a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,7577972294269361815884214 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -43^\circ 25' 06,8''.$$

4.2.3 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra de Simpson

4.2.3.1 Primeiro exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 1000 \text{ m}$$

Seguindo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad};$

b) $h = 0,6407464367135162148974568;$

- c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330$ rad;
 d) $S = 0,0001567850289111593312177807$;
 e) $\Delta S = 0,0001567850289111593312177807$;
 f) $S_0 = 0$;
 g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1$;
 h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

- a) $v_1 = -0,5834370303300926106916330$ rad;
 b) $\Delta v = 0,0001572177348492420545585013$ rad
 e
 $v_2 = -0,5832798125952433686370745$ rad;
 c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.41)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.42)$$

pela regra de Simpson, conforme a (3.136), para $n = 2$ tem-se que

$$\Delta S_i = \frac{t}{3} [f(v_1) + 4f(v_m) + f(v_2)] \quad (4.43)$$

onde

$$t = \frac{(v_2 - v_1)}{2} \quad (4.44)$$

e

$$v_m = \frac{(v_1 + v_2)}{2}; \quad (4.45)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S_0 = 0,0001567850064284692321437560;$$

d) $S'_1 = 0,0001567850064284692321437560$

e

$$\Delta S = 0,224826900990740247 \cdot 10^{-10}.$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, faz-se $v'_1 = v_2$, obtendo-se:

a) $v'_1 = -0,5832798125952433686370745$ rad

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

b) $\Delta v = 2,254474581503052080320180 \cdot 10^{-11}$ rad

e

$$v_2 = -0,5832798125726986228220440$$
 rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S'_i = \left| \int_{v'_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.46)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.47)$$

pela regra de Simpson, conforme a (3.136), para $n = 2$ tem-se que

$$\Delta S'_i = \frac{t}{3} [f(v'_1) + 4f(v_m) + f(v_2)] \quad (4.48)$$

onde

$$t = \frac{(v_2 - v'_1)}{2} \quad (4.49)$$

e

$$v_m = \frac{(v'_1 + v_2)}{2}; \quad (4.50)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S'_1 = 0,2248269009907364140738806 \cdot 10^{-10};$$

d) $S'_2 = 0,0001567850289111593312173974$

e

$$\Delta S = 0,3833 \cdot 10^{-24}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para $v_2 = -0,5832798125726986228220440$ rad.

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se $\beta_2 = -0,4365889070346454534522956$ rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,4378772385310270074727346 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 18,663765615880324122''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2 = 0,7853462831834238177982276 \text{ rad.}$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,926938936773217056260871 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 49,298937706180304238''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$w_2 = -0,4000116303211857063266896 \text{ rad.}$$

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1 \cdot w_2 > 0$, utilizando o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (4.16) como

$$\Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \frac{t}{3} [f(w_1) + 4f(w_m) + f(w_2)] \quad (4.51)$$

onde

$$t = \frac{|w_2| - |w_1|}{2} \quad (4.52)$$

e

$$w_m = \frac{|w_1| + |w_2|}{2}, \quad (4.53)$$

tem-se

$$\Delta\lambda = 0,0001223392635714180769099916 \text{ rad};$$

utiliza-se a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,8743687922672066865605073 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -50^{\circ}05' 51,509525503028997100''.$$

4.2.3.2 Segundo exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 1000000 \text{ m}$$

Seguindo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

a) $\beta_1 = -0,43670007966089118808577755 \text{ rad};$

b) $h = 0,6407464367135162148974568;$

c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$

d) $S = 0,1567850289111593312177807;$

e) $\Delta S = 0,1567850289111593312177807;$

f) $S'_0 = 0;$

g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$

h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

a) $v_1' = -0,5834370303300926106916330$ rad;

b) $\Delta v = 0,1572177348492420545585013$ rad

e

$v_2 = -0,4262192954808505561331317$ rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.54)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.55)$$

pela regra de Simpson, conforme a (3.136), para $n = 2$ tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \frac{t}{3} [f(v_1') + 4f(v_m) + f(v_2)] \right| \quad (4.56)$$

onde

$$t = \frac{(v_2 - v_1')}{2} \quad (4.57)$$

e

$$v_m = \frac{(v_1' + v_2)}{2}; \quad (4.58)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S_0' = 0,1567637299548244193319548;$$

d) $S_1' = 0,1567637299548244193319548$

e

$$\Delta S = 0,0000212989563349118858259.$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1.10^{-11}$, faz-se $v_1' = v_2$, obtendo-se:

a) $v_1' = -0,4262192954808505561331317$ rad;

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

b) $\Delta v = 0,00002136335775654311969142153$ rad

e

$v_2 = -0,4261979321230940130134403$ rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.59)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.60)$$

pela regra de Simpson, conforme a (3.136), para $n = 2$ tem-se que

$$\Delta S_i = \frac{t}{3} [f(v_1) + 4f(v_m) + f(v_2)] \quad (4.61)$$

onde

$$t = \frac{(v_2 - v_1)'}{2} \quad (4.62)$$

e

$$v_m = \frac{(v_1' + v_2)'}{2}; \quad (4.63)$$

assim, obtém-se

$$\Delta S_i' = 0,00002129895599491230469612050;$$

d) $S_2' = 0,1567850289108193316366509$

e

$$\Delta S = 0,3399995811298 \cdot 10^{-12}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para $v_2 = -0,4261979321230940130134403$ rad.

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se $\beta_2 = -0,3229843513593592325795428$ rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,3239965769179894863289001 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -18^\circ 33' 49,091''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2' = 0,7418927611626096291693240 \text{ rad.}$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,883485414752402867631967 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 222^\circ 30' 26,3666''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$w_2 = -0,2831024666939561505049673 \text{ rad.}$$

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1 \cdot w_2 > 0$, utilizando o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (4.16) como

$$\Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \frac{t}{3} [f(w_1) + 4f(w_m) + f(w_2)] \quad (4.64)$$

onde

$$t = \frac{|w_2| - |w_1|}{2} \quad (4.65)$$

e

$$w_m = \frac{|w_1| + |w_2|}{2}, \quad (4.66)$$

tem-se

$$\Delta\lambda = 0,1166941145536429393960297 \text{ rad;}$$

utiliza-se a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,7577970169771351652413876 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -43^\circ 25' 06,85''.$$

4.2.4 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Fórmula Gaussiana

4.2.4.1 Primeiro exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 1000 \text{ m}$$

Seguindo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad};$
- b) $h = 0,6407464367135162148974568;$
- c) $\nu_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- d) $S = 0,0001567850289111593312177807;$
- e) $\Delta S = 0,0001567850289111593312177807;$
- f) $S'_0 = 0;$
- g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$
- h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

a) $v_1' = -0,5834370303300926106916330$ rad;

b) $\Delta v = 0,0001572177348492420545585013$ rad

e

$v_2 = -0,5832798125952433686370745$ rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.67)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \sin^2 v]}; \quad (4.68)$$

pela fórmula gaussiana, conforme a (3.144), para $n = 8$ tem-se que

$$\Delta S_i' = \left[\left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (4.69)$$

com

$$F(m_i) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (4.70)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9972475589638421754913700,$$

$$F(m_2) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9972476114262698008582822,$$

$$F(m_3) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9972475100449130690988231,$$

$$F(m_4) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9972476603475255818613091,$$

$$F(m_5) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972474712743725652250654,$$

$$F(m_6) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972476991215051495455752,$$

$$F(m_7) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972474478775550236674076,$$

$$F(m_8) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972477225210805096127963,$$

e

$$\Delta S_0' = 0,0001567850064284690753590554;$$

d) $S_1' = 0,0001567850064284690753590554$

e

$$\Delta S = 0,224826902558587253 \cdot 10^{-10}.$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, faz-se $v_1' = v_2$, obtendo-se:

a) $v_1' = -0,5832798125952433686370745$ rad

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subseção 4.1.2;

b) $\Delta v = .2254474597224797152357812 \cdot 10^{-10}$ rad

e

$$v_2 = -0,5832798125726986226648265$$
 rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.71)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.72)$$

pela fórmula gaussiana, conforme a (3.144), para $n = 8$ tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right| \quad (4.73)$$

com

$$F(m_i) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (4.74)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9972474421993407087371479,$$

$$F(m_2) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9972474421993482312519977,$$

$$F(m_3) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9972474421993336941528237,$$

$$F(m_4) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9972474421993552458363219,$$

$$F(m_5) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972474421993281346521174,$$

$$F(m_6) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972474421993608053370283,$$

$$F(m_7) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972474421993247796170974,$$

$$F(m_8) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972474421993641603720484$$

e

$$\Delta S_1' = 0,2248269025585826894392580 \cdot 10^{-10},$$

d) $S_2' = 0,0001567850289111593312173243$

e

$$\Delta S = 0,44564 \cdot 10^{-24}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para $v_2 = -0,5832798125726986226648265$ rad.

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se
 $\beta_2 = -0,4365889070346454533411203$ rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter
 $\varphi_2 = -0,4378772385310270073613196$ rad

ou

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 18,6637656158803''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2 = 0,7853462831834238177463564$$
 rad.

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,926938936773217056208999$$
 rad

ou

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 49,298937706180''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442$$
 rad

e

$$w_2 = -0,4000116303211857062040189$$
 rad.

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1 \cdot w_2 > 0$, utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (4.16) como

$$\Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left[\left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) \cdot [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (4.75)$$

com

$$F(m_i) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (4.76)$$

em que m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9972475589674026747283769,$$

$$F(m_2) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9972476114298379175640373,$$

$$F(m_3) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9972475100475667790365444,$$

$$F(m_4) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9972476603502010472447691,$$

$$F(m_5) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972474712756908606655604,$$

$$F(m_6) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972476991228562715720901,$$

$$F(m_7) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972474478778035792463306,$$

$$F(m_8) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972477225213684859890891$$

e

$$\Delta\lambda = 0,0001223392635714180769029660 \text{ rad.}$$

Utiliza-se a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,8743687922672066865605143 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -50^\circ 05' 51,50952550302899710''.$$

4.2.4.2 Segundo exemplo

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 1000000 \text{ m}$$

Seguindo o procedimento apresentado na subseção 4.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = 0,4367000796608911880857755 \text{ rad};$
- b) $h = 0,6407464367135162148974568;$
- c) $v_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- d) $S = 0,1567850289111593312177807;$
- e) $\Delta S = 0,1567850289111593312177807;$
- f) $S'_0 = 0;$
- g) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$
- h) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 4.1.2, tem-se respectivamente o cálculo iterativo do limite superior v_2 de integração:

- a) $v'_1 = -0,5834370303300926106916330 \text{ rad};$
- b) $\Delta v = 0,1572177348492420545585013 \text{ rad}$
- e
- $v_2 = -0,4262192954808505561331317 \text{ rad};$
- c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.77)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.78)$$

pela fórmula gaussiana, conforme a (3.144), para $n = 8$ tem-se que

$$\Delta S_i = \left| \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right| \quad (4.79)$$

com

$$F(m_i) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (4.80)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9970861571338732976342867,$$

$$F(m_2) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9971344648278646618535622,$$

$$F(m_3) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9970427555007285954668860,$$

$$F(m_4) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9971810165134879884208762,$$

$$F(m_5) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9970095696964850343644628,$$

$$F(m_6) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972188526691561025762646,$$

$$F(m_7) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9969900897223318333357512,$$

$$F(m_8) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = .9972420568534316056641413$$

e

$$\Delta S_0' = 0,1567637302343889281055387;$$

d) $S_1' = 0,1567637302343889281055387$

e

$$\Delta S = 0,0000212986767704031122420$$

Como não foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, faz-se $v_1' = v_2$, obtendo-se:

a) $v_1' = -0,4262192954808505561331317$ rad;

e prossegue com a iteração a partir da alínea b da subsecção 4.1.2;

b) $\Delta v = 0,00002136307734671819448253440$ rad

e

$$v_2 = -0,4261979324035038379386492$$
 rad;

c) conforme a (4.6), tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right| \quad (4.81)$$

com

$$f(v) = \sqrt{1 - e^2 [1 - (1 - h^2) \text{sen}^2 v]}; \quad (4.82)$$

pela fórmula gaussiana, conforme a (3.144), para $n = 8$ tem-se que

$$\Delta S_i' = \left| \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right| \quad (4.83)$$

com

$$F(m_i) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (4.84)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9969854072226041721493126,$$

$$F(m_2) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9969854130612458129132220,$$

$$F(m_3) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9969854017782316397878255,$$

$$F(m_4) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9969854185056903700793731,$$

$$F(m_5) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9969853974632475490943951,$$

$$F(m_6) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9969854228207809208245713,$$

$$F(m_7) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9969853948592611883507155,$$

$$F(m_8) = f \left[v_1' + \left(\frac{v_2 - v_1'}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9969854254248526529128530$$

e

$$\Delta S_1' = 0,00002129867643041243518990861;$$

d) $S_2' = 0,1567850289108193405407286$

e

$$\Delta S = 0,3399906770521 \cdot 10^{-12}.$$

Como foi atingida a condição $|\Delta S| \leq 1 \cdot 10^{-11}$, interrompe-se o cálculo e as quantidades φ_2, α_2 e λ_2 são avaliadas a partir do último v_2 calculado, ou seja, para $v_2 = -0,4261979324035038379386492$ rad.

Com os resultados de h e de v_2 , calcula-se β_2 pela (3.77) obtendo-se $\beta_2 = -0,3229843515660748236101719$ rad.

Agora basta aplicar a (2.66) para obter

$$\varphi_2 = -0,3239965771252597751124868 \text{ rad}$$

ou

$$\varphi_2 = -18^\circ 33' 49,091205''.$$

Com os valores de $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ e h calculados inicialmente, com o valor de β_2 e aplicando a (4.11), obtém-se

$$\alpha_2' = 0,7418927612260256617746741 \text{ rad.}$$

De acordo com a condição exposta na (4.13), a quantidade α_2 é dada aqui pela (4.12), ou seja,

$$\alpha_2 = 3,883485414815818900237317 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_2 = 222^\circ 30' 26,36665''.$$

Para o cálculo de $\Delta\lambda$, utilizam-se a (4.14) e a (4.15) para obter respectivamente

$$w_1 = -0,4001343072425311834285442 \text{ rad}$$

e

$$w_2 = -0,2831024668937558690504317 \text{ rad.}$$

Como $|v_2| < \frac{\pi}{2}$ e $w_1, w_2 > 0$, utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e

a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (4.16) como

$$\Delta\lambda = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left[\left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) \cdot [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (4.85)$$

com

$$F(m_i) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (4.86)$$

em que m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9970889746322451029595419,$$

$$F(m_2) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9971374116522943033790563,$$

$$F(m_3) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9970447616369089956062701,$$

$$F(m_4) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9971833040289056995198857,$$

$$F(m_5) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9970105257016044132395174,$$

$$F(m_6) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972200361342515118804301,$$

$$F(m_7) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9969902629341633938542158,$$

$$F(m_8) = f \left[|w_1| + \left(\frac{|w_2| - |w_1|}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972423124601944891896744$$

e

$$\Delta\lambda = 0,1166941138544223821703329 \text{ rad.}$$

Utiliza-se a (4.20) para obter

$$\lambda_2 = -0,7577970176763557224670844 \text{ rad}$$

ou

$$\lambda_2 = -43^\circ 25' 06,855025''.$$

4.2.5 Outros Resultados

4.2.5.1 Resultado para linha $s = 1 \text{ m}$

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\phi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 1\text{m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,224836943383301 \cdot 10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5834368731123577614495784 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 41,6212301610'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,9892971112'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 16,7185744075''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,224836938357797 \cdot 10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5834368731123577614495784 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 41,6212301610'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,9892971112'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 16,7185744075''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,224836943383301 \cdot 10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5834368731123577614495784 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 41,6212301610'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,9892971112'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 16,7185744075''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para $comn = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,224838511233590 \cdot 10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5834368731123577614495784 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 41,6212301610'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,9892971112'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 16,7185744075''.$$

4.2.5.2 Resultado para linha $s = 200$ m

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 200 \text{ m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,89933977429359376 \cdot 10^{-12};$$

$$v_2 = -0,5834055867831227622807213 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 37,048218'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 57,859495'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 11,696743''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,89933575359572097 \cdot 10^{-12};$$

$$v_2 = -0,5834055867831227622807213 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 37,048218'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 57,859495'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 11,696743''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,89933977429369356 \cdot 10^{-12};$$

$$v_2 = -0,5834055867831227622807213 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 37,048218'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 57,859495'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 11,696743''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,89933980565059864 \cdot 10^{-12};$$

$$v_2 = -0,5834055867831227622807213 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 37,048218'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 57,859495'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 11,696743''.$$

4.2.5.3 Resultado para linha $s = 500$ m

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 500 \text{ m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,562079819707698964 \cdot 10^{-11};$$

$$v_2 = -0,5833584214626679896643537 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15414'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,64901'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,562073536671807874 \cdot 10^{-11};$$

$$v_2 = -0,5833584214626679896643537 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15414'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,64901'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,562079819707709581 \cdot 10^{-11};$$

$$v_2 = -0,5833584214626679896643537 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15414'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,64901'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,562079827546949849 \cdot 10^{-11},$$

$$v_2 = -0,5833584214626679896643537 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15414'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,64901'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634''.$$

4.2.5.4 Resultado para linha $s = 10000$ m

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 10000 \text{ m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,4613456 \cdot 10^{-20},$$

$$v_2 = -0,5818648507280287235529750 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^{\circ}01'51,78529575054695'';$$

$$\alpha_2 = 224^{\circ}58'13,15382844239485'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}02'04,51866809538199''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,4611302 \cdot 10^{-20},$$

$$v_2 = -0,5818648507285345211152258 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^{\circ}01'51,785295'';$$

$$\alpha_2 = 224^{\circ}58'13,1538284'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}02'04,518668''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,4613527 \cdot 10^{-20},$$

$$v_2 = -0,5818648507280287235322471 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 01' 51,78529575054695'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 58' 13,15382844239485'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 02' 04,5186680953819''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,4615705 \cdot 10^{-20};$$

$$v_2 = -0,5818648507280287219807954 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 01' 51,785295750546'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 58' 13,153828442394'';$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 02' 04,51866809538199''.$$

4.2.5.5 Resultado para linha $s = 40000$ m

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 40000 \text{ m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1173024971 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5771482849274946226297054 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^\circ 50' 21,48593302104'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,80301843461'';$$

$$\lambda_2 = -49^\circ 49' 29,40565000111''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1170893642 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5771482849602223003601093 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^\circ 50' 21,48593'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,8030'';$$

$$\lambda_2 = -49^\circ 49' 29,40565''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1173024901 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5771482849274946011681512 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^\circ 50' 21,48593302104'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,8030184346'';$$

$$\lambda_2 = -49^\circ 49' 29,405650001''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1173060831 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5771482849274946163409600 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^\circ 50' 21,48593302104'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,80301843461'';$$

$$\lambda_2 = -49^\circ 49' 29,40565000111''.$$

4.2.5.6 Resultado para linha $s = 80000$ m

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ}$$

$$s = 80000 \text{ m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1859484698.10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5708594677697217596185748 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^{\circ}34'59,4180562605'';$$

$$\alpha_2 = 224^{\circ}45'55,4162110676'';$$

$$\lambda_2 = -49^{\circ}32'46,2006610614''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1852620341.10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5708594680353364490334146 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^{\circ}34'59,4180'';$$

$$\alpha_2 = 224^{\circ}45'55,4162'';$$

$$\lambda_2 = -49^{\circ}32'46,2006''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1859484716.10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5708594677697210627957963 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^\circ 34' 59,418056260'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 45' 55,4162110676'';$$

$$\lambda_2 = -49^\circ 32' 46,20066106''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para com $n=8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,1859499036 \cdot 10^{-16};$$

$$v_2 = -0,5708594677697217470410127 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -24^\circ 34' 59,4180562605'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 45' 55,4162110676'';$$

$$\lambda_2 = -49^\circ 32' 46,2006610614''.$$

4.2.5.7 Resultado para linha $s = 500000$ m

Sejam os seguintes dados do ponto 1:

$$\varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421''$$

$$\lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381''$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$s = 500000 \text{ m}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,2533664052817 \cdot 10^{-13};$$

$$v_2 = -0,5048226631528323891159161 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -21^\circ 51' 49,6709157'';$$

$$\alpha_2 = 223^\circ 38' 12,781394'';$$

$$\lambda_2 = -46^\circ 41' 08,0053395''.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,2465597991102 \cdot 10^{-13};$$

$$v_2 = -0,5048227375273038514810558 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -21^\circ 51' 49,6'';$$

$$\alpha_2 = 223^\circ 38' 12,78'';$$

$$\lambda_2 = -46^\circ 41' 08,0''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,2533671086717 \cdot 10^{-13};$$

$$v_2 = -0,5048226631451982593482549 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -21^\circ 51' 49,67091'';$$

$$\alpha_2 = 223^\circ 38' 12,78139'' ,$$

$$\lambda_2 = -46^\circ 41' 08,00533''.$$

Utilizando a fórmula gaussiana para com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = 0,2533664601277 \cdot 10^{-13};$$

$$v_2 = -0,5048226631528323105016748;$$

$$\varphi_2 = -21^\circ 51' 49,6709157'';$$

$$\alpha_2 = 223^\circ 38' 12,781394'';$$

$$\lambda_2 = -46^\circ 41' 08,0053395''.$$

4.2.6 Cálculo Recíproco

Na subseção 4.2.5, exemplo e, partiu-se de um ponto com os seguintes dados:

$$\varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421'';$$

$$\lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381'';$$

$$\alpha_1 = 45^{\circ};$$

$$s = 40000 \text{ m.}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, resultou:

$$\varphi_2 = -24^{\circ}50'21,48593302104'';$$

$$\alpha_2 = 224^{\circ}52'54,80301843461'';$$

$$\lambda_2 = -49^{\circ}49'29,40565000111''.$$

Agora calcula-se o problema direto considerando-se como dados iniciais:

$$\varphi_1 = -24^{\circ}50'21,48593302104'' ,$$

$$\lambda_1 = -49^{\circ}49'29,40565000111'' ,$$

$$\alpha_1 = 224^{\circ}52'54,80301843461'' ,$$

e

$$s = 40000 \text{ m};$$

com o objetivo de retornar em:

$$\varphi_2 = -25^{\circ}05'41,64421'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}06'16,74381'';$$

$$\alpha_2 = 45^{\circ}.$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = -0,1175188116 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5834370303300925691223055 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^{\circ}05'41,6442099999931895486'';$$

$$\alpha_2 = 44^{\circ}59'59,999999999990822776'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}06'16,7438099999734516008'';$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = -0,1177329202 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5834370302973641424787982 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^{\circ}05'41,6442052162201930938'';$$

$$\alpha_2 = 44^{\circ}59'59,9999977719503818419'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}06'16,7438060210933461227''.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = -0,1175188059 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5834370303300925905848417 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^{\circ}05'41,6442099999963266350'';$$

$$\alpha_2 = 45^{\circ}00'00,000000000005433799'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}06'16,743810000017526642'';$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\Delta S = -0,1175223915 \cdot 10^{-17};$$

$$v_2 = -0,5834370303300925754110508 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = -25^{\circ}05'41,6442099999941087474'';$$

$$\alpha_2 = 44^{\circ}59'59,9999999999951039572'';$$

$$\lambda_2 = -50^{\circ}06'16,743809999973472515''.$$

5 PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DO SEGUNDO PROBLEMA PRINCIPAL GEODÉSICO

O fundamento para a solução do segundo problema principal geodésico está na determinação iterativa da latitude geodésica máxima $\varphi_{\text{máx}}$ que fixa a linha geodésica. Parte-se de um valor aproximado para $\varphi_{\text{máx}}$, que de acordo com MORITZ (1959, p. 453), é dada por:

$$\text{tg}\varphi_{\text{máx}} \cong \frac{\sqrt{\text{tg}^2\varphi_1 + \text{tg}^2\varphi_2 - 2\text{tg}\varphi_1\text{tg}\varphi_2 \cos \Delta\lambda}}{\text{sen} \Delta\lambda} \quad (5.1)$$

De acordo com a (2.66) e substituindo $\Delta\lambda$ por $\Delta\lambda'_i$, escreve-se a (5.1) da seguinte forma:

$$\text{tg}\beta_{\text{máx}} \cong \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{\sqrt{\text{tg}^2\varphi_1 + \text{tg}^2\varphi_2 - 2\text{tg}\varphi_1\text{tg}\varphi_2 \cos \Delta\lambda'_i}}{\text{sen} \Delta\lambda'_i} \quad (5.2)$$

onde inicialmente atribui-se um valor à $\Delta\lambda'_i$, dado por

$$\Delta\lambda'_0 = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (5.3)$$

Com a (5.2), obtém-se um valor inicial para $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$. Com este valor de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$ e com auxílio da (3.34), calcula-se um valor inicial para h . Com a transformação (3.91), escreve-se

$$\text{sen} w_1 = \frac{\text{tg}\beta_1}{\text{tg}\beta_{\text{máx}}} \quad (5.4)$$

e

$$\text{sen} w_2 = \frac{\text{tg}\beta_2}{\text{tg}\beta_{\text{máx}}}; \quad (5.5)$$

calculam-se os limites w_1 e w_2 de integração. A diferença de longitude calculada pela integração numérica difere do valor da diferença de longitude real, chamada aqui de diferença teórica da longitude.

O cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$ com o valor de $\Delta\lambda'_i$ corrigido é repetido, assim como o cálculo de h , w_1 e w_2 . A integração é realizada novamente. Tal procedimento é repetido até que a diferença de longitude calculada se aproxime o suficiente da diferença teórica da longitude. A duplicidade, caso 1 e caso 2, exposta na figura 6.2,

precisa ser descoberta. Assim, ambos os casos precisam ser calculados e comparados com o valor da diferença teórica da longitude. O cálculo da diferença de longitude por integração numérica resulta novamente nas três seções, em que a segunda é caracterizada pelo caso 2, junto da qual passa a linha geodésica pelo ponto de latitude geodésica máxima. O limite de precisão pretendido refere-se à determinação do círculo de latitude máxima, visto que esta fixa a linha geodésica. De acordo com SCHMIDT (1999, p.128), tem-se precisão suficiente se a diferença de longitude calculada por integração numérica com a segunda constante de Clairaut h difere menos que 1.10^{-14} do valor da diferença teórica da longitude. Isto significa que se tem precisão de pelo menos na quinta casa decimal do segundo em α_1 e α_2 , bem como a precisão na obtenção do comprimento da linha geodésica s também está pelo menos na quinta casa decimal.

5.1 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

5.1.1 Cálculo dos Valores Iniciais

Calcula-se:

a) a latitude reduzida β dos pontos pela equação (2.66) obtendo-se

$$\beta_1 = \arctg \left[(\operatorname{tg} \varphi_1) \cdot \sqrt{1 - e^2} \right] \quad (5.6)$$

e

$$\beta_2 = \arctg \left[(\operatorname{tg} \varphi_2) \sqrt{1 - e^2} \right]; \quad (5.7)$$

b) a diferença teórica de longitude $\Delta\lambda_{\text{teórica}}$ dado por

$$\Delta\lambda_{\text{teórica}} = \lambda_2 - \lambda_1; \quad (5.8)$$

c) $\Delta\lambda'_i$, considerando-se inicialmente

$$\Delta\lambda'_0 = \Delta\lambda_{\text{teórica}}; \quad (5.9)$$

d) $D\lambda$, considerando-se inicialmente

$$D\lambda = \Delta\lambda_{\text{teórica}}; \quad (5.10)$$

e) sinal da diferença de longitude por

$$\text{sgn}(\Delta\lambda) = \frac{\Delta\lambda_{\text{teórica}}}{|\Delta\lambda_{\text{teórica}}|} \quad (5.11)$$

com $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ assumindo o valor -1 ou 1 , caso $\Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0$, tem-se uma indeterminação na (5.11), mas neste caso tem-se o cálculo do arco de meridiano, sendo os resultados de α_1 e α_2 imediatos e com a distância s sendo dada diretamente pela (3.130) por integração numérica.

5.1.2 Cálculo Iterativo da $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, de h e dos Limites de Integração w_1 e w_2

A $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h , w_1 e w_2 , são calculados pelo seguinte procedimento iterativo:

- calcula-se a tangente da latitude reduzida máxima dada pela (5.2);
- calcula-se a constante de Clairaut h pela (3.34);
- calcula-se os limites de integração w_1 e w_2 aplicando respectivamente a (5.4) e a (5.5) e também calcula-se w_u e w_o dados respectivamente por

$$w_u = \text{mín}(|w_1|, |w_2|) \quad (5.12)$$

e

$$w_o = \text{máx}(|w_1|, |w_2|); \quad (5.13)$$

d) calcula-se a seção de w_u até w_o para o caso 1 por

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left| \int_{w_u}^{w_o} f(w).dw \right| \quad (5.14)$$

com

$$f(w) = \sqrt{1 - \frac{e^2 h^2}{h^2 + (1-h^2) \text{sen}^2 w}}; \quad (5.15)$$

e) se $w_1 \cdot w_2 < 0$, calcula-se a adição das seções simétricas ao equador, então neste caso, $\Delta\lambda_1$ passa a ser

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_1 + 2 \cdot \text{sgn}(\Delta\lambda) \int_0^{w_u} f(w) dw; \quad (5.16)$$

f) calcula-se o afastamento residual $D\lambda$ para o caso 1 por

$$D\lambda_1 = \Delta\lambda_{\text{teórica}} - \Delta\lambda_1; \quad (5.17)$$

g) calcula-se a adição das seções simétricas a $\beta_{\text{máx}}$ para o caso 2 por

$$\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1 + 2 \cdot \text{sgn}(\Delta\lambda) \int_{w_0}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw; \quad (5.18)$$

h) calcula-se o afastamento residual $D\lambda$ para o caso 2 por

$$D\lambda_2 = \Delta\lambda_{\text{teórica}} - \Delta\lambda_2; \quad (5.19)$$

i) se $|D\lambda_2| < |D\lambda_1|$, significa que tem-se o caso 2, aí considera

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_2 \quad (5.20)$$

e

$$D\lambda = D\lambda_2; \quad (5.21)$$

caso contrário, ou seja, $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, aqui considera

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_1 \quad (5.22)$$

e

$$D\lambda = D\lambda_1; \quad (5.23)$$

j) abandona-se o cálculo se $|D\lambda| < 1.10^{-14}$;

k) caso não se obtenha $|D\lambda| < 1.10^{-14}$, calcula-se o novo valor corrigido de $\Delta\lambda_i$ ao cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$ por

$$\Delta\lambda_{i+1} = \Delta\lambda_i + \left(1 + \left| \frac{D\lambda}{\text{caso} \cdot \Delta\lambda} \right| \right) \cdot D\lambda \quad (5.24)$$

e retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

Com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

5.1.3 Cálculo dos Azimutes

Os azimutes α_1 e α_2 são calculados pelo seguinte procedimento:

a) determina-se $\text{sgn}(\Delta\varphi)$, para o caso 1 por

$$\text{sgn}(\Delta\varphi) = \frac{w_2 - w_1}{|w_2 - w_1|} \quad (5.25)$$

e para o caso 2 por

$$\text{sgn}(\Delta\varphi) = \frac{\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{|\varphi_1 + \varphi_2|} \cdot \pi \right) - w_2 - w_1}{\left| \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{|\varphi_1 + \varphi_2|} \cdot \pi \right) - w_2 - w_1 \right|}, \quad (5.26)$$

com $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ assumindo o valor -1 ou 1 em ambos os casos;

b) calculam-se α_1 e α_2' respectivamente por

$$\alpha_1 = [1 - \text{sgn}(\Delta\varphi)] \frac{\pi}{2} + \text{sgn}(\Delta\varphi) \cdot \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \arcsen\left(\frac{h}{\cos\beta_1}\right) \quad (5.27)$$

e

$$\alpha_2' = [1 - \text{sgn}(\Delta\varphi)] \frac{\pi}{2} + \text{sgn}(\Delta\varphi) \cdot \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \arcsen\left(\frac{h}{\cos\beta_2}\right); \quad (5.28)$$

c) se caso 2, então

$$\alpha_2' = \pi - \alpha_2'; \quad (5.29)$$

d) se $\alpha_1 < 0$, então

$$\alpha_1 = \alpha_1 + 2\pi \quad (5.30)$$

e

se $\alpha_2' < 0$, então

$$\alpha_2' = \alpha_2' + 2\pi; \quad (5.31)$$

e) calcula-se α_2 por

$$\alpha_2 = \alpha_2' + \pi, \quad (5.32)$$

observando-se que: se $\alpha_2 > 2\pi$, então

$$\alpha_2 = \alpha_2 - 2\pi. \quad (5.33)$$

5.1.4 Distância

Para o cálculo da distância s utiliza-se o último valor da segunda constante de Clairaut h obtido, os valores da latitude reduzida nos dois pontos em questão e os limites v_1 e v_2 de integração que são obtidos aplicando a (3.77).

Tratando-se do caso 2, considera-se ainda para a obtenção do limite superior v_2 a relação

$$v_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{|\varphi_1 + \varphi_2|} \cdot \pi - v_2 \quad (5.34)$$

Se $h \neq 1$, utiliza-se a (3.130) para o cálculo da distância s por integração numérica.

Para $h=1$, tem-se o cálculo da distância sobre o equador e aí basta fazer

$$S = a |\Delta\lambda_{teórica}|. \quad (5.35)$$

5.2 EXEMPLIFICAÇÃO NUMÉRICA

Nos exemplos expostos a seguir, foram utilizados o ponto 1 e o ponto 2, respectivamente, o ponto de partida e o ponto obtido, ambos do problema direto da subseção 4.2. Procedendo desta forma, sabe-se em qual resultado deve-se chegar no problema inverso e assim também analisa-se a discrepância entre as soluções do problema direto e inverso. Cada um dos problemas será repetido, aplicando para a resolução das integrais elípticas os mesmos procedimentos utilizados na obtenção do problema direto.

5.2.1 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pelo Programa Maple

5.2.1.1 Primeiro exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^{\circ}05'18,663765615880324122'' \\ \lambda_2 = -50^{\circ}05'51,509525503028997100'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755$ rad
- e
- $\beta_2 = -0,4365889070346454534522925$ rad;
- b) $\Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3}$ rad;
- c) $\Delta\lambda'_0 = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3}$ rad;
- d) $D\lambda = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3}$ rad;
- e) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

- a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,201021891013641447447612$;
- b) $h = 0,6398627681606109792944549$;
- c) $w_1 = -0,3991463556174871640040560$ rad,
- $w_2 = -0,3990240163539157459268900$ rad,
- $w_u = 0,3990240163539157459268900$ rad
- e
- $w_o = 0,3991463556174871640040560$ rad;

d) $\Delta\lambda_1 = 0,1220025351716132316898514 \cdot 10^{-3}$ rad;

e) como $w_1, w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351716132316898514 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = 0,3367283998048452214486 \cdot 10^{-6}$ rad;

g) $\int_{w_0}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw = 1,169531882639546394516885$ rad

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,339185767814264402265460 \text{ rad};$$

h) $D\lambda_2 = -2,339063428550692984188549$ rad;

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1220025351716132316898514 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

e

$$D\lambda = 0,3367283998048452214486 \cdot 10^{-6} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda'_i$,

$$\Delta\lambda'_1 = 0,1226769213454779377254002 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897610043139876835$;

b) $h = 0,6407464367135183979223863$;

c) $w_1 = -0,4001343072425336281003002$ rad,

$$w_2 = -0,4000116303211881501625642 \text{ rad},$$

$$w_u = 0,4000116303211881501625642 \text{ rad}$$

e

$$w_0 = 0,4001343072425336281003002 \text{ rad};$$

d) $\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714189104898954 \cdot 10^{-3}$ rad;

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714189104898954 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,8335785954 \cdot 10^{-18} \text{ rad}$.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1223392635714189104898954 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,8335785954 \cdot 10^{-18} \text{ rad}.$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

a) $\text{sgn}(\Delta\phi) = 1;$

b) $\alpha_1 = 45^{\circ}00'00,0000000007027447806'';$

c) $\alpha_2 = 224^{\circ}59'49,298937706882976105''.$

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370303300941771063496 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,5832798125727001887011705 \text{ rad}.$$

Resolvendo a (3.130), tem-se

$$s = 1000,000000000003406675754 \text{ m}.$$

5.2.1.2 Segundo exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -18^{\circ}33'49,091205'' \\ \lambda_2 = -43^{\circ}25'06,855025'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755$ rad
- e
- $\beta_2 = -0,3229843515638307353615059$ rad;
- b) $\Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0,1166941138575298676866369$ rad;
- c) $\Delta\lambda'_0 = 0,1166941138575298676866369$ rad;
- d) $D\lambda = 0,1166941138575298676866369$ rad;
- e) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

- a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,201290138259678413675435$;
- b) $h = 0,6397783746046504902574068$;
- c) $w_1 = -0,3990521726695705085581545$ rad,
 $w_2 = -0,2823580588120406408715173$ rad
 $w_u = 0,2823580588120406408715173$ rad
- e
- $w_o = 0,3990521726695705085581545$ rad;
- d) $\Delta\lambda_1 = 0,1163573613478005888083789$ rad;
- e) como $w_1, w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador,

então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1163573613478005888083789 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = 0,3367525097292788782580 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$

g) $\int_{w_0}^{\frac{\pi}{2}} f(w)dw = 1,169626216004378498067601 \text{ rad}$

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,455609793356557584943581 \text{ rad};$$

h) $D\lambda_2 = -2,338915679499027717256944 \text{ rad};$

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1163573613478005888083789 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = 0,3367525097292788782580 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda'_i$,

$$\Delta\lambda'_1 = 0,1170318409704255934260472 \text{ rad}.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215891988274413251028;$

b) $h = 0,6407464384855303730084633;$

c) $w_1 = -0,4001343092269304082560019 \text{ rad},$

$$w_2 = -0,2831024682565048148299546 \text{ rad},$$

$$w_u = 0,2831024682565048148299546 \text{ rad}$$

e

$$w_0 = 0,4001343092269304082560019 \text{ rad};$$

d) $\Delta\lambda_1 = 0,1166941144742796942077783 \text{ rad};$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941144742796942077783 \text{ rad};$$

$$f) D\lambda_1 = -0,6167498265211414 \cdot 10^{-9} \text{ rad.}$$

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941144742796942077783 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,6167498265211414 \cdot 10^{-9} \text{ rad.}$$

Como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda'_i$,

$$\Delta\lambda'_2 = 0,1170318403536757636452697 \text{ rad.}$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

$$a) \text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897585262329186695;$$

$$b) h = 0,6407464367213294437607707;$$

$$c) w_1 = -0,4001343072512808681744094 \text{ rad,}$$

$$w_2 = -0,2831024668976051045291396 \text{ rad,}$$

$$w_u = 0,2831024668976051045291396 \text{ rad}$$

e

$$w_o = 0,4001343072512808681744094 \text{ rad;}$$

$$d) \Delta\lambda_1 = 0,1166941138593085321226592 \text{ rad;}$$

e) como $w_1, w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138593085321226592 \text{ rad;}$$

$$f) D\lambda_1 = -0,17786644360223 \cdot 10^{-11} \text{ rad.}$$

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138593085321226592 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,17786644360223 \cdot 10^{-11} \text{ rad.}$$

Como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor

para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda_3 = 0,1170318403518970992092203.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

- a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897601403660614803$;
- b) $h = 0,6407464367162416086106470$;
- c) $w_1 = -0,4001343072455832296716177$ rad,
 $w_2 = -0,2831024668936861304623971$ rad,
 $w_u = 0,2831024668936861304623971$ rad
 e
 $w_o = 0,4001343072455832296716177$ rad;
- d) $\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575349972429083$ rad;
- e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador,
 então
 $\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575349972429083$ rad;
- f) $D\lambda_1 = -0,51295562714 \cdot 10^{-14}$ rad.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138575349972429083 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,51295562714 \cdot 10^{-14} \text{ rad}.$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

- a) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1$;
- b) $\alpha_1 = 45^{\circ}00'00,00000087734051098''$;

$$c) \alpha_2 = 222^\circ 30' 26,366651071642459533''.$$

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370303320481984465714 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,4261979324018048315925428 \text{ rad.}$$

Resolvendo a (3.130), tem-se

$$s = 1000000,000021072310559564 \text{ m.}$$

5.2.2 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra dos trapézios

5.2.2.1 Primeiro exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 05' 18,663765615880324122'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 05' 51,509525503028997100'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

$$a) \beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad}$$

e

$$\beta_2 = -0,4365889070346454534522925 \text{ rad;}$$

$$b) \Delta\lambda_{teórica} = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad;}$$

$$c) \Delta\lambda'_0 = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad;}$$

$$d) D\lambda = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad;}$$

$$e) \text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

- a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,201021891013641447447612$;
 b) $h = 0,6398627681606109792944549$;
 c) $w_1 = -0,3991463556174871640040560$ rad,
 $w_2 = -0,3990240163539157459268900$ rad,
 $w_u = 0,3990240163539157459268900$ rad
 e
 $w_o = 0,3991463556174871640040560$ rad;

- d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \left| \frac{t}{2} [f(w_u) + f(w_o)] \right|, \quad (5.36)$$

em que

$$t = w_o - w_u, \quad (5.37)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351717027117870360 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

- e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351717027117870360 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

- f) $D\lambda_1 = 0,3367283997153651242640 \cdot 10^{-6} \text{ rad};$

- g) pela regra dos trapézios para $n = 1$, têm-se

$$\int_{w_o}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw = 1,169234224352999692018555 \text{ rad}$$

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,338590451241171086748897 \text{ rad};$$

- h) $D\lambda_2 = -2,338468111977599668671986 \text{ rad};$

- i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1220025351717027117870360.10^{-3} \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = 0,3367283997153651242640.10^{-6} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1.10^{-14}$, calcula-se um novo valor

para $\Delta\lambda_1$,

$$\Delta\lambda_1 = 0,1226769213453879630143923.10^{-3}.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897610788631941383;$

b) $h = 0,6407464367132834147831702;$

c) $w_1 = -0,4001343072422704810167228 \text{ rad},$

$$w_2 = -0,4000116303209250930537754 \text{ rad},$$

$$w_u = 0,4000116303209250930537754 \text{ rad}$$

e

$$w_o = 0,4001343072422704810167228 \text{ rad};$$

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \frac{t}{2} [f(w_u) + f(w_o)], \quad (5.38)$$

em que

$$t = w_o - w_u, \quad (5.39)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714180765897921.10^{-3} \text{ rad};$$

e) como $w_1, w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714180765897921.10^{-3} \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = 0,3215079.10^{-21} \text{ rad}.$

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1223392635714180765897921 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = 0,3215079 \cdot 10^{-21} \text{ rad.}$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

a) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1$;

b) $\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,99999992505854466568000''$;

c) $\alpha_2 = 224^\circ 59' 49,2989376312466244581200''$.

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370303299255665502157 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,5832798125725316357960619 \text{ rad.}$$

Resolvendo a (3.130) pela regra dos trapézios para $n = 1$, tem-se

$$s = a \left\{ \frac{t}{2} [f(v_1) + f(v_2)] \right\}, \quad (5.40)$$

em que

$$t = v_2 - v_1. \quad (5.41)$$

Assim obtém-se

$$s = 1000,000000002843240750466 \text{ m.}$$

5.2.2.2 Segundo exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -18^{\circ}33'49,091205'' \\ \lambda_2 = -43^{\circ}25'06,855025'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

$$\text{a) } \beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad}$$

e

$$\beta_2 = -0,3229843515638307353615059 \text{ rad};$$

$$\text{b) } \Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0,1166941138575298676866369 \text{ rad};$$

$$\text{c) } \Delta\lambda'_0 = 0,1166941138575298676866369 \text{ rad};$$

$$\text{d) } D\lambda = 0,1166941138575298676866369 \text{ rad};$$

$$\text{e) } \text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

$$\text{a) } \text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,201290138259678413675435;$$

$$\text{b) } h = 0,6397783746046504902574068;$$

$$\text{c) } w_1 = -0,3990521726695705085581545 \text{ rad},$$

$$w_2 = -0,2823580588120406408715173 \text{ rad}$$

$$w_u = 0,2823580588120406408715173 \text{ rad}$$

e

$$w_o = 0,3990521726695705085581545 \text{ rad};$$

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = y \cdot \left| \frac{t}{2} [f(w_u) + f(w_o)] \right| \quad (5.42)$$

em que

$$t = w_o - w_u, \quad (5.43)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1163576335234947655277606 \text{ rad};$$

e) como $w_1, w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1163576335234947655277606 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = 0,3364803340351021588763 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$

g) pela regra dos trapézios para $n = 1$, têm-se

$$\int_{w_o}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw = 1,169328425185209517970247 \text{ rad}$$

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,455014483893913801468255 \text{ rad};$$

h) $D\lambda_2 = -2,338320370036383933781618 \text{ rad};$

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1163576335234947655277606 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = 0,3364803340351021588763 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda'_1 = 0,1170315672176721870648119.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198218376293191900782385;$

b) $h = 0,6407456554197766633164676;$

c) $w_1 = -0,4001334323079732830070884$ rad,

$w_2 = -0,2831018650903010959422758$ rad,

$w_u = 0,2831018650903010959422758$ rad

e

$w_o = 0,4001334323079732830070884$ rad;

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = y \cdot \frac{t}{2} [f(w_u) + f(w_o)], \quad (5.44)$$

em que

$$t = w_o - w_u, \quad (5.45)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575298676866374$$
 rad;

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575298676866374$$
 rad;

f) $D\lambda_1 = 0,5 \cdot 10^{-24}$ rad.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138575298676866374$$
 rad

e

$$D\lambda = 0,5 \cdot 10^{-24}$$
 rad.

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimuth, o contra-azimuth e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimuthes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

a) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1$;

b) $\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,74849129963754648742''$;

c) $\alpha_2 = 222^\circ 30' 26,13612583000676988756''$.

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834364697192340687610305 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,4261975467986653602733816 \text{ rad.}$$

Resolvendo a (5.130) pela regra dos trapézios para $n = 1$, tem-se

$$s = a \left\{ \frac{t}{2} [f(v_1) + f(v_2)] \right\}, \quad (5.46)$$

em que

$$t = v_2 - v_1. \quad (5.47)$$

Assim obtém-se

$$s = 1000003,222248580850913796 \text{ m.}$$

5.2.3 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Regra de Simpson

5.2.3.1 Primeiro exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 05' 18,663765615880324122'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 05' 51,509525503028997100'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

$$\text{a) } \beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad}$$

e

$$\beta_2 = -0,4365889070346454534522925 \text{ rad;}$$

$$\text{b) } \Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad;}$$

$$\text{c) } \Delta\lambda'_0 = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad;}$$

d) $D\lambda = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3}$ rad;

e) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,201021891013641447447612$;

b) $h = 0,6398627681606109792944549$;

c) $w_1 = -0,3991463556174871640040560$ rad,

$w_2 = -0,3990240163539157459268900$ rad,

$w_u = 0,3990240163539157459268900$ rad

e

$w_o = 0,3991463556174871640040560$ rad;

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \frac{t}{3} [f(w_u) + 4 \cdot f(w_m) + f(w_o)], \quad (5.48)$$

em que

$$t = \frac{w_o - w_u}{2} \quad (5.49)$$

e

$$w_m = \frac{w_u + w_o}{2}, \quad (5.50)$$

tem-se

$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351716132316906508 \cdot 10^{-3}$ rad;

e) como $w_1, w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351716132316906508 \cdot 10^{-3}$ rad;

f) $D\lambda_1 = 0,3367283998048452206492 \cdot 10^{-6}$ rad;

g) pela regra de Simpson para $n = 2$, têm-se

$$\int_{w_o}^{\frac{\pi}{2}} f(w)dw = 1,169773525920141253417479 \text{ rad}$$

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,339669054375454120066649 \text{ rad};$$

h) $D\lambda_2 = -2,339546715111882701989738 \text{ rad};$

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1220025351716132316906508 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

e

$$D\lambda = 0,3367283998048452206492 \cdot 10^{-6} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor

para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda'_1 = 0,1226769213454779377245963 \cdot 10^{-3}.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897610043139884686;$

b) $h = 0,6407464367135183979199116;$

c) $w_1 = -0,4001343072425336280975289 \text{ rad},$

$$w_2 = -0,4000116303211881501597939 \text{ rad},$$

$$w_u = 0,4000116303211881501597939 \text{ rad}$$

e

$$w_o = 0,4001343072425336280975289 \text{ rad};$$

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \left[\frac{t}{3} [f(w_u) + 4.f(w_m) + f(w_o)] \right], \quad (5.51)$$

em que

$$t = \frac{w_o - w_u}{2} \quad (5.52)$$

e

$$w_m = \frac{w_u + w_o}{2}, \quad (5.53)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714189104897021 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714189104897021 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,8335784021 \cdot 10^{-18} \text{ rad}$.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1223392635714189104897021 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,8335784021 \cdot 10^{-18} \text{ rad}.$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

a) $\text{sgn}(\Delta\phi) = 1;$

b) $\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000007027439840'';$

c) $\alpha_2 = 224^\circ 59' 49,298937706882976105''.$

De acordo com a (3.77), calcula-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370303300941771045738 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,5832798125727001886993953 \text{ rad}.$$

Resolvendo a (3.130) pela regra de Simpson com $n = 2$, tem-se

$$s = a \left\{ \frac{t}{3} [f(v_1) + 4 \cdot f(v_m) + f(v_2)] \right\}, \quad (5.54)$$

em que

$$t = \frac{v_2 - v_1}{2} \quad (5.55)$$

e

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (5.56)$$

Assim obtém-se

$$s = 1000,0000000000003406669988 \text{ m.}$$

5.2.3.2 Segundo exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -18^\circ 33' 49,091205'' \\ \lambda_2 = -43^\circ 25' 06,855025'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad}$

e

$$\beta_2 = -0,3229843515638307353615059 \text{ rad;}$$

b) $\Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0,1166941138575298676866369 \text{ rad;}$

c) $\Delta\lambda_0 = 0,1166941138575298676866369 \text{ rad;}$

d) $D\lambda = 0,1166941138575298676866369 \text{ rad;}$

e) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,201290138259678413675435;$

b) $h = 0,6397783746046504902574068$;

c) $w_1 = -0,3990521726695705085581545$ rad,

$w_2 = -0,2823580588120406408715173$ rad

$w_u = 0,2823580588120406408715173$ rad

e

$w_o = 0,3990521726695705085581545$ rad;

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \left| \frac{t}{3} [f(w_u) + 4.f(w_m) + f(w_o)] \right|, \quad (5.57)$$

em que

$$t = \frac{w_o - w_u}{2} \quad (5.58)$$

e

$$w_m = \frac{w_u + w_o}{2}, \quad (5.59)$$

tem-se

$\Delta\lambda_1 = 0,1163573618447067222607622$ rad;

e) como $w_1, w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$\Delta\lambda_1 = 0,1163573618447067222607622$ rad;

f) $D\lambda_1 = 0,3367520128231454258747 \cdot 10^{-3}$ rad;

g) pela regra Simpson para $n = 2$, têm-se

$$\int_{w_o}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw = 1,169631678673402128807895 \text{ rad}$$

e

$\Delta\lambda_2 = 2,455620719191510979876552$ rad;

h) $D\lambda_2 = -2,338926605333981112189915$ rad;

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$\Delta\lambda = 0,1163573618447067222607622$ rad

e

$$D\lambda = 0,3367520128231454258747 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda'_i$,

$$\Delta\lambda'_i = 0,1170318404706390851598845.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215896523823365653253;$

b) $h = 0,6407464370559007580476449;$

c) $w_1 = -0,4001343076259522848324851 \text{ rad},$
 $w_2 = -0,2831024671553131996726002 \text{ rad},$
 $w_u = 0,2831024671553131996726002 \text{ rad}$

e

$$w_o = 0,4001343076259522848324851 \text{ rad};$$

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \cdot \left| \frac{t}{3} [f(w_u) + 4 \cdot f(w_m) + f(w_o)] \right|, \quad (5.60)$$

em que

$$t = \frac{w_o - w_u}{2} \quad (5.61)$$

e

$$w_m = \frac{w_u + w_o}{2}, \quad (5.62)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941144759575753908830 \text{ rad};$$

e) como $w_1, w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941144759575753908830 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,6184277077042461 \cdot 10^{-9}$ rad.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941144759575753908830 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,6184277077042461 \cdot 10^{-9} \text{ rad.}$$

Como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_1$,

$$\Delta\lambda_2 = 0,1170318398522113741782424.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215902136038058595464$;

b) $h = 0,6407464352869002713051114$;

c) $w_1 = -0,4001343056449279460483942$ rad,

$$w_2 = -0,2831024657927165718701511 \text{ rad,}$$

$$w_u = 0,2831024657927165718701511 \text{ rad}$$

e

$$w_o = 0,4001343056449279460483942 \text{ rad;}$$

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = y \cdot \left| \frac{t}{3} [f(w_u) + 4 \cdot f(w_m) + f(w_o)] \right|, \quad (5.63)$$

em que

$$t = \frac{w_o - w_u}{2} \quad (5.64)$$

e

$$w_m = \frac{w_u + w_o}{2}, \quad (5.65)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138593133652869721 \text{ rad;}$$

e) como $w_1, w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138593133652869721 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,17834976003352 \cdot 10^{-11} \text{ rad}$.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138593133652869721 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,17834976003352 \cdot 10^{-11} \text{ rad}.$$

Como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda'_3 = 0,1170318398504278765778799.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215902152223251005097$;

b) $h = 0,6407464352817986109507772$;

c) $w_1 = -0,4001343056392148253497820 \text{ rad}$,

$w_2 = -0,2831024657887869487719014 \text{ rad}$,

$w_u = 0,2831024657887869487719014 \text{ rad}$

e

$w_o = 0,4001343056392148253497820 \text{ rad}$;

d) com o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = y \cdot \frac{t}{3} [f(w_u) + 4 \cdot f(w_m) + f(w_o)], \quad (5.66)$$

em que

$$t = \frac{w_o - w_u}{2} \quad (5.67)$$

e

$$w_m = \frac{w_u + w_o}{2}, \quad (5.68)$$

tem-se

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575350111649488 \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575350111649488 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,51434783119 \cdot 10^{-14} \text{ rad}$.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138575350111649488 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,51434783119 \cdot 10^{-14} \text{ rad}.$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

$$a) \operatorname{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$$

$$b) \alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9995391110477907742'';$$

$$c) \alpha_2 = 222^\circ 30' 26,366227832190419525''.$$

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370293027733684759222 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,4261979316938446187861239 \text{ rad}.$$

Resolvendo a (3.130) pela regra de Simpson com $n = 2$, tem-se

$$s = a \left\{ \frac{t}{3} [f(v_1) + 4 \cdot f(v_m) + f(v_2)] \right\}, \quad (5.69)$$

em que

$$t = \frac{v_2 - v_1}{2} \quad (5.70)$$

e

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (5.71)$$

Assim obtém-se

$$s = 999999,9961932058601871310 \text{ m.}$$

5.2.4 Obtenção da Solução Numérica das Integrais Elípticas pela Fórmula Gaussiana

5.2.4.1 Primeiro exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 05' 18,663765615880324122'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 05' 51,509525503028997100'' \end{cases}$$

Conforme a subsecção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755 \text{ rad}$

e

$\beta_2 = -0,4365889070346454534522925 \text{ rad};$

b) $\Delta\lambda_{\text{teórica}} = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$

c) $\Delta\lambda_0 = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$

d) $D\lambda = 0,1223392635714180769113 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$

e) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1.$

De acordo com o procedimento exposto na subsecção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{\text{máx}}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

- a) $\text{tg}\beta_{\text{m\acute{a}x}} = 1,201021891013641447447612$;
- b) $h = 0,6398627681606109792944549$;
- c) $w_1 = -0,3991463556174871640040560$ rad,
 $w_2 = -0,3990240163539157459268900$ rad,
 $w_u = 0,3990240163539157459268900$ rad
e
 $w_o = 0,3991463556174871640040560$ rad;
- d) utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left[\left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) \cdot [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (5.72)$$

com

$$F(m_i) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.73)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9972476114298280651087655,$$

$$F(m_2) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9972475589673928225966205,$$

$$F(m_3) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9972476603501936673438996,$$

$$F(m_4) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9972475100475593998299464,$$

$$F(m_5) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972476991228525467157954,$$

$$F(m_6) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972474712756871363405746,$$

$$F(m_7) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972477225213676922803182,$$

$$F(m_8) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972474478778027856742398$$

e

$$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351716131096873162 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1220025351716131096873162 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = 0,3367283998049672239838 \cdot 10^{-6} \text{ rad};$

g) pela fórmula gaussiana para $n = 8$, têm-se

$$\int_{w_c}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw = 1,169531882639391403351696 \text{ rad}$$

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,339185767813954419813079 \text{ rad};$$

h) $D\lambda_2 = -2,339063428550383001736168 \text{ rad};$

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1220025351716131096873162 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = 0,3367283998049672239838 \cdot 10^{-6} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda_1 = 0,1226769213454780604023215 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897610042123436695;$

b) $h = 0,6407464367135187183098274;$

c) $w_1 = -0,4001343072425339868878329$ rad,

$w_2 = -0,4000116303211885088274209$ rad,

$w_u = 0,4000116303211885088274209$ rad

e

$w_o = 0,4001343072425339868878329$ rad;

d) utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \quad (5.74)$$

com

$$F(m_i) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.75)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9972476114298379175641541,$$

$$F(m_2) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9972475589674026747285462,$$

$$F(m_3) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9972476603502010472448370,$$

$$F(m_4) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9972475100475667790367626,$$

$$F(m_5) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972476991228562715721191,$$

$$F(m_6) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972474712756908606658173,$$

$$F(m_7) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972477225213684859890948,$$

$$F(m_8) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972474478778035792466109$$

e

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714189104889766 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não se tem adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1223392635714189104889766 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,8335776766 \cdot 10^{-18} \text{ rad}$.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1223392635714189104889766 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

e

$$D\lambda = -0,8335776766 \cdot 10^{-18} \text{ rad}.$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

$$\text{a) } \text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$$

$$\text{b) } \alpha_1 = 45^{\circ}00'00,0000000008058817662'';$$

$$\text{c) } \alpha_2 = 224^{\circ}59'49,298937706986102386''.$$

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370303300944069981826 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,5832798125727004185143994 \text{ rad}.$$

Resolvendo a (3.130) pela fórmula gaussiana para $n = 8$, tem-se

$$s = a \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) \cdot \left[p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8) \right] \quad (5.76)$$

com

$$F(m_i) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.77)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9972475589638179082856452,$$

$$F(m_2) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9972476114262530561674447,$$

$$F(m_3) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9972475100448817876424741,$$

$$F(m_4) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9972476603475158520885010,$$

$$F(m_5) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972474712743357247613182,$$

$$F(m_6) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972476991215009797666587,$$

$$F(m_7) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972474478775148285642578,$$

$$F(m_8) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972477225210796952643608$$

e

$$s = 1000,00000000002906645359 \text{ m.}$$

5.2.4.2 Segundo exemplo

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -18^\circ 33' 49,091205'' \\ \lambda_2 = -43^\circ 25' 06,855025'' \end{cases}$$

Conforme a subseção 5.1.1, tem-se respectivamente o cálculo dos valores iniciais:

- a) $\beta_1 = -0,4367000796608911880857755$ rad
- e
- $\beta_2 = -0,3229843515638307353615059$ rad;
- b) $\Delta\lambda_{teórica} = 0,1166941138575298676866369$ rad;
- c) $\Delta\lambda'_0 = 0,1166941138575298676866369$ rad;
- d) $D\lambda = 0,1166941138575298676866369$ rad;
- e) $\text{sgn}(\Delta\lambda) = 1$.

De acordo com o procedimento exposto na subseção 5.1.2, têm-se o cálculo de $\text{tg}\beta_{máx}$, h e dos limites de integração w_1 e w_2 :

- a) $\text{tg}\beta_{máx} = 1,201290138259678413675435$;
- b) $h = 0,6397783746046504902574068$;
- c) $w_1 = -0,3990521726695705085581545$ rad,
 $w_2 = -0,2823580588120406408715173$ rad
 $w_u = 0,2823580588120406408715173$ rad
- e
- $w_o = 0,3990521726695705085581545$ rad;
- d) utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left[\left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (5.78)$$

com

$$F(m_i) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.79)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i

variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9971374038164233930347413,$$

$$F(m_2) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9970889671557523094856913,$$

$$F(m_3) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9971832979277803922908293,$$

$$F(m_4) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9970447563065999421701757,$$

$$F(m_5) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972200329687884158691868,$$

$$F(m_6) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9970105231254702329030726,$$

$$F(m_7) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972423117752248186347173,$$

$$F(m_8) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9969902624004663560771162$$

e

$$\Delta\lambda_1 = 0,1163573613478004724509340 \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1163573613478004724509340 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = 0,3367525097293952357029 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$

g) pela fórmula gaussiana para $n = 8$, têm-se

$$\int_{w_o}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw = 1,169626216004222787002530 \text{ rad}$$

e

$$\Delta\lambda_2 = 2,455609793356246046455994 \text{ rad};$$

h) $D\lambda_2 = -2,338915679498716178769357$ rad;

i) como $|D\lambda_2| > |D\lambda_1|$, tem-se caso 1, daí

$$\Delta\lambda = 0,1163573613478004724509340 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = 0,3367525097293952357029 \cdot 10^{-3} \text{ rad};$$

j) como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda'_1 = 0,1170318409704257104579722 \text{ rad.}$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\max} = 1,198215891988273351189497$;

b) $h = 0,6407464384855307077760155$;

c) $w_1 = -0,4001343092269307831471786$ rad,

$$w_2 = -0,2831024682565050726892059 \text{ rad,}$$

$$w_u = 0,2831024682565050726892059 \text{ rad}$$

e

$$w_o = 0,4001343092269307831471786 \text{ rad};$$

d) utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left[\left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) \cdot [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (5.80)$$

com

$$F(m_i) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.81)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9971374116523066810310423,$$

$$F(m_2) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9970889746322559701360236,$$

$$F(m_3) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9971833040289157200673048,$$

$$F(m_4) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9970447616369151773333025,$$

$$F(m_5) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972200361342568143861820,$$

$$F(m_6) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9970105257016049898931263,$$

$$F(m_7) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972423124601956470900968,$$

$$F(m_8) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9969902629341599108312312$$

e

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941144742796942079929 \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941144742796942079929 \text{ rad};$$

$$f) D\lambda_1 = -0,6167498265213560 \cdot 10^{-9} \text{ rad}.$$

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941144742796942079929 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,6167498265213560 \cdot 10^{-9} \text{ rad}.$$

Como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_1$,

$$\Delta\lambda_2 = 0,1170318403536758806769801 \text{ rad}.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|\Delta\lambda|$.

- a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897585261267127103$;
 b) $h = 0,6407464367213297785277104$;
 c) $w_1 = -0,4001343072512812430648979$ rad,
 $w_2 = -0,2831024668976053623879178$ rad,
 $w_u = 0,2831024668976053623879178$ rad
 e
 $w_o = 0,4001343072512812430648979$ rad;

- d) utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = y \left[\left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) \cdot [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (5.82)$$

com

$$F(m_i) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.83)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9971374116522923504919565,$$

$$F(m_2) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9970889746322422968364801,$$

$$F(m_3) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9971833040289045621099771,$$

$$F(m_4) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9970447616369054290663417,$$

$$F(m_5) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972200361342510252810936,$$

$$F(m_6) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9970105257016002785742707,$$

$$F(m_7) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972423124601943943957382,$$

$$F(m_8) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9969902629341589347964039$$

e

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138593085321226600 \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138593085321226600 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,17786644360231 \cdot 10^{-11} \text{ rad}.$

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138593085321226600 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,17786644360231 \cdot 10^{-11} \text{ rad}.$$

Como não foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, calcula-se um novo valor para $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda_3 = 0,1170318403518972162409299.$$

Retorna-se a alínea a, repetindo o procedimento até que se obtenha o valor desejado para $|D\lambda|$.

a) $\text{tg}\beta_{\text{máx}} = 1,198215897601402598555220;$

b) $h = 0,6407464367162419433775838;$

c) $w_1 = -0,4001343072455836045621030 \text{ rad},$

$w_2 = -0,2831024668936863883211729 \text{ rad},$

$w_u = 0,2831024668936863883211729 \text{ rad}$

e

$$w_o = 0,4001343072455836045621030 \text{ rad};$$

- d) utiliza-se o valor de $\text{sgn}(\Delta\lambda)$ dado inicialmente e a fórmula gaussiana com $n = 8$ para escrever a (5.14) como

$$\Delta\lambda_1 = \text{sgn}(\Delta\lambda) \left[\left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (5.84)$$

com

$$F(m_i) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.85)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9971374116522923091636595,$$

$$F(m_2) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9970889746322422574036170,$$

$$F(m_3) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9971833040289045299311894,$$

$$F(m_4) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9970447616369054009530048,$$

$$F(m_5) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9972200361342510085857095,$$

$$F(m_6) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9970105257016002649871486,$$

$$F(m_7) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9972423124601943907830531,$$

$$F(m_8) = f \left[w_u + \left(\frac{w_o - w_u}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9969902629341589319815860$$

e

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575349972429083 \text{ rad};$$

e) como $w_1 \cdot w_2 > 0$, não tem-se adição das seções simétricas ao equador, então

$$\Delta\lambda_1 = 0,1166941138575349972429083 \text{ rad};$$

f) $D\lambda_1 = -0,51295562714 \cdot 10^{-14} \text{ rad}$.

Como já se sabe que trata-se do caso 1, tem-se conforme a alínea i que:

$$\Delta\lambda = 0,1166941138575349972429083 \text{ rad}$$

e

$$D\lambda = -0,51295562714 \cdot 10^{-14} \text{ rad}.$$

Como foi atingida a condição $|D\lambda| < 1 \cdot 10^{-14}$, interrompe-se o cálculo e com os últimos valores calculados de w_1 , w_2 e h , calculam-se o azimute, o contra-azimute e o comprimento da linha geodésica.

Para o cálculo dos azimutes, conforme o procedimento exposto na subseção 5.1.3, têm-se:

a) $\text{sgn}(\Delta\varphi) = 1;$

b) $\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,00000087744827691'';$

c) $\alpha_2 = 222^\circ 30' 26,366651071741234162''.$

De acordo com a (3.77), calculam-se os limites de integração v_1 e v_2 , obtendo-se

$$v_1 = -0,5834370303320484386563139 \text{ rad}$$

e

$$v_2 = -0,4261979324018049968146346 \text{ rad}.$$

Resolvendo a (3.130) pela fórmula gaussiana para $n = 8$, tem-se

$$s = a \left[\left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) \cdot [p_1 F(m_1) + p_2 F(m_2) + \dots + p_8 F(m_8)] \right] \quad (5.86)$$

com

$$F(m_i) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_i + 1) \right], \quad (5.87)$$

onde m_i , com i variando de 1 até 8, são os pontos amostrais e p_i , com i variando de 1 até 8, são os respectivos pesos atribuídos aos pontos amostrais. Assim obtém-se:

$$F(m_1) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_1 + 1) \right] = 0,9970861363488127928409823,$$

$$F(m_2) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_2 + 1) \right] = 0,9971344499572481045359845,$$

$$F(m_3) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_3 + 1) \right] = 0,9970427297093649447032060,$$

$$F(m_4) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_4 + 1) \right] = 0,9971810076121653617175829,$$

$$F(m_5) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_5 + 1) \right] = 0,9970095403192628331984527,$$

$$F(m_6) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_6 + 1) \right] = 0,9972188487737690366006506,$$

$$F(m_7) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_7 + 1) \right] = 0,9969900583552328866786026,$$

$$F(m_8) = f \left[v_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) (m_8 + 1) \right] = 0,9972420560838345210819370$$

e

$s = 1000000,000021071787462123$ m.

5.2.5 Outros Resultados

5.2.5.1 Primeiro exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 05' 41,6212301610'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 06' 16,7185744075'' \end{cases}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464365745371910088283;$$

$$D\lambda = -0,2584856930962 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9999552608024186224'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,989252372028032796'';$$

$$s = 1,00000000611906058772914 \text{ m.}$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464365745371907324443;$$

$$D\lambda = -0,2584856820682 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9999552608023296507'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,989252372027943824'';$$

$$s = 1,00000000611906061978261 \text{ m.}$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464365745371913175310;$$

$$D\lambda = -0,2584859922705 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9999552608025179979'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,989252372028132171'';$$

$$s = 1,000000000611906059408975 \text{ m.}$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464365745375686929738;$$

$$D\lambda = -0,2585075495128 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9999552609240001757'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 59,989252372149614336'';$$

$$s = 1,000000000611905649037111 \text{ m.}$$

5.2.5.2 Segundo exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 05' 37,048218'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 06' 11,696743'' \end{cases}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464701507555113556263;$$

$$D\lambda = -0,782213845 \cdot 10^{-20} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0107638926565936668'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 57,870258646889700039'';$$

$$s = 200,0000140116232797183656 \text{ m.}$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464701507461437689189;$$

$$\begin{aligned}
 D\lambda &= -0,225655068 \cdot 10^{-20} \text{ rad}; \\
 \alpha_1 &= 45^\circ 00' 00,0107638896410426666''; \\
 \alpha_2 &= 224^\circ 59' 57,870258643874211626''; \\
 s &= 200,0000140116460004739568 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 h &= 0,6407464701507555113556222; \\
 D\lambda &= -0,782193926 \cdot 10^{-20} \text{ rad}; \\
 \alpha_1 &= 45^\circ 00' 00,0107638926565936655''; \\
 \alpha_2 &= 224^\circ 59' 57,870258646889700038''; \\
 s &= 200,0000140116232797183652 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 h &= 0,6407464701507558022337729; \\
 D\lambda &= -0,556915359 \cdot 10^{-20} \text{ rad}; \\
 \alpha_1 &= 45^\circ 00' 00,0107638927502312187''; \\
 \alpha_2 &= 224^\circ 59' 57,870258646983335647''; \\
 s &= 200,0000140116231705096329 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

5.2.5.3 Terceiro exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\begin{aligned}
 \text{Ponto 1} & \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases} \\
 \text{Ponto 2} & \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15414'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634'' \end{cases}
 \end{aligned}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464675051436539839691;$$

$$D\lambda = -0,10398963852 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0099122349441992740'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,658923836660861038''.$$

$$s = 499,9999935862816087857748 \text{ m}.$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464675050849809277718;$$

$$D\lambda = -0,76168050 \cdot 10^{-21} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0099122160565606440'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,658923817774202361'';$$

$$s = 499,9999935866365683133854 \text{ m}.$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464675051436539831972;$$

$$D\lambda = -0,10398946419 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0099122349441990255'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,658923836660860789'';$$

$$s = 499,9999935862816087844616 \text{ m}.$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464675051439761105388;$$

$$D\lambda = -0,10432286915 \cdot 10^{-18} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0099122350478961092'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,658923836764552493'';$$

$$s = 499,9999935862813601403579 \text{ m}.$$

5.2.5.4 Quarto exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -25^\circ 01' 51,78529575054695'' \\ \lambda_2 = -50^\circ 02' 04,51866809538199'' \end{cases}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367137342225306707;$$

$$D\lambda = -0,831652165346 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000701795587907'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 58' 13,153828512501744017'';$$

$$s = 10000,00000000339904551441 \text{ m.}$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464366897509663890525;$$

$$D\lambda = -0,18468 \cdot 10^{-22} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9999923496501922789'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 58' 13,153820799966780509'';$$

$$s = 10000,00000284666837515972 \text{ m.}$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367137342015893101;$$

$$D\lambda = -0,831652403003 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000701728174880'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 58' 13,153828512495009695'';$$

$$s = 10000,00000000339858718261 \text{ m.}$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367137345430731008;$$

$$D\lambda = -0,831652177732 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000702827456653'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 58' 13,153828512604824045'';$$

$$s = 10000,00000000339404297272 \text{ m.}$$

5.2.5.5 Quinto exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -24^\circ 50' 21,48593302104'' \\ \lambda_2 = -49^\circ 49' 29,40565000111'' \end{cases}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367135242505497048;$$

$$D\lambda = -0,145523424873 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,000000025867834123'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,803018437183895498'';$$

$$s = 40000,0000000080300252375 \text{ m.}$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464363073513154711030;$$

$$D\lambda = -0,696 \cdot 10^{-24} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9998692501129031593'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,802888222671550979'';$$

$$s = 40000,00018291811919186660 \text{ m.}$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367135189167591664;$$

$$D\lambda = -0,145524080086 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000008697652458'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,803018435473941746'';$$

$$s = 40000,00000000033489027941 \text{ m.}$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367135245715838871;$$

$$D\lambda = -0,145523424155 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000026901285886'';$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 52' 54,803018437286815476'';$$

$$s = 40000,00000000078296119856 \text{ m.}$$

5.2.5.6 Sexto exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^\circ 05' 41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^\circ 06' 16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -24^\circ 34' 59,4180562605'' \\ \lambda_2 = -49^\circ 32' 46,2006610614'' \end{cases}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$h = 0,6407464367135586192367565;$
 $D\lambda = -0,1153086820753 \cdot 10^{-14} \text{ rad};$
 $\alpha_1 = 45^{\circ}00'00,0000000136552121802'';$
 $\alpha_2 = 224^{\circ}45'55,416211081187701498'';$
 $s = 80000,00000000524440383770 \text{ m.}$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$h = 0,6407464349503078895695527;$
 $D\lambda = -0,65 \cdot 10^{-25} \text{ rad};$
 $\alpha_1 = 44^{\circ}59'59,9994323997727368761'';$
 $\alpha_2 = 224^{\circ}45'55,415648096748944363'';$
 $s = 80000,00147114715836466518 \text{ m.}$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$h = 0,6407464367134742132850362;$
 $D\lambda = -0,1153107058602 \cdot 10^{-14} \text{ rad};$
 $\alpha_1 = 44^{\circ}59'59,9999999864791219924'';$
 $\alpha_2 = 224^{\circ}45'55,416211054237911192'';$
 $s = 79999,99999999035980897691 \text{ m.}$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$h = 0,6407464367135589409242308;$
 $D\lambda = -0,1153086820965 \cdot 10^{-14} \text{ rad};$
 $\alpha_1 = 45^{\circ}00'00,0000000137540766976'';$
 $\alpha_2 = 224^{\circ}45'55,416211081290412383'';$
 $s = 80000,00000000520423930239 \text{ m.}$

5.2.5.7 Sétimo exemplo

Sejam os seguintes dados:

$$\text{Ponto 1} \begin{cases} \varphi_1 = -25^{\circ}05'41,64421'' \\ \lambda_1 = -50^{\circ}06'16,74381'' \end{cases}$$

$$\text{Ponto 2} \begin{cases} \varphi_2 = -21^{\circ}51'49,6709157'' \\ \lambda_2 = -46^{\circ}41'08,0053395'' \end{cases}$$

Utilizando o programa Maple na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367134981452028056;$$

$$D\lambda = -0,71576409487 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^{\circ}59'59,9999999941831247859'';$$

$$\alpha_2 = 223^{\circ}38'12,781394061366422786'';$$

$$s = 500000,0000021284974386096 \text{ m.}$$

Utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407463103591339919367728;$$

$$D\lambda = 0,105 \cdot 10^{-23} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^{\circ}59'59,9593248466091715521'';$$

$$\alpha_2 = 223^{\circ}38'12,742609681246876472'';$$

$$s = 500000,3791885002713221915 \text{ m.}$$

Utilizando a regra de Simpson com $n = 2$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464366011817114940267;$$

$$D\lambda = -0,71625695773 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^{\circ}59'59,9999638380281969464'';$$

$$\alpha_2 = 223^{\circ}38'12,781359585915748920'';$$

$$s = 499999,9998700751224707063 \text{ m.}$$

Utilizando a fórmula gaussiana com $n = 8$ na obtenção da solução numérica das integrais elípticas, obtém-se:

$$h = 0,6407464367134984733022542;$$

$$D\lambda = -0,71576409370 \cdot 10^{-15} \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = 44^\circ 59' 59,9999999942887443655'';$$

$$\alpha_2 = 223^\circ 38' 12,781394061467132682'';$$

$$s = 500000,0000021282413150240 \text{ m.}$$

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em todos os cálculos trabalhou-se com os parâmetros geométricos do elipsóide de revolução adotado pelo SAD-69: semi-eixo maior $a = 6378160$ m e achatamento $f = \frac{1}{298,25}$, resultando em $e^2 = 6,694541854587637159766140 \cdot 10^{-3}$.

Em relação aos métodos utilizados para integração numérica, todos fazem com que a solução do problema seja rapidamente convergente, obtendo-se assim soluções precisas da ordem que se desejar.

O problema está em que dependendo do método utilizado para a integração numérica, as soluções convergem para resultados diferentes e isto se agrava à medida que aumenta o comprimento da linha. Então, qual o melhor método para integração numérica a ser utilizado na solução dos problemas direto e inverso? Tem-se a consciência que a solução dos problemas direto e inverso não podem ficar dependentes de um programa matemático, por isso os problemas foram tratados, além de utilizar o programa Maple, com três procedimentos tradicionais. São eles, regra dos trapézios, regra de Simpson e fórmula gaussiana (quadratura de Gauss).

De acordo com a literatura, existem métodos de integração numérica que funcionam “melhor” que outros, mas isto depende do comportamento de cada função. O Maple utiliza uma combinação de métodos para integração numérica de uma determinada função. Impondo a condição que a solução numérica das integrais elípticas fornecida pelo Maple é a “ideal”, pode-se então falar em acurácia dos resultados obtidos quando utilizado a regra dos trapézios ou Regra de Simpson ou fórmula gaussiana, desde que comparadas com a solução obtida quando utilizado o Maple na integração numérica. Pela exposição numérica apresentada neste trabalho, verificou-se que na maioria dos testes, basta utilizar a regra dos trapézios ou a regra de Simpson na integração numérica nos casos mais simples, ou seja, com $n=1$ ou $n=2$ respectivamente. Isto deve-se ao fato que as funções integrandas das duas integrais elípticas utilizadas na solução dos problemas direto e inverso, são bem comportadas, isto é, são estritamente contínuas e suaves em todo campo de aplicação, além de apresentarem uma pequena variação em suas ordenadas. Pode-se conferir estes fatos nas figuras 3.3 a 3.12.

A consistência do método apresentado neste trabalho para a solução dos problemas direto e inverso pode ser verificada analisando a discrepância apresentada entre as soluções direta e inversa. Essa discrepância ficou comprometida em dois casos, na linha de 200 m e na de 500 m; mas isto deve-se ao fato que no cálculo do problema direto, o afastamento residual considerado ficou no limite do valor aceitável. Pode-se citar como exemplo o caso da linha de 500 m, com afastamento residual admitido de aproximadamente $0,6 \cdot 10^{-11}$, forneceu como resultado aceitável, utilizando o Maple na solução numérica das integrais elípticas:

$$v_2 = -0,5833584214626679896643538 \text{ rad,}$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15414012432288709956'',$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634134917151763557''$$

e

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,64901217388824668774'';$$

mas efetuando uma iteração, o afastamento residual passa a ser aproximadamente $0,3 \cdot 10^{-25}$, fornecendo como resultado:

$$v_2 = -0,5833584214570316779996046 \text{ rad,}$$

$$\varphi_2 = -25^\circ 05' 30,15413930046590681745'',$$

$$\lambda_2 = -50^\circ 06' 04,12634044451358198413''$$

e

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,649011790251416590234''.$$

Este último resultado, em consequência do afastamento residual estar na ordem de 10^{-25} , é considerado bom até a décima nona casa decimal do segundo de arco. Então, utilizando-o no cálculo do problema inverso como segundo ponto, obtêm-se:

$$\alpha_1 = 45^\circ 00' 00,0000000002'',$$

$$\alpha_2 = 224^\circ 59' 54,649011790251416590234'',$$

$$s = 500,0000000000004 \text{ m.}$$

É claro que a discrepância melhora sensivelmente.

O cálculo recíproco (problema direto) teve também resultado satisfatório.

De acordo com os cálculos do problema direto, com a regra dos trapézios para $n=1$, obteve-se acurácia na quinta casa decimal do segundo de arco para a linha de 40 km e para a linha de 80 km a acurácia ficou restrita à quarta casa decimal do segundo de arco e para a linha de 500 km, apenas na primeira casa decimal.

Utilizando a regra de Simpson com $n=2$ no problema direto, os resultados foram bem mais satisfatórios, obtendo-se acurácia na quinta casa decimal do segundo para a linha de 500 km. Na linha de 1000 km com $n=4$ melhora-se uma casa decimal do segundo em relação à $n=2$. Comparado os resultados obtidos com $n=4$ com o resultado obtido usando o programa Maple, obteve-se diferença de $0,000003''$ em φ_2 , $0,000001''$ em α_2 e $0,000009''$ em λ_2 .

Com a fórmula gaussiana atuando na integração numérica do problema direto, no caso da maior linha utilizada, obteve-se acurácia na sexta casa decimal do segundo em φ_2 e λ_2 , e na quinta casa decimal do segundo em α_2 . Deve-se lembrar que se esperava este bom resultado, uma vez que se utilizou $n=8$.

A regra de Simpson com $n=2$, aplicada ao cálculo do problema inverso para a linha de 500 km, fornece diferença de $0,00003''$ em α_1 , $0,00004''$ em α_2 e $0,0002$ m em s quando comparada com a solução obtida usando o maple, para linhas menores os resultados são ainda melhores. No caso da linha de 1000 km, aplicando Simpson com $n=2$ resulta diferença de $0,0005''$ em α_1 , $0,0004''$ em α_2 e $0,004$ m em s quando comparada com o resultado obtido usando o maple, mas com $n=4$ resulta diferença de $0,00003''$ em α_1 , $0,00003''$ em α_2 e $0,0003$ m em s , melhorando o resultado em uma casa decimal.

Aplicando a fórmula gaussiana na resolução das integrais elípticas para o problema inverso, obteve-se ótimos resultados, por exemplo, para linha de 1000 km a solução obtida concordou com a nona casa decimal do segundo em α_1 e α_2 , e com a oitava casa decimal do metro em s quando comparada com a solução obtida utilizando o Maple na integração numérica.

7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

Pode-se dizer que a dedução das integrais elípticas, as quais conduzem às soluções dos problemas geodésicos principais direto e inverso é matematicamente rigorosa, pois não se empregam construções auxiliares e uma aproximação é estabelecida apenas na metodologia utilizada para trabalhar com as integrais elípticas.

Acredita-se que o objetivo em apresentar uma metodologia didática para solução dos problemas direto e inverso da Geodésia por integrais elípticas foi atingido, pois não foram eliminadas termos na demonstração e os procedimentos foram expostos de maneira pormenorizada. Este fato vem contribuir para que o leitor interessado no assunto em questão tenha condições de compreender toda a demonstração e utilização de tais integrais elípticas que solucionam os problemas direto e inverso da Geodésia.

Outro fato importante foi o de não ter deixado a solução das integrais elípticas atrelada a um *software* matemático, pois de acordo com a análise dos resultados foi possível identificar, dos métodos para integração numérica utilizados neste trabalho, qual é o que traz resultados satisfatórios para os diversos comprimentos de linha utilizados.

A grande vantagem é a eficácia do método apresentado neste trabalho para a solução dos problemas direto e inverso da Geodésia, pois os resultados apresentados mostram que, além de se conseguir precisão na ordem desejada, a discrepância apresentada entre a solução direta e inversa possui valor insignificante do ponto de vista físico. Como isso não bastasse, com essa metodologia pormenorizada é possível uma solução favorável aos problemas principais geodésicos para qualquer distância.

Neste trabalho, como foi visto, foram utilizadas nos testes linhas variando de 1 m a 1000 km, com diferentes procedimentos numéricos para obtenção da solução numérica das integrais elípticas.

A regra de Simpson, devido a sua simplicidade e eficácia nos cálculos do problema direto, é recomendada no seu caso mais simples, ou seja, com $n = 2$ para

as linhas que medem até 500 km, fazendo-se necessário utilizar $n = 4$ para linhas entre 500 km e 1000 km.

A regra dos trapézios no seu caso mais simples, com $n = 1$, é recomendada para o cálculo do problema direto para linhas de até 40 km.

A fórmula gaussiana com $n = 8$ é sugerida para as linhas acima de 500 km, uma vez que é muito trabalhosa o seu uso e mesmo porque para linhas menores, Simpson que é mais simples na aplicação, como já foi visto, é eficiente.

O cálculo do problema inverso, utilizando a regra dos trapézios com $n = 1$, é recomendado apenas para linhas até 500 m.

Recomenda-se para o cálculo do problema inverso a aplicação da regra de Simpson com $n = 2$ na integração numérica para linhas até 500 km e $n = 4$ para linhas entre 500 km e 1000 km, pois a fórmula gaussiana apesar de ter propiciado também ótimos resultados, é mais trabalhosa de ser utilizada, principalmente com $n = 8$.

Finalizando, espera-se que este trabalho seja de grande utilidade a todos aqueles que se interessam no estudo criterioso da linha geodésica sobre a superfície do elipsóide de revolução.

REFERÊNCIAS

- BAESCHLIN, C.F. (1948). **Lehrbuch der Geodäsie**. Zürich: Orell Füssli.
- BOMFORD, G. (1971). **Geodesy**. 3th ed. Oxford: Oxford University Press.
- BRONSTEIN, I. N. et al. (1999). **Taschenbuch der Mathematik**. 4.überarbeitete und erweiterte Auflage. Frankfurt am Main: Harri Deutsch.
- CICCONETTI, G. (1938). **Trattato di Geodesia e Topografia**. Milano: Francesco Vallardi, I.
- CLÁUDIO, DOLCÍDIO MORAES; MARINS, JUSSARA MARIA. (1989). **Cálculo Numérico Computacional: teoria e prática**. São Paulo: Atlas.
- COSTA, ANTÔNIO MOCHON. (1976). **Métodos para Solução do Problema Geodésico Inverso Mediante a representação Esférica do Elipsóide**. Curitiba, 1976. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.
- GEMAEL, C. (1959). **Geodésia Elementar**: 1^o Caderno. Diretório Acadêmico de Engenharia do Paraná. Publicação n^o 56. Curitiba
- GEMAEL, C. (1987). **Introdução à Geodésia**: 1^a Parte. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas . UFPR - Curitiba
- GEMAEL, C. (1988). **Introdução à Geodésia**: 2^a Parte. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas . UFPR – Curitiba
- GEMAEL, C. (1999). **Introdução à Geodésia Física**. Curitiba: ed. UFPR.
- HECK, B. (1995). **Rechnverfahren und Auswertmodelle der Landsvermessung**. 2. Auflage. Heidelberg: Wichmann.
- KLEIN, U. (1997). Analyse und Vergleich unterschiedlicher Modelle der dreidimensionalen Geodäsie. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 479.
- KLOTZ, J. (1991). Eine analytische Lösung kanonischer Gleichungen der geodätischen Linie zur Transformation ellipsoidischer Flächenkoordinaten. **Deutsche Geodätische Kommission bei Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 385.
- MENEZES, C. C. de. (1985). **Solução para o problema inverso da Geodésia: Estudo Comparativo**. Curitiba, 1985. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

MORITZ, H. (1959). Eine direkte Lösung der zweiten Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid für beliebige Entfernungen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 84, p. 453-457.

RIBEIRO FILHO, AURINO. (1994). **Introdução ao Cálculo das Funções Elípticas Jacobianas**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA.

SCHMIDT, H. (1999). Lösung der geodätischen Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid mittels numerischer Integration. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 124, n. 4. p. 121-128.

SCHEID, F. (1991). **Análise Numérica**. 2. ed. Lisboa: McGraw-Hill.

SIMMONS, G. F. (1988). **Cálculo com geometria analítica**. Rio de Janeiro: McGraw Hill, v. 1 e v. 2.

SMITH, JAMES R. (1997). **Introdução to Geodesy: The History and Concepts of Modern Geodesy**. Wiley-Interscience publication.

SODANO, E. M. (1958). A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodesics. **Bulletin Géodésique**, Paris, n. 48, p. 13-25.

SODANO, E. M. (1965). General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems. **Bulletin Géodésique**, Paris, n. 75, p. 69-89.

SODANO, E. M. (1967). Supplement to inverse solution of long geodesics. **Bulletin Géodésique**, Paris, n. 85, p. 233-236.

TARGA, G. ; MENIN, A. (2000). Um metodo numérico-suriale per la risoluzione dei classici 1° e 2° problema fondamentale della Geodesia. **Bollettino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, n. 2, p. 175 – 194..

TORGE, W. (1991). **Geodesy**. 2nd ed. Berlin: de Gruyter.

WOLUPECK, ANDERSON. [199 -]. **Cálculo Numérico e Aplicações**. Departamento Acadêmico de Informática. CEFET-PR – Curitiba.

ZAKATOV, P. S. (1976). **Curso de Geodesia Superior**. (Tradução para o Espanhol por Editorial Mir, 1981). Moscou: Mir.

DOCUMENTOS CONSULTADOS

KAPLAN, W. (1972). **Cálculo avançado**. São Paulo: E. Blücher, v.1.

KRAKIWSKY, E. J.; THOMSON, D. B. (1974). **Calculos de posicionamiento geodesico**. Departamento de Ingenieria Topográfica, U.N.B., Canadá. (tradução para o espanhol por Detenal, 1978).

KRAKIWSKY, E. J.; THOMSON, D. B. (1974). **Geodetic position computations**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Lecture Notes, n. 39.

RAINSFORD, H. F. (1955). Long geodesics on the ellipsoid. **Bulletin Géodésique**, v. 37, p. 12-22.

RÖSCH, N.; KERN, M. (2000). Die direkte Berechnung elliptischer Integrale. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 6, p. 209-213.

SCHMIDT, H. (1995). Numerische Integration bei geodätischen Rechnungen. in: Benning, W.: **125 Jahre Geodäsie an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen**. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen n. 53: p. 21-34.

SCHMIDT, H. (2000). Berechnung geodätischer Linien auf dem Rotationsellipsoid im Grenzbereich diametraler Endpunkte. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 125, n. 2, p. 61-64.

SWOKOWSKI, E. W. (1994). **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, v. 1

VANÍCEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. (1986). **Geodesy: the concepts**. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

VINCENT, T. (1975). Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. **Survey Review**, Bristol, 22, n. 176, p. 88-93.

WITTE, B.; SCHMIDT, H. (2000). **Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen**. 4., neubearbeitete Auflage. Stuttgart: K. Wittwer.