

DIÓGENES BORGES VASCONCELOS

FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA UM TOKAMAK  
COM UM LIMITADOR ERGÓDICO.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

CURITIBA  
1995

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE PÓS -GRADUAÇÃO EM FÍSICA

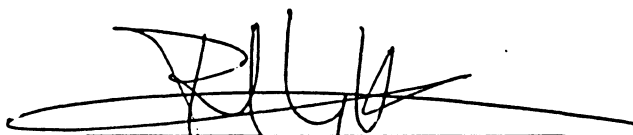
ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. DIÓGENES BORGES VASCONCELOS

TÍTULO DA TESE: "FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA UM TOKAMAK COM UM  
LIMITADOR ERGÓDICO"

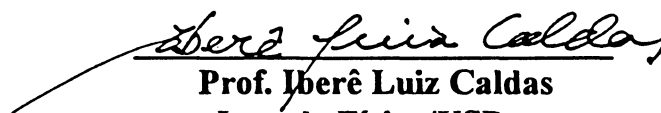
Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 25 de agosto de 1995.

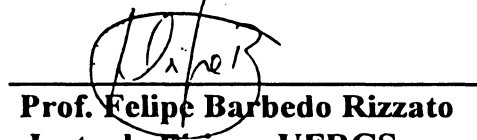
**Banca Examinadora:**



Prof. Ricardo Luiz Viana  
Presidente/Orientador-UFPR



Prof. Iberê Luiz Caldas  
Inst. de Física/USP



Prof. Felipe Barbedo Rizzato  
Inst. de Física - UFRGS

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Ricardo Luiz Viana pela orientação deste trabalho.

Ao Professor Valdir Okano pelas sugestões e apoio computacional.

Ao colega de grupo José de Moraes Pereira pelas discussões do trabalho.

Ao Professor Ari Guimarães Sauer pela gentileza em fazer algumas das figuras que ilustram esta Tese.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

*"[...] Vejamos pois, alma minha, se o tempo presente pode ser longo, pois tens capacidade para conhecer, e medir sua extensão [...]. São por ventura longo tempo cem anos presentes? Vê primeiro se cem anos podem ser presentes. Se falarmos do primeiro deles, este é presente; mas os noventa e nove são futuro, e por isso ainda não são. Se falarmos do segundo ano, então já um dos cem é passado, outro presente, os mais futuros. E deste modo qualquer dos anos intermédios que supuzemos presente, os anteriores a ele são passados, e os seguintes estão por vir. Por onde cem anos não podem ser presente. Vêde se ao menos um desses, de que se trata, é presente. Se ele o é no primeiro dos seus meses, os demais por certo são futuros. Se no segundo, o primeiro já passou, e os mais ainda não são. Logo nem ainda o ano, de que se trata é todo presente; e se não é todo presente, não é ano presente. Porque o ano consta de doze meses, dos quais um, de que se fala, é o presente, os mais pretéritos, ou futuros. Mas nem ainda o mês, de que se trata, é presente, mas um só dia; se for o primeiro, são os mais futuros; se o último, são pretéritos; se algum do meio, uns são pretéritos, outros futuros.*

*Temos pois que o tempo presente, que unicamente achamos, se podia dizer longo reduzido ao espaço de um dia escassamente. Mas examinemos este mesmo dia, pois nem um dia é todo presente, porque se compõe de todas as horas do dia, e da noite, que fazem o número de vinte e quatro; das quais a primeira tem as mais por futuras, e a última por pretéritas, e qualquer das intermédias as antecedentes por pretéritas, e as subsequentes por futuras. Mas esta mesma única hora não sendo composta, senão de momentos fugitivos, tudo o que dela tem corrido é preterito, e o que resta é futuro. Se algum tempo pois se pode conceber, que não possa ser dividido em partes, por miudíssimas que sejam, este será o único que se possa chamar tempo presente, e este tempo presente passa do futuro ao pretérito com uma rapidez, que não admite demora que o estenda, pois se a houvesse poderia dividir em pretérito e futuro. O presente pois não tem extensão alguma. [...]"*

Santo Agostinho (354 A.D. - 430)

em *Confissões*.

*Dedico este trabalho aos meus pais.*

## RESUMO.

Este trabalho visa mediante a Formulação Hamiltoniana para linhas de campo, estudar a formação das ilhas magnéticas na região periférica de uma coluna de plasma sujeita à ação de um limitador magnético ergódico. Para este fim nós utilizamos um modelo semelhante ao de Martin e Taylor, o que tornou o problema tratável analiticamente. Mediante este modelo, e simulando a ação do limitador por meio de uma perturbação impulsiva, nós obtivemos uma Hamiltoniana não-integrável. Reduzimos esta Hamiltoniana à forma da Hamiltoniana Paradigma, o que nos possibilitou aplicar o critério de Escande para obter a corrente crítica que gera a estocasticidade em larga escala. Uma comparação com o critério de Chirikov foi feita. Obtivemos também a semi-largura da ilha em função da corrente no limitador.

## ABSTRACT.

This work aims to study magnetic island formation in the peripheral region of a plasma column under the action of an ergodic magnetic limiter, by means of the hamiltonian formulation for magnetic field lines. We have used a model similar to the Martin-Taylor one, in order to treat this problem analitically. In this model, we have simulated the limiter action through an impulsive perturbation, so that we obtain a nonintegrable hamiltonian. We have reduced this hamiltonian to the paradigm form, which have enabled us to apply Escande's criterion to obtain the critical current for large-scale stochasticity. A comparison with Chirikov's criterion has been made. We have also obtained the island half-width as a function of the limiter current.

## Índice

Introdução .....	1
Capítulo 1 - Estrutura do Campo Magnético no Equilíbrio.	
1.1 - Tokamaks .....	5
1.2 - Equilíbrio Magnetohidrodinâmico .....	6
1.3 - Comportamento das Linhas de Campo no Equilíbrio .....	9
1.4 - Descrição Hamiltoniana para as Linhas de Campo .....	11
1.5 - Sistemas Gerais de Coordenadas .....	13
Capítulo 2 - Limitador Magnético Ergódico.	
2.1 - O Modelo de Martin e Taylor .....	18
2.2 - Obtenção do Campo Gerado Pelo Limitador Magnético .....	21
2.3 - Uma Hamiltoniana para o Modelo de Martin e Taylor .....	25
2.3.a - Hamiltoniana para o Equilíbrio MHD .....	26
2.3.b - Hamiltoniana Perturbadora .....	29
Capítulo 3 - Conceitos da Teoria do Sistemas Hamiltonianos.	
3.1 - Sistemas Integráveis .....	32
3.2 - Superfície de Secção para Sistemas Integráveis .....	33
3.3 - Sistemas Quase-Integráveis .....	35
3.4 - A Hamiltoniana Paradigma .....	36
3.5 - Os Teoremas KAM e de Poincaré - Birkhoff .....	42
Capítulo 4 - Critérios de Estocasticidade.	
4.1 - A Estocasticidade Global e o Critério de Chirikov .....	47
4.2 - O Processo de Renormalização e o Critério de Escande .....	49
4.3 - Um Exemplo de Sistema Paradigma .....	53

Capítulo 5 - Aplicações numéricas.

5.1 - A Posição das Ilhas Magnéticas .....	59
5.2 - Aplicação dos Critérios de Chirikov e Escande .....	61
Conclusões .....	72
Apêndice A - Espaço de Fase Estendido .....	75
Apêndice B - Caso $M = 0$ para $H_p$ .....	77
Referências .....	80

## INTRODUÇÃO.

Proposto na década de 50 como um aparato propício ao confinamento de plasma para geração da fusão termonuclear controlada, o Tokamak tem desde então revelado uma série de problemas técnicos que conspiram contra o objetivo para o qual foi desenvolvido. Um destes problemas é a interação da coluna de plasma com as paredes do Tokamak. Tal interação provoca aquecimentos locais nas paredes do vaso de contenção, e conseqüentemente o desprendimento de impurezas pelo processo conhecido como 'sputtering'. Tais impurezas comprometem enormemente a qualidade do confinamento.

No final da década de 70 mostrou-se que os aquecimentos locais poderiam ser evitados mediante o aumento do coeficiente de difusão das partículas carregadas na periferia da coluna de plasma [Engelhardt e Feneberg, 1978]. Como partículas carregadas em movimento estão sujeitas a campos magnéticos, um aumento do coeficiente de difusão daquelas requer um aumento do coeficiente de difusão das próprias linhas de campo na referida região periférica.

Ainda na década de 70, foi idealizado um dispositivo capaz de gerar esta região difusora, conhecido atualmente como limitador magnético ergódico [Karger e Lackner, 1977]. Uma proposta recente para o limitador consiste de um conjunto de fios dispostos em forma de grelha, envolvendo o Tokamak ao longo do seu menor raio. Tal grelha de correntes gera um campo magnético perturbativo ressonante com os campos magnéticos básicos de um Tokamak. O resultado é a destruição de determinadas superfícies ditas magnéticas, e a criação na mesma posição de estruturas conhecidas como ilhas.

A destruição das superfícies magnéticas e a formação das ilhas têm sido estudadas de forma intensiva nos últimos anos, e uma das maneiras de se estudar o fenômeno é mediante a Formulação Hamiltoniana. Dentro desta formulação, as coordenadas de uma dada linha de campo no espaço físico são encaradas como coordenadas generalizadas na própria acepção clássica do termo [Kerst, 1962], sendo que uma Hamiltoniana clássica pode ser obtida mediante a equação para as linhas de campo:  $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ .

Em 1984, Martin e Taylor propuseram um modelo teórico bastante simples para o funcionamento do limitador ergódico. Eles consideraram um Tokamak de grande razão de aspecto equipado com um único limitador. O modelo também utilizava um sistema de coordenadas retangulares na região periférica à coluna de plasma e que perdia a validade para regiões mais internas [Martin e Taylor, 1984].

O presente trabalho visa, mediante a Formulação Hamiltoniana, estudar a formação de ilhas magnéticas na região periférica à coluna de plasma, bem como a determinação da corrente crítica no limitador. Tal corrente indicará o comportamento estocástico em larga escala (aumento da difusão) das linhas de campo na região periférica. A fim de tornar o problema analiticamente solúvel nós faremos uso de um modelo bastante semelhante ao de Martin e Taylor, pois usaremos a mesma geometria e as mesmas hipóteses. No entanto, o trabalho original de Martin e Taylor trata o problema sob o ponto de vista de um mapeamento das linhas de campo, que é obtido analiticamente de maneira aproximada. Neste trabalho nós revisitamos este modelo, mas agora procurando expressões matemáticas para a Hamiltoniana de linhas de campo.

No capítulo I são apresentadas, de maneira breve, as características básicas de um Tokamak típico, bem como os campos magnéticos básicos que atuam no mesmo: o campo toroidal  $B_\phi$  e o campo poloidal  $B_\theta$ . Tais campos são responsáveis pelo equilíbrio do plasma.

Citamos também as equações básicas da teoria MHD, a qual trata o plasma como um fluido condutor sujeito às equações de Maxwell. Quando admitimos a existência do equilíbrio, sob o ponto de vista da teoria MHD, as superfícies, ditas magnéticas, surgem como consequência direta da teoria.

Em seguida, a descrição Hamiltoniana para as linhas de campo é apresentada. Quando encaramos as coordenadas geométricas de uma dada linha de campo como coordenadas generalizadas  $(p, q, t)$  a já citada equação  $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$  nos leva a postular a existência de uma Hamiltoniana clássica [Kerst, 1962]. Quando a geometria do campo magnético ( $\vec{B}^{(0)}$ ) em estudo exhibe uma simetria em relação a uma das coordenadas (coordenada cíclica) a Hamiltoniana é dita integrável ( $H_0$ ). Neste caso a integração das equações de Hamilton revela ser

o campo magnético  $\vec{B}^{(0)}$  espacialmente regular.

Dentro deste aspecto a adição de campos perturbativos  $\vec{B}^{(1)}$ , que quebram a simetria do problema, leva-nos a postular de forma análoga a existência de uma Hamiltoniana perturbadora  $H_1$  e conseqüentemente a integração das equações canônicas de Hamilton para  $H_0 + H_1$ , mostra que o campo magnético  $\vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(1)}$  têm uma estrutura não-integrável e admite a existência de caos espacial.

No capítulo II nós apresentamos um breve histórico sobre o limitador magnético ergódico, bem como a maneira como este atua. Em seguida explicamos a idéia básica do modelo de Martin e Taylor para um limitador. Com base neste modelo, e utilizando um sistema de coordenadas retangulares, que tem validade somente numa região muito próxima às paredes do vaso de contensão, nós reproduzimos o cálculo do campo magnético,  $\vec{B}^{(1)}$ , gerado pelo limitador magnético [Viana e Caldas, 1991].

Em seguida derivamos uma Hamiltoniana  $H_0$ , que caracteriza o campo de equilíbrio  $\vec{B}^{(0)}$ . Quando a ação do limitador é simulada por uma perturbação impulsiva, nós obtemos mediante o campo perturbador  $\vec{B}^{(1)}$  uma Hamiltoniana perturbadora  $H_1$ .

No capítulo III fazemos uma revisão breve dos principais conceitos da teoria dos sistemas hamiltonianos; sistema integrável, sistema quase-integrável, ilha, superfícies racionais e irracionais. A Hamiltoniana Paradigma,  $H_p(J, \Theta, t) = \frac{1}{2}J^2 - M \cos \Theta - P \cos k(\Theta - t)$ , é introduzida. Tal Hamiltoniana, como será vista no capítulo IV, é o ponto de partida para a análise do espaço de fase em escalas cada vez menores [Escande, 1982]. Ainda neste capítulo, expomos de uma maneira simples alguns dos principais resultados da moderna teoria dos sistemas hamiltonianos; os teoremas KAM e de Poincaré-Birkhoff. Tais teoremas descrevem o destino das superfícies racionais e irracionais quando sujeitas a uma perturbação fraca.

No capítulo IV, os critérios de Chirikov e Escande são expostos. O critério de Chirikov é uma regra simples, empírica e aproximada para se determinar o limiar de estocasticidade global. Já o critério de Escande, que analisa a dinâmica Hamiltoniana exibida por  $H_p(J, \Theta, t)$  à luz dos teoremas KAM e de Poincaré-Birkhoff, fornece um resultado sensivelmente melhor. Ainda neste capítulo reduzimos a Hamiltoniana  $H_0 + H_1$ , obtida usando-se o modelo de

Martin e Taylor, à Hamiltoniana Paradigma. Nesta etapa fazemos uso de uma série de transformações canônicas.

No capítulo V, fazemos uma aplicação numérica dos resultados obtidos no capítulo IV. Uma comparação entre os dois critérios é feita utilizando-se alguns parâmetros do Tokamak TBR-1, em operação no Instituto de Física da USP. A corrente crítica que gera a estocasticidade global é determinada a partir de cada um dos critérios e a semi-largura das ilhas é obtida como função da corrente que circula no limitador magnético.

Como complemento fizemos algumas simulações numéricas que ilustram a evolução do sistema dinâmico descrito pela Hamiltoniana Paradigma. Nas simulações o parâmetro de controle utilizado é a corrente no limitador magnético ergódico. Nelas, as equações canônicas obtidas a partir da Hamiltoniana Paradigma são integradas numericamente, e o mapa de Poincaré (estroboscópico) é apresentado.

Nossas conclusões são apresentadas no final. Dois apêndices, focalizando cálculos do capítulo III, são incluídos a título de complementação .

## PRIMEIRO CAPÍTULO

### ESTRUTURA DO CAMPO MAGNÉTICO NO EQUILÍBRIO

#### 1.1 TOKAMAKS.

Dentre os sistemas de contenção de plasma para a possível obtenção da fusão termonuclear controlada, o Tokamak é um dos mais estudados atualmente, isso devido em grande parte ao fato de que tal sistema faz com que o plasma confinado atinja uma estabilidade um pouco maior que nos demais tipos de sistemas [Furth,1975].

O Tokamak constitui-se basicamente de um vaso metálico em forma de um toróide cujo raio maior é  $R_0$  e menor  $b$ . Com estes dois parâmetros podemos definir a razão de aspecto para um Tokamak, dada por  $A = R_0/b$ . No interior deste toróide uma coluna de plasma cuja seção tem raio  $a$  (Fig. 1.1) é confinada por dois campos principais (Fig. 1.2);

A) Campo toroidal:  $\vec{B}_\phi = B_\phi \hat{\phi}$ , tal campo é gerado por espiras de corrente que envolvem o tokamak.

B) Campo poloidal:  $\vec{B}_\theta = B_\theta \hat{\theta}$ , tal campo é gerado pela própria corrente de plasma  $I_p$ . A intensidade deste campo é tipicamente menor que a do toroidal.

Aqui  $\phi$  e  $\theta$  são variáveis angulares que correspondem às voltas toroidais e poloidais respectivamente, desta maneira  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\theta}$  são os versores que orientam as mesmas direções. O campo poloidal e o toroidal se combinam de tal forma que as linhas de campo resultantes tem uma disposição geométrica helicoidal. E é este o campo responsável pelo confinamento das partículas constituintes do plasma (Fig. 1.3).

Deve ser enfatizado aqui que no presente trabalho estamos admitindo um Tokamak de grande razão de aspecto ( $A \gg 1$ ), de tal forma que os efeitos toroidais de curvatura serão desprezados. Ainda dentro desta aproximação o Tokamak será considerado um cilindro de

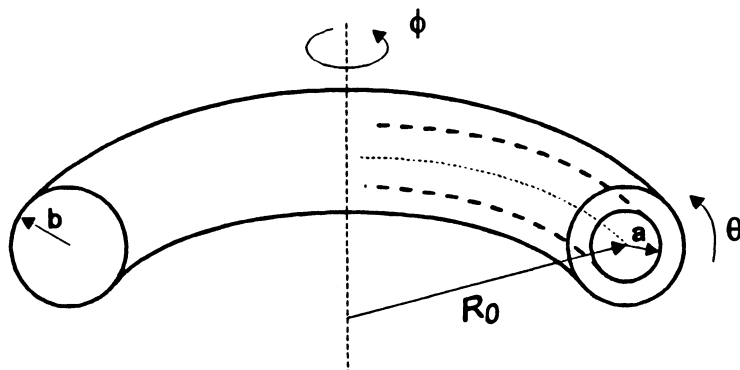


Figura 1.1 – Parâmetros principais de um tokamak.

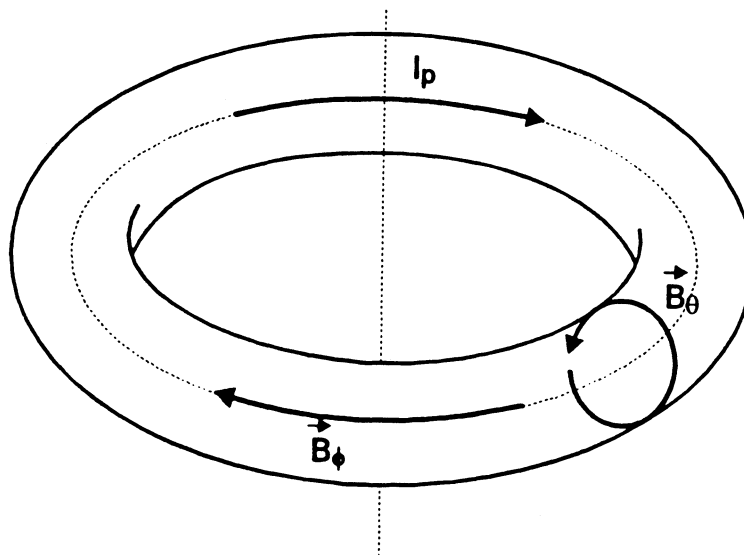


Figura 1.2 – Campos principais de um Tokamak juntamente com a corrente de plasma  $I_p$ .

periodicidade  $2\pi R_0$ , cuja coordenada  $z$  no eixo geométrico do mesmo será dada por  $z = R_0\phi$  (Fig. 1.4).

## 1.2 EQUILÍBRIO MAGNETOHIDRODINÂMICO.

De acordo com a magnetohidrodinâmica (MHD) o plasma é considerado um fluido condutor satisfazendo as seguintes equações [Wesson,1987];

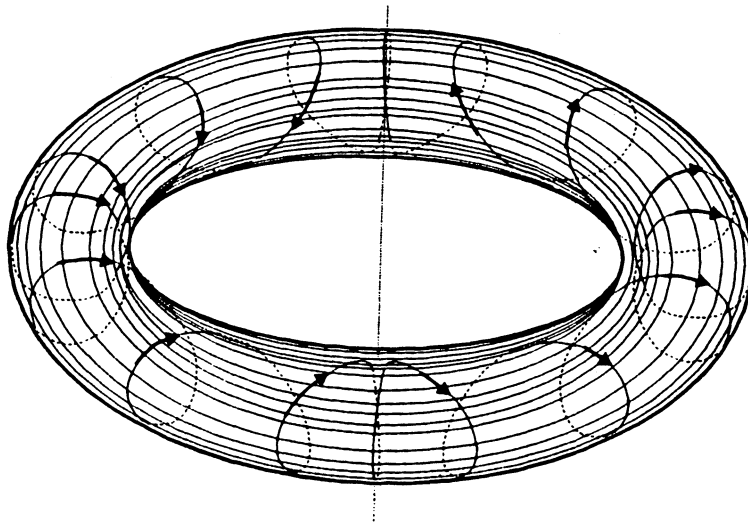


Figura 1.3 – Linhas de campo resultante e sua geometria helicoidal.

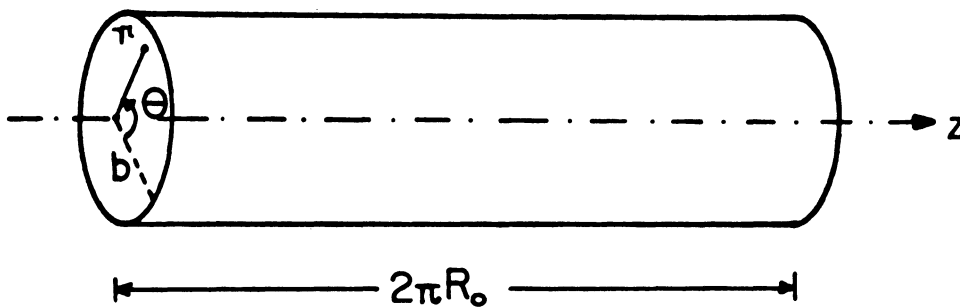


Figura 1.4 – Cilindro periódico.

a) Balanço de massa;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (I.1)$$

b) Equação de movimento;

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (I.2)$$

onde  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ .

c) Lei de Ohm generalizada;

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}. \quad (I.3)$$

d) Equações de Maxwell (sem cargas elétricas isoladas e desprezando a corrente de deslocamento);

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (I.4)$$

Nas expressões acima,  $\vec{v}$  é a velocidade do fluido,  $p$  é a pressão cinética no interior do plasma,  $\vec{j}$  a densidade de corrente e  $\eta$  é a resistividade do plasma,  $\rho$  é a densidade do plasma,  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\vec{B}$  é a indução magnética. Na teoria MHD ideal faz-se  $\eta \rightarrow 0$ .

Suponhamos que o sistema se encontre num estado de equilíbrio e que além disso a velocidade do fluido seja nula ( $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0; \vec{v} \equiv 0$ ). Nestas condições o plasma passa a ser descrito pelas equações do equilíbrio MHD estático:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (I.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (I.6)$$

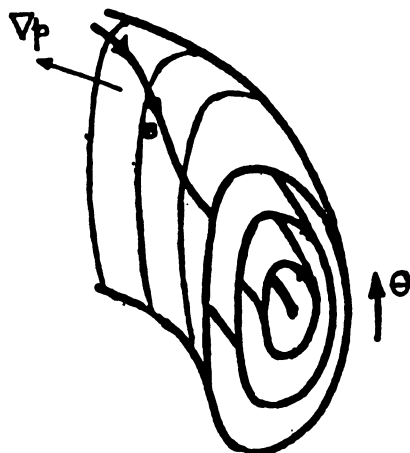
$$\vec{\nabla} p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad (I.7)$$

Se multiplicarmos escalarmente a última equação por  $\vec{B}$  e  $\vec{j}$  obtemos que, respectivamente:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0,$$

$$\vec{j} \cdot \vec{\nabla} p = 0,$$

ou seja, as linhas de campo magnético repousam sobre superfícies de pressão constante (Fig. 1.5)



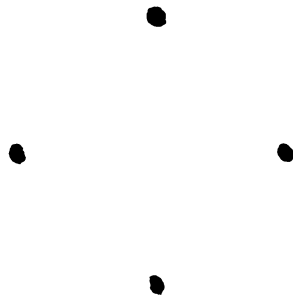
**Figura 1.5** – Linhas de campo magnético que repousam sobre superfícies  $p = \text{constante}$ .

Deve ser enfatizado aqui que os termos superfície de fluxo magnético, superfície magnética e superfície de pressão constante são sinônimos, e portanto podem ser usados indistintamente.

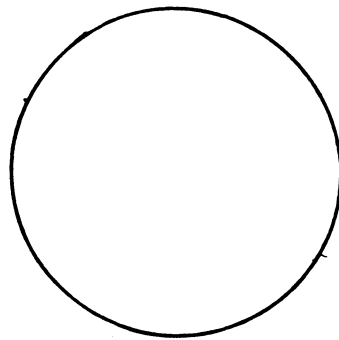
### 1.3 COMPORTAMENTO DAS LINHAS DE CAMPO NO EQUILÍBRIO.

Como foi dito anteriormente, uma linha de campo segue uma trajetória helicoidal enquanto ela percorre o comprimento maior do toróide. Tal linha pertence a uma superfície que denominamos de superfície magnética, a qual também tem a forma topológica de um toro. No interior de um Tokamak existem infinitas superfícies magnéticas, sendo todas coaxiais, e sobre cada uma destas superfícies existem da mesma forma infinitas linhas de campo dispostas lado a lado umas das outras. É necessário aqui fazer uma diferenciação entre os dois tipos de superfícies magnéticas: a racional e a irracional:

A) Superfície racional: uma linha de campo sobre tal superfície que parta de uma posição inicial no plano poloidal ( $\phi = \text{const.}$ ) volta sobre si mesma após  $m$  voltas toroidais ( $m$  revoluções no ângulo  $\phi$ ) e  $n$  voltas poloidais ( $n$  revoluções no ângulo  $\theta$ ). Portanto uma única linha de campo sobre tal superfície intercepta o plano poloidal um número finito de vezes (Fig. 1.6)



**Figura 1.6** – Plano  $\phi = \text{const.}$  da superfície racional  $m = 4, n = 1$ . Os pontos representam as intersecções de uma dada linha de campo arbitrária.



**Figura 1.7** – Plano  $\phi = \text{const.}$  de uma superfície irracional. As subseqüentes intersecções formam uma curva densamente preenchida.

B) Superfície irracional: uma linha de campo sobre tal superfície que parta de um ponto inicial no plano poloidal, jamais voltará sobre si mesma. Portanto uma única linha de campo sobre tal superfície irá interceptar o plano poloidal um número infinito de vezes, gerando assim sobre este uma curva densamente preenchida (Fig. 1.7).

A topologia destas superfícies se modifica quando se estabelece uma perturbação periódica sobre o sistema (quando destruimos o equilíbrio). As superfícies racionais são totalmente destruídas imediatamente após estabelecida a perturbação (mesmo sendo esta muito fraca). Isso decorre do fato que as linhas de campo que antes repousavam sobre estas

superfícies agora se recombina para formar as estruturas de ilhas magnéticas.

As superfícies irracionais também são afetadas pela perturbação. Entretanto de forma diferente das racionais, as irracionais não são imediatamente destruídas mas sim levemente deformadas (mantém-se ainda a forma topológica de um toro), e continuam assim até uma certa intensidade da perturbação. Quando esta se torna suficientemente grande observa-se que até mesmo as superfícies irracionais são destruídas em uma certa região no interior do Tokamak, e quase que a totalidade das linhas de campo nesta região exibem um comportamento acentuadamente estocástico: duas linhas de campo nesta região que estão inicialmente próximas uma da outra estarão, após algumas voltas no toróide, em posições exponencialmente afastadas entre si.

Vemos então que a descrição do comportamento do sistema requer uma análise mais aprofundada. E esta pode ser feita sob a ótica dos sistemas Hamiltonianos.

#### 1.4 DESCRIÇÃO HAMILTONIANA PARA AS LINHAS DE CAMPO.

Comentamos anteriormente que as linhas de campo em equilíbrio podem exibir um comportamento estocástico quando sujeitas a uma perturbação. É previsto o aparecimento das ilhas magnéticas bem como a eventual destruição delas, situação esta em que temos estocasticidade em larga escala. A determinação da intensidade da perturbação que provoca o caos global é de interesse técnico pois tal intensidade se relaciona com parâmetros externos de controle, como por exemplo um campo magnético perturbativo. Vemos que a descrição em larga escala do sistema requer uma abordagem teórica mais abrangente. Tal abordagem pode ser feita tratando-se as linhas de campo via formalismo Hamiltoniano: dentro deste contexto a estrutura do campo magnético no interior do Tokamak é equivalente à das órbitas no espaço de fase para um sistema dinâmico. Em outras palavras, busca-se uma analogia entre as equações canônicas de Hamilton e as equações das linhas de campo magnético. Esta analogia foi inicialmente introduzida por D.W. Kerst [Kerst,1962], que obteve um conjunto de equações de Hamilton (em coordenadas retangulares) bem como uma Hamiltoniana para um campo resultante da superposição de um campo uniforme na direção  $z$ , ao das componentes

$x$  e  $y$  de um campo quadrupolar. Iremos apresentar agora o tratamento Hamiltoniano para as linhas de campo em uma geometria retangular.

Em coordenadas retangulares a equação  $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ , onde  $d\vec{l}$  é o deslocamento ao longo da linha de campo, fornece:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \quad (I.8)$$

Vamos escolher  $x$  como coordenada canônica e  $y$  como o momentum canonicamente conjugado, e  $z$  como variável temporal. Se além disso definirmos uma Hamiltoniana  $H(x, y, z)$  para o sistema, obtemos através de (I.8):

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (I.9)$$

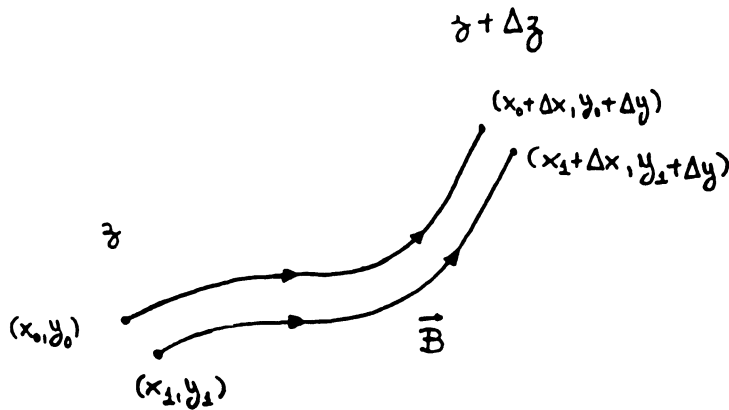
$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (I.10)$$

Deve ser enfatizado aqui, que o conjunto de equações obtida não descreve a evolução dinâmica do sistema, pois a variável  $z$  não é o tempo verdadeiramente físico. Portanto, o que as equações descrevem é tão somente a ‘evolução’ ao longo da coordenada  $z$ . Dentro deste formalismo, a posição de uma linha de campo magnético em coordenadas retangulares é obtida em função do parâmetro  $z$ , segundo as equações :

$$x = x(z) \quad \text{e} \quad y = y(z)$$

tendo  $x = x(z_0)$  e  $y = y(z_0)$  como condições iniciais.

De acordo com a mecânica clássica,  $H(x, y, z)$  representa uma Hamiltoniana não autônoma (com dependência ‘temporal’ em  $z$ ) com um grau de liberdade. Entretanto podemos definir como variável ‘temporal’ alguma coordenada em relação a qual o sistema exiba alguma simetria, de tal forma que teremos uma Hamiltoniana que independe desta coordenada. Se a Hamiltoniana então não depende do tempo ( 1 grau de liberdade e autônoma), ela é uma constante do movimento e o sistema que ela descreve é dito integrável. Nesta situação as linhas de campo exibem um comportamento regular, i.e. não estocástico: duas linhas de campo inicialmente próximas uma das outras permanecem ainda próximas a medida que a coordenada temporal evolui (Fig. 1.8).



**Figura 1.8** – Evolução ao longo da coordenada temporal, que escolhemos como  $z$ , de duas linhas de campo inicialmente próximas.

A quem poderíamos associar a Hamiltoniana  $H(x, y, z)$ ? Supondo que o sistema o qual tratamos tenha uma simetria em relação a coordenada  $z$ , é vantajoso portanto considerar esta como um parâmetro temporal. Com esta simetria o potencial vetor  $\vec{A}$  para o campo  $\vec{B}$  dependerá unicamente do par  $(x, y)$ . Se por simplicidade escolhermos  $B_z = B_0 = \text{const.}$  então:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_0} = \frac{1}{B_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{1}{B_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (I.11)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_0} = \frac{1}{B_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (I.12)$$

ou seja podemos imediatamente identificar  $H(x, y, z) = \frac{A_z(x, y)}{B_0}$  como a Hamiltoniana que descreve o sistema (Viana, 1992).

## SEGUNDO CAPÍTULO

### LIMITADOR MAGNÉTICO ERGÓDICO.

#### INTRODUÇÃO .

Apesar da eficácia do campo de equilíbrio em confinar a coluna de plasma, muitas partículas carregadas das camadas externas da coluna e eventualmente a própria coluna de plasma, conseguem ainda se difundir por entre as linhas de campo e alcançam as paredes do vaso de contensão. Tal interação provoca aquecimentos locais na parede do vaso e consequentemente há liberação de impurezas pelo processo conhecido como “sputtering” .

Devido ao forte campo magnético estas impurezas são imediatamente ionizadas após se libertarem das paredes do vaso de contensão. Em seguida são transportadas pelo mesmo campo magnético para regiões internas ou externas à coluna de plasma (de acordo com a carga da impureza ionizada), [Engelhardt e Feneberg,1978] de tal maneira que irão comprometer enormemente a qualidade do confinamento, causando perdas por radiação no plasma.

Em 1978 W.Engelhardt, do Instituto Max Planck (Munique), conseguiu desenvolver um modelo de transporte para impurezas no interior de uma coluna de plasma estacionária e com geometria cilíndrica. A partir de equações de difusão para impurezas ionizadas e impurezas eletricamente neutras ele pode mostrar que a concentração total das mesmas (neutras e ionizadas) no interior da coluna cilíndrica poderia ser reduzida às custas do aumento do coeficiente de difusão de partículas carregadas na periferia da coluna [Engelhardt e Feneberg,1978]. Uma vez que o centro de guia de cada partícula caminha sobre uma determinada linha de campo, desconsiderando-se as derivas, então um aumento na difusão de partículas na periferia está relacionado a um aumento na difusão das próprias linhas de campo. Em outras palavras, o aumento do coeficiente de difusão de partículas carregadas na periferia da coluna pode ser obtido forçando as linhas de campo da mesma região a exibir um comportamento estocástico.

Em 1977 F.Karger e K.Lackner, também do Instituto Max Planck, propuseram um

dispositivo capaz de gerar uma camada estocástica na periferia da coluna de plasma. Quando foi inicialmente proposto, o limitador magnético ergódico consistia em uma hélice condutora enrolada ao longo do comprimento maior do Tokamak [Karger e Lackner,1977]. Tal hélice tinha a propriedade de gerar um campo magnético ressonante e perturbativo: quando a helicidade  $(m,n)$  do enrolamento coincidia com a helicidade de uma determinada superfície magnética - mais precisamente, com a helicidade das linhas de campo sobre tal superfície - o campo perturbativo provocava a alteração da topologia desta mesma superfície.

À mercê da perturbação, as linhas de campo sobre a superfície ressonante se recombinam para formar as ilhas magnéticas. A medida em que o campo perturbativo aumenta de intensidade, a largura destas ilhas também aumenta gradativamente, até efetivamente se tocarem ("overlapping" das ilhas), nesta situação a estrutura do campo magnético na região que antes existia uma superfície racional passa a exibir agora um comportamento acentuadamente estocástico.

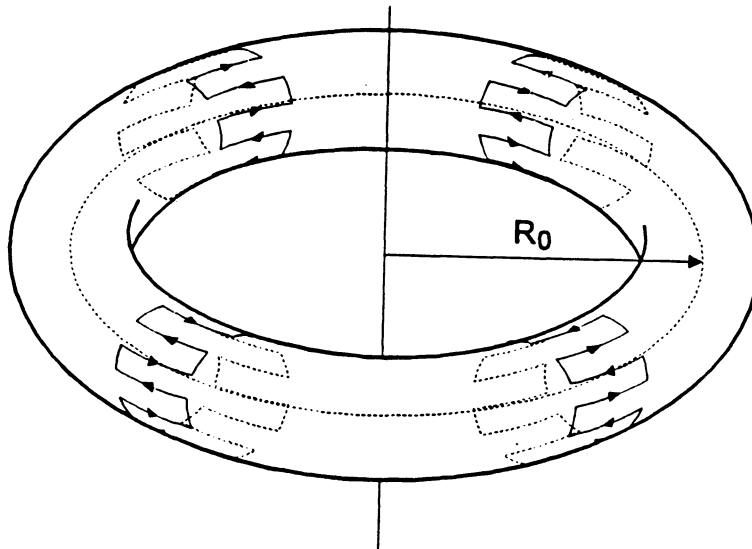
Posteriormente o limitador evoluiu para um modelo mais simplificado, que utiliza um ou mais anéis de corrente, ao invés de hélices condutoras. Cada um dos anéis do limitador constitui-se de  $m$  pares de fios arranjados em forma de grelha que envolve o toro ao longo do seu comprimento menor, sendo que  $m$  pares de segmentos de fios estão alinhados com o eixo geométrico do toróide. Ademais, a corrente que flui em cada fio tem sentido contrário ao da corrente que flui nos fios imediatamente vizinhos (Fig. 2.1).

## 2.1 O MODELO DE MARTIN E TAYLOR.

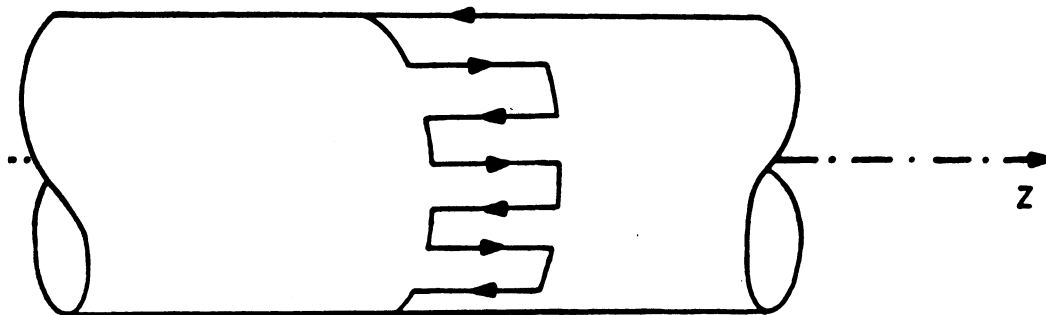
Em 1984 T.J.Martin e J.B.Taylor propuseram um modelo simples para estudar os efeitos do limitador magnético sobre as superfícies em equilíbrio no interior do Tokamak.

A simplificação do modelo consistia em considerar-se um único anel difusor envolvendo um Tokamak de grande razão de aspecto, ou seja, o Tokamak estudado foi aproximado por um cilindro de comprimento  $2\pi R_0$  cujo raio da secção é  $b$  (Fig. 2.2), desta maneira o efeito do limitador além de ressonante é também periódico (período  $2\pi R_0$ ).

Numa região muito próxima à periferia da coluna, ou da mesma maneira, numa região



**Figura (2. 1)** – Tokamak equipado com um limitador de 4 anéis de corrente , cada um com  $m$  pares de fios condutores.

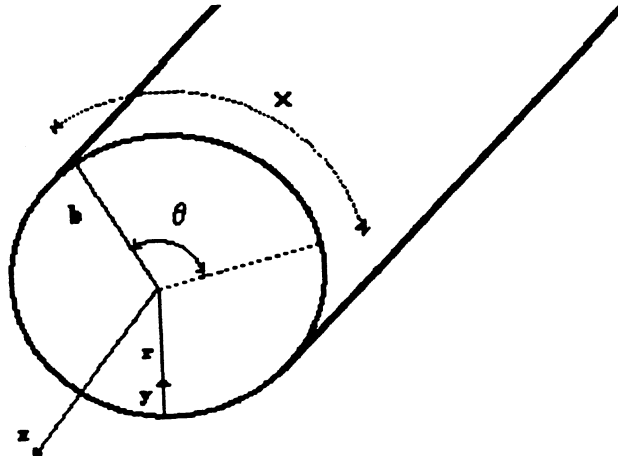


**Figura (2. 2)** – Cilindro periódico envolvido por um limitador de um único anel de corrente.

próxima às paredes do vaso de contenção podemos utilizar a chamada aproximação na borda do Tokamak, que consiste na seguinte relação entre coordenadas polares e retangulares:

$$x = b\theta, \quad y = b - r \quad (|y| \ll b), \quad z = R_0\phi, \quad (II.1)$$

onde  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares de um ponto na secção do cilindro ( $z = \text{constante}$ ).



**Figura (2. 3)** – Coordenadas retangulares na borda do Tokamak.

Desta maneira  $x$  é a medida de um arco ao longo do comprimento menor do cilindro,  $y$  é a distância radial medida a partir das paredes do cilindro e  $z$  é distância ao longo do eixo do mesmo (Fig. 2.3).

A utilização de tal sistema de coordenadas é motivada pelo fato de que a ação do limitador se restringe basicamente à periferia da coluna, e cai de intensidade para regiões próximas ao eixo geométrico do cilindro; e como a região periférica é justamente a região que nos interessa para o estudo do comportamento estocástico podemos usar tal aproximação sem correr o risco de perder maiores informações sobre o sistema. O cálculo do campo gerado pelo limitador, numa região interna ao vaso, muito próxima à borda do Tokamak, fornece as seguintes componentes:

$$B_x(x, y) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} e^{-\frac{m}{b} y} \cos\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (II.2)$$

$$B_y(x, y) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} e^{-\frac{m}{b} y} \text{sen}\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (II.3)$$

$$B_z(x, y) = 0, \quad (II.4)$$

onde,  $m$  é o número de pares de fios,  $I$  é a corrente que circula no anel do limitador e  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2}$ .

Este campo perturbador sobrepor-se-á ao campo toroidal  $\vec{B}_\phi$ , que na aproximação de

grande razão de aspecto fará o papel da componente  $z$ , i.e.,  $\vec{B}_z = B_0 \hat{z}$ .

Na região compreendida pelos anéis o campo poloidal gerado pelo plasma será desconsiderado em virtude da sua pequena intensidade relativa ao campo toroidal. Sendo assim o que temos é um campo perturbativo representado pelas componentes  $B_x$  e  $B_y$  adicionado a um campo de equilíbrio  $\vec{B}_z = B_0 \hat{z}$ ; o resultado será a destruição completa de certas superfícies magnéticas (racionais) e a deformação de outras (irracionais).

## 2.2 OBTENÇÃO DO CAMPO GERADO PELO LIMITADOR MAGNÉTICO.

O limitador, como já foi enfatizado na seção anterior, consiste de um conjunto de  $m$  pares de fios, arranjados em forma de grelha, conduzindo correntes em sentidos alternados. Para calcularmos o campo gerado por tal configuração de fios [Viana e Caldas, 1991] faremos as seguintes considerações \*:

- 1) Que os fios que constituem o anel difusor possuem extensão infinita.
- 2) Que numa região muito próxima à borda do Tokamak temos:

$$\begin{aligned} x &= b\theta, \\ y &= b - r, \quad \text{onde } |y| \ll b \quad \text{e} \\ z &= R_0 \phi. \end{aligned} \tag{II.5}$$

- 3) Que a contribuição dos trechos poloidais dos anéis é desprezível quando comparada à do campo toroidal de equilíbrio.

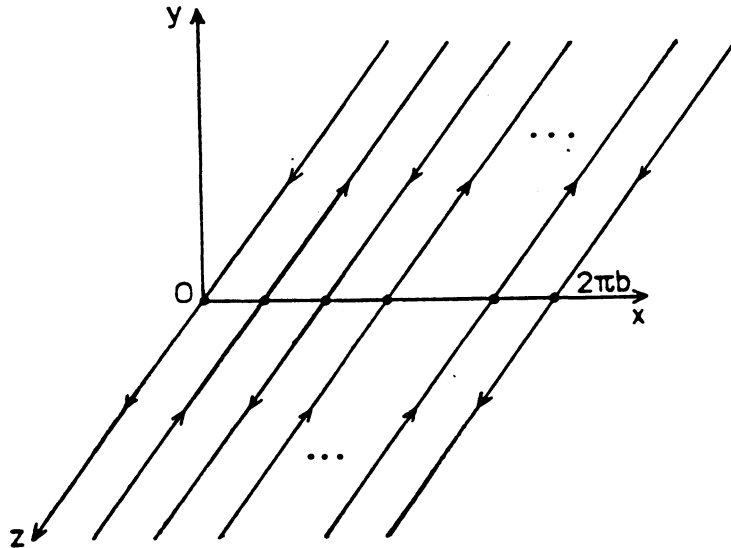
Em virtude desta aproximação, as coordenadas retangulares de um ponto próximo a parede do vaso possuirão os seguintes intervalos de definição :

$$0 \leq x \leq 2\pi b, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq 2\pi R_0.$$

Se levarmos em conta estas três considerações anteriores, o cálculo do campo gerado pelo anel difusor se resume em primeira aproximação ao cálculo do campo gerado por uma

---

\* O sistema de unidades utilizado é o SI.



**Figura (2. 4)** – Geometria para o cálculo do campo magnético numa região muito próxima a borda do vaso.

grelha de corrente sobre o plano  $xy$ , tendo a região  $y > 0$  significando a região interna ao cilindro, e  $y < 0$  a região externa (Fig. 2.4).

Fora da grelha não há outras fontes de corrente de modo que  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ . Portanto o campo magnético pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar magnético,  $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$ , que satisfaz à equação de Laplace bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (II.6)$$

A solução de tal equação pode ser obtida através de separação de variáveis. Uma vez obtida impõe-se que o potencial se anule a medida que nos afastamos da grelha, tanto para regiões internas (i) como externas (e). Desta maneira o potencial magnético para ambas as regiões fica sendo [Jackson, 1989]:

$$\Phi_{i,e}(x, y) = A^{i,e} e^{\mp\gamma y} \text{sen}\gamma x. \quad (II.7)$$

onde as soluções se restringem à região  $|y| \ll b$ . Na direção  $x$  o potencial deve ser unívoco, portanto:

$$\Phi_{i,e}(0, y) = \Phi_{i,e}(2\pi b, y), \quad (II.8)$$

$$\text{sen}(2\pi b\gamma) = 0,$$

onde  $2\pi b\gamma = 0, 2\pi, \dots, 2N\pi$  e  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$  obtemos assim o seguinte valor de  $\gamma$ ;

$$\gamma = \frac{N}{b}. \quad (II.9)$$

Desta forma a solução geral deve ser escrita como uma superposição de harmônicos do tipo:

$$\Phi_{i,e}(x, y) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N^{i,e} e^{\mp Ny/b} \text{sen}\left(\frac{Nx}{b}\right). \quad (II.10)$$

As componentes do campo magnético obtidas por,  $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$  são:

$$B_x^{i,e}(x, y) = - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{b} A_N^{i,e} e^{\mp Ny/b} \cos\left(\frac{Nx}{b}\right), \quad (II.11)$$

$$B_y^{i,e}(x, y) = \pm \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{b} A_N^{i,e} e^{\mp Ny/b} \text{sen}\left(\frac{Nx}{b}\right), \quad (II.12)$$

e como o termo  $N = 0$  não contribui para o campo podemos negligenciá-lo.

O campo obtido deve satisfazer ainda às seguintes condições de contorno:

A) Continuidade da componente normal do campo:

$$(\vec{B}^i - \vec{B}^e) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{em } y = 0,$$

onde  $\hat{n} = \hat{y}$ .

A partir das equações (II.9) e (II.10) obtemos:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \frac{N}{b} A_N^i \text{sen}\left(\frac{Nx}{b}\right) + \frac{N}{b} A_N^e \text{sen}\left(\frac{Nx}{b}\right) \right\} = 0.$$

Se compararmos o  $N$ -ésimo harmônico temos:

$$A_N^i = -A_N^e. \quad (II.13)$$

B) Descontinuidade da componente tangencial:

$$\hat{n} \times (\vec{B}^i - \vec{B}^e) = \mu_0 \vec{j}_s \quad \text{em } y = 0,$$

onde  $\vec{j}_s = j_s \hat{z}$  e  $\hat{n} = \hat{y}$ .

A partir das equações (II.11) e (II.12) obtemos:

$$(-B_x^i + B_x^e) = \mu_0 j_s \quad \text{em } y = 0. \quad (II.14)$$

A densidade de corrente na grelha pode ser simulada por uma soma (sequência) de funções delta na forma:

$$j_s = I \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \delta(x - \frac{\pi b}{m} k), \quad (II.15)$$

onde  $m$  é o número de pares de fios,  $2m$  é o número de fios e  $\frac{\pi b}{m}$  é a separação entre dois fios adjacentes.

Levando-se as equações II.11, II.12, II.15 em II.14 obtemos;

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left\{ -\frac{N}{b} A_N^e \cos\left(\frac{Nx}{b}\right) + \frac{N}{b} A_N^i \cos\left(\frac{Nx}{b}\right) \right\} = \mu_0 I \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \delta\left(x - \frac{\pi b}{m} k\right).$$

A partir de II.13 esta última equação se resume a:

$$\sum_{N=0}^{\infty} 2 \frac{N}{b} A_N^i \cos\left(\frac{Nx}{b}\right) = \mu_0 I \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \delta\left(x - \frac{\pi b}{m} k\right). \quad (II.16)$$

A função delta do segundo membro é expandida em uma série de Fourier em cossenos, fornecendo:

$$\delta\left(x - \frac{\pi b}{m} k\right) = \frac{1}{2\pi b} + \frac{1}{\pi b} \sum_{N=1}^{\infty} \cos N\left(\frac{x}{b} - \frac{\pi k}{m}\right). \quad (II.17)$$

Levando II.17 em II.16 obtemos:

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2 \frac{N}{b} A_N^i \cos\left(\frac{Nx}{b}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \cos N\left(\frac{x}{b} - \frac{\pi k}{m}\right). \quad (II.18)$$

Se compararmos o  $N$ -ésimo harmônico temos:

$$2 \frac{N}{b} A_N^i \cos\left(\frac{Nx}{b}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \cos N\left(\frac{x}{b} - \frac{\pi k}{m}\right), \quad (II.19)$$

onde o somatório do segundo membro é um resultado conhecido [Morozov e Solovev, 1966]

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \cos N\left(\frac{x}{b} - \frac{\pi k}{m}\right) = 2m \cos\left(\frac{Nx}{b}\right) \delta_{N,(2p+1)m}. \quad (II.20)$$

Levando II.20 em II.19 podemos isolar o valor de  $A_N^i$ :

$$A_N^i = \frac{\mu_0 m I}{N \pi} \delta_{N, (2p+1)m} \quad (II.21)$$

e já que o delta de Kronecker só é não nulo para  $N = (2p + 1)m$  então II.21 resulta em:

$$A_{N,p}^i = \frac{\mu_0 I}{(2p + 1)\pi} \quad (II.22)$$

Tendo sido obtido portanto o valor de  $A_N$  correspondente a região interna do Tokamak podemos agora escrever as componentes do campo magnético (eqs. II.11 e II.12) para a mesma região.

$$B_{x,p}^i(x, y) = -\frac{\mu_0 m I}{b \pi} e^{-\frac{(2p+1)m}{b} y} \cos\left[\frac{(2p+1)m x}{b}\right],$$

$$B_{y,p}^i(x, y) = \frac{\mu_0 m I}{b \pi} e^{-\frac{(2p+1)m}{b} y} \text{sen}\left[\frac{(2p+1)m x}{b}\right].$$

Devido ao decréscimo exponencial dos campos, vemos que os mesmos só tem valor significativo numa região muito próxima a borda, deste modo só iremos tomar o modo  $p = 0$ , assim obtemos finalmente as componentes do campo magnético gerado pelo limitador na região interna próxima as paredes do vaso de contenção, i.e.,

$$B_x^i(x, y) = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} e^{-\frac{m}{b} y} \cos\left(\frac{m x}{b}\right), \quad (II.23)$$

$$B_y^i(x, y) = \frac{\mu_0 m I}{\pi b} e^{-\frac{m}{b} y} \text{sen}\left(\frac{m x}{b}\right). \quad (II.24)$$

### 2.3 UMA HAMILTONIANA PARA O MODELO DE MARTIN E TAYLOR.

Tendo obtido o campo gerado pelo limitador, podemos agora nos ater à determinação de uma Hamiltoniana que nos fornecerá todas as informações necessárias à descrição das linhas de campo na região sujeita a ação do limitador. Inicialmente iremos determinar uma Hamiltoniana que descreve o sistema na ausência da perturbação, a qual denominaremos de Hamiltoniana de equilíbrio ( $H_0$ ). Em seguida determinaremos uma outra Hamiltoniana, a qual personificará a ação do limitador, esta Hamiltoniana nós denominaremos de Hamiltoniana perturbadora ( $H_1$ ).

### 2.3.a HAMILTONIANA PARA O EQUILÍBRIO .

Como já foi comentado na seção (1.1), nós consideramos, por simplicidade, um Tokamak de grande razão de aspecto. Em vista disto o mesmo é aproximado para um cilindro periódico, como é exibido na Fig.1.4. Nesta geometria é conveniente escrever a equação  $\vec{B}^{(0)} \times d\vec{l} = 0$  † em coordenadas cilíndricas [Viana,1991]:

$$\frac{dr}{B_r^{(0)}} = \frac{r d\theta}{B_\theta^{(0)}} = \frac{dz}{B_z^{(0)}}. \quad (II.25)$$

No equilíbrio cilíndrico, o perfil do campo magnético é dado por:

$$B_r^{(0)} = 0, \quad B_\theta^{(0)} = B_\theta^{(0)}(r), \quad B_z^{(0)} = B_0 = \text{const.},$$

onde imediatamente reconhecemos  $B_\theta^{(0)}$  e  $B_z^{(0)}$  como os campos poloidal e toroidal de equilíbrio respectivamente. Nós não consideramos correções toroidais nos campos  $B_\theta$  e  $B_\phi$ .

O campo poloidal na região externa a uma coluna cilíndrica de plasma, de raio  $a$  ( $a < b$ ) pode ser obtido pela lei circuital de Ampère, de forma que o perfil de equilíbrio se resume a:

$$\begin{aligned} B_r^{(0)} &= 0, \\ B_\theta^{(0)}(r) &= \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r}, \\ B_z^{(0)} &= B_0. \end{aligned} \quad (II.26)$$

onde  $I_p$  é a corrente total de plasma.

A equação (II.25) fornece o seguinte conjunto de equações :

$$\frac{dr}{dz} = 0 \quad (II.27)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi B_0 r^2}. \quad (II.28)$$

Se admitirmos que estamos numa região muito próxima à borda do Tokamak ( $|y| \ll b$ ) podemos usar a aproximação (seção 2.2)

---

†  $\vec{B}^{(0)}$  é o campo de equilíbrio.

$$x = b\theta, \quad y = b - r, \quad z = R_0\phi. \quad (II.29)$$

Deste modo as equações (II.27) e (II.28) podem ser reescritas em um sistema de coordenadas retangulares:

$$\frac{dy}{dz} = 0 \quad (II.30)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\mu_0 I_p b}{2\pi B_0 (b - y)^2}. \quad (II.31)$$

Se escolhermos  $y$  e  $x$  como momento e coordenada, respectivamente, e ademais se admitirmos a existência de uma Hamiltoniana  $H_0(x, y)$  para o sistema, podemos reescrever as equações (II.30) e (II.31), como:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad (II.32)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H_0}{\partial y}, \quad (II.33)$$

que é próprio conjunto de equações de Hamilton proposto na seção (1.4).

A equação (II.30) afirma que  $H_0$  é função unicamente do momento  $y$ , desta maneira (II.33) pode ser reescrita como:

$$\frac{dH_0}{dy} = \frac{\mu_0 I_p b}{2\pi B_0 (b - y)^2}. \quad (II.34)$$

A integração desta última equação é trivial, e o resultado é

$$H_0(y) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi B_0} \frac{y}{(b - y)}. \quad (II.35)$$

Como na região próxima a borda  $|y| \ll b$ , podemos ainda efetuar uma expansão em (II.35), o que resulta em:

$$H_0(y) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi B_0 b} y + \frac{\mu_0 I_p}{2\pi B_0 b^2} y^2. \quad (II.36)$$

A Hamiltoniana  $H_0(y)$  pode ainda ser escrita em termos de dois parâmetros, a serem determinados:

$$H_0(y) = \frac{1}{2\pi R_0} \left( \alpha y + \frac{\beta}{2} y^2 \right). \quad (II.37)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são definidos como:

$$\alpha = \frac{\mu_0 I_p R_0}{B_0 b} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2\mu_0 I_p R_0}{B_0 b^2}. \quad (II.38)$$

Antes de passarmos à determinação da Hamiltoniana perturbadora, devemos ainda mencionar duas grandezas relacionadas, associadas às linhas de campo no interior de um Tokamak; a transformada rotacional  $\iota$ , e o fator de segurança  $q$ . Quando uma linha de campo efetua uma volta toroidal, a mesma linha sofre um deslocamento poloidal ('twist' da linha de campo), isso nos permite definir a transformada rotacional  $\iota$  como o deslocamento poloidal varrido pela linha de campo ao cabo de uma volta toroidal completa. Ou seja se  $\Delta\theta = \iota$  então  $\Delta\phi = 2\pi$ . Em vista disto podemos dizer que,  $\frac{\Delta\theta}{\Delta\phi} = \frac{\iota}{2\pi}$  é uma medida da 'taxa de twist' para uma determinada linha de campo. No limite  $\Delta\theta \rightarrow d\theta$  e  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$  podemos reescrever a mesma equação como:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\iota}{2\pi}. \quad (II.39)$$

sendo esta a que define a transformada rotacional.

O fator de segurança é definido como:

$$q = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2\pi}{\iota}. \quad (II.40)$$

Uma vez que  $z = R_0\phi$ , o mesmo pode ser escrito, mediante o uso de (II.28), como \*

$$q(r) = \frac{1}{R_0} \frac{dz}{d\theta} = q(b) \left( \frac{r}{b} \right)^2. \quad (II.41)$$

Definido esta última grandeza, nós podemos exprimir os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  em termos de  $q(r)$ ;

$$\alpha = \frac{2\pi b}{q(b)}, \quad (II.42)$$

$$\beta = \frac{4\pi}{q(b)}. \quad (II.43)$$

---

\* A igualdade (II.41) resulta de verificações feitas a partir de modelos para a densidade de corrente no modelo cilíndrico (Viana, 1991).

### 2.3.b HAMILTONIANA PERTURBADORA.

Na região do limitador o campo magnético provém de duas contribuições , uma do campo de equilíbrio  $\vec{B}^{(0)}$  e outra do próprio campo do limitador  $B^{(1)}$ , cujas componentes na região interna ao Tokamak são dadas por:

$$B_x^{(1)} = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b} e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (II.44)$$

$$B_y^{(1)} = \frac{\mu_0 m I}{\pi b} e^{-\frac{my}{b}} \sin\left(\frac{mx}{b}\right). \quad (II.45)$$

Uma vez que o campo total deve ser dado por,

$$\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(1)} \quad (II.46)$$

é razoável esperar que a Hamiltoniana total seja dada por:

$$H = H_0 + H_1 \quad (II.47)$$

onde  $H_1$  representa a Hamiltoniana perturbadora.

Na região do limitador, junto a borda do Tokamak, a equação  $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$  fornece o conjunto

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}, \quad (II.48)$$

sendo que ao definirmos a Hamiltoniana  $H$  (II.47), este conjunto de equações pode ser reescrito como:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (II.49)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z} = \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (II.50)$$

Quando consideramos as equações (II.46) e (II.47), o conjunto das equações anteriores pode ser reescrito como:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_y^{(0)} + B_y^{(1)}}{B_z^{(0)} + B_z^{(1)}} = -\frac{\partial}{\partial x}(H_0 + H_1), \quad (II.51)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x^{(0)} + B_x^{(1)}}{B_z^{(0)} + B_z^{(1)}} = \frac{\partial}{\partial y}(H_0 + H_1). \quad (II.52)$$

Como o campo do limitador não possui componente na direção  $z$ , a quantidade  $B_z^{(1)}$  é nula.

Isso nos permite escrever:

$$\frac{B_y^{(0)}}{B_z^{(0)}} + \frac{B_y^{(1)}}{B_z^{(0)}} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x}, \quad (II.53)$$

$$\frac{B_x^{(0)}}{B_z^{(0)}} + \frac{B_x^{(1)}}{B_z^{(0)}} = \frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial y}. \quad (II.54)$$

Vimos que o campo de equilíbrio era dado por:

$$B_r^{(0)} \longrightarrow B_y^{(0)} = 0, \quad (II.55)$$

$$B_\theta^{(0)} \longrightarrow B_x^{(0)} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi(b-y)}, \quad (II.56)$$

$$B_z^{(0)} \longrightarrow B_0 = \text{const.} \quad (II.57)$$

Uma vez que  $B_y^{(0)} = 0$  e  $B_z^{(0)} = B_0$ , as equações (II.53) e (II.54) se resumem a:

$$\frac{B_y^{(1)}}{B_0} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x}, \quad (II.58)$$

$$\frac{B_x^{(0)}}{B_0} + \frac{B_x^{(1)}}{B_0} = \frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial y}. \quad (II.59)$$

Como  $H_0$  é função só do momento  $y$  e como  $B_x^{(0)}/B_0$  deve necessariamente ser igual a  $\partial H_0/\partial y$  obtemos:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = -\frac{B_y^{(1)}}{B_0} = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} e^{-\frac{my}{b}} \sin\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (II.60)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{B_x^{(1)}}{B_0} = -\frac{\mu_0 m I}{\pi b B_0} e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right). \quad (II.61)$$

A integração do sistema de equações anterior é imediata, e fornece a seguinte Hamiltoniana perturbadora

$$H_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{\pi B_0} e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right). \quad (II.62)$$

A Hamiltoniana (II.62) representa um sistema com um grau de liberdade e autônomo, ou seja, não depende da coordenada 'temporal'  $z$ . Portanto, de acordo com a mecânica clássica (II.62) ainda é um sistema integrável. Tal afirmação parece um pouco estranha, pois

sabemos, de fato e na prática, que a perturbação gerada pelo limitador é responsável pela quebra de integrabilidade. Como resolver então este aparente paradoxo?

O fato é que no cálculo do campo gerado pelo limitador (seção 2.2) nós omitimos a extensão finita dos fios que constituíam o anel do limitador. Esta omissão contribuiu para simular uma dada simetria na coordenada  $z$ ; daí a obtenção da Hamiltoniana integrável (II.62).

Uma maneira de incorporar a extensão finita dos fios do limitador ao longo da coordenada  $z$  é feita escrevendo-se a Hamiltoniana (II.62) como:

$$H_1(x, y, z) = H_1(x, y) \mathcal{F}\left(\frac{z}{2\pi R_0}\right). \quad (II.63)$$

onde  $\mathcal{F}$  é uma função periódica (de período 1). Com este procedimento a ação do limitador, personificada por  $H_1$ , assume um caráter periódico.

Uma função candidata † a ocupar o lugar de  $\mathcal{F}$  é a função delta de Dirac,  $\delta\left(\frac{z}{2\pi R_0}\right)$ , a qual expressa em uma série de Fourier fornece:

$$\delta\left(\frac{z}{2\pi R_0}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nz}{R_0}\right). \quad (II.64)$$

Com esta escolha a Hamiltoniana (II.63) se torna:

$$H_1(x, y, z) = \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nz}{R_0}\right) \right], \quad (II.65)$$

onde  $\Gamma = \frac{\mu_0 I}{\pi B_0}$ .

Obtemos finalmente a chamada Hamiltoniana para o modelo de Martin e Taylor:

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi R_0} (\alpha y + \frac{\beta}{2} y^2) + \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nz}{R_0}\right) \right]. \quad (II.66)$$

---

† Outras funções poderiam também ser empregadas, como a usada em (Pereira, 1994), que é uma onda quadrada.

## TERCEIRO CAPÍTULO

### CONCEITOS DA TEORIA DOS SISTEMAS HAMILTONIANOS.

#### INTRODUÇÃO .

No capítulo 1 mostramos que a análise das linhas de campo no interior de um Tokamak seria equivalente à análise de trajetórias no espaço de fase para um sistema caracterizado por uma certa Hamiltoniana clássica. Tal interconexão de interpretações foi feita mediante uma similaridade entre equações canônicas e a equação de linhas de campo (secção 1.4), sendo que obtivemos até mesmo uma Hamiltoniana para um sistema que tinha como particularidade uma simetria em relação a uma das coordenadas. Na seção 2.3 obtivemos também duas Hamiltonianas: uma delas designada de Hamiltoniana de equilíbrio ( $H_0$ ), e outra designada de Hamiltoniana perturbadora ( $H_1$ ), e agora devemos nos questionar: qual o significado de  $H_0$  e  $H_1$ ? Tentaremos responder esta pergunta ao longo deste capítulo, o qual consiste de uma revisão um tanto breve, dos principais conceitos e resultados da teoria dos Sistemas Hamiltonianos Quase-Integráveis. Uma abordagem mais profunda de tal assunto pode ser encontrada em [Lichtenberg e Lieberman, 1983].

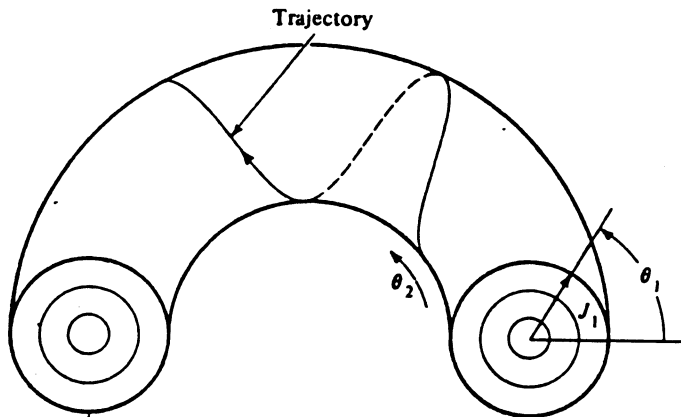
#### 3.1 SISTEMAS INTEGRÁVEIS.

Vamos considerar um sistema Hamiltoniano com 2 graus de liberdade ( $N = 2$ ) autônomo (sem dependência temporal);

$$\mathcal{H}(p_1, q_1, p_2, q_2) = E, \quad (III.1)$$

onde  $E$  é uma constante.

O espaço de fase para tal sistema será 4-dimensional sendo que as trajetórias de fase estão restritas a se mover sobre uma "superfície" de energia 3-dimensional.



**Figura (3. 1)** – Toro no espaço de fase  $(J_1, J_2, \Theta_1, \Theta_2)$

Se existir uma função geratriz  $F(q_1, q_2, J_1, J_2)$  que nos permita escrever (III.1) numa forma que seja cíclica nas coordenadas canonicamente conjugadas a  $J_1$  e  $J_2$ , ou seja;

$$H(J_1, J_2) = E, \tag{III.2}$$

o sistema será dito integrável. Neste caso, as variáveis canonicamente conjugadas a  $J_1$  e  $J_2$  serão escritas como  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , respectivamente.

O conjunto de coordenadas  $(J_1, J_2, \Theta_1, \Theta_2)$  é dito de coordenadas de ação e ângulo do sistema e sua utilização torna a representação do mesmo particularmente mais simples. Nesta representação as trajetórias de fase serão periódicas nas variáveis de ângulo  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ . Sendo assim é conveniente afirmar que as trajetórias de fase repousam sobre uma superfície bidimensional com a forma topológica de um toro. Dentro deste aspecto, o espaço de fase constitui-se de um conjunto infinito de toros coaxiais (Fig. 3.1), onde escolhemos  $J_1$  como o raio menor do toro e  $\Theta_1$  como o ângulo medido ao longo do comprimento menor,  $\Theta_2$  é o ângulo medido ao longo do comprimento maior.

### 3.2 SUPERFÍCIE DE SECÇÃO PARA SISTEMAS INTEGRÁVEIS.

Vamos agora considerar um plano  $\Theta_2 = \text{const.}$  (plano  $J_1 - \Theta_1$ ) no espaço de fase  $(J_1, J_2, \Theta_1, \Theta_2)$ . Tal plano é chamado de superfície de secção de Poincaré (ou simplesmente

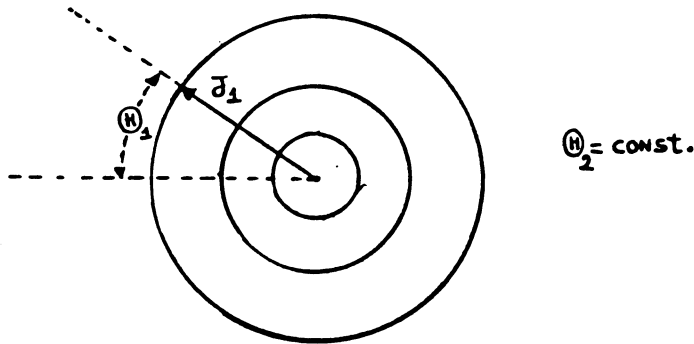


Figura (3. 2) – Superfície de secção  $\Theta_2 = const.$

superfície de secção ) (Fig. 3.2) e a intersecção das trajetórias de fase com a mesma fornece o mapa de Poincaré.

O mapa constitui-se basicamente de uma relação recursiva entre coordenadas de pontos. Por exemplo; uma trajetória que parte de um ponto inicial  $P_0(J_n, \Theta_n)$  sobre a superfície de secção gerará um novo ponto  $P_1(J_{n+1}, \Theta_{n+1})$  sobre a mesma após uma revolução completa sobre o toro. Tal transformação define o mapa de Poincaré  $T$ , i.e,  $P_1 = T(P_0)$ . No caso de um sistema integrável, se o processo de iteração é feito repetidas vezes o mapa resultante será uma curva regular, cuja forma geométrica é uma circunferência. De fato esta é a própria intersecção do toro com a superfície de secção . Ainda no âmbito de sistemas integráveis, escritos em termos das variáveis de ação e ângulo, o referido mapa é usualmente conhecido como "mapa do twist" cuja fórmula simples é dada por:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n \\ \Theta_{n+1} &= \Theta_n + 2\pi\eta, \end{aligned} \tag{III.3}$$

sendo que uma rápida análise da mesma nos permite concluir que em cada iteração do mesmo a posição radial  $J_n$  é reobtida, porém com um deslocamento angular de  $2\pi\eta$  na variável  $\Theta_1$ .

O parâmetro  $\eta$ , que aparece em (III.3) é chamado de número de rotação ("winding

number”), que corresponde à razão entre as frequências ao longo de  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , ou seja:

$$\eta(J_1, J_2) = \frac{\omega_1(J_1, J_2)}{\omega_2(J_1, J_2)} \quad (III.4)$$

onde  $\omega_i = \dot{\Theta}_i = \partial H / \partial J_i$

O número de rotação pode assumir valores tanto racionais quanto irracionais, sendo ele portanto um elemento caracterizador de cada toro; quando  $\eta$  for racional ( $\eta = \frac{n}{m}$ ,  $n$  e  $m$  inteiros primos entre si) nós dizemos ser o toro racional, e irracional caso contrário.

Na verdade os toros racionais e irracionais já eram de nosso conhecimento, pois estes são análogos às superfícies magnéticas racionais e irracionais vistas no equilíbrio MHD (seção 1.3). Desta maneira podemos encarar a Fig. 1.6 como a superfície de secção ( $\Theta_2 = \text{const.}$ ) para um toro racional com número de rotação  $\eta = \frac{n}{m} = \frac{1}{4}$  e da mesma maneira a Fig. 1.7 como a superfície de secção para um toro irracional, i.e,  $\eta$  irracional. Em Tokamaks o número de rotação está ligado à chamada transformada rotacional,  $\iota$ , ou seja;

$$\eta = \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\iota}{2\pi} = \frac{1}{q}. \quad (III.5)$$

onde  $\theta$  e  $\phi$  representam os ângulos poloidal e toroidal, respectivamente.

### 3.3 SISTEMAS QUASE-INTEGRÁVEIS.

Vamos agora admitir que sobre o sistema integrável descrito pela Hamiltoniana  $H_0(J_1, J_2)$  dada por (III.2) passa a atuar uma perturbação não-integrável periódica personificada por um termo  $H_1(J_1, J_2, \Theta_1, \Theta_2)$  aditivo a  $H_0$ . Desta maneira a Hamiltoniana total para o sistema será dada por:

$$H(J_1, J_2, \Theta_1, \Theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \Theta_1, \Theta_2), \quad (III.6)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro de ordem, e que regula a intensidade da perturbação .

Tal Hamiltoniana representa um sistema não-integrável com 2 graus de liberdade autônomo. Se  $\epsilon$  for pequeno dizemos usualmente que o sistema é quase-integrável e a superfície

de secção para (III.6) vai exibir uma dinâmica que depende essencialmente da intensidade da perturbação . De fato, assim como a parte integrável é caracterizada pelo mapa do twist (III.3), é razoável esperar para um sistema quase integrável uma perturbação correspondente no mapa twist, ou seja:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \Theta_n) \\ \Theta_{n+1} &= \Theta_n + 2\pi\eta(J_{n+1}) + \epsilon g(J_{n+1}, \Theta_n), \end{aligned} \tag{III.7}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções periódicas em  $\Theta$ .

Devemos enfatizar que a complexa dinâmica de um sistema Hamiltoniano pode ser descrita inteiramente via mapa de Poincaré. Além disso, o uso do mesmo torna claro também a ilustração dos teoremas KAM e de Poincaré- Birkhoff, teoremas que descrevem o comportamento dos toros irracionais e racionais sujeitos a uma perturbação . Entretanto colocaremos o mapa de lado e iremos nos ater a descrição de um sistema Hamiltoniano mediante a análise da Hamiltoniana Padrão, também conhecida como Hamiltoniana Paradigma; devido ao fato de usarmos posteriormente este modelo na descrição dos efeitos do Limitador Magnético Ergódico.

### 3.4 A HAMILTONIANA PARADIGMA.

Os sistemas quase-integráveis com  $N=1$  grau de liberdade sujeitos a uma perturbação periódica dependente do tempo (autônomo);

$$H(J, \Theta, t) = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \Theta, t), \tag{III.8}$$

também são de interesse, entre eles o sistema definido pela Hamiltoniana Paradigma, cuja análise é a principal motivação do presente trabalho;

$$H_p(J, \Theta, t) = \frac{1}{2} J^2 - M \cos \Theta - P \cos k(\Theta - t) \tag{III.9}$$

O fato de tal Hamiltoniana ser dependente do tempo não implica ser impossível um tratamento analítico da mesma pelos métodos válidos para sistemas autônomos. Na verdade, é

possível mediante um procedimento alternativo, considerar o tempo como uma coordenada adicional do espaço de fase (espaço de fase estendido) de tal forma que o sistema descrito por (III.9), seja dinamicamente equivalente a um sistema com 2 graus de liberdade e autônomo. Os detalhes de tal procedimento estão contidos no apêndice A.

A Hamiltoniana Paradigma possui este nome em virtude do fato de que muitos sistemas Hamiltonianos com  $N = 2$  graus de liberdade podem ser reduzidos a um sistema paradigma, descrito pela Hamiltoniana (III.9). Portanto se conhecermos a dinâmica exibida por  $H_p$ , conseqüentemente conheceremos a dinâmica exibida pelo sistema em estudo. Devemos enfatizar que  $H_p$  pode também ser obtida a partir da Hamiltoniana de uma partícula de massa  $m$  e carga elétrica  $e$ , interagindo com duas ondas eletrostáticas longitudinais de frequências  $\omega_1(\omega_2)$  e números de onda  $k_1(k_2)$  respectivamente:

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2m}p^2 - eV_1 \cos(k_1q - \omega_1t) - eV_2 \cos(k_2q - \omega_2t), \quad (III.10)$$

os detalhes da obtenção de  $H_p$  a partir de (III.10) podem ser encontrados em [Lichtenberg e Lieberman, 1983].

A Hamiltoniana Paradigma pode, em casos limites, descrever quatro sistemas distintos.

I) Quando  $M = P = 0$ , (III.9) se reduz à Hamiltoniana de uma partícula livre:

$$H_p = \frac{1}{2}J^2, \quad (III.11)$$

cujas equações de movimento integradas fornecem:  $\Theta(t) = tJ + \Theta_0$  onde  $\Theta_0$  e  $J$  são constantes. Se considerarmos o tempo como uma nova coordenada acrescentada ao plano  $J \times \Theta$ , podemos usar o chamado mapa estroboscópico, que consiste em uma superfície de secção feita a instantes  $t = 0, T, 2T, \dots, nT$  onde  $T = 2\pi/k$  (Fig. 3.3).

Quando projetarmos os pontos do mapeamento estroboscópico sobre o plano  $t = 0$ , veremos que as trajetórias de fase neste plano serão linhas densamente preenchidas, no caso de  $J$  ser irracional, ou um conjunto finito de pontos, no caso de  $J$  ser racional (Fig. 3.4). Na verdade estas linhas e estes conjuntos de pontos são as intersecções dos toros irracionais e racionais com o plano  $J \times \Theta$  respectivamente. Estes toros nós chamaremos de agora em

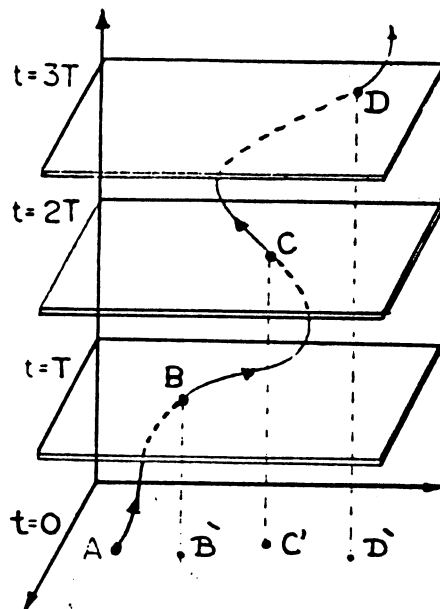


Figura (3. 3) – Mapeamento estroboscópico.

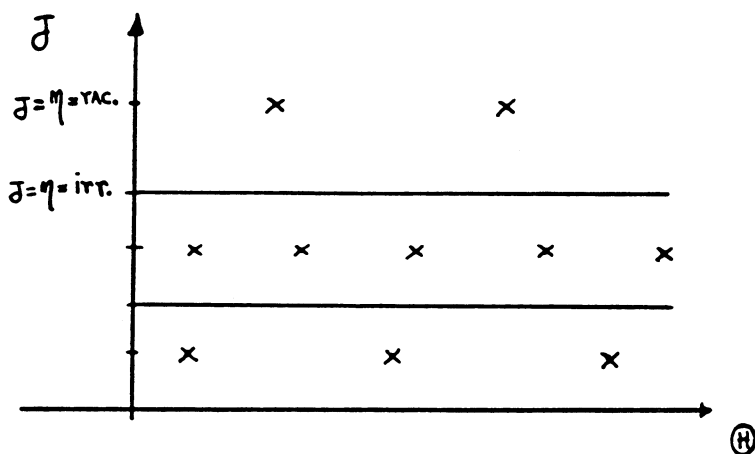


Figura (3. 4) – Projeção no plano  $J \times \Theta$ .

diante de toros KAM \*, sendo estes definidos pelo número de rotação (A.19):

$$\eta = J. \tag{III.12}$$

II) Quando  $P = 0$  e  $M \neq 0$ ,  $H_p$  se reduz a um sistema integrável bastante conhecido, o

\* Devido ao teorema correspondente, por Kolmogorov, Moser e Arnold.

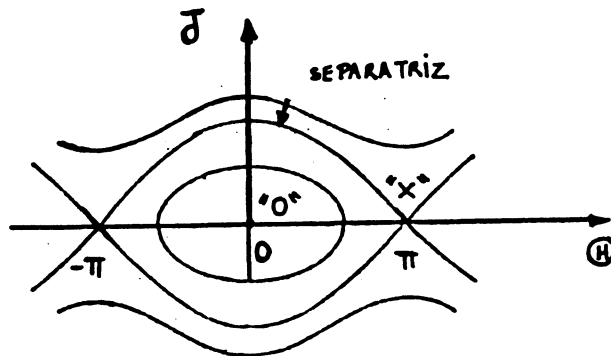


Figura (3. 5) – Ilha no plano  $J \times \Theta$ .

pêndulo:

$$H_p = \frac{1}{2}J^2 - M \cos \Theta. \tag{III.13}$$

Neste caso particular quando projetarmos os pontos resultantes do mapeamento estroboscópico sobre o plano  $J \times \Theta$  ( $t = 0$ ), a figura resultante será um conjunto de curvas definidas como curvas de libração e rotação, as quais estão separadas por uma terceira curva, a separatriz.

A estrutura que compreende estas três curvas é conhecida na linguagem dos sistemas Hamiltonianos como "ilha" ou "ressonância" (Fig. 3.5).

Indo mais adiante na análise do mapeamento estroboscópico para (III.13) nós percebemos a existência de um conjunto de pontos que ao serem projetados no plano  $J \times \Theta$  possuem sempre a mesma posição  $(J^*, \Theta^*)$ , estes são conhecidos como pontos fixos do mapeamento estroboscópico, e são definidos por:

$$\left. \frac{dJ}{dt} \right|_{(J^*, \Theta^*)} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\Theta}{dt} \right|_{(J^*, \Theta^*)} = 0. \tag{III.14}$$

No caso da ilha representada na Fig.(3.5), os pontos fixos estão indicados pelos pontos "O" (ponto elíptico) situado em  $(J^*, \Theta^*) = (0, 0)$  e "X" (ponto hiperbólico) situado em

$(J^*, \Theta^*) = (0, \pi)$ . Como estes pontos se repetem a cada intervalo  $T$  eles também são conhecidos como pontos fixos de período 1, e a ilha a eles associada é definida mais precisamente como ilha primária. Em seções posteriores faremos referências a ilhas secundárias associadas a pontos fixos de período 2, ou seja, pontos que se repetem a cada intervalo  $2T$ , e assim por diante.

Considerando que a Hamiltoniana (III.13) é autônoma, então a mesma deve ser uma constante sobre a separatriz da ilha representada na Fig.3.5. Portanto,

$$H_p(J = 0, \Theta = \pi) = H_p(J = \Delta J_M, \Theta = 0) = \text{const.},$$

onde a quantidade  $\Delta J_M$  é definida como a semi-largura de uma ilha, a qual, no caso particular da Fig. 3.5, está centrada no ponto  $(J^*, \Theta^*) = (0, 0)$ .

O resultado da última equação é imediato, e fornece a semi-largura, dada por:

$$\Delta J_M = 2\sqrt{M} \tag{III.15}$$

III) Quando  $M = 0$  e  $P \neq 0$ ,  $H_p$  se reduz a:

$$H_p = \frac{1}{2}J^2 - P \cos k(\Theta - t), \tag{III.16}$$

o que representa ainda um sistema integrável, porém com  $N = 1$  grau de liberdade não autônomo. Na verdade é possível mediante uma transformação canônica analisar o sistema (III.16) num novo conjunto de coordenadas  $(\hat{J}, \hat{\Theta})$ . Neste novo sistema pode-se calcular a posição  $(\hat{J}^*, \hat{\Theta}^*)$  dos pontos fixos mediante as definições dadas por (III.14). Feito isto conclui-se, quando se retorna ao conjunto original de coordenadas, que a Hamiltoniana (III.16) descreve um pêndulo cujo domínio das órbitas de libração e rotação está deslocado; o ponto elíptico agora se situa em  $(J^*, \Theta^*) = (1, 0)$  e o hiperbólico em  $(J^*, \Theta^*) = (1, \pi)$  (Fig. 3.6), sendo que a semi-largura da ilha é dada por:

$$\Delta J_P = 2\sqrt{P}. \tag{III.17}$$

Os procedimentos para se chegar às conclusões anteriormente citadas estão em detalhes no Apêndice B.

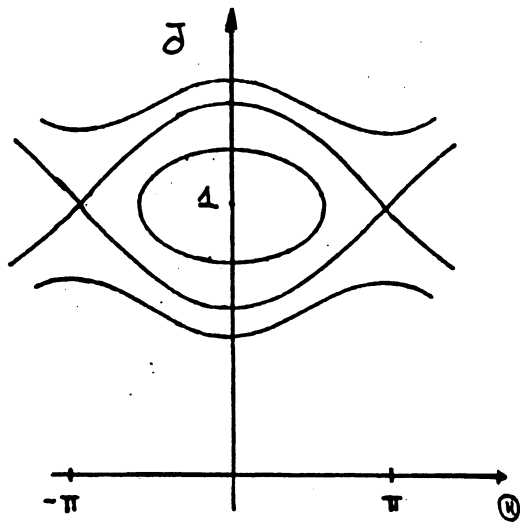


Figura (3. 6) – Ilha primária deslocada.

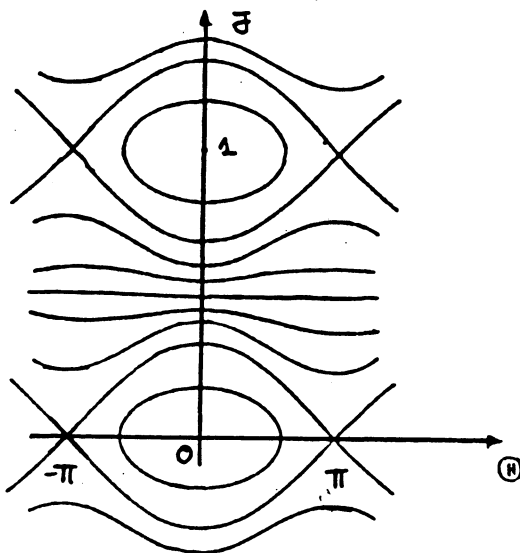


Figura (3. 7) – Plano  $J \times \Theta$  para  $M$  e  $P$  não nulos, e suficientemente pequenos.

IV) Quando  $M \neq 0$  e  $P \neq 0$  o sistema deixa de ser integrável, neste caso é intuitivo afirmar que se as amplitudes  $M$  e  $P$  forem muito pequenas, o mapa no plano  $J \times \Theta$  irá aparentar algo semelhante a uma superposição das figuras (3.4), (3.5) e (3.6), ou seja, ilhas centradas em  $J = 0$  e  $J = 1$  e entre elas, espera-se existir ainda um certo número de Toros KAM (Fig. 3.7).

### 3.5 OS TEOREMAS KAM E DE POINCARÉ-BIRKHOFF.

Já é de nosso conhecimento, que para um sistema integrável, como é o caso em que  $M = P = 0$ , ou seja:

$$H_p = \frac{1}{2} J^2, \quad (III.18)$$

o plano  $J \times \Theta$  retratará traços dos Toros KAM, tanto racionais como irracionais, os quais se afiguram como um conjunto finito de pontos no primeiro caso, ou linhas densamente preenchidas no segundo caso. Chegamos agora ao momento de fazermos uma indagação : como se comportarão os Toros KAM quando estabelecermos uma perturbação não integrável sobre o sistema? Ou seja, como se retratará o espaço de fase quando adicionarmos,

$$\epsilon H_1(\Theta, t) = -M \cos \Theta - P \cos k(\Theta - t) \quad (III.19)$$

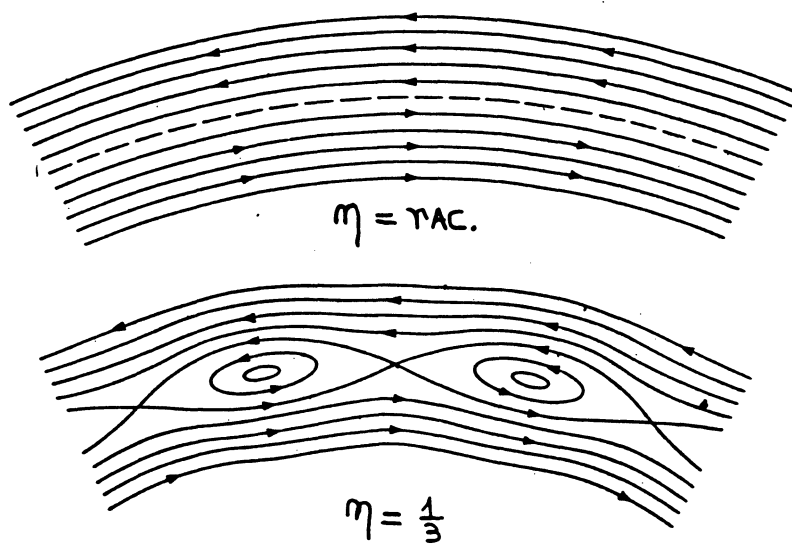
a  $H_0(J)$ ?

Na realidade a resposta a esta indagação dependerá do tipo de Toro a ser considerado: no caso de Toros racionais a resposta é dada pelo teorema de Poincaré-Birkhoff [Krlín, 1989], se forem irracionais, ai então a resposta cabe ao teorema KAM [Krlín, 1989].

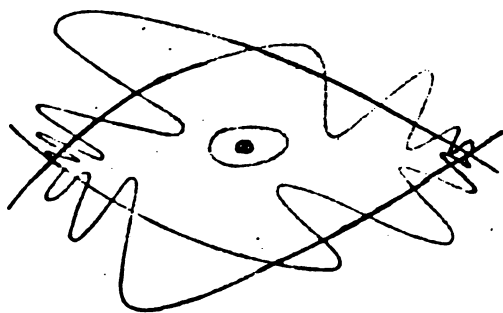
I) As curvas racionais e o teorema de Poincaré-Birkhoff.

Tal teorema afirma que mediante uma perturbação fraca ( $\epsilon \ll 1$ ), todas as curvas racionais,  $\eta = \frac{n}{m}$  desaparecem, deixando em seu lugar  $2m$  pontos fixos, dos quais  $m$  são elípticos e  $m$  hiperbólicos, dispostos de maneira alternada (Fig. 3.8).

É em torno deste conjunto de  $2m$  pontos fixos, que se desenvolvem as estruturas do tipo ilha. Na realidade, os pontos elípticos representam os centros das ilhas, ao passo que os hiperbólicos as separam, sendo que a separatriz de uma ilha surge das curvas emergentes de pontos hiperbólicos vizinhos, como no caso de um sistema integrável como é o pêndulo. No entanto, esta afirmação não é rigorosamente verdadeira para um sistema não-integrável, mas numa primeira aproximação ela é válida quando tratamos da delimitação da extensão de uma ilha no espaço de fase. O fato é que para um sistema sujeito a uma perturbação as



**Figura (3. 8)** – (a) Toros para  $\epsilon = 0$  (b) comportamento dos mesmos para  $\epsilon \neq 0$ .



**Figura (3. 9)** – *Figura homoclínica.*

trajetórias que emanam de pontos hiperbólicos vizinhos interceptam-se um número infinito de vezes, sendo tais pontos de intersecção ditos "homoclínicos" (Fig. 3.9).

Pode-se mostrar que a área compreendida entre dois cruzamentos homoclínicos sucessivos deve ser igual [Berry, 1978]. Como o número destes pontos homoclínicos é infinito, eles se acumulam à medida em que o ponto hiperbólico se aproxima, as trajetórias têm de execu-

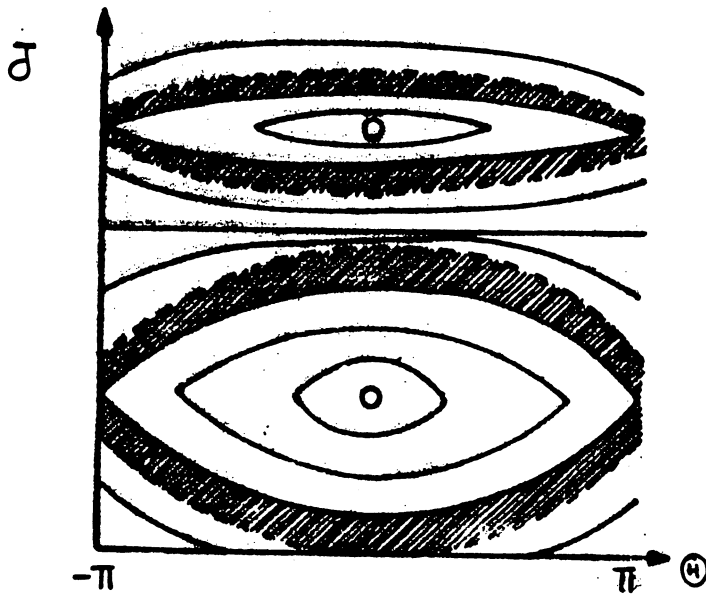


Figura (3. 10) – Camada estocástica.

tar complicados volteios e dobras para poder satisfazer esta condição . A figura homoclínica resultante é pois bastante complexa, e a dinâmica se torna estocástica no seu sentido mais preciso. Do ponto de vista prático, é conveniente pensar que nas vizinhanças da separatriz de uma ilha, existe uma fina camada de pontos, caracterizada por um comportamento estocástico (Fig. 3.10).

II) As superfícies irracionais e o teorema KAM.

Sob certas condições a serem explicadas na sequência, o teorema KAM afirma que as superfícies irracionais, diferentemente das racionais, sobrevivem à perturbação , desde que esta seja fraca o suficiente, sofrendo no máximo deformações estruturais (mas sem alterações em sua topologia). Tal fato justifica a designação de "toros invariantes" para as superfícies irracionais.

A primeira condição exige que as frequências do toro não perturbado  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sejam linearmente independentes, ou de outra maneira,

$$m\omega_1(J) + n\omega_2(J) \neq 0, \tag{III.20}$$

onde supusemos  $N = 2$  graus de liberdade, que é o caso do qual tratamos, sendo que  $m$  e  $n$  são inteiros primos entre si.

A segunda exigência para a aplicação do teorema KAM é uma condição de suavidade para a perturbação - o que significa a existência de um número  $M$  suficiente de derivadas contínuas de  $H_1$ . Entretanto, Moser provou que  $M \geq 4$  é suficiente para a existência dos toros invariantes [Lichtenberg e Lieberman, 1983]

A terceira condição diz respeito ao caráter do número de rotação exibido pelos toros invariantes, que deve ser um irracional. No entanto, um fato conhecido (de simulações numéricas), é o de que alguns toros mesmos irracionais, acabam sendo destruídos à medida em que aumenta a intensidade da perturbação . Pergunta-se: serão todos destruídos ao mesmo tempo, ou haverá uma hierarquia para isto? A resposta é afirmativa, ou seja, existe realmente uma hierarquia.

A base para isto é o fato de que os números irracionais podem ser aproximados por números racionais, mais precisamente cada número irracional pode ser representado por uma sequência de aproximantes racionais \* . Por exemplo, no caso do número  $\pi$  teríamos:

$$\pi = 3.141592... \simeq \frac{n}{m} = 3; \frac{22}{7}; \frac{333}{106}; \dots$$

onde as frações foram obtidas mediante truncamentos sucessivos na fração contínua que representa o número  $\pi$ .

Sendo assim, os toros irracionais "bem" aproximados por racionais são destruídos antes, ao passo que os "piores" irracionais o são apenas por último. Dentro deste contexto o "pior" irracional é o número áureo  $g = 1.6180339... = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , cuja sequência de aproximantes é dada por:

$$g = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \simeq \frac{n}{m} = 1; 2; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \dots \tag{III.21}$$

Esta discussão pode ser colocada em termos mais quantitativos, ainda que muitos detalhes técnicos tenham de ser omitidos em nome do nível adotado na exposição . Para o caso  $N = 2$ , os toros irracionais mais insensíveis a perturbação , ou seja os mais "invariantes" são aqueles

---

\* Uma exposição mais detalhada deste assunto pode ser vista no artigo de revisão de M.Berry [1978].

cujo número de rotação  $\eta = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ , satisfaz a condição de "suficiente irracionalidade":

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}} \quad (III.22)$$

para todos os inteiros  $r$  e  $s$ , sendo  $K(\epsilon)$  uma função que se anula à medida em que  $\epsilon$  (intensidade da perturbação) tende a zero.

## QUARTO CAPÍTULO

### CRITÉRIOS DE ESTOCASTICIDADE.

#### INTRODUÇÃO .

Após termos definido alguns dos principais objetos da linguagem dos sistemas Hamiltonianos; pontos fixos, ilhas, semi-largura de uma ilha, podemos agora tratar dos chamados critérios de estocasticidade. Tais critérios nos permitirão determinar qual a intensidade da perturbação responsável pela destruição do último toro KAM, o 'mais invariante', situação na qual a camada estocástica dissemina-se por todo o espaço de fase, sendo este regime designado pelo termo 'estocasticidade global'.

O primeiro critério a ser abordado é o critério de Chirikov, o qual embora não forneça um resultado muito preciso, é de fácil aplicação . O segundo critério, mais refinado, é o critério de Escande, e tem como fundamento um processo de renormalização efetuado sobre a Hamiltoniana Paradigma. No entanto não iremos nos ater à dedução do critério, mas simplesmente apresentar o processo de renormalização de uma maneira heurística.

Em seguida, reduziremos a Hamiltoniana do modelo de Martin e Taylor a um sistema Paradigma. Isso nos possibilitará a aplicação dos critérios de Escande e Chirikov.

#### 4.1 A ESTOCASTICIDADE GLOBAL E O CRITÉRIO DE CHIRIKOV.

Vimos que nas vizinhanças da separatriz da ilha representada por um sistema quase-integrável existe uma estreita camada preenchida com pontos distribuídos erraticamente; a chamada camada estocástica. Se considerarmos agora a existência de duas ilhas, como é o caso da Figura (3.7), tendo cada uma sua própria camada estocástica localizada, podemos indagar de como será a superfície de secção quando a perturbação  $\epsilon$  aumenta. Quanto a isto é muito razoável supor em que à medida que a perturbação cresça, as semi-larguras da ilhas,

dadas por (III.11) e (III.13):

$$\begin{aligned}\Delta J_M &= 2\sqrt{M} \\ \Delta J_P &= 2\sqrt{P}\end{aligned}\tag{IV.1}$$

também aumentem. Ademais, quando estas aumentam as camadas estocásticas vão se aproximando gradativamente, e no decorrer de tal processo os toros KAM existentes entre as ilhas começam a ser destruídos. No limite quando as 'virtuais' separatrizes se tocarem, situação usualmente designada de 'overlapping' das ilhas, o último toro KAM entre as mesmas terá sido destruído. Quando isto efetivamente ocorre, uma trajetória que parta de um ponto inicial nas vizinhanças da separatriz irá perambular de forma errática entre as duas ressonâncias  $M$  e  $P$ , e o registro no plano  $J \times \Theta$  de tal trajetória, será um conjunto de pontos distribuídos irregularmente. Na linguagem dos sistemas Hamiltonianos, tal comportamento é conhecido como 'estocasticidade global' e neste regime o que se observa é um 'mar' de pontos distribuídos irregularmente entre as duas ilhas primárias.

Os valores das amplitudes da perturbação, parâmetros  $M$  e  $P$ , que geram a estocasticidade global podem ser determinados, pelo método conhecido como critério do 'overlapping' (interpenetração) das ilhas, proposto por Boris Chirikov na década de 60. Chirikov definiu inicialmente o chamado parâmetro de estocasticidade [Chirikov, 1979]:

$$s = \frac{\Delta J_M + \Delta J_P}{\delta J}\tag{IV.2}$$

onde  $\Delta J_M$  e  $\Delta J_P$  são as semi-larguras das ilhas e  $\delta J$  é a separação entre as mesmas (Fig. 4.1).

Quando as separatrizes se tocarem, temos  $\Delta J_M + \Delta J_P = \delta J$ , ou seja  $s = s_c = 1$  representará a condição crítica para o aparecimento da estocasticidade global, isto segundo o critério de Chirikov.

Vimos que para a Hamiltoniana Paradigma as semi-larguras eram dadas por (IV.1), e levando-se em conta ainda que a distância entre os centros das ilhas é  $\delta J = 1$  (Fig. 3.7) concluímos finalmente, que o regime de estocasticidade global corresponde à situação em que.

$$s_c = 2(\sqrt{M} + \sqrt{P}) = 1.\tag{IV.3}$$

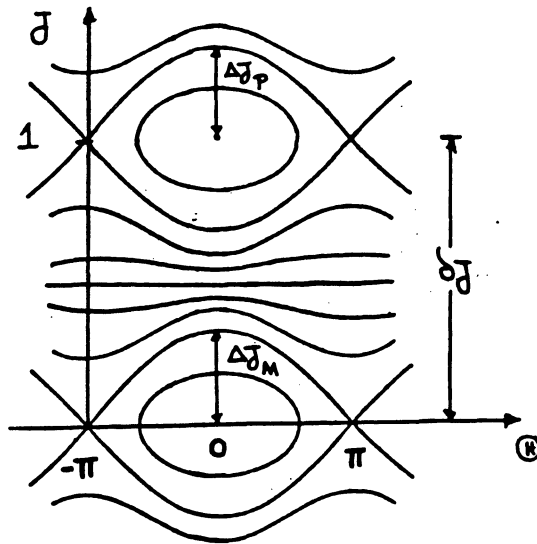


Figura (4. 1) – Elementos para o cálculo de  $s$ .

No entanto, o resultado de simulações numéricas para o mapa padrão, indica que o parâmetro crítico mais próximo da realidade corresponde na verdade ao valor:

$$s_c \simeq 0.6 \simeq \frac{2}{3}, \tag{IV.4}$$

conhecida como 'regra dos dois terços', e que melhora sensivelmente os resultados fornecidos pelo critério de Chirikov. Deve-se ressaltar, no entanto, que esta é uma regra empírica.

Para explicar a diferença entre este valor e o anterior ( $s_c = 1$ ), temos de considerar a existência de uma pequena largura na camada estocástica bem como a existência de ilhas secundárias entre as duas ilhas primárias, sendo que tais fatores contribuem para que o regime de estocasticidade global ocorra um pouco antes do toque das separatrizes.

#### 4.2 O PROCESSO DE RENORMALIZAÇÃO E O CRITÉRIO DE ESCANDE.

Passaremos agora a abordar um critério alternativo para se determinar qual a intensidade crítica da perturbação (parâmetros  $M$  e  $P$ ) que proporcionará o limiar de estocasticidade global. Este critério foi obtido no começo da década de 80 por Escande [D.F.Escande, F.Doveil, 1981] e surge como consequência direta de um processo de reescalonamentos sucessivos efetuados sobre a Hamiltoniana Paradigma.

Para a obtenção do critério a Hamiltoniana Paradigma (III.6) é reescrita inicialmente com todos os seus parâmetros indicados:

$$H_i(J_i, \Theta_i, t_i) = \frac{1}{2} J_i^2 - M_i \cos \Theta_i - P_i \cos k_i(\Theta_i - t_i) \quad (IV.5)$$

sendo que o plano  $J \times \Theta$  para tal Hamiltoniana é expresso na Fig.(4.2), onde a linha  $J_i = u_i$  \* representa um dado toro KAM irracional, situado entre uma ilha primária e outra secundária. Recordamos aqui que as quantidades:

$$\begin{aligned} \Delta J_{M_i} &= 2\sqrt{M_i} \\ \Delta J_{P_i} &= 2\sqrt{P_i} \end{aligned} \quad (IV.6)$$

representam as semi-larguras das ilhas primárias, localizadas em  $J_i = 0$  e  $J_i = 1$ , respectivamente. A análise da estabilidade do toro KAM que monitoramos, ou seja  $J_i = u_i$ , pode ser avaliada, quando reescalamos a Hamiltoniana (IV.5). Para este fim inserimos, mediante uma transformação canônica, as variáveis de ação - ângulo do pêndulo ( $H_p$  com  $P = 0$ ) em (IV.5), em seguida uma série de Fourier é feita, e quando retivermos os dois primeiros termos desta expansão, nós recuperamos a mesma Hamiltoniana (IV.5), porém, com todos os parâmetros reescalados (detalhes do procedimento podem ser encontrados em Escande,1982):

$$H_{i+1}(J_{i+1}, \Theta_{i+1}, t_{i+1}) = \frac{1}{2} J_{i+1}^2 - M_{i+1} \cos \Theta_{i+1} - P_{i+1} \cos k_{i+1}(\Theta_{i+1} - t_{i+1}) \quad (IV.7)$$

onde cada um dos parâmetros  $M_{i+1}$ ,  $P_{i+1}$ ,  $k_{i+1}$  e  $u_{i+1}$  ficam expressos em função dos parâmetros iniciais  $M_i$ ,  $P_i$ ,  $k_i$  e  $u_i$ :

$$P_{i+1} \longrightarrow P_{i+1}(P_i, M_i, k_i, u_i) \quad (IV.8a)$$

$$M_{i+1} \longrightarrow M_{i+1}(P_i, M_i, k_i, u_i) \quad (IV.8b)$$

$$k_{i+1} \longrightarrow k_{i+1}(P_i, M_i, k_i, u_i) \quad (IV.8c)$$

$$u_{i+1} \longrightarrow u_{i+1}(P_i, M_i, k_i, u_i) \quad (IV.8d)$$

---

\*  $u_i$  é o próprio número de rotação , como vimos no apêndice A.

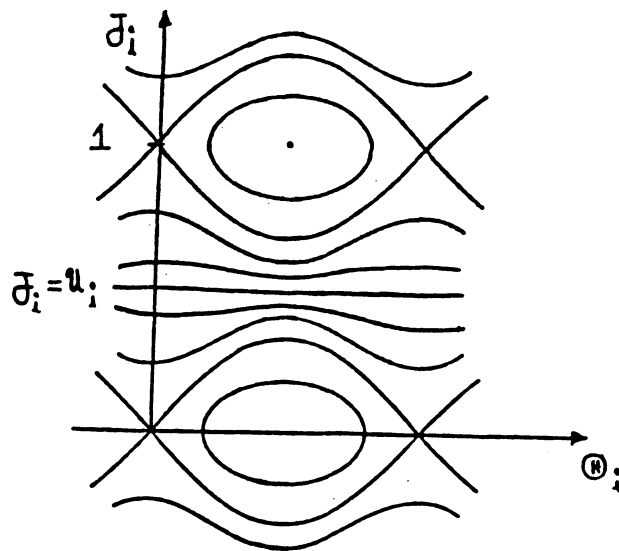


Figura (4. 2) – Plano  $J_i \times \Theta_i$  para  $H_i$ .

sendo que as expressões matemáticas foram omitidas para a simplicidade da exposi o

Do ponto de vista gráfico, o reescalonamento atua como um 'microscópio' no plano  $J_i \times \Theta_i$ , que analisa uma determinada região do mesmo, a qual na figura (4.3)   representada por um pequeno retângulo.

O processo de renormaliza o pode ser novamente efetuado, só que agora sobre a Hamiltoniana (IV.7). Como resultado obteremos uma vez mais uma nova Hamiltoniana Paradigma, porém com parâmetros  $(M_{i+2}, P_{i+2}, k_{i+2}, u_{i+2})$ . Portanto vemos que cada passo do processo de renormaliza o pode ser encarado na verdade, como uma itera o de um mapa quadri-dimensional [Lichtenberg e Lieberman,1983] não conservativo  $T$ , de forma geral:

$$(k_{i+1}, u_{i+1}, M_{i+1}, P_{i+1}) = T(k_i, u_i, M_i, P_i) \tag{IV.9}$$

Ao analisar este mapa Escande observou [Escande, 1985] que para um dado toro KAM inicial  $J_i = u_i$ , duas evolu es podem ocorrer com os parâmetros  $M_i$  e  $P_i$ :

I) Quando  $M_i$  e  $P_i$  aumentam sem limite superior o toro KAM inicialmente escolhido  $J_i = u_i$    destr ido, portanto ele   o que chamamos de 'bom irracional', ou em outras palavras, pouco

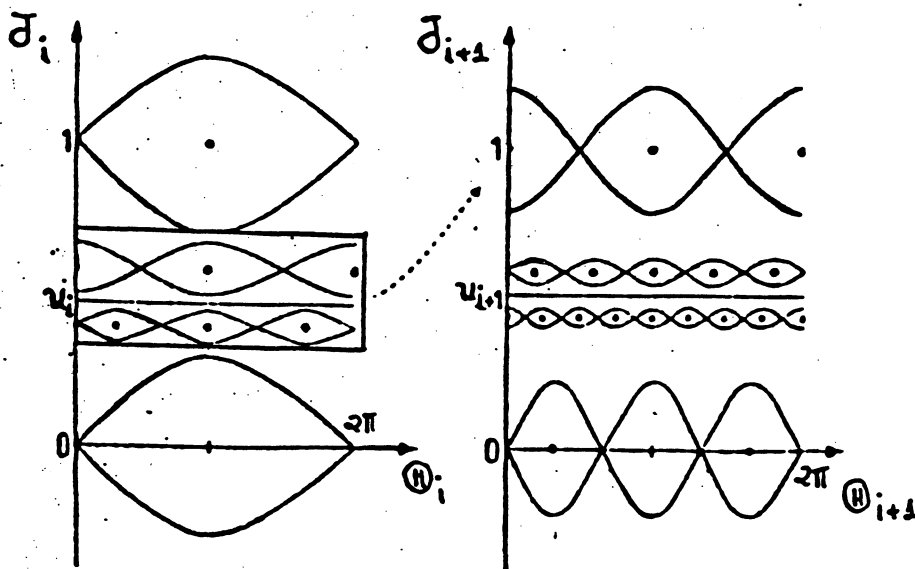


Figura (4. 3) – 'Microscópio' no plano  $J_i \times \Theta_i$ .

estável.

II) Quando  $M_i$  e  $P_i$  diminuem e eventualmente se anulam, o toro KAM inicialmente escolhido é preservado, sendo portanto um 'mau irracional' ou em outras palavras, bastante estável.

Em linguagem dos sistemas Hamiltonianos, estas duas situações extremas configuram o que se chama de pontos fixos do processo de renormalização . No segundo caso, o ponto fixo  $(M, P) = (0, 0)$  é dito estável e quando o processo de renormalização 'converge' para este ponto é sinal de que um toro KAM invariante existe, o qual , é possível mostrar, possui o número de rotação igual a  $\eta = g + 1$  †. No primeiro caso o ponto fixo,  $(M, P) = (\infty, \infty)$  é dito instável e quando o processo de renormalização 'converge' para este ponto é indicativo de que o toro KAM é na verdade um 'cantoro' \*.

Escande também mostrou que existe uma curva estável no espaço de parâmetros  $k, M$  e  $P$ , que separa as regiões de convergência para estes dois pontos fixos [Escande,1985]. A análise

† Este resultado só é rigorosamente válido se  $M = P$ , i.e., se as duas ressonâncias tiverem larguras idênticas.

\* O cantoro é um toro KAM perfurado, i.e, suas descontinuidades são do tipo apresentado por um conjunto de Cantor

desta curva mostrou que ela representa na verdade a própria transição à estocasticidade global, em outras palavras, a própria destruição do último toro KAM irracional. Portanto é razoável afirmar que os valores dos parâmetros  $k$ ,  $M$  e  $P$  que satisfazem à equação que define esta curva são os valores críticos para os quais o regime de estocasticidade global se estabelece.

Devemos enfatizar entretanto, que no presente trabalho não nos deteremos na dedução da citada equação [Escande, 1985] mas tão somente em sua aplicação, sendo assim iremos meramente expô-la. Dito isto, a equação que estabelece o limiar de estocasticidade é dada por:

$$MP^{g-1}[1 + C(k)P^2] = R(k) \quad (IV.10)$$

onde  $R(k)$  e  $C(k)$  são funções tabeladas do parâmetro  $k$  [Escande, 1985], e  $g$ , como já sabemos, corresponde à média áurea (III.21).

A equação (IV.10) tem validade nos seguintes domínios de variação :

$$k = 1 \text{ e } \frac{1}{25} < \frac{M}{P} < 25 \text{ ou} \quad (IV.11)$$

$$\frac{1}{4} \leq k \leq 4 \text{ e } M = P. \quad (IV.12)$$

Quando  $k = \frac{M}{P} = 1$  (caso central), podemos escrever (IV.10) de uma maneira mais simples, também mais utilizada na prática:

$$MP^{g-1} \simeq 0,003. \quad (IV.13)$$

Esta relação pode também ser usada, com uma boa aproximação, até 30 por cento fora do caso central.

Veremos que na presente dissertação a Hamiltoniana obtida (vide a seção seguinte) possuirá os parâmetros  $k$ ,  $M$  e  $P$  dentro do domínio (IV.11).

### 4.3 UM EXEMPLO DE SISTEMA PARADIGMA.

O principal resultado da seção (2.4), como vimos, foi a obtenção da Hamiltoniana para o modelo de Martin e Taylor:

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi R_0}(\alpha y + \frac{\beta}{2}y^2) + \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right)[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nz}{R_0}\right)], \quad (IV.14)$$

onde  $\Gamma = \frac{\mu_0 I}{\pi B_0}$ .

Tentaremos agora, como foi proposto, reduzir (IV.14) a uma Hamiltoniana paradigma,  $H_p$  (III.9). Para iniciar o processo nós escrevemos a parte perturbativa de (IV.14) na forma:

$$H_1(x, y, z) = \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b}\right) + \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos\left(\frac{mx}{b} - \frac{nz}{R_0}\right) + \cos\left(\frac{mx}{b} + \frac{nz}{R_0}\right) \right\} \quad (IV.15)$$

O termo contendo apenas  $\cos\left(\frac{mx}{b}\right)$  não configura uma ressonância e portanto podemos desconsiderá-lo. Vamos agora definir as seguintes variáveis:

$$\zeta(z) = \frac{mx}{b} - \frac{nz}{R_0}, \quad (IV.16)$$

$$\xi(z) = \frac{mx}{b} + \frac{nz}{R_0}. \quad (IV.17)$$

No final da seção (3.2) vimos que o fator de segurança estava relacionado ao número de rotação  $\eta = \frac{n}{m}$ , pela equação ,

$$q = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{\eta}. \quad (IV.18)$$

Se levarmos em conta a aproximação da borda, que consiste nas relações :  $x = b\theta$  e  $z = R_0\phi$ , nós podemos concluir mediante um cálculo simples que  $\frac{d\zeta}{dz} = 0$  e  $\frac{d\xi}{dz} = \frac{2n}{R_0}$ . Este resultado nos permite afirmar que  $\zeta$  é uma grandeza que varia muito lentamente com o 'tempo'  $z$ ; ela é o que chamamos de 'variável lenta'. Já a grandeza  $\xi$  varia significativamente com  $z$ ; ela é o que chamamos de 'variável rápida'. Sendo assim quando efetuarmos uma média sobre  $z$  em  $H_1$ , o termo correspondente a variável rápida se anula, portanto podemos escrever

$$H_1(x, y, z) \longrightarrow \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{mx}{b} - \frac{nz}{R_0}\right). \quad (IV.19)$$

O passo seguinte no processo de obtenção de  $H_p$  consiste em tomar dois termos ressonantes ( $n_1 = n_0$  e  $n_2 = n_0 + 1$ ) de (IV.19) e negligenciar os demais. Com isso nós obtemos:

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi R_0} (\alpha y + \frac{\beta}{2} y^2) + \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b} - \frac{n_0 z}{R_0}\right) + \Gamma e^{-\frac{my}{b}} \cos\left(\frac{mx}{b} - \frac{(n_0 + 1)z}{R_0}\right). \quad (IV.20)$$

Passaremos agora a efetuar uma série de transformações canônicas que nos levarão à forma paradigma. Para tanto usaremos funções geratrizes de segunda espécie, as quais serão funções dos novos momentos e das antigas coordenadas e eventualmente do 'tempo'  $z$ .

I) Vamos passar do conjunto  $(x, y)$  para  $(p, q)$  mediante

$$F(x, y, z) = \left( \frac{mx}{b} - \frac{n_0 z}{R_0} \right) \frac{bp}{m}. \quad (IV.21)$$

sendo as equações de transformação dadas por [Goldstein, 1980]:

$$q = \frac{\partial F}{\partial p} = \left( \frac{mx}{b} - \frac{n_0 z}{R_0} \right) \frac{b}{m}, \quad (IV.22)$$

$$y = \frac{\partial F}{\partial x} = p, \quad (IV.23)$$

$$H^{(1)}(p, q, z) = H(p, q, z) + \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (IV.24)$$

onde  $H$  é a Hamiltoniana (IV.20).

Com esta transformação obtemos a Hamiltoniana,

$$H^{(1)}(p, q, z) = \frac{1}{2\pi R_0} (\hat{\alpha} p + \frac{\beta}{2} p^2) + \Gamma e^{-\frac{mp}{b}} \cos\left(\frac{mq}{b}\right) + \Gamma e^{-\frac{mp}{b}} \cos\left(\frac{mq}{b} - \frac{z}{R_0}\right). \quad (IV.25)$$

onde definimos um novo parâmetro:

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{2\pi b n_0}{m}. \quad (IV.26)$$

II) Vamos agora passar do conjunto  $(p, q)$  para  $(\bar{p}, \bar{q})$  mediante:

$$F(q, \bar{p}) = \left( \bar{p} - \frac{\hat{\alpha}}{\beta} \right) q \quad (IV.27)$$

sendo as equações de transformação dadas por:

$$\bar{q} = \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} = q, \quad (IV.28)$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \left( \bar{p} - \frac{\hat{\alpha}}{\beta} \right), \quad (IV.29)$$

$$H^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}, z) = H^{(1)}(\bar{p}, \bar{q}, z) + \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (IV.30)$$

Com esta transformação nós obtemos a Hamiltoniana

$$H^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}, z) = \frac{1}{2\pi R_0} \left( \frac{\beta}{2} \bar{p}^2 - \frac{\hat{\alpha}^2}{2\beta} \right) + \Gamma e^{\frac{m\hat{\alpha}}{b\beta}} e^{-\frac{m\bar{p}}{b}} \cos\left(\frac{m\bar{q}}{b}\right) + \Gamma e^{\frac{m\hat{\alpha}}{b\beta}} e^{-\frac{m\bar{p}}{b}} \cos\left(\frac{m\bar{q}}{b} - \frac{z}{R_0}\right)$$

sendo que ao negligenciarmos a constante aditiva do primeiro termo do segundo membro, nós obtemos:

$$H^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}, z) = \frac{\beta}{2\pi R_0} \frac{\bar{p}^2}{2} + \Omega e^{-\frac{m\bar{p}}{b}} \cos\left(\frac{m\bar{q}}{b}\right) + \Omega e^{-\frac{m\bar{p}}{b}} \cos\left(\frac{m\bar{q}}{b} - \frac{z}{R_0}\right). \quad (IV.31)$$

Onde definimos a constante  $\Omega$  como:

$$\Omega = \Gamma e^{\frac{m\hat{\alpha}}{b\beta}} = \frac{\mu_0 I}{\pi B_0} e^{\frac{m\hat{\alpha}}{b\beta}}. \quad (IV.32)$$

III) Fazemos agora o seguinte reescalonamento:

$$P = \frac{m\bar{p}}{b}, \quad Q = \frac{m\bar{q}}{b}, \quad Z = \frac{mz}{b}, \quad (IV.33)$$

com a finalidade de adimensionalizar as variáveis canônicas, sendo que desta forma obtemos uma nova Hamiltoniana;

$$H^{(3)}(P, Q, Z) = \frac{\beta b^2}{2\pi R_0 m^2} \frac{P^2}{2} + \Omega e^{-P} \cos Q + \Omega e^{-P} \cos\left(Q - \frac{b}{mR_0} Z\right) \quad (IV.34)$$

que tem dimensão de comprimento.

Ao invés de utilizar (IV.34) podemos também, para facilitar análises posteriores, trabalhar com uma Hamiltoniana adimensionalizada  $h^{(3)}$  definida pela relação  $H^{(3)} = bh^{(3)}$ .

Com este procedimento nós obtemos:

$$h^{(3)}(P, Q, Z) = \frac{b\beta}{2\pi R_0 m^2} \frac{P^2}{2} + \frac{\Omega}{b} e^{-P} \cos Q + \frac{\Omega}{b} e^{-P} \cos\left(Q - \frac{b}{mR_0} Z\right). \quad (IV.35)$$

IV) Vamos agora passar do conjunto  $(P, Q, Z)$  para o conjunto  $(X, Y, t)$  mediante uma transformação canônica efetuada no espaço de fase estendido (Apêndice A);

$$F(Q, Z, Y, H) = QY + \frac{b}{mR_0} ZH, \quad (IV.36)$$

sendo as equações de transformação dadas por:

$$P = \frac{\partial F}{\partial Q} = Y, \quad (IV.37)$$

$$-h^{(3)} = \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{b}{mR_0} H, \quad (IV.38)$$

$$X = \frac{\partial F}{\partial Y} = Q, \quad (IV.39)$$

$$t = \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{b}{mR_0} Z. \quad (IV.40)$$

Se utilizarmos inicialmente a equação (IV.38) e em seguida as demais equações de transformação, nós obtemos:

$$H(Y, X, t) = -\frac{\beta}{2\pi m} \frac{1}{2} Y^2 - \frac{mR_0\Omega}{b^2} e^{-Y} \cos X - \frac{mR_0\Omega}{b^2} e^{-Y} \cos(X - t) \quad (IV.41)$$

A multiplicação de (IV.41) pelo fator  $-2\pi m/\beta$  nos permite definir uma nova Hamiltoniana

$$H_p = -\frac{2\pi m}{\beta} H, \quad (IV.42)$$

a qual, mediante tal definição, pode ser escrita como:

$$H_p(Y, X, t) = \frac{1}{2} Y^2 + \frac{2\pi m^2 R_0 \Omega}{\beta b^2} e^{-Y} \cos X + \frac{2\pi m^2 R_0 \Omega}{\beta b^2} e^{-Y} \cos(X - t) \quad (IV.43)$$

Também temos a liberdade de escrever,

$$H_p(Y, X, t) = \frac{1}{2} Y^2 + T(Y) \cos X + T(Y) \cos(X - t) \quad (IV.44)$$

onde a constante adimensional  $T(Y)$ , que representa a amplitude das ressonâncias  $n_1 = n_0$  e  $n_2 = n_0 + 1$ , é dada por:

$$T(Y) = \frac{2\pi m^2 R_0 \Omega}{\beta b^2} e^{-Y} = \frac{2m^2 R_0 \mu_0 I}{\beta b^2 B_0} e^{\frac{m\phi}{b\beta}} e^{-Y}. \quad (IV.45)$$

Um dos itens do capítulo seguinte será a solução numérica (via mapa de Poincaré) das equações canônicas de Hamilton para a Hamiltoniana (IV.44). Veremos que as ressonâncias  $n_1 = n_0$  e  $n_2 = n_0 + 1$  estão localizadas em  $Y = 0$  e  $Y = 1$ , respectivamente. Portanto, a

fim de conseguirmos uma estimativa para a largura de cada ressonância, nós aproximaremos cada amplitude pelo seu valor na posição da ressonância, ou seja:

$$n_1 = n_0 \longrightarrow T(Y = 0),$$

$$n_2 = n_0 + 1 \longrightarrow T(Y = 1),$$

sendo que este procedimento é conhecido na literatura como 'aproximação para a ressonância central' [Reichl, L.E.; Zheng, W.M., 1987].

Com isso nós obtemos finalmente a Hamiltoniana paradigma,

$$H_p(Y, X, t) = \frac{1}{2}Y^2 + M \cos X + P \cos(X - t) \quad (IV.46)$$

onde as amplitudes  $M$  e  $P$  são dadas por:

$$M = T(Y = 0) = \frac{2m^2 R_0 \mu_0 I}{\beta b^2 B_0} e^{\frac{m\hat{\alpha}}{b\beta}}, \quad (IV.47)$$

$$P = T(Y = 1) = \frac{M}{e}. \quad (IV.48)$$

Mediante um cálculo simples podemos mostrar que ao retornarmos do conjunto de coordenadas  $(X, Y)$  ao conjunto original  $(y, x)$  nós obtemos as seguintes relações :

$$y = \frac{b}{m}Y - \frac{\hat{\alpha}}{\beta} \quad (IV.49)$$

$$x = \frac{b}{m}\left(X + \frac{n_0 z}{R_0}\right) \quad (IV.50)$$

onde  $\hat{\alpha}$  é dado por (IV.26).

## QUINTO CAPÍTULO

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS.

#### INTRODUÇÃO .

A série de transformações canônicas efetuadas sobre a Hamiltoniana (IV.14) nos levou a dois resultados importantes: o primeiro provém do fato que os coeficientes  $M$  e  $P$  da Hamiltoniana obtida,

$$H_p(X, Y, t) = \frac{1}{2}Y^2 + M \cos X + P \cos(X - t), \quad (V.1)$$

dependem de uma série de parâmetros; entre os quais a corrente que circula no anel do limitador. Este resultado é de interesse, pois quando aplicarmos os critérios de estocasticidade (Escande e Chirikov), poderemos determinar o valor da corrente crítica no limitador magnético. Tal corrente é responsável pelo comportamento estocástico em larga escala das linhas de campo na região próxima à borda do Tokamak.

O segundo resultado provém do fato que a variável  $Y$  está relacionada à coordenada 'física'  $y$  mediante uma equação simples. Este resultado também é de interesse pois permite-nos determinar a posição das ilhas primárias no interior de um dado Tokamak.

No presente capítulo faremos uma aplicação numérica dos resultados até aqui obtidos: determinaremos o valor aproximado da corrente crítica e a posição das ilhas primárias para o Tokamak TBR-1, que está em operação no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

#### 5.1 A POSIÇÃO DAS ILHAS MAGNÉTICAS.

Vimos na seção (4.3) que a coordenada 'física'  $y$  de uma dada linha de campo, na região próxima a borda, estava relacionada a coordenada 'transformada'  $Y$  pela equação

$$y = \frac{b}{m}Y - \frac{\hat{\alpha}}{\beta}, \quad (V.2)$$

onde  $\hat{\alpha}$  é dado por :

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{2\pi b n_0}{m}. \quad (V.3)$$

Vemos portanto que a coordenada física de uma dada ilha irá depender da corrente de plasma  $I_p$ , uma vez que os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram definidos na seção (2.3.a) como:

$$\beta = \frac{2\mu_0 R_0}{B_0 b^2} I_p, \quad (V.4)$$

$$\alpha = \frac{b}{2}\beta. \quad (V.5)$$

A figura 5.1 exibe o resultado da integração numérica, feita pelo método de Adams-Moulton, das equações canônicas de Hamilton obtidas de (IV.44), onde

$$T(Y) = M e^{-Y}, \quad (V.6)$$

tendo  $M$  o valor 0.0120, escolhido a título de mera exemplificação .

Notamos que as ilhas primárias estão posicionadas em  $Y_0^* = 0$  e  $Y_1^* = 1$ ; tal fato justifica a citada 'aproximação para a ressonância central', vista na seção (4.3). Se considerarmos agora a equação (V.2), nós concluimos que as posições 'radiais' das correspondentes ilhas no espaço físico serão dadas por:

$$Y_0^* = 0 \longrightarrow y_0^* = -\frac{\hat{\alpha}}{\beta}, \quad (V.7)$$

$$Y_1^* = 1 \longrightarrow y_1^* = \frac{b}{m} + y_0^*, \quad (V.8)$$

de onde podemos inferir que a posição das ilhas é determinada pelas características do equilíbrio, já que  $\hat{\alpha}$  e  $\beta$  não dependem da corrente no limitador.

Abaixo temos uma tabela contendo alguns parâmetros do Tokamak TBR-1:

raio maior ( $R_0$ ): 0.30 m ,  
 raio menor ( $b$ ): 0.11 m ,  
 campo toroidal ( $B_0$ ): 0.5 T,  
 $m$  (típico) : 6 .

Com estes dados as posições 'radiais' das ilhas primárias em função da corrente de plasma  $I_p$ , para o caso  $n_0 = 1$  são dadas aproximadamente por:

$$I_p = 10kA \quad (y_0^*, y_1^*) = (0.34b, 0.51b),$$

$$I_p = 13kA \quad (y_0^*, y_1^*) = (0.15b, 0.32b),$$

$$I_p = 16kA \quad (y_0^*, y_1^*) = (0.03b, 0.19b).$$

## 5.2 APLICAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE CHIRIKOV E ESCANDE.

Vamos agora considerar a Hamiltoniana

$$H_p(X, Y, t) = \frac{1}{2}Y^2 + M \cos X + P \cos(X - t) \quad (V.9)$$

obtida no capítulo anterior por meio da aproximação para a ressonância central. Para esta Hamiltoniana os coeficientes  $M$  e  $P$  são dados por:

$$M = \frac{2m^2 R_0 \mu_0 I}{\beta b^2 B_0} e^{\frac{m\phi}{b\beta}} \quad (V.10)$$

$$P = \frac{M}{e} \quad (V.11)$$

De acordo com o que vimos na seção (3.4) as semi-larguras das ilhas para o sistema descrito por (V.9), são dadas por:

$$\Delta Y_0 = 2\sqrt{M} \quad (V.12)$$

$$\Delta Y_1 = 2\sqrt{P} \quad (V.13)$$

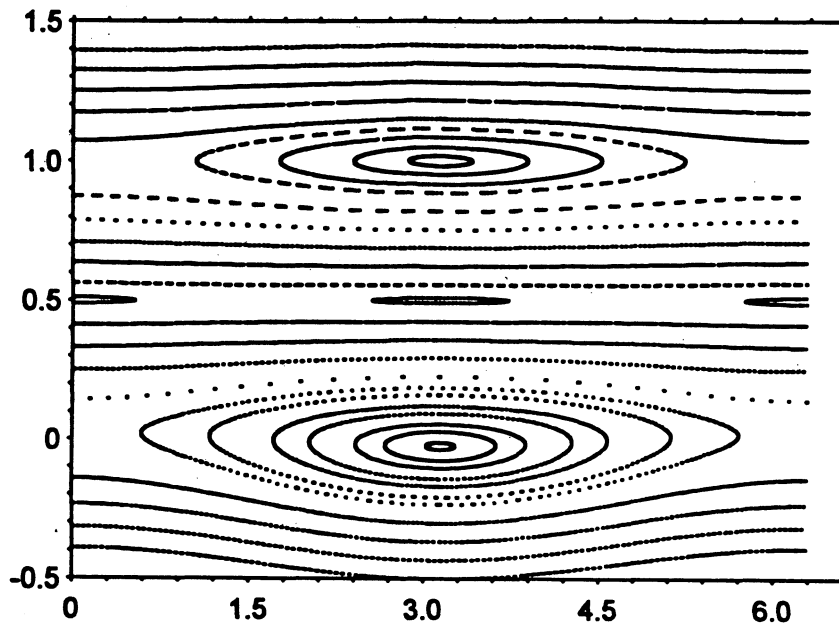


Figura (5. 1) –Plano  $Y \times X$ , para  $M = 0.0120$ , obtido pela integração das Equações de Hamilton referentes à Hamiltoniana (IV.44) .

sendo  $\Delta Y_0$  a largura da ilha posicionada em  $Y_0^* = 0$  e  $\Delta Y_1$  a largura da ilha posicionada em  $Y_1^* = 1$ .

No quarto capítulo definimos o chamado parâmetro de estocasticidade

$$s = \Delta Y_0 + \Delta Y_1, \quad (\text{V.14})$$

o qual mediante as equações (V.11),(V.12) e (V.13) pode ser escrito unicamente em termos de  $M$ ;

$$s = 3.21\sqrt{M} \quad (\text{V.15})$$

As figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 exibem a integração numérica das equações canônicas de Hamilton para (V.9). O valor do parâmetro  $s$ , que é uma medida da intensidade da perturbação, e a corrente no limitador estão indicados em cada uma das figuras. Notamos

que, à medida em que  $I$  aumenta os toros KAM existentes entre as ilhas vão sendo deformados e eventualmente destruídos, enquanto a camada estocástica da ilha próxima ao limitador aumenta suas dimensões. Quando  $s \simeq 0.67$  ( $I = 96 A$ ) o processo de estocasticidade em larga escala se inicia; como prescreve a regra 'dos dois terços':

$$s_c = s \simeq \frac{2}{3} \quad (V.16)$$

Aumentando-se uma pouco mais o valor da corrente ( $I = 131 A$ ) a estocasticidade em larga escala se apresenta de uma maneira global. Nesta situação, a camada estocástica dissemina-se por toda a região entre as ilhas (figura 5.6) e o que se observa é um 'mar' de estocasticidade predominante, já que os 'restos' de ilhas de ordem superior ainda permanecem, sem contudo impedir a difusão de linhas de campo.

A semi-largura,  $\Delta y$ , de uma ilha no espaço físico, próximo à região da borda, pode ser obtida de (V.2). Para as duas ilhas mais próximas à parede (com  $n = n_0$  e  $n = n_0 + 1$ , respectivamente) temos que:

$$\Delta y_0 = \frac{b}{m} \Delta Y_0 = \frac{2b}{m} \sqrt{M}, \quad (V.17)$$

$$\Delta y_1 = \frac{b}{m} \Delta Y_1 = \frac{\Delta y_0}{\sqrt{e}}, \quad (V.18)$$

onde usamos também (V.11), (V.12) e (V.13).

A figura 5.7 mostra um gráfico das semi-larguras reais das ilhas, equações (V.17) e (V.18), em função da corrente que circula no limitador. Neste gráfico utilizamos os parâmetros do TBR-1, supondo uma corrente de plasma  $I_p = 10kA$ . Vemos que a largura física das ilhas ( $m = 6, n = 1$ ) e ( $m = 6, n = 2$ ) aumenta com a corrente que gera o campo perturbador na forma  $\sqrt{I}$ , e que a ressonância com  $n = 2$  é menor por um fator de  $e^{-\frac{1}{2}}$  do que a correspondente a  $n = 1$ .

Passamos agora, como foi proposto, à aplicação dos criterios de Chirikov e Escande. Como vimos no capítulo anterior, o critério de Escande simplificado (IV.13) prescreve que para o limiar de estocasticidade os coeficientes  $M$  e  $P$  da Hamiltoniana (V.9) devem satisfazer à equação

$$MP^{q-1} \simeq 0.003, \quad (V.19)$$

enquanto que a regra 'dos dois terços' prescreve

$$s_c = 2\sqrt{M} + 2\sqrt{P} \simeq \frac{2}{3}, \quad (\text{V.20})$$

para a ruptura do último toro KAM. Uma vez que  $P = M/e$ , o critério de Escande se resume a

$$M_c \simeq 0.0404, \quad (\text{V.21})$$

e o de Chirikov a

$$M_c \simeq 0.0422, \quad (\text{V.22})$$

onde o índice 'c' se refere ao valor crítico de  $M$ .

Mediante a equação (V.10) nós podemos obter o valor da corrente crítica  $I_c$  em função da corrente de plasma  $I_p$ , para o caso  $n_0 = 1$ , segundo a prescrição de cada critério. O resultado é expresso na figura 5.8. Vemos que para uma dada corrente de plasma o critério de Escande prevê uma corrente crítica ligeiramente inferior àquela prevista pelo critério de Chirikov. Abaixo temos alguns valores escolhidos a título de ilustração .

I)  $I_p = 10 \text{ kA}$ .

(a) Escande:  $I_c = 88 \text{ A}$ ,

(b) Chirikov:  $I_c = 92 \text{ A}$ .

II)  $I_p = 13 \text{ kA}$ .

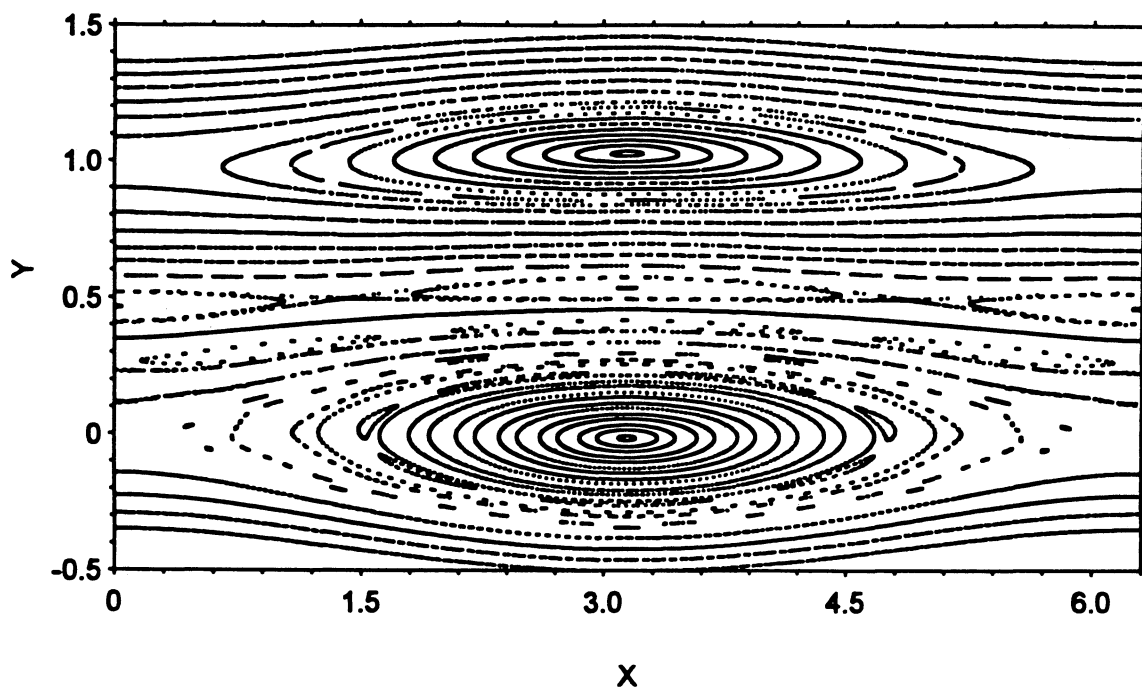
(a) Escande:  $I_c = 35 \text{ A}$ ,

(b) Chirikov:  $I_c = 37 \text{ A}$ .

III)  $I_p = 16 \text{ kA}$

(a) Escande:  $I_c = 21 \text{ A}$ ,

(b) Chirikov:  $I_c = 22 \text{ A}$ .



**Figura (5. 2)** – Mapa de Poincaré das linhas de campo para  $s = 0.55$  e  $I = 63 A$ , devido a um limitador magnético ergódico, obtido pela integração numérica das equações canônicas referentes à Hamiltoniana Paradigma (V.9), sendo  $Y$  e  $X$  variáveis adimensionais, definidas no texto.

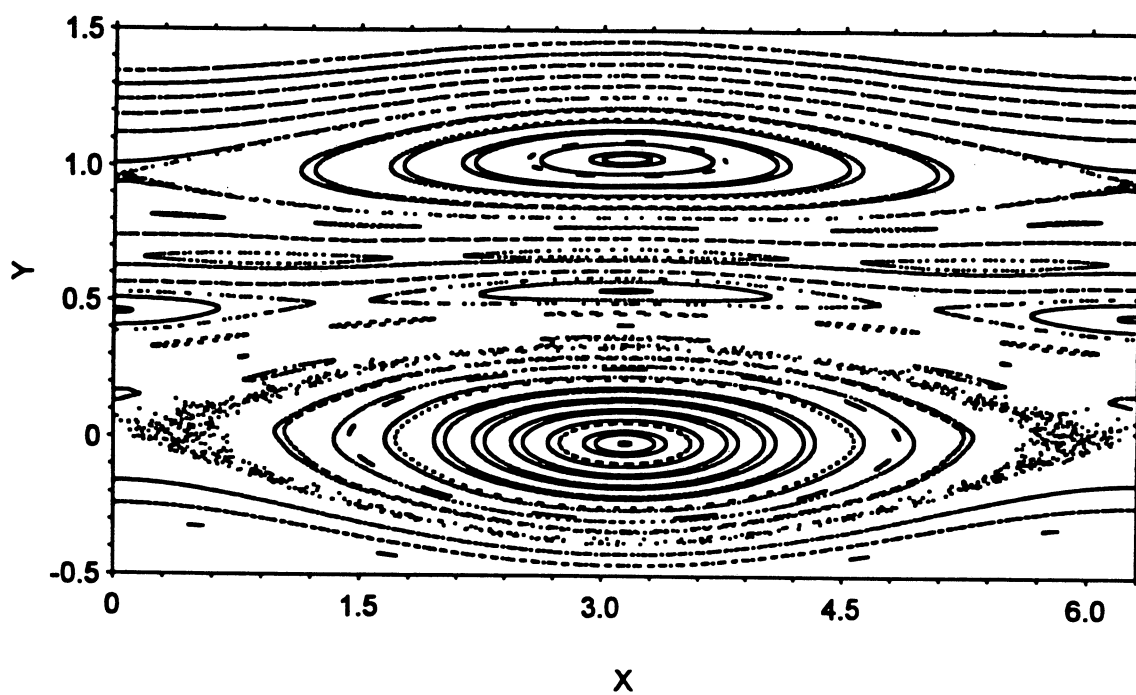


Figura (5. 3) —Idem para  $s = 0.60$  e  $I = 76 A$ .

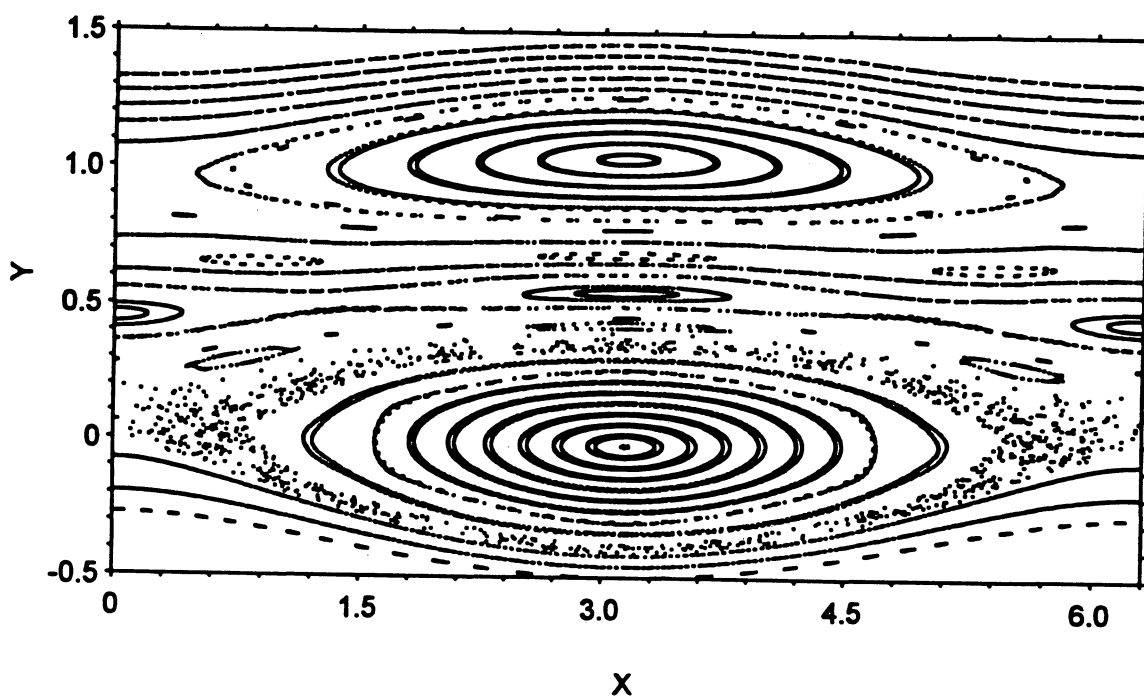


Figura (5. 4) -Idem para  $s = 0.64$  e  $I = 87 A$ .

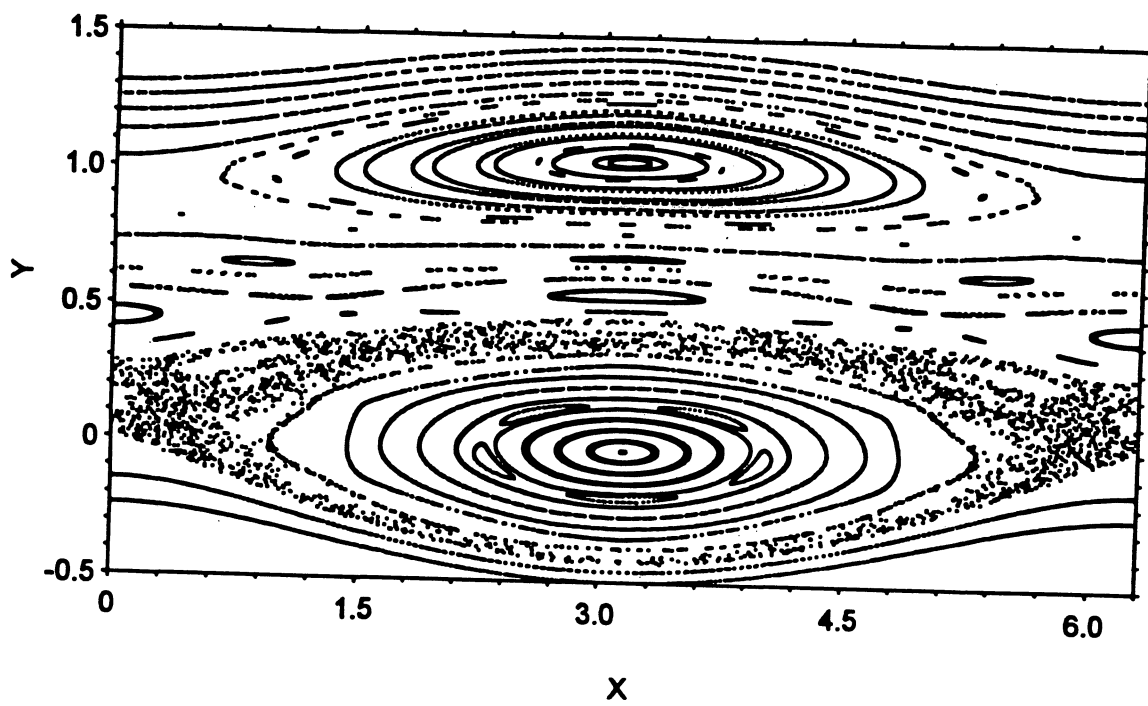


Figura (5. 5) —Idem para  $s = 0.67$  e  $I = 96 A$ .

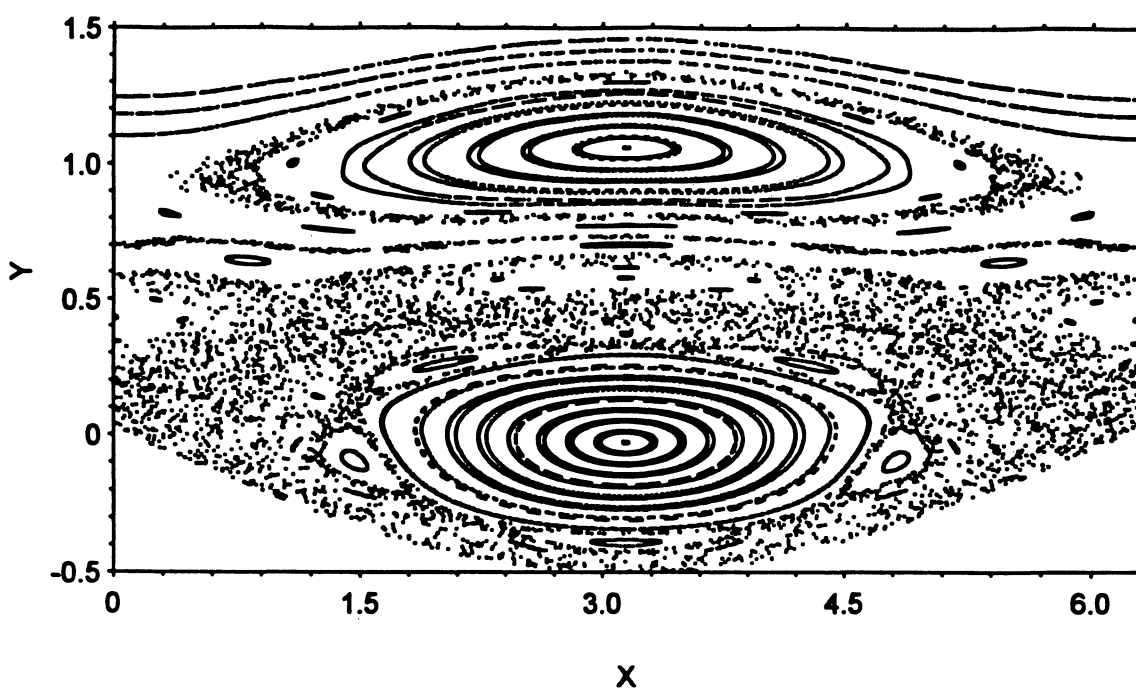


Figura (5. 6) - *Idem* para  $s = 0.78$  e  $I = 131 A$ .

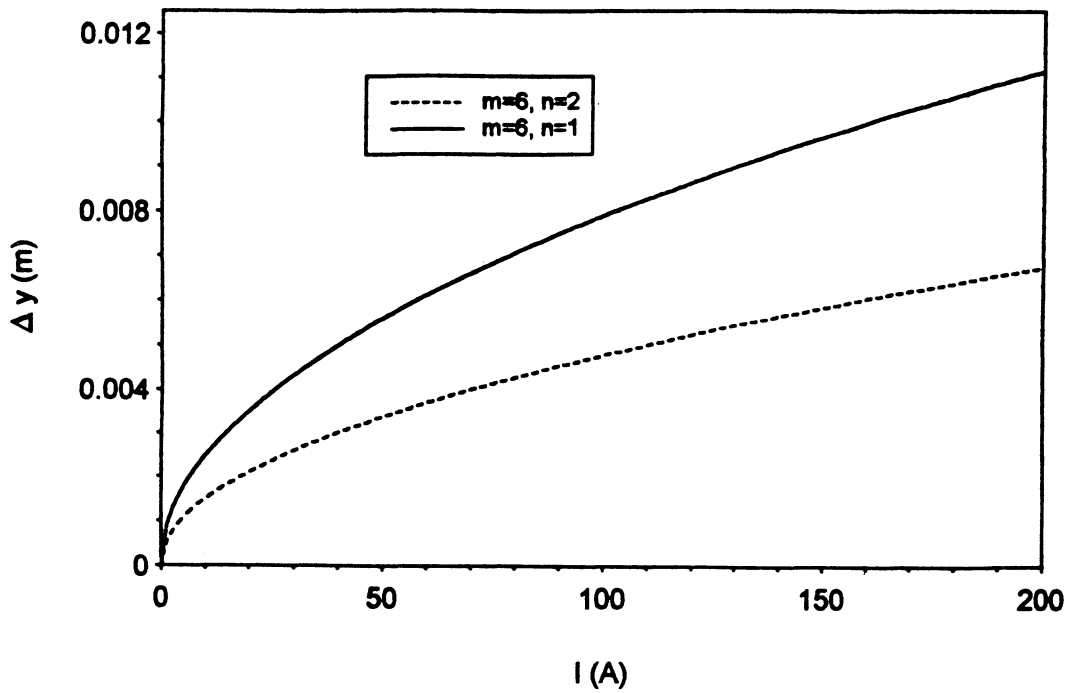


Figura (5. 7) –Largura da ilha versus corrente no limitador.

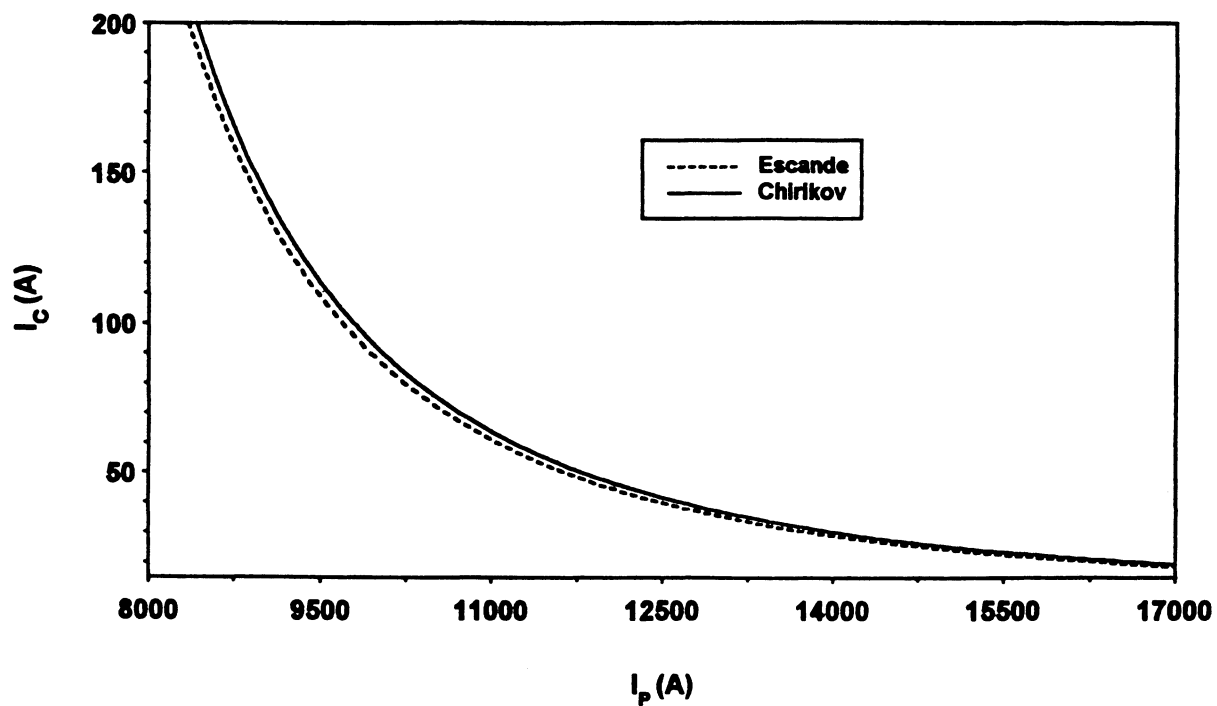


Figura (5. 8) – Corrente crítica versus corrente de plasma. Segundo os critérios de Escande e Chirikov-2/3 .

## CONCLUSÕES

Neste trabalho abordamos o problema da ação de um limitador magnético ergódico sobre um Tokamak de grande razão de aspecto sob o ponto de vista do formalismo Hamiltoniano para linhas de campo. Escolhemos trabalhar com um sistema de coordenadas retangulares  $(x, y, z)$ , apropriado para a descrição da estrutura das linhas de campo na periferia da câmara toroidal, i.e, na vizinhança imediata da sua parede interna. Isto significa que, quanto mais nos afastarmos da mesma, menor será a eficácia da descrição por estas coordenadas e, neste caso, será mais adequado usar outra geometria, como por exemplo a cilíndrica.

O formalismo Hamiltoniano nos permite descrever a formação de ilhas magnéticas de uma maneira elegante e concisa, usando resultados clássicos da teoria canônica de perturbação. Neste trabalho, a criação de uma região predominantemente estocástica de linhas de campo foi descrita a partir da interação entre duas ressonâncias primárias (das múltiplas criadas pelo limitador) na periferia da câmara toroidal. Truncando a Hamiltoniana obtida originalmente a fim de tomar apenas duas ressonâncias pudemos, a partir de uma série de transformações canônicas, reduzi-la à forma da Hamiltoniana Paradigma. Esta redução trouxe como vantagem a possibilidade de aplicar dois critérios diferentes para a estocasticidade global - o de Chirikov, mais simples e direto; e o de Escande, cuja formulação é mais sofisticada. O limiar de estocasticidade global está relacionado a uma grandeza fisicamente importante que é a corrente crítica no limitador, que deve ser da ordem de 1 a 2% da corrente total de plasma, para que o uso das técnicas de perturbação usadas neste trabalho seja válido.

Vamos discutir criticamente nossos procedimentos à luz da teoria de plasmas em equilíbrio. Como nosso estudo objetiva primariamente a descrição da periferia da câmara do Tokamak, onde não há coluna de plasma, o campo poloidal de equilíbrio foi estimado usando a lei de Amperé de forma simples - i.e, o único parâmetro variável concernente ao equilíbrio foi a corrente de plasma  $I_p$ . No entanto, para uma descrição mais precisa do problema - o que é feito em geometria cilíndrica, por exemplo - a corrente total de plasma é

fixa e nós levaríamos em conta o perfil radial da densidade de corrente de plasma, como por exemplo o modelo 'peaked' [Viana e Caldas,1992]:

$$\vec{j}_z(r) = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\gamma \hat{z}$$

onde  $r$  é a distância radial,  $j_0$  é uma constante proporcional à corrente de plasma  $I_p$ ,  $a$  é o raio da coluna de plasma ( $a = 0.08 \text{ m}$  no TBR-1) e  $\gamma$  é um expoente variável, que determina o tipo do perfil de densidade de corrente na coluna. Em modelos deste tipo, portanto, podemos fixar  $I_p$  e variar  $\gamma$ , o que em nosso caso não é possível pois ignoramos esta distribuição interna de corrente. Além disso, eventualmente as ilhas descritas usando esta aproximação acham-se parcialmente imersas na coluna de plasma (quando  $y > b - a$ ), e neste caso uma descrição mais precisa deveria levar em conta o campo poloidal dentro da coluna, o qual dependeria de  $\gamma$ , por exemplo, no modelo cilíndrico. Apesar desta aproximação, nosso modelo de equilíbrio é eficiente no sentido de prever a localização das ilhas, uma vez que estas são formadas em torno das superfícies magnéticas racionais não-perturbadas.

A Hamiltoniana que descreve a perturbação causada pelo limitador pressupõe para o mesmo uma ação impulsiva, o que é incluído no modelo a partir de uma modulação da função válida para fios infinitos. Como a intensidade da perturbação cai rapidamente com o aumento de  $y$ , i.e., quando nos afastamos da parede do Tokamak, apenas as ressonâncias mais próximas a ela tem uma largura relevante. Isto é uma característica essencial à ação do limitador pois, para um dado valor da sua corrente  $I$ , as ilhas mais internas decrescem de largura, tal que a região interna da coluna de plasma praticamente não seja afetada. Em particular, quando as ressonâncias mais externas interagem formando uma camada estocástica, as demais ainda estão muito longe disto, e não prejudicariam o plasma que se deseja confinar

Para valores da corrente no limitador da ordem de 1% da corrente de plasma nós obtivemos a formação de uma camada predominantemente estocástica que abrange a região periférica do vaso toroidal. Os critérios que foram empregados nesta determinação são aplicados do ponto de vista de sua concordância com as simulações numéricas decorrentes da iteração das equações canônicas relativas a Hamiltoniana Paradigma:

I) Critério de Chirikov: na sua forma original ( $s_c = 1$ ) não é aplicável, já que a destruição da última superfície magnética (toro KAM) entre as duas ressonâncias ocorre bem antes do toque das respectivas separatrizes. Uma maneira empírica de fazer esta concordância é usar o valor  $s_c = \frac{2}{3}$ , como prescrito por Lichtenberg [Lichtenberg e Lieberman, 1983]. De fato, nossas simulações indicam que este valor é um pouco maior em vista da diferença nas larguras das duas ressonâncias.

II) Critério de Escande: é um critério compatível com a 'regra dos dois terços anterior mas com a vantagem de ser matematicamente preciso (não-empírico). Há duas versões deste critério: uma válida num intervalo de parâmetros relativamente amplo ( $k = 1$  e  $\frac{1}{25} < \frac{M}{P} < 25$ ), e que está representada pela equação (IV.10); e outra, dita simplificada, dada por (IV.13) e que é válida num intervalo menor, da ordem de 30% à direita e à esquerda do caso central ( $k = 1$  e  $\frac{M}{P} = 1$ ) [Petinni, 1988]. Em nosso caso,  $\frac{M}{P} = e \simeq 2.718$ , estamos um pouco fora deste último intervalo; mas como o resultado do critério completo (IV.10) e do simplificado (IV.13) foram bastante próximos, usamos este último pela facilidade de seu emprego.

Uma extensão natural deste trabalho é a formulação hamiltoniana do problema do limitador ergódico num sistema de coordenadas mais adequado, como o cilíndrico. Para tal, podemos empregar na descrição do equilíbrio MHD um modelo axsimétrico de densidade de corrente da coluna de plasma, como os abordados em (Viana, 1993). O campo magnético produzido por um ou mais limitadores foi obtido em (Pereira, 1994), de modo que o presente formalismo pode ser empregado nesta situação. Em particular, o uso do critério de Escande que ora apresentamos neste trabalho, poderá melhorar as estimativas de corrente crítica no limitador feitos em trabalhos anteriores. Um outro motivo para esta abordagem é a possibilidade de inclusão do efeito toroidal [Lichtenberg, 1984] que aqui foi completamente desconsiderado.

**APÊNDICE A**  
**ESPAÇO DE FASE ESTENDIDO.**

O tratamento de Hamiltonianas que dependem explicitamente do tempo torna-se simples se incluímos o tempo como uma coordenada adicional do espaço de fase. Neste caso o espaço de fase passa a ser chamado de espaço de fase estendido. Vamos considerar em particular uma Hamiltoniana com  $N = 1$  grau de liberdade não autônoma:  $\mathcal{H}(J, \Theta, t)$ , e efetuar sobre esta a seguinte transformação canônica de segunda espécie;

$$\mathcal{H}(J, \Theta, t) \longrightarrow H(J_1, \Theta_1, J_2, \Theta_2)$$

onde, a função geratriz é:

$$F_2(\Theta, t, J_1, J_2) = J_1\Theta + J_2t. \quad (A.1)$$

Se definirmos o par  $(t, -\mathcal{H})$  como coordenada e momento generalizados, temos que as equações de transformação para a função geratriz (A.1) fornecem [Goldstein, 1980]:

$$J = \frac{\partial F_2}{\partial \Theta} = J_1, \quad (A.2)$$

$$-H = \frac{\partial F_2}{\partial t} = J_2, \quad (A.3)$$

$$\Theta_1 = \frac{\partial F_2}{\partial J_1} = \Theta, \quad (A.4)$$

$$\Theta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial J_2} = t, \quad (A.5)$$

$$H(J_1, \Theta_1, J_2, \Theta_2) = \mathcal{H}(J_1, \Theta_1, \Theta_2) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (A.6)$$

ou seja,

$$H(J_1, \Theta_1, J_2, \Theta_2) = \mathcal{H}(J_1, \Theta_1, \Theta_2) + J_2. \quad (A.7)$$

Portanto passamos da descrição de um sistema com  $N = 1$  grau de liberdade não autônomo para um sistema dinâmico equivalente com  $N = 2$  graus de liberdade, autônomo.

No caso particular em que  $\mathcal{H}(J, \Theta, t)$  \* seja a Hamiltoniana Paradigma dada por (III.9), o sistema equivalente no espaço estendido seria:

$$H(J_1, \Theta_1, J_2, \Theta_2) = \mathcal{H}_p(J_1, \Theta_1, \Theta_2) + J_2, \quad (\text{A.8})$$

ou ainda;

$$H(J_1, \Theta_1, J_2, \Theta_2) = \frac{1}{2}J_1^2 - M \cos \Theta_1 - P \cos k(\Theta_1 - \Theta_2) + J_2. \quad (\text{A.9})$$

Se definirmos ainda  $H_0$  como a parte integrável e  $H_1$  como a perturbação não integrável, (A.9) pode ser escrita como:

$$H(J_1, \Theta_1, J_2, \Theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(\Theta_1, \Theta_2), \quad (\text{A.10})$$

onde;

$$H_0(J_1, J_2) = \frac{1}{2}J_1^2 + J_2 \quad (\text{A.11})$$

$$\epsilon H_1(\Theta_1, \Theta_2) = -M \cos \Theta_1 - P \cos k(\Theta_1 - \Theta_2) \quad (\text{A.12})$$

Como vimos no capítulo III, o número de rotação para o sistema descrito por (A.10) é dado por:

$$\eta = \frac{\dot{\Theta}_1}{\dot{\Theta}_2} = \frac{\partial H / \partial J_1}{\partial H / \partial J_2}, \quad (\text{A.13})$$

ou seja,

$$\eta = J_1 = J. \quad (\text{A.14})$$

---

\* Utilizamos agora a notação  $\mathcal{H}$  ao invés de  $H$ , como foi feito na seção 3.3, por ser mais conveniente ao que agora iremos utilizar

**APÊNDICE B**  
**CASO  $M = 0$  PARA  $H_p$  .**

Vamos obter um importante parâmetro na discussão da estocasticidade Hamiltoniana exibida pelo sistema paradigma: a semi-largura de uma ilha no plano  $(J \times \Theta)$  para o caso  $M = 0$ . A obtenção deste parâmetro será feita mediante o uso de uma transformação canônica efetuada sobre (III.16):

$$H(J, \Theta, t) = \frac{1}{2}J^2 - P \cos k(\Theta - t). \quad (B.1)$$

Inicialmente iremos determinar os pontos fixos de (B.1) e em seguida passaremos propriamente à determinação da semi-largura da ilha.

**B.1) Determinação dos pontos fixos.**

Vamos efetuar uma transformação canônica  $(J, \Theta, t) \rightarrow (\hat{J}, \hat{\Theta}, t)$ , gerada por uma função geratriz de segunda espécie, sobre (B.1):

$$F(\Theta, \hat{J}, t) = (\hat{J} + 1)(\Theta - t) \quad (B.2)$$

sendo que as equações de transformação se escrevem como,

$$J = \frac{\partial F}{\partial \Theta} = (\hat{J} + 1), \quad (B.3.a)$$

$$\hat{\Theta} = \frac{\partial F}{\partial \hat{J}} = (\Theta - t), \quad (B.3.b)$$

$$\hat{H}(\hat{J}, \hat{\Theta}, t) = H(\hat{J}, \hat{\Theta}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (B.3.c)$$

as quais, aplicadas a (B.1), fornecem a Hamiltoniana:

$$\hat{H}(\hat{J}, \hat{\Theta}, t) = \frac{1}{2}\hat{J}^2 - P \cos k\hat{\Theta}. \quad (B.4)$$

Podemos calcular os pontos fixos desta Hamiltoniana mediante a definição (III.14):

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\Theta}} \Big|_{(\hat{J}^*, \hat{\Theta}^*)} = -kP \sin k\hat{\Theta}^* = 0,$$

$$\frac{d\hat{\Theta}}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{J}} \Big|_{(\hat{J}^*, \hat{\Theta}^*)} = \hat{J}^* = 0,$$

ou seja,  $\hat{\Theta}^* = n\pi/k$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) e  $\hat{J}^* = 0$ .

Retornando estes valores para as variáveis originais, mediante o uso das equações (B.3.a) e (B.3.b), nós obtemos:

$$J^* = 1, \quad (B.5)$$

$$\Theta^* = \frac{n\pi}{k} + t. \quad (B.6)$$

Como estamos considerando o plano  $t = 0$ , os pontos fixos se resumem portanto a:

$$J^* = 1, \quad (B.7)$$

$$\Theta^* = \frac{n\pi}{k}, \quad (B.8)$$

que são os pontos fixos da Hamiltoniana (B.1).

## B.II) Obtenção da semi-largura.

Podemos linearizar (B.4) em torno de seus pontos fixos fazendo  $\hat{J} = \hat{J}^* + \Delta\hat{J}$ . Com tal procedimento obtemos, após alguma álgebra:

$$\hat{H}(\hat{J}^* + \Delta\hat{J}, \hat{\Theta}) = H_0(\hat{J}^*) + \Delta\hat{H}(\Delta\hat{J}, \hat{\Theta}) \quad (B.9)$$

Onde  $\Delta\hat{H}(\Delta\hat{J}, \hat{\Theta})$  representa a Hamiltoniana para a vizinhança do ponto fixo  $\hat{J} = \hat{J}^*$  e nós a definimos como:

$$\Delta\hat{H}(\Delta\hat{J}, \hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\Delta\hat{J}^2 - P \cos k\hat{\Theta}. \quad (B.10)$$

Vemos então que nas vizinhanças do ponto fixo, a dinâmica retratada é a de um pêndulo (Fig.B.1).

A semi-largura da ilha ( $\Delta\hat{J}_P$ ), corresponde à máxima excursão da separatriz na ilha e uma vez que (B.10) é uma Hamiltoniana autônoma a semi-largura pode ser determinada pela condição :

$$\Delta\hat{H}(\Delta\hat{J} = 0, k\hat{\Theta} = \pi) = \Delta\hat{H}(\Delta\hat{J}_P, k\hat{\Theta} = 0),$$

ou seja,  $\Delta\hat{J}_P = 2\sqrt{P}$ .

Se retornarmos ao conjunto original de coordenadas  $(J, \Theta)$ , as quais são dadas por (B.3.a) e (B.3.b), nós concluímos que (B.1) representa ainda uma ilha, mas agora deslocada de uma unidade em relação a origem (Fig.3.6) e possuindo uma semi-largura:

$$\Delta J_P = 2\sqrt{P}. \quad (B.11)$$

Fig. B.1 - Estrutura do pêndulo.

## Referências

- A.J. Lichtenberg, *Stochasticity as the Mechanism for the Disruptive Phase of the  $m = 1$  Tokamak Oscillators*, Nucl. Fus. **24**, (1984), 1277.
- Bernardin, M.P.; Tataronis, J.A. (1985), *Hamiltonian Approach to the Existence of Magnetic Surfaces*, J. Math. Phys, **26** (9), 2370.
- Berry, M.V.,(1978), *Regular and Irregular Motion*, AIP Conference Proceedings, **46**, 16-120, 1978.
- Chirikov, B.V., (1979), *A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems*, Phys. Rep. **52**, 265.
- Engelhardt, W. ; Feneberg, W. (1978), *Influence of an Ergodic Magnetic Limiter on the Impurity Content in a Tokamak*, J. Nucl. Mat. **76,77**,518.
- Escande, D.F., (1982) *Large-scale Stochasticity in Hamiltonian Systems*, Phys. Scripta, T2/1, 126.
- Escande, D.F.; Doveil, F., (1981), *Renormalization Method for The Onset of Stochasticity in Hamiltonian Systems*, Phys. Lett. A, **83**, 307.
- Escande, D.F., (1985) *Stochasticity in Classical Hamiltonian Systems: Universal Aspects*, Phys. Reports,**121**, 165.
- Feneberg, W. ; Wolf, G.H. (1981), *A Helical Magnetic Limiter for Boundary Layer Control in Large Tokamaks*, Nucl. Fusion **27**,669.
- Furth, H.P. (1975), *Tokamak Research*, Nucl. Fus. **15**,487.
- Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics*, 2nd. ed. (Addison Wesley).
- Jackson, D.J., (1989), *Eletrodinâmica Clássica*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Karger, F. ; Lackner, K. (1977),*Resonant Helical Divertor*, Phys. Lett. A **61**,385.

- Kerst, D. W. (1962), *The Influence of Errors on Plasma-confining Magnetic Fields*, J. Nucl. Energy c4, 253.
- Krlín, L. (1989), *The Intrinsic Stochasticity of Near-Integrable Hamiltonian Systems*, Fortschr. Phys. **37**, 735-760.
- Lichtenberg, A.J.; Lieberman, M.A. (1983), *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, N.Y.
- Martin, T.J.; Taylor, J.B. (1984), *Ergodic Behaviour in a Magnetic Limiter*, Plas. Phys. Control. Fus. **26**, 321.
- Morozov, A.I.; Solovév, L.S. (1996), 1, in 'Reviews of Plasma Physics', vol.2 (Ed. Leontovich).
- Pettini, M.; Ciamponi, G.T. (1988), *Stochastic Magnetic Field Generation in MHD Resistive Instabilities: Validity Limits of Linear Stability Analysis*, J. Plas. Phys. **49**, 419-440.
- Pereira, M.J. (1994), *Formação de Ilhas Magnéticas em Tokamaks com Anéis de Corrente*, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná (não publicada).
- Reichl, L.E.; Zheng, W.M. (1987), *Nonlinear Resonance and Chaos in Conservative Systems*, in 'Directions in Chaos', Vol.1 (Ed. Hao Bai-Lin ). World Scientific, Singapore.
- Viana, R.L; Caldas, I.L. (1992), *Peripheral Stochasticity in Tokamaks- The Martin Taylor Model Revisited*, Zeitschrift für Naturforschung **47**, 941.
- Viana, R.L. ; Caldas, I.L. (1991), *Comments on the Magnetic Field Generated by an Infinite Current Grid*; Eur. J. Phys. **12**,293.
- Viana, R.L. (1991) *Problemas Não-Lineares com Perturbação Impulsiva e Aplicações em Física de Plasmas*, Tese de Doutorado, Instituto de Física da USP.
- Wesson, J. (1987), *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford.
- Whiteman, K.J. (1977), *Invariants and Stability in Classical Mechanics*, Rep. Prog. Phys, 1033.